



**HAL**  
open science

# Étude théorique et expérimentale d'architectures innovantes de robots inspirées du cou des oiseaux : conception et commande

Benjamin Fasquelle

## ► To cite this version:

Benjamin Fasquelle. Étude théorique et expérimentale d'architectures innovantes de robots inspirées du cou des oiseaux : conception et commande. Automatique / Robotique. École centrale de Nantes, 2021. Français. NNT : 2021ECDN0051 . tel-03670418

**HAL Id: tel-03670418**

**<https://theses.hal.science/tel-03670418v1>**

Submitted on 17 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : *Robotique - Mécanique*

Par

**Benjamin FASQUELLE**

**Étude théorique et expérimentale d'architectures innovantes de robots inspirées du cou des oiseaux : conception et commande**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 10 décembre 2021

Unité de recherche : UMR 6004, Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes (LS2N)

## **Rapporteurs avant soutenance :**

Philippe POIGNET    Professeur des universités, Université de Montpellier  
Jean-Pierre MERLET    Directeur de recherche, INRIA, Sophia Antipolis

## **Composition du Jury :**

Président :	Anick ABOURACHID	Professeure, Museum National d'Histoire Naturelle, Paris
Examineurs :	Christian DURIEZ	Directeur de recherche, INRIA, Villeneuve d'Ascq
	Matthieu FURET	Docteur - enseignant, IUT de Toulouse
	Med Amine LARIBI	Maître de conférences HDR, Université de Poitiers
Dir. de thèse :	Philippe WENGER	Directeur de recherche - CNRS, Ecole Centrale de Nantes
Co-dir. de thèse :	Christine CHEVALLEREAU	Directrice de recherche - CNRS, Ecole Centrale de Nantes



# REMERCIEMENTS

---

J'adresse tout d'abord mes remerciements à Philippe Wenger et Christine Chevallereau qui m'ont encadré pendant ces trois ans. J'ai beaucoup appris grâce à eux et j'ai vraiment apprécié travailler à leurs côtés. Je remercie également Damien Chablat, Philippe Lemoine, Denis Creusot et les autres membres du LS2N qui nous ont aidé dans la conception du prototype.

Je tiens à remercier Anick Abourachid et les autres biologistes du MNHN qui ont participé au projet AVINECK. Nos échanges ont toujours été très intéressants et m'ont beaucoup inspiré durant ces trois années.

Je remercie Matthieu Furet qui est sans aucun doute la personne avec laquelle j'ai le plus échangé sur ce projet. C'était une réelle chance de travailler avec toi pendant deux ans sur ce projet.

J'adresse également ma reconnaissance à Parag Khanna qui m'a beaucoup aidé pour faire les expérimentations sur le prototype, notamment pendant les périodes de confinement.

Je tiens à remercier les doctorants de Nantes et de Rennes aux côtés desquels j'ai progressé dans cette aventure qu'est la thèse. Nos partages d'expérience m'ont permis d'avancer sereinement dans ce travail.

Un immense merci à mes amis et à ma famille. Votre soutien infaillible m'a poussé à donner mon maximum pour cette thèse. Merci de tout cœur à Pycksou, Bulle et Briska qui ont toujours su me rappeler de prendre du temps pour être avec eux et ainsi prendre soin de moi.

Je remercie enfin ma femme, sans qui je ne serai jamais arrivé jusque là. Merci de m'avoir accompagné tout au long de cette thèse et de m'avoir toujours soutenu et motivé. J'ai passé trois sublimes années grâce à toi.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>17</b>
1.1	Contexte . . . . .	17
1.2	État de l'art . . . . .	18
1.2.1	Les mécanismes de tensegrité . . . . .	18
1.2.2	La bio-inspiration en robotique . . . . .	22
1.2.3	Robots à câbles . . . . .	25
1.2.4	Commande des robots . . . . .	26
1.3	Projet de la thèse . . . . .	32
1.3.1	Travaux précédents . . . . .	32
1.3.2	Objectifs . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Modélisation</b>	<b>37</b>
2.1	Présentation du manipulateur . . . . .	37
2.1.1	Un module . . . . .	38
2.1.2	Empilement de modules . . . . .	39
2.1.3	Actionnement du manipulateur . . . . .	40
2.2	Modèle géométrique . . . . .	42
2.2.1	Géométrie d'un module . . . . .	42
2.2.2	Espace articulaire, espace opérationnel et espace des moteurs . . . . .	43
2.2.3	Espace articulaire vers espace opérationnel . . . . .	44
2.2.4	Espace articulaire vers espace des moteurs . . . . .	45
2.2.5	De l'espace des moteurs vers l'espace articulaire . . . . .	49
2.3	Modèle dynamique . . . . .	51
2.3.1	Équations de Lagrange . . . . .	51
2.3.2	Forces généralisées . . . . .	52
2.3.3	Énergie cinétique . . . . .	53
2.3.4	Énergie potentielle . . . . .	56
2.3.5	Matrice de raideur . . . . .	57
2.3.6	Modélisation des frottements . . . . .	59

TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.7	Modélisation des câbles élastiques . . . . .	60
2.3.8	Extension pour des modules de tailles différentes . . . . .	62
2.4	Conclusion . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Analyse d'un manipulateur entièrement actionné</b>	<b>65</b>
3.1	Étude de l'impact des poulies sur le modèle dynamique . . . . .	65
3.2	Actionnements et répartition des forces . . . . .	67
3.2.1	Actionnement avec $2N$ moteurs . . . . .	68
3.2.2	Actionnement avec $N + 1$ moteurs . . . . .	72
3.3	Espace de travail statique du manipulateur . . . . .	75
3.3.1	Détection des collisions . . . . .	76
3.3.2	Exploration de l'espace articulaire . . . . .	78
3.4	Analyse de l'espace de travail statique . . . . .	80
3.4.1	Influence des ressorts et de la gravité . . . . .	81
3.4.2	Choix des ressorts avec le modèle statique . . . . .	81
3.4.3	Comparaison des actionnements complets . . . . .	84
3.5	Conclusion . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Identification des paramètres d'un prototype à 3 modules et 4 moteurs</b>	<b>87</b>
4.1	Description du prototype . . . . .	87
4.2	Évaluation de $\alpha$ . . . . .	90
4.2.1	Évaluation de $\alpha$ depuis $\theta$ : $\hat{\alpha}$ . . . . .	90
4.2.2	Mesure de $\alpha$ par traitement d'image : $\alpha_{IP}$ . . . . .	92
4.3	Les problèmes amenant à l'identification . . . . .	93
4.4	Modèle d'identification . . . . .	95
4.4.1	Modèle complet d'identification . . . . .	95
4.4.2	Méthode d'identification . . . . .	95
4.4.3	Filtrage . . . . .	96
4.5	Identification . . . . .	97
4.5.1	Trajectoire réalisée pour l'identification . . . . .	97
4.5.2	Identification des frottements secs et frottements visqueux . . . . .	97
4.5.3	Identification de l'élasticité des câbles . . . . .	99
4.5.4	Identification d'un modèle de câble non linéaire . . . . .	101
4.6	Utilisation des paramètres identifiés . . . . .	105
4.6.1	Reconstruction de $\hat{\alpha}$ basée sur les modèles élastiques de câbles . . . . .	105

4.6.2	Reproduction en simulation . . . . .	106
4.7	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Commande en actionnement complet</b>	<b>111</b>
5.1	Commande articulaire . . . . .	112
5.2	Commande dans l'espace des moteurs . . . . .	118
5.3	Commande opérationnelle . . . . .	121
5.4	Conclusion . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Génération de mouvements</b>	<b>131</b>
6.1	Minimisation des forces . . . . .	131
6.1.1	Trajectoire optimale avec le modèle statique . . . . .	133
6.1.2	Trajectoire optimale avec le modèle dynamique . . . . .	139
6.2	Mouvements explosifs . . . . .	144
6.3	Conclusion . . . . .	147
<b>7</b>	<b>Ouverture : Manipulateur sous-actionné</b>	<b>149</b>
7.1	Exploration de l'espace des forces pour les cas de sous-actionnement . . . . .	150
7.2	Analyse de l'impact du nombre de modules . . . . .	153
7.2.1	Comparaison du nombre de modules . . . . .	153
7.2.2	Espace de travail avec des obstacles . . . . .	158
7.2.3	Forme en S à l'équilibre au repos . . . . .	162
7.3	Capture d'un mouvement de cou sur une vidéo . . . . .	164
7.3.1	Extraction du cou dans la vidéo . . . . .	164
7.3.2	Positionnement des modules . . . . .	168
7.3.3	Conception du manipulateur pour la capture du mouvement . . . . .	169
7.4	Commande sous-actionnée dans l'espace des moteurs . . . . .	170
7.5	Conclusion . . . . .	173
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>177</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>183</b>
	<b>Liste des publications</b>	<b>193</b>
<b>A</b>	<b>Dérivées des coordonnées cartésiennes</b>	<b>195</b>

<b>B</b>	<b>Longueurs des câbles en prenant en compte les poulies</b>	<b>200</b>
B.1	Longueurs des câbles . . . . .	200
B.2	Dérivées premières des longueurs de câbles . . . . .	206
B.3	Dérivées secondes des longueurs des câbles . . . . .	207
<b>C</b>	<b>Calculs pour le modèle dynamique</b>	<b>209</b>
C.1	Dérivées de $\phi$ et $\psi$ . . . . .	209
C.2	Matrices $\mathbf{R}_i$ . . . . .	209
C.3	Énergie cinétique en fonction du paramétrage local . . . . .	210
C.4	Matrice de raideur . . . . .	214
C.5	Calcul des forces de Coriolis . . . . .	214
C.6	Ajout d'une tête dans le modèle dynamique . . . . .	221
C.6.1	Matrice d'inertie de la tête . . . . .	221
C.6.2	Énergie potentielle de la tête . . . . .	222
C.6.3	Forces de Coriolis de la tête . . . . .	222

# TABLE DES FIGURES

---

1.1	"Free Ride Home", une structure de tensegrité artistique de Kenneth Snelson, 1974 [SD09] . . . . .	19
1.2	Une configuration de tensegrité (à gauche) et un système de tensegrité (à droite) [SD09] . . . . .	20
1.3	Reconfiguration d'un système de tensegrité pour naviguer entre des obstacles [AS06] . . . . .	21
1.4	Le bras humain vu comme un système de tensegrité, dans [SD09] . . . . .	21
1.5	Le robot inspiré des tentacules de pieuvres présenté dans [McM+06]. Celui-ci peut agripper efficacement les balles en s'enroulant autour. . . . .	23
1.6	Le robot serpent présenté dans [Raf+18] . . . . .	24
1.7	Le robot Poppy présenté dans [LRO13] . . . . .	24
1.8	Le robot poisson présenté dans [Shi+20] . . . . .	25
1.9	Le robot inspiré de la trompe de l'éléphant présenté dans [HW00]. . . . .	26
1.10	Le robot parallèle à câble ACROBOT, situé à l'IRT Jules Vernes de Nantes [Zak+19]. . . . .	27
1.11	Asservissement visuel avec la caméra montée sur le robot (a) et la caméra qui observe le robot (b), dans [CHC16]. . . . .	30
1.12	Description du module choisi, dans [Let17] . . . . .	33
1.13	Empilement de module en équilibre en forme de $S$ , dans [Let17] . . . . .	34
2.1	Le mécanisme de tensegrité en $X$ utilisé. . . . .	38
2.2	Empilement des modules. . . . .	40
2.3	A gauche : passage du câble par le côté afin de pouvoir contrôler l'orientation du module. A droite : passage du câble en strut-routed le long d'une barre diagonale afin de passer le câble sur les modules du dessus en minimisant l'impact sur ce module-ci. . . . .	41
2.4	Les principales grandeurs propres au module $i$ . . . . .	43
2.5	Les différents passages de câbles étudiés sans considération des poulies. . . . .	47
2.6	Les différents passages de câbles étudiés. . . . .	48

TABLE DES FIGURES

---

2.7	Valeurs prises par les éléments de la matrice $\mathbf{Z}(\alpha)$ en fonction du câblage (à gauche avec poulies et à droite sans poulies). . . . .	53
2.8	Fonction arc-tangente utilisée pour modéliser les frottements. . . . .	60
3.1	Longueur variable des câbles en fonction de $\alpha$ pour les cinq passages de câble. . . . .	66
3.2	Câblage sur $N = 3$ modules d'un actionnement complet avec $N_f = 6$ moteurs. . . . .	69
3.3	Câblage sur $N = 3$ modules d'un actionnement complet avec $N_f = 4$ moteurs. . . . .	73
3.4	Les polygones utilisés pour la détection des collisions. . . . .	77
3.5	Espace de travail statique pour l'actionnement à $N_f = 2N$ moteurs. . . . .	80
3.6	Flexions principales du cou de l'oiseau représentées sur le manipulateur. . . . .	80
3.7	Espace de travail pour l'actionnement à $N_f = 2N$ moteurs (à gauche) et l'actionnement à $N_f = N + 1$ moteurs (à droite). La couleur verte indique qu'il existe une solution telle que la somme des forces utilisées pour obtenir cette position est inférieure à $50N$ , la couleur bleue que cette somme est inférieure à $100N$ , et la couleur rouge que cette somme est supérieure à $100N$ . . . . .	85
4.1	A gauche : photo du prototype. A droite : les rangées de poulies utilisées pour passer les câbles. . . . .	88
4.2	Boucle de commande du prototype. . . . .	90
4.3	Câblage du prototype à $N = 3$ modules et $N_f = 4$ moteurs. . . . .	91
4.4	Les marqueurs colorés utilisés pour calculer $\alpha_{IP}$ à partir de la vidéo. . . . .	93
4.5	Forces appliquées sur un module en expérience (courbes bleues et rouges), en comparaison des forces estimées par le modèle dynamique (courbes jaunes et violettes). . . . .	94
4.6	A gauche : forces appliquées en boucle ouverte sur le module, les deux forces sont identiques ce qui implique que le module ne bouge pas. A droite : estimations $\hat{\alpha}$ obtenues à partir des moteurs à gauche et à droite. . . . .	94
4.7	Configurations extrêmes obtenues pendant la trajectoire d'identification. . . . .	98
4.8	Reconstruction de $\mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}$ avec le modèle dynamique, en incluant les frottements ou non, et les données expérimentales. Les couples reconstruits avec le modèle de frottement sont clairement plus proches des données expérimentales. Les frottements visqueux ne modifient pas beaucoup la courbe en comparaison avec la prise en compte des frottements secs seulement, les courbes noires et vertes étant presque superposées. . . . .	100
4.9	Tension dans les câbles, calculée par les forces et par les modèles élastiques. . . . .	103

4.10	Erreur de reconstruction de la tension dans les câbles, en fonction de la tension calculée par les forces appliquées. . . . .	103
4.11	Reconstruction des tensions des câbles à partir des forces et des raideurs des câbles (raideur variable). . . . .	105
4.12	À gauche : reconstruction de $\alpha$ en utilisant l'équation (4.1). À droite : reconstruction de $\alpha$ en utilisant l'équation (4.3). Les courbes vertes (respectivement bleues et rouges) correspondent au modèle de câble élastique (respectivement aux modèles de câble à raideur constante et à raideur variable). Les courbes noires montrent $\alpha_{IP}$ mesuré par traitement d'image. . . . .	107
4.13	Comparaison des forces appliquées en expérience et en simulation. . . . .	108
5.1	Boucle simplifiée de la commande du prototype. Le bloc de commande est détaillé plus loin en fonction de la commande employée. . . . .	111
5.2	Boucle de commande articulaire. . . . .	112
5.3	Les principales configurations de la trajectoire des tests de commande à 0sec, 4sec, 7sec et 10sec, de gauche à droite. . . . .	114
5.4	Orientations des modules pendant le test de la première commande (frottements et élasticité des câbles négligés). . . . .	114
5.5	Orientations des modules durant le test de la seconde commande (les frottements sont pris en compte mais les câbles sont supposés rigides). . . . .	115
5.6	Orientations des modules durant le test de la troisième commande (avec les frottements et le modèle élastique des câbles). . . . .	116
5.7	Forces appliquées pendant les tests des commandes 1, 2 et 3 (de gauche à droite). . . . .	116
5.8	Erreur $e_\alpha$ entre $\hat{\alpha}$ (calculé avec la pseudo-inverse) et $\alpha_{IP}$ (obtenu par la vidéo) durant les tests des commandes 1, 2 et 3 (de gauche à droite). . . . .	117
5.9	Erreur $e$ entre $\hat{\alpha}$ (calculé avec la pseudo-inverse) et la trajectoire désirée $\alpha^d$ durant les tests des commandes 1, 2 and 3 (de gauche à droite). . . . .	117
5.10	Boucle de commande dans l'espace des moteurs pour un manipulateur entièrement actionné. . . . .	119
5.11	Forces appliquées avec la commande articulaire (à gauche) et la commande des moteurs (à droite) pour une même trajectoire articulaire. . . . .	122
5.12	Boucle de commande dans l'espace opérationnel. . . . .	122

5.13	A gauche : zones (en rouge) où le conditionnement de $\mathbf{J}$ est supérieur à 100, et trajectoire opérationnelle suivie pour tester la commande. A droite : espace de travail du manipulateur avec les ressorts asymétriques et sa configuration d'équilibre au repos. . . . .	124
5.14	Résultats commande articulaire pour suivre $xy$ . . . . .	125
5.15	Résultats commande articulaire pour suivre $xy\gamma$ . . . . .	126
5.16	Résultats commande $xy$ . L'erreur moyenne sur la position est de $3.0mm$ . . . . .	127
5.17	Résultats commande $xy\gamma$ . L'erreur moyenne sur la position est de $2.5mm$ et l'erreur moyenne sur $\gamma$ est de $1.07deg$ . . . . .	129
6.1	Positions du manipulateur dans l'espace de travail pour les configurations $\alpha_s$ et $\alpha_e$ . $(x_s, y_s)$ est la position correspond à $\alpha_s$ et $(x_e, y_e)$ est la position correspond à $\alpha_e$ . . . . .	133
6.2	Chemin direct et les forces associées (respectivement à gauche et à droite). . . . .	135
6.3	Chemin optimal obtenue avec un pas d'échantillonnage de $10deg$ et l'heuristique $h(\alpha)$ . À gauche, les configurations du chemin trouvé et à droite, les forces correspondantes. . . . .	136
6.4	Trajectoire optimisée obtenue avec un pas d'échantillonnage de $3deg$ et l'heuristique $2h(\alpha)$ . À gauche, les configurations du chemin trouvé et à droite, les forces correspondantes. . . . .	136
6.5	Les deux étapes d'élaboration de la trajectoire à partir du chemin statique discrétisé. À gauche, le chemin statique discrétisé. À droite, la trajectoire finale (courbes de Bézier). . . . .	137
6.6	Trajectoire complète (en position, vitesse et accélération), et les forces déduites depuis le modèle statique. . . . .	138
6.7	Chemins cartésiens des trajectoires obtenues avec les différentes optimisations. . . . .	140
6.8	Forces employées pour effectuer les trajectoires optimisées. Les trajectoires directes sont sur la première ligne, les trajectoires optimisées avec le modèle statique sont sur la seconde ligne et les trajectoires optimisées avec le modèle dynamique sont sur la troisième ligne. A titre de comparaison, les forces obtenues en simulation pour jouer les trajectoires optimisées avec le modèle dynamique sont affichées sur la quatrième et dernière ligne. La première colonne montre les trajectoires en 6 secondes et la seconde colonne celles en 30 secondes. . . . .	142

6.9	Position du manipulateur dans l'espace de travail pour les configurations $\alpha_s$ et $\alpha_e$ pour la seconde trajectoire à optimiser. $(x_s, y_s)$ est la position correspond à $\alpha_s$ et $(x_e, y_e)$ est la position correspond à $\alpha_e$ . Les deux points se situent dans la zone verte. . . . .	143
6.10	Configurations articulaires du mouvement explosif obtenues par optimisation. . . . .	145
6.11	Configurations articulaires du mouvement explosif à l'instant où le cou est le plus reculé et à l'instant où la vitesse maximale du bec selon l'axe $x$ est atteinte. . . . .	145
6.12	Forces appliquées en simulation pour jouer la trajectoire explosive et vitesse du bec selon l'axe $x$ . . . . .	146
6.13	Suivi de la trajectoire explosive avec le prototype. . . . .	146
6.14	Forces appliquées sur le prototype pour jouer la trajectoire explosive et vitesse du bec selon l'axe $x$ . . . . .	147
7.1	Les fonctions $f_{si}$ entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ pour un jeu de force $f$ choisi aléatoirement (chaque force étant comprise entre $f_{min}$ et $f_{max}$ . Les dimensions des dix modules sont $b = 5cm$ , $L = 10cm$ et tous les ressorts ont une raideur de $3000N.m^{-1}$ . . . . .	152
7.2	Espace de travail d'un manipulateur constitué de $N = 9$ modules et actionné par $N_f = 4$ câbles. . . . .	153
7.3	Configurations droites et penchées des manipulateurs (première version) avec 3, 6 et 9 modules. . . . .	155
7.4	Configurations droites et penchées des manipulateurs (seconde version) avec 3, 6 et 9 modules. . . . .	156
7.5	Raideurs des ressorts des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (première version en bleu et seconde en rouge). . . . .	156
7.6	Espaces de travail des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (première version). . . . .	157
7.7	Espaces de travail des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (seconde version). . . . .	157
7.8	Appui d'un manipulateur sur un obstacle. . . . .	160
7.9	Espace de travail statique avec appui sur obstacle (manipulateurs avec le même rapport $\frac{L}{b}$ ). . . . .	161
7.10	Espace de travail statique avec appui sur obstacle (manipulateurs avec la même largeur de module). . . . .	161
7.11	Configuration d'équilibre au repos et raideurs des ressorts du manipulateur constitué de $N = 9$ modules avec une configuration au repos en forme de S. . . . .	163

TABLE DES FIGURES

---

7.12	Espaces de travail statiques des manipulateurs constitués de $N = 9$ modules avec une configuration d'équilibre droite (à gauche) et en forme de S (à droite).	163
7.13	Première image de la vidéo : le cou de l'oiseau dans la configuration supposée de repos. . . . .	165
7.14	Suppression de l'arrière plan. . . . .	166
7.15	Suppression de la tête. . . . .	166
7.16	La dérivée de l'image (à gauche) et le résultat après la suppression du corps de l'oiseau (à droite). . . . .	167
7.17	Résultat final de l'extraction du cou. Les pixels blancs correspondent au cou de l'oiseau, et les pixels rouges correspondent à la ligne au milieu du cou. . . . .	167
7.18	Modules placés sur la ligne médiane du cou. A gauche : la première méthode où le milieu des barres supérieures est sur la ligne médiane du cou. A droite : la deuxième méthode où l'on prend en compte l'angle de la barre supérieure par rapport à la tangente de la ligne médiane du cou, avec un coefficient $\lambda = 50$ . . .	169
7.19	Manipulateur dans sa configuration à l'équilibre au repos et les raideurs des ressorts. . . . .	170
7.20	Boucle de commande dans l'espace des moteurs pour un manipulateur sous-actionné. . . . .	171
7.21	Résultats de la simulation de commande des moteurs sous-actionnée. . . . .	174
7.22	Trajectoire articulaire de la simulation de commande des moteurs sous-actionnée.	175
7.23	Position et orientation de la barre du haut du manipulateur en simulation avec la commande des moteurs sous-actionnée. . . . .	175
B.1	Actionnement d'un module (premier cas) : longueurs et angles utiles au calcul.	201
B.2	Actionnement d'un module (troisième cas) : longueurs et angles utiles au calcul.	203
B.3	Actionnement d'un module (quatrième cas) : longueurs et angles utiles au calcul.	205

# LISTE DES TABLEAUX

---

3.1	Moyennes des différences des coefficients de $Z$ avec et sans poulies. . . . .	67
4.1	Caractéristiques des moto-réducteurs. . . . .	89
4.2	Paramètres de frottements identifiés. Les paramètres de frottements visqueux sont mal identifiés, comme l'indique l'écart-type relatif. . . . .	99
4.3	Paramètres de frottements secs et d'élasticité des câbles identifiés. . . . .	102
4.4	Paramètres identifiés avec le nouveau modèle de câble (avec la raideur qui varie en fonction de la tension). . . . .	104
5.1	Erreurs moyennes en simulation en fonction des commandes des moteurs. . . .	120
5.2	Erreurs moyennes en expérience pour les commandes articulaires et des moteurs.	121
6.1	Forces moyennes appliquées en simulation. . . . .	141
6.2	Forces moyennes appliquées en expérience. . . . .	141
6.3	Forces moyennes appliquées en expérience pour les trajectoires reliant deux configurations dans la zone verte. . . . .	143
7.1	Dimensions des barres pour les différents manipulateurs considérés. . . . .	154



# INTRODUCTION

---

## 1.1 Contexte

La bio-inspiration est une piste intéressante pour répondre aux défis récents en robotique. En effet, les performances des robots sont limitées par rapport aux organismes vivants, notamment en raison de leurs structures mécaniques. S’inspirer de ces organismes vivants peut donc permettre d’améliorer les performances des robots, et c’est dans ce but que le projet AVI-NECK a débuté en janvier 2017. Ce projet a été financé par l’Agence Nationale de la Recherche (ANR-16-CE33-0025). L’idée majeure de ce projet est de mieux comprendre le comportement fonctionnel du cou des oiseaux et de s’en inspirer pour créer un bras robotique innovant. Pour cela, deux groupes de recherche de domaines bien différents ont travaillé ensemble. Le premier est un groupe de roboticiens de l’équipe Robotique et Vivant, du Laboratoire des Sciences Numériques de Nantes (LS2N). Le second est un groupe de biologistes du Muséum National d’Histoire Naturelle (MNHN) spécialisé dans l’ornithologie.

L’inspiration du cou de l’oiseau pour un bras robotique peut paraître surprenant au premier abord. Cependant le cou de l’oiseau joue le rôle du bras chez l’humain. En effet, tout comme l’humain, l’oiseau est bipède mais ses membres supérieurs sont ses ailes. Il ne peut donc pas s’en servir pour manipuler des objets comme nous le faisons avec nos bras et nos mains. L’oiseau se sert donc de son bec pour manipuler des objets (par exemple lors de la fabrication d’un nid), mais également pour se nourrir, se nettoyer ou encore pour creuser dans des troncs d’arbres pour certaines espèces telles que le pic. Le bec est donc l’équivalent fonctionnel de notre main, et le cou de l’oiseau peut donc être vu comme un équivalent du bras humain. Il devient alors une source d’inspiration intéressante pour la conception de bras robotique, avec ses propriétés fonctionnelles. Il permet par exemple à l’oiseau de tourner sa tête à plus de 270 degrés [Kri+17], ou de creuser des troncs d’arbres en projetant le bec avec une grande force et une grande vitesse [YP11].

La structure du cou a donc inspiré la structure du manipulateur étudié. Comme le cou de l’oiseau est constitué de multiples vertèbres, le manipulateur est formé par un empilement de

modules, équivalents des vertèbres.

Chacun de ces modules est un mécanisme de tensegrité. Ces mécanismes, formés d'éléments solides en compression et d'éléments déformables en tension, sont adaptés à la bio-inspiration. Dans notre cas, les éléments solides peuvent être comparés aux os, tandis que les éléments déformables (qui sont des câbles et des ressorts) peuvent être comparés aux muscles et aux tendons.

Les objectifs de cette thèse sont d'analyser une famille de bras robots manipulateurs créée dans ce projet AVINECK et d'établir et étudier leur commande. Plusieurs commandes ont ainsi été développées et testées sur un premier prototype.

Cette thèse a été encadrée par Philippe Wenger et Christine Chevallereau, de l'équipe Robotique et Vivant du LS2N. Elle a été financée par un Contrat Doctoral Spécifique Normalien (CDSN) délivré par l'École Normale Supérieure de Rennes.

## 1.2 État de l'art

Nous débutons avec un état de l'art sur différents sujets qui seront abordés dans cette thèse. Nous introduisons dans un premier temps les systèmes de tensegrité, puis nous abordons la bio-inspiration en robotique. Nous nous intéressons ensuite aux robots à câbles et à leurs propriétés. Enfin, nous parlerons des commandes existantes en robotique, en particulier pour les robots à câbles et les systèmes de tensegrité.

### 1.2.1 Les mécanismes de tensegrité

Les systèmes de tensegrité sont composés d'éléments en compression et d'éléments en tension, qui sont disposés pour se stabiliser. Les éléments en compression (appelés barres ou entretoises) sont reliés par des éléments en tension (câbles ou ressorts). On peut comparer les systèmes de tensegrité avec les os et les tendons des animaux et des humains, qui permettent un contrôle aisé des mouvements [SD09].

Les premiers systèmes de tensegrité réalisés par la main de l'homme étaient des structures artistiques, dans les années 50. Les structures de tensegrité artistiques les plus célèbres sont celles de Kenneth Snelson [Sne12]. L'une d'entre elles est représentée sur la Figure (1.1).

Les systèmes de tensegrité sont apparues plus récemment dans les domaines de l'ingénierie et des sciences, probablement en raison de la complexité de leur étude, de la nécessité de disposer d'ordinateurs puissants pour les calculs associés et de leur difficulté d'actionnement.

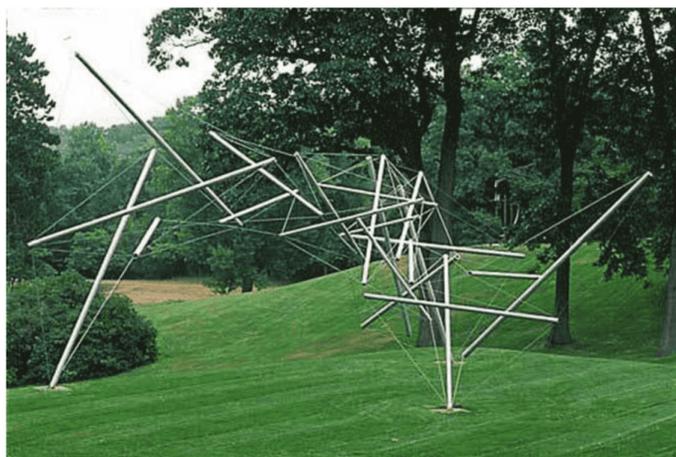


FIGURE 1.1 – "Free Ride Home", une structure de tensegrité artistique de Kenneth Snelson, 1974 [SD09]

Le terme tensegrité a été créé par Buckminster Fuller en 1962 pour décrire une structure réalisée par l'artiste Kenneth Snelson, qui était l'un de ses étudiants. Il s'agit d'une combinaison des mots tension et intégrité. Nous allons donner des définitions plus précises pour l'étude mathématique détaillée dans [SD09]. Nous appelons les parties en compression des corps rigides, et celles en tension des cordes. La configuration d'un ensemble de corps rigides est l'ensemble des positions et orientations de tous les corps rigides. Cette définition de la configuration, donnée dans [SD09], est celle que nous utilisons dans ce chapitre, mais n'est pas générale en robotique. Les cordes peuvent être liées aux corps rigides, ou entre elles. La connectivité est l'ensemble des connexions entre les corps rigides et les cordes, tandis que la connectivité des cordes est l'ensemble des connexions réalisées via les cordes.

Nous devons distinguer les forces dues à la connectivité des cordes, que nous appelons les forces internes, et les forces qui ne proviennent pas des cordes de la structure. Nous disons qu'une configuration donnée de corps rigides est une configuration de tensegrité si et seulement s'il existe une connectivité de cordes capable de stabiliser la configuration donnée en l'absence de forces externes. Nous pouvons voir une configuration de tensegrité sur la Figure (1.2).

Nous pouvons maintenant donner une définition d'un système de tensegrité : tout ensemble donné de cordes connectées à une configuration de tensegrité de corps rigides est un système de tensegrité. La Figure (1.2) montre également un système de tensegrité. Dans cette définition, il n'est pas dit que la connectivité des cordes stabilise le système, donc un système de tensegrité peut être stable ou instable. Nous disons qu'un système de tensegrité (spécifié par une configuration de tensegrité donnée, une connectivité de cordes donnée, et un ensemble donné de forces

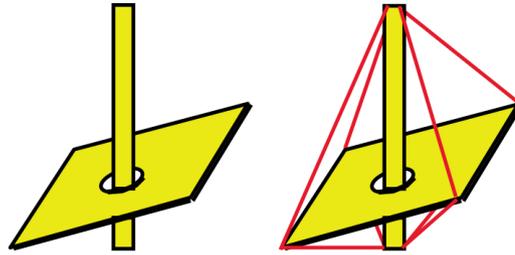


FIGURE 1.2 – Une configuration de tensegrité (à gauche) et un système de tensegrité (à droite) [SD09]

externes) est stable si le système revient à la configuration originale donnée après l'application de perturbations arbitrairement petites n'importe où dans la configuration.

Les systèmes de tensegrité sont divisés en classes, en fonction du nombre de corps rigides en contact [Ske+01]. Un système de tensegrité sans aucun contact entre ses corps rigides est un système de tensegrité de classe 1. Un système de tensegrité de classe  $k$  est un système de tensegrité avec  $k$  corps rigides en contact.

Les systèmes de tensegrité présentent de nombreux avantages par rapport aux systèmes structurels classiques. Le premier est que la flexion du matériau n'est pas présente dans les systèmes de tensegrité, car les liaisons entre les corps rigides et les cordes ne peuvent pas transmettre de couples, donc tous les éléments sont chargés axialement [SD09]. Une deuxième raison est que les systèmes de tensegrité sont malléables et peuvent changer leur forme sous l'action de forces extérieures [AS06] [VCB19], ce que les robots conventionnels ne peuvent pas faire. Par exemple, ils peuvent changer leur forme globale pour passer des obstacles, comme on peut le voir sur la Figure (1.3). De la même manière, ils sont déployables, c'est-à-dire qu'ils sont capables de changer de taille de manière significative [VSS16][TP02]. Un troisième élément est le fait qu'en général, la géométrie du système est indépendante des choix de matériaux et de l'ampleur des charges externes. Il n'y a donc aucune contrainte sur le choix des matériaux, quelle que soit la géométrie souhaitée. Un autre avantage est leur redondance, qui les rend robustes. En cas de défaillance d'un élément, la structure est en mesure d'accomplir ce qu'elle est censée faire. Dans [Pau06], un système de tensegrité à 24 degrés de liberté peut accomplir ses tâches même si une ou deux de ces entrées de contrôle sont éliminées. Là encore, ce n'est pas le cas des robots conventionnels. Enfin, la rigidité du système peut potentiellement être contrôlée, ce qui permet aux systèmes de tensegrité d'emmagasiner de l'énergie à l'aide des ressorts et de l'utiliser ultérieurement [Kom12], ou encore de commander cette raideur pour gérer les obstacles de la manière désirée [Zap+20]. Cependant, l'inconvénient majeur des systèmes de

tenségrité est la complexité de leur analyse.

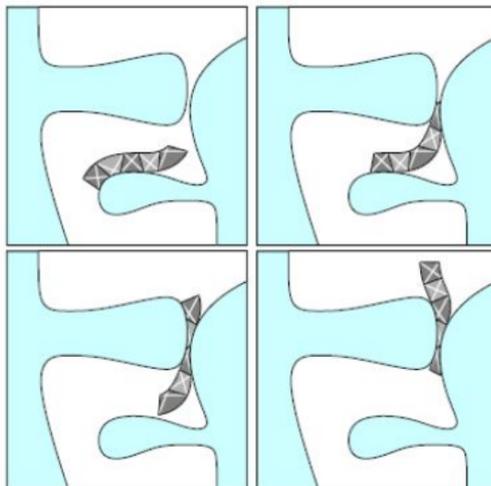


FIGURE 1.3 – Reconfiguration d'un système de tenségrité pour naviguer entre des obstacles [AS06]

La tenségrité est présente dans des systèmes biologiques tels que les cellules et les systèmes musculo-squelettiques [Lev06]. Par exemple, le bras humain comme représenté sur la Figure ( 1.4) est un système de tenségrité où les éléments rigides sont les os et les éléments en tension sont les tendons et les muscles.



FIGURE 1.4 – Le bras humain vu comme un système de tenségrité, dans [SD09]

Les systèmes de tenségrité sont donc bien adaptés pour modéliser des systèmes biologiques présentant une source d'inspiration intéressante pour le roboticien.

## 1.2.2 La bio-inspiration en robotique

L'humain s'inspire depuis longtemps de la nature pour créer, et ce dans divers domaines [LVP13]. Par exemple, dans le domaine de l'aéronautique, l'ingénieur George Cayley s'est inspiré des samares d'érables, ces petites graines entourées de feuilles qui volent en tournant lorsqu'elles tombent, afin d'élaborer les bases de l'hélicoptère [Ack11]. Le phénomène bien connu de la sélection naturelle permet à la nature de répondre à de nombreux problèmes similaires à ceux que l'espèce humaine peut rencontrer de nos jours. Les résultats de cette optimisation naturelle sont donc une source d'inspiration intéressante, puisqu'ils sont les meilleurs éléments que les mutations naturelles ont produit. Si l'on reprend l'exemple des samares d'érables, les feuilles autour des graines leur permettent de se disperser plus loin en volant, ce qui a inspiré un moyen de locomotion pour l'homme.

Nous ne confondons pas la bio-inspiration avec le bio-mimétisme. Alors que ce dernier cherche principalement à copier le plus fidèlement la nature, la bio-inspiration consiste elle à s'inspirer de systèmes ou procédés présents dans la nature qui semblent appropriés pour répondre à un problème donné, et à les adapter à la situation.

La robotique fait partie des domaines qui s'inspirent des systèmes biologiques [LS11]. Nous allons ici présenter quelques exemples de robots bio-inspirés.

### Les robots mous à actionneurs pneumatiques

Les robots mous sont une catégorie de robots construits en matériaux ou structures souples, tels que le plastique, le silicone ou le caoutchouc. Ces robots mous sont déformables, ce qui leur permet de bien s'adapter à leur environnement pour épouser des obstacles ou attraper des objets par exemple. Ils peuvent également présenter un intérêt énergétique en stockant de l'énergie, avec un matériau à mémoire de forme ou contenant un gaz. Ils ont par contre pour inconvénient d'être plus compliqués à modéliser que les robots rigides classiques. Leur actionnement peut se faire avec des actionneurs pneumatiques, des élastomères diélectriques ou des hydrogels en autres.

Les systèmes biologiques présentent souvent des éléments mous, tel que la trompe de l'éléphant ou les tentacules de la pieuvre. Ces composants biologiques sont intéressants car ils sont hautement déformables.

Un robot inspiré des tentacules de pieuvres est présenté dans [McM+06]. Ce robot possède une infinité de degrés de liberté, ce qui le rend hautement déformable. Les moteurs employés sont des actionneurs pneumatiques. Ce robot est capable d'empiler des plots ou d'attraper des balles, comme on peut le voir sur la Figure 1.5. Il peut également opérer sous l'eau, ce qui montre son efficacité à agripper les objets.

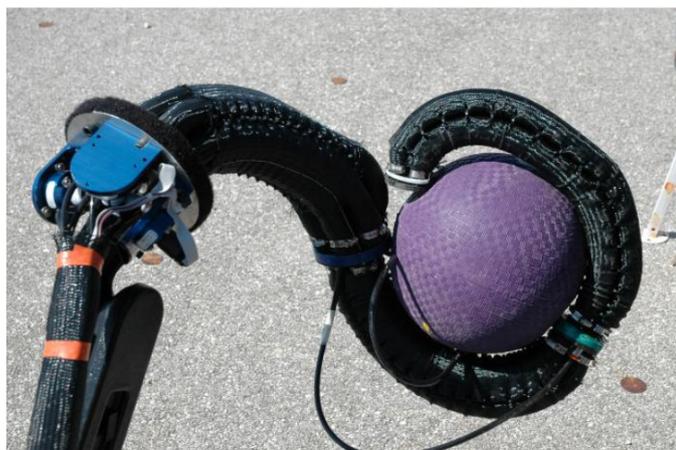


FIGURE 1.5 – Le robot inspiré des tentacules de pieuvres présenté dans [McM+06]. Celui-ci peut agripper efficacement les balles en s’enroulant autour.

Un autre exemple de robot mou bio-inspiré est celui du robot serpent présenté dans [Raf+18]. L’inspiration vient ici plus précisément de la caractéristique anisotrope de frottement de la peau du serpent. Une technique japonaise de coupe de papier, le kirigami, est employé afin de concevoir une peau flexible et possédant des propriétés de frottements anisotropes. Cette peau est enroulée autour d’un actionneur pneumatique afin d’obtenir un robot qui se déplace grâce aux frottements de la peau sur le sol. Le robot est montré en Figure 1.6.

Le manipulateur étudié dans cette thèse est un empilement de mécanismes de tensegrité et n’est donc pas considéré comme un robot mou, bien qu’il possède des ressorts. Un état de l’art plus complet sur les robots mous est effectué dans [Tri+08].

### **Les robots humanoïdes**

Comme son nom l’indique, un robot humanoïde est un robot qui est fait pour ressembler à un humain. Initialement, un des buts de la robotique humanoïde était de fabriquer des prothèses améliorées pour les êtres humains. De nos jours, des robots complets sont étudiés et fabriqués. Étant donné que ces robots sont semblables aux humains, ils peuvent potentiellement faire tout ce que fait un humain, ce qui peut être particulièrement intéressant pour effectuer des tâches dans des milieux dangereux avec un robot à la place d’un humain.

On peut citer comme exemple le robot Poppy [LRO13], qui est un robot dédié à la recherche dans ce domaine et dont les éléments peuvent être imprimés par impression 3D. La Figure 1.7 montre un robot Poppy. Il est utilisé notamment pour étudier la marche bipède, l’apprentissage par réseaux de neurones et les interactions humain-robot.

### **Les systèmes de tensegrité**

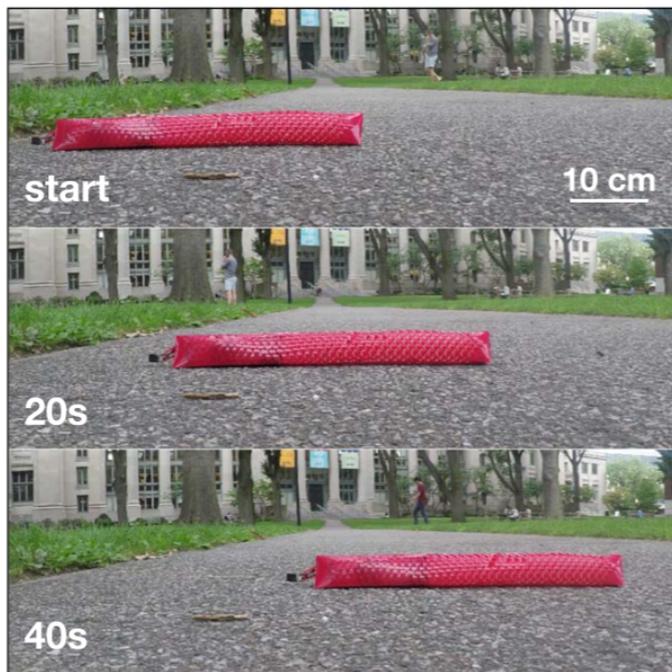


FIGURE 1.6 – Le robot serpent présenté dans [Raf+18]



FIGURE 1.7 – Le robot Poppy présenté dans [LRO13]

Le robot poisson présenté dans [Shi+20] est un système de tensegrité de classe 2 dont les éléments rigides représentent les os du poisson, tandis que les câbles représentent ses muscles. Le robot est montré en Figure 1.8

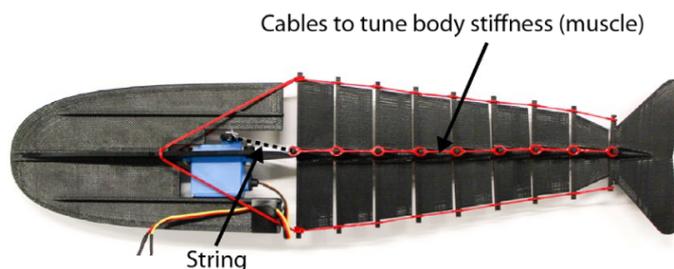


FIGURE 1.8 – Le robot poisson présenté dans [Shi+20]

Ce robot est inspiré de la truite arc-en-ciel et possède des dimensions similaires : il mesure  $400\text{mm}$  et pèse  $102\text{g}$ . Les éléments rigides sont en contact par des joints pivots. La raideur du corps du poisson est un paramètre important pour la nage. Ainsi, des câbles sont prévus sur le robot dans le but de régler cette raideur. Ce robot peut ainsi reproduire les performances de la truite arc-en-ciel en terme de raideur, vitesse de nage et force de poussée.

Comme pour ce robot, les systèmes de tensegrité sont souvent actionnés à l'aide de câbles. Nous allons donc maintenant nous intéresser aux robots à câbles.

### 1.2.3 Robots à câbles

Nous présentons ici les robots à câbles, dont notre manipulateur fait partie. Les robots à câbles sont des robots actionnés à l'aide de câbles. Les câbles sont attachés au robot à une extrémité, et lié à un moteur à l'aide d'un enrouleur à l'autre extrémité. Les câbles étant généralement légers en comparaison des liens solides, leur utilisation permet d'avoir un robot plus léger et donc plus économe en énergie tout en pouvant produire de grandes vitesses.

Une caractéristique importante des robots à câbles est que les câbles ne peuvent être utilisés que pour tirer sur l'effecteur, et non pour pousser. De ce fait, les robots à câbles dont on veut contrôler les  $n$  degrés de liberté nécessitent au moins  $n + 1$  câbles [RGL98] [CM12] [MA11]. Ceci complique l'étude de l'espace de travail du robot et sa commande, car il faut gérer les redondances et les contraintes de positivités des tensions dans les câbles. En contrepartie, le fait d'avoir des câbles supplémentaires permet de contrôler des variables supplémentaires, telles que la raideur du robot.

Les robots à câbles peuvent être séparés en deux catégories. La première regroupe les robots agencés en série et actionnés par des câbles. Un tel robot est étudié dans [HW00]. Ce robot est inspiré de la trompe de l'éléphant. Comme on peut le voir sur la Figure (1.9), le robot est constitué de seize mécanismes disposés en série. Il est actionné à l'aide de câbles, et des ressorts

sont également disposés entre chaque mécanisme. Plus récemment, un autre robot inspiré de la trompe de l'éléphant a été étudié dans [Liu+19]. Celui-ci est constitué de neuf mécanismes qui ne sont actionnés que par un unique moteur à l'aide de mécanismes en ciseaux.



FIGURE 1.9 – Le robot inspiré de la trompe de l'éléphant présenté dans [HW00].

Le manipulateur étudié dans cette thèse fait partie de cette première catégorie, puisque des modules seront empilés en série et actionnés par des câbles, d'une manière similaire au robot inspiré de la trompe d'éléphant.

La seconde catégorie, qui représente la plus grande partie des robots à câbles, est constituée des robots parallèles à câbles [BP12]. Les robots parallèles sont des robots contrôlés à l'aide de plusieurs bras indépendants, ce qui permet une répartition des efforts et donc potentiellement une meilleure précision et une résistance plus élevée. Les robots parallèles à câbles sont des robots parallèles où les bras sont remplacés par des câbles. Contrairement aux robots parallèles classiques, ils bénéficient d'un grand espace de travail. L'utilisation des câbles en fait des robots relativement légers. Cependant, la mesure de la position de l'effecteur est plus complexe à cause des câbles. Une solution pour avoir une bonne précision est d'utiliser des caméras pour connaître la position de l'effecteur. Un robot commandé à l'aide de caméras est présenté dans [Zak+19]. C'est un robot suspendu, comme on peut le voir sur la Figure (1.10).

## 1.2.4 Commande des robots

Comme nous allons particulièrement nous intéresser à la commande du manipulateur dans cette thèse, il convient de faire un point sur les différentes commandes existantes. Nous en faisons ici une liste non-exhaustive.

Les commandes présentées sont utilisées avec trois catégories d'actionnement :

- la première catégorie est l'actionnement classique avec des moteurs électriques aux articulations contrôlées ;
- la seconde catégorie est l'actionnement par des moteurs électriques via des câbles, tel que notre actionnement. Un avantage indéniable est que les moteurs sont fixes et ne

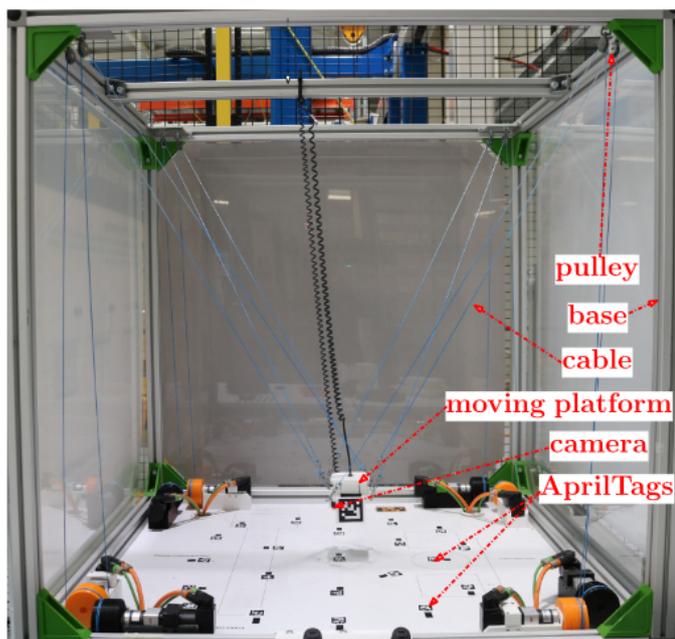


FIGURE 1.10 – Le robot parallèle à câble ACROBOT, situé à l’IRT Jules Vernes de Nantes [Zak+19].

sont pas sur le robot, ce qui allège le poids de ce dernier. L’utilisation des câbles pour transmettre les forces apporte une flexibilité qui peut être exploitée (pour contrôler la raideur du robot et ses interactions avec l’environnement par exemple), mais cette même flexibilité impacte la commande ;

- la troisième et dernière catégorie est l’actionnement par des actionneurs pneumatiques [Rah+11]. Ces actionneurs fonctionnent avec des gaz comprimés, permettent d’effectuer des mouvements très dynamiques et rendent le système actionné compliant. Cependant, les actionneurs pneumatiques présentent des inconvénients : ils complexifient la modélisation précise du système complet, ils peuvent être dangereux à cause des hautes pressions possibles, et sont très bruyants [For18].

### Commande dynamique par couple calculé

La commande dynamique par couple calculé (CTC pour Computed Torque Control en anglais) est une commande bien connue basée sur la linéarisation par rétroaction des systèmes non linéaires. C’est une commande présentant de bons résultats et dont le principe est simple à comprendre.

Le système doit être modélisé afin d'obtenir l'équation du mouvement de la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{g} + \mathbf{c} = \boldsymbol{\tau} \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice d'inertie du système,  $\mathbf{g}$  est le vecteur dérivée des énergies potentielles,  $\mathbf{c}$  est le vecteur des effets de Coriolis et des forces centrifuges et  $\boldsymbol{\tau}$  est le vecteur des couples appliqués.

Pour l'exemple, nous supposons que nous contrôlons les positions des moteurs  $\boldsymbol{\theta}$ . Soit  $\boldsymbol{\theta}_d$  la trajectoire désirée. Nous notons  $\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\theta}_d(t) - \boldsymbol{\theta}(t)$  l'erreur de suivi.

Un signal de contrôle  $\mathbf{u}_c$  est obtenu avec un retour proportionnel-intégral-dérivée (PID) :

$$\mathbf{u}_c(t) = \ddot{\boldsymbol{\theta}}_d + k_p \mathbf{e}(t) + k_d \dot{\mathbf{e}}(t) + k_i \int_{t'=0}^t \mathbf{e}(t') dt' \quad (1.2)$$

Les couples à appliquer sont alors donnés par :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}\mathbf{u}_c(t) + \mathbf{g} + \mathbf{c} \quad (1.3)$$

Dans [Pac+06], le CTC est combiné avec de l'asservissement visuel pour commander un robot parallèle. Il en est de même dans [Dal+11] pour commander un robot parallèle à câble.

Dans cette thèse, nous développerons plusieurs commandes basées sur cette approche.

## Commande prédictive

Une commande prédictive (MPC pour Model Predictive Control en anglais) est une commande qui se sert du modèle dynamique du robot pour anticiper ses mouvements futurs [CA13] [GPM89]. Les contraintes du systèmes peuvent être explicitement prises en compte avec cette commande. Cette commande cherche à minimiser un coût  $J$  sur un horizon de temps  $T$ . La minimisation de  $J$  se fait par optimisation. Généralement, le temps est discrétisé et l'horizon  $T$  est décomposé en plusieurs étapes. Pour chaque étape, on optimise les commandes appliquées sur le système. Les états futurs du système à chaque étape sont estimés à partir de l'état initial du systèmes (qui est mesuré) et des commandes appliquées grâce au modèle dynamique, comme si le robot était commandé en boucle ouverte. Une fois les commandes optimales calculées, on applique la première commande trouvée au robot. Puis on recommence pour le prochain cycle avec le nouvel état courant du robot comme état initial, ce qui en fait une commande en boucle fermée. Cette approche a été utilisée pour la commande d'un système de tenségrité dans [RAP20].

Une méthode permettant de résoudre ce problème d'optimisation est la Programmation Dynamique Différentielle [For18]. La programmation dynamique, introduite par Richard Bellman dans les années 50, consiste à résoudre un problème en le décomposant en sous-problème que l'on résout du plus petit au plus grand en stockant les résultats intermédiaires.

C'est sur ce concept que repose la Programmation Dynamique Différentielle (DDP). La DDP calcule la séquence de commandes qui minimise le coût  $J$  sur l'horizon  $T$  en calculant successivement les commandes à chaque étape par rétro-propagation, c'est-à-dire en partant de l'état final et en revenant à l'état initial. Cette séquence modifiant les états du système, il faut alors calculer ceux-ci à nouveau, puis répéter ces deux opérations (calcul de la séquence de commande puis calcul des états du système) jusqu'à la convergence. La DDP ne permet pas d'intégrer directement les contraintes du système, mais peut les intégrer dans le coût à minimiser pour les prendre en compte. Un exemple d'utilisation de cette commande pour des robots humanoïdes avec des actionneurs pneumatiques est présenté dans [For18].

## **Contrôle de la tension dans les câbles**

Nous avons déjà évoqué le fait que les robots à câbles étaient actionnés avec plus de câbles que le nombre de degrés de liberté. Cette redondance peut alors permettre de contrôler les tensions dans les câbles qui peuvent être différentes pour effectuer une même tâche. Plusieurs méthodes sont utilisées dans la littérature afin de calculer la distribution des tensions, telles que la programmation linéaire, la programmation quadratique, l'optimisation par descente de gradient ou encore la méthode de Dykstra. Une majorité de ces méthodes sont comparées dans [Pot14] sur plusieurs caractéristiques comme le temps de calcul ou la couverture de l'espace de travail.

Le contrôle des tensions des câbles permet de contrôler la raideur du robot. C'est ce qui est fait avec un robot nettoyeur de fenêtre dans [Pic+20], où les tensions sont optimisées afin de garantir une raideur selon une direction donnée afin de minimiser les déplacements lorsque le robot est soumis à des efforts extérieurs.

Le prototype étudié dans cette thèse possède un moteur de plus que de degrés de liberté. De ce fait, les tensions dans les câbles seront exprimées sous la forme d'un ensemble de dimension 1, ce qui permet un calcul simple de la distribution des tensions dans les câbles. Les commandes étudiées comprendront une contrainte de tension minimale pour chaque câble afin d'assurer que tous les câbles restent tendus.

## Commande par asservissement visuel

La mesure de la position du robot est primordiale pour effectuer les mouvements désirés. L'asservissement visuel [CHC16] consiste à utiliser une caméra permettant de contrôler le robot en fonction des images perçues. La caméra peut être fixée directement sur le robot, ce qui donne une perception de l'environnement dépendant de la position du robot, ou fixée dans l'environnement afin de voir le robot depuis un point fixe. Les deux cas de figures sont montrés en Figure (1.11), avec un exemple de déplacement de l'image pour chaque cas.

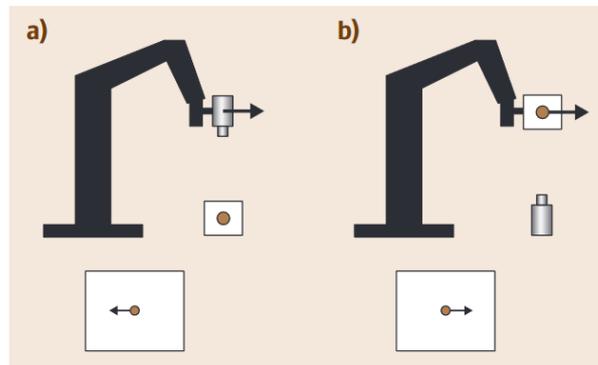


FIGURE 1.11 – Asservissement visuel avec la caméra montée sur le robot (a) et la caméra qui observe le robot (b), dans [CHC16].

L'asservissement visuel est particulièrement utile pour les robots à câbles car la mesure de la position de ces derniers peut être complexe à cause de la déformation des câbles. Une mesure de la position à l'aide de caméra est donc intéressante.

L'asservissement visuel d'un robot parallèle à câble, initialement prévu pour l'aide à la marche, est utilisé dans [RCM14] afin d'améliorer ses performances en précision pour attraper et déplacer des objets. Un robot mou est également contrôlé avec de l'asservissement visuel dans [Zha+17].

La version courante du prototype étudié dans cette thèse n'est pas équipée de vision et l'asservissement visuel ne pourra pas être testée dans cette première étape de développement du prototype.

## Commande par apprentissage

Depuis l'apparition de l'apprentissage profond, l'intelligence artificielle est utilisée dans de nombreux domaines, dont la commande de robots. L'apprentissage avec des réseaux de neurones peut sembler tout indiqué pour la commande de robots bio-inspirés puisque l'apprentis-

sage artificiel est comparable à l'apprentissage naturel : le système effectue un grand nombre de mouvements différents et se sert des résultats obtenus pour améliorer son contrôle.

L'apprentissage peut notamment être utilisé pour la robotique collaborative avec l'humain car les tâches demandées au robot sont très variées et évoluent avec le temps. Dans [Liu+18], l'apprentissage profond est utilisé pour combiner les données mesurées de la position du corps humain, du mouvement de la main et d'une commande vocale afin d'établir le mouvement désiré du robot, qui est ensuite exécuté à l'aide d'une interface de contrôle standard.

La commande d'un système de tensegrité se basant sur de l'apprentissage est présentée dans [RM18]. L'algorithme d'apprentissage permet au robot de découvrir les mouvements des moteurs qui lui procurent une grande vitesse de déplacement.

L'apprentissage profond semble d'autant plus indiqué pour les robots mous, dont la modélisation et donc la commande est compliquée. Une amélioration de commande par de l'apprentissage profond d'un robot mou actionné avec quatre câbles est présenté dans [Wu+20]. Un modèle y est établi à partir de données expérimentales, puis est utilisé en simulation pour concevoir la commande par apprentissage.

Cette thèse sera plutôt dédiée à mieux comprendre les propriétés de nos systèmes via leur modélisation et il ne sera pas fait recours aux techniques d'apprentissage.

### **Commande avec la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis [Zie+77] est une méthode adaptée pour modéliser les robots mous car elle permet de calculer numériquement le comportement de systèmes complexes. L'idée principale est de discrétiser le système en le découpant en morceaux, que l'on appelle les éléments finis. Les équations aux dérivées partielles à résoudre pour modéliser l'évolution du système global peuvent être linéarisées au niveau de chaque élément fini. Une matrice est donc associée à chaque élément fini. Ces matrices sont réunies dans une matrice globale afin de prendre en compte les contraintes aux frontières du système global.

Une commande pour robots mous se basant sur la méthode des éléments finis est présentée dans [Dur13]. Un modèle géométrique direct prenant en compte les positions des actionneurs est calculé avec le modèle des éléments finis, et la commande est effectuée en inversant ce modèle. Un challenge majeur avec cette commande est le calcul en temps réel du modèle des éléments finis, qui est assez coûteux.

Nous noterons l'utilisation de SOFA [Fau+12], une plateforme logicielle open-source pour la modélisation multi-physique, pour la simulation et l'implémentation de cette commande. Cette plateforme a servi de base pour la conception d'un logiciel pour la modélisation, la simu-

lation et la commande de robots mous [Coe+17].

## 1.3 Projet de la thèse

Les travaux de cette thèse s’inscrivent dans le cadre du projet AVINECK qui a débuté en janvier 2017. Ainsi, des travaux ont été effectués en amont de la thèse, amenant en particulier au choix d’un mécanisme de tenségrité pour modéliser une vertèbre. Nous récapitulons ici ces travaux, puis nous indiquons les objectifs de cette thèse.

### 1.3.1 Travaux précédents

#### Choix d’un mécanisme de tenségrité comme module de départ

Afin de reproduire une structure similaire au cou de l’oiseau, le choix d’un empilement de modules a été fait. Ainsi, chaque module correspond à une vertèbre, et l’empilement de plusieurs modules correspond à un cou d’oiseau.

La première étape a donc été de choisir le mécanisme de tenségrité à utiliser comme module. Afin de simplifier l’étude, les mécanismes considérés sont plans.

Plusieurs mécanismes de tenségrité sont étudiés et comparés dans [CHA16], afin de choisir un module.

Le module choisi pour la suite et étudié dans [Let17] contient quatre barres et deux ressorts. On peut le voir sur la Figure 1.12 : les barres sont en noir, et leurs longueurs respectives sont  $L_1, L_2, L_3$  et  $L_4$ . Les barres diagonales sont plus longues qu’au moins une des deux autres barres (base et effecteur). On peut voir dans [CA12] que la longueur des barres diagonales doit être supérieure à deux fois la longueur des barres de la base et de l’effecteur pour maximiser la taille de l’espace de travail. Les longueurs des deux ressorts (qui ne sont pas constantes) sont  $l_1$  et  $l_2$ , et leurs raideurs sont  $k_1$  et  $k_2$ . Il y a quatre nœuds, notés  $A, B, C$  et  $D$  sur la Figure 1.12. Ce mécanisme de tenségrité est communément nommé mécanisme en X ou antiparallélogramme.

Il est actionné par des câbles qui sont attachés en  $D$  et  $C$  et passent par les ressorts jusqu’aux points  $A$  et  $B$  respectivement. L’actionnement se fait en tirant sur les câbles. Les moteurs sont fixés au bas du module.

Pour calculer le nombre de degré de liberté (DDL) de la structure, on peut utiliser la formule de Tchebyshev-Grübler-Kutzbach. Ainsi, le nombre de DDL  $D_G$  du module est donnée par :

$$D_G = D_f(N_b - N_j - 1) + \sum_{i=1}^{N_j} D_i - D_s$$

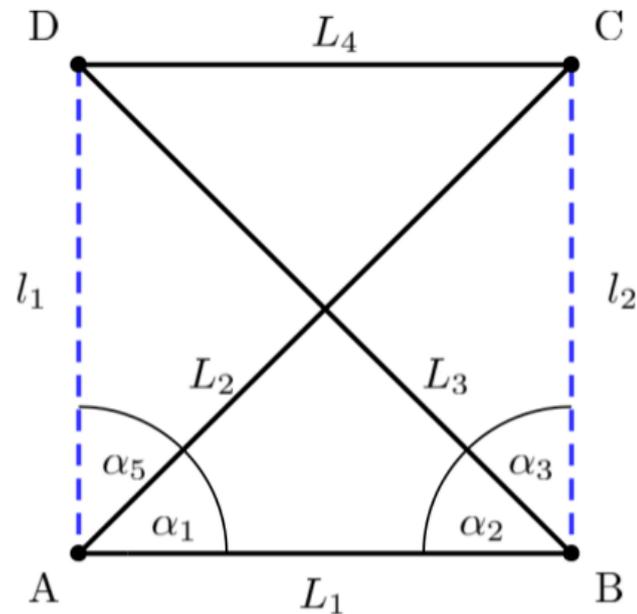


FIGURE 1.12 – Description du module choisi, dans [Let17]

où  $D_f$  est le nombre de DDL dans l'espace où le système fonctionne,  $D_i$  est le nombre de DDL de chaque articulation,  $D_s$  est le nombre de DDL non nécessaire dans le système,  $N_b$  est le nombre de liaisons et  $N_j$  le nombre d'articulations. Ici, nous avons  $D_f = 3$ ,  $D_i = 1$  (chaque articulation n'a qu'un seul DDL),  $D_s = 0$ ,  $N_b = 4$  (il y a quatre barres) et  $N_j = 4$  (il y a quatre nœuds). Par conséquent, le nombre de DDL du système est de 1.

Dans sa thèse [Fur20], Matthieu Furet étudie deux mécanismes de tensegrité différents (pivot simple et mécanisme en X) pour trouver lequel se rapproche le plus des mouvements intervertébraux des oiseaux, en comparant les mouvements possibles des deux mécanismes et des vertèbres d'oiseaux. Un mécanisme représente le mouvement entre deux vertèbres et correspond donc à deux demi-vertèbres. Bien que les deux mécanismes présentent des résultats intéressants, nous utiliserons exclusivement dans cette thèse le mécanisme en X, dont il est montré dans [Fur20] que le comportement est moins dépendant des choix géométriques que pour le pivot simple. De plus, la modulation de raideur est plus aisée sur le mécanisme en X que sur le pivot [MW21].

Des premiers résultats de simulation et de commande de ce module seul ont été publiés dans [Van+19]. La raideur du mécanisme y est définie, et la commande se sert des deux câbles pour contrôler à la fois la position du module et sa raideur.

Ce module a déjà été utilisé, notamment dans [Bak+15] pour concevoir un manipulateur

continu. Des mécanismes de tensegrité similaires sont analysés dans [Ars10; AG06; CA12; WC19], avec en particulier une étude de l'espace de travail dans [Ars10].

### Empilement des modules

Une fois le module choisi, les travaux sur l'empilement de ces modules ont pu débuter.

Un inspiration supplémentaire venant du cou de l'oiseau est de reproduire sa forme en  $S$  au repos et d'en étudier les bénéfices. Des premières formes en  $S$  en équilibre statique ont été générées dans [Let17], comme on peut le voir sur la Figure 1.13. Pour cela, un modèle statique a été écrit, ce qui a également permis des premières études de l'espace de travail du manipulateur.

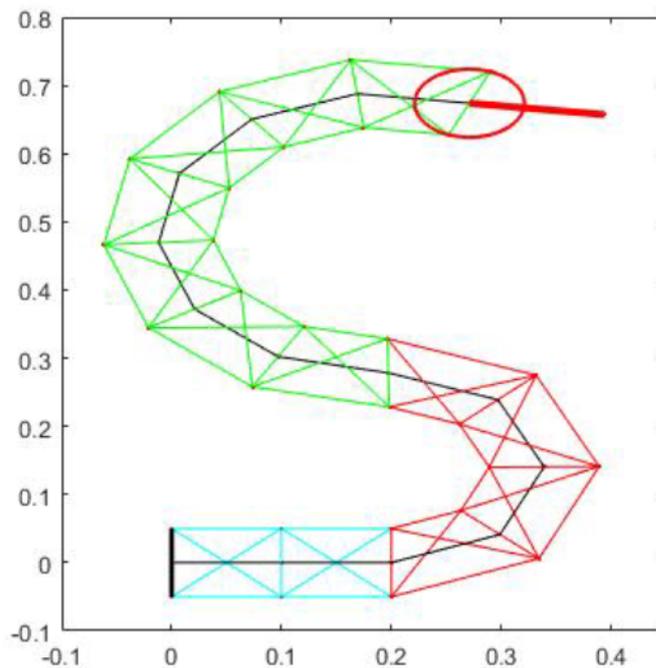


FIGURE 1.13 – Empilement de module en équilibre en forme de  $S$ , dans [Let17]

Suite à cela, des travaux sur le câblage du manipulateur ont été effectués [Son18]. Plusieurs stratégies de câblages sont comparées, et l'une d'elles est exploitée pour le calcul d'espace de travail. Nous utiliserons ici une stratégie d'actionnement différente pour notre prototype, notamment car nous n'utiliserons que quatre câbles pour actionner trois modules, ce qui n'avait pas été envisagé dans [Son18].

L'établissement du modèle dynamique de la pile de module s'est fait en commun avec Matthieu Furet. Matthieu présente ainsi dans sa thèse [Fur20] le développement de l'équation du mouvement du manipulateur, ce que nous ferons ici également. Nous y ajouterons d'autres éléments, comme la prise en compte des poulies dans le modèle dynamique, ainsi que l'élasticité

des câbles.

### **1.3.2 Objectifs**

Les objectifs de cette thèse sont de poursuivre les travaux débutés afin d'obtenir un prototype et d'en établir la commande. Plus précisément, les différents points abordés sont :

- établir le modèle dynamique d'un pile de modules. Cette partie a été effectuée avec Matthieu Furet ;
- établir des méthodes de calcul de l'espace de travail d'un empilement de modules ;
- étudier les actionnements des piles de modules ;
- concevoir la commande d'un pile de modules entièrement actionnée ;
- développer un prototype et faire des essais expérimentaux ;
- développer un simulateur fiable pour une pile de modules.

D'autres travaux se sont ajoutés à ces objectifs, notamment l'identification de paramètres sur le prototype pour le bon fonctionnement de la commande. Les travaux sur un manipulateur sous-actionné ont également été commencés.

Ainsi, cette thèse est présentée selon le plan suivant :

- le chapitre 2 présente la modélisation du manipulateur. Après une présentation générale du manipulateur, le modèle géométrique et le modèle dynamique de ce dernier y sont détaillés ;
- le chapitre 3 présente plusieurs éléments d'analyse du manipulateur. D'abord, l'actionnement complet du mécanisme est défini et deux actionnements spécifiques sont explicités. Ensuite, le modèle statique est exploité pour calculer l'espace de travail statique du manipulateur et pour élaborer des méthodes de choix des raideurs des ressorts ;
- le chapitre 4 présente le prototype ainsi que l'identification des frottements moteurs et de l'élasticité des câbles, qui permettent d'avoir une commande plus performante et qui sont nécessaire pour avoir un simulateur efficace ;
- le chapitre 5 présente trois commandes pour un manipulateur complètement actionné, et leurs tests sur le prototype. Les commandes de type CTC présentées sont une commande articulaire, une commande des moteurs et une commande dans l'espace opérationnel ;
- le chapitre 6 présente deux méthodes de génération de trajectoires. La première permet de minimiser les forces appliquées pour aller d'une configuration à une autre. La seconde permet de faire des mouvements explosifs, c'est-à-dire des mouvements très rapides ;
- enfin, le chapitre 7 présente une ouverture sur un manipulateur sous-actionné. Ce chapitre débute par une analyse de l'impact du nombre de module sur l'espace de travail,

pour un nombre de moteur constant. Les appuis sur des obstacles présents dans l'environnement sont modélisés afin d'être intégrés dans le calcul de l'espace de travail. Ensuite, un manipulateur constitué de 11 modules est élaboré à partir de données biologique, et un mouvement capturé à partir d'une vidéo d'un cou d'oiseau est reproduit à l'aide d'une commande sous-actionnée.

Des points techniques sont développés en annexe.

# MODÉLISATION

---

Dans ce chapitre, nous commençons par présenter en détail le manipulateur, en partant de la description d'un module unique et de ses propriétés jusqu'à la description de la pile de modules et de son actionnement.

Le modèle géométrique est ensuite établi, et les liens entre les différents espaces (espace articulaire, espace opérationnel et espace des moteurs) sont explicités.

Pour terminer, le modèle dynamique est détaillé à l'aide des équations de Lagrange. Ce modèle nous sera utile dans la suite pour établir la commande du manipulateur et pour effectuer des simulations.

## 2.1 Présentation du manipulateur

Dans cette section, le manipulateur étudié est introduit avec les bases de sa modélisation. Le manipulateur ne se déplacera que dans un plan, il est donc modélisé uniquement dans ce plan. Le manipulateur est un empilement de modules, mécanismes de tensegrité ayant un unique degré de liberté.

Le manipulateur est actionné via des câbles, ce qui permet de disposer tous les moteurs à sa base. Ces câbles peuvent être comparés aux muscles du cou des oiseaux, qui peuvent agir sur plusieurs vertèbres en même temps. En pratique, la profondeur du manipulateur est employée pour passer efficacement les câbles dans des plans parallèles à celui du modèle, afin d'éviter les frottements entre différents câbles.

Nous présentons d'abord le module de base de notre manipulateur et sa modélisation, avant de détailler la modélisation d'une pile de modules. Enfin, nous expliquerons l'actionnement du manipulateur.

### 2.1.1 Un module

Le module choisi est une variante de la croix de Snelson, qui est constituée de deux barres croisées et de quatre éléments élastiques reliant leurs extrémités. La croix de Snelson possède trois degrés de liberté. On peut trouver une étude de l'actionnement de cette croix dans [Beg+20]. Afin de ne conserver qu'un degré de liberté pour notre module, nous remplaçons deux des éléments élastiques par des barres rigides. Ainsi, le mécanisme de tenségrité que nous utilisons, et que nous appellerons module dans la suite, est un assemblage de quatre barres et deux ressorts de tension. Les deux ressorts sont placés sur ses côtés, comme on peut le voir sur la Figure (2.1).

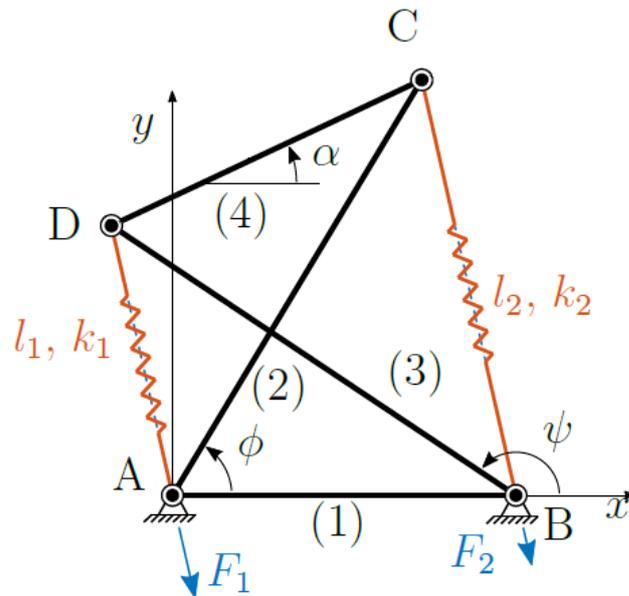


FIGURE 2.1 – Le mécanisme de tenségrité en X utilisé.

Les deux barres croisées (2) et (3) ont la même longueur  $L$ , tandis que les barres de base (1) et du haut (4) ont la même longueur  $b$ . Le module définit donc un anti-parallélogramme et est symétrique par rapport à la médiatrice des barres diagonales. Ce choix est fait d'après les résultats obtenus par Max Lettl [Let17], qui a comparé des modules symétriques et asymétriques (un module est asymétrique si deux barres non-adjacentes ne sont pas de même longueur). Le point à retenir est que les expressions des longueurs des ressorts sont bien plus compliquées pour les modules asymétriques, ce qui complexifie fortement les modèles statiques et dynamiques ensuite. Le montage du système nous impose la contrainte  $L > b$ . La longueur minimale des

longueurs des ressorts est  $L - b$  (obtenue quand le module est à plat).

Les dimensions des barres ont été étudiées dans [Fur20]. Le critère pour le choix des dimensions était de pouvoir utiliser un maximum de ressorts du commerce de tailles et de raideurs différentes. Pour cela, les contraintes suivantes ont été prises en compte :

- la longueur à vide des ressorts doit être inférieure à  $L - b$  pour que les ressorts soient toujours en tension ;
- la longueur maximale du ressort doit être supérieure à  $L + b$ , qui est la longueur maximale qu'il est possible d'atteindre une fois le ressort monté sur le manipulateur.

Nous utiliserons ainsi des barres de dimensions  $b = 5\text{cm}$  et  $L = 10\text{cm}$ , ce qui nous donne un rapport  $\frac{L}{b} = 2$  entre les barres.

Ce module a un unique degré de liberté. On peut donc décrire la configuration du mécanisme avec une unique coordonnée généralisée : nous utilisons pour cela l'angle entre la barre de base et la barre du haut, noté  $\alpha$ . La plage angulaire du module considérée est  $-\pi < \alpha < \pi$ , afin d'éviter les configurations singulières de l'anti-parallélogramme. Afin de contrôler ce degré de liberté, des câbles sont disposés de différentes manières sur le module, et les moteurs pourront agir en tirant sur ces câbles. Le passage des câbles sera décrit dans les sections suivantes.

Dans les premiers modèles établis, nous ne considérerions aucun frottement ou amortissement. Afin d'améliorer ces modèles, nous identifierons des frottements moteurs dans le chapitre 4.

### 2.1.2 Empilement de modules

Le manipulateur est un empilement de plusieurs modules. Lorsqu'un module est empilé sur un autre, sa barre du bas est la barre du haut du module d'en dessous. Le nombre de modules dans la pile est noté  $N$ . Nous numérotions ces modules de bas en haut. La Figure (2.2) montre le module  $i$  avec les modules inférieurs et supérieurs.

Afin de faciliter les écritures des modèles, nous prenons des modules de mêmes dimensions, c'est-à-dire que toutes les barres diagonales sont de longueur  $L$  tandis que les autres barres sont toutes de longueurs  $b$ . Les méthodes utilisées pour établir le modèle dynamique peuvent cependant être facilement étendues pour des empilements de modules de dimensions différentes.

Matthieu Furet a étudié l'impact des espacements entre les modules, c'est-à-dire l'ajout d'un élément solide entre deux modules, sur la reproduction des mouvements des vertèbres. Cependant, les espacements n'améliorent pas beaucoup la reproduction des mouvements intervertébraux, nous n'en considérerons donc pas dans cette thèse.

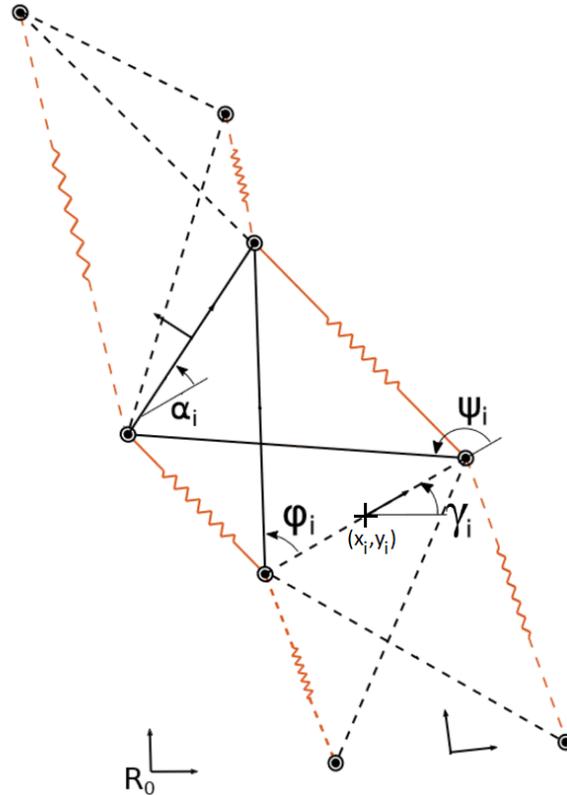


FIGURE 2.2 – Empilement des modules.

Nous notons  $k_l(i)$  la raideur du ressort à gauche du module  $i$  et  $k_r(i)$  la raideur du ressort à droite du module  $i$ . De même, les longueurs à vide de ces ressorts peuvent être différentes, et sont donc notées  $l_{l0}(i)$  et  $l_{r0}(i)$  pour les longueurs à vide des ressorts respectivement à gauche et à droite du module  $i$ .

L'orientation entre la barre du bas et la barre du haut du module  $i$  est notée  $\alpha_i$ . On note  $\gamma_i$  l'orientation de la barre du bas du module  $i$  dans le repère de référence, comme indiqué sur la Figure (2.2). La barre du bas du premier module est fixe. La position de son milieu est  $(x_1 = 0, y_1 = 0)$  et son orientation est  $\gamma_1$  dans le repère de référence.

### 2.1.3 Actionnement du manipulateur

Le manipulateur est actionné avec des câbles. Des moteurs, situés à la base du manipulateur, tirent sur ces câbles afin de modifier sa configuration.

Ces câbles peuvent être disposés de différentes manière sur chacun des modules :

- le câble est placé sur la gauche ou la droite du module, le long du ressort à cette place :

- en tirant sur ce câble, le moteur associé va donc modifier l'orientation du module de manière à diminuer la longueur du câble sur ce côté ;
- le câble passe le long des barres du module  $i$  (ce que l'on appellera strut-routed) : ce câblage permet de minimiser l'impact du moteur associé au câble sur ce module, tout en permettant le passage du câble pour lui permettre d'atteindre les modules supérieurs ;
  - le câble ne passe pas du tout par le module  $i$  : le moteur associé n'a donc aucun impact sur ce module, et n'a donc d'effet que sur les modules inférieurs.

La Figure (2.3) montre les deux premiers cas évoqués.

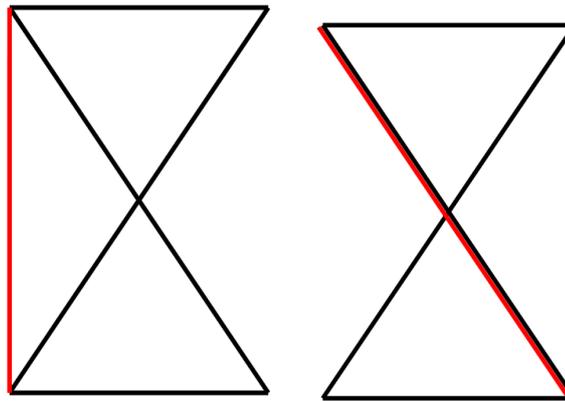


FIGURE 2.3 – A gauche : passage du câble par le côté afin de pouvoir contrôler l'orientation du module. A droite : passage du câble en strut-routed le long d'une barre diagonale afin de passer le câble sur les modules du dessus en minimisant l'impact sur ce module-ci.

Nous ne considérons pas le cas où un câble passe à la fois par la gauche et par la droite d'un même module car ce cas a peu d'intérêt. Nous ne considérons pas non plus de câble passant par un côté et le long d'une barre diagonale d'un même module : cela aurait peu d'effet à part l'utilisation d'une longueur déroulée du câble plus élevée.

L'utilisation des câbles implique que les moteurs ne peuvent que tirer dessus pour impacter le manipulateur. Ainsi, un moteur tirant à gauche d'un module ne pourra l'incliner que sur la gauche. Ceci nous amène à un actionnement antagoniste : deux moteurs sont nécessaires pour déplacer totalement (vers la gauche et vers la droite) un unique module, et leurs effets s'opposent. Ceci peut permettre, comme nous le verrons plus loin, de contrôler la raideur des modules : en effet, les deux moteurs associés à un module peuvent lui appliquer le même couple avec différents jeux de forces.

Nous notons  $N_f$  le nombre de moteurs du manipulateur. Les moteurs et les câbles associés sont numérotés avec l'indice  $j \in \{1, \dots, N_f\}$ . La longueur déroulée du câble  $j$  est notée  $l_j$  et la

position du moteur  $j$  est notée  $\theta_j$ . La force appliquée sur le câble  $j$  par le moteur associé est notée  $f(j)$ . Le vecteur des forces appliquées est ainsi  $\mathbf{f} = [f(1) \dots f(N_f)]^T$ .

## 2.2 Modèle géométrique

### 2.2.1 Géométrie d'un module

Une analyse complète de la géométrie d'un module est présentée dans [Fur20]. Nous rappelons ici les principales caractéristiques géométriques d'un module et les formules qui nous seront utiles. Ces calculs ne dépendent que du module considéré, les orientations des autres modules n'ont aucun lien avec. Les résultats sont donc valides quelque soit l'orientation de la barre du bas du module, et quelque soit la position de cette barre.

Nous introduisons d'abord un calcul intermédiaire qui nous sera très utile pour calculer les positions de manière itérative : la distance entre le milieu de la barre de base d'un module et le milieu de sa barre du haut. On peut montrer que cette distance vaut :

$$d(\alpha_i) = \sqrt{L^2 - b^2 \cos^2\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)} \quad (2.1)$$

Soient  $l_l(\alpha_i)$  et  $l_r(\alpha_i)$  les longueurs des ressorts respectivement à gauche et à droite. On a :

$$l_l(\alpha_i) = d(\alpha_i) - b \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (2.2)$$

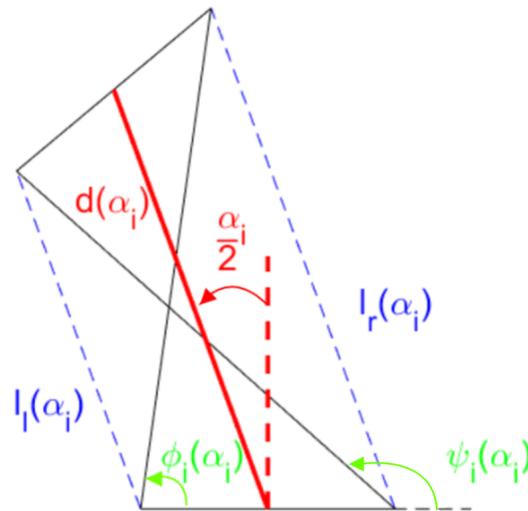
$$l_r(\alpha_i) = d(\alpha_i) + b \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (2.3)$$

Ces trois grandeurs sont indiquées sur la Figure (2.4).

Le module formant un anti-parallélogramme, les segments correspondants à ces trois grandeurs ( $d(\alpha_i), l_l(\alpha_i), l_r(\alpha_i)$ ) sont parallèles entre eux, et perpendiculaires à la médiatrice de l'anti-parallélogramme. Ceci implique qu'ils sont tous trois inclinés d'un angle  $\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_i}{2}$  par rapport à la barre du bas. Les angles formés par les barres croisées et la barre du bas sont notés  $\psi_i$  et  $\phi_i$ . Les calculs de leur expression en fonction de  $\alpha_i$  ont été détaillés dans [Fur20].

L'expression de  $\psi_i$  en fonction de  $\alpha_i$  est :

$$\psi_i(\alpha_i) = 2 \arctan \left[ \frac{-2bL \sin(\alpha_i) - \sqrt{(2bL \sin(\alpha_i))^2 + (2bL [\cos(\alpha_i) + 1])^2 - (2b^2 [\cos(\alpha_i) + 1])^2}}{2b^2 [\cos(\alpha_i) + 1] - 2bL [\cos(\alpha_i) + 1]} \right] \quad (2.4)$$

FIGURE 2.4 – Les principales grandeurs propres au module  $i$ .

L'expression de  $\phi_i$  en fonction de  $\alpha_i$  est :

$$\phi_i(\alpha_i) = 2 \arctan \left[ \frac{2bL \sin(\alpha_i) + \sqrt{(2bL \sin(\alpha_i))^2 + (2bL [\cos(\alpha_i) + 1])^2 - (2b^2 [\cos(\alpha_i) + 1])^2}}{2b^2 [\cos(\alpha_i) + 1] + 2bL [\cos(\alpha_i) + 1]} \right] \quad (2.5)$$

### 2.2.2 Espace articulaire, espace opérationnel et espace des moteurs

Pour la plupart des robots articulés, deux espaces sont considérés :

- l'espace des moteurs, qui est donné par les positions de l'ensemble des moteurs ;
- l'espace opérationnel, qui est donné par la position et l'orientation (la pose) de la barre du haut du manipulateur.

Ces deux espaces permettent généralement la description totale des robots articulés, les moteurs étant placés à chaque articulation.

Dans notre cas, les moteurs ne sont pas placés au niveau des articulations, mais à la base du manipulateur, et modifient les articulations en tirant sur des câbles. Ceci entraîne que l'espace articulaire et l'espace des moteurs sont différents, et nous les considérerons séparément.

On peut remarquer deux principales différences avec les robots articulés classiques :

- en faisant passer un câble par plusieurs modules, un seul moteur peut avoir un impact sur plusieurs articulations ;
- en faisant passer plusieurs câbles sur un module, on peut avoir plusieurs moteurs qui

actionnent cette seule articulation.

Cet espace articulaire se situe entre l'espace des moteurs et l'espace opérationnel, et permet de faire le lien entre les deux. Il est paramétré par les orientations  $\alpha$  de chacun des modules. C'est l'espace articulaire qui décrit le mieux le manipulateur, car il indique entièrement sa configuration : il permet de calculer les positions de chacune des barres, de calculer la pose de la barre du haut du manipulateur, et également de calculer la position des moteurs (si les câbles sont rigides).

C'est donc l'espace articulaire qui sera utilisé pour établir le modèle dynamique. Mais dans un premier temps, nous allons présenter le modèle géométrique du manipulateur, avec les liens entre les trois différents espaces.

### 2.2.3 Espace articulaire vers espace opérationnel

Avec la connaissance de la configuration articulaire  $\alpha$ , on peut calculer les positions de chacune des barres, ainsi que leurs orientations.

Nous nous concentrons dans un premier temps seulement sur les barres du haut et du bas des modules. Pour  $i \in \{1, \dots, N\}$ , on note  $(x_i, y_i)$  la position du milieu de la barre du bas du module  $i$  et  $\gamma_i$  son orientation dans le repère de référence. Ainsi,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  et  $\gamma_{i+1}$  sont la position et l'orientation de la barre du haut du module  $i$  et de la barre du bas du module  $i + 1$  si  $i < N$ . On étend la définition pour  $i = N + 1$ , de sorte que  $(x_{N+1}, y_{N+1})$  et  $\gamma_{N+1}$  soient la position et l'orientation de la barre du haut du dernier module.

Par définition de  $\alpha_i$ , on a :

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i + \alpha_i \quad (2.6)$$

On en déduit donc que :

$$\gamma_{i+1} = \gamma_1 + \sum_{k=1}^i \alpha_k \quad (2.7)$$

D'après l'équation (2.1) et les propriétés de l'anti-parallélogramme, on a :

$$x_{i+1} = x_i - d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (2.8)$$

$$y_{i+1} = y_i + d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (2.9)$$

On peut donc calculer la position de la barre du haut de chaque module à partir de la confi-

guration articulaire. La position du milieu de la barre du haut du module  $i$  est :

$$x_{i+1} = - \sum_{k=1}^i d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (2.10)$$

$$y_{i+1} = \sum_{k=1}^i d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (2.11)$$

Les centres de masses des barres diagonales, qui seront utiles pour l'écriture du modèle dynamique, peuvent s'exprimer en fonction du centre de la barre de base et de l'orientation du module de la manière suivante :

$$x_{2i} = x_i - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \quad (2.12a)$$

$$y_{2i} = y_i - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \quad (2.12b)$$

$$x_{3i} = x_i + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \quad (2.12c)$$

$$y_{3i} = y_i + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \quad (2.12d)$$

où  $(x_{2i}, y_{2i})$  sont les coordonnées du centre de la barre diagonale (2) et  $(x_{3i}, y_{3i})$  sont les coordonnées du centre de la barre diagonale (3) (voir Figure (2.1) ).

Le modèle géométrique inverse, correspondant au calcul de la configuration articulaire à partir de la position de la barre du haut du manipulateur, est algébriquement trop compliqué pour écrire une formule explicite pour l'ensemble des solutions lorsque le manipulateur est composé de trois modules ou plus.

La résolution algébrique du modèle géométrique inverse a été faite pour deux modules dans [FW19]. Dans ce cas, le nombre de configurations pour une position donnée de la barre du haut du manipulateur est d'au plus quatre.

## 2.2.4 Espace articulaire vers espace des moteurs

Ce sont les câbles qui font le lien entre les moteurs et les modules. En supposant que les câbles sont tendus et inextensibles, on peut calculer les positions moteurs à partir de la configuration articulaire :

$$\theta = - \frac{R}{r_d} (\mathbf{l}(\alpha) - \mathbf{l}_0) \quad (2.13)$$

où  $R$  est le rapport de réduction des moteurs,  $r_d$  est le rayon de l'enrouleur,  $\mathbf{l}(\alpha) = [l_1(\alpha) \dots l_{N_f}(\alpha)]^T$  est le vecteur des longueurs déroulées des câbles dans la configuration  $\alpha$  et  $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}(\alpha_0)$  où  $\alpha_0$  est une configuration d'équilibre au repos du manipulateur (configuration initiale des expériences).

Cette valeur de  $\theta$  est calculée selon l'équation (2.13) afin d'avoir :

- $\theta = \mathbf{0}_{N_f \times 1}$  quand  $\alpha = \alpha_0$  : ceci permet d'avoir des positions moteurs à 0 quand le manipulateur est dans sa position de repos initiale. La plupart du temps, on aura  $\alpha_0 = \mathbf{0}_{N \times 1}$  ;
- $\theta$  augmente lorsqu'on tire sur les câbles (et qu'on diminue donc leur longueur déroulée) : ceci explique la présence du signe  $-$ .

Afin de décrire le câblage complet du système, nous définissons la matrice d'actionnement  $\mathbf{A}$  et nous considérons un nombre fini de passages de câbles possibles. Cette matrice est de taille  $N \times N_f$ . Si le câble  $j$  ne passe pas par le module  $i$ , alors  $A(i, j) = 0$ . Sinon, l'élément  $A(i, j)$  est l'entier correspondant au passage du câble  $j$  sur le module  $i$ . Nous considérerons les 3 passages de câbles montrés en Figure (2.5) pour le modèle basique négligeant les poulies, et les 5 passages de câbles montrés en Figure (2.6) pour le modèle prenant en compte les poulies. Les éléments de  $\mathbf{A}$  sont les numéros indiqués sur ces figures.

La longueur déroulée totale du câble  $j$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$l_j = l_c(j) + \sum_{i=1}^N l_j^{A(i,j)}(\alpha_i) \quad (2.14)$$

où  $l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)$  est la longueur variable du câble  $j$  au niveau du module  $i$  et  $l_c(j)$  est une valeur constante.

$l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)$  dépend de la manière dont le câble passe par le module  $i$ . Nous allons calculer cette valeur pour les différents passages de câbles que nous utiliserons.

Dans un premier temps, nous utilisons un modèle simplifié qui ne considère pas les poulies utilisées pour passer les câbles sans frottements (ce qui revient à considérer des poulies de rayon nul). Dans un second temps, nous prenons en compte les poulies dans le calcul des longueurs de câbles afin d'avoir un modèle plus précis.

Le calcul de  $\theta$  à partir de  $\alpha$  peut se faire quelque soit le modèle utilisé. Le calcul inverse ( $\alpha$  à partir de  $\theta$ ) peut se faire explicitement avec le modèle sans poulies, mais pas avec le modèle avec poulies. Des méthodes d'évaluation de  $\alpha$  à partir de  $\theta$  seront décrites dans la section 4.2.

### Longueur des câbles sans les poulies

Si l'on considère qu'il n'y a pas de poulies, le câble  $j$  peut être disposé des trois manières suivantes sur le module  $i$  :

1. sur le côté gauche du module, le long du ressort gauche, auquel cas on a  $l_j^1(\alpha_i) = l_l(\alpha_i)$  ;
2. sur le côté droit du module, le long du ressort droit, auquel cas on a  $l_j^2(\alpha_i) = l_r(\alpha_i)$  ;
3. en strut-routed, le long des barres : dans ce cas la longueur  $l_j^3(\alpha_i)$  est la somme des longueurs des barres le long desquelles passe le câble. C'est une valeur fixe, qui ne varie pas avec  $\alpha_i$ .

La Figure (2.5) montre les trois passages de câbles considérés. Pour le troisième passage de câble, la version symétrique donne la même longueur de câble, c'est pourquoi nous confondons les deux versions en un seul passage de câble.

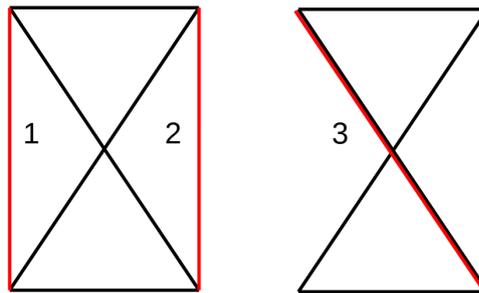


FIGURE 2.5 – Les différents passages de câbles étudiés sans considération des poulies.

Si le câble  $j$  ne passe pas par le module  $i$ , alors on a  $l_j^0(\alpha_i) = 0$  quelque soit  $\alpha_i$ .

Ces résultats sont assez simples, mais ne donnent pas un modèle très précis. Nous allons donc inclure les poulies dans ce calcul. L'impact de la prise en compte des poulies sur le calcul des longueurs de câbles sera quantifié dans la section 3.1.

### Longueur des câbles avec les poulies

Nous prenons ici en compte les poulies dans le calcul de la longueur des câbles. Nous supposons que toutes les poulies sont identiques, de rayon  $r$ .

Avec les poulies, il y a de nombreuses possibilités pour le passage des câbles. Nous en avons sélectionné quelques unes qui nous permettent de mettre en place les actionnements que nous souhaitons.

Nous allons étudier les cinq cas suivants :

1. celui où le câble passe sur la gauche du module  $i$  et est attaché au milieu de la poulie du haut ;
2. celui où le câble passe sur la droite du module  $i$  et est attaché au milieu de la poulie du haut ;
3. celui où le câble passe sur la gauche du module et est enroulé sur la poulie du haut pour être redirigé au dessus ;
4. celui où le câble passe sur la droite du module et est enroulé sur la poulie du haut pour être redirigé au dessus ;
5. celui où le câble est passé en strut-routed pour actionner des modules supérieurs.

Le cas trivial est celui où le câble ne passe pas par le module. Dans ce cas, la longueur variable correspondante est nulle.

Les cinq cas (non-triviaux) sont résumés en Figure (2.6), ordonnés de gauche à droite. Ces passages de câbles sont choisis pour maximiser l'amplitude possible pour chaque module sans décoller le câble de la poulie. Par exemple, dans le cas strut-routed, on ne passe pas le câble le long de la barre diagonale uniquement car sinon le câble se décollerait de la poulie si le module supérieur était trop incliné vers la gauche sur la Figure (2.6). Il en est de même pour les troisièmes et quatrièmes cas : l'enroulement du câble autour des poulies évite le décollement de celui-ci.

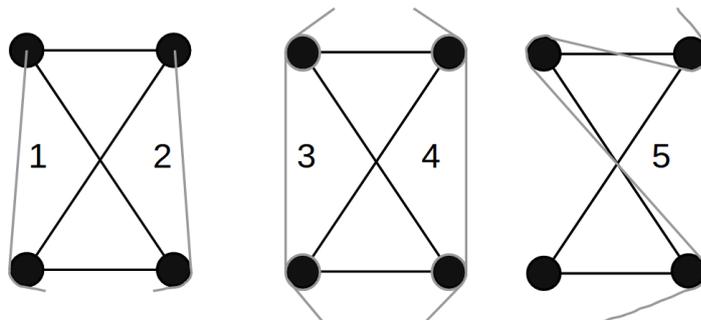


FIGURE 2.6 – Les différents passages de câbles étudiés.

Nous indiquons ici les formules des longueurs variables pour chaque passage de câble. Le détail des calculs des longueurs des câbles est fourni dans l'annexe B.1.

Si le câble  $j$  ne passe pas par le module  $i$ , on a :

$$l_j^0(\alpha_i) = 0 \tag{2.15}$$

Dans le premier cas, la longueur variable du câble  $j$  est donnée par :

$$l_j^1(\alpha_i) = \sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2} + r \left( -\arctan\left(\frac{\sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2} \right) \quad (2.16)$$

Dans le second cas, la longueur variable du câble  $j$  est donnée par :

$$l_j^2(\alpha_i) = \sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2} + r \left( \frac{\alpha_i}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) \right) \quad (2.17)$$

Dans le troisième cas, la longueur variable du câble  $j$  est donnée par :

$$l_j^3(\alpha_i) = l_l(\alpha_i) - r\alpha_i \quad (2.18)$$

Dans le quatrième cas, la longueur variable du câble  $j$  est donnée par :

$$l_j^4(\alpha_i) = l_r(\alpha_i) + r\alpha_i \quad (2.19)$$

Enfin, dans le cinquième cas, la longueur variable du câble  $j$  est donnée par :

$$l_j^5(\alpha_i) = r(2\psi(\alpha_i) - \alpha_i) \quad (2.20)$$

Pour ce dernier cas, le résultat est symétrique par rapport à  $\alpha_i$ . Ainsi, cette longueur variable vaut aussi pour le câblage symétrique à celui-ci.

Les longueurs variables totales des câbles peuvent donc être calculées à partir de ces formules.

La matrice d'actionnement  $\mathbf{A}$  permet d'écrire les modèles quelque soit le câblage du prototype (avec les passages de câbles considérés). Cette matrice sera indiquée pour deux actionnements particuliers dans les sections 3.2.1 et 3.2.2.

## 2.2.5 De l'espace des moteurs vers l'espace articulaire

On cherche ici à calculer la configuration articulaire  $\alpha$  en partant des positions moteurs  $\theta$ . Évidemment, ce calcul dépend de l'actionnement, de la manière dont les câbles sont placés.

Prenons d'abord l'exemple d'un module seul, actionné par deux câbles, l'un sur sa gauche et le second sur sa droite, et considérons le modèle sans les poulies. D'après les deux équations

(2.2) et (2.3), les positions moteurs s'expriment en fonction de  $\alpha = \alpha_1$  de la manière suivante :

$$\theta_1(\alpha_1) = -\frac{R}{r_d}(d(\alpha_1) - b \sin(\frac{\alpha_1}{2}) - l_c(1)) \quad (2.21)$$

$$\theta_2(\alpha_1) = -\frac{R}{r_d}(d(\alpha_1) + b \sin(\frac{\alpha_1}{2}) - l_c(2)) \quad (2.22)$$

où  $\theta_1$  est la position du moteur associé au câble gauche et  $\theta_2$  est la position du moteur associé au câble droit.

Une première méthode consiste à n'utiliser qu'une seule des deux équations pour calculer  $\alpha_1$ , ce qui revient à n'utiliser qu'une seule des positions moteurs pour retrouver l'orientation du module. En isolant  $d(\alpha_1)$  puis en passant au carré dans chacune des équations, on peut montrer que :

$$\alpha_1 = 2\arcsin\left(\frac{-L^2 + (-\frac{r_d}{R}\theta_1 - l_c(1))^2 + b^2}{2b(-\frac{r_d}{R}\theta_1 - l_c(1))}\right) \quad (2.23)$$

et

$$\alpha_1 = 2\arcsin\left(\frac{L^2 - (-\frac{r_d}{R}\theta_2 - l_c(2))^2 - b^2}{2b(-\frac{r_d}{R}\theta_2 - l_c(2))}\right) \quad (2.24)$$

Une seconde méthode possible est d'utiliser les deux positions moteurs pour calculer  $\alpha_1$ . En effet, on peut remarquer qu'en soustrayant l'équation (2.21) à l'équation (2.22), on obtient :

$$\frac{r_d}{R}(\theta_1 - \theta_2) + l_c(1) - l_c(2) = 2b \sin(\frac{\alpha_1}{2}) \quad (2.25)$$

On en déduit donc que :

$$\alpha_1 = 2\arcsin\left(\frac{\frac{r_d}{R}(\theta_1 - \theta_2) + l_c(1) - l_c(2)}{2b}\right) \quad (2.26)$$

Lorsqu'on prend en compte les poulies, la résolution algébrique de ce problème est trop complexe. On peut cependant procéder au calcul de  $\alpha_1$  à partir d'une des positions moteurs avec une résolution numérique. Nous reviendrons sur ce point en section 4.2.

Ces calculs peuvent être généralisés pour un manipulateur entièrement actionné : dans ce cas, on peut associer à chaque module un câble qui est utilisé pour calculer son orientation. Mais ce n'est pas possible pour un manipulateur sous-actionné : chaque câble actionnant plusieurs modules, les calculs deviennent trop complexes.

Le problème majeur qui intervient dans le calcul de  $\alpha$  à partir de  $\theta$  provient finalement des câbles : nous avons jusque là supposé que les câbles étaient inextensibles, mais en pratique les

câbles s'allongent. Les équations (2.23), (2.24), (2.26) fournissent alors des résultats différents. Il faudrait connaître l'allongement des câbles et en tenir compte.

Sur notre premier prototype, nous essayons tout de même de calculer le plus précisément  $\alpha$  à partir de  $\theta$  en modélisant l'élasticité des câbles, car ce prototype ne possède pas d'autres moyens de mesure en ligne.

## 2.3 Modèle dynamique

Une première version du modèle dynamique, dont les éléments sont indiqués dans cette thèse, ont été publiés dans [Fas+19]. Les éléments de calculs techniques sont détaillés en annexe C afin de rendre ce chapitre plus lisible.

### 2.3.1 Équations de Lagrange

Dans cette section, l'équation du mouvement du manipulateur est établie. Cette équation relie les forces appliquées et le mouvement du manipulateur. L'équation du mouvement est obtenue avec les équations de Lagrange [Lag53].

Les équations de Lagrange pour notre système à plusieurs degrés de liberté peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \mathbf{Q}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.27)$$

avec

$T$  : Energie cinétique

$V$  : Energie potentielle

$\mathbf{Q}$  : Forces généralisées

Les termes d'énergie cinétique, potentielles et forces généralisées sont d'abord calculés, puis substitués dans l'équation de Lagrange (2.27) afin d'obtenir l'équation du mouvement.

L'équation du mouvement du manipulateur sera mise sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\dot{\alpha}, \alpha) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Q} \quad (2.28)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice d'inertie,  $\mathbf{c}$  le vecteur des forces de Coriolis et centrifuges,  $\mathbf{g}$  le vecteur des énergies potentielles et  $\mathbf{Q}$  le vecteur des forces généralisées. Le calcul très technique de  $\mathbf{c}$  est présenté en annexe C.5.

### 2.3.2 Forces généralisées

Le travail virtuel de la force  $f(j)$  appliquée sur un câble  $j$  est le produit de la force et du déplacement du câble :

$$\delta W_j = -f(j)\delta l_j \quad (2.29)$$

Le signe négatif provient du fait que la longueur déroulée du câble est réduite lorsqu'on tire sur ce câble.

Le travail virtuel de toutes les forces sur le manipulateur s'écrit donc :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_f} (-f(j)\delta l_j^{A(i,j)}) \quad (2.30)$$

Ainsi, le vecteur  $\mathbf{Q}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{Q} = \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}$  où  $\mathbf{Z}(\alpha)$  est la matrice de taille  $N \times N_f$  dont les éléments sont :

$$Z(\alpha)(i, j) = -\frac{\partial l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \quad (2.31)$$

Comme on ne peut pousser sur le câble, ces équations ne sont valables que si les forces  $\mathbf{f}$  sont toutes positives. Toute force négative doit être remplacée par 0.

La Figure (2.7) montre les valeurs des éléments de la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$  en fonction du câblage et de l'orientation d'un module  $i$ . Rappelons que les passages de câbles considérés sont montrés en Figure (2.6). Dans les cas  $A(i, j) = 1$  et  $A(i, j) = 3$ , les valeurs sont toutes positives quelque soit l'orientation du module, ce qui veut dire que le câble associé tire toujours le module vers sa gauche. A l'inverse, pour les cas  $A(i, j) = 2$  et  $A(i, j) = 4$ , les valeurs sont toujours négatives donc le câble associé tire toujours le module vers sa droite. Le cas  $A(i, j) = 5$  est un peu plus complexe : le câble associé tire le module sur sa gauche s'il est déjà penché vers la gauche et il le tire sur sa droite s'il est déjà penché vers la droite. Cependant les valeurs sont très faibles, l'impact des câbles en strut-routed n'est donc pas très important, comme cela était prévu.

Les coefficients correspondant aux trois câblage sans considération des poulies de la Figure (2.5) sont également montrés. Les courbes ont la même forme mais ont des valeurs légèrement plus faibles. Le câblage strut-routed sans poulie n'applique aucune force sur les modules. Les poulies augmentent légèrement l'application des forces sur les modules.

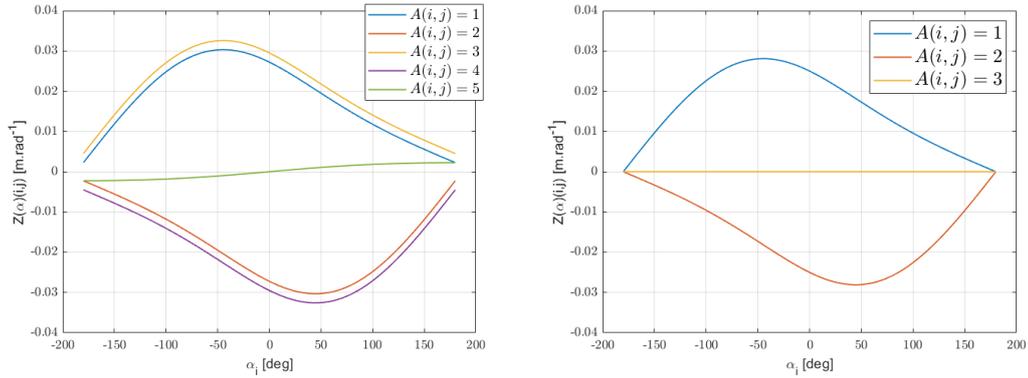


FIGURE 2.7 – Valeurs prises par les éléments de la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$  en fonction du câblage (à gauche avec poulies et à droite sans poulies).

### 2.3.3 Énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du mécanisme  $i$  est obtenue par la somme des énergies cinétiques (de translation et de rotation) des trois barres mobiles :

$$T_i = \frac{1}{2} (m_{2i}v_{2i}^2 + I_{2i}(\dot{\phi}_i + \dot{\gamma}_i)^2) + \frac{1}{2} (m_{3i}v_{3i}^2 + I_{3i}(\dot{\psi}_i + \dot{\gamma}_i)^2) + \frac{1}{2} (m_{4i}v_{4i}^2 + I_{4i}(\dot{\alpha}_i + \dot{\gamma}_i)^2) \quad (2.32)$$

avec  $m_{ki}$  et  $I_{ki}$  les masses et inerties de la barre  $k$  du module  $i$  et  $v_{ki}$  la vitesse du centre de masse de la barre  $k$  du module  $i$ , pour  $k$  allant de 2 à 4. Les barres 2 et 3 sont les barres diagonales et la barre 4 est la barre du haut.

Afin de faciliter le calcul des vitesses des centres de masse, on utilise un paramétrage redondant pour le mécanisme  $i$ . Ainsi, les quatre paramètres  $x_i, y_i, \alpha_i, \gamma_i$  décrivent le paramétrage du module  $i$ . Nous allons d'abord calculer l'énergie cinétique du module  $i$  en fonction de ce paramétrage local, et ensuite nous le calculerons en fonction de  $\alpha$ .

Les coordonnées des centres de masse des barres 2, 3 et 4 peuvent s'écrire :

$$x_{2i} = x_i - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \quad (2.33a)$$

$$y_{2i} = y_i - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \quad (2.33b)$$

$$x_{3i} = x_i + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \quad (2.33c)$$

$$y_{3i} = y_i + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) + \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \quad (2.33d)$$

$$x_{4i} = x_{i+1} = x_i - d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (2.33e)$$

$$y_{4i} = y_{i+1} = y_i + d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (2.33f)$$

et leurs orientations sont :

$$\gamma_{2i} = \gamma_i + \phi_i \quad (2.34a)$$

$$\gamma_{3i} = \gamma_i + \psi_i \quad (2.34b)$$

$$\gamma_{4i} = \gamma_i + \alpha_i \quad (2.34c)$$

$$(2.34d)$$

On peut exprimer les variables  $\phi_i$  et  $\psi_i$  en fonction de  $\alpha_i$  avec les équations (2.5) et (2.4) respectivement.

En dérivant ces équations on obtient les vitesses linéaires et angulaires des différentes barres et on peut calculer l'énergie cinétique totale  $T_i$  du module  $i$  avec le paramétrage local sous la forme :

$$T_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\gamma}_i & \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Le détail des calculs est en annexe C.3.

Nous définissons la matrice  $\mathbf{R}_i$  qui fait le lien entre les coordonnées  $[\dot{x}_i \dot{y}_i \dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i]$  et les orientations  $\alpha$  :

$$[\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\alpha}_i]^\top = \mathbf{R}_i [\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_N]^\top \quad (2.36)$$

La matrice  $\mathbf{R}_i$  peut être calculée de manière itérative. Le détail des calculs est fourni en annexe C.2.

On déduit des équations (2.35) et (2.36) que :

$$T_i = \frac{1}{2} \dot{\alpha}^T \mathbf{R}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{R}_i \dot{\alpha} \quad (2.37)$$

La matrice d'inertie de la pile de module est donc :

$$\mathbf{M}_m = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{R}_i \quad (2.38)$$

Nous prenons également en compte l'inertie des moteurs  $I_m$  et des enrouleurs  $I_d$ .

L'énergie cinétique du moteur  $j$  et de l'enrouleur associé est :

$$\begin{aligned} E_m(j) &= \frac{1}{2} \frac{R^2 I_m + I_d}{r_d^2} \dot{l}_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2 I_m + I_d}{r_d^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \right)^2 \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'écriture des équations, nous rassemblons l'inertie des moteurs  $I_m$  et l'inertie des enrouleurs  $I_d$  dans une seule variable :

$$I_a = I_m + \frac{I_d}{R^2} \quad (2.39)$$

Notons  $M_j^m$  la matrice d'inertie du moteur  $j$ . Ses éléments sont donc (par identification) :

$$M_j^m(k, l) = \frac{R^2 I_a}{r_d^2} \frac{\partial l_j^{A(k,j)}(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \frac{\partial l_j^{A(l,j)}(\alpha_l)}{\partial \alpha_l} \quad (2.40)$$

Nous remarquons que la matrice  $M_j^m$  n'est pas diagonale : il y a des termes croisés si le câble passe par plusieurs modules. Il est donc important d'intégrer le modèle dynamique à la commande, car une simple commande PD ou PID axe par axe ne prendrait pas en compte ces éléments non-diagonaux.

La matrice d'inertie de l'ensemble des moteurs  $M_f$  est :

$$\mathbf{M}_f = \sum_{j=1}^{N_f} \mathbf{M}_j^m \quad (2.41)$$

Notons que cette formule est équivalente à :

$$\mathbf{M}^f = I_a \frac{R^2}{r_d^2} \mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \quad (2.42)$$

La matrice d'inertie du manipulateur avec son actionnement est donc :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_m + \mathbf{M}_f \quad (2.43)$$

### 2.3.4 Énergie potentielle

L'énergie potentielle d'un module provient de deux sources : la pesanteur et l'élasticité des ressorts. L'énergie potentielle du module  $i$  peut s'écrire :

$$V_i = V_{sp_i} + V_{g_i} \quad (2.44)$$

où  $V_{sp_i}$  est l'énergie potentielle des ressorts et  $V_{g_i}$  l'énergie potentielle de la gravité.

Comme les longueurs des ressorts du module  $i$  ne dépendent que de l'orientation  $\alpha_i$ , on a :

$$V_{sp_i} = \frac{1}{2}k_{1i}(l_l(\alpha_i) - l_{l0i})^2 + \frac{1}{2}k_{2i}(l_r(\alpha_i) - l_{r0i})^2 \quad (2.45)$$

Le vecteur des dérivées de l'énergie potentielle due aux ressorts  $\mathbf{g}_s$  s'écrit :

$$\mathbf{g}_s(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{sp1}}{\partial \alpha_1} \\ \dots \\ \frac{\partial V_{spN}}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

où

$$\frac{\partial V_{sp_i}}{\partial \alpha_i} = k_{1i} \frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} (l_l(\alpha_i) - l_{l0i}) + k_{2i} \frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} (l_r(\alpha_i) - l_{r0i}) \quad (2.47)$$

L'énergie potentielle due à la gravité s'écrit :

$$V_{g_i} = g(m_{2i}y_{2i} + m_{3i}y_{3i} + m_{4i}y_{4i}) \quad (2.48)$$

avec  $g$  l'accélération de la gravité, dirigée selon l'axe  $-\vec{y}$ .

Le vecteur des dérivées de l'énergie potentielle due à la pesanteur est donc :

$$\mathbf{g}_g = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{gk}}{\partial \alpha_1} \\ \dots \\ \frac{\partial V_{gk}}{\partial \alpha_N} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

où

$$\frac{\partial V_{gk}}{\partial \alpha_i} = g(m_{2k} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} + m_{3k} \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} + m_k \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i}) \quad (2.50)$$

Le calcul de  $\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i}$  se fait de trois façons différentes,  $k$  étant l'indice du module dont on considère le poids, et  $i$  l'indice de la variable articulaire :

$$\text{Si } i < k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} - d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \end{cases} \quad (2.51a)$$

$$\text{Si } i = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{2} d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \end{cases} \quad (2.51b)$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial y_{4k}}{\partial \alpha_i} = 0 \end{cases} \quad (2.51c)$$

La variable articulaire  $\alpha_i$  ne modifie pas les positions et orientations des modules inférieurs.

Quelque soit la valeur de  $i$ , si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} = 0$ .

Le vecteur dérivée des énergies potentielles du manipulateur complet est donc :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_s + \mathbf{g}_g \quad (2.52)$$

### 2.3.5 Matrice de raideur

Le modèle statique, qui est une sous-partie du modèle dynamique, est donné par :

$$\mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \mathbf{f} \quad (2.53)$$

Il s'agit du modèle dynamique dans le cas où il n'y a pas de mouvements, c'est-à-dire avec  $\dot{\alpha} = 0$  et  $\ddot{\alpha} = 0$ .

La matrice de raideur articulaire du manipulateur est obtenue en dérivant le modèle statique par rapport à  $\alpha$  :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial(\mathbf{g} - \mathbf{Zf})}{\partial \alpha} \quad (2.54)$$

Cette matrice indique la capacité du manipulateur à rester en place lorsqu'on applique des perturbations extérieures.

On peut décomposer le calcul de cette matrice de la manière suivante :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\mathbf{Zf})}{\partial \alpha} \quad (2.55)$$

$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}$  est calculé à partir de l'expression de  $\mathbf{g}$ . Les calculs sont fournis dans l'annexe C.4.

Soit  $\mathbf{dZ}$  la matrice telle que :

$$dZ(i, j) = \frac{\partial^2 l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)}{\partial \alpha_i^2} \quad (2.56)$$

Comme les câbles ont été découpées en tronçons dont la longueur  $l_j^{A(i,j)}$  le long du module  $i$  ne dépend que de la variable  $\alpha_i$ , on a  $\frac{\partial^2 l_j^{A(i,j)}(\alpha_i)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_k} = 0$  lorsque  $i \neq k$ .

De ce fait, la dérivée de  $\mathbf{Zf}$  par rapport à  $\alpha$  est une matrice diagonale. L'élément  $i$  de la diagonale de cette matrice est donnée par :

$$\frac{\partial \mathbf{Zf}}{\partial \alpha}(i, i) = \mathbf{dZ}(i, :)f \quad (2.57)$$

où  $\mathbf{dZ}(i, :)$  est la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{dZ}$ .

D'après les formules ci-dessus, nous pouvons remarquer que :

- les termes des forces n'interviennent que sur la diagonale de  $\mathbf{K}$ , ce qui peut permettre un contrôle sur la raideur du manipulateur. C'est ce qui est fait sur un module dans [Van+19];
- comme les ressorts d'un module n'ont aucun effet sur les autres modules, les termes de raideurs des ressorts n'interviennent que sur la diagonale de  $\mathbf{K}$ ;
- ainsi, les éléments non-diagonaux ne sont dus qu'à la gravité.

### 2.3.6 Modélisation des frottements

Afin de rendre le modèle plus réaliste, nous allons également modéliser des frottements. Nous supposons que les frottements proviennent majoritairement des moteurs. En effet, les autres sources de frottements proviennent des articulations pivots entre les barres ainsi que des poulies, mais celles-ci étant munies de roulements sur notre prototype, ces frottements sont faibles. Par ailleurs, comme la vitesse des câbles est proportionnelle à  $\dot{\theta}$ , les vitesses des poulies le sont également. Ainsi, notre modélisation inclue les frottements dus aux poulies. Nous modélisons deux types de frottements, les frottements secs et les frottements visqueux.

Les frottements secs peuvent être alors modélisés de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_{dry}(\mathbf{f}_s, \dot{\theta}) = \text{diag}(\text{sign}(\dot{\theta}))\mathbf{f}_s \quad (2.58)$$

où  $\mathbf{f}_s = [f_s(1), \dots, f_s(N_f)]^T$  est un vecteur constant qui doit être identifié,  $\text{diag}(\mathbf{v})$  est une matrice diagonale ( $N_f \times N_f$ ) construite avec les composantes de  $\mathbf{v}$  et  $\text{sign}$  est la fonction de signe. Ce modèle a cependant un défaut : il n'assure pas la continuité en 0, ce qui peut poser problème pour l'intégrer dans la commande ou dans la simulation. Un modèle assurant la continuité peut être écrit comme suit :

$$\mathbf{f}_{dry}(\mathbf{f}_s, \dot{\theta}) = \text{diag}\left(\frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\theta})\right)\mathbf{f}_s \quad (2.59)$$

où  $c_m$  est un paramètre de réglage qui permet d'ajuster la pente de l'arc-tangente autour de 0. Le facteur  $\frac{2}{\pi}$  assure que  $\mathbf{f}_{dry}$  tend vers  $\mathbf{f}_s$  et  $-\mathbf{f}_s$  lorsque  $\dot{\theta}$  a des valeurs positives et négatives respectivement, comme on peut le voir sur la Figure (2.8).

Les frottements visqueux peuvent se modéliser de la manière suivante :

$$\mathbf{f}_{visc}(\mathbf{f}_v, \dot{\theta}) = \text{diag}(\dot{\theta})\mathbf{f}_v \quad (2.60)$$

où  $\mathbf{f}_v = [f_v(1), \dots, f_v(N_f)]^T$  est un vecteur constant qui doit être identifié.

Ainsi, les frottements des moteurs sont :

$$\mathbf{f}_{friction}(\mathbf{f}_s, \mathbf{f}_v, \dot{\theta}) = \mathbf{f}_{dry}(\mathbf{f}_s, \dot{\theta}) + \mathbf{f}_{visc}(\mathbf{f}_v, \dot{\theta}) \quad (2.61)$$

Ces frottements sont à retirer des forces appliquées. Ils sont donc intégrés dans l'équation du mouvement (2.28) de la manière suivante :

$$\mathbf{M}(\alpha)\ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \left( \mathbf{f} - \text{diag}\left(\frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\theta})\right)\mathbf{f}_s - \text{diag}(\dot{\theta})\mathbf{f}_v \right) \quad (2.62)$$

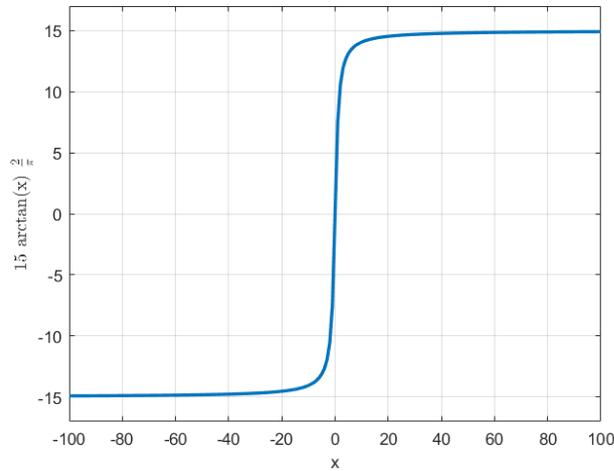


FIGURE 2.8 – Fonction arc-tangente utilisée pour modéliser les frottements.

Puisque notre modèle inclut les frottements des poulies, nous pourrions avoir des coefficients de frottements différents pour chacun d’entre eux, dépendant du câblage associé. Cependant, notre modèle est peu précis sur les poulies : on suppose que la tension dans le câble est uniforme et que les frottements dus aux poulies impactent cette tension de manière uniforme. Des modèles de frottements des poulies plus précis sont proposés dans [CPP17] et [Miy+20]. Nous verrons cependant que notre modèle, bien que simple, permettra une reconstruction satisfaisante des résultats expérimentaux en simulation.

### 2.3.7 Modélisation des câbles élastiques

Le modèle du manipulateur tel que décrit par l’équation du mouvement (2.62) suppose que les câbles utilisés sont non-déformables. Cependant, les câbles sont en pratique élastiques : plus on tire fort dessus, plus ils s’allongent. Nous proposons donc un second modèle qui prend en compte cette élasticité.

Tous les câbles sont désormais considérés comme élastiques. En supposant que  $\theta_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$  lorsque le manipulateur est en  $\alpha_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, N_f$  au repos (c’est-à-dire avec des forces nulles appliquées et, donc, avec des allongements de câble nuls), le vecteur des allongements élastiques de câble  $\mathbf{x}_c = [x_{c1}, \dots, x_{N_f}]^T$  est défini comme :

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{l} - \mathbf{l}_0 - \frac{r_d}{R} \boldsymbol{\theta} \quad (2.63)$$

Autrement dit, l’allongement de chaque câble est défini comme la différence entre sa lon-

gueur théorique telle que calculée précédemment et la longueur de câble déduite depuis la position du moteur associé.

En dérivant l'équation (2.63) par rapport au temps, on obtient :

$$\mathbf{Z}(\alpha)^T \dot{\alpha} = \frac{r_d}{R} \dot{\theta} + \dot{\mathbf{x}}_c \quad (2.64)$$

Soit  $\mathbf{t}_c = [t_{c1}, \dots, t_{N_f}]^T$  le vecteur des tensions dans les câbles, que l'on suppose uniforme pour chaque câble. Si l'on considère le système composé des moteurs et des câbles uniquement, on peut écrire l'équation du mouvement de  $\theta$  comme :

$$I_a \ddot{\theta} + \frac{r_d}{R} \mathbf{t}_c + \frac{r_d}{R} \mathbf{f}_{friction} = \frac{r_d}{R} \mathbf{f} \quad (2.65)$$

où  $\mathbf{f}_{friction}$  est le vecteur des frottements des moteurs tel que décrit précédemment.

D'autre part, si l'on considère le système composé des câbles et du manipulateur uniquement, l'équation du mouvement de  $\alpha$  s'écrit :

$$\mathbf{M}_m(\alpha) \ddot{\alpha} + \mathbf{c}_m(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \mathbf{t}_c \quad (2.66)$$

Le système complet est donc décrit par deux équations du mouvement, l'une pour les moteurs et l'autre pour le manipulateur. Les deux sont liées par les tensions des câbles.

En dérivant l'équation (2.64) par rapport au temps et en substituant  $\ddot{\theta}$  à l'équation (2.65), le vecteur des tensions des câbles peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction} - I_a \left( \frac{R}{r_d} \right)^2 (\mathbf{Z}(\alpha)^T \ddot{\alpha} + \dot{\mathbf{Z}}(\alpha, \dot{\alpha})^T \dot{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}_c) \quad (2.67)$$

La substitution de l'expression ci-dessus dans l'équation (2.66) donne le modèle dynamique du système complet avec l'élasticité des câbles :

$$\mathbf{M}(\alpha) \ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \left( \mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction} + I_a \left( \frac{R}{r_d} \right)^2 \ddot{\mathbf{x}}_c \right) \quad (2.68)$$

On remarquera que la partie gauche est la même que dans l'équation du mouvement (2.62) du premier modèle. Seule la partie droite est modifiée, avec l'ajout d'un terme contenant l'accélération de l'allongement du câble. Mais le second changement, qui n'est pas visible dans cette équation mais dans l'équation (2.63), est que la relation entre  $\alpha$  et  $\theta$  dépend de l'allongement des câbles.

Il nous reste à détailler le calcul de l'allongement et ses dérivées. Nous allons étudier trois modèles de raideur de câble, pour lesquels nous identifierons les paramètres pour notre prototype afin de les comparer et de choisir le plus adéquat.

Le premier modèle est un modèle de câble général qui permet d'identifier un ensemble de paramètres pour chaque câble :

$$t_c(i) = k(i)x_{ci} + c_a(i)\dot{x}_{ci} \quad (2.69)$$

ou, sous forme de vecteur :

$$\mathbf{t}_c = \text{diag}(\mathbf{x}_c)\mathbf{k} + \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}_c)\mathbf{c}_a \quad (2.70)$$

où  $\mathbf{k} = [k(1), \dots, k(N_f)]^T$  est le vecteur constant des raideurs des câbles et  $\mathbf{c}_a = [c_a(1), \dots, c_a(N_f)]^T$  est le vecteur constant des coefficients d'amortissement.

Le second et le troisième modèle élastique sont basés sur le module de Young [KT15] :

$$\mathbf{t}_c = \text{diag}(\mathbf{x}_c)\frac{ES}{\mathbf{l}_{cable}} + \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}_c)\frac{cS}{\mathbf{l}_{cable}} \quad (2.71)$$

où  $S$  est la section du câble,  $E$  est le module d'Young et  $c$  est un coefficient d'amortissement.  $\mathbf{l}_{cable}$  est la longueur du câble : pour le second modèle, nous prenons  $\mathbf{l}_{cable} = \mathbf{l}_{tot}$  la longueur totale du câble, tandis que dans le troisième modèle, nous prenons  $\mathbf{l}_{cable} = \mathbf{l}$  la longueur déroulée du câble. C'est usuellement la longueur déroulée du câble qui est utilisée, mais nos longueurs de câbles déroulées étant faibles comparées à la plupart des robots parallèles à câbles, nous envisageons également la longueur totale du câble car il n'est pas évident que la partie autour de l'enrouleur ne s'allonge pas.

Quelque soit le modèle, l'allongement peut être calculé en fonction de la tension dans le câble. En utilisant l'équation (2.65), la tension dans le câble peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction} - \frac{R}{r_d}I_a\ddot{\theta} \quad (2.72)$$

On peut donc, à partir des forces appliquées par les moteurs et leurs vitesses et accélérations, calculer la tension dans les câbles puis l'allongement de ces derniers.

### 2.3.8 Extension pour des modules de tailles différentes

Toutes les équations présentées ici peuvent s'étendre facilement pour modéliser un manipulateur dont les modules ont des barres de tailles différentes. Chaque module  $i$  reste symétrique,

c'est-à-dire que ses barres diagonales ont la même longueur  $L_i$  et ses barres du bas et du haut ont la même longueur  $b_i$ .

Il suffit de remplacer dans les équations les longueurs  $L$  et  $b$  par les longueurs  $L_i$  et  $b_i$  correspondantes. Ces longueurs étant constantes, il n'y a pas de dérivées supplémentaires. La fonction  $d(\alpha_i)$  doit être démultipliée car elle devient différente pour chaque module : on doit utiliser à la place les  $N$  fonctions  $d_i(\alpha_i, L_i, b_i)$  dont les expressions sont similaires en remplaçant  $L$  et  $b$  par  $L_i$  et  $b_i$ .

## 2.4 Conclusion

Après avoir présenté le manipulateur, le modèle géométrique et le modèle dynamique de ce dernier ont été établis. Le modèle géométrique nous permet de passer d'un espace à un autre, ce qui sera utile pour calculer l'espace de travail du manipulateur et pour établir les commandes.

Le modèle dynamique nous sera également utile pour établir les commandes, mais aussi pour effectuer des simulations. Nous ajoutons en pratique une tête sur le dernier module de notre manipulateur. La prise en compte de la tête dans le modèle dynamique est en annexe C.6.

Nous allons maintenant analyser différents points, dont l'actionnement du manipulateur et son espace de travail. Le modèle statique va être particulièrement utile dans ces analyses.



# ANALYSE D'UN MANIPULATEUR ENTIÈREMENT ACTIONNÉ

---

Dans ce chapitre, nous allons présenter des éléments d'analyse qui nous permettront de mieux comprendre le fonctionnement du manipulateur et de choisir l'actionnement et les raideurs des ressorts du prototype.

Dans un premier temps, nous quantifierons l'impact de la prise en compte des poulies dans le calcul de la longueur des câbles et des éléments de la matrice  $\mathbf{Z}$  pour les différents passages de câbles que nous avons considéré.

Nous nous intéresserons ensuite à l'actionnement du manipulateur. Nous définirons ce qu'est un actionnement complet, puis nous en détaillerons deux qui seront utilisés par la suite.

Nous présenterons également un algorithme de calcul de l'espace de travail statique du manipulateur. Les deux actionnements complets considérés seront comparés à l'aide de leurs espaces de travail respectifs sur un manipulateur constitué de trois modules.

Pour terminer, nous donnerons plusieurs méthodes permettant de calculer les raideurs des ressorts du manipulateur afin que ce dernier soit stable tout en ayant un espace de travail satisfaisant.

Nous nous limitons dans ce chapitre aux manipulateurs entièrement actionnés. Les manipulateurs sous-actionnés seront abordés dans le chapitre 7.

## 3.1 Étude de l'impact des poulies sur le modèle dynamique

Nous avons développé un modèle prenant en compte les poulies utilisées pour le câblage, qui est théoriquement bien plus complexe que le modèle sans poulies. Bien qu'ayant un petit rayon, les poulies que nous utilisons ont un impact non-négligeable sur le comportement du manipulateur.

On peut évaluer l'impact des poulies sur le modèle dynamique sur plusieurs points. Nous étudions ici les points suivants :

- les longueurs variables des câbles ;
- les coefficients de la matrice  $\mathbf{Z}$ .

Concernant les longueurs variables des câbles, nous avons comparé les longueurs obtenues en négligeant les poulies dans le calcul avec les longueurs obtenues en les prenant en compte. Ces longueurs sont affichées pour chaque passage de câble considéré dans cette thèse sur la Figure (3.1). La longueur variable est calculée en référence par rapport à la longueur en  $\alpha = 0$ , c'est pourquoi les courbes passent en 0 en cette valeur. Nous pouvons observer des différences notables entre les deux calculs. Dans le cinquième cas, le calcul négligeant les poulies donne une valeur nulle quelque soit la valeur de  $\alpha$  tandis que le calcul prenant en compte les poulies donne de faibles valeurs non-nulles.

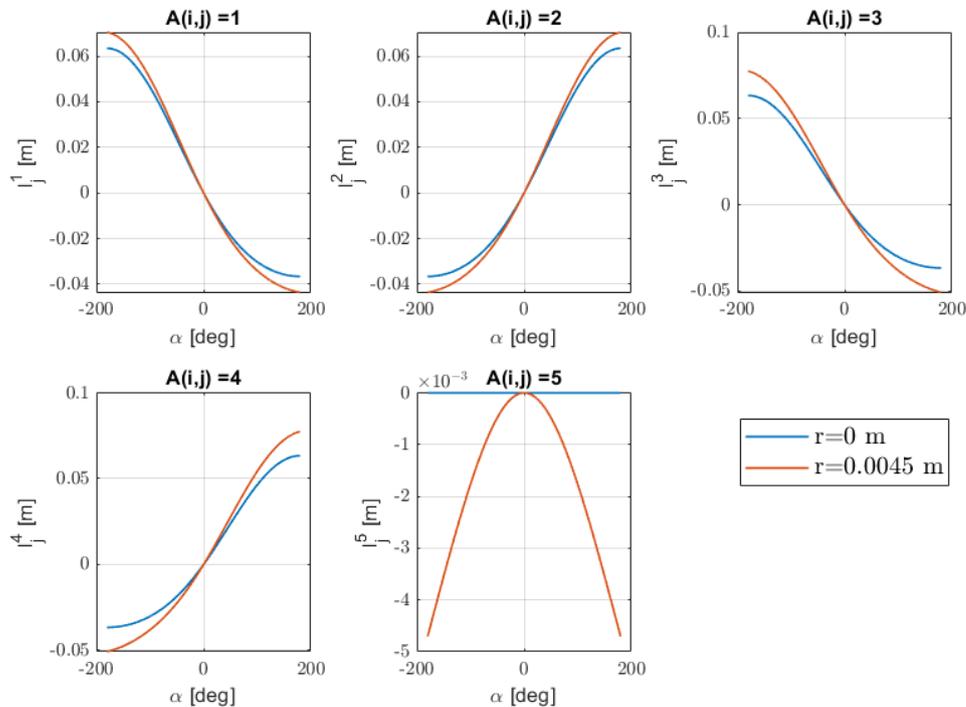


FIGURE 3.1 – Longueur variable des câbles en fonction de  $\alpha$  pour les cinq passages de câble.

La différence moyenne entre les deux calculs de longueur variable est de  $4,1\text{mm}$ . Cette valeur n'est pas négligeable pour les dimensions de notre module, puisqu'elle correspond à environ 5% de la longueur variable maximale des câbles sur un module.

Pour les coefficients de la matrice  $\mathbf{Z}$ , ces derniers dépendent de l'actionnement. Nous avons détaillé cinq passages de câbles différents dans le chapitre précédent (voire Figure (2.6)), nous

Intervalle	mean( $ e_r^1 $ )	mean( $ e_r^2 $ )	mean( $ e_r^3 $ )	mean( $ e_r^4 $ )	mean( $ e_r^5 $ )
$[-\pi, \pi]$	19.4%	19.4%	29.8%	29.8%	100%
$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	9.5%	9.5%	17.4%	17.4%	100%

TABLE 3.1 – Moyennes des différences des coefficients de  $\mathbf{Z}$  avec et sans poulies.

allons donc regarder pour chacun de ces passages la différence sur le terme associé de  $\mathbf{Z}$ . Les valeurs prises par les éléments de  $\mathbf{Z}$  ont été montrées en Figure (2.7).

Plus précisément, pour chaque câblage  $k \in \{1, \dots, 5\}$ , nous allons regarder sur un grand nombre de valeurs de  $\alpha$  (10 000 en pratique) réparties uniformément dans un intervalle donné, la valeur moyenne du terme  $e_r^k(\alpha)$  défini par la formule suivante :

$$e_r^k(\alpha) = \frac{\frac{\partial l_j^k(\alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial l_j^k(\alpha, r=0)}{\partial \alpha}}{\frac{\partial l_j^k(\alpha)}{\partial \alpha}} \quad (3.1)$$

où  $l_j^k(\alpha, r=0)$  est la longueur du câble lorsque le rayon de la poulie est nul.

Deux intervalles sont employés : le premier est la plage d'orientation maximale possible  $[-\pi, \pi]$ , tandis que la seconde est une plage d'orientation plus limitée  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

Les résultats pour chacun de ces intervalles sont présentés dans le tableau (3.1). On peut remarquer qu'avec la symétrie des câblages, les résultats des deux premières colonnes sont identiques, de même pour la troisième colonne et la quatrième colonne. Pour l'intervalle le plus grand, les différences sont loin d'être négligeables. Les différences moyennes sont plus faibles pour l'intervalle restreint, ce qui montre que l'impact des poulies est plus important pour les valeurs de  $\alpha$  dans  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  et  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ . Mais même pour l'intervalle restreint, les différences sont élevées : les moyennes les plus faibles sont autour de 10%. La dernière colonne est de 100% dans les deux cas car les poulies entraînent l'apparition d'un coefficient qui est nul sans poulies.

Ainsi, l'impact des poulies sur le modèle dynamique est important et ne peut donc pas être négligé.

## 3.2 Actionnements et répartition des forces

Nous détaillons ici des éléments sur les actionnements possibles. Nous allons principalement nous intéresser à deux actionnements complets différents, qui seront majoritairement employés par la suite. Nous expliciterons également la forme des matrices  $\mathbf{Z}$  associées à ces actionnements.

Commençons par définir un actionnement complet pour notre manipulateur. Nous dirons qu'un actionnement (caractérisé par la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$ ) est complet si pour toute configuration  $\alpha$  du manipulateur dans l'espace de travail géométrique et pour tout ensemble de couples désirés  $\mathbf{u} = [u(1) \dots u(N)]^T$ , il existe au moins un ensemble de forces  $\mathbf{f}$  dont tous les éléments sont positifs et tel que :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f} \quad (3.2)$$

En d'autres termes, quelque soit la configuration du manipulateur, l'actionnement permet d'appliquer n'importe quel ensemble de couples désirés si l'on ne considère pas de limite maximale sur les forces. Rappelons que les forces doivent toutes être positives car on ne peut utiliser les câbles uniquement pour tirer.

Une première question qui se pose est : combien de moteurs faut-il au minimum pour avoir un actionnement complet ? Comme notre manipulateur possède  $N$  degrés de liberté, il est évident qu'il faut au moins  $N$  moteurs. Cependant, cette condition n'est pas suffisante. En effet, la matrice  $\mathbf{Z}$  correspondant à un actionnement avec  $N$  moteurs est une matrice carrée de taille  $N \times N$ . Si les câbles sont mal placés et que la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$  n'est pas de rang  $N$  pour toute configuration  $\alpha$ , alors elle n'est pas inversible et l'actionnement n'est pas complet. Si les câbles sont bien placés et que la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$  est inversible pour toute configuration  $\alpha$ , alors supposons que pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  de taille  $N$  et pour toute configuration  $\alpha$ , il existe un jeu de forces positives  $\mathbf{f}$  vérifiant  $\mathbf{u} = \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}$ . Pour un tel vecteur  $\mathbf{u}$  non-nul, comme la matrice  $\mathbf{Z}$  est carrée, le jeu de forces positives associé est unique et vaut  $\mathbf{f} = \mathbf{Z}(\alpha)^{-1}\mathbf{u}$ . Le jeu de forces correspondant à  $-\mathbf{u}$  est lui aussi unique et vaut  $\mathbf{Z}(\alpha)^{-1}(-\mathbf{u}) = -\mathbf{f}$ . Or les éléments de  $-\mathbf{f}$  sont tous négatifs (et au moins un est strictement négatif comme  $\mathbf{u}$  est non-nul). Cela démontre par l'absurde qu'un actionnement avec  $N$  moteurs ne peut pas être complet.

Un actionnement complet requiert au minimum  $N + 1$  moteurs. Pour le montrer, il suffit d'en trouver un qui fonctionne. Un tel exemple va être présenté, à la suite d'un actionnement complet basique avec  $2N$  moteurs.

### 3.2.1 Actionnement avec $2N$ moteurs

Comme chaque module est majoritairement actionné par deux câbles, un à sa gauche et le second à sa droite (les câbles passés en strut-routed influençant peu le module), un premier actionnement complet intuitif est celui composé de  $N_f = 2N$  moteurs, où chaque câble est placé sur le côté d'un seul module. La Figure (3.2) montre un tel actionnement avec  $N = 3$  modules (et donc  $N_f = 6$  moteurs). Les câbles placés sur les côtés du module  $i$  sont passés en strut-routed

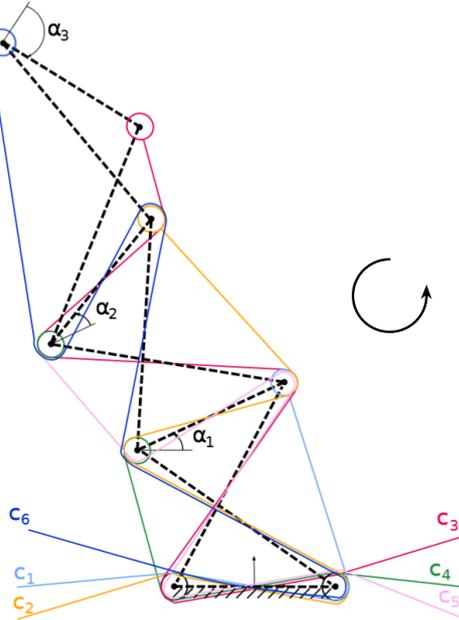


FIGURE 3.2 – Câblage sur  $N = 3$  modules d'un actionnement complet avec  $N_f = 6$  moteurs.

par les modules inférieurs.

On ordonne les câbles de la manière suivante : d'abord les câbles tirant à gauche des modules de bas en haut, puis ceux tirant à droite des modules de bas en haut.

La matrice  $\mathbf{A}$  de cet actionnement sur un manipulateur constitué de trois modules est donc :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Restons sur l'exemple en Figure (3.2) pour détailler les longueurs des câbles. D'après les longueurs partielles présentées en section 2.2.4, ces longueurs sont :

$$l_1 = l_1^1(\alpha_1) \quad (3.4a)$$

$$l_2 = l_2^5(\alpha_1) + l_2^1(\alpha_2) \quad (3.4b)$$

$$l_3 = l_3^5(\alpha_1) + l_3^5(\alpha_2) + l_3^1(\alpha_3) \quad (3.4c)$$

$$l_4 = l_4^2(\alpha_1) \quad (3.4d)$$

$$l_5 = l_5^5(\alpha_1) + l_5^2(\alpha_2) \quad (3.4e)$$

$$l_6 = l_6^5(\alpha_1) + l_6^5(\alpha_2) + l_6^2(\alpha_3) \quad (3.4f)$$

La matrice  $\mathbf{Z}$  de cet actionnement, de taille  $N \times 2N$ , s'écrit alors de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_l \ \mathbf{Z}_r] \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{Z}_l$  et  $\mathbf{Z}_r$  sont deux matrices carrées triangulaires supérieures de taille  $N \times N$ .

$\mathbf{Z}_l$  représente tous les câbles tirant sur la gauche des modules. Sa diagonale correspond aux portions de câbles placés à gauche des modules, et les éléments au dessus de la diagonale correspondent aux autres portions de ces câbles placés en strut-routed. Sur un manipulateur constitué de trois modules, cette matrice est donc :

$$\mathbf{Z}_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1^1(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_2^5(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_3^5(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \\ 0 & \frac{\partial l_2^1(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial l_3^5(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial l_3^1(\alpha_3)}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$\mathbf{Z}_r$  représente tous les câbles tirant sur la droite des modules. Sa diagonale correspond aux portions de câbles placés à droite des modules, et les éléments au dessus de la diagonale correspondent aux autres portions de ces câbles placés en strut-routed. Sur un manipulateur constitué de trois modules, cette matrice est donc :

$$\mathbf{Z}_r = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_4^2(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_5^5(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial l_6^5(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \\ 0 & \frac{\partial l_5^2(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} & \frac{\partial l_6^5(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 & \frac{\partial l_6^2(\alpha_3)}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Explicitons maintenant la manière de déterminer les forces à choisir pour produire un vecteur de couple  $\mathbf{u}$  sur les modules (équation (3.2)) avec cet actionnement. Nous voulons également que toutes les forces soient supérieures à  $f_{min} > 0$ . Le point important est que tous les éléments de la diagonale de  $\mathbf{Z}_l$  sont positifs tandis que tous ceux la diagonale de  $\mathbf{Z}_r$  sont négatifs, quelque soit la configuration  $\alpha$ , comme nous l'avons vu sur la Figure (2.7).

On commence par calculer les forces appliquées sur le module du haut : le module  $N$ . Pour celui-ci, l'équation à résoudre est :

$$u(N) = Z_l(N, N)f(N) + Z_r(N, N)f(2N) \quad (3.8)$$

avec  $Z_l(N, N) > 0$  et  $Z_r(N, N) < 0$ . Il y a une infinité de solutions à cette équation car on a deux

inconnues. L'équation peut se réécrire de la manière suivante :

$$f(N) = \frac{u(N) - Z_r(N, N)f(2N)}{Z_l(N, N)} \quad (3.9)$$

L'espace des solutions pour  $f(N)$  et  $f(2N)$  est donc de dimension 1. Afin de minimiser les forces appliquées, on peut choisir l'unique solution telle que l'une des deux forces soit à la borne minimale, et que l'autre soit supérieur à cette borne.

Pour générer un couple  $u(N)$  positif, le câble gauche via  $f(2N)$  doit être tiré, et le câble droit via  $f(N)$  relâché. Pour formaliser ce principe en tenant compte des limites minimales sur les forces, on regarde le signe de  $(u(N) - (Z_l(N, N) + Z_r(N, N))f_{min})$ , s'il est positif, on choisit  $f(N) = f_{min}$  et on calcule  $f(2N)$ ; s'il est négatif on choisit  $f(2N) = f_{min}$  et on calcule  $f(N)$  soit :

$$\begin{aligned} \text{si } u(N) - (Z_l(N, N) + Z_r(N, N))f_{min} \leq 0 : & \begin{cases} f(N) = f_{min} \\ f(2N) = \frac{u(N) - Z_l(N, N)f_{min}}{Z_r(N, N)} \end{cases} \\ \text{si } u(N) - (Z_l(N, N) + Z_r(N, N))f_{min} > 0 : & \begin{cases} f(N) = \frac{u(N) - Z_r(N, N)f_{min}}{Z_l(N, N)} \\ f(2N) = f_{min} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nous connaissons donc les forces appliquées sur le dernier module. Grâce à cela, on peut calculer les forces appliquées sur chacun des modules en descendant avec la même méthode, en reportant les forces déjà calculées pour les câbles en strut-routed. Plus précisément, on définit la quantité :

$$c_d(i) = u(i) - \sum_{j=i+1}^N \left( Z_l(j, i)f(j) + Z_r(j, i)f(N + j) \right) \quad (3.11)$$

qui correspond au couple que l'on doit appliquer avec les forces agissant sur les côtés du module  $i$ . Cette quantité est connue puisqu'on a calculé les forces appliquées sur les modules supérieurs auparavant. Les forces  $f(i)$  et  $f(N + i)$  sont alors calculées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{si } (Z_l(i, i) + Z_r(i, i))f_{min} - c_d(i) \geq 0 : & \begin{cases} f(i) = f_{min} \\ f(N + i) = \frac{c_d(i) - Z_l(i, i)f_{min}}{Z_r(i, i)} \end{cases} \\ \text{si } (Z_l(i, i) + Z_r(i, i))f_{min} - c_d(i) < 0 : & \begin{cases} f(i) = \frac{c_d(i) - Z_r(i, i)f_{min}}{Z_l(i, i)} \\ f(N + i) = f_{min} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Nous avons ici donné un calcul cherchant à minimiser les forces, qui met la moitié des forces à  $f_{min}$ . Une autre possibilité aurait été de contrôler la raideur de chaque module en plus de

l'orientation, comme dans [Van+19]. Dans cette thèse, nous nous intéresserons peu à la raideur du manipulateur, et nous chercherons plutôt à minimiser les forces appliquées pour minimiser le coût énergétique du manipulateur, d'où le calcul proposé.

On remarquera qu'en considérant des poulies de rayon nul, les éléments non diagonaux de  $\mathbf{Z}_l$  et  $\mathbf{Z}_r$  sont tous nuls, ce qui permet de résoudre le système plus facilement, toutes les lignes étant indépendantes les unes des autres.

Cet actionnement nécessitant beaucoup de moteurs, nous proposons maintenant un actionnement nécessitant presque deux fois moins de moteurs.

### 3.2.2 Actionnement avec $N + 1$ moteurs

Nous avons précédemment montré qu'il fallait strictement plus de  $N$  moteurs pour avoir un actionnement complet. Nous présentons ici un actionnement complet avec  $N + 1$  moteurs.

Le câblage permettant cet actionnement est le suivant :  $N$  câbles sont positionnés à droite de la même manière que pour l'actionnement à  $2N$  moteurs, et le dernier câble passe sur la gauche de tous les modules. Par la suite, nous désignerons ce dernier câble comme le câble long. L'idée est que le câble long est utilisé pour tirer sur la gauche tous les modules, et que les câbles courts permettent d'ajuster le couple appliqué sur chaque module. Des variantes de ce câblage sont également possibles. La plus simple est le câblage symétrique, avec le câble long à droite et les câbles courts à gauche. On peut également avoir des câblages où le câble long passe par la gauche d'une partie des modules, et sur la droite des autres modules, tandis que les câbles courts sont disposés au côté opposé au câble long. Nous détaillons ici le cas du câble long uniquement à gauche, mais ces variantes se traitent avec la même méthode.

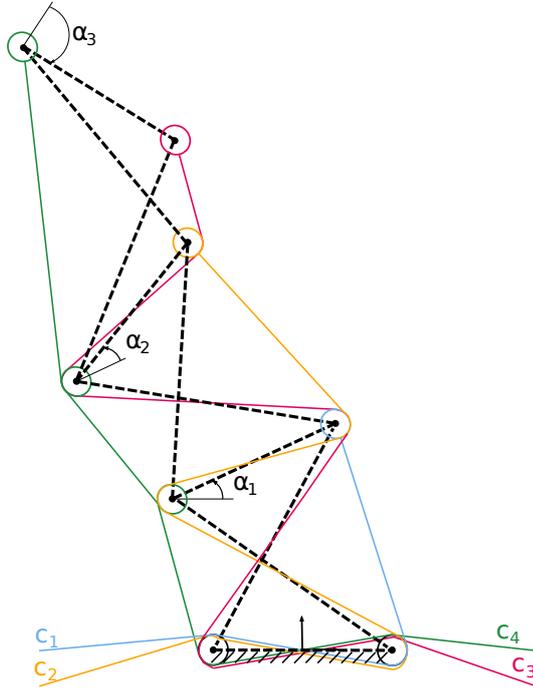
Un exemple de ce câblage sur  $N = 3$  modules est montré en Figure (3.3). Le câble long est en vert, et les câbles courts tirant à droite des modules 1, 2 et 3 sont respectivement en bleu, orange et rouge. Ces câbles courts sont passés en strut-routed sur les modules inférieurs.

Nous ordonnons les moteurs de la manière suivante : les câbles 1 à  $N$  sont les câbles courts de bas en haut (le câble  $i$  tire sur la droite du module  $i$ ) et le câble long est le câble  $N + 1$ .

La matrice  $\mathbf{A}$  de cet actionnement sur un manipulateur constitué de trois modules est donc :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Reprenons l'exemple en Figure (3.3) pour détailler les longueurs des câbles. Ces longueurs


 FIGURE 3.3 – Câblage sur  $N = 3$  modules d'un actionnement complet avec  $N_f = 4$  moteurs.

sont :

$$l_1 = l_1^2(\alpha_1) \quad (3.14a)$$

$$l_2 = l_2^5(\alpha_1) + l_2^2(\alpha_2) \quad (3.14b)$$

$$l_3 = l_3^5(\alpha_1) + l_3^5(\alpha_2) + l_3^2(\alpha_3) \quad (3.14c)$$

$$l_4 = l_4^3(\alpha_1) + l_4^3(\alpha_2) + l_4^1(\alpha_3) \quad (3.14d)$$

Ainsi, la matrice  $\mathbf{Z}$  s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2] \quad (3.15)$$

où  $\mathbf{Z}_1$  est une matrice triangulaire supérieure et  $\mathbf{Z}_2$  est un vecteur de taille  $N$ .

Dans notre cas,  $\mathbf{Z}_1$  a la même expression que  $\mathbf{Z}_r$  dans l'équation (3.7). Nous prenons une autre notation car des variantes de câblage sont possibles. L'hypothèse importante pour mener le calcul est l'inversibilité de  $\mathbf{Z}_1$  (garantie pour une forme triangulaire avec une diagonale sans élément nul).

Avec le câble long à gauche de tous les modules, l'expression de  $\mathbf{Z}_2$  pour un manipulateur

constitué de trois module est :

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_4^3(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial l_4^3(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial l_4^1(\alpha_3)}{\partial \alpha_3} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Afin de montrer que cet actionnement est bien complet, nous allons détailler le calcul des forces permettant de vérifier l'équation (3.2). Nous allons également satisfaire la contrainte que toutes les forces soient supérieures à  $f_{min} > 0$ .

L'équation (3.2) se réécrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{f}_{1N} + \mathbf{Z}_2 f(N+1) \quad (3.17)$$

où  $\mathbf{f}_{1N} = [f(1), \dots, f(N)]^T$ .

Puisque  $\mathbf{Z}_1$  est inversible,  $\mathbf{f}$  peut s'exprimer en fonction de  $f(N+1)$  de la manière suivante :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2 \\ 1 \end{pmatrix} f(N+1) \quad (3.18)$$

L'espace des solutions est donc de dimension 1, et est paramétré par  $f(N+1)$ .

Il a été vérifié numériquement que tous les éléments de  $-\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2$  sont positifs, quelque soit la configuration du manipulateur (ceci reste vrai tant que le rayon des poulies est petit par rapport à la longueur des barres car seuls les termes des câbles passés en strut-routed peuvent rendre les éléments négatifs). Ainsi, augmenter  $f(N+1)$  entraîne l'augmentation de toutes les forces.

Afin de minimiser les forces appliquées, nous allons donc calculer les forces afin de respecter les limites inférieures, tout en en ayant une sur cette limite.

Ainsi, on calcule  $N_f$  candidats pour  $f(N+1)$  : un pour chaque ligne de l'équation (3.18). Ce candidat  $f_c(j)$  est calculé afin d'avoir  $f(j) = f_{min}$  :

$$f_c(j) = \frac{f_{min} - \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} (j) \right]}{\left[ \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2 \\ 1 \end{pmatrix} (j) \right]^{-1}} \quad (3.19)$$

où  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} (j)$  est l'élément  $j$  de  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2 \\ 1 \end{pmatrix} (j)$  est l'élément  $j$  de  $\begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

En prenant la valeur maximale de ces candidats, nous sommes sûrs que chacune des forces

est supérieure à  $f_{min}$ . Les forces à appliquer pour résoudre l'équation tout en vérifiant les limites inférieures des forces et en minimisant la somme des forces sont donc :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_1^{-1} \mathbf{Z}_2 \\ 1 \end{pmatrix} \max_j(f_c(j)) \quad (3.20)$$

Comme pour l'actionnement avec  $2N$  moteurs, nous avons ici choisi de minimiser les forces mais nous avons un degré de liberté qui nous permettait de jouer sur la raideur de tous les modules en même temps : choisir une valeur supérieure à  $\max_j(f_c(j))$  pour  $f(N+1)$  augmenterait toutes les forces et ainsi la raideur de tous les modules. Cette possibilité ne sera pas étudiée dans cette thèse, l'objectif étant de minimiser les forces appliquées.

### 3.3 Espace de travail statique du manipulateur

Nous allons nous intéresser ici aux positions que la barre du haut du manipulateur peut atteindre. La tête ajoutée est donnée à titre d'exemple et aurait vocation à être remplacée par un outil. Nous distinguerons deux types d'espace de travail :

- l'espace de travail géométrique, qui est l'image dans l'espace cartésien de l'ensemble des configurations atteignables par le manipulateur en ayant pour limite uniquement les limites géométriques (dans notre cas les limites articulaires). Nous ne nous intéressons pas à cet espace dans cette thèse, le suivant étant plus pertinent ;
- l'espace de travail statique, qui intègre en plus des contraintes articulaires les contraintes d'équilibre, avec des forces bornées. C'est cet espace que nous allons étudier.

Dans la suite, l'espace de travail indiquera donc l'espace de travail statique, sauf mention du contraire.

L'espace de travail statique du manipulateur est l'ensemble des positions accessibles par la barre du haut du manipulateur telles que le manipulateur puisse être en équilibre dans ces configurations.

Tout d'abord, la condition d'équilibre se vérifie avec le modèle statique du manipulateur. Celui-ci est donné par :

$$\mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) \mathbf{f} \quad (3.21)$$

Pour une configuration  $\alpha$  donnée, il faut donc qu'il existe un ensemble de forces qui permettent de maintenir le manipulateur en équilibre.

Des limites sont imposées aux forces, qui dépendent des moteurs utilisés pour actionner le

manipulateur et des tensions admissibles dans les câbles. Ainsi, les forces doivent satisfaire :

$$f_{min} \leq f_j \leq f_{max} \quad (3.22)$$

Des limites articulaires sont également fixées. Elles peuvent provenir des limites physiques du prototype, ou de données biologiques provenant des vertèbres des oiseaux par exemple. Les orientations des modules doivent donc satisfaire :

$$\alpha_{min}(i) \leq \alpha_i \leq \alpha_{max}(i) \quad (3.23)$$

Il faut également vérifier qu'il n'y ait pas de collisions internes (entre les modules du manipulateur, la tête et les moteurs) et de collisions externes si des obstacles sont présents.

L'espace de travail du manipulateur est donc l'ensemble des poses accessibles sans collision de l'espace opérationnel telles qu'il existe un jeu de forces tel que les équations (3.21), (3.22) et (3.23) sont satisfaites.

Nous allons voir comment calculer cet espace de travail. Il est à noter que le modèle géométrique inverse ne peut être résolu explicitement. Il est donc compliqué d'obtenir l'ensemble des configurations  $\alpha$  permettant d'atteindre une pose désirée. Nous explorerons donc l'espace articulaire afin de trouver les configurations validant le modèle statique, puis nous calculerons les poses correspondantes.

### 3.3.1 Détection des collisions

Tout d'abord, nous allons détailler la détection des collisions. Cette détection se fait dans le plan du manipulateur. Le manipulateur est décomposé en plusieurs parties :

- chaque module est considéré comme une partie ;
- la tête est considérée comme une partie ;
- la plateforme sur laquelle est attaché le manipulateur, ainsi que les moteurs sont considérés comme une partie.

Pour la détection des collisions internes, on vérifie toutes les collisions entre deux parties. Si au moins un couple de parties est en collision, alors la configuration est dite en collision interne.

Pour la détection des collisions externes, pour un obstacle donné, on vérifie pour chaque partie du manipulateur si elle est en collision avec cet obstacle. Si au moins une partie est en collision avec l'obstacle, alors la configuration est dite en collision externe.

Chaque partie et chaque obstacle est représenté par un polygone. Par exemple, un module

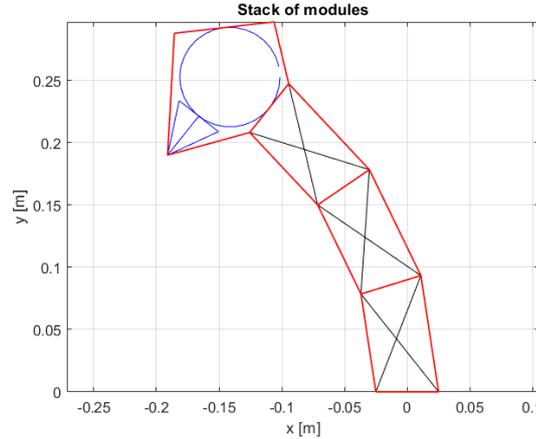


FIGURE 3.4 – Les polygones utilisés pour la détection des collisions.

est représenté par le trapèze formé par les ressorts et les barres non-croisées. Si la partie n'est pas directement un polygone (par exemple la tête qui est ronde), alors on prendra un polygone englobant. Les polygones de chaque partie sont montrés en rouge sur la Figure (3.4).

Le problème à résoudre est donc la détection de collision entre deux polygones. Nous dirons qu'il y a collision entre deux polygones si au moins l'un des côtés du premier croise un des côtés du second. Cela implique que si l'un des polygones est compris à l'intérieur de l'autre, nous ne détectons pas cela comme une collision. Cependant, comme notre manipulateur est continu, une de ses parties ne peut pas être incluse dans une autre sans qu'une tierce partie ne soit en collision avec l'une des deux. Seul le cas d'obstacles trop petits peut poser problème, nous ne considérerons donc pas d'obstacles dont la taille est inférieure à la taille des modules.

Il nous reste à détecter le croisement de deux segments (les côtés des polygones). Soient  $AB$  et  $CD$  deux segments. Notons  $(x_k, y_k)$  les coordonnées du point  $K$ . Nous supposons dans un premier temps que les segments ne sont ni verticaux ( $x_a \neq x_b$  et  $x_c \neq x_d$ ) ni horizontaux ( $y_a \neq y_b$  et  $y_c \neq y_d$ ). La droite prolongeant le segment  $AB$  a pour équation :

$$y = a_1x + b_1 \quad (3.24)$$

où  $a_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  et  $b_1 = y_A - \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x_A$ .

La droite prolongeant le segment  $CD$  a pour équation :

$$y = a_2x + b_2 \quad (3.25)$$

où  $a_2 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$  et  $b_2 = y_C - \left(\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}\right)x_C$ .

Si ces droites sont parallèles ( $a_1 = a_2$ ), alors elles ne se croisent pas. Sinon, l'intersection de ces deux droites se fait donc sur le point  $I$  dont les coordonnées sont  $(x_I = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}, y_I = a_1 x_I + b_1)$ . Il reste à vérifier que ce point se situe à la fois sur le segment  $AB$  et sur le segment  $CD$ , ce qui se fait aisément à partir des coordonnées des points.

Les cas des segments horizontaux ou verticaux sont traités en cas particuliers d'une manière similaire adaptée que nous ne détaillons pas ici.

La complexité de la détection de collisions peut être évaluée de la manière suivante en fonction du nombre  $N$  de modules : chaque module possède quatre côtés, et l'on vérifie s'il est en collision avec chacun des autres modules ainsi qu'avec la tête, la plateforme et les éventuels obstacles. La complexité de la détection est donc en  $O(16N^2 + 4N)$ . Les calculs en jeu étant rapides, la vérification de collision se fait en un temps raisonnable pour les manipulateurs que nous étudions (allant jusqu'à  $N = 10$  modules). Par exemple, le temps de calcul avec  $N = 10$  modules se fait en moyenne en  $0.2ms$  dans le cas où il n'y a pas de collision (le calcul est plus rapide quand il y a une collision car il s'arrête dès que la collision est détectée).

### 3.3.2 Exploration de l'espace articulaire

Une première méthode consiste à parcourir l'ensemble de l'espace articulaire et de vérifier le modèle statique pour l'ensemble complet. Nous choisissons de discrétiser l'espace articulaire, et de simplement vérifier pour chaque configuration discrète obtenue si elle vérifie le modèle statique ou non. Cette méthode ne garantit pas que le modèle statique soit vérifié entre deux configurations proches : il existe des méthodes fonctionnant sur des espaces continus en étudiant des intervalles au lieu des valeurs discrètes [GDM10]. Cependant, la discrétisation permet un affichage approché de l'espace de travail.

Nous utilisons un pas d'échantillonnage  $d_\alpha$ . Ainsi, en prenant en compte des limites articulaires, l'espace articulaire à étudier est :

$$\{\alpha = d_\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} \mid \forall i \in \{1, \dots, N\}, a_i \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_{min}(i) \leq \alpha_i \leq \alpha_{max}(i)\} \quad (3.26)$$

Pour chacune de ces configurations, il faut donc vérifier si le modèle statique peut-être satisfait avec des forces dans les bornes fixées. Pour cela, nous allons calculer un jeu de forces validant le modèle statique lorsque cela est possible. Ce calcul est fait en fonction de l'action-

nement.

On ne considère que les actionnements complets. De manière générale, il y a une infinité de jeux de forces satisfaisant le modèle statique. Il faut néanmoins vérifier qu'au moins l'un des jeux de forces soit acceptable.

Les méthodes de calcul des forces ont été présentées précédemment pour les actionnements avec  $2N$  et  $N + 1$  moteurs, qui sont ceux auxquels nous nous intéressons.

### Complexité

Définissons les nombres  $d_i$  d'orientations possibles pour le module  $i$  :

$$d_i = \sup\left(\frac{\alpha_{max}(i) - \alpha_{min}(i)}{d_\alpha}\right) \quad (3.27)$$

où  $\sup$  est la fonction qui retourne l'entier supérieur à l'argument.

Le modèle statique doit être vérifié  $\left(\prod_{i=1}^N d_i\right)$  fois. Ce nombre augmente donc de manière exponentielle par rapport au nombre de modules. Ainsi, cette méthode est utilisable dans un temps raisonnable (moins d'une journée) jusqu'à  $N = 4$  modules, mais devient ensuite bien trop longue avec un pas d'échantillonnage  $d_\alpha$  suffisamment petit pour avoir des résultats intéressants (nous prenons  $d_\alpha = 5deg$ , ce qui donne une cinquantaine d'orientations possibles par module). Nous détaillerons en section 7.1 une méthode permettant une exploration dans un espace de dimension  $N_f$ , ce qui permettra le calcul d'espaces de travail pour des manipulateurs avec beaucoup de modules et peu de moteurs.

### Exemple

L'espace de travail statique obtenue avec  $N = 3$  modules et  $N_f = 6$  moteurs est montré en Figure (3.5). Les barres ont pour longueur  $L = 10cm$  et  $b = 5cm$ . Les limites articulaires sont de  $\pm 144deg$ , les limites des forces sont  $f_{min} = 0N$  et  $f_{max} = 140N$ . Les ressorts du premier module ont une raideur de  $600N.m^{-1}$  tandis que ceux des deux autres modules sont de  $200N.m^{-1}$ . Des zones de l'espace de travail sont mises en évidence en fonction des forces nécessaires pour les atteindre. La couleur verte indique qu'il existe un jeu de forces pour obtenir cette position dont la somme est inférieure à  $50N$ , la couleur bleue que cette somme est inférieure à  $100N$ , et la couleur rouge que cette somme est supérieure à  $100N$ . L'espace de travail obtenu n'est pas parfaitement symétrique à cause des collisions engendrées par la tête, qui n'est pas symétrique.

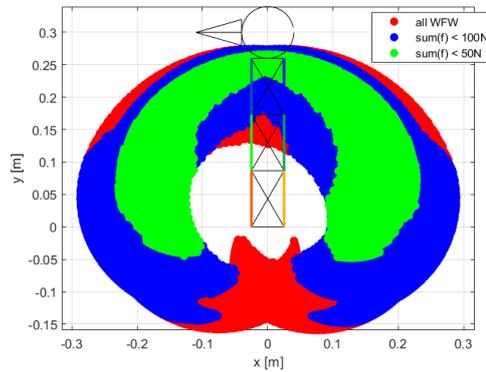


FIGURE 3.5 – Espace de travail statique pour l’actionnement à  $N_f = 2N$  moteurs.

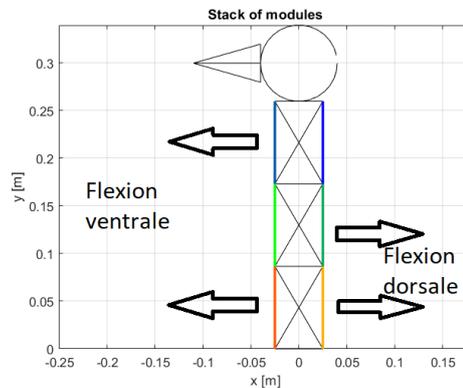


FIGURE 3.6 – Flexions principales du cou de l’oiseau représentées sur le manipulateur.

### 3.4 Analyse de l’espace de travail statique

Nous allons détailler ici plusieurs points utiles à la conception du manipulateur. Dans le cou de l’oiseau, les vertèbres peuvent être scindées en trois groupes par rapport à leur positionnement et leur fonction [Ter+20]. Le groupe le plus proche de la tête est principalement flexible dans la direction ventrale, le groupe intermédiaire est lui principalement flexible dans la direction dorsale, et le groupe le plus proche du corps de l’oiseau est flexible dans les deux directions. Ces directions sont indiquées par rapport à notre manipulateur sur la Figure (3.6). Nous allons donc dans un premier temps nous intéresser à la conception d’un manipulateur avec trois modules.

Nous ajouterons dans le chapitre 7 des éléments sur l’analyse d’un manipulateur sous-actionné constitué d’une dizaine de modules.

### 3.4.1 Influence des ressorts et de la gravité

Nous discutons ici des influences des énergies potentielles afin de justifier les choix qui seront effectués pour choisir les raideurs des ressorts.

Plus on augmente la raideur des ressorts, plus le système est stable. Puisque nous ne voulons pas que le manipulateur s'effondre sous son propre poids, nous nous orienterons donc vers des raideurs de ressorts qui produisent des efforts plus importants que la gravité sur notre manipulateur.

D'autre part, il faut que les raideurs des ressorts soient en cohérence avec les forces que l'on souhaite appliquer. Il faut que l'on puisse atteindre les configurations désirées avec les forces dans les bornes que l'on s'accorde. Il ne faut donc pas que les raideurs soient trop élevées pour que l'on puisse atteindre un espace de travail suffisamment grand.

Il faut donc trouver un compromis entre des raideurs élevées pour contrer la gravité et des raideurs faibles pour avoir un espace de travail de grande dimension.

### 3.4.2 Choix des ressorts avec le modèle statique

Nous allons ici présenter des méthodes permettant de calculer les raideurs des ressorts afin d'atteindre divers objectifs. Nous nous basons sur le modèle statique afin de calculer ces raideurs.

Nous allons principalement imposer des configurations d'équilibre. Le modèle statique nous indique que la configuration  $\alpha$  est une configuration d'équilibre avec les forces  $\mathbf{f}$  si :

$$\mathbf{g}_s = \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f} - \mathbf{g}_g \quad (3.28)$$

où  $\mathbf{g}_s$  est le vecteur dérivée de l'énergie potentielle provenant des ressorts et  $\mathbf{g}_g$  est le vecteur dérivée de l'énergie potentielle provenant de la gravité.

Comme on peut le voir dans l'équation (2.46), l'élément  $i$  de  $\mathbf{g}_s$  est linéaire en la raideur des ressorts du module  $i$ , et ne dépend pas des autres ressorts. Une configuration d'équilibre permet donc d'établir une équation par module.

Des méthodes pour calculer les raideurs des ressorts qui garantissent un espace de travail et une certaine stabilité pour le manipulateur constitué d'un seul module sont présentées dans [MW21], et peuvent être étendues pour deux modules, mais ces méthodes ne sont pas applicables pour des manipulateurs avec trois modules ou plus. Nous allons donc seulement ajouter des contraintes afin d'assurer que le manipulateur puisse atteindre deux configurations extrêmes

qui correspondent aux limites articulaires de chaque module. Nous supposons que l'actionnement considéré est complet et qu'un même câble ne tire que sur un côté du manipulateur (comme c'est le cas pour les deux actionnements complets que nous avons introduits). Les conditions sur  $\mathbf{g}_s$  et donc sur les ressorts pour que la configuration extrême la plus à gauche  $\alpha_{max}$  puisse être atteinte sont :

$$\mathbf{g}_s(\alpha_{max}) \leq \mathbf{Z}(\alpha_{max})\mathbf{f}_l - \mathbf{g}_g(\alpha_{max}) \quad (3.29)$$

où  $\mathbf{f}_l$  est le jeu de forces où toutes les forces tirant à gauche sont à  $f_{max}$  et les autres forces sont à  $f_{min}$ .

De façon symétrique, les conditions sur la configuration extrême la plus à droite sont :

$$\mathbf{g}_s(\alpha_{min}) \geq \mathbf{Z}(\alpha_{min})\mathbf{f}_r - \mathbf{g}_g(\alpha_{min}) \quad (3.30)$$

où  $\mathbf{f}_r$  est le jeu de forces où toutes les forces tirant à droite sont à  $f_{max}$  et les autres forces sont à  $f_{min}$ .

Ces équations nous donnent ainsi deux conditions pour chaque couple de ressort (un couple étant formés par les ressorts d'un même module).

Les limites articulaires choisies sont  $\alpha_{min} = -144deg$  et  $\alpha_{max} = 144deg$  pour chaque module, ce qui correspond aux limites articulaires du prototype que nous utiliserons. Les limites des forces sont  $f_{min} = 0N$  et  $f_{max} = 140N$ .

Chaque module possède deux ressorts, et chacun de ces ressorts n'affecte que ce module. Ainsi, pour chaque module nous allons établir deux équations linéaires en la raideur des ressorts associés afin d'obtenir ces deux raideurs.

### Utilisation de deux configurations à l'équilibre

Nous avons vu qu'une configuration d'équilibre permet d'établir une équation par module. En fixant deux configurations d'équilibre, on peut donc calculer les raideurs des ressorts nécessaires.

Si les forces  $f$  sont nulles, alors nous dirons que la configuration est en équilibre au repos. On peut par exemple choisir une configuration au repos et une seconde configuration que l'on souhaite atteindre avec un jeu de force fixé. On peut également choisir les deux configurations extrêmes utilisées pour garantir l'espace de travail suffisant, avec les forces que l'on souhaite.

Il faut cependant être prudent car la résolution des équations linéaires n'assurent pas d'obtenir des raideurs positives, ce qui est nécessaire pour la mise en pratique.

### Utilisation d'une configuration à l'équilibre et d'une contrainte de raideur de module

On peut fixer une configuration d'équilibre pour avoir une équation par module. Pour la seconde, on peut fixer les valeurs de la diagonale de la matrice raideur  $\mathbf{K}$ , dont l'élément  $i$  est linéaire en les raideurs des ressorts du module  $i$  et ne dépend pas des autres. On utilise pour cela l'équation (2.54).

Cela permet par exemple de fixer une configuration d'équilibre au repos et sa stabilité. Ici aussi, la résolution des équations linéaires n'assure pas d'obtenir des raideurs positives, ce qui est nécessaire pour la mise en pratique.

#### Utilisation d'une configuration à l'équilibre et d'une raideur moyenne des ressorts

On cherche ici à avoir plus de contrôle sur les valeurs potentielles des raideurs des ressorts, afin d'avoir des résultats correspondant aux ressorts disponibles et d'avoir un meilleur contrôle sur la positivité des ressorts.

On ajoute donc une contrainte sur la moyenne des raideurs (qui peut être différente pour chaque module) afin d'avoir une seconde équation linéaire :

$$\frac{k_l(i) + k_r(i)}{2} = v_{mean}(i) \quad (3.31)$$

où  $\mathbf{v}_{mean}$  est le vecteur des valeurs moyennes à fixer.

Cette méthode est similaire à la précédente mais permet un meilleur contrôle des résultats obtenus. Ceci permet notamment de gérer l'ordre de grandeur des raideurs des ressorts afin d'obtenir des raideurs proches de celles des ressorts disponibles en pratique. Une moyenne de raideur élevée permet également d'avoir des raideurs positives : les raideurs des deux ressorts d'un module augmentent toutes les deux lorsqu'on augmente leur moyenne puisqu'une configuration d'équilibre est fixée.

C'est cette dernière méthode que nous avons utilisé pour choisir les raideurs du prototype à trois modules. Nous avons fixé la configuration verticale ( $\alpha = \mathbf{0}_{N \times 1}$ ) comme configuration d'équilibre au repos, qui implique que les raideurs des ressorts à gauche sont identiques aux raideurs des ressorts à droite ( $k_l(i) = k_r(i)$  pour chaque module  $i$ ). Ainsi, les contraintes sur les configurations extrêmes se simplifient et, par symétrie des configurations extrêmes considérées, on obtient une contrainte par couple de ressort. Ainsi, avec une longueur à vide fixée à  $0.046m$  (soit la longueur à vide moyenne des ressorts disponibles), les contraintes sont :

$$k_l(1) \leq 996N.m^{-1} \quad (3.32a)$$

$$k_l(2) \leq 730N.m^{-1} \quad (3.32b)$$

$$k_l(3) \leq 577N.m^{-1} \quad (3.32c)$$

Ensuite, nous avons fixé les valeurs moyennes des raideurs des ressorts, avec des valeurs plus élevées pour le premier module afin d'assurer une meilleure stabilité. Nous avons également choisi ces moyennes en fonction des ressorts disponibles pour le prototype. Nous avons donc fixé :

$$\mathbf{v}_{mean} = \begin{pmatrix} 600 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} N.m^{-1} \quad (3.33)$$

Ainsi, les raideurs obtenues sont les suivantes :  $600N.m^{-1}$  pour les ressorts à gauche et à droite du premier module, et  $200N.m^{-1}$  pour tous les autres ressorts.

### 3.4.3 Comparaison des actionnements complets

Nous comparons ici les espaces de travail obtenus avec les deux actionnements complets que nous avons évoqués : celui avec  $N_f = 2N$  moteurs et celui avec  $N_f = N + 1$  moteurs. Le manipulateur étudié est constitué de 3 modules, et les raideurs des ressorts ainsi que les limites des forces sont celles définies précédemment.

L'actionnement choisi pour le cas avec  $N + 1$  moteurs est le suivant : un câble long à gauche de tous les modules (côté où pointe le bec), et les trois autres câbles à droite des modules. Ce choix s'inspire de la musculature du cou du pic, qui a un long muscle puissant du côté ventral [Böh+19].

Le pas d'échantillonnage choisi est  $d_\alpha = 5deg$ , ce qui permet d'avoir environ 180 000 configurations avec les limites articulaires utilisées.

Les résultats obtenus pour les deux actionnements sont montrés en Figure (3.4.3). Dans les deux cas, nous avons balayé les 180 000 configurations pour un temps de calcul d'environ 8sec. La non-symétrie de l'espace de travail pour  $N_f = 2N$  moteurs est due à la détection des collisions avec la tête qui est orientée bec vers la gauche. Nous pouvons remarquer que la forme globale de l'espace de travail est la même : le fait d'avoir deux moteurs de moins ne modifie que peu l'espace de travail. Il en est de même pour la zone verte, où les forces utilisées sont faibles.

La différence principale est la zone bleue (somme des forces nécessaires entre 50N et 100N), qui est bien plus importante dans la partie droite de l'espace de travail avec l'actionnement à  $N_f = 6$  moteurs qu'avec l'actionnement à  $N_f = 4$  moteurs. Ceci s'explique par le placement du câble long à gauche : celui-ci seul permet moins d'ajustement sur la gauche que les trois câbles présents à gauche dans l'actionnement à  $N_f = 6$  moteurs. Dans le cas à  $N_f = 4$  moteurs,

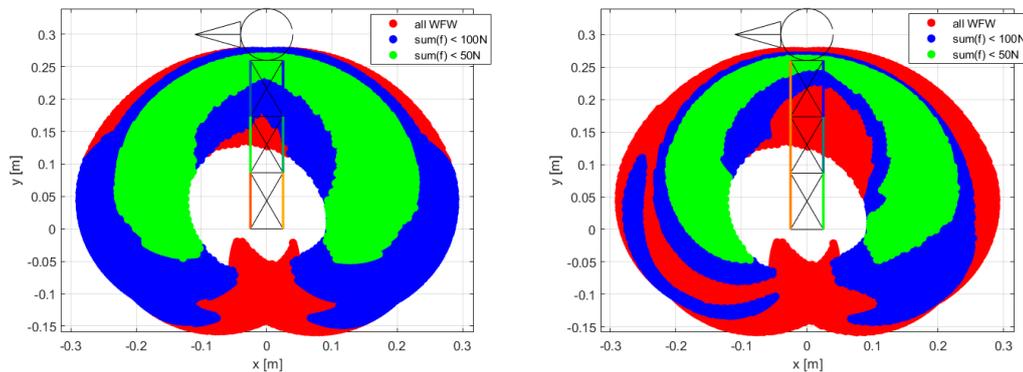


FIGURE 3.7 – Espace de travail pour l’actionnement à  $N_f = 2N$  moteurs (à gauche) et l’actionnement à  $N_f = N + 1$  moteurs (à droite). La couleur verte indique qu’il existe une solution telle que la somme des forces utilisées pour obtenir cette position est inférieure à  $50N$ , la couleur bleue que cette somme est inférieure à  $100N$ , et la couleur rouge que cette somme est supérieure à  $100N$ .

les ajustements dans la partie gauche demandent d’utiliser les moteurs tirant à droite, et donc d’augmenter les forces utilisées.

Comme les résultats restent très similaires, et afin de réduire le nombre de moteurs utilisées, nous privilégierons l’actionnement avec  $N_f = 4$  moteurs pour notre prototype à  $N = 3$  modules.

### 3.5 Conclusion

Nous avons analysé dans ce chapitre différents points permettant de mieux comprendre le fonctionnement du manipulateur.

Nous avons d’abord vu que la prise en compte des poulies dans le calcul de la longueur des câbles était importante car l’impact des poulies dans les modèles n’est pas négligeable.

Nous avons ensuite défini un actionnement complet, et montré qu’un tel actionnement nécessite au minimum  $N_f = N + 1$  câbles. Nous avons détaillé deux actionnements complets, l’un avec  $N_f = 2N$  câbles et le second avec  $N_f = N + 1$  câbles.

Nous avons comparé ces deux actionnement sur la base de l’espace de travail statique qu’ils engendrent sur un même manipulateur constitué de trois modules. Nous en avons déduit que pour ce manipulateur, l’actionnement avec  $N_f = N + 1$  câbles permet d’avoir un espace de travail satisfaisant en comparaison avec l’actionnement à  $2N$  câbles et nous le choisissons donc pour le prototype puisqu’il permet d’utiliser moins de moteurs.

Nous avons également présenté plusieurs méthodes pour calculer les raideurs des ressorts,

et l'une d'elle a été utilisée pour choisir les raideurs des ressorts du prototype.

Nous allons maintenant présenter le prototype, ainsi que l'identification des paramètres inconnus sur ce dernier.

# IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UN PROTOTYPE À 3 MODULES ET 4 MOTEURS

---

Nous débutons dans ce chapitre la partie expérimentale. Le prototype et son fonctionnement sont détaillés. Nous expliquerons également comment sont évalués les orientations des modules  $\alpha$  à partir des positions moteurs  $\theta$ .

Plusieurs problèmes sont intervenus aux premiers essais expérimentaux aux cours desquels les frottements moteurs étaient négligés et les câbles étaient supposés rigides.

Une identification des frottements moteurs, ainsi que de l'élasticité des câbles est donc mise en place pour palier ces problèmes.

L'identification est effectuée directement sur le prototype, ce qui permet de se placer en condition d'utilisation. Cela permet par exemple d'inclure les frottements des poulies dans les frottements moteurs puisque la vitesse du câble est proportionnelle à la vitesse du moteur.

Les paramètres identifiés sont finalement intégrés dans un simulateur, ce qui le rend plus fidèle.

## 4.1 Description du prototype

Rappelons d'abord les éléments que nous avons fixés auparavant :

- le manipulateur est un empilement de  $N = 3$  modules ;
- les longueurs des barres diagonales sont  $L = 10\text{cm}$  et les longueurs des barres du haut et du bas sont  $b = 5\text{cm}$  ;
- les ressorts de chaque côté du premier module ont une raideur de  $600\text{N.m}^{-1}$  et les ressorts de chaque côté des deux autres modules ont une raideur de  $200\text{N.m}^{-1}$ . Ainsi, la configuration droite  $\alpha = \mathbf{0}_{N \times 1}$  est une configuration d'équilibre au repos ;

— le nombre de moteurs est fixé à  $N_f = 4$ . Le câblage utilisé est celui présenté en Figure (3.3), avec le câble long sur la gauche du manipulateur et trois câbles sur sa droite.

Il n'est pas physiquement possible d'assembler un prototype dans un seul plan à cause des barres diagonales qui se croisent. Ainsi, le prototype est monté sur deux plans, chacun contenant l'une des barres diagonales de chaque modules. De ce fait, les barres du bas et du haut sont dédoublées pour être présentes dans les deux plans. Les deux plans sont reliés par des barres supplémentaires au niveau des extrémités des barres initiales, qui servent d'axe de rotation mais également à placer les poulies permettant de passer les câbles. Ces poulies sont placées en quatre rangées, afin que chaque câble ait sa propre rangée et qu'il n'y ait pas de frottements entre les différents câbles. La conception équilibrée du prototype permet de minimiser l'impact de la dimension supplémentaire sur la validité des modèles plans établis dans les chapitres précédents. Une photo du prototype est montrée en Figure (4.1). On y voit également les rangées de poulies utilisées pour passer les câbles.

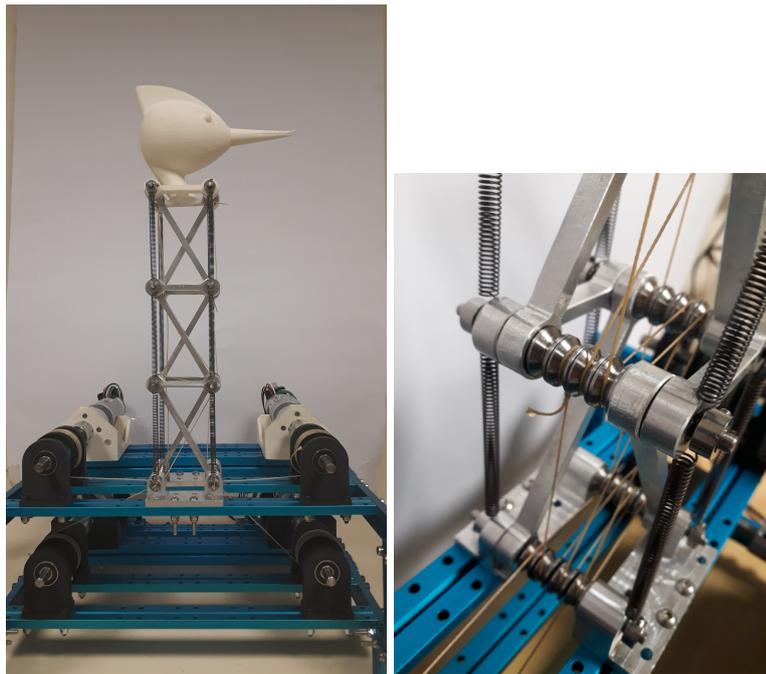


FIGURE 4.1 – A gauche : photo du prototype. A droite : les rangées de poulies utilisées pour passer les câbles.

Les barres ont été façonnées en aluminium. Une tête d'oiseau imprimée en 3D en ABS a également été ajoutée au sommet de la pile.

Afin de répartir équitablement leurs effets, les ressorts sont répartis dans les deux plans. Ainsi, de chaque côté du premier module, il y a deux ressorts de raideur égale à  $300N.m^{-1}$

afin d'avoir l'équivalent d'un ressort de raideur à  $600N.m^{-1}$ . Il en est de même pour les modules supérieurs, avec de chaque côté deux ressorts de raideur égale à  $100N.m^{-1}$  afin d'avoir l'équivalent d'un ressort de raideur à  $200N.m^{-1}$ .

Les quatre moto-réducteurs sont des moteurs MAXON à engrenages sans balais (ECMAX40L/PM42). Leurs caractéristiques sont indiquées dans la Table 4.1.

Tension	24VCC
Courant nominal	4A
Vitesse à vide	202rpm
Couple nominal	3.10Nm
Vitesse nominale	160rpm
Rapport de réduction $R$	25

TABLE 4.1 – Caractéristiques des moto-réducteurs.

Les câbles sont reliés aux moteurs par des enrouleurs. Le rayon des enrouleurs impacte :

- la longueur de câble qui peut y être enroulé (pour une longueur d'enrouleur fixée) car nous voulons un seul niveau d'enroulement de câble ;
- la force appliquée sur le câble et la vitesse de ce dernier. Le rayon de l'enrouleur joue un rôle similaire au rapport de réduction du réducteur : un rayon plus important diminue la force appliquée pour un même couple moteur, mais augmente la vitesse du câble pour une même vitesse de moteur.

Comme compromis entre ces différents points, le rayon de l'enrouleur choisi est  $r_d = 2cm$ . Ainsi, la force maximale applicable est  $f_{max} = 155N$  et la vitesse nominale des câbles est de  $0.33m.s^{-1}$ . Ces enrouleurs sont imprimés en 3D et sont rainurés pour permettre un enroulement correct des câbles.

Afin de commander les moteurs, des variateurs ESCON 50/5 sont employés.

Il n'y a pas de moyen de mesure directe de l'orientation des modules : celle-ci est estimée à partir des positions moteurs obtenues via les codeurs. Nous détaillons deux méthodes d'estimation dans la section suivante.

Un micro-contrôleur Beaglebone Blue est utilisé pour implémenter la commande du prototype. Il est relié aux codeurs des moteurs afin d'en récupérer les positions, ainsi qu'aux variateurs afin de leur transmettre les consignes de PWM (modulation à largeur d'impulsion) permettant le contrôle des moteurs.

La boucle de commande récapitulant ces informations est présentée en Figure (4.2). La configuration courante  $\alpha$  et sa dérivée  $\dot{\alpha}$  sont estimées à partir des positions moteurs  $\theta$  (et leurs vitesses  $\dot{\theta}$  obtenues par dérivation numérique) via la longueur des câbles  $l$ . La commande

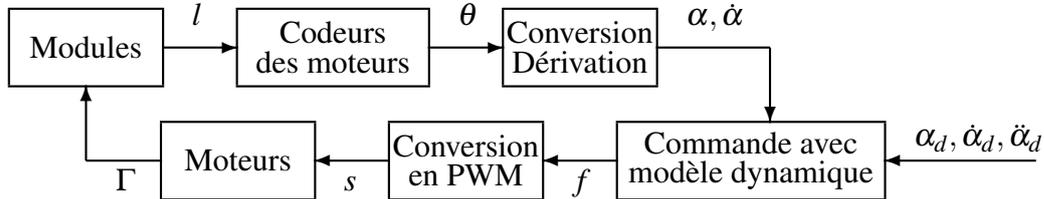


FIGURE 4.2 – Boucle de commande du prototype.

calcule les forces  $f$  à appliquer, en fonction de  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$  et de la trajectoire désirée  $(\alpha_d, \dot{\alpha}_d, \ddot{\alpha}_d)$ . Ces forces sont ensuite traduites en signaux  $s$  sous forme de PWM. Ils sont transmis aux moteurs afin que ces derniers appliquent les couples  $\Gamma$ .

Des détails plus techniques sur le prototype sont développés dans [Fur+19], à la seule différence qu'un seul module est considéré et que les barres  $y$  sont imprimées en ABS.

## 4.2 Évaluation de $\alpha$

Il n'y a pas de codeurs spécifiques pour la mesure de  $\alpha$  en ligne. Les orientations des modules peuvent cependant être estimées à partir des positions moteurs, en utilisant les modèles géométriques de câbles que nous avons développés dans la section 2.2.4. Cette estimation est notée  $\hat{\alpha}$ .

De plus, l'élasticité des câbles doit être prise en compte pour avoir une mesure précise. Il faut pour cela identifier la raideur des câbles. Pour cela, nous utiliserons un autre moyen de mesure pour  $\alpha$  : une estimation hors-ligne par traitement d'image sur des vidéos enregistrées. Cette estimation est notée  $\alpha_{IP}$ .

### 4.2.1 Évaluation de $\alpha$ depuis $\theta$ : $\hat{\alpha}$

Deux méthodes sont envisagées pour calculer  $\hat{\alpha}$  à partir des valeurs mesurées de  $\theta$ . Nous supposons dans cette section que l'allongement du câble  $\mathbf{x}_c$  et sa dérivée sont connus à partir de la raideur du câble identifiée et de la tension du câble. Les méthodes proposées peuvent également être utilisées avec des câbles rigides en fixant  $\mathbf{x}_c = 0$ . Dans la première méthode, le nombre minimal de données de mesure de  $\theta$ , à savoir trois, est utilisé. L'estimation  $\hat{\alpha}$  repose alors sur le modèle d'élasticité du câble et cette méthode peut être utilisée pour évaluer la

qualité de ce modèle. La deuxième méthode utilise les quatre données de mesure disponibles de  $\theta$ . L'estimation  $\hat{\alpha}$  est définie comme un compromis entre ces quatre données. En conséquence, la fiabilité de l'estimation est moins dépendante de la qualité du modèle d'élasticité du câble.

### Calcul à partir de trois éléments de $\theta$

La Figure (4.3) rappelle le câblage utilisé sur le prototype.

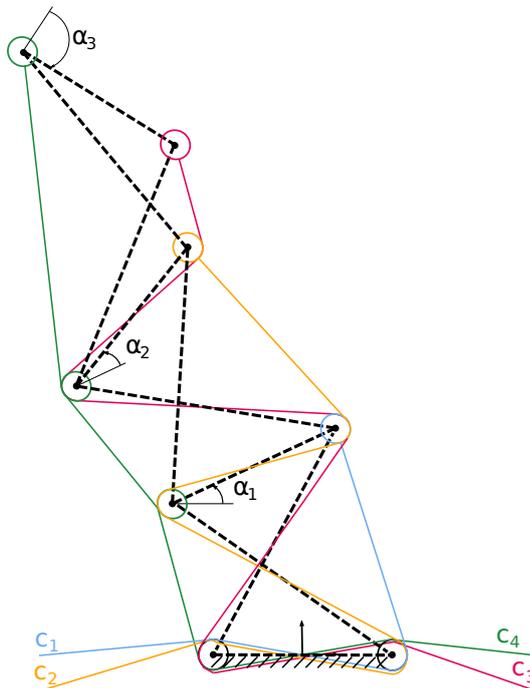


FIGURE 4.3 – Câblage du prototype à  $N = 3$  modules et  $N_f = 4$  moteurs.

La première méthode utilise seulement trois composantes de  $\theta$ . L'idée est de calculer les orientations des articulations  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{\alpha}_2$  et  $\hat{\alpha}_3$  de manière récursive en fonction des longueurs des câbles à droite (c'est-à-dire les câbles bleu, jaune et rouge utilisés pour actionner la première, la deuxième et la troisième articulation sur la Figure (4.3)). L'orientation  $\hat{\alpha}_1$  est d'abord calculée à partir de la longueur  $l_1$  du câble bleu en utilisant les équations (3.14a) et (2.63). Connaissant  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{\alpha}_2$  est ensuite calculé à partir de la longueur  $l_2$  du câble jaune à l'aide des équations (3.14b) et (2.63).

Connaissant  $\hat{\alpha}_1$  et  $\hat{\alpha}_2$ ,  $\hat{\alpha}_3$  est finalement calculé à partir de la longueur  $l_3$  du câble rouge

avec les équations (3.14c) et (2.63). On obtient le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 = f^1(\theta_1, x_{c1}) \\ \hat{\alpha}_2 = f^2(\theta_1, \theta_2, x_{c1}, x_{c2}) \\ \hat{\alpha}_3 = f^3(\theta_1, \theta_2, \theta_3, x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Aucune expression explicite n'a pu être trouvée pour ce système. Cependant, en raison de la monotonie des fonctions de longueur de câble utilisées pour obtenir le système ci-dessus, nous savons que  $\hat{\alpha}_1$ ,  $\hat{\alpha}_2$  et  $\hat{\alpha}_3$  sont définis de manière unique. Nous avons mis en place une procédure simple et rapide pour obtenir des valeurs approchées de  $\hat{\alpha}_i$  par interpolation linéaire à partir d'un ensemble pré-calculé de solutions. Le nombre de solutions pré-calculées est suffisamment grand pour que l'erreur de  $\hat{\alpha}_i$  soit toujours inférieure à la précision permise par la résolution des encodeurs du moteur.

#### Calcul en utilisant tous les éléments de $\theta$

La deuxième méthode pour obtenir  $\hat{\alpha}$  à partir de  $\theta$  utilise toutes les composantes de  $\theta$ . Sachant que les câbles sont élastiques, l'idée est d'utiliser toutes les mesures pour avoir un calcul plus réaliste.

L'équation (2.64) peut se réécrire :

$$\mathbf{Z}(\hat{\alpha}(t))^T \left( \hat{\alpha}(t + \Delta t) - \hat{\alpha}(t) \right) = \frac{r_d}{R} \left( \theta(t + \Delta t) - \theta(t) \right) + \left( \mathbf{x}_c(t + \Delta t) - \mathbf{x}_c(t) \right), \quad (4.2)$$

où  $\Delta t$  est un pas de temps suffisamment petit. La pseudo-inverse de Moore-Penrose  $\mathbf{Z}^{T+}$  permet de calculer la variation de  $\hat{\alpha}$  qui minimise l'erreur. Par conséquent,  $\hat{\alpha}$  peut être calculée comme suit :

$$\hat{\alpha}(t + \Delta t) = \hat{\alpha}(t) + \mathbf{Z}(\hat{\alpha}(t))^{T+} \left[ \frac{r_d}{R} \left( \theta(t + \Delta t) - \theta(t) \right) + \left( \mathbf{x}_c(t + \Delta t) - \mathbf{x}_c(t) \right) \right]. \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 Mesure de $\alpha$ par traitement d'image : $\alpha_{IP}$

L'identification de la raideur du câble nécessite la connaissance de l'allongement du câble et, par conséquent, de  $\theta$  et de  $\alpha$ . La première est mesurée à partir des codeurs des moteurs et la seconde est mesurée par vidéo. Nous utilisons une caméra avec une taille d'image de  $1280 \times 720$  pixels et 30 images par seconde. Pendant les expériences, les déplacements des articulations sont enregistrés. À cette fin, plusieurs marqueurs colorés sont placés sur les barres supérieure et inférieure des trois articulations (voir Fig. 4.4). Ensuite,  $\alpha_{IP}$  est calculé hors ligne avec un algorithme de traitement d'image (IP pour "image processing") sur la base des marqueurs. La

zone cible de l'IP est maintenue au centre de la vidéo pour éviter toute distorsion. Les dérivées premières et secondes de  $\alpha_{IP}$  sont calculées numériquement. Nous pourrions noter que la faible fréquence vidéo ne permet pas d'utiliser  $\alpha_{IP}$  à des fins de contrôle, mais la vidéo peut être utilisée pour les expériences d'identification. La précision sur la mesure de  $\alpha_{IP}$  est d'environ  $1deg$ , ce qui est acceptable au vu des erreurs rencontrées lors du contrôle.

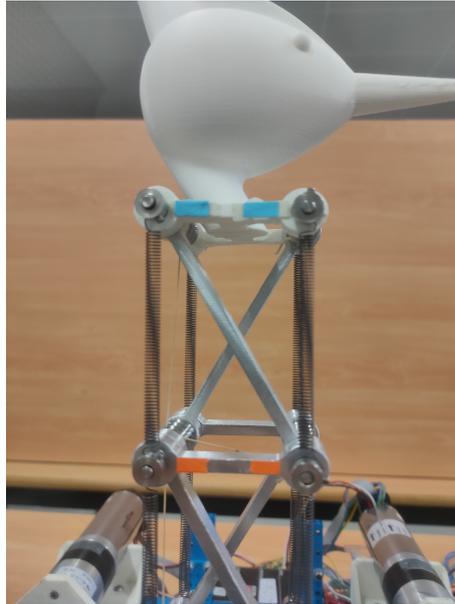


FIGURE 4.4 – Les marqueurs colorés utilisés pour calculer  $\alpha_{IP}$  à partir de la vidéo.

### 4.3 Les problèmes amenant à l'identification

Des premières expériences ont été menées sur une version provisoire du prototype où un seul module était contrôlé à l'aide de deux moteurs. La commande (qui sera développée dans la prochaine section) utilisait le modèle dynamique proposé dans cette thèse, mais sans la prise en compte des frottements ni de l'élasticité des câbles. Deux problèmes majeurs ont été remarqués à cette étape.

Le premier problème est que les forces appliquées pendant les expériences étaient très différentes des forces estimées par le modèle dynamique, comme on peut le voir sur la Figure (4.5). Non seulement les amplitudes en jeu sont différentes, mais en plus les courbes ne coïncident pas en forme.

Le second problème est sur l'estimation de  $\alpha$  qui est biaisée par l'élasticité des câbles. Pour un seul module actionné par deux moteurs, on peut calculer  $\hat{\alpha}$  à partir du câble gauche

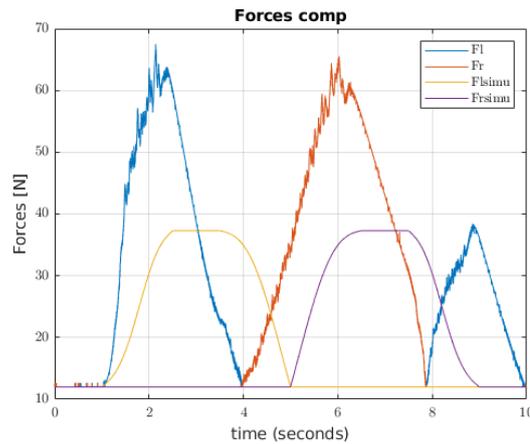


FIGURE 4.5 – Forces appliquées sur un module en expérience (courbes bleues et rouges), en comparaison des forces estimées par le modèle dynamique (courbes jaunes et violettes).

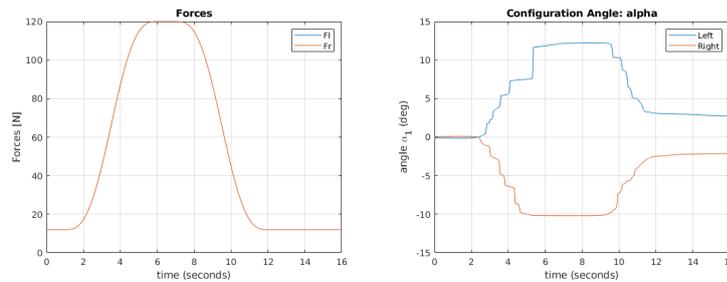


FIGURE 4.6 – A gauche : forces appliquées en boucle ouverte sur le module, les deux forces sont identiques ce qui implique que le module ne bouge pas. A droite : estimations  $\hat{\alpha}$  obtenues à partir des moteurs à gauche et à droite.

seulement, ou du câble droit seulement. Des câbles non-déformables impliqueraient que ces deux mesures donnent la même estimation, ce qui n'était pas le cas. Afin de bien mettre en évidence l'élasticité des câbles, nous avons procédé à l'expérience suivante : en boucle ouverte, nous avons augmenté les deux forces appliquées simultanément afin que le module reste en position  $\alpha = 0deg$ , et nous avons regardé les deux estimations  $\hat{\alpha}$ . Les forces appliquées ainsi que les résultats obtenus sont montrés en Figure (4.6). Bien que le module n'ait pas bougé, l'estimation par le moteur de gauche indique que le module se serait orienté de  $10deg$  vers la gauche, tandis que l'estimation par le moteur de droite indique que le module se serait orienté de  $10deg$  vers la droite. Non seulement le module n'a pas bougé, mais en plus la différence entre les deux estimations est montée jusqu'à  $20deg$ .

Des essais ont également été effectués sur trois modules avec une commande sans la prise en compte des frottements ni de l'élasticité des câbles, et une estimation de  $\alpha$  à partir de trois

positions moteurs comme présenté dans la section 4.2.1. Les résultats de ces essais ont été publiés dans [Fas+20]. De grandes oscillations étaient présentes dans les forces appliquées, et les estimations de  $\alpha$  n'étaient pas précises.

Afin de corriger ces problèmes, nous allons intégrer les forces de frottements dans la commande, ainsi que l'élasticité des câbles dans l'estimation  $\hat{\alpha}$  et dans la commande. Nous voulons donc identifier ces paramètres, ce qui nous permettra :

- d'avoir une commande efficace ;
- d'avoir un simulateur proche de la réalité ;
- d'avoir une bonne estimation de  $\alpha$  à partir de  $\theta$ .

Les travaux d'identifications ont mené à la publication [Fas+21].

Les paramètres à identifier sont les coefficients de frottements, ainsi que les coefficients de raideur des câbles. Nous allons utiliser un modèle d'identification linéaire en ces coefficients.

## 4.4 Modèle d'identification

### 4.4.1 Modèle complet d'identification

Les équations faisant intervenir les coefficients à identifier sont rassemblées pour obtenir un système d'équations linéaires en ces paramètres :

$$\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{y} \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{v}$  est le vecteur des  $n_p$  paramètres à identifier.

Le détail de la matrice  $\mathbf{D}$  et des vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{y}$  seront indiqués prochainement, en fonction des coefficients à identifier.

### 4.4.2 Méthode d'identification

Les forces motrices  $\mathbf{f}$  et les positions  $\theta$  ainsi que les angles d'orientation  $\alpha$  sont échantillonnés le long d'une trajectoire spécifique pour obtenir  $r$  valeurs échantillonnées. Ensuite,  $\mathbf{v}$  peut être estimé comme la solution des moindres carrés  $\hat{\mathbf{v}}$  du système linéaire :

$$\mathbf{W}\mathbf{v} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{Y} \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{W}$  est une matrice d'observation ( $r \times n_p$ ) définie par un échantillonnage du régresseur  $\mathbf{D}$  défini dans (4.14) ou (4.16),  $\mathbf{Y}$  est un échantillonnage de  $\mathbf{y}$  défini dans (4.13) ou (4.15),  $\boldsymbol{\rho}$  est le

vecteur des résidus ou le vecteur des erreurs. Le nombre  $r$  d'échantillons doit être supérieur au nombre de paramètres à identifier :  $r > n_p$  [KD04].

Le vecteur de paramètres  $\mathbf{v}$  minimisant la norme 2 de  $\rho$  est donné par :

$$\mathbf{v} = \mathbf{W}^+ \mathbf{Y} \quad (4.6)$$

La qualité de la solution dépend du conditionnement de  $\mathbf{W}$ , qui dépend du choix de la trajectoire effectuée lors du processus d'identification. Si les bruits de mesure sont indépendants en  $\mathbf{W}$  et  $\mathbf{Y}$ , la qualité de l'identification peut être évaluée avec la matrice de covariance  $\mathbf{C}_X$  :

$$\mathbf{C}_X = \sigma_\rho^2 (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \quad (4.7)$$

où  $\sigma_\rho^2 = \frac{\|\mathbf{Y} - \mathbf{W}\mathbf{v}\|^2}{r - N_p}$ . L'écart-type du paramètre  $i$  est  $\sigma_i = \sqrt{\mathbf{C}_X(i, i)}$  et l'intervalle de confiance est donné par  $2\sigma_i$ . L'écart-type relatif  $100 \frac{\sigma_i}{v_i}$  évalue la qualité de l'identification du paramètre  $i$ .

### 4.4.3 Filtrage

Les données utilisées pour l'identification sont les mesures des positions angulaires des moteurs  $\theta$ , les forces d'actionnement d'entrée  $\mathbf{f}$  (en supposant que la réponse électrique des moteurs soit parfaite) et la configuration du manipulateur  $\alpha$  évaluée à partir du traitement de l'image. Les allongements des câbles sont déduits de (2.63), après une initialisation en position droite. Les dérivées des grandeurs mesurées sont calculées par différenciation numérique centrée après filtrage.

Il est essentiel de filtrer les données mesurées pour éviter les biais résultant de mesures discrètes et bruitées [CSB96]. Un filtre passe-bas de Butterworth est utilisé pour filtrer les mesures en avant et en arrière avec la fonction Matlab *filtfilt*. Les dérivés de  $\theta$  sont obtenues avec un algorithme de différence centrale pour éviter le déphasage. La fréquence de coupure du filtre de Butterworth est calculée avec la méthode expliquée dans [PGP01].

La fréquence vidéo utilisée pour mesurer l'orientation des modules est de  $30Hz$ , tandis que la fréquence de la loi de commande est de  $500Hz$ . Pour synchroniser les données, les mesures du codeur moteur sont rééchantillonnées avec la procédure Matlab "decimate" à  $31,25Hz$ , la valeur la plus proche de  $30Hz$ . Les données de la vidéo sont également rééchantillonnées à  $31,25Hz$  avec une interpolation linéaire.

## 4.5 Identification

### 4.5.1 Trajectoire réalisée pour l'identification

Une trajectoire d'excitation doit être conçue pour l'identification afin d'améliorer la précision de l'estimation [JG15]. En ce qui concerne l'élasticité du câble, la trajectoire doit être exécutée avec une grande exploration des forces appliquées puisque les tensions du câble dépendent principalement de ces dernières. En ce qui concerne les frottements, la trajectoire doit être choisie de manière à satisfaire le plus grand ensemble de valeurs possibles de  $\mathbf{Z}(\alpha)$ . En conséquence, la trajectoire d'identification est définie de manière à rencontrer un grand ensemble de configurations  $\alpha$  et nécessite des forces élevées. Des mouvements symétriques par rapport à la configuration droite sont considérés, sachant que l'actionnement diffère sur les côtés gauche et droit. La trajectoire d'identification est composée de quatre séquences successives. Chaque séquence est composée des six mouvements élémentaires suivants : à partir de sa configuration droite d'équilibre au repos, le manipulateur se déplace vers un  $\alpha^d$  désiré, puis jusqu'à la configuration opposée  $-\alpha^d$ , revient à la configuration rectiligne, se déplace vers  $-\alpha^d$ , puis jusqu'à  $\alpha^d$  et finalement revient à la configuration droite. Pour la première séquence, toutes les articulations se déplacent dans la même direction et  $\alpha^d = [40^\circ, 30^\circ, 20^\circ]^T$ . Pour la deuxième (resp. troisième, quatrième) séquence, la première (resp. deuxième, troisième) articulation se déplace dans la direction opposée à celle des autres articulations :  $\alpha^d = [-40^\circ, 30^\circ, 20^\circ]^T, [40^\circ, -30^\circ, 20^\circ]^T, [40^\circ, 30^\circ, -20^\circ]^T$ , respectivement. Toutes les configurations d'articulation souhaitées sont reliées par des fonctions cycloïdales. Un contrôle en boucle fermée est utilisé pour suivre la trajectoire d'identification. Le processus d'identification n'étant pas affecté par les performances de la commande, la boucle fermée est simplement réglée pour produire des variations lisses de la force d'actionnement.

Les configurations extrêmes obtenues sont affichées sur la Figure (4.7). Une vidéo de l'expérience réalisant la trajectoire d'identification est disponible à l'adresse suivante : <https://uncloud.univ-nantes.fr/index.php/s/8wzgsPi65cxDxG9>.

### 4.5.2 Identification des frottements secs et frottements visqueux

Dans un premier temps, on identifie seulement les frottements, et de deux manières différentes :

- d'une part, on identifie les frottements secs et les frottements visqueux ;
- d'autre part, on identifie seulement des frottements secs, en négligeant les frottements

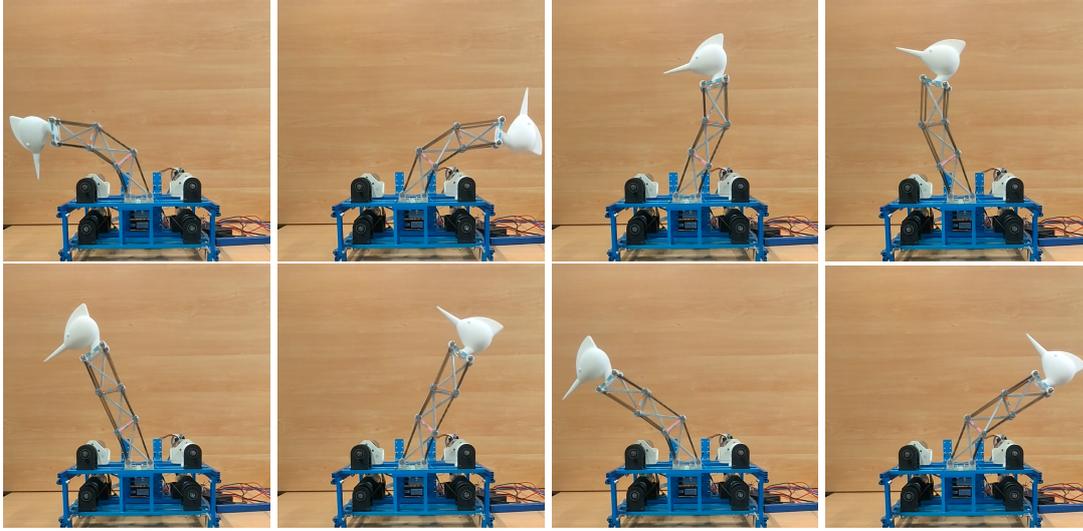


FIGURE 4.7 – Configurations extrêmes obtenues pendant la trajectoire d'identification.

visqueux.

Dans les deux cas, l'équation (2.62) est utilisée pour écrire le modèle linéaire.

Dans le premier cas, il y a les  $n_p = 8$  paramètres  $\mathbf{v} = [\mathbf{f}_s \quad \mathbf{f}_v]^T$  à identifier, et :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}(\alpha_{IP})\mathbf{f} - \mathbf{M}(\alpha_{IP})\ddot{\alpha}_{IP} - \mathbf{g}(\alpha_{IP}) - \mathbf{c}(\dot{\alpha}_{IP}, \alpha_{IP}) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{Z}(\alpha_{IP})\text{diag}(\frac{2}{\pi}\text{atan}(c_m\dot{\theta})) \quad \mathbf{Z}(\alpha_{IP})\text{diag}(\dot{\theta})]. \quad (4.9)$$

Dans le second cas, il n'y a que les  $n_p = 4$  paramètres  $\mathbf{v} = [\mathbf{f}_s]^T$  à identifier, et :

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}(\alpha_{IP})\mathbf{f} - \mathbf{M}(\alpha_{IP})\ddot{\alpha}_{IP} - \mathbf{g}(\alpha_{IP}) - \mathbf{c}(\dot{\alpha}_{IP}, \alpha_{IP}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{Z}(\alpha_{IP})\text{diag}(\frac{2}{\pi}\text{atan}(c_m\dot{\theta}))]. \quad (4.11)$$

Les paramètres identifiés sont donnés dans le Tableau 4.2. Les frottements secs sont bien identifiés dans les deux cas, contrairement aux frottements visqueux : leur écart-type relatif est bien supérieur à 10%.

La Figure (4.8) montre les tracés des couples  $\mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}$  à partir des forces et leur reconstruction avec l'équation (2.62), avec et sans modèle de frottements, et avec et sans les frottements

	Frottements secs	Frottements visqueux		Frottements secs seuls
$f_s(1)(N)$	12.91	$4.68 \times 10^{-2}$	$f_s(1)(N)$	14.13
$\sigma_i$ relatif	5.62%	56.85%	$\sigma_i$ relatif	2.52%
$f_s(2)(N)$	16.72	$4.63 \times 10^{-2}$	$f_s(2)(N)$	17.70
$\sigma_i$ relatif	4.55%	72.11%	$\sigma_i$ relatif	2.02%
$f_s(3)(N)$	18.11	$4.64 \times 10^{-2}$	$f_s(3)(N)$	18.97
$\sigma_i$ relatif	4.25%	83.42%	$\sigma_i$ relatif	1.88%
$f_s(4)(N)$	16.09	$0.72 \times 10^{-2}$	$f_s(4)(N)$	16.29
$\sigma_i$ relatif	1.85%	105.96%	$\sigma_i$ relatif	1.25%

TABLE 4.2 – Paramètres de frottements identifiés. Les paramètres de frottements visqueux sont mal identifiés, comme l'indique l'écart-type relatif.

visqueux. Pour rappel, la valeur des couples obtenus après frottements est :

$$\mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f} = \mathbf{M}(\alpha)\ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}(\alpha) \left( \text{diag}\left(\frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\theta})\right) \mathbf{f}_s + \text{diag}(\dot{\theta}) \mathbf{f}_v \right) \quad (4.12)$$

L'objectif est de mettre en évidence la contribution des termes de frottements et de montrer que ces termes doivent être pris en compte. De ce fait, nous ne considérerons que des frottements secs par la suite.

### 4.5.3 Identification de l'élasticité des câbles

Ici, les frottements secs ainsi que l'élasticité des câbles sont identifiés, avec les trois modèles élastiques présentés dans la section 2.3.7.

Pour le premier modèle, les équations (2.62) et (2.70) sont utilisées pour écrire le modèle linéaire. Or, la contribution des frottements dans les équations (2.62) et (2.70) ne sont pas du même ordre car les coefficients de  $\mathbf{Z}$  sont de l'ordre de  $10^{-2}$ . Pour avoir des termes d'ordres comparables, l'équation (2.70) est multipliée par un poids  $W = 100$ .

Il y a  $n_p = 12$  paramètres à identifier  $\mathbf{v} = \left( \mathbf{k} \quad \mathbf{c}_a \quad \mathbf{f}_s \right)^T$ .

Le vecteur  $\mathbf{y}$  est donné par :

$$\mathbf{y} = \left( \begin{array}{c} \mathbf{f} - \frac{R}{r_d} I_a \ddot{\theta} \\ W(\mathbf{Z}(\alpha_{IP})(\mathbf{f} + I_a \left(\frac{R}{r_d}\right)^2 \ddot{\mathbf{x}}_c) - \mathbf{M}(\alpha_{IP}) \ddot{\alpha}_{IP} - \mathbf{g}(\alpha_{IP}) - \mathbf{c}(\dot{\alpha}_{IP}, \alpha_{IP})) \end{array} \right) \quad (4.13)$$

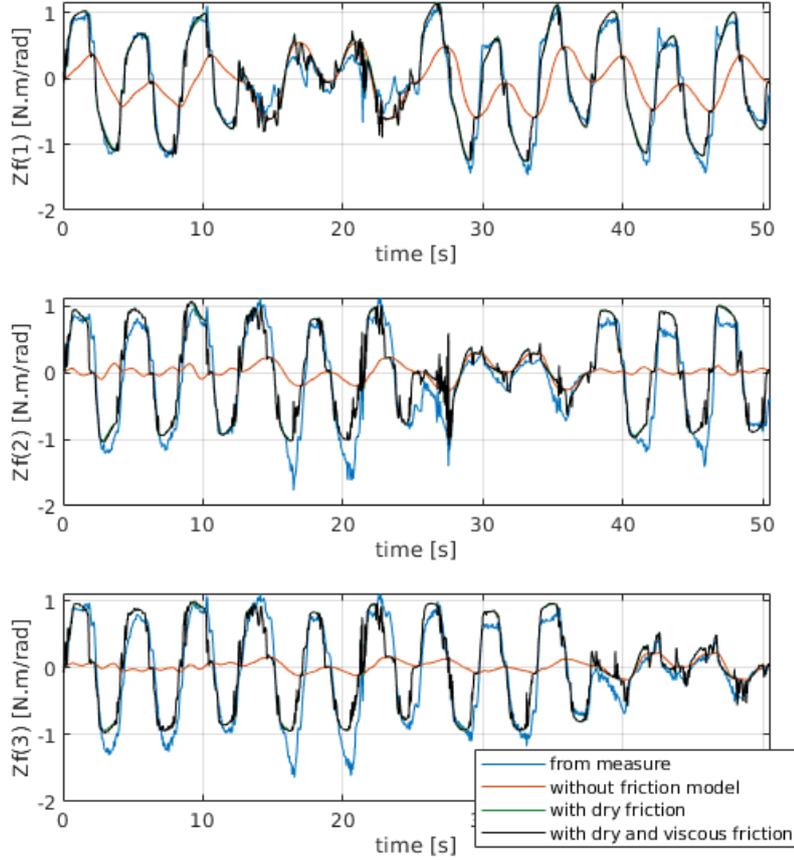


FIGURE 4.8 – Reconstruction de  $\mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}$  avec le modèle dynamique, en incluant les frottements ou non, et les données expérimentales. Les couples reconstruits avec le modèle de frottement sont clairement plus proches des données expérimentales. Les frottements visqueux ne modifient pas beaucoup la courbe en comparaison avec la prise en compte des frottements secs seulement, les courbes noires et vertes étant presque superposées.

et  $\mathbf{D}$  s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \text{diag}(\mathbf{x}_c) & \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}_c) & \text{diag}(\frac{2}{\pi}\text{atan}(c_m\dot{\theta})) \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & W\mathbf{Z}(\alpha_{IP})\text{diag}(\frac{2}{\pi}\text{atan}(c_m\dot{\theta})) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Pour les deux autres modèles, les équations (2.62) et (2.71) sont utilisées pour écrire le modèle linéaire. Pour la même raison que dans le premier modèle, l'équation (2.62) est multipliée par un poids  $W = 100$ .

Il y a  $n_p = 6$  paramètres à identifier  $\mathbf{v} = \left( E \quad c \quad \mathbf{f}_s \right)^T$ .

Le vecteur  $\mathbf{y}$  est donné par :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} - \frac{R}{r_d} I_a \ddot{\boldsymbol{\theta}} \\ W(\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_{IP})(\mathbf{f} + I_a(\frac{R}{r_d})^2 \ddot{\mathbf{x}}_c) - \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}_{IP})\ddot{\boldsymbol{\alpha}}_{IP} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\alpha}_{IP}) - \mathbf{c}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{IP}, \boldsymbol{\alpha}_{IP})) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

et  $\mathbf{D}$  s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{S}{I} \text{diag}(\mathbf{x}_c) & \frac{S}{I} \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}_c) & \text{diag}(\frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\boldsymbol{\theta}})) \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 4} & W\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}_{IP}) \text{diag}(\frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\boldsymbol{\theta}})) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Les paramètres identifiés sont dans le Tableau 4.3. Les frottements secs sont bien identifiés et semblables quelque soit le modèle élastique. Les paramètres de raideur sont bien identifiés dans les trois modèles, mais les paramètres d'amortissement sont mal identifiés dans les trois cas. Cela est dû aux faibles valeurs de la vitesse d'allongement.

Il y a deux manières de calculer la tension dans les câbles : par les forces appliquées et les frottements d'une part, et par le modèle élastique et l'allongement d'autre part. La Figure (4.9) montre la tension dans les câbles calculée par les forces appliquées et les frottements identifiés (en prenant ceux identifiés dans la section précédente, toutes les valeurs identifiées ici étant très voisines), et la tension calculée par les modèles élastiques identifiés. On y voit que les trois modèles élastiques ont des résultats différents mais qu'aucun ne permet de reproduire fidèlement la tension calculée par les forces. L'erreur moyenne de reconstruction est de 6.88N pour le premier modèle, 9.84N pour le second modèle et 9.64N pour le troisième modèle.

La Figure (4.10) montre l'erreur de reconstruction de chacun des modèles en fonction de la tension calculée par les forces appliquées. On y voit que pour chaque modèle et chaque câble, l'erreur augmente lorsque la tension augmente. De plus, l'augmentation de l'erreur semble linéaire vis-à-vis de la tension du câble. Des modèles de câbles non linéaires devraient donc être plus adaptés.

#### 4.5.4 Identification d'un modèle de câble non linéaire

Nous avons également testé des modèles de câble non linéaires, comme dans [Bak+17], mais l'identification n'a pas amélioré significativement les résultats par rapport aux modèles linéaires. Nous avons donc développé un modèle ad hoc pour s'adapter aux mesures observées.

	Model 1	Model 2	Model 3
$f_s(1)(N)$	14.42	14.38	14.32
relative $\sigma$	1.68%	1.73%	1.72%
$f_s(2)(N)$	17.65	17.49	17.48
relative $\sigma$	1.38%	1.44%	1.42%
$f_s(3)(N)$	18.77	18.41	18.48
relative $\sigma$	1.32%	1.38%	1.35%
$f_s(4)(N)$	16.18	16.32	16.29
relative $\sigma$	0.88%	0.90%	0.89%
$k(1) (N.m^{-1})$	10454	-	-
relative $\sigma$	1.37%	-	-
$k(2) (N.m^{-1})$	9256	-	-
relative $\sigma$	1.60%	-	-
$k(3) (N.m^{-1})$	8319	-	-
relative $\sigma$	1.85%	-	-
$k(4) (N.m^{-1})$	5336	-	-
relative $\sigma$	1.28%	-	-
E (GPa)	-	4.04	1.23
relative $\sigma$	-	0.83%	0.81%
$c_a(1) (N.s.m^{-1})$	805	-	-
relative $\sigma$	30.5%	-	-
$c_a(2) (N.s.m^{-1})$	333	-	-
relative $\sigma$	68.7%	-	-
$c_a(3) (N.s.m^{-1})$	-218	-	-
relative $\sigma$	94.3%	-	-
$c_a(4) (N.s.m^{-1})$	370	-	-
relative $\sigma$	64.3%	-	-
$c (MPa.s^{-1})$	-	139.8	57.4
relative $\sigma$	-	45.5%	32.88%

TABLE 4.3 – Paramètres de frottements secs et d'élasticité des câbles identifiés.

Un nouveau modèle de raideur de câble est proposé :

$$t_{ci} = (k(i) + \lambda(i)t_{ci})x_{ci} + c_a(i)\dot{x}_{ci}, \quad (4.17)$$

où  $\lambda = [\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4)]^T$  est un nouveau vecteur à identifier.

La tension du câble  $i$  peut aussi être calculée avec la ligne  $i$  de l'équation (2.72) :

$$t_{ci} = f_i - \frac{2}{\pi} \arctan(c_s \dot{\theta}_i) f_s(i) - \frac{R}{r_d} I_a \ddot{\theta}_i. \quad (4.18)$$

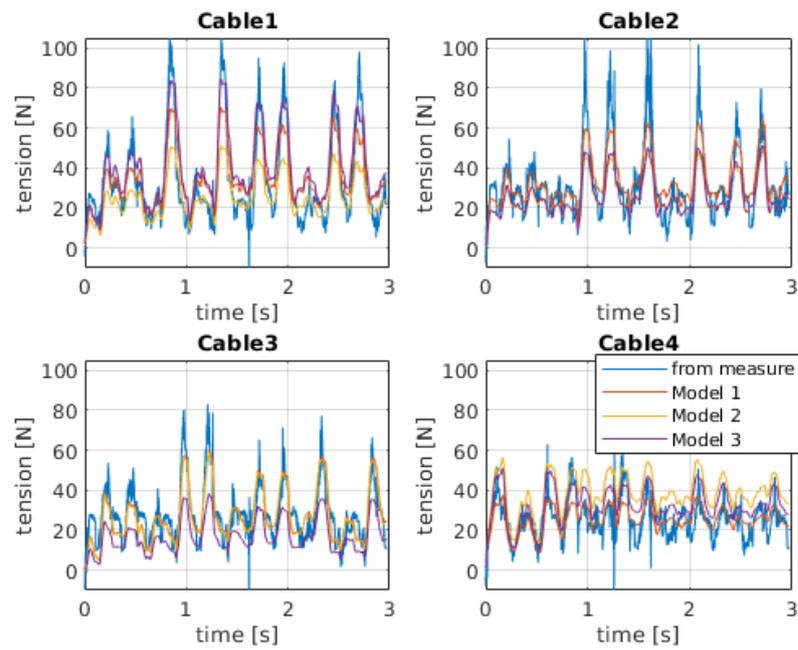


FIGURE 4.9 – Tension dans les câbles, calculée par les forces et par les modèles élastiques.

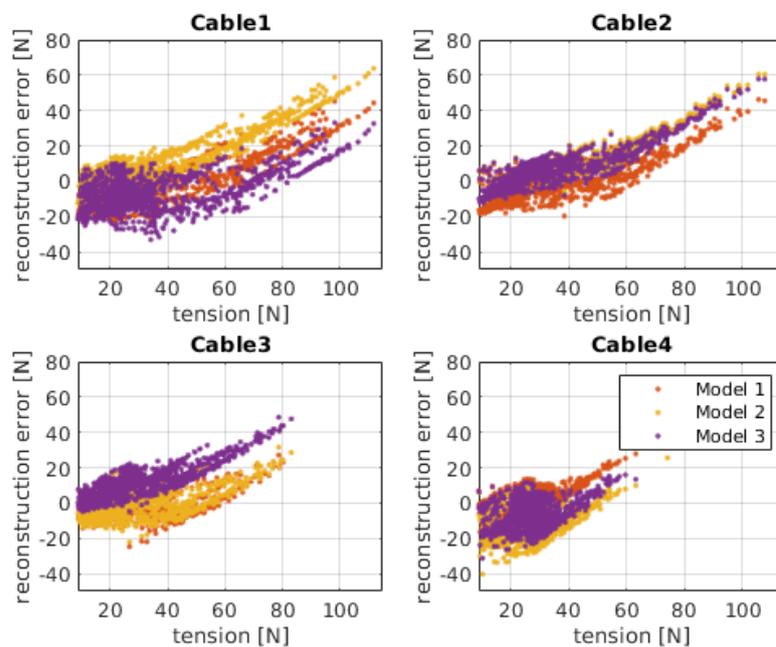


FIGURE 4.10 – Erreur de reconstruction de la tension dans les câbles, en fonction de la tension calculée par les forces appliquées.

Stiffness		Stiffness		Damping	
$k(1) (N.m^{-1})$	5378	$\lambda(1) (m^{-1})$	103.3	$c_a(1) (N.s.m^{-1})$	516.8
relative $\sigma$	1.6%	relative $\sigma$	1.5%	relative $\sigma$	14.5%
$k(2) (N.m^{-1})$	5364	$\lambda(2) (m^{-1})$	88.7	$c_a(2) (N.s.m^{-1})$	185.9
relative $\sigma$	1.7%	relative $\sigma$	2.1%	relative $\sigma$	37.8%
$k(3) (N.m^{-1})$	6231	$\lambda(3) (m^{-1})$	53.2	$c_a(3) (N.s.m^{-1})$	-273.3
relative $\sigma$	1.7%	relative $\sigma$	4.8%	relative $\sigma$	22.9%
$k(4) (N.m^{-1})$	1908	$\lambda(4) (m^{-1})$	120.9	$c_a(4) (N.s.m^{-1})$	241.5
relative $\sigma$	5.0%	relative $\sigma$	2.6%	relative $\sigma$	30.7%

TABLE 4.4 – Paramètres identifiés avec le nouveau modèle de câble (avec la raideur qui varie en fonction de la tension).

Si l'équation (4.17) est reportée dans l'équation (4.18), on obtient un modèle qui est non linéaire par rapport aux paramètres  $\lambda(i)$  et  $f_s(i)$  à identifier. Afin de construire un modèle linéaire et puisque les coefficients de frottement peuvent être identifiés séparément, on peut utiliser les valeurs des paramètres de frottement  $\mathbf{f}_s$  identifiés précédemment. Dans ce cas,  $t_{ci}$  peut être calculé en utilisant (4.18) et les mesures. Le modèle d'identification est construit en utilisant (4.17). Il peut alors être écrit selon l'équation (4.4) où  $\mathbf{v}$  est ici le vecteur de  $n_p = 12$  paramètres à identifier :  $\mathbf{v} = \left( \mathbf{k} \quad \lambda \quad \mathbf{c}_a \right)^T$ . Le vecteur  $\mathbf{y}$  est défini par :

$$\mathbf{y} = \mathbf{t}_c \quad (4.19)$$

et  $\mathbf{D}$  est :

$$\mathbf{D} = \left( \text{diag}(\mathbf{x}_c) \quad \text{diag}(\mathbf{x}\mathbf{t}) \quad \text{diag}(\dot{\mathbf{x}}_c) \right) \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{x}\mathbf{t} = [x_{c1}t_{c1}, x_{c2}t_{c2}, x_{c3}t_{c3}, x_{c4}t_{c4}]^T$ .

La même méthode que celle décrite précédemment est utilisée pour l'identification et les paramètres identifiés sont donnés dans le tableau (4.4). Les paramètres de raideur sont bien identifiés mais les coefficients d'amortissement sont, encore une fois, mal identifiés. Les composantes du vecteur de raideur  $\mathbf{k}$  sont inférieures aux valeurs obtenues dans le tableau (4.3) mais elles augmentent avec la tension puisque les paramètres  $\lambda$  sont positifs.

La figure (4.11) montre la reconstruction de la tension du câble, calculée des deux façons comme sur la Figure (4.9). Les résultats sont améliorés par rapport à la Figure (4.9) et la tension est bien modélisée même pour des valeurs élevées. L'erreur moyenne est maintenant de 4,75N, contre 6,88N avec le modèle précédent. L'erreur de reconstruction n'augmente pas avec les forces appliquées, ce qui était le but recherché avec ce nouveau modèle d'élasticité.

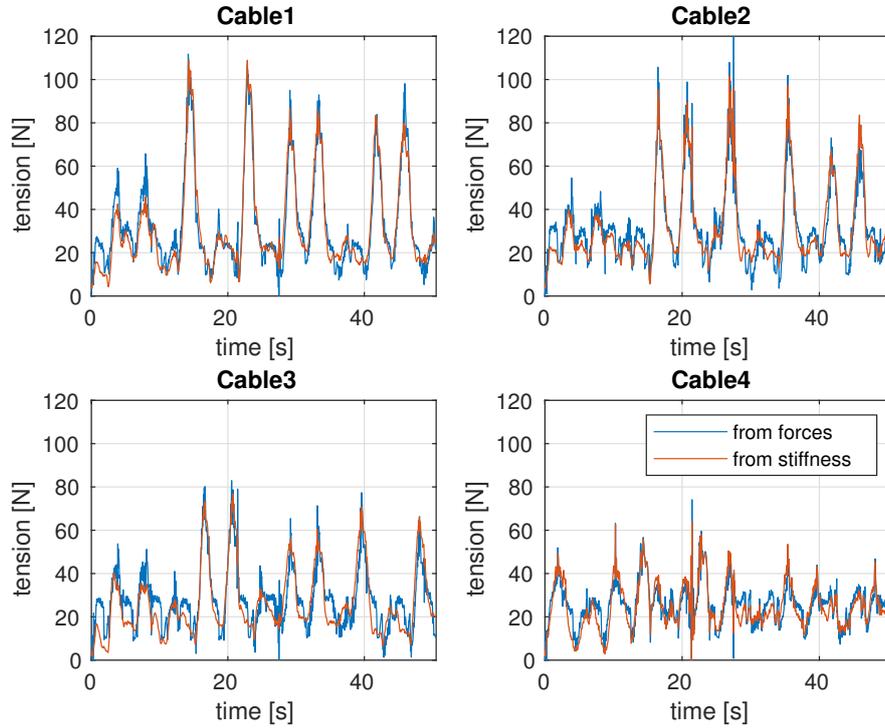


FIGURE 4.11 – Reconstruction des tensions des câbles à partir des forces et des raideurs des câbles (raideur variable).

## 4.6 Utilisation des paramètres identifiés

### 4.6.1 Reconstruction de $\hat{\alpha}$ basée sur les modèles élastiques de câbles

Maintenant que la raideur des câbles est identifiée,  $\hat{\alpha}$  peut être évaluée en ligne pour le contrôle. Il peut être reconstruit en utilisant les modèles élastiques et les mesures de  $\theta$ . La précision de la reconstruction est évaluée par comparaison avec la mesure de  $\alpha$  par traitement d'image :  $\alpha_{IP}$ . L'allongement du câble  $\mathbf{x}_c$  est estimé avec les modèles élastiques. Pour un pas de temps court  $\Delta t$ , une prédiction discrète de l'allongement du câble par intégration de l'équation (4.17) est donnée par :

$$\mathbf{x}_c(t + \Delta t) = \mathbf{x}_c(t) + \frac{\Delta t}{\mathbf{c}_a} (\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_s \frac{2}{\pi} \arctan(c_s \dot{\theta}(t)) - (\mathbf{k} + \lambda \mathbf{f}(t)) \mathbf{x}_c(t)). \quad (4.21)$$

En considérant un allongement initial nul,  $\mathbf{x}_c$  peut être mis à jour à chaque pas de temps (une période d'échantillonnage de 2ms est utilisée). Dans ce qui suit, trois modèles de câble

sont considérés, (i) câble inélastique :  $\mathbf{x}_c = 0$ , (ii) modèle 1 : câble à rigidité constante ( $\lambda = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{k}$  donnés dans le tableau (4.3)) et (iii) le modèle 2 : câble à rigidité variable ( $\lambda$  et  $\mathbf{k}$  indiqués dans le tableau (4.4)). Ensuite,  $\hat{\alpha}$  peut être calculé avec seulement trois données de câble en utilisant l'équation (4.1) et peut également être calculé avec les données de quatre câbles en utilisant l'équation (4.3).

La figure (4.12) montre la reconstruction  $\hat{\alpha}$  et les valeurs obtenues par traitement d'image  $\alpha_{IP}$ . Lorsque  $\hat{\alpha}$  est calculé à partir de l'équation (4.1), l'erreur moyenne sans modèle est de  $7,87deg$  contre  $1,67deg$  avec le modèle à raideur constante et  $1,51deg$  avec le modèle à raideur variable. Lorsque  $\hat{\alpha}$  est calculé à partir de l'équation (4.3), l'erreur moyenne sans modèle est de  $2.79deg$  contre  $1.84deg$  avec le modèle à raideur constante et  $1.36deg$  avec le modèle à raideur variable. Le modèle de câble élastique donne une meilleure évaluation  $\hat{\alpha}$  que le modèle sans élasticité. L'utilisation des données des quatre câbles avec l'équation (4.1) est préférable et est choisie à des fins de contrôle.

On peut tout de même noter que si le manipulateur n'était actionné qu'avec trois câbles, alors le gain de précision obtenu avec les modèles élastiques serait très important.

Nous allons maintenant présenter un simulateur intégrant ces paramètres identifiés.

## 4.6.2 Reproduction en simulation

### Simulateur développé en Matlab

Puisque nous avons établi l'équation du mouvement du manipulateur, nous avons pu développer notre propre simulateur en Matlab. En fait, nous avons développé deux simulateurs : le premier considère que les câbles utilisés sont rigides, tandis que le second utilise une modélisation élastique des câbles.

### Simulateur avec des câbles rigides

En considérant des câbles rigides, on peut utiliser seulement les orientations  $\alpha$  et leurs dérivées pour indiquer l'état du système.

Pour une configuration  $\alpha$ , une vitesse  $\dot{\alpha}$  et un jeu de forces  $\mathbf{f}$  donnés, on utilise l'équation (2.62) pour calculer l'accélération  $\ddot{\alpha}$  de la manière suivante :

$$\ddot{\alpha} = \mathbf{M}(\alpha)^{-1} \left( \mathbf{Z}(\alpha) \left( \mathbf{f} - \text{diag} \left( \frac{2}{\pi} \text{atan}(c_m \dot{\theta}) \right) \mathbf{f}_s - \text{diag}(\dot{\theta}) \mathbf{f}_v \right) - \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) - \mathbf{g}(\alpha) \right) \quad (4.22)$$

où  $\dot{\theta}$  est calculé à partir de  $\alpha$  et  $\dot{\alpha}$  avec l'équation (2.64) en négligeant le terme élastique.

Les positions et vitesses de l'itération suivante sont déduites de l'accélération par intégration numérique.

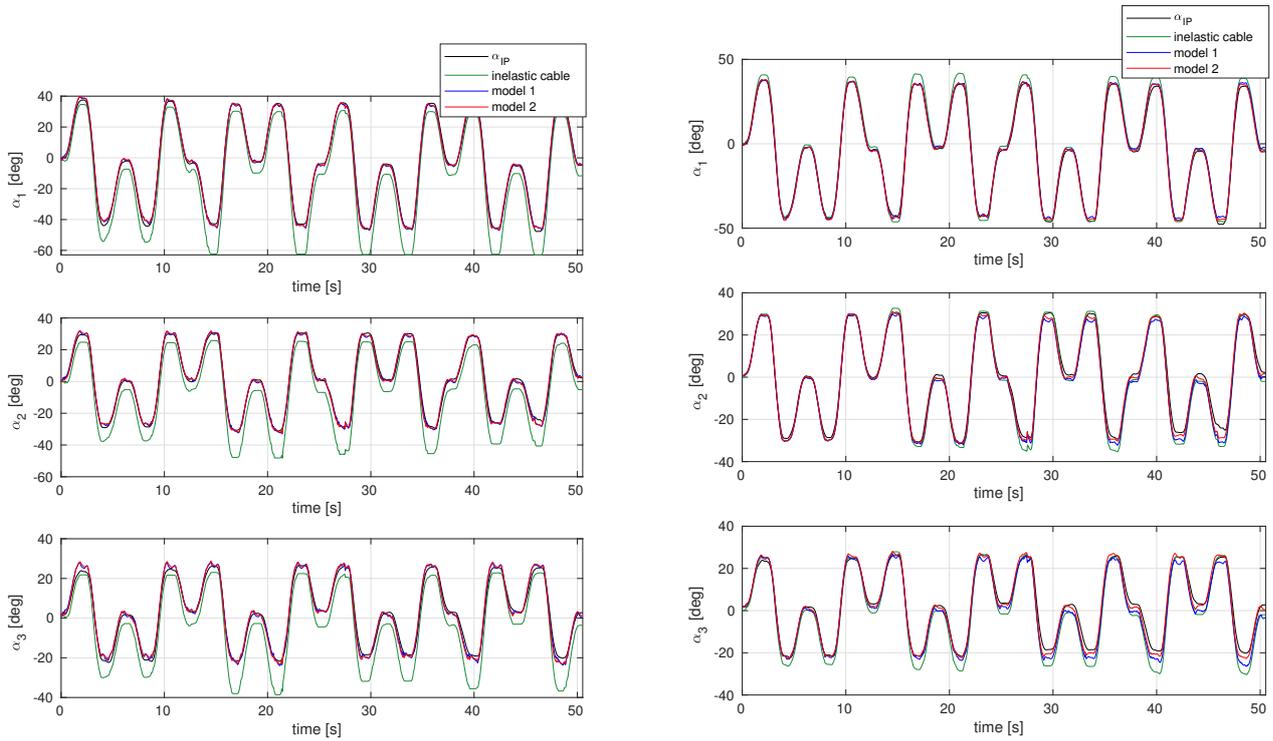


FIGURE 4.12 – À gauche : reconstruction de  $\alpha$  en utilisant l'équation (4.1). À droite : reconstruction de  $\alpha$  en utilisant l'équation (4.3). Les courbes vertes (respectivement bleues et rouges) correspondent au modèle de câble élastique (respectivement aux modèles de câble à raideur constante et à raideur variable). Les courbes noires montrent  $\alpha_{IP}$  mesuré par traitement d'image.

Cette méthode suppose que les câbles sont toujours tendus, ce qui n'est pas forcément le cas en réalité.

### Simulateur avec des câbles élastiques

Avec des câbles élastiques, nous utilisons les variables  $\alpha$ ,  $\theta$  et leurs dérivées pour indiquer l'état du système. L'accélération  $\ddot{\alpha}$  est calculée à partir de l'équation (2.66) et l'accélération  $\ddot{\theta}$  est calculée à partir de l'équation (2.65). Les allongements des câbles doivent être connus pour calculer la tension dans les câbles (pour le calcul de  $\ddot{\theta}$ ) et leurs accélérations également (pour le calcul de  $\ddot{\alpha}$ ).

L'allongement des câbles est calculé comme la différence des longueurs de câble calculé à partir de  $\alpha$  d'une part, et à partir de  $\theta$  d'autre part.

Les vitesses des allongements des câbles sont calculées avec l'équation (2.64) puis dérivées numériquement pour obtenir les accélérations.

Les positions et vitesses en  $\alpha$  et  $\theta$  de l'itération suivante sont déduites de l'accélération par

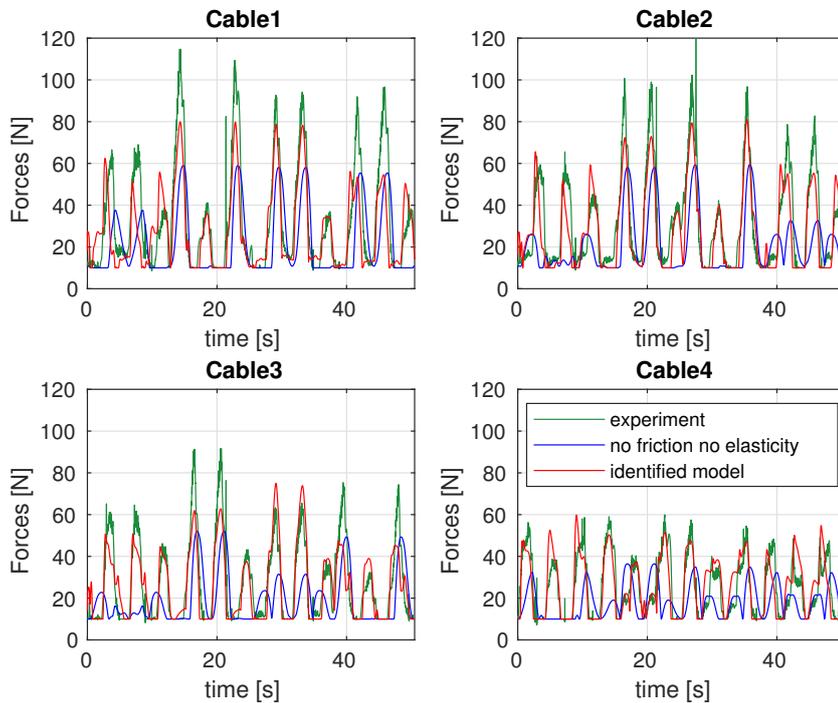


FIGURE 4.13 – Comparaison des forces appliquées en expérience et en simulation.

intégration numérique.

Un avantage de ce simulateur est que le calcul de l'allongement des câbles permet de détecter si des câbles ne sont pas tendus. Si la valeur calculée pour l'allongement est négative, alors le câble correspondant n'est pas tendu.

### Reproduction en simulation des données expérimentales

La Figure (4.13) nous montre les forces appliquées en expériences, qui sont comparées aux forces reproduites en simulation avec le modèle sans frottements ni élasticité des câbles, ainsi qu'aux forces reproduites en simulation avec le modèle complet en utilisant les paramètres de frottement et d'élasticité des câbles identifiés. Les forces de simulation obtenues avec le premier modèle sont très éloignées des forces expérimentales, que ce soit au niveau des amplitudes des pics mais aussi de leurs positions : certains pics sont manquants ou décalés. Au contraire, les forces obtenues avec le modèle complet sont bien plus proches des données expérimentales, avec des pics bien placés et dont l'amplitude s'approche des données expérimentales. Cependant, certains pics reproduits ne montent pas aussi haut que les expérimentaux, car l'identification n'a pas donné de résultats parfaits.

Les reproductions avec le modèle complet restent tout de même très satisfaisantes. Le simu-

lateur avec le modèle complet est donc employé par la suite pour la génération de mouvements optimisés.

## 4.7 Conclusion

Nous avons vu que les frottements moteurs et l'élasticité des câbles étaient des phénomènes à prendre en compte dans notre commande et dans le simulateur. Des frottements secs ont été bien identifiés tandis que les frottements visqueux étaient mal identifiés.

Un modèle de câble élastique dont la raideur dépend de la tension du câble a été proposé afin d'améliorer les résultats moyens obtenus avec les modèles classiques. Les reconstructions avec ce modèle sont satisfaisantes.

Nous allons maintenant nous intéresser à la commande du prototype, qui sera testée avec la prise en compte de ces différents paramètres.



# COMMANDE EN ACTIONNEMENT COMPLET

Trois commandes du prototype sont détaillées et testées dans ce chapitre.

La première commande est la commande articulaire, qui contrôle les orientations des modules  $\alpha$ . Cette commande est utilisée pour étudier l'apport des paramètres identifiés dans la section précédente sur les performances de contrôle.

La seconde commande est une commande des positions moteurs. Les commandes au niveau des actionneurs étant souvent plus performantes, cette seconde commande sera comparée à la commande articulaire.

La troisième commande est une commande opérationnelle, où la pose de la barre du haut du manipulateur est contrôlée. Cette commande est intéressante puisqu'il est plus courant d'avoir des trajectoires opérationnelles à suivre. Des singularités la rendent par contre délicate à utiliser sur le prototype.

Dans les trois cas, nous partirons du schéma de la commande en Figure (5.1). Pour le micro-contrôleur, les variables d'entrée sont donc les positions des moteurs  $\theta$  et les variables de sortie les forces à appliquer  $\mathbf{f}$ , comme le montre le schéma en Figure (5.1). On utilise à chaque fois une commande dynamique par couple calculé. Seule la consigne variera selon les commandes, ici l'exemple est donné pour la commande articulaire.

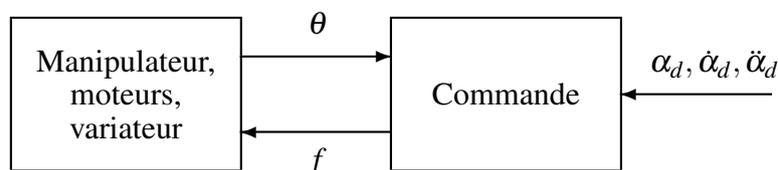


FIGURE 5.1 – Boucle simplifiée de la commande du prototype. Le bloc de commande est détaillé plus loin en fonction de la commande employée.

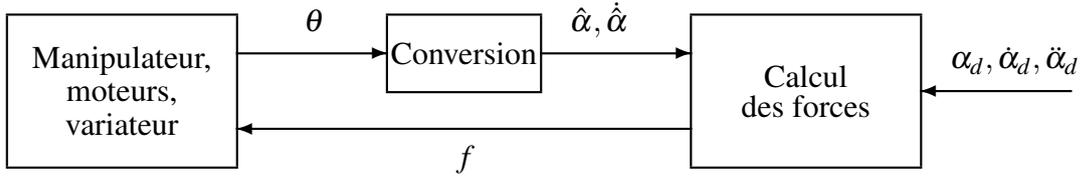


FIGURE 5.2 – Boucle de commande articulaire.

## 5.1 Commande articulaire

Soit  $\alpha_d(t)$  la trajectoire désirée. Soit  $\mathbf{e}$  l'erreur de suivi :

$$\mathbf{e} = \alpha_d - \hat{\alpha} \quad (5.1)$$

Les couples désirés au temps  $t$  sont définis avec le modèle dynamique (ici les forces de Coriolis sont négligées) :

$$\mathbf{c}_d(t) = \mathbf{M}(\hat{\alpha}(t))\mathbf{w}(t) + \mathbf{G}(\hat{\alpha}(t)) \quad (5.2)$$

avec

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{\alpha}_d(t) + k_v \dot{\mathbf{e}}(t) + k_p \mathbf{e}(t) + k_i \int_{t'=0}^t (\mathbf{e}(t')) dt \quad (5.3)$$

Les gains utilisés sont :  $k_i = \omega^3$ ,  $k_v = 3\omega$  et  $k_p = 3\omega^2$ .

Le schéma de contrôle est indiqué en Figure (5.2). Le bloc de conversion permet de calculer l'estimation  $\hat{\alpha}$  grâce aux équations présentées dans la section 4.2.1.

On se base sur l'équation (2.68) pour calculer les forces à appliquer. On négligera le terme d'accélération de l'allongement des câbles  $\ddot{\mathbf{x}}_c$  qui est faible. Il faut donc résoudre le système d'équations :

$$\mathbf{Z}(\hat{\alpha})(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction}) = \mathbf{c}_d(t) \quad (5.4)$$

La méthode pour résoudre cette équation dépend de l'actionnement. Pour l'actionnement du prototype ou pour un actionnement avec  $N_f = 2N$  moteurs, les détails du calcul ont déjà été vus.

Afin d'assurer que les câbles sont bien tendus, nous ajoutons cependant une contrainte supplémentaire par câble :

$$t_i \geq t_{min} \quad (5.5)$$

où  $t_{min} \geq 0$  est la tension minimale que l'on souhaite dans les câbles. D'après l'équation (2.65),

la condition sur les forces appliquées est donc :

$$f_i \geq t_{min} + \frac{2}{\pi} \arctan(c_s \dot{\theta}_i) f_s(i) + \frac{R}{r_d} I_a \ddot{\theta}_i. \quad (5.6)$$

Combiné avec la contrainte de force minimale, chaque force  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  doit donc satisfaire :

$$f_i \geq \max(t_{min} + \frac{2}{\pi} \arctan(c_s \dot{\theta}_i) f_s(i) + \frac{R}{r_d} I_a \ddot{\theta}_i, f_{min}). \quad (5.7)$$

Idéalement, nous pourrions utiliser  $t_{min} = 0$  si les frottements étaient parfaitement modélisés et identifiés, mais comme ce n'est pas le cas (notamment à cause des frottements à faible vitesse), nous utilisons  $t_{min} = 8,5N$ . Cette valeur a été choisie expérimentalement afin d'éviter d'avoir des câbles non-tendus.

Si la force  $f_i$  calculée est supérieure à  $f_{max}$ , c'est que l'on ne peut pas appliquer le couple désiré : dans ce cas on prend  $f_i = f_{max}$  afin de s'en approcher au mieux.

$\dot{\theta}$  est utilisé dans le calcul des frottements. En pratique, les valeurs mesurées  $\theta_i$  et  $\dot{\theta}_i$  sont bruitées. En effet,  $\theta_i$  est obtenu avec des valeurs discrètes et  $\dot{\theta}_i$  en est déduit par dérivation numérique. On utilisera donc les valeurs désirées  $\theta_i^d$  et  $\dot{\theta}_i^d$  dans l'équation (5.7), calculées à partir de  $\alpha^d$  et  $\dot{\alpha}^d$ , afin de réduire les oscillations dans les forces appliquées.

Cette commande est valide pour tout manipulateur constitué de  $N$  modules et actionné par l'un des actionnements étudiés.

### Comparaison de trois commandes articulaires

La trajectoire utilisée pour les tests de contrôle implique un mouvement dans la même direction pour les trois articulations en X. Ce mouvement semble être le plus intéressant pour accéder à un grand espace de travail avec des forces raisonnables. En partant de la configuration droite, le manipulateur se déplace vers  $\alpha^d = [50^\circ, 50^\circ, 50^\circ]^T$ , revient à la configuration droite, puis se déplace vers  $\alpha^d = [-30^\circ, -40^\circ, -50^\circ]^T$ , et enfin revient à la configuration droite. Toutes les configurations articulaires souhaitées sont reliées par des fonctions cycloïdales. Les quatre configurations principales de la trajectoire sont présentées sur la figure (5.3).

La figure (5.4) montre les résultats du test de la première commande (modèle sans frottement et câbles inélastiques). Les positions articulaires sont tracées pour trois jeux de valeurs différents :  $\alpha^d$ , qui correspond à la trajectoire souhaitée,  $\hat{\alpha}$ , l'orientation estimée et  $\alpha_{IP}$ , l'orientation calculée hors ligne à partir du traitement des vidéos et des images. Les résultats sont assez bons grâce au calcul de  $\hat{\alpha}$  avec la pseudo-inverse : la différence absolue moyenne entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^d$

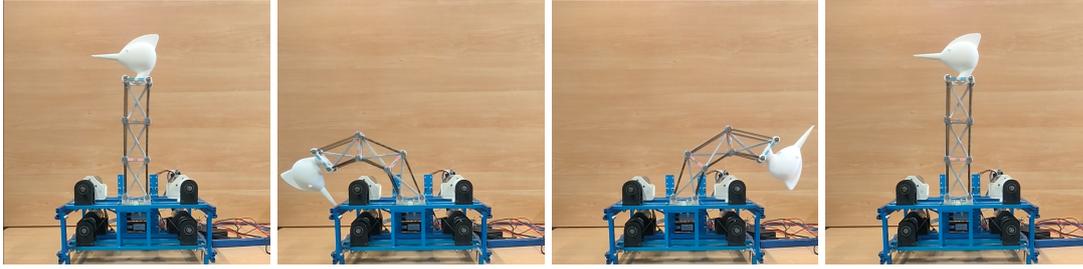


FIGURE 5.3 – Les principales configurations de la trajectoire des tests de commande à 0sec, 4sec, 7sec et 10sec, de gauche à droite.

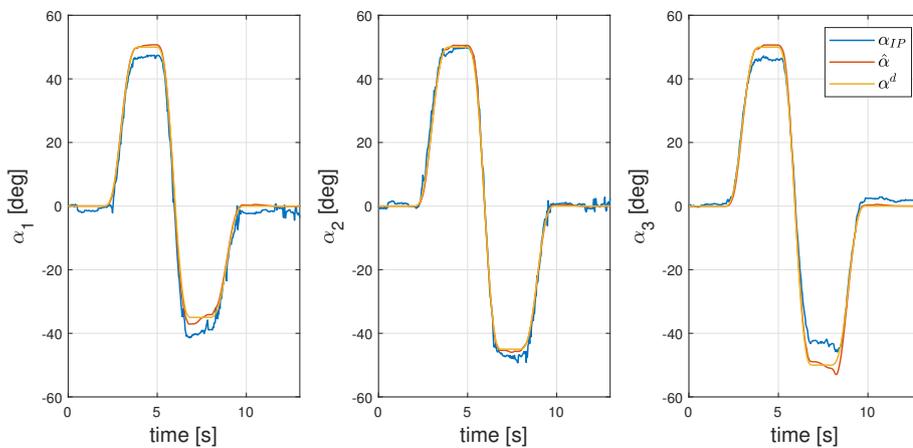


FIGURE 5.4 – Orientations des modules pendant le test de la première commande (frottements et élasticité des câbles négligés).

est d'environ  $0,52deg$ . La différence absolue moyenne entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha_{IP}$  est d'environ  $2,19deg$ , ce qui montre que les positions articulaires ne sont pas parfaitement évaluées. Bien que l'erreur de suivi soit faible, les positions extrêmes ne sont pas bien atteintes car la reconstruction de  $\hat{\alpha}$  n'est pas assez précise, en particulier pour les articulations 1 et 3.

La figure (5.5) montre les résultats du test de la commande 2 (modèle avec frottements et câbles inélastiques). Comme prévu, les résultats sont meilleurs que ceux du premier test. La différence absolue moyenne entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^d$  (respectivement entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha_{IP}$ ) est d'environ  $0,37deg$  (respectivement  $1,51deg$ ). La meilleure prédiction des frottements secs permet de réduire la contribution de la rétroaction et de réduire les erreurs de suivi. En outre, le modèle de frottements permet d'appliquer des forces plus faibles. Moins d'énergie est donc requise et l'allongement du câble est réduit, ce qui conduit à une meilleure estimation  $\hat{\alpha}$ . Les positions extrêmes sont mieux atteintes qu'avec le modèle précédent puisque l'estimation  $\hat{\alpha}$  est légèrement

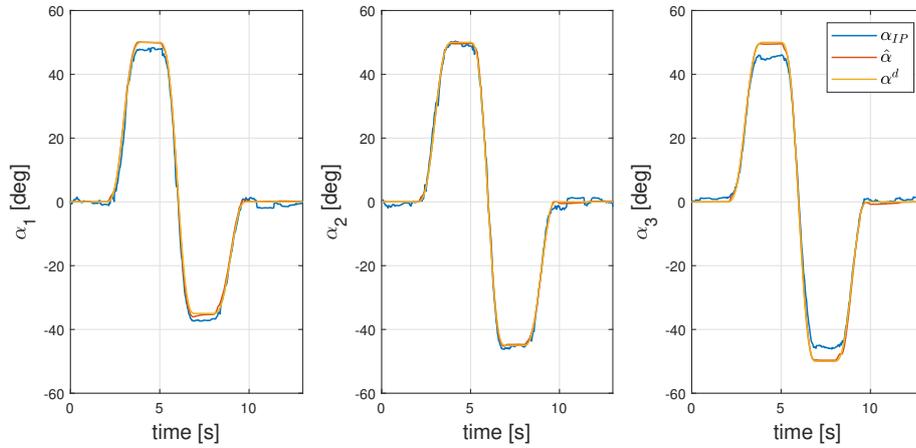


FIGURE 5.5 – Orientations des modules durant le test de la seconde commande (les frottements sont pris en compte mais les câbles sont supposés rigides).

améliorée, mais des erreurs sont visibles sur les articulations 1 et 3.

La figure (5.6) montre les résultats du dernier test (modèle avec frottements et modèle élastique du câble). L'amélioration de l'estimation  $\hat{\alpha}$  produit une réduction de la différence absolue moyenne entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha_{IP}$ , qui est maintenant d'environ  $1,09deg$ . Les positions extrêmes sont également mieux atteintes que dans les autres expériences. Cependant, la différence absolue moyenne entre  $\hat{\alpha}$  et  $\alpha^d$  est d'environ  $0,66deg$ , ce qui est un peu plus que dans les expériences précédentes. Cette augmentation des erreurs de suivi pourrait être due à la loi de commande calculée qui fait appel à l'équation (2.68) où l'élasticité du câble est négligée. Une loi de contrôle basée sur un modèle dynamique avec des câbles élastiques aurait pu être définie. Cependant, un tel modèle nécessiterait le calcul des dérivées de l'allongement du câble, ce qui ajouterait du bruit.

Pour finir, nous comparons maintenant les forces et les erreurs pour les trois essais de commandes. La figure (5.7) montre les forces appliquées pendant les trois expériences. La trajectoire de référence comprend des phases de déplacement et des phases d'arrêt. Dans les phases d'arrêt, la condition de tension minimale du câble impose que l'une des forces soit de  $8,5N$  et que les autres forces soient plus importantes. Dans les phases de déplacement pour le test 1 (pas de frottements, pas d'élasticité du câble), la force minimale varie légèrement autour de  $8.5N$  en fonction de l'accélération attendue du moteur. Pour les tests 2 et 3 qui prennent en compte les frottements identifiés, on observe que la force minimale du moteur est de  $f_{min} = 2N$  puisque les frottements ont tendance à tendre les câbles et que la condition de tension minimale est naturellement satisfaite. Ceci explique les différences observées lors des phases de mouvement entre le

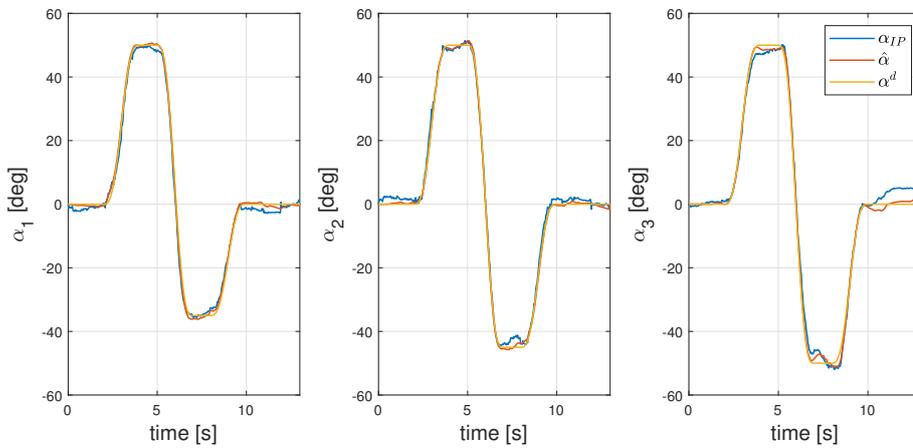


FIGURE 5.6 – Orientations des modules durant le test de la troisième commande (avec les frottements et le modèle élastique des câbles).

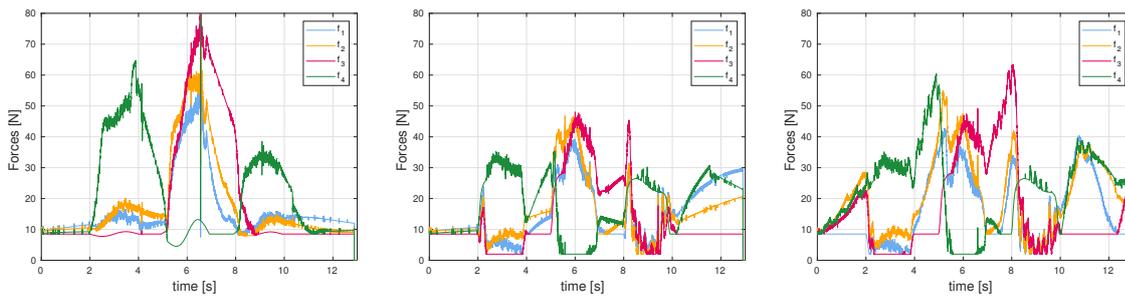


FIGURE 5.7 – Forces appliquées pendant les tests des commandes 1, 2 et 3 (de gauche à droite).

test de contrôle 1 où les forces sont assez élevées et les tests de contrôle 2 et 3 où les forces sont presque identiques et plus faibles. Dans les phases d'arrêt, les forces varient principalement en raison du terme de correction intégral. Dans les tests 1 et 2, les forces varient légèrement. Pour le test 3, comme l'estimation  $\hat{\alpha}$  dépend des forces appliquées, l'erreur détectée dans le contrôle augmente avec les forces et le terme intégral augmente. Nous avons essayé de remédier à ce problème en utilisant une commande PD. En procédant ainsi, des forces similaires à celles du test 2 ont été produites, mais la commande est devenue moins efficace et les erreurs d'estimation de  $\alpha$  sont plus élevées.

Les différences entre les orientations estimées  $\hat{\alpha}$  et les valeurs obtenues à partir de la vidéo  $\alpha_{IP}$  sont indiquées sur la figure (5.8). Les différences absolues moyennes sont de  $2,19deg$ ,  $1,51deg$  et  $1,09deg$  pour les tests 1, 2 et 3, respectivement. Dans les tests 1 et 2, la différence maximale est d'environ  $8deg$  contre  $4deg$  pour le test 3, ce qui montre l'efficacité du modèle

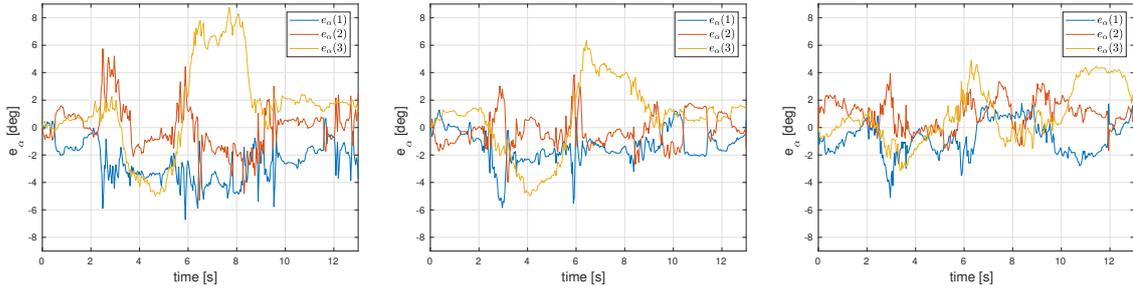


FIGURE 5.8 – Erreur  $e_\alpha$  entre  $\hat{\alpha}$  (calculé avec la pseudo-inverse) et  $\alpha_{IP}$  (obtenu par la vidéo) durant les tests des commandes 1, 2 et 3 (de gauche à droite).

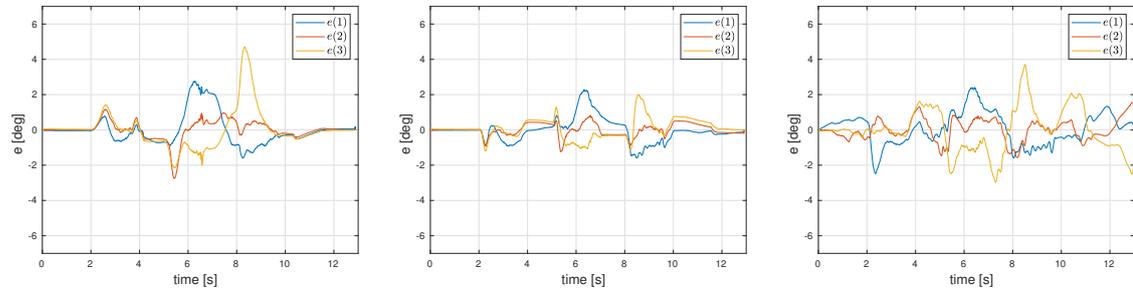


FIGURE 5.9 – Erreur  $e$  entre  $\hat{\alpha}$  (calculé avec la pseudo-inverse) et la trajectoire désirée  $\alpha^d$  durant les tests des commandes 1, 2 and 3 (de gauche à droite).

élastique. L'erreur absolue moyenne est plus faible dans le test 2 que dans le test 1, ce qui peut s'expliquer par des forces appliquées plus faibles qui produisent un allongement plus faible et donc des erreurs plus faibles sur l'estimation  $\hat{\alpha}$ .

Les différences entre les orientations estimées  $\hat{\alpha}$  et les valeurs souhaitées  $\alpha^d$  sont indiquées sur la figure (5.9). L'erreur absolue moyenne est de  $0,52deg$ ,  $0,37deg$  et  $0,66deg$  pour les essais 1, 2 et 3, respectivement. Le modèle de frottement améliore le contrôle, avec une erreur maximale deux fois plus faible dans le test 2 que dans le test 1. Le modèle élastique, par contre, perturbe le contrôle car ce modèle est utilisé uniquement pour l'estimation  $\hat{\alpha}$ .

La loi de commande utilisée pour le test 2 apparaît comme un bon compromis : les forces produites et les erreurs de commande sont plus faibles que dans les tests 1 et 3, tandis que les erreurs entre  $\hat{\alpha}$  et la valeur mesurée par traitement d'image sont acceptables.

## 5.2 Commande dans l'espace des moteurs

Pour les robots séries, les commandes avec asservissements articulaires montrent en général de bonnes performances car une commande au plus près des moteurs permet un réglage aisé et adapté aux caractéristiques des moteurs. Pour les robots avec des rapports de réduction élevés, la prise en compte des actionneurs en négligeant les inerties mécaniques peut mener à de bonnes performances. L'objectif de cette section est d'étudier le comportement du prototype à actionnement par câble avec un asservissement direct sur les angles moteurs et de tester si des commandes simplifiées peuvent avoir des performances intéressantes.

Nous développons donc une commande dans l'espace des moteurs, avec un asservissement des angles des moteurs pour qu'ils suivent une trajectoire désirée. La variable de suivi est  $\theta$ . Soit  $\theta_d$  la trajectoire désirée. Cette trajectoire désirée doit être calculée à partir d'une trajectoire articulaire à l'aide du modèle géométrique afin d'éviter de générer des forces internes nuisibles qui risqueraient de causer la rupture des câbles. L'erreur de suivi est :

$$\mathbf{e}_\theta = \theta_d - \theta \quad (5.8)$$

L'accélération désirée est calculée de la manière suivante :

$$\ddot{\theta}_d^c(t) = \ddot{\theta}_d(t) + k_p \mathbf{e}_\theta(t) + k_v \dot{\mathbf{e}}_\theta + k_i \int_{t'=0}^t \mathbf{e}_\theta(t') dt' \quad (5.9)$$

Le schéma de contrôle est indiqué en Figure (5.10). L'estimation de  $\alpha$  est nécessaire pour calculer les différents éléments du modèle dynamique.

On définit une commande pour les  $N + 1$  moteurs. Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{Z}$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2] \quad (5.10)$$

où  $\mathbf{Z}_1$  est une matrice carré de dimension  $N$ , et  $\mathbf{Z}_2$  est un vecteur de dimension  $N \times 1$ .

D'après (2.66), on peut donc écrire :

$$\mathbf{M}_m(\alpha) \ddot{\alpha} + \mathbf{c}_m(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}_1(\alpha) \mathbf{t}_1 + \mathbf{Z}_2(\alpha) t_2 \quad (5.11)$$

où  $\mathbf{t}_1$  est un vecteur de dimension  $N$  et  $t_2$  est un scalaire.

On peut alors exprimer  $\mathbf{t}_1$  en fonction de  $t_2$  de la façon suivante :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{Z}_1(\alpha)^{-1} \left( \mathbf{M}_m(\alpha) \ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}_2(\alpha) t_2 \right) \quad (5.12)$$

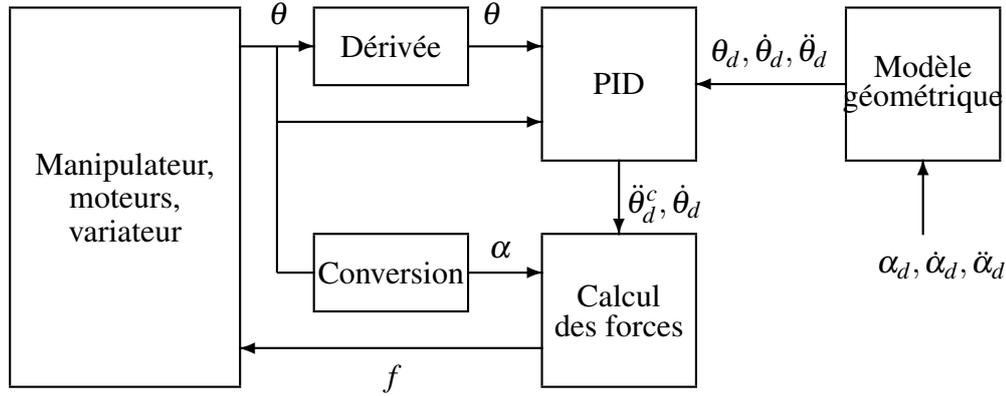


FIGURE 5.10 – Boucle de commande dans l'espace des moteurs pour un manipulateur entièrement actionné.

Les tensions des câbles forment donc un espace de dimension 1 :

$$\mathbf{t}_c(t_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(t_2) \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

D'après (2.65), le lien entre les forces appliquées et les tensions des câbles sont :

$$\mathbf{f} = I_a \frac{R}{r_d} \ddot{\theta}_d^c + \mathbf{t}_c(t_2) + \mathbf{f}_{friction} \quad (5.14)$$

Il faut donc calculer  $t_2$  afin de vérifier nos contraintes.

On veut que tous les câbles soient tendus, pour cela on assure une tension minimale  $t_{min}$ . Comme tous les coefficients de  $-\mathbf{Z}_1(\alpha)^{-1}\mathbf{Z}_2(\alpha)$  sont positifs, on peut calculer  $N_f$  valeurs minimales pour  $t_2$  (la première est  $t_{min}$  et les  $N$  autres sont données par les  $N$  lignes de (5.12)).

On veut également assurer une force minimale  $f_{min}$ . Les  $N_f$  lignes de (5.14) donnent  $N_f$  valeurs minimales pour  $t_2$ .

Nous avons donc un total de  $2N_f$  valeurs minimales à vérifier pour  $t_2$ . En prenant la valeur maximale, toutes les contraintes sont vérifiées.

Les forces sont ensuite bornées à  $f_{max}$ .

Afin d'évaluer l'intérêt du modèle dynamique avec cette commande, on peut intégrer ou non le modèle dynamique dans l'équation (5.12). Nous allons comparer quatre commandes des moteurs en simulation :

— dans la première commande, les tensions des câbles sont négligées, ce qui fait que les

Commande	$(\alpha_d - \hat{\alpha})$	$(\alpha - \hat{\alpha})$	erreur sur $\theta$
articulaire	0.14deg	1.08deg	201.72deg
moteurs - sans tension	7.05deg	3.68deg	315.62deg
moteurs - avec tension sans modèle dynamique	0.79deg	1.27deg	194.50deg
moteurs - avec tension et modèle statique	0.65deg	1.14deg	193.88deg
moteurs - avec tension et modèle dynamique	0.66deg	1.14deg	193.94deg

TABLE 5.1 – Erreurs moyennes en simulation en fonction des commandes des moteurs.

moteurs sont contrôlés indépendamment les uns des autres. Le calcul des forces se fait donc avec l'équation  $\mathbf{f} = I_a \frac{R}{r_d} \ddot{\theta}_d^c + \mathbf{f}_{friction}$  à la place de l'équation (5.14);

- dans la seconde commande, les tensions des câbles sont prises en comptes mais sans prendre en compte le modèle dynamique. L'équation (5.14) est utilisée pour calculer les forces mais l'équation (5.12) est remplacée par :  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{Z}_1(\alpha)^{-1} \mathbf{Z}_2(\alpha) t_2$ ;
- dans la troisième commande, les tensions des câbles sont prises en comptes mais en prenant en compte le modèle statique uniquement. L'équation (5.14) est utilisée pour calculer les forces mais l'équation (5.12) est remplacée par :  $\mathbf{t}_1 = \mathbf{Z}_1(\alpha)^{-1} (\mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}_2(\alpha) t_2)$ ;
- dans la quatrième commande, les forces sont calculées avec l'équation (5.14) et les tensions des câbles sont calculées avec l'équation (5.12). Seules les forces de Coriolis sont négligées, comme dans la commande articulaire.

Le tableau (5.1) montre les résultats obtenus avec ces quatre commandes en simulation, sur une trajectoire similaire à celle utilisée pour la commande articulaire. Les gains utilisés sont calculés avec  $\omega = 10$ , comme pour la commande articulaire. La première information importante à retenir est que la commande sans prise en compte de la tension des câbles est très mauvaise : la trajectoire est mal suivie. C'est principalement à cause des contraintes de forces positives, qui empêche les moteurs de tourner dans le sens opposé au sens désiré pour garder la tension dans les câbles. Lorsque la tension est prise en compte, la commande indique aux moteurs lorsqu'il faut tirer plus fort pour emmener les moteurs antagonistes, ce qui permet un bon suivi de la trajectoire. La prise en compte du modèle statique dans le calcul de la tension des câbles permet d'améliorer légèrement les erreurs de suivi. Cependant, le modèle dynamique n'améliore pas significativement les résultats en comparaison avec le modèle statique. Ceci ne fait que confirmer que l'inertie des moteurs est prédominante par rapport à l'inertie des modules.

Les erreurs entre  $\alpha_d$  et  $\hat{\alpha}$  sont plus élevées pour la commande des moteurs que pour la commande articulaire. Cependant, les erreurs sur  $\theta$  sont un peu meilleures. Ces valeurs sont nettement plus élevées que sur  $\alpha$  car les valeurs de  $\theta$  sont en moyenne cent fois plus élevées que les valeurs de  $\alpha$ . L'erreur entre  $\alpha$  et  $\hat{\alpha}$  est assez similaire entre la commande articulaire et

Commande	$(\alpha_d - \hat{\alpha})$	$(\theta_d - \theta)$	Moyenne des forces
articulaire	0.905deg	217.73deg	27.81N
moteurs avec tension uniquement	0.996deg	229.3deg	25.6N
moteurs avec modèle statique	0.967deg	198.56deg	26.3N
moteurs avec modèle dynamique	0.997deg	259.47deg	27.29N

TABLE 5.2 – Erreurs moyennes en expérience pour les commandes articulaires et des moteurs.

les commande dans l'espace moteur tenant compte de la tension des câbles.

Des essais ont été faits avec la commande des moteurs où la trajectoire désirée est calculée en estimant l'allongement des câbles. Cependant, bien que l'erreur en  $\theta$  soit plus faible, les résultats ne sont pas plus intéressants sur  $\alpha$ .

Les commandes tenant compte de la tension des câbles ont été testées sur le prototype et comparées à la commande articulaire. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau (5.2).

Les erreurs entre  $\alpha_d$  et  $\hat{\alpha}$  sont similaires pour toutes les commandes testées. La commande dans l'espace des moteurs qui tient compte uniquement de la tension des câbles présente des résultats corrects. Les erreurs sur  $\theta$  sont plus faibles pour la commande qui prend uniquement en compte le modèle statique : cela permet d'avoir une commande efficace sans avoir à calculer la matrice d'inertie du manipulateur. Les performances restent cependant similaires à la commande articulaire.

Les forces appliquées pour les deux commandes sont montrées en Figure (5.11). On y voit que les forces appliquées sont plus lisses pour la commande des moteurs. De plus, les forces appliquées sont légèrement plus faibles en moyenne pour la commande des moteurs, comme on peut le voir dans le tableau (5.2). Par contre, on y observe de lentes oscillations, qui sont probablement dues à l'élasticité des câbles.

En conclusion, la commande des moteurs permet un suivi articulaire similaire à la commande articulaire mais présente des caractéristiques différentes : le suivi sur  $\theta$  est légèrement meilleur qu'avec la commande articulaire, les forces appliquées sont plus lisses et légèrement plus faibles en moyenne, mais ont de lentes oscillations.

### 5.3 Commande opérationnelle

En général, l'objectif est de déplacer l'effecteur du robot, il est donc naturel de vouloir asservir sa position. Comme nous n'avons pas de capteur pour mesurer en ligne la pose de la barre du haut du manipulateur, nous devons reconstruire ces valeurs à l'aide des valeurs

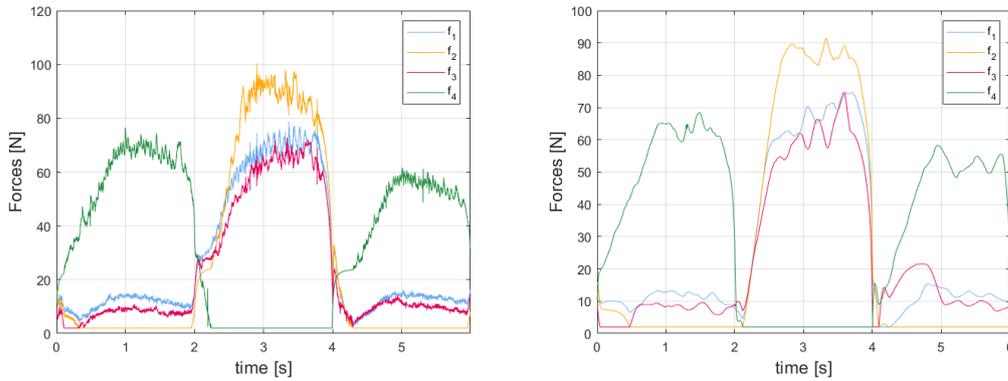


FIGURE 5.11 – Forces appliquées avec la commande articulaire (à gauche) et la commande des moteurs (à droite) pour une même trajectoire articulaire.

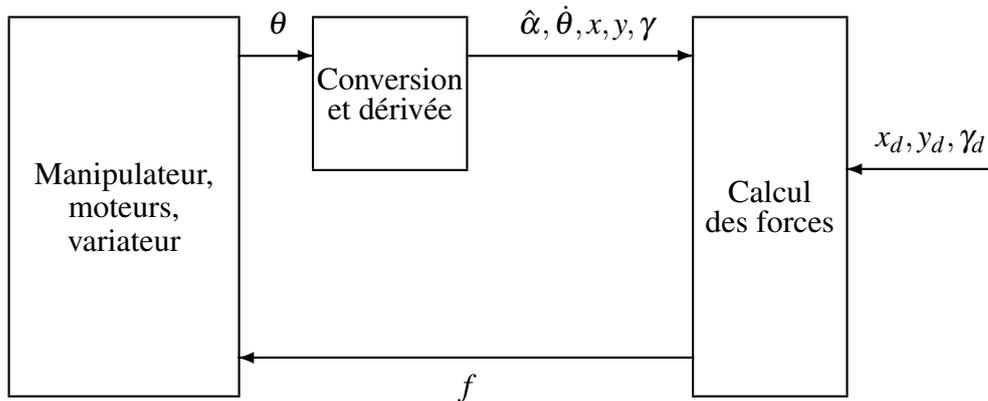


FIGURE 5.12 – Boucle de commande dans l'espace opérationnel.

articulaires des mécanismes estimées à partir des positions codeurs des moteurs.

On cherche à contrôler le mouvement du haut du manipulateur dont la position est définie par les coordonnées  $(x, y)$  du milieu de la barre du haut du dernier module. On peut également commander en plus l'orientation de la barre du haut du dernier module  $\gamma = \gamma_{N+1}$ .

Le schéma de contrôle est indiqué en Figure (5.12). L'estimation de  $\alpha$  est nécessaire pour calculer les différents éléments du modèle dynamique. La valeur mesurée de  $\dot{\theta}$  est nécessaire pour la prise en compte des frottements, comme nous allons le voir.

### Lien entre l'espace articulaire et l'espace opérationnel

On note  $\mathbf{u}$  le vecteur contenant la position de la barre du haut du manipulateur :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

On définit la matrice  $\mathbf{J}$  telle que :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\dot{\alpha} \quad (5.16)$$

La matrice  $\mathbf{J}$  est donnée par :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha}^T \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}^T \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Les calculs des éléments de  $\mathbf{J}$  sont fournis en annexe A.

On note  $\mathbf{u}_\gamma$  le vecteur contenant la position et l'orientation de la barre du haut du manipulateur :

$$\mathbf{u}_\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

On définit la matrice  $\mathbf{J}_\gamma$  telle que :

$$\dot{\mathbf{u}}_\gamma = \mathbf{J}_\gamma \dot{\alpha} \quad (5.19)$$

La matrice  $\mathbf{J}_\gamma$  est donnée par :

$$\mathbf{J}_\gamma = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha}^T \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha}^T \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}^T \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

où  $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha_k} = 1$  quelque soit  $k$  entre 1 et  $N$ .

### Trajectoire

Un problème qui se pose avec la commande opérationnelle est celui des singularités. En effet, dans certaines configurations, le rang de la matrice  $\mathbf{J}$  (ou  $\mathbf{J}_\gamma$ ) baisse. Dans ce cas, on ne peut plus inverser ces matrices. Afin de tester cette commande, nous éviterons donc ces singularités.

Pour savoir où se situent les singularités, on peut regarder où sont les configurations où le conditionnement de  $\mathbf{J}$  est grand. La Figure (5.13) montre les zones correspondantes dans l'espace opérationnel. Les zones où le conditionnement de  $\mathbf{J}_\gamma$  est élevé sont semblables à celles de  $\mathbf{J}$ . Nous notons cependant un conditionnement moyen plus élevé pour  $\mathbf{J}_\gamma$  (108.5 contre 17.8 pour

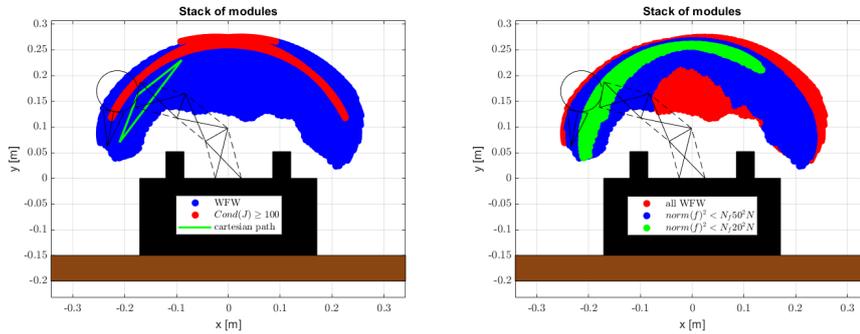


FIGURE 5.13 – A gauche : zones (en rouge) où le conditionnement de  $\mathbf{J}$  est supérieur à 100, et trajectoire opérationnelle suivie pour tester la commande. A droite : espace de travail du manipulateur avec les ressorts asymétriques et sa configuration d'équilibre au repos.

$\mathbf{J}$ ). Un point important est que ces zones dépendent uniquement de la configuration articulaire et des dimensions des barres : les raideurs des ressorts n'a pas d'influence sur ces zones.

Malheureusement, le manipulateur a sa position au repos à l'intérieur de ces zones. Pour cette commande, nous allons intervertir des ressorts afin de modifier la configuration au repos. Les ressorts à gauche (respectivement à droite) ont à présent une raideur de  $600, 400, 200N.m^{-1}$  (respectivement  $400, 200, 200N.m^{-1}$ ) (du bas vers le haut). La configuration au repos avec ces raideurs ainsi que l'espace de travail associé sont montré en Figure (5.13). On désire suivre la trajectoire indiquée en rose, qui évite les singularités.

Une possibilité pour utiliser la commande opérationnelle en passant par les singularités est d'utiliser une inverse (ou pseudo-inverse) amortie. Cependant la qualité de la commande est dégradée, notamment au niveau des singularités.

### Commande articulaire pour suivre une trajectoire opérationnelle

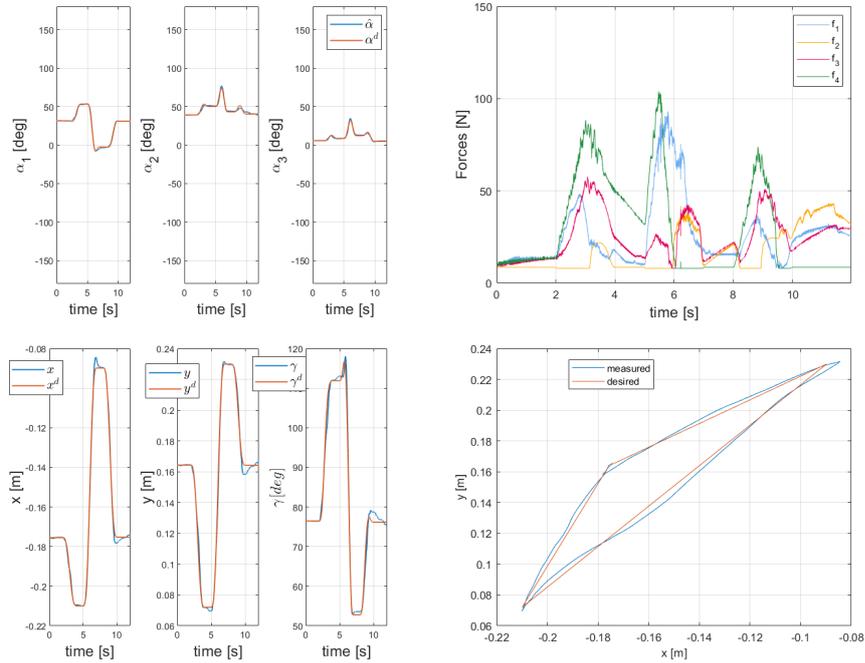
Si l'on souhaite suivre une trajectoire opérationnelle, une possibilité est de convertir cette trajectoire opérationnelle en trajectoire articulaire que l'on exécutera ensuite avec la commande articulaire. Nous détaillons ici la conversion depuis une trajectoire en  $xy$ , mais la méthode reste valide pour une trajectoire en  $xy\gamma$ .

Supposons que l'on ait une trajectoire opérationnelle, c'est-à-dire une configuration articulaire de départ  $\alpha_s$  ainsi que les positions  $\mathbf{u}$ , vitesses  $\dot{\mathbf{u}}$  et accélérations  $\ddot{\mathbf{u}}$  de la barre du haut du manipulateur.

On sait que :

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(\alpha)\dot{\alpha} \quad (5.21)$$

On peut donc calculer la vitesse  $\dot{\alpha} = \mathbf{J}^+(\alpha)\dot{\mathbf{u}}$  et en déduire la configuration  $\alpha$  de l'itération


 FIGURE 5.14 – Résultats commande articulaire pour suivre  $xy$ .

suivante.

On obtient en dérivant que :

$$\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (5.22)$$

On peut donc calculer l'accélération des articulations qui permet de produire la trajectoire opérationnelle désirée :

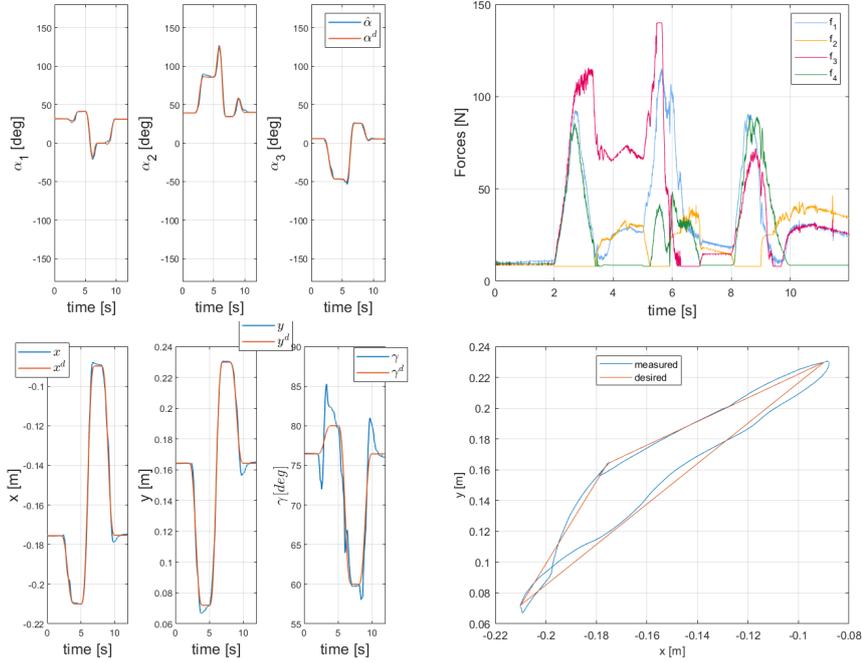
$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{J}^+(\boldsymbol{\alpha})\left(\ddot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right) + \lambda_J \mathbf{k}_J \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{k}_J$  est une base de noyau de  $\mathbf{J}$ , qui est de dimension 1 tant que  $\mathbf{J}$  est de rang 2 (ce qui est assuré puisqu'on évite les singularités), et  $\lambda_J$  est un scalaire à choisir. Afin de minimiser la norme des accélérations des articulations, nous choisissons  $\lambda_J = 0$ .

Ainsi, on a calculé une trajectoire articulaire qui nous fait suivre la trajectoire opérationnelle. Un avantage de cette méthode est qu'elle permet de connaître les trajectoires des moteurs et d'en déduire les frottements attendus, qui sont moins bruités que les frottements mesurés.

La Figure (5.14) montre les résultats expérimentaux obtenus sur le prototype en reproduisant le triangle à l'aide d'une commande articulaire sur  $xy$ . On y voit que le triangle est assez fidèlement reproduit. L'erreur moyenne sur la position est de  $2.3mm$ .

La Figure (5.15) montre les résultats obtenus sur le prototype en reproduisant le triangle


 FIGURE 5.15 – Résultats commande articulaire pour suivre  $xy\gamma$ .

à l'aide d'une commande articulaire sur  $xy\gamma$ . L'erreur moyenne sur la position est de  $3mm$ , et l'erreur moyenne sur  $\gamma$  est de  $1.6deg$ . Les résultats de suivi sur  $xy$  sont un peu moins bons que dans le cas précédent.

### Commande $xy$

On cherche à contrôler le mouvement de la barre du haut du manipulateur du manipulateur dont la position est définie par ses coordonnées  $(x, y)$ . La trajectoire désirée est notée  $\mathbf{u}_d$ . L'erreur de suivi est :

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u}_d - \mathbf{u} \quad (5.24)$$

L'accélération désirée est calculée de la manière suivante :

$$\ddot{\mathbf{u}}_d^c(t) = \ddot{\mathbf{u}}_d(t) + k_p \mathbf{e}_u(t) + k_v \dot{\mathbf{e}}_u + k_i \int_{t'=0}^t \mathbf{e}_u(t') dt' \quad (5.25)$$

D'après l'équation (5.22), l'accélération articulaire qui permet de produire l'accélération désirée  $\ddot{\mathbf{u}}_d^c$  est donnée par :

$$\ddot{\alpha} = \mathbf{J}^+(\ddot{\mathbf{u}}_d^c - \dot{\mathbf{J}}\dot{\alpha}) + \lambda_J \mathbf{k}_J \quad (5.26)$$

Nous choisissons  $\lambda_J = 0$  afin de minimiser la norme des accélérations des articulations.

On peut alors intégrer cette accélération dans l'équation du mouvement afin de calculer

les forces à appliquer. On néglige les forces de Coriolis et l'accélération de l'allongement des câbles pour la commande. L'équation permettant de calculer les forces à appliquer est donc :

$$\mathbf{M}(\alpha)\mathbf{J}^+(\ddot{\mathbf{u}}_d^c - \dot{\mathbf{J}}\dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha)(\mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction}) \quad (5.27)$$

Le calcul des forces peut se faire avec les mêmes calculs que pour la commande articulaire. Cependant, ici la trajectoire articulaire n'est pas connue, on ne peut donc pas l'utiliser pour calculer la trajectoire désirée des moteurs  $\theta_d$  et ainsi prévoir les frottements des moteurs. Les frottements sont donc mesurés en ligne mais sont bruités. On doit donc utiliser un coefficient  $c_m = 0.1$  plus faible dans la formule de calcul des frottements (au lieu de  $c_m = 0.5$  dans la commande articulaire).

La Figure (5.16) montre les résultats obtenus sur le prototype en reproduisant le triangle à l'aide d'une commande opérationnelle sur  $xy$ . Les gains sont calculés avec  $\omega = 10$ . L'erreur moyenne sur la position est de  $3.0mm$ . Le suivi est légèrement moins bon qu'avec la commande articulaire mais reste convenable. La trajectoire articulaire utilisée est elle assez différente à celle utilisée par la commande articulaire.

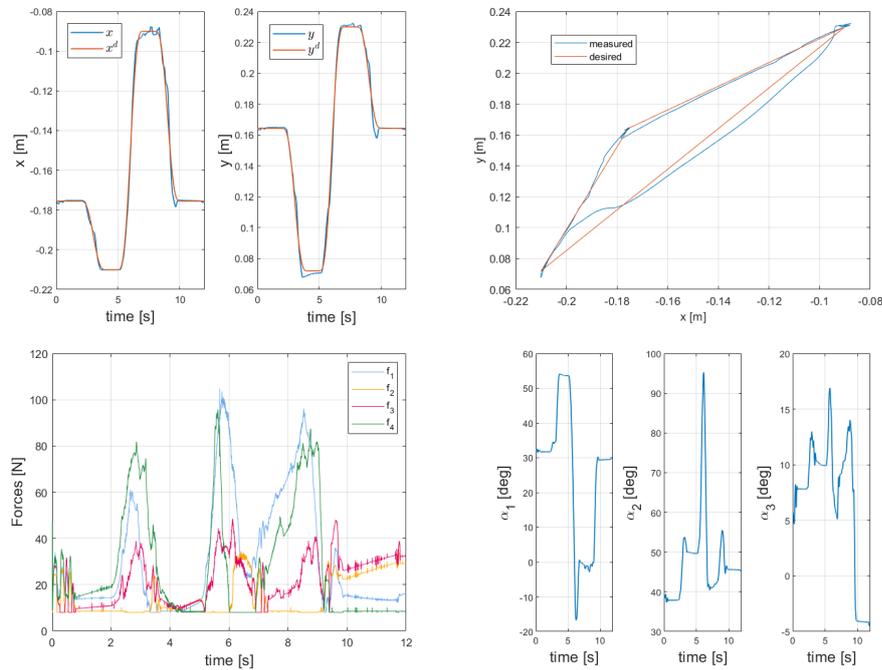


FIGURE 5.16 – Résultats commande  $xy$ . L'erreur moyenne sur la position est de  $3.0mm$ .

### Commande $xy$

On cherche à contrôler le mouvement de la barre du haut du manipulateur dont la position est définie par :

- ses coordonnées  $(x, y)$
- son orientation  $\gamma_N$

La trajectoire désirée est notée  $\mathbf{u}_{\gamma_d}$ . L'erreur de suivi est :

$$\mathbf{e}_{u_\gamma} = \mathbf{u}_{\gamma_d} - \mathbf{u}_\gamma \quad (5.28)$$

L'accélération désirée est calculée de la manière suivante :

$$\ddot{\mathbf{u}}_{\gamma_d}^c(t) = \ddot{\mathbf{u}}_{\gamma_d}(t) + k_p \mathbf{e}_{u_\gamma}(t) + k_v \dot{\mathbf{e}}_{u_\gamma} + k_i \int_{t'=0}^t \mathbf{e}_{u_\gamma}(t') dt' \quad (5.29)$$

avec les mêmes gains que pour la commande articulaire.

En dérivant (5.19), on obtient :

$$\ddot{\mathbf{u}}_\gamma = \mathbf{J}_\gamma \ddot{\alpha} + \dot{\mathbf{J}}_\gamma \dot{\alpha} \quad (5.30)$$

L'accélération articulaire qui permet de produire l'accélération désirée  $\ddot{\mathbf{u}}_d^c$  est donnée par :

$$\ddot{\alpha} = \mathbf{J}_\gamma^{-1} (\ddot{\mathbf{u}}_{\gamma_d}^c - \dot{\mathbf{J}}_\gamma \dot{\alpha}) \quad (5.31)$$

On peut alors intégrer cette accélération dans l'équation du mouvement afin de calculer les forces à appliquer. On néglige les forces de Coriolis et l'accélération de l'allongement des câbles pour la commande. L'équation permettant de calculer les forces à appliquer est donc :

$$\mathbf{M}(\alpha) \mathbf{J}_\gamma^{-1} (\ddot{\mathbf{u}}_{\gamma_d}^c - \dot{\mathbf{J}}_\gamma \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha) (\mathbf{f} - \mathbf{f}_{friction}) \quad (5.32)$$

Le calcul des forces peut se faire avec les méthodes vues précédemment.

La Figure (5.17) montre les résultats obtenus sur le prototype en reproduisant le triangle à l'aide d'une commande opérationnelle sur  $xy\gamma$ . Le suivi est légèrement meilleur qu'avec la commande articulaire. La trajectoire articulaire utilisée est ici aussi assez différente à celle utilisée par la commande articulaire.

Les vidéos des quatre expériences effectuées dans cette section sont disponibles sur le lien suivant : <https://uncloud.univ-nantes.fr/index.php/s/aiaGT2d5FpQEYxQ>.

En conclusion, nous avons développé deux commandes opérationnelles qui présentent des résultats convenables en comparaison à la commande articulaire. La commande contrôlant

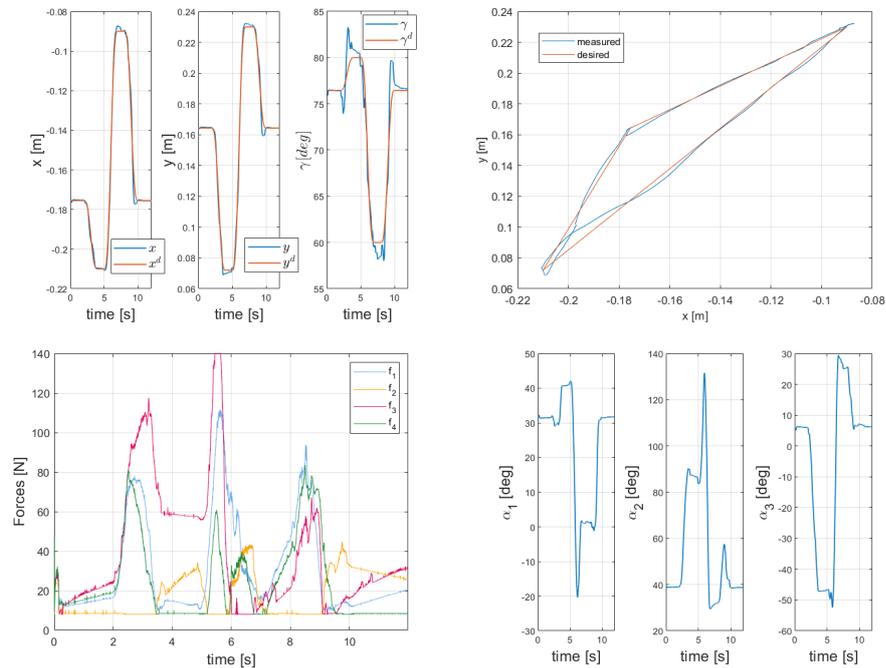


FIGURE 5.17 – Résultats commande  $xy\gamma$ . L'erreur moyenne sur la position est de  $2.5mm$  et l'erreur moyenne sur  $\gamma$  est de  $1.07deg$ .

$(x, y, \gamma)$  semble être la plus performante ici, puisque l'erreur moyenne sur la position est plus faible, mais la commande contrôlant  $(x, y)$  laisse un degré de liberté qui pourrait être employé pour une tâche secondaire, comme un contrôle de la raideur du manipulateur. Ces commandes doivent cependant être employées uniquement pour suivre des trajectoires en dehors des zones de singularité.

## 5.4 Conclusion

L'apport de la prise en compte des frottements moteurs et de l'élasticité des câbles dans la commande a été analysé avec la commande articulaire. Nous avons vu que la prise en compte des frottements moteurs améliore nettement les performances de la commande, et permet de réduire les forces appliquées grâce à une meilleure estimation de la tension dans les câbles. La prise en compte de l'élasticité des câbles permet d'avoir une mesure plus précise (la différence entre la valeur estimée  $\hat{\alpha}$  et la valeur supposée juste  $\alpha_{JP}$  est plus faible) mais perturbe la commande (la différence entre la valeur estimée  $\hat{\alpha}$  et la valeur désirée  $\alpha^d$  est plus élevée). Le compromis choisi est donc de prendre en compte les frottements moteurs dans la commande

et de supposer que les câbles sont rigides. Ce compromis permet tout de même une estimation correcte de  $\alpha$  à partir de  $\theta$  car elle est effectuée depuis les positions des quatre moteurs à l'aide d'une pseudo-inverse, ce qui permet de limiter les erreurs dues aux allongements des câbles.

Deux autres commandes ont été développées. La commande des moteurs effectue une correction PID sur les positions moteurs  $\theta$ , et présente des performances proches de la commande articulaire sur la trajectoire testée. La commande opérationnelle permet de contrôler la position et l'orientation de la barre du haut du dernier module. Cette dernière est aussi efficace qu'une commande articulaire réglée pour suivre la même trajectoire opérationnelle, mais ne peut être employée que dans les zones ne contenant pas de singularités opérationnelles.

# GÉNÉRATION DE MOUVEMENTS

---

Maintenant que nous avons une commande efficace pour le prototype, nous allons générer des trajectoires intéressantes à réaliser. Nous n'utilisons ici que la commande articulaire.

A priori ce prototype inspiré du cou des oiseaux pourrait avoir de bonnes propriétés pour exécuter des déplacements avec une dépense énergétique limitée grâce à l'utilisation des ressorts, mais également pour produire des mouvements rapides. On souhaite donc exploiter la structure du manipulateur pour effectuer ce type de mouvements.

Dans un premier temps, nous chercherons à minimiser le coût pour se déplacer d'une configuration à une autre. Nous proposerons pour cela deux méthodes d'optimisation : l'une avec le modèle statique et la seconde avec le modèle dynamique. Nous comparerons les résultats obtenus avec des trajectoires directes pour vérifier l'efficacité de l'optimisation.

Ensuite, nous chercherons à générer des mouvements explosifs, c'est-à-dire des mouvements à grande vitesse, comme ceux du pic vert lorsqu'il frappe un tronc d'arbre avec son bec pour y creuser son nid.

Nous travaillerons dans l'espace articulaire afin d'exploiter au maximum le potentiel de chaque module.

## 6.1 Minimisation des forces

Notre but ici est de construire des trajectoires qui minimisent les forces employées pour aller d'une configuration à une autre. Nous présentons une première méthode se basant sur le modèle statique uniquement, qui permet de trouver la trajectoire optimale grâce à l'algorithme  $A^*$ . Nous présentons également une seconde méthode qui prend en compte le modèle dynamique complet, fonctionnant par optimisation locale.

L'algorithme  $A^*$  permet de trouver le chemin le plus court entre deux nœuds dans un graphe, tout en prenant compte des obstacles [HNR68]. Trouver un chemin optimal est un problème qui intervient dans de nombreux domaines, tels que la robotique, la réalité virtuelle ou encore les systèmes d'information géographique (GPS). Une version modifiée est utilisée dans [Duc+14]

pour la planification de chemins pour un robot mobile. Il en est de même pour plusieurs robots mobiles dans [ZZ14]. Dans [Yao+10], l’algorithme est adapté pour la planification de chemin d’humain virtuels. En dernier exemple, l’algorithme est utilisé pour la conduite de véhicule autonome dans [Wan+15].

Nous utilisons dans cette section des courbes de Bézier [BÉZ87], qui sont bien adaptées à l’optimisation locale. Ces courbes sont employées pour la planification de chemins dans [CCE08] et [Han+10] par exemple. Elles sont également beaucoup utilisées en infographie et en animation [Sed12].

Une courbe de Bézier est définie par l’équation suivante :

$$P(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} P_i \quad (6.1)$$

où les  $P_i$  sont les  $n + 1$  points de contrôle et  $x \in [0, 1]$ . Dans notre cas,  $P$  est de dimension  $N$  et correspond aux orientations des modules  $\alpha$ , et  $x$  correspond au temps rapporté dans le bon intervalle : pour un temps maximal  $t_{max}$  de la trajectoire, la valeur de  $x$  correspondant au temps  $t$  est  $x = \frac{t}{t_{max}}$ .

Les propriétés des courbes de Bézier qui nous intéressent sont :

- la courbe est à l’intérieur de l’enveloppe convexe des points de contrôle ;
- la courbe commence par le point  $P_0$  et se termine par le point  $P_n$ , mais ne passe pas a priori par les autres points de contrôle qui déterminent cependant l’allure générale de la courbe ;
- $\overrightarrow{P_0P_1}$  est le vecteur tangent à la courbe en  $P_0$  et  $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$  au point  $P_n$ .

D’après la première propriété, on peut alléger le nombre de contraintes des optimisations : au lieu de regarder à chaque pas de temps si les orientations des modules sont dans les bornes admises, on peut seulement vérifier que les points de contrôle y sont.

D’après la dernière propriété, on peut assurer une vitesse initiale et une vitesse finale nulle en ajoutant deux points de contrôles, en doublant le premier et le dernier point de contrôle.

Bien qu’il soit a priori plus pertinent d’exécuter des mouvements pour se déplacer entre des positions d’équilibre nécessitant des forces limitées, nous avons choisi un cas où des forces importantes sont nécessaires pour mieux mettre en évidence l’importance des mouvements intermédiaires sur le coût énergétique total. Nous avons donc fixé une configuration de départ  $\alpha_s$  et une configuration d’arrivée  $\alpha_e$  dans la zone rouge de l’espace de travail (nécessitant des forces élevées pour y être en équilibre). Les positions correspondant à ces deux configurations sont représentées en Figure (6.1).

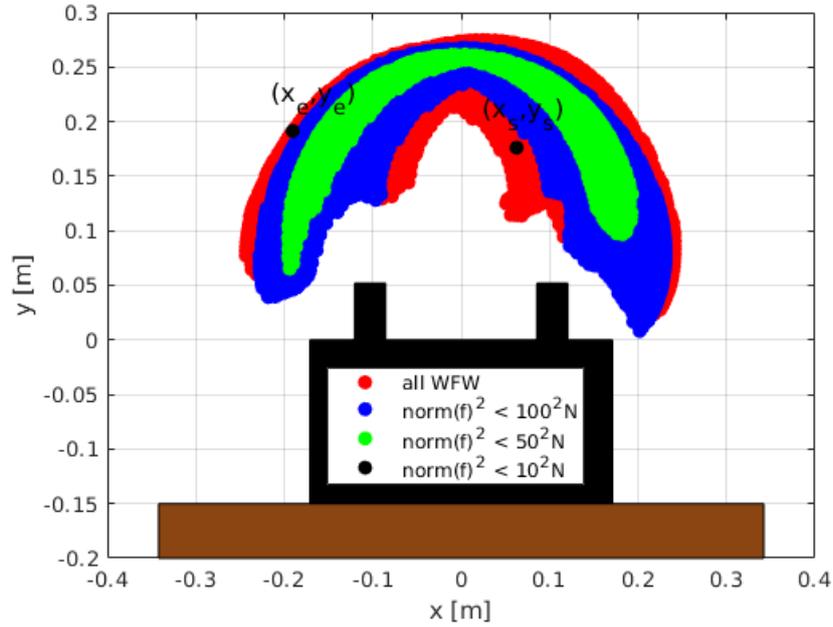


FIGURE 6.1 – Positions du manipulateur dans l'espace de travail pour les configurations  $\alpha_s$  et  $\alpha_e$ .  $(x_s, y_s)$  est la position correspond à  $\alpha_s$  et  $(x_e, y_e)$  est la position correspond à  $\alpha_e$ .

### 6.1.1 Trajectoire optimale avec le modèle statique

Nous transformons notre problème de trajectoire optimale en un problème de graphe en discrétisant l'espace articulaire comme dans l'équation (3.26). Les nœuds du graphe sont les configurations de l'espace articulaire discrétisé. Les arrêtes font le lien entre deux nœuds voisins. Des nœuds  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont voisins si et seulement si :

$$\max(\alpha_1 - \alpha_2) \leq d_\alpha \text{ et } \alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (6.2)$$

Les arrêtes sont dirigées. Le coût de l'arrête allant de  $\alpha_1$  à  $\alpha_2$  est la somme des forces  $\mathbf{f}$  vérifiant le modèle statique  $\mathbf{g}(\alpha_2) = \mathbf{Z}(\alpha_2)\mathbf{f}$  calculées par la méthode de notre choix. Nous choisissons pour notre part la répartition des forces utilisée pour calculer l'espace de travail, qui vise à minimiser la somme des forces.

Pour que l'algorithme termine, il faut que tous les coûts soient positifs, ce qui est bien le cas pour nous puisqu'on assure des forces positives.

Avec notre graphe, trouver le chemin le plus court revient à trouver un chemin entre la configuration de départ  $\alpha_s$  et la configuration d'arrivée  $\alpha_e$  qui minimise la somme des forces nécessaires pour que le manipulateur soit en équilibre tout le long du chemin.

L'algorithme utilise une file d'attente prioritaire que nous appelons  $P$ . Cette file d'attente contient des nœuds, avec un coût pour chaque nœud, et les nœuds sont placés par coût croissant.

Nous distinguons deux types de coût pour les nœuds. Le coût réel d'un nœud est le coût du chemin allant du nœud de départ à ce nœud (si plusieurs chemins ont été trouvés, alors c'est le plus faible coût des chemins qui est utilisé). Le coût heuristique est la somme du coût réel et d'une heuristique, qui est une estimation du coût du chemin restant à parcourir pour atteindre le nœud d'arrivée. La fonction heuristique  $h(\alpha_n)$  est donc une estimation du coût pour aller du nœud  $n$  au nœud d'arrivée. La liste prioritaire  $P$  est triée en fonction du coût heuristique.

Nous utilisons également une liste  $S$  qui contient pour chaque nœud déjà exploré son coût réel ainsi que son ancêtre (nœud le précédent dans le chemin). Cette liste est notamment utilisée pour la reconstruction du chemin.

Au départ, la liste  $P$  contient le nœud de départ  $\alpha_s$  seulement (le coût associé n'a aucune importance, généralement le coût réel pris est 0).

Tant que la liste  $P$  n'est pas vide et que le premier nœud de  $P$  n'est pas le nœud d'arrivée, le premier nœud  $\alpha$  de la liste (avec le coût heuristique le plus faible) est retiré de la liste. Pour chacun des nœuds voisins  $\alpha_n$  de  $\alpha$ , on calcule son coût réel qui est la somme du coût réel de  $\alpha$  et du coût de l'arrête allant de  $\alpha$  à  $\alpha_n$  et on effectue l'une des actions suivantes :

- si  $\alpha_n$  n'est pas dans  $S$ , alors on l'ajoute à  $P$  avec son coût heuristique. On l'ajoute également dans  $S$  avec son coût réel et  $\alpha$  comme ancêtre ;
- si  $\alpha_n$  est enregistré dans  $S$  avec un coût plus élevé que celui qui vient d'être calculé, alors on l'ajoute à  $P$  avec son coût heuristique. On remplace également dans  $S$  son coût réel et son ancêtre par son nouveau coût réel (plus faible) et  $\alpha$  comme ancêtre ;
- si  $\alpha_n$  est enregistré dans  $S$  avec un coût plus faible que celui qui vient d'être calculé, alors on ne fait rien (le chemin par lequel on arrive est moins bon que celui précédemment trouvé).

On réitère le processus jusqu'à ce que l'on arrive au nœud d'arrivée ou que  $P$  soit vide.

Si le nœud retiré de  $P$  est le nœud d'arrivée, la recherche de chemin est terminée et on peut reconstruire le chemin à partir de la liste  $S$  en remontant jusqu'au nœud de départ par les ancêtres. Si la liste  $P$  est vide au moment où on doit en retirer le premier élément, alors c'est qu'il n'y a pas de chemin possible entre les deux nœuds (ce qui n'est pas possible dans notre cas puisque l'on ne considère pas d'obstacle).

Afin d'obtenir le chemin optimal, il faut une heuristique qui ne surestime pas le coût réel.

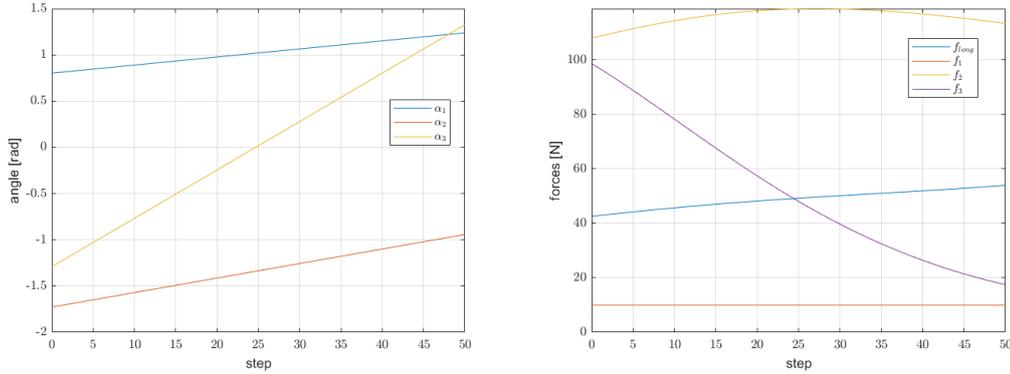


FIGURE 6.2 – Chemin direct et les forces associées (respectivement à gauche et à droite).

Une possibilité est donc de prendre comme heuristique pour un nœud  $\alpha$  la valeur suivante :

$$h(\alpha) = d(\alpha, \alpha_e) \sum_{j=1}^{N_f} f_{min}(j) \quad (6.3)$$

où  $d(\alpha, \alpha_e)$  est la distance entre le nœud évalué et le nœud d'arrivée définie par :

$$d(\alpha, \alpha_e) = \max\left(\text{abs}\left(\frac{\alpha - \alpha_e}{d_\alpha}\right)\right) \quad (6.4)$$

En effet, le nombre de nœud entre  $\alpha$  et  $\alpha_e$  ne peut pas être inférieur à  $d(\alpha, \alpha_e)$  et les forces sont au minimum à  $\mathbf{f}_{min}$  à chaque nœud.

Afin d'avoir une référence pour évaluer les résultats, la Figure (6.2) montre le chemin le plus direct pour aller de  $\alpha_s$  à  $\alpha_e$ . Ce chemin est linéaire dans l'espace articulaire. Notre but est donc de trouver un chemin qui demande moins de force que ce chemin de référence.

Le chemin obtenu avec un pas d'échantillonnage  $d_\alpha = 10deg$  et l'heuristique  $h(\alpha)$  est présenté en Figure (6.3). Le chemin utilisé permet d'avoir des forces peu élevées au milieu du chemin. Le gain sur les forces par rapport au chemin direct est de 47.14%. Le temps de calcul est d'environ 2 minutes. Le pas d'échantillonnage est assez élevé : ceci implique que le chemin se fait de manière très linéaire, et on voit dans les forces nécessaires des bosses qui pourraient être évitées. L'algorithme devient très vite trop long lorsqu'on réduit le pas d'échantillonnage. Une modification est donc nécessaire si l'on veut réduire le pas d'échantillonnage.

Une alternative pour gagner en temps de calcul est l'algorithme  $WA^*$  (Weighted  $A^*$ ). La seule différence est que l'heuristique est multipliée par un poids  $w$ , et que le chemin trouvé n'est pas garanti optimal, mais son poids est au plus  $w$  fois celui du chemin optimal.

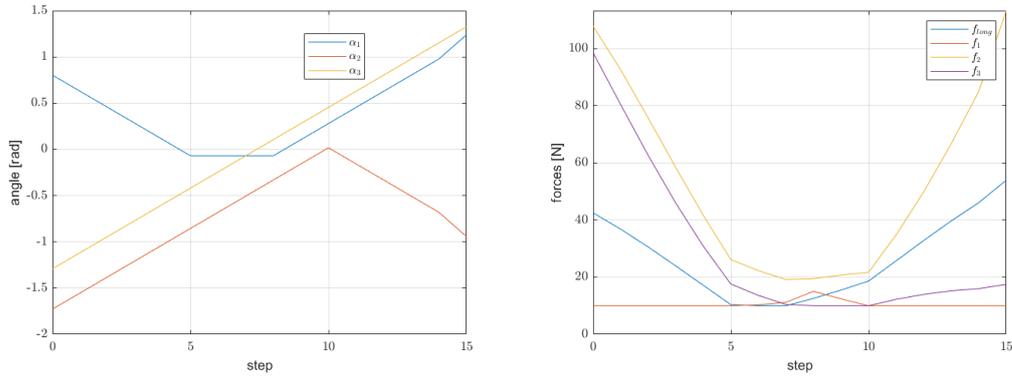


FIGURE 6.3 – Chemin optimal obtenue avec un pas d’échantillonnage de  $10deg$  et l’heuristique  $h(\alpha)$ . À gauche, les configurations du chemin trouvé et à droite, les forces correspondantes.

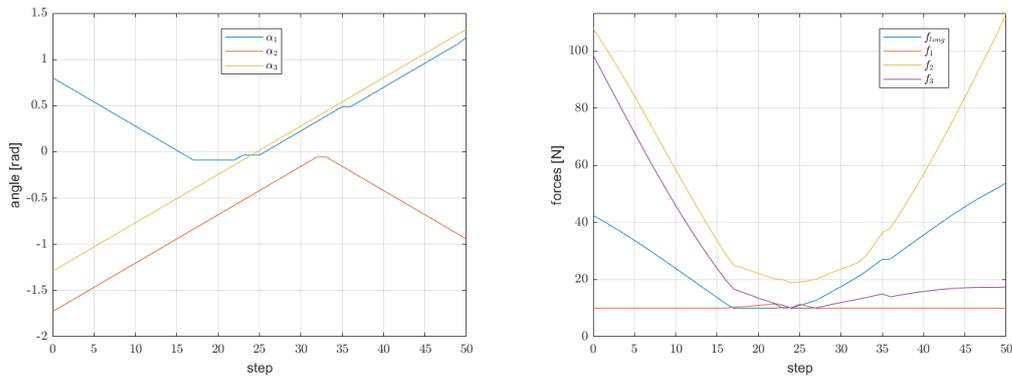


FIGURE 6.4 – Trajectoire optimisée obtenue avec un pas d’échantillonnage de  $3deg$  et l’heuristique  $2h(\alpha)$ . À gauche, les configurations du chemin trouvé et à droite, les forces correspondantes.

Le double de l’heuristique précédemment utilisée permet d’obtenir rapidement de bons résultats avec des pas d’échantillonnage plus faibles, comme le montre la Figure (6.4) pour un pas d’échantillonnage de  $3deg$ . Le chemin obtenu n’est pas garanti optimal, mais on voit qu’on est très proche du chemin optimal en comparaison avec le chemin optimal en Figure (6.3). Le gain sur les forces par rapport au chemin direct est de  $47.47\%$ , c’est légèrement mieux que pour le chemin précédemment trouvé grâce au pas d’échantillonnage plus faible. Le temps de calcul est d’environ 5 minutes. On obtient un chemin semblable au chemin optimal car ce dernier a l’apparence d’une solution “gloutonne” : il semblerait qu’à chaque étape, la configuration choisie soit celle qui se rapproche de la configuration d’arrivée ayant le poids le plus faible.

Une fois que le chemin est choisi, il faut y combiner la notion de temps afin d’avoir une

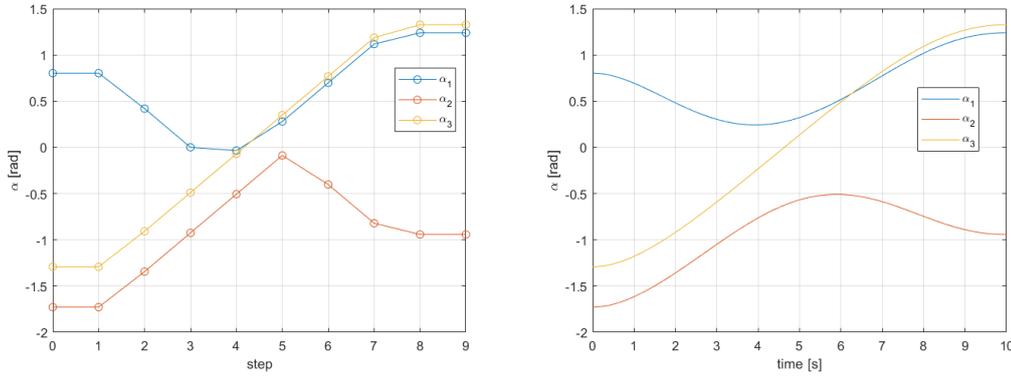


FIGURE 6.5 – Les deux étapes d’élaboration de la trajectoire à partir du chemin statique discrétisé. À gauche, le chemin statique discrétisé. À droite, la trajectoire finale (courbes de Bézier).

trajectoire.

Actuellement, nous représentons le chemin par une suite de configurations, dont nous notons le nombre  $N_c$ . Afin d’avoir un chemin continu, nous utilisons ces  $N_c$  configurations comme points de contrôle pour calculer une courbe de Bézier pour chaque module. Ceci nous donne une fonction  $f_{path} : t \rightarrow \alpha(t)$ . Nous prenons  $N_c \leq 12$  pour ne pas avoir de degrés trop élevés dans les courbes de Bézier. Si le nombre de points obtenus par l’optimisation est supérieur à 12, alors 12 points sont calculés par interpolation linéaire.

Afin d’avoir une vitesse initiale et une vitesse finale nulle, on utilise la fonction  $x \rightarrow x - \sin(x)$  qui est une fonction croissante entre 0 et  $2\pi$ , allant de 0 à  $2\pi$  sur ce même intervalle et vérifiant nos attentes sur la vitesse.

Ainsi, la trajectoire obtenue pour suivre le chemin en un temps  $T$  est décrite pour tout  $t$  tel que  $0 \leq t \leq T$  par :

$$\alpha(t) = f_{path}\left(\frac{t(N_c - 1)}{T} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi t(N_c - 1)}{T}\right)}{2\pi}\right) \quad (6.5)$$

Cette conversion est résumée en Figure (6.5).

Afin d’avoir une trajectoire réalisable sur le prototype, on effectue une trajectoire en trois temps :

- premier temps : de la position de repos à  $\alpha_s$  ;
- second temps : de  $\alpha_s$  à  $\alpha_e$  ;
- dernier temps : de  $\alpha_e$  vers la position de repos.

Chaque étape est optimisée comme expliqué précédemment. D’après les propriétés des courbes de Bézier et la manipulation effectuée pour avoir une vitesse initiale et finale nulle pour chaque partie, les positions et vitesses sont continues. Cependant, l’accélération présente

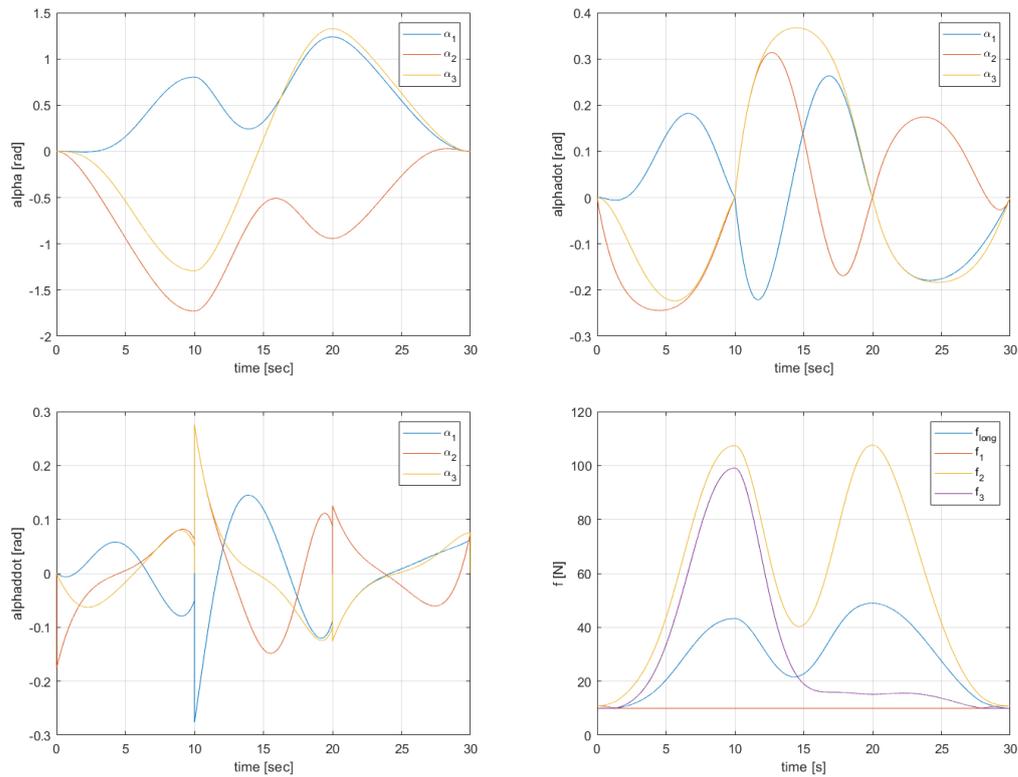


FIGURE 6.6 – Trajectoire complète (en position, vitesse et accélération), et les forces déduites depuis le modèle statique.

des discontinuités à chaque changement de partie. Cela pourra entraîner une légère variation des forces appliquées à ces instants. La Figure (6.6) montre la trajectoire complète obtenue avec les forces estimées par le modèle statique. On peut y voir la continuité des vitesses mais les discontinuités des accélérations.

Cette trajectoire a été jouée en simulation, de même que la trajectoire obtenue à partir du chemin direct, en 6 secondes et en 30 secondes. Cela permet de comparer les résultats sur une trajectoire lente et une trajectoire relativement rapide.

Le tableau (6.1) indique la moyenne des forces employées pour chacune des simulations. Nous y voyons que l'optimisation statique permet de baisser la moyenne des forces appliquées pendant la trajectoire, mais cette baisse est légère. En effet, la baisse est de 13,3% pour la trajectoire en 6 secondes et de 12,9% pour la trajectoire en 30 secondes.

Plusieurs causes peuvent expliquer ces faibles améliorations. D'abord, le temps n'apparaissant pas dans l'optimisation statique, le manipulateur reste un certain temps dans les zones coûteuses. De plus, les frottements ne sont pas pris en compte dans l'optimisation, ce qui impacte

grandement ses performances. Nous allons maintenant proposer une autre méthode d'optimisation pour prendre en compte les effets dynamiques afin d'améliorer ces performances.

### 6.1.2 Trajectoire optimale avec le modèle dynamique

Maintenant nous allons intégrer le modèle dynamique à notre optimisation de trajectoire. La première conséquence est qu'on intègre le temps dans l'optimisation, ce qui n'était pas le cas avec le modèle statique qui retournait seulement le chemin, et non une trajectoire.

On représente les trajectoires de chacun des modules par des courbes de Bézier.

L'optimisation se fait avec la fonction *fmincon* de Matlab. On est donc sur une optimisation locale : nous obtiendrons le meilleur résultat localement mais nous n'aurons pas la certitude d'avoir le meilleur résultat global. Afin d'utiliser plusieurs points de départ, on peut utiliser la fonction *multistart*. Ceci augmente nos chances d'avoir l'optimum global.

Le vecteur à optimiser comprend :

- les points de contrôle définissant les trajectoires des modules : nous avons  $N_c$  points de contrôles par module, soit un total de  $N \times N_c$  variables ;
- la durée des trajectoires.

Ce vecteur est donc de taille  $N \times N_c + 1$ .

Les contraintes sont :

- les butées articulaires, évaluées seulement sur les points de contrôle ;
- les contraintes sur les forces (seulement sur  $f_{max}$  avec le mode de calcul des forces qui garantit que toutes les forces sont supérieures à  $f_{min}$ ) évaluées sur un grand nombre de points ;
- la durée des trajectoires doit être positive.

La fonction à minimiser  $f_{cost}$  est la somme des normes au carré des forces durant la trajectoire :

$$f_{cost} = \sum_{t=0}^{t_{max}} \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt \quad (6.6)$$

Le calcul des forces se fait de la manière suivante :

- les trajectoires articulaires sont calculées à partir des points de contrôle (les vitesses et accélération sont obtenues en dérivant les courbes de Bézier par rapport à  $x$  en faisant attention au lien entre  $x$  et  $t$ ) ;
- le modèle dynamique complet est utilisé pour calculer les forces permettant d'exécuter la trajectoire du manipulateur. On utilisera l'équation (2.62) qui suppose que les câbles sont inélastiques.

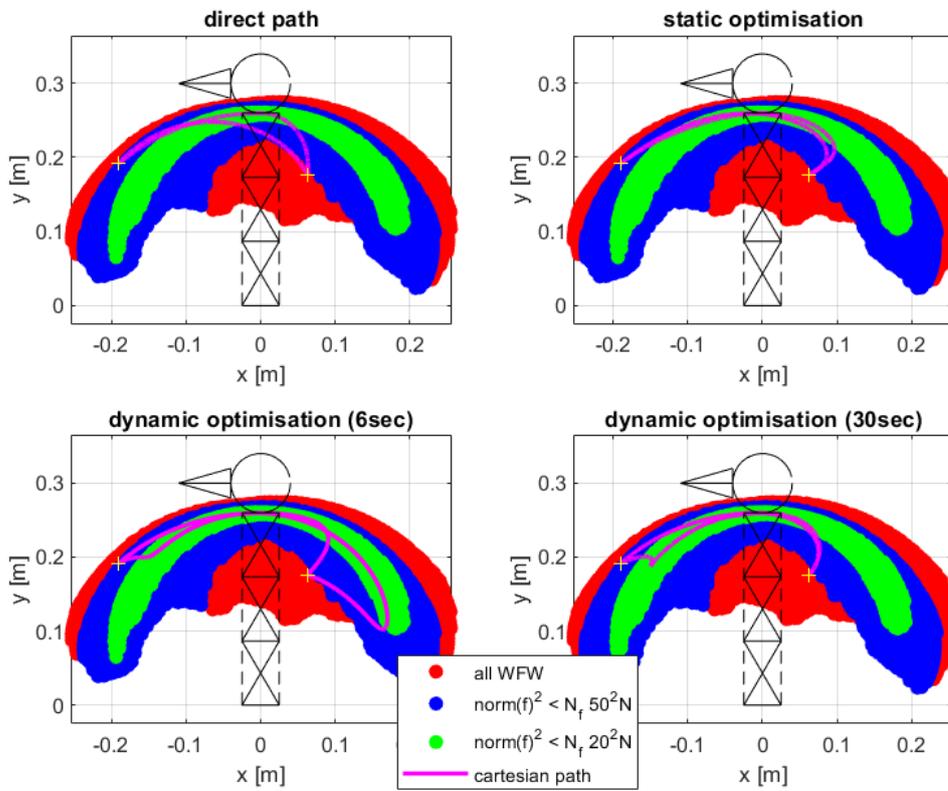


FIGURE 6.7 – Chemins cartésiens des trajectoires obtenues avec les différentes optimisations.

Les chemins cartésiens correspondant aux trajectoires obtenues pour les différentes optimisations sont présentés en Figure (6.7). Le chemin correspondant à l'optimisation statique reste plus longtemps dans la zone verte que le chemin direct. Sur la partie à droite, il relie au plus vite le point dans la zone rouge avec la zone verte. Le chemin correspondant à l'optimisation dynamique sur 30 secondes est assez proche du chemin correspondant à l'optimisation statique : la différence de résultats entre les deux se fait donc principalement sur la durée passée dans chaque partie du chemin. L'optimisation dynamique sur 6 secondes donne également un chemin qui reste la plupart du temps dans la zone verte. Nous notons une différence importante dans la partie à droite, où le manipulateur va beaucoup plus vers la droite pour rejoindre la zone verte.

Les forces moyennes obtenues en simulation en jouant les trajectoires optimisées en 6 et 30 secondes sont indiquées dans le tableau (6.1). Les gains sur ces moyennes sont nettement plus importants qu'avec l'optimisation statique, puisqu'ils sont de 43,5% et de 42,1% pour les trajectoires de 6 et 30 secondes respectivement.

Temps	Trajectoire directe	Modèle statique	Modèle dynamique
6sec	40.49N	35.09N	22.87N
30sec	37.54N	32.69N	21.75N

TABLE 6.1 – Forces moyennes appliquées en simulation.

Temps	Trajectoire directe	Modèle statique	Modèle dynamique
6sec	35.6N	32.3N	19.51N
30sec	34.5N	32.0N	18.32N

TABLE 6.2 – Forces moyennes appliquées en expérience.

Toutes ces trajectoires ont ensuite été jouées sur le prototype afin de valider ces résultats. Les forces moyennes appliquées sont indiquées dans le tableau (6.2). Les résultats sont cohérents avec les résultats de simulation, avec des gains du même ordre. Les forces sont globalement un peu plus faibles pour toutes les trajectoires, ce qui est majoritairement dû à l'identification des frottements qui n'est pas parfaite.

La Figure (6.8) montre les forces employées pour effectuer les trajectoires directes et optimisées. Les forces des trajectoires de 6 secondes sont sur la colonne de gauche et celles des trajectoires de 30 secondes sont sur la colonne de droite. Nous pouvons observer que les pics sur  $f_2$  en deuxième partie de trajectoire sont moins présents pour les trajectoires directes, cependant les forces appliquées restent en moyenne plus élevées. Les pics de forces sont nettement plus fins avec les trajectoires optimisées avec le modèle dynamique : le manipulateur reste peu de temps dans les configurations qui lui sont coûteuses, ce qui lui permet d'utiliser moins longtemps des forces élevées. Les forces de simulation et d'expérience correspondent bien, excepté pour l'amplitude de certains pics, mais ceci est dû à l'identification des frottements qui n'est pas parfaite.

Les vidéos de toutes les trajectoires effectuées par le prototype sont disponibles au lien suivant : <https://uncloud.univ-nantes.fr/index.php/s/aWZeaF6X3WqX6Sg>

Nous avons également optimisé des trajectoires pour aller d'une configuration dans l'espace vert (qui nécessite peu de forces pour rester en équilibre) de l'espace de travail à une autre de l'espace vert, comme on peut le voir sur la Figure (6.9).

Comme les configurations de départ et d'arrivées sont dans des zones peu coûteuses, le chemin direct est déjà peu coûteux. Le chemin direct aurait pu passer par des configurations coûteuses mais ce n'est pas le cas ici. De ce fait, les optimisations ont un effet moins impactant. Les résultats sont résumés dans le tableau (6.3). L'optimisation avec le modèle statique donne des résultats très similaires à la trajectoire directe. L'optimisation avec le modèle dyna-

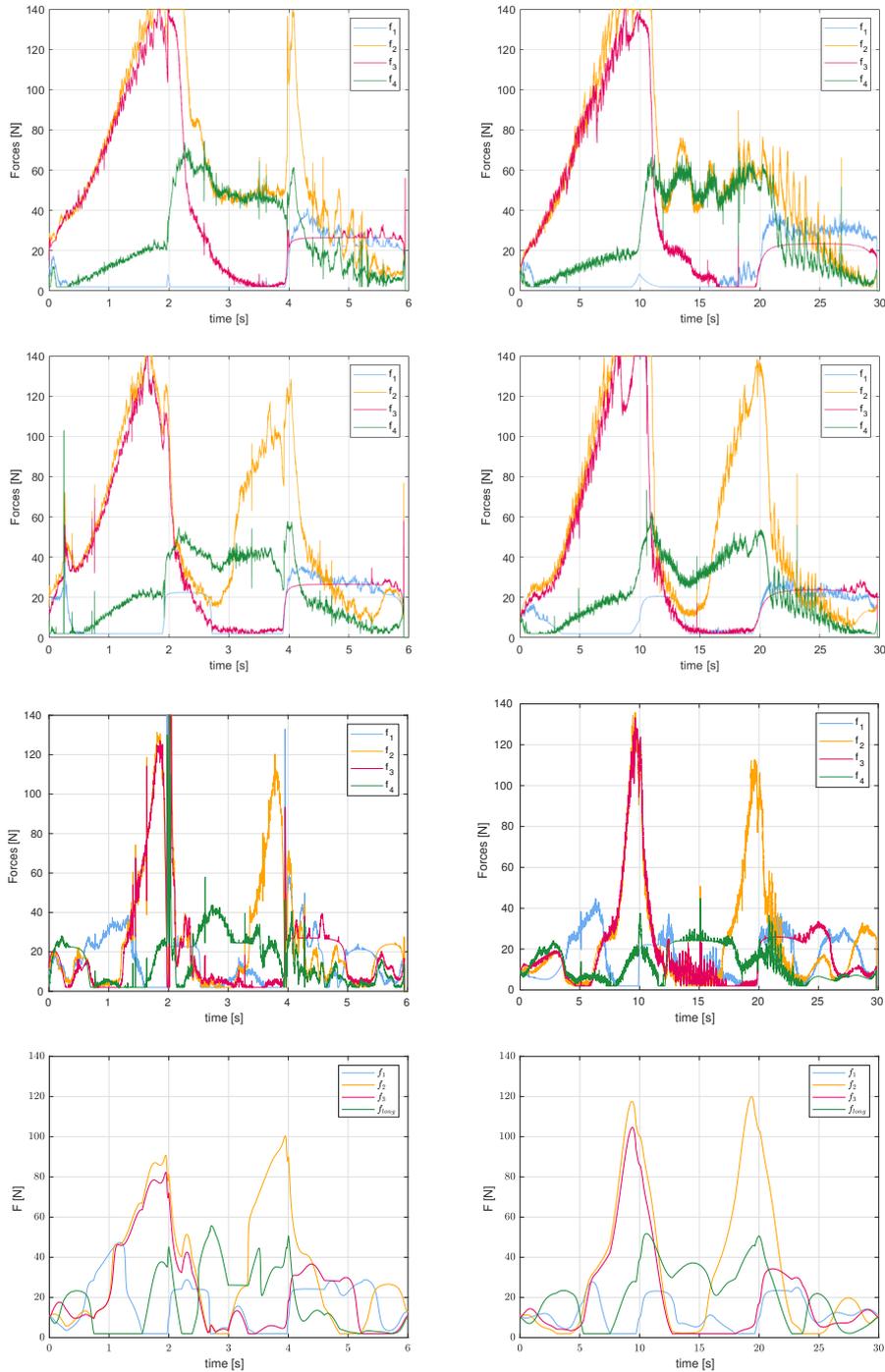


FIGURE 6.8 – Forces employées pour effectuer les trajectoires optimisées. Les trajectoires directes sont sur la première ligne, les trajectoires optimisées avec le modèle statique sont sur la seconde ligne et les trajectoires optimisées avec le modèle dynamique sont sur la troisième ligne. A titre de comparaison, les forces obtenues en simulation pour jouer les trajectoires optimisées avec le modèle dynamique sont affichées sur la quatrième et dernière ligne. La première colonne montre les trajectoires en 6 secondes et la seconde colonne celles en 30 secondes.

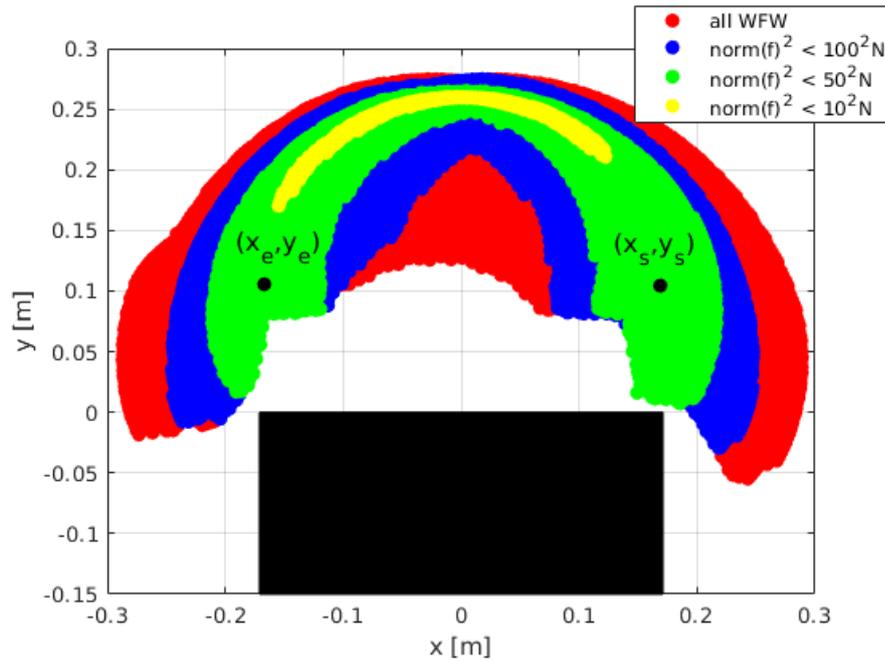


FIGURE 6.9 – Position du manipulateur dans l’espace de travail pour les configurations  $\alpha_s$  et  $\alpha_e$  pour la seconde trajectoire à optimiser.  $(x_s, y_s)$  est la position correspond à  $\alpha_s$  et  $(x_e, y_e)$  est la position correspond à  $\alpha_e$ . Les deux points se situent dans la zone verte.

Temps	Trajectoire directe	Modèle statique	Modèle dynamique
6sec	19.90N	19.46N	15.98N
30sec	16.79N	16.44N	14.22N

TABLE 6.3 – Forces moyennes appliquées en expérience pour les trajectoires reliant deux configurations dans la zone verte.

mique améliore légèrement les résultats, avec une baisse de la moyenne des forces appliquées d’environ 19,6% pour la trajectoire en 6 secondes et 15,3% pour la trajectoire en 30 secondes. L’optimisation est donc moins efficace sur ce type de trajectoire mais reste utile.

En conclusion, nous avons conçu deux méthodes pour optimiser la trajectoire permettant de relier deux configurations. La première méthode utilise le modèle statique uniquement tandis que la seconde s’appuie sur le modèle dynamique. Que ce soit en simulation ou en expérience, qui donnent des résultats similaires, l’optimisation se basant sur le modèle dynamique est bien plus efficace, notamment avec la prise en compte des frottements mais aussi avec la gestion du temps qui n’est pas fait avec le modèle statique. Les résultats sont d’autant plus intéressants que les configurations à relier se trouvent dans des zones coûteuses. En effet, c’est dans les zones coûteuses que la marge de progression est la plus importante.

## 6.2 Mouvements explosifs

Le pic est capable de creuser son nid dans un tronc d'arbre en projetant son bec à une grande vitesse sur ce tronc. Nous allons tenter de produire des mouvements similaires à celui du pic qui frappe l'arbre.

On souhaite donc ici maximiser la vitesse selon l'axe  $x$  de la pointe du bec de notre manipulateur.

On optimise ici aussi la trajectoire en la représentant avec des courbes de Bézier. Nous utilisons la méthode proposée dans la section 6.1.2 pour optimiser la trajectoire. Nous gardons donc le vecteur à optimiser ainsi que les contraintes indiquées. Seuls les ajouts de contraintes et le changement de la fonction à minimiser sont donc détaillés ici.

Afin de partir de la position d'équilibre au repos pour débiter avec une vitesse nulle, on impose que les deux premiers coefficients des courbes de Bézier sont les orientations des modules en position d'équilibre au repos, soit  $\alpha_i = 0$  pour chaque module  $i$ . Nous n'imposons pas les derniers coefficients, qui permettront d'ajuster la position et la vitesse du bec à la fin de la trajectoire.

Nous voulons maximiser la vitesse maximale du bec selon l'axe  $x$  à la fin de la trajectoire. La fonction à minimiser est donc :

$$f_v = (v_x(T) - v_d)^2 \quad (6.7)$$

où  $v_x$  est la vitesse du bec selon l'axe  $x$  et  $v_d$  est une vitesse désirée que l'on choisit élevée (on choisit une vitesse désirée trop élevée pour être atteinte afin d'obtenir la plus grande vitesse maximale possible).

Comme les mouvements sont rapides, nous ajoutons un nouveau groupe de contraintes qui portent sur les vitesses maximales des moteurs :

$$\forall i \in \{1 \dots n_p\}, |\dot{\theta}(i)| \leq \dot{\theta}_{max} \quad (6.8)$$

Nous ajoutons également une contrainte pour que la pointe du bec atteigne la valeur désirée  $x_d$  à la fin de la trajectoire :

$$x_{N+1}(\alpha(T)) = x_d \quad (6.9)$$

Cette contrainte permet de choisir l'abscisse à laquelle le bec doit atteindre sa vitesse maximale, comme le pic doit anticiper l'endroit où il va frapper le tronc d'arbre.

Pour tester ces mouvements explosifs, nous bornons la force maximale à 100N durant l'opti-

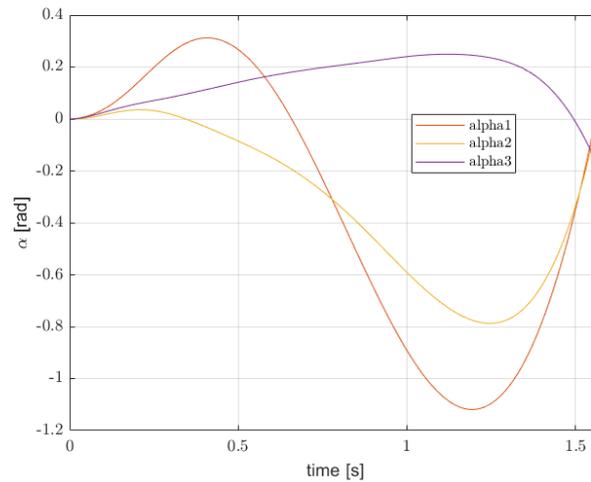


FIGURE 6.10 – Configurations articulaires du mouvement explosif obtenues par optimisation.

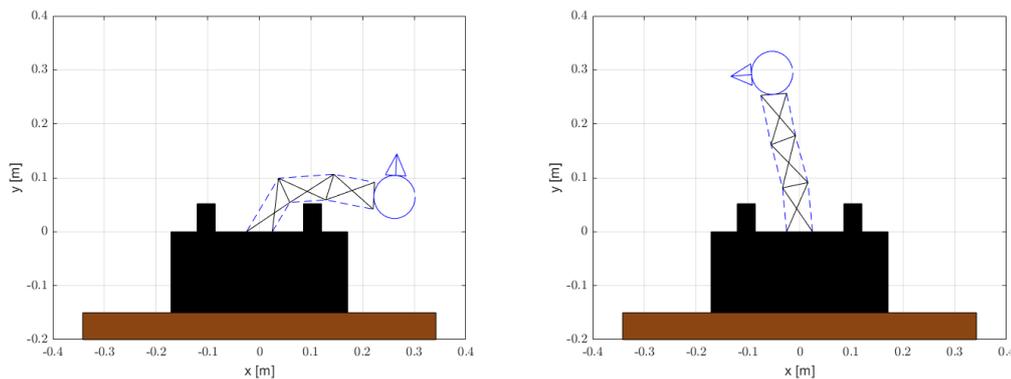


FIGURE 6.11 – Configurations articulaires du mouvement explosif à l’instant où le cou est le plus reculé et à l’instant où la vitesse maximale du bec selon l’axe  $x$  est atteinte.

misation pour éviter d’avoir des mouvements trop violents. La trajectoire obtenue est présentée en Figure (6.10). Nous remarquons qu’elle consiste à prendre de l’élan en penchant la tête vers l’arrière puis à revenir vers la position droite rapidement, ce qui permet à la pointe du bec d’atteindre son pic de vitesse à la position désirée. Les deux premiers modules se penchent ainsi vers la droite puis vers la gauche. Le troisième module se penche à l’inverse vers la gauche puis vers la droite, ce qui permet au bec de rester droit à la fin du mouvement et donc d’avoir une vitesse maximale selon l’axe  $x$ .

La Figure (6.11) montre la configuration la plus reculée du cou, ainsi que la configuration à laquelle le pic de vitesse est atteint.

La Figure (6.12) montre la vitesse de la pointe du bec selon l’axe  $x$  ainsi que les forces

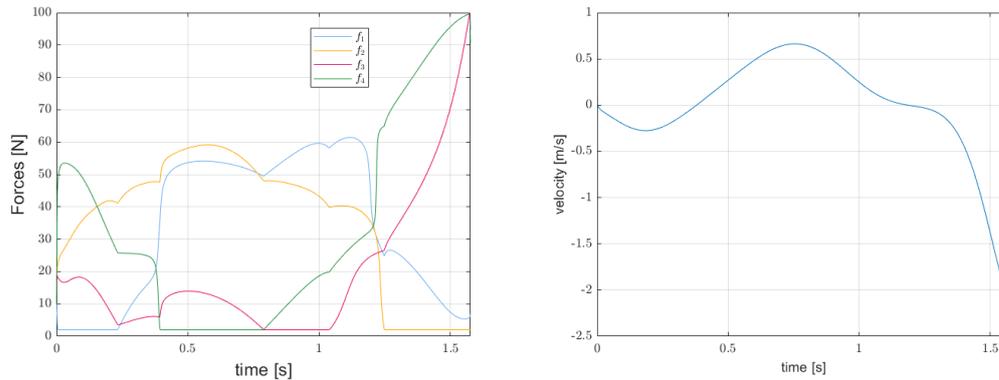


FIGURE 6.12 – Forces appliquées en simulation pour jouer la trajectoire explosive et vitesse du bec selon l'axe  $x$ .

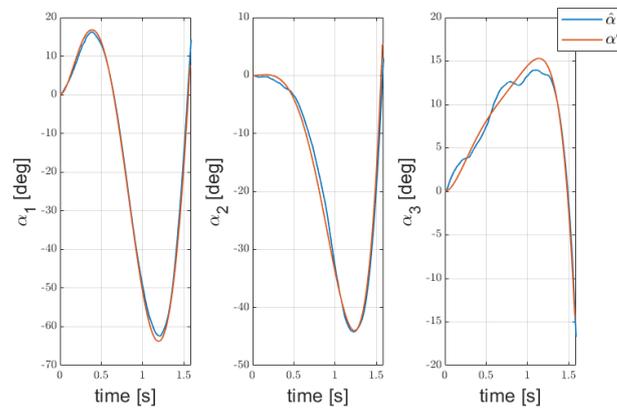


FIGURE 6.13 – Suivi de la trajectoire explosive avec le prototype.

appliquées en simulation. La vitesse minimale obtenue est d'environ  $-2.14m.s^{-1}$ . Notons que le bec du pic peut lui atteindre des vitesses maximales allant de  $2m.s^{-1}$  (pic épeiche) à  $6m.s^{-1}$  (pic noir) environ selon les espèces [WZF11].

La Figure (6.13) montre le suivi de la trajectoire obtenu avec le prototype. Les gains ont été montés à  $\omega = 15$  pour cette trajectoire qui est plus rapide que les précédentes. La trajectoire est globalement bien suivie, avec une erreur moyenne de  $1,07deg$  sur  $\alpha$ .

La Figure (6.14) montre les forces obtenues en jouant la trajectoire sur le prototype, ainsi que la vitesse du bec selon l'axe  $x$ . On voit que les forces sont plus élevées que celles obtenues en simulation. Les forces atteignent même la saturation à  $140N$  du prototype. Cette différence peut être due à une mauvaise identification des frottements à cette vitesse, ou de l'élasticité des câbles qui sont soumis à des forces élevées. La vitesse maximale atteinte est de  $2,22m.s^{-1}$ , ce

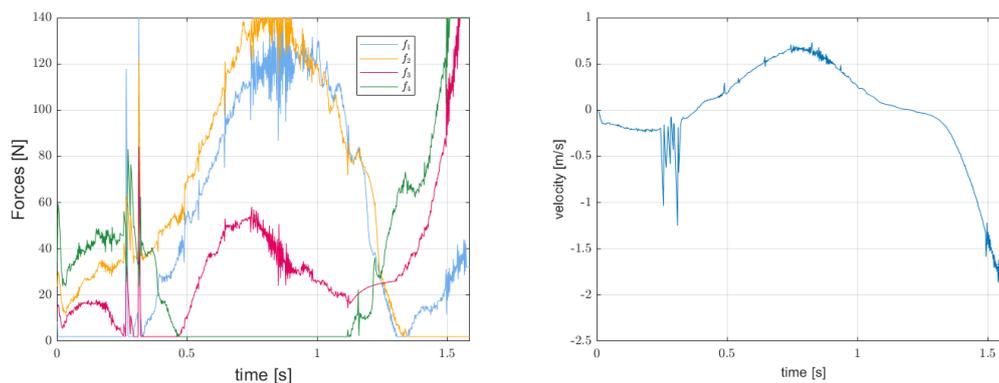


FIGURE 6.14 – Forces appliquées sur le prototype pour jouer la trajectoire explosive et vitesse du bec selon l'axe  $x$ .

qui est proche de la valeur obtenue en simulation.

La vidéo du prototype reproduisant cette trajectoire est disponible au lien suivant : <https://uncloud.univ-nantes.fr/index.php/s/4m4XsNt3bkH4bcr>

## 6.3 Conclusion

Nous avons d'abord optimisé les mouvements pour se déplacer d'une configuration à une autre pour minimiser les forces appliquées. Une méthode basée sur le modèle statique et permettant de garantir le résultat optimal a été présentée mais les gains sur les forces appliquées en comparaison d'une trajectoire directe sont faibles. Une seconde méthode avec le modèle dynamique a donc été développée et les gains obtenus sont nettement plus intéressants puisqu'ils sont de plus de 40%.

Nous avons ensuite généré un mouvement explosif que nous avons produit sur le prototype. Ce mouvement montre cependant les limites du modèle dynamique employé, puisque les forces requises pour effectuer les mouvements à haute vitesse sont moins bien estimées en simulation. Les modèles simples de frottement des moteurs et d'élasticité des câbles peuvent être à l'origine de ces différences.



# OUVERTURE : MANIPULATEUR SOUS-ACTIONNÉ

---

Pour terminer cette thèse, nous proposons une ouverture vers le prochain manipulateur envisagé pour les futurs travaux de recherches. Celui-ci est composé d'une dizaine de modules, mais est actionné avec seulement  $N_f = 4$  moteurs. Ce nouveau manipulateur est donc sous-actionné, ce qui engendre de nouvelles problématiques.

Un premier point important concerne la mesure des orientations des modules  $\alpha$ . Pour un manipulateur sous-actionné, nos méthodes d'estimation de  $\alpha$  à partir des positions moteurs ne sont plus utilisables. De ce fait, et pour également éviter les problèmes de mesures liés à l'élasticité des câbles, des codeurs seront ajoutés pour mesurer directement l'orientation des modules. Chaque module sera équipé d'un codeur mesurant l'orientation entre sa barre du haut et une des barres diagonales, ce qui permettra de calculer son orientation  $\alpha$ . Puisque le modèle dynamique est écrit en fonction de  $\alpha$ , toute commande basée sur ce modèle nécessite la connaissance de  $\alpha$ .

Dans une première partie, nous allons proposer un nouvel algorithme de calcul de l'espace de travail statique, qui exploite le sous-actionnement en explorant l'espace des forces au lieu de l'espace articulaire. Ensuite, nous étudierons l'impact du nombre de modules sur l'espace de travail du manipulateur. Pour cela, nous établirons une méthode de choix des variables du manipulateur permettant de comparer des manipulateurs ayant un nombre différent de modules. Puis nous nous baserons sur l'espace de travail statique pour comparer différents manipulateurs, en prenant également en compte des obstacles.

Nous considérerons un manipulateur composé de 11 modules, soit le nombre de vertèbres du pic vert. Nous considérerons le même modèle que pour le prototype à trois modules, avec la même masse linéique des barres, les mêmes poulies et les mêmes inerties moteurs. Cependant, les câbles seront supposé non-élastiques car il est envisagé d'utiliser des câbles moins élastiques pour ce futur prototype. Nous capturerons le mouvement d'un cou de pic vert depuis une vidéo tournée avec un cadavre d'oiseau afin d'avoir le cou dénudé. Enfin, nous proposerons une commande pour ce manipulateur sous-actionné, que nous testerons en simulation dans le but de

reproduire le mouvement de la vidéo.

## 7.1 Exploration de l'espace des forces pour les cas de sous-actionnement

Le modèle statique est composé de  $N$  équations pour  $N + N_f$  variables (les  $N$  orientations des modules  $\alpha$  et les  $N_f$  forces à appliquer pour être en équilibre dans cette configuration). Puisque dans le cas présent, on a  $N_f < N$ , il est plus intéressant d'explorer  $N_f$  variables au lieu de l'espace articulaire. Nous pouvons choisir les  $N_f$  variables à explorer de la manière que nous souhaitons. Nous présentons ici une méthode où les  $N_f$  variables sont les forces appliquées. Une autre méthode, où les variables à explorer sont un sous-espace de  $\alpha$ , a été implémentée mais est moins performante, nous ne la détaillons donc pas ici.

### Exploration de l'espace des forces

Nous voulons ici explorer l'espace des forces pour établir l'espace de travail. Plus précisément, pour chaque jeu de force étudié, nous allons calculer une configuration  $\alpha$  vérifiant le modèle statique.

Comme précédemment, nous discrétisons l'espace exploré. On peut utiliser une discrétisation uniforme, comme proposé pour l'espace articulaire dans la méthode explorant ce dernier, ou une autre discrétisation en fonction de ce qui est recherché. Afin de bien mettre en évidence les zones de l'espace de travail nécessitant de faibles forces, nous utilisons la discrétisation non-uniforme suivante : les forces vont de  $0N$  à  $20N$  avec un pas de  $4N$ , puis de  $20N$  à  $140N$  avec un pas de  $10N$ .

L'objectif est de calculer, pour un jeu de forces données  $\mathbf{f}$ , une configuration du manipulateur  $\alpha$  telle qu'on ait l'équilibre statique décrit par l'équation (2.53). Dans cette équation, le vecteur des dérivées des énergies potentielles  $\mathbf{g}(\alpha)$  et la matrice  $\mathbf{Z}(\alpha)$  dépendent de la configuration  $\alpha$ . Pour calculer une configuration d'équilibre, nous procédons par optimisation en cherchant à minimiser :

$$\|\mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f}\|^2 \quad (7.1)$$

Nous utilisons la méthode de Newton-Raphson [Ypm95] pour cela. En partant d'une configuration  $\alpha$  assez proche de la solution, la méthode consiste à mettre à jour la configuration jusqu'à obtenir un équilibre avec la formule suivante :

$$\alpha = \alpha - \lambda_{NR} \left( \frac{\partial(\mathbf{g} - \mathbf{Z}\mathbf{f})}{\partial\alpha} \right)^{-1} (\mathbf{g} - \mathbf{Z}\mathbf{f}) \quad (7.2)$$

où  $\lambda_{NR}$  est un paramètre à fixer entre 0 et 1. Comme le calcul numérique ne permet pas d'atteindre forcément un équilibre exact, nous admettrons qu'une configuration est solution du modèle statique si et seulement si :

$$\|\mathbf{g} - \mathbf{Z}\mathbf{f}\| < \varepsilon \quad (7.3)$$

où  $\varepsilon$  est une valeur faible. Suite à des essais avec différentes valeurs, nous prenons  $\lambda_{NR} = 1$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$ , qui permettent une convergence rapide vers des résultats acceptables.

La matrice à inverser est la matrice de raideur articulaire du manipulateur  $\mathbf{K}$  définie dans le modèle dynamique par l'équation (2.54). La convergence ne se fait donc que dans des zones stables de l'espace de travail.

Il reste maintenant le problème du choix de la configuration de départ pour la méthode de Newton-Raphson, cette dernière devant être assez proche de la solution pour assurer la convergence et pour que cette dernière soit rapide. Pour calculer cette configuration de départ, nous allons négliger la gravité. Ainsi, l'équation à résoudre est :

$$\mathbf{g}_s(\boldsymbol{\alpha}) - \mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{f} = 0 \quad (7.4)$$

où  $\mathbf{g}_s$  est le vecteur des dérivées de l'énergie potentielle due aux ressorts, défini par l'équation (2.46).

Les lignes de cette équation sont indépendantes, ce qui nous permet de les résoudre chacune indépendamment. Compte tenu du fait que la ligne  $i$  de  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha})$  ne dépend que de  $\alpha_i$  (voire section 2.3.2) et que  $g_s(i)$  ne dépend que de  $\alpha_i$ , (voire section 2.3.4), la ligne  $i$  de l'équation (7.4) s'écrit :

$$g_s(i)(\alpha_i) - \mathbf{Z}_i(\alpha_i)\mathbf{f} = 0 \quad (7.5)$$

où  $\mathbf{Z}_i$  est la ligne  $i$  de la matrice  $\mathbf{Z}$ .

Soit la fonction  $f_{si} : \alpha_i \rightarrow g_s(i)(\alpha_i) - \mathbf{Z}_i(\alpha_i)\mathbf{f}$ . Comme nous voulons calculer rapidement une orientation  $\alpha_i$  telle que  $f_{si}(\alpha_i)$  soit proche de 0, nous allons linéariser  $f_{si}$ . Pour cela, nous prenons deux points de  $f_{si}$  et en déduisons la fonction affine correspondante. Les points en  $\pm \frac{\pi}{4}$  permettent généralement une approximation correcte de  $f_{si}$  pour les valeurs situées dans l'intervalle  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . D'autres points peuvent être utilisés en fonction des raideurs des ressorts utilisés et des forces appliquées, les points pouvant aller jusqu'à  $\pm \frac{\pi}{2}$ . La Figure (7.1) montre la fonction  $f_{si}$  entre  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  pour un jeu de force  $\mathbf{f}$  choisi aléatoirement sur un manipulateur constitué de  $N = 10$  modules. On voit que la linéarisation est cohérente, notamment sur l'intervalle  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ . Nous utilisons donc ces valeurs (les points en  $\pm \frac{\pi}{4}$ ) pour la suite.

Trouver le zéro de la fonction affine est évident. Si la valeur obtenue est en dehors de l'inter-

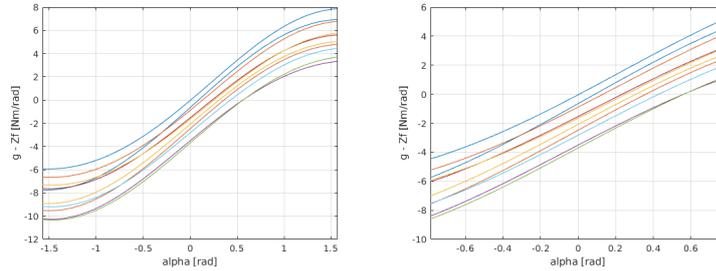


FIGURE 7.1 – Les fonctions  $f_{si}$  entre  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  pour un jeu de force  $f$  choisi aléatoirement (chaque force étant comprise entre  $f_{min}$  et  $f_{max}$ . Les dimensions des dix modules sont  $b = 5cm$ ,  $L = 10cm$  et tous les ressorts ont une raideur de  $3000N.m^{-1}$ .

valle  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , on utilisera la borne la plus proche car l'approximation linéaire peut vite devenir mauvaise en dehors de cet intervalle.

Les  $N$  orientations ainsi calculées forment la configuration de départ pour les calculs de Newton-Raphson. La configuration de départ est d'autant plus proche de la solution que :

- l'apport des ressorts dans l'énergie potentielle est prédominant sur l'apport de la gravité, puisque cette dernière est négligée dans le calcul de la configuration initiale ;
- les forces ne sont pas trop élevées par rapport aux ressorts utilisés, pour que l'approximation linéaire de  $f_{si}$  soit correcte.

Ces deux conditions demandent que les raideurs des ressorts ne soient pas trop faibles, ce que nous recherchons puisque nous voulons un manipulateur stable. Les raideurs des ressorts n'intervenant que dans la diagonale de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ , augmenter les raideurs des ressorts augmente cette diagonale et donc la stabilité du manipulateur.

### Complexité

Le modèle statique doit être vérifié pour chaque jeu de forces de l'espace discrétisé. Nous discrétisons chaque dimension de l'espace des forces de la même manière. Ainsi, si chaque force peut prendre  $M$  valeurs, la complexité de l'algorithme est en  $O(M^{N_f})$ . Le nombre de vérifications augmente donc de manière exponentielle par rapport au nombre de moteurs, mais est constant par rapport au nombre de modules. Cet algorithme est donc plus rapide que l'exploration totale de l'espace articulaire dans les cas de sous-actionnement, et peut s'utiliser dans un temps raisonnable avec un nombre de moteurs allant jusqu'à  $N_f = 4$ .

### Exemple

La Figure (7.2) montre le résultat obtenu pour un manipulateur constitué de  $N = 9$  modules. Les dimensions des modules ainsi que les raideurs des ressorts sont celles indiquées dans le tableau (7.1) et sur la Figure (7.5). Quatre câbles permettent d'actionner ce manipulateur. Un

câble long passe par la gauche de tous les modules. Sur la droite, un câble tire sur les trois premiers modules, un autre câble tire sur les trois modules du milieu et le dernier câble tire sur les trois modules du haut, comme on peut le voir sur la Figure (7.2).

Le temps de calcul de cet espace de travail est d'environ une minute. Le nombre de jeux de forces pour lesquels une configuration d'équilibre est calculée est d'un peu plus de 100000.

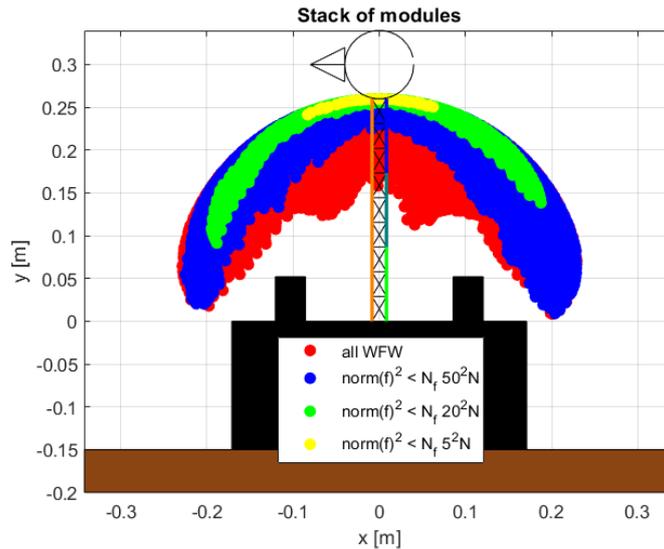


FIGURE 7.2 – Espace de travail d'un manipulateur constitué de  $N = 9$  modules et actionné par  $N_f = 4$  câbles.

## 7.2 Analyse de l'impact du nombre de modules

### 7.2.1 Comparaison du nombre de modules

Nous voulons ici étudier l'impact du nombre de modules sur l'espace de travail statique. Nous fixons le nombre de moteurs à  $N_f = 4$  afin que seul le nombre de modules varie. Nous allons calculer les dimensions des modules et les raideurs des ressorts afin d'avoir des résultats comparables.

Nous comparons trois manipulateurs :

- un manipulateur à  $N = 3$  modules, entièrement actionné avec l'actionnement à  $N + 1$  moteurs ;
- un manipulateur à  $N = 6$  modules, sous-actionné avec un câblage rappelant celui du cas précédent : un câble long passe sur la gauche de tous les modules tandis que sur la droite,

les trois autres câbles sont le long de deux modules consécutifs chacun (l'un à droite des deux premiers modules, le second à droite des modules 3 et 4 et le dernier à droite des deux derniers modules);

- un manipulateur à  $N = 9$  modules, sous-actionné avec un câblage similaire : un câble long à gauche et trois câbles tirant à droite de trois modules consécutifs.

Les manipulateurs et leur câblage sont montrés sur la Figure (7.12).

Pour chacun des manipulateurs, nous considérons deux versions géométriques différentes. Dans les deux versions, et quelque soit le nombre de modules, nous fixons la même hauteur totale du manipulateur dans la position verticale (la hauteur de la barre du haut du dernier module). Notons cette hauteur  $h$ . En pratique, nous prenons la hauteur du prototype actuel à  $N = 3$  modules, soit  $h = 26\text{cm}$ .

Pour la taille des modules, dans la première version nous gardons le ratio  $\frac{L}{b} = 2$  afin que les modules aient le même comportement. Afin d'atteindre la hauteur  $h$ , chaque module doit vérifier  $d_i(\alpha_i = 0) = \frac{h}{N}$ . On en déduit rapidement que l'on doit avoir :

$$b = \frac{h}{N\sqrt{3}} \text{ et } L = \frac{2h}{N\sqrt{3}} \quad (7.6)$$

Dans la seconde version, nous prenons la même largeur  $b = 5\text{cm}$  afin de garder la même largeur que sur le prototype. Comme dans le premier cas, chaque module doit vérifier  $d_i(\alpha_i = 0) = \frac{h}{N}$ . On en déduit donc que :

$$L = \sqrt{\left(\frac{h}{N}\right)^2 + b^2} \quad (7.7)$$

Les dimensions des barres pour les différents manipulateurs sont indiquées dans le tableau (7.1).

Première version	$N = 3$	$N = 6$	$N = 9$	Seconde version	$N = 3$	$N = 6$	$N = 9$
$b$ (cm)	5.00	2.50	1.67	$b$ (cm)	5.00	5.00	5.00
$L$ (cm)	10.00	5.00	3.33	$L$ (cm)	10.00	6.61	5.77

TABLE 7.1 – Dimensions des barres pour les différents manipulateurs considérés.

Concernant les raideurs des ressorts, il est moins évident d'avoir des raideurs à effet comparable vu que le nombre de modules et leurs tailles changent. Nous proposons de calculer les raideurs à partir de deux positions d'équilibre similaires quelque soit le nombre de modules et les longueurs des barres :

- la position verticale comme position d'équilibre au repos ;

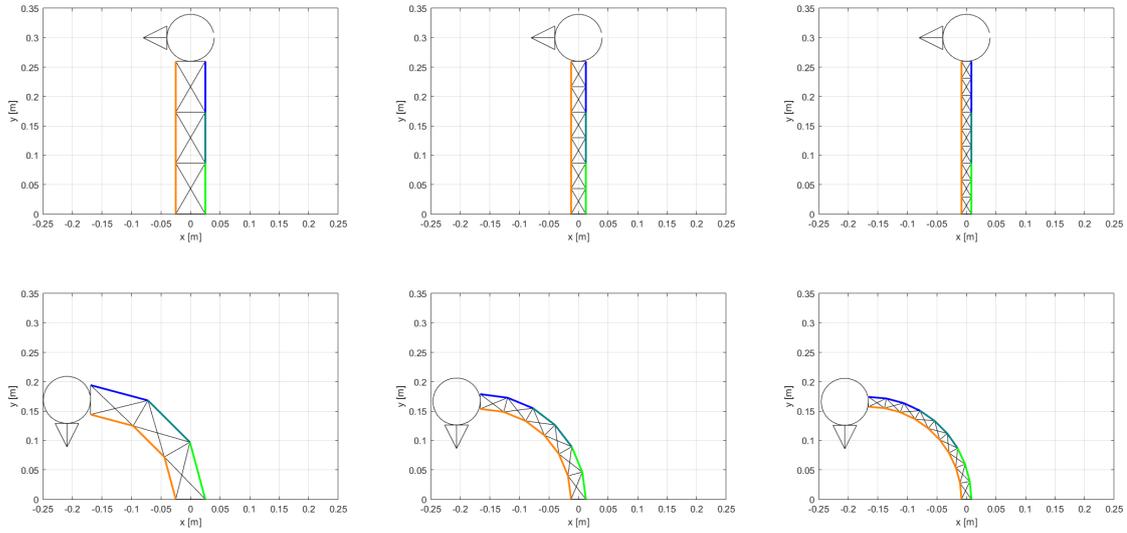


FIGURE 7.3 – Configurations droites et penchées des manipulateurs (première version) avec 3, 6 et 9 modules.

- la position où l'orientation de tous les modules est égale à  $\alpha_i = \frac{\pi}{2N}$  comme position d'équilibre avec le jeu de forces suivant : la force appliquée au câble long est fixée arbitrairement à  $20N$  et les autres forces sont nulles.

Les longueurs à vide des ressorts sont fixées à  $L - b$ .

Ainsi les ressorts ont un effet global similaire quelque soit le nombre de modules. Les différentes configurations des manipulateurs de la première version sont présentées en Figure (7.12). Celles des manipulateurs de la seconde version sont présentées en Figure (7.4). Nous pouvons également y voir le placement des câbles sur les côtés des modules (une couleur par câble). Bien qu'elles ne soient pas affichées, les parties de câbles en strut-routed sont bien considérées.

La Figure (7.5) montre les raideurs des ressorts pour chacun des manipulateurs. Les ronds bleus indiquent les raideurs des manipulateurs de la première version, et les rouges celles des manipulateurs de la seconde version. Pour les manipulateurs à 3 modules, les courbes sont les mêmes car les manipulateurs des deux versions sont identiques. Plus le nombre de modules est important, plus les raideurs des ressorts sont élevées car leurs longueurs sont plus faibles. Les longueurs des ressorts sont plus faibles dans la première version que dans la deuxième, ce qui explique que les raideurs soient plus élevées pour la première version.

Nous notons que les deux manipulateurs à  $N = 3$  modules sont identiques, mais sont différents du prototype : ils ont des barres de mêmes dimensions mais les raideurs des ressorts sont différentes.

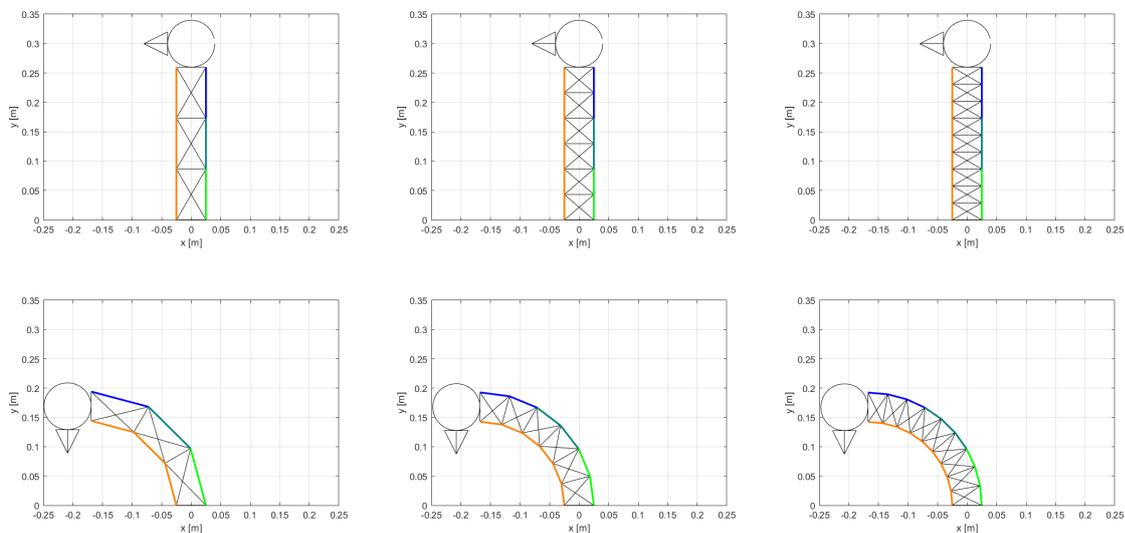


FIGURE 7.4 – Configurations droites et penchées des manipulateurs (seconde version) avec 3, 6 et 9 modules.

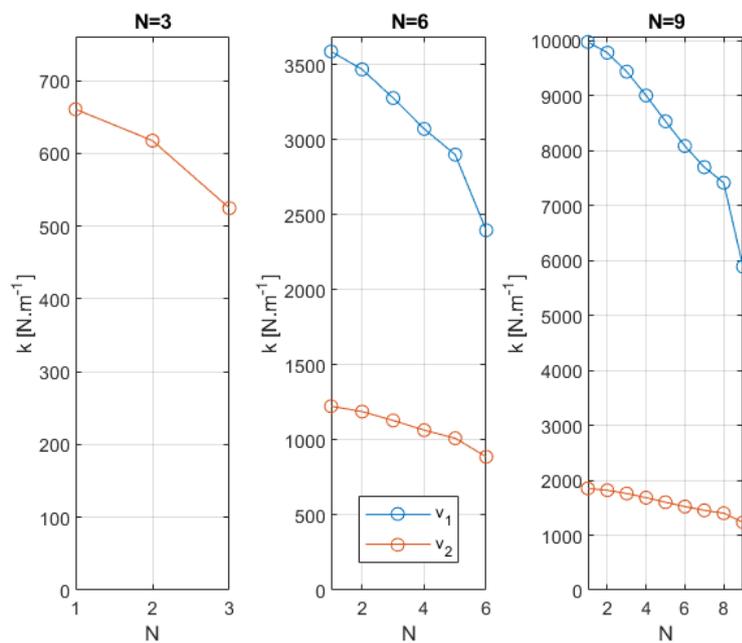


FIGURE 7.5 – Raideurs des ressorts des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (première version en bleu et seconde en rouge).

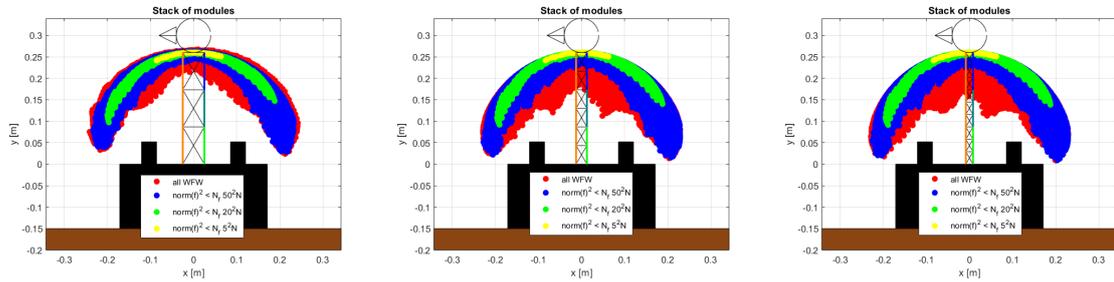


FIGURE 7.6 – Espaces de travail des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (première version).

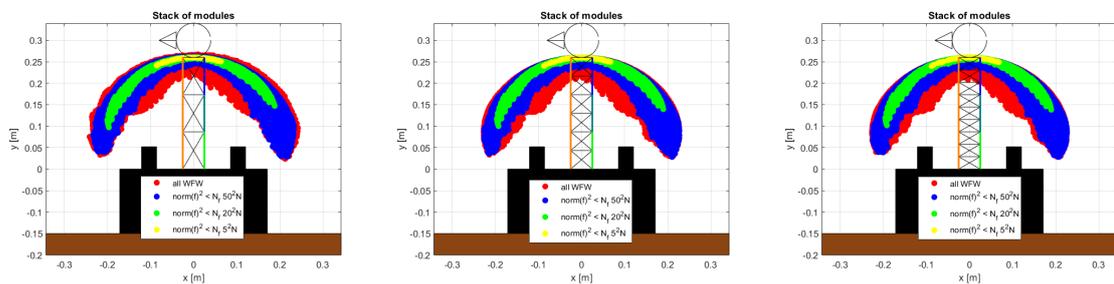


FIGURE 7.7 – Espaces de travail des manipulateurs avec 3, 6 et 9 modules (seconde version).

Nous pouvons donc maintenant étudier l'impact du nombre de modules sur l'espace de travail statique. Les trois espaces de travail correspondant aux trois manipulateurs de la première version sont présentés en Figure (7.6). On peut y voir que le nombre de modules impacte peu sur la forme de l'espace de travail et sur la répartition des zones colorées en fonction des forces requises. Les manipulateurs avec plus de modules peuvent cependant plus s'approcher de la plateforme et des moteurs, ce qui leur permet d'étendre l'espace de travail vers l'intérieur.

Les trois espaces de travail correspondant aux trois manipulateurs de la seconde version sont présentés en Figure (7.7). On peut y voir que le nombre de modules impacte également peu sur la forme de l'espace de travail et sur la répartition des zones colorées en fonction des forces requises. Cependant, ici la corrélation entre le nombre de modules et l'espace de travail n'est pas évidente. L'espace de travail du manipulateur à 6 modules est un peu plus bas que celui du manipulateur à 3 modules. L'espace de travail du manipulateur à 9 modules est quant à lui un peu plus fin que l'espace de travail du manipulateur du manipulateur à 6 modules. Le choix de garder la même largeur de modules n'encourage pas l'utilisation d'un plus grand nombre de modules.

Nous allons pousser notre analyse en ajoutant des obstacles dans l'espace de travail, pour étudier l'interaction des manipulateurs avec ces obstacles.

## 7.2.2 Espace de travail avec des obstacles

Avoir une redondance cinématique peut permettre une meilleure gestion des obstacles par le manipulateur [RD99]. En effet, les degrés de libertés supplémentaires peuvent permettre au manipulateur de s'enrouler autour des obstacles. Nous allons vérifier ce fait sur notre manipulateur, en comparant les espaces de travail statiques de nos manipulateurs à 3, 6 et 9 modules en y intégrant des obstacles.

Pour cela, nous allons ajouter la prise en compte des obstacles dans notre modèle dynamique, afin que le manipulateur puisse s'appuyer sur ces obstacles. Nous allons utiliser la méthode proposée dans [Bak+15]. L'idée est de modéliser l'obstacle avec des ressorts qui ne deviennent actifs que lorsque le manipulateur est en contact avec l'obstacle. Lorsqu'ils sont actifs, ils repoussent le manipulateur en dehors de l'obstacle. Cela revient à considérer l'obstacle déformable, et que des efforts sont exercés sur le manipulateur en cas de pénétration dans l'obstacle.

Cela permet d'intégrer les obstacles en tant qu'énergie potentielle, et donc de l'intégrer facilement à notre modèle dynamique. Cependant, cela implique que le manipulateur pénètre légèrement dans l'obstacle. Plus la raideur de l'obstacle est grande, plus cette pénétration est faible, nous prenons donc des raideurs d'obstacles élevées. Pour simplifier les contacts dans cette partie, nous ne considérons pas la tête en haut du manipulateur et nous prenons des obstacles en forme de disque. Soit  $(x_o, y_o)$  la position du centre d'un obstacle. Le rayon de l'obstacle est noté  $r_o$ . La raideur du ressort utilisé pour modéliser l'obstacle est notée  $k_o$ . Suite à des essais avec différentes valeurs, nous prenons des raideurs d'obstacle entre  $10^4$  et  $10^5 N.m^{-1}$ , qui permettent une faible pénétration dans l'obstacle avec des efforts cohérents.

Nous ne considérons les interactions de l'obstacle qu'avec un ensemble de points prédéfinis du manipulateur. Cet ensemble contient les extrémités de chacune des barres (soit  $2N$  points) et le milieu de la barre du haut du manipulateur. Soit un de ces points dont la position est  $(x, y)$ . La distance entre le centre de l'obstacle et ce point est :

$$d_o(x, y) = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2} \quad (7.8)$$

Si ce point est trop proche de l'obstacle, c'est-à-dire si  $d_o(x, y) < r_o$ , il faut calculer les modifications sur le manipulateur dues à l'obstacle.

L'énergie potentielle due à l'obstacle est :

$$U_o = \frac{1}{2} k_o (d_o(x, y) - r_o)^2 \quad (7.9)$$

Sa dérivée première par rapport à  $\alpha$  est donnée par :

$$\frac{\partial U_o}{\partial \alpha_i} = k_o(d_o(x,y) - r_o) \frac{\partial d_o(x,y)}{\partial \alpha_i} \quad (7.10)$$

avec

$$\frac{\partial d_o(x,y)}{\partial \alpha_i} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}(x - x_o) + \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}(y - y_o)}{d_o(x,y)} \quad (7.11)$$

Nous aurons également besoin de la dérivée seconde de cette énergie potentielle, qui est donnée par :

$$\frac{\partial^2 U_o}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = k_o \left( (d_o(x,y) - r_o) \frac{\partial^2 d_o(x,y)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - (d_o(x,y) - r_o) \frac{\partial d_o(x,y)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial d_o(x,y)}{\partial \alpha_j} \right) \quad (7.12)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d_o(x,y)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = & \frac{d_o(x,y) \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(x - x_o) + \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}(y - y_o) + \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}(x - x_o) + \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} \frac{\partial y}{\partial \alpha_j}(y - y_o) \right)}{d_o(x,y)^2} \\ & - \frac{\frac{\partial d_o(x,y)}{\partial \alpha_j} \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}(x - x_o) + \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}(y - y_o) \right)}{d_o(x,y)^2} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Les dérivées premières et secondes de  $x$  et  $y$  par rapport à  $\alpha_i$  sont données en annexe.

Nous notons  $\mathbf{g}_o$  le vecteur de la somme des dérivées cette énergie potentielle pour chaque point de contact du manipulateur considéré et pour chaque obstacle considéré :

$$\mathbf{g}_o = \sum_{(x_o, y_o, r_o, k_o) \in O} \sum_{(x,y) \in P} \frac{\partial U_o(x_o, y_o, r_o, k_o, x, y)}{\partial \alpha} \quad (7.14)$$

où  $O$  est l'ensemble des obstacles considérés et  $P$  est l'ensemble des points du manipulateur considérés pour les appuis sur les obstacles.

L'équation d'équilibre prenant en compte les obstacles est :

$$\mathbf{g}(\alpha) + \mathbf{g}_o(\alpha) = \mathbf{Z}(\alpha)\mathbf{f} \quad (7.15)$$

On peut donc intégrer les obstacles dans la recherche de positions d'équilibre avec la mé-

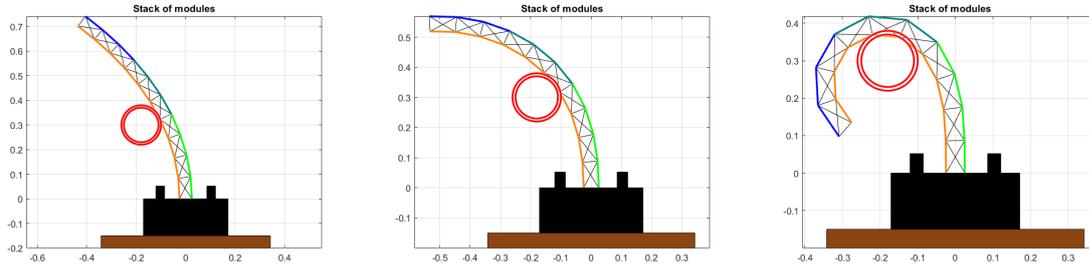


FIGURE 7.8 – Appui d'un manipulateur sur un obstacle.

thode de Newton Raphson. L'équation (7.2) est remplacée par :

$$\alpha = \alpha - \lambda_{NR} \left( \frac{\partial(\mathbf{g} + \mathbf{g}_o - \mathbf{Zf})}{\partial \alpha} \right)^{-1} (\mathbf{g} + \mathbf{g}_o - \mathbf{Zf}) \quad (7.16)$$

Afin d'éviter certains problèmes de non-convergence, nous prenons un coefficient  $\lambda_{NR}$  variable en fonction des configurations par rapport à l'obstacle :

- tant que le manipulateur n'est pas en contact avec des obstacles, on garde  $\lambda_{NR} = 1$  ;
- tant que le manipulateur est dans l'obstacle, on prend  $\lambda_{NR} = 0.1$ . Ceci est nécessaire à cause des raideurs d'obstacles élevées ;
- si le manipulateur est en dehors de l'obstacle avant la mise à jour de la configuration et pénètre dans l'obstacle après la mise à jour, alors  $\lambda_{NR}$  est choisi de manière à ce que la pénétration soit faible pour éviter que le manipulateur soit repoussé trop violemment ; Pour cela, on choisit  $\lambda_{NR}$  comme la plus petite valeur dans  $\{0.1, 0.125, 0.25, 0.5, 1\}$  telle qu'il y ait toujours une pénétration ;
- de même, si le manipulateur est dans l'obstacle avant la mise à jour et en dehors après, on choisit  $\lambda_{NR}$  comme la plus petite valeur dans  $\{0.1, 0.125, 0.25, 0.5, 1\}$  telle que le manipulateur soit en dehors de l'obstacle.

Nous ne considérons pas les appuis du manipulateur sur la base et les moteurs (en noir sur les figures). Ainsi, toute collision avec la base et les moteurs est détectée et les configurations correspondantes ne sont pas gardées dans l'espace de travail (comme c'était fait précédemment).

La Figure (7.8) montre un exemple d'enroulement d'un manipulateur constitué de  $N = 10$  modules et actionné par  $N_f = 4$  forces sur un obstacle. L'obstacle est représenté par le double cercle rouge. La force appliquée sur le câble long (en orange) augmente à chaque image (de gauche à droite). Nous voyons que le manipulateur s'enroule bien autour de l'obstacle. Nous remarquons également que le manipulateur pénètre légèrement dans l'obstacle. C'est pourquoi une marge peut être utilisée sur l'obstacle, représentée par le double cercle ici.

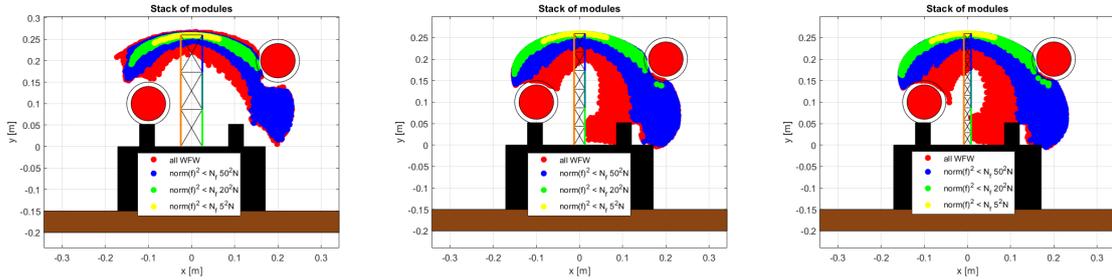


FIGURE 7.9 – Espace de travail statique avec appui sur obstacle (manipulateurs avec le même rapport  $\frac{L}{b}$ ).

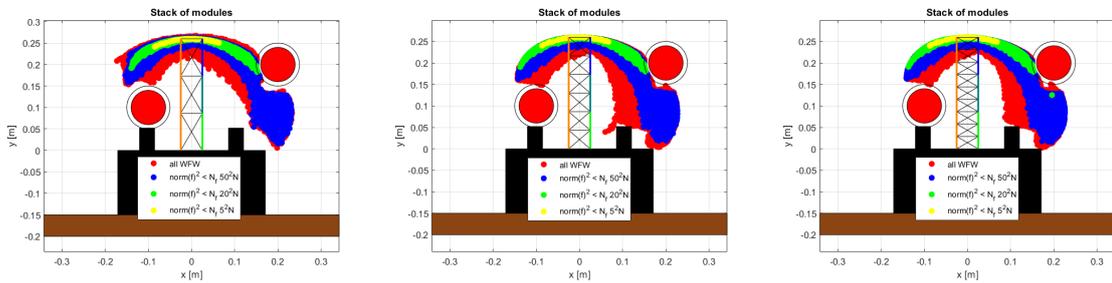


FIGURE 7.10 – Espace de travail statique avec appui sur obstacle (manipulateurs avec la même largeur de module).

Les résultats obtenus pour les manipulateurs avec le même rapport  $\frac{L}{b}$  sont présentés en Figure (7.9). L'espace de travail obtenu avec 6 modules est nettement plus grand que l'espace de travail obtenu avec 3 modules. Il est très légèrement agrandi avec 9 modules. Nous pouvons voir ici l'intérêt d'un manipulateur avec plus de modules, qui aura une interaction plus intéressante avec son environnement. Cependant, ces résultats sont à nuancer puisque les manipulateurs avec plus de modules avec le même rapport  $\frac{L}{b}$  sont plus fins.

Les résultats obtenus pour les manipulateurs avec la même largeur de module sont présentés en Figure (7.10). L'espace de travail obtenu avec 6 modules est plus grand que l'espace de travail obtenu avec 3 modules mais l'amélioration est moins impressionnante que pour les manipulateurs avec le même rapport  $\frac{L}{b}$ . Il semble même être plus petit avec 9 modules qu'avec 6. Les résultats sont donc ici plus contrastés, comme ce l'était sans obstacles. Ceci est dû à la largeur des manipulateurs qui ne diminue plus avec le nombre de modules, mais aussi à cause du ratio  $\frac{L}{b}$  qui varie selon le nombre de module et impacte le comportement cinématique des modules. Nous en retiendrons surtout que garder la largeur des modules n'est pas une bonne solution.

En conclusion, nous avons comparé les espaces de travail des manipulateurs constitués de

3, 6 et 9 modules et actionnés à l'aide de 4 câbles. Nous avons comparé des manipulateurs dont la hauteur en position droite était identique. La première catégorie gardait le ratio  $\frac{L}{b} = 2$ , tandis que la seconde gardait la même largeur  $b = 5\text{cm}$ . Les espaces de travail nous montrent que les manipulateurs les plus intéressants sont ceux de la première catégorie avec un nombre important de modules : ces derniers ont des espaces de travail plus importants et évoluent mieux avec les obstacles.

Notons que le sous-actionnement est cohérent avec les appuis sur l'environnement. Si le manipulateur était complètement actionné, nous devrions adapter le jeu de forces pour éviter l'obstacle et il pourrait y avoir des contradictions entre les efforts de l'environnement et les efforts dans les câbles. Notons également que les obstacles permettent au manipulateur d'atteindre des zones de l'espace de travail inaccessibles sans obstacles.

Nous allons maintenant nous intéresser à l'impact de la configuration d'équilibre au repos sur l'espace de travail, en étudiant un manipulateur avec une forme en  $S$  au repos.

### 7.2.3 Forme en $S$ à l'équilibre au repos

Nous nous intéressons ici à la forme au repos du manipulateur et à son impact sur l'espace de travail. Le cou de l'oiseau a une forme en  $S$  au repos, nous allons donc comparer un manipulateur avec une telle forme au repos avec un manipulateur droit au repos.

Le manipulateur droit utilisé pour la comparaison est celui constitué de  $N = 9$  modules utilisé dans la section précédente, avec le ratio  $\frac{L}{b} = 2$ . Nous le comparons à un manipulateur constitué du même nombre de modules, avec les mêmes dimensions des barres, mais pour lequel l'orientation initiale et les raideurs des ressorts sont différentes. Les raideurs des ressorts sont calculées afin d'avoir une forme en  $S$  au repos, tout en gardant la même raideur moyenne des ressorts par module que pour le premier manipulateur. Les raideurs des ressorts obtenues ainsi que la configuration d'équilibre au repos sont montrées en Figure (7.11).

Nous ne considérons pas ici les collisions avec les moteurs, afin d'étudier la totalité de l'espace de travail envisageable. La Figure (7.5) montre les espaces de travail statiques des deux manipulateurs. Nous pouvons voir que les deux espaces de travail ont globalement la même dimension. Un avantage de la forme en  $S$  est qu'elle permet d'avoir des zones peu coûteuses en forces (bleue et verte) plus larges aux alentours de la position obtenue à l'équilibre, c'est-à-dire dans la partie haute de l'espace de travail.

La forme en  $S$  est donc avantageuse pour effectuer des mouvements dans des zones plus larges avec des forces faibles. Nous rappelons également que la forme en  $S$  en équilibre au repos est non singulière, contrairement à la configuration droite, comme nous l'avons vu dans

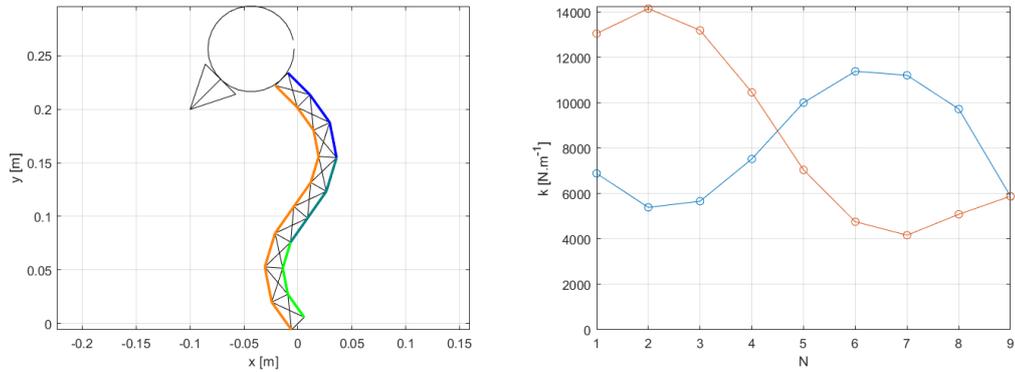


FIGURE 7.11 – Configuration d'équilibre au repos et raideurs des ressorts du manipulateur constitué de  $N = 9$  modules avec une configuration au repos en forme de S.

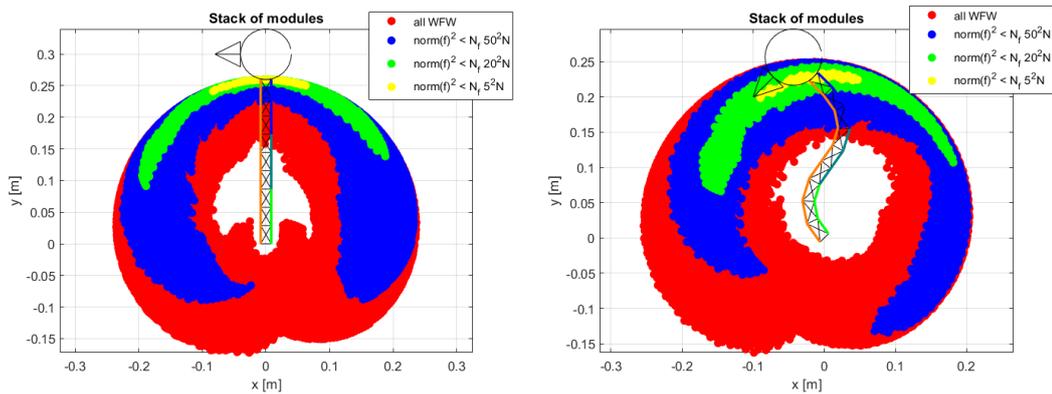


FIGURE 7.12 – Espaces de travail statiques des manipulateurs constitués de  $N = 9$  modules avec une configuration d'équilibre droite (à gauche) et en forme de S (à droite).

la section 5.3.

Dans cette idée qu'un grand nombre de modules est intéressant pour concevoir un nouveau manipulateur sous-actionné, et qu'une forme en *S* au repos est avantageuse, nous allons maintenant nous inspirer de données biologiques pour choisir les dimensions et les ressorts d'un prototype avec un grand nombre de modules.

## 7.3 Capture d'un mouvement de cou sur une vidéo

Nous souhaitons reproduire les mouvements effectués par les cous d'oiseaux avec notre manipulateur. Pour ce faire, il faut d'abord récupérer des données sur ces mouvements. Nous avons donc travaillé avec les biologistes du MNHN pour obtenir des vidéos des oiseaux. Cependant, sur les oiseaux vivants, les plumes autour du cou rendent difficile la distinction du cou. Nous avons donc travaillé sur des cadavres d'oiseaux dont les plumes ont été retirées, comme le montre la figure 7.13. Le cou est déplacé à la main. Cela a l'avantage de distinguer très clairement le cou de l'oiseau, mais a l'inconvénient de fournir des mouvements non naturels. En effet, les mouvements enregistrés sont probablement proches en termes de positions de ceux effectués par les oiseaux dans la nature, mais pas en termes de vitesse et d'accélération. Nous avons tout de même choisi de travailler avec ces vidéos afin d'obtenir des trajectoires de mouvements simples. La vidéo analysée ici a été produite avec le cadavre d'un pic vert, et le mouvement est le suivant : l'oiseau part d'une position que nous appelons au repos, avec une forme de *S*, puis il recule la tête en pliant le cou, avance la tête puis la ramène vers sa position de départ deux fois de suite (la position de fin n'est pas la même que celle de départ car le mouvement a été fait à la main). Deux ficelles ont été placées comme marqueurs à la base du cou et à sa connexion avec la tête. Si la première est bien visible, la seconde est plus compliquée à isoler sur la vidéo. L'arrière-plan a été choisi en bleu, afin de pouvoir facilement le supprimer par son contraste avec le cadavre de l'oiseau qui est en majorité rouge.

Pour analyser la vidéo, nous extrayons chaque image de celle-ci avec Matlab, et nous étudions les images séparément.

Ces travaux ont amenés aux publications [Böh+19] et [Abo+19].

### 7.3.1 Extraction du cou dans la vidéo

Nous voulons avoir un manipulateur qui suit le cou dans la vidéo, c'est-à-dire que le manipulateur doit être à la même position que le cou à chaque image. Nous avons commencé par



FIGURE 7.13 – Première image de la vidéo : le cou de l'oiseau dans la configuration supposée de repos.

trouver sur chaque image la ligne au milieu du cou, que nous utiliserons ensuite pour placer les modules. Nous avons procédé par étapes pour trouver cette ligne :

- suppression de l'arrière-plan ;
- suppression de la tête de l'oiseau et la main qui tient son bec ;
- suppression de la poitrine de l'oiseau ;
- enfin, calcul de la ligne au milieu du cou.

La première étape est d'éliminer tout l'arrière-plan, ce qui est facilement réalisable puisque le cou de l'oiseau a une majorité de rouge, alors que le fond est majoritairement bleu. Ainsi, en recherchant pour chaque pixel sa couleur dominante (chaque pixel ayant trois valeurs correspondant aux proportions de rouge, vert et bleu), on peut déjà éliminer tout ce qui a plus de bleu, et il ne reste que l'oiseau et la main. Comme le cou de l'oiseau reste dans un tiers de l'image tout au long de la vidéo, nous ne gardons également que cette partie de l'image. Le résultat obtenu après cette étape est montré en Figure (7.14).

Pour éliminer la tête et la partie restante de la main qui tient le bec, nous utilisons les petites plumes rouges sur la tête. En effet, toujours avec les couleurs des pixels, nous pouvons facilement les isoler et calculer leur centre sur l'image, qui est un point fixe sur la tête. Il suffit ensuite de choisir le nombre de lignes à éliminer sur l'image en fonction de ce point. Le résultat obtenu après cette étape est montré en Figure (7.15).

Nous devons maintenant éliminer toute la partie de l'oiseau située sous le cou. Nous avons supposé que l'angle entre la base du cou et l'horizontale a une valeur de  $\frac{\pi}{4}$ . Cette hypothèse

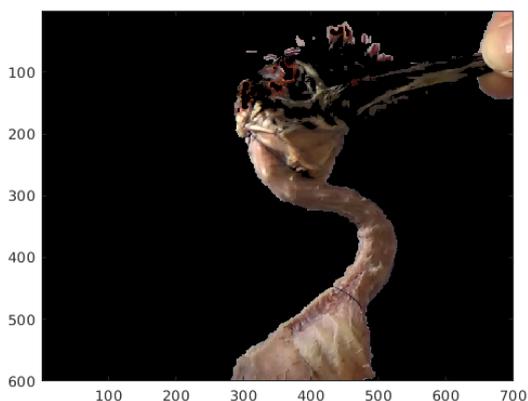


FIGURE 7.14 – Suppression de l’arrière plan.



FIGURE 7.15 – Suppression de la tête.

a été retenue car cet angle ne change pas beaucoup pendant la vidéo, et aussi parce qu’il est préférable d’avoir une base du cou fixe pour la simulation. Pour trouver la ficelle, on extrait les contours de l’image par une méthode basée sur la dérivée de l’image [AKK10] puis on ne garde que les pixels qui correspondent à une dérivée élevée, ce qui nous donne la trace de la ficelle. Nous supprimons ensuite toute la partie basse de l’image. La Figure (7.16) montre la dérivée de l’image ainsi que le résultat après l’élimination du corps de l’oiseau.

Pour finir, il reste à nettoyer l’extrémité haute du cou. Cependant, la corde correspondant à l’extrémité du cou n’est pas très visible sur la vidéo, nous avons donc choisi une autre méthode pour trouver la ligne médiane du cou. Nous avons commencé par déterminer la frontière à gauche du cou, qui est déjà bien travaillée. Pour cela, on repère le point en bas à gauche du cou,

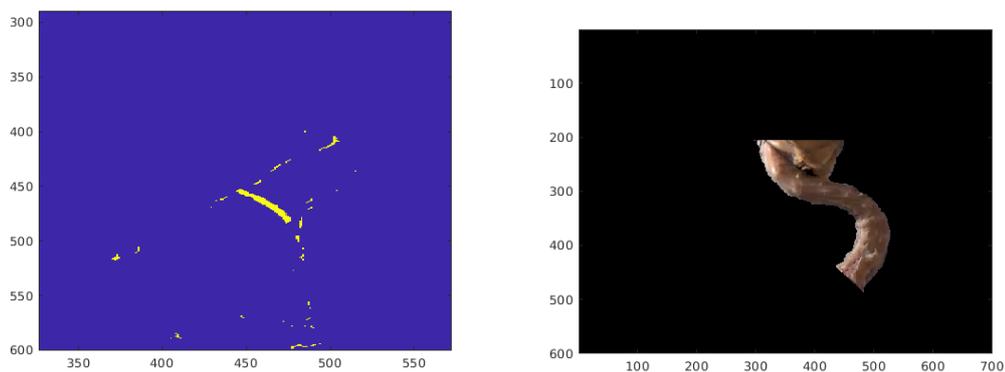


FIGURE 7.16 – La dérivée de l'image (à gauche) et le résultat après la suppression du corps de l'oiseau (à droite).



FIGURE 7.17 – Résultat final de l'extraction du cou. Les pixels blancs correspondent au cou de l'oiseau, et les pixels rouges correspondent à la ligne au milieu du cou.

puis on suit la frontière jusqu'à la fin du cou en haut à gauche, pixel par pixel, en regardant ceux qui sont voisins d'un pixel éliminé précédemment, et on sauvegarde le pixel de la frontière. Puis on évalue la largeur du cou  $W$  en pixels, et on élimine tous les pixels se trouvant à une distance supérieure à  $W$  du bord gauche. En conséquence, il ne reste que le cou, et seule la connexion avec la tête n'est pas parfaite. Pour estimer le milieu du cou, nous avons gardé les pixels restants qui sont à une distance de  $\frac{W}{2}$  du bord gauche. Le résultat obtenu pour la première image de la vidéo est montré en Figure 7.17, où la ligne rouge montre l'estimation du milieu du cou et le blanc la partie du cou qui a été conservée.

### 7.3.2 Positionnement des modules

Maintenant que nous avons la ligne du milieu du cou, nous pouvons pour un nombre donné de modules (et leur dimensions) calculer leurs orientations afin que le manipulateur suive au mieux cette ligne. Les données initiales sont donc la ligne centrale du cou, l'inclinaison de la base de la pile, ainsi que la pile de modules qui est donnée par :

- le nombre de modules  $N$  ;
- les dimensions des barres des modules.

Le résultat est un vecteur  $\alpha = [\alpha_i]_{i \in \{1 \dots N\}}$ , où  $\alpha_i$  est l'orientation du module  $i$ .

Comme nous connaissons l'inclinaison de la base du cou (soit  $\gamma_0 = \frac{\pi}{4}$ ), nous avons choisi de procéder par itérations, en plaçant chaque module un par un en partant de la base du cou. La première idée était de placer les modules de telle sorte que le milieu de chaque barre supérieure soit sur la ligne médiane du cou. Pour cela, on procède de manière itérative en partant du module du bas du manipulateur. En supposant qu'on connaît la position et l'orientation de la barre du bas du module  $i$ , on peut exprimer la position  $(x_{i+1}, y_{i+1})$  du milieu de la barre du haut du module  $i$  à l'aide des équations (2.8) et (2.9). On peut alors calculer l'angle  $\alpha_i$  tel que le centre de la barre du haut soit sur la ligne médiane du cou. Avec cette méthode, on obtient le résultat présenté à gauche de la Figure (7.18). Comme on peut le voir, le milieu de chaque barre supérieure est sur la ligne médiane du cou mais plusieurs modules ont une forte inclinaison alors que la ligne est assez droite, et nous préférons avoir les barres supérieures proches de la perpendiculaire de la ligne médiane du cou.

Nous avons donc utilisé une deuxième méthode pour prendre en compte la perpendiculaire de la ligne médiane du cou. Cette méthode fonctionne comme la première, mais le choix de l'angle est fait différemment. On choisit l'orientation  $\alpha_{test}$  qui minimise :

$$v(\alpha_{test}) = d(\alpha_{test}) + \lambda \times |\gamma_{line}(\alpha_{test}) - (\gamma_i + \alpha_i)| \quad (7.17)$$

où  $d(\alpha_{test})$  est la distance entre le milieu de la barre supérieure du module  $i$  et la ligne médiane du cou,  $\gamma_{line}(\alpha_{test})$  est l'orientation de la perpendiculaire à la tangente de la ligne (au niveau du croisement de la ligne avec la barre du haut du module  $i$ ) et  $\lambda$  est un coefficient que nous avons fixé. Le résultat de cette deuxième méthode est présenté à droite de la figure 7.18, avec un coefficient  $\lambda = 50$ . Comme prévu, les barres du milieu du haut ne sont pas sur la ligne, mais elles en restent proches, et cette fois les inclinaisons des modules sont proches de la perpendiculaire à la ligne médiane du cou. Nous privilégierons donc cette méthode.

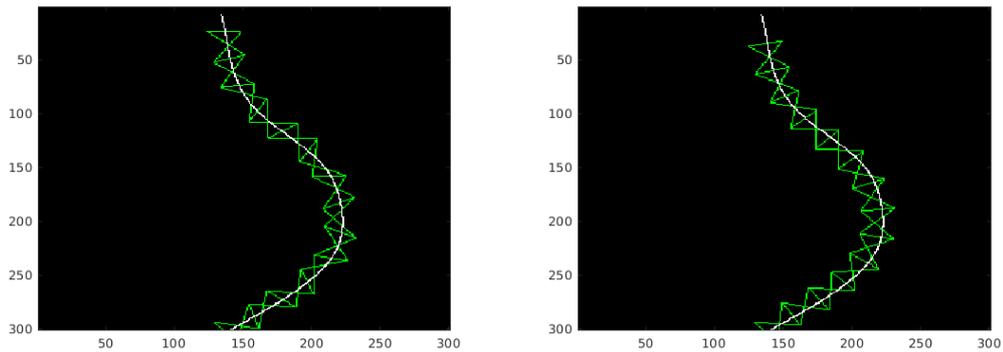


FIGURE 7.18 – Modules placés sur la ligne médiane du cou. A gauche : la première méthode où le milieu des barres supérieures est sur la ligne médiane du cou. A droite : la deuxième méthode où l'on prend en compte l'angle de la barre supérieure par rapport à la tangente de la ligne médiane du cou, avec un coefficient  $\lambda = 50$ .

### 7.3.3 Conception du manipulateur pour la capture du mouvement

Pour rejouer la trajectoire obtenue sur un pic vert qui a 11 vertèbres, nous considérons un manipulateur à 11 modules. Nous gardons les dimensions des barres similaires au prototype à trois modules ( $b = 5\text{cm}$  et  $L = 10\text{cm}$ ).

Avec ces dimensions, le mouvement de la vidéo a été extrait avec la méthode que nous venons de présenter. Nous avons donc obtenu une succession de configurations à reproduire. Afin d'avoir un départ et une arrivée à vitesse nulle, la première et la dernière configuration sont maintenues pendant un certain temps. Le résultat provenant de la vidéo étant bruité, nous avons lissé les courbes des configurations avec un filtre moyennant à fenêtre mobile (fonction *smooth* de Matlab). Les vitesses et accélérations sont obtenues par dérivées numériques afin d'obtenir la trajectoire.

Les raideurs des ressorts sont calculées afin d'avoir la première configuration de la vidéo comme configuration d'équilibre au repos, et que la moyenne des raideurs des ressorts d'un même module soit égale à  $3000\text{N.m}^{-1}$ . Les configurations extrêmes de la trajectoire (à gauche et à droite) sont utilisées pour les contraintes d'espaces de travail sur le calcul des ressorts.

La Figure (7.19) montre le manipulateur dans la configuration d'équilibre au repos ainsi que les raideurs des ressorts.

Maintenant que le manipulateur et la trajectoire sont définis, il nous reste à établir une commande pour reproduire cette trajectoire avec seulement  $N_f = 4$  moteurs.

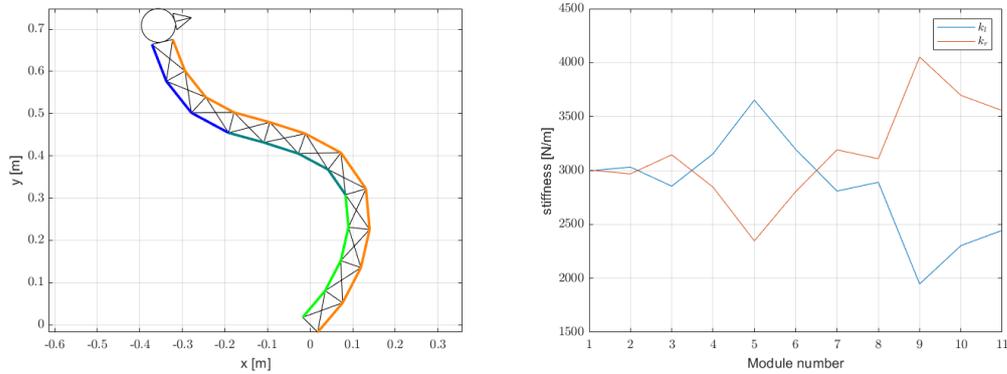


FIGURE 7.19 – Manipulateur dans sa configuration à l'équilibre au repos et les raideurs des ressorts.

## 7.4 Commande sous-actionnée dans l'espace des moteurs

Bien qu'en simulation, la commande entièrement actionnée fonctionne sur ce manipulateur [Abo+19], nous ne voulons pas en pratique utiliser douze moteurs. Ainsi, nous proposons des commandes sous-actionnées pour contrôler le manipulateur avec  $N_f = 4$  moteurs uniquement. Le câblage du manipulateur est visible sur la Figure (7.19). Un câble long passe sur la droite de tous les modules (côté ventral) et pour la droite, les modules sont divisés arbitrairement en trois groupes : les quatre premiers modules, les quatre suivants puis les trois derniers.

La matrice  $\mathbf{A}$  de ce câblage est donnée par :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

On peut aisément adapter la commande des moteurs pour du sous-actionnement, du moins

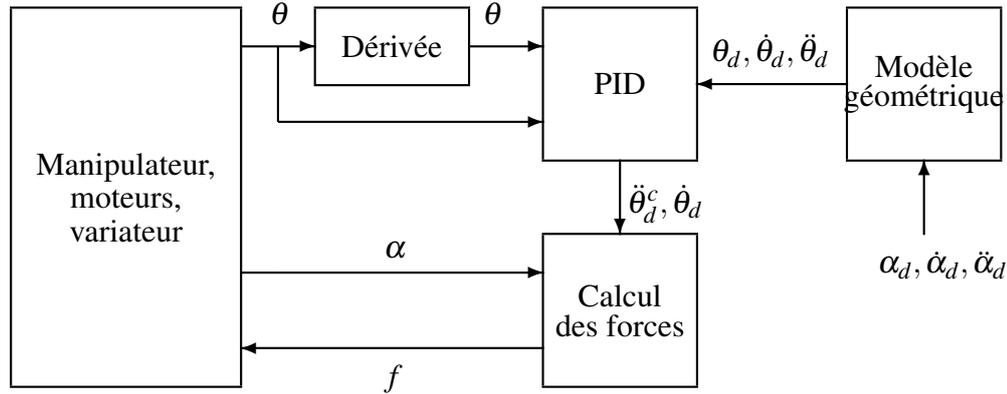


FIGURE 7.20 – Boucle de commande dans l'espace des moteurs pour un manipulateur sous-actionné.

lorsqu'il y a un câble long comme dans notre stratégie d'actionnement. Pour des stratégies d'actionnement plus complexes, le calcul des tensions dans les câbles peut être fait avec les méthodes présentées dans la section 1.2.4.

Le schéma de la commande est présenté en Figure (7.20). La principale différence avec le schéma de la commande dans l'espace des moteurs pour un manipulateur entièrement actionné (voir Figure (5.10)) est que les orientations des modules  $\alpha$  sont ici directement mesurées sur le manipulateur à l'aide de codeurs.

Les variables asservies sont  $\theta$ . Soit  $\theta_d$  les trajectoires désirées des moteurs. Ces trajectoires sont calculées à partir des trajectoires articulaires établies dans la section précédente. Cependant, rien ne garantit qu'un suivi parfait dans l'espace des moteurs corresponde à un suivi parfait dans l'espace articulaire. L'erreur de suivi est :

$$\mathbf{e}_\theta = \theta_d - \theta \quad (7.19)$$

L'accélération désirée est calculée de la manière suivante :

$$\ddot{\theta}_d^c(t) = \ddot{\theta}_d(t) + k_p \mathbf{e}_\theta(t) + k_v \dot{\mathbf{e}}_\theta + k_i \int_{t'=0}^t \mathbf{e}_\theta(t') dt' \quad (7.20)$$

avec les mêmes gains que pour les commandes du manipulateur entièrement actionné.

On définit une commande pour commander les  $N_f$  moteurs avec l'actionnement choisi. Dans

ce cas, la matrice  $\mathbf{Z}$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$\mathbf{Z} = [\mathbf{Z}_1 \quad \mathbf{Z}_2] \quad (7.21)$$

où  $\mathbf{Z}_1$  est une matrice de dimension  $(N \times (N_f - 1))$ , et  $\mathbf{Z}_2$  est un vecteur de dimension  $N \times 1$ .

D'après (2.66), on peut donc écrire :

$$\mathbf{M}_m(\alpha)\ddot{\alpha} + \mathbf{c}_m(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) = \mathbf{Z}_1(\alpha)\mathbf{t}_1 + \mathbf{Z}_2(\alpha)t_2 \quad (7.22)$$

où  $\mathbf{t}_1$  est un vecteur de dimension  $N$  contenant les tensions des  $N$  câbles tirant à gauche et  $t_2$  est un scalaire correspondant à la tension dans le câble long. Rappelons que  $\mathbf{M}_m$  est la matrice d'inertie de la pile de module uniquement, et ne prend pas en compte les moteurs.

$\mathbf{Z}_1$  est une matrice de rang plein. On peut donc exprimer  $\mathbf{t}_1$  en fonction de  $t_2$  :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{Z}_1(\alpha)^+ \left( \mathbf{M}_m(\alpha)\ddot{\alpha} + \mathbf{c}(\alpha, \dot{\alpha}) + \mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}_2(\alpha)t_2 \right) \quad (7.23)$$

Nous avons vu dans la section 5.2 que la prise en compte du modèle statique uniquement donne de bons résultats, et la matrice  $\mathbf{M}_m$  est bien plus coûteuse que le vecteur  $\mathbf{g}$  à calculer (le temps de calcul est environ cinq fois plus long). Nous négligeons donc  $\mathbf{M}_m$  ainsi que  $\mathbf{c}$  dans cette commande.

Le calcul de  $\mathbf{t}_1$  en fonction de  $t_2$  devient donc :

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{Z}_1(\alpha)^+ \left( \mathbf{g}(\alpha) - \mathbf{Z}_2(\alpha)t_2 \right) \quad (7.24)$$

Les tensions désirées à appliquer dans les câbles peuvent donc s'écrire en fonction de  $t_2$  comme :

$$\mathbf{t}_c(t_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(t_2) \\ t_2 \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

D'après (2.65), le lien entre les forces appliquées et les tensions des câbles sont :

$$\mathbf{f} = I_a \frac{R}{r_d} \ddot{\theta}_d^c + \mathbf{t}_c(t_2) + \mathbf{f}_{friction} \quad (7.26)$$

Il faut donc calculer  $t_2$  afin de vérifier les contraintes dues à l'actionnement par câble. Comme dans la version entièrement actionnée, on a  $N_f$  contraintes pour que les câbles soient tous tendus et  $N_f$  contraintes pour assurer une force supérieure à  $f_{min}$  sur chacun des moteurs. Nous avons donc un total de  $2N_f$  valeurs minimales à vérifier pour  $t_2$ . Les forces sont ensuite

bornées à  $f_{max}$ .

Cette commande a été utilisée pour essayer de reproduire la trajectoire capturée sur la vidéo. Cependant, nous ne cherchons ici qu'à suivre les trajectoires des moteurs, qui ne garantissent pas d'obtenir la même trajectoire articulaire. Les longueurs des câbles étant cependant similaires, la trajectoire globale devrait être très proche.

La Figure (7.21) montre les forces appliquées ainsi que le suivi sur les positions moteurs. Les gains utilisés sont calculés avec  $\omega = 10$ . La commande fonctionne très bien, avec une erreur moyenne d'environ  $19,1deg$  sur  $\theta$  (soit  $0.7\%$  de l'amplitude de  $\theta$ ).

La Figure (7.22) montre les orientations des modules obtenues pendant la simulation en comparaison avec celles obtenues depuis la vidéo du pic. Nous pouvons voir que les orientations sont différentes mais que l'allure générale est similaire.

La Figure (7.23) montre la position et l'orientation de la barre du haut du manipulateur, en comparaison avec la vidéo du pic. Nous pouvons voir que les courbes sont assez proches, ce qui montre que le mouvement de la vidéo est assez bien reproduit.

Le mouvement du manipulateur a été reporté sur la vidéo du pic vert. La vidéo montre que le mouvement est globalement bien reproduit. Cette vidéo est disponible à l'adresse suivante : <https://uncloud.univ-nantes.fr/index.php/s/64xz5mobf2WWiD6>

Cette commande fonctionne donc bien pour le sous-actionnement. Nous notons qu'elle est très stable. Nous avons également testée cette commande en négligeant  $g$  dans l'équation (7.24), le suivi est moins bon avec une erreur moyenne sur  $\theta$  de  $45,1deg$ , mais le mouvement reste globalement bien effectué et la commande reste stable. La commande prenant en compte  $g$  reste évidemment préférable.

## 7.5 Conclusion

Dans cette ouverture, nous avons proposé une méthode pour calculer l'espace de travail d'un manipulateur sous-actionné. Nous avons ensuite étudié l'impact du nombre de modules sur l'espace de travail, avec des manipulateurs constitués de 3, 6 et 9 modules actionnés par 4 moteurs. Nous en avons déduit qu'un manipulateur avec un nombre important de modules dont le ratio  $\frac{L}{b}$  est gardé à 2 est intéressant, notamment pour les interactions avec l'environnement. Nous avons également vu qu'une forme en  $S$  du manipulateur au repos permet d'élargir les zones peu coûteuses en forces de l'espace de travail dans la partie haute de ce dernier.

Nous avons ensuite capturé le mouvement du cou d'un pic vert sur une vidéo, que nous avons cherché à reproduire en simulation avec une commande sous-actionnée dans l'espace des

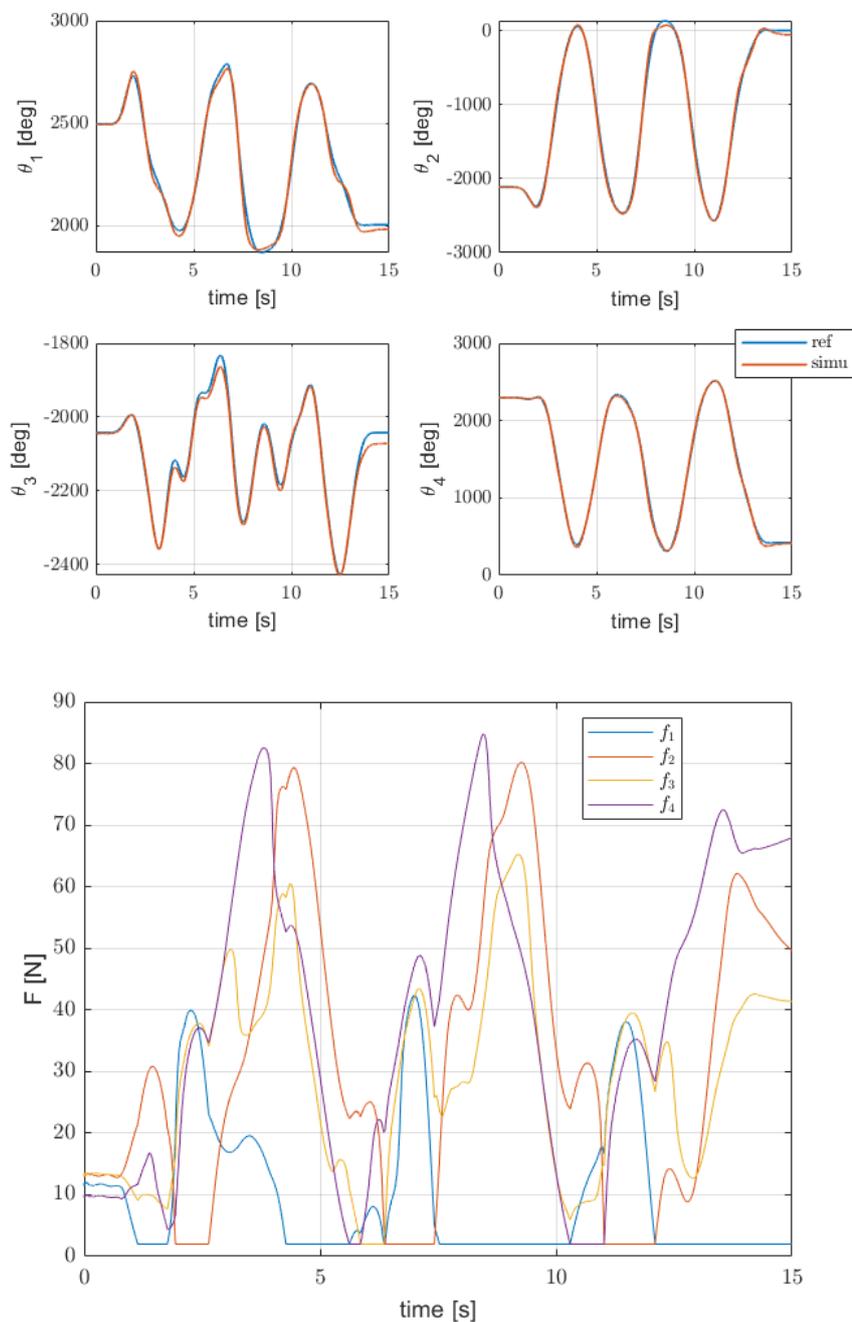


FIGURE 7.21 – Résultats de la simulation de commande des moteurs sous-actionnée.

moteurs. La commande sous-actionnée fondée sur un asservissement des positions des moteurs est efficace et stable, et le mouvement de la vidéo est globalement bien reproduit.

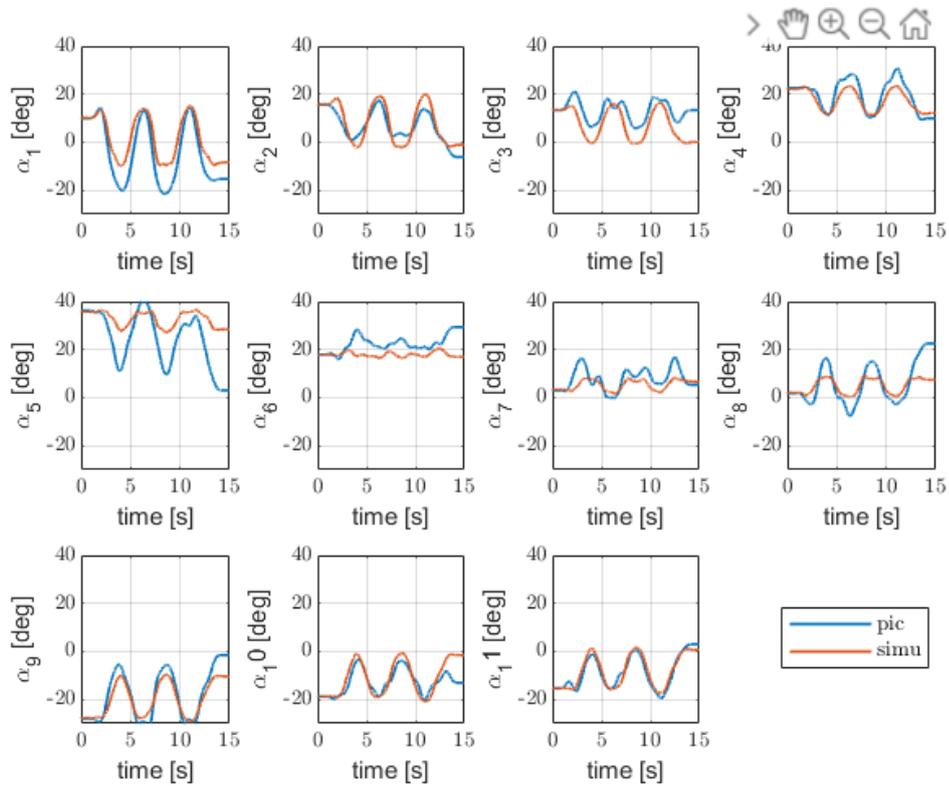


FIGURE 7.22 – Trajectoire articulaire de la simulation de commande des moteurs sous-actionnée.

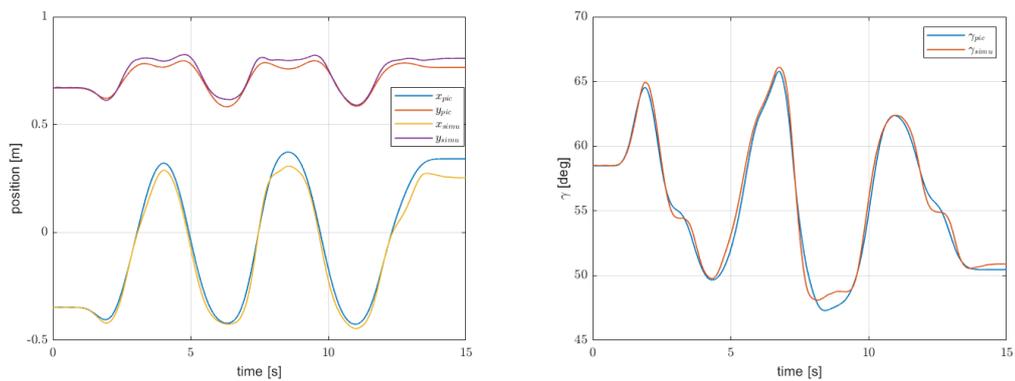


FIGURE 7.23 – Position et orientation de la barre du haut du manipulateur en simulation avec la commande des moteurs sous-actionnée.



# CONCLUSION

---

Commençons par rappeler les différents points abordés dans cette thèse. Après un état de l'art sur les systèmes de tenségrité, les robots bio-inspirés et les robots à câbles, nous avons introduit un manipulateur inspiré du cou des oiseaux. Ce manipulateur est un empilement de modules, équivalents des inter-vertèbres. Ces modules sont des mécanismes de tenségrité et chacun possède un seul degré de liberté. Le manipulateur est actionné à l'aide de câbles, qui sont disposés de manière antagoniste sur les modules.

Nous avons établi le modèle géométrique du manipulateur, permettant notamment de faire le lien entre l'espace articulaire, l'espace opérationnel et l'espace des moteurs. Pour cela, les calculs des longueurs des câbles ont été développés, et nous avons vu que les poulies devaient être prises en compte dans ces calculs. Ces calculs sont importants car ils lient les orientations des modules  $\alpha$  et les orientations des moteurs  $\theta$ , ce qui nous permet d'estimer  $\alpha$  à partir de  $\theta$  sur le prototype. Ils ont également un rôle important dans le modèle dynamique. En particulier, la matrice  $\mathbf{Z}$  qui permet de calculer les forces généralisées s'exprime en fonction des dérivées des longueurs des câbles. Une matrice d'actionnement  $\mathbf{A}$  décrivant le câblage du manipulateur a été définie. Elle permet d'établir les effets des forces appliquées dans le modèle dynamique de manière générique quelque soit le câblage utilisé.

Le modèle dynamique a ensuite été établi. Ce modèle est utilisé par la suite pour établir les différentes commandes proposées ainsi que pour simuler le manipulateur.

Une analyse est ensuite menée sur un manipulateur entièrement actionné. Nous avons d'abord montré qu'un actionnement complet de  $N$  modules nécessite au moins  $N + 1$  moteurs. Nous avons introduit et détaillé deux actionnements complets, l'un avec  $2N$  moteurs qui est l'actionnement où chaque module est actionné avec deux câbles, et l'autre avec  $N + 1$  moteurs où un câble passe par l'un des côtés de chaque module et les  $N$  autres sont répartis sur l'autre côté.

Nous avons utilisé le modèle statique pour calculer les raideurs des ressorts afin d'avoir un manipulateur stable et avec des configurations limites suffisantes. Le modèle statique est également utilisé pour calculer l'espace de travail statique du manipulateur, c'est-à-dire l'image opérationnelle de l'ensemble des configurations du manipulateur dans lesquelles un jeu de force

permet de le maintenir en équilibre. Les deux actionnements complets précédemment introduits ont été comparés sur leur espace de travail. Nous en avons déduit que l'actionnement à  $N + 1$  moteurs donnait un espace de travail satisfaisant et c'est cet actionnement qui a été choisi pour la suite puisqu'il nécessite moins de moteurs.

Le prototype entièrement actionné composé de 3 modules et actionné à l'aide de 4 câbles est ensuite introduit. Ce prototype n'a pas de capteurs permettant une mesure directe de  $\alpha$  : deux méthodes permettant de calculer  $\alpha$  à partir des positions moteurs  $\theta$  sont donc utilisées.

Les premières expériences avec le prototype ont été effectuées en utilisant un modèle dynamique simplifié, négligeant les frottements moteurs et supposant les câbles rigides. Ces expériences ont mis en avant deux problèmes majeurs : les valeurs estimées de  $\alpha$  sont perturbées par l'élasticité des câbles et les forces appliquées sont plus élevées que ce que prévoyait le modèle simplifié. Les paramètres des frottements moteurs et de l'élasticité des câbles ont donc été identifiés avec un modèle linéaire en ces paramètres. L'identification des frottements moteurs a été efficace pour les frottements secs mais pas pour les frottements visqueux. Nous en avons déduit que les frottements secs étaient prédominants et nous avons négligé les frottements visqueux par la suite. Les résultats de simulation utilisant les paramètres de frottements identifiés sont en accord avec les données expérimentales, bien que les amplitudes des forces ne soient pas toujours parfaitement retrouvées.

Les modèles classiques de câbles élastiques n'ont pas donné de bons résultats à l'identification. En nous inspirant des erreurs de reconstruction qui grandissaient avec la tension dans les câbles, nous avons proposé un modèle de câble élastique dans lequel la raideur du câble évolue avec la tension dans celui-ci. L'identification de ces nouveaux paramètres a donné une meilleure reconstruction des données, notamment pour des tensions élevées dans les câbles.

La commande articulaire a ensuite été testée avec et sans les paramètres identifiés. Nous en avons déduit que la prise en compte des frottements moteurs améliorait la commande, en permettant notamment de réduire la force minimale appliquée tout en gardant une tension minimale dans les câbles. Le modèle de câble élastique permet une meilleure estimation de  $\alpha$  mais augmente les erreurs de suivi. L'estimation de  $\alpha$  à partir des longueurs des quatre câbles étant convenable, nous avons gardé pour la suite la commande avec prise en compte des frottements et supposant les câbles rigides.

Deux autres commandes sont ensuite proposées. La première est la commande dans l'espace des moteurs, où le suivi se fait sur les positions moteurs  $\theta$ . Les forces sont calculées en prenant en compte l'antagonisme de l'actionnement, à l'aide de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Cette commande est intéressante car elle peut être utilisée sans calculer le modèle dynamique complet du mani-

---

plateur, l'inertie des moteurs étant prédominante. Les essais donnant les meilleurs résultats sont d'ailleurs obtenus en ne considérant que le modèle statique. La seconde commande est une commande de la position de la barre du haut du manipulateur (et de manière facultative de son orientation). Cette commande est intéressante car les mouvements désirés sont généralement dans l'espace opérationnel, mais les singularités du manipulateur empêchent son utilisation dans tous l'espace de travail. Un traitement approprié pourrait être mis en place. Cependant, s'inspirant du cou des oiseaux, un choix de conception permettant d'avoir une forme en S au repos permet de s'affranchir facilement des configurations singulières.

Afin d'exploiter la structure du manipulateur, nous avons généré des trajectoires avec des objectifs particuliers. Le premier objectif était de minimiser les forces requises pour aller d'une configuration à une autre. Une optimisation de la trajectoire se basant sur le modèle dynamique a donné des trajectoires dont les forces requises étaient presque deux fois plus faibles que les trajectoires directes lorsque les configurations à relier sont dans des zones coûteuses. Pour relier des zones moins coûteuses, l'optimisation est moins avantageuse mais permet tout de même une certaine économie (gain sur les forces de l'ordre de 20%).

Le second objectif était de produire des mouvements à grande vitesse, comme le pic le fait lorsqu'il frappe un tronc d'arbre avec son bec. La trajectoire se calcule par optimisation ici aussi, et les mouvements obtenus sont cohérents : le manipulateur se penche d'abord vers l'arrière pour charger le mouvement, puis se précipite vers l'avant pour atteindre son pic de vitesse. Le mouvement est bien reproduit en expérience, mais requiert des forces plus élevées qu'en simulation, ce qui montre les limites de notre simulateur.

Pour terminer cette thèse, nous avons présenté une ouverture sur un manipulateur sous-actionné. Après avoir présenté une méthode de calcul de l'espace de travail statique se basant sur l'exploration de l'espace des forces, nous avons étudié l'impact du nombre de modules du manipulateur sur son espace de travail. Nous avons également ajouté une modélisation de l'interaction du manipulateur avec des obstacles, afin de mettre en évidence l'avantage d'avoir de nombreux modules et donc de la redondance mécanique.

Toujours dans notre démarche bio-inspirée, nous avons donc proposé un manipulateur à 11 modules et actionné par 4 câbles. Un mouvement du cou d'un pic a été capturé sur une vidéo faite à l'aide d'un cadavre d'oiseau, permettant donc d'isoler le cou dénudé et ainsi calquer le mouvement de notre manipulateur sur ce cou. Le mouvement ainsi capturé a été rejoué en simulation, à l'aide d'une commande dans l'espace des moteurs étendue pour le sous-actionnement. Le mouvement est ainsi globalement bien reproduit, bien que le sous-actionnement ne permette pas un suivi pour chaque module.

## Perspectives

Comme le laisse entendre le dernier chapitre de cette thèse, de nombreux points restent encore à être étudiés sur ce manipulateur innovant inspiré du cou de l’oiseau.

### **Prototype sous-actionné avec une dizaine de modules**

La réalisation d’un prototype constitué d’une dizaine de modules (de même dimension que pour le premier prototype) et actionné par 4 câbles, comme présenté en ouverture, est prévue à la suite de cette thèse.

Pour ce prototype, des codeurs seront placés sur les modules afin de mesurer directement les orientations  $\alpha$ , car il est compliqué d’estimer de manière fiable  $\alpha$  à partir des positions moteurs  $\theta$  sur un manipulateur sous-actionné. Cela permettra d’écarter en partie le problème d’élasticité des câbles, puisque la mesure de  $\alpha$  ne se fera pas via les câbles. Cette élasticité impactera tout de même la commande, et comme les longueurs de câbles seront plus importantes (vu qu’il y a plus de modules), les allongements le seront probablement également. L’utilisation d’un câble plus rigide sera envisagée.

La commande sous-actionnée devra être étudiée plus en profondeur. La commande dans l’espace des moteurs fonctionne bien en simulation, ce qui est un bon signe pour la suite. D’autres commandes seront envisagées, telles qu’une commande dans l’espace articulaire ainsi qu’une commande opérationnelle.

### **Exploitation de la structure du manipulateur**

Nous avons commencé dans cette thèse à exploiter la structure du manipulateur pour générer des trajectoires explosives et des trajectoires minimisant les forces requises. Non-seulement ces travaux ne sont validés que pour un manipulateur composé de 3 modules et mériteraient d’être étendus pour des manipulateurs avec plus de modules, mais d’autres travaux pourraient être menés pour étudier les avantages procurés par de tels manipulateurs.

L’interaction du manipulateur avec son environnement mérite d’être étudiée, car la redondance d’un manipulateur sous-actionné composé d’un grand nombre de modules devrait lui permettre de s’appuyer aisément sur des obstacles par exemple. Le manipulateur étant très léger, il semble également adapté à la cobotique (travail robot et humain en collaboration) puisqu’il est potentiellement moins dangereux que les robots sériels classiques avec les moteurs au niveau de leurs articulations.

### **Manipulateur en 3D**

La modélisation du manipulateur est faite uniquement en 2D dans cette thèse. Cependant, cette modélisation s’est avérée complexe, et a du être complétée suite aux premières expéri-

---

mentations avec la prise en compte des poulies dans le calcul des longueurs des câbles, les frottements moteurs et l'élasticité des câbles.

La modélisation et la conception d'un manipulateur en 3D s'annoncent plus compliquées, avec de nouveaux défis : les éléments des systèmes de tensegrité ne doivent pas entrer en collision, le passage des câbles ne se fera plus nécessairement dans un plan (il faudra donc d'autres systèmes que les poulies pour les guider) et les points d'attache des ressorts permettant de garantir la stabilité du manipulateur seront à définir.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [Abo+19] A ABOURACHID et al., « Modelling, design and control of a bird neck using tensegrity mechanisms », in : *ICRA'2019 Worskhop on Tensegrity*, 2019.
- [Ack11] JAD ACKROYD, « Sir George Cayley : The invention of the aeroplane near Scarborough at the time of Trafalgar », in : *Journal of Aeronautical History Paper No 6* (2011).
- [AG06] Marc ARSENAULT et Clément M GOSSELIN, « Kinematic, static and dynamic analysis of a planar 2-DOF tensegrity mechanism », in : *Mechanism and Machine Theory* 41.9 (2006), p. 1072-1089.
- [AKK10] Salem Saleh AL-AMRI, NV KALYANKAR et SD KHAMITKAR, « Image segmentation by using edge detection », in : *International journal on computer science and engineering* 2.3 (2010), p. 804-807.
- [Ars10] Marc ARSENAULT, « Determination of the Analytical Workspace Boundaries of a Novel 2-DoF Planar Tensegrity Mechanism », in : *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering* 34.1 (2010), p. 75-91.
- [AS06] JB ALDRICH et RE SKELTON, « Backlash-free motion control of robotic manipulators driven by tensegrity motor networks », in : *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, IEEE, 2006, p. 2300-2306.
- [Bak+15] Daan L BAKKER et al., « Design of an environmentally interactive continuum manipulator », in : *Proc. 14th World Congress in Mechanism and Machine Science, IFToMM*, 2015.
- [Bak+17] Sana BAKLOUTI et al., « Dynamic and oscillatory motions of cable-driven parallel robots based on a nonlinear cable tension model », in : *Journal of mechanisms and robotics* 9.6 (2017).
- [Beg+20] Jeremy BEGEY et al., « Selection of actuation mode for tensegrity mechanisms : The case study of the actuated Snelson cross », in : *Mechanism and Machine Theory* 152 (2020), p. 103881.

- [BÉZ87] Pierre BÉZIER, *Courbes et surfaces pour la CFAO*, Ed. Techniques Ingénieur, 1987.
- [Böh+19] Christine BÖHMER et al., « Combining precision and power to maximize performance : a case study of the woodpecker's neck », in : *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering 22.sup1* (2019), S20-S21.
- [BP12] Tobias BRUCKMANN et Andreas POTT, *Cable-driven parallel robots*, t. 12, Springer, 2012.
- [CA12] Samuel CHEN et Marc ARSENAULT, « Analytical computation of the actuator and cartesian workspace boundaries for a planar 2-degree-of-freedom translational tensegrity mechanism », in : (2012).
- [CA13] Eduardo F CAMACHO et Carlos Bordons ALBA, *Model predictive control*, Springer science & business media, 2013.
- [CCE08] Ji-wung CHOI, Renwick CURRY et Gabriel ELKAIM, « Path planning based on bézier curve for autonomous ground vehicles », in : *Advances in Electrical and Electronics Engineering-IAENG Special Edition of the World Congress on Engineering and Computer Science 2008*, IEEE, 2008, p. 158-166.
- [CHA16] Mehak CHAUDHRY, « Kinetostatic analysis of planar tensegrity mechanisms », mém. de mast., École Centrale de Nantes, 2016.
- [CHC16] François CHAUMETTE, Seth HUTCHINSON et Peter CORKE, « Visual servoing », in : *Springer Handbook of Robotics*, Springer, 2016, p. 841-866.
- [CM12] Marco CARRICATO et Jean-Pierre MERLET, « Stability analysis of underconstrained cable-driven parallel robots », in : *IEEE Transactions on Robotics 29.1* (2012), p. 288-296.
- [Coe+17] Eulalie COEVOET et al., « Software toolkit for modeling, simulation, and control of soft robots », in : *Advanced Robotics 31.22* (2017), p. 1208-1224.
- [CPP17] Sung-Hyun CHOI, Jong-Oh PARK et Kyoung-Su PARK, « Tension analysis of a 6-degree-of-freedom cable-driven parallel robot considering dynamic pulley bearing friction », in : *Advances in Mechanical Engineering 9.8* (2017), p. 1687814017714981.
- [CSB96] C. CANUDAS DE WIT, B. SICILIANO et G. BASTIN, *Theory of Robot Control*, Springer, 1996.

- [Dal+11] Tej DALLEJ et al., « Towards vision-based control of cable-driven parallel robots », in : *2011 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2011, p. 2855-2860.
- [Duc+14] František DUCHOŇ et al., « Path planning with modified a star algorithm for a mobile robot », in : *Procedia Engineering* 96 (2014), p. 59-69.
- [Dur13] Christian DURIEZ, « Control of elastic soft robots based on real-time finite element method », in : *2013 IEEE international conference on robotics and automation*, IEEE, 2013, p. 3982-3987.
- [EW21] Sebastian ECHEANDIA et Patrick M WENSING, « Numerical methods to compute the coriolis Matrix and christoffel Symbols for rigid-body systems », in : *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 16.9 (2021), p. 091004.
- [Fas+19] Benjamin FASQUELLE et al., « Dynamic modeling and control of a tensegrity manipulator mimicking a bird neck », in : *IFTToMM World Congress on Mechanism and Machine Science*, Springer, 2019, p. 2087-2097.
- [Fas+20] Benjamin FASQUELLE et al., « A bio-inspired 3-DOF light-weight manipulator with tensegrity X-joints », in : *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2020, p. 5054-5060.
- [Fas+21] Benjamin FASQUELLE et al., « Identification and control of a 3-X cable-driven manipulator inspired from the bird neck », in : *Journal of Mechanisms and Robotics* (2021), p. 1-25.
- [Fau+12] François FAURE et al., « Sofa : A multi-model framework for interactive physical simulation », in : *Soft tissue biomechanical modeling for computer assisted surgery*, Springer, 2012, p. 283-321.
- [For18] Florent FORGET, « Modélisation et contrôle d'actionneurs pour la robotique humanoïde », thèse de doct., Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2018.
- [Fur+19] Matthieu FURET et al., « Prototype of a tensegrity manipulator to mimic bird necks », in : *24ème Congrès Français de Mécanique*, 2019.
- [Fur20] Matthieu FURET, « Analyse cinéto-statique de mécanismes de tenségrité : Application à la modélisation de cous d'oiseaux et de manipulateurs bio-inspirés », thèse de doct., Ecole Centrale de Nantes, 2020.

- [FW19] Matthieu FURET et Philippe WENGER, « Kinetostatic analysis and actuation strategy of a planar tensegrity 2-X manipulator », in : *Journal of Mechanisms and Robotics* 11.6 (2019), p. 060904.
- [GDM10] Marc GOUTTEFARDE, David DANEY et Jean-Pierre MERLET, « Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots », in : *IEEE Transactions on Robotics* 27.1 (2010), p. 1-13.
- [GPM89] Carlos E GARCIA, David M PRETT et Manfred MORARI, « Model predictive control : Theory and practice—A survey », in : *Automatica* 25.3 (1989), p. 335-348.
- [Han+10] Long HAN et al., « Bezier curve based path planning for autonomous vehicle in urban environment », in : *2010 IEEE intelligent vehicles symposium*, IEEE, 2010, p. 1036-1042.
- [HNR68] Peter E HART, Nils J NILSSON et Bertram RAPHAEL, « A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths », in : *IEEE transactions on Systems Science and Cybernetics* 4.2 (1968), p. 100-107.
- [HW00] Michael W HANNAN et Ian D WALKER, « Analysis and initial experiments for a novel elephant's trunk robot », in : *Proceedings. 2000 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2000)(Cat. No. 00CH37113)*, t. 1, IEEE, 2000, p. 330-337.
- [JG15] Jingfu JIN et Nicholas GANS, « Parameter identification for industrial robots with a fast and robust trajectory design approach », in : *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 31 (2015), p. 21-29, ISSN : 0736-5845, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2014.06.004>, URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0736584514000441>.
- [KD04] Wisama KHALIL et Etienne DOMBRE, *Modeling, identification and control of robots*, Butterworth-Heinemann, 2004.
- [Kom12] Erik KOMENDERA, *A Survey of the Computational Modeling and Control of Tensegrity Robots*, rapp. tech., University of Colorado, 2012.
- [Kri+17] Markus KRINGS et al., « Barn owls maximize head rotations by a combination of yawing and rolling in functionally diverse regions of the neck », in : *Journal of anatomy* 231.1 (2017), p. 12-22.

- [KT15] Mohammad A KHOSRAVI et Hamid D TAGHIRAD, « Dynamic analysis and control of fully-constrained cable robots with elastic cables : variable stiffness formulation », in : *Cable-Driven Parallel Robots*, Springer, 2015, p. 161-177.
- [Lag53] Joseph Louis LAGRANGE, *Mécanique analytique*, t. 1, Mallet-Bachelier, 1853.
- [Let17] Max LETTL, « Kinetostatic analysis of tensegrity mechanisms, application to the modelling of bird necks », mém. de mast., École Centrale de Nantes, 2017.
- [Lev06] Stephen M LEVIN, « Tensegrity : the new biomechanics », in : *Textbook of musculoskeletal medicine* 9 (2006).
- [Liu+18] Hongyi LIU et al., « Deep learning-based multimodal control interface for human-robot collaboration », in : *Procedia CIRP* 72 (2018), p. 3-8.
- [Liu+19] Yuwang LIU et al., « Elephant's trunk robot : An extremely versatile under-actuated continuum robot driven by a single motor », in : *Journal of Mechanisms and Robotics* 11.5 (2019), p. 051008.
- [LRO13] Matthieu LAPEYRE, Pierre ROUANET et Pierre-Yves OUDEYER, « The poppy humanoid robot : Leg design for biped locomotion », in : *2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, IEEE, 2013, p. 349-356.
- [LS11] Yunhui LIU et Dong SUN, *Biologically inspired robotics*, Taylor & Francis, 2011.
- [LVP13] Nathan F LEPORA, Paul VERSCHURE et Tony J PRESCOTT, « The state of the art in biomimetics », in : *Bioinspiration & biomimetics* 8.1 (2013), p. 013001.
- [MA11] Shabbir Kurbanhusen MUSTAFA et Sunil Kumar AGRAWAL, « On the force-closure analysis of n-DOF cable-driven open chains based on reciprocal screw theory », in : *IEEE Transactions on Robotics* 28.1 (2011), p. 22-31.
- [McM+06] William MCMAHAN et al., « Field trials and testing of the OctArm continuum manipulator », in : *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006*. IEEE, 2006, p. 2336-2341.
- [Miy+20] Muneaki MIYASAKA et al., « Modeling Cable-Driven Robot With Hysteresis and Cable-Pulley Network Friction », in : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 25.2 (2020), p. 1095-1104.
- [MW21] Vimallesh MURALIDHARAN et Philippe WENGER, « Optimal design and comparative study of two antagonistically actuated tensegrity joints », in : *Mechanism and Machine Theory* 159 (2021), p. 104249.

- [Pac+06] Flavien PACCOT et al., « Vision-based computed torque control for parallel robots », in : *IECON 2006-32nd Annual Conference on IEEE Industrial Electronics*, IEEE, 2006, p. 3851-3856.
- [Pau06] Chandana PAUL, « Morphological computation : A basis for the analysis of morphology and control requirements », in : *Robotics and Autonomous Systems* 54.8 (2006), p. 619-630.
- [PGP01] Minh Tu PHAM, Maxime GAUTIER et Philippe POIGNET, « Identification of joint stiffness with bandpass filtering », in : *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No. 01CH37164)*, t. 3, IEEE, 2001, p. 2867-2872.
- [Pic+20] Etienne PICARD et al., « Stiffness oriented tension distribution algorithm for cable-driven parallel robots », in : *International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Springer, 2020, p. 209-217.
- [Pot14] Andreas POTT, « An improved force distribution algorithm for over-constrained cable-driven parallel robots », in : *Computational Kinematics*, Springer, 2014, p. 139-146.
- [Raf+18] Ahmad RAFSANJANI et al., « Kirigami skins make a simple soft actuator crawl », in : *Science Robotics* 3.15 (2018).
- [Rah+11] MF RAHMAT et al., « Review on modeling and controller design in pneumatic actuator control system », in : *International journal on smart sensing and intelligent systems* 4.4 (2011).
- [RAP20] JR Jurado REALPE, Salih ABDELAZIZ et Philippe POIGNET, « Model Predictive Controller for a Planar Tensegrity Mechanism with decoupled position and stiffness control », in : *International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Springer, 2020, p. 349-358.
- [RCM14] Rémy RAMADOUR, François CHAUMETTE et Jean-Pierre MERLET, « Grasping objects with a cable-driven parallel robot designed for transfer operation by visual servoing », in : *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2014, p. 4463-4468.
- [RD99] Graham ROBINSON et J Bruce C DAVIES, « Continuum robots-a state of the art », in : *Proceedings 1999 IEEE international conference on robotics and automation (Cat. No. 99CH36288C)*, t. 4, IEEE, 1999, p. 2849-2854.

- [RGL98] Rodney G ROBERTS, Todd GRAHAM et Thomas LIPPITT, « On the inverse kinematics, statics, and fault tolerance of cable-suspended robots », in : *Journal of Robotic Systems* 15.10 (1998), p. 581-597.
- [RM18] John RIEFFEL et Jean-Baptiste MOURET, « Adaptive and resilient soft tensegrity robots », in : *Soft robotics* 5.3 (2018), p. 318-329.
- [SD09] Robert E SKELTON et Mauricio C DE OLIVEIRA, *Tensegrity systems*, t. 1, Springer, 2009.
- [Sed12] Thomas W SEDERBERG, « Computer aided geometric design », in : (2012).
- [Shi+20] Jun SHINTAKE et al., « Bio-inspired tensegrity fish robot », in : *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2020, p. 2887-2892.
- [Ske+01] Robert E SKELTON et al., « An introduction to the mechanics of tensegrity structures », in : *Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control (Cat. No. 01CH37228)*, t. 5, IEEE, 2001, p. 4254-4259.
- [Sne12] Kenneth SNELSON, « The art of tensegrity », in : *International journal of space structures* 27.2-3 (2012), p. 71-80.
- [Son18] Gaurav SONAWANE, « Design methodology of tensegrity manipulator inspired from a bird neck », mém. de mast., École Centrale de Nantes, 2018.
- [Ter+20] Léa TERRAY et al., « Modularity of the neck in birds (Aves) », in : *Evolutionary Biology* (2020).
- [TP02] AG TIBERT et S PELLEGRINO, « Deployable tensegrity reflectors for small satellites », in : *Journal of Spacecraft and Rockets* 39.5 (2002), p. 701-709.
- [Tri+08] Deepak TRIVEDI et al., « Soft robotics : Biological inspiration, state of the art, and future research », in : *Applied Bionics and Biomechanics* 5.3 (2008), p. 99-117.
- [Van+19] Anders VAN RIESEN et al., « Dynamic analysis and control of an antagonistically actuated tensegrity mechanism », in : *ROMANSY 22—Robot Design, Dynamics and Control*, Springer, 2019, p. 481-490.
- [VCB19] Swaminath VENKATESWARAN, Damien CHABLAT et Frédéric BOYER, « Numerical and experimental validation of the prototype of a bio-inspired piping inspection robot », in : *Robotics* 8.2 (2019), p. 32.

- [VSS16] Nicolas VEUVE, Seif Dalil SAFAEI et Ian FC SMITH, « Active control for mid-span connection of a deployable tensegrity footbridge », in : *Engineering Structures* 112 (2016), p. 245-255.
- [Wan+15] Chunbao WANG et al., « Path planning of automated guided vehicles based on improved A-Star algorithm », in : *2015 IEEE International Conference on Information and Automation*, IEEE, 2015, p. 2071-2076.
- [WC19] Philippe WENGER et Damien CHABLAT, « Kinetostatic analysis and solution classification of a class of planar tensegrity mechanisms », in : *Robotica* 37.7 (2019), p. 1214-1224.
- [WF20] Philippe WENGER et Matthieu FURET, « Kinematic analysis of a planar manipulator with anti-parallelogram joints and offsets », in : *International Symposium on Advances in Robot Kinematics*, Springer, 2020, p. 319-326.
- [Wu+20] Qiuxuan WU et al., « Position control of cable-driven robotic soft arm based on deep reinforcement learning », in : *Information* 11.6 (2020), p. 310.
- [WZF11] LiZhen WANG, HongQuan ZHANG et YuBo FAN, « Comparative study of the mechanical properties, micro-structure, and composition of the cranial and beak bones of the great spotted woodpecker and the lark bird », in : *Science China Life Sciences* 54.11 (2011), p. 1036-1041.
- [Yao+10] Junfeng YAO et al., « Path planning for virtual human motion using improved A\* star algorithm », in : *2010 Seventh international conference on information technology : new generations*, IEEE, 2010, p. 1154-1158.
- [YP11] Sang-Hee YOON et Sungmin PARK, « A mechanical analysis of woodpecker drumming and its application to shock-absorbing systems », in : *Bioinspiration & Biomimetics* 6.1 (2011), p. 016003.
- [Ypm95] Tjalling J YPMA, « Historical development of the Newton–Raphson method », in : *SIAM review* 37.4 (1995), p. 531-551.
- [Zak+19] Zane ZAKE et al., « Vision-based control and stability analysis of a cable-driven parallel robot », in : *IEEE Robotics and Automation Letters* 4.2 (2019), p. 1029-1036.
- [Zap+20] Davide ZAPPETTI et al., « Variable-stiffness tensegrity spine », in : *Smart Materials and Structures* 29.7 (2020), p. 075013.

- [Zha+17] Zhongkai ZHANG et al., « Visual servoing control of soft robots based on finite element model », in : *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, IEEE, 2017, p. 2895-2901.
- [Zie+77] Olgierd Cecil ZIENKIEWICZ et al., *The finite element method*, t. 3, McGraw-hill London, 1977.
- [ZZ14] Zhanying ZHANG et Ziping ZHAO, « A multiple mobile robots path planning algorithm based on A-star and Dijkstra algorithm », in : *International Journal of Smart Home* 8.3 (2014), p. 75-86.



# LISTE DES PUBLICATIONS

---

## **Publications dans des revues d'audience internationale à comité de lecture**

Benjamin FASQUELLE, Parag KHANNA, Christine CHEVALLEREAU, Damien CHABLAT, Denis CREUSOT, Stephane JOLIVET, Philippe LEMOINE et Philippe WENGER, « Identification and control of a 3-X cable-driven manipulator inspired from the bird neck », in : *Journal of Mechanisms and Robotics* (2021), p. 1-25

## **Communications à des congrès internationaux à comité de sélection et actes publiés**

Benjamin FASQUELLE, Matthieu FURET, Christine CHEVALLEREAU et Philippe WENGER, « Dynamic modeling and control of a tensegrity manipulator mimicking a bird neck », in : *IFTToMM World Congress on Mechanism and Machine Science*, Springer, 2019, p. 2087-2097

Christine BÖHMER, Matthieu FURET, Benjamin FASQUELLE, Philippe WENGER, Damien CHABLAT, Christine CHEVALLEREAU et Anick ABOURACHID, « Combining precision and power to maximize performance : a case study of the woodpecker's neck », in : *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering 22.sup1* (2019), S20-S21

Benjamin FASQUELLE, Matthieu FURET, Parag KHANNA, Damien CHABLAT, Christine CHEVALLEREAU et Philippe WENGER, « A bio-inspired 3-DOF light-weight manipulator with tensegrity X-joints », in : *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, IEEE, 2020, p. 5054-5060

## **Communications à des congrès nationaux et actes publiés**

Matthieu FURET, Damien CHABLAT, Benjamin FASQUELLE, Parag KHANNA, Christine CHEVALLEREAU et Philippe WENGER, « Prototype of a tensegrity manipulator to mimic bird

necks », in : *24ème Congrès Français de Mécanique*, 2019

## **Communications lors de workshop de conférences internationales**

A ABOURACHID, C BÖHMER, Philippe WENGER, Damien CHABLAT, Christine CHEVALLEREAU, Benjamin FASQUELLE et Matthieu FURET, « Modelling, design and control of a bird neck using tensegrity mechanisms », in : *ICRA'2019 Worskhop on Tensegrity*, 2019

# DÉRIVÉES DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES

---

Pour calculer les matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{J}_\gamma$  et leurs dérivées, nous devons calculer les dérivées premières et secondes des coordonnées du milieu de la barre du haut de chaque module par rapport à  $\alpha$ .

De plus, pour la prise en compte des obstacles dans l'environnement du manipulateur, il faut également les coordonnées des extrémités de la barre du haut de chaque manipulateur.

Enfin, les dérivées secondes des ordonnées des milieux des barres diagonales par rapport à  $\alpha$  sont nécessaire pour le calcul de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$ .

Le milieu de la barre du haut du module  $k$  est en  $(x_k, y_k)$ , son extrémité gauche est en  $(x_k^l, y_k^l)$  et son extrémité droite est en  $(x_k^r, y_k^r)$ . Les ordonnées des milieux des barres diagonales du module  $i$  sont  $y_{2i}$  et  $y_{3i}$ .

Rappel :

$$x_k = x_{k-1} - d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.1})$$

$$y_k = y_{k-1} + d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.2})$$

Le calcul de  $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$  se fait de trois façons différentes, selon le lien entre  $i$  et  $k$  :

$$\text{Si } i < k \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_{k-1}}{\partial \alpha_i} - d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.3a})$$

$$\text{Si } i = k \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_{k-1}}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{2} d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.3b})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.3c})$$

Quelque soit la valeur de  $i$ , si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial x_{k-1}}{\partial \alpha_i} = 0$ .

Le calcul de  $\frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$  se fait de quatre façons différentes, selon le lien entre  $i$ ,  $j$  et  $k$  :

$$\text{Si } i, j < k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 x_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.4a})$$

$$\text{Si } j < k, i = k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 x_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) + \frac{1}{2} d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.4b})$$

$$\text{Si } i = j = k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 x_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial^2 d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k^2} \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) + \frac{1}{4} d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.4c})$$

$$\text{Si } i > k \text{ ou } j > k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (\text{A.4d})$$

Quelque soit la valeur de  $i$  et la valeur de  $j$ , si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0$ .

Le calcul de  $\frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i}$  se fait de trois façons différentes, selon le lien entre  $i$  et  $k$  :

$$\text{Si } i < k \Rightarrow \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{k-1}}{\partial \alpha_i} - d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.5a})$$

$$\text{Si } i = k \Rightarrow \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{2} d(\alpha_k) \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.5b})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.5c})$$

Quelque soit la valeur de  $i$ , si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial y_{k-1}}{\partial \alpha_i} = 0$ .

Le calcul de  $\frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}$  se fait de quatre façons différentes, selon le lien entre  $i$ ,  $j$  et  $k$  :

$$\text{Si } i, j < k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.6a})$$

$$\text{Si } j < k, i = k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{2} d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.6b})$$

$$\text{Si } i = j = k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k^2} \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{\partial d(\alpha_k)}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) - \frac{1}{4} d(\alpha_k) \cos(\gamma_k + \frac{\alpha_k}{2}) \quad (\text{A.6c})$$

$$\text{Si } i > k \text{ ou } j > k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \quad (\text{A.6d})$$

Quelque soit la valeur de  $i$  et la valeur de  $j$ , si  $k = 1$ , on a  $\frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0$ .

### Extrémité gauche

$$x_k^l = x_k - \frac{b}{2} \cos(\gamma_k + \alpha_k) \quad (\text{A.7})$$

---

D'où :

$$\text{Si } i \leq k \Rightarrow \frac{\partial x_k^l}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.8a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial x_k^l}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.8b})$$

D'où :

$$\text{Si } i, j \leq k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k^l}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.9a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k^l}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.9b})$$

$$y_k^l = y_k - \frac{b}{2} \sin(\gamma_k + \alpha_k) \quad (\text{A.10})$$

D'où :

$$\text{Si } i \leq k \Rightarrow \frac{\partial y_k^l}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.11a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial y_k^l}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.11b})$$

D'où :

$$\text{Si } i, j \leq k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k^l}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{b}{2} \sin(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.12a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k^l}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.12b})$$

**Extrémité droite**

$$x_k^r = x_k + \frac{b}{2} \cos(\gamma_k + \alpha_k) \quad (\text{A.13})$$

D'où :

$$\text{Si } i \leq k \Rightarrow \frac{\partial x_k^r}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.14a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial x_k^r}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.14b})$$

D'où :

$$\text{Si } i, j \leq k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k^r}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 x_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{b}{2} \cos(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.15a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial^2 x_k^r}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.15b})$$

$$y_k^r = y_k + \frac{b}{2} \sin(\gamma_k + \alpha_k) \quad (\text{A.16})$$

D'où :

$$\text{Si } i \leq k \Rightarrow \frac{\partial y_k^r}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.17a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial y_k^r}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.17b})$$

D'où :

$$\text{Si } i, j \leq k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k^r}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{b}{2} \sin(\gamma_i + \alpha_i) \quad (\text{A.18a})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \frac{\partial^2 y_k^r}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (\text{A.18b})$$

Rappel :

$$\text{Si } i < k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos(\gamma_k) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) \end{cases} \quad (\text{A.19a})$$

$$\text{Si } i = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial y_{4k-1}}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) \end{cases} \quad (\text{A.19b})$$

$$\text{Si } i > k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y_{2k}}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \frac{\partial y_{3k}}{\partial \alpha_i} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.19c})$$

On a donc :

$$\text{Si } i < k \text{ et } j < k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y_{2k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{4k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + \frac{b}{2} \sin(\gamma_k) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial^2 y_{3k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{4k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{b}{2} \sin(\gamma_k) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \psi_k) \end{cases} \quad (\text{A.20a})$$

$$\text{Si } i = k \text{ et } j < k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y_{2k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{4k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial \phi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial^2 y_{3k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 y_{4k-1}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_k} \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \psi_k) \end{cases} \quad (\text{A.20b})$$

$$\text{Si } i = k \text{ et } j = k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y_{2k}}{(\partial \alpha_k)^2} = \frac{\partial^2 \phi_k}{(\partial \alpha_k)^2} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \phi_k) - \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \alpha_k}\right)^2 \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \phi_k) \\ \frac{\partial^2 y_{3k}}{(\partial \alpha_k)^2} = \frac{\partial^2 \psi_k}{(\partial \alpha_k)^2} \frac{L}{2} \cos(\gamma_k + \psi_k) - \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial \alpha_k}\right)^2 \frac{L}{2} \sin(\gamma_k + \psi_k) \end{cases} \quad (\text{A.20c})$$

$$\text{Si } i > k \text{ ou } j > k \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y_{2k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \\ \frac{\partial^2 y_{3k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.20d})$$

# LONGUEURS DES CÂBLES EN PRENANT EN COMPTE LES POULIES

---

## B.1 Longueurs des câbles

Nous calculons ici les longueurs des câbles en prenant en compte les poulies, pour les cinq cas décrits dans la section 2.2.4.

Afin de délimiter les portions de câbles correspondant à chaque poulie, on prendra comme point de repère sur les poulies le point le plus bas de la poulie qui croise la verticale lorsque le manipulateur est en position droite ( $\alpha = 0deg$  pour chaque module). La portion de câble correspondant à un module va donc de ce point de référence de la poulie par laquelle arrive ce câble au point d'attache si le câble s'arrête à ce module, ou au point de référence de la poulie de sortie si le câble passe également par des modules supérieurs. Il est à noter que lorsque le module est orienté d'un angle  $\alpha$ , le point de référence sur la poulie de sortie est déplacé du même angle par rapport à la verticale.

### Premier cas

La partie actionnée sur le côté est résumée sur la Figure 2.6 (module de gauche). Le câble rouge tire sur le côté gauche, est attaché au milieu de la poulie 3 et s'enroule autour de la poulie 1.

La longueur partielle de ce câble qui ne dépend que de ce module  $i$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$l_j^1(\alpha_i) = l_i^t(\alpha_i) + r\beta_1^1(\alpha_i) \quad (\text{B.1})$$

où  $l_i^t(\alpha_i)$  est la longueur du câble entre le centre de la poulie 3 et l'endroit où le câble entre en contact avec la poulie 1, et  $\beta_1^1(\alpha_i)$  est l'angle d'enroulement du câble sur la poulie 1 à partir du point de référence. La Figure (B.1) montre les longueurs et les angles utiles à ce calcul. La droite rouge représente l'axe perpendiculaire à la barre du bas. Le trait bleu correspond à la portion de câble entre le milieu de la poulie supérieure et son point de détachement de la poulie

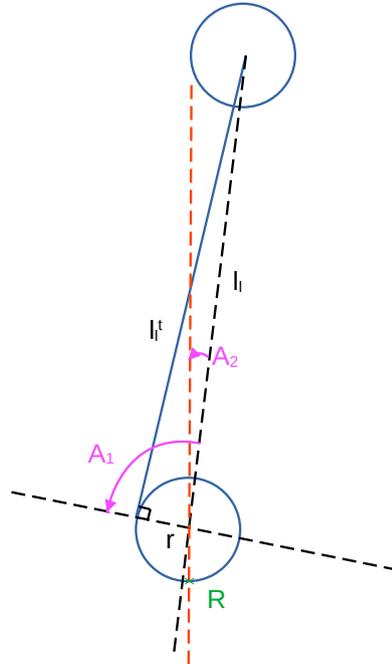


FIGURE B.1 – Actionnement d’un module (premier cas) : longueurs et angles utiles au calcul.

inférieure. Le point  $R$  est pris comme point de référence comme point d’arrivée du câble, et ne dépend que des modules inférieurs. L’angle d’enroulement du câble sur la poulie est donc  $-A_1 + A_2 + \pi$ .

La longueur  $l_i^t(\alpha_i)$  s’obtient avec le théorème de Pythagore (à partir de l’angle droit représenté sur la Figure (B.1)) :

$$l_i^t(\alpha_i) = \sqrt{l_i(\alpha_i)^2 - r^2} \quad (\text{B.2})$$

Cet angle droit permet également de calculer l’angle  $A_1$  :

$$A_1 = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{l_i(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) \quad (\text{B.3})$$

L’angle  $A_2$  vaut l’opposé de la moitié de l’orientation  $\alpha_i$  du module [WF20] :

$$A_2 = -\frac{\alpha_i}{2} \quad (\text{B.4})$$

L'angle  $\beta_1^1(\alpha_i)$  est donc :

$$\beta_1^1(\alpha_i) = \pi - \text{atan}\left(\frac{\sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2} \quad (\text{B.5})$$

L'équation (B.1) peut donc se réécrire :

$$l_j^1(\alpha_i) = \sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2} + r\left(\pi - \text{atan}\left(\frac{\sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.6})$$

Comme en pratique nous calculerons des variations de longueur de câble par rapport à la longueur initiale, nous pourrions passer les termes constants dans la longueur initiale et donc négliger ces derniers dans cette formule. Ainsi, la longueur variable du câble devient :

$$l_j^1(\alpha_i) = \sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2} + r\left(-\arctan\left(\frac{\sqrt{l_l(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right) - \frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.7})$$

### Second cas

Le second cas est le symétrique du premier (sur le côté droit au lieu du côté gauche). Avec le même raisonnement, la longueur partielle du câble est donc :

$$l_j^2(\alpha_i) = l_r^t(\alpha_i) + r\left(\pi + \frac{\alpha_i}{2} - \text{atan}\left(\frac{\sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right)\right) \quad (\text{B.8})$$

avec

$$l_r^t(\alpha_i) = \sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2} \quad (\text{B.9})$$

En négligeant les termes constants, on obtient :

$$l_j^2(\alpha_i) = \sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2} + r\left(\frac{\alpha_i}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{l_r(\alpha_i)^2 - r^2}}{r}\right)\right) \quad (\text{B.10})$$

### Troisième cas

Le câblage étudié est celui du module du milieu de la Figure 2.6. Le câble s'enroule autour de la poulie 1 puis autour de la poulie 3, en liant les deux par l'extérieur.

Les grandeurs utiles au calcul sont indiquées sur la Figure (B.2). La droite rouge verticale représente l'axe perpendiculaire à la barre de base. Le trait bleu correspond à la portion de câble entre le point de détachement sur la poulie inférieure et le point de d'attache sur la poulie supérieure. Il est de même longueur que le trait noir, liant les centres des deux poulies, car ces deux segments et les angles droits formés avec les rayons tangents des poulies forment un

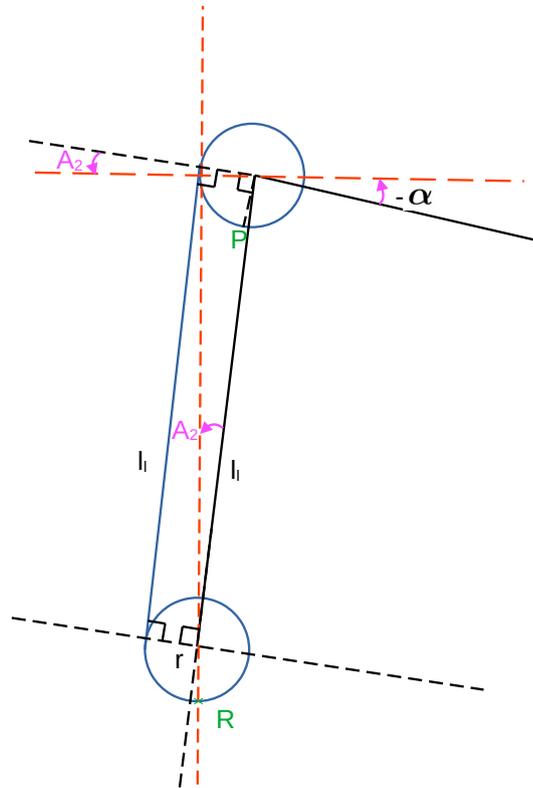


FIGURE B.2 – Actionnement d’un module (troisième cas) : longueurs et angles utiles au calcul.

rectangle. Le point  $R$  est pris comme point de référence comme point d’arrivée du câble, et ne dépend que des modules inférieurs. L’angle d’enroulement du câble sur la poulie inférieure est donc  $(-\frac{\pi}{2} + A_2 + \pi)$ . L’angle d’enroulement sur la poulie supérieure est  $(\frac{\pi}{2} - \alpha + \pi - A_2)$ .

La portion de câble qui lie les poulies 1 et 3 est de longueur  $l_l(\alpha_i)$ . On a donc :

$$l_j^3(\alpha_i) = l_l(\alpha_i) + r(\beta_1^3(\alpha_i) + \beta_3^3(\alpha_i)) \quad (\text{B.11})$$

où  $\beta_k^3(\alpha_i)$  est l’angle d’enroulement du câble autour de la poulie  $k$  qui ne dépend que de l’orientation du module  $i$ .

D’après la Figure (B.2), on a :

$$\beta_1^3(i) = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_i}{2} \quad (\text{B.12})$$

D'après la même figure, l'angle d'enroulement sur la poulie supérieure est :

$$\beta_3^3(i) = \frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha_i}{2} \quad (\text{B.13})$$

On en déduit que :

$$l_j^3 = l_l(\alpha_i) + r(2\pi - \alpha_i) \quad (\text{B.14})$$

En négligeant les termes constants, on obtient :

$$l_j^3(\alpha_i) = l_l(\alpha_i) - r\alpha_i \quad (\text{B.15})$$

#### Quatrième cas

Ce cas est totalement symétrique au cas précédent. On en déduit que :

$$l_j^4 = l_r(\alpha_i) + r(2\pi + \alpha_i) \quad (\text{B.16})$$

En négligeant les termes constants, on obtient :

$$l_j^4(\alpha_i) = l_r(\alpha_i) + r\alpha_i \quad (\text{B.17})$$

#### Cinquième cas

La partie en strut-routed est résumée sur la Figure B.3. Le câble passe par la droite de la poulie poulie 2, s'enroule par la gauche sur la poulie 3 puis s'enroule par le bas de la poulie 4. Les notations sont réparties sur deux dessins pour éviter la surcharge et faciliter la compréhension. La droite rouge représente l'axe perpendiculaire à la barre du bas. Le trait bleu correspond à la portion de câble entre le point de détachement sur une poulie et le point d'attache sur la poulie suivante (que ce soit à gauche ou à droite). Que ce soit pour la longueur de câble le long de la barre diagonale ou celle le long de la barre horizontale, la même méthode que dans les cas précédents permet de calculer leur longueur qui est constante. Le point  $R$  est pris comme point de référence comme point d'arrivée du câble. Le point  $T$  est un point par lequel passe le câble et qui permet de faire la jonction entre les deux dessins. Le point  $P$  est pris comme référence pour le point de sortie du câble. L'angle d'enroulement du câble sur la poulie inférieure est  $(\frac{\pi}{2} + A_4 - A_3)$ . L'angle d'enroulement du câble sur la poulie supérieure gauche jusqu'au point  $T$  est  $(-\alpha + A_4 - A_3)$  (figure gauche). L'angle d'enroulement sur cette même poulie à partir du point  $T$  est  $(-A_5 + \pi)$  (figure à droite). Enfin, L'angle d'enroulement du câble sur la poulie supérieure droite est  $(-A_5 + \frac{\pi}{2})$ .

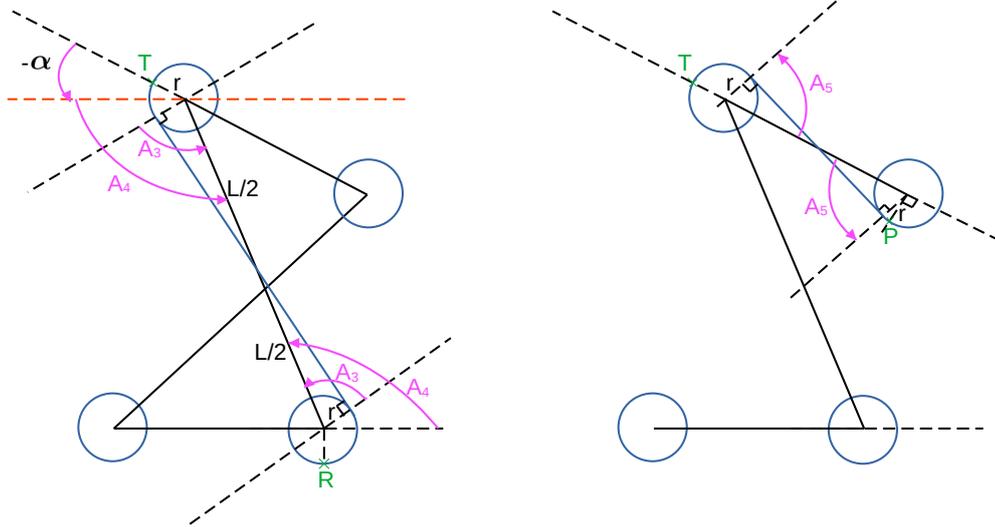


FIGURE B.3 – Actionnement d’un module (quatrième cas) : longueurs et angles utiles au calcul.

Tout d’abord, on peut démontrer géométriquement que les portions de câbles qui lient les poulies ont une longueur constante (calculable avec le théorème de Pythagore). La longueur liant les poulies inférieure droite et supérieure gauche est ainsi  $2\sqrt{(\frac{L}{2})^2 - r^2}$ , et celle liant les poulies supérieurs est  $2\sqrt{(\frac{b}{2})^2 - r^2}$ .

On peut donc écrire :

$$l_j^5(\alpha_i) = 2\sqrt{(\frac{L}{2})^2 - r^2} + 2\sqrt{(\frac{b}{2})^2 - r^2} + r(\beta_2^2(\alpha_i) + \beta_3^2(\alpha_i) + \beta_4^2(\alpha_i)) \quad (\text{B.18})$$

où  $\beta_k^2(\alpha_i)$  est l’angle d’enroulement du câble autour de la poulie  $k$  qui ne dépend que de l’orientation du module  $i$ .

Les angles représentés sur la Figure (B.3) sont  $A_3 = \text{atan}(\frac{L}{2r})$ ,  $A_4 = \psi_i$ ,  $A_5 = \text{atan}(\frac{b}{2r})$ .

On a donc :

$$\beta_2^2(i) = \frac{\pi}{2} + \psi_i - \operatorname{atan}\left(\frac{L}{2r}\right) \quad (\text{B.19})$$

$$\beta_3^2(i) = -\alpha_i + \psi_i - \operatorname{atan}\left(\frac{L}{2r}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{b}{2r}\right) + \pi \quad (\text{B.20})$$

$$\beta_4^2(i) = -\operatorname{atan}\left(\frac{b}{2r}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.21})$$

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned} l_j^5(\alpha_i) = & 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - r^2} + 2\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - r^2} \\ & + r\left(\frac{\pi}{2} + \psi_i - \operatorname{atan}\left(\frac{L}{2r}\right) - \alpha_i + \psi_i - \operatorname{atan}\left(\frac{L}{2r}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{b}{2r}\right) + \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{b}{2r}\right) + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Il se trouve que ce résultat est symétrique en  $\alpha$ . Ceci implique que le cas du strut-routed symétrique a la même longueur relative de câble.

En négligeant les termes constants, on obtient :

$$l_j^5(\alpha_i) = r(2\psi(\alpha_i) - \alpha_i) \quad (\text{B.23})$$

## B.2 Dérivées premières des longueurs de câbles

Les dérivées des longueurs de câbles sont particulièrement utiles pour calculer la matrice  $\mathbf{Z}$ .

En dérivant (2.1), on obtient :

$$\frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{b^2 \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right)}{2d(\alpha_i)} = \frac{b^2 \sin(\alpha_i)}{4d(\alpha_i)} \quad (\text{B.24})$$

En dérivant (2.2) et (2.3), on obtient :

$$\frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} - \frac{b}{2} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.25})$$

$$\frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} + \frac{b}{2} \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.26})$$

En dérivant (B.2) et (B.8), on obtient :

$$\frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \frac{l_l(\alpha_i)}{l_l^t(\alpha_i)} \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \frac{l_r(\alpha_i)}{l_r^t(\alpha_i)} \quad (\text{B.28})$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial l_j^1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \left(1 - \frac{r^2}{l_l(\alpha_i)^2}\right) - \frac{r}{2} \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial l_j^2}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \left(1 - \frac{r^2}{l_r(\alpha_i)^2}\right) + \frac{r}{2} \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\partial l_j^3}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} - r \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial l_j^4}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} + r \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial l_j^5}{\partial \alpha_i} = r \left(2 \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} - 1\right) \quad (\text{B.33})$$

### B.3 Dérivées secondes des longueurs des câbles

Les dérivées secondes des longueurs de câbles sont particulièrement utiles pour calculer la dérivée de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Comme les longueurs partielles sont indépendantes et ne correspondent qu'à un module, les dérivées secondes non-nulles sont celles obtenues en dérivant deux fois par rapport à la même orientation  $\alpha_i$ .

En dérivant (B.24), on obtient :

$$\frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{4b^2 \cos(\alpha_i) d(\alpha_i) - 4b^2 \sin(\alpha_i) \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}{16d(\alpha_i)^2} \quad (\text{B.34})$$

En dérivant (B.25) et (B.26), on obtient :

$$\frac{\partial^2 l_l(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} + \frac{b}{4} \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial^2 l_r(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} - \frac{b}{4} \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \quad (\text{B.36})$$

En dérivant (B.27) et (B.28), on obtient :

$$\frac{\partial^2 l_l^t(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_l(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \frac{l_l(\alpha_i)}{l_l^t(\alpha_i)} + \frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} l_l^t(\alpha_i) - l_l(\alpha_i) \frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}{l_l^t(\alpha_i)^2} \right) \quad (\text{B.37})$$

$$\frac{\partial^2 l_r^t(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_r(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \frac{l_r(\alpha_i)}{l_r^t(\alpha_i)} + \frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \left( \frac{\frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} l_r^t(\alpha_i) - l_r(\alpha_i) \frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}{l_r^t(\alpha_i)^2} \right) \quad (\text{B.38})$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 l_j^1}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_l^t(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \left( 1 - \frac{r^2}{l_l(\alpha_i)^2} \right) + \frac{2r^2 \frac{\partial l_l^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}{l_l(\alpha_i)^3} \quad (\text{B.39})$$

$$\frac{\partial^2 l_j^2}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_r^t(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \left( 1 - \frac{r^2}{l_r(\alpha_i)^2} \right) + \frac{2r^2 \frac{\partial l_r^t(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}}{l_r(\alpha_i)^3} \quad (\text{B.40})$$

$$\frac{\partial^2 l_j^3}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_l(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \quad (\text{B.41})$$

$$\frac{\partial^2 l_j^4}{(\partial \alpha_i)^2} = \frac{\partial^2 l_r(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} \quad (\text{B.42})$$

$$\frac{\partial l_j^5}{\partial \alpha_i} = 2r \frac{\partial^2 \psi_i}{(\partial \alpha_i)^2} \quad (\text{B.43})$$

# CALCULS POUR LE MODÈLE DYNAMIQUE

---

## C.1 Dérivées de $\phi$ et $\psi$

D'après [Fur20], les dérivées des angles  $\phi_i$  et  $\psi_i$  par rapport à  $\alpha_i$  sont :

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} = \frac{b \sin(\psi_i - \alpha_i)}{L \sin(\psi_i - \phi_i)} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} = \frac{b \sin(\phi_i - \alpha_i)}{L \sin(\psi_i - \phi_i)} \quad (\text{C.2})$$

## C.2 Matrices $\mathbf{R}_i$

Afin de faciliter l'écriture du modèle dynamique, nous allons calculer les matrices  $\mathbf{R}_i$  reliant les coordonnées dépendantes  $[\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\alpha}_i]$  aux orientations  $\alpha$  :

$$[\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\alpha}_i]^\top = \mathbf{R}_i [\dot{\alpha}_1, \dots, \dot{\alpha}_N]^\top \quad (\text{C.3})$$

Pour cela, nous calculons les vitesses de translation et de rotation des barres considérées. Ces dernières sont calculées par dérivation des équations (2.6), (2.8) et (2.9) par rapport au temps :

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i - d_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\gamma}_i + \left( -\frac{\partial d_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \dot{\alpha}_i \quad (\text{C.4a})$$

$$\dot{y}_{i+1} = \dot{y}_i - d_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \dot{\gamma}_i + \left( \frac{\partial d_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \dot{\alpha}_i \quad (\text{C.4b})$$

$$\dot{\gamma}_{i+1} = \dot{\gamma}_i + \dot{\alpha}_i \quad (\text{C.4c})$$

Sachant que la première barre est fixe, on a  $\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = \dot{\gamma}_1 = 0$  et la première matrice de

transformation  $\mathbf{R}_1$  s'écrit :

$$\mathbf{R}_1 = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ 0 & \mathbf{0}_{4 \times (N-1)} \\ 0 & \\ 1 & \end{array} \right] \quad (\text{C.5})$$

Les matrices  $\mathbf{R}_i$  suivantes peuvent être calculées de manière itérative. En utilisant l'équation (2.6), on réécrit l'équation (2.36) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{i+1} \\ \dot{y}_{i+1} \\ \dot{\gamma}_{i+1} \\ \dot{\alpha}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{\gamma i} \\ y_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\dot{\alpha}_1 + \dots + \dot{\alpha}_{i-1}) + \begin{bmatrix} x_{\alpha i} \\ y_{\alpha i} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_i + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\alpha}_{i+1} \quad (\text{C.6})$$

avec

$$x_{\gamma i} = -d_i \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.7a})$$

$$x_{\alpha i} = \left( -\frac{\partial d_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d_i}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.7b})$$

$$y_{\gamma i} = -d_i \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.7c})$$

$$y_{\alpha i} = \left( \frac{\partial d_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d_i}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.7d})$$

On a alors :

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[ \begin{bmatrix} x_{\gamma i} \\ y_{\gamma i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c|c} x_{\alpha i} & 0 \\ y_{\alpha i} & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \right] \quad (\text{C.8})$$

### C.3 Énergie cinétique en fonction du paramétrage local

Nous exprimons ici l'énergie cinétique du module  $i$  en fonction de son paramétrage local  $(x_i, y_i, \alpha_i, \gamma_i)$ .

On a par dérivation les vitesses :

$$\dot{x}_{2i} = \dot{x}_i + \frac{b}{2}\sin(\gamma_i)\dot{\gamma}_i - \frac{L}{2}\sin(\gamma_i + \phi_i)(\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \quad (\text{C.9a})$$

$$\dot{y}_{2i} = \dot{y}_i - \frac{b}{2}\cos(\gamma_i)\dot{\gamma}_i + \frac{L}{2}\cos(\gamma_i + \phi_i)(\dot{\gamma}_i + \dot{\phi}_i) \quad (\text{C.9b})$$

$$\dot{x}_{3i} = \dot{x}_i - \frac{b}{2}\sin(\gamma_i)\dot{\gamma}_i - \frac{L}{2}\sin(\gamma_i + \psi_i)(\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \quad (\text{C.9c})$$

$$\dot{y}_{3i} = \dot{y}_i + \frac{b}{2}\cos(\gamma_i)\dot{\gamma}_i + \frac{L}{2}\cos(\gamma_i + \psi_i)(\dot{\gamma}_i + \dot{\psi}_i) \quad (\text{C.9d})$$

$$\dot{x}_{4i} = \dot{x}_i - \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})\dot{\alpha}_i - d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (\text{C.9e})$$

$$\dot{y}_{4i} = \dot{y}_i + \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})\dot{\alpha}_i - d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2})(\dot{\gamma}_i + \frac{\dot{\alpha}_i}{2}) \quad (\text{C.9f})$$

On exprime les coordonnées dépendantes comme suit :

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad (\text{C.10a})$$

$$\dot{\psi}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \quad (\text{C.10b})$$

On peut donc réécrire les équations des vitesses :

$$\dot{x}_{2i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2}\sin(\gamma_i) - \frac{L}{2}\sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (\text{C.11a})$$

$$\dot{y}_{2i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2}\cos(\gamma_i) + \frac{L}{2}\cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (\text{C.11b})$$

$$\dot{x}_{3i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2}\sin(\gamma_i) - \frac{L}{2}\sin(\gamma_i + \psi_i) \right) - \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (\text{C.11c})$$

$$\dot{y}_{3i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2}\cos(\gamma_i) + \frac{L}{2}\cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (\text{C.11d})$$

$$\dot{x}_{4i} = \dot{x}_i + \dot{\gamma}_i \left( -d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.11e})$$

$$\dot{y}_{4i} = \dot{y}_i + \dot{\gamma}_i \left( -d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + \dot{\alpha}_i \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.11f})$$

L'expression des vitesses des centres de masses au carré est alors :

$$v_{2i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\phi_i) \right) + \dot{\alpha}_i^2 \left( \frac{L^2 \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{bL}{4} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\phi_i) \right) \quad (\text{C.12a})$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (\text{C.12b})$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \quad (\text{C.12c})$$

$$v_{3i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\psi_i) \right) + \dot{\alpha}_i^2 \left( \frac{L^2 \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{bL}{4} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\psi_i) \right) \quad (\text{C.12d})$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) - 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (\text{C.12e})$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \quad (\text{C.12f})$$

$$v_{4i}^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2 (d^2(\alpha_i)) + \dot{\alpha}_i^2 \left( \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) \quad (\text{C.12g})$$

$$+ 2\dot{x}_i \dot{\gamma}_i \left( -d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.12h})$$

$$+ 2\dot{y}_i \dot{\gamma}_i \left( -d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) + 2\dot{y}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.12i})$$

La contribution des termes d'inertie est :

$$I_{2i}(\dot{\phi}_i + \dot{\gamma}_i)^2 + I_{3i}(\dot{\psi}_i + \dot{\gamma}_i)^2 + I_{4i}(\dot{\alpha}_i + \dot{\gamma}_i)^2 = \dot{\gamma}_i^2 (I_{2i} + I_{3i} + I_{4i}) + \dot{\alpha}_i^2 \left( \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2 I_{2i} + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2 I_{3i} + I_{4i} \right) + 2\dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_i \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} I_{2i} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} I_{3i} + I_{4i} \right) \quad (\text{C.13})$$

On peut donc écrire l'énergie cinétique totale  $T_i$  pour le mécanisme  $i$  sous la forme suivante :

$$T_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\gamma}_i & \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \mathbf{M}_i \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

avec  $\mathbf{M}_i$  :

$$T_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{\gamma}_i & \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xxi} & 0 & M_{\gamma xi} & M_{\alpha xi} \\ 0 & M_{yyi} & M_{\gamma yi} & M_{\alpha yi} \\ M_{\gamma xi} & M_{\gamma yi} & M_{\gamma\gamma i} & M_{\alpha\gamma i} \\ M_{\alpha xi} & M_{\alpha yi} & M_{\alpha\gamma i} & M_{\alpha\alpha i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\gamma}_i \\ \dot{\alpha}_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.15})$$

où

$$M_{\alpha\alpha i} = m_{2i} \left( \frac{L^2 (\frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i})^2}{4} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 (\frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i})^2}{4} \right) + m_{4i} \left( \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) + \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2 I_{2i} + \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \right)^2 I_{3i} + I_{4i} \quad (\text{C.16a})$$

$$M_{\gamma\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\psi_i) \right) + m_{4i} (d^2(\alpha_i)) + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} \quad (\text{C.16b})$$

$$M_{\alpha\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{bL}{4} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} - \frac{bL}{4} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\psi_i) \right) + \quad (\text{C.16c})$$

$$m_{4i} \left( \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} I_{2i} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} I_{3i} + I_{4i} \quad (\text{C.16d})$$

$$M_{\alpha xi} = -m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) + \quad (\text{C.16e})$$

$$m_{4i} \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.16f})$$

$$M_{\alpha yi} = m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + \quad (\text{C.16g})$$

$$m_{4i} \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.16h})$$

$$M_{\gamma xi} = m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.16i})$$

$$M_{\gamma yi} = m_{2i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.16j})$$

$$M_{xxi} = M_{yyi} = m_{2i} + m_{3i} + m_{4i} \quad (\text{C.16k})$$

## C.4 Matrice de raideur

Rappel : on peut décomposer le calcul de la matrice  $\mathbf{K}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\mathbf{Zf})}{\partial \alpha} \quad (\text{C.17})$$

Le calcul de  $\frac{\partial(\mathbf{Zf})}{\partial \alpha}$  est indiqué dans la section 2.3.5.

$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha}$  est calculé à partir de l'expression de  $\mathbf{g}$ .

On a :

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \alpha} \quad (\text{C.18})$$

L'élément  $i$  du vecteur  $\mathbf{g}_s$  ne dépend que de l'orientation du module  $i$ . Ainsi, seule sa dérivée par rapport à  $\alpha_i$  est non-nulle. La matrice  $\frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \alpha}$  est donc une matrice diagonale. L'élément  $i$  de la diagonale de  $\frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \alpha}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_s}{\partial \alpha}(i, i) = & k_l(i)(l_l(\alpha_i) - l_{l0}(i)) \frac{\partial^2 l_l(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} + k_l(i) \left( \frac{\partial l_l(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right)^2 \\ & + k_r(i)(l_r(\alpha_i) - l_{r0}(i)) \frac{\partial^2 l_r(\alpha_i)}{(\partial \alpha_i)^2} + k_r(i) \left( \frac{\partial l_r(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

L'élément de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \alpha}$  est donné par :

$$\frac{\partial \mathbf{g}_g}{\partial \alpha}(i, j) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 V_{gk}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \quad (\text{C.20})$$

où

$$\frac{\partial^2 V_{gk}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = g(m_{2k} \frac{\partial^2 y_{2k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + m_{3k} \frac{\partial^2 y_{3k}}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} + m_{4k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}) \quad (\text{C.21})$$

Les dérivées secondes utilisées sont fournies dans l'annexe A.

## C.5 Calcul des forces de Coriolis

Nous allons utiliser les symboles de Christoffel afin de calculer la matrice de Coriolis et des effets centrifuges en fonction des éléments de la matrice d'inertie et des vitesses articulaires [EW21].

Nous allons calculer les coefficients de la matrice  $\mathbf{C}(\dot{\alpha}, \alpha)$  telle que :

$$\mathbf{c}(\dot{\alpha}, \alpha) = \mathbf{C}(\dot{\alpha}, \alpha)\dot{\alpha} \quad (\text{C.22})$$

Les éléments de  $\mathbf{C}$  sont ainsi donnés par :

$$C(i, j) = \sum_{k=1}^N \Gamma_{ijk}(\alpha)\dot{\alpha}_k \quad (\text{C.23})$$

où

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial \alpha_i} \right) \quad (\text{C.24})$$

sont les symboles de Christoffel.

Nous devons donc calculer ces coefficients. Il faut pour cela dériver la matrice  $\mathbf{M}$  par rapport à  $\alpha$ .

### Matrice $\mathbf{M}_m$

Pour rappel, on a :

$$\mathbf{M}_m = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^T \mathbf{M}_i \mathbf{R}_i \quad (\text{C.25})$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\partial \mathbf{M}_m}{\partial \alpha_k} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{R}_i^T}{\partial \alpha_k} \mathbf{M}_i \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}_i}{\partial \alpha_k} \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_i^T \mathbf{M}_i \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \alpha_k} \quad (\text{C.26})$$

Il faut dériver les différents éléments de la matrice  $\mathbf{M}_i$ .

Ces éléments de la matrice  $\mathbf{M}_i$  sont constants :

$$M_{xxi} = M_{yyi} = m_{2i} + m_{3i} + m_{4i} \quad (\text{C.27})$$

Leurs dérivées premières sont donc nulles.

Rappel :

$$M_{\alpha\alpha i} = m_{2i} \left( \frac{L^2 S_{2i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 S_{3i}^2(\alpha_i)}{4} \right) + m_{4i} \left( \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right)^2 + \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) + S_{2i}^2(\alpha_i) I_{2i} + S_{3i}^2(\alpha_i) I_{3i} + I_{4i} \quad (\text{C.28})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  (non-nul uniquement pour  $i == k$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha\alpha i}}{\partial \alpha_i} = m_{2i} \left( \frac{L^2 \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_i} S_{2i}(\alpha_i)}{2} \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2 \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_i} S_{3i}(\alpha_i)}{2} \right) + m_{4i} \left( 2 \left( \frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{\partial^2 \alpha_i} \right) \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \right) + \frac{(\frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}) d(\alpha_i)}{2} \right) \\ + 2 \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_i} S_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + 2 \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_i} S_{3i}(\alpha_i) I_{3i} \end{aligned} \quad (C.29)$$

Rappel :

$$M_{\gamma\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b^2}{4} + \frac{L^2}{4} - \frac{bL}{2} \cos(\psi_i) \right) + m_{4i} (d^2(\alpha_i)) + I_{2i} + I_{3i} + I_{4i} \quad (C.30)$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  (non-nul uniquement pour  $i == k$ ) :

$$\frac{\partial M_{\gamma\gamma i}}{\partial \alpha_k} = S_{2i} \frac{m_{2i} b L}{2} \sin(\phi_i) + S_{3i} \frac{m_{3i} b L}{2} \sin(\psi_i) + 2 m_{4i} d(\alpha_i) \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \quad (C.31)$$

Rappel :

$$\begin{aligned} M_{\alpha\gamma i} = m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} S_{2i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} S_{3i}(\alpha_i) - \frac{bL}{4} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{d^2(\alpha_i)}{4} \right) + S_{2i}(\alpha_i) I_{2i} + S_{3i}(\alpha_i) I_{3i} + I_{4i} \end{aligned} \quad (C.32)$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  (non-nul uniquement pour  $i == k$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha\gamma i}}{\partial \alpha_k} = m_{2i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} - \frac{bL}{4} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \cos(\phi_i) + \frac{bL}{4} S_{2i}^2(\alpha_i) \sin(\phi_i) \right) \\ + m_{3i} \left( \frac{L^2}{4} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} - \frac{bL}{4} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \cos(\psi_i) + \frac{bL}{4} S_{3i}^2(\alpha_i) \sin(\psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{2 \frac{\partial d}{\partial \alpha_k} d(\alpha_i)}{4} \right) + \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} I_{2i} + \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} I_{3i} \end{aligned} \quad (C.33)$$

Rappel

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha i} = -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ + m_{4i} \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.34)$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

Si  $k < i$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha xi}}{\partial \alpha_k} = & -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{d(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.35)$$

Si  $k = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha xi}}{\partial \alpha_k} = & -m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \phi_i) + \frac{L}{2} S_{2i}^2 \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ & - m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \psi_i) + \frac{L}{2} S_{3i}^2 \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( \frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i^2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{1}{4} d \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.36)$$

Si  $k > i$

$$\frac{\partial M_{\alpha xi}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (C.37)$$

Rappel

$$\begin{aligned} M_{\alpha yi} = & m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.38)$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

Si  $k < i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha yi}}{\partial \alpha_k} = & -m_{2i} \left( \frac{L}{2} S_{2i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) - m_{3i} \left( \frac{L}{2} S_{3i}(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( -\frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.39)$$

Si  $k = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\alpha yi}}{\partial \alpha_k} = & +m_{2i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{2i}}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \phi_i) - \frac{L}{2} S_{2i}^2(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) \\ & + m_{3i} \left( \frac{L}{2} \frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \psi_i) - \frac{L}{2} S_{3i}^2(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( \frac{\partial^2 d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i^2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{4} d \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (C.40)$$

Si  $k > i$

$$\frac{\partial M_{\alpha_{yi}}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.41})$$

Rappel :

$$M_{\gamma_{xi}} = m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.42})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

Si  $k < i$

$$\frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = m_{2i} \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \cos(\gamma_i) - \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.43})$$

Si  $k = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = & m_{2i} \left( -S_{2i} \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -S_{3i} \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( -\frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{1}{2} d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Si  $k > i$

$$\frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.45})$$

Rappel

$$M_{\gamma_{yi}} = m_{2i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -\frac{b}{2} \cos(\gamma_i) + \frac{L}{2} \cos(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -d(\alpha_i) \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.46})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

Si  $k < i$

$$\frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = m_{2i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( \frac{b}{2} \sin(\gamma_i) - \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) + m_{4i} \left( -d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.47})$$

Si  $k = i$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = & +m_{2i} \left( -S_{2i} \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \phi_i) \right) + m_{3i} \left( -S_{3i} \frac{L}{2} \sin(\gamma_i + \psi_i) \right) \\ & + m_{4i} \left( -\frac{\partial d(\alpha_i)}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} d(\alpha_i) \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

Si  $k > i$

$$\frac{\partial M_{\gamma_{xi}}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.49})$$

**Dérivées de  $R$**

Rappel :

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} x_{\gamma_i} \\ y_{\gamma_i} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} x_{\alpha_i} \\ y_{\alpha_i} \\ 1 \\ -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (\text{C.50})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{i+1}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \alpha_k} + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial x_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial y_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \times \mathbf{1}_{1 \times (i-1)} \left| \begin{array}{c} \frac{\partial x_{\alpha_i}}{\partial \alpha_k} \\ \frac{\partial y_{\alpha_i}}{\partial \alpha_k} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right| \mathbf{0}_{4 \times (N-i)} \end{array} \right] \quad (\text{C.51})$$

Rappel :

$$x_{\gamma_i} = -d \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.52})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

si  $k < i$

$$\frac{\partial x_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} = d \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.53})$$

si  $k = i$

$$\frac{\partial x_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial d}{\partial \alpha_k} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{d}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.54})$$

si  $k > i$

$$\frac{\partial x_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.55})$$

Rappel :

$$y_{\gamma_i} = -d \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.56})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

si  $k < i$

$$\frac{\partial y_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} = -d \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.57})$$

si  $k = i$

$$\frac{\partial y_{\gamma_i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial d}{\partial \alpha_k} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.58})$$

si  $k > i$

$$\frac{\partial y_{\gamma i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.59})$$

Rappel :

$$x_{\alpha i} = \left( -\frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d(\alpha_i)}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.60})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

si  $k < i$

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{d}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.61})$$

si  $k = i$

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial^2 d}{\partial^2 \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) + \frac{d}{4} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.62})$$

si  $k > i$

$$\frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.63})$$

Rappel :

$$y_{\alpha i} = \left( \frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d}{2} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \right) \quad (\text{C.64})$$

Dérivée première par rapport à  $\alpha$  :

si  $k < i$

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d}{2} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.65})$$

si  $k = i$

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial^2 d}{\partial^2 \alpha_i} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial d}{\partial \alpha_i} \sin(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) - \frac{d}{4} \cos(\gamma_i + \frac{\alpha_i}{2}) \quad (\text{C.66})$$

si  $k > i$

$$\frac{\partial y_{\alpha i}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.67})$$

**Matrice  $\mathbf{M}_f$**

Rappel :

$$\mathbf{M}^f(\alpha) = (I_m \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2}) \mathbf{Z}(\alpha) \mathbf{Z}(\alpha)^T \quad (\text{C.68})$$

On a donc :

$$\frac{\partial \mathbf{M}^f(\alpha)}{\partial \alpha_k} = \left( I_m \frac{R^2}{r_d^2} + \frac{I_d}{r_d^2} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{Z}(\alpha)}{\partial \alpha_k} \mathbf{Z}(\alpha)^T + \mathbf{Z}(\alpha) \frac{\partial \mathbf{Z}(\alpha)^T}{\partial \alpha_k} \right) \quad (\text{C.69})$$

$\frac{\partial \mathbf{Z}(\alpha)}{\partial \alpha_k}$  s'exprime en fonction des dérivées secondes des longueurs partielles des câbles, détaillés dans la section B.3.

## C.6 Ajout d'une tête dans le modèle dynamique

### C.6.1 Matrice d'inertie de la tête

Nous modélisons la tête du manipulateur par une sphère de rayon  $R$ . Nous notons  $(x_h, y_h)$  la position du centre de masse de la tête.

Dans le repère de référence, nous avons :

$$x_h = x_{N+1} - R \sin(\gamma_{N+1}) \quad (\text{C.70})$$

$$y_h = y_{N+1} + R \cos(\gamma_{N+1}) \quad (\text{C.71})$$

En dérivant, nous avons donc :

$$\dot{x}_h = \dot{x}_{N+1} - \dot{\gamma}_{N+1} R \cos(\gamma_{N+1}) \quad (\text{C.72})$$

$$\dot{y}_h = \dot{y}_{N+1} - \dot{\gamma}_{N+1} R \sin(\gamma_{N+1}) \quad (\text{C.73})$$

La vitesse au carré est donc :

$$v_h^2 = \dot{x}_{N+1}^2 + \dot{y}_{N+1}^2 + \dot{\gamma}_{N+1}^2 R^2 - 2 \dot{\gamma}_{N+1} \dot{x}_{N+1} R \cos(\gamma_{N+1}) - 2 \dot{\gamma}_{N+1} \dot{y}_{N+1} R \sin(\gamma_{N+1}) \quad (\text{C.74})$$

La contribution inertielle est  $I_h \dot{\gamma}_{N+1}^2$ .

On a donc :

$$T_{head} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_{N+1} & \dot{y}_{N+1} & \dot{\gamma}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MH_{xx} & 0 & MH_{\gamma x} \\ 0 & MH_{yy} & MH_{\gamma y} \\ MH_{\gamma x} & MH_{\gamma y} & MH_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{N+1} \\ \dot{y}_{N+1} \\ \dot{\gamma}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{C.75})$$

où

$$MS_{xx} = m_h \quad (C.76)$$

$$MS_{yy} = m_h \quad (C.77)$$

$$MS_{\gamma\gamma} = R^2 m_h + I_h \quad (C.78)$$

$$MS_{\gamma x} = -R \cos(\gamma_{N+1}) m_h \quad (C.79)$$

$$MS_{\gamma y} = -R \sin(\gamma_{N+1}) m_h \quad (C.80)$$

Avec la même méthode que dans le modèle dynamique, on utilise la matrice  $\mathbf{R}_{N+1}$  pour intégrer l'énergie cinétique de la tête dans la matrice d'inertie du manipulateur.

### C.6.2 Énergie potentielle de la tête

Il faut également prendre en compte la masse de la tête dans le calcul de  $\mathbf{g}$ .

Il faut donc rajouter l'énergie potentielle suivante :

$$V_h = gm_h y_h \quad (C.81)$$

et donc rajouter le vecteur suivant à  $\mathbf{g}$  :

$$\mathbf{g}_h = \left[ \frac{\partial V_h}{\partial \alpha_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial V_h}{\partial \alpha_i} \quad \cdots \quad \frac{\partial V_h}{\partial \alpha_N} \right]^T \quad (C.82)$$

Chaque élément vaut :

$$\frac{\partial V_h}{\partial \alpha_i} = gm_h \left( \frac{\partial y_{N+1}}{\partial \alpha_i} - R \sin(\gamma_{N+1}) \right) \quad (C.83)$$

### C.6.3 Forces de Coriolis de la tête

Les termes utiles pour prendre en compte les forces centrifuges et de Coriolis de la tête sont :

$$\frac{\partial MS_{xx}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.84})$$

$$\frac{\partial MS_{yy}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.85})$$

$$\frac{\partial MS_{\gamma\gamma}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (\text{C.86})$$

$$\frac{\partial MS_{\gamma x}}{\partial \alpha_k} = R \sin(\gamma_{N+1}) m_h \quad (\text{C.87})$$

$$\frac{\partial MS_{\gamma y}}{\partial \alpha_k} = -R \cos(\gamma_{N+1}) m_h \quad (\text{C.88})$$





---

**Titre :** Étude théorique et expérimentale d'architectures innovantes de robots inspirées du cou des oiseaux : conception et commande

**Mot clés :** tensegrité, bio-inspiration, robotique, robot à câbles, commande

**Résumé :** Les systèmes biologiques représentent une grande source d'inspiration pour les roboticiens. Les systèmes de tensegrité, composés d'éléments rigides et d'éléments en tension, sont particulièrement adaptés pour la bio-inspiration puisque l'on retrouve ces systèmes directement dans divers systèmes biologiques. Dans cette thèse, nous étudions un manipulateur inspiré du cou des oiseaux. Ce manipulateur est un empilement de modules qui possèdent chacun un degré de liberté. Chaque module est un mécanisme de tensegrité composé de quatre barres et deux ressorts. Le manipulateur est actionné à l'aide de câbles, ainsi tous les moteurs se situent à sa base. Le modèle géométrique et le modèle dynamique du manipulateur sont développés, puis une analyse de l'actionnement et de l'espace de travail statique du manipulateur est menée. Un actionnement avec quatre câbles est sélectionné pour un pro-

totype composé de trois modules. Ce prototype n'a pas de mesure directe des orientations des modules, deux méthodes pour calculer ces orientations en fonction des positions moteurs sont donc proposées. Une identification des frottements moteurs et de l'élasticité des câbles est menée afin d'améliorer les performances de la commande du prototype, et d'avoir un simulateur efficace. Trois commandes sont développées et testées sur le prototype : une commande articulaire, une commande dans l'espace des moteurs et une commande dans l'espace opérationnel. Des trajectoires sont ensuite optimisées dans le but de produire des mouvements en minimisant les forces appliquées ou de produire des mouvements à grande vitesse, comme peut le faire le pic lorsqu'il frappe un tronc d'arbre avec son bec. La thèse se termine sur une ouverture vers un manipulateur sous-actionné constitué d'une dizaine de modules.

---

**Title:** Theoretical and experimental study of innovative robot architectures inspired by the neck of birds : design and control

**Keywords:** tensegrity, bio-inspiration, robotics, cable robot, control

**Abstract:** Biological systems are a great source of inspiration for roboticists. Tensegrity systems, composed of rigid and tensile elements, are particularly suitable for bio-inspiration since these systems are found directly in various biological systems. In this thesis, we study a manipulator inspired by the neck of birds. This manipulator is a stack of modules that each have one degree of freedom. Each module is a tensegrity mechanism composed of four bars and two springs. The manipulator is operated by cables, so all the motors are located at its base. The geometric model and the dynamic model of the manipulator are developed, then an analysis of the actuation and the static workspace of the manipulator is conducted. An actuation with four cables is selected for a prototype composed of three mod-

ules. This prototype has no direct measurement of the modules orientations, so two methods to calculate these orientations according to the motor positions are proposed. An identification of the motor friction and the elasticity of the cables is carried out in order to improve the performances of the prototype control, and to have an effective simulator. Three controls are developed and tested on the prototype: a joint control, a control in the space of the motors and a control in the operational area. Trajectories are then optimized in order to produce movements by minimizing the applied forces or to produce high speed movements, as the woodpecker can do when it hits a tree trunk with its beak. The thesis ends with an opening towards an underactuated manipulator made of about ten modules.