



**HAL**  
open science

# Analyse modale opérationnelle des roues de turbines hydroélectriques par l'étude des régimes transitoires

Quentin Dollon

► **To cite this version:**

Quentin Dollon. Analyse modale opérationnelle des roues de turbines hydroélectriques par l'étude des régimes transitoires. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Lyon; École de technologie supérieure (Montréal, Canada), 2021. Français. NNT : 2021LYSEI107 . tel-03675204

**HAL Id: tel-03675204**

**<https://theses.hal.science/tel-03675204v1>**

Submitted on 23 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Le génie pour l'industrie

N°d'ordre NNT : 2021LYSEI107

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de

École de Technologie Supérieure de Montréal

En cotutelle internationale avec

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Ecole Doctorale 162

MEGA

Spécialité :

Génie Mécanique, Traitement de Signal

Soutenue publiquement le 10/12/2021, par :

Quentin Dollon

---

# ANALYSE MODALE OPERATIONNELLE DES ROUES DE TURBINES HYDROELECTRIQUES PAR L'ETUDE DE REGIME TRANSITOIRES

---

Devant le jury composé de :

Dupont Thomas, Professeur (PhD), ÉTS Montréal (Canada), Président

Serra Roger, Maître de Conférence (HDR), INSA Centre Val De Loire (France), Rapporteur

Kouroussi Georges, Professeur (PhD), Université de Mons (Belgique), Rapporteur

Faverjon Béatrice, Maître de Conférence (HDR), INSA Lyon (France), Examinatrice

Sadoulet-Reboul Emeline, Maître de Conférence (HDR), Université de Franche-Comté (France), Examinatrice

Saint-Amant Yves, Professeur (PhD), Université de Laval (Canada), Examineur

Tahan Antoine, Professeur (PhD), ÉTS Montréal, Directeur de thèse

Antoni Jérôme, Professeur des Universités (PhD), INSA Lyon, Co-directeur de thèse

Gagnon Martin, Chercheur (PhD), IREQ (Canada), Invité

Monette Christine, Experte (MsC), Andritz Hydro (Canada), Invitée



## Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b><u>CHIMIE DE LYON</u></b> <a href="https://www.edchimie-lyon.fr">https://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage secretariat@edchimie-lyon.fr	<b>M. Stéphane DANIELE</b> C2P2-CPE LYON-UMR 5265 Bâtiment F308, BP 2077 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69616 Villeurbanne <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b><u>ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u></b> <a href="https://edeea.universite-lyon.fr">https://edeea.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Bâtiment Direction INSA Lyon Tél : 04.72.43.71.70 secretariat.edeea@insa-lyon.fr	<b>M. Philippe DELACHARTRE</b> INSA LYON Laboratoire CREATIS Bâtiment Blaise Pascal, 7 avenue Jean Capelle 69621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.88.63 <a href="mailto:philippe.delachartre@insa-lyon.fr">philippe.delachartre@insa-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME, MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u></b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr	<b>M. Philippe NORMAND</b> Université Claude Bernard Lyon 1 UMR 5557 Lab. d'Ecologie Microbienne Bâtiment Mendel 43, boulevard du 11 Novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:philippe.normand@univ-lyon1.fr">philippe.normand@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b><u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTÉ</u></b> <a href="http://ediss.universite-lyon.fr">http://ediss.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 secretariat.ediss@univ-lyon1.fr	<b>Mme Sylvie RICARD-BLUM</b> Institut de Chimie et Biochimie Moléculaires et Supramoléculaires (ICBMS) - UMR 5246 CNRS - Université Lyon 1 Bâtiment Raulin - 2ème étage Nord 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne Cedex Tél : +33(0)4 72 44 82 32 <a href="mailto:sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr">sylvie.ricard-blum@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b><u>INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES</u></b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 infomaths@univ-lyon1.fr	<b>M. Hamamache KHEDDOUCI</b> Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Nautibus 43, Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne Cedex France Tél : 04.72.44.83.69 <a href="mailto:hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr">hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b><u>MATÉRIAUX DE LYON</u></b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Yann DE ORDENANA Tél : 04.72.18.62.44 yann.de-ordenana@ec-lyon.fr	<b>M. Stéphane BENAYOUN</b> Ecole Centrale de Lyon Laboratoire LTDS 36 avenue Guy de Collongue 69134 Ecully CEDEX Tél : 04.72.18.64.37 <a href="mailto:stephane.benayoun@ec-lyon.fr">stephane.benayoun@ec-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE, GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u></b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Stéphanie CAUVIN Tél : 04.72.43.71.70 Bâtiment Direction INSA Lyon mega@insa-lyon.fr	<b>M. Jocelyn BONJOUR</b> INSA Lyon Laboratoire CETHIL Bâtiment Sadi-Carnot 9, rue de la Physique 69621 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr">jocelyn.bonjour@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b><u>ScSo*</u></b> <a href="https://edsciencessociales.universite-lyon.fr">https://edsciencessociales.universite-lyon.fr</a> Sec. : Mélina FAVETON INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.77.79 melina.faveton@univ-lyon2.fr	<b>M. Christian MONTES</b> Université Lumière Lyon 2 86 Rue Pasteur 69365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:christian.montes@univ-lyon2.fr">christian.montes@univ-lyon2.fr</a>

\*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie



## **PRÉSENTATION DU JURY**

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Antoine Tahan, directeur de thèse  
PhD, Département de Génie Mécanique, Ecole de Technologie Supérieure de Montréal

M. Jérôme Antoni, co-directeur  
PhD, Laboratoire Vibration Acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

M. Thomas Dupont, président du jury  
PhD, Département de Génie Mécanique, Ecole de Technologie Supérieure de Montréal

Mme. Béatrice Faverjon, membre du jury  
PhD, Laboratoire de Mécanique des Contacts et des Structures, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Mme. Emeline Sadoulet-Reboul, membre du jury  
PhD, Département de Mécanique Appliquée de l'Institut FEMTO-ST, Université de Franche-Comté

M. Yves St-Amant, membre du jury  
PhD, Département de Génie Mécanique, Université de Laval

M. Roger Serra, examinateur externe indépendant  
PhD, Département Génie des Systèmes Industriels, Institut National des Sciences Appliquées du Centre Val de Loire

M. Georges Kouroussis, examinateur externe indépendant  
PhD, Département de Mécanique Théorique, Dynamique et Vibrations, Université de Mons

M. Martin Gagnon, membre invité

IV

PhD, Gestion des actifs, Institut de Recherche de Hydro-Québec

Mme. Christine Monette, membre invité

MsC, Département mécanique, Andritz Hydro Canada

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 10 DÉCEMBRE 2021

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à exprimer mes plus sincères remerciements à Antoine Tahan, Professeur à l'École de Technologie Supérieure de Montréal, qui a pris soin d'encadrer et de recentrer mes quatre ans de recherche lorsque mes idées se dispersaient trop, et qui m'a permis de prendre du recul par rapport aux différents enjeux des travaux accomplis. Je le remercie chaleureusement pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigués.

Mes remerciements s'adressent évidemment à Jérôme Antoni, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon. Merci pour ses idées, son soutien, et à la source intarissable de ses connaissances en traitement de signal. C'est à ses côtés que j'ai compris le véritable sens des mots rigueur et précision. C'est grâce à ses conseils que j'ai abordé sereinement le domaine de l'analyse modale opérationnelle et assimilé les préceptes de l'approche bayésienne.

Je tiens également à remercier Martin Gagnon, chercheur à l'Institut de Recherche d'HydroQuébec, pour ses nombreuses idées et son soutien pour l'application d'outils statistiques avancés sur le cas précis des turbines hydrauliques. Je le remercie pour ses nombreux conseils quant à la rédaction de mes articles et à la mise en forme de mes résultats.

Enfin, je tiens à remercier tout autant Christine Monette, Cheffe du département d'analyses mécaniques de Andritz, pour son aide précieuse à la mise en œuvre de calibrations de modèles numériques, permettant la démonstration de l'intérêt de la ressource expérimentale dans la conception des turbines.





# Analyse modale opérationnelle des roues de turbines hydroélectriques par l'étude de régimes transitoires

Quentin DOLLON

## RÉSUMÉ

Depuis plusieurs années, l'intermittence des sources de production solaires et éoliennes a poussé les exploitants à utiliser les turbines comme des moyens de production palliatifs, servant de stabilisateurs du réseau. Les turbines se prêtent particulièrement bien à cette mission car ce sont des installations très agiles, qui ont des capacités de modulation de production rapide et des procédures de démarrage/arrêt simples. Cette nouvelle utilisation des roues hydroélectriques implique un fonctionnement bien souvent hors de leur régime optimal, associé à de nombreuses phases transitoires. En conséquence, la capacité des turbines à jouer le rôle de stabilisateur est à pondérer par une dégradation accélérée des installations.

Cette dégradation par fatigue peut s'accompagner d'une perte de fiabilité des modèles numériques. Pour remédier à la détérioration des performances numériques, une idée repose sur l'exploitation de mesures expérimentales réalisées sur des prototypes opérationnels. Ces mesures contiennent de l'information sur le comportement réel de la machine. Correctement traités, les signaux délivrent une estimation fiable des propriétés mécaniques et du comportement de la roue dans certains régimes particuliers. Ces axes de réflexion ont mené au développement de différents projets de recherche à HydroQuébec, dont les plus notables sont les projets PREDDIT (Prédiction de la Dégradation et Diagnostic Intégré des Turbines) et THAUR (Turbines Hydroélectriques Adaptées à leur Utilisation Réelle).

En collaboration avec Andritz et l'IREQ, les travaux décrits dans ce mémoire s'intègrent dans la continuité de ces projets, et se concentrent sur le développement d'une méthodologie pour l'identification des paramètres structuraux caractérisant le comportement dynamique des roues de turbine lorsqu'elles fonctionnent en régime transitoire. L'objectif pratique est d'estimer la réponse modale de la machine, afin d'accéder aux paramètres modaux réels et à leurs incertitudes. La méthodologie repose sur l'analyse des résonances synchrones générées par les harmoniques de la vitesse de rotation. Ces résonances sont extraites par des algorithmes de suivi d'ordre synchrone, puis caractérisées à l'aide d'outils d'analyse modale opérationnelle. Il s'est avéré que les outils d'identification bayésiens sont bien adaptés au traitement des données.

Un travail de réflexion a également été mené sur l'usage des paramètres expérimentaux, et sur le développement de modèles hybrides plus précis. Les résultats ont servi d'outils de validation pour les modèles numériques, et de moyen de calibration pour préciser les estimations de vitesse critique. La finalité du projet repose sur l'obtention de niveaux de chargement plus précis, afin d'améliorer la prédiction de l'état de fatigue des roues.

**Mots-clés:** Analyse modale opérationnelle, Inférence bayésienne, Résonances synchrones, Turbines hydroélectriques



# Operational modal analysis of hydroelectric turbines using transient experiments

Quentin DOLLON

## ABSTRACT

Since the early 1990's, the use of hydroelectric turbine has significantly changed to meet the power grid requirements. The energy consumption intermittency and the instability of certain sources of energy have prompted users to operate turbines in a way that balances the grid. Indeed, turbines are particularly well suited for such a task, as they can easily modulate their production and are effortless to start or stop. This new use compels hydroelectric turbines to operate across a wide operating range often away from their best efficient point, and to withstand non-stationary loads during transients. Consequently, the hydroelectric turbine ability to play the role of power buffers must be weighed against early damages and failures.

The fatigue damaging process can come with a numerical reliability loss, due to the difficulty of numerical computations to simulate transient and part load regimes. To compensate for the loss of numerical performances, one recent idea is to take benefit from experimental measurements conducted during turbine commissioning or refurbishments. Such data contains information about the real behavior of the device. Properly handled, signal processing should be able to extract runner mechanical characteristic estimates in some specific regimes. At HydroQuébec, this research area has been investigated for years in two wide research projects : Damage Prediction and Integrated Diagnosis of Turbines (PREDDIT), and Hydroelectric Turbines Suited for their Real Use (THAUR).

In collaboration with IREQ and Andritz, the research introduced in this thesis is a continuation of these projects. The scope of the work is to investigate data recorded during transient regimes, particularly harmful for the structure. The main objective is to estimate the structure's modal response, in order to extract modal parameters and related uncertainties. The methodology relies on the characterization of synchronous resonances induced by the harmonics of the rotating speed. Such resonances are extracted using advanced order tracking algorithms, then characterized using operational modal analysis. It appears that Bayesian identification tools are well suited to the processing of our data.

Also, a discussion was made about the use of identification results in industrial contexts, to obtain more accurate hybrid models. Results were used to validate numerical models, and for calibrating finite element routines, in order to predict more accurate critical speeds. The final goal is to make better load level assessments, in order to improve the runner fatigue health predictions.

**Keywords:** Operational modal analysis, Bayesian inference, Synchronous resonance, Hydroelectric turbines



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
0.1 Généralités .....	1
0.1.1 Le domaine hydroélectrique en quelques chiffres .....	1
0.1.2 Modes de défaillance des roues de turbine .....	1
0.1.3 Foyers de vibration des turbines .....	3
0.2 Fatigue des roues de turbine .....	6
0.2.1 Enjeux autour de la fatigue .....	6
0.2.2 Calculs de fatigue .....	7
0.2.3 Calcul de l'historique de chargement .....	8
0.2.4 Techniques expérimentales vs calcul numérique .....	11
0.2.5 Traitement des données expérimentales .....	12
0.3 Motivations .....	14
0.3.1 Utilisation réelle des turbines .....	14
0.3.2 Phénomènes de résonance en transitoire .....	15
0.3.3 Analyse modale numérique des roues de turbines .....	18
0.3.4 Analyse modale des turbines par la voie expérimentale .....	20
0.4 Problématique .....	22
0.4.1 Bilan de l'introduction .....	22
0.4.2 Problématique et frontières de la recherche .....	23
CHAPITRE 1 REVUE DE LITTÉRATURE .....	25
1.1 Modèle physique et dynamique des structures .....	25
1.1.1 Dynamique des structures .....	25
1.1.1.1 Système d'oscillateurs .....	26
1.1.1.2 Observation du système physique .....	27
1.1.2 Espace d'état .....	28
1.1.2.1 Observation de l'espace d'état .....	28
1.1.2.2 découplage du système .....	29
1.1.2.3 Espace d'état discret .....	31
1.1.3 Approches fréquentielles .....	32
1.1.3.1 Fonction de transfert et fonction de réponse fréquentielle .....	33
1.1.3.2 Forme fractionnelle partielle .....	34
1.1.3.3 Forme à dénominateur commun .....	35
1.1.3.4 Forme fractionnelle rationnelle .....	36
1.1.3.5 Formulation discrète ou continue .....	37
1.1.4 Approches temporelles .....	37
1.1.4.1 Fonctions de réponses impulsionnelles .....	38
1.1.4.2 Paramètres de Markov .....	38
1.1.4.3 Modèles autorégressifs .....	39
1.2 Les spécificités de l'analyse modale opérationnelle .....	40

1.2.1	Paramètres modaux .....	40
1.2.2	OMA vs. EMA .....	42
1.2.3	Modèle d'excitation .....	43
1.2.3.1	Bruit blanc continu .....	43
1.2.3.2	Bruit blanc discret .....	44
1.2.3.3	Approches discrètes vs. approches continues .....	45
1.2.3.4	Cas spécifique des sollicitations harmoniques .....	45
1.2.4	Modèles stochastiques des données .....	48
1.2.4.1	Modèles AR(MA) .....	48
1.2.4.2	Espace d'état stochastique, filtres de Kalman .....	48
1.2.5	Modèles stochastiques quadratiques .....	49
1.2.5.1	Définitions .....	49
1.2.5.2	Estimateurs statistiques .....	51
1.2.5.3	Modèles stochastiques de PSD positive et de corrélation positive .....	52
1.2.5.4	Modèle stochastique d'amortissement proportionnel .....	54
1.2.5.5	Espace d'état stochastique .....	55
1.3	Algorithmes d'OMA .....	56
1.3.1	Techniques d'identification .....	56
1.3.1.1	Identification non paramétrique .....	56
1.3.1.2	PEM .....	57
1.3.1.3	Techniques de sous-espaces .....	58
1.3.2	Algorithmes usuels dans le domaine temporel .....	59
1.3.2.1	Algorithme d'Ibrahim .....	59
1.3.2.2	Approches AR(MA) .....	60
1.3.2.3	Sous-Espaces Stochastiques (SSI) et <i>Eigen-Realization</i> (ERA) .....	61
1.3.3	Algorithmes usuels dans le domaine fréquentiel .....	64
1.3.3.1	Approches non-paramétriques .....	64
1.3.3.2	Algorithmes LSCF et p-LSCF .....	65
1.3.3.3	Approche par maximum de vraisemblance .....	66
1.4	Incertitudes en OMA .....	66
1.4.1	Sources d'incertitudes en OMA .....	67
1.4.2	Réduction des incertitudes épistémiques .....	68
1.4.2.1	Détection de modes manquants .....	68
1.4.2.2	Suppression de modes parasites : diagrammes de stabilisation .....	69
1.4.2.3	Suppression de modes parasites : autres méthodes .....	71
1.5	Quantification fréquentiste des incertitudes stochastiques .....	71
1.5.1	Algorithmes de Monte Carlo .....	73
1.5.2	Développements de Taylor .....	74
1.5.2.1	Cas des algorithmes ERA/SSI-COV .....	75
1.5.2.2	Cas des algorithmes AR(MA) .....	76

1.6	Modèles bayésiens .....	76
1.6.1	Théorème de Bayes .....	77
1.6.1.1	Fonction de vraisemblance .....	78
1.6.1.2	Densité marginale des données .....	79
1.6.1.3	Sélection des <i>priors</i> .....	79
1.6.2	Détermination de la <i>posterior</i> .....	80
1.6.2.1	Identifiabilité du problème .....	80
1.6.2.2	Approximation de Laplace .....	81
1.6.2.3	Échantillonnage numérique .....	83
1.6.2.4	Inconsistance des estimateurs .....	85
1.6.3	Méthodes bayésiennes fréquentielles comme extension des estimateurs MLE .....	86
1.6.4	Méthodes bayésiennes fréquentielles .....	87
1.6.4.1	Algorithme <i>BFFTA</i> .....	87
1.6.4.2	Algorithme <i>Fast-BFFTA</i> .....	88
1.6.5	Méthodes bayésiennes spectrales .....	94
1.6.5.1	Algorithme <i>BSDA</i> .....	94
1.6.5.2	Algorithme <i>Fast-BSDA</i> .....	95
1.6.6	Méthode bayésienne hiérarchique .....	99
1.6.6.1	Motivations .....	99
1.6.6.2	Modèle de variabilité .....	99
CHAPITRE 2	MÉTHODOLOGIE .....	105
2.1	Définition des objectifs .....	105
2.1.1	Motivations et contraintes .....	105
2.1.2	Bilan de la littérature .....	107
2.1.3	Limites de la littérature et opportunités .....	108
2.1.4	Objectifs de recherche .....	111
2.2	Structure du mémoire .....	112
2.2.1	Les chapitres .....	112
2.2.2	Liste des contributions .....	112
2.3	Valeur ajoutée .....	116
CHAPITRE 3	TOWARD A BETTER UNDERSTANDING OF SYNCHRONOUS VIBRATIONS IN HYDROELECTRIC TURBINES .....	119
3.1	Abstract .....	119
3.2	Introduction .....	120
3.3	Modal analysis of turbines .....	123
3.3.1	General background .....	123
3.3.2	Bladed turbines .....	124
3.4	Periodic forces actin on bladed disks .....	126
3.4.1	Excitation model .....	127
3.4.2	Forced response .....	128
3.5	Experimental verification .....	131



3.5.1	Turbine characteristics and data acquisition .....	132
3.5.2	Expected phase shift .....	133
3.5.3	Dual-channel phase shift analysis .....	134
3.5.4	Experimental results .....	135
3.6	Observed resonances .....	137
3.6.1	Numerical modal analysis .....	137
3.6.2	Experimental setup .....	138
3.6.3	Observed resonances .....	139
3.7	Discussion and perspectives .....	141
3.8	Conclusion .....	144
CHAPITRE 4	OPERATIONAL MODAL ANALYSIS OF HYDROELECTRIC TURBINES USING AN ORDER-BASED LIKELIHOOD APPROACH .....	147
4.1	Abstract .....	147
4.2	Introduction .....	148
4.3	Modal identification under random vibration .....	149
4.4	Bayesian order-based modal analysis .....	151
4.4.1	Resonance detection .....	152
4.4.2	Angular domain order-tracking .....	153
4.4.3	SDoF Fast-Bayesian inference .....	154
4.5	Numerical testing .....	157
4.5.1	Illustrative computational example .....	157
4.5.2	Robustness against Stochastic Pollution .....	159
4.5.3	Sensitivity to the frequency modulation rate .....	161
4.6	Case study : an experimental analysis of a Francis turbine during coast-down .....	162
4.6.1	Turbine characteristics and experimental setup .....	162
4.6.2	Mode shape identification .....	164
4.6.3	Modal identification using ML-OBMA .....	166
4.6.4	Comparison with numerical simulations .....	168
4.7	Conclusion .....	172
CHAPITRE 5	A FAST COLLAPSED GIBBS SAMPLER FOR FREQUENCY DOMAIN OPERATIONAL MODAL ANALYSIS .....	173
5.1	Abstract .....	173
5.2	introduction .....	174
5.3	Model Description .....	178
5.3.1	Input Data .....	178
5.3.2	Physical Model .....	179
5.3.3	Hierarchical Model .....	180
5.3.3.1	Additive Error Parametrization .....	180
5.3.3.2	Mode Shape Normalization .....	181
5.3.3.3	Modal Covariance Parametrization .....	181
5.3.3.4	Hierarchical Structure .....	182

5.3.4	Data Likelihood .....	182
5.4	Modal Identification .....	184
5.4.1	General Framework .....	184
5.4.2	Collapsed Gibbs Sampler .....	186
5.4.2.1	Modal Coordinates Updating .....	186
5.4.2.2	Mode Shape Updating .....	188
5.4.2.3	Excitation PSD Updating .....	189
5.4.2.4	Error PSD Updating .....	190
5.4.2.5	Heteroscedastic Weights Updating .....	190
5.4.3	Metropolis-Hasting Step .....	192
5.4.3.1	Case of the Imaginary Part $\lambda_i$ .....	193
5.4.3.2	Case of the Real Part $\lambda_r$ .....	194
5.5	Computation .....	196
5.5.1	Computational Strategy .....	196
5.5.2	Choice of Pole Prior .....	197
5.5.3	Chain Convergence .....	197
5.5.4	Sampling from Small Data .....	199
5.6	Experimental Study Case .....	201
5.6.1	Experimental Setup .....	201
5.6.2	Data Pre-Conditioning .....	202
5.6.3	Results .....	204
5.7	Conclusion .....	206
	CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....	209
6.1	Discussion .....	209
6.2	Recommandations .....	211
6.2.1	Organisation des campagnes de mesures .....	211
6.2.2	Exploitation des turbines .....	213
6.3	Livrables .....	214
6.3.1	Algorithmes .....	214
6.3.2	Utilisation des résultats d'identification .....	215
6.4	Perspectives futures .....	216
	BIBLIOGRAPHIE .....	233



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 3.1	Régimes d'opération pour le cas d'étude ..... 132
Tableau 3.2	Différences de phases prédites ..... 134
Tableau 3.3	Analyse modale numérique de la turbine 1 ..... 138
Tableau 3.4	Caractéristiques des résonances observées ..... 140
Tableau 4.1	Caractéristique des RSI ..... 163
Tableau 4.2	Déformées modales identifiées ..... 165
Tableau 4.3	Inférence des paramètres modaux ..... 168
Tableau 4.4	Comparaison des résultats d'identification avec les simulations ..... 171
Tableau 5.1	Liste des variables du modèle hiérarchique ..... 183
Tableau 5.2	Bande passante de l'identification ..... 203
Tableau 5.3	Performances de l'échantillonneur ..... 205
Tableau 5.4	Résultats de l'identification ..... 206



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 0.1	Phénomènes de torche dans l'aspirateur ..... 4
Figure 0.2	Caractéristiques de la torche de cavitation..... 5
Figure 0.3	Composantes synchrones et asynchrones de la torche de cavitation..... 5
Figure 0.4	Simulation des RSI ..... 9
Figure 0.5	Modèles de turbulence ..... 10
Figure 0.6	Simulation de démarrages ..... 11
Figure 0.7	Influence relative des chargements stochastiques sur le spectre de charge ..... 15
Figure 0.8	Influence de l'instabilité du réseau sur la dégradation des roues ..... 15
Figure 0.9	Influence du régime d'opération sur la dégradation des roues ..... 16
Figure 0.10	Spectres rainflows opérationnels pour différents régimes ..... 17
Figure 0.11	Analyse temps-fréquence de signaux de déformation ..... 18
Figure 0.12	Sensibilité des FRF à divers paramètres de la turbine ..... 20
Figure 0.13	Schéma de calcul d'amortissement ..... 21
Figure 1.1	modèle d'éléments finis..... 27
Figure 1.2	Modèle de discrétisation ZOH ..... 31
Figure 1.3	Excitation harmonique en OMA ..... 46
Figure 1.4	Diagramme de stabilisation..... 70
Figure 1.5	Schéma itératif de Monte-Carlo ..... 73
Figure 1.6	Identifiabilité d'un problème d'inférence bayésienne ..... 82
Figure 1.7	Inconsistance des estimateurs ML et MCMC ..... 86
Figure 1.8	Variabilité d'un schéma d'identification ..... 100

Figure 1.9	Modèle hiérarchique de Sedehi et <i>al</i> .....	101
Figure 2.1	Contributeurs à la caractérisation mécanique des turbines.....	106
Figure 2.2	Contributeurs au développement d’algorithmes bayésiens pour l’OMA .....	108
Figure 2.3	Plan de la thèse.....	113
Figure 3.1	Composants d’une turbine Francis .....	120
Figure 3.2	Sources d’excitation dans une turbine Francis. ....	121
Figure 3.3	Décomposition de la matrice modale .....	125
Figure 3.4	Paramétrisation de la roue .....	127
Figure 3.5	Fonction indicatrice de la roue .....	129
Figure 3.6	Positions des capteurs sur les roues .....	133
Figure 3.7	Spectrogrammes d’amplitude et prédictions nodales .....	133
Figure 3.8	Analyse de phase pour les 40 premières harmoniques .....	136
Figure 3.9	Validation du modèle .....	137
Figure 3.10	Modèle FEM pour l’analyse modale .....	138
Figure 3.11	Spectrogrammes des mesures transitoires .....	139
Figure 3.12	Spectrogrammes des mesures de torsion de l’arbre .....	141
Figure 3.13	Spectrogrammes des mesures de flexion de l’arbre .....	141
Figure 3.14	Amplitude relative des RSI et des NTRCI.....	142
Figure 4.1	Suivi d’ordre en présence de bruit .....	152
Figure 4.2	Simulation de réponses harmoniques court-terme .....	158
Figure 4.3	Comparaison du Fast-Bayesian et du p-LSCE pour des données court-terme .....	159
Figure 4.4	Robustesse du Fast-Bayesian à des déviations de PSD du bruit blanc.....	160
Figure 4.5	Sensibilité du Fast-Bayesian aux modulations harmoniques.....	162

Figure 4.6	Dispositifs de mesures expérimentales.....	164
Figure 4.7	Spectres d'analyse des déformées opérationnelles .....	165
Figure 4.8	Résonances non prédites par les RSI.....	166
Figure 4.9	Sélection de la bande passante pour l'identification.....	167
Figure 4.10	Résultats d'identification .....	167
Figure 4.11	Déformées modales identifiées .....	169
Figure 4.12	Maillage d'une aube pour la FEA .....	170
Figure 4.13	Analyse par éléments finis de la turbine .....	171
Figure 5.1	Modèle hiérarchique à variables latentes .....	184
Figure 5.2	Échantillonneur markovien sur un schéma hiérarchique .....	187
Figure 5.3	Données synthétiques pour le test de convergence .....	198
Figure 5.4	Convergence des chaînes de Markov du pôle.....	199
Figure 5.5	Densités a posteriori de l'amortissement, des fréquences et de l'excitation .....	200
Figure 5.6	Convergence des paramètres de modèle .....	200
Figure 5.7	Influence de la taille des données sur l'identification .....	201
Figure 5.8	Schéma de l'installation expérimentale .....	202
Figure 5.9	Spectrogrammes d'amplitude pour les mesures de déplacement .....	203
Figure 5.10	Posterior pour les amortissements et les fréquences naturelles .....	205
Figure 5.11	Posterior pour les excitations .....	207
Figure 5.12	Spectres d'amplitude incertains .....	207
Figure 5.13	Corrélation entre amortissement et excitation .....	208
Figure 6.1	Sensibilité de l'analyse modale par l'échantillonneur .....	212
Figure 6.2	Gain d'un modèle instationnaire de résonance .....	218





## LISTE DES ALGORITHMES

	Page
Algorithme 5.1	Échantillonnage des poids hétéroscédastiques ..... 191
Algorithme 5.2	Algorithme de Metropolis-Hasting pour la partie imaginaire du pôle ..... 194
Algorithme 5.3	Algorithme de Metropolis-Hasting pour la partie réelle du pôle..... 195
Algorithme 5.4	Échantillonneur de Gibbs-Metropolis-Hasting effondré..... 196



## LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

AD	Ré-échantillonnage angulaire - <i>Angular Domain (Resampling)</i>
ARMA	Auto-Régressif à Moyenne Mobile - <i>AutoRegressive with Moving Average</i>
ARX	Auto-Régressif à variable eXogène
BEP	Régime de Rendement Maximal - <i>Best Efficient Point</i>
BFFTA	Algorithme Bayésien par Transformées de Fourier Rapides - <i>Bayesian Fast Fourier Transform Algorithm</i>
BOZ	Bloqueur d'Ordre Zéro - <i>Zero Order Hold</i>
BSDA	Algorithme Bayésien par Densités Spectrales - <i>Bayesian Spectral Density Algorithm</i>
CDA	Convertisseur Digital-Analogique
CFD	Mécanique des Fluides Numérique - <i>Computational Fluid Dynamics</i>
DC	Dénominateur Commun
DFT	Transformée de Fourier Directe - <i>Direct Fourier Transform</i>
DPL	Régime de Charge Partielle Profonde - <i>Deep Part-Load</i>
DDL-DOF	Degré de Liberté - <i>Degree of Freedom</i>
MDDL-MDOF	Multiple Degrés de Liberté - <i>Multiple Degrees of Freedom</i>
1DDL-SDOF	Unique Degrés de Liberté - <i>Single Degrees of Freedom</i>
EMA	Analyse Modale Expérimentale - <i>Experimental Modal Analysis</i>
ERA	Algorithme de "Réalisation Propre" - <i>Eigen-Realization Algorithm</i>
FEA	Analyse par Éléments Finis - <i>Finite Element Analysis</i>
FDD	Décomposition du Domaine Fréquentiel - <i>Frequency Domain Decomposition</i>
FM	Modulation en Fréquence - <i>Frequency Modulation</i>
FFR	Formulation Fractionnelle Rationnelle
FRF	Fonction de Réponse Fréquentielle - <i>Frequency Response Function</i>

FRR	Ratio de Réduction des Fréquences - <i>Frequency Reduction Ratio</i>
FSI	Interactions Fluide Structure - <i>Fluid Structure Interaction</i>
HCF	Cycles de contrainte - <i>High Cycle Fatigue</i>
IRF	Fonction de Réponse Impulsionnelle - <i>Impulse Response Function</i>
LEFM	Mécanique de la Rupture Élastique Linéaire - <i>Linear Elastic Fracture Mechanics</i>
LS	Moindres Carrés - <i>Least-Square</i>
LSCE	Moindres Carrés sur Exponentielles Complexes - <i>Least-Square Complex Exponential</i>
LSCF	Moindres Carrés sur les Fréquences Complexes - <i>Least-Square Complex Frequency</i>
MAC	Critère d'Assurance Modale - <i>Modal Assurance Criterion</i>
MLE	Estimateur au Maximum de Vraisemblance - <i>Maximum Likelihood Estimator</i>
MPV	Valeur la Plus Probable - <i>Most Probable Value</i>
ND	Diamètre nodal - <i>Nodal Diameter</i>
NEXT	Technique d'Excitation Naturelle - <i>Natural Excitation Technique</i>
NL	Régime de Charge à Vide - <i>No-Load</i>
NLLF	Fonction de Log-Vraisemblance Négative - <i>Negative Log-Likelihood Function</i>
NTRCI	Interactions Turbine-Distributeur non Triviales - <i>Non Trivial Runner Casing Interactions</i>
OBMA	Analyse Modale Basée sur les Ordres - <i>Order-Based Modal Analysis</i>
OMA	Analyse Modale Opérationnelle - <i>Operational Modal Analysis</i>
OT	Suivi d'Ordres Synchrones - <i>Order Tracking</i>
PEM	Modèle d'Erreur de Prédiction - <i>Prediction Error Model</i>
PL	Régime de Charge Partielle - <i>Part-Load</i>

PSA	Analyse des Différences de Phase - <i>Phase Shift Analysis</i>
PSD	Densité Spectrale de Puissance - <i>Power Spectral Density</i>
RDT	Technique du Décrément Aléatoire - <i>Random Decrement Technique</i>
RSI	Interactions Rotor-Stator - <i>Rotor-Stator Interactions</i>
SNR	Ratio Signal-Bruit - <i>Signal-to-Noise Ratio</i>
SSI	Identification de Sous-Espaces Stochastiques - <i>Stochastic-Subspace identification</i>
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières - <i>Singular Value Decomposition</i>



## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$A^*$	Conjuguée de la matrice $A$
$A^H$	Adjointe de la matrice $A$
$A^{-1}$	Inverse de la matrice $A$
$A^\dagger$	Pseudo-inverse de la matrice $A$
$\text{diag}(\mathbf{a})$	Matrice diagonale d'entrées $\mathbf{a}$
$\text{tr}(A)$	Trace de la matrice $A$
$\hat{A}$	Estimateur de la matrice $A$
$E\{\}$	Espérance
$\mathbb{R}$	Corps réel
$\mathbb{C}$	Corps complexe
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$j$	Unité complexe
$\nabla$	Gradient
$\nabla^2$	Hessienne
$\mathcal{F}$	Transformée de Fourier
$I$	Fonction indicatrice
<b>Symboles récurrents</b>	
$M$	Nombre de degrés de libertés d'un modèle éléments finis
$N_i$	Nombre de degrés de libertés d'entrée
$N_o$	Nombre de degrés de libertés observés
$\mathbf{y}$	Vecteur des déplacements généralisés
$\mathbf{x}$	Variable d'état continue



$M$	Matrice de masse
$C$	Matrice d'amortissement
$G$	Matrice gyroscopique
$K$	Matrice de rigidité
$Z_G$	Nombre de vanes directrices du distributeur de la turbine
$Z_R$	Nombre d'aubes de la roue de la turbine
$\Lambda$	Matrice diagonale des valeurs propres de l'espace d'état continu
$\lambda_m$	m-ième valeur propre de l'espace d'état continu
$X$	Matrice modale de l'espace d'état continu
$\chi_m$	m-ième mode propre de l'espace d'état continu
$\nu$	Diamètre nodal
$\Phi$	Matrice des déformées modales partielles continues
$\varphi_m$	m-ième déformée modale partielle du système continu
$\Psi$	Matrice des déformées modales
$\psi_m$	m-ième déformée modale du système continu
$\alpha^2$	PSD de l'excitation
$\sigma^2$	PSD de l'erreur
$\omega_0$	Fréquence naturelle
$\omega_k$	Fréquence discrète
$\xi$	Amortissement
$\delta$	Distribution de Dirac
$\Omega$	Vitesse de rotation du groupe de turbine

### Chapitre 1

$\mathcal{A}$	Matrice d'état continu
$\mathcal{A}_d$	Matrice d'états discrets

$A_m$	m-ième matrice résiduelle modale du système
$B$	Matrice d'influence pour l'expression des forces
$\mathcal{B}$	Matrice des entrées continues de l'espace d'état
$\mathcal{B}_d$	Matrice des entrées discrètes de l'espace d'état
$C_a$	Matrice de sélection pour l'observation de l'accélération
$C_v$	Matrice de sélection pour l'observation de la vitesse
$C_d$	Matrice de sélection pour l'observation des déplacements
$C$	Matrice de sortie de l'espace d'état
$C_{xy}$	Matrice de Covariance de signaux $x$ et $y$
$\mathcal{D}$	Matrice de transition de l'espace d'état
$D_k$	Coefficient d'amplification dynamique dans les algorithmes BFFTA, BSDA
$e_k, \varepsilon_k$	Vecteurs d'erreur de modèle
$f$	Vecteur des forces généralisées
$H$	Fonction de transfert ou matrice des FRF
$h$	Matrice des IRF
$h_m(\omega)$	m-ième FRF
$h_m(t)$	m-ième IRF
$\mathcal{L}(\theta \mathcal{D})$	Fonction de vraisemblance des paramètres $\theta$
$L(\theta \mathcal{D})$	Fonction de log-vraisemblance négative des paramètres $\theta$
$L$	Matrice des participations modales continue
$L_d$	Matrice des participations modales discrète
$l_m$	m-ième participation modale du système continu
$P(\omega)$	Matrice de support fréquentiel de la fonction de transfert
$P_n$	Coefficients matriciels du numérateur de la formulation FFR des FRF
$P'_n$	Coefficients matriciels autorégressifs de la formulation ARX des IRF

$p(\theta)$	Probabilité de la réalisation $\theta$
$p(\theta D)$	Densité de probabilité de la réalisation $\theta$ sachant la donnée $D$
$q$	Vecteur des coordonnées modales
$Q_m$	Coefficient de normalisation des modes
$q_n$	Coefficients scalaires du dénominateur de la formulation DC des FRF
$Q_n$	Coefficients matriciels du dénominateur de la formulation FFR des FRF
$Q'_n$	Coefficients matriciels exogènes de la formulation ARX des IRF
$R_n$	Coefficients matriciels du numérateur de la formulation DC des FRF
$R_{xy}(\tau)$	Fonction de corrélation entre les signaux $x$ et $y$
$S_{xy}(\omega)$	Densité spectrale de puissance de signaux $x$ et $y$
$S$	PSD de l'excitation modale dans les algorithmes BFFTA et BSDA
$u$	Vecteur du foyer des forces d'excitations continu
$U(\omega)$	Transformée de Fourier des sollicitations
$w$	Vecteur de bruit blanc
$X_d$	Matrice modale de l'espace d'état discret
$y^{obs}$	Vecteur des déplacements observés
$Y^{obs}(\omega)$	Transformée de Fourier des déplacements observés
$Z(\omega)$	Vecteur augmenté de $Y^{obs}(\omega)$
$\Delta t$	Pas de discrétisation temporel
$\theta$	Vecteur de paramètres
$\Lambda_d$	Matrice diagonale des valeurs propres de l'espace d'état discret
$\xi_m$	m-ième ratio d'amortissement
$\pi(\theta D)$	Densité de probabilité posterior de $\theta$
$\sigma$	Variance homoscedastique de l'erreur d'un modèle
$\Phi_d$	Matrice des déformées modales partielles discrètes

$\phi_{dm}$	m-ième déformée modale partielle du système discret
$\Psi_m$	Matrice des déformées modales non conjuguées
$\omega_m$	m-ième fréquence naturelle

### Chapitre 3

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$	Matrice de Duncan de l'espace d'état
$c_{p,\nu}$	Coefficients de Fourier de la fonction spatiale $F(\theta)$ sur le diamètre nodal $\nu$
$f$	Vecteur des forces d'excitation
$F(\theta)$	Déformations spatiale de l'excitation
$J$	Nombre de degrés de liberté sur une aube
$q$	Vecteur des coordonnées modales
$q_\nu$	Vecteur des coordonnées modales sur le diamètre nodal $\nu$
$f$	Fonction racine du comportement nodal angulaire
$\alpha$	Angle inter-aube
$\gamma_\nu^{+/-}$	Vecteur des déphasages généralisés pour le diamètre nodal $\nu$
$\theta$	Angle du groupe
$\kappa(\theta)$	Aube excitée à l'angle $\theta$
$\phi_\nu$	Phase inter-aube du diamètre nodal $\nu$
$\psi_m^r$	m-ième déformée modale du système sur l'aube $r$
$\phi_\nu$	Vecteur d'excitation généralisée pour le diamètre nodal $\nu$
$\Delta phi_\nu$	Différence de phase engendrée par le diamètre nodal $\nu$
$\Psi_\nu$	Matrice des déformées modales de diamètre nodal $\nu$
$\Psi_\nu^+$	Matrice des déformées modales $\nu$ de phase $\phi_\nu$
$\Psi_\nu^-$	Matrice des déformées modales $\nu$ de phase $-\phi_\nu$
$\Psi_\nu^f$	Matrice des déformées modales $\nu$ à mouvement synchrone ( <i>forward</i> )
$\Psi_\nu^b$	Matrice des déformées modales $\nu$ à mouvement anti ( <i>backward</i> )

$\mathbf{\Omega}_v^f$  Matrice des fréquences modales associée à  $\mathbf{\Psi}_v^f$

$\mathbf{\Omega}_v^b$  Matrice des fréquences modales associée à  $\mathbf{\Psi}_v^b$

#### Chapitre 4

$C_k$  Covariance du modèle de résonance à la fréquence  $\omega_k$

$H_k$  Fonction de transfert du système UDDL à la fréquence  $\omega_k$

$S_{yyk}$  Densité spectrale de puissance de l'observation à la fréquence  $\omega_k$

$S_{xxk}$  Densité spectrale de puissance du modèle à la fréquence  $\omega_k$

$S_{\epsilon\epsilon}$  Densité spectrale de puissance de l'erreur

$v_c$  Fonction de cartographie des paramètres contraints sur une topologie libre

$\tau_{\max}$  Modulation de fréquence maximale pour une excitation (ISO-7626)

#### Chapitre 5

$A$  Matrice de concentration du kernel d'échantillonnage de  $\psi$

$a_{0r}$  Paramètre d'échelle du prior de la partie réelle quadratique du pôle

$a^\alpha$  Paramètre d'échelle du prior de la variance de l'excitation

$a^{\alpha'}$  Paramètre d'échelle du kernel de la variance de l'excitation

$a^\sigma$  Paramètre d'échelle du prior de la variance dimensionnelle de l'erreur

$a^{\sigma'}$  Paramètre d'échelle du kernel de la variance dimensionnelle de l'erreur

$a^\delta$  Paramètre d'échelle du prior de la variance hétéroscédastique de l'erreur

$a_1^{\delta'}$  Paramètre d'échelle du kernel de la variance hétéroscédastique de l'erreur

$a_r$  Paramètre d'échelle de la loi candidate de  $\lambda_r^2$

$b_{0r}$  Paramètre de forme du prior de la partie réelle quadratique du pôle

$b^\alpha$  Paramètre de forme du prior de la variance de l'excitation

$b_s^{\alpha'}$  Paramètre de forme du kernel de la variance de l'excitation

$b^\sigma$  Paramètre de forme du prior de la variance dimensionnelle de l'erreur

$b_s^{\sigma'}$  Paramètre de forme du kernel de la variance dimensionnelle de l'erreur

$b_l^{\delta'}$	Paramètre de forme du kernel de la variance hétéroscédastique de l'erreur
$b_r$	Paramètre de forme de la loi candidate de $\lambda_r^2$
$\mathbf{C}_{ks}$	Matrice de covariance du modèle pour $\mathbf{Y}_{ks}$
$\mathbf{D}_s$	Matrice de covariance de l'erreur $\mathbf{n}_{ks}$
$\mathbf{G}_{ks}$	Filtre passe-bande modal associé au problème d'inférence bayésienne
$\mathbf{n}_{ks}$	Erreur de modèle pour le jeu de données $\mathbf{Y}_{ks}$
$p_{ks}$	Coordonnée modale fréquentielle associée à $\mathbf{Y}_{ks}$
$p(\theta \text{rest})$	Probabilité du paramètre $\theta$ conditionnel au reste du problème
$q(\theta)$	Kernel d'échantillonnage du paramètre $\theta$
$\mathbf{Y}_{ks}$	Coefficients de Fourier de la donnée $\mathbf{y}_{ks}$ pour le jeu de données $s$ à la fréquence $\omega_k$
$\alpha_s^2$	Variance de l'excitation modale
$\gamma_{ks}^2$	Variance des coordonnées modales pour la donnée $\mathbf{Y}_{ks}$
$\Delta_s$	Matrice de covariance adimensionnelle associée à $\mathbf{D}_s$
$\delta_{sl}^2$	Poids hétéroscédastiques pour le jeu de données $s$ au DDL $l$
$\eta_{ks}^2$	Variance du kernel d'échantillonnage de $p_{ks}$
$\boldsymbol{\theta}$	Vecteur des paramètres modaux
$\lambda_{0i}$	Moyenne du prior de la partie complexe du pôle
$\mu_{ks}$	Moyenne du kernel d'échantillonnage de $p_{ks}$
$\mu_i$	Moyenne de la loi candidate d'échantillonnage de $\lambda_i$
$\sigma_{0i}^2$	Variance du prior de la partie complexe du pôle
$\sigma_{s0}^2$	Variance dimensionnelle associée à $\mathbf{D}_s$
$\sigma_i$	Variance de la loi candidate d'échantillonnage de $\lambda_i$
$\boldsymbol{\varphi}$	Déformée modale du problème
$\boldsymbol{\psi}$	Déformée modale pondérée par la variance hétéroscédastique du problème

$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Loi normale de moyenne $\mu$ et de variance $\sigma^2$
$\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$	Loi normale multivariée de moyenne $\mu$ et de covariance $\Sigma$
$\mathcal{NC}(\mu, \sigma^2)$	Loi normale complexe de moyenne $\mu$ et de covariance $\Sigma$
$\mathcal{G}(a, b)$	Loi gamma de paramètre d'échelle $a$ et de forme $b$
$\mathcal{IG}(a, b)$	Loi inverse gamma de paramètre d'échelle $a$ et de forme $b$
$\mathcal{B}(A)$	Loi de Bingham de matrice de concentration $A$

# INTRODUCTION

## 0.1 Généralités

### 0.1.1 Le domaine hydroélectrique en quelques chiffres

La ressource hydraulique participe à près de 16% de la production électrique mondiale (5<sup>e</sup> ressource en puissance fournie, HydroPower Status Report 2020). Avec une part de marché du renouvelable proche de 70%, c'est à l'heure actuelle le plus gros moyen de production non-fossile. Au Québec, l'hydroélectrique assurait une production de 37 243 MW en 2019, couvrant près de 97% des besoins énergétiques sans compter l'exportation d'une partie de la production. La production repose essentiellement sur l'exploitation de centrales au fil de l'eau ou de barrages hydroélectriques. Les groupes de turbine-alternateur, dont la roue entraîne un alternateur synchrone, assurent la conversion énergétique. Il existe différents types de roues, dépendamment de la configuration hydraulique : hauteur de chute et débit disponible (Sangal, Garg & Kumar (2012)). Le choix de turbine dépend des caractéristiques débit-hauteur de chute. Par exemple, les roues Pelton sont connues pour être efficaces à bas débit et haute chute. Au contraire, les roues Kaplan sont efficaces à fort débit, mais basse chute. Les turbines Francis jouissent d'un domaine d'opération polyvalent, et leur très haute efficacité en régime optimal (supérieure à 96%) est un atout majeur pour nombre d'exploitants. Aujourd'hui, ces turbines représentent près de 60% du parc hydroélectrique mondial, et les groupes turbines hydrauliques synchrones jouent un rôle important dans l'industrie de l'énergie et dans l'économie de nombreux pays.

### 0.1.2 Modes de défaillance des roues de turbine

En conditions opérationnelles, de nombreux mécanismes de dégradation sont susceptibles d'endommager les turbines, et ultimement, de provoquer des défaillances. Les modes de défaillance



les plus courants sont la cavitation, la fissuration, la corrosion et l'abrasion (Dorji & Ghomashchi (2014)).

Les phénomènes d'**abrasion** sont principalement dus au drainage des terres par les eaux. L'ingestion de corps plus massifs peut également dégrader la machine, mais ces évènements sont rares et minimisés par la mise en place de grilles au niveau des bouches d'entrées. Ces grilles ne peuvent toutefois pas prévenir l'impact de petits corps qui participent à la dégradation de la roue par martèlement. L'abrasion et le martèlement peuvent être mitigés par l'ajout d'un revêtement spécialisé (*coating*). La **cavitation** est un processus de transition de phase de l'écoulement générant un nuage de vapeur dans les régions basse pression. Le nuage de vapeur peut éroder les surfaces, puis est transporté dans l'écoulement et se condense dès que la pression remonte. La condensation génère de fortes ondes de pression qui sollicitent les surfaces adjacentes. La mitigation de la cavitation repose sur la conception hydraulique de la géométrie. Enfin, la **corrosion** est une voie de dégradation à laquelle s'expose toute structure immergée ; la limitation de la corrosion passe par la mise en place de revêtements inoxydables ou un choix de matériau approprié. L'ensemble des phénomènes mentionnés participent activement à l'érosion de la surface des roues de turbine.

Les problématiques de **fissuration** des roues de turbines sont une conséquence directe de la fatigue (Liu, Luo & Wang (2016)). Ce mécanisme se traduit par la fissuration graduelle de la structure sous l'effet des vibrations. Contrairement aux autres mécanismes d'endommagement, la fissuration ne concerne pas uniquement la surface de la turbine, mais peut se propager au cœur de la structure. Les fissures s'amorcent généralement à partir des micros défauts présents dans la structure et se propagent par la sollicitation dynamique. Cette propagation est exponentielle, et expose la structure à des défaillances majeures. La fatigue est provoquée par l'ensemble des chargements de la roue. La quantification de ce mécanisme de défaillance demande une

connaissance précise des sources de vibration dans les turbines, à l'origine des contraintes dynamiques.

### 0.1.3 Foyers de vibration des turbines

Dans les turbines, les sources d'excitation peuvent être d'origine hydrauliques, mécaniques, électriques ou issues d'interactions de nature hydromécanique. Il existe communément trois sources de vibration principales, dont l'importance relative dépend du régime considéré. En charge partielle profonde (*Deep Part Load*, DPL) ou en marche à vide (*No Load*, NL), les turbulences stochastiques et les vortex hydrauliques épars sont les principaux vecteurs de sollicitation. En charge partielle (*Part Load*, PL), ces turbulences s'atténuent et des structures plus régulières apparaissent dans l'écoulement ; la torche de cavitation dans l'aspirateur est alors le foyer le plus actif. Enfin, au meilleur point de rendement (*Best Efficient Point*, BEP), les phénomènes hydrauliques sont maîtrisés et seules les Interactions Rotor-Stator (RSI) et les tourbillons de Von-Kàrmàn sont des foyers d'excitation à contrôler.

Les **RSI** sont générées par des forces synchronisées sur les harmoniques de la vitesse de rotation, et constituent la majorité de la réponse harmonique de la machine. Ces pulsations modulées sont issues de l'interaction entre les aubes de la roue et les vannes directrices de la turbine. Les fréquences et les déformées de ces interactions mécaniques sont parfaitement prédictibles dans le cadre de la théorie des RSI, dont un bon aperçu est proposé par Tanaka (2011). Nicolet, Ruchonnet, Alligne, Koutnik & Avellan (2010) ont mis en évidence la possibilité d'interférence des RSI dans la bêche spirale, générant des excitations stationnaires.

En fonction du régime d'opération de la turbine, l'aspirateur est le siège de différents **phénomènes de torche** (Seidel, Mende, Hebner, Weber & Otto (2014)). Ces tourbillons sont critiques en charge partielle et en surcharge (Duparchy, Brammer, Thibaud, Favrel, Lowys & Avellan (2017)). Au BEP (typiquement à charge > 80%), l'écoulement entrant coïncide avec l'angle des aubes

de la roue, et l'écoulement ressort quasi-potentiel (voir Figure 0.1.b). En dehors du BEP, le déséquilibre angulaire de l'écoulement avec les aubes génère un fort champ de cisaillement tangentiel, à l'origine de l'apparition de tourbillons dans l'aspirateur, voir Figure 0.1.c-e. La fréquence et l'intensité des fluctuations augmentent quand la charge diminue, tel qu'illustrées en Figure 0.2 (Favrel, Muller, Landry, Yamamoto & Avellan (2015)). En situation de surcharge  $> 100\%$  (*Over-Load*, OL), une nouvelle torche de cavitation ellipsoïdale peut apparaître (voir Figure 0.1.a). La dynamique de ce tourbillon peut se muer en phénomène auto-excité potentiellement dangereux pour la roue, étudié par Flemming, Foust, Koutnik & Fisher (2009).

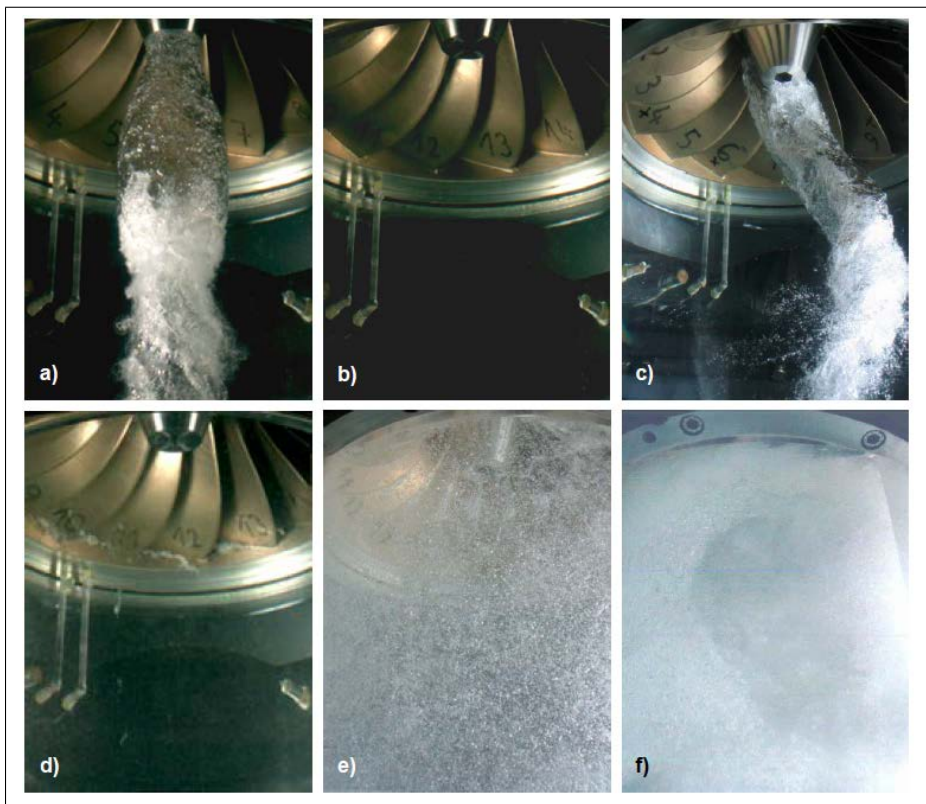


Figure 0.1 Phénomènes de torche dans l'aspirateur. a) Torche de surcharge en forme ellipsoïdale. b) Absence de torche au BEP. c) Torche cohérente à charge partielle. d) Torche "statistique" à faible charge. e) Pulsations fortes en SNL. f) Rejet de charge. (tiré de Seidel *et al.* (2014))

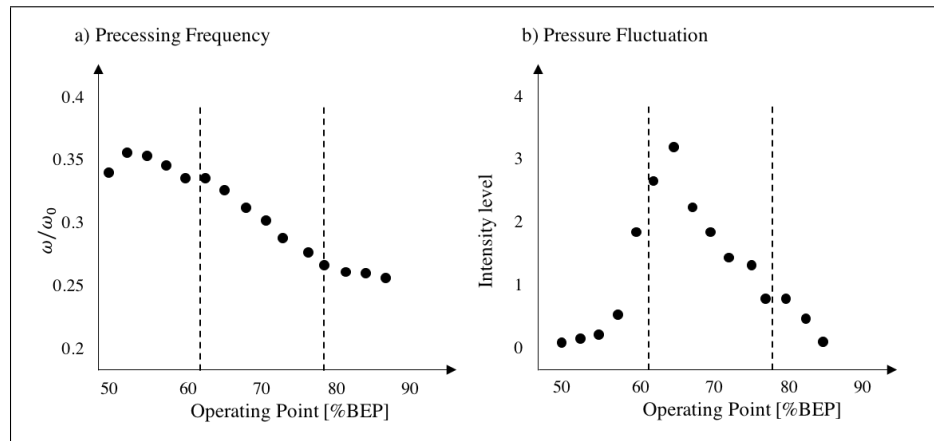


Figure 0.2 Évolution de a) la fréquence et de b) l'intensité des fluctuations de pression cohérentes de la torche en fonction du chargement. (Basé sur les données de Favrel *et al.* (2015))

Les pulsations de pression générées par la torche sont la superposition de deux contributions distinctes (voir Figure 0.3). Une composante asynchrone est générée par le mouvement de précession de la torche. C'est une onde convective locale qui ne se propage pas. Une composante synchrone est induite par l'inflexion du coude au niveau du diffuseur. Elle est uniforme et pulsante dans l'axe de l'aspirateur, ce qui en fait un foyer d'excitation significatif pour la roue. Des phénomènes de résonance hydroacoustique ont déjà été observés par Favrel, Landry, Muller & Avellan (2012); Favrel, Landry, Muller, Yamamoto & Avellan (2014). Valentin, Presas, Egusquiza, Valero, Egusquiza Montagut & Bossio (2017b) ont montré que ces vibrations peuvent se traduire par une fluctuation du couple et donc de la puissance. De telles manifestations sont dites oscillations de Rheingans.

En DPL et NL, les **sollicitations stochastiques** sont majoritaires et issues de nombreux processus aléatoires. Ces processus sont d'autant plus intenses que la charge de l'alternateur est faible. Les principales sources d'excitation stochastique sont i) les phénomènes de convection hydraulique (cascades de Kolmogorov, etc.) et de turbulence, ii) le cisaillement et les instabilités de couche limite, iii) les zones de cavitation et iv) les tourbillons interaube (Liu, Liu & Zhao (2017)).

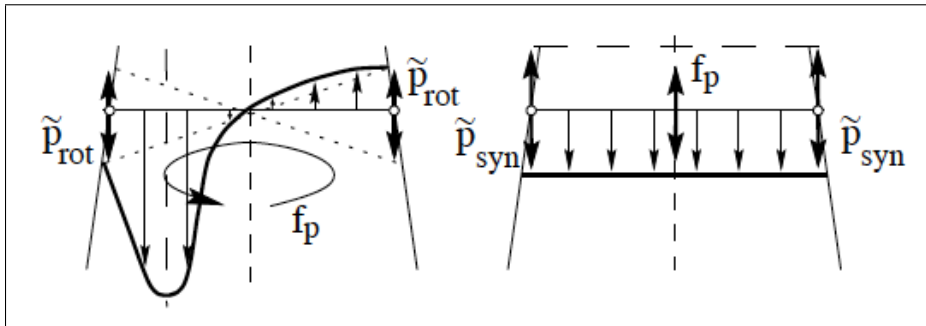


Figure 0.3 À gauche, pulsation asynchrone induite par la précession du tourbillon. À droite, pulsation synchrone générée par l'interaction de l'écoulement avec le coude. (tiré de Blommaert (2000))

L'ensemble de ces phénomènes aléatoires est difficilement modélisable, mais une caractérisation statistique est néanmoins possible, par exemple, via des modèles de bruit blanc à large bande.

Enfin, les **phénomènes de résonances** peuvent se manifester pendant les régimes NL ou transitoires, et sont particulièrement sollicitants pour la structure. Les résonances nécessitent une coïncidence des fréquences de sollicitation et des modes propres, mais également une concordance des déformées spatiales. Les résonances sont critiques dans les régimes à faible charge où les bruits stochastiques sont très susceptibles d'engendrer une excitation simultanée de tous les modes structuraux. Pire encore, les régimes de marche à vide asynchrones sont source d'harmoniques intenses et variables, ce qui augmente la probabilité d'apparition de fortes résonances synchrones.

## 0.2 Fatigue des roues de turbine

### 0.2.1 Enjeux autour de la fatigue

Contrairement à la cavitation, détectable graduellement et *in situ*, la fatigue n'est pas détectable avec les outils de diagnostic usuels ou de surveillance (Dorfler, Sick & Coutu (2013)). L'unique

moyen de contrôler l'état de fatigue d'une roue est d'arrêter le groupe et d'effectuer une inspection. Même lors d'inspection, il est possible de vérifier si des fissures ont déjà propagé, mais il est difficile d'évaluer la progression des fissures en phase d'initiation et de savoir si l'apparition d'une fissure est éminente ou pas. Il est important de souligner que dans le cas des groupes hydrauliques, les arrêts doivent impérativement être planifiés d'avance et se traduisent par des arrêts de l'ordre du jour. Or, chaque manque de disponibilité opérationnelle se traduit par un lourd impact financier. L'importance du développement de modèles prédictifs fiables pour la fatigue s'impose donc naturellement.

Côté **exploitant**, la gestion des actifs et la prédiction de la fatigue sont essentielles pour contrôler et prédire les différentes suspensions de production à des fins de maintenance. Cette anticipation permet de répartir et de planifier les arrêts de production de manière prédictive (à la différence des approches préventives et réactives) afin de minimiser les coûts d'immobilisation et les durées de réparation. En parallèle, les **concepteurs** travaillent à améliorer les systèmes existants afin d'optimiser le compromis ténacité-performance. L'accroissement des capacités numériques et la naissance de nouvelles pratiques de dimensionnement sont autant de leviers de performances permettant une simulation plus fine et plus représentative de la réalité, permettant des conceptions plus adaptées et plus fiables.

Tant du point de vue du concepteur que de celui de l'exploitant, la prédiction de la fatigue et la modélisation des phénomènes multiphysiques à l'origine des vibrations sont toujours des problématiques recherche actuelles, et présentent de nombreux défis scientifiques multidisciplinaires. À terme, la connaissance exhaustive des mécanismes de sollicitation et des dégradations engendrées permettra un dimensionnement et une utilisation optimale des installations.

### 0.2.2 Calculs de fatigue

Il existe différents modèles de quantification des dommages. Les approches usuelles de calcul de fatigue reposent sur les analyses S-N cumulées et les modèles de la mécanique de la rupture élastique linéaire. Les **analyses S-N cumulées** sont couramment utilisée dans l'industrie à des fins de dimensionnement des structures (Zhang, Feng, Fan & Jiang (2012)), mais également pour la prédiction des dommages en PL (Liang, Lais, Gentner & Braun (2012); Huang, Chamberland-Lauzon, Oram, Klopfer & Ruchonnet (2014a)) ou pour l'analyse de dommage en conditions de résonance prolongée (Flores (2012); Luna, Campos, Dorantes, Mazur & Munoz (2015)). Les analyses S-N sont de bons outils de dimensionnement, mais elles ne permettent pas d'évaluer l'intégrité d'une structure d'un point de vue opérationnel. Les **modèles de tolérance au dommage** ont pour objectif de fournir une aide à la décision lors de l'inspection de la structure, en établissant le niveau d'endommagement des turbines à partir de la théorie de la mécanique de la rupture élastique linéaire (LEFM). La LEFM a été mise en œuvre pour étudier l'influence de schémas de démarrage sur des turbines Francis (Gagnon, Tahan, Bocher & Thibault (2010)) ou pour des études de fatigue sur turbines Kaplan (Liu, Luo & Wang (2014)). Les récents travaux de Liu, Presas, Luo & Wang (2018a) proposent une prise en compte statistique de la distribution de micro-défauts. Une description complètement statistique a également été développée par Gagnon, Tahan, Bocher & Thibault (2012a), basée sur l'exploitation des **diagrammes de Kitagawa** (Kitagawa (1976); Haddad, Topper & Smith (1979)). L'analyse de Kitagawa permet d'établir la fiabilité résiduelle du système, et a été mise en pratique sur des prototypes de turbines Francis, en assimilant la limite de défaillance à l'émergence des cycles HCF (*High Cycle Fatigue*) (Gagnon *et al.* (2012a); Gagnon, Tahan, Bocher & Thibault (2013, 2014)).

Les outils de calcul de fatigue sont de plus en plus pointus et reposent sur des modèles fiables et robustes. En revanche, la qualité des prédictions reste tributaire des données d'entrée des algorithmes. Ces données correspondent la majorité du temps à l'état initial de la structure et à

l'historique de chargement du système. Ainsi, la détermination précise et fiable du chargement imposé aux turbines en opération est une clé de voute de la fiabilité des calculs de fatigue.

### 0.2.3 Calcul de l'historique de chargement

Les historiques de chargement sont principalement obtenus par des simulations numériques. Ces simulations reposent sur deux étapes de calcul : le calcul des champs de pression fluide à l'aide de la CFD (*Computational Fluid Dynamics*), puis le calcul des champs de déformations induits à l'aide de la FEA (*Finite Element Analysis*). Les effets d'interaction entre le champ de pression fluide et le champ de déformation structural sont pris en compte par les interactions fluides-structures (*Fluid-Structure Interaction*, FSI) (Benra, Dohmen, Pei, Schuster & Wan (2011); Trivedi & Cervantes (2017)).

La simulation des **régimes BEP** est au cœur de l'analyse des turbines, et fait appel à la simulation des RSI. En général, l'analyse harmonique des simulations CFD permet d'accéder simplement et précisément au niveau de chargement généré par les RSI. L'approche stationnaire se limite à la simulation statique des contraintes, et montre de très bons résultats sur toutes les plages d'opérations, voir Figure 0.4 (Huang, Oram & Sick (2014b)). L'approche instationnaires dans des conditions non-résonantes permet la prédiction des fluctuations dynamiques des RSI (Nennemann, Vu & Farhat (2005); Anup, Thapa & Lee (2014)).

La simulation des régimes de **charge partielle PL** se concentre majoritairement sur l'analyse des instabilités dans l'aspirateur, en particulier, la simulation de la torche de cavitation (Wei & Choi (2013); Yu, Zhou & Chen (2019)). Dans ce cadre, les approches numériques doivent intégrer les différents aspects de cisaillement (Anup, Lee & Thapa (2016)), de cavitation (Kumar & Saini (2010); Jost & Lipej (2011)), de convection (Alligne, Nicolet, Tsujimoto & Avellan (2014)) et de vorticité de l'écoulement (Pochyly, Fialova & Stefan (2019)). Les modèles de turbulence SAS



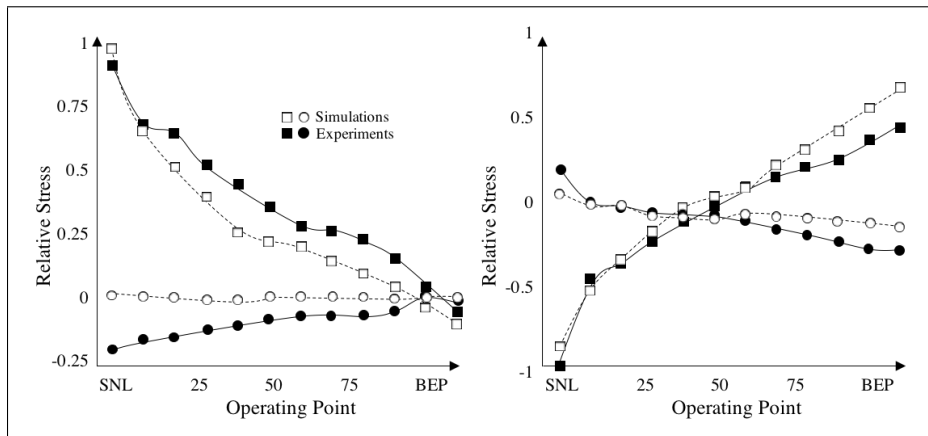


Figure 0.4 Comparaison de simulations et de mesures expérimentales de la composante statique des RSI. (Basé sur les données de Huang *et al.* (2014b))

dans des CFD instationnaires permettent d'obtenir de bonnes estimations de pressions sur les régimes PL (Krappel, Ruprecht, Riedelbauch, Jester-Zuerker & Jung (2014)).

La simulation des **régimes de faible charge** est beaucoup plus problématique, car de tels régimes induisent des écoulements fortement stochastiques, dont l'énergie se fractionne dans des cascades auto-similaires de Kolmogorov. De récentes investigations ont montré l'intérêt de l'utilisation de modèles de turbulence SAS pour obtenir des champs de pression dynamiques : de tels modèles offrent un contenu turbulent plus riche que les approches usuelles, voir Figure 0.5 (Nennemann, Morissette, Chamberland-Lauzon, Monette, Braun, Melot, Coutu, Nicolle & Giroux (2014)). Les modèles SAS ont été mis en œuvre pour la simulation de régimes NL (Nennemann *et al.* (2014); Morissette, Chamberland-Lauzon, Nennemann, Monette, Giroux, Coutu & Nicolle (2016)). À l'heure actuelle, le principal problème lié aux simulations stochastiques est la très lourde charge de calcul requise, qui rend ces approches incompatibles avec une portée industrielle.

La prédiction des **régimes transitoires** rajoute un défi supplémentaire. À la forte stochasticité de l'écoulement s'ajoutent de nombreuses résonances et une configuration complexe du maillage, qui doit pouvoir se déformer avec le profil d'ouverture des directrices sans générer de trop fortes

distorsions. Des méthodes ont été développées pour la simulation d'arrêts (Tomaz, Joze & Anton (2006)), de rejets de charge (Mossinger & Jung (2016)) ou de modulation de charge (Jakobsen & Holst (2017)). L'étude des démarrages est proposée par Nicolle, Morissette & Giroux (2012); Nicolle, Giroux & Morissette (2014). La Figure 0.6 présente une comparaison expérimentale et numérique de la déformation d'une aube de turbine Francis durant un démarrage réalisée par Nicolle *et al.* (2014). Plus récemment, les études de Morissette & Nicolle (2019) et Unterluggauer, Sulzgruber, Doujak & Bauer (2020) ont mis en évidence une insuffisance des modèles CFD pour capturer la stochasticité des régimes de démarrage.

Le traitement des résonances est très complexe, car les fluctuations dynamiques sont très sensibles à l'amortissement hydrodynamique (Huang *et al.* (2014b)). Les simulations perdent alors en précision de par la difficulté d'obtenir de bonnes propriétés modales (Soltani Dehkharghani, Aidanpaa, Engstrom & Cervantes (2018)). La prédiction nécessite de calibrations expérimentales ou de lourds calculs d'amortissements hydrodynamiques, voir Ostby, Billdal, Haugen & Dahlaug (2016) ou Nennemann, Monette & Chamberland-Lauzon (2016).

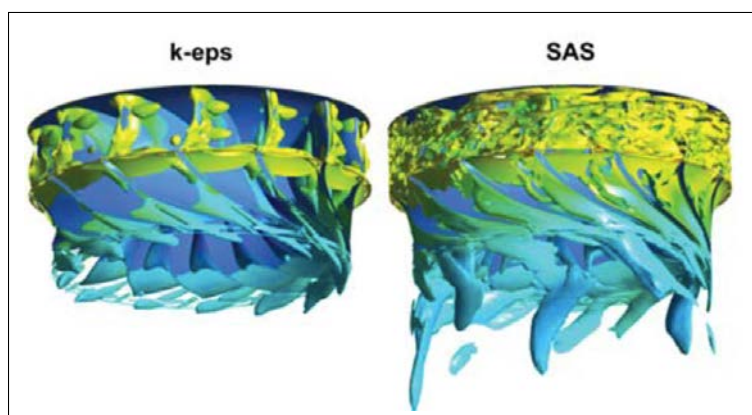


Figure 0.5 Comparaison du modèle SAS-SST et du traditionnel  $k - \epsilon$  (tiré de Nennemann *et al.* (2014))

Les simulations numériques permettent d'obtenir des historiques de chargement fiables à deux conditions. D'une part, l'écoulement ne doit pas présenter trop de phénomènes aléatoires,

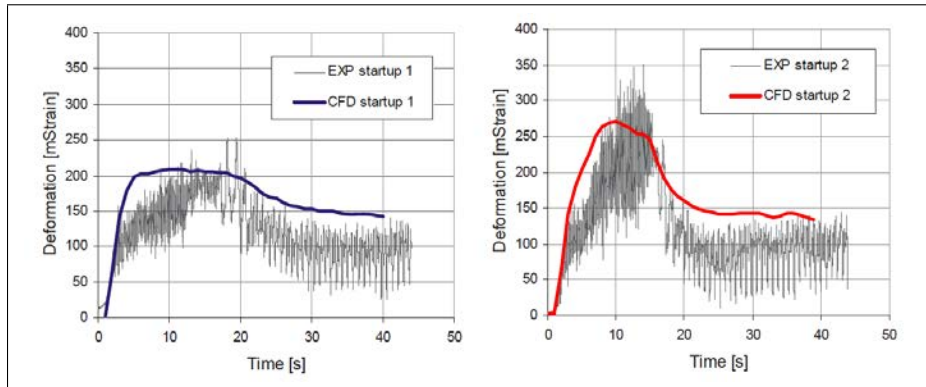


Figure 0.6 Comparaison de la déformation quasi-statique sur une aube pour deux profils de démarrage. (tiré de Nicolle *et al.* (2014))

difficile à capturer dans la CFD. D'autre part, les chargements dynamiques ne doivent pas interagir avec des modes propres du système, car les caractéristiques modales (en particulier, l'amortissement hydrodynamique) ne sont pas accessibles dans les approches traditionnelles (voir section 1.3.3 pour plus de détails). Lorsque les conditions à simuler sont incompatibles avec les capacités de calcul, l'intégration de données expérimentales peut se révéler très utile pour combler les lacunes numériques.

#### 0.2.4 Techniques expérimentales vs calcul numérique

L'exploitation des données expérimentales opérationnelles ne se positionne pas comme un concurrent de l'analyse numérique, mais davantage comme une ressource complémentaire. Les modèles numériques offrent l'avantage de procurer une information exhaustive, dans n'importe quel régime, pour un coût de calcul généralement raisonnable. L'approche expérimentale, quant à elle, est empirique et basée sur des données collectées in situ par des capteurs installés sur la turbine. L'information collectée expérimentalement est limitée pour plusieurs raisons :

- Les campagnes expérimentales sont très coûteuses tant en termes d'installations que d'immobilisation du groupe turbine-alternateur.

- Les mesures ne concernent que des régimes ciblés, et ne couvrent pas l'intégralité du spectre de fonctionnement des roues.
- Les données récoltées sont essentiellement court-terme, car les capteurs ne peuvent être exposés aux conditions hydrauliques extrêmes sur une durée prolongée.
- Les données ne concernent qu'un certain nombre de positions (degrés de liberté) restreintes spatialement.
- Les mesures sont sujettes à nombre d'incertitudes propres aux dispositifs expérimentaux, aux algorithmes de traitement de signal et aux différentes hypothèses permettant le traitement du signal.

Les données expérimentales ont néanmoins l'avantage de donner une information exacte sur le fonctionnement de la machine, bien que parcellaire. Les problématiques liées à leur exploitation s'articulent autour du développement d'outils mathématiques capables de faire des estimations précises et de quantifier la fiabilité des résultats en termes d'incertitudes.

### **0.2.5 Traitement des données expérimentales**

L'analyse expérimentale de la fatigue repose sur des mesures de contrainte en des points particuliers où l'intensité des vibrations est maximale (*hotspots*) (Presas, Luo, Wang & Guo (2019)). Sur des géométries conventionnelles, ces hotspots sont généralement situés aux bords de fuite des aubes, au niveau du point d'ancrage avec la ceinture ou la couronne (Huang *et al.* (2014a)). La concentration de contrainte en ces points se couple à une fragilité intrinsèque des points de soudure (Habibzadeh Boukani, Viens, Tahan & Gagnon (2014)). Les jauges sont placées dans les directions principales de contraintes définies par simulation. La quantification des incertitudes liées au dispositif expérimental est essentielle pour obtenir des résultats fiables (Arpin-Pont, Gagnon, Tahan, Coutu & Thibault (2012)).

L'extrapolation des données de vibrations courts-termes à des historiques de chargement longs-termes repose sur l'identification de caractéristiques invariantes du signal, puis sur la simulation de modèles basés sur ces invariants. Le cas des régimes stationnaires a été traité sur la base de statistiques cyclostationnaires (Gardner (1986); Poirier, Gagnon, Tahan, Coutu & Chamberland-lauzon (2016)). Le cas des transitoires a été abordé via des algorithmes de décomposition type ondelettes et EMD (*Empirical Mode Decomposition*) (Gagnon, Tahan, Bocher & Thibault (2012b)). Enfin, des études plus récentes commencent à s'intéresser à la possibilité d'obtenir des mesures de contrainte indirectes sur les roues, via des mesures de torsion et de flexion sur l'arbre de transmission (Diagne, Gagnon & Tahan (2016)). La mise en œuvre de modèles autorégressifs a montré une forte corrélation linéaire entre les composantes statiques des signaux indirects et des mesures in-situ sur les *hotspots*. L'interpolation spatiale des mesures a été traitée par des algorithmes d'interpolation par Krigeage (Ben Salah (2014)). Enfin, l'interpolation des régimes d'opération a été abordée sur des logiques de Krigeage cyclostationnaire, complétée par les modèles de simulations stochastiques (Quang-Pham, Antoni, Tahan, Gagnon & Monette (2020)).

Les mesures de contraintes et de pression peuvent également servir à mieux comprendre les phénomènes d'instabilité hydrauliques mal appréhendés par les analyses numériques (Presas, Valentin, Egusquiza & Valero (2017); Valero, Egusquiza Montagut, Valentin, Presas & Egusquiza (2019)). Les données empiriques peuvent servir à évaluer la qualité des simulations (Huang *et al.* (2014a,b)). Des méthodes génériques d'analyse multi-senseur sont en développement pour optimiser l'exploitation des données récoltées sur des prototypes de turbine (Valentin, Presas, Valero & Egusquiza (2019)).

Ces dernières années, l'utilisation des données expérimentales à des fins de surveillance opérationnelle de turbines Pelton (Egusquiza Montagut, Egusquiza, Valero, Presas, Valentin & Bossio (2018)) ou de turbines Kaplan (Pennacchi, Borghesani & Chatterton (2015)) a vu le jour. Les campagnes de mesures expérimentales sont également de plus en plus utilisées à des fins

d'optimisation empirique des opérations. Des études ont montré la pertinence de l'injection d'air à charge partielle pour réduire les niveaux de pression (Casanova-Garcia & Mantilla (2010)). L'optimisation des régimes de démarrage pour réduire les niveaux de sollicitation est également permise par des tests in-situ (Gummer & Etter (2008); Gagnon *et al.* (2010)), et l'étude des variations de chargement permet d'optimiser les performances hydrauliques en transitoire (Trivedi, Agnalt & Dahlhaug (2018)).

### **0.3 Motivations**

#### **0.3.1 Utilisation réelle des turbines**

Depuis quelques années, le réseau de distribution électrique est de plus en plus instable pour diverses raisons. Du point de vue de la production, l'instabilité de l'offre est due à l'accroissement de la pénétration des technologies solaires et éoliennes, dont la production est intermittente et tributaire de la météo locale. Du point de vue de la consommation, l'accroissement du besoin en énergie augmente les amplitudes des pics de demande (alternance jour/nuit), ce qui a pour conséquence de saturer le réseau à des horaires bien précis. Enfin, du point de vue global, l'interconnexion des marchés complexifie grandement les structures de distribution, rendant de ce fait la résilience et la stabilité des réseaux beaucoup plus fragile. Face à cette instabilité du réseau, une solution pratique est d'utiliser les turbines pour palier au déséquilibre offre/demande. Cette utilisation est justifiée par deux raisons principales : le démarrage ou l'arrêt d'un groupe est rapide, et la modulation de production est très simple. Ainsi, une fraction significative des installations hydroélectriques sert aujourd'hui de moyen de production palliatif. Or, l'exploitation de turbines dans des régimes non optimaux sur des durées prolongées et l'accroissement des cycles de démarrage/arrêt n'est pas sans conséquence sur l'état de santé des structures.

Les machines tournantes ont le défaut d'être particulièrement instables durant les régimes transitoires asynchrones (typiquement, démarrages et arrêts) (Trivedi, Gandhi & Cervantes

(2013)), et l'exploitation en dehors du BEP se traduit par une plus forte sollicitation dynamique des roues, comme illustré sur la Figure 0.7 (Goyal & Bhupendra (2018)). Inévitablement, l'augmentation des niveaux de chargement sur les éléments structuraux accélère (parfois drastiquement) le niveau de fissuration par fatigue, réduisant ainsi la durée de vie des machines et impliquant des intervalles de maintenance beaucoup plus rapprochés et coûteux, voir Figure 0.8 (Seidel *et al.* (2014)). Enfin, cette nouvelle utilisation des turbines se traduit par un accroissement exponentiel des cycles de démarrage-arrêt des groupes, extrêmement critiques de par leur ratio fréquence-endommagement, voir Figure 0.9 (Huang *et al.* (2014a)).

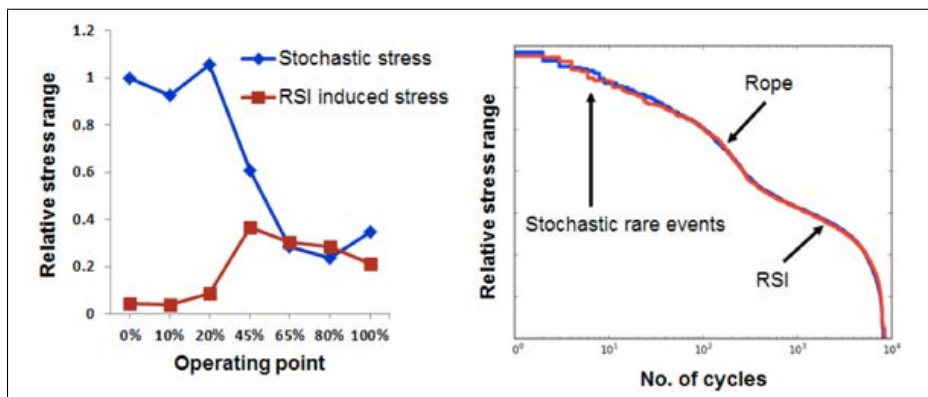


Figure 0.7 Les contributions stochastiques, mal simulées, participent pourtant à l'essentiel du spectre de chargement (Tiré de Huang *et al.* (2014a))

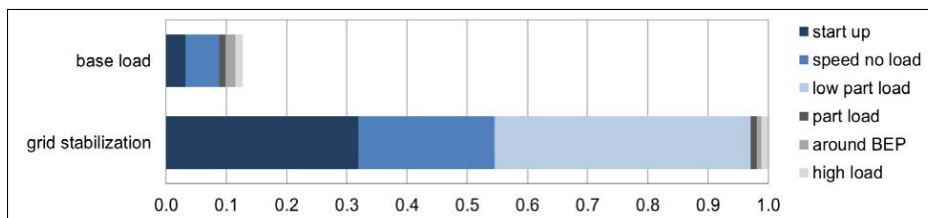


Figure 0.8 La dégradation des turbines est fortement accélérée par l'instabilité du réseau (Tiré de Seidel *et al.* (2014))

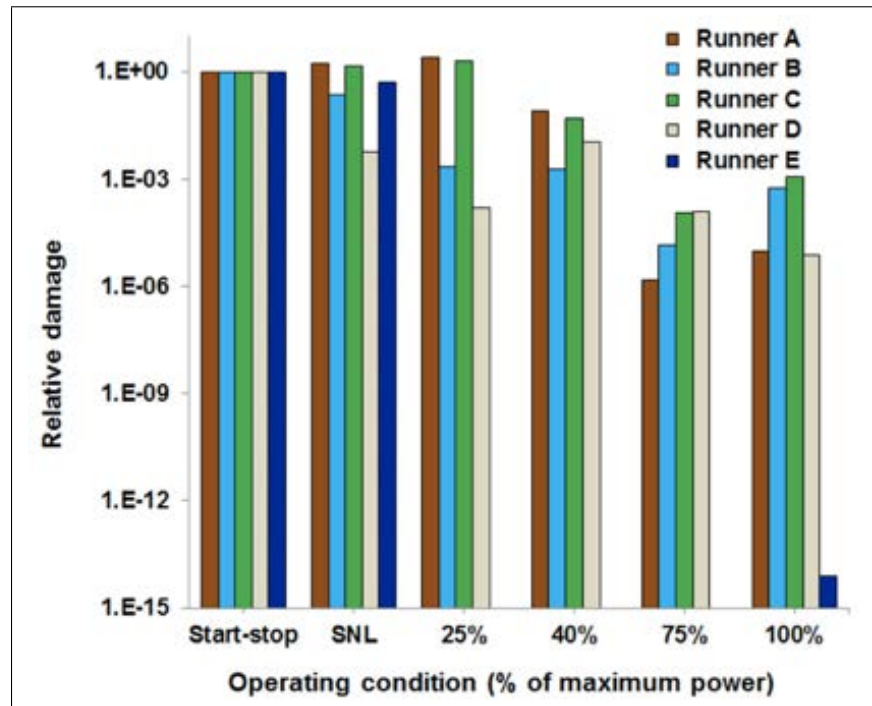


Figure 0.9 Étude de l'endommagement de plusieurs géométries de turbine dans différents régimes. Les cycles démarrage-arrêt sont les plus critiques (Tiré de Huang *et al.* (2014a))

### 0.3.2 Phénomènes de résonance en transitoire

L'augmentation des régimes transitoires se solde par une perte de précision des modèles numériques, alors que la durée de vie en fatigue des turbines est grandement affectée. La Figure 0.10 montre un exemple de spectres de chargement récoltés *in situ* dans différents régimes, et montre la criticité des transitoires. Le présent projet se donne pour objectif d'améliorer la compréhension des caractéristiques dynamiques des turbines hydro-électriques, autant mécaniques qu'hydrauliques, lors des phases transitoires. Dans ce contexte, il est légitime de se demander quels sont les phénomènes en transitoire qui contribuent le plus à la fatigue.

De par leur fréquence, les régimes de démarrage sont les plus critiques pour la durée de vie des turbines : alors qu'un rejet de charge ne survient guère plus qu'une fois par an, les



cycles démarrage arrêt peuvent intervenir plusieurs fois par jours. Les phénomènes physiques émergeant au cours de ces cycles peuvent être appréhendés à l'aide d'analyses temps-fréquence. Ces analyses fournissent des diagrammes de distribution qui permettent de séparer les vibrations par fréquence et par temps. Un exemple d'analyse basé sur des jauges de déformation placées sur les aubes d'une roue au démarrage est présenté sur la Figure 0.11.

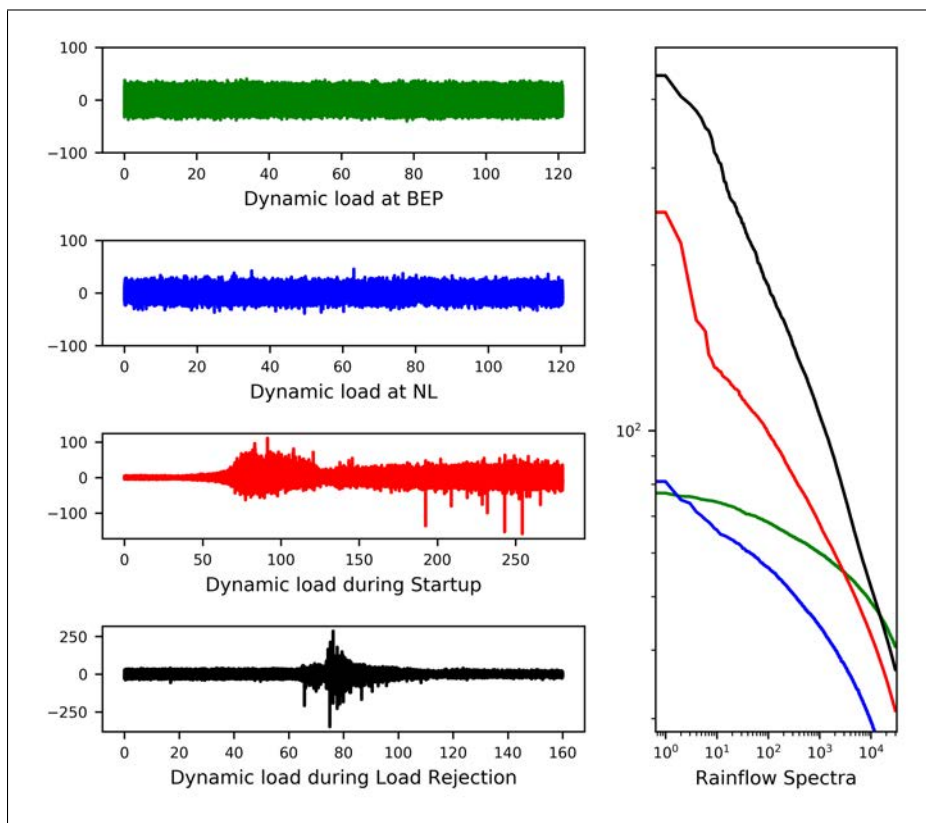


Figure 0.10 Analyse de spectres rainflows pour différents types de régimes. Les transitoires génèrent des pics de contrainte critiques pour la durée de vie en fatigue (données : HydroQuébec, Andritz)

Sur la Figure 0.11, la signature spectrale des RSI est particulièrement bien visible, et donne un bon aperçu de l'évolution de la vitesse de rotation. Les intenses sollicitations apparaissent avant la mise en mouvement de la roue, au moment de l'initiation de l'ouverture des directrices vers 105s. Jusqu'à 160s, les pics de contrainte sont particulièrement sévères. L'analyse temps-fréquence révèle que l'essentiel de ces sollicitations dynamiques est issu de phénomènes de résonance.

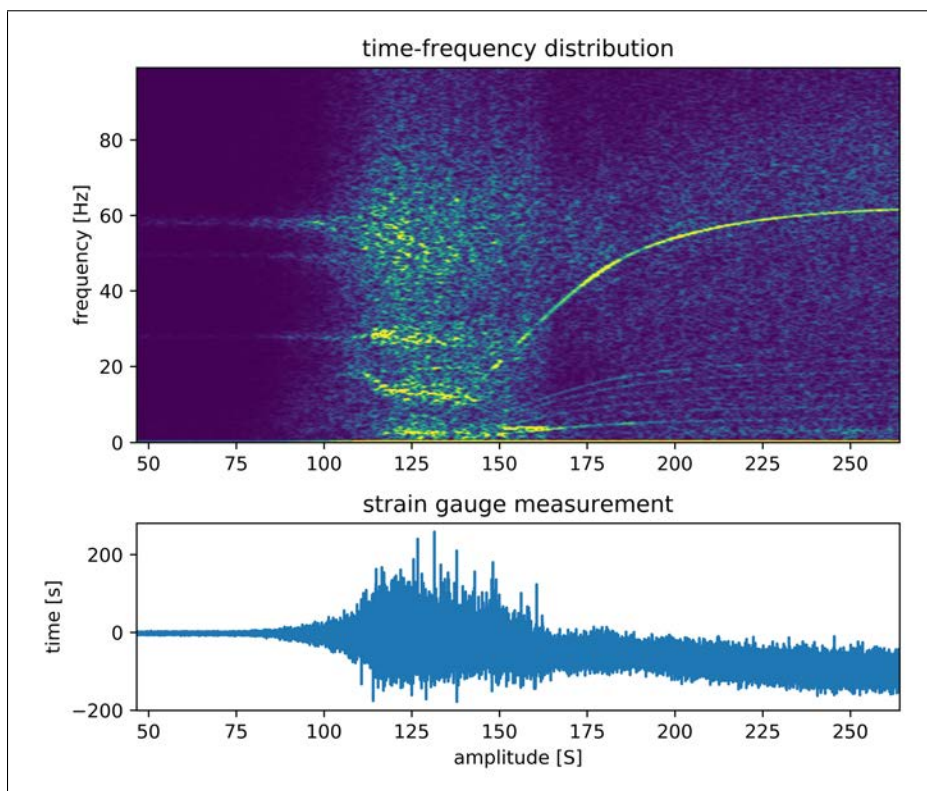


Figure 0.11 Analyse temps-fréquence de signaux de déformation

Quatre bandes de résonances sont détectables à l'œil, aux alentours de  $15\text{Hz}$ ,  $30\text{Hz}$ ,  $50\text{Hz}$  et  $60\text{Hz}$ . De plus, les RSI entrent en résonance avec deux modes, l'un aux alentours de  $175\text{s}$ , l'autre vers  $200\text{s}$ .

Les résonances, qu'elles soient stochastiques (générées par un bruit blanc) ou synchrones (générées par une harmonique de la vitesse de rotation), jouent un rôle prépondérant dans l'apparition de pics de contraintes dynamiques. Ainsi, une bonne connaissance du comportement modal des turbines est une condition *sine qua non* à la bonne prédiction des pics de contrainte au démarrage. Concernant les rejets de charge, la connaissance précise des modes de flexion de l'arbre de turbine est également importante pour éviter que la turbine n'atteigne sa vitesse critique. Les deux prochains paragraphes sont dédiés à l'état de l'art sur l'analyse modale numérique des turbines, et l'identification modale à partir de données expérimentales.

### 0.3.3 Analyse modale numérique des roues de turbines

La principale difficulté de l'analyse modale des turbines est la détermination des caractéristiques du système couplé à l'écoulement, les FSI ayant une influence significative sur les propriétés modales (Trivedi & Cervantes (2017)). La prédiction des déformées modale est en général facile, car le couplage à l'écoulement ne change pas (ou peu) les intensités relatives de déformation. De plus, la géométrie de révolution de la structure permet d'attribuer à chaque mode un diamètre nodal (ND) qui caractérise la déformation spatiale.

Un outil essentiel dans l'étude des fréquences de résonance est la notion de réduction de fréquence (*Frequency Reduction Ratio*, FRR), qui quantifie l'abaissement des fréquences naturelles de la structure lorsqu'elle est immergée. Les FRR sont dues au phénomène de masse ajoutée par les FSI (Trivedi & Cervantes (2017)) et croissent avec le ND, comme illustré sur la Figure 0.12.a. La prédiction des FRR montre une bonne adéquation avec l'expérience dans des cas très simplifiés de turbines de géométrie parfaitement connue, immergées dans des bassins statiques (Lais, Liang, Henggeler, Weiss, Escaler & Egusquiza (2009); Egusquiza, Valero, Liang, Coussirat & Seidel (2009)). Des travaux ont montré qu'une adimensionalisation des FRR pourrait rendre cette quantité invariante pour des turbines à géométrie similaire (Liang, Rodriguez, Egusquiza, Escaler, Farhat & Avellan (2007)). Les FRR dépendent également du niveau de confinement de l'écoulement, et augmentent significativement avec le degré de confinement : la Figure 0.12.b montre une dépendance exponentielle qui décroît avec le ND (Rodriguez, Flores, Pierart, Contzen & Egusquiza (2012); Valentin, Ramos, Bossio, Presas, Egusquiza & Valero (2016b)). La vitesse de rotation a également une influence, et engendre des forces de Coriolis qui jouent un rôle essentiel dans l'abaissement des fréquences de torsion et l'augmentation de l'amortissement torsionnel (Martin, Nilsson & Aidanpaa (2009); Soltani Dehkharghani, Cervantes & Aidanpaa (2017)). Ces résultats sont confirmés par des modèles analytiques de Theodorsen mis en œuvre sur des machines Kaplan (Puolakka, Keto-Tokoi & Matusiak (2013)).

Enfin, l'influence de la cavitation peut être évaluée sur la base de modèles diphasiques : les modèles Zwart-Gerber-Belami donnent de bonnes estimations, mais nécessitent une calibration expérimentale (Liu, Luo, Presas, Wang & Zhou (2018b)). La FRR diminue lorsque la cavitation augmente, comme montré sur la Figure 0.12.c. L'étude des FRR est approximative, car la plupart des modèles se basent sur des FSI simplifiées excluant la possibilité de rétroaction structurale sur l'écoulement.

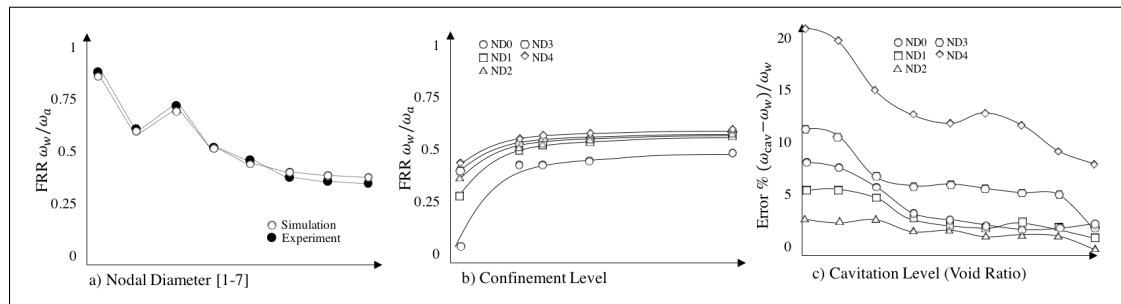


Figure 0.12 Étude de sensibilité des FRR à différentes conditions opérationnelles. a) Influence du diamètre nodal (basé sur les données de Lais *et al.* (2009)), b) Influence du confinement (basé sur les données de Valentin *et al.* (2016b)), c) Influence de la cavitation (basé sur les données de Liu *et al.* (2018b))

Dans les simulations numériques, la physique modélisée est généralement conservatrice, sans considérations d'amortissements. Le traitement de l'amortissement hydrodynamique est très complexe, et l'investigation numérique est plus récente. Les premiers travaux sur des profils simples remontent à 2014, et l'amortissement est évalué à partir du travail modal échangé entre la structure et le fluide dans les CFD (estimation basée sur une moyenne de l'énergie de l'écoulement), ou à partir d'un couplage à un degré de liberté (estimation non moyennées mais nécessitant de simulations instationnaires) (Monette, Nennemann, Seeley, Coutu & Marmont (2014)). La comparaison expérimentale donne de bons résultats, avec un amortissement qui évolue linéairement avec la vitesse de l'écoulement. L'implémentation de ce modèle sur des turbines montre une bonne prédiction en charge nominale, mais des divergences à charge partielle (Nennemann *et al.* (2016)). L'approche de travail modal a été implémentée suivant le schéma de

la Figure 0.13, et tend à montrer une faible influence de la rigidité ajoutée (Gauthier, Giroux, Etienne & Gosselin (2016); Cupr, Weber & Hebner (2019)). Il semble que les amortissements soient peu sensibles à l'amplitude de vibration, et que des simulations courtes suffisent à obtenir des résultats (Gauthier, Giroux, Etienne & Gosselin (2017)).

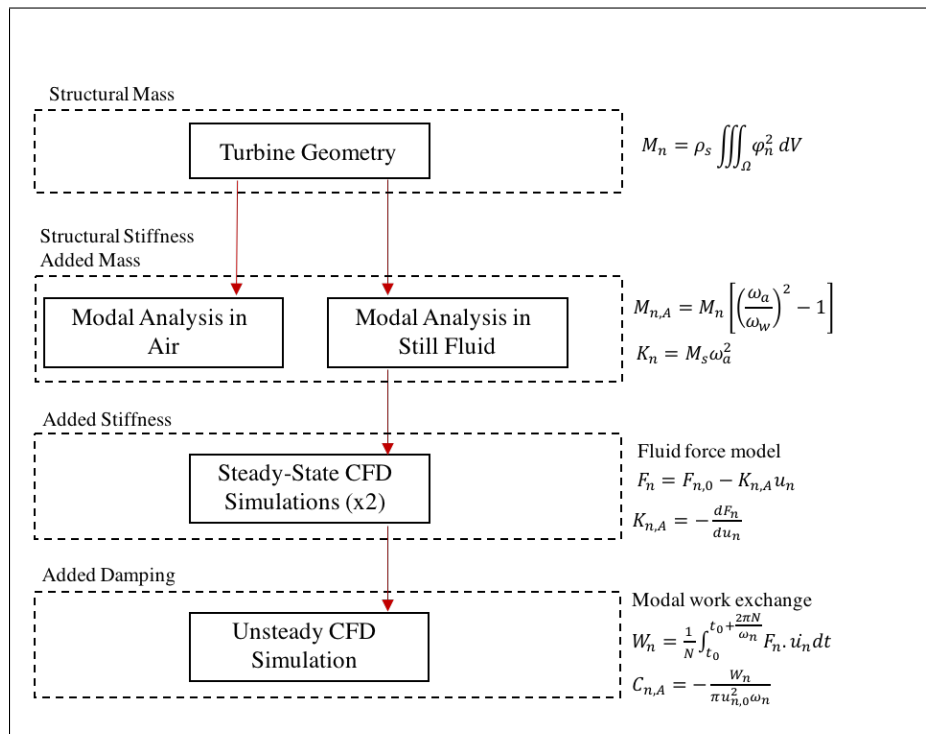


Figure 0.13 Schéma de calcul des amortissements par approche de travail modal

### 0.3.4 Analyse modale des turbines par la voie expérimentale

Les mesures sur modèles réduits permettent d'extraire un certain nombre de caractéristiques de la maquette, qui peuvent être transposées sur le prototype. Pour que cette transposition soit possible, le modèle réduit doit être conçu suivant des modèles de similitudes (par exemple, maintenir le même nombre de Reynolds pour la similitude hydraulique). Les propriétés mécaniques sont alors transposées à celles du prototype par des lois de similarité. En termes de comportement modal, les fréquences naturelles et les déformées peuvent être transposables (Zhang, Wang & Fan (2015c))

sous certaines conditions, mais le cas des amortissements n'est pas transposable à l'heure actuelle (Valentin, Presas, Valero, Egusquiza Montagut, Egusquiza, Gomes Pereira Junior & Avellan (2020)), de par leur forte dépendance aux caractéristiques de l'écoulement.

Les tests d'impact sous environnement contrôlé sont les méthodes d'analyse modale expérimentales les plus répandues (Lais *et al.* (2009)). Malheureusement, ce type d'essai est très éloigné des conditions opérationnelles, qui ont une grande influence sur les paramètres modaux. En effet, en plus de la masse ajoutée, de nombreux paramètres non contrôlés peuvent altérer les propriétés modales en opération : dynamique de l'écoulement (en particulier pour la détermination des amortissements hydrodynamiques), proximité des surfaces (Presas, Valentin, Egusquiza, Valero & Seidel (2016); Ostby, Haugen & Billdal (2018)), faible rigidité des surfaces (Valentin, Presas, Egusquiza, Valero & Egusquiza Montagut (2016a)), vitesse de rotation (Presas, Valentin, Egusquiza, Valero & Seidel (2015)).

L'analyse modale opérationnelle des turbines se limite à de rares explorations. L'étude des fréquences naturelles d'une roue Francis sous différents régimes d'opération a été proposée en 2018 (Valentin, Presas, Bossio, Egusquiza Montagut, Egusquiza & Valero (2017a)). Cette analyse excluait l'estimation des amortissements, et s'est restreinte à une analyse qualitative de détection des fréquences, sans identification. L'analyse modale opérationnelle de directrices à l'aide d'algorithmes NEXT a été proposée par Gagnon, Tahan, Coutu & Thomas (2006). Le traitement des incertitudes a été abordé dans Gagnon, Tahan & Coutu (2009)

## **0.4 Problématique**

### **0.4.1 Bilan de l'introduction**

Le contrôle de l'intégrité des turbines est capital pour assurer la pérennité de la production électrique. En particulier, une bonne appréhension des mécanismes de fatigue permet de

correctement traiter les processus de fissuration sur les installations, mais aussi d'augmenter nos capacités de prédiction pour une meilleure planification des travaux de maintenance, de réfection ou pour estimer la durée de vie résiduelle. Pour que les calculs de fatigue donnent des résultats fiables, il est nécessaire d'avoir une bonne connaissance des sources de vibration de la turbine. L'origine des sollicitations critiques dépend grandement du régime de fonctionnement de la turbine : i) au BEP, les RSI, ii) en PL, la torche de cavitation, iii) en NL, les fluctuations stochastiques de l'écoulement, iv) au démarrage, les résonances.

Aujourd'hui, les turbines sont couramment exploitées pour faire face aux sources intermittentes présentes sur le réseau. Cet usage se traduit par un accroissement significatif des cycles de démarrage/arrêt, qui dégradent fortement la turbine par fatigue. Au cours de ces phases d'exploitation, les résonances sont à la source de sollicitations dynamiques critiques. Les modèles numériques ne peuvent pas calculer précisément les paramètres modaux de la turbine en des temps raisonnables, et la criticité des démarrages/arrêt se couple donc à une perte de fiabilité des prédictions. Une alternative à ces modèles numériques est l'intégration de données expérimentales dans les calculs. Cette méthode a d'ores et déjà fait ses preuves pour l'amélioration des calculs de fatigue.

L'identification modale des turbines a fait l'objet d'études de modèles réduits et de prototypes sous environnement contrôlé. Aucune de ces méthodes ne donne un aperçu complètement représentatif du comportement opérationnel des machines. Les outils d'analyse modale opérationnelle sont de bons candidats pour caractériser le comportement réel des machines. À l'heure actuelle, l'utilisation de ces outils dans le domaine hydroélectrique est occasionnel.

#### **0.4.2 Problématique et frontières de la recherche**

Les différents points abordés dans l'Introduction penchent naturellement l'objectif des travaux vers l'identification des caractéristiques modales des turbines en régimes transitoires. Aussi, il

est proposé de formuler la principale problématique autour de laquelle s'articulera notre projet de doctorat : **comment procéder à l'analyse modale opérationnelle des roues de turbine hydroélectriques en régime transitoire** ? À terme, les travaux engagés devraient aider à mieux prédire les niveaux de sollicitations dynamiques au démarrage.

Quelques difficultés liées à la problématique peuvent dès maintenant être mentionnées. Ces difficultés sont majoritairement dues à la nature des régimes étudiés. D'une part, les régimes transitoires se font très souvent en charge à vide. Un fort bruit vient alors corrompre la qualité des données. D'autre part, les mesures en régime transitoire fournissent des signaux de nature intrinsèquement instationnaire. Une hypothèse fondamentale dans la grande majorité des outils de traitement de signal est la stationnarité, et à *fortiori* l'ergodicité qui garantit la stabilité statistique des données. Le traitement de données transitoires devra donc se positionner sur des modèles de traitement court-terme, avec peu de données et des estimateurs non moyennés. Naturellement, l'identification dans un contexte de signaux courts-termes et bruités ne pourra pas s'affranchir du calcul et de la minimisation des incertitudes expérimentales, qui serviront d'indicateur de fiabilité des résultats obtenus.

Les données disponibles proviennent de campagnes de mesures opérationnelles sur des turbines conçues par Andritz Hydro et exploitées par Hydro-Québec. En particulier, les mesures de jauge de déformation sur les aubes de turbine seront particulièrement utiles à la caractérisation modale.

Le Chapitre 1 s'attachera à décrire les différentes méthodes existantes pour l'analyse modale opérationnelle des structures. Au regard des contraintes de travail exposées, les lacunes de la littérature et les objectifs de recherche seront formalisés dans le Chapitre 2.





# CHAPITRE 1

## REVUE DE LITTÉRATURE

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'état de l'art en matière d'analyse modale opérationnelle (OMA). Une attention particulière est portée au traitement des incertitudes. La section 1 expose les modèles physiques de réponse structurale, et dérive les principales paramétrisations déterministes dans les domaines temporels et fréquentiels. La section 2 présente les principes de l'OMA, et établit les hypothèses nécessaires à la réalisation de l'identification modale opérationnelle. Au regard de ces hypothèses, les modèles déterministes de la section 1 sont modifiés pour donner des modèles stochastiques, permettant d'identifier le système sans connaître les forces de sollicitations. La section 3 présente les principaux algorithmes existants et les récentes avancées dans l'OMA. La section 4 présente l'origine et les différents types d'incertitudes rencontrés en OMA. Les sections 5 et 6 sont consacrées à la quantification des incertitudes d'identification, via l'approche fréquentiste et bayésienne, respectivement.

### 1.1 Modèle physique et dynamique des structures

Cette première section présente les modèles dynamiques du comportement des structures. Quatre paragraphes abordent successivement les notions de dynamique des structures, d'espace d'état, de paramétrisation fréquentielle et de paramétrisation temporelle. La plupart des concepts abordés dans cette section et la suivante sont bien établis et disponibles dans un très large panel de la littérature. L'essentiel des points abordés peuvent être approfondi par les lectures de Brincker & Ventura (2015) et Reynders (2012).

#### 1.1.1 Dynamique des structures

Deux équations sont nécessaires à la représentation de l'observation du mouvement d'une structure : l'équation du mouvement, raisonnablement approchée par un système d'oscillateurs masses-ressorts-amortisseurs, et l'équation d'observation.

### 1.1.1.1 Système d'oscillateurs

L'équation du mouvement d'un système physique peut être obtenue en discrétisant sa distribution spatiale en  $M$  Degrés de Liberté (DDL), suivant un modèle d'éléments finis. Sous hypothèse d'amortissement visqueux (un amortissement linéaire par rapport à la vitesse), le mouvement en chaque DDL peut se déduire du principe fondamental de la dynamique, donnant un système d'oscillateurs fortement couplés illustré en Figure 1.1. Le mouvement d'ensemble de la structure est alors décrit par l'équation matricielle (1.1).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.1)$$

$\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  et  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  sont les déplacements (réponses) et les forces (excitations) du système.  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{M \times M}$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, respectivement.  $\mathbf{M}$  est une matrice symétrique définie positive.  $\mathbf{K}$  est une matrice symétrique définie non négative. La construction de l'équation du mouvement (1.1) repose sur quatre principes fondamentaux :

- **Linéarité** : le comportement linéaire d'un système garantit ses propriétés de superposition et de proportionnalité.
- **Invariance temporelle** : les différents coefficients matriciels de l'équation sont constants. Cette propriété reflète la stabilité des propriétés physiques du système dans le temps.
- **Observabilité** : l'observabilité traduit la possibilité de caractériser l'état interne d'un système à partir d'observations et de mesures de réalisations du processus. Cette propriété est bien établie pour les systèmes linéaires.
- **Réciprocité** : en analyse modale, cette propriété est assurée par le théorème de la réciprocité de Maxwell. Ce théorème garantit qu'une réponse en un point  $a$  à une excitation en un point  $b$  est strictement identique à la réponse au point  $b$  à cette même excitation au point  $a$ .

Il est usuel de paramétrer la force  $f(t)$  pour découpler l'espace et le temps :  $f(t) = \mathbf{B}u(t)$ .  $u(t) \in \mathbb{R}^{N_i \times 1}$  représente les foyers d'excitation temporels, et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N_i}$  est une matrice d'influence, qui traduit l'effet de la force  $u(t)$  sur chaque degré de liberté.

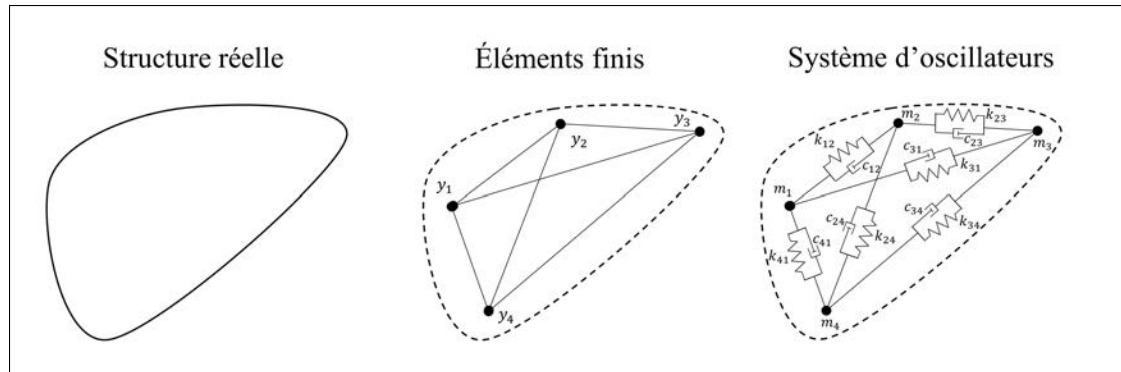


Figure 1.1 modélisation de la structure par un système d'oscillateurs amortis

### 1.1.1.2 Observation du système physique

Dans la pratique, l'ensemble des  $M$  degrés de liberté du système n'est pas accessible à la mesure. Il est seulement possible de mesurer  $N_o \ll M$  degrés de libertés. Ces mesures sont des combinaisons linéaires d'accélération, de vitesse et de déplacement, qui permettent de construire les observations  $\mathbf{y}^{obs}(t) \in \mathbb{R}^{N_o \times 1}$  :

$$\mathbf{y}^{obs}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{y}(t) \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_v, \mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{N_o \times M}$  sont les matrices de sélection pour l'accélération, la vitesse et le déplacement. En utilisant l'équation (1.1), il est possible d'obtenir une description indépendante de l'accélération :

$$\mathbf{y}^{obs}(t) = (\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) \dot{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{y}(t) + \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B} u(t) \quad (1.3)$$

En général, seul un type de donnée est considéré à la fois ; en analyse modale, il s'agit souvent de mesures d'accélération, faciles à obtenir, mais il peut également s'agir de mesures de déplacement.

### 1.1.2 Espace d'état

Une difficulté liée à la résolution du système (1.1) est sa structure de second ordre. Il est en général plus approprié d'augmenter la dimensionnalité du problème pour réduire l'ordre du modèle. Pour réaliser une telle transformation, une variable d'état est introduite :  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^T(t) \in \mathbb{R}^{2M \times 1}$ . En injectant cette définition dans la description (1.1), l'équation de l'espace d'état continu est obtenue :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathcal{A}\mathbf{x}(t) + \mathcal{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.4)$$

Le système obtenu est d'ordre 1 et de dimension  $2M$ . Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont dites matrice d'état et matrices d'entrée :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_M & \mathbf{I}_M \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{M \times N_i} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times N_i} \quad (1.5)$$

#### 1.1.2.1 Observation de l'espace d'état

Tel qu'évoqué en section 1.1.1.2, seuls degrés de liberté sont observables. L'observation (1.3) peut se traduire à l'aide de la variable d'état pour donner une forme compacte :

$$\mathbf{y}^{obs}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathcal{D}\mathbf{u}(t), \quad \begin{cases} \mathbf{C} = (\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}) \\ \mathcal{D} = \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{cases} \quad (1.6)$$

La matrice  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N_o \times 2M}$  est la matrice de sortie et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{N_o \times N_i}$  est la matrice de transmission de l'espace d'état. La compilation des équations (1.4) et (1.6) permet d'établir :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) & \text{équation d'état} \\ \mathbf{y}^{obs}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) & \text{équation input-output} \end{cases} \quad (1.7)$$

La première ligne du système est appelée *équation d'état*, et la deuxième ligne est dite *équation d'observation (input-output relation)*. L'espace d'état est une formulation essentielle en analyse modale, car l'ensemble des modèles d'identification peut en être déduit.

### 1.1.2.2 découplage du système

La difficulté liée à la résolution du système (1.7) est le terme de couplage  $\mathbf{A}$  de l'équation d'état. La recherche d'un changement de base permettant le découplage des équations est le fondement de l'analyse modale.

En premier lieu, il convient de considérer les solutions de l'équation de l'espace d'état homogène  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ , qui représente le comportement du système physique en régime libre. Par construction,  $\mathbf{A}$  est diagonalisable et  $\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1}$ , voir équation (1.8). Les solutions de l'espace d'état en régime libre s'écrivent donc comme combinaisons linéaires de  $\chi_m e^{\lambda_m t}$ .  $\chi_m \in \mathbb{C}^{2M \times 1}$  est un vecteur propre complexe ( $m$ -ième colonne de  $\mathbf{X}$ ) et  $\lambda_m \in \mathbb{C}$  est une valeur propre contenue dans la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}$ . Comme  $\mathbf{A}$  est à coefficients réels, les solutions apparaissent par paires conjuguées ; ceci garanti que les solutions du problème sont à valeurs réelles. Les solutions de l'équation (1.1) s'obtiennent en isolant les  $M$  premières lignes de la matrice des vecteurs propres.

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_m & \boldsymbol{\Psi}_m^* \\ \boldsymbol{\Psi}_m \boldsymbol{\Lambda}_m & \boldsymbol{\Psi}_m^* \boldsymbol{\Lambda}_m^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2M \times 2M} \\
\boldsymbol{\Psi} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_m & \boldsymbol{\Psi}_m^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times 2M} \quad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}_m^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2M \times 2M}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Les couples  $(\lambda_m, \boldsymbol{\psi}_m)_{0 < m \leq 2M}$  où  $\boldsymbol{\psi}_m$  est la  $m$ -ième colonne de  $\boldsymbol{\Psi}$  sont les modes propres de la structure. Ils représentent les vibrations libres de la structure.  $\boldsymbol{\Psi}$  est la matrice des déformées modales de la structure. Sous l'hypothèse d'amortissement proportionnel, cette dernière est réelle (Piranda (2001)).

Les règles élémentaires de l'analyse mathématique indiquent que les solutions générales de la variable d'état s'écrivent comme des combinaisons linéaires de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{q}(t)$ , où les coefficients temporels  $\mathbf{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_{2M}(t))^T$  sont appelés coordonnées modales. Par équivalence, les solutions en déplacement du système physique sont données par :

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{q}(t) \tag{1.9}$$

Cette formulation est la décomposition modale du mouvement. L'expression de l'espace d'état (1.7) sur la base  $\mathbf{X}$  permet d'obtenir une formulation équivalente pour les coordonnées modales :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}(t) = \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{q}(t) + \mathbf{L}^T \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}^{obs}(t) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t) + \mathcal{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{1.10}$$

Dans cette nouvelle expression,  $\mathbf{L} = \mathbf{B}^T \mathbf{X}^{-T} \in \mathbb{C}^{N_i \times 2M}$  est la matrice des participations modales et  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{C}\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N_o \times 2M}$  est la matrice modale partielle. Les colonnes de ces matrices portent l'information reliée à chaque DDL. Le système (1.10) est dit *décomposition modale* de l'espace d'état, et est particulièrement simple à résoudre en raison de sa structure découplée.

### 1.1.2.3 Espace d'état discret

La discrétisation de l'espace d'état peut s'avérer nécessaire lorsque les données à traiter sont elles-mêmes discrètes. Il existe de très nombreux algorithmes de discrétisation, mais en analyse modale, l'hypothèse BOZ (Bloquage d'ordre zéro) (ou plus connue sous son acronyme anglais ZOH, *Zero-Order Hold*) est souvent invoquée pour dériver les calculs. Cette hypothèse permet la discrétisation par une procédure CDA (conversion digitale-analogique), qui transforme le signal discret en une succession d'états constants de durée  $\Delta t$  avec transition instantanée, voir Figure 1.2.

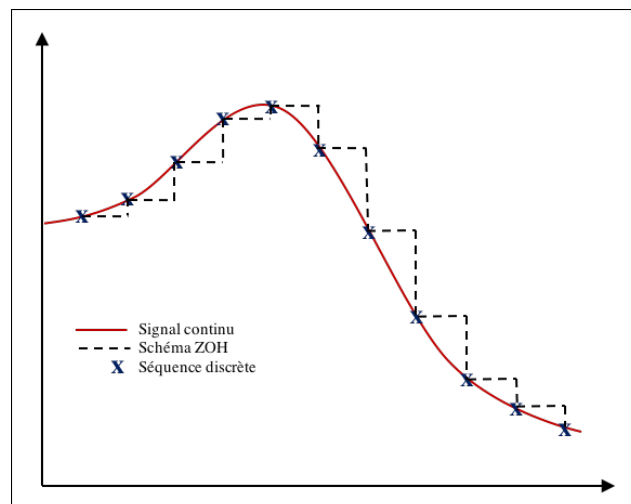


Figure 1.2 Modèle de discrétisation ZOH

Avant la discrétisation, l'équation d'état est multipliée par  $e^{\mathcal{A}t}$ , donnant :

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\mathcal{A}t} \mathbf{x}(t) \right) = e^{\mathcal{A}t} \mathcal{B} \mathbf{u}(t) \quad (1.11)$$

En posant  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$ , une approximation discrète est obtenue (le résultat est exact en régime libre) :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{A}_d \mathbf{x}_k + \mathcal{B}_d \mathbf{u}_k \quad (1.12)$$



où  $\mathcal{A}_d = e^{\mathcal{A}\Delta t}$  et  $\mathcal{B}_d = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}_d - \mathbf{I}_{2M})\mathcal{B}$ . L'équation d'observation est conservée, et :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{A}_d \mathbf{x}_k + \mathcal{B}_d \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^{obs} = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathcal{D} \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1.13)$$

Similairement, l'espace d'état découplé discret est donné en équation (1.14) :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{q}_k + \mathbf{L}_d^T \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k^{obs} = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{q}_k + \mathcal{D} \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $\mathbf{\Lambda}_d = e^{\mathbf{\Lambda}\Delta t}$ . Les valeurs propres discrètes permettent de définir la matrice des vecteurs propres de l'espace d'état discret,  $\mathbf{X}_d$ . Le vecteur de participation modale discret est donné par  $\mathbf{L}_d = \mathcal{B}_d^T \mathbf{X}_d^{-T}$ . La matrice modale partielle discrète est donnée par  $\mathbf{\Phi}_d = \mathbf{C} \mathbf{X}_d$ .

### 1.1.3 Approches fréquentielles

Les approches fréquentielles exploitent les domaines intégraux pour simplifier les modèles dynamiques. Ces domaines sont très utiles, car ils permettent de traduire les formulations différentielles en formulations algébriques, et de convertir les opérateurs de convolution en simples multiplications. Les approches fréquentielles existent en version à temps continu, ou en version discrète. Les formulations continues font appel aux transformées de Laplace et de Fourier des équations (1.7, 1.10) (la transformée de Fourier n'est qu'un cas particulier des transformées de Laplace, où la variable  $s = \sigma + j\omega$  est restreinte à sa partie imaginaire). Les formulations discrètes font appel aux transformées Z et aux transformées de Fourier discrètes (DFT) des équations (1.13, 1.14).

### 1.1.3.1 Fonction de transfert et fonction de réponse fréquentielle

La fonction de transfert est un outil privilégié de l'analyse modale, car elle donne une description simple et pratique de la réponse d'un système. Elle décrit le système physique par un filtre  $\mathbf{H}(s) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$  qui transforme les entrées  $\mathbf{U}(s)$  en sorties  $\mathbf{Y}^{obs}(s)$  dans le domaine de Laplace :

$$\mathbf{Y}^{obs}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s) \quad (1.15)$$

La matrice des fonctions de réponse fréquentielle est l'équivalent de la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel :

$$\mathbf{Y}^{obs}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{U}(\omega) \quad (1.16)$$

Chaque ligne  $\mathbf{h}_m(\omega) \in \mathbb{C}^{1 \times N_i}$  de  $\mathbf{H}(\omega)$  représente une fonction de réponse fréquentielle (FRF). Elle quantifie la contribution des  $N_i$  points de sollicitation pour chacun des  $N_o$  degrés de liberté mesurés. Il est légitime de s'interroger sur les relations qu'il existe entre les FRF et les modes de vibration  $(\lambda_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ . Pour relier ces deux concepts, la transformée de Fourier de l'espace d'état (1.10) doit être considérée :

$$\mathbf{H}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{P}^{-1}(\omega)\mathbf{L}^T + \mathcal{D} \quad (1.17)$$

où la matrice  $\mathbf{P}(\omega) = j\omega\mathbf{I}_{2M} - \boldsymbol{\Lambda}$  est une matrice diagonale qui porte l'information fréquentielle du modèle modal continu. La méthode des cofacteurs propose une manière d'inverser  $\mathbf{P}(\omega)$ , via la formulation de la comatrice associée :

$$\mathbf{P}(\omega)^{-1} = \frac{\text{com}(\mathbf{P})^T(\omega)}{|\mathbf{P}(\omega)|} = \frac{\text{com}(\mathbf{P})^T(\omega)}{\prod_{k=1}^M (j\omega - \lambda_m)(j\omega - \lambda_m^*)} \quad (1.18)$$

Le déterminant  $|\mathbf{P}(\omega)|$  s'annule pour toute valeur de  $j\omega$  qui coïncide avec une fréquence modale. Ainsi, une équivalence claire est établie entre les pôles de la fonction de transfert ou de la matrice des FRF et les solutions propres de l'espace d'état.

### 1.1.3.2 Forme fractionnelle partielle

Le développement de l'expression (1.17) donne la *forme fractionnelle partielle* des FRF :

$$\mathbf{H}_{FFP}(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \mathbf{l}_m^T}{j\omega - \lambda_m} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_m^* \mathbf{l}_m^H}{j\omega - \lambda_m^*} + \mathcal{D} \quad (1.19)$$

Son utilisation est très populaire, car l'expression explicite des FRF en fonction des modes propres permet une bonne représentation de la réalité physique du comportement structural. Cette paramétrisation générale peut être transformée en une relation force-déplacement, donnant la réceptance du système. Les hypothèses suivantes sont posées :

- Les observations ne contiennent aucune mesure d'accélération ou de vitesse :  $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_d, \mathbf{0})$  et  $\mathcal{D} = \mathbf{0}$ .
- Les observations couvrent un certain nombre de DDL par des mesures de déplacement :  $\mathbf{C}_d \neq \mathbf{0}$ .
- La force  $\mathbf{u}(t)$  s'applique exactement sur les DDL mesurés :  $\mathbf{B} = \mathbf{C}_d$ .

Alors,  $\mathbf{L} = \boldsymbol{\Phi}$ . La matrice de réceptance fréquentielle peut donc s'écrire :

$$\mathbf{H}_{FFP}(\omega) = \sum_{m=1}^M Q_m \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^T}{j\omega - \lambda_m} + Q_m^* \frac{\boldsymbol{\varphi}_m^* \boldsymbol{\varphi}_m^H}{j\omega - \lambda_m^*} \quad (1.20)$$

Le facteur  $Q_m$  est un facteur de normalisation, conséquence du théorème de réciprocité qui stipule une structure symétrique de la réceptance. En général, ces facteurs sont normalisés à la masse unitaire, et :

$$Q_m \approx \frac{1}{2\lambda_m} \quad (1.21)$$

Sous hypothèse d'amortissement proportionnel, les déformées modales sont réelles et le modèle peut être simplifié (voir section 1.2.1 ou Piranda (2001)) :

$$\mathbf{H}_{FFP}(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^T}{(\omega_m^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_m\xi_m} \quad (1.22)$$

Les paramètres  $\omega_m$  et  $\xi_m$  sont les fréquences naturelles et amortissements associés au mode  $m$ . Leur relation avec les valeurs propres  $\lambda_m$  est expliquée dans le paragraphe 1.2.1. Bien que la FFP décrive très bien la réalité physique observée, elle se prête mal aux schémas d'inférence en raison de sa forte non-linéarité par rapport aux paramètres. Pour cette raison, d'autres types de paramétrisations ont été développés, et seront présentés dans les prochains paragraphes.

### 1.1.3.3 Forme à dénominateur commun

Le développement de (1.17) en introduisant le schéma des cofacteurs (1.18) permet d'établir une formulation où chaque élément de la matrice des FRF est pondérée par un dénominateur commun :

$$\mathbf{P}(\omega)^{-1} = \frac{\boldsymbol{\Phi} \text{com}(\mathbf{P})^T(\omega) \mathbf{L}^T + \prod_{k=1}^M (\mathbf{j}\omega - \lambda_k)(\mathbf{j}\omega - \lambda_k^*) \mathcal{D}}{\prod_{k=1}^M (\mathbf{j}\omega - \lambda_k)(\mathbf{j}\omega - \lambda_k^*)} \quad (1.23)$$

La comatrice est construite suivant un schéma itératif qui fait appel aux mineurs du déterminant de  $\mathbf{P}(\omega)$ . Son degré par rapport à  $\omega$  se retrouve donc nécessairement inférieur au degré du déterminant. Ainsi, il est remarquable que les numérateurs et dénominateurs de la formulation (1.23) ont un degré inférieur ou égal à  $2M$ . Il est donc possible de paramétriser (1.23) par deux polynômes, l'un à coefficients scalaires  $\{q_n, n \in \llbracket 1, 2M \rrbracket\}$ , l'autre à coefficients matriciels  $\{\mathbf{R}_n \in \mathbb{R}^{N_o \times N_i}, n \in \llbracket 1, 2M \rrbracket\}$ ,

$$\mathbf{H}_{DC}(\omega) = \frac{\sum_{n=1}^{2M} \mathbf{R}_n(j\omega)^n}{\sum_{n=1}^{2M} q_n(j\omega)^n} \quad (1.24)$$

Évidemment, la comparaison de (1.23) et (1.24) montre que les coefficients  $\mathbf{R}_n$  sont fortement contraints, ce qui réduit drastiquement le nombre de degrés de liberté du problème. Cependant, les algorithmes utilisant la forme à dénominateur commun interprètent les  $\mathbf{R}_n$  comme des paramètres libres, ce qui se traduit par une large surdétermination du problème.

#### 1.1.3.4 Forme fractionnelle rationnelle

La déduction de la forme fractionnelle rationnelle des FRF à partir de l'espace d'état n'est pas détaillée ici, car non triviale (Reynders (2012)). Elle repose sur une *expression fractionnelle rationnelle* matricielle des FRF :

$$\mathbf{H}_{FFR}(\omega) = \sum_{n=1}^{2M} \mathbf{P}_n(j\omega)^n \left( \sum_{n=1}^{2M} \mathbf{Q}_n(j\omega)^n \right)^{-1} \quad (1.25)$$

Les degrés des polynômes peuvent différer, mais sont pris égaux pour simplifier. Ce modèle est également dit *RMFD (Right-Matrix Fraction Description)*. En posant  $N = 2M/N_i$ , les paramètres polynomiaux  $\{\mathbf{P}_n \in \mathbb{R}^{N_o \times N_i}, n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$  et  $\{\mathbf{Q}_n \in \mathbb{Q}^{N_i \times N_i}, n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$  peuvent être reliés aux matrices de l'espace d'état. En effet,  $\mathcal{A}$  s'identifie à la matrice de compagnon du dénominateur polynomial :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{Q}_{N-1} & \dots & -\mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{Q}_1 & -\mathbf{Q}_N^{-1} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{I}_{N_i} & & \mathbf{0}_{N_i} & \mathbf{0}_{N_i} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0}_{N_i} & & \mathbf{I}_{N_i} & \mathbf{0}_{N_i} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Du reste,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_N^{-1} \\ \mathbf{0}_{N_i} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \mathbf{P}_N \mathcal{Q}_N^{-1}, \quad \mathcal{C} = \left( \mathbf{P}_{N-1} - \mathcal{D} \mathcal{Q}_{N-1} \quad \dots \quad \mathbf{P}_0 - \mathcal{D} \mathcal{Q}_0 \right) \quad (1.27)$$

Nb. Les égalités ci-dessus sont à comprendre au sens de similarité.

### 1.1.3.5 Formulation discrète ou continue

Les différents modèles introduits dans les sections 1.1.3.1 à 1.1.3.4 reposent sur une description à temps continu. L'utilisation de descriptions continues pour modéliser des données discrètes est justifiée en section 1.2.3.3. Si la forme fractionnelle partielle est souvent utilisée sous sa forme continue, les descriptions DC et FFR sont généralement exploitées sous hypothèse discrète.

Les équivalents discrets des modèles (1.24) et (1.25) sont semblables à la structure continue. Simplement, la base polynomiale continue  $j\omega$  est remplacée par la variable discrète  $\Omega = e^{j\omega\Delta t}$  restreinte aux fréquences discrètes  $\omega_k$  obtenues par DFT. Les pôles discrets sont identifiés à partir des coefficients polynomiaux discrets, et doivent être traduits sous forme continue :  $\Lambda = \ln(\Lambda_d) / \Delta t$ .

### 1.1.4 Approches temporelles

Contrairement aux approches fréquentielles dont la paramétrisation peut aussi bien être continue que discrète, les approches temporelles sont essentiellement décrites d'un point de vue discret. Elles peuvent être obtenues à partir des espaces d'état discrets (1.13) et (1.14), ou déterminées à partir des transformées inverses des modèles fréquentiels.

Les descriptions continues sont évitées, car trop complexes à traiter. Pour s'en convaincre, il suffit d'analyser les transformées inverses des variables fréquentielles impliquées dans les modèles. Alors que la transformée  $Z^{-1}$  d'un signal discret  $z^n \mathbf{X}(z)$  se traduit par l'introduction

d'un retard temporel  $\mathbf{x}(t - n)$ , la transformée inverse de l'équivalent continu  $s^n \mathbf{X}(s)$  donne une forme différentielle  $d^n \mathbf{x}(t)/dt^n$ , peu propice au développement d'équations algébriques.

#### 1.1.4.1 Fonctions de réponses impulsionnelles

Dans le domaine temporel, l'équivalent de la matrice des FRF est la matrice des réponses impulsionnelles  $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^{N_o \times N_i}$  (IRF). Chaque ligne  $\mathbf{h}_m(t) \in \mathbb{R}^{1 \times N_i}$  représente une IRF. Les fonctions  $\mathbf{h}(t)$  et  $\mathbf{H}(\omega)$  décrivent exactement la même dynamique dans des domaines différents, la matrice des FRF étant la transformée de Fourier de la matrice des IRF :

$$\mathbf{y}^{obs}(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{u}(t) \Leftrightarrow \mathbf{Y}^{obs}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{U}(\omega) \quad (1.28)$$

Les IRF traduisent le comportement de la structure lorsque la sollicitation est instantanée, sous forme d'impulsion de Dirac. La réponse forcée du système s'obtient alors par une convolution entre les IRF et l'excitation. Il est en pratique difficile de déconvoluer l'équation (1.28) pour obtenir la matrice des IRF à partir de la connaissance de l'entrée et de la sortie. C'est pour cette raison que les modèles sont en général obtenus par les transformées inverses depuis le domaine fréquentiel. Il existe cependant une exception, l'espace d'état discret permettant d'établir une paramétrisation au sens markovien des IRF.

#### 1.1.4.2 Paramètres de Markov

La structure récursive de l'équation d'état (1.13) permet d'établir une réponse explicite du système. Typiquement, pour l'espace couplé (en prenant  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{2M \times 1}$ ),

$$\mathbf{y}^{obs}(t) = \mathbf{C} \sum_{l=0}^{k-1} \mathcal{A}_d^{k-1-l} \mathcal{B}_d \mathbf{u}_l + \mathcal{D} \mathbf{u}_k \quad (1.29)$$

Comme  $\mathcal{A}_d = e^{\mathcal{A}\Delta t}$ , ses exposants  $\mathcal{A}_d^k$  représentent la matrice d'état discrète au temps  $k$ . De ce point de vue, la solution de l'espace d'état s'identifie à un produit de convolution discret, et il est possible de séparer les IRF de l'excitation à partir de l'équation (1.28) :

$$\begin{cases} \mathbf{h}_0 = \mathcal{D} \\ \mathbf{h}_k = \mathbf{C}\mathcal{A}_d^{k-1}\mathcal{B}_d, \quad k > 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Ces résultats permettent de paramétrer les IRF via les matrices de l'espace d'état. Les éléments  $(\mathcal{D}, \mathbf{C}\mathcal{B}_d, \mathbf{C}\mathcal{A}_d\mathcal{B}_d, \dots, \mathbf{C}\mathcal{A}_d^{k-1}\mathcal{B}_d)$  sont appelés paramètres de Markov du problème. Ces résultats sont dérivés dans le cadre d'une condition initiale nulle  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{2M \times 1}$ , mais sont valables pour tout type de condition initiale, à condition que  $\mathcal{A}_d$  soit asymptotiquement nilpotente<sup>1</sup>. L'équivalent modal de cette description donne  $\mathbf{h}_{k>0} = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_d^{k-1} \mathbf{L}_d^T$ . En reprenant les hypothèses posées en section 1.1.3.2, une formulation temporelle discrète de la réceptance est établie :

$$\mathbf{h}_k = \sum_{m=1}^M Q_m \boldsymbol{\varphi}_{dm} \boldsymbol{\varphi}_{dm}^T e^{\lambda_m(k-1)\Delta t} + Q_m^* \boldsymbol{\varphi}_{dm}^* \boldsymbol{\varphi}_{dm}^H e^{\lambda_m^*(k-1)\Delta t} \quad (1.31)$$

À noter que cette dernière équation peut être obtenue en prenant la transformée  $Z^{-1}$  de l'équivalent discret de l'équation (1.20).

### 1.1.4.3 Modèles autorégressifs

La forme fractionnelle rationnelle continue des FRF s'exprime sous la forme d'un modèle autorégressif discret des IRF. La transformée inverse du modèle continu (1.25) donne une relation différentielle entre les entrées et les sorties :

<sup>1</sup> Cette propriété est en fait garantie par la stabilité du système, qui impose  $\mathcal{R}e(\lambda_m) < 0$ .



$$\sum_{n=0}^{N_p} \mathbf{P}_n \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{y}^{obs}(t) = \sum_{n=0}^{N_q} \mathbf{Q}_n \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{u}(t) \quad (1.32)$$

Dans l'équation ci-dessus, les ordres des deux polynômes sont distingués. La discrétisation de ce modèle donne lieu à une représentation récursive :

$$\sum_{n=0}^{N_p} \mathbf{P}_{dn} \mathbf{y}_{k-n}^{obs} = \sum_{n=0}^{N_q} \mathbf{Q}_{dn} \mathbf{u}_{k-n} \quad (1.33)$$

ou encore,

$$\mathbf{y}_k^{obs} = \sum_{n=1}^{N_p} \mathbf{P}'_{dn} \mathbf{y}_{k-n}^{obs} + \sum_{n=0}^{N_q} \mathbf{Q}_{dn} \mathbf{u}_{k-n} \quad (1.34)$$

Avec  $\mathbf{P}'_{dn} = -\mathbf{P}_{d0}^{-1} \mathbf{P}_{dn}$ . Les matrices  $\{\mathbf{P}'_{d0}, \dots, \mathbf{P}'_{dN_p}\}$  sont les coefficients du polynôme autorégressif. Les matrices  $\{\mathbf{Q}_{d0}, \dots, \mathbf{Q}_{dN_q}\}$  sont les coefficients du polynôme exogène. La classe (1.34) forme le groupe des modèles *ARX (AutoRegressive with eXogenous variable)*.

## 1.2 Les spécificités de l'analyse modale opérationnelle

### 1.2.1 Paramètres modaux

Le propos de l'analyse modale opérationnelle, et plus généralement de la discipline de l'identification modale, est d'estimer les paramètres modaux en se basant sur les différents modèles construits jusqu'ici. Ces paramètres modaux sont les valeurs propres  $\lambda_m$  et les déformées modales  $\boldsymbol{\varphi}_m$ . Plus marginalement, l'identification des vecteurs participations modales  $\mathbf{l}_m$  est requise dans les algorithmes poly-référence. La matrice résiduelle du mode est décrite par la combinaison  $\mathbf{A}_m = \boldsymbol{\varphi}_m \mathbf{l}_m^T$ .

Il est possible de traduire les valeurs propres  $\lambda_m$  sous une forme plus représentative du comportement structural. Il est bien connu que la matrice modale intervenant dans la décomposition modale (1.9) respecte des propriétés d'orthogonalité avec les matrices  $\mathbf{M}, \mathbf{K}$  de l'équation du mouvement (1.1). En invoquant l'hypothèse d'amortissement proportionnel, qui est une hypothèse sous-jacente du modèle d'amortissement visqueux, cette orthogonalité est aussi vérifiée pour la matrice  $\mathbf{C}$  :

$$\mathbf{\Psi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Psi} = \text{diag}(m_m), \quad \mathbf{\Psi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Psi} = \text{diag}(k_m), \quad \mathbf{\Psi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Psi} = \text{diag}(c_m) \quad (1.35)$$

Dans de telles conditions, il est possible de montrer que la matrice modale  $\mathbf{\Psi}$  est réelle, et chaque paire de coordonnées modale  $q_m/q_m^*$  respecte l'équation du mouvement découplée homogène dérivant de l'équation du mouvement (1.1) :

$$\ddot{q}_m(t) + 2\xi_m \omega_m \dot{q}_m(t) + \omega_m^2 q_m(t) = 0, \quad 1 \leq m \leq 2M \quad (1.36)$$

Dans cette dernière équation, les factorisations canoniques suivantes sont adoptées :  $\omega_m = \sqrt{k_m/m_m}$  et  $\xi_m = c_m/(2m_m\omega_m)$ . Ces deux quantités sont dites fréquence naturelle et ratio d'amortissement, respectivement. L'équation d'état découplée du système (1.10) en régime libre donne  $q_m(t) = q_m(0)e^{\lambda_m t}$ . En injectant ce résultat dans l'équation canonique (1.36), l'équation caractéristique suivante est obtenue :

$$\lambda_m^2 + 2\xi_m \omega_m \lambda_m + \omega_m^2 = 0, \quad 1 \leq m \leq 2M \quad (1.37)$$

La résolution de ce polynôme donne, pour chaque déformée modale réelle  $\psi_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ , une expression des solutions propres conjuguées en fonction du ratio d'amortissement et de la fréquence naturelle :

$$\lambda_m = -\omega_m \xi_m \pm j \omega_m \sqrt{1 - \xi_m^2} \quad (1.38)$$

### 1.2.2 OMA vs. EMA

L'identification des paramètres modaux à partir de mesures expérimentales peut être réalisée suivant deux schémas différents. La première procédure considère un certain nombre de mesures sur la structure sous excitation contrôlée. Ceci donne lieu à des mesures de réponse structurales et à des mesures d'excitation. Les FRF sont déduites du ratio de ces mesures, et les IRF peuvent être déterminées par des tests d'impact simulant une impulsion de Dirac. Les techniques de mesure sous excitation contrôlée appartiennent à la discipline de l'analyse modale expérimentale (EMA). Si l'EMA permet une caractérisation simple et robuste des propriétés modales, elle souffre de plusieurs défauts inhérents au contrôle de l'excitation :

- La mise en place des systèmes de sollicitation de la structure peut être complexe et coûteuse, voire impossible dans certaines situations.
- De nombreuses sources d'excitation stochastiques restent hors de contrôle, et ne sont souvent pas négligeables.
- Les excitations contrôlées ne sont pas représentatives des sollicitations réelles de la structure.

L'EMA se prête ainsi peu à la caractérisation de structures massives en dehors de l'environnement contrôlé d'un laboratoire. Dans le cas des turbines, il a été vu dans le chapitre précédent que l'EMA n'est pas un outil adéquat à la caractérisation modale, car les paramètres modaux sont fortement impactés par les conditions d'opération de la machine.

Pour remédier aux limites évoquées, le champ de l'analyse modale expérimentale s'est élargi, et les recherches se sont concentrées sur la possibilité d'identifier le système sans connaître l'excitation. C'est le propos de l'analyse modale opérationnelle (OMA). Les forces de sollicitation sont modélisées par des processus stochastiques dont le profil statistique est connu, mais dont

les paramètres sont à identifier conjointement avec le système modal. L'OMA est pratique pour l'analyse de grandes structures, et elle offre l'avantage de caractériser le comportement réel du système, sous son environnement opérationnel et sous excitation ambiante. Les algorithmes d'OMA ont cependant plusieurs limitations. La première est leur incapacité intrinsèque à normaliser les déformées modales, et l'identification ne permet que de déduire des *ODS* (*Operational Deflection Shapes*). En pratique, les déformées sont souvent normalisées à la masse unitaire, voir équation (1.21). L'OMA est également incapable de traiter les modes faiblement (voir pas) excités par le bruit ambiant.

Un concept assez courant en OMA est l'utilisation de références. Ces références servent généralement d'entrées des modèles, et peuvent être utilisées pour construire les matrices de covariance du modèle, remplaçant de ce fait les mesures faites en EMA. Les données de références, notées  $\mathbf{y}_k^{ref} \in \mathbb{R}^{N_{ref} \times 1}$ , doivent contenir l'ensemble des modes à identifier et doivent être le moins polluées possible par du bruit externe.

L'ensemble des modèles construits dans la section 1 reposent sur une connaissance de l'excitation  $\mathbf{u}$  pour réaliser l'identification. Les prochaines sections sont consacrées au développement d'approches capables de relier les modèles de FRF et d'IRF à des quantités mesurables sous excitation blanche.

### 1.2.3 Modèle d'excitation

En OMA, les forces d'excitation sont modélisées par des processus stochastiques. Une hypothèse largement répandue est que l'excitation ambiante prend la forme d'un bruit blanc centré et de variance inconnue. D'un point de vue statistique, le théorème central limite pousse souvent à associer au bruit blanc un modèle gaussien.

#### 1.2.3.1 Bruit blanc continu

Sur le plan théorique, un bruit blanc stationnaire  $\mathbf{w}(t)$  est défini comme un signal aléatoire dont la fonction de corrélation est nulle partout sauf au délai nul,  $\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(\tau) = \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}(0)\delta(\tau)$ . Le bruit

blanc repose donc sur un postulat d'indépendance statistique (parfois, l'hypothèse plus faible de décorrélation est invoquée). D'après cette définition, un bruit blanc est toujours d'espérance nulle. Si les éléments du vecteur  $\mathbf{w}(t)$  sont indépendants, alors  $\mathbf{R}_{ww}(0)$  est une matrice diagonale. La définition formelle du bruit blanc est purement mathématique, et n'a pas de sens physique. En effet, d'après la définition du bruit blanc, le théorème de Wiener-Khinchin établit que la densité spectrale de puissance (PSD) du bruit blanc est constante :  $\mathbf{S}_{ww}(\omega) = \mathbf{R}_{ww}(0)$ . Le théorème de Parseval démontre alors que la puissance associée est infinie.

Pour résoudre la divergence de la puissance, une solution pratique est de considérer que la PSD n'est pas constante sur l'ensemble des fréquences, mais seulement constante sur une bande passante  $[-K, K]$ . Alors,

$$\mathbf{S}_{ww}(\omega) = \begin{cases} \mathbf{R}_{ww}(0)/2K & \text{si } \omega \in [-K, K] \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.39)$$

Cette définition alternative modifie sensiblement la définition initiale du bruit blanc : la transformée inverse d'une fonction de type « porte » donne un sinus cardinal, et  $\mathbf{R}_{ww}(\tau) = \mathbf{R}_{ww}(0) \times \text{sinc}(2\pi K\tau)/2K$ . La matrice de covariance d'un signal aléatoire de moyenne nulle s'écrit comme l'intégrale de sa PSD. La covariance du bruit blanc est donc égale à sa corrélation en  $\tau = 0$ ,  $\mathbf{C}_{ww} = \mathbf{R}_{ww}(0)$ .

### 1.2.3.2 Bruit blanc discret

Par analogie avec la définition continue, la corrélation discrète  $\mathbf{R}_{ww\kappa} = \mathbb{E}\{\mathbf{w}_{k+\kappa}\mathbf{w}_k^T\}$  d'un bruit blanc discret stationnaire respecte la condition d'indépendance suivante :

$$\mathbf{R}_{ww\kappa} = \begin{cases} \mathbf{C}_{ww} & \text{si } \kappa = 0 \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.40)$$

La PSD discrète est donnée par  $S_{ww}(\kappa) = \mathbf{R}_{ww}(0)/2K$ . Le schéma de discrétisation de la corrélation s'écrit  $\mathbf{R}_{ww}(\kappa) = \mathbf{R}_{ww}(\tau)\delta(\tau - \kappa\Delta t)$ , et il en découle que  $\mathbf{R}_{ww}(0) = \mathbf{R}_{ww}(0)$ . Ainsi, quel que soit l'intervalle d'échantillonnage, les versions discrètes et continues de la PSD sont strictement égales.

### 1.2.3.3 Approches discrètes vs. approches continues

Comme indiqué ci-dessus, les PSD discrètes et continues d'un bruit blanc sont égales. Ceci indique que, dans des conditions de non-repliement, l'échantillonnage d'un bruit blanc continu donne un bruit blanc discret de statistique identique. Pintelon, Schoukens & Guillaume (2006) ont exploité ce résultat pour montrer que si l'excitation ambiante est réellement un bruit blanc, alors l'utilisation de modèles à temps continu pour modéliser les données discrètes est préférable à l'utilisation de modèles discrets. C'est la raison pour laquelle les modèles fréquentiels existent en temps continu et en temps discret. En revanche, et tel que mentionné précédemment, les modèles temporels sont uniquement abordés d'un point de vue discret, car le développement continu fait intervenir des différentiations difficiles à exploiter en traitement de signal.

### 1.2.3.4 Cas spécifique des sollicitations harmoniques

Dans la pratique, les structures peuvent être soumises à d'autres types d'excitation qu'un bruit blanc à large bande. En opération, les turbines hydroélectriques sont particulièrement sujettes aux sollicitations harmoniques. Ces sollicitations proviennent des harmoniques de la vitesse de rotation. L'existence de telles forces doit être modélisée pour ne pas introduire de biais dans l'identification. Il convient de distinguer deux figures de cas, présentées en Figure 1.3.

Le premier cas (Figure 1.3.a) est essentiellement rencontré en régime permanent, lorsqu'un pic harmonique est présent proche d'un mode de vibration. Il existe deux approches pour traiter ce type de pollution. La première approche consiste à retirer l'harmonique du spectre, et de réaliser l'identification sur le spectre résiduel. L'élimination de la composante harmonique est relativement aisée dans le domaine fréquentiel. Jacobsen, Andersen & Brincker (2007)

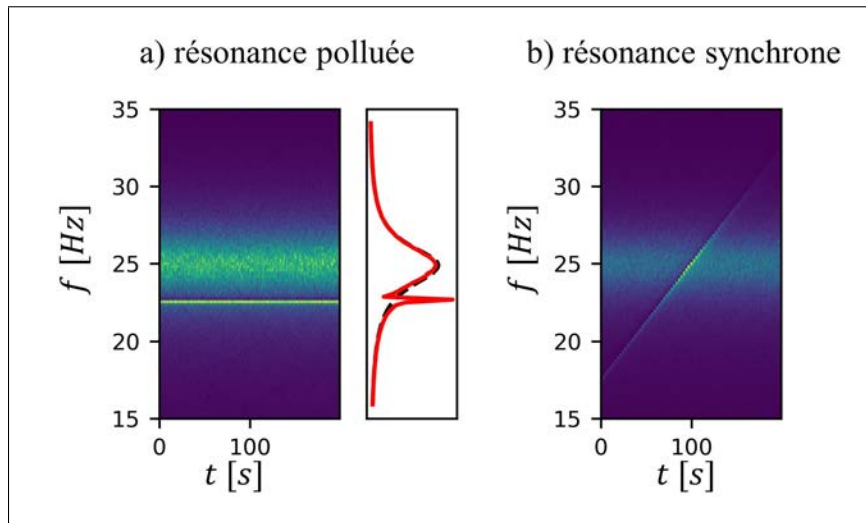


Figure 1.3 Spectres pollués par l'influence d'harmoniques

proposent de discriminer les harmoniques par des arguments statistiques, via l'étude des coefficients kurtosis. L'élimination de ces dernières est réalisée sur un principe de prolongement et d'interpolation. La deuxième méthode consiste à identifier les harmoniques conjointement avec les réponses modales. Cette approche est courante dans les modèles paramétriques, car les harmoniques peuvent être modélisées par un mode d'amortissement nul (Mohanty & Rixen (2004a)). Des modèles robustes ont été construits pour les algorithmes usuels ERA et SSI (voir sections 1.3.2.3) par Mohanty & Rixen (2004b), et plus récemment par Gres, Döhler, Andersen & Mevel (2020). L'algorithme d'Ibrahim (voir section 1.3.2.1) a également été adapté aux traitements d'harmoniques par Mohanty & Rixen (2006).

Le second cas (Figure 1.3.b) est rencontré en régime transitoire asynchrone, lorsque les harmoniques sont modulées en fréquence dans le temps. Dans une telle situation, l'harmonique modulée passe au travers du mode structural et génère une résonance synchrone. Lorsqu'une harmonique excite un mode structural, il est possible de caractériser le comportement modal de la résonance. L'extraction du contenu harmonique est permise par des méthodes de suivi d'ordres synchrones, plus connues sous le nom anglais d'*Order Tracking* (OT) (Fyfe & Munck (1997)). Cette classe d'outils permet de passer du domaine temporel vers le domaine harmonique, qualifié de domaine des ordres, donné en équation (1.41).

$$X(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} x(\theta) e^{-i\Omega\theta} d\theta \quad (1.41)$$

Les ordres se mesurent en nombre d'occurrences par révolution, et leur domaine est analogue au domaine fréquentiel en termes de propriétés. L'OT est très utilisé en analyse et en diagnostic des machines tournantes. Il existe quatre techniques principales d'extraction d'harmoniques, basée sur l'exploitation de données tachymétriques : depuis un corrélogramme direct (FS), par ré-échantillonnage angulaire (*Computer Order Tracking*, COT), par transformées de Fourier modulables (TVDFFT) et par filtrage de Vold-Kalman (VK). La méthode FS est directe, et extrait la  $k - ieme$  harmonique du signal en récupérant les fréquences  $k\omega(t)/2\pi$  depuis un spectre de Fourier court-terme. Les méthodes de ré-échantillonnage étudiées par Di Lorenzo (2017) permettent d'éviter le fenêtrage et les effets de fuite spectrale. Ces méthodes sont peu biaisées si la fréquence d'échantillonnage est grande, mais peu efficaces car l'étape de ré-échantillonnage est chronophage. Les éventuels erreurs sont imputables à la qualité de l'interpolation, et par la précision des intervalles de contrôle. Des techniques de transformées de Fourier adaptatives grâce à un kernel modulable ont été envisagées par Blough, Brown & Vold (1997). Une version améliorée de cette approche est proposée par Borghesani, Pennachi, Chatterton & Ricci (2014). Elle est basée sur un changement de variable dans le domaine d'intégration de la transformée de Fourier temporelle, donnant une transformée de Fourier à vitesse synchrone. Enfin, Stephens & Vold (2014) se sont intéressés à l'utilisation de filtres de Vold-Kalman pour extraire les ordres du signal. Di Lorenzo (2017) relève que ces deux techniques sont sujettes à des problèmes de phase, ce qui n'est pas le cas de la technique COT.

Le principal avantage des méthodes d'OT est qu'elles permettent d'obtenir un spectre d'excitation harmonique plat si l'amplitude de cette dernière est constant dans le domaine temporel. Ainsi, une excitation harmonique dans le domaine des ordres a une PSD constante, ce qui rend possible l'exploitation d'algorithmes d'OMA sur les réponses obtenues. La combinaison des méthodes d'OT aux méthodes d'OMA a été introduite par Janssens, Kollar, Peeters, Pauwels & Van der Auweraer (2006a), et est dite *Order Based Modal Analysis*. Dans la littérature, cette procédure



est peu utilisée. Elle a cependant montré des résultats probants pour des études de cas réels, voir Di Lorenzo, Manzato, Dabizzi, Peeters, Marulo & Desmet (2016a); Di Lorenzo, Palermo, Manzato, Dabizzi, Peeters, Desmet & Marulo (2016b).

## 1.2.4 Modèles stochastiques des données

### 1.2.4.1 Modèles AR(MA)

Les modèles *ARX* (1.34) introduits précédemment se traduisent, sous hypothèse de bruit blanc, en modèle *ARMA* (1.42). La partie exogène devient une partie de moyenne mobile (*MA*), qui établit une régression sur l'erreur du modèle. L'erreur du modèle coïncide avec la source d'excitation.

$$\mathbf{y}_k^{obs} = \sum_{n=1}^{N_p} \mathbf{P}'_{dn} \mathbf{y}_{k-n}^{obs} + \sum_{n=0}^{N_q} \mathbf{Q}_{dn} \mathbf{w}_{k-n} \quad (1.42)$$

La partie *MA*, qui est une combinaison linéaire d'échantillons de bruit blanc, peut être prise égale à un terme d'erreur  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ . Le modèle autorégressif *AR* (1.43) est obtenu. Dans la littérature, les modèles *AR* multivariés sont également appelés *VAR* (*Vector-Autoregressive*).

$$\mathbf{y}_k^{obs} = \sum_{n=1}^{N_p} \mathbf{P}'_{dn} \mathbf{y}_{k-n}^{obs} + \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (1.43)$$

Le défaut des modèles *AR* est que l'erreur ne peut être correctement décrite et représentative de la réalité. Pour corriger ce problème, une large surdétermination du problème est requise, ce qui se traduit par l'apparition de nombreux modes parasites. Les modèles *AR(MA)* fréquentiels se dérivent en considérant les transformées de Fourier des équations.

### 1.2.4.2 Espace d'état stochastique, filtres de Kalman

L'espace d'état discret (1.13) peut être modifié en tenant compte de la nature stochastique de l'excitation. Alors, les composantes d'excitation déterministes deviennent des termes d'erreur :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathcal{A}_d \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{y}_k^{obs} = \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{e}_k \end{cases} \quad (1.44)$$

Les bruits  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  et  $\mathbf{e}_k$  sont les excitations de l'espace d'état.  $\mathbf{e}_k$  prend également en compte les erreurs de mesure. Ces signaux sont centrés et de covariance :

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{e}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_k^T & \mathbf{e}_k^T \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \delta_{kk} \quad (1.45)$$

Les états associés au modèle (1.44) peuvent être identifiés en étape préliminaire au processus d'identification. Cette identification récursive est équivalente à un filtre de Kalman (Van Overschee & De Moor (1992)).

### 1.2.5 Modèles stochastiques quadratiques

En OMA, l'objectif est d'identifier les paramètres modaux à partir des différents modèles de la section 1.1, en considérant une entrée de type bruit blanc. Les données opérationnelles disponibles pour l'analyse peuvent être utilisées sous forme de matrices de covariance ou de corrélation. Elles peuvent également être transformées dans le domaine fréquentiel sous forme de matrices de densités spectrales. Ces approches spectrales et par corrélation sont basées sur une expression quadratique des données. Dans ce paragraphe, les différents aspects liés aux modèles quadratiques pour l'identification modale sont abordés. Les notions de corrélation/covariance et de PSD sont introduites, ainsi que leurs équivalents positifs. Les modèles d'identification

sous hypothèse d'excitation de type bruit blanc sont dérivés. Les méthodes d'estimation et les propriétés des estimateurs sont rapidement abordées et reliées aux définitions théoriques.

### 1.2.5.1 Définitions

Les quantités fondamentales dans l'expression quadratique des modèles sont : la fonction de corrélation, la fonction de covariance et la densité spectrale de puissance (PSD). Soient deux signaux  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  conjointement stationnaires. Leur corrélation  $\mathbf{R}_{xy}(\tau)$  est donnée en équation (1.46). Sous hypothèse de moyennes nulles, la covariance  $\mathbf{C}_{xy}(\tau)$  coïncide avec la corrélation. Dans la pratique, les moyennes sont très souvent nulles et aucune distinction n'est faite entre covariance et corrélation. Si la moyenne n'est pas nulle, la covariance décrit l'interaction des fluctuations des signaux, et  $\mathbf{C}_{xy}(\tau) = \mathbf{R}_{xy}(\tau) - \boldsymbol{\mu}_x \boldsymbol{\mu}_y$ . La Densité Spectrale de Puissance (PSD) croisée, au sens strict du terme, est une quantité asymptotique telle qu'introduite en équation (1.46), où  $\mathbf{X}_T(\omega)$  représente la transformée de Fourier du signal  $\mathbf{x}(t)$  de durée  $T$ . En vertu du Théorème de Wiener-Khinchin, la PSD croisée s'identifie à la transformée de Fourier de la fonction de corrélation  $\mathbf{S}_{xy}(\omega) = \mathcal{F}[\mathbf{R}_{xy}(\tau)]$ .

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{xy}(\tau) = \mathbb{E} \{ \mathbf{x}(t + \tau) \mathbf{y}(t)^T \} \\ \mathbf{S}_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \{ \mathbf{X}_T(\omega) \mathbf{Y}_T(\omega)^H \} \end{cases} \quad \mathbf{X}_T(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \mathbf{x}(t) e^{j\omega t} dt \quad (1.46)$$

Les propriétés de symétrie suivante sont remarquables pour les fonctions d'autocorrélation et les PSD :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx}(-\tau) &= \mathbf{R}_{xx}(\tau)^T \\ \mathbf{S}_{xx}(-\omega) &= \mathbf{S}_{xx}(\omega)^T \end{aligned} \quad (1.47)$$

Il est également à noter que  $\mathbf{S}_{xx}(\omega) = \mathbf{S}_{xx}(\omega)^H$ . Cette dernière est dite autoadjointe. Les équations (1.16) et (1.28) permettent d'établir les deux théorèmes fondamentaux pour les systèmes dynamiques. Ces théorèmes proposent (Brincker & Ventura (2015)) :

- La matrice de corrélation  $\mathbf{R}_{yy}(\tau)$  de l'observation est liée à la matrice de corrélation  $\mathbf{R}_{uu}(\tau)$  de l'excitation par la relation (1.48),

$$\mathbf{R}_{yy}(\tau) = \mathbf{h}(\tau) * \mathbf{R}_{uu}(\tau) * \mathbf{h}(-\tau)^T \quad (1.48)$$

- La PSD  $\mathbf{S}_{yy}(\omega)$  de l'observation est liée à la PSD  $\mathbf{S}_{uu}(\omega)$  de l'excitation par la relation (1.49),

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{S}_{uu}(\omega)\mathbf{H}(\omega)^H \quad (1.49)$$

Avant d'exploiter les propriétés du bruit blanc pour dériver les modèles d'observation, les notions de corrélation positive et de densité spectrale de puissance positive sont à définir. Ces quantités sont essentielles en OMA. Leur formulation est relativement simple, et motivée par les relations de symétrie (1.47). Partant de la corrélation entre deux signaux aléatoires issus de processus stochastiques, la corrélation positive est donnée par :

$$\mathbf{R}_{xy}^+(\tau) = \begin{cases} \mathbf{R}_{xy}(\tau) & \text{si } \tau > 0 \\ \mathbf{R}_{xy}(0)/2 & \text{si } \tau = 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \tau < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

La PSD positive est simplement la transformée de Fourier de la corrélation positive :  $\mathbf{S}_{xy}^+(\omega) = \mathcal{F}[\mathbf{R}_{xy}^+(\tau)]$ .

### 1.2.5.2 Estimateurs statistiques

Dans le paragraphe précédent, les corrélations et les PSD sont définies de manière théorique. Il est maintenant nécessaire d'établir des estimations expérimentales, et de les relier aux définitions théoriques. Ces estimations sont annotées d'un circonflexe reflétant leur nature expérimentale :  $\hat{\mathbf{S}}_{xy}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_{xy}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{xy}$ . La corrélation expérimentale s'écrit (pour des signaux conjointement stationnaires) :

$$\hat{\mathbf{R}}_{xy k} = \frac{1}{T} \sum_{\kappa=1}^{T-|k|} \mathbf{x}_{\kappa+k} \mathbf{y}_{\kappa}^T \quad (1.51)$$

La normalisation par  $T$  au lieu de  $T - |k|$  introduit un biais, mais elle permet de préserver la validité du théorème de Wiener-Kintchin (Brincker & Ventura (2015)). La PSD de l'échantillon, quant à elle, est établie comme suit :

$$\hat{\mathbf{S}}_{xy k} = \hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{Y}}_k^H, \quad \hat{\mathbf{X}}_k = \sqrt{\frac{\Delta t}{N}} \sum_{\kappa=1}^T \mathbf{x}_{\kappa} e^{-\frac{2j\pi\kappa k}{T}} \quad (1.52)$$

Ces estimateurs ne sont pas consistants : si les estimations expérimentales coïncident « en moyenne » avec les valeurs théoriques (1.46), il existe une variance irréductible qui ne décroît pas avec l'augmentation des données. Dans la pratique, de nombreuses stratégies de calcul font appel à des moyennes sur différentes réalisations pour obtenir des estimateurs plus proches des valeurs théoriques. Typiquement, la méthode de Welch est couramment utilisée pour calculer la PSD et la corrélation, et sépare un signal ergodique en  $N_S$  intervalles (*snapshots*) à partir desquels sont estimés les PSD et corrélations  $\hat{\mathbf{S}}_{xy k}^s$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{xy k}^s$  (Welch (1967)). Ces moyennes entre différents essais sont appelées « *ensemble average* ». Elles convergent rigoureusement vers les espérances théoriques sous réserve de l'ergodicité du système. Les estimations moyennées sont données par :

$$\hat{\mathbf{R}}_{xy k}^{av} = \frac{1}{N_S} \sum_{s=1}^{N_S} \hat{\mathbf{R}}_{xy k}^s, \quad \hat{\mathbf{S}}_{xy k}^{av} = \frac{1}{N_S} \sum_{s=1}^{N_S} \hat{\mathbf{S}}_{xy k}^s \quad (1.53)$$

Ces quantités sont de bons estimateurs, c'est à dire qu'elles sont asymptotiquement non-biaisées. Cependant, dans certains cas où les données sont très limitées, leur obtention peut s'avérer impossible.

### 1.2.5.3 Modèles stochastiques de PSD positive et de corrélation positive

Le système dynamique est supposé excité par un bruit blanc à large bande de covariance  $\mathbf{C}_{ww}$  et de moyenne nulle. Sa PSD constante est donnée par  $\mathbf{S}_{ww}(\omega) = \mathbf{C}_{ww}/2K$ , en accord avec l'équation (1.39). En injectant la paramétrisation fractionnelle partielle (1.20) dans l'équation (1.49), la PSD de l'observation est donnée par (1.54). À noter qu'une différence est préservée entre les déformées modales et les coefficients de participation modale, mais il est supposé que l'ensemble des mesures de sorties servent de référence. Ainsi, la PSD est carrée  $\mathbf{S}_{yy}(\omega) \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$ , et  $\mathbf{l}_m = \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\varphi}_m$ .

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{2K} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \left[ \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \mathbf{l}_m^T}{j\omega - \lambda_m} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_m^* \mathbf{l}_m^H}{j\omega - \lambda_m^*} \right] \mathbf{C}_{ww} \left[ \frac{\boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{l}_n^T}{j\omega - \lambda_n} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^* \mathbf{l}_n^H}{j\omega - \lambda_n^*} \right]^H \quad (1.54)$$

Le développement de cette expression suivi d'une décomposition en éléments simples permet d'établir :

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\gamma}_m^T}{j\omega - \lambda_m} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_m^* \boldsymbol{\gamma}_m^H}{j\omega - \lambda_m^*} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_m \boldsymbol{\varphi}_m^T}{-j\omega - \lambda_m} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_m^* \boldsymbol{\varphi}_m^H}{-j\omega - \lambda_m^*} \quad (1.55)$$

où  $\boldsymbol{\gamma}_m$  est un vecteur exprimé par :

$$\boldsymbol{\gamma}_m = \frac{1}{2K} \sum_{n=1}^M \left[ \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^* \mathbf{l}_n^H}{-\lambda_m - \lambda_n^*} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_n \mathbf{l}_n^T}{-\lambda_m - \lambda_n} \right] \mathbf{C}_{ww} \mathbf{l}_m \quad (1.56)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de (1.55), la fonction de corrélation est obtenue.

En ne préservant que les termes à temps positifs, la corrélation positive est déterminée :

$$\mathbf{R}_{yy}^+(t) = \frac{\mathcal{H}(t)}{2\pi} \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\gamma}_m^T e^{\lambda_m t} + \boldsymbol{\varphi}_m^* \boldsymbol{\gamma}_m^H e^{\lambda_m^* t} \quad (1.57)$$

$\mathcal{H}(t)$  est la fonction de Heaviside. La transformée de Laplace de (1.57) (en excluant  $\mathcal{H}(t)$  qui traduit la nature à temps positif de la corrélation positive) donne la PSD positive (1.58).

$$\mathbf{S}_{yy}^+(\omega) = \sum_{m=1}^M \frac{\boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\gamma}_m^T}{j\omega - \lambda_m} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_m^* \boldsymbol{\gamma}_m^H}{j\omega - \lambda_m^*} \quad (1.58)$$

La comparaison de ces nouveaux modèles (1.57) et (1.58) avec les modèles d'IRF et de FRF (1.31) et (1.20) révèle des structures mathématiques identiques. Ce résultat est fondamental en OMA, et montre que la PSD positive des données peut être associée à un modèle de FRF pour réaliser l'identification dans le domaine fréquentiel, et que la corrélation positive suit un modèle d'IRF dans le domaine temporel.

Il est possible de donner l'interprétation suivante pour justifier l'équivalence entre les structures d'IRF et de corrélation ou de FRF et de PSD. Les IRF sont les réponses temporelles issues d'une excitation impulsionnelle d'amplitude nulle partout sauf au temps initial 0. Similairement, la corrélation des sorties est la réponse issue d'une excitation de corrélation nulle partout sauf au temps 0. Les FRF s'obtiennent par la normalisation des réponses par l'excitation. Il s'agit donc d'une description sous excitation unitaire constante. Similairement, la PSD des sorties est obtenue sous un spectre constant, par propriétés de l'excitation blanche. Finalement, il s'avère que l'hypothèse de bruit blanc permet de relier les structures déterministes des réponses structurales aux structures stochastiques des estimateurs statistiques. Cette équivalence est la clé de voute de l'analyse modale opérationnelle.

#### 1.2.5.4 Modèle stochastique d'amortissement proportionnel

En reprenant la formulation de la PSD (1.54), il est possible de dériver un autre modèle sous hypothèse d'amortissement proportionnel. Sous cette hypothèse,  $\boldsymbol{\varphi}_m$  est un vecteur réel et les FRF sont données en équation (1.22). Alors,

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{2K} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \boldsymbol{\varphi}_m \boldsymbol{\varphi}_m^T \left[ \frac{1/2\lambda_m}{j\omega - \lambda_m} + \frac{1/2\lambda_m^*}{j\omega - \lambda_m^*} \right] \mathbf{C}_{ww} \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^T \left[ \frac{1/2\lambda_n}{j\omega - \lambda_n} + \frac{1/2\lambda_n^*}{j\omega - \lambda_n^*} \right]^H \quad (1.59)$$

Ces différents termes peuvent grandement se simplifier. Une bonne approximation de la PSD peut être déduite sous hypothèse d'amortissement faible, en fonction des paramètres modaux :

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) \approx \frac{1}{2K} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{\boldsymbol{\varphi}_m}{(\omega_m^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_m\xi_m} S_{mn} \frac{\boldsymbol{\varphi}_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) - 2j\omega\omega_n\xi_n} \quad (1.60)$$

avec  $S_{mn} = \boldsymbol{\varphi}_m^T \mathbf{C}_{ww} \boldsymbol{\varphi}_n$ . Sous forme matricielle, il est d'usage d'écrire :

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) \approx \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_{qq}(\omega) \boldsymbol{\Phi}^T, \quad \mathbf{S}_{qq}(\omega) = \text{diag}(h_m)(\omega) \mathbf{S} \text{diag}(h_m^*)(\omega) \quad (1.61)$$

### 1.2.5.5 Espace d'état stochastique

Il est possible de donner une formulation de l'espace d'état stochastique (1.44) en termes de covariances. Le processus stochastique de l'espace d'état est stationnaire, et donne une variable d'état ergodique,  $\mathbb{E}\{\mathbf{x}_k\} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbb{E}\{\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T\} = \mathbf{R}_{xx}$ . La variable d'état et les erreurs sont des variables indépendantes. En introduisant la matrice de covariance suivante :

$$\mathbf{R}_{xy} = \mathbb{E}\{\mathbf{x}_k \mathbf{y}_k^T\} \quad (1.62)$$

L'espace d'état peut être transformé en termes de covariance, donnant les équations de Lyapunov (Boonyapinyo & Janesupasaeree (2010)) :



$$\begin{cases} \mathbf{R}_{yy\ 0} = \mathbf{C}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{R}_{yy\ k} = \mathbf{C}\mathcal{A}_d^{k-1}\mathbf{R}_{xy} \\ \mathbf{R}_{xx} = \mathcal{A}_d\mathbf{R}_{xx}\mathcal{A}_d^T + \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{R}_{xy} = \mathcal{A}_d\mathbf{R}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{S} \end{cases} \quad (1.63)$$

Cette formulation stochastique est très proche de la formulation déterministe markovienne (1.30), où le système de matrices  $(\mathcal{A}_d, \mathcal{B}_d, \mathbf{C}, \mathcal{D})$  est remplacé par le système  $(\mathcal{A}_d, \mathbf{R}_{xy}, \mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}_2)$ . La conservation de la structure du modèle et l'invariance de la matrice d'état au passage à la formulation stochastique permet de déduire que les pôles du système stochastique sont identiques à ceux du système déterministe. La correspondance entre la covariance et les IRF évoquée précédemment est retrouvée.

### 1.3 Algorithmes d'OMA

#### 1.3.1 Techniques d'identification

En OMA, quatre étapes sont nécessaires pour la détermination des paramètres modaux : la prise de mesure, le prétraitement des données, le développement des modèles et la détermination du meilleur modèle pour les données. L'identification se consacre à la résolution de ce quatrième point. Les différents modèles exposés dans les sections précédentes permettent de relier les observations théoriques aux paramètres modaux. De manière générale, une donnée  $\hat{y}_k(\theta|\mathcal{M})$  générée par le modèle  $\mathcal{M}$  de paramètre  $\theta$  est reliée à l'observation expérimentale via une erreur  $\varepsilon_k$  :

$$y_k = \hat{y}_k(\theta|\mathcal{M}) + \varepsilon_k \quad (1.64)$$

$\varepsilon_k$  modélise l'ensemble des erreurs potentielles, à savoir, les erreurs expérimentales, les inadéquations du modèle, etc. Dans ce mémoire, cette erreur sera modélisée par un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance inconnue. L'étape suivante du processus d'analyse est de

déterminer une procédure qui permet d'estimer les paramètres modaux à partir des observations expérimentales. Il existe trois classes d'outils permettant de réaliser l'estimation : les méthodes non paramétriques, les méthodes de prédiction d'erreur (*PEM, Prediction Error Method*), et les méthodes de sous-espaces.

### 1.3.1.1 Identification non paramétrique

L'identification non paramétrique consiste à identifier les paramètres modaux sans passer par une étape d'estimation de paramètres. Les PSD et corrélations ne sont pas considérées comme des modèles, mais comme des objets dont les propriétés permettent de réaliser une estimation fiable. En général, l'objectif est de parvenir à exprimer les données sous une forme qui met en évidence les propriétés modales. Les transformées de Fourier et de Laplace. Les techniques avancées d'identification non-paramétrique donnent des résultats remarquables sous des hypothèses faibles. sont des exemples d'algorithmes non paramétriques, desquels les pics d'amplitudes peuvent servir à identifier les fréquences naturelles. Les techniques plus rudimentaires sont très sensibles au bruit, et sont souvent utilisées comme des méthodes de prétraitement des données avant identification. Typiquement, les transformées de Fourier sont impliquées dans l'expression fréquentielle des données, utilisées ensuite dans des algorithmes d'identification paramétriques.

L'idée des techniques non paramétriques est d'estimer les paramètres modaux en exhibant du signal des propriétés connues. Ce type d'approche ne nécessite que de très peu d'hypothèses, et caractérise en général le signal sur la base de transformées judicieusement choisies : transformée Z, transformée de Fourier ou en ondelettes, décompositions en valeurs singulières, technique de décrétement aléatoire RDT (Antoni & El badaoui (2011)), analyse de cohérence (Van der Auweraer, Mas, Peeters, Janssens & Vecchio (2008)), etc. Aucune hypothèse de structure de régression sous-jacente n'est nécessaire pour réaliser l'identification. Les méthodes de séparation de sources en aveugle (BSS, Blind Source identification) sont une classe d'outils très performante pour l'identification (Chauhan, Monnier & Gryllias (2014); Sadhu & Narasimhan (2017)). Ils permettent une séparation très précise des réponses modales sous des hypothèses raisonnables de décorrélation des coordonnées modales. Basée sur un algorithme JADE (*Joint Approximation*

on *Diagonalization of Eigen-matrices*), l'approche de Castiglione, Antoni & Garibaldi (2018) propose un modèle robuste pour la séparation des contributions modales. La validation basée sur un système très complexe avec de nombreux modes très proches, démontre la versatilité de la méthode et son efficacité.

### 1.3.1.2 PEM

Les techniques d'erreur de prédiction sont très courantes en analyse des systèmes. L'identification est liée à une notion d'optimalité, dans le sens où les paramètres estimés minimisent l'erreur entre le modèle et les données expérimentales. Le schéma général est donné en équation (1.65) (Ljung (1999)).

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmin}} V_N(\boldsymbol{\theta}), \quad V_N(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \int \circ \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\boldsymbol{\theta}) \quad (1.65)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M})$  est le résidu de modélisation ou erreur de prédiction,  $\mathbf{F}$  un filtre linéaire stable et  $\int$  une fonction scalaire, généralement quadratique positive.  $V_N$  est interprétable en tant que norme. Dans le cas particulier de régressions linéaires, le modèle s'écrit sous la forme  $\hat{\mathbf{y}}_k(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) = \mathbf{r}_k \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}_k$  et la PEM devient un problème aux moindres carrés (*Least-Squares, LS*) qui peut s'exprimer sous une forme réduite :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \mathbf{R}_N^\dagger \hat{\mathbf{Y}}_N(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}), \quad \hat{\mathbf{Y}}_N(\boldsymbol{\theta}|\mathcal{M}) = (\hat{\mathbf{y}}_0, \dots, \hat{\mathbf{y}}_N), \quad \mathbf{R}_N = (\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (1.66)$$

où l'exposant  $\dagger$  est l'opérateur d'inversion de Moore-Penrose,  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ .  $\mathbf{A}^H$  est la matrice adjointe de  $\mathbf{A}$ . Les techniques de maximum de Vraisemblance (*Maximum Likelihood Estimators, MLE*) appartiennent également aux méthodes *PEM*. Elles se basent sur un principe de similarité statistique, et leur objectif est de faire coïncider la distribution statistique du modèle et la fonction de vraisemblance des données. En d'autres termes, les paramètres sont estimés en maximisant la probabilité que le modèle génère la statistique des observations.

### 1.3.1.3 Techniques de sous-espaces

Les méthodes de sous-espaces ont pour objectif général d'identifier les relations causales du système étudié pour réaliser l'identification. Elles sont essentiellement destinées à estimer les matrices de l'espace d'état à partir des données observées. Ces estimations reposent généralement sur des régressions linéaires ou sur des décompositions en valeurs singulières (*eigen-realization*) pour identifier les sous-espaces stochastiques caractéristiques du signal et isoler les erreurs de modèle. Parmi les méthodes de sous-espaces, il est courant de baser l'identification sur des algorithmes de réalisation, qui fonctionnent par projection des données futures sur l'espace des données passées pour mettre en évidence les structures de corrélation existantes (Van Overschee & De Moor (1992)).

Les techniques de sous-espaces sont généralement beaucoup plus simples à mettre en œuvre que les méthodes *PEM*, en raison de la nature linéaire de l'identification. En revanche, cette facilité est souvent au détriment de la qualité de l'identification. De plus, des étapes supplémentaires sont nécessaires pour déduire les paramètres modaux des matrices du système. Les méthodes de sous-espaces peuvent être rapprochés des techniques de variables instrumentales appliquées à l'espace d'état (Viberg (1995)).

## 1.3.2 Algorithmes usuels dans le domaine temporel

### 1.3.2.1 Algorithme d'Ibrahim

Historiquement, l'algorithme d'Ibrahim est le premier algorithme dont le développement est dédié à l'analyse modale opérationnelle. Il peut être vu comme une généralisation paramétrique de la RDT, d'après Ibrahim (1977). La formulation du problème se base sur la paramétrisation markovienne des IRF déterministes (1.30),  $\mathbf{h}_{k>0} = \mathbf{\Phi}_d \mathbf{\Lambda}_d^{k-1} \mathbf{L}_d^T$ . Le modèle considère que les données d'entrées sont des mesures de déplacement représentant des exponentielles amorties initiées par une excitation impulsionnelle (Ibrahim & Milkulcik (1977)). Alors,  $\mathbf{y}_k^{obs} = \mathbf{C}_d \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d^{k-1} \mathbf{U}_0$ ,

avec  $U_0 = L_d^T u_0$  les conditions initiales. Pour obtenir une estimation du modèle, les données sont rassemblées sous forme de matrices de Hankel décalées de  $2\Delta t$  :

$$\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l-3}^{obs} \\ \mathbf{y}_2^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l-2}^{obs} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_o \times l}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_3^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l-1}^{obs} \\ \mathbf{y}_4^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_l^{obs} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N_o \times l} \quad (1.67)$$

La matrice de retard  $\mathbf{H}_0$  est ensuite modélisée à l'aide du modèle d'exponentielles amorties (Brincker & Ventura (2015)) :

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{X}_d \mathbf{M}_d, \quad \mathbf{X}_d = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{C}_d \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Lambda}_d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_d = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_d U_0 & \boldsymbol{\Lambda}_d^{l-3} U_0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

Dans cette formulation, la matrice modale  $\mathbf{X}_d$  de l'espace d'état discret est quasiment retrouvée. La matrice  $\mathbf{H}_1$  peut ensuite s'écrire sous une forme proche,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{X}_d \boldsymbol{\Lambda}_d^2 \mathbf{M}_d$ . En rassemblant ces informations, l'équation d'Ibrahim est établie :

$$\mathbf{A}_{IDT} \mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{A}_{IDT} = \mathbf{X}_d \boldsymbol{\Lambda}_d^2 \mathbf{X}_d^{-1} \quad (1.69)$$

Traditionnellement,  $\mathbf{A}_{IDT}$  est identifiée via une approche double-LS pour minimiser les biais :  $\hat{\mathbf{A}}_{IDT} = (\hat{\mathbf{A}}_{IDT 1} + \hat{\mathbf{A}}_{IDT 2})/2$ , avec  $\hat{\mathbf{A}}_{IDT 1} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_0^T (\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_0^T)^{-1}$  et  $\hat{\mathbf{A}}_{IDT 2} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_1^T (\mathbf{H}_0 \mathbf{H}_1^T)^{-1}$ . De récentes améliorations ont été apportées par Malekjafarian, Brincker, Ashory & Khatibi (2012) pour traiter les cas de pôles proches, en juxtaposant différentes réponses libres de retard différent. Une version complète pour des systèmes multiple-input a également été proposée par Brincker, Olsen, Amador, Juul, Malekjafarian & Ashory (2017), via la construction de matrices de Toeplitz de rang plein.

### 1.3.2.2 Approches AR(MA)

Les modèles ARMA sont très courants en analyse modale opérationnelle (Gontier, Smail & Gautier). Les algorithmes qui en découlent peuvent réaliser l'identification à partir de nombreuses méthodes PEM, voir Cooper (1990). Ces méthodes impliquent des schémas non linéaires, dus à la partie de moyenne mobile du modèle. Eykhoff (1974) a montré que l'identification basée sur des approches LS simples mènent à des estimations biaisées. De nombreuses approches plus complètes existent, par exemple,

- La méthode *RLS* (moindres carrés récurrents) est étudiée par Smail, Thomas & Lakis (1999), et repose sur une estimation *one-step-ahead* des paramètres optimaux.
- La méthode *OE* (*Output-Error*) suit le même schéma que les RLS, mais sélectionne le vecteur des données de manière sensiblement différente (Smail *et al.* (1999)). L'identification est basée sur des schémas de Gauss-Newton (Ljung (1999)).
- Les méthodes double-LS proposées par Ibrahim (1986). Le schéma est similaire à la procédure double-LS proposée dans l'algorithme d'Ibrahim dans la section précédente.
- Les méthodes *Total LS* développées par Golub & Van Loan (1980).
- les approches par variable instrumentale proposées par Eykhoff (1974).

Les structures AR sont très populaires en identification, car leur résolution est relativement simple via des méthodes PEM (Vu, Thomas, Lakis & Marcouiller (2011)). Une simple régression linéaire LS en utilisant une factorisation QR est suffisante, et donne une identification orientée données. Les paramètres peuvent également être déduits de la corrélation via l'équation de Yule-Walker, donnant une identification orientée corrélation. Chaque pôle du système à identifier doit faire appel à deux degrés AR. L'obtention des coefficients polynomiaux permet ensuite de retrouver les paramètres modaux du système grâce à la diagonalisation matrice de compagnon.

### 1.3.2.3 Sous-Espaces Stochastiques (SSI) et *Eigen-Realization* (ERA)

Initialement dédié au contrôle des systèmes, l'algorithme SSI a été adapté par Juang & Pappa (1985) pour réaliser de l'identification modale. Les algorithmes SSI sont une reformulation des modèles ARMA, dont l'identification ne repose plus sur de l'optimisation non linéaire, mais sur des concepts de sous-espaces. ERA est un cas particulier de l'approche SSI. Les algorithmes ERA et SSI ont pour objectif de déterminer les paramètres  $(\mathcal{A}_d, \mathbf{R}_{xy}, \mathbf{C}, \mathbf{C}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{C}^T + \mathbf{E}_2)$  des équations de Lyapunov (1.63).

Le prétraitement des données consiste en la construction de deux matrices de Hankel de  $l$  colonnes ( $l \rightarrow \infty$  pour obtenir de bonnes propriétés asymptotiques), l'une des données passées et l'autre des données futures (par rapport à un temps moyen  $k$ ) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_{p\ k} \\ \mathbf{H}_{f\ k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l-1}^{obs} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1}^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l+k-2}^{obs} \\ \mathbf{y}_k^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l+k-1}^{obs} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{y}_{2k-1}^{obs} & \cdots & \mathbf{y}_{l+2k-2}^{obs} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{R}^{kN_o \times l} \\ \\ \in \mathbb{R}^{kN_o \times l} \end{matrix} \quad (1.70)$$

Les matrices de Hankel (1.70) sont transformées en une matrice de Toepliz des covariances des mesures, donnée en équation (1.71). Cette étape fournit une réduction significative des données, car les colonnes des matrices de Hankel sont de dimension  $l \gg kN_o$  pour un problème bien conditionné.

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{H}_{f\ k} \mathbf{H}_{p\ k}^T = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}_{yy\ k} & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ k-1} & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ 1} \\ \hat{\mathbf{R}}_{yy\ k+1} & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ k} & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ 2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hat{\mathbf{R}}_{yy\ 2k-1} & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ 2k-2} & \cdots & \hat{\mathbf{R}}_{yy\ k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kN_o \times kN_o} \quad (1.71)$$

L'identification du système repose sur l'identification préliminaire des sous-matrices d'observabilité et de contrôlabilité du système :

$$\mathbf{O}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathcal{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathcal{A}_d^{k-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_k = \left( \mathcal{A}_d^{k-1}\mathbf{R}_{xy} \quad \dots \quad \mathcal{A}_d\mathbf{R}_{xy}, \mathbf{R}_{xy} \right) \quad (1.72)$$

Peeters & De Roeck (2000) pose les conditions d'identifiabilité suivantes : i) le couple  $(\mathbf{C}, \mathcal{A}_d)$  est observable, i.e., l'ensemble des modes à identifier sont présents dans les mesures, et ii) le couple  $(\mathbf{R}_{xy}, \mathcal{A}_d)$  est contrôlable, i.e., les modes à identifier sont effectivement excités par un bruit stochastique blanc. La relation (1.63) permet d'établir une relation entre la matrice de Toepliz, la matrice d'observabilité et la matrice de contrôlabilité :

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{O}_k \mathbf{\Gamma}_k \quad (1.73)$$

L'identification repose sur la SVD de la matrice de Toepliz  $\mathbf{T}_k = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}_n\mathbf{S}_n\mathbf{V}_n^T$ . Le triplet  $(\mathbf{U}_n, \mathbf{S}_n, \mathbf{V}_n)$  représente la SVD tronquée aux  $n$  valeurs singulières non nulles de  $\mathbf{S}$ .  $n$  est alors l'ordre du modèle. Ainsi,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{O}}_k &= \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_k &= \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \end{aligned} \quad (1.74)$$

Les estimées  $\hat{\mathbf{C}}$  et  $\hat{\mathbf{R}}_{xy}$  sont trivialement déduites de  $\hat{\mathbf{O}}_k$  et  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_k$ .  $\hat{\mathcal{A}}_d$  peut être déduite de différentes manières. La méthode proposée par Reynders, Pintelon & De Roeck (2008) donne  $\hat{\mathcal{A}}_d = (\mathbf{S}_{IO}\hat{\mathbf{O}}_k)^\dagger \mathbf{S}_{OI}\hat{\mathbf{O}}_k$ , avec  $\mathbf{S}_{OI} = (\mathbf{0}_{(k-1)l \times l}, \mathbf{I}_{(k-1)l})$  et  $\mathbf{S}_{IO} = (\mathbf{I}_{(k-1)l}, \mathbf{0}_{(k-1)l \times l})$ .

Cette approche est dite *SSI-COV*, car l'identification est basée sur une étape d'estimation des covariances du système. Elle est également dite *ERA*, voir Juang & Pappa (1985). Pour réduire



les temps de calcul, Peeters & De Roeck (2000) proposent de réaliser une identification basée sur des données de référence, donnant la *reference-based SSI-COV*. Ceci permet de réduire la dimensionalité du problème, car la covariance  $\mathbf{R}_{yyk} \in \mathbb{R}^{N_o \times N_o}$  n'est plus estimée sur l'ensemble des mesures, mais sur un certain nombre de références  $N_{ref} < N_o$ , donnant  $\mathbf{R}_{yyk}^{ref} \in \mathbb{R}^{N_o \times N_{ref}}$ .

Le principal biais des méthodes par covariance vient de l'étape d'estimation (1.71), qui est d'autant plus biaisée que  $l$  est faible. Pour s'affranchir de l'étape d'estimation des covariances, des formulations *SSI-DATA* orientées données ont été imaginées par Van Overschee & De Moor (1992). Plus de détails sont fournis par Brincker & Ventura (2015) et Boonyapinyo & Janesupasaeree (2010). La version *reference-based SSI-DATA* a également été implémentée par Peeters & De Roeck (2000). Dans les version orientées données, l'étape de construction des covariances est remplacée par la projection  $\mathbf{P}_k$  de l'image des mesures futures sur l'image des mesures passées (Peeters & De Roeck (2001)). Van Overschee & De Moor (1996) reformule cette projection en termes de matrices de Hankel :

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{H}_{f k} \mathbf{H}_{p k}^T (\mathbf{H}_{p k} \mathbf{H}_{p k}^T)^{\dagger} \mathbf{H}_{p k} \quad (1.75)$$

À l'instar des covariances, cette projection permet d'éliminer les composantes de bruit. De manière similaire à la factorisation (1.73) pour la matrice de Toeplitz, la matrice de projection peut être factorisée comme suit :

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{O}_k \hat{\mathbf{X}}_k \quad (1.76)$$

où  $\hat{\mathbf{X}}_k = (\hat{\mathbf{x}}_k, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k+l-1})$  est la matrice des séquences de Kalman.  $\hat{\mathbf{x}}_k$  est l'estimation de l'état  $\mathbf{x}_k$  par filtre de Kalman. La matrice d'observabilité est estimée de la même manière qu'en équation (1.74) en se basant sur la SVD de la matrice de projection  $\mathbf{P}_k$ . La séquence de Kalman est simplement estimée par :  $\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{O}}_k^{\dagger} \mathbf{P}_k$ .

En général, l'ordre du modèle de sous-espace est donné par le nombre de valeurs singulières non nulles de  $T_k$ . Cependant, dans la pratique, il n'y a souvent aucune valeur nulle ni d'effondrement soudain des valeurs propres. Ceci est dû aux erreurs de modèle et à la nature potentiellement colorée des forces d'excitations. Il peut être difficile de caractériser l'ordre sans décision arbitraire. Pour lever cette problématique, l'utilisation de diagrammes de stabilisation est appréciée (voir section 1.4.2.2 pour plus de détails).

### 1.3.3 Algorithmes usuels dans le domaine fréquentiel

#### 1.3.3.1 Approches non-paramétriques

Historiquement, les premières approches spectrales sont de nature non paramétrique. La procédure la plus simple consiste à identifier les fréquences naturelles à partir des pics observés dans les PSD (*pick-picking* ou *Basic Frequency Domain, BFD*). Une extension de cette approche consiste à exploiter la SVD de la PSD afin d'éliminer le bruit et d'obtenir des pics plus clairs. Les pics de valeurs singulières correspondent alors aux fréquences propres, et les déformées modales coïncident avec le vecteur singulier associé au pic des valeurs singulières. Cette méthode est dite *FDD (Frequency Domain Decomposition)*, et a été popularisée par les travaux de Brincker, Zhang & Andersen (2001). Une version améliorée de cet algorithme a été développée par Brincker, Andersen & Jacobsen (2007), donnant la *E-FDD (Enhanced-FDD)*. Cette extension propose de décomposer la réponse d'un système MDDL en un jeu de réponses UDDL à partir du *MAC (Modal Assurance Criterion)*, voir Gade, Moller, Herlufsen & Konstantin-Hansen (2005). L'intérêt de cette amélioration est qu'elle permet d'estimer les amortissements modaux, malgré un fort biais sur les estimations. Ce biais a été étudié par Hasan, Ahmad, Leong & Hee (2018).

#### 1.3.3.2 Algorithmes LSCF et p-LSCF

L'algorithme *LSCF (Least-Squares Complex Frequency-domain)* est basé sur l'identification de la paramétrisation à dénominateur commun de la PSD positive. La description des étapes d'identification est disponible dans les travaux de Guillaume, Verboven, Vanlanduit, Van der

Auweraer & Peeters (2003). Le LSCF est un équivalent fréquentiel du LSCE. Initialement développé pour initialiser des solveurs au maximum de vraisemblance, le LSCF s'est montré très efficient et précis dans le traitement des données. Cependant, différents problèmes sont rapportés dans la littérature (par exemple, par Van der Auweraer, Guillaume, Verboven & Vanlanduit (2001a)) concernant le conditionnement du résidu matriciel (qui doit être de rang 1, mais dont le rang n'est pas conservé dans une étape de SVD) et des difficultés d'interprétation des diagrammes de stabilisation. Ces différents problèmes peuvent être résolus conjointement par une généralisation poly-référence du modèle LSCF. Cette généralisation, proposée par Peeters, Van der Auweraer, Guillaume & Leuridan (2004), considère la paramétrisation fractionnelle rationnelle. L'expression matricielle du numérateur permet de s'affranchir de la SVD pour obtenir un résidu matriciel de rang 1.

Dans ces algorithmes, les données  $\mathbf{S}_{yyk}^{ref} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_{ref}}$  sont des spectres croisés avec des mesures de référence, voir Peeters, Vanhollebeke & Van der Auweraer (2007). La procédure d'identification s'établit en deux temps. Une première étape repose sur l'estimation LS du polynôme dénominateur via une décomposition QR de la Jacobienne du problème. Les pôles complexes sont obtenus par le problème aux valeurs propres de la matrice de compagnon. La sélection des pôles stables sur le diagramme de stabilisation permet ensuite l'estimation de la partie numérateur du problème, i.e., la détermination des déformées modales et des coefficients de participation. Cette étape est qualifiée de *LSFD (Linear Least-Square Frequency Domain)* par Peeters & Van der Auweraer (2005). Ces algorithmes sont de robustes méthodes d'identification dans des scénarios non bruités, mais il a été mis en évidence que l'augmentation du bruit dans les données se traduit par un biais significatif sur l'amortissement. Une étude de Boswald, Goge, Fullekrug & Govers (2006) montre que l'amortissement décroît jusqu'à atteindre zéro. Récemment, les causes à l'origine de ce biais ont été investiguées par Boswald (2016), via des méthodes analytiques basées sur des solveurs simplifiés.

### 1.3.3.3 Approche par maximum de vraisemblance

L'approche par maximum de vraisemblance a été étudiée par Hermans, Van der Auweraer & Guillaume (1998) en partant de la paramétrisation fractionnelle partielle de la PSD positive. Dans cette optique, les données  $\{\hat{S}_{yy k}^+\}$  sont apparentées à des « FRF mesurées » mutuellement indépendantes, et sont modélisées par une distribution complexe normale. En dérive une fonction de vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{N_o} \sum_{j=1}^{N_i} \frac{|\mathbf{S}_{yy k}^+[i, j; \boldsymbol{\theta}] - \hat{S}_{yy k}^+[i, j]|^2}{\text{Var}(\mathbf{S}_{yy k}^+[i, j; \boldsymbol{\theta}])} \quad (1.77)$$

La minimisation de cette fonction de coût peut être effectuée via un algorithme de gauss-Newton, en exploitant la structure quadratique de la vraisemblance. La résolution de la fonction de vraisemblance logarithmique (Negative Log-Likelihood Function, NLLF) peut s'avérer nécessaire. Cette optimisation est beaucoup plus simple, car la NLLF est moins non-linéaire. Les modèles par maximum de vraisemblance se prêtent facilement à un calcul d'incertitude, et sont approfondis dans la section 1.6.

## 1.4 Incertitudes en OMA

La quantification des incertitudes d'identification est un point capital en OMA. En effet, l'ignorance des forces d'excitation introduit une forte variabilité dans le schéma d'inférence, susceptible de se répercuter sur les résultats finaux. Les incertitudes en OMA sont ainsi beaucoup plus significatives qu'en EMA, et des intervalles statistiques sont alors nécessaires pour caractériser la fiabilité de l'identification. Si le sujet du traitement des incertitudes est au centre de nombreuses recherches, la discipline manque encore d'un cadre global, en raison de la large gamme d'incertitudes à considérer et de la pluralité des techniques d'identification.

### 1.4.1 Sources d'incertitudes en OMA

Il existe un large panel d'incertitudes en OMA. Banfi & Carassale (2014) propose la classification suivante pour les sources d'incertitude :

- Les incertitudes naturelles, qui regroupent l'ensemble des erreurs de mesure, des erreurs humaines et des biais durant l'acquisition du signal.
- Les incertitudes statistiques, dues à des divergences entre les moments statistiques et leur estimateur. Les erreurs sont essentiellement dues à la durée finie des signaux.
- Les incertitudes épistémiques sont des erreurs systématiques principalement dues au manque de données et/ou à la méconnaissance du processus physique étudié (non-linéarités, conditions aux limites complexes, spectre d'excitation étroit etc.).

Cette classification s'inscrit dans un panel plus large d'incertitudes rencontrées dans le domaine de l'identification structurale (Moon (2006)). Les incertitudes naturelles et statistiques sont de nature stochastique, et peuvent être largement réduites par l'augmentation du nombre de mesures disponibles. L'utilisation d'équipements de mesure performants est aussi un levier de performance pour la réduction des biais de mesure. Les incertitudes épistémiques sont difficiles à mitiger, et seul le sens physique et l'expérience peuvent être mis à profit pour éliminer les solutions physiquement irrecevables.

### 1.4.2 Réduction des incertitudes épistémiques

Les incertitudes épistémiques sont difficiles à quantifier. En revanche, elles peuvent s'avérer critique dans certaines situations, et générer des biais significatifs entre le système physique et la modélisation. En OMA, les incertitudes épistémiques regroupent deux types d'erreur opposés : l'identification de modes parasites dans l'identification, ou l'échec d'identification de modes réels. Ces biais dans l'identification sont dus à de multiples facteurs :

- La complexité structurale, incluant les problèmes de non-stationnarité, de non-linéarité, de conditions aux limites. . .
- Le dispositif expérimental, dû à un mauvais positionnement des capteurs (par exemple, capteur placé orthogonalement par rapport à une déformée) ou une erreur de manipulation (un choc peut produire un pic dans les fréquences).
- Le type d'excitation ambient, lorsque la déformée de l'excitation est incompatible avec certains modes, ou lorsque la bande passante est trop étroite, l'amplitude trop faible, ou encore lorsque le bruit est coloré.
- Le processus de pré et post-traitement des données, incluant l'étape d'extraction des paramètres modaux.

#### **1.4.2.1 Détection de modes manquants**

Lorsqu'un mode physique n'est pas identifié par l'algorithme d'OMA, seule la comparaison des résultats avec des modèles de comportements physiques permet de mettre en lumière ce manque et de réduire l'incertitude. Ce genre de comparaison est difficile à implémenter. Ciloglu, Zhou, Moon & Aktan (2012) proposent une méthode *ground-truth measure* pour quantifier la divergence entre un comportement structural réel et un comportement structural simulé à partir d'une identification biaisée par le manque d'un mode physique. Au travers d'une large étude en laboratoire, cette approche a démontré que les techniques bien établies de traitement de données (fenêtrage, méthode de Welch, RDT) sont susceptibles d'introduire des biais majeurs dans l'identification.

#### **1.4.2.2 Suppression de modes parasites : diagrammes de stabilisation**

L'apparition de modes parasites se manifeste souvent lorsque le système est sur-déterminé. Cette incertitude est connue sous le nom de biais de sur-apprentissage. Lorsque le nombre de modes excités dans la réponse n'est pas connu, l'ordre à considérer est difficile à déterminer et requiert souvent des décisions arbitraires. Lorsque l'ordre est trop grand, l'algorithme d'identification

identifie des modes artificiels qui participent à la minimisation de la fonction de coût du problème, mais qui n'ont aucun lien avec la physique étudiée. Ce biais est difficile à détecter, mais peut être mitigé par l'emploi d'outils d'aide à la sélection de l'ordre comme l'interprétation de diagrammes de stabilisation.

Les diagrammes de stabilisation permettent d'obtenir un aperçu simple de la stabilité de l'identification quand l'ordre du modèle croît. L'idée dans la construction de ces diagrammes est de définir un indicateur dont la stabilité traduit la présence d'un mode physique. En première approche, les diagrammes de stabilisation peuvent être construits sur des arguments de continuité des paramètres modaux identifiés. Ainsi, un mode dont les paramètres estimés restent relativement stables au fil des ordres est souvent physique (Bakir (2011)). La Figure 1.4 montre deux exemples de diagrammes de stabilisation pour les algorithmes LSCE et p-LSCF. L'efficacité et la versatilité des diagrammes de stabilisation en fait un outil très courant en OMA (Van der Auweraer, Guillaume, Verboven & Vanlanduit (2001b)). Le défaut de ces techniques est qu'elles impliquent l'analyse des résultats par un expert. Ceci se traduit par un travail chronophage, laborieux et subjectif. Pour cette raison, l'emphase a été mise ces dernières années sur l'analyse automatique des diagrammes, ou sur l'édition de diagrammes lisibles et facilement interprétables.

Le développement de diagrammes lisibles passe par la définition de critères de stabilité appropriés. L'algorithme PolyMax est connu pour ses diagrammes très clairs, car les modes parasites sont calculés avec une partie réelle négative (modes instables) (Peeters *et al.* (2004)). Comme les méthodes d'identification SSI sont intensément utilisées dans l'industrie, plusieurs variantes de diagrammes ont été envisagées ces dernières années. Deraemaeker, Reynders, De Roeck & Kullaa (2008) proposent un indicateur de norme de transfert modal (*modal transfer norm*), qui évalue l'influence d'un mode sur la réponse structurale à partir de la SVD de sa PSD positive. Les modes physiques ont une norme beaucoup plus grande que les modes parasite, et une séparation claire permet de réduire l'influence de l'expert dans la sélection de l'ordre. Les travaux de Dohler & Mevel (2013) établissent un lien qualitatif entre les incertitudes épistémiques et stochastiques, en présument que les modes parasites ont une incertitude beaucoup plus grande que les modes physiques. La définition d'un indicateur de stabilité basé sur ce constat est

proposée, puis appliquée avec succès. Récemment, Qin, Kang & Wang (2016) ont proposé un diagramme de stabilisation basé sur des concepts d'entropie singulière, calculée à partir des valeurs singulières de la matrice de covariance des données.

La détection d'ordre automatique basée sur les diagrammes de stabilisation repose sur des algorithmes d'intelligence artificielle. L'application de méthodes de clustering, proposée par Chauhan & Tcherniak (2008), permet une interprétation efficace des diagrammes. Ces logiques de clustering ont été implémentées sur l'algorithme SSI pour identifier les caractéristiques d'un pont dans les travaux de Magalhaes, Cunha & Caetano (2009). Plus récemment, l'implémentation de réseau de neurones convolutifs pour la reconnaissance d'image a montré de très bons résultats pour l'interprétation de diagrammes de stabilisation dans le cadre SSI, voir Su, Zhang, Huang & La Fave (2021).

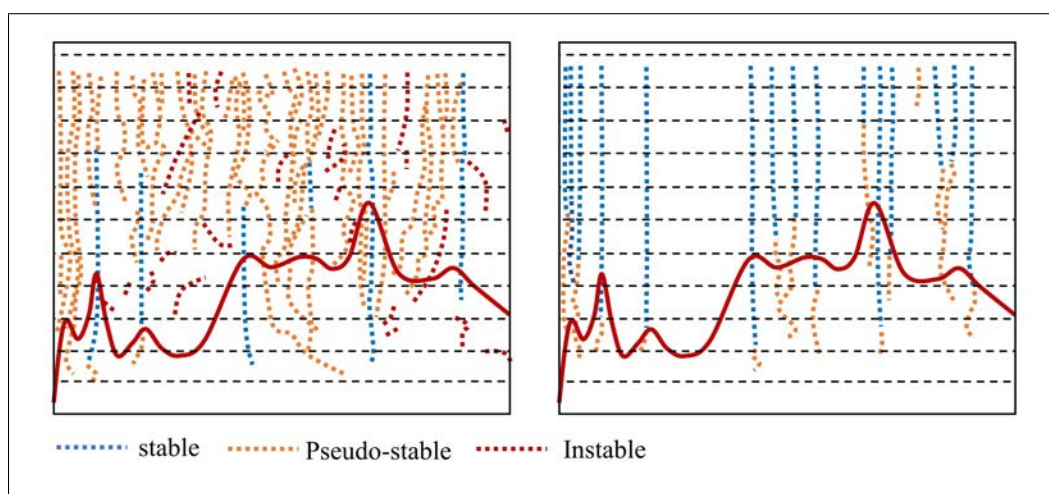


Figure 1.4 exemple de diagrammes de stabilisation (à gauche, LSCE, à droite, p-LSCE). La lisibilité du diagramme dépend des indicateurs choisis et du type d'algorithme impliqué dans l'identification

### 1.4.2.3 Suppression de modes parasites : autres méthodes

Le principe de parcimonie peut être invoqué pour réduire les biais épistémiques. Ce principe stipule que l'ordre le plus bas doit systématiquement être préféré. Les critères AIC (« Akaike » Information Criteria) (Akaike (1974)) ainsi que ses extensions BIC (Bayesian IC) et DIC



(Deviance IC) sont des indicateurs qui proposent de pénaliser la précision de l'estimateur au maximum de vraisemblance pour un ordre donné par une quantité croissante de cet ordre. Ainsi, la qualité de l'estimation est mitigée par l'ordre. Le BIC est semblable au AIC avec une pénalité plus importante. Le DIC est une généralisation du AIC dans un cadre hiérarchique.

La sélection de l'ordre des modèles peut aussi être basée sur le rang des matrices de covariance du signal. En effet, les valeurs singulières nulles sont des singularités dues au bruit blanc, et les valeurs singulières non-nulles sont donc celles qui caractérisent le signal et les modes contenus. Le problème principal de cette approche est que dans la pratique, l'effondrement des SVD est très rare et la sélection de l'ordre basé sur la décroissance des valeurs singulières est donc arbitraire (ceci est dû à l'existence de bruits colorés dans le spectre d'excitation).

Enfin, une dernière solution pour réduire les incertitudes épistémiques est d'exploiter des modèles non-paramétriques pour séparer ou compter les contributions modales, puis d'identifier chaque réponse avec un modèle UDDL ou un modèle d'ordre dénombrable. Les approches fréquentielles se prêtent bien à ce type de développements. Le risque d'identifier des modes parasites est largement diminué, mais le risque de manquer des modes physiques peut être augmenté, car il revient à l'analyste de dénombrer les contributions modales.

## **1.5 Quantification fréquentiste des incertitudes stochastiques**

L'idée de la quantification fréquentiste est d'exploiter la statistique fréquentiste pour obtenir les incertitudes sur les résultats d'identification. Les paramètres sont assimilés à une valeur fixe mais inconnue. Le jeu de données est considéré comme une succession de réalisations d'un processus stochastique produisant des résultats statistiquement indépendants. L'espace des observations est l'ensemble des réalisations pouvant être générées par le processus stochastique. Il ne se limite pas aux seules observations disponibles. La notion de probabilité est définie comme la fréquence relative des données dans l'espace des observations, sachant le paramètre inconnu. Dans cette logique, la seule source d'incertitude provient des données, et les erreurs de modélisation ne sont pas considérées.

Il existe deux écoles de pensées dans l'approche fréquentiste. L'approche de Fisher, introduite dans les années 1920, repose sur la notion de fonction de vraisemblance (Aldrich (1997); Stigler (2007)). Cet outil réduit drastiquement la complexité des données en définissant une statistique descriptive suffisante pour les observations. Considérant des observations fixes, les paramètres varient sur toutes les valeurs possibles. Le jeu de paramètres optimal est celui qui maximise la vraisemblance, donnant un estimateur MLE (Maximum Likelihood Estimator). L'approche de Neyman et Pearson déduit l'inférence statistique de la théorie de la décision, et repose sur des principes de test d'hypothèse (voir le Lemme de Neyman et Pearson introduit dans Neyman & Pearson (1933)). L'inférence est essentiellement construite de manière déductive, c'est à dire qu'elle est basée sur la recherche d'optimum basé sur des critères à déterminer. En identification, ces critères sont souvent la minimisation du résidu quadratique de modélisation.

La quantification fréquentiste résulte en un intervalle de confiance dont la probabilité de couvrir la bonne valeur du paramètre est connue. La statistique de l'inférence est à comprendre au sens de la précision de l'identification au vu des données disponibles : des données de bonne qualité donneront des estimations proches et des incertitudes faibles, alors que des données de mauvaise qualité donneront des estimations dispersées et des incertitudes larges. Les matrices de covariances fréquentistes reflètent donc la précision de l'identification. Elles sont orientées données, dans le sens où elles représentent la sensibilité de l'inférence à de faibles fluctuations dans les observations

Un défaut intrinsèque à l'approche fréquentiste est son incapacité à traiter des données limitées. Comme le calcul des incertitudes repose sur des fréquences relatives, un grand nombre de répétitions est nécessaire pour calculer ces fréquences. La précision de l'identification n'est correctement représentée par la statistique fréquentiste que dans un cadre asymptotique. Il existe en identification modale deux techniques fréquentistes pour réaliser l'inférence : les algorithmes de Monte-Carlo et les méthodes perturbatives basée sur les développements limités des modèles d'identification.

### 1.5.1 Algorithmes de Monte Carlo

Les algorithmes de Monte-Carlo sont des algorithmes randomisés dont l'objectif est d'introduire une portion d'aléatoire dans les données afin de générer d'avantage d'observation et de produire des intervalles de confiances plus fiable. Le schéma d'inférence est présenté sur la Figure 1.5. Le jeu de données est volontairement bruité par une erreur additionnelle « contrôlée », puis le schéma d'identification est répété pour quantifier l'influence de l'erreur sur les résultats. L'incertitude finale est obtenue en comparant les fréquences relatives des estimateurs.

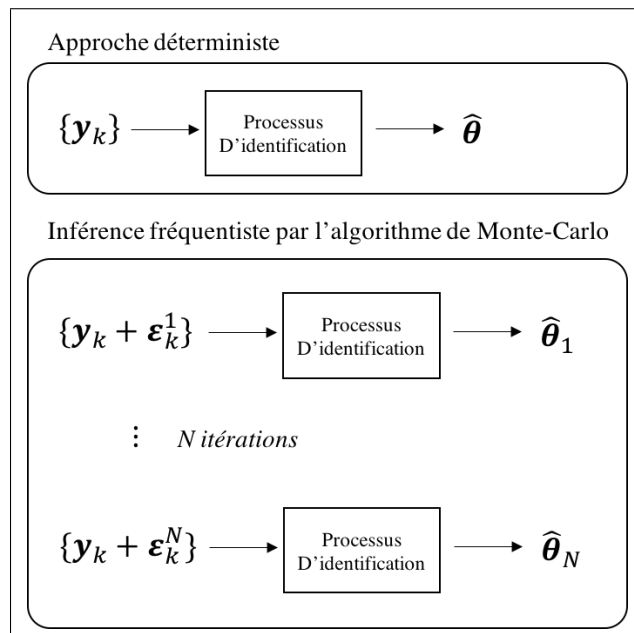


Figure 1.5 Schéma itératif de Monte-Carlo

Les approches de Monte-Carlo permettent de tester la sensibilité des algorithmes d'OMA au bruit dans les données. L'exploitation de ces méthodes à des fins de comparaison d'algorithmes est courante. À titre d'exemple, Reynders (2012) propose la comparaison de cinq algorithmes basés sur des formulations SSI et p-LSCE. Banfi & Carassale (2016) compare l'approche SSI à l'approche FDD non-paramétrique. L'algorithme Polymax a également été implémenté sur des itérations de Monte-Carlo, afin d'évaluer la stabilité de l'identification et d'analyser les facteurs contribuant à la précision des résultats (longueur des signaux, résolution fréquentielle)

(Cattaneo, Manzoni & Vanali (2011)). Dans un domaine plus proche du sujet de ce doctorat, le cas de l'algorithme NEXT a été abordé pour le traitement des incertitudes dans l'analyse modale de vannes directrices de turbines hydroélectriques par Gagnon *et al.* (2009).

Les méthodes de Monte-Carlo sont simples à implémenter, car le processus d'identification reste inchangé. Seules les données d'entrées sont modifiées. En revanche, les temps de simulation peuvent rapidement devenir très grand, et les paramètres de bruit à générer dans les données peuvent être difficiles à déterminer et nécessiter de décisions arbitraires. Enfin, ce type de procédure est sensible aux incertitudes épistémiques, puisque les données générées sont proches des données originales.

### 1.5.2 Développements de Taylor

La quantification des incertitudes par développement de Taylor repose sur la propagation d'une perturbation d'ordre 1 dans les données. Cette méthode repose sur le même principe perturbatif que les algorithmes de Monte-Carlo, mais est plus spécifique car elle demande une reformulation analytique de l'algorithme d'identification. Elle est en général plus efficace car il n'y a pas besoin d'itération pour obtenir une estimation des bornes d'incertitudes. Soit  $\Theta(\mathbf{D}_N)$  la procédure permettant d'estimer le jeu de paramètres optimal  $\hat{\theta}$  à partir de données  $\mathbf{D}_N$ . Par exemple, dans le cadre PEM,  $\Theta$  s'identifie à (1.64). La variance  $\mathbf{C}_{\theta\theta}$  sur l'estimation peut être estimée par un développement de Taylor d'ordre 1, faisant intervenir la Jacobienne du modèle :

$$\mathbf{C}_{\theta\theta} = \Theta(\mathbf{D}_N + \Delta\mathbf{D}_N) - \Theta(\mathbf{D}_N) \approx \nabla\Theta(\mathbf{D}_N) \cdot \Delta\mathbf{D}_N \quad (1.78)$$

L'erreur d'approximation est due au développement limité de la série, et est négligeable devant une perturbation d'ordre 2. Des ordres supérieurs peuvent être requis pour établir des moments statistiques plus haut, comme le coefficient d'asymétrie ou le kurtosis. Cette technique est limitée dans le sens où elle ne propose pas une distribution des paramètres identifiés, mais seulement un intervalle de confiance en accord avec les principes de la quantification fréquentiste.

Elle est en général moins coûteuse en temps que les algorithmes de Monte-Carlo, mais peut être relativement chronophage dépendamment de la complexité du modèle d'inférence produit. Un cadre global pour l'estimation des incertitudes des paramètres en OMA a été proposé par Pintelon, Guillaume & Schoukens (2007), sous réserve de la connaissance de la covariance de la matrice de transfert. L'utilisation de ce cadre pour la quantification des incertitudes sur les paramètres modaux a été mise en œuvre sur les algorithmes SSI-COV et ARMA.

### 1.5.2.1 Cas des algorithmes ERA/SSI-COV

Le calcul des variances des paramètres identifiés par reference-based SSI-COV est proposé par Reynders *et al.* (2008). La première étape repose sur la propagation d'une perturbation de la matrice de Toeplitz des données  $\mathbf{T}_k$  sur les matrices d'observabilité et de contrôlabilité (1.71) :

$$\Delta \mathbf{O}_k = \frac{1}{2} \mathbf{U}_n \Delta \mathbf{S}_n^{-1/2} + \Delta \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2}, \quad \Delta \mathbf{\Gamma}_k = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{V}_n^T + \mathbf{S}_n^{1/2} \Delta \mathbf{V}_n^T \quad (1.79)$$

La deuxième étape repose sur le calcul de la propagation des incertitudes dans l'étape de SVD. L'expression analytique de l'incertitude est dérivée par Pintelon *et al.* (2007) (Annexes 4, 5 de l'article), en se basant sur les travaux de Golub & Van Loan (1996) pour la propagation de l'incertitude dans l'étape de SVD. Les détails du calcul ne sont pas pertinents dans cette revue de littérature, et sont éludés par souci de clarté. Une fois  $\Delta \mathbf{O}_k$  obtenue, la propagation sur la matrice d'état et sur la matrice de sortie peut s'écrire :

$$\text{vec}(\Delta \mathcal{A}_d) = \mathcal{P}_A \text{vec}(\Delta \mathbf{O}_k), \quad \text{vec}(\Delta \mathbf{C}) = \mathcal{P}_C \text{vec}(\Delta \mathbf{O}_k) \quad (1.80)$$

Où  $\mathcal{P}_A$  et  $\mathcal{P}_C$  sont des matrices de propagation dont l'expression est donnée par Reynders *et al.* (2008). Ce modèle de propagation d'incertitude a été testé et validé avec succès sur des structures réelles par Reynders, Maes, Lombaert & Roeck (2015). L'optimisation de cette méthode en

reformulant les expressions mathématiques a été proposée par Dohler & Mevel (2013), ce qui a permis de réduire drastiquement la complexité algorithmique et le temps de calcul.

### 1.5.2.2 Cas des algorithmes AR(MA)

Les schémas d'identification autorégressifs AR et ARMA peuvent être modifiés pour obtenir les intervalles de confiance des paramètres via une formulation taylorienne. Dans le cas des systèmes AR multivariés (VAR) identifiés par régression linéaire, les détails de la dérivation de la matrice de covariance des paramètres modaux sont présentés par Neumaier & Schneider (2001) et Vu & Thomas (2014). Les incertitudes des modèles ARMA identifiés via des méthodes PEM (1.64) sont calculées par Andersen & Brincker (1999). Deux méthodes sont proposées, une première lente et simple via un processus de différenciation numérique, et une deuxième rapide mais plus complexe via une formulation analytique du problème de différentiation. Enfin, l'incertitude des modèles AR identifiés avec l'algorithme PTD (*Polyreference Time-Domain*) est dérivée par des schémas perturbatifs par Chauhan (2014).

## 1.6 Modèles bayésiens

Historiquement, l'inférence bayésienne est la grande concurrente de l'approche fréquentiste. Dans la logique bayésienne, la notion de probabilité n'est plus définie en termes de fréquence relative, mais en termes de mesure du degré de connaissance subjective, ou "plausibilité". Les paramètres ne sont pas modélisés par une valeur fixe inconnue, mais comme une distribution de probabilité représentant le degré de plausibilité associé à chaque valeur possible dans l'espace paramétrique. Les covariances estimées sont orientées paramètres, et représentent la variation dans la probabilité d'observer les données si les paramètres sont modifiés. Dans le cas de modèles non-biaisés et de données nombreuses, Au (2012c) a montré une consistance expérimentale entre les covariances bayésiennes et fréquentistes.

Les modèles bayésiens présentent des avantages solides pour l'identification. Premièrement, l'incertitude calculée prend en compte l'ensemble des sources d'erreur. En particulier, elle

quantifie les erreurs de modélisation (divergence des données par rapport au modèle visé), ce qui n'est pas le cas des modèles fréquentistes. Pour cette raison, les méthodes bayésiennes sont souvent utilisées pour la sélection de modèle (Akaike (1974)). Par ailleurs, la philosophie bayésienne est capable d'intégrer la connaissance a-priori des paramètres à identifier, c'est à dire qu'elle intègre un certain degré de connaissance préalable sur la distribution des paramètres, avant même d'avoir pris en compte les données. Enfin, l'approche bayésienne est certes plus chronophage que l'approche fréquentiste, mais elle ne repose sur aucune hypothèse asymptotique. Elle est capable de réaliser une inférence fiable (mais pas nécessairement précise), même lorsque les données disponibles sont très limitées. L'accroissement des capacités de calcul des ordinateurs rend le problème de temps de calcul de plus en plus insignifiant au regard des performances de la philosophie bayésienne. Pour cette raison, les techniques bayésiennes sont de bonnes candidates pour l'analyse modale opérationnelle des turbines en régime transitoire, et cette partie est abordée plus en profondeur que la partie consacrée à l'inférence fréquentiste.

Les deux ouvrages de référence pour l'approche bayésienne en OMA (BAYOMA) sont les livres de Yuen (2010), "Bayesian methods for structural dynamics and civil engineering" et de Au (2017), "Operational Modal Analysis, modelling, Bayesian inference, uncertainty laws".

### 1.6.1 Théorème de Bayes

Les modèles bayésiens exploitent le théorème de Baye pour réaliser l'inférence. Ce théorème de probabilité conditionnelle est proposé en équation (1.81). Il donne une relation « simple » entre la probabilité marginale des données et des paramètres  $p(\boldsymbol{\theta}), p(\mathbf{D})$ , et les probabilités conditionnelles  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  et  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = p(\mathbf{D}|\boldsymbol{\theta})$ .

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{D})} \quad (1.81)$$

$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  représente la distribution recherchée, qui est une mesure de plausibilité des paramètres, sachant les données disponibles. Elle est appelée distribution posterior, en opposition avec la

densité marginale des paramètres  $p(\theta)$ , dite prior. Le prior contient la connaissance préalable sur la distribution des paramètres, alors que la posterior représente la mise à jour de ce prior, après avoir considéré les données au travers de la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{D})$ . Cette dernière ne représente pas une distribution à proprement parler, mais une représentation fonctionnelle de la densité de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{D}|\theta)$  sur l'espace des paramètres.

### 1.6.1.1 Fonction de vraisemblance

Introduite par Fisher (1922), la fonction de vraisemblance (ou *Likelihood*)  $\mathcal{L}(\theta|\mathbf{D})$  est une fonction des paramètres qui reflète l'information statistique contenue dans un jeu de données, pour une structure de modèle connue. Elle représente une statistique suffisante pour les données, *i.e* il n'y a pas de perte d'information statistique en passant des données à cette représentation. Elle peut s'écrire comme distribution conditionnelle des données par rapport aux paramètres et au modèle sélectionné. Cette fonction est une mesure d'adéquation entre un modèle et les échantillons expérimentaux, conditionné à un jeu de paramètres. Comme son nom l'indique, plus la vraisemblance est grande, plus il est vraisemblable que le modèle soit approprié pour les données. C'est suivant cette logique que le maximum de vraisemblance est utilisé dans l'approche fréquentiste pour obtenir les paramètres optimaux. En inférence bayésienne, la fonction de vraisemblance apporte la contribution des données dans la définition de la distribution posterior, et sert de moyen de mise à jour du modèle. En ce sens, l'inférence bayésienne est souvent qualifiée de *model updating*.

Dans certaines figures de cas, l'expression d'une version linéarisée de la vraisemblance peut s'avérer désirable, voire nécessaire pour réduire le degré de non-linéarité du problème. Comme l'essentiel des fonctions de densité de probabilité s'écrivent comme une exponentielle négative  $e^{-L(\theta|\mathbf{D})}$ , la fonction de vraisemblance négative logarithmique (NLLF, negative log-likelihood function) s'écrit :

$$L(\theta|\mathbf{D}) = -\ln [\mathcal{L}(\theta|\mathbf{D})] \quad (1.82)$$



La fonction de vraisemblance se construit généralement sur des hypothèses normales, motivées par le théorème central limite. Si les données  $\mathbf{D}$  sont des séries temporelles ou des coefficients de Fourier, les distributions sont généralement prises Gaussiennes. Si les données sont des matrices de covariance expérimentales ou des PSD expérimentales, alors les distributions suivent alors des lois de Wishart.

### 1.6.1.2 Densité marginale des données

$p(\mathbf{D})$  représente la densité marginale des données. Son expression intégrale est donnée en équation (1.83). Cette densité est une constante, utilisée pour normaliser la distribution posterior et obtenir une probabilité totale de 1.

$$p(\mathbf{D}) = \int_{\Omega(\theta)} \mathcal{L}(\theta|\mathbf{D})d\theta \quad (1.83)$$

Dans la pratique, la haute dimensionnalité de l'espace des paramètres  $\Omega(\theta)$  rend l'intégration impossible, que ce soit par des méthodes analytiques ou numériques. Ainsi, le théorème de Baye ne permet de connaître la distribution posterior que sous une forme non-normalisée :

$$\pi(\theta|\mathbf{D}) \propto \mathcal{L}(\theta|\mathbf{D})p(\theta) \quad (1.84)$$

Tout l'enjeu de l'inférence bayésienne est de parvenir à identifier la forme normalisée exacte de  $\pi(\theta|\mathbf{D})$ , en ne connaissant que la forme proportionnelle.

### 1.6.1.3 Sélection des *priors*

Le *prior* est une distribution de probabilité qui représente la connaissance subjective des paramètres avant toute confrontation aux données du problème. Cette information est récoltée grâce aux avis des experts et d'éventuels évènements passés. Les *priors* peuvent être exploités sous forme de distributions usuelles, ou sous forme impropre, c'est à dire que leur probabilité

totale est différente de 1. Il existe deux classes de priors intéressantes pour l'inférence bayésienne : les *priors vagues* et les *priors conjugués*.

Si aucune connaissance n'est disponible sur la distribution des paramètres, il est possible d'employer des priors vagues pour modéliser le manque d'information. Suivant le concept du principe d'indifférence, il est possible d'associer une probabilité égale pour chaque valeur de paramètres, donnant un prior uniforme. Ce prior n'est pas non-informatif au sens strict, mais est représentatif du manque de connaissance sur le modèle ; le terme de prior vague est préféré. Sous prior uniforme, la posterior devient proportionnelle à la vraisemblance. Il est également possible d'utiliser des priors de Jeffrey, bien que leur implémentation dans un cadre multi-dimensionnel est loin d'être triviale. Ce prior est défini comme la racine carrée du déterminant de la matrice d'information de Fisher. Son intérêt réside dans son invariance par changement de coordonnées dans l'espace des paramètres. Ainsi, quel que soit la paramétrisation du modèle, la probabilité associée à une unité de volume de l'espace des paramètres reste inchangée. En ce sens, les priors de Jeffrey sont des distributions non-informatives.

Les priors conjugués sont très populaires dans l'inférence bayésienne. Cette classe de distribution préserve la structure statistique des distributions lors de la mise à jour du modèle. Ainsi, si un prior conjugué suit une loi de distribution  $\mathcal{G}(\theta)$ , il en est de même pour la posterior. Cette propriété est importante car elle permet de connaître la structure de la posterior (le coefficient de normalisation étant connu pour les distributions usuelles), et de mettre en œuvre des modèles d'inférence simples comme l'échantillonneur de Gibbs.

## 1.6.2 Détermination de la *posterior*

### 1.6.2.1 Identifiabilité du problème

D'un point de vue convergence, l'identifiabilité du problème interroge la possibilité de déterminer un jeu de paramètres optimaux à partir des données disponibles. Dans le cadre de la dynamique des structures, cette problématique a été abordée par Kafatygiotis & Beck (1998). D'un point

de vue topologique, le problème d'identifiabilité revient à étudier la structure des maximas de la distribution posterior (ou de la vraisemblance si la distribution prior est monotone ou suffisamment régulière). Il convient de distinguer trois figures de cas pour chaque paramètre du modèle considéré :

- Les scénarios globalement identifiables, où le paramètre du modèle peut être identifié de manière unique.
- Les scénarios localement identifiables, où le paramètre peut prendre plusieurs valeurs distinctes suivant l'initialisation ou le choix de solveur.
- Les scénarios non-identifiables, où le paramètre peut prendre une infinité de valeur.

En OMA, un des facteurs critique pour l'identifiabilité est le nombre  $N_o$  de degrés de liberté mesurés, qui ajoutent des contraintes à la structure mathématique du modèle. Dans des scénarios multi-canaux où la durée des essais est longue, le problème est souvent globalement identifiable avec une structure Gaussienne de la vraisemblance, garantie par le théorème central limite. Plus de détails peuvent être trouvé dans les travaux de Beck & Katafygiotis (1998).

**Exemple :** La Figure 1.6 propose une interprétation topologique des différentes situations d'identifiabilité. Le cas globalement identifiable fait intervenir une posterior monotone présentant un unique pic de probabilité, donnant la valeur la plus probable (MPV, Most Probable Value) du paramètre. Le cas localement identifiable se traduit par l'existence de plusieurs pics de probabilité. Enfin, le cas non-identifiable fait apparaître une crête de probabilité, et une infinité de valeurs sont possibles.

### 1.6.2.2 Approximation de Laplace

L'application de l'approximation de Laplace en inférence Bayésienne repose sur un modèle de NLLF sous prior uniforme. La minimisation de la NLLF donne le vecteur des MPV  $\hat{\theta}$ , consistant avec l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE). L'incertitude sur le résultat

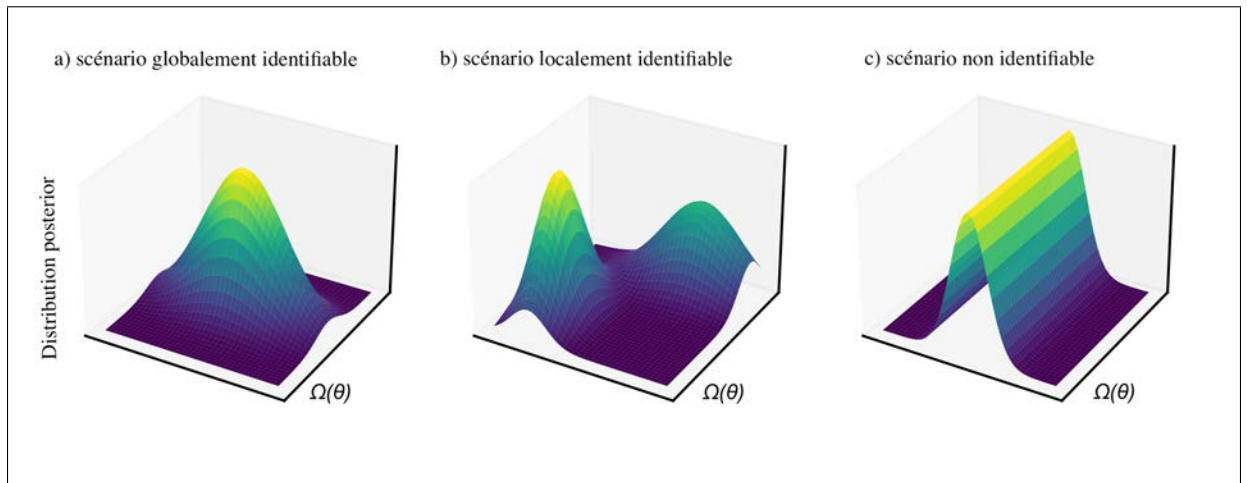


Figure 1.6 scénarios d'identifiabilité en fonction de la topologie de la posterior dans l'espace des paramètres

d'identification repose sur un développement de Taylor à l'ordre 2 de la NLLF au voisinage des MPV :

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) \approx L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{D}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \nabla L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{D}) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \nabla^2 L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{D}) (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.85)$$

Comme  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  est un optimum pour la NLLF, alors naturellement, le gradient  $\nabla L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{D})$  est nul. Ainsi, la fonction de vraisemblance peut s'écrire sous une forme proportionnelle au voisinage des MPV :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \nabla^2 L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{D})(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})} \quad (1.86)$$

Comme la posterior est proportionnelle à la vraisemblance, alors :

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) \propto e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \hat{\mathbf{C}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}-\hat{\boldsymbol{\theta}})} \quad (1.87)$$

où  $\hat{C}$  est la matrice de covariance des paramètres, identifiée par  $\hat{C} = [\nabla^2 L(\hat{\theta}|\mathbf{D})]^\dagger$ . Ainsi, l'approximation de Laplace établit que la posterior peut s'écrire sous une forme Gaussienne de moyenne  $\hat{\theta}$  et de covariance égale à l'inverse de la hessienne de la NLLF aux MPV. Cette approximation donne de bons résultats pour des données long-terme, mais reste une approximation de bas-ordre uniquement valable dans un cadre asymptotique. En effet, l'approximation ne reste valable que dans un voisinage très proche des MPV, et dès que la vraisemblance s'éloigne de son mode, l'approximation devient erronée. Il est donc nécessaire que la vraisemblance concentre l'essentiel de la densité de probabilité autour de  $\hat{\theta}$  sous une forme gaussienne, ce qui n'est le cas que dans un régime asymptotique.

### 1.6.2.3 Échantillonnage numérique

Parmi les méthodes bayésiennes, les techniques numériques sont particulièrement appréciées pour leur capacité à échantillonner la distribution posterior. Le but est d'exploiter des algorithmes capables de déterminer la posterior à partir de la densité non-normalisée. Pour cela, il est possible d'utiliser des méthodes directes ou des méthodes markoviennes. Les méthodes directes ne sont pas efficaces en grandes dimension et chronophage. Elles ne sont pas discutées ici. Les méthodes markoviennes reposent sur la configuration d'une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire coïncide avec la distribution posterior. Ces chaînes sont itérées par des algorithmes de Monte Carlo, donnant un échantillonnage de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Un bon aperçu des propriétés de ces outils est disponible dans le livre de Bolstad (2010).

Les chaînes de Markov sont un cas particulier de processus stochastiques dotés de la propriété markovienne. Cette propriété de "non-mémoire" stipule que l'état futur du processus peut être prédit à partir de l'état présent uniquement, sans considérer l'ensemble des valeurs précédentes. Mathématiquement parlant, si  $X^{(n)}$  représente l'état de la chaîne de Markov à la  $n$ -ième itération, alors :

$$p\left(X^{(n)} = x_n | \{X^{(n-m)} = x_{n-m}, 1 \leq m \leq n\}\right) = p\left(X^{(n)} = x_n | X^{(n-1)} = x_{n-1}\right) \quad (1.88)$$

Pour le cas de chaînes de Markov homogène (les probabilités de transition sont des invariants temporels) pouvant prendre  $K$  différentes valeurs d'état, la matrice de transition des états est donnée par :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1K} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{K1} & \dots & p_{KK} \end{pmatrix}, \quad p_{ij} = p(X^{(n)} = j | X^{(n-1)} = i) \quad (1.89)$$

La quantité  $p_{ij}$  représente la probabilité de passer de l'état  $j$  si la chaîne est à l'état  $i$ . Il est alors possible de caractériser la probabilité d'occupation au temps  $n$ . Soit  $\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \dots, \alpha_K^{(n)})$  le vecteur des probabilités d'occupation, où  $\alpha_i^{(n)} = p(X^{(n)} = i)$  s'obtient en sommant les probabilités jointes (1.88). La probabilité  $\boldsymbol{\alpha}^{(n)}$  peut en tout temps être déduite de la distribution initiale  $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$  :

$$\boldsymbol{\alpha}^{(n)} = \boldsymbol{\alpha}^{(0)} \mathbf{P}^n \quad (1.90)$$

Lorsque la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{\Pi}$  existe, alors la distribution  $\boldsymbol{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \boldsymbol{\alpha}^{(n)}$  est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov. Il est aisé de montrer que la distribution stationnaire satisfait à l'équation d'équilibre  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}$ . Dans le cadre de l'inférence bayésienne, l'objectif est de déterminer une chaîne dont la distribution stationnaire  $\boldsymbol{\pi}$  coïncide avec la posterior. Pour commencer, l'espace des états de la chaîne doit être égale à l'espace des paramètres de l'inférence. L'espace d'état est continu, et l'équation d'état s'écrit alors :

$$\int_{\partial\Omega(\theta)} \pi(\theta) d\theta = \int_{\partial\Omega(\theta)} \pi(\theta) \mathbf{P}(\theta, \partial\Omega(\theta)) d\theta \quad (1.91)$$

où  $\partial\Omega(\theta)$  est un sous-espace vectoriel mesurable de l'espace des paramètres. En remplaçant la distribution stationnaire par une collection d'état de la posterior non-normalisée (1.84) (c'est à dire que  $\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$  est un ensemble d'échantillons issus de la posterior  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ ), alors,

$$\int_{\partial\Omega(\theta)} \pi(\theta|\mathbf{D})d\theta = \int_{\partial\Omega(\theta)} \pi(\theta|\mathbf{D})\mathbf{P}(\theta, \partial\Omega(\theta))d\theta \quad (1.92)$$

À partir de cette contrainte, il est en réalité très simple de déterminer une matrice de transition  $\mathbf{P}$  qui respecte l'équation d'équilibre. Plus avantageux encore, la distribution stationnaire associée à cette transition est la posterior normalisée. Il existe deux grands algorithmes de MCMC permettant de décrire  $\mathbf{P}$  explicitement : les échantillonneurs de Gibbs et les échantillonneurs de Metropolis-Hasting. Ces deux échantillonneurs seront plus largement décrits dans le Chapitre 5.

#### 1.6.2.4 Inconsistance des estimateurs

Il existe une différence fondamentale entre l'approximation de Laplace et les MCMC. Outre leur façon rigoureusement différente d'apprécier les incertitudes, il existe également une différence dans l'interprétation des estimateurs. Pour mieux comprendre les deux interprétations, il est proposé de considérer un schéma d'inférence Bayésien sous prior uniforme, de telle sorte que la posterior soit proportionnelle à la vraisemblance. La méthode de Laplace pour l'inférence bayésienne est positionnée sur un estimateur au maximum de vraisemblance. En d'autres termes, la vraisemblance est une fonction de coût à maximiser pour obtenir les MPV. Cette maximisation estime le mode de la fonction de vraisemblance. Au contraire, dans l'interprétation probabiliste de l'inférence bayésienne, la posterior est une densité de probabilité caractérisée par ses moments. L'estimateur de la posterior est alors la moyenne de la distribution.

Cette différence entre mode et moyenne reflète la nature des algorithmes impliqués. Alors que le ML retourne un estimateur au sens d'optimalité, les MCMC retournent un estimateur au sens statistique. La distinction entre les estimateurs est souvent éludée, car les notions de mode et de moyenne coïncident dans le cas de vraisemblance symétrique unimodale, comme rencontrées dans des modèles hypergaussiens. En revanche, dans des cas non-symétriques, la différence entre la philosophie d'optimisation du MLE et la philosophie probabiliste du bayésien explique les divergences entre l'estimation des MPV. Un exemple est donné en Figure 1.7.

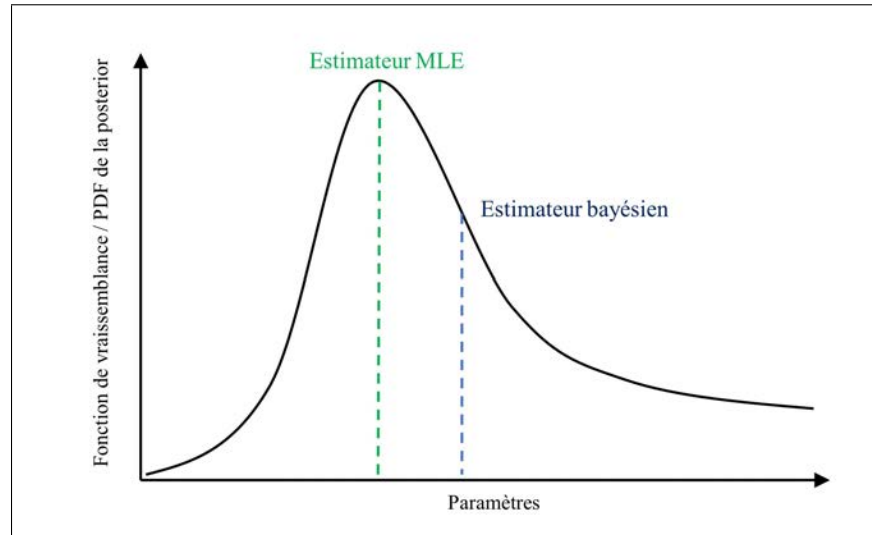


Figure 1.7 différence entre les estimateurs MLE et bayésien dans des cadres non-symétriques

### 1.6.3 Méthodes bayésiennes fréquentielles comme extension des estimateurs MLE

La fonction de vraisemblance (1.77) est identique à la vraisemblance utilisée dans le théorème de Bayes. Sous hypothèse de priors uniformes, la posterior des paramètres s'écrit sous une forme proportionnelle à la vraisemblance :  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{D})$ . Comme l'algorithme de Gauss-Newton impliqué dans la résolution de (1.77) fait appel à la Jacobienne  $\mathbf{J}_i(\boldsymbol{\theta})$  à l'étape  $i$ , il est relativement simple de traduire la covariance des estimées, comme montré par Guillaume, Verboven & Vanlanduit (1998). En prenant la dernière étape  $I$  de l'optimisation, la covariance s'écrit :

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} \left[ \text{Re} \left( \mathbf{J}_I^H(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \mathbf{J}_I(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) \right]^\dagger \quad (1.93)$$

Ce type de résultat est exploité dans certains algorithmes d'identification pour obtenir un aperçu de la validité des résultats. Le développement d'une approche par maximum de vraisemblance sur le modèle p-LSCE par Pee et El-kafafy, Guillaume, Peeters, Marra & Coppotelli (2012) permet d'obtenir des intervalles de confiance pour le modèle PolyMax.



## 1.6.4 Méthodes bayésiennes fréquentielles

### 1.6.4.1 Algorithme *BFFTA*

La méthode bayésienne fréquentielle propose de réaliser l'inférence à partir de données de FFT. La formulation originale de l'algorithme *BFFTA* (*Bayesian Fast Fourier Transform Algorithm*) a été proposée par Yuen & Katafygiotis (2003a). La méthode proposée repose sur une approximation de Laplace positionnée sur l'estimateur de maximum de vraisemblance. Par souci de raccord avec le prochain paragraphe, la formulation originale du problème est omise, et une adaptation plus proche de Au (2011b) est présentée. Cette adaptation exploite des transformées de Fourier 'one-sided' et un modèle modal continu en lieu et place de transformées 'two-sided' et un modèle modal discret.

Sous hypothèse de données temporelles longues et d'une fréquence d'échantillonnage élevée, Yuen, Katafygiotis & Beck (2002) ont montré que les coefficients de Fourier  $\mathbf{Y}_k^{obs}$  des observations  $\mathbf{y}_k^{obs}$  sont indépendants et distribués suivant une loi normale complexe de covariance  $\mathbf{C}_k = \mathbf{S}_{yy k} + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_o}$ .  $\mathbf{S}_{yy k}$  est la PSD théorique issue du modèle (1.61). Ainsi, la covariance s'écrit :

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{\Phi} \mathbf{S}_{qq k} \mathbf{\Phi}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_o} \quad (1.94)$$

Il est à noter que dans la version originale, les données sont empilées pour donner une variable augmentée  $\mathbf{Z}_k = (\mathcal{R}e(\mathbf{Y}_k^{obs}), \mathcal{I}m(\mathbf{Y}_k^{obs}))^T$ , suivant une loi normale centrée et de covariance sensiblement différente. Le problème est cependant strictement équivalent. La vraisemblance des données s'exprime comme un produit de lois normales :

$$\mathcal{L}_{FFT}(\boldsymbol{\theta} | \{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = \prod_{k=1}^N \mathcal{CN}(\mathbf{Y}_k^{obs} | \boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}_k) \quad (1.95)$$

La NLLF associée est donnée par :

$$L_{FFT}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = \sum_{k=1}^N [\ln|\mathbf{C}_k| + \mathbf{Y}_k^{obs H} \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{Y}_k^{obs}] \quad (1.96)$$

La détermination des MPV est permise par une hypothèse de priors uniformes, et les MPV sont obtenus suivant un schéma de maximum de vraisemblance via la minimisation de la NLLF (1.96). La posterior est approximée par une gaussienne suivant un schéma de Laplace.

#### 1.6.4.2 Algorithme *Fast-BFFTA*

Le schéma d'inférence proposé par Yuen et Katafygiotis repose sur une étape de minimisation de la NLLF (1.96). Pour cela, il est nécessaire d'évaluer itérativement cette fonction pour de nombreuses valeurs de paramètres. Or, la NLLF dépend explicitement du déterminant et de l'inverse de la covariance  $\mathbf{C}_k$ , qui est une matrice quasi-singulière (Au (2011b)). Par ailleurs, le nombre de paramètres à identifier est donné en  $O(M^2 + MN_o)$ . En OMA, où le nombre de DDL mesurés peut être grand, la croissance linéaire en  $N_o$  peut s'avérer problématique. Dans les années 2010, les travaux de Au se sont concentrés sur une reformulation du problème qui lève la problématique de conditionnement de la matrice de covariance et réduit significativement le nombre de paramètres à identifier. Les principales contributions de l'algorithme *Fast-BFFTA* sont :

- La reformulation du problème du maximum de vraisemblance pour réduire les temps de calcul.
- Le calcul de l'inverse de la Hessienne de la NLLF permettant une approximation de Laplace analytique.

#### Cas UDDL :

Le cas UDDL est traité dans les références Au (2011b, 2017). La reformulation du problème permet de réduire l'espace des paramètres à une dimension 4, quel que soit la valeur de  $N_o$ .

Dans le cas UDDL, l'équation (1.60) devient :

$$\mathbf{S}_{yyk} = SD_k \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T, \quad D_k = \left[ (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2 + (2\xi_m \omega_m \omega_k)^2 \right]^{-1} \quad (1.97)$$

En injectant ces résultats dans la formulation initiale (1.94), la covariance des données s'écrit :

$$\mathbf{C}_k = SD_k \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_o} \quad (1.98)$$

La clé de la simplification du problème est de déterminer une technique simple pour obtenir l'inverse et le déterminant de  $\mathbf{C}_k$ . La contrainte de norme de la déformée modale impose  $\|\boldsymbol{\varphi}\| = 1$ . Il est possible de compléter ce vecteur pour obtenir une base orthonormée  $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 = \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{N_o})$ . Ainsi, la décomposition en valeurs propres suivante est obtenue :  $\mathbf{C}_k = (SD_k + \sigma^2) \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1^T + \sum_{n=2}^{N_o} \sigma^2 \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^T$ . La matrice de covariance  $\mathbf{C}_k$  admet pour plus grande valeur propre  $SD_k + \sigma^2$ , et  $N_o - 1$  valeurs propres  $\sigma^2$ . Il est aisé de déduire que :

$$\mathbf{C}_k^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \mathbf{I}_{N_o} - \left( 1 + \frac{\sigma^2}{SD_k} \right)^{-1} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \right], \quad |\mathbf{C}_k| = \left( 1 + \frac{SD_k}{\sigma^2} \right) \sigma^{2N_o} \quad (1.99)$$

Après simplification des calculs, la NLLF (1.96) peut être exprimée de manière indépendante du vecteur des déformées modales :

$$L_{FFT}(\boldsymbol{\theta} | \{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = (N_o - 1) N \ln(\sigma^2) + \sum_{k=1}^N \ln(SD_k + \sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} (d - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\varphi}) \quad (1.100)$$

Avec  $d = \sum_k \mathbf{Y}_k^{obs} H \mathbf{Y}_k^{obs}$  la somme de la trace des densités spectrales, et  $\mathbf{A}$  une matrice définie par :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \left( 1 + \frac{\sigma^2}{SD_k} \right)^{-1} \mathbf{Y}_k^{obs} H \mathbf{Y}_k^{obs} \quad (1.101)$$

Une fois la NLLF (1.100) minimisée et les MPV de  $S, \omega, \xi$  et  $\sigma^2$  obtenues, le vecteur des déformées modales  $\varphi$  est estimé comme le vecteur propre de  $\mathbf{A}$  associé à sa plus grande valeur propre (c'est un problème de minimisation d'un quotient de Rayleigh). Ainsi, l'espace de la NLLF est réduit à 4 dimensions, ce qui réduit considérablement le temps de calcul.

Les posteriors sont dérivées analytiquement via le calcul de l'inverse de la Hessienne. Cette procédure n'implique que du calcul standard dans les axe  $(S, \omega, \xi, \sigma^2)$ , mais un problème de singularité se pose dans l'axe de la déformée modale. En effet, la dépendance en  $\varphi$  de la NLLF (1.100) s'écrit  $-\sigma^2 \varphi^T \mathbf{A} \varphi$ , mais alors la contrainte de norme est implicite. Il est aisé de montrer que cette omission est inconsistante : la Hessienne dans la direction de  $\varphi$  est donnée par  $-2\sigma^2 \mathbf{A}$ , qui est une matrice définie négative, alors qu'un point optimum pour la NLLF doit avoir une Hessienne définie positive. La contrainte de norme est simplement exprimée par  $-\sigma^2 \varphi^T \mathbf{A} \varphi / \varphi^T \varphi$ . Alors, le problème est que la NLLF est invariante par normalisation de  $\varphi$ , i.e.  $(0, 0, 0, 0, \varphi)^T$  est un vecteur propre de la Hessienne associé à une valeur propre nulle. La Hessienne n'est donc pas invertible dans la direction de la déformée modale. L'évaluation de la pseudo-inverse est cependant permise par une décomposition en valeurs propres. Les calculs sont largement aidés par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange pour la prise en compte de la contrainte de norme unitaire, comme montré dans la référence Au (2017). Enfin, la covariance de la déformée modale n'étant pas un bon indicateur d'incertitude, une version stochastique du MAC a été proposée par Au & Zhang (2011) pour quantifier l'incertitude d'identification.

### Cas MDDL :

La généralisation de la procédure *Fast-BFFTA* pour le cas MDDL est moins triviale. Elle est proposée par Au (2012a) pour la détermination des MPV et Au (2012b) pour la dérivation de la covariance. En repartant de la formulation générale de la NLLF (1.96), il est proposé de travailler sur la matrice modale  $\Phi \in \mathbb{R}^{N_o \times M}$ . Il existe un sous-espace vectoriel de dimension  $M' \leq \min(N_o, M)$  qui génère  $\Phi$ . Ce sous-espace peut être caractérisé par une base orthonormale  $\mathbf{B}' \in \mathbb{R}^{N_o, M'}$  qui engendre  $\Phi$  par une transformation affine  $\Phi = \mathbf{B}' \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^{M', M}$ . Le développement des calculs permet ensuite d'exprimer la NLLF (1.96) sous une forme plus simple à optimiser :

$$L_{FFT}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = (N_o - M')N \ln(\sigma^2) + \frac{d}{\sigma^2} + \sum_{k=1}^N \left[ \ln|\mathbf{C}'_k| - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Y}_k^{obs H} \mathbf{B}' (\mathbf{I}_{N_o} - \sigma^2 \mathbf{C}'_k{}^{-1}) \mathbf{B}'^T \mathbf{Y}_k^{obs} \right] \quad (1.102)$$

où  $d$  représente la trace de la somme des densités spectrales estimées, et  $\mathbf{C}'_k = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qq} \boldsymbol{\alpha}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_{M'} \in \mathbb{C}^{M' \times M'}$  est une matrice de rang plein dont l'inverse est bien défini. Cette dernière vérifie  $\mathbf{C}_k = \mathbf{B}' \mathbf{C}'_k \mathbf{B}'^T$ . Si cette nouvelle formulation peut paraître plus complexe à traiter, elle est en réalité largement simplifiée car la dimension de la matrice à calculer est  $M'$  au lieu de  $N_o$ , et en général  $M' \ll N_o$ . L'estimation du maximum de vraisemblance est scindée en deux étapes : la détermination des paramètres « spatiaux » contenus dans  $\mathbf{B}'$ , et la détermination des paramètres « spectraux », à savoir,  $\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{S}, \sigma^2, \{\omega_m, \xi_m\}$ .

La contribution spatiale du sous-espace des déformées modales  $\mathbf{B}'$  est condensée dans la projection  $\mathbf{B}'^T \mathbf{Y}_k^{obs} \in \mathbb{C}^{M' \times 1}$ . La MPV de  $\mathbf{B}'$  minimise le terme quadratique de la NLLF sous contrainte  $\mathbf{B}'^T \mathbf{B}' = \mathbf{I}_{M'}$ . Ce terme peut être exprimé sous forme matricielle :

$$L_{FFT,Quad}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = -\frac{1}{\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{B}')^T \mathbf{A}' \text{vec}(\mathbf{B}') \quad (1.103)$$

avec

$$\mathbf{A}' = \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{I}_{M'} \otimes \mathbf{Y}_k^{obs T} \right)^* \left( \mathbf{I}_{M'} - \sigma^2 \mathbf{C}'_k{}^{-1} \right) \left( \mathbf{I}_{M'} \otimes \mathbf{Y}_k^{obs T} \right) \quad (1.104)$$

$\mathbf{A}'$  est une matrice hermitienne complexe de dimensions  $M' \times N_o$ ,  $\text{vec}()$  est l'opérateur de vectorisation par colonne et  $\otimes$  est le produit de Kronecker. Pour minimiser (1.103) sous contrainte d'orthonormalité, il est nécessaire d'obtenir le nombre de paramètres libres de  $\mathbf{B}'$  et de déduire une paramétrisation judicieuse. À la contrainte d'orthonormalité  $\mathbf{B}'^T \mathbf{B}' = \mathbf{I}_{M'}$  s'ajoute un problème d'indétermination bien connu en identification (Asim, 2002 ; Antoni, 2015) : la multiplication par la droite de  $\mathbf{B}'$  avec n'importe quelle matrice unitaire laisse la contrainte de norme inchangée

et ne modifie pas le minimum de la NLLF. Après avoir dénombré le nombre de degrés de liberté du sous-espace modal, il se trouve que  $\mathbf{B}'$  doit paramétrisé avec  $M'(N_o - M')$  paramètres libres. S.-K. Au propose de partir d'une base de référence  $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{N_o \times N_o}$  et de déterminer une nouvelle base  $\mathbf{B}$  à partir de  $M'(N_o - M')$  angles de rotation entre les  $M'$  premières colonnes de  $\mathbf{B}_0$  et les  $N_o - M'$  colonnes restantes :  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}$ , où  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_o \times N_o}$  est la matrice de rotation, produit de matrices de rotations standards dans l'espace euclidien.  $\mathbf{B}'$  est ensuite déduite en gardant les  $M'$  premières colonnes de  $\mathbf{B}$ . Il est alors possible d'exprimer (1.103) en fonction de  $\mathbf{B}_0$  et  $\mathbf{R}$  :

$$L_{FFT,Quad}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = -\frac{1}{\sigma^2} \text{vec}(\mathbf{R}')^T \mathbf{A}_0 \text{vec}(\mathbf{R}') \quad (1.105)$$

Ci-dessus,  $\mathbf{R}'$  représente  $\mathbf{R}$  tronquée à ses  $M'$  premières colonnes, et  $\mathbf{A}_0$  est semblable à  $\mathbf{A}$  telle que définie en (1.103), où les données sont remplacées par la projection  $\mathbf{Y}_k^0 = \mathbf{B}_0^T \mathbf{Y}_k^{obs}$ . La détermination de la MPV de  $\mathbf{B}'$  est permise par un schéma itératif de Newton. Une sélection appropriée de la base de référence permet d'obtenir des angles de rotation faibles et l'obtention de la base en un très faible nombre d'itérations.

Une fois  $\mathbf{B}'$  déterminée, il est nécessaire de déterminer les MPV des paramètres spectraux. La projection  $\mathbf{Y}'_k = \mathbf{B}'^T \mathbf{Y}_k^{obs}$  étant connue, la NLLF (1.102) peut être reformulée pour donner l'expression (1.106), où  $d = \text{tr}(\sum_k \mathbf{Y}'_k \mathbf{Y}'_k{}^H)$ . Dans cette nouvelle expression, le paramètres  $\sigma^2$  est grossièrement isolé des autres paramètres spectraux.

$$L_{FFT}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) = (N_o - M') N \ln(\sigma^2) + \frac{d - d'}{\sigma^2} + \sum_{k=1}^N [\ln|\mathbf{C}'_k| + \mathbf{Y}'_k{}^H \mathbf{C}'_k \mathbf{Y}'_k] \quad (1.106)$$

La détermination des MPV est abordée itérativement par groupes de paramètres. Si l'ordre importe peu en théorie, S.-K. Au propose la séquence suivante :  $\{\omega_m, \xi_m\}$ ,  $\{\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{S}\}$ ,  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{B}$ . Pour tenir compte des contraintes de norme de  $\boldsymbol{\alpha}$  et de la nature hermitienne de  $\mathbf{S}$ , la matrice de covariance réduite est ré-écrite :  $\mathbf{C}'_k = \boldsymbol{\alpha}_s \mathbf{S}'_{qqk} \boldsymbol{\alpha}_s^T + \sigma^2 \mathbf{I}_{M'}$ . La matrice  $\mathbf{S}'_{qqk}$  représente la matrice spectrale sous excitation normalisée  $\mathbf{S}' = \text{diag}(\mathbf{S})^{-1/2} \mathbf{S} \text{diag}(\mathbf{S})^{-1/2}$ , et  $\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\alpha} \text{diag}(\mathbf{S})^{1/2}$  est

une forme non-contrainte des coordonnées  $\alpha$ , soumises à  $\alpha^T \alpha = \mathbf{I}_M$ . Enfin, comme  $S'_{ij} = S'^*_{ji}$  et  $S'_{ii} \leq 1$ , il est possible d'exprimer la partie triangulaire supérieure de la PSD normalisée par deux angles  $\{u_{ij}, v_{ij}\}_{1 \leq i \leq M, j < i}$  tels que  $S'_{ij} = \sin(u_{ij})e^{jv_{ij}}$ . Ceci permet à nouveau une paramétrisation non-contrainte de  $\mathbf{S}'$ . L'ensemble de ces transformations permet une reparamétrisation non-contrainte du problème, permettant de faciliter l'optimisation de la fonction de coût. Comme les différentes transformations sont bijectives, il est aisé de retrouver les MPV du système contraint à partir de l'optimisation sans contrainte.

D'une manière similaire au cas UDDL, la dérivation des posterior repose sur une formulation analytique de l'inverse de la Hessienne de la NLLF. Le détail des calculs est exposé par Au (2012b). La contrainte de norme pose un problème de singularité qui peut être contourné par l'expression des valeurs propres de la Hessienne.

### Développements supplémentaires :

La famille des méthodes *Fast-BFFTA* s'est considérablement développée à la suite des travaux de Au. L'inférence basée du des vibrations libres (i.e. seule une excitation au temps initial est considérée, et l'excitation ambiante est négligée) a été implémentée par Zhang, Ni, Au & Lam (2015b); Ni, Zhang, Lam & Au (2015). Le traitement de modes faibles noyés dans la signature modale d'un mode prépondérant est proposé par Zhu, Au & Brownjohn (2018).

Par ailleurs, plusieurs modifications ont été apportées au problème original pour prendre en compte certaines subtilités expérimentales. Dans des campagnes de mesures, il est souvent pratique de réaliser plusieurs essais avec différentes positions de capteurs pour couvrir un grand nombre de DDL avec un nombre restreint de capteurs. La construction d'un modèle d'inférence basé sur ce type de données a été abordé pour le cas UDDL par Au & Zhang (2012); Zhang, Au & Lam (2015a), avec une attention particulière sur la construction de la matrice des déformées modales. Dans des situations où différentes horloges de référence sont utilisées pour la synchronisation, il est possible d'observer des désynchronisations progressives, menant à des données instationnaires. La prise en compte de ce phénomène a été abordée par Zhu & Au (2018a,b), en modélisant la non-stationnarité des signaux avec un défaut de cohérence sur une

base stationnaire. Enfin, une discussion sur les aspects pratiques de l'algorithme pour l'ingénierie civile est présentée par Au, Zhang & Ni (2013).

Enfin, dans le cas de modes bien séparés, une étude analytique du solveur Fast-BFFTA menée par Au (2014a,b) a permis de dégager des lois d'incertitudes qualitatives dans un cadre asymptotiques pour l'identification. En particulier, il est rigoureusement établi que pour des amortissements faibles et un grand nombre de données, l'écart-type pour la fréquence et l'amortissement est asymptotiquement égal à :

$$\sigma_{\omega}^2 \sim \frac{\omega^2 \xi}{2\pi N_c B_{\omega}}, \quad \sigma_{\xi}^2 \sim \frac{\xi}{2\pi N_c B_{\xi}} \quad (1.107)$$

$N_c$  représente la longueur des données en termes de multiple du temps caractéristique, et  $B_{\omega}, B_{\xi}$  sont des constantes dépendantes de la bande passante utilisée pour l'identification. Ces approximations d'ordre 0 peuvent être poursuivies pour obtenir des approximations plus fines (Au, Brownjohn & Mottershead (2018)). Ces travaux qualitatifs peuvent servir à dimensionner les campagnes expérimentales, et donnent des guides utiles pour maximiser l'information et obtenir des marges d'incertitudes faibles.

## 1.6.5 Méthodes bayésiennes spectrales

### 1.6.5.1 Algorithme *BSDA*

L'introduction de l'inférence bayésienne dans le domaine spectrale a été initialement proposée par Katafygiotis & Yuen (2001). L'approche spectrale considère une PSD moyennée sur  $N_s$  snapshots,  $\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av}$ . Cet estimateur suit une loi de Wishart de dimension  $N_o$  à  $N_s$  degrés de liberté et de covariance  $\mathbf{C}_k$  telle que définie en (1.94),

$$p\left(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av} | \mathbf{S}_{yyk}\right) \sim \mathcal{W}\left(\mathbf{C}_k, N_o, N_s\right) \quad (1.108)$$



D'un point de vue bayésien, la formulation (1.108) sert à construire la vraisemblance du modèle :

$\mathcal{L}_{SD}(\boldsymbol{\theta} | \{\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}\}) = \prod_k P(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av} | \mathbf{S}_{yy\ k})$ . À partir de cette vraisemblance, la NLLF associée  $L_{SD}(\boldsymbol{\theta} | \{\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}\})$  est construite :

$$L_{SD}(\boldsymbol{\theta} | \{\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}\}) = N_s \sum_{k=1}^N [\ln |\mathbf{C}_k| + \text{tr}(\mathbf{C}_k^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av})] \quad (1.109)$$

Les MPV sont identifiés sous priors uniformes en minimisant la NLLF via des algorithmes d'optimisation classique. L'approximation de Laplace est ensuite proposée pour approcher la posterior des données.

### 1.6.5.2 Algorithme *Fast-BSDA*

Motivés par le développement de la méthode *Fast-BFFTA* en 2012, l'implémentation d'une routine rapide pour l'algorithme *BSDA* a été proposé par Yan & Katafygiotis (2015a). La procédure d'identification repose sur un schéma en deux temps : d'une part, les paramètres spectraux (fréquence, amortissement, PSD de l'erreur et PSD de l'excitation) sont identifiés dans une étape de *FBSTA* (*Fast-Bayesian Spectral Trace Approach*) et d'autre part, la matrice des déformées modales est identifiée dans une étape de *FBSDA* (*Fast-Bayesian Spectral Density Approach*).

L'idée centrale de l'algorithme *BFSTA* est de travailler sur les propriétés statistiques de la trace de  $\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}$ . D'après Mathai (1980),  $\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av})$  suit asymptotiquement une distribution normale de moyenne  $N_s \text{tr}(\mathbf{C}_k)$  et de variance  $N_s \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2))$ . Comme les observations  $\mathbf{Y}_k^{obs}$  sont asymptotiquement indépendantes, il en est de même pour  $\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av})$ . Ainsi, le théorème de Bayes peut s'écrire, sous forme non-informative :

$$P(\boldsymbol{\theta} | \{\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av})\}) \propto \prod_{k=1}^N \mathcal{N}(\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}) | N_s \text{tr}(\mathbf{C}_k), \sqrt{N_s \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2))}^{1/2}) \quad (1.110)$$

De cette équation découle la NLLF du problème :

$$p(\boldsymbol{\theta} | \{\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av})\}) \propto e^{-L_{FSTA}(\boldsymbol{\theta} | \{\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av})\})} \quad (1.111)$$

avec

$$L_{FSTA}(\boldsymbol{\theta} | \{\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av})\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left[ \ln(2\pi N_s \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2))) + \frac{(\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av}) - N_s \text{tr}(\mathbf{C}_k))^2}{N_s \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2))} \right] \quad (1.112)$$

La force de cette formulation est qu'elle s'affranchit du calcul de déterminants et d'inverses de matrices de grandes dimensions, car la vraisemblance gaussienne multivariée de l'algorithme *BSDA* est transformée en une loi normale classique.

### Cas UDDL :

Dans le cas UDDL, la covariance des données est donnée en équation (1.98). Les traces impliquées dans la NLLF (1.112) s'écrivent (car  $\text{tr}(\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^T) = \boldsymbol{\varphi}^T\boldsymbol{\varphi} = 1$ ) :

$$\text{tr}(\mathbf{C}_k) = SD_k + N_o\sigma^2, \quad \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2)) = S^2D_k^2 + 2S\sigma^2D_k + N_o\sigma^4 \quad (1.113)$$

Ainsi, la NLLF de la *BFSTA* (1.112) dans le cadre UDDL est indépendante de la matrice des déformées modales, et ne dépend que des paramètres spectraux du problème. L'identification des MPV est simple et basée sur des algorithmes d'optimisation classiques. Une fois les paramètres spectraux obtenus dans l'étape de *BSFTA*, il est nécessaire de déterminer le vecteur des déformées modales.

La deuxième étape du *Fast-BSDA* repose sur une formulation explicite de la NLLF (1.109) en fonction du vecteur de déformée modale. En injectant la formulation (1.99) du déterminant et de l'inverse de  $\mathbf{C}_k$ , la forme suivante est obtenue :

$$L_{SD}(\boldsymbol{\theta}|\{\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}\}) = (N_o - 1)NN_s \ln(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} (d - \boldsymbol{\varphi}^T \mathcal{A} \boldsymbol{\varphi}) + N_s \sum_{k=1}^N \ln(SD_k + \sigma^2) \quad (1.114)$$

avec  $d = \sum_k \text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av})$  et  $\mathcal{A}$  une matrice telle que :

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{\sigma^2}{SD_k}\right)^{-1} \text{tr}(\boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}) \quad (1.115)$$

En analysant plus précisément les liens entre la NLLF (1.114) et la NLLF (1.100), il se trouve que le problème *Fast-BSDA* est strictement équivalent à une superposition de problèmes *Fast-BFFTA* sur  $N_s$  snapshots :

$$L_{SD}(\boldsymbol{\theta}|\{\hat{\mathbf{S}}_{yy\ k}^{av}\}) = \sum_s^{N_s} L_{FFT}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k^{obs}\}) \quad (1.116)$$

L'ensemble des paramètres spectraux ayant été déterminé dans l'étape précédente de *FBSTA*, la MPV  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  correspond au vecteur propre de  $\mathcal{A}$  associé à sa plus grande valeur propre.

### Cas MDDL :

L'implémentation du *Fast-BSDA* pour un système MDDL est proche de la formulation de l'algorithme *Fast-BFFTA*. L'essentiel des idées précédentes sont appliquées pour le problème de densités ; de la même manière, la matrice des déformées est définie par rapport à une base de référence  $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{B}' \boldsymbol{\alpha}$ , et la covariance est modifiée pour donner  $\mathbf{C}_k = \mathbf{B}' \mathbf{C}'_k \mathbf{B}^T$ ,  $\mathbf{C}'_k = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qq\ k} \boldsymbol{\alpha}^T + \sigma^2 \mathbf{I}_{M'}$ . Par propriété de permutation cyclique de la trace, les identités suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{C}_k) &= \text{tr}(\mathbf{C}'_k) = \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qq\ k} \boldsymbol{\alpha}^T) + N_o \sigma^2 \\ \text{tr}(\mathcal{R}e(\mathbf{C}_k^2)) &= \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathcal{R}e(\mathbf{S}_{qq\ k}^2) \boldsymbol{\alpha}^T) + 2\sigma^2 \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qq\ k} \boldsymbol{\alpha}^T) + N_o \sigma^4 \end{aligned} \quad (1.117)$$

La NLLF (1.112) est alors exprimée de manière indépendante de  $\mathbf{B}'$  :

$$L_{FSTA}(\boldsymbol{\theta} | \{\text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av})\}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \ln \left( 2\pi N_s \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathcal{R}e(\mathbf{S}_{qqk}^2) \boldsymbol{\alpha}^T) + 2\sigma^2 \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qqk} \boldsymbol{\alpha}^T) + N_o \sigma^4 \right\} \right) + \frac{\left( \text{tr}(\hat{\mathbf{S}}_{yyk}^{av}) - N_s \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qqk} \boldsymbol{\alpha}^T) - N_o N_s \sigma^2 \right)^2}{N_s \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathcal{R}e(\mathbf{S}_{qqk}^2) \boldsymbol{\alpha}^T) + 2\sigma^2 \text{tr}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{S}_{qqk} \boldsymbol{\alpha}^T) + N_o \sigma^4 \right\}} \quad (1.118)$$

La dimensionnalité du problème est drastiquement réduite, et les MPV des paramètres spectraux peuvent être estimés dans une étape de MLE performante ne nécessitant pas de ressources trop importantes. Pour lever les contraintes sur  $\boldsymbol{\alpha}$  et  $\mathbf{S}$ , la paramétrisation proposée pour le *Fast-BFFTA* est adoptée. Le développement de l'inférence de la matrice des déformées modale suit le même schéma que pour celui présenté précédemment. Les détails sont éludés pour éviter les redondances. En définitive, le même constat est fait que pour le cas UDDL : l'approche *Fast-BSDA* est strictement équivalente à une superposition d'approches *Fast-BFFTA* pour différents snapshots.

### Développements supplémentaires :

Le développement d'un algorithme capable d'accumuler de l'information au travers différentes sessions de mesures est proposé par Yan & Katafygiotis (2015b), valide pour des modes bien séparés uniquement. Une étude analytique de la propagation des incertitudes dans le modèle *Fast-BSDA* pour un système UDDL a été menée par Yan & Katafygiotis (2019).

Les travaux portant sur l'inférence basée sur les PSD ont été fortement critiqués par Au (2015). L'auteur affirme que l'équivalence dressée entre le *Fast-BSDA* et le *Fast-BFFTA*, bien que mathématiquement vérifiée, est expérimentalement fautive. En effet, l'obtention de spectres moyennés implique souvent de séparer les séries temporelles en courts intervalles de temps. Ceci induit une perte de résolution fréquentielle, des problèmes de corrélations entre les snapshots et des biais de fuite spectrale. S.-K. Au affirme que son algorithme devrait être préféré en tout

temps, car il présente tous les avantages du *Fast-BSDA* en s'affranchissant du prétraitement des données.

### 1.6.6 Méthode bayésienne hiérarchique

Ce paragraphe est dédié aux travaux de Sedehi, Teymouri, Katafygiotis & Papadimitriou (2019); Sedehi, Katafygiotis & Papadimitriou (2020). L'implémentation de l'inférence dans une logique hiérarchique permet de traiter plusieurs jeux de données soumis à une variabilité dans les paramètres de modèles. Pour le moment, la littérature se limite à des systèmes UDDL.

#### 1.6.6.1 Motivations

L'inférence bayésienne est une méthode robuste pour réaliser l'inférence lorsque les erreurs de modèle ne sont pas trop significatives. Cependant, dans la pratique, les modèles stochastiques et déterministes abordés jusqu'ici sont soumis à de nombreuses imprécisions. Typiquement, les hypothèses d'amortissement sont souvent utilisées pour simplifier le problème, mais ne sont pas représentatifs du comportement réel (l'amortissement peut par exemple varier avec l'intensité de l'excitation). L'ensemble de ces imprécisions est difficile à modéliser, et par conséquent, une forte variabilité est introduite dans les résultats d'identification. Cette variabilité induite par les erreurs de modèles peut s'avérer largement supérieure aux marges d'incertitudes calculées dans l'inférence, qui estime la précision de l'identification. Un exemple d'une telle situation est présenté en Figure 1.8 ; ce type de résultat n'est évidemment pas satisfaisant. Le développement de modèles capables d'incorporer la variabilité de différents jeux de données dans l'inférence devrait permettre une identification globale plus stable.

#### 1.6.6.2 Modèle de variabilité

Les travaux de Sedehi présentent un nouveau modèle de variabilité. Il est supposé que les données disponibles  $\mathbf{D}$  sont récoltées sur  $N_s$  snapshots  $\mathbf{D}_s = \{\mathbf{Y}_k^{obs}\}_s$ . Pour chaque jeu de données, les paramètres de modèle  $\boldsymbol{\theta}_s$  sont scindés en deux catégories : les paramètres environnementaux

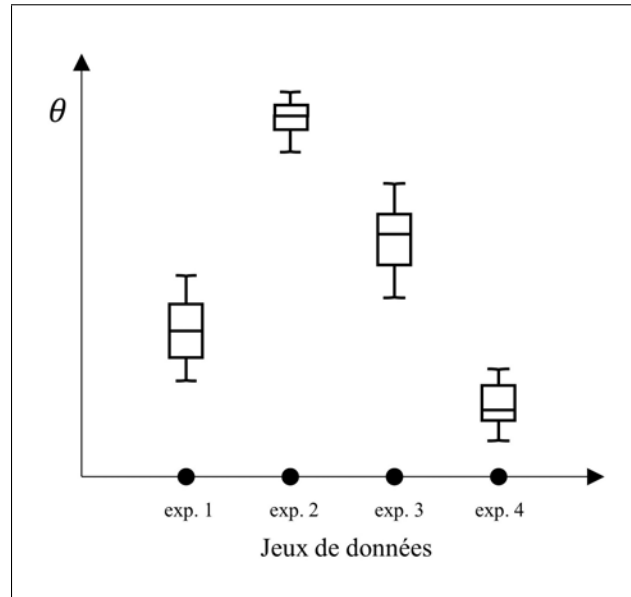


Figure 1.8 schéma d'inférence où la variabilité est largement supérieure aux incertitudes

$\eta_s = (S_s, \sigma_s^2)$  propres à chaque snapshot, et les paramètres structuraux  $\lambda_s = (\omega, \xi, \varphi)$ . Ces paramètres structuraux partagent des propriétés statistiques communes à l'ensemble des snapshots. Pour représenter la variabilité des  $\lambda_s$ , ces derniers sont hyper-paramétrisés par une loi normale  $\mathcal{N}(\lambda_s | \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda)$ . Le modèle hiérarchique associé est présenté en Figure 1.9.

L'application du théorème de Bayes sur ce modèle peut s'écrire :

$$p(\{\lambda_s, \eta_s\}, \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D}) \propto p(\mathbf{D} | \{\lambda_s, \eta_s\}, \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) p(\{\lambda_s, \eta_s\}, \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) \quad (1.119)$$

Sous un modèle de vraisemblance gaussien par rapport aux paramètres (approximation de Laplace), la posterior conjointe des paramètres est donnée par :

$$p(\{\lambda_s, \eta_s\}, \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D}) \propto p(\mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) \prod_{s=1}^{N_s} \mathcal{N}(\theta_s | \hat{\theta}_s, \hat{\mathbf{C}}_{\theta_s}) \mathcal{N}(\lambda_s | \mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) p(\eta_s) \quad (1.120)$$

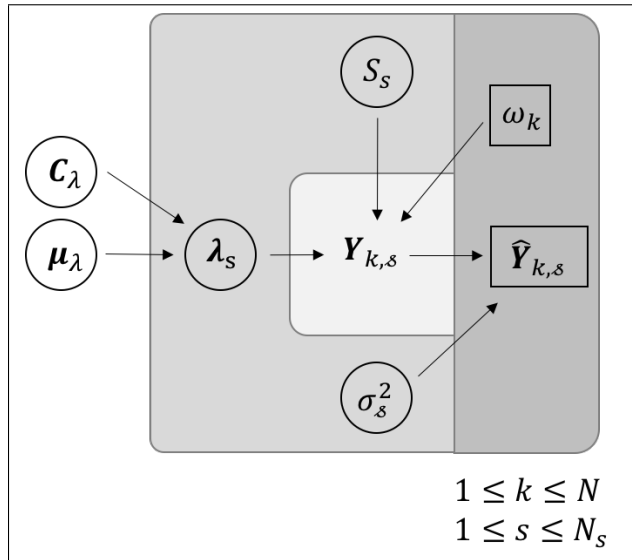


Figure 1.9 modèle hiérarchique de Sedehi  
et al

L'obtention de la posterior des hyper-paramètres repose sur une étape de marginalisation de  $\eta_s$  et  $\lambda_s$ . La marginalisation de  $\eta_s$  est simplifiée par une hypothèse de prior uniforme. La marginalisation des  $\lambda_s$  se fait snapshot par snapshot. Finalement,

$$p(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D}) \propto p(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda) \prod_{s=1}^{N_s} \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_\lambda | \hat{\boldsymbol{\lambda}}_s, \mathbf{C}_\lambda + \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s}) \quad (1.121)$$

Dans l'expression de la posterior,  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_s$  représente les MPV de la fréquence, de l'amortissement et de la déformée modale pour le snapshot  $s$ , et  $\hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s}$  la covariance associée obtenue par l'approximation de Laplace. Ces deux quantités sont obtenues dans une étape de *Fast-BFFTA* préalable. La posterior  $p(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D})$  décrit à la fois la précision de l'identification, mais également la variabilité des paramètres structuraux d'un essai à l'autre. Le calcul de la posterior de  $\lambda_s$  pour un snapshot donné est également permis par marginalisations successives :

$$p(\lambda_s | \mathbf{D}) \propto \int_{\mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda} \mathcal{N}(\lambda_s | (\mathbf{I}_{2+N_o} - \mathbf{K}_{\lambda_s}) \hat{\lambda}_s + \mathbf{K}_{\lambda_s} \mu_\lambda, \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s} (\mathbf{I}_{2+N_o} - \mathbf{K}_{\lambda_s})) p(\mu_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D}) d\mu_\lambda d\mathbf{C}_\lambda \quad (1.122)$$

où  $\mathbf{K}_{\lambda_s} = (\mathbf{I}_{2+N_o} + \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s}^{-1} \mathbf{C}_\lambda)$  est une matrice de gain. Deux algorithmes sont proposés pour obtenir des estimations des posteriors.

### Méthode d'échantillonnage sous approximation asymptotique :

L'équation (1.122) est déterminée numériquement à l'aide de MCMC, en tirant une séquence d'hyper-paramètres  $\{\mu_{\lambda,i}, \mathbf{C}_{\lambda,i}\}_{i \leq I}$  dans la distribution (1.121). Ensuite, l'intégrale (1.122) est approximée en sommant sur cette séquence :

$$p(\lambda_s | \mathbf{D}) \propto \sum_{i=1}^I \mathcal{N}(\lambda_s | (\mathbf{I}_{2+N_o} - \mathbf{K}_{\lambda_s,i}) \hat{\lambda}_s + \mathbf{K}_{\lambda_s,i} \mu_{\lambda,i}, \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s,i} (\mathbf{I}_{2+N_o} - \mathbf{K}_{\lambda_s,i})) \quad (1.123)$$

Cette somme s'écrit comme une mixture gaussienne dont l'espérance et la covariance sont déterminés analytiquement à partir de la séquence des hyper-paramètres. Cette méthode d'inférence est qualifiée de méthode d'échantillonnage sous approximation asymptotique, car les MCMC servent à échantillonner les hyper-paramètres qui servent ensuite à obtenir la distribution des paramètres structuraux sous hypothèse de Laplace.

### Méthode duale :

Dans cette méthode, il est proposé de s'affranchir de l'étape d'échantillonnage en déterminant une forme analytique de la distribution (1.121). Les MPV des hyperparamètres sont déduits par un schéma Maximum A-Posteriori (MAP). Pour cela, la distribution logarithmique négative associée à la densité marginale (1.121). En dérivant les expressions analytiques du gradient, l'estimateur MAP de l'hyper-moyenne est donné par :

$$\hat{\mu}_\lambda = \sum_{s=1}^{N_s} \Lambda_s \hat{\lambda}_s, \quad \Lambda_s = \left[ \sum_{s=1}^{N_s} (\mathbf{C}_\lambda + \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s})^{-1} \right]^{-1} [\mathbf{C}_\lambda + \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s}]^{-1} \quad (1.124)$$



L'estimateur  $\hat{\mathbf{C}}_\lambda$  de l'hyper-variance doit être obtenu par un algorithme de minimisation, car il n'existe pas de formulation analytique. Par suite, l'intégrale (1.122) est approximée par :

$$p(\lambda_s | \mathbf{D}) \approx \mathcal{N} \left( \lambda_s | (\mathbf{I}_{2+N_o} - \hat{\mathbf{K}}_{\lambda_s}) \hat{\lambda}_s + \hat{\mathbf{K}}_{\lambda_s} \hat{\boldsymbol{\mu}}_\lambda, \hat{\mathbf{C}}_{\lambda_s} (\mathbf{I}_{2+N_o} - \hat{\mathbf{K}}_{\lambda_s}) \right) \quad (1.125)$$

Dans cette dernière formulation, l'incertitude sur les hyper-paramètres est négligée et seul l'estimateur MAP est conservé. Les incertitudes peuvent être obtenues par une deuxième approximation de Laplace sur  $p(\boldsymbol{\mu}_\lambda, \mathbf{C}_\lambda | \mathbf{D})$ .

## CHAPITRE 2

### MÉTHODOLOGIE

#### 2.1 Définition des objectifs

##### 2.1.1 Motivations et contraintes

Comme mentionné dans l'Introduction, l'utilisation actuelle (et probablement à moyen terme) des turbines hydroélectriques à des fins de stabilisation des réseaux électriques se traduit par un accroissement significatif des cycles de démarrage-arrêt. Au cours de ces cycles, de nombreuses résonances structurales génèrent d'intenses pics de contraintes, ce qui contribue à la réduction de la durée de vie en fatigue des turbines. Les principaux contributeurs scientifiques à la compréhension et à la modélisation du comportement modal des turbines sont présentés en Figure 2.1.

Pour résumer, les approches numériques sont basées sur des modèles d'interaction fluide-structure systématiquement simplifiés. Ces approches sont capables de réaliser des estimations adéquates des fréquences naturelles à l'aide de modèles acoustiques, mais elles ne procurent pas d'estimations précises du niveau d'amortissement, et par conséquent, des pics de contraintes. Les simulations sont limitées dans leurs capacités de prédiction de la charge dynamique résonante, et il est donc nécessaire de faire appel à des mesures expérimentales pour caractériser le comportement modal du système.

Malgré le respect de certaines conditions de similarité du point de vue écoulement hydraulique, l'étude de modèles réduits ne permet pas d'établir de relation systématique entre le comportement modal réduit et le comportement modal du prototype. De plus, l'étude de prototypes en laboratoire n'est pas représentative des conditions réelles d'utilisation de la machine. Seules les mesures opérationnelles (*in situ*) peuvent fournir une représentation crédible et fiable des paramètres modaux du système.

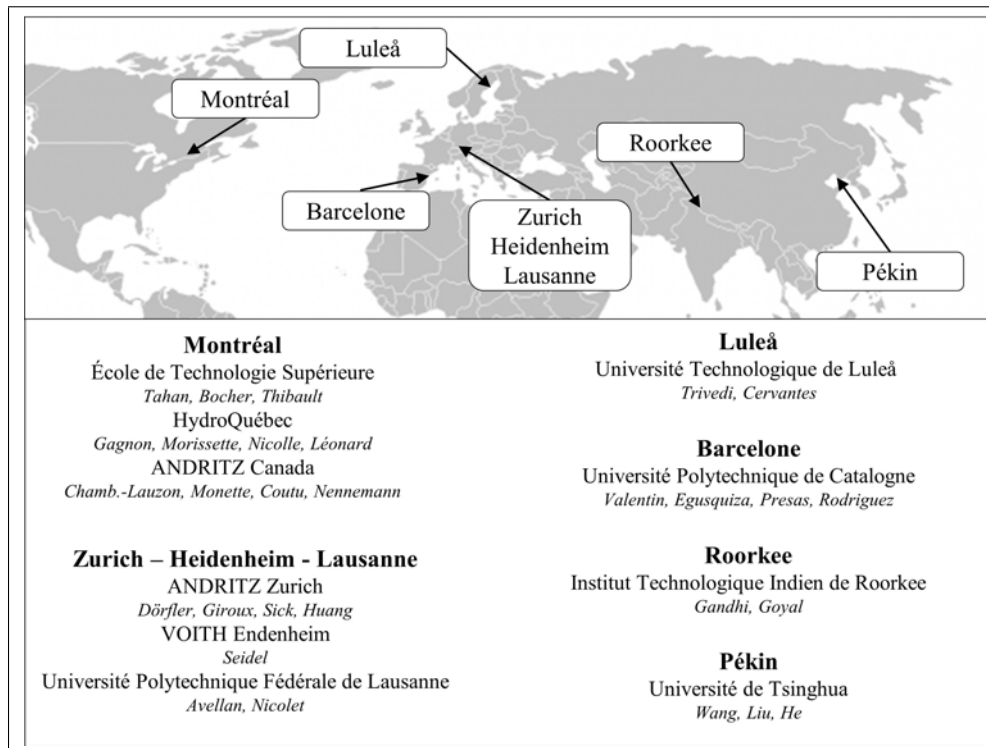


Figure 2.1 principaux contributeurs à la compréhension du comportement mécanique des turbines

L'objectif de cette thèse est de mettre en œuvre (incluant le développement et la validation) des outils d'analyse modale opérationnelle sur des mesures de déformation opérationnelles. Le but est de caractériser les paramètres modaux des turbines hydroélectriques. Les contraintes suivantes ont été identifiées :

1. Le modèle développé doit réaliser l'analyse modale opérationnelle de turbines hydroélectriques.
2. L'analyse doit quantifier l'incertitude inhérente à l'identification.
3. L'algorithme d'identification doit traiter un nombre relativement limité de données, de par la non-stationnarité des régimes étudiés.
4. L'algorithme d'identification doit traiter des données non moyennées et non lissées.

5. Le modèle doit être polyvalent, et être capable d'assimiler des données obtenues par différents moyens de mesures.
6. Le modèle d'identification doit fournir une inférence robuste et stable.
7. Les incertitudes identifiées doivent être les plus représentatives possibles de la réalité, mais également être faible au regard de la prédiction de l'amplitude des pics de résonance.

### 2.1.2 Bilan de la littérature

Suite à l'étude de l'état de l'art dans le domaine de l'OMA, il apparaît que deux grandes familles d'algorithmes sont capables de traiter les incertitudes pour satisfaire les contraintes (1, 2) : l'approche fréquentiste et l'approche bayésienne. L'approche fréquentiste repose sur de nombreuses propriétés asymptotiques, et n'est efficace que pour le traitement de données abondantes. Au contraire, l'inférence bayésienne est en théorie capable d'identifier les incertitudes de manière fiable, même lorsque les données sont limitées. Ainsi, la contrainte (3) peut effectivement être traitée à l'aide de la méthode bayésienne. Comme les données sont limitées, il est pertinent d'utiliser des méthodes non paramétriques pour séparer les modes de vibration et permettre une identification sans obstacle de sous-détermination. Pour cela, le domaine fréquentiel est très approprié, car il permet la séparation des modes distincts. La contrainte (4) rend impossible l'exploitation des algorithmes spectraux comme le BSDA ou le Fast-BSDA. Ainsi, les méthodes permettant de répondre aux contraintes de travail sont les méthodes bayésiennes basées sur des données fréquentielles. Les principaux contributeurs à la recherche dans ce domaine sont présentés en Figure 2.2.

À l'heure actuelle, trois algorithmes sont susceptibles de réaliser l'identification modale opérationnelle de roues de turbine en transitoire : le BFFTA (Yuen & Katafygiotis (2003a); Yuen (2010)), le Fast-BFFTA (Au & Zhang (2011); Au (2012a,b, 2017)) et le BHM (Sedehi *et al.* (2020)). Dans le paragraphe suivant, ces algorithmes sont analysés et leurs limites sont soulignées.

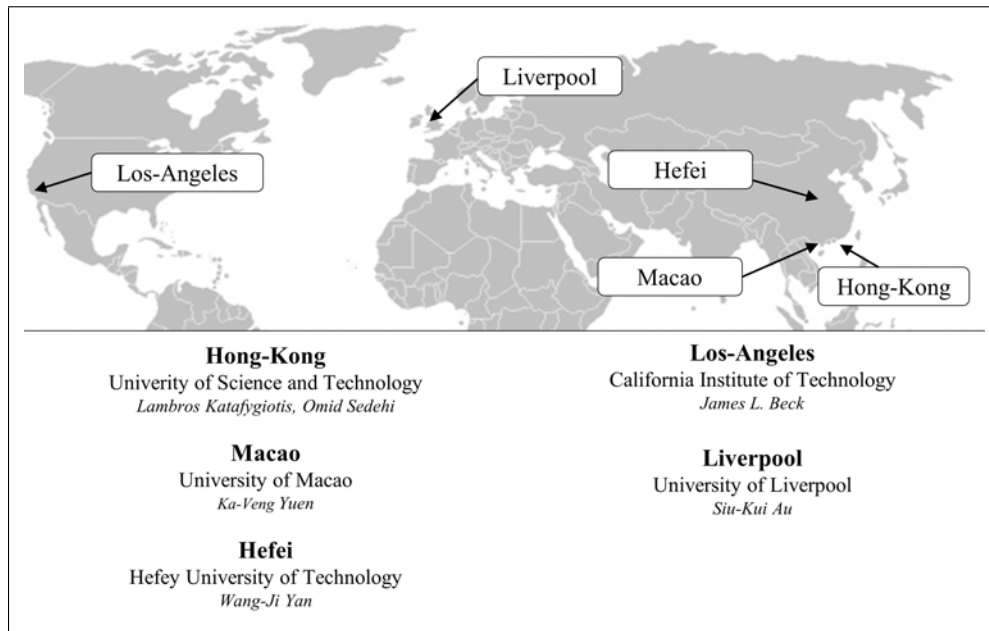


Figure 2.2 principaux contributeurs au développement d’algorithmes bayésiens pour l’OMA

### 2.1.3 Limites de la littérature et opportunités

Au regard des contraintes de travail, des limitations de la littérature et des récentes avancées dans le domaine hydroélectrique, différentes opportunités peuvent être formulées. Ces opportunités serviront à définir les objectifs de recherche. Au travers de l’introduction, une première conclusion est que l’analyse modale opérationnelle des groupes de turbines est peu documentée Valentin *et al.* (2017a); Gagnon *et al.* (2006, 2009). Partant de la contrainte (1), ceci permet de dégager une première opportunité de travail :

**Opportunité 1 :** l’analyse modale opérationnelle des turbines hydroélectriques n’a que très peu été étudiée. Ceci est principalement dû à la complexité de l’analyse de la réponse naturelle des roues.

Les contraintes de travail (2 - 4) ont permis d'identifier trois algorithmes capables de réaliser l'identification : le BFFTA, le Fast-BFFTA et le BHM. Ces trois algorithmes partagent des limitations communes, récapitulées en termes d'opportunités de recherche. Premièrement, l'ensemble des modèles proposés mettent l'accent sur le développement de techniques de calcul efficaces pour minimiser les temps de calcul : approximation de Laplace positionnée sur un estimateur au maximum de vraisemblance, reparamétrisation du problème pour réduire la dimension de l'espace des variables, optimisation des stratégies de calcul, dérivation analytique de la Hessienne du problème, etc. La motivation sous-jacente de ces développements est de rendre l'approche bayésienne viable pour des portées industrielles, dont l'essentiel des algorithmes d'OMA reposent sur des méthodes fréquentistes ou non-statistiques. Cette viabilité est largement tributaire des temps de calcul, qui sont la principale limite dans la philosophie bayésienne. Cependant, l'accroissement des capacités de calcul des ordinateurs et la loi de Moore pour le développement technologique ont rendu les problématiques de temps de calcul moins contraignantes. À l'heure actuelle, même les cadres bayésiens complets construits sur des échantillonneurs numériques convergent avec des coûts de calculs modérés, avec l'avantage de ne pas faire appel à nombre d'approximations et de simplifications de nature asymptotique Levy (2009). Motivée par les performances de calcul des nouvelles technologies, l'idée de ce mémoire est de construire un premier cadre Bayésien complet pour l'analyse modale opérationnelle, à l'aide d'échantillonneurs numériques. Ces cadres permettent l'intégration de priors informatifs, et l'échantillonnage des densités postérieures exactes.

**Opportunité 2** : il n'existe pas de modèles de statistique bayésienne numériques permettant de réaliser l'identification modale des systèmes.

Ces deux premières opportunités de recherche sont générales et permettent d'orienter les axes de recherche découlant de la problématique. Plusieurs autres opportunités plus spécifiques sont à souligner. Ces opportunités ont pour objectif de produire des modèles plus représentatifs de la dynamique observée, et de développer des algorithmes robustes et polyvalents afin de répondre aux contraintes (5 - 7). Pour commencer, les modèles bayésiens considèrent des systèmes

homoscédastiques dont la variance de l'erreur est identique pour tous les capteurs étudiés. Étant donné la contrainte de travail (5), ce type d'hypothèse n'est pas raisonnable, car l'analyse doit être capable d'incorporer une large diversité de capteurs (déformation, accélération, mesures de torsion, flexion. . .) et d'environnements (turbine, arbre, paliers. . .).

**Opportunité 3** : l'erreur de modélisation est conditionnée par une hypothèse homoscédastique, qui n'est pas représentative de la diversité des signaux disponibles dans nos analyses.

Dans les algorithmes (Fast-)BFFTA, la notion de prior est complètement éludée du modèle bayésien, et l'ensemble des paramètres modaux est modélisé par une distribution uniforme. Ceci ne permet pas d'intégrer dans l'analyse la connaissance préalable des experts et l'expérience passée. Pourtant, cet aspect de l'inférence bayésienne est essentiel dans de nombreuses applications, et permet de construire une inférence plus solide. Dans le BHM, les priors des densités spectrales de l'erreur de modèle et de la force modale sont uniformes. Ainsi, sur le plan conceptuel, rien n'empêche le solveur d'identifier des variances négatives pour le modèle, ce qui fragilise l'identification. Cette pathologie est bien connue sous le nom de cas de Heywood Martin & McDonald (1975). Au cours des travaux de recherche, il s'est avéré que ce danger existe bel et bien, en particulier pour l'identification de la variance de l'erreur. De la contrainte de travail (6) est dégagée l'opportunité suivante :

**Opportunité 4** : les algorithmes existants ne considèrent pas (ou peu) d'information relative à l'expertise et l'expérience passée.

Enfin, une dernière opportunité peut être proposée comme corollaire direct de l'opportunité 2. Les modèles d'inférence sont tous basés sur une approximation de Laplace. Il a été mis en évidence dans le précédent chapitre que cette méthode introduit un double biais potentiel dans l'identification, en particulier dans des contextes où les données sont limitées. Ainsi, les contraintes (3) et (7) peuvent être compromises par la procédure de modélisation de la vraisemblance. En conséquence, l'opportunité suivante peut être formulée :

**Opportunité 5** : au vu des données disponibles pour nos analyses, les algorithmes existants sont susceptibles de calculer des marges d'incertitudes non représentatives.

#### 2.1.4 Objectifs de recherche

Les différentes opportunités de recherche mises en évidence dans le paragraphe précédent permettent de définir les objectifs suivants :

1. Déterminer une méthode efficace pour extraire les signatures modales à partir des mesures in-situ.
  - a. Identifier les types d'excitation susceptibles de générer des résonances.
  - b. Déterminer ou développer un algorithme capable d'extraire les résonances.
2. Construire un cadre bayésien complet pour l'analyse modale opérationnelle via l'utilisation d'outils statistiques numérique.

Pour garantir la cohérence de nos contributions par rapport à l'état actuel de la recherche, un troisième objectif s'impose naturellement :

3. Comparer les résultats à l'état de l'art.
  - a. Tester les algorithmes existants sur nos données.
  - b. Comparer les estimations avec le nouveau modèle.

Enfin, une discussion doit être faite sur l'utilisation des résultats dans un cadre industriel. Ce dernier aspect est essentiel, puisqu'il permettra de relier l'ensemble des travaux effectués aux problématiques initiales.

4. Discuter les résultats au regard des enjeux initiaux.



- a. Proposer des perspectives liées à l'exploitation de l'identification expérimentale.
- b. Émettre des recommandations liées à l'obtention d'estimations de qualité.

Sur le plan conceptuel, l'objectif 2 a la plus grande importance, car en résultera le développement d'un nouvel algorithme adapté à nos usages et aux données disponibles. Sur le plan académique, l'objectif 3 a une grande valeur puisqu'il permettra de valider les nouveaux outils et de les positionner sur l'état de l'art. Sur le plan industriel, l'objectif 4 permet de dégager des exemples d'applications concrètes des outils développés, et propose d'édicter des recommandations sur leur utilisation.

## **2.2 Structure du mémoire**

### **2.2.1 Les chapitres**

La Figure 2.3 présente l'organisation de la suite du mémoire. En régime transitoire, il existe deux catégories de résonances, suivant le type d'excitation à l'origine de l'amplification. D'une part, les résonances synchrones sont provoquées par la vitesse de rotation et ses harmoniques. D'autre part, les résonances stochastiques sont produites par l'ensemble des phénomènes physiques aléatoires, générant pratiquement un bruit blanc à large bande. Les résonances synchrones sont sélectives et n'excitent que des modes distincts. Un modèle UDDL suffit à les caractériser, mais une étape non triviale d'extraction du signal est nécessaire. Au contraire, les résonances stochastiques excitent tous les modes présents dans une bande de fréquence donnée. Au vu des faibles ratios signal/bruit et du faible nombre de données disponibles pour un temps donné, il est proposé de se concentrer sur le cas des résonances synchrones.

### **2.2.2 Liste des contributions**

Dans le présent mémoire, trois contributions sont disponibles.

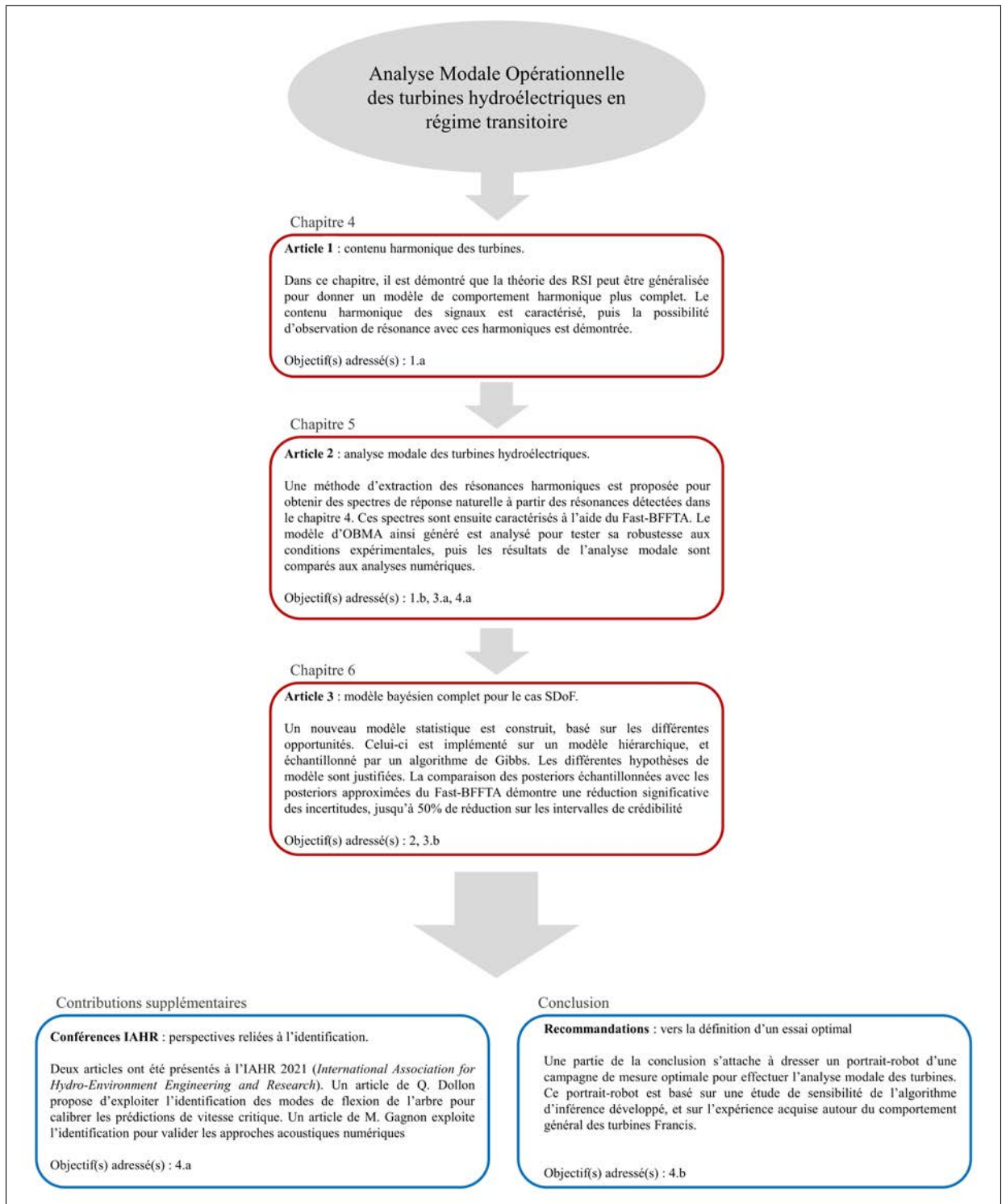


Figure 2.3 plan de la thèse

**Contribution 1** : Toward a better understanding of synchronous vibrations in hydroelectric turbines, Q. Dollon, A. Tahan, J. Antoni, M. Gagnon, C. Monette. Soumis dans Journal of sound and Vibration (soumis le 11 Juin 2021).

Motivations : le contenu harmonique des turbines est en général dominé par les RSI. Ainsi, lors de la recherche de résonances synchrones, il était attendu que les résonances observées résultent des harmoniques liées aux RSI. Or, il s'est avéré que de nombreuses résonances ne pouvaient être expliquées par les RSI, et que le contenu harmonique des turbines était beaucoup plus riche que ce que prédisent les modèles standards.

Point-clés : Cet article traite du contenu harmonique des turbines hydroélectriques. Sur la base des travaux de Wildheim datant des années 1980, le concept des RSI est généralisé pour tout type de périodicité. Il est démontré que les vibrations harmoniques s'établissent sur des diamètres nodaux bien précis, uniquement dépendants du nombre d'aubes et de l'indice harmonique. Le modèle est validé à l'aide de régimes permanents, et il est montré que les harmoniques observées sont complètement expliquées par cette théorie.

**Contribution 2** : Operational modal analysis of hydroelectric turbines using an order based likelihood approach, Q. Dollon, J. Antoni, A. Tahan, M. Gagnon, C. Monette. Publié dans Renewable Energy Journal 165-1, pages 799-811 (DOI 10.1016/j.renene.2020.11.086 ).

Motivations : les résonances synchrones identifiées précédemment doivent maintenant pouvoir être caractérisées. Pour cela, il est nécessaire de déterminer une technique capable d'extraire, puis d'identifier les paramètres dynamiques.

Point-clés : Une combinaison de méthode de suivi d'ordre (Order-Tracking) et d'analyse modale opérationnelle est proposée, donnant lieu à un nouvel algorithme d'OBMA (Order-Based Modal Analysis). L'algorithme d'OMA Polymax usuellement utilisé est remplacé par un algorithme Fast-Bayesian. Ceci permet de traiter des données très bruitées, limitées, et permet de déterminer les marges d'incertitudes. Enfin, les estimations expérimentales sont comparées à des outils de

simulation numérique.

**Contribution 3** : FFT-based Bayesian operational modal analysis in presence of limited data : case of well-separated modes, Q. Dollon, J. Antoni, A. Tahan, M. Gagnon, C. Monette. Soumis dans Mechanical Systems and Signal Processing.

Motivations : l'algorithme d'OBMA proposé dans la contribution 2 est susceptible de calculer des incertitudes non représentatives. Il est nécessaire de construire un modèle d'inférence plus robuste et plus fidèle.

Point-clés : L'étude développe une nouvelle technique d'OMA fréquentielle pour des systèmes SDoF, fondée sur une approche bayésienne complète. L'identification est basée sur des MCMC (Markov-chain Monte-Carlo), ce qui permet de s'affranchir de l'approximation asymptotique et d'obtenir des incertitudes plus réalistes.

À ces différentes contributions s'ajoutent deux papiers de conférence :

**Conférence 1** : Dynamic characterization of hydroelectric turbine with transient data records using OBMA and phase-shift analysis, Q. Dollon, A. Tahan, J. Antoni, M. Gagnon, C. Monette. Surveillance, VISHNO and AVE Conferences, 2019, Lyon, France.

Le contenu présente une version très simplifiée du contenu de l'article 1, et avait pour objectif d'introduire le projet de recherche auprès de la communauté scientifique.

**Conférence 2** : Calibration of critical speed predictions using experimental measurements, Q. Dollon, C. Monette, M. Gagnon, A. Tahan, J. Antoni. IAHR Conference 2020, Lausanne (Suisse)

Ce papier présente une méthode d'assimilation de données pour améliorer les prédictions de vitesse critique des turbines, et ainsi abaisser la fréquence d'alarmes et d'arrêts d'urgence non nécessaires. La procédure constitue un exemple concret d'utilisation des résultats d'identification expérimentale.

Un dernier article de conférence de M. Gagnon vient se positionner dans la continuité des travaux :

**Conférence 3** : Francis turbine runner blades operational modal analysis using transient conditions, M. Gagnon, Q. Dollon, J. Nicolle, J.-F. Morissette. IAHR Conference 2020, Lausanne (Suisse).

Cas d'étude sur une turbine avec un très riche contenu harmonique, basé sur les travaux de l'article 1. Une comparaison avec les résultats de simulations numériques est proposée.

### 2.3 Valeur ajoutée

Les contributions scientifiques majeures des différents articles publiés sont regroupées et listées ci-dessous.

Pour la contribution 1 :

- Développement d'un modèle paramétrique dérivé de l'analyse modale théorique d'une roue de turbine.
- Démonstration de l'existence d'excitations harmoniques plus large que celles attendues usuellement par les RSI.
- Validation de la théorie par deux protocoles expérimentaux : l'étude des différences de phase entre capteurs placés sur différentes aubes en régime permanent, et la mise en évidence de résonances durant des régimes transitoires compatibles avec la théorie.
- Proposition de plusieurs recommandations à portée industrielle.

Le modèle paramétrique construit pourrait être implémenté sur une routine d'identification pour réaliser l'analyse modale des turbines en régime permanent.

Pour la contribution 2 :

- Développement d'une nouvelle combinaison de techniques d'OBMA pour permettre la caractérisation statistique de résonances synchrones SDoF.
- Vérification du modèle sur des données limitées.
- Identification modale opérationnelle d'un prototype de turbine Francis lors d'un arrêt.
- Comparaison des simulations numériques avec les résultats expérimentaux.

Le développement d'un cadre fully-bayesian devrait permettre en traitement plus précis des incertitudes liées à l'inférence.

Pour la contribution 3 :

- Développement d'un modèle hiérarchique permettant la définition de priors informatifs, et prenant en compte la nature hétéroscédastique des données.
- Échantillonnage du modèle par un échantillonneur numérique de Gibbs incluant une étape de Metropolis-Hasting.
- Démonstration de la compétitivité de l'échantillonneur par rapport aux méthodes actuelles.



## CHAPITRE 3

### TOWARD A BETTER UNDERSTANDING OF SYNCHRONOUS VIBRATIONS IN HYDROELECTRIC TURBINES

Quentin Dollon<sup>1,2</sup>, Antoine Tahan<sup>2</sup>, Jérôme Antoni<sup>1</sup>, Martin Gagnon<sup>3</sup>, Christine Monette<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire vibration acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 20 Avenue Albert Einstein, 69100 Villeurbanne, France

<sup>2</sup> Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure, 1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, QC H3C 1K3, Canada

<sup>3</sup> Institut de Recherche de Hydro-Québec, 1800 Boulevard Lionel-Boulet, Varennes, QC J3X 1S1, Canada

<sup>4</sup> Andritz Hydro Canada Inc., 6100 Route Transcanadienne, Pointe-Claire, QC H9R 1B9, Canada

Article soumis au *Journal of Sound and Vibration*, Juin 2021

#### 3.1 Abstract

Runner-casing interactions are known to be major stress contributors during turbine operation in nominal regimes. It is widely accepted in the hydro community that rotor-stator interactions (RSI) are the main runner-casing mechanisms. These synchronous excitations must be properly understood to ensure reliable long-term operation. In this study, the authors demonstrate that in a hydroelectric turbine, casing non-uniformities can induce a wide range of synchronous excitations, that cannot be predicted using the standard RSI theory. After deriving the mathematical background that generalizes the concept of RSI, the theory is verified using the data recorded on two different hydroelectric Francis runners. Furthermore, the framework is able to explain unexpected resonances between some rotating speed harmonics and structural modes, observed during runner transient operations.



### 3.2 Introduction

Francis turbines are complex structures composed of a runner and a stationary frame. The runner is assembled from blades, which convert the surrounding flow energy into a lift force. The lift provides the runner with torque and rotating speed. The runner then drives an alternator, producing electricity. The stationary frame is composed of an inlet system, a draft tube and a distributor. The distributor feeds the runner with water through adjustable guide vanes. Figure 3.1 presents the main components found in a Francis turbine. In hydroelectric engineering, the successful long-term operation of turbines relies on the integrity of the structure. This integrity is ensured by the proper prediction of fatigue, which can ultimately lead to major cracks and mechanical failures. Nowadays, these predictions are based on fatigue models which return trustworthy assessments if a realistic loading history is provided, see Gagnon *et al.* (2013, 2014); Liu *et al.* (2016). These loading histories consist of rainflow spectra that represent the fatigue cycles withstood by the structure. These fatigue cycles can be induced by various excitation sources, depending on the operating regime.

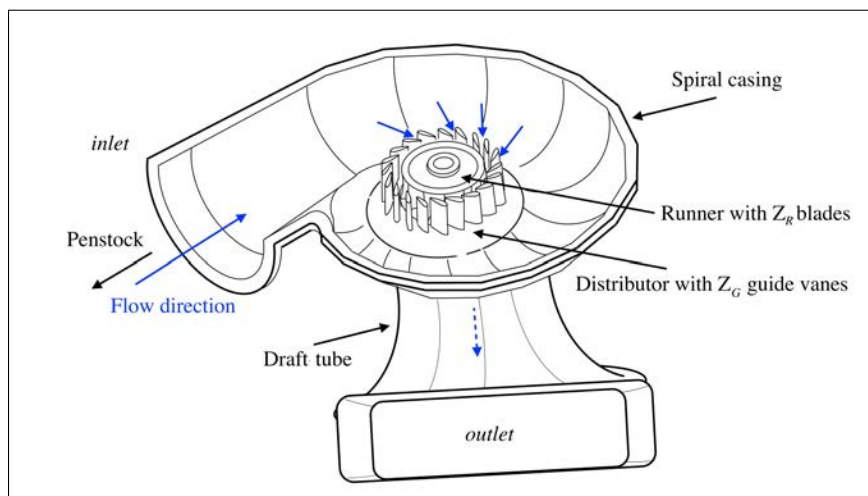


Figure 3.1 Principal components of a Francis turbine

The operating regime can be adapted to meet the target production. Steady state regimes include the Best Efficient Point (BEP) for which the turbine is designed, part-load and deep-part load operations. At the BEP, the geometry is designed to mitigate most of the dynamic loads in the

structure and the flow is in line with the blade curvature. The synchronous vibrations arising from the runner-casing periodic effects (interactions between rotating and stationary frames) constitute the main contributor to unsteady loads, Huang *et al.* (2014b). They occur a fixed number of times per revolution. When the regime drops down from the BEP, the guide vanes gradually close and the flow gets misaligned from the blade geometry. At part-load, the outflow produces a skew-like vortex in the draft tube : the so-called vortex rope, Seidel *et al.* (2014). This vortex is responsible for most of the vibrations occurring in the turbine, Favrel *et al.* (2015). At deep part-load regimes, the flow is very turbulent, and dynamic loads arise from turbulences and inter-blade vortices, Liu *et al.* (2017). On the other hand, when the turbine operates at high load, another type of self-excited vortex, namely, the overload surge, can occur in the draft tube, Flemming *et al.* (2009). Figure 3.2 summarizes the main excitation sources and their relative severities along a distinctive hill chart diagram.

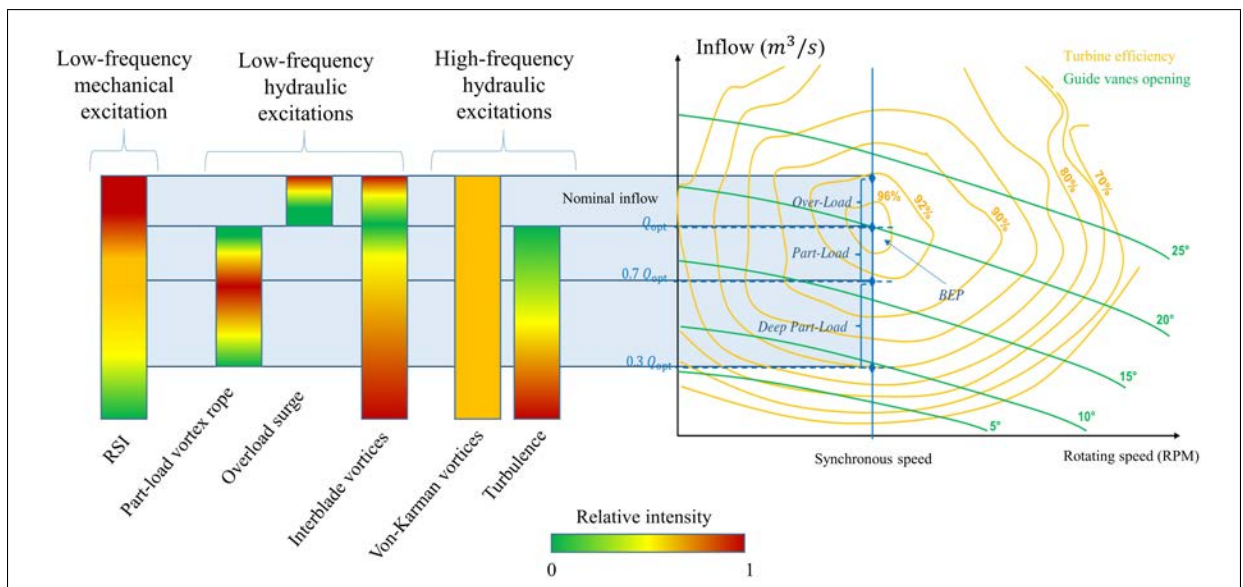


Figure 3.2 Classification of potential fatigue cycle sources in Francis turbines. The relative intensities of the load are presented

In an ideal turbine, the only runner-casing effects would result from the interaction of the blades passing through the vanes' wake. These phenomena are called rotor-stator interactions (RSI), and have been extensively studied in the literature, see for instance Tanaka (2011); Dorfler

*et al.* (2013); Anup *et al.* (2014). From the perspective of the runner, RSI develop at harmonic frequencies  $\omega_{RSI} = nZ_G\Omega$ , where  $Z_G$  is the number of guide vanes,  $\Omega$  is the rotating speed, and  $n$  is an integer. Because the mechanism is cyclic-symmetric, the spatial excitation pattern is characterized by a nodal diameter  $\pm\nu$ , which satisfies  $\pm\nu = mZ_R - nZ_G$ , where  $Z_R$  is the number of blades and  $m$  is an integer. The  $\pm\nu$  sign describes the direction of the motion (negative for forward motion, positive for backward motion).

In an actual turbine, geometrical asymmetries and other potential non-uniformities can lead to a richer synchronous content in the vibration signature. In the early '80s, Wildheim (1981a) developed a general framework for the case of a rotating machinery subjected to any kind of runner-casing interaction. He demonstrated that the harmonic content of a rotating circumferentially periodic structure is geometrically specific, i.e., the harmonic excitations develop along specific nodal diameters which only depend on the number of runner blades. The relative amplitude of harmonics are functions of the periodicity of the interaction.

Here, it is proposed to use the Wildheim model for hydroelectric turbines, in order to better explain the synchronous vibration content of Francis turbines during operation. Our principal contributions are the following : first, an experimental verification of the theory is proposed using in situ strain gauge measurements obtained from two different turbine prototypes in operation. Second, it is demonstrated that the harmonic excitations described produce unexpected resonances during transient regimes, such as found in Dollon, Antoni, Tahan, Gagnon & Monette (2021a). Third, some industrial perspectives related to operational modal analysis and safer operation are outlined.

The paper is structured as follows. Sections 3.3 and 3.4 are dedicated to the background of runner-casing interaction theory. Section 3.3 introduces the modal analysis of turbines. Section 3.4 derives the generalized force triggered by an evenly distributed force on the stationary cascade. In section 3.5, the theory is validated using strain-gauge measurements obtained from several regimes of two different turbine prototypes. In section 3.6, it is shown that the theory is

able to explain some unexpected resonances detected during coast-down experiments. In section 3.7, some perspectives related to the use of the theory in the hydroelectric industry are discussed.

### 3.3 Modal analysis of turbines

#### 3.3.1 General background

The forced vibration of an undamped rotating elastic structure can be formulated using the finite element theory. The general motion is written as a coupled oscillator equation (3.1), where  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  stands for the generalized displacement along  $M$  degrees of freedom :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

with  $\mathbf{M}$  and  $\mathbf{K}$  being the real-valued symmetric mass and stiffness matrices, respectively, and  $\mathbf{G}$  a skew-symmetric matrix describing the gyroscopic effects. The state-space representation of the system is given in equation (3.2), using  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}})^T(t)$  :

$$\mathcal{A}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{A}_2 \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (3.2)$$

The Duncan coefficient matrices are :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 2M}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{0}_M & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times M}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{0}_L \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2M \times 1} \quad (3.3)$$

The homogenous solution of equation (3.2) are obtained from the eigenvalue problem  $|\lambda_k \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2| \chi_k = \mathbf{0}_{2M \times 1}$ ,  $k \leq 2M$ . There are  $M$  pairs of conjugated natural modes  $(\lambda_k, \chi_k)$  and  $(\lambda_k^*, \chi_k^*)$ , reflecting the free vibrations of the structure. The eigenvalues  $\lambda_k$  are the complex natural

frequencies. The eigenvector matrix  $\mathbf{X} = (\{\chi_k, \chi_k^*\})_{k \leq M}$  writes as a function of the modal matrix  $\Psi = (\{\psi_k, \psi_k^*\})_{k \leq M}$  of equation (3.1) :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi \Lambda \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \text{diag}(j\omega_k) & \mathbf{0}_M \\ \mathbf{0}_M & \text{diag}(-j\omega_k) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

In the general case  $\mathbf{f}(t) \neq \mathbf{0}_{M \times 1}$ , the solutions of the state-space model (3.2) are a linear combination of the natural modes  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} \mathbf{q}(t)$ . The weighting coefficients  $\mathbf{q}(t)$  are the modal coordinates. In modal analysis, this transform is traditionally used in the state-space (3.2), and the result is multiplied by  $\mathbf{X}^H$  to give the uncoupled system in equation (3.5). This formulation is convenient because it allows each modal coordinate to be solved independently if no input force is provided, as shown in equation (3.5) :

$$\mathcal{D}_1 \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathcal{D}_2 \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) \quad (3.5)$$

where  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \Psi^H \mathbf{f}(t)$  stands for the generalized force vector. The matrices  $\mathcal{D}_1 = \mathbf{X}^H \mathcal{A}_1 \mathbf{X}$  and  $\mathcal{D}_2 = \mathbf{X}^H \mathcal{A}_2 \mathbf{X}$  are diagonal because they satisfy some orthogonality constraints with respect to  $\mathbf{X}$ .

### 3.3.2 Bladed turbines

If the structure is a bladed disk of  $Z_R$  blades, a convenient mode shape parametrization choice is  $\boldsymbol{\psi}_k = (\boldsymbol{\psi}_k^1, \dots, \boldsymbol{\psi}_k^{Z_R})^T$ , where each  $\boldsymbol{\psi}_k^r \in \mathbb{R}^{J \times 1}$ ,  $k \in \llbracket 1, 2Z_R J \rrbracket$  describes the  $k$ -th mode shape on substructure  $r$  along  $J$  degrees of freedom. Such a partition is convenient because with it, the set of single-blade mode shapes  $\{\boldsymbol{\psi}_k^r\}_{r \in \llbracket 1, Z_R \rrbracket}$  satisfies the recurrence relation (3.6) proposed by Thomas (1974) :

$$\boldsymbol{\psi}_k^{r+1} = \boldsymbol{\psi}_k^r e^{\pm j\phi_\nu}, \quad \phi_\nu = \nu \alpha \quad (3.6)$$

where  $\alpha$  represents the angular period  $2\pi/Z_R$ .  $\nu \geq 0$  can be recognized as the nodal diameter of the mode shape  $\psi_k$ . The  $2\pi$ -periodicity of the complex exponential naturally imposes  $\nu \leq \lfloor Z_R/2 \rfloor$ , where  $\lfloor \cdot \rfloor$  is the floor function. The recurrence (3.6) can be used to compute the runner mode shapes from the single-blade mode shapes, as expressed in equation (3.7) ( $\otimes$  is the Kronecker product). This result is often used in numerical analysis to reduce the simulation domain and the computational burden, see for instance Wirth & Oeckerath (2015).

$$\psi_k = \gamma_\nu^{+/-} \otimes \psi_k^1, \quad \gamma_\nu^{+/-} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\pm j\phi_\nu} \\ \vdots \\ e^{\pm j(Z_R-1)\phi_\nu} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

According to equations (3.6) and (3.7), the modal matrix  $\Psi$  can be sorted as  $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_{\lfloor Z_R/2 \rfloor})$ , where each nodal specific matrix  $\Psi_\nu$  contains the mode shapes with phase constraint  $\pm i\phi_\nu$ . Because the mode shapes appear in conjugated pairs,  $\Psi_\nu$  contains  $2J$  modes with positive phase shift and  $2J$  modes with negative phase shift. This can be emphasized by the notation  $\Psi_\nu = (\Psi_\nu^+, \Psi_\nu^-)$ , with  $\Psi_\nu^+ = \Psi_\nu^{-*}$ . One important result pointed out by Wildheim (1981b) is that  $\Psi_\nu^+$  and  $\Psi_\nu^-$  contain  $J$  forward and  $J$  backward mode shapes :  $\Psi_\nu^+ = (\Psi_\nu^f, \Psi_\nu^b)$  and  $\Psi_\nu^- = (\Psi_\nu^{f*}, \Psi_\nu^{b*})$ . Figure 3.3 summarizes the modal matrix decomposition.

To each of the forward and backward modal sub-matrices is associated a root solution matrix containing complex natural frequencies, giving the following sets of natural modes :  $(\Psi_\nu^f, -j\Omega_\nu^f)$ ,  $(\Psi_\nu^b, j\Omega_\nu^b)$ ,  $(\Psi_\nu^{f*}, j\Omega_\nu^f)$ ,  $(\Psi_\nu^{b*}, -j\Omega_\nu^b)$ . The diagonal matrices  $\Omega_\nu^f = \text{diag}(\omega_j^{f\nu})$  and  $\Omega_\nu^b = \text{diag}(\omega_j^{b\nu})$  contain the  $J$  natural frequencies of forward and backward modes, respectively. This result allows partitioning the modal analysis introduced in the previous section into  $\lfloor Z_R/2 \rfloor$  nodal-specific problems. The state-space eigenvector matrix (3.4) can therefore be expressed along one nodal diameter  $\nu$  :

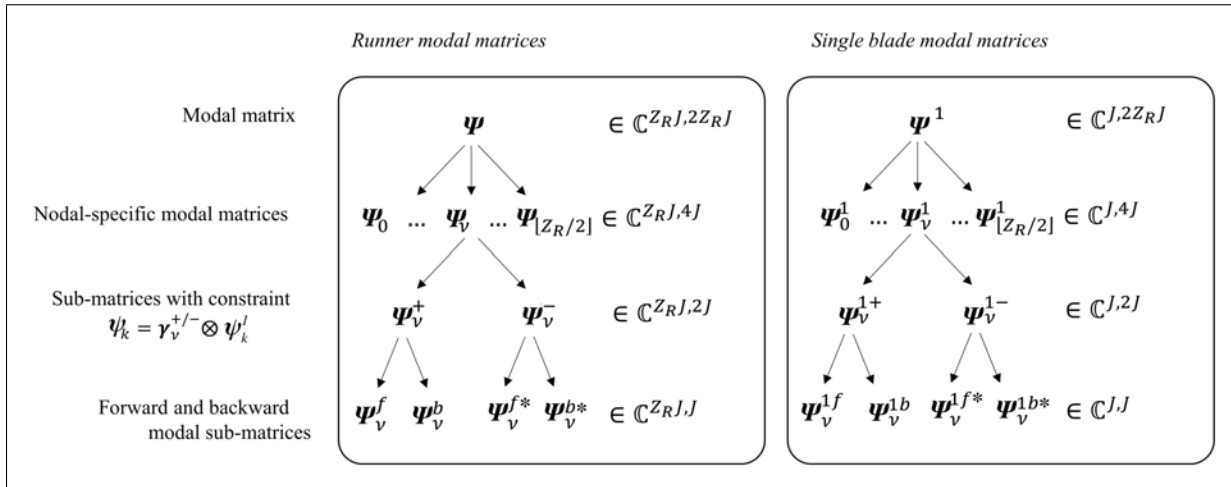


Figure 3.3 Modal matrix decomposition

$$X_\nu = \begin{pmatrix} \Psi_\nu \\ \Psi_\nu \Lambda_\nu \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -j\Omega_\nu^f & & \mathbf{0}_{4J} \\ & j\Omega_\nu^b & \\ & & j\Omega_\nu^f \\ \mathbf{0}_{4J} & & -j\Omega_\nu^b \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Similarly, the modal decomposition  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}\mathbf{q}(t)$  can be restricted to one specific nodal diameter. The solutions  $\mathbf{x}_\nu(t) = \mathbf{X}_\nu\mathbf{q}_\nu(t)$  then describes the forced response along the nodal diameter  $\nu$ . Using this transformation in equation (3.2), and multiplying by  $\mathbf{X}_\nu^H$  gives equation (3.9) :

$$\mathcal{D}_{1\nu}\dot{\mathbf{q}}_\nu(t) + \mathcal{D}_{2\nu}\mathbf{q}_\nu(t) = \boldsymbol{\varphi}_\nu(t) \quad (3.9)$$

The nodal-specific generalized force writes as  $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t) = \Psi_\nu^H \mathbf{f}(t)$ . The coefficient matrices satisfy  $\mathcal{D}_{1\nu} = -\mathcal{D}_{2\nu}\Lambda_\nu$ . Note that in the particular case of  $\nu = 0$ , the problem is degenerated, leading to standing solutions with multiplicity 2. At this point, the free vibrations of the structure along any nodal diameter can be solved using equation (3.9). The forced response can be derived if the nodal-specific generalized force  $\boldsymbol{\varphi}_\nu(t)$  is known.

### 3.4 Periodic forces actin on bladed disks

According to equation (3.7), the nodal specific matrix  $\Psi_\nu$  can be deduced from its single-blade restriction :  $\Psi_\nu = \Gamma_\nu * \Psi_\nu^1$ . The operator  $*$  represents the column-wise Khatri-Ro product, which is a generalized version of the Kronecker product.  $\Gamma_\nu = (\gamma_\nu^+, \gamma_\nu^+, \gamma_\nu^-, \gamma_\nu^-)$ , and  $\Psi_\nu^1$  is obtained as depicted in Figure 3.3. In order to elucidate the generalized force  $\varphi_\nu(t)$ , it is necessary to feature the excitation force  $f(t)$ . In the sequel, a one-per-revolution perturbation is considered to derive the excitation force. Henceforth, the parametrization  $f = (f^1, \dots, f^{Z_R})$  is adopted.

#### 3.4.1 Excitation model

In this first step, the case of a point force is considered. Most of the results presented here have been investigated by Wildheim (1979, 1981a). For a given exciting force, the first objective is to determine the contribution acting on each substructure element of the body.

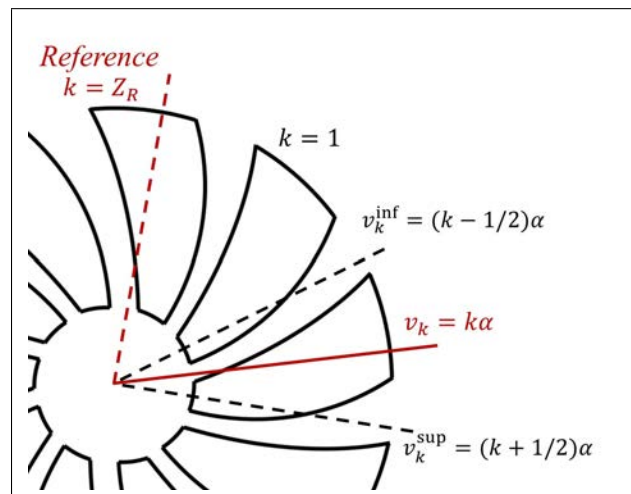


Figure 3.4 Angular parametrization on the runner

Let us consider a stationary point force acting on a structure rotating at speed  $\Omega$ . Then, in the precession coordinates, the force rotates at  $-\Omega$ . At any time  $t$ , its angular position is given by  $-\Omega t$ . The force can then be approximated by a instantaneous impulse at angle  $-\Omega t$  :



$$\mathbf{f}(t, \theta) = \mathbf{F}(\theta)\delta(\theta + \Omega t) \quad (3.10)$$

where  $\mathbf{F}(\theta)$  is the excitation shape. While it is generally not known, it is nevertheless  $2\pi/Z_R$ -periodic. To obtain the contribution of the force on blade  $k$ , the following integral must be calculated :

$$\mathbf{f}^k(t) = \int_{v_k^{sup}}^{v_k^{inf}} \mathbf{F}(\theta)\delta(\theta + \Omega t)d\theta \quad (3.11)$$

The bounds  $v_k^{inf}$  and  $v_k^{sup}$  are introduced in Figure 3.4. The reversed order of the bounds in the integral (3.11) reflects the counter-motion of the force. As  $v_k^{inf} < v_k^{sup}$ , the analytic solution is given by :

$$\mathbf{f}^k(t) = \mathbf{F}(-\Omega t)\Pi_k(\Omega t), \quad \Pi_k(\Omega t) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = \kappa(\Omega t) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.12)$$

The distribution  $\Pi_k$  is a rectangular window expressed as  $\Pi_k(\Omega t) = H(\Omega t - v_k^{inf})H(v_k^{sup} - \Omega t)$ , where  $H$  denotes the Heaviside distribution. It can be established that the window equals 1, if and only if,  $k$  lies within an interval  $[Z_R\Omega t/2\pi - 1/2, Z_R\Omega t/2\pi + 1/2]$ . This set contains only one positive integer value  $\kappa(\Omega t) = \lfloor Z_R\Omega t/2\pi + 1/2 \rfloor$ . This  $\kappa(\Omega t)$  is a step-like function given in Figure 3.5. It indicates which blade is excited at a given angle. Finally,

$$\mathbf{f}^k(t) = \mathbf{F}(-\Omega t) \text{ iff } k = \kappa(\Omega t) \quad (3.13)$$

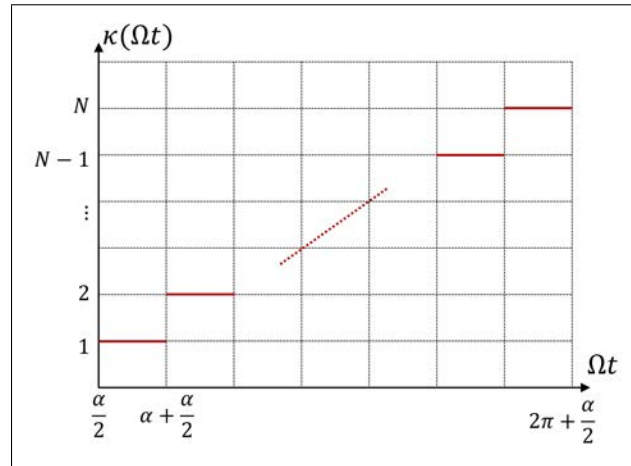


Figure 3.5 Step-like indicator function

### 3.4.2 Forced response

The generalized force can be partitioned into two conjugated pairs of contributions :  $\varphi_{\nu}(t) = (\varphi_{\nu 1}, \varphi_{\nu 2}, \varphi_{\nu 1}^*, \varphi_{\nu 2}^*)^T$ . In appendix 3.A, it is demonstrated that  $\varphi_{\nu 1}$  and  $\varphi_{\nu 2}$  write as linear combinations of a root angular nodal function  $f_{\nu}(\Omega t)$  :

$$\varphi_{\nu 1} = \Psi_{\nu}^{1fH} f_{\nu}(\Omega t), \quad \varphi_{\nu 2} = \Psi_{\nu}^{1bH} f_{\nu}(\Omega t) \quad (3.14)$$

The root angular nodal function is given by  $f_{\nu}(\theta) = e^{j\kappa(\theta)\phi_{\nu}} \mathbf{F}(-\theta)$ . In appendix 3.B, it is proven that the Fourier decomposition of  $f_{\nu}(\theta = \Omega t)$  writes as :

$$f_{\nu}(\Omega t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{p,\nu} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} \quad (3.15)$$

where  $\mathbf{c}_{p,\nu}$  are linear combinations of the Fourier coefficients of the spatial pattern  $\mathbf{F}(\theta)$ . Equation (3.15) can be re-expressed, giving :

$$f_v(\Omega t) = c_{0,v} e^{j\nu\Omega t} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[ c_{p,v} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} + c_{p,-v}^* e^{-j(pZ_R - \nu)\Omega t} \right] \quad (3.16)$$

The generalized force is found to have a harmonic-like structure, and develops along harmonics  $pZ_R \pm \nu$ . Similarly to the partition of the generalized force, the modal coordinates used in equation (3.9) can be divided into four contributions  $\mathbf{q}_v(t) = (\mathbf{q}_{v1}, \mathbf{q}_{v2}, \mathbf{q}_{v3}, \mathbf{q}_{v4})^T(t)$ , each of which is solved using the right-hand side term  $\varphi_{v1}, \varphi_{v2}, \varphi_{v1}^*$  and  $\varphi_{v2}^*$ . A detailed analysis of equations (3.9) and (3.14) shows that the  $2J$  first modal coordinates are conjugated with the  $2J$  last modal coordinates :  $\mathbf{q}_{v3} = \mathbf{q}_{v1}^*$  and  $\mathbf{q}_{v4} = \mathbf{q}_{v2}^*$ . This is expected because it ensures that the final solution is real-valued. Under a proper choice of normalization, the modal coordinates are solutions of a first-order linear ordinary differential equation with harmonic excitation :

$$\begin{aligned} i\dot{\mathbf{q}}_{v1}(t) - \Omega_v^f \mathbf{q}_{v1}(t) &= \Psi_v^{1fH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{p,v} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} \\ i\dot{\mathbf{q}}_{v2}(t) - \Omega_v^b \mathbf{q}_{v1}(t) &= \Psi_v^{1bH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{p,v} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Leading to :

$$\begin{aligned} q_{v1j}(t) &= \psi_{vj}^{1fH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{p,v} \frac{e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t}}{-(pZ_R + \nu)\Omega - \omega_j^{fv}}, \quad 0 \leq j \leq J \\ q_{v2j}(t) &= \psi_{vj}^{1bH} \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_{p,v} \frac{e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t}}{-(pZ_R + \nu)\Omega + \omega_j^{bv}}, \quad 0 \leq j \leq J \end{aligned} \quad (3.18)$$

The displacement of blade 1 along the nodal diameter  $\nu$  is deduced using the modal decomposition  $\mathbf{y}_v^1(t) = \Psi_v^1 \mathbf{q}_v(t)$ . This can be written as  $\mathbf{y}_v^1(t) = 2\mathcal{R}e \left( \Psi_v^{1f} \mathbf{q}_{v1} + \Psi_v^{1b} \mathbf{q}_{v2} \right) (t)$ . By omitting the negligible terms over the positive frequencies and considering only one preponderant backward and forward mode per nodal diameter (which is reasonable when the frequency band can be arbitrarily chosen), one obtains :

$$\mathbf{y}_\nu^1(t) \approx 2\mathcal{R}e \left[ \mathbf{A}^{f\nu} \mathbf{c}_{0,\nu} \frac{e^{j\nu\Omega t}}{\omega^{f\nu} - \nu\Omega} \right] + 2 \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \mathcal{R}e \left[ \mathbf{A}^{b\nu} \mathbf{c}_{p,\nu} \frac{e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t}}{\omega^{b\nu} - (pZ_R + \nu)\Omega} + \mathbf{A}^{f\nu} \mathbf{c}_{p,-\nu}^* \frac{e^{-j(pZ_R - \nu)\Omega t}}{(pZ_R - \nu)\Omega - \omega^{f\nu}} \right] \quad (3.19)$$

Matrices  $\mathbf{A}^{f\nu}$  and  $\mathbf{A}^{b\nu}$  are the residual matrices of forward and backward nodal diameters  $\nu$  :  $\mathbf{A}^{f\nu} = \boldsymbol{\psi}_\nu^{1f} \boldsymbol{\psi}_\nu^{1f H}$ ,  $\mathbf{A}^{b\nu} = \boldsymbol{\psi}_\nu^{1b} \boldsymbol{\psi}_\nu^{1b H}$ . According to equation (3.6), the displacement  $\mathbf{y}_\nu^r(t)$  on any blade  $r$  is obtained by multiplying the solution (3.19) by  $\exp(i(r-1)\nu\alpha)$ , before taking the real part. Some conclusions can be drawn. First, the harmonic content of turbines is composed of vibrations developing along specific nodal diameters. These nodal diameters depend only on the number of runner blades and on the harmonic index. The harmonic vibrations satisfy the following rule, for any  $\nu \in \llbracket 0, \lfloor Z_R/2 \rfloor \rrbracket$  :

- Waves at harmonic  $pZ_R + \nu$ ,  $p \in \mathbb{N}$  vibrate along a nodal diameter  $\nu$  with a backward motion.
- Waves at harmonic  $pZ_R - \nu$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  vibrate along a nodal diameter  $\nu$  with a forward motion.
- Waves at harmonic  $pZ_R$ ,  $p \in \mathbb{N}$  are in-phase and vibrate along a nodal diameter 0.

The above results derive from a one-per-revolution excitation whose root nodal force is shown in equation (3.15). However, the nodal-diameter specificity of the harmonic fields does not depend on the excitation periodicity. The periodicities involved only change the relative amplitude of the harmonics : if the excitation has a  $Z$ -per-revolution periodicity, then the root nodal force is given by :

$$f_\nu^{(Z)}(\Omega t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_{p,\nu} e^{j(pZ_R + \nu)\Omega t} \delta_{pZ_R + \nu, p'Z}, \quad p' \in \mathbb{Z} \quad (3.20)$$

This last equation proves that the nodal structure of the harmonic content is not influenced by the type of periodicity. A  $Z$ -periodic excitation only excites harmonics that are multiples of

the periodicity. From this result, one can easily recognize the RSI theory when the periodicity equals the number of guide-vanes,  $Z = Z_G$ .

### 3.5 Experimental verification

One of the key results of the developments laid out above is that the harmonic fields in turbines have fully deterministic spatial behaviors, and develop along specific nodal diameters that only depend on the number of runner blades. The theory is verified experimentally on two operational case studies from Francis hydroelectric turbines. In order to do this, the phase shift recorded between blades of Francis runners is studied.

#### 3.5.1 Turbine characteristics and data acquisition

The data here was acquired from strain field measurements obtained from operational Francis prototype runners. Two medium-head turbines were investigated. Both runners have 13 blades and a distributor with 20 guide vanes. Turbine 1 has a synchronous speed of  $163.7RPM$ , while that of turbine 2 is  $200RPM$ . To maximize the influence of synchronous excitations and minimize the stochastic adverse vibrations, operations around the best efficient point are chosen for analysis. This minimizes the flow turbulence and increased the signal-to-noise ratio (SNR) of the harmonics. The regimes studied are described in Table 3.1.

Tableau 3.1 Operating regimes during experiments

		Vane Opening [%]	Power [MW]	%BEP
Runner 1	Regime 1	70	116	87% BEP
	Regime 2	80	133	100% BEP
Runner 2	Regime 1	100	270	110% BEP
	Regime 2	75.6	220	90% BEP
	Regime 3	100	276	110% BEP

Data were collected with a sample rate  $2500Hz$  using strain gages on the blades. Runner 1 was instrumented with 9 pairs of sensors located on blades 1 and 5, while runner 2 was instrumented with 4 pairs of sensors on blades 1 and 2. Pairs refer to sensors having the same location on

different blades. The sensor locations are presented in Figure 3.6, and roughly correspond to the turbines' hotspots. Due to the harsh hydraulic environment, the gages cannot work properly over long periods of time. The typical duration of experiments for each operating condition is between 40s and 5min.

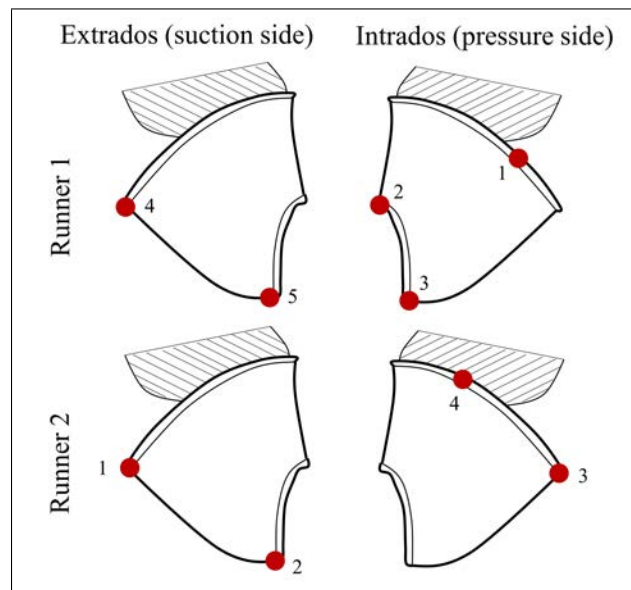


Figure 3.6 Sensor locations on the blades

The harmonic content of the runner strain measurements is revealed using Fast-Fourier transforms, as shown in Figure 3.7. It appears that both runners not only produce strong harmonic peaks at the guide vanes' passing frequencies (RSI), but also at harmonics along a wide range of frequencies. Henceforth, these harmonics will be called NTRCI (for Non-Trivial Runner-Casing Interactions). For runner 2, the low-order NTRCI are as intense as the RSI amplitudes. According to the theory presented in the previous sections, the expected nodal diameters are outlined for each harmonic.

### 3.5.2 Expected phase shift

The forced response at a given harmonic is backward or forward and develops along a specific nodal diameter  $\nu$ . Using equation (3.19), a harmonic  $k$  vibrating along a forward nodal diameter

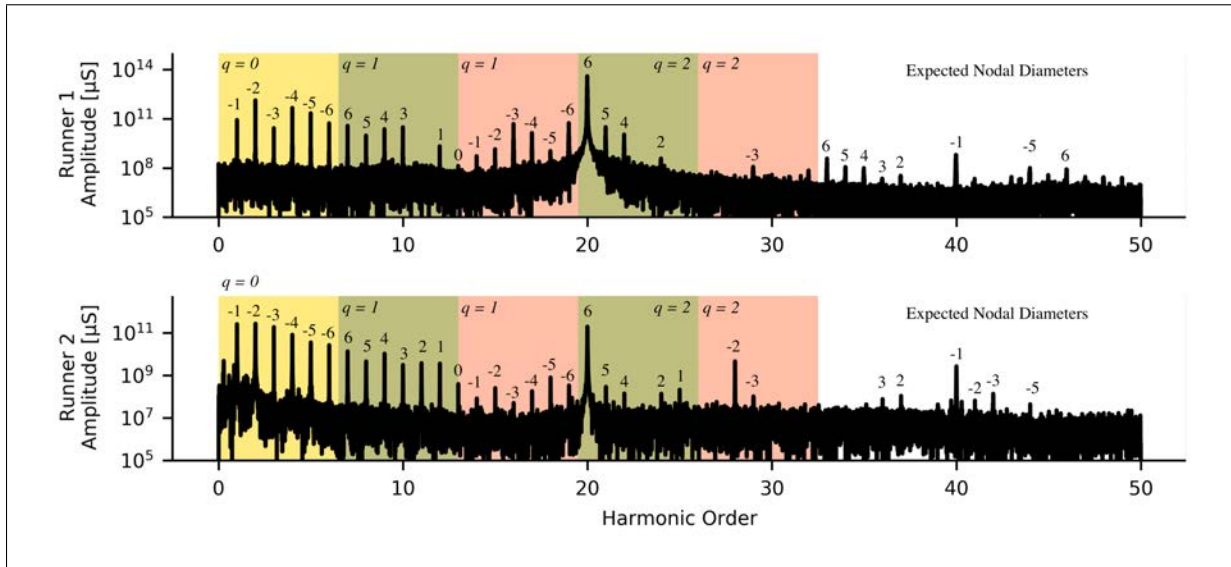


Figure 3.7 Stain-gauge spectrograms with expected response nodal diameter

$\nu$  induces a displacement  $2\mathcal{R}e(\mathbf{R}_k \exp(-ik\Omega t + i(r-1)\nu\alpha))$  on blade  $r$ , where  $\mathbf{R}_k$  is a constant. Conversely, a backward motion induces a displacement  $2\mathcal{R}e(\mathbf{S}_k \exp(ik\Omega t + i(r-1)\nu\alpha))$ . The displacement Fourier coefficient at harmonic  $k$  is then given by :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbf{R}_k e^{i(r-1)\nu\alpha} & \text{ forward response} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathbf{S}_k e^{-i(r-1)\nu\alpha} & \text{ backward response} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Hence, between  $\Delta Z$  consecutive blades separated by an angle  $\Delta\alpha = \Delta Z\alpha$ , the phase shift for a forward nodal diameter  $\nu$  is given by  $\Delta\phi = \nu\Delta\alpha[2\pi]$ , while  $\Delta\phi = -\nu\Delta\alpha[2\pi]$  for a backward nodal diameter. The expected phase shifts for each of the turbines studied is presented in Table 3.2.

### 3.5.3 Dual-channel phase shift analysis

One suitable technique for extracting the experimental phase shift from the redundant sensors is the Phase Shift Analysis (PSA). This method derives from the dual-channel application of the

Tableau 3.2 Expected phase shifts [rad]

Nodal diameter	Turbine 1		Turbine 2	
	forward	backward	forward	backward
0	0	0	0	0
1	1.93	-1.93	0.48	-0.48
2	-2.42	2.42	0.97	-0.97
3	-0.48	0.48	1.45	-1.45
4	1.45	-1.45	1.93	-1.93
5	-2.90	2.90	2.42	-2.42
6	-0.97	0.97	2.90	-2.90

phase spectrograms introduced by Leonard (2007). It has been proven effective for the diagnosis of turbines, see Moisan, Giacobbi, Gagnon & Leonard (2014). The phase shift is extracted from the Fourier coefficient estimates  $\hat{X}_i$  and  $\hat{X}_j$  of two paired signals :

$$\Delta\hat{\phi}[\omega_k \propto \Omega] = \arg\left(\frac{\hat{X}_j}{\hat{X}_i}\right)[\omega_k \propto \Omega] \quad (3.22)$$

This technique requires the paired signals to have the same frequency content, and ideally, redundant locations on different blades. Comparing  $\Delta\hat{\phi}[\omega_k]$  at specific frequencies to the expected value presented in Table 3.2 allows identifying the spatial displacement shape. However, this method is subject to some uncertainties :

- The phase estimator is very sensitive to noise. This sensitivity can be assessed by jointly plotting the model error against the signal-to-noise ratio of the studied harmonic.
- The result depends on the sensor relative location, which cannot be perfect, as shown in Arpin-Pont *et al.* (2012). The presence of epistemic uncertainty characterized by a systematic and constant bias in the phase prediction could be the proof of a misalignment of the sensors in the blade coordinates.
- During operation, the runner is subjected to slight rotating speed variations. Harmonics are then frequency-modulated, and the higher the harmonic, the higher the modulation. Thus, the phase information is spread over the frequency axis. Averaging the phase estimator over



a narrow frequency band around the expected harmonic frequency should be sufficient to capture the modulation effects.

### 3.5.4 Experimental results

The result of the phase shift analysis for each pair of sensors is depicted in Figure 3.8. The first 40 harmonics are considered for the analysis. Higher harmonics are buried in noise, and not relevant for the study. Red crosses represent the expected phase shift calculated in Table 3.2, while dashed lines represent the measured phase shifts between pairs of sensors. At first sight, the measured phase shifts are in very good agreement with the predicted saw-tooth profiles. Discrepancies between the expected and measured phase shifts are occasional for runner 1, and only the 31<sup>st</sup> and the 18<sup>th</sup> harmonics in regime 2 present major mismatches. Phase estimates seem less stable for runner 2. In regime 2, harmonics higher than 30 seem to be in phase and have near-zero phase shifts. Other regimes do not present such irregularities.

To assess the suitability of the model, the expected vs. measured phase-shifts are plotted in Figure 3.9 (left). Bars represent the 25<sup>th</sup> and 75<sup>th</sup> percentiles. Severe discrepancies are only present in a few cases, with phase shifts close to 90 deg or -90 deg. The rest of the observations are strongly correlated to the theoretical predictions. The model error against the signal-to-noise ratio (SNR) is shown in Figure 3.8 (right). The SNR is obtained as the ratio of the harmonic amplitude over the averaged noise power spectral density. This definition is not rigorous, but provides enough insight into the relative amplitude of periodic excitations and noise. As expected, because the influence of noise, most of the error occurs when the SNR is low, under 1. Conversely, the error tends to zero when the SNR is high. For an SNR higher than 100, the remaining errors are marginal.

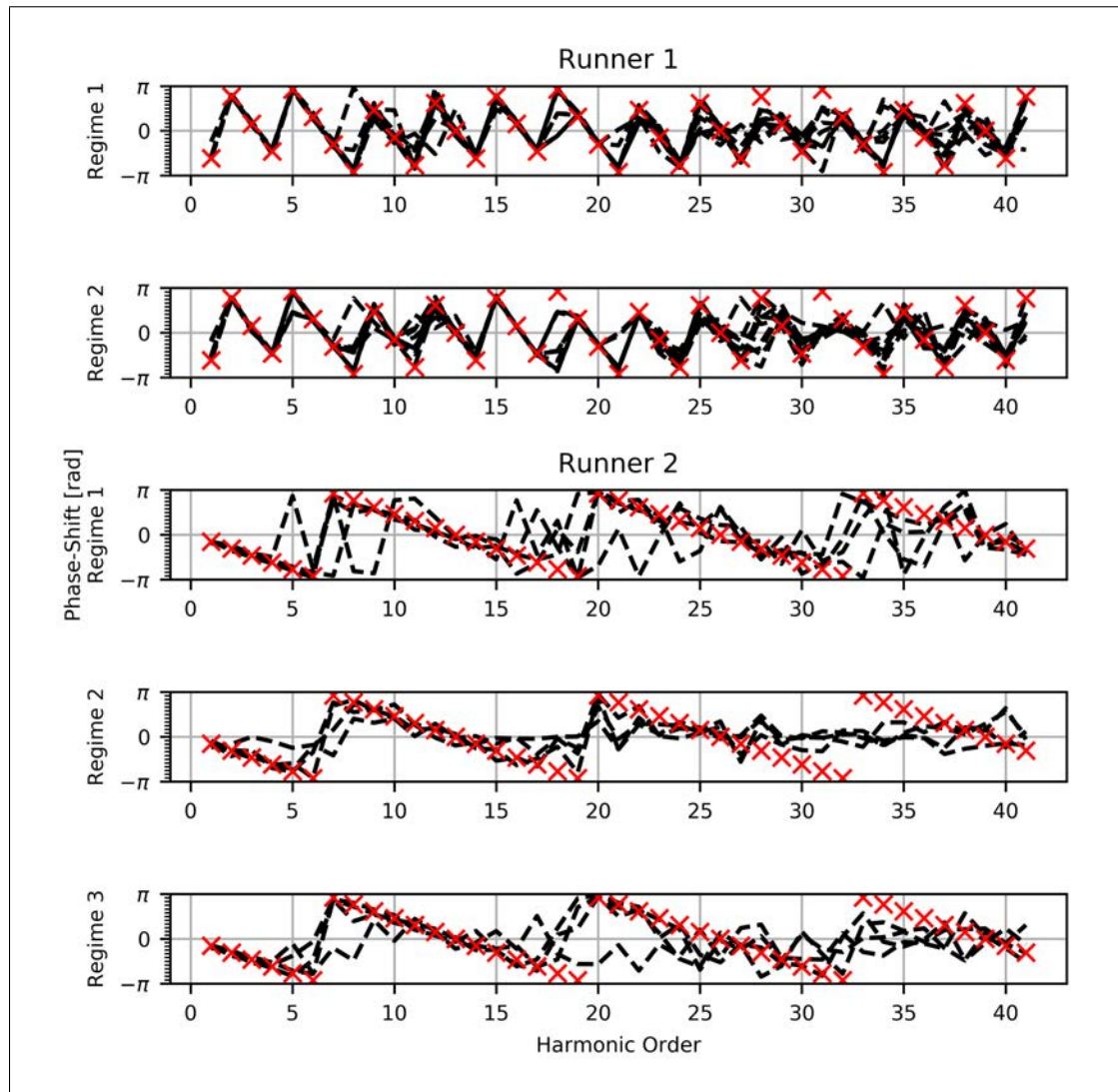


Figure 3.8 Phase shift analysis for the first 40 harmonics

### 3.6 Observed resonances

#### 3.6.1 Numerical modal analysis

The numerical modal analysis of turbine 1 was carried out in *Ansys* using the full runner geometry and a structural-acoustical model, as depicted in Figure 3.10. The fluid domain takes into account the confinement of the structure, and includes a portion of the draft tube. The tetrahedral meshing of blades is presented. The shaft was not included in the simulation, and

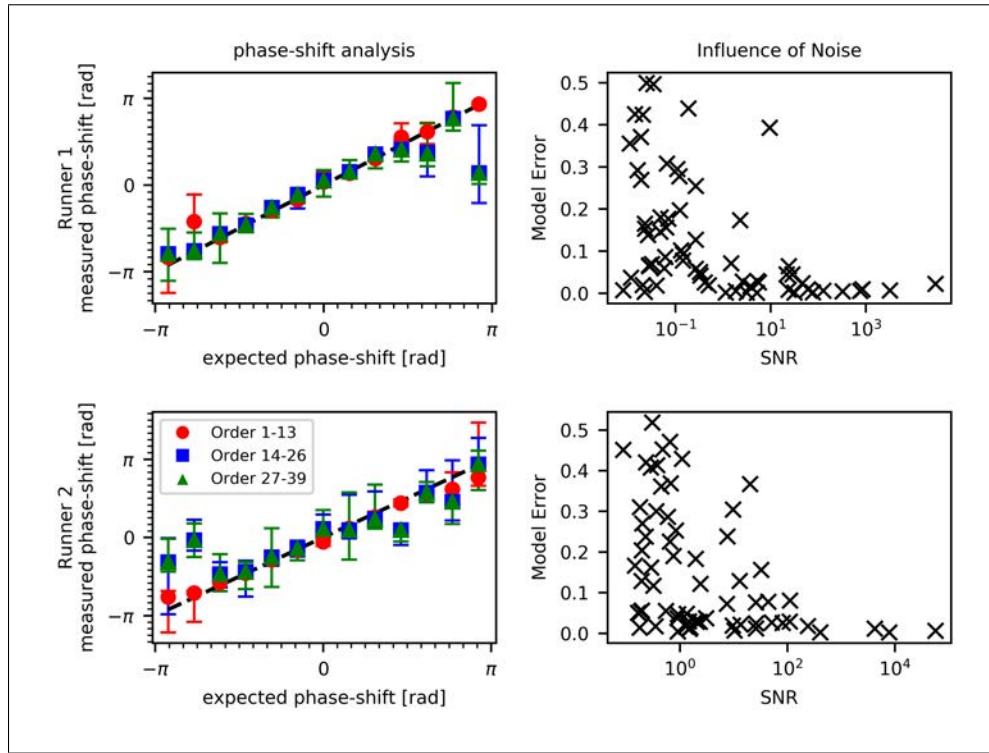


Figure 3.9 Left, model validation. Right, influence of noise on the validation

was replaced by a zero-motion boundary condition, and so the predicted natural frequencies for nodal diameters 0 and 1 are therefore not reliable. The other predicted natural frequencies are presented in Table 3.3. The rotating speed was not considered in the analysis, and the forward and backward nodal diameters thus have the same frequency.

Tableau 3.3 Numerical modal analysis of turbine 1

Nodal diameter	Eigen-frequency [Hz]
2	29.21
3	50.35
4	58.35
5	58.91
6	59.26

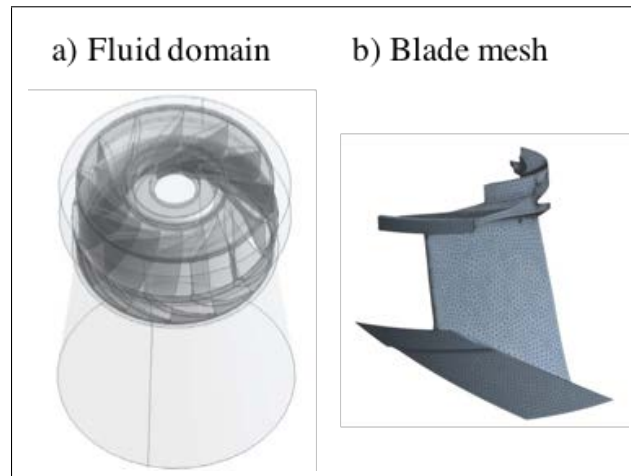


Figure 3.10 FEM configuration for the simulation with acoustic fluid

### 3.6.2 Experimental setup

To detect potential resonances, asynchronous experiments were carried out on turbine 1. The experiments consisted in low coast-downs of the runner. Coast-downs are chosen for two reasons. First, such transient regimes allow harmonics to scan a wide range of frequencies, thus increasing the likelihood of meeting matching structural modes. Second, the flow turbulences are minimized because the runner slows down after the guide vanes are fully closed. Complementary to the strain-gauges located on the blades, the torsion and flexion measurements of the shaft are included in the analysis. Such data does not need any phase shift analysis to determine the excited modes. Indeed, torsion can only be used to detect resonances with nodal diameters 0, while flexion is used to find resonances with nodal diameters 1.

### 3.6.3 Observed resonances

The time-frequency analysis of the strain gauge data is performed to detect synchronous resonances. An example of a dual-channel phase shift analysis is jointly presented with an amplitude spectrogram in Figure 3.11. The phase shift diagram is amplitude-filtered, such that only phase shifts associated with high amplitudes are plotted. The RSI signature is prominent,

and gives a good overview of the rotating speed. While the horizontal colored lines are runner natural frequencies excited by stochastic loads, six resonances are observed in the measurements, with different rotating speed harmonics.

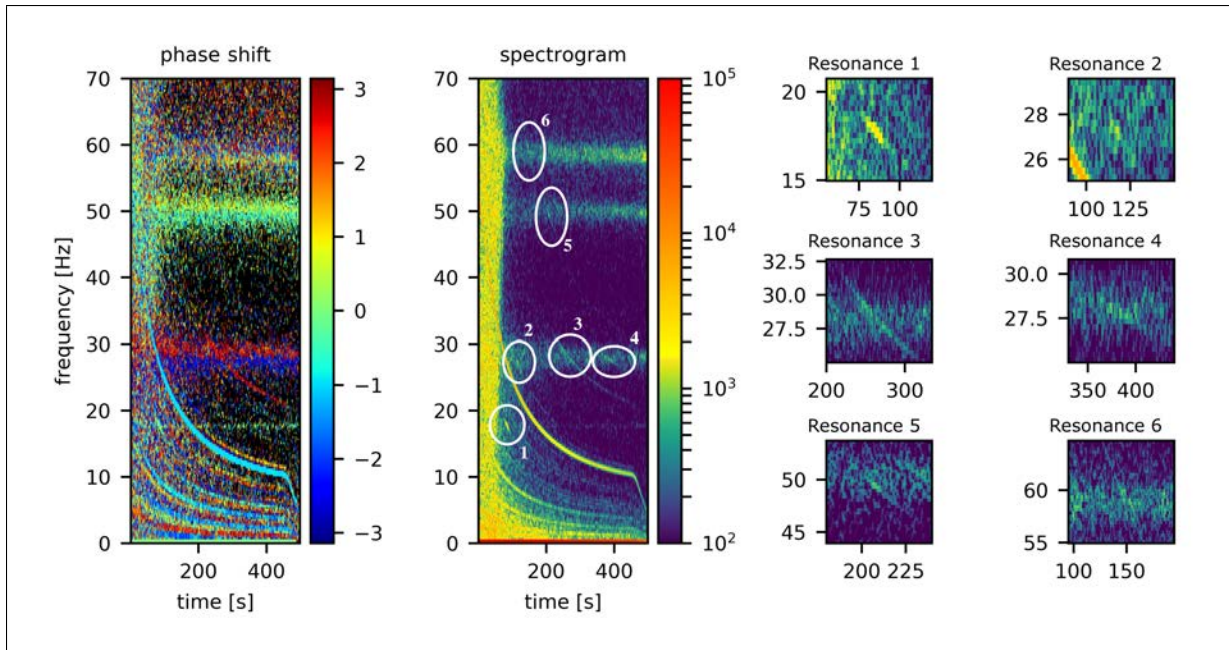


Figure 3.11 Spectrogram of strain-gauge measurements during coast-down

The resonance characteristics are presented in Table 3.4. The expected nodal diameters and the related predicted natural frequencies are jointly presented with the measured frequencies and phase shifts. Due to the high stochastic loads exciting numerous coupled modes just below  $60\text{Hz}$ , the phase shift estimated for nodal diameter 5 is irrelevant. A comparison of the different indicators shows good agreement between the predictions and the observations. The precession motion of the runner separates the forward and backward contributions of the nodal diameters. For nodal diameter 2 at  $29.21\text{Hz}$ , the observed resonances show that the backward frequency is slightly higher than the forward frequency, which corroborates the conclusions of Presas *et al.* (2015) that the runner rotation modifies the natural frequencies of both forward and backward modes. In this study, the error between the expected and the measured frequencies appears to decrease as the nodal diameter increases : in the range 2.5 – 6% for the nodal diameter 2, 2% for nodal diameter 3, and 0% for nodal diameter 5.

Tableau 3.4 Resonance characteristics

Resonance	Exciting harmonic	Nodal diameter	Expected frequency [Hz]	Measured frequency [Hz]	Phase shift estimates [rad]
1	13	0	nd.	17.6	0
2	24	2	29.21	27.4	-2.42
3	41	-2	29.21	28.5	2.42
4	50	2	29.21	27.7	-2.42
5	62	3	50.35	49.3	-0.48
6	60	5	58.91	58.9	nd.

The resonance between the 13<sup>th</sup> harmonic and the nodal diameter 0 is confirmed by the torsion analysis depicted in Figure 3.12. The torsion amplification around 100s is visible. Figure 3.13 presents the flexion analysis. A potential resonance of nodal diameter  $-1$  with the 14<sup>th</sup> harmonic is shown in the circle. However, the amplification is very weak. A resonance with higher SNR is observed between nodal diameter  $-1$  and the 40<sup>th</sup> harmonic. As expected, the frequency signature of harmonics with nodal diameters  $\pm 1$  is observed.

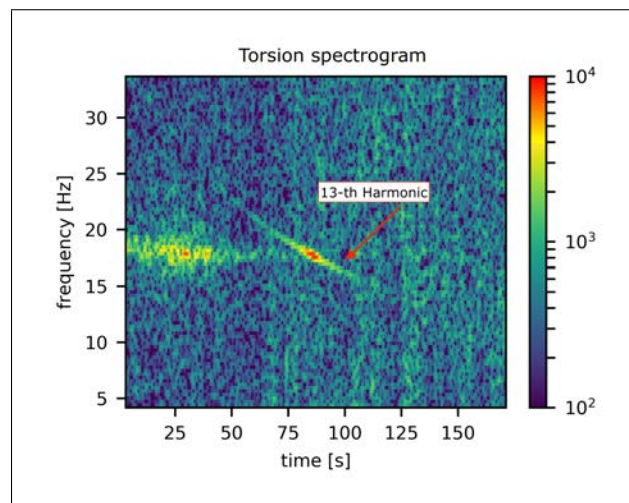


Figure 3.12 Shaft torsion resonance

### 3.7 Discussion and perspectives

In the preceding sections, it was shown that some turbines can exhibit a rich harmonic content due to NTRCI, which is sometimes not negligible as compared to the RSI amplitudes. The

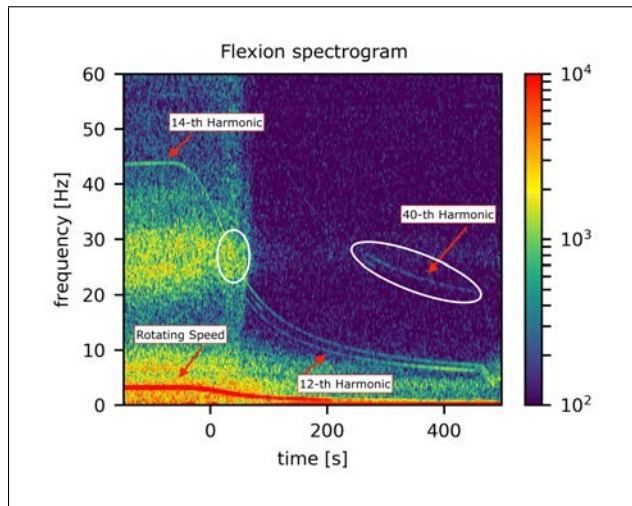


Figure 3.13 Shaft flexion spectrogram

nodal specificity of the NTRCI was successfully validated. Such a mechanical behavior might be alarming because it is likely to add significant unexpected dynamic loads which contribute to faster crack propagation, if they are not properly understood. Indeed, Figure 3.14 draws the relative amplitudes of the RSI versus the NTRCI for each blade coordinate studied. For runner 1, it is found that RSI are 10 times stronger than the NTRCI, except at location 2, where both amplitudes are similar. The amplitudes of both RSI and NTRCI are lower at the pressure side than at the suction side, and the main hotspots seem to be located on the suction side's trailing edge. Regarding Figure 3.7, the predominance of RSI is not surprising because the first RSI at order 20 is amplified by some modal contributions. This is due to the presence of nodal diameter 6 at  $58.9\text{Hz}$ , close to the RSI frequency at  $54\text{Hz}$ . Most of the RSI dynamic loads found around the trailing edge (locations 1, 3, 4 and 5) are likely induced by this resonance. At the leading edge (location 2), the amplitudes of RSI and NTRCI are very similar. The authors suspect that the natural response contribution is lower at the leading edge, because this part of the blade is very thick, thereby ensuring significant toughness properties. This would demonstrate that if the turbine was not in resonance at the synchronous speed, the amplitude of the NTRCI would be similar to that of the RSI. For runner 2, it appears that most of the dynamic loads are located at the pressure side. The NTRCI are slightly stronger than the RSI at the suction side. The opposite

result is observed at the intrados, where the RSI are found to be 5 times more intense than at the NTRCI.

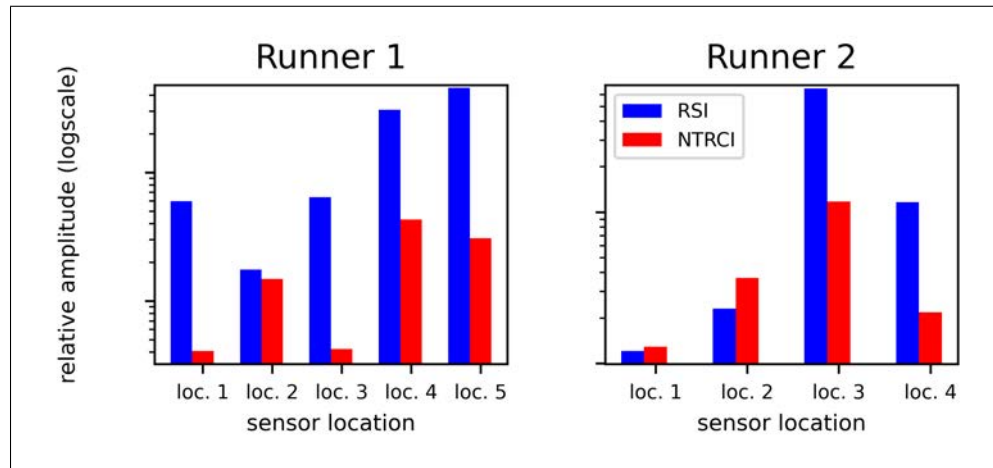


Figure 3.14 Relative amplitude of the measured harmonic content

The framework introduced could be used to better assess resonance and strain amplitude risks for fatigue assessment. Two possible detrimental scenarios can be associated with intense nodal diameters 0 or  $\pm 1$  harmonics :

- If one NTRCI with nodal diameters 0 is close to a shaft torsion mode at the synchronous speed, strong torque vibrations may occur. This could lead to intolerable production fluctuations and load rejections. Then, safe operation would rely on a guarantee that frequencies  $kZ_R\Omega$  are far from the torsion modes.
- If one NTRCI with nodal diameters  $\pm 1$  meets a whirling mode of the shaft, flexion resonance can occur far below the critical speed, since the latter only considers the rotating speed frequency, and contributes to significantly increase the unit vibrations.

The theory introduced can then be used to design more reliable runners. For both turbines studied, strain-gauge spectra not only revealed low-order NTRCI, but also higher-order harmonics, many of which correspond to prime numbers. It was shown that they might generate resonances with



structural modes (e.g., harmonics 13 and 41). Since orders are prime numbers, equation (3.20) demonstrates that the underlying force periodicity is either 1 or the order itself. It is more realistic to consider a single periodicity as the root excitation. This proves that a one-per-revolution excitation is sufficient to generate a wide harmonic content, likely to induce resonances. Based on this conclusion, an interesting industrial opportunity presents itself. These selective excitations can be used for operational modal analysis of turbines. This can be done in two steps. First, asynchronous regimes can be used to detect possible resonances. Second, the rotating speed can be adapted to match resonances and complete a precise characterization of modal parameters related to each nodal diameter. More simply, the implementation of order tracking tools allows the direct characterization of modes with transient experiments, using order-based modal analysis algorithms such as those introduced by Janssens, Kollar, Peeters, Pauwels & Van der Auweraer (2006b); Dollon *et al.* (2021a). Experimental estimates can then be used to validate numerical predictions, or processed into data assimilation algorithms to calibrate finite-element simulations. The latter possibility is relevant because dynamic loads in resonant conditions are intense and difficult to predict, due to the complex nature of fluid-structure interactions (Trivedi & Cervantes (2017)).

If local asymmetries do not exist in turbine prototypes, it could still be possible to deliberately produce such unbalanced geometries. Some pump turbines are particularly well-suited because they have guide vanes that can be controlled individually to prevent an unstable operation. In such cases, it would be easy to desynchronize one guide vane to produce a strong one-per-revolution excitation and induced-NTRCI for the purpose of experimental modal analysis.

### 3.8 Conclusion

In turbine prototypes, the potential asymmetries of the casing may induce a rich harmonic content in the runner vibrations. An adequate representation of the root mechanism leading to such synchronous dynamic loads for hydroelectric turbines has not been demonstrated in the literature. An analysis of turbines under a one-per-revolution excitation showed that intense

rotating speed harmonics, different from the well-known RSI, can occur. These synchronous waves develop along specific nodal diameters, which can be observed experimentally.

It was shown that the NTRCI model is a versatile tool that can be used to better understand the actual runner-casing interactions of turbines. The theory was successfully applied on two different turbine prototypes and provided a good explanation of the origin of unexpected resonances. Some recommendations were also provided with respect to the safe operation of turbines. Further, the possibility of using rotating speed harmonics to perform operational modal analysis was emphasized. Readers interested in this should refer to the works of Dollon *et al.* (2021a) for more details.

Future works should focus on the possibility of realizing the parametric identification of model (3.19), as a surrogate version of operational modal analysis under a combined stochastic-synchronous excitation input. Some of the problems to overcome are the numerous parameters involved in the excitation description, the natural response of the runner, the absence of knowledge about the force periodicity(-ies) involved, and the difficulty obtaining amplitude estimates due to the rotating speed modulation in operation. However, this identification should allow a characterization of the root excitation mechanisms, as well as the modal parameters, using only steady-state regimes around the BEP. This could help in several disciplines, including numerical validation, experimental calibration and structural health monitoring during diagnosis by identifying changes in the runner harmonic signature.



## CHAPITRE 4

### OPERATIONAL MODAL ANALYSIS OF HYDROELECTRIC TURBINES USING AN ORDER-BASED LIKELIHOOD APPROACH

Quentin Dollon<sup>1,2</sup>, Jérôme Antoni<sup>1</sup>, Antoine Tahan<sup>2</sup>, Martin Gagnon<sup>3</sup>, Christine Monette<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire vibration acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 20 Avenue Albert Einstein, 69100 Villeurbanne, France

<sup>2</sup> Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure, 1100 Notre-Dame Ouest, Montréal, QC H3C 1K3, Canada

<sup>3</sup> Institut de Recherche de Hydro-Québec, 1800 Boulevard Lionel-Boulet, Varennes, QC J3X 1S1, Canada

<sup>4</sup> Andritz Hydro Canada Inc., 6100 Route Transcanadienne, Pointe-Claire, QC H9R 1B9, Canada

Article publié dans *Renewable Energy*, Mars 2021.

<https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.11.086>

#### 4.1 Abstract

The purpose of this paper is to estimate hydroelectric turbine runner modal characteristics from experimental measurements coming from asynchronous regimes. This is achieved by investigating resonances generated by the interaction of a structural mode with harmonics of the rotating speed. Resonances are extracted using order tracking and processed with a Fast Bayesian algorithm in an ambient manner to estimate modal parameters and related uncertainties. Since data collection and effective processing of hydropower turbine field measurements is in its early stages, this paper lays some foundations in the treatment of transient regime measurements. A novelty in this approach lies in the use of a probabilistic identification tool in Order Based Modal Analysis (OBMA). A numerical experiment and a study from a hydroelectric Francis turbine are introduced to illustrate the method.

## 4.2 Introduction

A full grasp of turbine runner dynamic behavior is required in assessing the consequences of fatigue on life duration and crack propagation. Especially, an accurate determination of the actual behavior during transients is mandatory to determine the load levels (Presas *et al.* (2019); Kougias, Aggidis, Avellan, Deniz, Lundin, Moro, Muntean, Novara, Perez-Diaz, Quaranta, Schild & Theodossiou (2019)). High amplitude stress cycles can lead to early damages and loss of reliability (Gagnon *et al.* (2010); Goyal & Bhupendra (2018)). Most of resonances observed in transient regimes emanate from the interaction between synchronous excitations coming from the harmonics of the rotating speed, and a matching vibration mode of the turbine. Such phenomenon can generate periods of intense vibration, possibly leading to extensive damages or even failure of the structure. The prediction of structural modes allows defining optimal operating ranges in which resonances cannot develop, and predicting the dynamic stress amplitudes the structure withstands during operations. In some cases, operation during resonance may be allowed if excitation is sufficiently low and damping sufficiently high, and a proper design is even more important in such situations to ensure safety.

In a foreseeable future, experimental measurements on turbine prototypes are expected to become an integral part of this process (Gagnon *et al.* (2014); Liu *et al.* (2016)). For both designers and users, experimental tools can be used for validating and calibrating numerical models hence increasing structural reliability assessment accuracy. Such approaches are particularly welcomed in the field of hydropower, as operational conditions can strongly alter numerical predictions (Valentin *et al.* (2016b); Trivedi & Cervantes (2017); Liu *et al.* (2018b)), and reduced model resonance studies cannot be transposed to turbine prototypes (Valentin *et al.* (2020)). The most practical way to achieve modal analysis for operating devices is Operational Modal Analysis (OMA), where the structural behavior is investigated without prior knowledge of the excitation, which is in effect the ambient excitation occurring during operation. Experimental setup and cost are relatively low compared to other methods, so that OMA has been widely developed since the early 1990's. Usually, only mild assumptions are needed to characterize the response without knowing the excitation, but such analysis might result in high uncertainties to be evaluated.

Analysis of turbine operational modal characteristics is still restricted to a few studies (Gagnon *et al.* (2006); Valentin *et al.* (2017a); Dollon, Tahan, Antoni, Gagnon & Monette (2019)), but is gaining recognition with the demonstration of its benefits. Especially, it was shown that transient events are particularly useful for detecting modal signatures (Valentin *et al.* (2017a); Dollon *et al.* (2019)). The purpose of this paper is to present an OMA procedure tailored for hydroelectric turbines, capable of extracting modal information and quantifying related uncertainties. The study focuses on asynchronous transient regimes, in which the harmonics usually lead to resonances. System response is processed with a Bayesian-based inference scheme which can return the modal statistical distributions with a low bias. The paper is structured as follows. The first section introduces the main OMA tools available to estimate modal parameters, and presents the concept of order based modal analysis. The ML Order Based Modal Analysis (ML-OBMA) is presented in section 3, inspired by the works of S.-K. Au (Au (2017)). In section 4, several numerical cases are studied to test the algorithm. The model is finally implemented on a hydroelectric case, where operational resonances during a coast-down are characterized.

### 4.3 Modal identification under random vibration

OMA techniques are divided into four classes : they can process data in the time domain or in the frequency domain, and can be parametric or non-parametric. Non-parametric algorithms perform identification by splitting the signal into its modal contributions : see, e.g., Random Decrement Technique (RDT) (Antoni & El badaoui (2011)), Frequency Domain Decomposition (FDD) (Brincker *et al.* (2001)), Blind Source Separation (BSS) (Sadhu & Narasimhan (2017)). Parametric approaches, for their part, attempt to fit Multi-Degree-of-Freedom (MDoF) model parameters to experimental data. Time domain models are mostly based on signal autoregression or on the output correlation matrix : auto-regressive (ARMA) (Poulimenos & Fassois (2006)), subspace methods (SSI) (Ljung (1999)), eigenrealization algorithm (ERA) or Ibrahim algorithm (Brincker & Ventura (2015)). On the other hand, frequency domain models are mainly based on density matrices : poly-reference Least-Square Complex Exponential (p-LSCE) or polymax

(Peeters *et al.* (2004)), frequency polyreference (Brincker & Ventura (2015)), maximum likelihood (Yuen (2010)).

All these methods are deterministic and mostly rely on curve-fitting. Although ambient modal analysis offers a wide range of identification tools, assessment of uncertainties is still limited to specific procedures, and a general framework is yet to come. This is partly due to the many uncertainty sources and their propagation : data acquisition, identification model, computation process, etc. However, significant progress has recently been made in terms of taking stochastic uncertainties into account (Pintelon *et al.* (2007)). The determination of modal parameter uncertainties is a first step in estimating the uncertain vibrating response of structures (Jian & Yanping (2017)). Most time domain modal parameter variance models are derived from the curve-fitting methods, using Monte Carlo algorithms or first-order developments. Essentially, Taylor series are expanded to the first order derivative, for models such as SSI (Reynders *et al.* (2008, 2015)) or autoregressive (Vu & Thomas (2014)). In the frequency domain, statistical approaches mostly rely on Maximum Likelihood Estimator (MLE). Such approach was combined with the polymax algorithm to reduce noise and obtain distribution intervals, producing the Polymax Plus algorithm (El-kafafy *et al.* (2012); Pee). Some accuracy loss due to very noisy data were addressed more recently (Amador, El-Kafafy, Cunha & Brincker (2019)). These algorithms are efficient modal identifiers for long time-histories. MLE was finally extended into a Fast-Bayesian model through a Laplace approximation (Au (2017)). MLE has many benefits as it is asymptotically unbiased and efficient (with respect to the Cramer-Rao lower bound) and convergent.

OMA models generally consider linear time-invariant systems, which results in the fundamental frequency input-output relation suggested in equation (4.1).  $\mathbf{S}_{yy\ k} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$ ,  $\mathbf{S}_{ww\ k} \in \mathbb{C}^{N_i \times N_i}$  are respectively the discrete output and input spectral density matrices at radial frequency  $\omega_k$  and  $\mathbf{H}_k \in \mathbb{C}^{N_o \times N_i}$  is the frequency response function matrix containing the system characteristics.  $\mathbf{S}_{\epsilon\epsilon} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$  is the noise spectral density matrix. The equivalent time domain model can be obtained through the Wiener-Khinchin theorem. The objective is to determine  $\mathbf{H}_k$  for a given  $\mathbf{S}_{yy\ k}$  with unknown  $\mathbf{S}_{ww\ k}$ . This lack of knowledge is tackled by considering the ambient

vibration as white noise having a constant power spectral density. Under this assumption,  $\mathbf{S}_{wwk}$  becomes a constant matrix  $\mathbf{S}_{ww}$ , which is sufficient to estimate the poles of  $\mathbf{H}_k$ .

$$\mathbf{S}_{yyk} = \mathbf{H}_k \mathbf{S}_{wwk} \mathbf{H}_k^H + \mathbf{S}_{\epsilon\epsilon}, \quad k \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (4.1)$$

First introduced by Janssens *et al.* (2006b), OBMA is a method combining advanced order tracking and an OMA algorithm to obtain modal characteristics. It has been extensively studied by E.D. Lorenzo (Di Lorenzo, Manzato, Peeters, Vanhollebeke, Desmet & Marulo (2015); Di Lorenzo, Manzato, Dabizzi, Peeters, Marulo & Desmet (2016c)). By considering hydroelectric turbines as multi-sine sweep generators (especially, the Rotor-Stator Interactions, RSI), resonances are easily extracted from the signal using Order Tracking (OT) methods. OT tools are capable of extracting the harmonic content of a mixed signal. Once synchronous resonances are extracted, excited modes are identified with OMA. Traditionally, the p-LSCE (or Polymax in its industrial name) identification algorithm is used (Peeters *et al.* (2004)). This parametric, deterministic frequency domain procedure is a poly-reference extension of the Least Square Complex Frequency algorithm (LSCF). It is a two-stage least square procedure that first identifies frequencies and damping ratios, and then identifies mode shapes based on stable poles. The processing of synchronous resonances with OMA is possible because the spectral density matrix of chirps in the order domain turns out to be constant, thus making it equivalent to an ‘order domain white noise’ (see, e.g., Figure 4.1). The analysis of chirp excitations, rather than stochastic excitations, is more representative of transient regimes. Especially, they provide more intense excitation forces, and resonances with higher Signal-to-Noise ratio (SNR).

In the current context, the p-LSCE has several limitations. First, the classical formulation of the problem does not consider uncertainties, which is crucial for treating poorly conditioned signals. Furthermore, its accuracy in presence of small data is shown limited in section 4.5, making the algorithm improper for short-time signal processing. For these reasons, the Fast-Bayesian approach is chosen to experimentally identify turbine modal characteristics. Indeed, this framework is well suited for such identifications. Typically, the identification is performed in



the frequency domain, as required for an order-based formulation. Moreover, it is well adapted to process short sequences, since likelihood is effective for making inference with small data sample available, and will be shown robust against short-time estimation biases. Short-time estimations result in non-averaged spectra and excitation variance, that can make identification fail as the modal force PSD is not perfectly constant.

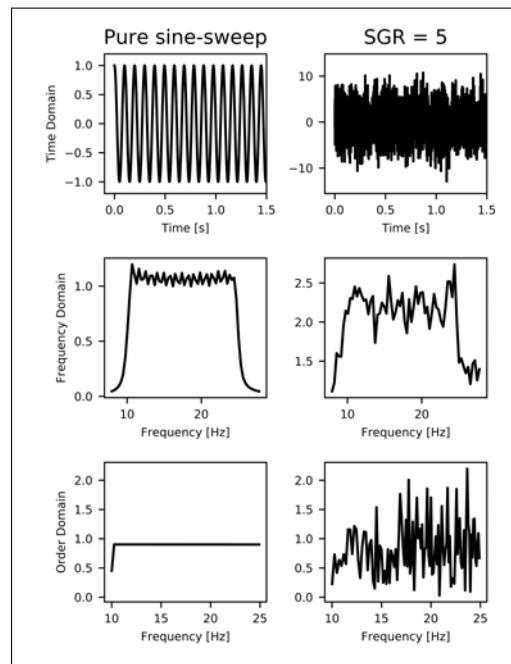


Figure 4.1 Time series, frequency content and order-tracked frequency response of a pure sine sweep and a harmonic signal buried in noise

#### 4.4 Bayesian order-based modal analysis

This section introduces a new OBMA formulation based on probabilistic modal analysis, using Bayesian inference. Each subsection explains one step of the process, namely :

- The resonance detection.
- The angular domain order tracking.

- The identification scheme.

#### 4.4.1 Resonance detection

The data consists of an asynchronous time series containing  $N_o$  strain gauge measurement channels. The first step is to map all synchronous resonance regions contained in the dataset. This is done by investigating time-frequency spectra, using short-time discrete Fourier transforms. To ensure that the observed amplification regions truly are resonances, a dual-channel Phase-Shift Analysis (PSA) might be considered as it has been proven effective for diagnosis purposes (Leonard (2007); Moisan *et al.* (2014)). PSA examines the short-time phase-shift diagram between two redundant sensors, as a complement to classical amplitude spectrum studies. This is relevant because modal phase shifting between sensors is constant. Indeed, rotational symmetric structure's modes are cylindrical or disk-like patterns, characterized by their number of nodal diameters  $\nu$ . Nodal diameters are diameters along which modal displacement is null, thus separating isophase regions (Dorfler *et al.* (2013)). They can be positive or negative, the sign indicating the direction of rotation : forward for  $\nu > 0$ , backward for  $\nu < 0$ . The motion along a mode has a constant phase shift : between two consecutive blades separated by an angle of  $\Delta\alpha = 2\pi/Z_R$ , the phase-shift is  $\nu\Delta\alpha$ . Then between  $N$  blades, the modal phase-shift is given by :  $N\nu\Delta\alpha[2\pi]$ , where  $[.]$  is the modulo operator, ensuring a result on the trigonometric circle.

#### 4.4.2 Angular domain order-tracking

In this study, Angular Domain (AD) Order Tracking is used because it does not need phase reference and tackles the spectral leaking issue (Di Lorenzo *et al.* (2015, 2016c)). A Computed Order Tracking (COT) algorithm is performed to transform an asynchronous time series into a synchronous time series. This is based on a two-stage interpolation as follows :

1. Determine the time-angle relation by integrating the rotational speed. This result in a relation with constant  $\Delta t$  between each angular sample.
2. Interpolate this time-angle relation to obtain a new time reference with constant  $\Delta\alpha$ .

3. Interpolate the data with respect to the new time vector. The obtained data are synchronous, in the sense they are sampled at constant  $\Delta\alpha$ .

Then, a non-windowed short-angle Fourier transform is performed on the resampled signal to exhibit its frequency content. For the sake of convenience, each interval corresponds to one runner revolution such that the spectrum resolution coincides with orders. An order spectrum is obtained for each studied revolution. Each line of the spectrum carries the amplitude of a synchronous harmonic in the signal, that are called orders. For each revolution, an exciting radial frequency  $\omega_k$  is defined by averaging the harmonic frequency over the lap.

Bias in AD comes from the interpolation method and synchronous interval sampling. The interpolation bias is induced by the interpolating method, and residual shaft torsion vibrations that can induce tachometer signal fluctuations. This results in a slight shift of the angular signal. Concerning the synchronous interval splits, each interval must represent exactly one revolution, which is not necessarily the case : the angular shift between the first and the last point of the Fourier interval can be slightly different than  $2\pi$ , and depends on the angular resampling rate. Most such errors are asymptotically unbiased, and can be reduced if the data are recorded with a very high sampling frequency as compared to the structure's natural frequencies. Also, the harmonic frequency averaging over a revolution involves a quasi-static assumption, reasonable for low accelerating systems only.

#### 4.4.3 SDoF Fast-Bayesian inference

Hydroelectric runner modal frequencies are often close to each other, and might involve coupled-mode responses. However, harmonic excitations are well shaped to separate modes, since they can excite only some specific runner modes (see, for instance, the RSI theory presented in section 5). The use of a SDoF model is then advocated as it reduces the model complexity and related uncertainties. The bandwidth selection can be based on modal coherence techniques (Pastor, Binda & Harcarik (2012)) or sensitivity to bandlimiting. The choice made here depends on the

signal-to-noise ratio (SNR) : Modal Assurance Criterion (MAC) should be preferred for high SNR, while sensitivity analysis is convenient for low SNR, since MAC becomes ineffective.

Once the SDoF assumption is assessed, the modal parameter vector estimate  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  is determined using a Maximum Likelihood Estimator. This approach was initially developed by Yuen & Katafygiotis (2003a). A comprehensive state of the art is given in (Yuen (2010)). The underlying assumption is that the posterior probability is proportional to the likelihood, which is an unscaled version of the Baye's theorem with uniform priors. The experimental frequency data  $\{\mathbf{Y}_k\} \in \mathbb{C}^{N_o \times N_o}$  is independent zero-mean complex Gaussian, and the likelihood function reads as :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\{\mathbf{Y}_k\}) = \prod_{k=1}^N \frac{\pi^{-N_o}}{|\mathbf{C}_k|} \exp \left[ -\mathbf{Y}_k^H \mathbf{C}_k[\boldsymbol{\theta}] \mathbf{Y}_k \right] \quad (4.2)$$

The likelihood is a function encapsulating the statistics of the data. For any parameter vector, it gives the conditional probability of observing the data given the physical model.  $\mathbf{C}_k[\boldsymbol{\theta}] = \mathbb{E}\{\mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^*\}$  is the theoretical output covariance matrix. It derives from the resonance model given in equations (4.3), (4.4), where  $\boldsymbol{\theta} = (\omega, \xi, \alpha^2, \sigma^2)^T$  is the modal parameter vector, including the natural radial frequency, the damping ratio, the modal excitation PSD and the noise PSD. The transition from equation (4.1) to equation (4.3) is reminded in Appendix 4.A.  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_o \times 1}$  is the partial mode shape and  $D_k[\boldsymbol{\theta}]$  the amplification factor for displacement data.  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N_o \times N_o}$  is the identity matrix.

$$\mathbf{C}_k[\boldsymbol{\theta}] = \alpha^2 D_k[\boldsymbol{\theta}] \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (4.3)$$

$$D_k[\boldsymbol{\theta}] = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_k^2) - (2\xi\omega\omega_k)^2} \quad (4.4)$$

The main obstacle with the method is that the formulation given in equation (4.2) is highly non-linear, and its maximization requires intensive and time-consuming computations. To

reduce the complexity and some ill-conditioning problems, a modified version of the Negative Log-Likelihood Function (NLLF) was recently introduced (Au (2017, 2011a)). Based on an eigenvalue decomposition, this formulation allows to express  $\boldsymbol{\varphi}$  as a function of the other modal parameters, reducing the optimization problem to the minimization of equation 4.5, in which only 4 parameters need to be estimated. For typical data sizes, this process is fast, as the NLLF has a unique minimum in the parameter space.

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}_k) = NN_o \log(\pi) + \sum_{k=1}^N \log(\alpha^2 D_k[\boldsymbol{\theta}] + \sigma^2) + (N_o - 1)N \log(\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N (\mathbf{Y}_k^H \mathbf{Y}_k - \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{A}[\boldsymbol{\theta}] \boldsymbol{\varphi}) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{A}[\boldsymbol{\theta}] = \sum_{k=1}^N \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\alpha^2 D_k[\boldsymbol{\theta}]} \right)^{-1} \mathcal{R}e[\mathbf{Y}_k \mathbf{Y}_k^H] \quad (4.6)$$

A good Gaussian approximation of the posterior densities relies on a second-order Taylor expansion of the NLLF. Since such computation requires intensive efforts, posterior distributions are approximated with the Laplace method, i.e., with normal distributions centered at the MPV with standard deviations deduced from the covariance matrix  $\hat{\mathbf{C}}$ , obtained with equation (4.7). This gives the Fast-Bayesian method which leads to conditional distributions, but is faster, and any loss of accuracy it provides as compared to the unconditional distribution are considered insignificant (Au (2017)). In other terms, the likelihood around the MPV is assumed Gaussian and independent with respect to the parameter vector.

$$\hat{\mathbf{C}} = (\nabla \mathbf{v}_c)^T(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left[ \nabla^2 L(\hat{\boldsymbol{\theta}}|\{\mathbf{Y}_k\}) \right]^\dagger (\nabla \mathbf{v}_c)(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{v}_c(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \left( \hat{\boldsymbol{\theta}}, \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\|\hat{\boldsymbol{\varphi}}\|} \right)^T \quad (4.8)$$

In equation (4.7),  $C$  is obtained as the inverse of the NLLF Hessian at the MPV, through a constraint function that takes into account the mode shape normalization, denoted  $\nabla v_c$  and expressed in equation (4.8). The solution is a "pseudo-inverse" computation in the sense it ignores the null eigenvalues arising from the constraint singularities.

## 4.5 Numerical testing

This section verifies the model performance through several numerical studies. At first, the model is tested on a MDoF synthetic case with known masses, stiffnesses and damping, subjected to sine-sweep excitations. The synthetic case is also identified using the p-LSCE, to demonstrate the benefits of the Bayesian framework. Then, a deeper study will highlight the influence of short-time data and stochastic pollution on the identification accuracy. Subsequently, the modal force frequency modulation (FM) rate is studied. It is shown that high FM can distort the response and introduce epistemic uncertainties. Along this section, the synthetic data is obtained with a time domain state-space model solicited by chirp-like forces.

### 4.5.1 Illustrative computational example

The model is now used on a simulation example, and compared to the p-LSCE. Let consider a 3-DoF system with known modal properties, and  $N_o = 10$  measured DOF. Three modes are expected at  $24.7Hz$ ,  $31.2Hz$  and  $39.7Hz$ , with damping ratios 2.7%, 5.3% and 4.5%, respectively. The system is first computed in the time domain using a state-space model. The sampling frequency is  $2.5kHz$ , making the OT biases insignificant. The AD resampling is 2, 500 samples per revolution. Two simulations are performed. On the first hand, the system is excited with a pure and low sine-sweep, capturing a well-shaped response. On the other hand, the system is excited by a mix of a sine-sweep and a stochastic source, which embodies the non-flat excitation behavior. The scanning harmonic is faster, delivering short-time spectra and poorly conditioned responses. The two simulations are presented in Figure 4.2 a. and b. left, depicting the excitation input and response output time-frequency distributions. The responses are extracted using OT, and processed with the p-LSCE and with the Fast-Bayesian inference. The p-LSCE stabilization

diagram and the Fast Bayesian bandwidth selection are presented on the right side of Figure 4.2. The p-LSCE converges fast for the well-shaped responses, and the three modes are stable from order 15. Notice that the stabilization diagrams are very clear and easy to interpret, since the spurious modes are computed with negative damping. However, the p-LSCE seems inadequate for processing ill-conditioned responses : the first and second modes are identified at low orders, but the third mode is very unstable, and the algorithm hardly identifies a stable pole around order 70. A stable spurious mode is present around  $20\text{Hz}$ , between order 65 and 75. The Fast-Bayesian bandlimited inputs are obtained using the MAC criterion for the first simulation, and using a sensitivity analysis for the second simulation.

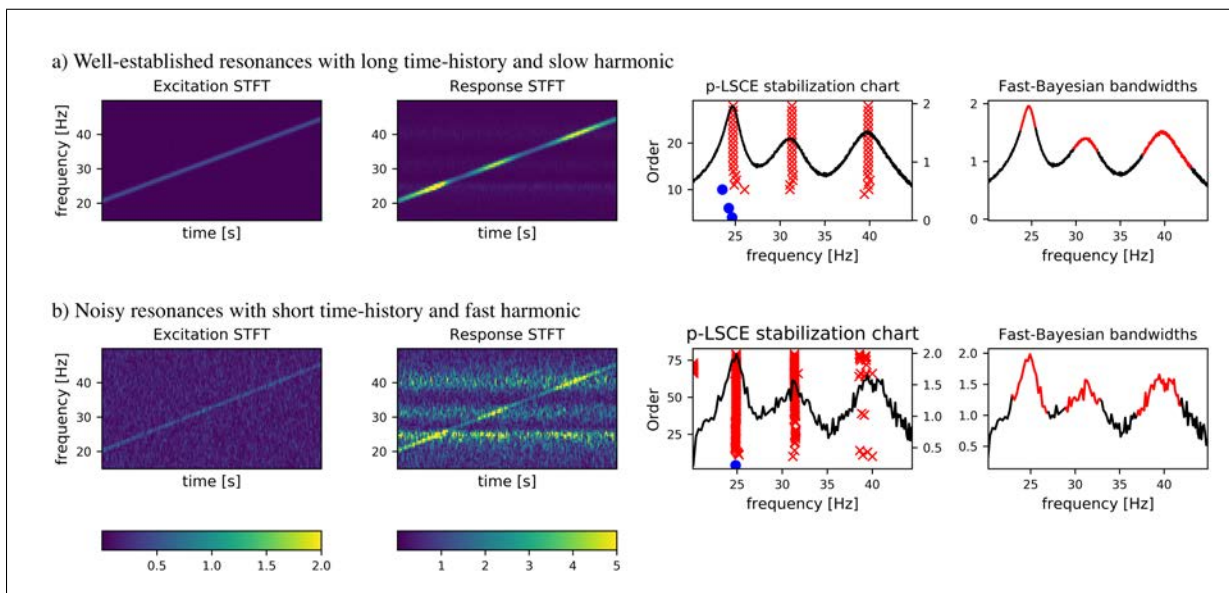


Figure 4.2 3-DOF system response. a) well-shaped responses. b) ill-conditioned responses

The identification results are presented in Figure 4.3. When dealing with long time histories, the two approaches are consistent and identified modal parameters are close to the theoretical values. The Bayesian approach provides estimates with low uncertainties. The short time history case is properly identified by the Fast-Bayesian scheme, but the related uncertainties are very large, especially for the damping estimates. The p-LSCE finds accurate natural frequencies for modes 1 and 2, but fails at properly identifying the third natural frequency. The damping ratios are systematically under-estimated, and the identified modes 2 and 3 are almost undamped.

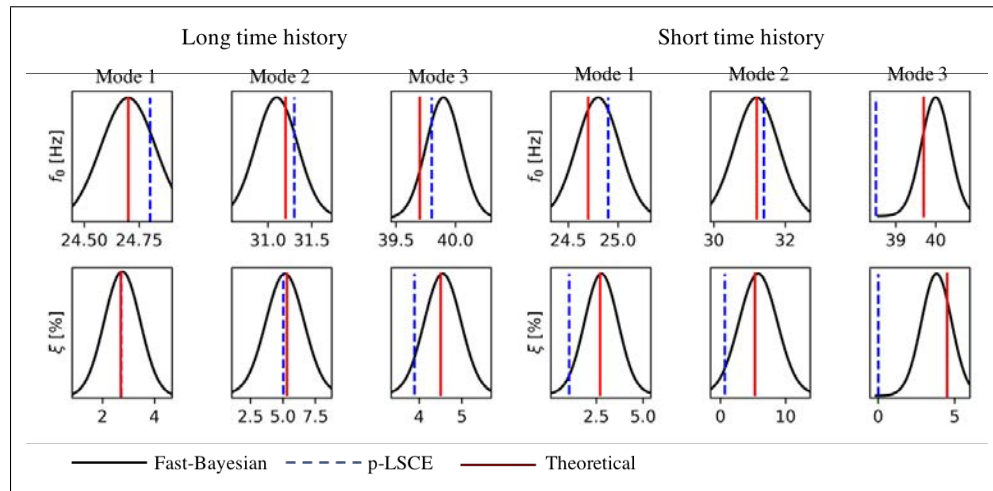


Figure 4.3 p-LSCE and Fast-Bayesian identification

The processing of short-time spectra cannot be handled correctly with the p-LSCE. The stabilization diagram indicates over-fitting at high order that can be sufficient for capturing stable poles, but the results show that the damping ratios are not representative of the studied dynamical modes. Conversely, the Fast-Bayesian is a legitimate algorithm that can be used to study short-time responses. As demonstrated in this section, the identification is still accurate with few data and the error between the MPV and the theoretical values is low. Nevertheless, the computed uncertainties grow when the data becomes limited. Although this is naturally expected, the posterior deviation can be wide and not representative of the real parameter variability. Consequently, these uncertainties can make the experimental characterization unusable in an industrial context.

#### 4.5.2 Robustness against Stochastic Pollution

Once the algorithm is shown adequate for processing short-time histories, it is necessary to assess in which extent the identification remains acceptable. For this, it is proposed to test the ML-OBMA on a linear sine sweep excitation passing through a resonance, with different levels of deviation from a harmonic force. To be consistent with experimental data, a set of  $N_i = 10$  channels with equally distributed mode shape ratios is considered. An ML-OBMA was performed on several datasets with different variance intensity levels. The variable control



is the Stochastic Gain Ratio (SGR), defined as the power ratio of the stochastic deviations and the harmonic signal. The FM rate was set to  $6 \times 10^{-2} \text{ Hz/s}$ , and the modal frequency and damping are  $50 \text{ Hz}$  and  $2.5\%$ . Figure 4.4 a. presents the sensitivity results. The markers draw the normalized most probable value (scaled on the theoretical value), and the bars represent  $\pm 3$  normalized standard deviations.

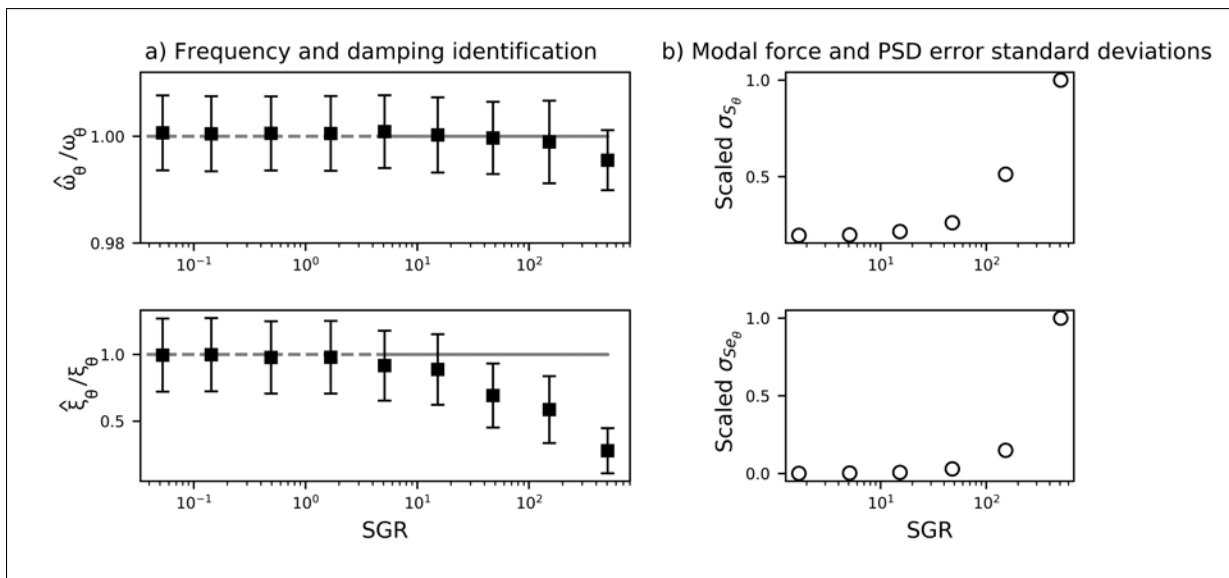


Figure 4.4 a) Modal parameter most probable values as a function of SGR. Uncertainty bars cover 3 c.v. b) Modal force and PSD error standard deviations. The two distribution parameters evolve jointly and tend to when the noise intensity is too high

It is observed that even for noise with a high SGR (near 500), the theoretical natural frequency still lies within a 95% credibility interval. When the stochastic gain ratio is lower than 100, the error between  $\omega$  and  $\hat{\omega}_\theta$  drops below 1%. The damping ratio's MPV only converges toward the theoretical value for very low SGR, and tends to be underestimated for SGR greater than 20. This is explained by the modal force PSD standard deviation discrepancy, as shown in Figure 4.4 b. The underestimation of the damping ratio while the excitation variance is too high is in keeping with the well-known damping underestimation in OMA. The damping and radial frequency variance seem relatively insensitive to the stochastic excitation amplitude. This is because the modal force PSD and noise PSD uncertainties increase drastically with the SGR,

dominating the other modal parameter variabilities. The MPVs are not displayed, but the noise PSD increases linearly with SGR, i.e., the model equates a fraction of stochastic excitation with channel noise. On the other hand, the modal force PSD decreases to conserve signal power, and is reduced by 50% for a SGR of 100.

The model appears to be robust against stochastic excitation processes, which is an important factor for ambient measurement processing. The identification fails as soon as the modal force PSD and noise PSD standard deviations begin to diverge. The SGR at which these deviations diverge is a function of the number of channels, the higher the number of channels the lower the critical SGR.

### 4.5.3 Sensitivity to the frequency modulation rate

Two aspects of the sine sweep excitation frequency modulation rate need to be considered. The first deals with model uncertainties, while the second undermines the structure of the modal response. With a low frequency-modulated excitation  $\tau$ , uncertainties appear to be low and MPVs are well estimated. When the FM rate increases, uncertainties seem to increase linearly with it, as shown in Figure 4.5 : when  $\tau$  increases, resonances develop and vanish faster. This shrinks the time duration of the signal, as shown in the lower part of Figure 4.5 ( $N$  decreases as the time duration decreases). The model accuracy is inevitably reduced because fewer observations are available. This remark is known as noise mitigation process. Damping estimations remain good, but the frequency MPV tends to be overestimated during the run-up (and underestimated during run-downs), the steeper the slope the higher the error.

For higher FM slopes, another issue may arise due to dynamic distortions of the classical steady-state response. These are due to the inability of the system to instantaneously match the excitation. Such distortions have been widely investigated for electronics, and more recently, in the field of mechanical engineering (Markert & Seidler (2001)). The ISO-7626 standard defines some criteria under which the response distortion is low enough to be neglected. For example, the condition for linear FM excitation is  $h\tau_{max} < 3.6(\omega\xi)^2[Hz/s]$ . When these conditions are

not fulfilled, the response may be distorted and cannot be modelled with a static transfer function. Figure 4.5 (right side) shows an example of such a distorted response : epistemic uncertainties can be encountered when dealing with out-of-standard systems, and natural frequencies deviate from their original value. At the same time, damping ratios are unpredictable if distortions are not modelled properly.

Dynamic distortions can also play a role in the uncertainty rise seen in Figure 4.5 left, as it introduces a modeling error leading to the expansion of credibility intervals. Identification in the presence of such dynamic behaviors was not considered in this paper, but authors seemed to deem it worthwhile to mention its existence and potential effects on parameter identification.

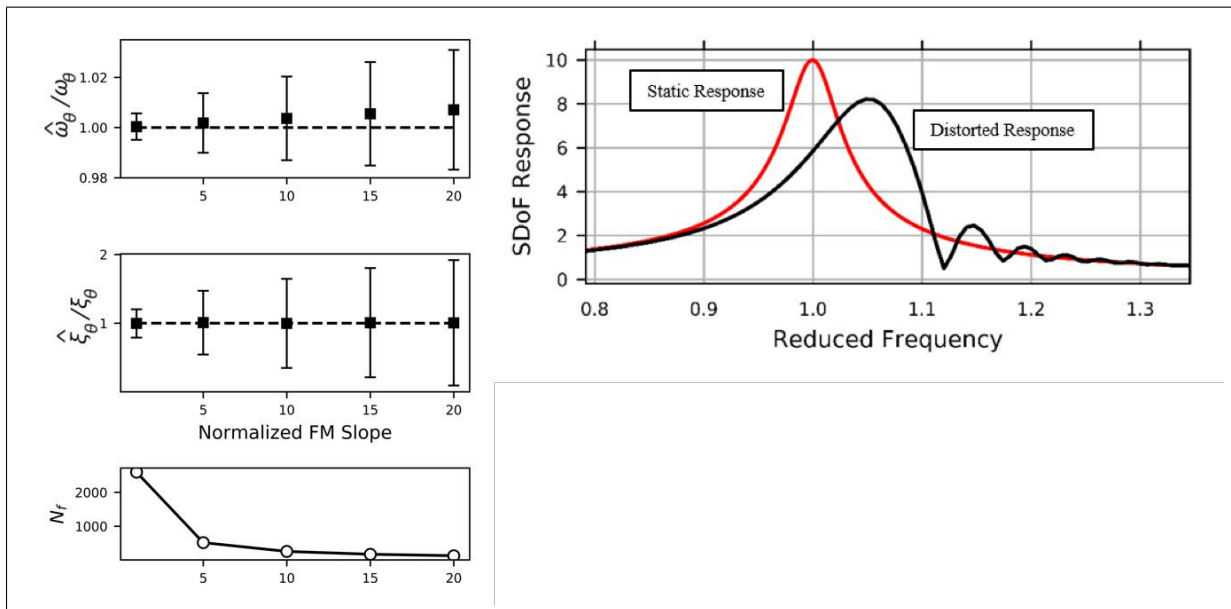


Figure 4.5 Left – Uncertainties increasing with FM slope. Right – The dynamic distortion of modal response when subjected to strong frequency modulated excitations

## 4.6 Case study : an experimental analysis of a Francis turbine during coast-down

### 4.6.1 Turbine characteristics and experimental setup

The case study is based on a vertical medium head Francis hydroelectric turbine. It is part of a run-of-the-river plant located in Quebec, Canada. The turbine has a specific speed of  $n_Q = 57$ , and a synchronous speed of  $163.6RPM$ . The flow in the penstock is directed into a spiral casing, and fed into the runner through a distributor of  $Z_G = 20$  guide vanes. The runner is a Francis runner of diameter  $4.4m$  and height  $2.7m$ , and is composed of  $Z_R = 13$  blades. For this kind of geometry, 7 cylindrical mode shapes are expected. Such patterns are cyclic-symmetric with nodal diameters  $|\nu|$  between 0 and 6.

In many medium-to-high head hydraulic turbines, the main harmonics of the rotating speed are the Rotor-Stator Interactions (RSI) (Tanaka (2011)). The RSI theory can be jointly used with Phase-Shift Analysis to determine the mode shapes. Indeed, RSI pressure waves have specific and predictable patterns and frequency, which will perform a selective excitation that only excite matching mode shapes. Typically, the RSI seen from the runner generate excitations at the wicket gate passing frequencies :  $f_{RSI}^n = nZ_G f_0$ . The RSI is capable of exciting modes with  $\nu = mZ_R - nZ_G$  nodal diameters on the runner. Table (4.1) summarizes the runner RSI properties, that will be used latter when identifying the mode shapes.

Tableau 4.1 RSI characteristics in the runner rotating coordinate system

RSI harmonic $n$	Frequency $f_{RSI}^n$	Excitation shape $ \nu $	Expected Phase-shift [rad]
1	$20f_0$	6	-0.97
2	$40f_0$	-1	-1.93
3	$60f_0$	5	-2.90
4	$80f_0$	-2	2.42

Data were recorded during an asynchronous coast-down transient experiment in no-load conditions. Two blades separated by an angle of  $111^\circ$  were instrumented with strain gauges, as presented in Figure 4.6 a. The blade intrados were instrumented with three strain gauge rosettes located in the band junction to a blade leading edge and trailing edge, and in the middle

crown-blade weld, as shown in Figure 4.6 b. The blade extrados were instrumented with two uniaxial gauges, one close to the crown, and the other close to the band. The locations were the same from one blade to the other. This enables the turbine runner mode shapes to be determined through a phase-shift analysis. The rosette and uniaxial gauges were oriented in agreement with the expected principal strain sensor.

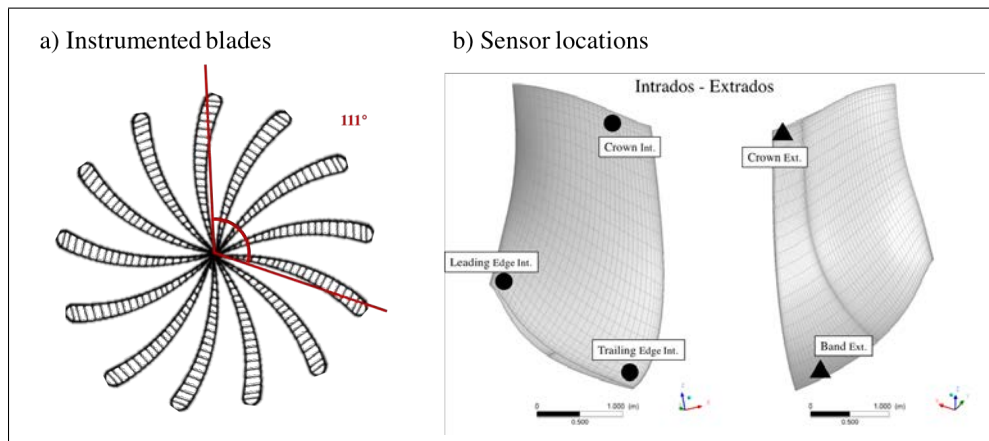


Figure 4.6 a) Instrumented blades. The two blades are separated by an angle of  $111^\circ$ . b) Strain gauge location on the instrumented blades. Circles represent rosette gauges, triangles, uni-axial gauges

#### 4.6.2 Mode shape identification

The analysis of experimental amplitude and phase-shift spectra between redundant sensors was conducted first. Examples of time-frequency distributions are shown in Figure 4.7, as related to the crown extrados. Phase-shift spectra are amplitude-filtered and show only phases associated with a high enough amplitude. With a long enough Fourier windowing, amplitude spectra show five operating deflection shapes (ODS).

The ODS of interest are those triggered by synchronous harmonics. It should be recalled that a harmonic interaction requires both a matching frequency and a compatible nodal diameter. As expected by the RSI theory, a ND5 is excited by the  $60 - th$  harmonic around  $60Hz$  when the rotating speed is around  $1Hz$  (see Table (4.2)). A ND0 is excited by the  $13 - th$  harmonic with a zero phase-shift. This correspond to the Blade Passing Frequency seen from the stationary

cascade. Such frequency can be excited either by an improper flow distribution, a local defect on the structure or a casing asymmetry. Then, the ND0 can be excited every time a blade passes through the pressure fluctuation, i.e. 13 times per revolution.

In the studied turbine, the authors were surprised to find out that some resonances are not induced by the RSI harmonics, but by harmonics in their vicinity. As shown in Figure 4.8, two resonances are induced by the 41 – *th* and 62 – *nd* harmonics while the RSI theory predicts excitations with the 40 – *th* and 60 – *th* harmonics. While excited mode shape nodal diameters should be ND-1 and ND5, the observed phase-shift indicates that the excited nodal diameters are respectively ND-2 and ND3, as reported in Table (4.2). Without going further in details, these observations are the result of a stationary point force excitation. Readers should refer to the works of Wildheim for deeper explanations <sup>1</sup> (Wildheim (1981a)).

Tableau 4.2 Excitation shape and frequency domain of the identified resonances

Resonance Band	Rotating Speed [Hz]	Phase-Shift [rad]	Mode shape nodal diameter $ \nu $
[15-20]Hz	1.3	0	0
[20-40]Hz	0.7	2.42	-2
[40-50]Hz	0.8	-0.48	3
[50-60]Hz	1.0	-2.90	5

### 4.6.3 Modal identification using ML-OBMA

Each resonance is processed with an ML-OBMA to extract both frequency and damping distributions. Bandwidth were selected using a MAC analysis for the ND0, while ND-2, 3 and 5 were bandlimited using a sensitivity analysis. An example of such an analysis for ND3 is provided in Figure 4.9. A band of  $\Delta f = 8Hz$  is chosen as modal parameters are stable and uncertainties low. Identification results are presented in Figure 4.10. Two types of result were investigated : a direct ML-OBMA inference as described in the previous sections and the distributions after taking into account short-time noise variance through Markov chains.  $10^3$  process realizations

<sup>1</sup> NDA : ces observations ont été le point de départ des travaux exposés dans le chapitre précédent.

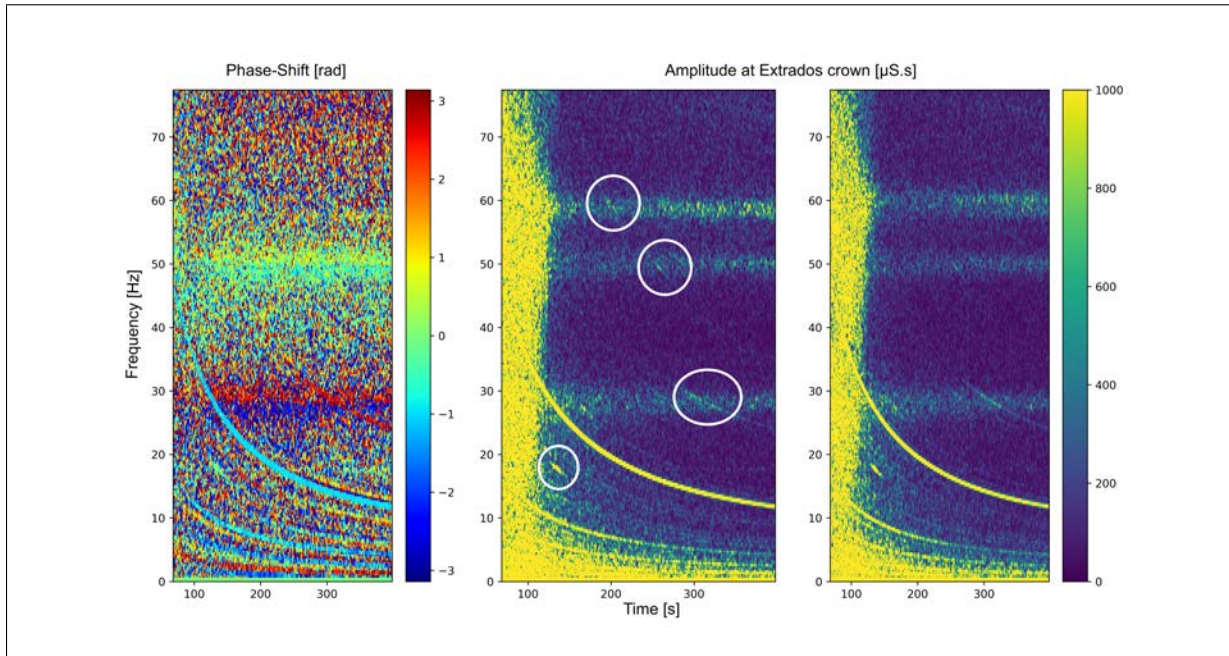


Figure 4.7 ODS analysis of principal direction of extrados crown Rosette gauge. On the left, phase-shift spectrum of the redundant gauges. On the right, redundant amplitude spectra

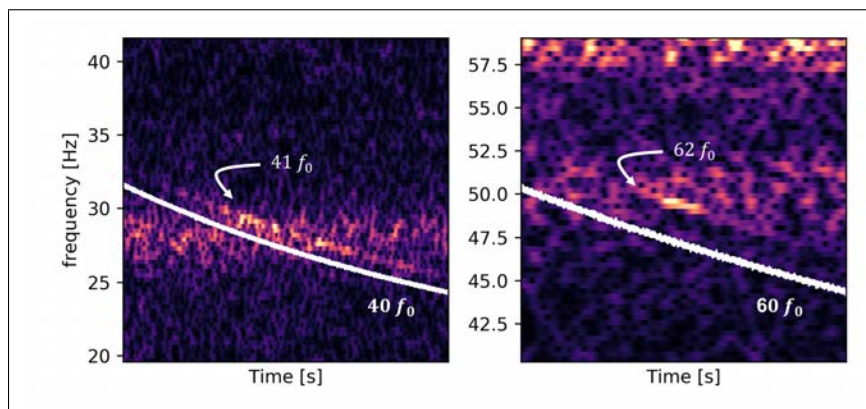


Figure 4.8 Unexpected resonances with the 41 – *th* and 62 – *nd* harmonics

were needed to ensure a good statistical convergence. Results show that the sole likelihood inference provides robust and accurate uncertainty bounds while Markov chains do not bring any significant change. This means that the Fast-Bayesian is not sensitive to non-flat noise PSD.

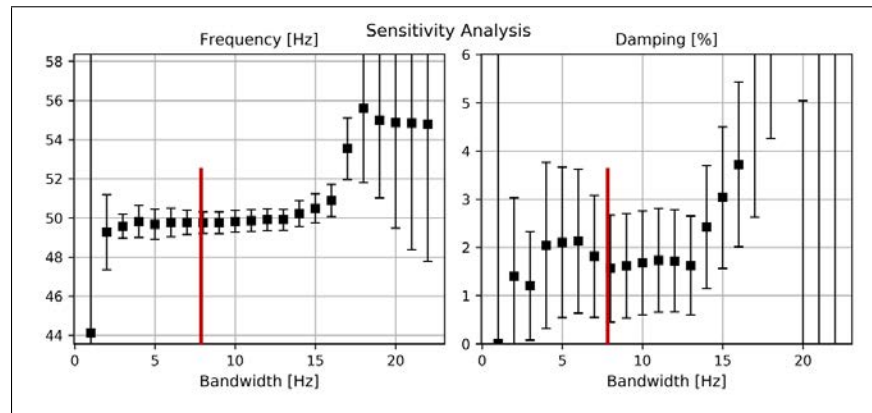


Figure 4.9 ND3 bandlimiting using a sensitivity analysis

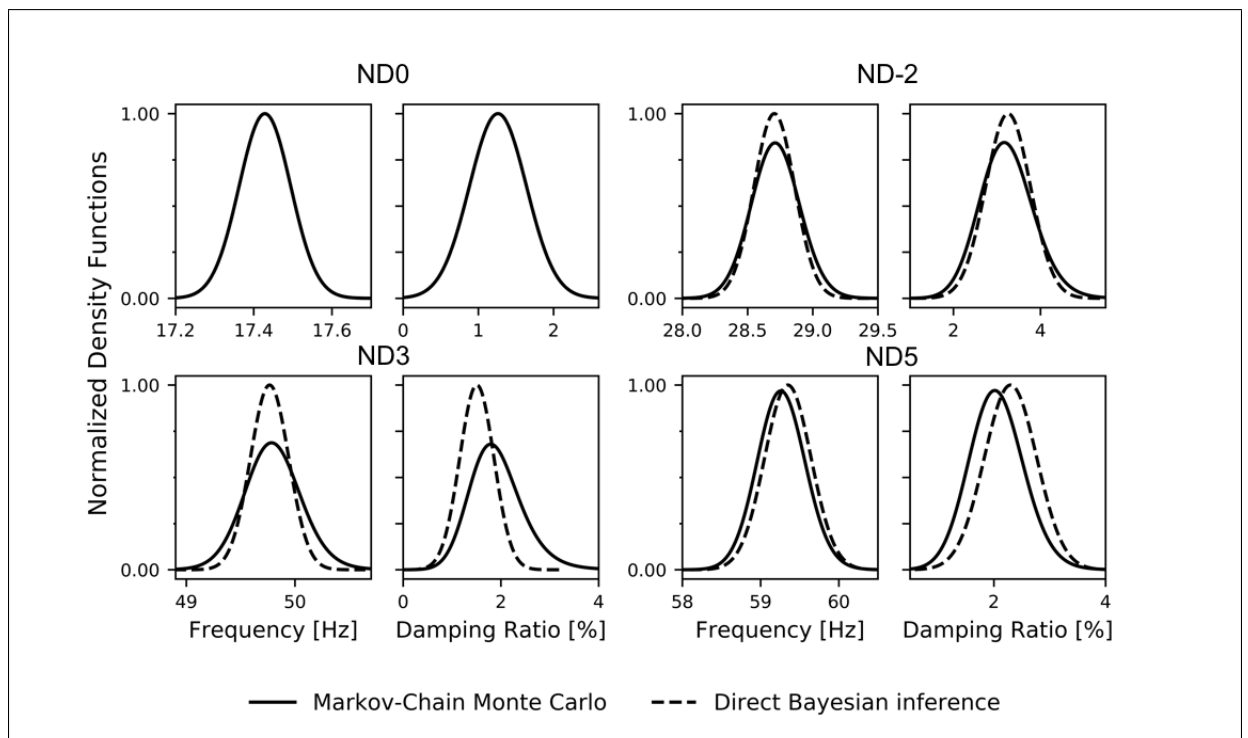


Figure 4.10 Frequency and damping distributions after ML-OBMA and after Markov chains ML-OBMA

ND0 distributions remain unchanged after Markov-chains quantify noise PSD fluctuations influence. This is explained by the high quality of the signal, which causes the noise to have almost no impact. Frequency distributions are narrow distributions, almost Gaussian with small



standard deviations, while damping distributions seem skewed, developing a wider tail for upper damping values. This is particularly observable for ND3. A high uncertainty exists for damping estimation, much like with many modal analysis extraction tools. Table (4.3) presents the parameter statistical distributions. The most probable values (MPV) and coefficients of variation (ratio of standard deviations over MPVs) are drawn.

The deviation of the estimated mode shape from the real mode shape can be estimated, without the latter being known. This is done using a stochastic representation of the mode shape :  $\varphi = \phi \|\phi\|^{-1}$ ,  $\phi \sim \mathcal{N}(\hat{\phi}, \hat{C}_\varphi)$ , and using an eigen-representation of the MAC. For more details please refer to (Au (2017)). ML-OBMA provides very close estimations of mode shapes, since the modal assurance criterion is high with a low c.v. As shown in Figure (4.11), the MAC may be close to 1, mode shape can strongly deviate from the expected target (ND5), or slightly (ND0). The MAC value does not reflect this inaccuracy. The MAC c.v. gives the global degree of adequacy, accounting for the norm constraint  $\varphi = 1$ . This degree of uncertainty depends on the SNR, the higher the SNR, the lower the error : ND0 has an SNR of  $7.4dB$  and a MAC c.v. of  $2.7\%$ , while ND5 has an SNR of  $0.95dB$  with a MAC c.v. of  $7.7\%$ .

Tableau 4.3 Modal parameter distributions for identified modes

	M.P.V (SI)	C.V.	M.P.V (SI)	C.V.
	<b>ND0</b>		<b>ND3</b>	
Frequency [Hz]	17.43	$3.8 \times 10^{-3}$	49.79	$5.2 \times 10^{-3}$
Damping ratio [%]	1.26	$3.0 \times 10^{-1}$	1.39	$5.4 \times 10^{-1}$
Excitation PSD [ $\mu S$ ]	$2.2 \times 10^6$	$1.6 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^6$	$7.3 \times 10^{-5}$
Error PSD [ $\mu S/Hz$ ]	$1.7 \times 10^{-2}$	$2.6 \times 10^{-4}$	$7.6 \times 10^{-4}$	$1.4 \times 10^{-5}$
Mode-shape MAC	0.999	$2.7 \times 10^{-2}$	0.999	$4.5 \times 10^{-2}$
	<b>ND-2</b>		<b>ND5</b>	
Frequency [Hz]	28.72	$6.4 \times 10^{-3}$	59.25	$5.2 \times 10^{-3}$
Damping ratio [%]	2.75	$2.8 \times 10^{-1}$	2.01	$2.4 \times 10^{-1}$
Excitation PSD [ $\mu S$ ]	$3.3 \times 10^5$	$9.2 \times 10^{-5}$	$4.3 \times 10^6$	$7.8 \times 10^{-5}$
Error PSD [ $\mu S/Hz$ ]	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-3}$	$5.9 \times 10^{-6}$
Mode-shape MAC	0.999	$5.4 \times 10^{-2}$	0.997	$7.7 \times 10^{-2}$

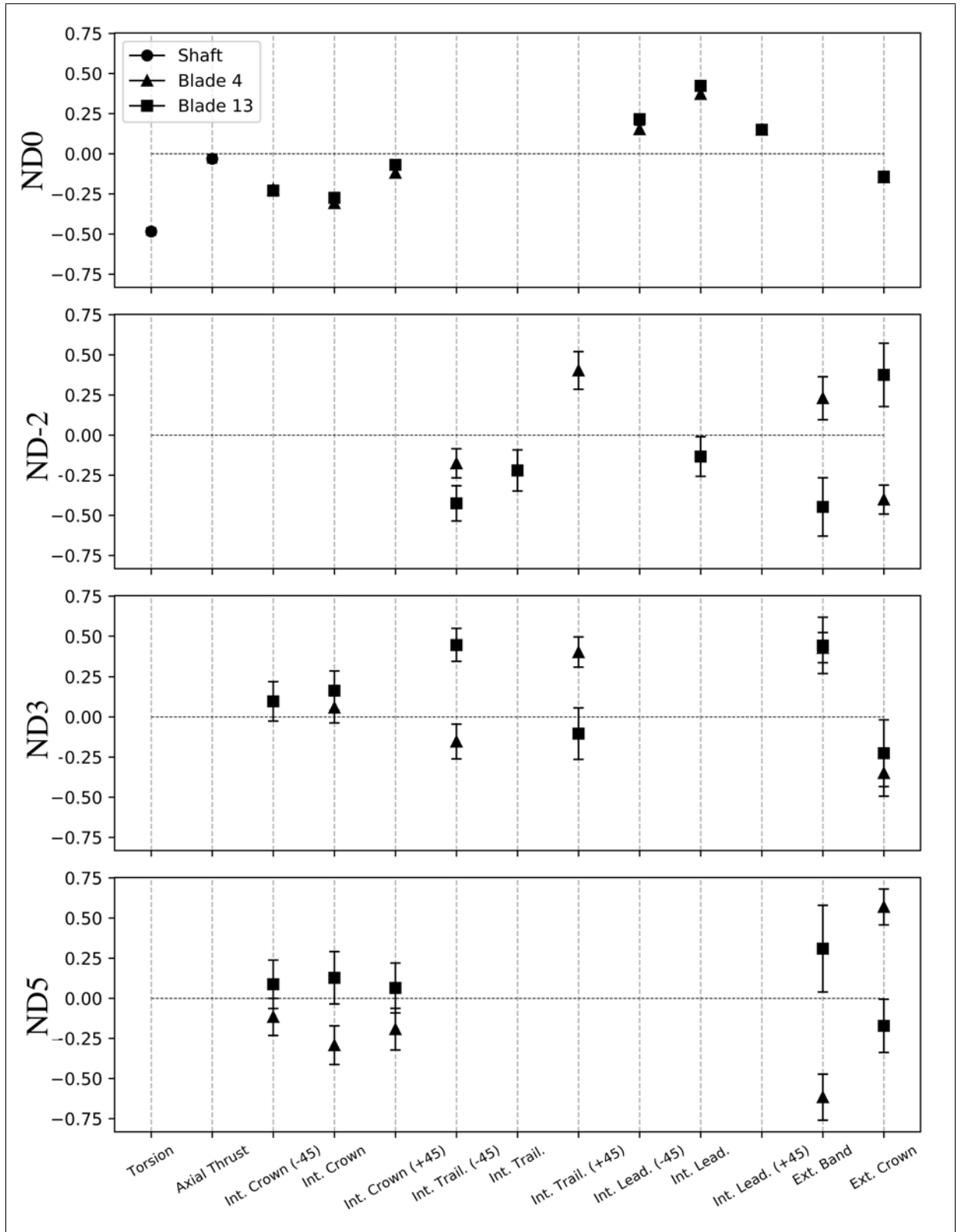


Figure 4.11 Mode shapes for identified modes

#### 4.6.4 Comparison with numerical simulations

The inferred modal frequencies can be used to validate the numerical predictions. In order to compare the experimental results to the numerical computations, several simulations were performed to obtain the runner modal analysis in different configurations. As it is well known that the modal behavior of a turbine is strongly influenced by the surrounding water, the fluid-structure interaction (FSI) added mass effect must be considered in the simulations when computing the natural frequencies. The full runner geometry is considered, and the meshing for one blade is presented in Figure 4.12, with tetrahedral elements. The shaft is not included in the simulation, which could have a significant influence on the prediction of nodal diameters 0 and 1. Instead, a zero-motion boundary condition is imposed at the shaft coupling ring. The FSI are treated like a structural-acoustical problem in Ansys. Three different water volumes were modelled, as shown in Figure 4.13. In the first simulation, a large volume of water is studied with a fluid domain of 0.5m around the runner. In the second simulation, a restricted volume of water is used with 0.1m distance between water external boundary and runner largest diameter, to take into account the runner confinement effect. In the third simulation, a more realistic geometry with a larger fluid domain is considered, including the upper and lower labyrinths real gaps (1 – 2mm), a portion of the distributor inflow, and the upper part of the draft tube. Obtained fluid volumes are meshed using quadratic elements with approximately 2M nodes. The external fluid bounds are treated as reflective walls. In the simulations, the system is considered undamped and no damping prediction is available. For this reason, the comparison with the experimental results is restricted to the natural frequencies.

Table (4.4) presents the relative error between the identified frequencies and the numerical computations. The ND0 is a torsion mode, which is strongly influenced by the shaft. Since the finite element model did not include the shaft, the large overestimation of the modal analysis is easily explainable. Theoretically, nodal diameters larger than 2 are fully balanced over the runner and they should not be influenced by the shaft. Consequently, the modal prediction is very close to the experimental observations. From simulation 1 to 2, the error decreases by 10% for modes 2 and 3. The best results are naturally obtained from the complex fluid domain geometry used in

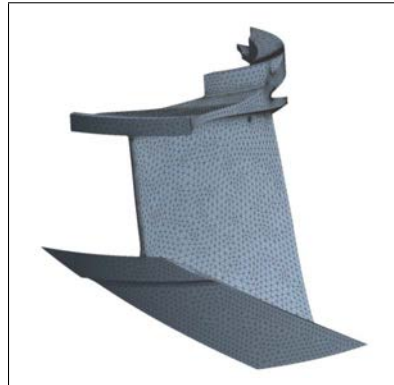


Figure 4.12 Turbine mesh for one blade



Figure 4.13 FEM analysis for the simulations with acoustic fluid

simulation 3, with a remaining error of about 1%. This is mainly due to the confinement effect, which is known to reduce the natural frequencies.

Although experimental identification is incomplete and misses several modes, available results can be used to calibrate models and obtain more precise load levels throughout the turbine. This calibration will also have impact on non identified modes, what will result in an improvement of stress predictions, then turbine fatigue and structural health.

Tableau 4.4 Comparison of experimental and numerical natural frequencies of identified modes

Mode shape nodal diameters $ \nu $	Experimental freq. [Hz]	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3
0	17.43	232%	211%	180%
2	28.72	36%	22%	2%
3	49.79	16%	9%	1%
5	59.25	3%	0.5%	0.5%

## 4.7 Conclusion

A new ambient modal analysis tool was implemented, based on the combination of order tracking and the so-called Fast-Bayesian algorithm. The ML-OBMA outperforms the OBMA in the sense that not only is able to identify modes, but it can also quantify related uncertainties, which can be relevant in many practical cases. Furthermore, it was demonstrated that the Fast-Bayesian is more adequate for analyzing limited data than the traditional Polymax. The model is unable to process synchronous resonances if spectra are influenced by modulation distortions, but it appears that such distortions involve FM rates that are very unlikely to occur in hydroelectric turbines. It is relatively robust against the flat spectrum assumption, and the inference still provides accurate estimates in presence of large residual excitation variance. This is an important characteristic because short-time responses systematically exhibit non-flat excitation behaviors. However, one should keep in mind that damping ratios tend to be underestimated in some cases where residual variance power is too high. This study allows a statistical modal analysis through the investigation of synchronous harmonic resonances. Experimental parameter estimates can be used for many purposes in industry, including, for instance, numerical model validation, trade-off criteria to optimize model accuracy versus computing time, and model calibration. In this paper, the model was implemented on a prototype Francis turbine, and several resonances were featured, showing a close agreement with the numerical modal analysis. In future works, the modulated RSI phenomenon will be studied deeper. Such behavior is rare and absent from the literature, although it can produce unexpected resonances that may damage the structure. In the Fast-Bayesian model, parameter distributions were assumed to be linearly dependent

on the likelihood function, i.e., the priors were implicitly assumed to be uniform. The Bayes theorem was then used in its weakest version. Furthermore, the posterior distributions were approximated in a Taylor manner, using a Laplace approximation. Future works should transform this weak Bayesian theory into a fully Bayesian approach, by considering non-uniform priors and a sampling of the likelihood in the vicinity of the MPV.



## CHAPITRE 5

### A FAST COLLAPSED GIBBS SAMPLER FOR FREQUENCY DOMAIN OPERATIONAL MODAL ANALYSIS

Quentin Dollon<sup>1,2</sup>, Jérôme Antoni<sup>1</sup>, Antoine Tahan<sup>2</sup>, Martin Gagnon<sup>3</sup>, Christine Monette<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire vibration acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 20  
Avenue Albert Einstein, 69100 Villeurbanne, France

<sup>2</sup> Département de Génie Mécanique, École de Technologie Supérieure, 1100 Notre-Dame Ouest,  
Montréal, QC H3C 1K3, Canada

<sup>3</sup> Institut de Recherche de Hydro-Québec, 1800 Boulevard Lionel-Boulet, Varennes, QC J3X  
1S1, Canada

<sup>4</sup> Andritz Hydro Canada Inc., 6100 Route Transcanadienne, Pointe-Claire, QC H9R 1B9,  
Canada

Article soumis dans *Mechanical Systems and Signal Processing*, Novembre 2021.  
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108985>

#### 5.1 Abstract

This paper introduces a fast Gibbs sampler for solving a fully Bayesian problem in operational modal analysis. The proposed method is able to infer modal properties from the FFT of well-separated modes. System identification and related uncertainties are captured by a *posterior* distribution. The classical resonance description is wrapped into a hierarchical probabilistic model. The model is sampled through an enhanced Gibbs sampler including a Metropolis-Hasting step. The fast convergence of the algorithm is enabled by two improvements. First, the use of a collapsed Gibbs algorithm allows for an efficient sampling of the mode shape. Second, the use of adequate candidate distributions in the Metropolis-Hasting step provide excellent acceptance ratios, around 75%. Eventually, the numerical inference procedure surpasses the existing Bayesian approaches for small data-based identification, while remaining sustainable in terms of computing requirements.



## 5.2 introduction

Operational Modal Analysis (OMA) is crucial for studying the modal behavior of structures while in operation. Modal parameters are estimated from ambient data records and reflect the actual mechanical properties of the system in a given operating regime. These properties can differ significantly from both laboratory experiments and numerical predictions, as many factors, including boundary conditions, temperature, geometry, and damages, might alter their results, Alampalli (2000). Furthermore, estimated modal parameters are often subjected to various uncertainty sources that need to be quantified before they can compute reliable predictions. As such, the need for probabilistic models has accelerated the development of statistical methods for OMA. Modal inference is commonly tackled using two avenues, namely, the frequentist approach and Bayesian approach. Both frameworks benefit from the likelihood function introduced by Fisher (1922). The frequentist and Bayesian approaches differ fundamentally in how they use the likelihood function. In the frequentist approach, the estimated parameters are obtained by maximizing the likelihood, which is used as a cost function in an optimization algorithm. Perturbative approaches such as Monte-Carlo simulations (Reynders (2012); Banfi & Carassale (2016)) or Taylor expansions (Reynders *et al.* (2008, 2015)) allow defining confidence intervals via the computation of the *ensemble covariance*. The estimated covariances are data-driven and represent the sensitivity of the identification to random fluctuations in the observations. In the Bayesian approach, the likelihood represents the plausibility of the parameters, conditional on the observations. It is combined with *prior* information to give the updated posterior density of the parameters. The covariance is obtained from the statistics of the posterior density function. The obtained covariance is parameter-driven and represents the change in the probability of observing the data when the parameter varies. Bayesian procedures provide substantial advantages as compared to the frequentist approaches, because they not only quantify the experimental uncertainties, but also the model uncertainties due to inaccuracies in the mathematical formulation. Furthermore, the original formulation of the Bayes' theory does not rely on any asymptotic assumption and performs well with limited data. It is noteworthy that

Bayesian and frequentist frameworks are asymptotically consistent for error-free models, see Au (2012c).

The output-only frequency domain Bayesian framework has been developed since the late 90's and is still a promising research topic for engineering. The Bayesian Spectral Density Approach (BSDA) was developed by Katafygiotis & Yuen (2001). This method infers modal properties from spectral density estimates, which asymptotically follow Wishart distributions, Yuen *et al.* (2002). Latter, the Bayesian Fast-Fourier Transform Approach (BFFTA) was implemented by Yuen & Katafygiotis (2003a), giving an FFT-based inference method (Yuen (2010)). The direct use of FFT instead of spectral density matrices allows inferring modal parameters more directly. In both the spectral and the frequency approaches, the Most Probable Values (MPV) of the modal parameters are obtained using maximum likelihood estimates. Hence, a Laplace approximation is used to obtain a Gaussian approximation of the posterior distribution. The Bayesian identification schemes were successfully implemented on real-case scenarios. However, their popularity was limited by their alleged prohibitive computational requirement (see forthcoming references). Consequently, intensive researches were achieved with the prospect of overcoming this constraint. The family of the Fast-Bayesian methods was then developed. The BSDA was converted into a two-stage Fast-Bayesian spectral density approach, by separating the spectrum and space variables and identifying them independently, Yan & Katafygiotis (2015a,b). Closed forms of the uncertainty propagation were derived for single mode problems, see Yan & Katafygiotis (2019). The BFFTA was processed into a Fast-BFFTA for the case of single modes by Au (2011a) and multiple modes by Au (2012a,b, 2017). This was achieved by expressing the negative log-likelihood in a canonical formulation and by parametrizing the mode-shape matrix using rotations from an orthonormal reference basis.

Since the development of the Fast-BFFTA, various surrogate versions of the algorithm have been proposed, providing a more general identification framework to the research community. The problem of inferring modal parameters from free vibrations was addressed in Zhang *et al.* (2015b); Ni *et al.* (2015), and the case of synchronous vibrations was addressed in Dollon *et al.* (2021a). In full-scale ambient experiments, it is often convenient to perform several

measurements with different setups, so that one may cover a large amount of DOF with a restricted number of sensors. The Fast-BFFTA was adapted to incorporate the information from these multiple setups in the case of separated modes, see Au & Zhang (2012); Zhang *et al.* (2015a). Fast-Bayesian procedures were also implemented to deal with asynchronous data, Zhu & Au (2018a,b). Such data can be obtained from experiments where different sampling clocks induce time drifts, and the method allows for more flexibility during measurement tests. The purpose of identifying weakly excited modes that are buried in the modal signature of another preponderant mode was dealt in Zhu *et al.* (2018). There exist a strong connection between the Fast-BFFTA and the Fast-BSDA : it was formally shown that the Fast-BSDA is equivalent to a linear superposition of the Fast-BFFTA performed on different snapshots : Yan & Katafygiotis (2015a). However, a throughout comparison revealed that this mathematical equivalence is unsubstantial from a practical point of view, because the Fast-BSDA involves unnecessary long-time sequences to achieve proper data averaging (assuming that only one snapshot is available), Au (2015).

The use of numerical samplers to infer the Bayesian OMA problems is poorly documented in the literature. Recently, an FFT-based hierarchical model was devised for Single Degree of Freedom (SDoF) systems under homoscedastic error, and published in the works of Sedehi *et al.* (2019, 2020). However, the sampling step is marginal, and the inference scheme involves multiple Laplace approximations to approximate both the likelihood function and the posterior. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithms have been developed for the purpose of structural updating. The foundations of the theory were laid by Beck & Katafygiotis (1998). Algorithms were developed from the Bayesian perspective, using Gibbs samplers for structural updating, Cheung & Bansal (2017); Behmanesh, Moaveni, Lombaert & Papadimitriou (2015); Behmanesh & Moaveni (2016); Behmanesh, Yousefianmoghadam, Nozari, Moaveni & Stavridis (2018), and structural health monitoring, Ching, Muto & Beck (2006); Das & Debnath (2021). The use of Transitional MCMC was also studied in Ching & Chen (2007), as well as Hamilton MCMC in Cheung & Beck (2009). Structural reliability assessments are supported by importance

sampling algorithms, see Au & Beck (1999); Beck & Au (2002). All these studies focus on structural identification, after the modal data is collected and inferred. A Gibbs sampler was developed for time-domain OMA by Li, Der Kiureghian & Au (2018). There are currently no sampling methods for OMA the frequency-domain, despite the excellent separation properties of modal components along the frequencies.

In this paper, a method is proposed to sample the actual posterior distribution, without the need for simplifying approximations. For this, it is proposed to use a MCMC algorithm. Contrary to a common belief, many references in the literature argue that the computation required to implement MCMC is no more intense than that required for maximum likelihood estimations, Levy (2009). A hierarchical model is then proposed and sampled using a fast Gibbs sampler. There are usually two difficulties when sampling modal models. First, the mode shapes are subjected to a scale indeterminacy. Fixing this fundamental indeterminacy usually relies on a unit norm constraint on the mode shape. This can be imposed *a posteriori* by the use of heuristic normalization schemes, at the expense of convergence. Here, the convergence is enforced by the use of a collapsed Gibbs algorithm. This surrogate sampler provides spherical kernels for the mode shape, which automatically ensures the respect of the unit norm constraint. The second difficulty lies in the sampling of the pole, because the strong non-linearity of the transfer function leads to intractable posteriors. The sampling is then done through a Metropolis Hasting step. Intensive efforts were dedicated to the determination of efficient independent candidate distributions. Eventually, the MH step is very efficient with acceptance ratios near 75%. The contributions of this work are the following :

1. **The modelling error** is based on a heteroscedastic assumption, while existing approaches rely on homoscedastic schemes. This is a more versatile assumption that ensures more precise results and allows more heterogeneous environment conditions.
2. **The prior distributions** are often non-informative in the existing methods. This systematic use makes the expert knowledge and past experience impossible to incorporate in the analysis,

that is nevertheless one fundamental argument held by Bayesian protagonists. In this model, the modal pole and mode shape are modeled using Gaussian-like prior distributions. The modal force PSD and error PSD are supported by inverse gamma distributions. This provides a strictly positive support that avoids Heywood cases (identification of negative variances).

3. **The joint posterior distribution** is sampled using numerical MCMC through a Collapsed Metropolis-Hasting-within-Gibbs sampler. The exact posterior is sampled, regardless of the data. Conversely, the existing models often use Laplace approximations that only hold when the likelihood is almost Gaussian, and that cannot work in presence of locally identifiable parameters. Furthermore, Laplace approximations can be severely inaccurate for small data, Ruly, Sartori & Ventura (2016).
4. **The identified parameters** are characterized by the mean of the posterior, rather than the most probable value identified in the existing methods. Both estimates coincide for symmetric distributions but differ in the general case. The mean is a better statistics in the sense it better reflects the balance point of the posterior, Bolstad (2010).
5. **The uncertain amplitude spectra** can be retrieved from the sampler, by using the sampled modal coordinates.

In comparison to the existing Bayesian methods, numerical samplers are expected to identify similar posteriors if a large amount of data is available. However, the authors believe that MCMC perform better with small data, while remaining sustainable in terms of computational burden. Of course, the convergence is expected to be slightly longer than the existing methods, but the computational requirement is still largely consistent with practical issues and industrial perspectives. The outline of this paper is as follow. Section 2 introduces the model description and the hierarchical model for SDoF systems. This special case is considered not only for its simplicity, but also because it well models the local response of a Multiple-Degree-of-Freedom (MDoF) system to a non-stationary monochromatic excitation, which was of interest in the case-study. Furthermore, it will be seen that the generalization from single to multiple modes is straightforward. Section 3 introduces the MCMC sampler. In section 4, some computational aspects are discussed. The computational strategy and choice of pole prior are dealt, and some

numerical examples are introduced to illustrate the sampler. Section 5 shows some examples of the sampler applied to operational data derived from deformation measurements of a hydroelectric turbine during transient operating conditions.

### 5.3 Model Description

#### 5.3.1 Input Data

Let us consider a set of  $S$  snapshots obtained through redundant ambient measurement sessions. In the sequel, subscript  $s$  refers to the snapshot of interest. Each snapshot represents a time-series gathering the displacements  $\{\mathbf{y}_{ns} \in \mathbb{R}^{N_o}\}_n$  at time  $t_n$ ,  $n \in N$ . These measurements are recorded with a fixed assembly of  $N_o$  sensors with a sampling period  $T$ . The time-series are processed using Fast-Fourier transforms to obtain their frequency-domain representation at discrete frequencies  $\omega_k = 2\pi k/T$ ,  $k \in \mathcal{K}$  :

$$\mathbf{Y}_{ks} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in N} \mathbf{y}_{ns} e^{-2j\pi\omega_k n} \quad (5.1)$$

The interval  $\mathcal{K} = \llbracket \kappa, \kappa + K \rrbracket$  is a range of  $K$  frequency samples where only one single mode is dominantly excited. For each snapshot, the data  $\mathbf{Y}_s = \{\mathbf{Y}_{ks}\}_{k \in \mathcal{K}}$  is obtained. The model input consists in the collection  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ .

#### 5.3.2 Physical Model

The system is modeled using the following modal decomposition :

$$\mathbf{Y}_{ks} = p_{ks} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{n}_{ks}, \quad s, k \in \mathcal{S} \times \mathcal{K} \quad (5.2)$$

This forward model is the mathematical representation of the resonance phenomenon. The mode shape  $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^{N_o}$  encapsulates the spatial information, while the modal coordinates  $p_{ks} \in \mathbb{C}$

carry the frequency dependence. They are expressed as the modal force FFT amplified by the dynamical mode. The dynamical mode is modelled using the transfer function (5.3). In the latter,  $\lambda = \lambda_r + j\lambda_i$  stands for the pole of the system, which can be parametrized using the natural frequency  $\omega_0$  and the damping ratio  $\xi$ . The filter gain  $G$  is an arbitrary dimensional factor expressed in rad.Hz.

$$H_k(\lambda) = \frac{G}{(j\omega_k - \lambda)(j\omega_k - \lambda^*)}, \quad \lambda = -\omega_0\xi + j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.3)$$

$\mathbf{n}_{ks}$  is the modelling error FFT at frequency  $k$  for snapshot  $s$ . It accounts for any discrepancy between the modal model and the observations, e.g., random noise measurement, analogical sampling error, acquisition error, pre-processing and model inaccuracies. Under the independence of the error with respect to the signal part, the modal covariance matrix  $\mathbf{C}_{ks} = \mathbb{E}\{\mathbf{Y}_{ks}\mathbf{Y}_{ks}^H\}$  is given in equation (5.4).

$$\mathbf{C}_{ks} = \gamma_{ks}^2 \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T + \mathbf{D}_s \quad (5.4)$$

the modal covariance is the sum of a rank-one matrix  $\gamma_{ks}^2 \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T$  and a diagonal matrix  $\mathbf{D}_s$ . The variance of the modal coordinate reads as  $\gamma_{ks}^2 = \mathbb{E}\{p_{ks}p_{ks}^*\}$ . It coincides with the modal coordinate Power Spectral Density (PSD).

### 5.3.3 Hierarchical Model

#### 5.3.3.1 Additive Error Parametrization

As a basic assumption regarding the error,  $\mathbf{n}_{ks}$  is modeled as a circular symmetric, i.i.d random variable with respect to  $k$ , and follows a centered complex multivariate Gaussian distribution. The modelling error and the modal coordinates are mutually independent. The error covariance  $\mathbf{D}_s$  is diagonal with entries  $\sigma_{sl}^2$ . The parametrization  $\mathbf{D}_s = \sigma_{s0}^2 \boldsymbol{\Delta}_s$  is adopted, where

$\Delta_s = \text{diag}(\delta_{sl}^2)$  is a dimensionless covariance that represents the deviation of the error to the homoscedastic covariance  $\sigma_{s0}^2 \mathbf{I}$ . In the sequel, the  $\delta_{sl}^2$  will be called heteroscedastic weights. To ensure identifiability, a unit geometric mean constraint (5.5) is imposed on the weights :

$$\prod_l \delta_{sl}^2 = 1, \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (5.5)$$

Notice that this constraint is imposed without loss of generality, since the heteroscedastic weights are multiplicative coefficients.

### 5.3.3.2 Mode Shape Normalization

In modal models, there is a fundamental indeterminacy of the mode shape. Indeed, multiplying the mode shape by any real scalar  $a$  results in scaling the modal coordinates PSD by  $1/a^2$ . In operational modal analysis, this issue is usually fixed using a unitary Euclidean norm on the mode shape. However, any norm constraint can be imposed without loss of generality. In this work, it is proposed to impose the unit Euclidean norm constraint on  $\boldsymbol{\psi} = \Delta^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}$ , giving the condition (5.6).  $\Delta^{-1}$  is an average value of  $\Delta_s^{-1}$  over the snapshots.

$$\boldsymbol{\varphi}^T \Delta^{-1} \boldsymbol{\varphi} = 1, \quad \Delta^{-1} = \frac{1}{S} \sum_s \Delta_s^{-1} \quad (5.6)$$

It will be seen later that such a constraint enables simplifications in the posterior expressions. The modified mode shape is modeled as an i.i.d. random variable following a uniform distribution on the  $N_o$ -sphere.

### 5.3.3.3 Modal Covariance Parametrization

The modal force is assumed to be fully random and circular symmetric following a centered complex Gaussian  $\mathcal{NC}(0, \alpha_s^2)$ . Notice that the force variance is snapshot specific, but can be chosen identical over the experiment. The use of experiment dependency is appropriate



when studying non-stationary signals, because it allows for an evolution of the variance over the experiments. However, this parametrization introduces more variability in the model, thus increasing the variance in the parameter posteriors. The modal coordinates inherit the randomness and follow a complex Gaussian with frequency-dependent variance  $\mathcal{NC}(0, \gamma_{ks}^2)$ , where  $\gamma_{ks}^2 = \alpha_s^2 |H_k(\lambda)|^2$ . The imaginary part  $\lambda_i$  is modeled as a truncated Gaussian with mean  $\lambda_{0i}$  and variance  $\sigma_{0i}^2$ , and the quadratic real part  $\lambda_r^2$  is modelled as a truncated gamma distribution with scale and shape  $a_{0r}, b_{0r}$ . This choice of priors will take on its full meaning in section 5.4.3.

In contrast to the traditional methods, which consider  $\alpha_s^2$  and  $\sigma_{sl}^2$  to be priorly uniform, some priors are introduced. The excitation PSD  $\alpha_s^2$  are considered i.i.d. following inverse gamma distributions  $\alpha_s^2 \sim \mathcal{IG}(a^\alpha, b^\alpha)$ , where  $a^\alpha$  and  $b^\alpha$  are the scale and shape parameters. The dimensional error PSD  $\sigma_{s0}^2$  is also modeled as an inverse gamma distributions  $\sigma_{s0}^2 \sim \mathcal{IG}(a^\sigma, b^\sigma)$ . According to constraint (5.5), the heteroscedastic weights  $\delta_{sl}^2$  are modeled using an inverse gamma with unitary mean, i.e.  $\delta_{sl}^2 \sim \mathcal{IG}(a^\delta, a^\delta - 1)$ . Notice that the hyperpriors do not depend on the experiment, so that any snapshot-specificity stems from the snapshot likelihoods. Inverse gamma varieties are core components in Bayesian statistics because they have real and strictly positive supports, which is convenient for sampling variance parameters without Heywood case occurrences. Moreover, they have suitable conjugation properties with Gaussian likelihoods.

### 5.3.3.4 Hierarchical Structure

The hierarchical structure is presented in Figure 5.1, and the list of the variables is depicted in Table 5.1. In operational modal analysis, the target parameters are the pole  $\lambda$ , the mode shape  $\boldsymbol{\varphi}$ , the modal force PSD  $\alpha_s^2$  and the residual error PSD  $\sigma_{s0}^2 \delta_{sl}^2$ . Parameters  $\lambda$  and  $\boldsymbol{\varphi}$  are snapshot-invariant and encapsulate the mechanical properties of the structure. Conversely, the set  $\{\alpha_s^2, \sigma_{s0}^2, \delta_{s1}^2, \dots, \delta_{sL}^2\}_{s \in \mathcal{S}}$  contains information related to the acting forces and residual error, which depend on the experimental conditions. These conditions are likely to differ between experiments, and the identification will be conditional on each snapshot. The global identification problem consists in finding the posterior density distribution of  $\boldsymbol{\theta} = (\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \{\alpha_s^2, \sigma_{s0}^2, \delta_{s1}^2, \dots, \delta_{sL}^2\}_{s \in \mathcal{S}})$ .

Tableau 5.1 List of the hierarchical model variables

Variable	Type	Size
$Y_{ks}$	Observation samples	$\mathbb{C}^L$
$\omega_k$	Sampled frequencies	$\mathbb{R}_+$
<b>Signal Part</b>		$\mathbb{C}^L$
$\boldsymbol{\varphi}$	Mode shape	$\mathbb{R}^L$
$p_{ks}$	Modal coordinates	$\mathbb{C}$
$\alpha_s^2$	Excitation variance / PSD	$\mathbb{R}_+^*$
$\lambda$	pole	$\mathbb{C}$
$a^\alpha$	Excitation scale hyperprior	$\mathbb{R}_+$
$b^\alpha$	Excitation shape hyperprior	$\mathbb{R}_+$
$\lambda_{0i}$	Mean prior of $\mathcal{I}m(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$
$\sigma_{0i}^2$	Variance prior of $\mathcal{I}m(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$
$a_{0r}$	Scale prior of $\mathcal{R}e(\lambda)^2$	$\mathbb{R}_+$
$b_{0r}$	Shape prior of $\mathcal{R}e(\lambda)^2$	$\mathbb{R}_+$
<b>Residual Error Part</b>		$\mathbb{C}^L$
$\sigma_{s0}^2$	Dimensional error variance / PSD	$\mathbb{R}_+^*$
$\delta_{s1}^2$	heteroscedastic weights	$\mathbb{R}_+$
$a^\sigma$	Error scale hyperprior	$\mathbb{R}_+$
$b^\sigma$	Error shape hyperprior	$\mathbb{R}_+$
$a^\delta$	Heteroscedastic shape hyperpriors	$\mathbb{R}_+$

### 5.3.4 Data Likelihood

Snapshots are considered as statistically independent events and the joint likelihood  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  reads as a product of probability densities :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = \prod_s \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_s|Y_s), \quad \boldsymbol{\theta}_s = (\lambda, \boldsymbol{\varphi}, \alpha_s^2, \sigma_{s0}^2, \delta_{s1}^2, \dots, \delta_{sL}^2) \quad (5.7)$$

According to equation (5.2),  $Y_{ks} - p_{ks}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{n}_{ks}$ . Then, the data is a set of i.i.d. circular symmetric random variable following complex Gaussian distributions. The normal regression model likelihood is obtained :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_s|Y_s) = \prod_k \mathcal{N}_C(Y_{ks}|p_{ks}\boldsymbol{\varphi}, \sigma_{s0}^2\boldsymbol{\Delta}_s) \quad (5.8)$$

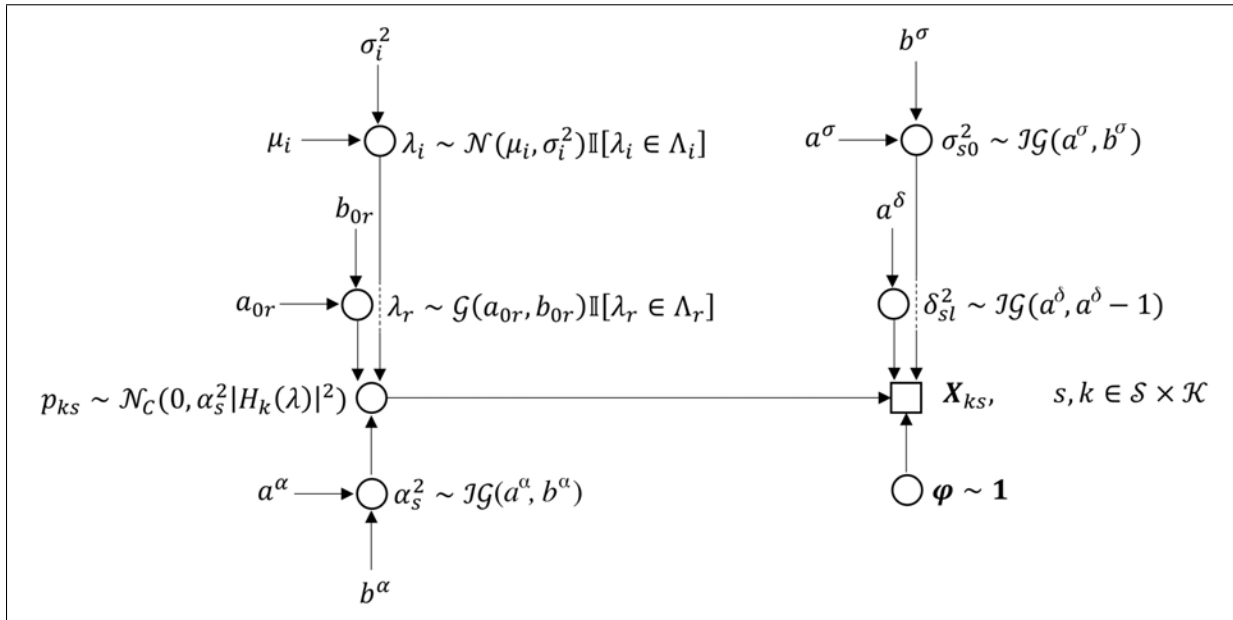


Figure 5.1 Latent variable hierarchical model for the single-mode description. Circles represent the parameters to update, while arrows represent the statistical relationships between the parameters. The root parameters are the hyper-parameters used in the prior probability density functions

Notice that the likelihood function used in the BFFTA can be retrieved by marginalizing (5.8) over the modal coordinates. The non-marginalized version is preferred because it allows for the sampling of the modal coordinates, which can be used to recover the uncertain spectra and the amplitude levels around resonance.

## 5.4 Modal Identification

### 5.4.1 General Framework

As stated above, the system identification consists in finding the joint distribution  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  of the model parameter vector  $\boldsymbol{\theta}$  conditional on the available observations  $\mathbf{Y}$ . The joint posterior distribution is obtained using Bayes theorem :

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) = \frac{\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{Y})} \quad (5.9)$$

In equation (5.9),  $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})$  is the data likelihood defined in (5.7).  $p(\boldsymbol{\theta})$  is the parameter marginal distribution, also called *prior*. It encompasses the degree of belief about the parameter before taking the data into account. The data marginal distribution (or *evidence*)  $p(\mathbf{Y})$  is a constant which is used for normalizing the posterior density. Analytical solutions for  $p(\mathbf{Y})$  are not usually available, and the high dimensionality of the parameter space makes numerical marginalization impractical. Thus, the posterior is often known up to a proportional constant,  $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y}) \propto \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{Y})p(\boldsymbol{\theta})$ . This unscaled formulation can be sufficient to obtain the exact posterior distribution by the means of Markov chain Monte Carlo methods (MCMC), Smith & Roberts (1993). The idea is to setup a Markov chain whose stationary distribution equals the targeted posterior. There are various algorithms available for constructing such Markov chains. The Gibbs algorithm can be implemented on the hierarchical structure, providing an efficient sampler with reduced dimensionality, which is desirable for a fast convergence, Bolstad (2010). The generic Gibbs sampler constructs the Markov chain using iterative Monte Carlo realizations. Beginning with an initial parameter value  $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ , the Markov chain draws a sample  $\boldsymbol{\theta}^{(i+1)}$  from the one-step-ahead parameter  $\boldsymbol{\theta}^{(i)}$  using a transition kernel  $q(\boldsymbol{\theta})$ . The Gibbs sampler proceeds by marginal sampling and relies on the following transition kernel :

$$\theta_j^{(i+1)} \sim q\left(\theta_j | \theta_1^{(i+1)}, \dots, \theta_{j-1}^{(i+1)}, \theta_{j+1}^{(i)}, \dots, \theta_n^{(i)}, \mathbf{Y}\right), \quad 1 \leq j \leq n \quad (5.10)$$

where  $q\left(\theta_j | \{\theta_i\}_{i \neq j}, \mathbf{Y}\right)$  is the marginal posterior of parameter  $\theta_j$ . The algorithm does not need an accurate initial value, as the beginning of the chain is commonly disregarded until the stationary distribution is reached (the burn-in period). The specificity of the Gibbs sampler is to accept any draw from equation (5.10), regardless of the joint posterior distribution. Then, the exact marginal posteriors can be determined from the unscaled posterior. The Gibbs sampler can be

implemented in the hierarchical structure in Figure 5.1, leading to the kernels equation (5.11), Bolstad (2010) :

$$q(\theta_j | \{\theta_i\}_{i \neq j}, \mathbf{Y}) \propto p(\theta_j | \text{parents}(\theta_j)) \prod_{\theta_k \in \text{children}(\theta_j)} p(\theta_k | \text{parents}(\theta_k)) \quad (5.11)$$

This last equation uses the following conventions. Each parameter of the hierarchical scheme is located at one node (circles in Figure 5.1). Arrows interconnect these nodes and depicts their relative dependency. Any node leading to another through an arrow is said to be parent of that node. Inversely, the latter is said to be a child of the first node. In the next section, equation (5.11) is adapted for each parameter, leading to simple kernels that are successively updated in an iterative algorithm.

## 5.4.2 Collapsed Gibbs Sampler

Figure 5.2 shows how the formula (5.11) is implemented on the hierarchical model. The mode shape case (Figure 5.2.b) has a different kernel structure. This surrogate Gibbs algorithm is called partially collapsed Gibbs sampler, and consists in marginalizing the parameter from a joint distribution. As explained latter in this section, this helps obtaining a more suitable kernel. In the sequel, the notation  $p(\theta | \text{rest})$  is the conditional probability of  $\theta$  given all the other model parameters.

### 5.4.2.1 Modal Coordinates Updating

According to Figure 5.2.a, each modal coordinate  $p_{ks}$  is drawn conditional on datum  $\mathbf{Y}_{ks}$ , ignoring the response at any other frequency and snapshot :

$$q(p_{ks} | \text{rest}, \mathbf{Y}_{ks}) \propto \mathcal{L}(p_{ks}, \boldsymbol{\varphi}, \sigma_{s0}, \{\delta_{sl}\}_l) p(p_{ks} | \alpha_s^2, \lambda) \quad (5.12)$$

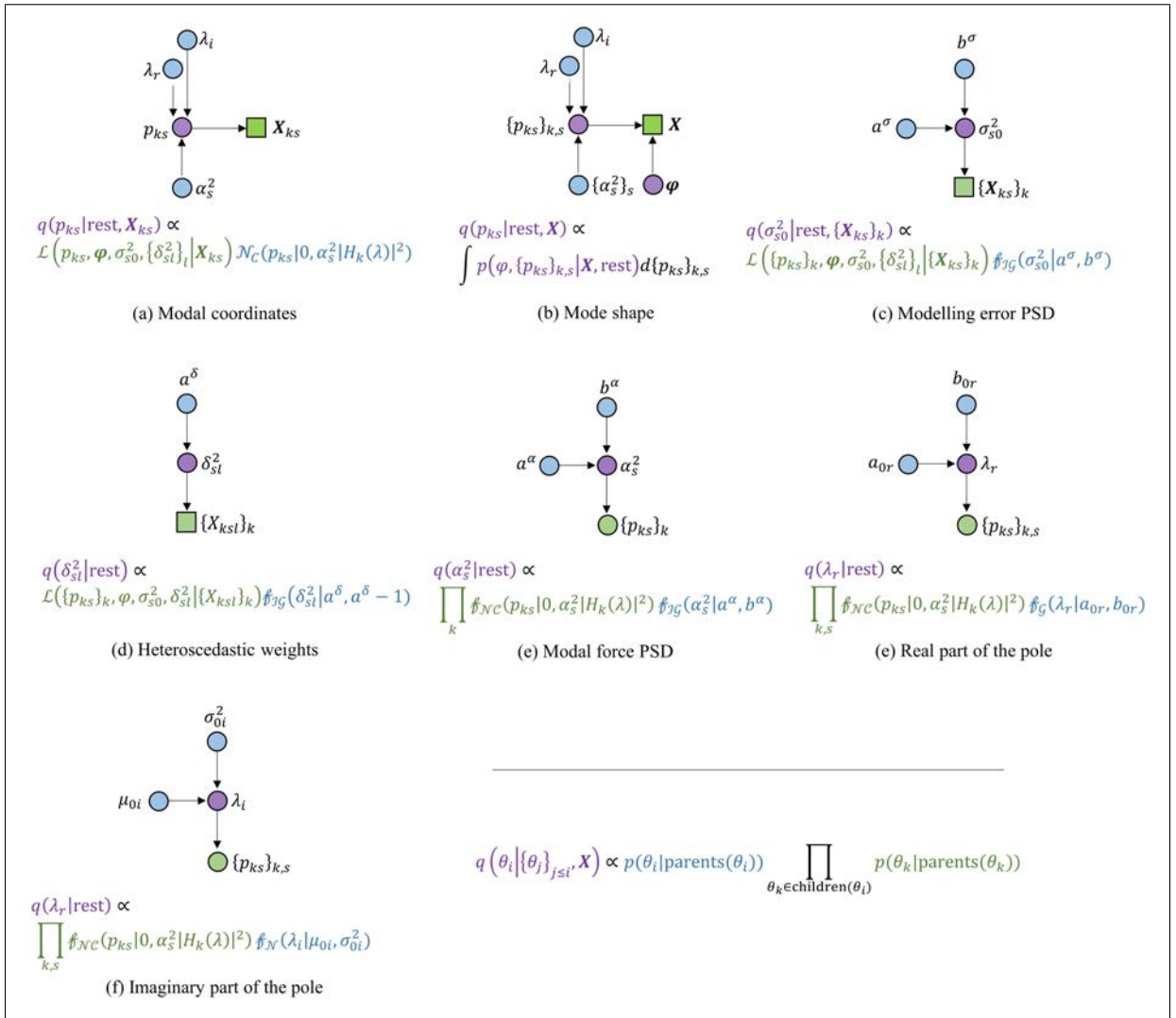


Figure 5.2 Implementation of the Gibbs sampler on the hierarchical structure

The likelihood and prior are proportional to :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_{ks}, \varphi, \sigma_{s0}, \{\delta_{sl}\}_l) &\propto e^{-\sigma_{s0}^{-2} (Y_{ks} - p_{ks} \varphi)^H \Delta_s^{-1} (Y_{ks} - p_{ks} \varphi)} \\ p(p_{ks} | \alpha_s^2, \lambda) &\propto e^{-\frac{|p_{ks}|^2}{\gamma_{ks}^2}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

From the posterior, a complex Gaussian distribution can be sorted out :

$$q(p_{ks}|\text{rest}, \mathbf{Y}_{ks}) \propto e^{-(p_{ks}-\mu_{ks})^* \eta_{ks}^{-2} (p_{ks}-\mu_{ks})} \quad (5.14)$$

Thanks to the condition (5.5), one obtains :

$$p_{ks} \sim \mathcal{N}_C(\mu_{ks}, \eta_{ks}^2), \quad \begin{cases} \mu_{ks} = G_{ks} \boldsymbol{\varphi}^T \Delta_s^{-1} \mathbf{Y}_{ks} \\ \eta_{ks}^2 = G_{ks} \sigma_{s0}^2 \end{cases} \quad (5.15)$$

The quantity  $G_{ks}$  acts as a bandpass filter around the resonance :

$$G_{ks} = \frac{1}{1 + \sigma_{s0}^2 \gamma_{ks}^{-2}} \quad (5.16)$$

#### 5.4.2.2 Mode Shape Updating

The Gibbs method for the mode shape updating would involve a Fisher-Bingham posterior distribution, which is analogous to a Gaussian distribution on the  $N_o$ -sphere. However sampling in such a distribution is challenging in high dimension, likely to be met in practice. To solve this computation issue, a surrogate Gibbs sampler is proposed : the so-called partially collapsed Gibbs algorithm, Park & Van Dyk (2009). In this sampler, the block-wise joint distribution of the mode shape and the modal coordinates is considered :  $p(\boldsymbol{\varphi}, \{p_{ks}\}_{k,s} | \mathbf{Y}, \text{rest}) = p(\{p_{ks}\}_{k,s} | \mathbf{Y}, \text{rest}, \boldsymbol{\varphi}) p(\boldsymbol{\varphi} | \mathbf{Y}, \text{rest})$ . The mode shape kernel is obtained by marginalizing this joint distribution :

$$q(\boldsymbol{\varphi} | \text{rest}, \mathbf{Y}) = \int p(\boldsymbol{\varphi}, \{p_{ks}\}_{k,s} | \mathbf{Y}, \text{rest}) d\{p_{ks}\}_{k,s} \quad (5.17)$$

Using a uniform prior on the  $N_o$ -sphere for the mode shape, one obtains :

$$q(\boldsymbol{\varphi}|\text{rest}, \mathbf{Y}) \propto \int \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}, \{p_{ks}\}_{k,s}, \{\sigma_{s0}\}_s, \{\delta_{sl}\}_{s,l}) \prod_{k,s} p(p_{ks}|\alpha_s^2, \lambda) d\{p_{ks}\}_{k,s} \quad (5.18)$$

or, equivalently,

$$q(\boldsymbol{\varphi}|\text{rest}, \mathbf{Y}) \propto \int \prod_{k,s} e^{-\frac{(\mathbf{Y}_{ks}-p_{ks}\boldsymbol{\varphi})^H \Delta_s^{-1} (\mathbf{Y}_{ks}-p_{ks}\boldsymbol{\varphi})}{\sigma_{s0}^2} - \frac{|p_{ks}|^2}{\gamma_{ks}^2}} d\{p_{ks}\}_{k,s} \quad (5.19)$$

The updated probability density (5.15) can be injected in (5.19). The law of total probability simplifies the problem :

$$q(\boldsymbol{\varphi}|\text{rest}, \mathbf{Y}) \propto e^{\sum_{k,s} \frac{|\mu_{ks}|^2}{\eta_{ks}^2}} \prod_{k,s} \eta_{ks}^2 \quad (5.20)$$

The mode-shape can be retrieved from equation (5.20). Because of the norm constraint (5.6), the following change of variable is necessary :  $\boldsymbol{\psi} = \Delta^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}$ . This leads to the following Bingham distribution :

$$q(\boldsymbol{\psi}|\text{rest}, \mathbf{Y}) \propto e^{-\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}} \quad (5.21)$$

Owing to the Hermitian structure of  $\mathbf{A}$ , the quadratic form satisfies  $\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}^T \mathcal{R}e(\mathbf{A}) \boldsymbol{\psi}$ , giving a real-valued concentration matrix. Finally,

$$\boldsymbol{\psi} \sim \mathcal{B}(\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} = -\Delta^{1/2} \sum_{k,s} \frac{G_{ks}}{\sigma_{s0}^2} \Delta_s^{-1} \mathcal{R}e(\mathbf{P}_{ks}) \Delta_s^{-1} \Delta^{1/2} \quad (5.22)$$

where  $\mathbf{P}_{ks} = \mathbf{Y}_{ks} \mathbf{Y}_{ks}^H$ . The simulation of Bingham distributions is discussed in Appendix 5.A. Notice that obtaining a Bingham distribution from (5.20) requires that  $\prod_{k,s} \eta_{ks}^2$  does not depend on the mode shape. This can only be fulfilled by providing the norm constraint (5.6). The use of



the collapsed scheme enables the sampling of the exact posterior through a well-known Bingham kernel. The simulation of Bingham distributions is discussed in Appendix 5.A.

### 5.4.2.3 Excitation PSD Updating

According to Figure 5.2.c, the posterior densities for the modal excitation PSD is :

$$q(\alpha_s^2 | \text{rest}) \propto \prod_k \mathcal{NC}(p_{ks} | 0, \alpha_s^2 | H_k(\lambda)|^2) p(\alpha_s^2 | a^\alpha, b^\alpha) \quad (5.23)$$

The posterior reads as an inverse gamma whose updated parameters :

$$\alpha_s^2 \sim \mathcal{IG}(a^{\alpha'}, b_s^{\alpha'}), \quad \begin{cases} a^{\alpha'} = a^\alpha + K \\ b_s^{\alpha'} = b^\alpha + \sum_k \frac{|p_{ks}|^2}{|H_k(\lambda)|^2} \end{cases} \quad (5.24)$$

### 5.4.2.4 Error PSD Updating

According to Figure 5.2.e, the error PSD  $\sigma_{s0}^2$  is inferred in a snapshot-specific way, and :

$$q(\sigma_{s0}^2 | \text{rest}, \{\mathbf{Y}_{ks}\}_k) \propto \mathcal{L}(\{p_{ks}\}_k, \boldsymbol{\varphi}, \sigma_{s0}, \{\delta_{sl}\}_l) p(\sigma_{s0}^2 | a^\sigma, b^\sigma) \quad (5.25)$$

The likelihood and prior are proportional to :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{p_{ks}\}_k, \boldsymbol{\varphi}, \sigma_{s0}, \{\delta_{sl}\}_l) &\propto \sigma_{s0}^{-2(LK)} e^{-\sum_k \sigma_{s0}^{-2} (\mathbf{Y}_{ks} - p_{ks} \boldsymbol{\varphi})^H \Delta_s^{-1} (\mathbf{Y}_{ks} - p_{ks} \boldsymbol{\varphi})} \\ p(\sigma_{s0}^2 | a^\sigma, b^\sigma) &\propto \sigma_{s0}^{-2(a^\sigma+1)} e^{-\frac{b^\sigma}{\sigma_{s0}^2}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Then, the posterior is an inverse gamma with updated scale and shape :

$$\sigma_{s0}^2 \sim \mathcal{IG}(a^{\sigma'}, b^{\sigma'}), \quad \begin{cases} a^{\sigma'} = a^\sigma + LK \\ b_s^{\sigma'} = b^\sigma + \sum_k (\mathbf{Y}_{ks} - p_{ks}\boldsymbol{\varphi})^H \Delta_s^{-1} (\mathbf{Y}_{ks} - p_{ks}\boldsymbol{\varphi}) \end{cases} \quad (5.27)$$

#### 5.4.2.5 Heteroscedastic Weights Updating

The heteroscedastic weights are inferred according to Figure 5.2.d. The posterior reads as equation (5.28), under the constraint (5.5).

$$q(\delta_{sl}^2 | \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k) \propto \delta_{sl}^{-2(a_l^\delta + 1 + K)} e^{-\left(\sum_k \frac{\|X_{ksl} - \varphi_l p_{ks}\|^2}{\sigma_{s0}^2 \delta_{sl}^2} + \frac{b_l^\delta}{\delta_{sl}^2}\right)} \mathbb{1} \left[ \prod_l \delta_{sl}^2 = 1 \right] \quad (5.28)$$

A constrained inverse gamma distribution is found :

$$\delta_{sl}^2 \sim \mathcal{IG}(a_l^{\delta'}, b_{sl}^{\delta'}), \quad \begin{cases} a_l^{\delta'} = a^\delta + K \\ b_{sl}^{\delta'} = a^\delta - 1 + \sum_k \frac{\|X_{ksl} - \varphi_l p_{ks}\|^2}{\sigma_{s0}^2} \end{cases}, \quad \prod_l \delta_{sl}^2 = 1 \quad (5.29)$$

It is noticeable that, for any random permutation  $\chi(1), \dots, \chi(N_o)$  of subscripts  $1, \dots, N_o$  :

$$q(\{\delta_{sl}^2\}_l | \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k) = \prod_{l=1}^L q(\delta_{s\chi(l)}^2 | \delta_{s\chi(1)}^2, \dots, \delta_{s\chi(l-1)}^2, \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k) \quad (5.30)$$

Under the partial independence of the heteroscedastic weights,  $q(\delta_{s\chi(l)}^2 | \delta_{s\chi(1)}^2, \dots, \delta_{s\chi(N_o-1)}^2, \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k) = q(\delta_{s\chi(l)}^2 | \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k)$ . Moreover, the constraint (5.5) imposes that  $q(\delta_{s\chi(N_o)}^2 | \text{rest}, \{X_{ksl}\}_k)$  is the Dirac distribution. The procedure to sample the coefficients is proposed in Algorithm 5.1.

Algorithme 5.1 Sample heteroscedastic weights under constraint  $\prod_l \delta_{sl}^2 = 1$

```

1 Draw a random permutation  $\chi(1), \dots, \chi(N_o)$  of subscripts  $1, \dots, N_o$ ;
2 for  $l \in \llbracket 1, N_o - 1 \rrbracket$  do
3   | Sample  $\delta_{s\chi(l)}^2$  in the inverse gamma  $\mathcal{IG}(a_{\chi(l)}^{\delta'}, b_{s\chi(l)}^{\delta'})$ 
4 end
5 Impose;
6
```

$$\delta_{s\chi(N_o)}^2 = \frac{1}{\sum_{l=1}^{l-1} \delta_{sl}^2}$$

### 5.4.3 Metropolis-Hasting Step

The posterior densities of the pole write as intractable forms, and do not benefit from any conjugation convenience. To solve the intractability, it is proposed to explore the posterior distributions through a Metropolis-Hasting (MH) algorithm embedded in the Gibbs scheme. Unlike the Gibbs method, the MH algorithm does not accept all draws from a kernel, but involves an acceptance/rejection step that filtrates unlikely candidate draws, Robert (2016). This iterative method consists in drawing a candidate sample  $\tilde{\lambda}^{(i)}$  from a candidate distribution  $f$ . This candidate is compared to the current state of the Markov chain  $\lambda^{(i)}$  to decide whether the candidate sample better fits the posterior than the current state. It is established that at step  $i + 1$ , the candidate  $\tilde{\lambda}^{(i)}$  is accepted if its likelihood is greater than the previous one, with a probability equal to the ratio  $q(\tilde{\lambda}^{(i)})f(\lambda^{(i)})/q(\lambda^{(i)})f(\tilde{\lambda}^{(i)})$ , where  $f$  is the candidate distribution and  $q$  the target density, Robert (2016). This probability is the acceptance criterion. In the MH acceptance-rejection step proposed in equation (5.31), the draw is accepted if  $\alpha^{(i)}$  is found greater than a random sample of a standard uniform distribution :

$$\alpha^{(i)} > u^{(i)}, \quad \alpha^{(i)} = \frac{q(\tilde{\lambda}^{(i)})f(\lambda^{(i)})}{q(\lambda^{(i)})f(\tilde{\lambda}^{(i)})} \wedge 1, u^{(i)} \sim \mathcal{U}(0, 1) \quad (5.31)$$

The MH part is expected to be the slowest segment of the algorithm, because of the rejection step. Then, the challenge is to determine a candidate distribution that is as close as possible to the true posterior, to maximise the acceptance ratio. According to the Gibbs sampler, the MH successively samples  $\lambda_i|\lambda_r$  and  $\lambda_r|\lambda_i$ . To obtain simple candidate distributions, the transfer function (5.3) is expanded into partial fractions, then approximated along the positive frequencies as :

$$H_k(\lambda) \approx -\frac{j}{2\lambda_i} \frac{G}{j\omega_k - \lambda} \quad (5.32)$$

For simplicity, the gain  $G$  is set to  $2j\lambda_i$ . Then, the variance  $\gamma_{ks}^2$  is approximately given by :

$$\gamma_{ks}^2 \approx \frac{\alpha_s^2}{\lambda_r^2 + (\omega_k - \lambda_i)^2} \quad (5.33)$$

It is noteworthy that the approximate transfer function is only used in the definition of the candidate distributions, while the target density remains exact.

#### 5.4.3.1 Case of the Imaginary Part $\lambda_i$

The posterior of the imaginary part can be deduced from Figure 5.2.g, and takes the intractable form (5.34).

$$q(\lambda_i|\text{rest}) = p(\lambda_i|\lambda_{0i}, \sigma_{0i}^2) \prod_{k,s} \mathcal{NC}(p_{ks}|0, \gamma_{ks}^2) \quad (5.34)$$

The prior is given by a truncated Gaussian :

$$p(\lambda_i|\lambda_{0i}, \sigma_{0i}^2) = \mathcal{N}(\lambda_i|\lambda_{0i}, \sigma_{0i}^2) \mathbb{1}[\lambda_i \in \Lambda_i] \quad (5.35)$$

Therefore, using the simplification (5.33), the following expression can be sorted out :

$$q(\lambda_i|\text{rest}) \propto \mathcal{N}(\lambda_i|\mu_i, \sigma_i^2)g(\lambda_i)\mathbb{1}[\lambda_i \in \Lambda_i] \quad (5.36)$$

where :

$$g(\lambda_i) = \prod_k g_k(\lambda_i), \quad g_k(\lambda_i) = \left[ \lambda_i^2 + (\omega_k - \lambda_i)^2 \right]^S \quad (5.37)$$

and :

$$\begin{cases} \mu_i = \lambda_{0i}G^{(1)}/G^{(0)} \\ \sigma_i^2 = \sigma_{0i}^2/G^{(0)} \end{cases}, \quad G^{(p)} = 1 + 2\sigma_{0i}^2 \sum_{k,s} \frac{|p_{ks}|^2}{\alpha_s^2} \left( \frac{\omega_k}{\lambda_{0i}} \right)^p \quad (5.38)$$

The formulation (5.38) exhibits the spectral centroid behavior of the updated expected value  $\mu_i$ . In (5.37), the polynomial components  $g_k(\lambda_i)$  are smooth and suggest a candidate distribution  $\mathcal{N}(\lambda_i, \sigma_i^2)$ . This lead to the independent candidate Metropolis-Hasting algorithm 5.2, where the candidate distribution remains unchanged over the iterations. The acceptance ratio at step 4 is simplified using (5.36).

#### Algorithme 5.2 Sampling of the imaginary part of the pole

<pre> 1 Sample <math>u^{(n)}</math> in <math>\mathcal{U}(0, 1)</math>; 2 Sample a candidate <math>\tilde{\lambda}_i^{(n)}</math> in <math>\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)\mathbb{1}[\lambda_i \in \Lambda_i]</math>; 3 Compute the ratio <math>\alpha^{(n)} = g(\tilde{\lambda}_i^{(n)})/g(\lambda_i^{(n)})</math> using equation (5.37); 4 <b>if</b> <math>\min(\alpha^{(n)}, 1) &gt; u^{(n)}</math> <b>then</b> 5     <math>\lambda_i^{(n+1)} \leftarrow \tilde{\lambda}_i^{(n)}</math> 6 <b>else</b> 7     <math>\lambda_i^{(n+1)} \leftarrow \lambda_i^{(n)}</math> 8 <b>end</b> </pre>
--

### 5.4.3.2 Case of the Real Part $\lambda_r$

The method applied to the imaginary part cannot be replicated for the case of the real part. Indeed, the polynomial components (5.37) provided enough smoothness in the  $\lambda_i$ -direction, but this is not the case in the  $\lambda_r$ -direction. This is especially true for the polynomials  $g_k$  at frequencies close to the resonance  $\omega_k \approx \lambda_i$ . Instead, it is proposed to seek for a gamma candidate distribution for the quadratic real part,  $\lambda_r^2 \sim \mathcal{G}(a_r, b_r)$ , whose mode and curvature match those of equation (5.39). The former is the posterior of  $\lambda_r$ , yet expressed with a  $\lambda_r^2$  dependency. The real part of the pole is easily retrieved from its quadratic counterpart :  $\lambda_r = -\sqrt{\lambda_r^2}$ .

$$\begin{aligned} Q(\lambda_r^2) &= q(\lambda_r | \text{rest}) \\ &= e^{-\left(b_{0r} + \sum_{k,s} \frac{|p_{ks}|^2}{\alpha_s^2}\right) \lambda_r^2} \lambda_r^{2(a_{0r}-1)} \prod_k \left[\lambda_r^2 + (\omega_k - \lambda_i)^2\right]^S \mathbb{1}[\lambda_r \in \Lambda_r] \end{aligned} \quad (5.39)$$

In Appendix 5.B, it is shown that parameters  $a_r, b_r$  satisfy :

$$\lambda_r^2 \sim \mathcal{G}(a_r, b_r), \quad \begin{cases} a_r = a_{0r} - 1 + S \sum_k \frac{x_0^2}{[x_0 + (\omega_k - \lambda_i)^2]^2} \\ b_r = (a_r - 1)/x_0 \end{cases} \quad (5.40)$$

where  $x_0$  is the mode of the posterior, solution of the implicit relation :

$$\frac{a_{0r} - 1}{x} + S \sum_k \frac{1}{x + (\omega_k - \lambda_i)^2} - b_{0r} - \sum_k \frac{|p_{ks}|^2}{\alpha_s^2} = 0 \quad (5.41)$$

The independent candidate Metropolis-Hasting Algorithm 5.3 achieves the real part of the pole updating, based on the candidate distribution (5.40).

### Algorithme 5.3 Sampling of the real part of the pole

```

1 Sample  $u^{(n)}$  in  $\mathcal{U}(0, 1)$ ;
2 Sample a candidate  $\tilde{\lambda}_r^{2(n)}$  in  $\mathcal{G}(a_r, b_r)\mathbb{1}[\lambda_r \in \Lambda_r]$ ;
3 Compute the ratio ;;
4
   
$$\alpha^{(n)} = \frac{Q(\tilde{\lambda}_r^{2(n)})\mathcal{G}(\lambda_r^{2(n)}|a_r, b_r)}{Q(\lambda_r^{2(n)})\mathcal{G}(\tilde{\lambda}_r^{2(n)}|a_r, b_r)}$$

5 if  $\min(\alpha^{(n)}, 1) > u^{(n)}$  then
   |  $\lambda_r^{(n+1)} \leftarrow -\sqrt{\tilde{\lambda}_r^{2(n)}}$ 
6 else
   |  $\lambda_r^{(n+1)} \leftarrow \lambda_r^{(n)}$ 
7 end
8 end

```

## 5.5 Computation

### 5.5.1 Computational Strategy

The computation guidelines for achieving the identification are presented in Algorithm 5.4. The choice of prior parameters has low influence on the posterior when large data are available, however, it has considerable influence on the updated uncertainties in small data scenarios. As a rule of thumb, the use of narrow and too optimistic priors should be avoided whenever possible, and large prior variance should be preferred, see, e.g. Sheng (2010). Although beyond the scope of the present study, it is noteworthy that the sampler Algorithm 5.4 for SDoF systems can be trivially generalized into a MDoF system sampler by adding a loop on the modes. Indeed, the SDoF problem is isolated by the bandpass filter (??), giving promising perspectives about the convergence of a generalized problem.

### 5.5.2 Choice of Pole Prior

From a practical point of view, it might be difficult to define some priors on the complex pole, because of its lack of physical meaning. It is easier to define a range where both the frequency

Algorithme 5.4 Collapsed Metropolis-Hasting-within-Gibbs sampler

```

1 Select priors for the inference;
2 Initialize  $\theta^{(0)}$  as the mode of the prior;
3 while  $i < N_{run}$  do
4   for  $s \in \mathcal{S}$  do
5     Sample  $\alpha_s^{2(i)}$  using equation (5.24);
6     Sample  $\sigma_{s0}^{2(i)}$  using equation (5.27);
7     Sample  $\delta_{sl}^{2(i)}$ ,  $1 \leq l \leq L$  using Algorithm 5.1;
8     for  $k \in \mathcal{K}$  do
9       Sample  $p_{ks}^{(i)}$  using equation (5.15);
10    end
11  end
12 end
13 Sample  $\varphi^{(i)}$  using equation (5.22) and Algorithm -1;
14 Sample  $\lambda^{(i)}$  using Algorithm 5.2;
15 Sample  $\lambda^{(r)}$  using Algorithm 5.3;
16  $i \leftarrow i + 1$ 

```

and damping are believed to lie. Indeed, while a good estimate of the natural frequency can be picked from the frequency spectra or their Singular Value Decomposition (SVD), the damping can be taken in a range 0 – 10% in most of the structural dynamic analyses. Providing frequency priors with mean and variance  $\mu_\omega, \sigma_\omega^2$  and damping priors with mean and variance  $\mu_\xi, \sigma_\xi^2$ , the Gaussian prior of  $\lambda_i$  and the gamma prior of  $\lambda_i^2$  can be approximated as (see Appendix 5.C) :

$$\lambda_i \sim \mathcal{N}(\lambda_{0i}, \sigma_{0i}^2), \begin{cases} \lambda_{0i} = \mu_\omega \left(1 - \frac{\sigma_\xi^2}{2}\right) \\ \sigma_{0i}^2 = \frac{1}{4} \sigma_\xi^4 (\sigma_\omega^2 + \mu_\omega^2) + \sigma_\omega^2 \left(1 - \frac{\sigma_\xi^2}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (5.42)$$

And,



$$\lambda_r^2 \sim \mathcal{G}(a_{0r}, b_{0r}^2), \begin{cases} a_{0r} = \frac{\mathbb{E}\{\lambda_r^2\}^2}{\text{Var}\{\lambda_r^2\}} \\ b_{0r} = \frac{\mathbb{E}\{\lambda_r^2\}}{\text{Var}\{\lambda_r^2\}} \end{cases} \quad (5.43)$$

where  $\mathbb{E}\{\lambda_r^2\}$  and  $\text{Var}\{\lambda_r^2\}$  are defined in Appendix 5.C.

### 5.5.3 Chain Convergence

In this section, a numerical example is illustrated to demonstrate the convergence of the chains. The synthetic data comprises 5 snapshots of 20 measured degrees of freedom. The signal-to-noise ratio is set to 6 dB. The studied dynamical mode has a natural frequency  $f_0 = 0.75$  Hz and a damping ratio  $\xi = 2\%$ . A bandwidth sensitivity analysis shows that the identification converges for a frequency band  $[0.6, 0.9]$  Hz. The initialisation is deliberately poorly set to analyse the convergence speed of the chains. The singular value spectrum for the data is depicted in Figure 5.3.

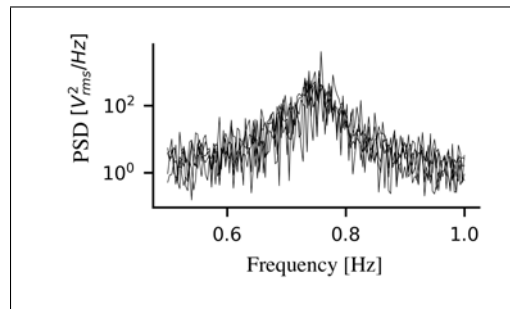


Figure 5.3 PSD of the simulated data used for the convergence test. The data come from 5 synthetic snapshots

Figure 5.4 shows the traceplot for the first 75 draws from the pole chain as well as the deduced natural frequency and damping. The Metropolis-Hasting step is the weakest part of the algorithm, however, the sampled chains have a very fast burn-in : the real and imaginary parts of the pole reach their stationary distribution within 10 iterations. After the posterior is reached, the chain

remains very close to the expected values. Figure 5.5 (left) shows the posterior distributions against the prior distribution. The histograms are obtained after 500 iterations with a 10-iteration burn-in period. Thanks to the choice of the candidate distribution, the choice of prior has few impacts on the posterior uncertainties. The identification is very precise : the averaged values for the frequency and damping are 0.75Hz and 1.92%, respectively, which represent a perfect estimate and a relative error of 4%, respectively. The identification uncertainties are also very small, and the credibility bounds are [0.747 – 0.753]Hz and [1.57, 2.27]%. Figure 5.5 (right) shows the posterior distribution for the modal excitation PSD. Although this has no impact on the inference of the rest of the problem, the excitation posterior tends to underestimate the true modal PSD, the higher the PSD the higher the bias.

Figure 5.6 shows the first 25 draws from the mode shape and modal coordinates chains. The modal coordinates of snapshot 1 for the 20 closest frequencies to the resonance are illustrated. Once again, the convergence toward the target distribution is very fast, and does not take more than 10 iterations. The excellent convergence properties of the sampler are due to the great conditioning of the sampler in terms of chain mixing : both the accurate independent candidate distributions for the Metropolis-Hasting and the collapsed version of the Gibbs sampler drastically increase the convergence.

#### 5.5.4 Sampling from Small Data

In order to evaluate the performances of the method with limited data, two simulations are used to compare the BFFTA to the Gibbs sampler. A mode with frequency 0.75 Hz and damping 1.5 % is excited by a white noise in two distinct datasets. The signal-to-noise ratio is about 3 dB in all the simulations. In the first simulation, 15 frequency samples are included in the bandwidth analysis, while in the second simulation, 100 samples are considered. In Figure 5.7, the sampled posteriors are plotted. When abundant data is available, the two methods return similar uncertainties. Even if the BFFTA has smaller uncertainties, the MCMC gives more probability toward the true damping. This is due to the optimistic variance computed using the Laplace approximation, even in presence of large samples. However, the BFFTA fails both in

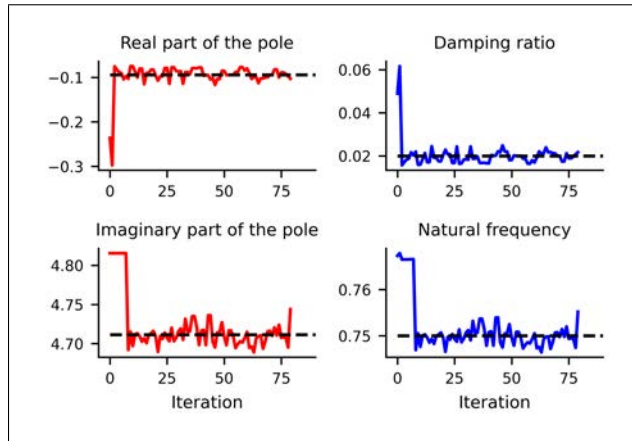


Figure 5.4 Convergence of the pole chains (real and imaginary parts, and natural frequency and damping ratios). The burn-in period is remarkably short

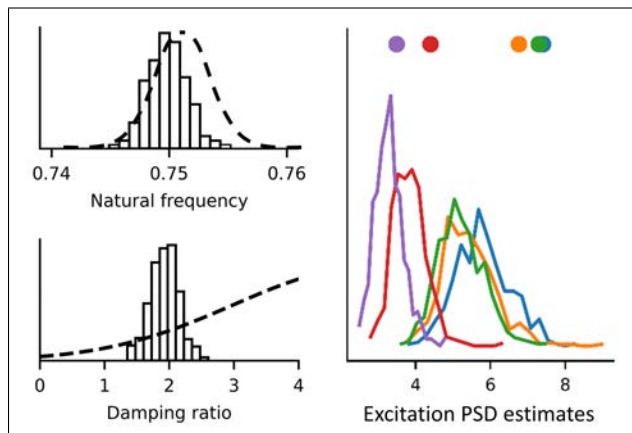


Figure 5.5 Posterior density distributions for the damping  $\xi$ , frequency  $f_0$  and modal excitation  $\alpha_{1..5}^2$ . Left : the histograms represent the sampled posterior while the dashed line represent the priors. The densities are normalized such that they can be presented jointly. Left and right : the bullets symbolize the theoretical values

terms of MPV and variance when dealing with very small samples. The MCMC return wider uncertainties with true modal parameters values in the high probability regions of the posterior.

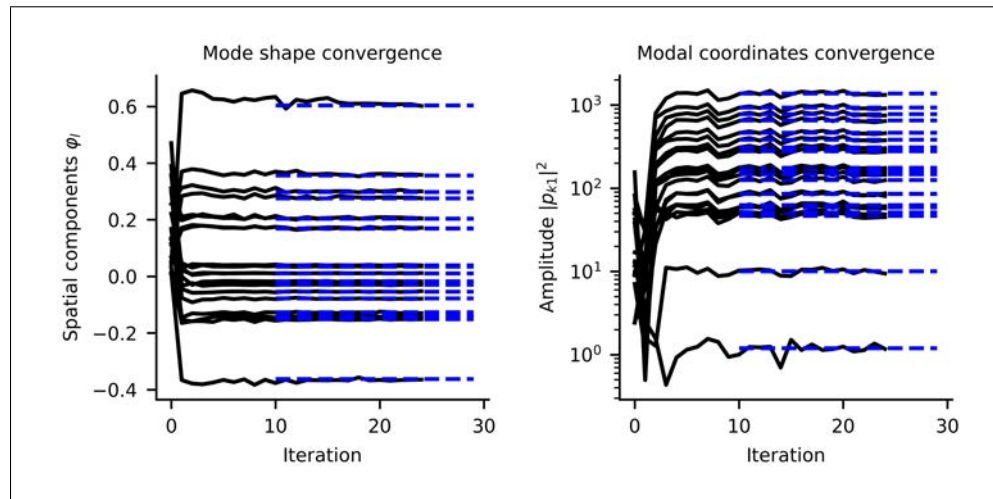


Figure 5.6 Convergence of the forward model parameters. The excellent convergences properties are enabled by the Bingham kernel sampling density for the mode shape

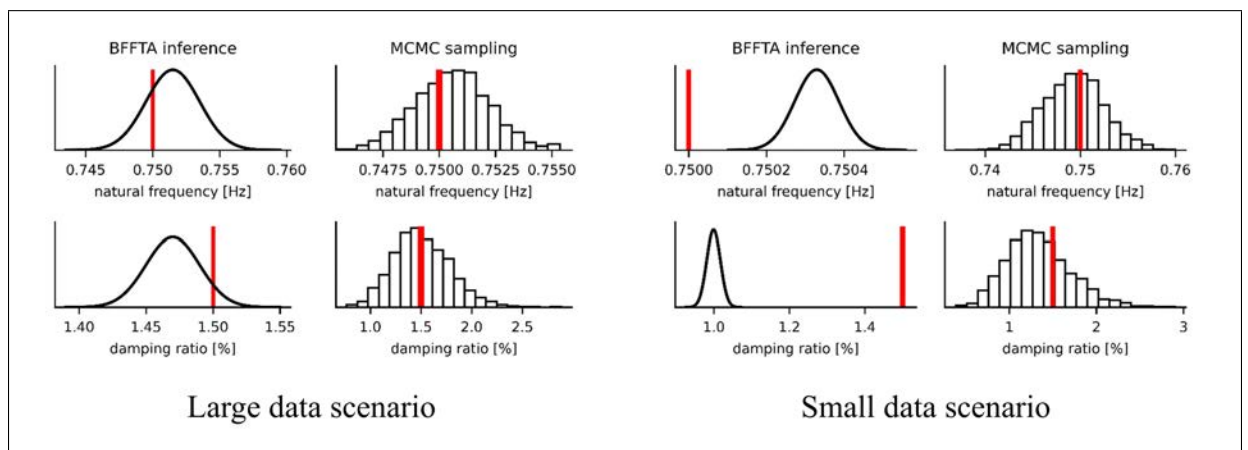


Figure 5.7 Influence of the data size on the BFFTA and MCMC inference. The Laplace approximation becomes inconsistent when data are very limited

## 5.6 Experimental Study Case

In this section, the sampler is implemented on actual operational scenarios. The case study is based on hydroelectric Francis runner blades that were instrumented to record local strains during operational transient regimes.

### 5.6.1 Experimental Setup

Data was collected by Hydro-Québec (QC, Canada) on a Francis turbine prototype. The measurement campaign included strain field measurements in operational conditions, thus encapsulating the signature of the actual mechanical behavior of the runner. The turbine is a medium-head run-of-the-river device with a specific speed of 57, providing an optimal power of 134 MW. Two blades were instrumented with strain gauges. Strain gauge rosettes were used at the pressure side (intrados), and uniaxial gauges at the suction side (extrados). The setup is illustrated in Figure 5.8. A total of 22 channels were available for the analysis. The sensor positions were selected according to a finite element analysis, to choose degrees of freedom with significant modal participation.

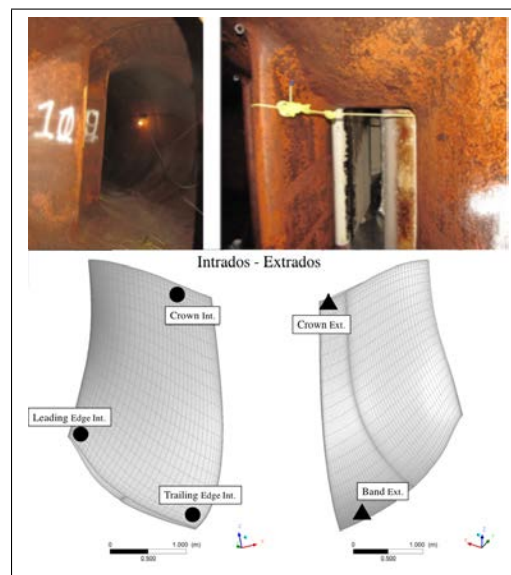


Figure 5.8 Experimental setup.

From top to bottom : turbine guide vanes and casing and sensor location on the blade. Circles represent rosette gauges, triangles, uniaxial gauges

The experiments consisted in two similar complete start-stop cycles, providing two snapshots for the analysis. The startup-to-over-speed sequence of both experiments is characterized by a low

and linear guide-vane opening, which results in a slow startup scheme. Similarly, the shutdowns have a slow coast-down scheme. This type of slow transient experiment allows some resonances to be temporarily excited by harmonics of the rotating speed.

### 5.6.2 Data Pre-Conditioning

From the measured time series, a short-time Fourier distribution is obtained, and several non-overlapping resonances were detected, excited by monochromatic harmonic excitations. A total of six modes were detected. During the coast-down, four synchronous resonances were found (referred to as modes 1, 2, 3 and 4), while during the startup, two synchronous resonances were detected (referred to as modes 5 and 6). The frequency responses are extracted using Order Tracking (OT) algorithms. Amplitude spectrograms of strain measurements are available in Figure 5.9. Without going into further details, the study of synchronous resonances ensures a single-mode domination over the bandwidth, and OT allows for an efficient extraction of the harmonic content using angular re-sampling or selective Fourier transforms, see Di Lorenzo *et al.* (2015, 2016c). These extracted resonances can then be identified using standard OMA tools, as shown in Janssens *et al.* (2006b). A sensitivity analysis was conducted to choose the optimal frequency band for the identification. The determined bandwidths are presented in table 5.2.

Tableau 5.2 Selected bandwidths for the identification

	Lower bnd. [Hz]	Upper bnd. [Hz]		Lower bnd. [Hz]	Upper bnd. [Hz]
mode 1	16.7	18.5	mode 4	47.5	52
mode 2	25.5	31	mode 5	15	23
mode 3	54	63.5	mode 6	40	48

### 5.6.3 Results

Once the frequency bands are selected, the Bayesian model can be performed to estimate the posterior distributions. From these posteriors, both the modal parameters estimates and the related uncertainties can be characterized. To avoid any sampling bias and ensure duly completed

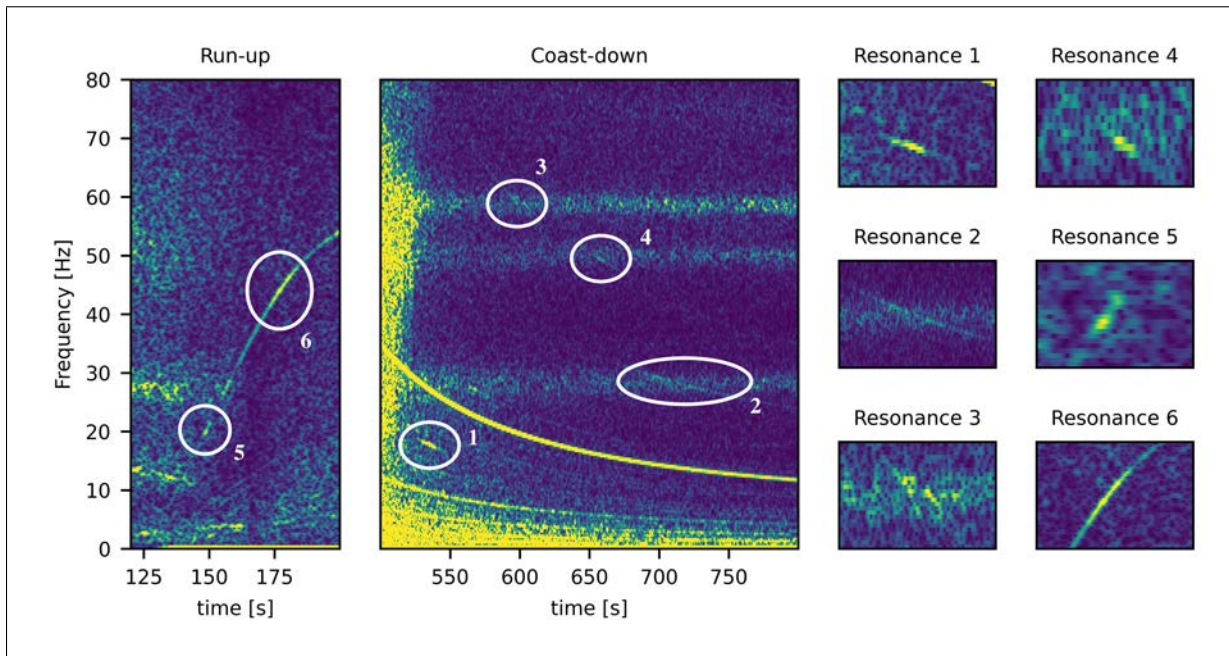


Figure 5.9 Amplitude spectrogram for the strain measurements

exploration of posteriors, a number of 2000 iterations is simulated, although posterior statistics stabilize around 100 iterations after the burn-in period. The performances of the algorithm are presented in Table 5.3. The high acceptance ratios for the real part (around 65%) and the imaginary part (from 40 to 90%) allow an efficient sampling and a fast convergence. The computing time is based on a Intel(R) Core(TM) i7-10850H CPU with parallel computations.

The pole priors are defined according to section 5.5.2. The natural frequencies are estimated using SVD, giving 17.5, 28.5, 59.0, 49.5, 19 and 44 Hz for the Gaussian mean of each mode. The standard deviation is set to 0.22Hz, giving a 95% confidence interval of 1.32 Hz around the SVD estimate. The damping priors are set with a mean of 3% with standard deviation of 2%, and truncated such that negatives values have zero probability. From the sampled pole posterior, the marginalized modal frequencies and damping ratios posterior densities are computed. They are presented in the histograms of Figure 5.10. While the frequency posteriors give more probability to their left tail, damping posteriors have the opposite behavior. As expected, modes 5 and 6 that were recorded during the startup are much more damped than the ones recorded during

the coast-down sequence. This is because the guide vanes are opened, which adds a significant hydrodynamic damping due to the massive inflow. From the posteriors, the modal estimates and uncertainties are presented in Table 5.4. The estimates are the mean of the posterior, while the uncertainties represent the 95% credibility bound of the densities. The Relative Credibility Interval (RPI) is the credibility interval normalized by the mean of the posterior. It gives a measure of the statistical dispersion of the uncertainty around the estimate. The frequency estimates are accurately determined, with a RPI in the order of 1%. However, the scatter of the damping is considerable with a RPI around 50% for all the modes. Although the uncertainties are high, they are more representative of the parameter plausibility, according to the provided likelihood and the Bayesian theory.

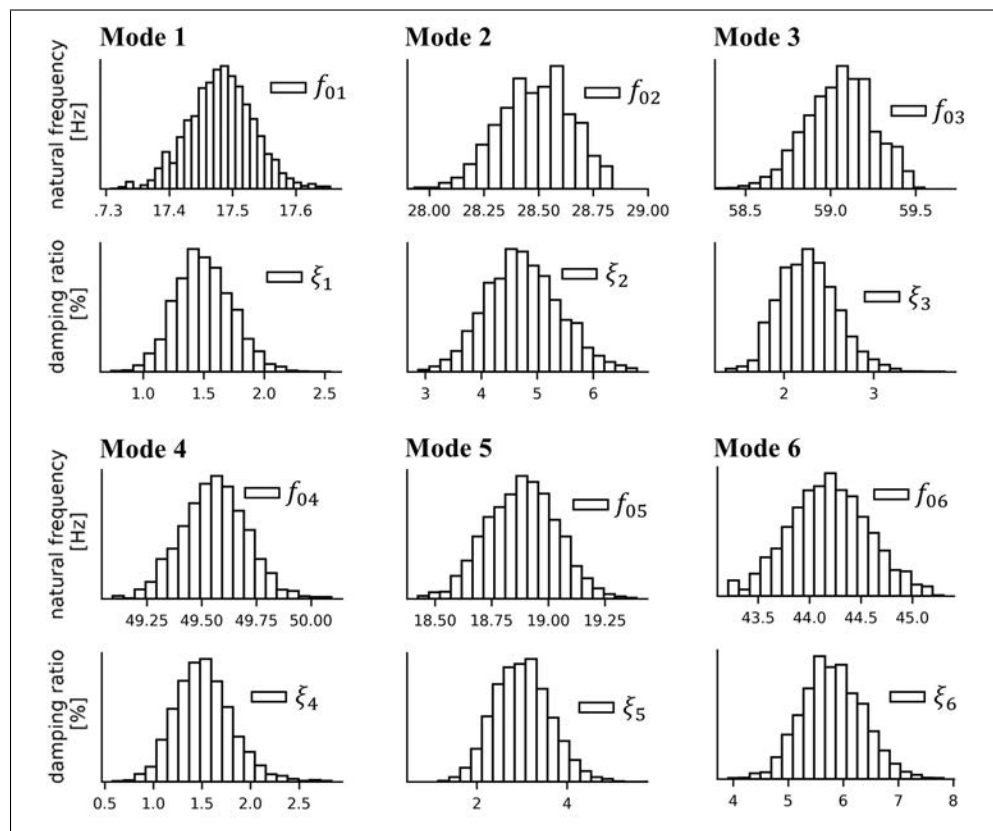


Figure 5.10 Natural frequency and damping ratio posteriors, obtained after canonical re-parametrization  $(\lambda_r, \lambda_i) \mapsto (f_0, \xi)$  and marginalization



Tableau 5.3 Performances of the sampler. The acceptance ratios are very high and allow an efficient exploration of the pole space in reasonable time

	Acceptance ratio [%]		time [s]		Acceptance ratio [%]		time [s]
	$\lambda_r$	$\lambda_i$			$\lambda_r$	$\lambda_i$	
mode 1	66.3	86.6	1.19	mode 4	69.0	88.4	1.00
mode 2	66.5	35.5	1.75	mode 5	60.7	67.4	0.95
mode 3	65.9	57.0	1.20	mode 6	73.8	47.3	1.09

Tableau 5.4 Identification Results

Mode	Natural frequency			Damping ratio		
	estimate [Hz]	uncertainty [Hz]	RPI	estimate [%]	uncertainty [%]	RPI
1	17.48	17.41 - 17.57	1%	1.57	1.21 - 1.95	47%
2	28.54	28.24 - 28.81	2%	4.78	3.82 - 5.81	42%
3	59.04	58.71 - 59.43	1%	2.34	1.83 - 2.89	45%
4	49.57	49.28 - 49.85	1%	1.69	1.22 - 2.22	60%
5	18.90	18.65 - 19.14	3%	3.13	2.20 - 4.20	64%
6	44.15	43.32 - 44.82	4%	5.72	4.89 - 6.59	30%

The posterior excitation PSD are presented in Figure 5.11. Except for mode 2, it seems that the experimental conditions are very close, and the posterior coincide between snapshots. A strong variability of the modal excitation is observed, and the uncertainty seems to increase with the magnitude of the PSD. To assess the ability of the model to represent the uncertain response in terms of amplitude spectra, Figure 5.12 presents the sampled modal coordinates against the singular values. The additive error influence is omitted, such that the red line represents the error-free signal. The coloured area represents the 95% credibility intervals. Despite the high uncertainty levels on the modal parameters, it is found that the uncertain spectrograms are generally accurate, especially around the maximum amplitude pics. Mode 1 and 6 accurately fit to the dominant singular values from the SVD, and the variance on the estimates is minor. Modes 5 has significant error, and the true modal coordinates are out of the uncertain bound, except at the resonance frequency. This is likely due to a strong model inaccuracy, which can be explained by the transient nature of the excitation. This is due to the turbine inflow variation during the resonance, which generates a non-stationary excitation. Conversely, resonances 1 to 4 occur during the coast-down where the vanes are closed, and the signals comply more with the

quasi-stationary hypothesis. It is remarkable that the large uncertainty on the modal excitation PSD has no influence on the modal coordinate estimates. Deeper investigations show that this is because the PSD variability is compensated by the damping ratio. Indeed, these two variables are interdependent, and high excitation magnitudes result in high damping ratios. This leads to a strong positive linear correlation between the two estimates. An example of such a correlation is presented in Figure 5.13, where the damping of mode 4 is plotted against the modal excitation of snapshot 1. The two variables exhibit a Pearson correlation of 0.4.

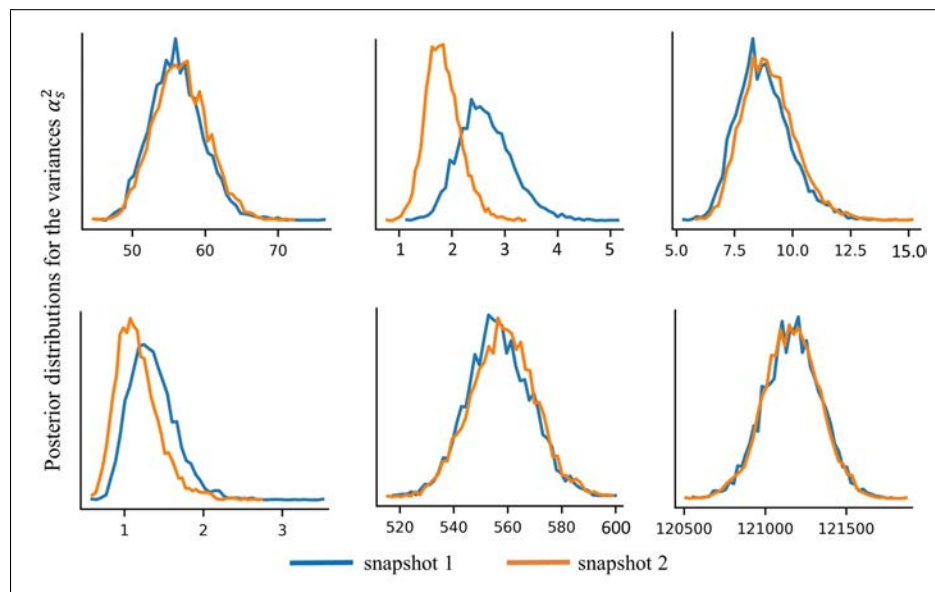


Figure 5.11 Modal excitation PSD posterior densities

## 5.7 Conclusion

With the exponential increase of the computing power, the use of computational Bayesian statistics to achieve system identification tends to become a sustainable method for engineering purposes. In this paper, this fact has been harnessed for operational modal analysis and a fully-Bayesian inference scheme was proposed to identify modal parameters. The resonance model was implemented in a hierarchical model, then sampled using Markov chain Monte-Carlo algorithms. In comparison with the existing methods, the numerical sampler is more direct and

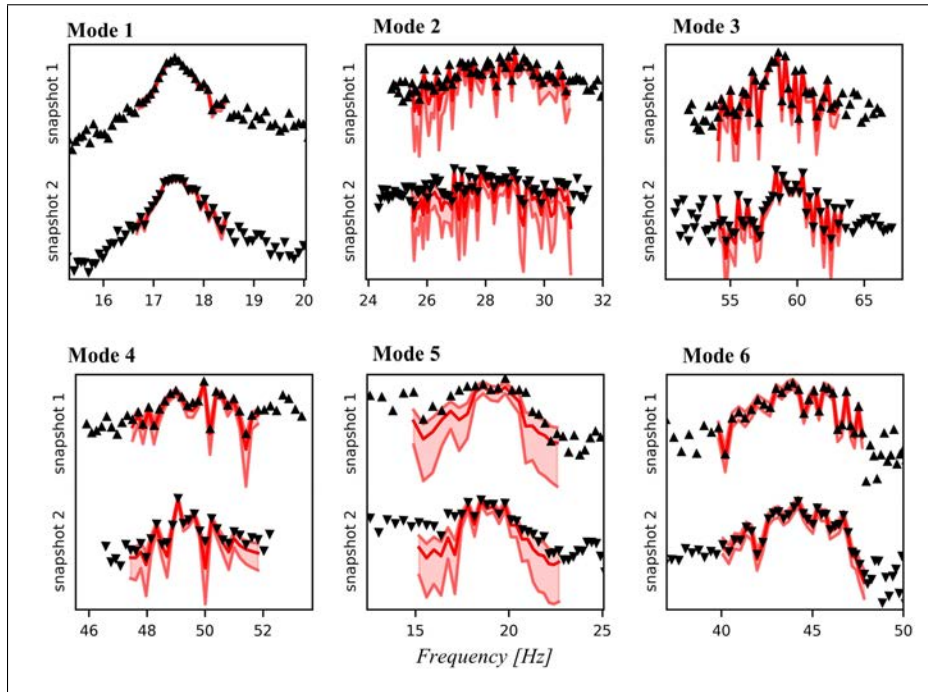


Figure 5.12 Uncertain strain amplitude

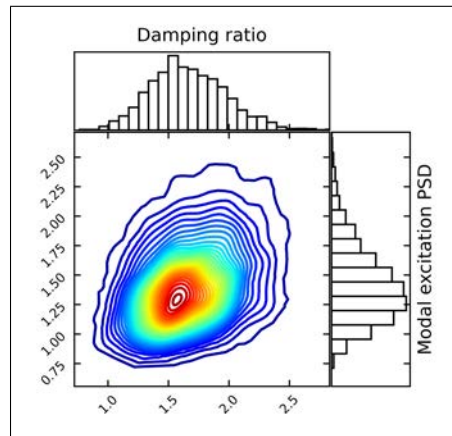


Figure 5.13 Correlation between damping and PSD

slightly longer. However, it avoids the use of many approximations and allows the incorporation of prior information in the analysis. This framework is beneficial when limited data is available.

While this paper dealt with the purpose of single modes. However, the sampler can straightforwardly be implemented for multiple modes, leading to a blind separation of the modal contributions. This will be further investigated in future works. Future improvements should address the problem of correlation between damping and modal excitation PSD. Indeed, the joint sampling of these two variables could lead to a more accurate estimation of the modal parameters.



## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

### 6.1 Discussion

L'objectif de départ de cette thèse était de contribuer à l'amélioration de la compréhension du comportement dynamique des roues de turbines hydroélectriques lors des régimes transitoires. À terme, le but est d'améliorer la qualité des prédictions numériques pour mieux prédire l'état de fatigue des structures, et par conséquent, d'optimiser leur dimensionnement et leur exploitation. L'appréhension du comportement des structures en régime transitoire a gagné en importance ces dernières années, promue par l'accroissement des cycles de démarrage-arrêt des machines pour pallier l'instabilité du réseau électrique. L'étude de ces régimes a montré qu'une partie non négligeable de l'énergie contenue dans les signaux mesurés provient de résonances avec les modes propres de la structure. Comme les méthodes d'éléments finis sont limitées dans leur capacité à simuler des conditions résonantes, l'apport de données expérimentales a été jugé nécessaire pour la caractérisation modale des roues de turbine. Afin d'être le plus représentatif des conditions *in-situ* et de l'environnement opérationnel de la machine, les mesures proviennent de prototypes sur site, et des méthodes d'analyse modale opérationnelles sont alors nécessaires pour procéder à l'identification. Parmi les nombreux outils d'OMA, l'approche la plus prometteuse pour le traitement des résonances en transitoire est l'approche bayésienne. En effet, celle-ci permet d'établir les paramètres modaux à partir de peu de données, et d'estimer des marges d'incertitudes fiables, sans approximation asymptotique. En ce sens, cette thèse a proposé plusieurs algorithmes et méthodes pour réaliser l'inférence bayésienne des paramètres modaux ; ces méthodes ont couvert le traitement des résonances harmoniques et des résonances stochastiques.

Le Chapitre 3 est une étape préliminaire au développement du Chapitre 4. Sans aborder directement la question de l'analyse modale, il pose les bases du sujet en traitant l'origine des champs d'excitation harmoniques des turbines. Usuellement, il est considéré que les seuls

mécanismes synchrones susceptibles d'engendrer des champs harmoniques sont les RSI. Dans ce chapitre, il est démontré qu'il peut exister un vaste champ d'excitations harmoniques lorsque la turbine est perturbée par une force de déséquilibre. En se basant sur les travaux de Wildheim, il est démontré que les champs d'excitation harmonique s'établissent sur des diamètres nodaux bien précis, déterminés uniquement par le nombre d'aubes sur la roue. La théorie est validée expérimentalement avec une analyse de différence de phase en régime permanent, et l'existence de résonances synchrones avec les excitations harmoniques prédites est démontrée dans le cas de régimes transitoires.

Partant de l'existence de résonances synchrones en régime transitoire, le Chapitre 4 propose une combinaison de méthodes pour caractériser lesdites résonances. Le protocole suit une formulation de type OBMA qui permet d'extraire et d'identifier les résonances harmoniques en combinant une technique de suivi d'ordre synchrone et d'analyse modale. Si l'étape de suivi d'ordre synchrone a été extensivement étudiée en abordant diverses techniques d'extraction de résonances, l'étape d'identification repose systématiquement sur l'algorithme PolyMax. Cet algorithme procure des résultats satisfaisants lorsque les données sont riches, mais ses performances se dégradent drastiquement dans le cas de données limitées et bruitées telles que rencontrées lors de l'analyse des turbines. Au lieu d'utiliser l'approche PolyMax, un algorithme d'identification bayésienne, le Fast-Bayesian FFT, est adapté et est mis en œuvre pour identifier les incertitudes de l'identification. Ce changement de solveur permet d'obtenir une identification plus fiable lorsque les résonances sont bien excitées (c.-à-d. les harmoniques d'excitation ne sont pas modulées trop rapidement en fréquence, et le ratio harmonique/bruit supérieur à 0.1 dB). En revanche, le Fast-Bayesian fait intervenir une approximation de Laplace pour déterminer les incertitudes. Cette approximation n'est valable que dans le cadre d'une vraisemblance proche d'un modèle gaussien et dont l'essentiel de la probabilité est concentré autour des MPV (la vraisemblance doit être « pointue »). Ceci n'est ni possible ni satisfaisant dans ce projet, car le

peu de données génère une vraisemblance qui dévie très probablement du modèle gaussien et qui, en plus, est relativement dispersée autour des MPV.

Pour corriger ce problème, le Chapitre 5 propose un nouveau modèle bayésien qui s'affranchit de l'hypothèse de Laplace. Pour cela, un modèle stochastique est construit, puis hiérarchisé pour simplifier les relations mathématiques impliquées dans l'inférence. La hiérarchie est organisée en trois niveaux pour capturer un maximum de variabilité lors de l'identification. En définissant des à priori appropriés, l'identification tire profit des propriétés de conjugaison des distributions et repose sur un échantillonneur de Gibbs. L'étape d'échantillonnage des pôles complexes est achevée par une étape imbriquée de Metropolis-Hasting. L'utilisation d'une version effondrée de l'échantillonneur de Gibbs permet d'accroître ses propriétés de convergence, et le régime transitoire des chaînes de Markov reste marginal (la convergence est effective en une dizaine d'itérations). Les résultats montrent que l'inférence bayésienne numérique retourne des incertitudes beaucoup moins optimistes que les approches existantes pour l'estimation des paramètres modaux. En revanche, un phénomène de compensation entre l'amortissement et l'excitation modale provoque une précision accrue dans l'estimation incertaine des niveaux d'amplitude à la résonance. Les excellentes propriétés de convergence de l'échantillonneur rendent l'algorithme compétitif face aux techniques existantes.

## **6.2 Recommandations**

### **6.2.1 Organisation des campagnes de mesures**

Au terme de ce projet de recherche, plusieurs recommandations peuvent être faites au regard des résultats obtenus et des algorithmes développés. L'échantillonneur de Gibbs introduit dans le Chapitre 5 a été testé sur différents jeux de données dans le but d'analyser sa sensibilité aux différents paramètres d'entrée. Les jeux de données sont principalement conditionnés par le nombre d'expérimentations indépendantes (*Snapshot*), le nombre de capteurs utilisés pour



l'instrumentation et le nombre d'échantillons fréquentiels disponibles. Les analyses révèlent que le nombre de capteurs est corrélativement peu important du moment que l'ensemble des signaux récoltés contiennent effectivement une trace modale. Si certains canaux ne contiennent pas d'information, des problèmes de conditionnement peuvent se poser et rendre plus délicate la stabilité numérique de l'algorithme. Ceci rend nécessaire une analyse visuelle des canaux pour isoler les signatures des résonances d'intérêt. L'analyse du nombre d'expérimentations nécessaires pour obtenir des résultats fiables montre qu'un minimum de deux snapshots est recommandé. Au delà, les gains en précision restent faibles et déséquilibrés par rapport au coût d'une nouvelle session de mesures. Comme montré en Figure 6.1, l'impact du nombre d'échantillons fréquentiels disponibles dépend trivialement du nombre d'essais redondants disponibles. En général, deux essais permettent d'obtenir des résultats cohérents avec 50 échantillons fréquentiels. Lorsque les résonances sont générées par des harmoniques très raides, il peut y être nécessaire de considérer davantage d'essais pour obtenir une représentation plus fiable des incertitudes.

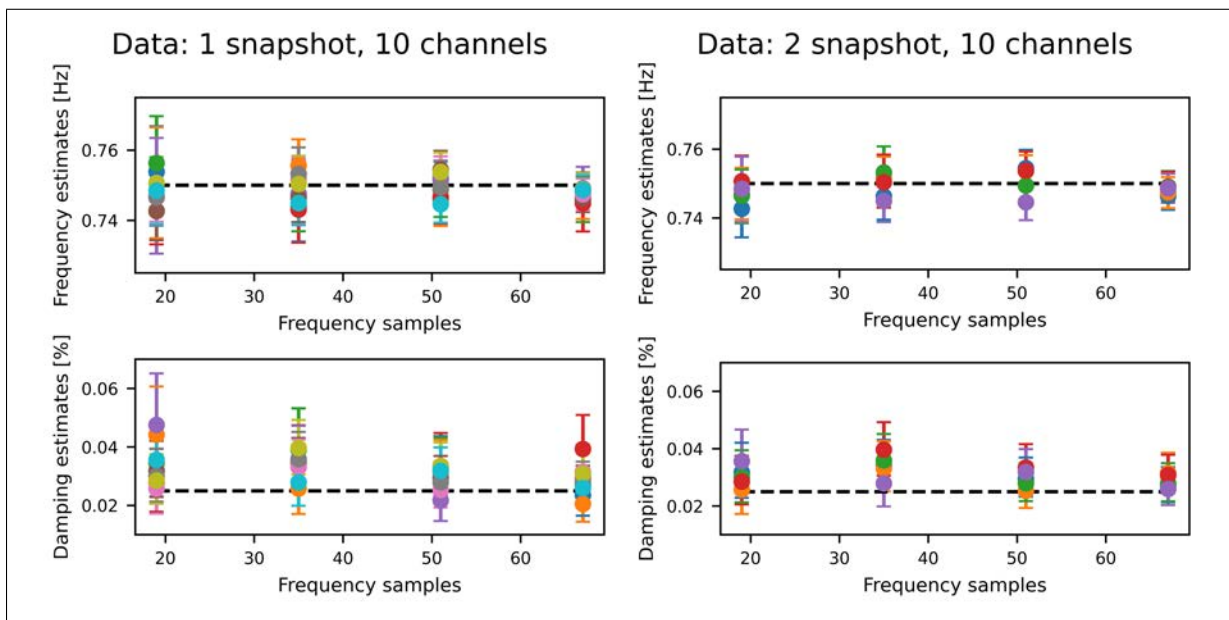


Figure 6.1 Sensibilité de l'analyse modale par l'échantillonneur

### Recommandations :

- **Les essais de rampe de survitesse sont très utiles** et contiennent une riche signature modale. Leur réalisation doit être encouragée lors des campagnes de mise en service.
- Lors de l'arrêt des groupes pendant ces phases d'essais, l'idéal est de **laisser le rotor s'arrêter librement**. En effet, l'utilisation des freins en fin de course peut potentiellement couper la possibilité de repérer des résonances basse fréquence, en particulier les modes de l'arbre de turbine.
- Les essais de survitesse doivent idéalement être **réalisés par paires**, afin d'obtenir un jeu de signaux redondants utiles pour l'amélioration des performances du post-traitement.
- Les diamètres nodaux excités par les harmoniques sont parfaitement connus à l'issue du Chapitre 3, et **l'instrumentation de plusieurs roues n'est pas nécessaire** du point de vue de l'analyse modale.

### 6.2.2 Exploitation des turbines

L'exploitation des turbines s'appuie sur une opération stable, sécuritaire et fiable des installations. La stabilité de la production est garantie par un transfert d'énergie constant de la turbine vers l'alternateur. Lorsqu'un mode de ND0 est excité, des oscillations de torsion sont induites, générant des fluctuations de couple. Ceci produit des oscillations de production et une instabilité opérationnelle. Au regard des apports du Chapitre 4, il convient d'être certain que les harmoniques multiples du nombre d'aube sont effectivement éloignées des modes ND0 à la vitesse synchrone.

La fiabilité des installations hydroélectriques dépend de nombreux facteurs, et entre autres, de la mitigation des sollicitations radiales susceptibles d'endommager les structures. En particulier, il est absolument fondamental d'éviter toute forme de résonance avec les modes de flexion de l'arbre. Cet aspect est usuellement traité en calculant la vitesse critique, basée sur la vitesse de rotation à laquelle le premier mode de flexion de l'arbre (ND1 sur la roue) est excité par la

fondamentale. Si la fondamentale de la vitesse de rotation correspond effectivement à un ND1 (ou très proche), le Chapitre 4 indique qu'il en va de même pour toutes les harmoniques autour des multiples du nombre d'aubes. Similairement avec l'observation réalisée pour le ND0, il convient d'être certain que ces harmoniques sont effectivement éloignées des modes ND1 à la vitesse synchrone.

### **Recommandations :**

- Il est recommandé de s'assurer dès la phase de conception que les  $N$ -harmoniques de la vitesse de rotation ( $N$  étant le nombre d'aubes de la turbine) vibrent à des fréquences **éloignées des diamètres nodaux 0** du groupe.
- Il est recommandé de s'assurer dès la phase de conception que les  $(N \pm 1)$ -harmoniques de la vitesse de rotation vibrent à des fréquences **éloignées des diamètres nodaux 1** du groupe.

## **6.3 Livrables**

### **6.3.1 Algorithmes**

À l'issue de ce projet de recherche, trois algorithmes ont vu le jour. Un premier algorithme réalise le suivi d'ordres synchrones. Il permet d'extraire un certain nombre d'ordres dans des tranches de temps données, et permet à l'utilisateur de trier les résultats pour garantir que l'ensemble des signaux récoltés contiennent une trace modale. Un deuxième algorithme réalise la caractérisation modale via l'échantillonnage des chaînes de Markov associées au problème. Un troisième algorithme permet la caractérisation modale via le Fast-BFFTA. Les codes ont été réalisés sous python dans une formulation orientée objet, ce qui facilite la modification, l'enrichissement ou l'imbrication des programmes.

### 6.3.2 Utilisation des résultats d'identification

De nombreuses perspectives s'ouvrent quant à l'exploitation des résultats d'identification modale. En premier lieu, les résultats peuvent servir à la validation des modèles numériques. L'identification modale opérationnelle d'une turbine Francis a par exemple permis de mettre en évidence l'importance d'inclure l'arbre de turbine pour correctement estimer la fréquence des ND1 (Gagnon, Dollon, Nicolle & Morissette (2021)). La comparaison des fréquences naturelles identifiées peut servir à quantifier la qualité de prédiction des simulations, et la justesse des hypothèses employées. Ces comparaisons peuvent servir de base pour déterminer un compromis entre la durée des simulations versus la qualité des estimations. Par exemple, la précision de la simulation des FSI est suspectée de jouer un rôle important dans la prédiction des modes naturels. Ces simulations étant très chronophages, la mise à disposition de valeurs cibles peut permettre de trouver un équilibre industriellement viable entre la puissance de calcul nécessaire et le gain de précision.

Grâce à une identification précise avec des incertitudes résiduelles faibles, il est possible d'évaluer l'impact de procédures expérimentales sur l'atténuation des amplifications de résonance. Par exemple, il est possible de comparer l'évolution de l'amortissement des modes de la turbine avec ou sans injection d'air. Il est également possible de quantifier l'évolution des paramètres modaux dans différents régimes d'opération. Les données expérimentales peuvent être traitées comme des données de calibration, et implémentées dans des routines d'assimilation de données pour améliorer la qualité des prédictions numériques, si ces dernières sont insuffisantes. L'identification des modes ND1 et de flexion de l'arbre a servi avec succès à la calibration des prédictions de vitesse critique (Dollon *et al.* (2021a)). L'approche conservative usuelle a été modifiée pour assimiler les observations, réduisant de ce fait le niveau de conservativité de l'approche, et permettant ainsi l'établissement d'une vitesse critique moins sous-estimée. Ceci permet à terme d'éviter des scénarios inutilement alarmants pour les exploitants, et d'améliorer la qualité des

spécifications pour les manufacturiers. Ce type d'approche ouvre la porte à la possibilité de développement de modèles hybrides, capable d'exploiter l'information issue des données de surveillance des groupes afin de l'intégrer dans des algorithmes de jumeaux numériques.

#### **Recommandations :**

- L'analyse modale des groupes par l'étude des rampes de survitesse devrait être une **procédure standard lors de la mise en service des groupes**. Les données récoltées peuvent alors servir d'étalons.
- Lors de la surveillance opérationnelle des groupes, **certains arrêts devraient faire l'objet d'analyses poussées** sur des laps de temps réguliers, afin de mesurer le comportement modal de la machine et le comparer aux valeurs établies à des fins de diagnostic.
- Le développement d'outils hybrides ouvre de nombreux champs d'application, en particulier pour **le développement de jumeaux numériques**.

#### **6.4 Perspectives futures**

Les travaux exposés dans cette thèse ont plusieurs voies d'amélioration possibles. Les ouvertures pistes se concentrent sur trois axes : le développement d'un outil d'analyse modale harmonique à l'aide du modèle présenté dans le Chapitre 3, l'amélioration du traitement des résonances extraites par suivi d'ordre synchrone dans le chapitre Chapitre 4, et la généralisation de l'approche numérique pour l'identification modale bayésienne du Chapitre 5.

À l'heure actuelle, de nombreux efforts se penchent sur le développement de jumeaux numériques pour les groupes de turbine-alternateur. Ces jumeaux numériques sont alimentés en temps réel par des outils de surveillance opérationnelle pour effectuer le diagnostic et le pronostic des groupes. Dans ce contexte, il serait très utile de pouvoir caractériser le comportement modal des turbines dans leurs régimes de production opérationnel. Malheureusement, les techniques

d'analyse modale opérationnelle traditionnelles ne sont pas adaptées à de tels régimes. En effet, en régime de production, les foyers d'excitation stochastiques sont marginaux et la structure n'endure quasiment pas de bruit blanc. Par conséquent, les traces de réponse naturelle ne peuvent pas être mises en évidence par la manifestation de résonances stochastiques. Au contraire, les principales sources d'excitation lors de régimes de forte charge sont issues des harmoniques de la vitesse de rotation. Dans le chapitre Chapitre 3, un modèle de réponse harmonique pour les turbines a été formulé. Ce modèle permet d'établir la réponse forcée de la machine soumise à un débalancement. À terme, ce modèle pourrait être implémenté dans un outil d'identification pour permettre la caractérisation modale opérationnelle des turbines en régime permanent.

Dans le chapitre Chapitre 4, les outils de suivi d'ordre synchrones ont été mis en œuvre pour extraire les résonances générées par les harmoniques de la vitesse de rotation. Pour identifier ces résonances avec les outils d'analyse modale opérationnelle, l'hypothèse implicite de quasi-stationnarité de l'excitation a été posée. Dans la pratique, cette hypothèse est fragile. En effet, l'intensité des harmoniques est généralement proportionnelle au carré de la vitesse de rotation, et l'excitation des résonances extraites est alors colorée. De futurs travaux pourraient se pencher sur l'analyse modale opérationnelle sous excitation quadratiquement modulée en amplitude. Alors, la PSD  $\alpha^2$  des forces ne serait plus constante mais dépendante de la fréquence,  $\alpha_k^2 = \alpha_0^2 + \tau\omega_k^4$ . Une autre possibilité serait de normaliser les ordres synchrones pour aplatir la modulation. Les récents travaux de Sternharza, Kalganovaa, Maresb & Meyeringhc (2022) pourraient être une base de réflexion.

Une autre problématique liée à l'étude des ordres synchrones est la distorsion des résonances due à la modulation en fréquence de l'excitation. La distorsion est d'autant plus intense que la modulation est forte. Un modèle de réponse incluant ces effets dynamiques a été proposé par Markert & Seidler (2001), sous hypothèse de modulation linéaire. Finalement, ce modèle pourrait être implémenté pour permettre d'identifier les paramètres modaux lors de résonances

non-stationnaires. Une rapide implémentation du modèle de résonance non-stationnaire dans l'algorithme BBFTA permet de montrer les gains potentiels. La Figure 6.2 présente l'exemple d'une résonance synchrone soumise à différents taux de modulation d'amplitude. La barre rouge en pointillés représente la limite de modulation préconisée par la norme ISO-7626 (2015) pour éviter de trop déformer la réponse structurale. L'algorithme BBFTA classique (ronds) échoue rapidement à réaliser une identification correcte. En revanche, la version modifiée incluant les effets de la modulation (carrés) résulte en des estimations beaucoup plus précises. Les difficultés associées à l'identification des résonances non-stationnaire est la nature localement identifiable de la modulation en fréquence de l'excitation.

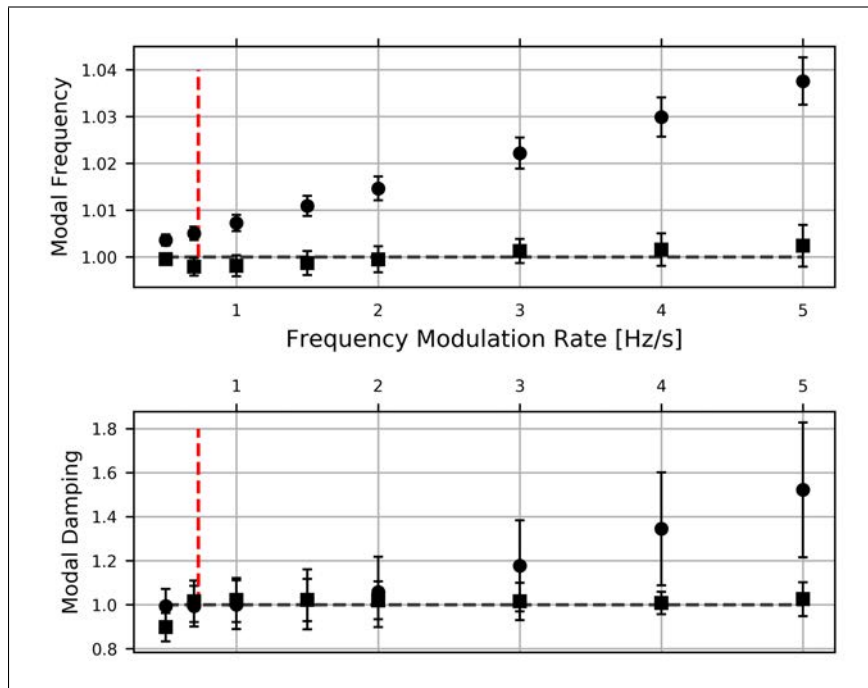


Figure 6.2 Comparaison d'un modèle de résonance stationnaire (ronds) et instationnaire (carrés) pour modéliser une résonance synchrone

## ANNEXE 3.A

### GENERALIZED FORCE FORMULATION

The generalized force is given by :

$$\boldsymbol{\varphi}_v(t) = \boldsymbol{\Psi}_v^H \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}_v^H = \left( \boldsymbol{\Gamma}_v * \boldsymbol{\Psi}_v^1 \right)^H = \boldsymbol{\Gamma}_v^H \circ \boldsymbol{\Psi}_v^{1H}$$

where  $\circ$  is the row-wise Khatri-Rao product. As proven in equation (3.14), the force  $\boldsymbol{f}(t)$  excites only one blade at a time. Developing the Khatri-Rao product leads to :

$$\boldsymbol{\varphi}_v(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{v1} \\ \varphi_{v2} \\ \varphi_{v3} \\ \varphi_{v4} \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_v^{+T} \otimes \boldsymbol{\Psi}_v^{1fH} \\ \boldsymbol{\gamma}_v^{+T} \otimes \boldsymbol{\Psi}_v^{1bH} \\ \boldsymbol{\gamma}_v^{-T} \otimes \boldsymbol{\Psi}_v^{1fT} \\ \boldsymbol{\gamma}_v^{-T} \otimes \boldsymbol{\Psi}_v^{1bT} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}^k(t) \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Using equation (3.14) leads to :

$$\begin{aligned} \varphi_{v1}(t) &= \boldsymbol{\Psi}_v^{1fH} e^{i\kappa(\Omega t)\psi_v} \boldsymbol{F}(-\Omega t), & \varphi_{v2}(t) &= \boldsymbol{\Psi}_v^{1bH} e^{i\kappa(\Omega t)\psi_v} \boldsymbol{F}(-\Omega t) \\ \varphi_{v3}(t) &= \boldsymbol{\Psi}_v^{1fT} e^{-i\kappa(\Omega t)\psi_v} \boldsymbol{F}(-\Omega t), & \varphi_{v4}(t) &= \boldsymbol{\Psi}_v^{1bT} e^{-i\kappa(\Omega t)\psi_v} \boldsymbol{F}(-\Omega t) \end{aligned}$$

Using the definition  $\boldsymbol{\Upsilon}(\Omega t) = \boldsymbol{F}(-\Omega t) e^{i\kappa(\Omega t)\psi_v}$  leads to equation (3.15). It can be noted that

$$\varphi_{v1}(t) = \varphi_{v3}^*(t) \text{ and } \varphi_{v2}(t) = \varphi_{v4}^*(t)$$





## ANNEXE 3.B

### ANALYSIS OF COEFFICIENTS $C_{Q\nu}$

Since  $\Upsilon_\nu(\theta)$  is a product of at least  $2\pi$ -periodic functions, it is also a  $2\pi$ -periodic function. This ensures the existence of a Fourier expansion :

$$\Upsilon_\nu(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_m(\nu) e^{im\theta}$$

In the original works of Wildheim, the Fourier series of  $F$  and  $e^{i\kappa(\theta)\psi_\nu}$  were calculated independently, and then gathered in a third step. Here, the coefficients  $\mathbf{c}_m(\nu)$  are directly calculated, for clarity and simplicity. The Fourier coefficients  $\mathbf{c}_m(\nu)$  are expressed as :

$$\mathbf{c}_m(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha/2}^{2\pi+\alpha/2} \mathbf{F}(-\theta) e^{i\kappa(\theta)\psi_\nu} e^{-im\theta} d\theta$$

It is easily found that the mode shape  $F(\theta)$  is  $2\pi/Z_R$ -periodic. Then, there is a Fourier expansion :

$$F(\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_p e^{ipZ_R\theta}$$

The spatial pattern is real-valued and  $F_{-p} = F_p^*$ . Then,  $F(-\theta)$  writes as :

$$F(-\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_p^* e^{ipZ_R\theta}$$

#### 1. Case $\nu = 0$

If the nodal diameter is null, the coefficient  $\mathbf{c}_m(0)$  can be simplified :

$$\mathbf{c}_m(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{2\pi + \frac{\alpha}{2}} \mathbf{F}(-\theta) e^{-im\theta} d\theta$$

In the latter, the definition of the Fourier coefficients of  $\mathbf{F}(-\theta)$  is recognized. Hence, the former equals  $\mathbf{F}_p^*$  if and only if  $m$  is a multiple of  $Z_R$  :

$$\mathbf{c}_{pZ_R}(0) = \mathbf{F}_p^*, \quad p \in \mathbb{Z}$$

## 2. General case $\nu \neq 0$

In the general case, the integral can be partitioned into sub-integrals in which the value of  $\kappa(\theta)$  remains constant (see Figure 3.5) :

$$\mathbf{c}_m(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{ik\nu\alpha} \int_{\alpha(k-1/2)}^{\alpha(k+1/2)} \mathbf{F}(-\theta) e^{im\theta} d\theta$$

Introducing the Fourier series of  $\mathbf{F}$ , and making use of the Fubini's theorem lead to :

$$\mathbf{c}_m(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_p^* \sum_{k=1}^N e^{ik\nu\alpha} \int_{\alpha(k-1/2)}^{\alpha(k+1/2)} e^{i(pZ_R - m)\theta} d\theta$$

It can be assessed that in the particular case of  $pZ_R = m$ , the term is null, as the integral equals  $\alpha$  and the sum over  $k$  is null. In the other cases, the integral is easily calculated, and :

$$\mathbf{c}_m(\nu) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z} \\ pZ_R \neq m}} \mathbf{F}_p^* \frac{\sin((pZ_R - m)\alpha/2)}{\pi(pZ_R - m)} S_{m-\nu}$$

where

$$S_{m-\nu} = \sum_{k=1}^N e^{i(pZ_R-(m-\nu))\alpha k}$$

The sum  $S_{m-\nu}$  can take two different values. If  $m - \nu$  is a multiple of  $Z_R$ , then the sum equals  $Z_R$ . Otherwise, it is null. Hence  $S_{m-\nu} = Z_R \delta_{m-\nu, qZ_R}$ , where  $q$  is an integer.  $c_m(\nu)$  is non-zero if and only if there is an integer  $q$  satisfying  $m = qZ_R + \nu$ . Using the notation  $\mathbf{c}_{q\nu} = \mathbf{c}_{qZ_R+\nu}(\nu)$ ,

$$\mathbf{c}_{q\nu} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_p^* \operatorname{sinc} \left[ (q-p)\pi + \frac{\pi\nu}{Z_R} \right]$$

Although the condition  $n = 0$  was treated separately, it can be noted that the general form includes this case. Indeed,

$$\mathbf{c}_{q0} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathbf{F}_p^* \operatorname{sinc} [(q-p)\pi]$$

It is well known that the sinc function at multiple of  $\pi$  is always 0, except when  $p - q = 0$ , i.e.,

$$\mathbf{c}_{q0} = \mathbf{F}_q^*.$$



## ANNEXE 4.A

### THEORETICAL SDOF PSD FORMULATION

As a reminder, the general PSD formulation is given by equation (4.1) :

$$\mathbf{S}_{yy k} = \mathbf{H}_k \mathbf{S}_{ww k} \mathbf{H}_k^H + bm S_{\epsilon\epsilon}, \quad k \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

The signal PSD  $\mathbf{S}_{yy k}$  coincides with the definition of the signal covariance. Hence,  $\mathbf{C}_k = \mathbf{S}_{yy k}$ . If the excitation is a white noise with equal channel intensities, then the input PSD reduces to a constant matrix  $\mathbf{S}_{ww}$ , independent of the frequency. Moreover, the frequency response function matrix for an SDoF merely reads as :

$$\mathbf{H}_k = D_k^{1/2} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{l}^T$$

where  $\boldsymbol{\varphi}$  is the mode shape and  $\mathbf{l}$  is the modal participation factor. Then, equation (4.1) can be written as :

$$\mathbf{C}_k = D_k \boldsymbol{\varphi} \mathbf{l}^H \mathbf{S}_{ww} \mathbf{l} \boldsymbol{\varphi}^T$$

Without further development, it appears that  $\mathbf{l}^H \mathbf{S}_{ww} \mathbf{l}$  is a scalar independent of the frequency. Defining the scaled modal force as  $\alpha^2 = \mathbf{l}^H \mathbf{S}_{ww} \mathbf{l}$ , and assuming  $\mathbf{S}_{\epsilon\epsilon}$  to be constant diagonal (i.i.d white channel noise under homoscedastic assumption), then :

$$\mathbf{C}_k[\boldsymbol{\theta}] = \alpha^2 D_k[\boldsymbol{\theta}] \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T + \sigma^2 \mathbf{I}$$

which is equation (4.3).



## ANNEXE 5.A

### SIMULATION OF THE BINGHAM DISTRIBUTION

The probability density function of the real valued Bingham distribution  $\mathcal{B}(\mathbf{A})$  with symmetric concentration matrix  $\mathbf{A}$  is defined as :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}|\mathbf{A}) = c(\mathbf{A})e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}$$

The normalizing constant  $c(\mathbf{A})$  does not need to be known.  $\mathbf{x}$  is an  $n$ -dimensional vector lying on the  $n$ -sphere. The direct simulation of a Bingham distribution may be a difficult task. However, noticing that the angular central Gaussian distribution envelops the Bingham distributions is of great help, Kent, Ganeiber & Mardia (2013). Indeed, for any  $(y, b, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ , the following relation is satisfied :

$$e^{-y} \leq c'(b, p) \left(1 + 2\frac{y}{b}\right)^{-p}, \quad c'(b, p) = \left(\frac{2p}{b}\right)^p e^{-p + \frac{b}{2}}$$

Setting  $y = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  and  $p = n$ , one gets :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}|\mathbf{A}) \leq c'(b, n) \underbrace{\left(\mathbf{x}^T (\mathbf{I} + 2\mathbf{A}/b)\mathbf{x}\right)^{-n}}_{\text{angular central Gaussian argument}}$$

The simulation can be done effectively through the acceptance-rejection Algorithm -1, Kent *et al.* (2013). The parameter  $b$  can be chosen so that it optimizes the acceptance rate. The optimum  $b_{\text{opt}}$  satisfies :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{b_{\text{opt}} + 2\lambda_k} = 1$$



where  $\lambda_1 = 0 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$  is the shifted spectrum of  $A$ , where the lowest eigenvalue is set to zero.

Algorithme-A -1 Bingham simulation.

```

1 Sample a candidate  $\mathbf{x}$  in  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, (\mathbf{I} + 2A/b)^{-1})$ ;
2 Normalize  $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ ;
3 Sample  $u$  in  $\mathcal{U}(0, 1)$ ;
4 if  $u \leq \mathcal{B}(\mathbf{x}|A) \left( \mathbf{x}^T (\mathbf{I} + 2A/b) \mathbf{x} \right)^n / c'(b, n)$  then
5 |   Accept candidate  $\mathbf{x}$ 
6 else
7 |   Go to step 1
8 end

```

## ANNEXE 5.B

### CANDIDATE DISTRIBUTION FOR THE REAL PART OF THE POLE

The candidate distribution has the form of a gamma function for  $\lambda_r^2$  with parameters  $a_r, b_r$ . The probability density function writes as :

$$p(x|a_r, b_r) \propto x^{a_r-1} e^{-b_r x}$$

The negative log-density writes :

$$-\log p(x|a_r, b_r) = b_r x - (a_r - 1) \log(x) + K$$

where  $K$  is a constant. The objective is to calibrate  $a_r, b_r$  so that the mode and curvature of the density matches those of the posterior (5.39). Since the log function is monotonic, the study of the maxima of  $p$  reduces to the study of the minima of  $-\log p$ . The mode  $x_0$  of the target density is the root of the Jacobian of the negative log-density, while its curvature  $\kappa_0$  is given by the Hessian of the negative log-density, evaluated at the mode :

$$\begin{cases} x_0 = (a_r - 1)/b_r \\ \kappa_0 = (a_r - 1)/x_0^2 \end{cases}$$

On the other hand, the mode and curvature of (5.39) are obtained from the negative log-posterior  $-\log Q(x)$ . The mode satisfies :

$$\frac{a_{0r} - 1}{x_0} + S \sum_k \frac{1}{x_0 + (\omega_k - \lambda_i)^2} = b_{0r} + \sum_k \frac{|p_{ks}|^2}{\alpha_s^2}$$

and the curvature is given by :

$$\kappa_0 = \frac{a_{0r} - 1}{x_0^2} + S \sum_k \frac{1}{[x_0 + (\omega_k - \lambda_i)^2]^2}$$

Finally,  $a_r = \kappa_0 x_0^2 + 1$  and  $b_r = \kappa_0 x_0$ .

## ANNEXE 5.C

### PRIOR DISTRIBUTION FOR THE POLE

Here, a method to set the complex pole priors is proposed. The pole is a function of the natural frequency and damping ratio,  $\lambda = -\omega_0\xi + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ . Suppose that the natural frequency and the damping ratio are defined as independent distributions with mean  $\mu_\omega, \mu_\xi$  and variance  $v_\omega, v_\xi$ . If the damping is small enough, the imaginary part can be approximated by a first-order expansion :  $\lambda_i = \omega_0(1 - \xi^2/2)$ . If the damping distribution is Gaussian, one gets :

$$\mathbb{E}\{\xi^2\} = v_\xi, \quad \text{Var}\{\xi^2\} = v_\xi^2$$

Therefore, the mean and variance for  $\lambda_i$  are given by :

$$\mathbb{E}\{\lambda_i\} = \mathbb{E}\{\omega_0\} \left(1 - \frac{\mathbb{E}\{\xi^2\}}{2}\right) = \mu_\omega \left(1 - \frac{v_\xi}{2}\right)$$

and :

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\lambda_i\} &= \text{Var}\{\omega_0\} \text{Var}\left\{1 - \frac{\xi^2}{2}\right\} + \text{Var}\{\omega_0\} \left(1 - \frac{\mathbb{E}\{\xi^2\}}{2}\right)^2 + \mathbb{E}\{\omega_0\}^2 \text{Var}\left\{1 - \frac{\xi^2}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{4} \text{Var}\{\omega_0\} \text{Var}\{\xi^2\} + \text{Var}\{\omega_0\} \left(1 - \frac{\mathbb{E}\{\xi^2\}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \mathbb{E}\{\omega_0\}^2 \text{Var}\{\xi^2\} \\ &= \frac{1}{4} v_\xi^2 (v_\omega + \mu_\omega^2) + v_\omega \left(1 - \frac{v_\xi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

The mean and variance for  $\lambda_r$  are given by :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{\lambda_r\} &= -\mu_\omega \mu_\xi \\
\text{Var}\{\lambda_r\} &= \text{Var}\{\omega_0\}\text{Var}\{\xi\} + \text{Var}\{\omega_0\}\mathbb{E}\{\xi\}^2 + \mathbb{E}\{\omega_0\}^2\text{Var}\{\xi\} \\
&= v_\omega (v_\xi + \mu_\xi^2) + \mu_\omega^2 v_\xi
\end{aligned}$$

In the general case, the mean for  $\lambda_r^2$  is :

$$\mathbb{E}\{\lambda_r^2\} = \text{Var}\{\lambda_r\} + \mathbb{E}\{\lambda_r\}^2 = (v_\omega + \mu_\omega^2) (v_\xi + \mu_\xi^2)$$

If the Gaussian assumption is made for  $\lambda_r$ , then the reduced variable  $\lambda_r^2/\text{Var}\{\lambda_r\}$  follows a scaled non-central chi-square distribution with  $k = 1$  degree of freedom and non-centrality parameter  $\epsilon = (\mathbb{E}\{\lambda_r\}/\text{Var}\{\lambda_r\})^2$ . The variance of such a distribution is given by  $2(k + 2\epsilon)$ . Eventually,

$$\text{Var}\{\lambda_r^2\} = 2\text{Var}\{\lambda_r\}^2 (\text{Var}\{\lambda_r\}^2 + 2\mathbb{E}\{\lambda_r\})$$

The prior of  $\lambda_r^2$  is a gamma distribution  $\mathcal{G}(a_{0r}, b_{0r})$ . Expressing these parameters using the mean and variance, one gets :

$$a_{0r} = \frac{\mathbb{E}\{\lambda_r^2\}^2}{\text{Var}\{\lambda_r^2\}}, \quad b_{0r} = \frac{\mathbb{E}\{\lambda_r^2\}}{\text{Var}\{\lambda_r^2\}}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723. doi : 10.1109/TAC.1974.1100705.
- Alampalli, S. (2000). Effects of Testing, Analysis, Damage, and Environment on modal parameters. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(1), 63-74. doi : <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1271>.
- Aldrich, J. (1997). R.A. Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922. *Statistical Science*, 12(3), 162 -176. doi : 10.1214/ss/1030037906.
- Alligne, S., Nicolet, C., Tsujimoto, Y. & Avellan, F. (2014). Cavitation surge modelling in Francis turbine draft tube. *Journal of Hydraulic Research*, 52. doi : 10.1080/00221686.2013.854847.
- Amador, S., El-Kafafy, M., Cunha, A. & Brincker, R. (2019). A New Maximum Likelihood Estimator Formulated in Pole-Residue Modal Model. *Applied Sciences*, 9(15). doi : 10.3390/app9153120.
- Andersen, P. & Brincker, R. (1999). Estimation of Modal Parameters and their Uncertainties. *Proceedings of the 17th International Modal Analysis Conference (IMAC), Kissimmee, Florida, USA*, pp. 323–329.
- Antoni, J. & El badaoui, M. (2011, 01). *Conference : International Conference on Structural System Identification*.
- Anup, K., Thapa, B. & Lee, Y.-H. (2014). Transient numerical analysis of rotor-stator interaction in Francis turbine. *Renewable Energy*, 65, 227-235. doi : 10.1016/j.renene.2013.09.013.
- Anup, K., Lee, Y.-H. & Thapa, B. (2016). CFD study on prediction of vortex shedding in draft tube of Francis turbine and vortex control techniques. *Renewable Energy*, 86, 1406-1421. doi : 10.1016/j.renene.2015.09.041.
- Arpin-Pont, J., Gagnon, M., Tahan, A., Coutu, A. & Thibault, D. (2012). Strain gauge measurement uncertainties on hydraulic turbine runner blade. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15, 2042-. doi : 10.1088/1755-1315/15/6/062042.
- Au, S.-K. (2011a). Fast Bayesian FFT Method for Ambient Modal Identification with Separated Modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 137(3), 214-226. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000213.

- Au, S.-K. (2011b). Fast Bayesian FFT Method for Ambient Modal Identification with Separated Modes. *Journal of Engineering Mechanics*, 137, 214-226. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000213.
- Au, S.-K. (2012a). Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, Part I : Posterior most probable value. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26, 60-75. doi : 10.1016/j.ymsp.2011.06.017.
- Au, S.-K. (2012b). Fast Bayesian ambient modal identification in the frequency domain, Part II : Posterior uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26, 76-90. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2011.06.019>.
- Au, S.-K. (2012c). Connecting Bayesian and Frequentist quantification of parameter uncertainty in system identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 29, 328-342. doi : 10.1016/j.ymsp.2012.01.010.
- Au, S.-K. (2014a). Uncertainty law in ambient modal identification - Part I : Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 48, 15-33. doi : 10.1016/j.ymsp.2013.07.016.
- Au, S.-K. (2014b). Uncertainty law in ambient modal identification - Part II : Implication and field verification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 48, 34-48. doi : 10.1016/j.ymsp.2013.07.017.
- Au, S.-K. (2015). Insights on the Bayesian spectral density method for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66-67. doi : 10.1016/j.ymsp.2015.04.023.
- Au, S.-K. (2017). *Operational Modal Analysis*. doi : 10.1007/978-981-10-4118-1.
- Au, S.-K. & Zhang, F.-L. (2011). On assessing the posterior mode shape uncertainty in ambient modal identification. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 26, 427-434. doi : 10.1016/j.probengmech.2010.11.009.
- Au, S.-K. & Zhang, F.-L. (2012). Fast Bayesian Ambient Modal Identification Incorporating Multiple Setups. *Journal of Engineering Mechanics*, 138, 800-815. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000385.
- Au, S.-K., Zhang, F.-L. & Ni, Y.-C. (2013). Bayesian operational modal analysis : Theory, computation, practice. *Computers and Structures*, 126, 3-14. doi : 10.1016/j.compstruc.2012.12.015.
- Au, S.-K., Brownjohn, J. & Mottershead, J. (2018). Quantifying and managing uncertainty in operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 102, 139-157. doi : 10.1016/j.ymsp.2017.09.017.

- Au, S. & Beck, J. (1999). A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural Safety*, 21(2), 135-158. doi : [https://doi.org/10.1016/S0167-4730\(99\)00014-4](https://doi.org/10.1016/S0167-4730(99)00014-4).
- Bakir, P. (2011). Automation of the stabilization diagrams for subspace based system identification. *Expert Systems with Applications*, 38, 14390-14397. doi : [10.1016/j.eswa.2011.04.021](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.04.021).
- Banfi, L. & Carassale, L. (2014, 06). Assessment of uncertainties in output-only modal identification of linear systems.
- Banfi, L. & Carassale, L. (2016). Uncertainties in an Application of Operational Modal Analysis (pp. 107-115). doi : [10.1007/978-3-319-29754-5\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-319-29754-5_10).
- Beck, J. & Au, S. K. (2002). Bayesian Updating of Structural Models and Reliability using Markov Chain Monte Carlo Simulation. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(4), 380-391. doi : [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:4\(380\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:4(380)).
- Beck, J. & Katafygiotis, L. S. (1998). Updating Models and Their Uncertainties. I : Bayesian Statistical Framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4), 455-461. doi : [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:4\(455\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455)).
- Behmanesh, I. & Moaveni, B. (2016). Accounting for environmental variability, modeling errors, and parameter estimation uncertainties in structural identification. *Journal of Sound and Vibration*, 374. doi : [10.1016/j.jsv.2016.03.022](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.03.022).
- Behmanesh, I., Moaveni, B., Lombaert, G. & Papadimitriou, C. (2015). Hierarchical Bayesian model updating for structural identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 64-65, 360-376. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2015.03.026>.
- Behmanesh, I., Yousefianmoghadam, S., Nozari, A., Moaveni, B. & Stavridis, A. (2018). Uncertainty quantification and propagation in dynamic models using ambient vibration measurements, application to a 10-story building. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 107, 502-514. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.01.033>.
- Ben Salah, F. (2014). *Modelisation de la propagation des incertitudes des mesures sur l'aube d'une turbine hydraulique par krigeage et simulations stochastiques*. (Mémoire de maîtrise, ETS, Montreal).
- Benra, F.-K., Dohmen, H., Pei, J., Schuster, S. & Wan, B. (2011). A Comparison of One-Way and Two-Way Coupling Methods for Numerical Analysis of Fluid-Structure Interactions. *Journal of Applied Mathematics*, 2011. doi : [10.1155/2011/853560](https://doi.org/10.1155/2011/853560).
- Blommaert, G. (2000). *Etude du comportement dynamique des turbines Francis : controle actif de leur stabilite de fonctionnement*. (Mémoire de maîtrise, These de l'Universite Polytechnique



Federale de Lausanne, Suisse).

- Blough, J., Brown, D. & Vold, H. (1997). The time variant discrete Fourier transform as an order tracking method. *SAE Noise and Vibration Conf. and Exp.*
- Bolstad, W. (2010). Understanding Computational Bayesian Statistics. *Understanding Computational Bayesian Statistics*. doi : 10.1002/9780470567371.fmatter.
- Boonyapinyo, V. & Janesupasaeree, T. (2010). Data-driven stochastic subspace identification of flutter derivatives of bridge decks. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98, 784-799. doi : 10.1016/j.jweia.2010.07.003.
- Borghesani, P., Pennachi, P., Chatterton, S. & Ricci, R. (2014). The velocity synchronous discrete Fourier transform for order tracking in the field of rotating machinery. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 44, 118-133.
- Boswald, M. (2016, 09). Analysis of the bias in modal parameters obtained with frequency-domain rational fraction polynomial estimators.
- Boswald, M., Goge, D., Fullekrug, U. & Govers, Y. (2006, 01). A Review of Experimental Modal Analysis Methods with respect to their Applicability to Test Data of Large Aircraft Structures. pp. 2461-2481.
- Brincker, R. & Ventura, C. (2015). *Introduction to operational Modal Analysis* (éd. 1). Wiley.
- Brincker, R., Zhang, L. & Andersen, P. (2001). Modal identification of output only systems using Frequency Domain Decomposition. *Smart Materials and Structures*, 10, 441. doi : 10.1088/0964-1726/10/3/303.
- Brincker, R., Andersen, P. & Jacobsen, N.-J. (2007). Automated Frequency Domain Decomposition for Operational Modal Analysis.
- Brincker, R., Olsen, P., Amador, S., Juul, M., Malekjafarian, A. & Ashory, M. (2017). Modal participation in multiple input Ibrahim time domain identification. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 24, 108128651773303. doi : 10.1177/1081286517733034.
- Casanova-Garcia, G. & Mantilla, C. (2010). Experimental analysis of the vibration on the draft tube of a Francis hydraulic turbine during operation at different power levels. *Revista Facultad de Ingenieria Universidad de Antioquia*, 90-98.
- Castiglione, R., Antoni, J. & Garibaldi, L. (2018). Separation and identification of structural modes in largely underdetermined scenarios using frequency banding. *Journal of Sound and Vibration*, 414, 192 to 217.

- Cattaneo, A., Manzoni, S. & Vanali, M. (2011). Numerical Investigation on the Measurement Uncertainty in Operational Modal Analysis of a Civil Structure (vol. 4, pp. 191-199). doi : 10.1007/978-1-4419-9316-8\_17.
- Chauhan, S. (2014). Quantifying Uncertainty in Modal Parameters Estimated Using Higher Order Time Domain Algorithms. *Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3*.
- Chauhan, S. & Tcherniak, D. (2008). Clustering Approaches to Automatic Modal Parameter Estimation. *Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series*.
- Chauhan, S., Monnier, T. & Gryllias, K. (2014). Least action criteria for blind separation of structural modes. *Mechanics and Industry*, 14, 397-411. doi : 10.1051/meca/2013086.
- Cheung, S. H. & Bansal, S. (2017). A new Gibbs sampling based algorithm for Bayesian model updating with incomplete complex modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 92, 156-172. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.01.015>.
- Cheung, S. H. & Beck, J. L. (2009). Bayesian Model Updating Using Hybrid Monte Carlo Simulation with Application to Structural Dynamic Models with Many Uncertain Parameters. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(4), 243-255. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:4(243).
- Ching, J. & Chen, Y.-C. (2007). Transitional Markov Chain Monte Carlo Method for Bayesian Model Updating, Model Class Selection, and Model Averaging. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(7), 816-832. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:7(816).
- Ching, J., Muto, M. & Beck, J. L. (2006). Structural Model Updating and Health Monitoring with Incomplete Modal Data Using Gibbs Sampler. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 21(4), 242-257. doi : <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2006.00432.x>.
- Ciloglu, K., Zhou, Y., Moon, F. & Aktan, A. (2012). Impacts of Epistemic Uncertainty in Operational Modal Analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 138, 1059-1070. doi : 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000413.
- Cooper, J. (1990). Comparison of modal parameter estimation techniques on aircraft structural data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 4(2), 157-172. doi : [https://doi.org/10.1016/0888-3270\(90\)90054-O](https://doi.org/10.1016/0888-3270(90)90054-O).
- Cupr, P., Weber, W. & Hebner, B. (2019). Investigation on the hydrodynamic damping using prescribed blade motion techniques. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 405, 012017. doi : 10.1088/1755-1315/405/1/012017.

- Das, A. & Debnath, N. (2021). Gibbs Sampling for Damage Detection Using Complex Modal Data from Multiple Setups. *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 7(2), 04021018. doi : 10.1061/AJRUA6.0001135.
- Deraemaeker, A., Reynders, E., De Roeck, G. & Kullaa, J. (2008). Vibration-based structural health monitoring using output-only measurements under changing environment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(1), 34-56. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2007.07.004>.
- Di Lorenzo, E. (2017). Operational Modal Analysis for Rotating Machines, Challenges and Solutions. *PhD - KL Arenberg Doct. School and Federico II Naple Univ.*
- Di Lorenzo, E., Manzato, S., Dabizzi, A., Peeters, B., Marulo, F. & Desmet, W. (2016a). Industrial applications of advanced modal identification on operational rotating machineries. *Proceeding of ISMA*, 2833-2848.
- Di Lorenzo, E., Palermo, A., Manzato, S., Dabizzi, A., Peeters, B., Desmet, W. & Marulo, F. (2016b). Gear Dynamics Characterization by Using Order-Based Modal Analysis. *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, 387-404.
- Di Lorenzo, E., Manzato, S., Peeters, B., Vanhollebeke, F., Desmet, W. & Marulo, F. (2015, 05). Order-Based Modal Analysis : a modal parameter estimation technique for rotating machineries.
- Di Lorenzo, E., Manzato, S., Dabizzi, A., Peeters, B., Marulo, F. & Desmet, W. (2016c, 01). Industrial applications of advanced modal identification on operational rotating machineries. pp. 2833 - 2847.
- Diagne, I., Gagnon, M. & Tahan, A. (2016). Modeling the dynamic behavior of turbine runner blades during transients using indirect measurements. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49, 072014. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072014.
- Dohler, M. & Mevel, L. (2013). Efficient Multi-Order Uncertainty Computation for Stochastic Subspace Identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38. doi : 10.1016/j.ymsp.2013.01.012.
- Dollon, Q., Antoni, J., Tahan, A., Gagnon, M. & Monette, C. (2021a). Operational Modal Analysis of hydroelectric turbines using an order based likelihood approach. *Renewable Energy*, 165, 799-811. doi : <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.11.086>.
- Dollon, Q., Tahan, A., Antoni, J., Gagnon, M. & Monette, C. (2019). Dynamic characterization of hydroelectric turbine with transient data records Using OBMA and phase-shift analysis. *Surveillance, VISHNO and AVE Conferences*.

- Dollon, Q., Antoni, J., Tahan, A., Gagnon, M. & Monette, C. (2021b). Operational Modal Analysis of hydroelectric turbines using an order based likelihood approach. *Renewable Energy*, 165, 799-811. doi : <https://doi.org/10.1016/j.renene.2020.11.086>.
- Dorfler, P., Sick, M. & Coutu, A. (2013). *Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery*. doi : 10.1007/978-1-4471-4252-2.
- Dorji, U. & Ghomashchi, R. (2014). Hydro turbine failure mechanisms : An overview. *Engineering Failure Analysis*, 44. doi : 10.1016/j.engfailanal.2014.04.013.
- Duparchy, F., Brammer, J., Thibaud, M., Favrel, A., Lowys, P.-Y. & Avellan, F. (2017). Mechanical impact of dynamic phenomena in Francis turbines at off design conditions. *Journal of Physics : Conference Series*, 813, 012035. doi : 10.1088/1742-6596/813/1/012035.
- Egusquiza, E., Valero, C., Liang, Q., Coussirat, M. & Seidel, U. (2009, 01). Fluid Added Mass Effect in the Modal Response of a Pump-Turbine Impeller. 1. doi : 10.1115/DETC2009-86830.
- Egusquiza Montagut, M., Egusquiza, E., Valero, C., Presas, A., Valentin, D. & Bossio, M. (2018). Advanced condition monitoring of Pelton turbines. *Measurement*, 119. doi : 10.1016/j.measurement.2018.01.030.
- El-kafafy, M., Guillaume, P., Peeters, B., Marra, F. & Coppotelli, G. (2012, 01). Advanced Frequency-Domain Modal Analysis for Dealing with Measurement Noise and Parameter Uncertainty. 5. doi : 10.1007/978-1-4614-2425-3\_17.
- Eykhoff, P. (1974). *System identification : Parameter and State Estimation*. London : John Wiley and Sons.
- Favrel, A., Landry, C., Muller, A. & Avellan, F. (2012). Experimental Identification and Study of Hydraulic Resonance Test Rig with Francis Turbine operating at Partial Load. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15, 2064-. doi : 10.1088/1755-1315/15/6/062064.
- Favrel, A., Landry, C., Muller, A., Yamamoto, K. & Avellan, F. (2014). Hydro-acoustic resonance behavior in presence of a precessing vortex rope : Observation of a lock-in phenomenon at part load Francis turbine operation. *IOP Conference Series Earth and Environmental Science*, 22, 032035. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032035.
- Favrel, A., Muller, A., Landry, C., Yamamoto, K. & Avellan, F. (2015). Study of the vortex-induced pressure excitation source in a Francis turbine draft tube by particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 56. doi : 10.1007/s00348-015-2085-5.
- Fisher, R. (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical*

*or Physical Character.*

Flemming, F., Foust, J., Koutnik, J. & Fisher, R. (2009). Overload Surge Investigation Using CFD Data. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 2. doi : 10.5293/IJFMS.2009.2.4.315.

Flores, M. (2012). A Fatigue Analysis of a Hydraulic Francis Turbine Runner. *World Journal of Mechanics*, 2, 28-34. doi : 10.4236/wjm.2012.21004.

Fyfe, K. & Munck, D. (1997). Analysis of Computed Order Tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11, 187 to 205.

Gade, S., Moller, N., Herlufsen, H. & Konstantin-Hansen, H. (2005). Frequency Domain Techniques for Operational Modal Analysis. *In JSAE Annual Congress*.

Gagnon, M., Dollon, Q., Nicolle, J. & Morissette, J.-F. (2021). Operational Modal Analysis of Francis Turbine Runner Blades Using Transient Measurements. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 774(1). doi : 10.1088/1755-1315/774/1/012082.

Gagnon, M., Tahan, A., Coutu, A. & Thomas, M. (2006). Analyse modale operationnelle en presence d'excitations harmoniques : etude de cas sur des composantes de turbine hydroelectrique. *24-th seminar on machinery vibration*.

Gagnon, M., Tahan, A. & Coutu, A. (2009). Uncertainty in Operational Modal Analysis of Hydraulic Turbine Components. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 2. doi : 10.5293/IJFMS.2009.2.4.278.

Gagnon, M., Tahan, A., Bocher, P. & Thibault, D. (2010). Impact of startup scheme on Francis runner life expectancy. *Iop Conference Series : Earth and Environmental Science*, 12. doi : 10.1088/1755-1315/12/1/012107.

Gagnon, M., Tahan, A., Bocher, P. & Thibault, D. (2012a). The role of high cycle fatigue (HCF) onset in Francis runner reliability. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15, 2005-. doi : 10.1088/1755-1315/15/2/022005.

Gagnon, M., Tahan, A., Bocher, P. & Thibault, D. (2012b). On the stochastic simulation of hydroelectric turbine blades transient response. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32, 178-187. doi : 10.1016/j.ymssp.2012.02.006.

Gagnon, M., Tahan, A., Bocher, P. & Thibault, D. (2013). A probabilistic model for the onset of High Cycle Fatigue (HCF) crack propagation : Application to hydroelectric turbine runner. *International Journal of Fatigue*, 47, 300-307. doi : 10.1016/j.ijfatigue.2012.09.011.

- Gagnon, M., Tahan, A., Bocher, P. & Thibault, D. (2014). Influence of load spectrum assumptions on the expected reliability of hydroelectric turbines : A case study. *Structural Safety*, 50, 1-8. doi : 10.1016/j.strusafe.2014.03.008.
- Gardner, W. (1986). Chapter 12. Dans *Introduction to random processes* (éd. 1). USA : MacMillan.
- Gauthier, J.-P., Giroux, A.-M., Etienne, S. & Gosselin, F. (2016). CFD evaluation of added damping due to fluid flow over a hydroelectric turbine blade. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49, 072003. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072003.
- Gauthier, J.-P., Giroux, A.-M., Etienne, S. & Gosselin, F. (2017). A numerical method for the determination of flow-induced damping in hydroelectric turbines. *Journal of Fluids and Structures*, 69, 341-354. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.004.
- Golub, G. H. & Van Loan, C. F. (1980). An Analysis of the Total Least Squares Problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 17(6), 883–893.
- Golub, G. & Van Loan, C. (1996). *Matrix computations* (éd. 3). Baltimore and London : The Johns Hopkins University Press.
- Gontier, C., Smail, M. & Gautier, P.
- Goyal, R. & Bhupendra, K. G. (2018). Review of hydrodynamics instabilities in Francis turbine during off-design and transient operations. *Renewable Energy*, 116, 697-709. doi : <https://doi.org/10.1016/j.renene.2017.10.012>.
- Gres, S., Döhler, M., Andersen, P. & Mevel, L. (2020). Kalman filter-based subspace identification for operational modal analysis under unmeasured periodic excitation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 146. doi : 10.1016/j.ymsp.2020.106996.
- Guillaume, P., Verboven, P. & Vanlanduit, S. (1998). Frequency domain maximum likelihood identification of modal parameters with confidence intervals.
- Guillaume, P., Verboven, P., Vanlanduit, S., Van der Auweraer, H. & Peeters, B. (2003). A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. *Proceedings of IMAC*, 21.
- Gummer, J. & Etter, S. (2008). Cracking of Francis runners during transient operation. 15, 81-85.
- Habibzadeh Boukani, H., Viens, M., Tahan, A. & Gagnon, M. (2014, 09). On the performance of nondestructive testing methods in the hydroelectric turbine industry. 22. doi : 10.1088/1755-

1315/22/1/012018.

Haddad, M., Topper, T. & Smith, K. (1979). Prediction of Non-Propagating Cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, 11, 573-584. doi : 10.1016/0013-7944(79)90081-X.

Hasan, M., Ahmad, Z., Leong, M. & Hee, L. (2018). Enhanced frequency domain decomposition algorithm : A review of a recent development for unbiased damping ratio estimates. *Journal of Vibro-engineering*, 20, 1919-1936. doi : 10.21595/jve.2018.19058.

Hermans, L., Van der Auweraer, H. & Guillaume, P. (1998). A frequency-domain maximum likelihood approach for the extraction of modal parameters from output-only data. *Proceedings of the 23rd International Seminar on Modal Analysis (ISMA23)*, 963-972.

Huang, X., Chamberland-Lauzon, J., Oram, C., Klopfer, A. & Ruchonnet, N. (2014a). Fatigue analyses of the prototype Francis runners based on site measurements and simulations. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 012014. doi : 10.1088/1755-1315/22/1/012014.

Huang, X., Oram, C. & Sick, M. (2014b). Static and dynamic stress analyses of the prototype high head Francis runner based on site measurement. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 032052. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032052.

Ibrahim, S. R. (1986). Double least squares approach for use in structural modal identification. *AIAA Journal*, 24(3), 499-503. doi : 10.2514/3.9296.

Ibrahim, S. (1977). Random Decrement Technique for Modal Identification of Structures. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 14(11), 696-700. doi : 10.2514/3.57251.

Ibrahim, S. & Milkulcik, E. (1977). A method for direct identification of vibration parameters from the free response. *Shock and Vibration Bulletin*, 47, 183-196.

Jacobsen, N.-J., Andersen, P. & Brincker, R. (2007). Using enhanced frequency domain decomposition as a robust technique to harmonic excitation in operational modal analysis. *Proceedings of the International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC 2007)*, 4.

Jakobsen, K.-R. & Holst, M. (2017). CFD simulations of transient load change on a high head Francis turbine. *Journal of Physics : Conference Series*, 782, 012002. doi : 10.1088/1742-6596/782/1/012002.

Janssens, K., Kollar, Z., Peeters, B., Pauwels, S. & Van der Auweraer, H. (2006a). Order-based resonance identification using operational PolyMAX.

- Janssens, K., Kollar, Z., Peeters, B., Pauwels, S. & Van der Auweraer, H. (2006b). Order-based resonance identification using operational PolyMAX.
- Jian, F. & Yanping, Z. (2017). Non-stationary random response analysis of structures with uncertain parameters. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 50, 53-63. doi : <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2017.10.008>.
- Jost, D. & Lipej, A. (2011). Numerical Prediction of Non-Cavitating and Cavitating Vortex Rope in a Francis Turbine Draft Tube. *Strojnicki Vestnik*, 57, 445-456. doi : 10.5545/sv-jme.2010.068.
- Juang, J.-N. & Pappa, R. (1985). An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 8. doi : 10.2514/3.20031.
- Katafygiotis, L. & Yuen, K.-V. (2001). Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30, 1103 - 1123. doi : 10.1002/eqe.53.
- Katafygiotis, L. & Beck, J. (1998). Updating Models and Their Uncertainties. II : Model Identifiability. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4), 463-467. doi : 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(463).
- Kent, J., Ganeiber, A. & Mardia, K. (2013). A new method to simulate the Bingham and related distributions in directional data analysis with applications. *arXiv : Statistics Theory*.
- Kitgawa, H. (1976). Applicability of fracture mechanics to very small cracks or the cracks in the early stage. *Proc. of 2nd ICM, Cleveland*, 627-631.
- Kougiyas, I., Aggidis, G., Avellan, F., Deniz, S., Lundin, U., Moro, A., Muntean, S., Novara, D., Perez-Diaz, J. I., Quaranta, E., Schild, P. & Theodossiou, N. (2019). Analysis of emerging technologies in the hydropower sector. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 113, 109257. doi : <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.109257>.
- Krappel, T., Ruprecht, A., Riedelbauch, S., Jester-Zuerker, R. & Jung, A. (2014). Investigation of Francis Turbine Part Load Instabilities using Flow Simulations with a Hybrid RANS-LES Turbulence Model. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 032001. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032001.
- Kumar, P. & Saini, R. (2010). Study of cavitation in hydro turbines—A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 14, 374-383. doi : 10.1016/j.rser.2009.07.024.
- Lais, S., Liang, Q., Henggeler, U., Weiss, T., Escaler, X. & Egusquiza, E. (2009). Dynamic Analysis of Francis Runners - Experiment and Numerical Simulation. *International Journal*



*of Fluid Machinery and Systems*, 2. doi : 10.5293/IJFMS.2009.2.4.303.

Leonard, F. (2007). Phase spectrogram and frequency spectrogram as new diagnostic tools. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1), 125-137. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2005.08.011>.

Levy, R. (2009). The rise of Markov Chain Monte Carlo estimation for psychometric modeling. *Journal of Probability and Statistics*, 2009. doi : <https://doi.org/10.1155/2009/537139>.

Li, B., Der Kiureghian, A. & Au, S.-K. (2018). A Gibbs sampling algorithm for structural modal identification under seismic excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 47, 1-21. doi : 10.1002/eqe.3094.

Liang, Q., Rodriguez, C., Egusquiza, E., Escaler, X., Farhat, M. & Avellan, F. (2007). Numerical simulation of fluid added mass effect on a francis turbine runner. *Computers and Fluids*, 36, 1106-1118. doi : 10.1016/2006.08.007.

Liang, Q., Lais, S., Gentner, C. & Braun, O. (2012). Efficient runner safety assessment during early design phase and root cause analysis. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15, 2009-. doi : 10.1088/1755-1315/15/5/052009.

Liu, D., Liu, X. & Zhao, Y. (2017). Experimental investigation of inter-blade vortices in a model Francis turbine. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 30, 854-865. doi : 10.1007/s10033-017-0097-1.

Liu, X., Presas, A., Luo, Y. & Wang, Z. (2018a). Crack growth analysis and fatigue life estimation in the piston rod of a Kaplan hydro turbine. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 41(11), 2402-2417. doi : <https://doi.org/10.1111/ffe.12848>.

Liu, X., Luo, Y. & Wang, Z. (2014, 09). Fatigue Analysis of the Piston Rod in a Kaplan Turbine Based on Crack Propagation under Unsteady Hydraulic Loads. 22. doi : 10.1088/1755-1315/22/1/012017.

Liu, X., Luo, Y. & Wang, Z. (2016). A review on fatigue damage mechanism in hydro turbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 54, 1-14. doi : <https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.09.025>.

Liu, X., Luo, Y., Presas, A., Wang, Z. & Zhou, L. (2018b). Cavitation Effects on the Structural Resonance of Hydraulic Turbines : Failure Analysis in a Real Francis Turbine Runner. *Energies*, 11, 2320. doi : 10.3390/en11092320.

Ljung, L. (1999). *System Identification : theory for the user* (éd. 2). Prentice Hall.

- Luna, A., Campos, A., Dorantes, G., Mazur, Z. & Munoz, R. (2015). Failure analysis of runner blades in a Francis hydraulic turbine — Case study. *Engineering Failure Analysis*, 59. doi : 10.1016/j.engfailanal.2015.10.020.
- Magalhaes, F., Cunha, A. & Caetano, E. (2009). Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(2), 316-329. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.05.003>.
- Malekjafarian, A., Brincker, R., Ashory, M. & Khatibi, M. (2012, 01). Modified Ibrahim Time Domain Method for Identification of Closely Spaced Modes : Experimental Results. 1, 443-449. doi : 10.1007/978-1-4614-2413-0\_44.
- Markert, R. & Seidler, M. (2001). Analytically based estimation of the maximum amplitude during passage through resonance. *International Journal of Solids and Structures*, 38(10), 1975-1992. doi : [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00147-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00147-5).
- Martin, J. K. & McDonald, R. P. (1975). Bayesian estimation in unrestricted factor analysis : a treatment for Heywood cases. *Psychometrika*, 40, 505-517. doi : 10.1007/BF02291552.
- Martin, K., Nilsson, H. & Aidanpaa, J.-O. (2009). Numerical Estimation of Torsional Dynamic Coefficients of a Hydraulic Turbine. *International Journal of Rotating Machinery*, 2009. doi : 10.1155/2009/349397.
- Mathai, A. (1980). Moments of the trace of a noncentral Wishart matrix. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 9, 795-801. doi : 10.1080/03610928008827921.
- Mohanty, P. & Rixen, D. (2004a). Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 270, 93-109. doi : 10.1016/S0022-460X(03)00485-1.
- Mohanty, P. & Rixen, D. (2004b). A modified Ibrahim time domain algorithm for operational modal analysis including harmonic excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 275, 375-390. doi : 10.1016/j.jsv.2003.06.030.
- Mohanty, P. & Rixen, D. (2006). Modified ERA method for operational modal analysis in the presence of harmonic excitations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20, 114-130. doi : 10.1016/j.ymsp.2004.06.010.
- Moisan, E., Giacobbi, D.-B., Gagnon, M. & Leonard, F. (2014, 09). Self-excitation in Francis runner during load rejection. 22. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032025.
- Monette, C., Nennemann, B., Seeley, C., Coutu, A. & Marmont, H. (2014, 09). Hydro-dynamic damping theory in flowing water. 22. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032044.

- Moon, F. (2006). Impacts of Epistemic (Bias) Uncertainty on Structural Identification of Constructed (Civil) Systems. *The Shock and Vibration Digest*, 38, 399-420. doi : 10.1177/0583102406068068.
- Morissette, J.-F. & Nicolle, J. (2019). Fluid-structure simulations of the stochastic behaviour of a medium head Francis turbine during startup. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 240, 022026. doi : 10.1088/1755-1315/240/2/022026.
- Morissette, J.-F., Chamberland-Lauzon, J., Nennemann, B., Monette, C., Giroux, A.-M., Coutu, A. & Nicolle, J. (2016). Stress predictions in a Francis turbine at no-load operating regime. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49, 072016. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072016.
- Mossinger, P. & Jung, A. (2016). Transient two-phase CFD simulation of overload operating conditions and load rejection in a prototype sized Francis turbine. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49, 092003. doi : 10.1088/1755-1315/49/9/092003.
- Nennemann, B., Vu, T. & Farhat, M. (2005). CFD prediction of unsteady wicket gate-runner interaction in Francis turbines : A new standard hydraulic design procedure.
- Nennemann, B., Morissette, J.-F., Chamberland-Lauzon, J., Monette, C., Braun, O., Melot, M., Coutu, A., Nicolle, J. & Giroux, A.-M. (2014). Challenges in Dynamic Pressure and Stress Predictions at No-Load Operation in Hydraulic Turbines. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 032055. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032055.
- Nennemann, B., Monette, C. & Chamberland-Lauzon, J. (2016). Hydrodynamic damping and stiffness prediction in Francis turbine runners using CFD. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072006.
- Neumaier, A. & Schneider, T. (2001). Estimation of Parameters and Eigenmodes of Multivariate Autoregressive Models. *ACM Trans. Math. Softw.*, 27(1). doi : 10.1145/382043.382304.
- Neyman, J. & Pearson, E. S. (1933). On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231, 289-337.
- Ni, Y.-C., Zhang, F.-L., Lam, H. F. & Au, S.-K. (2015). Fast Bayesian approach for modal identification using free vibration data - Part II : Posterior uncertainty and application. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70. doi : 10.1016/j.ymssp.2015.06.009.
- Nicolet, C., Ruchonnet, N., Alligne, S., Koutnik, J. & Avellan, F. (2010). Hydroacoustic Simulation of Rotor-Stator Interaction in Resonance Conditions in Francis Pump-Turbine. *Proceedings of 25th IAHR symposium on hydraulic machinery and systems. Lausanne*, 12.

- doi : 10.1088/1755-1315/12/1/012005.
- Nicolle, J., Morissette, J.-F. & Giroux, A.-M. (2012). Transient CFD simulation of a Francis turbine startup. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 15. doi : 10.1088/1755-1315/15/6/062014.
- Nicolle, J., Giroux, A.-M. & Morissette, J.-F. (2014). CFD configurations for hydraulic turbine startup. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 032021. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032021.
- Ostby, P., Billdal, J., Haugen, B. & Dahlaug, O. (2016). Dynamic Stresses In High Head Francis Turbines. *International Journal on Hydropower and Dams*.
- Ostby, P., Haugen, B. & Billdal, J. (2018). Experimental investigation on the effect off near walls on the eigen frequency of a low specific speed francis runner. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 118, 757-766. doi : 10.1016/j.ymsp.2018.08.060.
- Park, T. & Van Dyk, D. A. (2009). Partially Collapsed Gibbs Samplers : Illustrations and Applications. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 18(2), 283-305.
- Pastor, M., Binda, M. & Harcarik, T. (2012). Modal Assurance Criterion. *Procedia Engineering*, 48, 543-548. doi : <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.09.551>. Modelling of Mechanical and Mechatronics Systems.
- Peeters, B. & De Roeck, G. (2000). Reference based stochastic subspace identification in Civil Engineering. *Inverse Problems in Engineering*, 8, 47-74. doi : 10.1080/174159700088027718.
- Peeters, B. & De Roeck, G. (2001). Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis : A Review. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, 123. doi : 10.1115/1.1410370.
- Peeters, B. & Van der Auweraer, H. (2005). PolyMax : a revolution in operational modal analysis. *1st International Operational Modal Analysis Conference*.
- Peeters, B., Van der Auweraer, H., Guillaume, P. & Leuridan, J. (2004). The PolyMAX Frequency-Domain Method : A New Standard for Modal Parameter Estimation? *Shock and Vibration*, 11, 395-409. doi : 10.1155/2004/523692.
- Peeters, B., Vanhollenbeke, F. & Van der Auweraer, H. (2007). Operational Modal Analysis for Estimating the Dynamic Properties of a Stadium Structure during a Football Game. *Shock and Vibration*, 14. doi : 10.1155/2007/531739.

- Pennacchi, P., Borghesani, P. & Chatterton, S. (2015). A cyclostationary multi-domain analysis of fluid instability in Kaplan turbines. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 60. doi : 10.1016/j.ymssp.2014.08.026.
- Pintelon, R., Schoukens, J. & Guillaume, P. (2006). Continuous-Time Noise Modelling from Sampled Data. *2006 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings*, pp. 1010-1014. doi : 10.1109/IMTC.2006.328301.
- Pintelon, R., Guillaume, P. & Schoukens, J. (2007). Uncertainty calculation in (operational) modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(6), 2359-2373. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2006.11.007>.
- Piranda, J. (2001). Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur Mesures acoustiques et vibratoires*.
- Pochyly, F., Fialova, S. & Stefan, D. (2019). Effect of spiral vortices on the stability of vortex structures in the diffusor. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 240, 022052. doi : 10.1088/1755-1315/240/2/022052.
- Poirier, M., Gagnon, M., Tahan, A., Coutu, A. & Chamberland-lauzon, J. (2016). Extrapolation of dynamic load behaviour on hydroelectric turbine blades with cyclostationary modelling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 82. doi : 10.1016/j.ymssp.2016.05.018.
- Poulimenos, A. & Fassois, S. (2006). Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modelling and analysis — A critical survey and comparison. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(4), 763-816. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2005.10.003>.
- Presas, A., Valentin, D., Egusquiza, E., Valero, C. & Seidel, U. (2015). On the detection of natural frequencies and mode shapes of submerged rotating disk-like structures from the casing. *Mechanical Systems and Signal Processing*, -. doi : 10.1016/j.ymssp.2015.01.013.
- Presas, A., Valentin, D., Egusquiza, E., Valero, C. & Seidel, U. (2016). Dynamic response of a rotating disk submerged and confined. Influence of the axial gap. *Journal of Fluids and Structures*, 62, 332-349. doi : 10.1016/j.jfluidstructs.2016.02.003.
- Presas, A., Valentin, D., Egusquiza, E. & Valero, C. (2017). Detection and analysis of part load and full load instabilities in a real Francis turbine prototype. *Journal of Physics : Conference Series*, 813, 012038. doi : 10.1088/1742-6596/813/1/012038.
- Presas, A., Luo, Y., Wang, Z. & Guo, B. (2019). Fatigue life estimation of Francis turbines based on experimental strain measurements : Review of the actual data and future trends. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 102, 96-110. doi : 10.1016/j.rser.2018.12.001.

- Puolakka, O., Keto-Tokoi, J. & Matusiak, J. (2013). Unsteady load on an oscillating Kaplan turbine runner. *Journal of Fluids and Structures*, 37, 22-33. doi : <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2012.12.002>.
- Qin, S., Kang, J. & Wang, Q. (2016). Operational Modal Analysis Based on Subspace Algorithm with an Improved Stabilization Diagram Method. *Shock and Vibration*, 2016. doi : 10.1155/2016/7598965.
- Quang-Pham, H., Antoni, J., Tahan, A., Gagnon, M. & Monette, C. (2020). Rainflow-counting matrix interpolation over different operating conditions for hydroelectric turbine fatigue assessment. *Renewable Energy*.
- Reynders, E. (2012). System Identification Methods for (Operational) Modal Analysis : Review and Comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 19, 51-124. doi : 10.1007/s11831-012-9069-x.
- Reynders, E., Pintelon, R. & De Roeck, G. (2008). Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 22(4), 948-969.
- Reynders, E., Maes, K., Lombaert, G. & Roeck, G. (2015). Uncertainty quantification in operational modal analysis with stochastic subspace identification : Validation and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 66. doi : 10.1016/j.ymsp.2015.04.018.
- Robert, C. P. (2016). The Metropolis-Hastings algorithm. *arXiv : Statistics Computation*.
- Rodriguez, C., Flores, P., Pierart, F., Contzen, L. & Egusquiza, E. (2012). Capability of structural-acoustical FSI numerical model to predict natural frequencies of submerged structures with nearby rigid surfaces. *Computers and Fluids*, 64, 117-126. doi : <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.05.011>.
- Ruly, E., Sartori, N. & Ventura, L. (2016). Improved Laplace approximation for marginal likelihoods. *Electronic Journal of Statistics*, 10, 3986-4009. doi : 10.1214/16-EJS1218.
- Sadhu, A. & Narasimhan, S. (2017). A review of output-only structural mode identification literature employing blind source separation methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 94, 415-431. doi : 10.1016/j.ymsp.2017.03.001.
- Sangal, S., Garg, A. & Kumar, D. (2012). Review of Optimal Selection of Turbines for Hydroelectric Projects. 3, 424-430.
- Sedehi, O., Teymouri, D., Katafygiotis, L. & Papadimitriou, C. (2019, 05). Quantification of Aleatory Uncertainty in Modal Updating Problems using a New Hierarchical Bayesian

Framework. *Conference : 13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP 13)*.

- Sedehi, O., Katafygiotis, L. & Papadimitriou, C. (2020). Hierarchical Bayesian operational modal analysis : Theory and computations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 140, 106663. doi : 10.1016/j.ymssp.2020.106663.
- Seidel, U., Mende, C., Hebner, B., Weber, W. & Otto, A. (2014). Dynamic loads in Francis runners and their impact on fatigue life. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 22, 032054. doi : 10.1088/1755-1315/22/3/032054.
- Sheng, Y. (2010). A Sensitivity Analysis of Gibbs Sampling for 3PNO IRT Models : Effects of Prior Specifications on Parameter Estimates. *Behaviormetrika*, 37, 87-110. doi : <https://doi.org/10.2333/bhmk.37.87>.
- Smail, M., Thomas, M. & Lakis, A. (1999). ARMA models for modal analysis : effect of model orders and sampling frequency. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(6), 925-941. doi : <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1235>.
- Smith, A. F. M. & Roberts, G. O. (1993). Bayesian Computation Via the Gibbs Sampler and Related Markov Chain Monte Carlo Methods. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 55(1), 3-23.
- Soltani Dehkharghani, A., Cervantes, M. & Aidanpaa, J.-O. (2017). Numerical analysis of fluid-added parameters for the torsional vibration of a Kaplan turbine model runner. *Advances in Mechanical Engineering*, 9, 168781401773289. doi : 10.1177/1687814017732893.
- Soltani Dehkharghani, A., Aidanpaa, J.-O., Engstrom, F. & Cervantes, M. (2018). A Review of Available Methods for the Assessment of Fluid Added Mass, Damping, and Stiffness With an Emphasis on Hydraulic Turbines. *Applied Mechanics Reviews*, 70, 20. doi : 10.1115/1.4042279.
- Stephens, D. & Vold, H. (2014). Order Tracking Signal Processing for Open Rotor Acoustics. *Journal of Sounds and Vibration*, 333, 3818-3830.
- Sternharza, G., Kalganovaa, T., Maresb, C. & Meyeringhc, M. (2022). Comparative performance assessment of methods for operational modal analysis during transient order excitation. *Submitted to Mechanical systems and signal processing*.
- Stigler, S. (2007). The Epic Story of Maximum Likelihood. *Statistical Science*, 22(4), 598 - 620. doi : 10.1214/07-STS249.
- Su, L., Zhang, J.-Q., Huang, X. & La Fave, J. (2021). Automatic operational modal analysis of structures based on image recognition of stabilization diagrams with uncertainty quantification.

- Multidimensional Systems and Signal Processing*, 32. doi : 10.1007/s11045-020-00741-0.
- Tanaka, H. (2011). Vibration Behavior and Dynamic Stress of Runners of Very High Head Reversible Pump-turbines. *International Journal of Fluid Machinery and Systems*, 4, 289-306. doi : 10.5293/IJFMS.2011.4.2.289.
- Thomas, D. (1974). Standing waves in rotationally periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 37(2), 288-290. doi : [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80337-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80337-8).
- Tomaz, K., Joze, D. & Anton, B. (2006). Simulation of unsteady flow and runner rotation during shut-down of an axial water turbine. *Journal of Hydraulic Research*, 44(1), 129-137. doi : 10.1080/00221686.2006.9521668.
- Trivedi, C. & Cervantes, M. (2017). Fluid-structure interactions in Francis turbines : A perspective review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 68, Part 1, 87-101. doi : 10.1016/j.rser.2016.09.121.
- Trivedi, C., Gandhi, B. & Cervantes, M. (2013). Effect of transients on Francis turbine runner life : A review. *Journal of Hydraulic Research*, 51. doi : 10.1080/00221686.2012.732971.
- Trivedi, C., Agnalt, E. & Dahlhaug, O. (2018). Experimental study of a Francis turbine under variable-speed and discharge conditions. *Renewable Energy*, 119, 447–458. doi : 10.1016/j.renene.2017.12.040.
- Unterluggauer, J., Sulzgruber, V., Doujak, E. & Bauer, C. (2020). Experimental and numerical study of a prototype Francis turbine startup. *Renewable Energy*, 157. doi : 10.1016/j.renene.2020.04.156.
- Valentin, D., Presas, A., Egusquiza, E., Valero, C. & Egusquiza Montagut, M. (2016a). Experimental Study of a Vibrating Disk Submerged in a Fluid-Filled Tank and Confined With a Nonrigid Cover. *Journal of Vibration and Acoustics*, 139. doi : 10.1115/1.4035105.
- Valentin, D., Ramos, D., Bossio, M., Presas, A., Egusquiza, E. & Valero, C. (2016b). Influence of the boundary conditions on the natural frequencies of a Francis turbine. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 49, 072004. doi : 10.1088/1755-1315/49/7/072004.
- Valentin, D., Presas, A., Bossio, M., Egusquiza Montagut, M., Egusquiza, E. & Valero, C. (2017a). Feasibility to Detect Natural Frequencies of Hydraulic Turbines under Operation Using Strain Gauges. *Proceedings*, 1, 821. doi : 10.3390/proceedings1080821.
- Valentin, D., Presas, A., Egusquiza, E., Valero, C., Egusquiza Montagut, M. & Bossio, M. (2017b). Power Swing Generated in Francis Turbines by Part Load and Overload Instabilities. *Energies*, 10, 2124. doi : 10.3390/en10122124.



- Valentin, D., Presas, A., Valero, C. & Egusquiza, E. (2019). Detection of Hydraulic Phenomena in Francis Turbines with Different Sensors. *Sensors*, 19, 4053. doi : 10.3390/s19184053.
- Valentin, D., Presas, A., Valero, C., Egusquiza Montagut, M., Egusquiza, E., Gomes Pereira Junior, J. & Avellan, F. (2020). Transposition of the mechanical behavior from model to prototype of Francis turbines. *Renewable Energy*, 152. doi : 10.1016/j.renene.2020.01.115.
- Valero, C., Egusquiza Montagut, M., Valentin, D., Presas, A. & Egusquiza, E. (2019). Behavior of Francis turbines at part load. Field assessment in prototype : Effects on the hydraulic system. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 240, 052029. doi : 10.1088/1755-1315/240/5/052029.
- Van der Auweraer, H., Guillaume, P., Verboven, P. & Vanlanduit, S. (2001a). Application of a Fast-Stabilizing Frequency Domain Parameter Estimation Method. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 123(4), 651-658. doi : 10.1115/1.1410369.
- Van der Auweraer, H., Mas, P., Peeters, B., Janssens, K. & Vecchio, A. (2008). Modal and path contribution models from in-operation data : Review and new approaches. *Shock and Vibration*, 15, 403-411.
- Van der Auweraer, H., Guillaume, P., Verboven, P. & Vanlanduit, S. (2001b). Application of a Fast-Stabilizing Frequency Domain Parameter Estimation Method. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme*, 123. doi : 10.1115/1.1410369.
- Van Overschee, P. & De Moor, B. (1992, 01). Subspace algorithm for the stochastic identification problem. 29, 1321-1326. doi : 10.1109/CDC.1991.261604.
- Van Overschee, P. & De Moor, B. (1996). Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, applications (vol. 19). doi : 10.1007/978-1-4613-0465-4.
- Viberg, M. (1995). Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, 31(12), 1835-1851. doi : [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(95\)00107-5](https://doi.org/10.1016/0005-1098(95)00107-5). Trends in System Identification.
- Vu, V. H. & Thomas, M. (2014). Uncertainties on modal parameters by operational modal analysis. *Mechanics and Industry*, 15, 153-158. doi : 10.1051/meca/2014018.
- Vu, V. H., Thomas, M., Lakis, A. & Marcouiller, L. (2011). Operational modal analysis by updating autoregressive model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25, 1028-1044. doi : 10.1016/j.ymsp.2010.08.014.
- Wei, Q. & Choi, Y. (2013). The optimization of j-groove shape in the draft tube of a francis turbine to suppress the draft surge. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*, 52.

- doi : 10.1088/1757-899X/52/5/052030.
- Welch, P. (1967). the use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2). doi : 10.1109/TAU.1967.1161901.
- Wildheim, J. (1979). Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4), 878-882. doi : 10.1115/1.3424671.
- Wildheim, J. (1981a). Excitation of rotating circumferentially periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 75(3), 397-416. doi : [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(81\)90386-2](https://doi.org/10.1016/0022-460X(81)90386-2).
- Wildheim, J. (1981b). Vibrations of rotating circumferentially periodic structures. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 34(2), 213-229. doi : 10.1093/qj-mam/34.2.213.
- Wirth, N. & Oeckerath, A. (2015). Analysis of flow-induced vibrations in turbomachinery by mapping of complex fluid pressures. *The International Journal of Multiphysics*, 9, 195-208. doi : 10.1260/1750-9548.9.2.195.
- Yan, W.-J. & Katafygiotis, L. S. (2015a). A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part I : Posterior most probable value and uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54-55, 139-155. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.07.027>.
- Yan, W.-J. & Katafygiotis, L. S. (2015b). A two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. Part II : Mode shape assembly and case studies. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54-55, 156-171. doi : <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2014.08.016>.
- Yan, W.-J. & Katafygiotis, L. S. (2019). An analytical investigation into the propagation properties of uncertainty in a two-stage fast Bayesian spectral density approach for ambient modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 118, 503-533.
- Yu, A., Zhou, D. & Chen, H. (2019). Numerical investigation of the behaviour of the cavitation rope in a Francis turbine with an optimized runner cone. *IOP Conference Series : Earth and Environmental Science*, 240, 022013. doi : 10.1088/1755-1315/240/2/022013.
- Yuen, K.-V. (2010). *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering*. doi : 10.1002/9780470824566.
- Yuen, K.-V. & Katafygiotis, L. (2003a). Bayesian Fast Fourier Transform Approach for Modal Updating Using Ambient Data. *Advances in Structural Engineering*, 6, 81-95. doi : 10.1260/136943303769013183.

- Yuen, K.-V. & Katafygiotis, L. (2003b). Bayesian Fast Fourier Transform Approach for Modal Updating Using Ambient Data. *Advances in Structural Engineering*, 6, 81-95. doi : 10.1260/136943303769013183.
- Yuen, K.-V., Katafygiotis, L. S. & Beck, J. L. (2002). Spectral density estimation of stochastic vector processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17(3), 265-272. doi : [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(02\)00011-5](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(02)00011-5).
- Zhang, F.-L., Au, S.-K. & Lam, H. F. (2015a). Assessing uncertainty in operational modal analysis incorporating multiple setups using a Bayesian approach. *Structural Control and Health Monitoring*, 22. doi : 10.1002/stc.1679.
- Zhang, F.-L., Ni, Y.-C., Au, S.-K. & Lam, H. F. (2015b). Fast Bayesian approach for modal identification using free vibration data, Part I : Most probable value. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71. doi : 10.1016/j.ymssp.2015.05.031.
- Zhang, L., Feng, F., Fan, X. & Jiang, P. (2012, 06). Reliability analysis of Francis turbine blade against fatigue failure under stochastic loading. pp. 987-990. doi : 10.1109/ICQR2MSE.2012.6246390.
- Zhang, Z., Wang, Y. & Fan, Z. (2015c). Similarity Analysis between Scale Model and Prototype of Large Vibrating Screen. *Shock and Vibration*, 2015. doi : 10.1155/2015/247193.
- Zhu, Y.-C. & Au, S.-K. (2018a). Bayesian operational modal analysis with asynchronous data - Part I : Most probable value. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 652-666. doi : 10.1016/j.ymssp.2017.05.027.
- Zhu, Y.-C. & Au, S.-K. (2018b). Bayesian operational modal analysis with asynchronous data - Part II : Posterior uncertainty. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 920-935. doi : 10.1016/j.ymssp.2017.05.023.
- Zhu, Y.-C., Au, S.-K. & Brownjohn, J. (2018). Bayesian operational modal analysis with buried modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 121, 246-263. doi : 10.1016/j.ymssp.2018.11.022.





## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : Dollon  
(avec précision du nom de jeune fille, le cas échéant)

DATE de SOUTENANCE : 10/12/2021

Prénoms : Quentin

TITRE : ANALYSE MODALE OPÉRATIONNELLE DES ROUES DE TURBINES HYDROÉLECTRIQUES PAR L'ÉTUDE DE RÉGIMES TRANSITOIRES

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2021LYSEI107

Ecole doctorale : MEGA

Spécialité : Génie mécanique, Traitement de Signal

RESUME : Le comportement modal des turbines hydroélectriques est difficile à prédire par la simulation, en raison de la complexité des conditions opérationnelles, des conditions aux limites et des interactions fluide-structure. Pour remédier à cette problématique, on propose de procéder à l'analyse modale opérationnelle des turbines hydroélectriques. En production, les sources d'excitation stochastiques sont rares et la réponse naturelle de la machine est peu détectable dans les signaux. Au contraire, lors de phases transitoires asynchrones, les harmoniques de la vitesse de rotation explorent une large bande de fréquence et entrent en résonance avec des modes structuraux. L'idée est d'exploiter ces résonances pour analyser le comportement de la machine. Dans une première phase de travail, l'analyse modale théorique d'une turbine soumise à un débalancement a permis de montrer que les turbines présentent un riche contenu harmonique, et que ces harmoniques sont sélectives, c'est-à-dire qu'elles n'excitent qu'un mode structural de diamètre nodal prédéfini. Il est démontré que ces harmoniques génèrent effectivement des résonances en opération. Dans un deuxième temps, un algorithme d'identification est proposé. La méthode utilise un schéma combiné de suivi d'ordres synchrones pour extraire les résonances harmoniques, et d'un modèle d'analyse modale opérationnel bayésien pour réaliser l'inférence. Enfin, une dernière phase de travail a consisté à améliorer le modèle bayésien existant, qui présente de nombreuses approximations asymptotiques, non raisonnable dans notre cadre où l'on dispose de peu de données. En ce sens, un modèle statistique d'échantillonnage numérique a été développé, basé sur un algorithme de Gibbs avancé. L'outil obtenu est plus fiable pour caractériser des données réduites, et montre d'excellentes propriétés de convergence le rendant compétitif avec les approches existantes.

MOTS-CLÉS : Analyse modale opérationnelle, Inférence bayésienne, Résonances synchrones, Turbines hydroélectriques

Laboratoire (s) de recherche : Département de Génie Mécanique (ETS Montréal, Canada), LVA (INSA Lyon, France)

Directeur de thèse: Antoine Tahan, Jérôme Antoni

Président de jury : Thomas Dupont

Composition du jury :  
Thomas Dupont, Président (ETS Montréal)

Georges Kouroussi, Rapporteur (Université de Mons)  
Roger Serra, Rapporteur (INSA Centre Val De Loire)

Emeline Sadoulet-Reboul, Examinatrice (Université de Franche-Comté)  
Yves Saint-Amant, Examineur (Université de Laval)  
Béatrice Faverjon, Examinatrice (INSA Lyon)

Antoine Tahan, Directeur de thèse (ETS Montréal)  
Jérôme Antoni, Co-Directeur de thèse (INSA Lyon)

Martin Gagnon, Invité (Institut de Recherche de Hydro-Québec)  
Christine Monette, Invitée (Andritz Hydro Canada)