



Symétries d'équations aux dérivées partielles apparaissant dans des modèles stochastiques

Laurène Valade

► To cite this version:

Laurène Valade. Symétries d'équations aux dérivées partielles apparaissant dans des modèles stochastiques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Normandie Université, 2021. Français. NNT : 2021NORMR088 . tel-03675698

HAL Id: tel-03675698

<https://theses.hal.science/tel-03675698>

Submitted on 23 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

THÈSE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité MATHÉMATIQUES

Préparée au sein de l'Université de Rouen Normandie

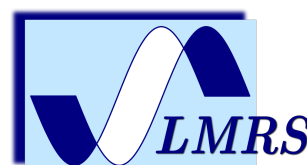
Symétries d'équations aux dérivées partielles apparaissant dans des modèles stochastiques

**Présentée et soutenue par
LAURENE VALADE**

**Thèse soutenue le 17/12/2021
devant le jury composé de**

MME ANA-BELA CRUZEIRO	PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université de Lisbonne (POR)	Rapporteur du jury
M. JOZSEF LORINCZI	PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Institut de Mathématiques Alfred Renyi	Rapporteur du jury
MME MICHELE THIEULLEN	MAITRE DE CONFERENCES, UNIVERSITE PARIS 6 PIERRE ET MARIE CURIE	Membre du jury
M. PAUL RAYNAUD DE FITTE	PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université de Rouen Normandie	Président du jury
M. PAUL LESCOT	PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université de Rouen Normandie	Directeur de thèse

Thèse dirigée par PAUL LESCOT (LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE RAPHAEL SALEM),



Résumé

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés par des processus stochastiques ou des pseudo-processus (notion qui sera expliquée dans cette thèse) que ce soit en physique ou encore en mathématiques financières.

On s'intéresse ici à certaines équations aux dérivées partielles (EDP) reliées à ce type de modèle.

Afin de trouver des solutions à ces équations à partir de solutions triviales on peut chercher à en déterminer les symétries.

En 1971, B. Kent Harrison et Frank B. Estabrook introduisent une méthode pour déterminer les symétries d'EDP : se donnant un système d'équations aux dérivées partielles après un changement de variables et/ou d'inconnues éventuel, on peut les exprimer comme l'annulation d'une famille de formes différentielles. Un isovecteur est alors défini comme un champ de vecteurs de toutes les variables préservant l'idéal différentiel engendré par les formes.

Ces dernières années, plusieurs équations ont été étudiées à l'aide de cette méthode et les symétries de plusieurs EDP ont été déterminées. Les calculs effectués dans tous ces cas laissent apparaître un grand degré de similarité parmi tous ces exemples.

Ainsi dans cet esprit, on a développé un cadre général pour le calcul des symétries avec cette méthode. Des propriétés des isovecteurs suivant le type d'EDP et certains résultats sur l'algèbre de Lie des isovecteurs ont pu être dégagés.

Abstract

Numerous phenomenons in physics or financial mathematics can be modelised by stochastic processes or "pseudo-stochastic" processes (this notion will be explained in this thesis). Here the subject will be some partial differential equations (EDP) related to this type of model.

In order to find solutions for these equations from trivial solutions, the determination of symmetries is efficient.

In 1971, B. Kent Harrison et Frank B. Estabrook introduced a method to determine the symmetries of EDP : from a system of partial differential equations, after possibly a change of variable and/or a change of unknown, it is possible to express them as the vanishing of a family of differential forms. An isovector is defined as a vector field of all the variables the Lie derivative of which leaves the differential ideal generated by the forms invariant.

These last years, several equations were studied thanks to this method and the symmetries of numerous EDP were determined. The computations in all these cases leave a large degree of similarity among these examples.

Thus with that in mind, a general framework for the calculus of the symmetries with this method is developed. Propositions and isovectors depending on the type of EDP and some results on the Lie algebra of isovectors have been obtained.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier infiniment mes parents pour m'avoir élevée dans l'amour, la liberté et le respect en croyant en moi et accompagnant mes choix. Vous savez déjà à quel point je vous aime mais le noter ici me remplit de fierté et d'émotions tant vous faites tout pour moi depuis toujours.

Ensuite je voudrais remercier l'ensemble des professeurs que j'ai rencontré et qui ont pris le temps de transmettre leur passion avec enthousiasme :

Mme Bouvet ma maitresse de CM2 qui a contribué à me faire comprendre que tout est possible et qu'une main tendue peut changer beaucoup de choses

Mr Delabarre qui fut le premier à me donner le goût des maths en faisant de chaque exercice supplémentaire un challenge

Mme Lanez, d'abord prof de sport, qui n'était pas ma matière préférée, loin de là, mais qui, par ses mots, toujours présents dans les moments difficiles, m'a donné une grande impulsion et une confiance en la vie et qui par la suite, en m'éveillant à la sophrologie, à continuer ce cheminement en moi

Mr Millet mon prof de maths de sup au lycée Pothier à Orléans dont le slogan et le TQDSR sont encore bien présents dans ma tête ; merci de m'avoir appris la rigueur

Mme Magiorani ma prof de physique en sup qui a réussi à faire des cours de physique un moment mathématique

Mr Lucas mon prof de physique en spé toujours au lycée Pothier avec qui les échanges étaient un régal

Mr Hauchecorne mon prof de maths de spé qui, par toutes ces anecdotes mathématiques et son humour, a marqué cette année et mon esprit, et auteur de "Les Contre-Exemples en Mathématiques" avec lequel j'ai révisé l'agrégation

Certains enseignants de l'université qui sont des collègues maintenant comme Ahmed Antoine Gaëlle Olivier Jean Baptiste Maxime

Bien évidemment je remercie Paul Lescot, mon directeur de thèse, de m'avoir appris mille et une propriétés mathématiques en tant que professeur depuis ma troisième année de licence, de m'avoir proposé ce sujet et de m'avoir apporté son aide, ses conseils avisés et ses connaissances durant tout ce travail avec bienveillance en favorisant ma confiance.

Je tiens à remercier les membres du jury Paul Raynaud de Fitte et Michèle Thieullen pour avoir bien voulu évaluer ce travail et en particulier mes deux rapporteurs Ana Bela Cruzeiro et József Lőrinczi pour avoir pris le temps de lire ce travail et de m'apporter leur expertise.

Je souhaite aussi remercier tous les membres du laboratoire, notamment les dirigeants du LMRS (Pierre Calka, que je remercie sincèrement aussi pour toutes les années où il m'a, à la fois, transmis des connaissances mathématiques et inspiré par ses qualités pédagogiques, et Ionut Danaila), de l'université de Rouen-Normandie et du département de mathématiques (Paul Lescot, Dalibor Volni, Paul Raynaud de Fitte et Adel Blouza) qui se sont succédé et m'ont permis de travailler dans de bonnes conditions, les membres du secrétariat, de la bibliothèque et de la reprographie (Sandrine et Edwige, que je remercie également pour leur amitié sans faille, Hamed, Marc et Isabelle) pour leur aide ainsi que tous les collègues avec qui j'ai pu échanger pendant ces quelques années. Aussi, que soit remercier l'école doctorale ED MIIS.

Je veux maintenant remercier mes amis (Marjo ma meilleure amie depuis 25 ans tu sais à quel point tu es importante pour moi ceci ne peut se résumer en quelques lignes, Oriane Ophélie et Antoine ma filleule mon amie et témoin et le parrain de mon trésor, Joanna et Axel mes amis fidèles, Prisca, Raphaël Pierre et Mathilde, les voisins des fontaines, Zuzu, Lucille et tous ceux qui ont jalonné ma vie d'amitié) et ma famille pour leur soutien (merci Choupie mon rayon de soleil d'être toi et pour nos conversations je t'aime, merci tata de m'avoir notamment appris que "si on veut on peut", Mathieu et mamie d'écouter mes répétitions, merci Patrick mon parrain pour nos énigmes, merci ma belle famille pour nos rencontres qui m'ont changé les idées).

Mon mari Florian doit fortement être remercié pour m'avoir encouragée dans les moments de doute, appuyée au quotidien et aimée dans les bons comme les mauvais jours.

Enfin, et je garde ici la meilleure pour la fin, je remercie ma fille Kaélia d'avoir bouleversé ma vie de bonheur, de m'avoir permis pendant cette thèse de découvrir mon plus beau rôle celui de maman et d'égayer chaque jour de ma vie.

Table des matières

Introduction	10
1 Théorie des symétries	13
1.1 La méthode de Harrison-Estabrook	15
1.1.1 Le cadre	15
1.1.2 Les isovecteurs	16
1.1.3 Des isovecteurs aux symétries de l'équation	18
1.2 Le résultat général	22
1.2.1 Cas général	22
1.2.2 L'équation avec le bilaplacien	29
1.2.2.1 Calcul des isovecteurs	29
1.2.2.2 Les symétries	39
1.2.2.3 Un peu d'algèbre	39
1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique	41
1.3.1 Le résultat	41
1.3.2 L'équation de Kuramoto-Sivashinsky	46
1.3.3 Korteweg de Vries généralisée	48
1.3.3.1 Equations de Korteweg de Vries à coefficients variables	49
1.3.3.2 Braken	51
1.3.3.3 Les applications	53
1.3.4 L'équation de Vigot	58
1.3.4.1 Intérêt de l'équation	58
1.3.4.2 Calcul des isovecteurs	58

1.3.4.3	Les symétries	59
1.3.4.4	Algèbre	60
1.3.5	Laplacien / Vigot : le lien	60
1.3.6	La pseudo stochastique	62
1.3.6.1	Pseudo processus	62
1.3.6.2	Lien avec l'équation de Vigot	64
1.3.6.3	Pseudo Intégration	65
2	L'ordre 2	67
2.1	Le résultat et l'application à l'équation de la chaleur	68
2.1.1	La théorie	68
2.1.2	Symétries de l'équation de la chaleur	71
2.2	Les équations dérivées de la chaleur	72
2.2.1	Black Scholes	72
2.2.1.1	Explication du modèle, lien avec l'équation	72
2.2.1.2	Recherche des isovecteurs	74
2.2.1.3	Les symétries	76
2.2.1.4	Un peu d'algèbre	77
2.2.1.5	Lien avec l'équation de la chaleur	78
2.2.2	L'équation de la chaleur rétrograde	78
2.2.2.1	Cas particulier $V = 0$	79
2.2.2.2	Cas particulier $V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2$:	81
2.2.3	L'équation de Burgers	86
2.2.3.1	Calcul des isovecteurs	86
2.2.3.2	Les symétries	88
2.2.3.3	L'algèbre	88
2.2.3.4	Rapport à l'équation de la chaleur	89
2.3	De l'équation de Burgers au modèle d'Hodgkin-Huxley	89
2.4	Craddock Platen	92
2.4.1	Explications	92
2.4.2	Calcul des symétries	93
2.4.3	Des modèles particuliers	102

TABLE DES MATIÈRES

2.4.3.1	Prix d'une option	102
2.4.3.2	Les modèles affines	103
2.4.3.3	Le modèle de Longstaff	104
3	Cas non linéaire : l'équation de Frey	105
3.1	Introduction	106
3.2	Towards the Frey equation	107
3.2.1	Financial framework	107
3.2.2	Black Scholes model	108
3.2.3	The tracking error	109
3.3	Computation of the symmetries	112
3.3.1	The method of isovectors	112
3.3.2	Computation of the isovectors	114
3.3.3	The symmetries and some algebra	120
	Conclusion	123
	Annexes	123
A	Algèbre de Lie	125
B	Rappel de stochastique	127
B.1	Les processus stochastiques	127
B.2	Le mouvement Brownien	130
B.2.1	sa construction	130
B.2.2	...comme martingale	131
B.2.3	...comme processus de Markov	132
B.3	Lien avec l'équation de la chaleur	134
B.4	L'intégrale de Wiener	134
C	Rappel de finance	137

D	Symmetries of partial differential equations and stochastic processes in mathematical physics and in finance (avec P. Lescot)	141
D.1	The method of isovectors	141
D.2	Examples	145
D.3	Comments	147
E	Bernstein processes, isovectors and mechanics (avec P. Lescot)	149
E.1	Introduction	149
E.2	Summary	150
E.3	A summary of Schrödinger's problem and its solution	150
E.4	The method of isovectors	152
E.4.1	Examples	154
E.4.1.1	Black Scholes	154
E.4.1.2	Backward heat equation with potentiel V	157
E.5	Bernstein processes	159
E.6	Parametrization of a one-factor affine model	160
E.7	Generalized Brownian Bridges	163
E.8	Acknowledgements	164
	Bibliographie	169

Introduction

De nombreux phénomènes peuvent être modélisés par des processus stochastiques ou des pseudo-processus (notion qui sera expliquée dans cette thèse) que ce soit en physique ou encore en mathématiques financières.

On s'intéresse ici à certaines équations aux dérivées partielles (EDP) reliées à ce type de modèle.

Afin de trouver des solutions à ces équations à partir de solutions triviales on peut chercher à en déterminer les symétries.

En 1971, B. Kent Harrison et Frank B. Estabrook introduisent une méthode pour déterminer les symétries d'EDP : se donnant un système d'équations aux dérivées partielles après un changement de variables et/ou d'inconnues éventuel, on peut les exprimer comme l'annulation d'une famille de formes différentielles. Un isovecteur est alors défini comme un champ de vecteurs en toutes les variables préservant l'idéal différentiel engendré par les formes.

Ces dernières années, plusieurs équations ont été étudiées à l'aide de cette méthode et les symétries de plusieurs EDP ont été déterminées. Les calculs effectués dans tous ces cas laissent apparaître un grand degré de similarité parmi tous ces exemples.

Ainsi dans cet esprit, on a développé un cadre général pour le calcul des symétries avec cette méthode. Des propriétés des isovecteurs suivant le type d'EDP et quelques résultats sur l'algèbre de Lie des isovecteurs ont pu être dégagés.

Organisation du manuscrit

Dans le premier chapitre, on explique la méthode et on définit les objets algébriques avec lesquels on travaillera. Ce chapitre est aussi l'occasion de donner le résultat le plus général de cette thèse sur une des composantes des isovecteurs. Enfin un théorème de ce chapitre permet de trouver les isovecteurs pour une classe un peu plus restreinte d'équations seulement en résolvant deux équations. Ce résultat permet alors des applications en physique.

Le second chapitre est consacré à l'ordre deux. En se limitant à un type d'équation d'ordre deux, deux équations plus simples permettent alors de trouver les isovecteurs. On présente aussi dans la suite de ce chapitre des applications aux équations qui dérivent de celle de la chaleur ainsi qu'à des équations liées à la finance.

Le troisième chapitre est l'article portant sur l'équation du modèle décrit par Frey qui est une variante non linéaire de l'équation la plus connue des mathématiques financière : celle de Black-Scholes. Cet article a été soumis à "Methods and Applications of Analysis".

Les annexes sont constituées de rappels ainsi que des deux articles écrits avec Paul Lescot "Symmetries of partial differential equations and stochastic processes in mathematical physics and in finance" paru dans *Journal of physics, Conference Series* et "Bernstein processes, isovectors and mechanics" accepté pour *Geometry and Invariance in Stochastic Dynamics* à paraître chez Springer Nature.

Chapitre 1

Théorie des symétries

Sommaire

1.1	La méthode de Harrison-Estabrook	15
1.1.1	Le cadre	15
1.1.2	Les isovecteurs	16
1.1.3	Des isovecteurs aux symétries de l'équation	18
1.2	Le résultat général	22
1.2.1	Cas général	22
1.2.2	L'équation avec le bilaplacien	29
1.2.2.1	Calcul des isovecteurs	29
1.2.2.2	Les symétries	39
1.2.2.3	Un peu d'algèbre	39
1.3	Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique	41
1.3.1	Le résultat	41
1.3.2	L'équation de Kuramoto-Sivashinsky	46
1.3.3	Korteweg de Vries généralisée	48
1.3.3.1	Equations de Korteweg de Vries à coefficients variables	49
1.3.3.2	Braken	51
1.3.3.3	Les applications	53
1.3.4	L'équation de Vigot	58
1.3.4.1	Intérêt de l'équation	58
1.3.4.2	Calcul des isovecteurs	58
1.3.4.3	Les symétries	59
1.3.4.4	Algèbre	60
1.3.5	Laplacien / Vigot : le lien	60
1.3.6	La pseudo stochastique	62
1.3.6.1	Pseudo processus	62

1.3.6.2	Lien avec l'équation de Vigot	64
1.3.6.3	Pseudo Intégration	65

1.1 La méthode de Harrison-Estabrook

1.1.1 Le cadre

Soit $M := J \times O \times \mathbb{R}^{\binom{n+k}{n}+1}$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$ et O un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

On considère une équation aux dérivées partielles d'ordre k à n variables d'espace ($\mathcal{E}$).

On note $u : \mathcal{J} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de cette équation.

On définit $A = \frac{\partial u}{\partial t}$ et pour $l \in \{1, \dots, k\}$ et pour $\theta_1 + \dots + \theta_n = l$, $B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} = \frac{\partial^l u}{\partial q_1^{\theta_1} \dots \partial q_n^{\theta_n}}$ où par exemple pour $n = 4$ $B_3^{(0,2,1,0)} = \frac{\partial^3 u}{\partial q_2^2 \partial q_3}$. Pour simplifier les notations si l'un des θ_i est nul on pourra l'omettre; ainsi par exemple $B_3^{(0,2,1,0)}$ se note aussi $B_3^{2_2 1_3}$.

La variété M est appelée espace d'états; un point est alors noté $(t, q_1, \dots, q_n, u, A, B_1, \dots, B_{\binom{n+k}{n}-1})$.

Définition 1.1.1.1

Fibré tangent

Le fibré tangent TM associé à une variété différentielle M est la somme disjointe de tous les espaces tangents en tous les points de la variété, muni d'une structure de variété différentielle prolongeant celle de M .

Définition 1.1.1.2

Champ de vecteurs

Un champ de vecteurs sur une variété différentielle est une section du fibré tangent de cette variété

Définition 1.1.1.3

Dérivée de Lie

*On appelle dérivée de Lie associée au champ de vecteurs $N \in TM$ l'unique application linéaire $\mathcal{L}_N : \wedge T^*M \rightarrow \wedge T^*M$ vérifiant les hypothèses suivantes :*

- *Pour toute fonction f différentiable sur M à valeur réelles, $\mathcal{L}_N(f) = N \cdot f$*
- *$\mathcal{L}_N$ est une dérivation de l'algèbre $\wedge T^*M$ c'est à dire, pour toutes formes différentielles α et β , $\mathcal{L}_N(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_N(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_N(\beta)$, où $\wedge$ désigne le produit extérieur des deux formes différentielles*
- *$\mathcal{L}_N$ et la dérivée extérieure d commutent.*

Les calculs seront réalisés dans l'algèbre différentielle $\wedge T^*M$.

On considère temporairement u , $A = \frac{\partial u}{\partial t}$ et les $B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}$ comme des variables indépendantes.

Soit $\alpha = du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^i dq_i$, une 1-forme différentielle.

On a alors $d\alpha = -dA dt - \sum_{i=1}^n dB_1^i dq_i$.

L'équation ($\mathcal{E}$) est équivalente à l'annulation de α , $d\alpha$ et d'un certain nombre de formes différentielles de degré au moins 2 notées δ_j , $d\delta_j$ où $j \in \mathbb{N}$ sur une sous variété de dimension $n + 1$.

On pose $I = \langle \alpha, d\alpha, \delta_j, d\delta_j \rangle$. C'est un idéal différentiel fermé de $\wedge T^*M$ ($d(I) \subset I$).

Lemme 1.1.1.4

Chaque $n+1$ -forme de I peut s'écrire $a\alpha + z d\alpha + \xi$ avec z une n -1-forme, $\xi \in \langle \delta_j, d\delta_j | j \in \mathbb{N} \rangle$ et a une n -forme.

En notant $a = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ *i \in \{t, q_1, \dots, q_n, u, A, B_1, \dots, B_{\binom{n+k}{n}-1}\} \\ *i \neq *j \text{ pour } i \neq j}} a_{*1 \dots *n} d*1 \dots d*n, \text{ on peut supposer tous les } a_{*1 \dots *n-1} u = 0.$

Démonstration : Si $a_{*1 \dots *n-1} u \neq 0$, on peut remplacer $a\alpha$ par $a'\alpha$ où $a'_{*1 \dots *n-1} u = 0$ en posant

$$\forall \{*1, \dots, *n-1\} \in \{A, B_1, \dots, B_{\binom{n}{n+k}-1}\},$$

$$a'_{*1, \dots, *n-1, t} = a_{*1, \dots, *n-1, t} + a_{*1, \dots, *n-1, u} A$$

$$a'_{*1, \dots, *n-1, q_i} = a_{*1, \dots, *n-1, q_i} + a_{*1, \dots, *n-1, u} B_1^i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{et } a'_{*1, \dots, *n} = a_{*1, \dots, *n}$$

car $\alpha = du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^{1i} dq_i$ donc ainsi $a\alpha = a'\alpha$. ■

1.1.2 Les isovecteurs

Dans TM , un champ de vecteurs s'écrit :

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n N^{q_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + N^u \frac{\partial}{\partial u} + N^A \frac{\partial}{\partial A} + \sum_{l=1}^k \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} N^{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} \frac{\partial}{\partial B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}}.$$

Définition 1.1.2.1

On dit que le champ de vecteurs $N \in TM$ est un isovecteur pour $(\mathcal{E})$ si $\mathcal{L}_N(I) \subset I$.

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des isovecteurs.

Remarque 1.1.2.2

$\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pour le crochet des champs de vecteurs

1.1 La méthode de Harrison-Estabrook

Lemme 1.1.2.3

Soit $N \in \mathcal{G}$. Il existe une fonction $F = F_N(t, q_1, \dots, q_n, u, A, B_1^1, \dots, B_1^n)$:

$$\begin{aligned} N^t &= -F_A \\ N^{q_i} &= -F_{B_1^i} \\ N^u &= F + AN^t + \sum_{i=1}^n B_1^i N^{q_i} \\ N^A &= AF_u + F_t \\ N^{B_1^i} &= B_1^i F_u + F_{q_i} \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2.4

Ce lemme est présent dans ([HE71], p. 657). Il est utilisé dans de nombreux cas particuliers notamment dans ([HjC14],[Les12],[LZ02],[LZ07]).

Démonstration : Soit $N \in \mathcal{G}$; comme α est la seule 1-forme parmi les générateurs de I , on doit avoir

$$\mathcal{L}_N(\alpha) = \xi\alpha.$$

On pose $F = N \rfloor \alpha$ ([HE71] p.656).

On a alors

$$F = N^u - AN^t - \sum_{i=1}^n B_1^i N^{q_i};$$

or $\mathcal{L}_N(\alpha) = N \rfloor d\alpha + d(N \rfloor \alpha)$ donc $N \rfloor d\alpha = \xi\alpha - dF$.

C'est à dire

$$\begin{aligned} -N^A dt + N^t dA - \sum_{i=1}^n N^{B_1^i} dq_i + \sum_{i=1}^n N^{q_i} dB_1^i &= \xi(du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^i dq_i) - F_t dt - \sum_{i=1}^n F_{q_i} dq_i - F_u du - F_A dA \\ &\quad - \sum_{i=1}^n F_{B_1^i} dB_1^i - \sum_{l=2}^k \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} F_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} dB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on obtient :

$$\begin{aligned} dt &: -N^A &= -A\xi - F_t \\ dA &: N^t &= -F_A \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad dq_i &: -N^{B_1^i} &= -B_1^i \xi - F_{q_i} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad dB_1^i &: N^{q_i} &= -F_{B_1^i} \\ du &: 0 &= \xi - F_u \\ \forall l \in \{2, \dots, k\} \text{ et } \forall (\theta_1, \dots, \theta_n) \text{ tel que } \theta_1 + \dots + \theta_n = l \quad dB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} &: 0 &= -F_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} \end{aligned}$$

D'où le résultat souhaité ■

Corollaire 1.1.2.5

Si $N^t = N^t(t, q_1, \dots, q_n, u)$ et $N^{q_i} = N^{q_i}(t, q_1, \dots, q_n, u)$ alors $N^u = N^u(t, q_1, \dots, q_n, u)$.

Remarque 1.1.2.6

Ce corollaire est inspiré d'une remarque ([CP04])

Démonstration : D'après le lemme on a alors

$$N^t = -F_A, \text{ donc } F_{AA} = 0$$

$$N^{q_i} = -F_{B_1^i} \text{ donc } F_{B_1^i B_1^i} = F_{AB_1^i} = 0$$

et

$$N^u = F - AF_A - \sum_{i=1}^n B_1^i F_{B_1^i}.$$

donc $N_A^u = F_A - F_A = 0$ car $F_{AA} = 0$ et $N_{B_1^i}^u = F_{B_1^i} - F_{B_1^i} - AF_{AB_1^i} - \sum_{j=1}^n B_1^j F_{B_1^i B_1^j} = 0$ car $F_{B_1^i B_1^j} = F_{AB_1^i} = 0$. ■

1.1.3 Des isovecteurs aux symétries de l'équation
Définition 1.1.3.1

On définit :

$$\mathcal{J}_0 = \{N \in \mathcal{G} | N^t = N^{q_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\mathcal{O} = \{N \in \mathcal{G} | N^{q_i} = q_i \psi_i(t) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Proposition 1.1.3.2

$\mathcal{J}_0$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$.

Démonstration : Soient $N \in \mathcal{J}_0$ et $N' \in \mathcal{J}_0$.

$$[N, N']^t = [N, N'](t) = N(N'^t) - N'(N^t) = 0$$

$$[N, N']^{q_i} = [N, N'](q_i) = N(N'^{q_i}) - N'(N^{q_i}) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Hypothèse 1.1.3.3

— $(H_1) : \forall N \in \mathcal{G}$,

$$N^t = -f(t)$$

(Cette hypothèse sera réalisée pour (1.2.1.1), (1.3.1.2) et (2.1) donc dans tous les exemples de cette thèse)

— $(H_2) : \forall N \in \mathcal{G}$,

$$N^{q_i} = -w^i(t, q_1, \dots, q_n)$$

(Cette hypothèse sera réalisée pour (1.3.1.2) et (2.1))

1.1 La méthode de Harrison-Estabrook

Proposition 1.1.3.4

Sous (H_1) , $\mathcal{O}$ est une sous- algèbre de $\mathcal{G}$.

Démonstration : Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, $N \in \mathcal{O}$ et $N' \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned} [N, N']^{q_i} &= [N, N'](q_i) = N(N'^{q_i}) - N'(N^{q_i}) = N(q_i \psi_{iN'}(t)) - N'(q_i \psi_{iN}(t)) \\ &= N^{q_i} \psi_{iN'}(t) + q_i N^t \frac{d\psi_{iN'}}{dt} - N'^{q_i} \psi_{iN}(t) - q_i N'^t \frac{d\psi_{iN}}{dt} \\ &= q_i \psi_{iN}(t) \psi_{iN'}(t) + q_i N^t \psi'_{iN'}(t) - q_i \psi_{iN'}(t) \psi_{iN}(t) - q_i N'^t \psi'_{iN}(t) \end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Proposition 1.1.3.5

Sous (H_1) et (H_2) , $\mathcal{J}_0$ est un idéal de $\mathcal{G}$.

Démonstration : Soient $N \in \mathcal{J}_0$ et $N' \in \mathcal{G}$.

$$[N, N'](t) = N(N'^t) - N'(N^t) = 0$$

grâce à (H_1) .

De même :

$$[N, N'](q_i) = N(N'^{q_i}) - N'(N^{q_i}) = N^t \frac{\partial N'^{q_i}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n N^{q_j} \frac{\partial N'^{q_i}}{\partial q_j} = 0$$

par (H_2) . ■

Hypothèse 1.1.3.6

$(H_3) : \forall N \in \mathcal{G}$,

$$N^u = um(t, q_1, \dots, q_n) + l(t, q_1, \dots, q_n)$$

(Ceci sera vrai dans (1.3.1.2) pour $G_{B_{k-1}B_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ et dans (2.1) dès que $Q = Q(t, q)$ et $R_{B_1B_1} = 0$)

Lemme 1.1.3.7

Sous (H_1) , (H_2) et (H_3) , en posant $N^u = l + um$ et $N'^u = l' + um'$,

$$l_{[N, N']} = N(l') - N'(l) + lm' - l'm$$

et

$$m_{[N, N']} = N(m') - N'(m).$$

Démonstration :

$$[N, N']^u = [N, N'](u) = N(N'^u) - N'(N^u) = N(l') + (l + um)m' + uN(m') - N'(l) - (l' + um')m - uN'(m)$$

Définition 1.1.3.8

Sous (H_3) , on définit :

$$\mathcal{J} = \{N \in \mathcal{G} \mid N^t = N^{q_i} = m = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$\mathcal{H} = \{N \in \mathcal{G} \mid l = 0\}$$

$$\mathcal{M} = \{N \in \mathcal{H} \mid m = c \text{ avec } c \text{ une constante}\} \quad (\text{cet ensemble est } \mathcal{J}_V \text{ dans [HjC14]})$$

$$\mathcal{K} = \mathcal{O} \cap \mathcal{H} \quad (\text{il est aussi défini dans [HL19b] par } K_V)$$

Proposition 1.1.3.9

Sous (H_3) , $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. On nomme $\mathcal{H}$, l'algèbre des isovecteurs.

Démonstration : Pour $N \in \mathcal{H}$ et $N' \in \mathcal{H}$,

$$[N, N']^u = [N, N'](u) = N(N'^u) - N'(N^u) = N^t u m'_t + \sum_{i=1}^n N^{q_i} u m'_{q_i} + u m m' - N'^t u m_t - \sum_{i=1}^n N'^{q_i} u m_{q_i} - u m' m$$

Ainsi $l_{[N, N']} = 0$ et alors $[N, N'] \in \mathcal{H}$; donc $\mathcal{H}$ est une sous algèbre de $\mathcal{G}$. ■

Proposition 1.1.3.10

Sous la conjonction de (H_1) , (H_2) et (H_3) , $\mathcal{M}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{H}$.

Démonstration : Soient $N \in \mathcal{M}$ et $N' \in \mathcal{M}$, d'après le lemme 1.1.3.7, $m_{[N, N']} = 0$ et alors $[N, N'] \in \mathcal{M}$; donc $\mathcal{M}$ est une sous algèbre de $\mathcal{H}$. ■

Proposition 1.1.3.11

Sous (H_1) et (H_3) , $\mathcal{K}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$.

Démonstration : Comme $\mathcal{O}$ et $\mathcal{H}$ sont des sous algèbres de $\mathcal{G}$. ■

Proposition 1.1.3.12

Sous la conjonction de (H_1) , (H_2) et (H_3) ,

- $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{G}$.
- $[\mathcal{J}, \mathcal{J}] \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$.

Démonstration : – Soient $N \in \mathcal{G}$ et $N' \in \mathcal{J}$.

Par (H_1) et par définition de $\mathcal{J}$ $[N, N']^t = 0$.

1.1 La méthode de Harrison-Estabrook

$[N, N']^{q_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ par (H_2) et par définition de $\mathcal{J}$.

Par le lemme 1.1.3.7, $m_{[N, N']} = N(m') - N'(m) = 0$.

– Soient $N \in \mathcal{J}$ et $N' \in \mathcal{J}$.

Comme $\mathcal{J}$ est un idéal c'est une sous-algèbre donc $[N, N'] \in \mathcal{J}$.

Par le lemme 1.1.3.7, $l_{[N, N']} = N(l') - N'(l) + lm' - l'm = 0$ donc $[N, N'] \in \mathcal{H}$. ■

Définition 1.1.3.13

Symétrie

On appelle symétrie de l'équation toute application qui transforme une solution de l'équation en une solution de l'équation.

Si on note α le paramètre de la transformation générée par un isovecteur $N \in \mathcal{G}$ il existe une application

$$T_{N, \alpha} : (t, q_1, \dots, q_n, u, A, B_1^1, \dots, B_1^n) \mapsto (t_\alpha, q_{1\alpha}, \dots, q_{n\alpha}, u_\alpha, A_\alpha, B_{1\alpha}^1, \dots, B_{1\alpha}^n)$$

On note $v_{N, \alpha}$ l'application qui transforme une solution u en u_α et on a $u_\alpha(t, q_1, \dots, q_n) = v(t_\alpha, q_{1\alpha}, \dots, q_{n\alpha})$

On note alors $T_{N, \alpha}(u) = v$.

$T_{N, \alpha}(u)$ est une solution de l'équation pour tout α donc les $T_{N, \alpha}$ sont des symétries de l'équation et $(T_{N, \alpha})$ est un groupe à un paramètre de symétries de l'équation.

On a

$$u_\alpha = T_{N, \alpha}(u)(t_\alpha, q_{1\alpha}, \dots, q_{n\alpha}).$$

On note $\frac{dT_{N, \alpha}}{d\alpha}(u)_{/\alpha=0} = S(u)$.

S est le générateur du groupe à un paramètre de symétries $(T_{N, \alpha})$.

Si $N \in \mathcal{H}$ ($l = 0$), alors $T_{N, \alpha} = e^{\alpha \tilde{N}}$ et $S = \tilde{N}$ ([HJC14], [LZ07] dans lequel il y a une erreur de signe).

La transformation

$$N \mapsto \tilde{N}$$

est donc donnée par $\tilde{N}(u) = -N^t \frac{\partial u}{\partial t} - N^{q_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} - \dots - N^{q_n} \frac{\partial u}{\partial q_n} + N^u$

Proposition 1.1.3.14

Sous (H_1) , (H_2) et (H_3) , l'application $N \mapsto -\tilde{N}$ est un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathcal{H}$ dans $\wedge T^(\mathbb{R}^{n+1})$.*

Démonstration :

$$[-\tilde{N}, -\tilde{M}](u) = [\tilde{N}, \tilde{M}](u) = \tilde{N}(\tilde{M}(u)) - \tilde{M}(\tilde{N}(u))$$

Or

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\tilde{M}(u)) &= -N^t \frac{\partial}{\partial t} (-M^t \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n M^{q_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} + u m_M) - \sum_{j=1}^n N^{q_j} (\frac{\partial}{\partial q_j} (-M^t \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n M^{q_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} + u m_M)) + m_N \tilde{M}(u) \\ &= N^t \frac{\partial M^t}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + N^t M^t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^n N^t \frac{\partial M^{q_i}}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^n N^t M^{q_i} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial q_i} - N^t m_M \frac{\partial u}{\partial t} - N^t u \frac{\partial m_M}{\partial t} + \\ &\quad \sum_{j=1}^n N^{q_j} M^t \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial t} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n N^{q_j} \frac{\partial M^{q_i}}{\partial q_j} \frac{\partial u}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n N^{q_j} M^{q_i} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_i} - \sum_{j=1}^n N^{q_j} \frac{\partial u}{\partial q_j} m_M \\ &\quad - \sum_{j=1}^n N^{q_j} u \frac{\partial m_M}{\partial q_j} - m_N M^t \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n m_N M^{q_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} + m_N m_M u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [-\tilde{N}, -\tilde{M}](u) &= \tilde{N}(\tilde{M}(u)) - \tilde{M}(\tilde{N}(u)) \\
 &= (N^t \frac{\partial M^t}{\partial t} - M^t \frac{\partial N^t}{\partial t}) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n (N^t \frac{\partial M^{q_i}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n N^{q_j} \frac{\partial M^{q_i}}{\partial q_j} - M^t \frac{\partial N^{q_i}}{\partial t} - \sum_{j=1}^n M^{q_j} \frac{\partial N^{q_i}}{\partial q_j}) \\
 &\quad - u N m_M + u M m_N \\
 &= [N, M]^t \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n [N, M]^{q_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} - u m_{[M, N]} \\
 &= -[N, M](u)
 \end{aligned}$$

■

1.2 Le résultat général

Des équations aux dérivées partielles d'ordre 3 ou plus se présentent dans de nombreux modèles d'élasticité linéaire : flexion et déformation de tiges, vibrations des plaques associées à diverses conditions aux limites.

Cette classe de problèmes de valeurs aux limites trouve de nombreuses applications, par exemple dans la modélisation de la déformation des voies ferrées due aux contraintes, les rails étant liés à la plateforme ; ou dans l'étude de réseaux de poutres modélisant la construction de systèmes de plancher pour bâtiments, ponts et navires.

1.2.1 Cas général

Soient $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\theta_1 + \dots + \theta_n = k$ avec $k \in \mathbb{R}$, $Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}$, T et R des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur M .

On considère, pour l'un des $Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} \neq 0$ et $T \neq 0$ une équation de la forme :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E}_{g,k,n}) : \sum_{\theta_1=0}^k \sum_{\theta_2=0}^{k-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{k-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}(t, q_1, \dots, q_n, u, B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}) B_k^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} + T(t, q_1, \dots, q_n, u, B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}) A \\
 + R(t, q_1, \dots, q_n, u, B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}) = 0 \quad \text{avec } l \in \{1, \dots, k\} \text{ et } \theta'_1 + \dots + \theta'_n = l \text{ quelconques}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Théorème 1.2.1.1

Pour $(\mathcal{E}_{g,k,n})$, on a :

$$N^t = N^t(t)$$

(C'est à dire que (H_1) est vérifiée)

Démonstration : On a

$$\alpha = du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^i dq_i$$

1.2 Le résultat général

$$d\alpha = -dAdt - \sum_{i=1}^n dB_1^i dq_i$$

On pose

$$\gamma = (TA+R)dtdq_1 \dots dq_n + \sum_{i=1}^n \sum_{\theta_1=0}^k \sum_{\theta_2=0}^{k-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{k-\sum_{j=1}^{n-1} \theta_j} (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} dtdB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i-1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n$$

$$\beta_{l_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}}^i = dtdB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n - (-1)^{i-1} B_{l+1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i+1, \dots, \theta_n)} dtdq_1 \dots dq_n \text{ pour } l \in \{1, \dots, k-1\}, i \in \{1, \dots, n\}$$

$$d\beta_{l_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}}^i = (-1)^i dB_{l+1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i+1, \dots, \theta_n)} dtdq_1 \dots dq_n \text{ pour } l \in \{1, \dots, k-1\}, i \in \{1, \dots, n\}$$

On a donc

$$\begin{aligned} d\gamma &= AT_u dtdtdq_1 \dots dq_n + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{l=1}^k AT_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} dB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} dtdq_1 \dots dq_n + TdAdtdq_1 \dots dq_n \\ &\quad + R_u dtdtdq_1 \dots dq_n + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{l=1}^k R_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} dB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} dtdq_1 \dots dq_n \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_{q_i}} dq_i dtdB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i-1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_u} dtdtdB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i-1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^k \sum_{\theta'_1=0}^{l-\theta'_1} \sum_{\theta'_2=0}^{l-\theta'_2} \dots \sum_{\theta'_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta'_i} (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_{B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}}} dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dtdB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i-1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n \\ &= AT_u \alpha dtdq_1 \dots dq_n + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{l=1}^k AT_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} \sum_{i=1}^n (-1)^i d\beta_{l-1, (\theta_1, \dots, \theta_n)}^i - Td\alpha dtdq_1 \dots dq_n + R_u \alpha dtdq_1 \dots dq_n \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{l=1}^k R_{B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)}} \sum_{i=1}^n (-1)^i d\beta_{l-1, (\theta_1, \dots, \theta_n)}^i + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_{q_i}} d\beta_{k-2, (\theta_1, \dots, \theta_n)}^i \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_u} \alpha dtdB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i-1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n \\ &\quad + \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{l=1}^k \sum_{\theta'_1=0}^{l-\theta'_1} \sum_{\theta'_2=0}^{l-\theta'_2} \dots \sum_{\theta'_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta'_i} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_{B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}}} dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} \beta_{k-1, (\theta_1, \dots, \theta_n)}^i \\ &\quad - \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{l=1}^k \sum_{\theta'_1=0}^{l-\theta'_1} \sum_{\theta'_2=0}^{l-\theta'_2} \dots \sum_{\theta'_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta'_i} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)_{B_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)}}} B_k^{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)} d\beta_{l-1, (\theta'_1, \dots, \theta'_n)}^i \end{aligned}$$

$(\mathcal{E}_{g,k,n})$ est équivalente à l'annulation de ces formes.

On pose $I = \langle \alpha, d\alpha, \gamma, \beta_{j_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}}^i, d\beta_{j_{(\theta_1, \dots, \theta_n)}}^i \rangle$, avec $j \in \{1, \dots, k-1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ tels

que $\sum_{i=1}^n \theta_i = l$. I est bien un idéal différentiel fermé car $d\gamma \in I$.

Comme γ est une $(n+1)$ -forme, on doit avoir

$$\mathcal{L}_N(\gamma) = a\alpha + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\theta_1=0}^j \sum_{\theta_2=0}^{j-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{j-\sum_{m=1}^{n-1} \theta_m} \sum_{i=1}^n b_{j(\theta_1, \dots, \theta_n)}^i \beta_{j(\theta_1, \dots, \theta_n)}^i + g\gamma + z d\alpha$$

avec $a = a_1 dt + \sum_{i=1}^n a_{2,i} dq_i + a_4 dA + \sum_{\theta_1=0}^j \sum_{\theta_2=0}^{j-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{j-\sum_{m=1}^{n-1} \theta_m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{5,i,j} dB_{j(\theta_1, \dots, \theta_n)}^i$ une 1-forme, $b_{j(\theta_1, \dots, \theta_n)}^i$, g et z des 0-formes. (1.1.1.4)

En identifiant les coefficients :

Pour $k \neq 2$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ fixé :

$$\begin{aligned} dq_1 \dots dq_n dB_{k-1}^i & : (TA + R)N_{B_{k-1}}^t & = (-1)^i B_1^i a_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n), (5, i, k-1)} \\ & \quad + (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_{q_i}^t \\ dudB_{k-1}^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_u^t & = (-1)^{i-1} a_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n), (5, i, k-1)} \\ dAdB_{k-1}^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_A^t & = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{n-2} B_1^j a_{4, (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ & \quad + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{n-1} B_1^j a_{4, (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dB_1^\alpha dB_{k-1}^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_{B_1}^t & = \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^{n-2} B_1^m a_{(5,1), (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ & \quad + \sum_{m=i+1}^n (-1)^{n-1} B_1^m a_{(5,1), (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudB_1^\alpha dB_{k-1}^i dq_1 \dots d\hat{q}_m \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : 0 & = a_{(5,1), (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudAdB_{k-1}^i dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : 0 & = a_{4, (5, k-1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \end{aligned}$$

$$N_A^t = -F_{AA} = 0$$

Ainsi on pose

$$F = Af(t, q, u, B_1) + e(t, q, u, B_1)$$

On a :

$$N_{B_1^\theta}^t = 0$$

Aussi $N_{q_i}^t = -B_1^i N_u^t$ donc en différenciant par rapport à B_1^i on a $N_u^t = 0$ et $N_{q_i}^t = 0$.

D'où $f = f(t)$.

Pour $k = 2$ et $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ fixé :

$$\begin{aligned} dq_1 \dots dq_n dB_1^i & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_{q_i}^t & = (-1)^i B_1^i a_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n), (5, i, 1)} \\ & \quad - (TA + R) N_{B_1}^t & \quad + (-1)^n z_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_u^t & = (-1)^{i-1} a_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n), (5, i, 1)} \\ dAdB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_A^t & = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{n-2} B_1^j a_{4, (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ & \quad + \sum_{j=i+1}^n (-1)^{n-1} B_1^j a_{4, (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dB_1^\alpha dB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^{i-1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} N_{B_1}^t & = \sum_{m=1}^{i-1} (-1)^{n-2} B_1^m a_{(5,1), (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ & \quad + \sum_{m=i+1}^n (-1)^{n-1} B_1^m a_{(5,1), (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudB_1^\alpha dB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_m \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : 0 & = a_{(5,1), (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{m}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudAdB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : 0 & = a_{4, (5, 1, i), (2,1), \dots, (2, \hat{j}), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dAdtdq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : (-1)^i (TA + R) N_A^{q_i} & = (-1)^n A a_{4, (2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ & \quad + \sum_{\alpha=1}^n (-1)^i Q_i N_A^{B_1^\alpha} & \quad - z_{(2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \\ dudAdq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n & : 0 & = a_{4, (2,1), \dots, (2, \hat{i}), \dots, (2, n)} \end{aligned}$$

1.2 Le résultat général

$$N_A^t = -F_{AA} = 0$$

Ainsi on pose

$$F = Af(t, q, u, B_1) + e(t, q, u, B_1)$$

$$N_{B_1^\theta}^t = 0$$

On a d'autre part $N_A^{q_i} = -F_{B_1^i A} = -f_{B_1^i} = 0$ et $N_A^{B_1^\theta} = B_1^\theta f_u + f_{q_\theta}$

$$\text{Alors } z_{(2,1)\dots(2,i)\dots(2,n)} = \sum_{\theta=1}^n (-1)^{i+1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} (B_1^\theta f_u + f_{q_\theta})$$

$$\text{Ainsi } (-1)^i Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} f_{q_i} = (-1)^{i+1} B_1^i Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} f_u + (-1)^n \sum_{\theta=1}^n (-1)^{i+1} Q_{(\theta_1, \dots, \theta_n)} (B_1^\theta f_u + f_{q_\theta})$$

On différencie par rapport à B_1^θ pour $\theta \neq i$ on a $f_u = 0$.

Par suite $f_{q_i} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

D'où $f = f(t)$. ■

Corollaire 1.2.1.2

Il existe deux fonctions $f(t)$ et $e(t, q_1, \dots, q_n, u, B_1^1, \dots, B_1^n)$ définies par $f = -N^t$ et $e = N^u - \sum_{i=1}^n B_1^i N^{q_i}$.

Ainsi

$$N^t = -f$$

$$N^{q_i} = -e_{B_1^i} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

$$N^u = e - \sum_{i=1}^n B_1^i e_{B_1^i}$$

$$N^A = Ae_u + Af_t + e_t$$

$$N^{B_1^i} = B_1^i e_u + e_{q_i} \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\}$$

Hypothèse 1.2.1.3

(H_4) : On suppose que pour tout $l \in \{2, \dots, k\}$ et pour tout $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ tels que à la fois $\theta_1 + \dots + \theta_n = l$ et $\theta_i = 0$ ou 1 pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $B_l^{(\theta_1, \dots, \theta_n)} = 0$

Lemme 1.2.1.4

Sous (H_4) , $\forall l \in \{1, \dots, k\}$, les N^{B_l} ne dépendent que de $N^t, N^{q_1}, \dots, N^{q_n}$ et N^u .

De plus on a :

$$\begin{aligned}
 N^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} &= N_{q_j}^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} + \sum_{r=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r q_r} + \sum_{i=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_1^i e_{B_1^i u} + B_1^j N_u^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_j \dots \theta'_n}} \\
 &\quad \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta_1''=0}^s \sum_{\theta_2''=0}^{s-\theta_1''} \dots \sum_{\theta_n''=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i''} B_{s+1,j}^{\theta_1'' \dots \theta_j'' + 1 \dots \theta_n''} N_{B_s^1 \dots \theta_n''}^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r q_r} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i q_j} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^j B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_{2,i}^{2i} e_{B_1^i B_1^i} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^r B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r u} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_1^j B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i u}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Démonstration : Comme pour la démonstration du théorème 1.1, on pose :

$$\begin{aligned}
 \alpha &= du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^i dq_i \\
 d\alpha &= -dA dt - \sum_{i=1}^n dB_1^i dq_i
 \end{aligned}$$

Alors on peut poser :

$$\gamma = T du dq_1 \dots dq_n + R dt dq_1 \dots dq_n + \sum_{j=1}^n \sum_{\theta_1=0}^k \sum_{\theta_2=0}^{k-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{k-\sum_{j=1}^{n-1} \theta_j} (-1)^{j-1} Q_j dt dB_{k-1}^{(\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n$$

$$\beta_{l,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_n} = dt dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n + (-1)^j B_{l+1}^{(\theta'_1, \dots, \theta'_j + 1, \dots, \theta'_n)} dt dq_1 \dots dq_n$$

pour $l \in \{1, \dots, k-1\}$, $\theta'_1 + \dots + \theta'_n = l$, $j \in \{1, \dots, n\}$ et l'un des $\theta'_r \geq 2$ dès que $l \geq 2$

Même en changeant ce γ , les formes engendrent toujours le même idéal car en notant γ_1 l'ancien et γ_2 ce nouveau, on a $\gamma_1 - \gamma_2 = -T\alpha dq_1 \dots dq_n$.

1.2 Le résultat général

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_N(\beta_{l,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_n}) &= dN^t dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n + dt dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n \\
&+ \sum_{r=1}^{j-1} dt dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dq_1 \dots dN^{q_r} \dots d\hat{q}_j \dots dq_n + \sum_{r=j+1}^n dt dB_l^{(\theta'_1, \dots, \theta'_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dN^{q_r} \dots dq_n \\
&(-1)^j N^{B_{l+1}^{(\theta'_1, \dots, \theta'_j+1, \dots, \theta'_n)}} dt dq_1 \dots dq_n + (-1)^j B_{l+1}^{(\theta'_1, \dots, \theta'_j+1, \dots, \theta'_n)} dN^t dq_1 \dots dq_n \\
&+ \sum_{r=1}^n (-1)^j B_{l+1}^{(\theta'_1, \dots, \theta'_j+1, \dots, \theta'_n)} dt dq_1 \dots dN^{q_r} \dots dq_n \\
&= a_{*1 \dots *n} \alpha + \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta''_1=0}^s \sum_{\theta''_2=0}^{s-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{s-\sum_{r=1}^{n-1} \theta''_r} \sum_{i=1}^n b_{s,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_n} \beta_{s,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_n} + g\gamma + z_{*1 \dots *n-1} d\alpha \quad (1.3)
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on obtient :

$$\begin{aligned}
dt dq_1 \dots dq_n &: -N_{q_j}^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} &= (-1)^{j+1} A a_{(2,1) \dots (2,n)} + (-1)^j R g \\
&+ \sum_{r=1}^n B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j+1 \dots \theta'_n} N_{q_r}^{q_r} &+ \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta''_1=0}^s \dots \sum_{\theta''_n=0}^{s-\sum_{r=1}^{n-1} \theta''_r} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} b_{s,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_n} B_{s+1,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_n+1 \dots \theta''_n} \\
&+ N_{l+1}^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_j+1 \dots \theta'_n}} &+ \sum_{i=1}^n (-1)^{n+j-i+1} B_1^i a_{1,(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} \\
&- B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j+1 \dots \theta'_n} f_t & \\
dq_1 \dots dq_n du &: 0 &= a_{(2,1) \dots (2,n)} - T A g \\
dt dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n du &: \underbrace{-N_u^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}}}_{i=j} + B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j+1 \dots \theta'_n} N_u^{q_i} &= (-1)^{n-i+j} a_{1,(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} \\
\underbrace{dt dB_s^{\theta''} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n}_{s \neq 1 \text{ ou } \theta'' \neq i} &: \underbrace{-f_t}_{i=j, \theta''=\theta', l=s} + \underbrace{N_{B_s}^{B_l^{\theta''}}}_{i=j} &= -A a_{(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} + b_{s,i}^{\theta''} + \underbrace{(-1)^{i-1} Q_i g}_{k-1=s} \\
&+ \underbrace{\sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n N_{q_r}^{q_r}}_{i=j, \theta''=\theta', l=s} + \underbrace{(-1)^{j-i-1} N_{q_j}^{q_i}}_{i \neq j, \theta''=\theta', l=s} &= \sum_{r=1}^{i-1} (-1)^{n-r} B_1^r a_{1(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},r) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} \\
&+ \underbrace{(-1)^{i-1} B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j+1 \dots \theta'_n} N_{B_s}^{q_i}}_{s=1} &= \sum_{r=i+1}^n (-1)^{n-r+1} B_1^r a_{1(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (\hat{2},r) \dots (2,n)} \\
dB_s^{\theta''} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n du &: 0 &= a_{(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} \\
\underbrace{dt dB_s^{\theta''} dq_1 d\hat{q}_r d\hat{q}_i dq_n du}_{s \neq 1 \text{ ou } \theta'' \neq i, r} &: \underbrace{(-1)^{n-r-1} N_u^{q_r}}_{i=j, \theta''=\theta', s=l} + \underbrace{(-1)^{n-i} N_u^{q_i}}_{r=j, \theta''=\theta', s=l} &= a_{1,(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},r) \dots (\hat{2},i) \dots (2,n)} \\
\underbrace{dt dB_s^{\theta''} dq_1 d\hat{q}_i d\hat{q}_r dq_n du}_{s \neq 1 \text{ ou } \theta'' \neq i, r} &: \underbrace{(-1)^{n-i-1} N_u^{q_r}}_{r=j, \theta''=\theta', s=l} + \underbrace{(-1)^{n-r} N_u^{q_i}}_{i=j, \theta''=\theta', s=l} &= a_{1,(5,s,\theta'')(2,1) \dots (\hat{2},i) \dots (\hat{2},r) \dots (2,n)}
\end{aligned}$$

Alors on obtient :

$$\begin{aligned}
 N_{B_{l+1}}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} &= N_{q_j}^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} - \sum_{r=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} N_{q_r}^{q_r} - \sum_{i=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_1^i N_u^{q_i} + B_1^j N_u^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} \\
 &\quad \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta''_1=0}^s \sum_{\theta''_2=0}^{s-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-1} \theta''_i} B_{s+1,j}^{\theta''_1 \dots \theta''_j + 1 \dots \theta''_n} N_{B_s^{\theta''_1 \dots \theta''_n}}^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} N_{q_r}^{q_r} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} N_{q_i}^{q_i} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^{j-1} B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_{2,i}^{2i} N_{B_1^i}^{q_i} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^r B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} N_u^{q_r} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_1^j B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} N_u^{q_i} \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \sum_{\theta''_1=0}^{k-1} \sum_{\theta''_2=0}^{k-1-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{k-1-\sum_{i=1}^{n-1} \theta''_i} (-1)^j B_{k,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_i + 1 \dots \theta''_n} Q_i g + (-1)^j (TA + R) g
 \end{aligned}$$

Mais comme l'équation donne

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\theta''_1=0}^{k-1} \sum_{\theta''_2=0}^{k-1-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{k-1-\sum_{i=1}^{n-1} \theta''_i} (-1)^j B_{k,i}^{\theta''_1 \dots \theta''_i + 1 \dots \theta''_n} Q_i + (-1)^j (TA + R) = 0$$

et que N^{B_1} ne dépend que de N^t , des N^{q_i} pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et de N^u , par récurrence il en est de même pour tous les $N^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_j}}$.

Et on a :

$$\begin{aligned}
 N_{B_{l+1}}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} &= N_{q_j}^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} + \sum_{r=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r q_r} + \sum_{i=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_1^i e_{B_1^i u} + B_1^j N_u^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} \\
 &\quad \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta''_1=0}^s \sum_{\theta''_2=0}^{s-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-1} \theta''_i} B_{s+1,j}^{\theta''_1 \dots \theta''_j + 1 \dots \theta''_n} N_{B_s^{\theta''_1 \dots \theta''_n}}^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r q_r} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i q_i} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^j B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_{2,i}^{2i} e_{B_1^i B_1^i} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^r B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r u} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_1^j B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i u} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.1.5

Sous $(H_1), (H_2), (H_3)$ et (H_4) l'application

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &\rightarrow \tilde{\mathcal{H}} \\
 N &\mapsto \tilde{N}
 \end{aligned}$$

est injective.

1.2 Le résultat général

Démonstration : D'après le lemme précédent et comme $N^A = AF_u + F_t$, sous (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) , on obtient $N^A = Am + um_t + l_t + Af_t - \sum_{i=1}^n B_1^i w_t^i$.

Ainsi on a $\tilde{N} = \tilde{N}'$ si et seulement si $N = N'$. ■

1.2.2 L'équation avec le bilaplacien

L'opérateur bilaplacien joue un rôle fondamental dans la théorie de l'élasticité et la dynamique des fluides.

On considère alors l'équation

$$(\mathcal{E}) : \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \Delta^2 u(t, q_1, \dots, q_n) \quad (1.5)$$

C'est un cas particulier de $(\mathcal{E}_{g,k,n})$ pour lequel $k = 4$, $T = 1$, $Q = -\lambda$ et $R = 0$.

La méthode des isovecteurs permet ici de trouver les symétries de cette équation comprenant n variables d'espace.

Relier ceci à des processus aléatoires sera l'objet de la partie 1.3.6.

1.2.2.1 Calcul des isovecteurs

Par le théorème (1.2.1.1) on sait que

$$N^t = -f(t)$$

et par le lemme (1.2.1.4), pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$N^{q_i} = -e_{B_1^i},$$

$$N^u = e - \sum_{i=1}^n B_1^i e_{B_1^i},$$

$$N^A = Ae_u + Af_t + e_t,$$

$$N^{B_1^i} = B_1^i e_u + e_{q_i}$$

et pour tout $l \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
 N^{B_{l+1}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n}} &= N^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}} + \sum_{r=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_l^r q_r} + \sum_{i=1}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_1^i e_{B_1^i u} + B_1^j N^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_j \dots \theta'_n}} \\
 &\sum_{s=1}^{k-1} \sum_{\theta''_1=0}^s \sum_{\theta''_2=0}^{s-\theta''_1} \dots \sum_{\theta''_n=0}^{s-\sum_{i=1}^{n-1} \theta''_i} B_{s+1,j}^{\theta''_1 \dots \theta''_j + 1 \dots \theta''_n} N^{B_l^{\theta'_1 \dots \theta'_n}}_{B_s^{\theta''_1 \dots \theta''_n}} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_l^r q_r} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i q_j} \\
 &+ \sum_{i=1}^n (-1)^j B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} B_{2,i}^{2i} e_{B_1^i B_1^i} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^r B_{l+1,j}^{\theta'_1 \dots \theta'_j + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^r u} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n B_1^j B_{l+1,i}^{\theta'_1 \dots \theta'_i + 1 \dots \theta'_n} e_{B_1^i u} \quad (1.6)
 \end{aligned}$$

Pour rappel l'équation $(\mathcal{E})$ est annulée par :

$$\alpha : du - Adt - \sum_{i=1}^n B_1^{1i} dq_i$$

$$\begin{aligned}
 \gamma : Adq_1 \dots dq_n dt + \lambda \sum_{i=1}^n (-1)^i dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt \\
 + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^i dB_3^{1i2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^j dB_3^{2i1j} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt
 \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\beta_1^i : B_2^{2i} dq_1 \dots dq_n dt + (-1)^i dB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt$$

$$\beta_2^{2i} : B_3^{3i} dq_1 \dots dq_n dt + (-1)^i dB_2^{2i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt$$

Pour $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$:

$$\beta_2^{ij} : B_3^{1i2j} dq_1 \dots dq_n dt + (-1)^i dB_2^{2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt$$

$$d\alpha : -dAdt - \sum_{i=1}^n dB_1^{1i} dq_i$$

$$d\beta_1^i : dB_2^{2i} dq_1 \dots dq_n dt$$

1.2 Le résultat général

$$d\beta_2^{2i} : dB_3^{3i} dq_1 \dots dq_n dt$$

$$\beta_2^{ij} : dB_3^{1i2j} dq_1 \dots dq_n dt$$

On souhaite

$$\mathcal{L}_N(\gamma) = a\alpha + z\gamma + \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{j=1}^n b_l^{(\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n)} \beta_l^{(\theta_1, \dots, \theta_j, \dots, \theta_n)} + g d\alpha$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned} & N^A dq_1 \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} A dN^{q_i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + (-1)^n A dN^t dq_1 \dots dq_n + \\ & \sum_{i=1}^n (-1)^i \lambda dN^{B_3^{3i}} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j} \lambda dN^{q_j} dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{i+j-1} \lambda dN^{q_j} dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+i} \lambda dN^t dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^i \lambda dN^{B_3^{1i2j}} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} \lambda dN^{q_k} dB_3^{1i2j} dq_1 \dots d\hat{q}_k \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k-1} \lambda dN^{q_k} dB_3^{1i2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_k \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{n+i} \lambda dN^t dB_3^{1i2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^j \lambda dN^{B_3^{2i1j}} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{j+k} \lambda dN^{q_k} dB_3^{2i1j} dq_1 \dots d\hat{q}_k \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=j+1}^n (-1)^{j+k-1} \lambda dN^{q_k} dB_3^{2i1j} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_k \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^{n+j} \lambda dN^t dB_3^{2i1j} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n \\ & = adu - Aadt - \sum_{i=1}^n B_1^{1i} a dq_i + Az dq_1 \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n (-1)^i \lambda z dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^i \lambda z dB_3^{1i2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (-1)^j \lambda z dB_3^{2i1j} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt \\ & + \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n b_l^{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)} dB_l^{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt \\ & - \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} b_l^{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)} B_{l+1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i+1, \dots, \theta_n)} dq_1 \dots dq_n dt - g dA dt - \sum_{i=1}^n g dB_1^{1i} dq_i \end{aligned}$$

où a est une n -forme, g est une $(n-1)$ -forme et z, b_l^* sont des 0-formes.

Par 1.1.1.4 $a_{*...*u} = 0$.

Aussi dès que dt et $dB_1^i dq_i$ ne sont pas présents ou que $dB_3 dB_1$, dB_2 ou dB_2 le sont, alors $a_{*...*} = 0$ en considérant $d * \dots d * du$.

Par $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt dB_1^i$ pour $j < i$, $(-1)^{n+i+j+1} \lambda e_{B_1^j B_1^i} = 0$.

Par $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt dB_1^j$ pour $j < i$, $(-1)^{n+i+j+1} \lambda e_{B_1^j B_1^j} = 0$.

Par $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt dB_1^i$ pour $j > i$, $(-1)^{n+i+j} \lambda e_{B_1^j B_1^i} = 0$.

Par $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt dB_1^j$ pour $j > i$, $(-1)^{n+i+j} \lambda e_{B_1^j B_1^j} = 0$.

On pose

$$e = s(t, q_1, \dots, q_n, u) + \sum_{i=1}^n B_1^i w^i(t, q_1, \dots, q_n, u)$$

Par $dq_1 \dots dq_n dt$ on a :

$$\begin{aligned} & As_u + \sum_{i=1}^n AB_1^i w_u^i + Af_t + e_t - \sum_{i=1}^n Aw_{q_i}^i - Af_t - \sum_{i=1}^n \lambda N_{q_i}^{B_3^{3i}} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \lambda N_{q_i}^{B_3^{1_i 2_j}} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \lambda N_{q_j}^{B_3^{2_i 1_j}} = \\ & -Aa_{q_1 \dots q_n} + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} B_1^{1_i} a_{q_1 \dots \hat{q}_i \dots q_n t} + Az - \sum_{l=1}^2 \sum_{\theta_1=0}^l \sum_{\theta_2=0}^{l-\theta_1} \dots \sum_{\theta_n=0}^{l-\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} B_{l+1}^{(\theta_1, \dots, \theta_i+1, \dots, \theta_n)} b_l^{(\theta_1, \dots, \theta_i, \dots, \theta_n)} \end{aligned}$$

Par $dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt du$ on a $(-1)^{n+i} Aw_u^i + (-1)^{n+i} \lambda N_u^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} (-1)^{n+i} \lambda N_u^{B_3^{1_i 2_j}} = a_{q_1 \dots \hat{q}_i \dots q_n t}$.

Par $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt$,

$$\begin{aligned} & (-1)^i \lambda N_{B_3^{3i}}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} (-1)^{i-1} \lambda w_{q_j}^j + (-1)^{i-1} \lambda f_t + \sum_{j \neq i} (-1)^i \lambda N_{B_3^{3i}}^{B_3^{i 2_j}} \\ & = - \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{n-j} B_1^j a_{B_3^{3i} q_1 \dots \hat{q}_j \dots \hat{q}_i \dots q_n t} - \sum_{j=i+1}^n (-1)^{n-j+1} B_1^j a_{B_3^{3i} q_1 \dots \hat{q}_i \dots \hat{q}_j \dots q_n t} + (-1)^i \lambda z \end{aligned}$$

Or $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt du$ donne $(-1)^{n+i+j+1} \lambda w_u^j = a_{B_3^{3i} q_1 \dots \hat{q}_j \dots \hat{q}_i \dots q_n t}$ et $dB_3^{3i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt du$ donne $(-1)^{n+i+j} \lambda w_u^j = a_{B_3^{3i} q_1 \dots \hat{q}_i \dots \hat{q}_j \dots q_n t}$

Aussi pour $j \neq i$, par $dB_3^{i 2_j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt$,

$$\begin{aligned} & (-1)^i \lambda N_{B_3^{i 2_j}}^{B_3^{3i}} + \sum_{k \neq i} (-1)^{i-1} \lambda w_{q_k}^k + (-1)^{i-1} \lambda f_t + (-1)^i \lambda N_{B_3^{i 2_j}}^{B_3^{i 2_j}} \\ & = - \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{n-k} B_1^k a_{B_3^{i 2_j} q_1 \dots \hat{q}_k \dots \hat{q}_i \dots q_n t} - \sum_{k=i+1}^n (-1)^{n-k+1} B_1^k a_{B_3^{i 2_j} q_1 \dots \hat{q}_i \dots \hat{q}_k \dots q_n t} + (-1)^i \lambda z \end{aligned}$$

1.2 Le résultat général

Or $dB_3^{i2j}dq_1 \dots d\hat{q}_j \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt du$ donne

$$(-1)^{n+i+j+1} \lambda w_u^j = a_{B_3^{i2j}q_1 \dots \hat{q}_j \dots \hat{q}_i \dots q_n t}$$

et $dB_3^{i2j}dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots d\hat{q}_j \dots dq_n dt du$ donne

$$(-1)^{n+i+j} \lambda w_u^j = a_{B_3^{i2j}q_1 \dots \hat{q}_i \dots \hat{q}_j \dots q_n t}$$

En égalant les deux expressions de z on obtient

$$N_{B_3^{3i}}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_3^{3i}}^{B_3^{i2j}} = \sum_{j \neq i} N_{B_3^{i2j}}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_3^{i2j}}^{B_3^{i2j}} \quad (1.7)$$

$$\text{Par } dB_1^i dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt : b_1^i = (-1)^i \lambda (N_{B_1^i}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_1^i}^{B_3^{i2j}})$$

$$\text{Par } dB_2^{2i} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt : b_2^{2i} = (-1)^i \lambda (N_{B_2^{2i}}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_2^{2i}}^{B_3^{i2j}})$$

$$\text{Pour } j \neq i, \text{ par } dB_2^{2j} dq_1 \dots d\hat{q}_i \dots dq_n dt : b_2^{ij} = (-1)^i \lambda (N_{B_2^{2j}}^{B_3^{3i}} + \sum_{k \neq i} N_{B_2^{2j}}^{B_3^{i2k}})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & As_u - A(N_{B_3^{3i}}^{B_3^{3i}} - \sum_{j \neq i} w_{q_j}^j - f_t + \sum_{j \neq i} N_{B_3^{3i}}^{B_3^{i2j}} - \sum_{j \neq i} B_1^j w_u^j) + \sum_{i=1}^n w_{q_i}^i + s_t + \sum_{i=1}^n B_1^i w_t^i - \sum_{i=1}^n \lambda N_{q_i}^{B_3^{3i}} - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \lambda N_{q_i}^{B_3^{i2j}} \\ & - \sum_{i=1}^n B_1^i \lambda N_u^{B_3^{3i}} - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \lambda B_1^i N_u^{B_3^{i2j}} - \sum_{i=1}^n B_2^{2i} \lambda (N_{B_1^i}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_1^i}^{B_3^{i2j}}) - \sum_{i=1}^n B_3^{3i} \lambda (N_{B_2^{2i}}^{B_3^{3i}} + \sum_{j \neq i} N_{B_2^{2i}}^{B_3^{i2j}}) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \lambda B_3^{i2j} (N_{B_2^{2j}}^{B_3^{3i}} + \sum_{k \neq i} N_{B_2^{2j}}^{B_3^{i2k}}) = 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} N^{B_2^{2i}} &= B_1^i s_{uq_i} + \sum_{j=1}^n B_1^i B_1^j w_{uq_i}^j + s_{q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i}^j + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_u^r \\ &+ (B_1^i)^2 s_{uu} + \sum_{j=1}^n (B_1^i)^2 B_1^j w_{uu}^j + B_1^i s_{q_i u} + \sum_{j=1}^n B_1^j B_1^i w_{uq_i}^j + B_2^{2i} B_1^i w_u^i + B_2^{2i} w_{q_i}^i + B_2^{2i} s_u \\ &+ \sum_{j=1}^n B_2^{2i} B_1^j w_u^j - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_2^{2i} w_u^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_2^{2r} w_u^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N^{B_3^i} = & B_1^i s_{uq_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^i B_1^j w_{uq_i q_i}^j + s_{q_i q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i q_i}^j + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r q_i}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uq_i}^r + (B_1^i)^2 s_{uuq_i} \\
 & + \sum_{j=1}^n (B_1^i)^2 B_1^j w_{uuq_i}^j + B_1^i s_{q_i uq_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j B_1^i w_{uq_i q_i}^j + B_2^{2i} B_1^i w_{uq_i}^i + B_2^{2i} w_{q_i q_i}^i + B_2^{2i} s_{uq_i} + \sum_{j=1}^n B_2^{2i} B_1^j w_{uq_i}^j - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r q_i}^r \\
 & + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_i}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_2^{2i} w_{uq_i}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_2^{2r} w_{uq_i}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{3i} B_1^r w_u^r + B_1^i (B_1^i s_{uq_i u} + \sum_{j=1}^n B_1^i B_1^j w_{uq_i u}^j \\
 & + s_{q_i q_i u} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i u}^j + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r u}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uu}^r + (B_1^i)^2 s_{uuu} + \sum_{j=1}^n (B_1^i)^2 B_1^j w_{uuu}^j + B_1^i s_{q_i uu} + \sum_{j=1}^n B_1^j B_1^i w_{uq_i u}^j \\
 & + B_2^{2i} B_1^i w_{uu}^i + B_2^{2i} w_{q_i u}^i + B_2^{2i} s_{uu} + \sum_{j=1}^n B_2^{2i} B_1^j w_{uu}^j - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r u}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i u}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_2^{2i} w_{uu}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_2^{2r} w_{uu}^r) \\
 & + B_2^{2i} (s_{uq_i} + B_1^i w_{uq_i}^i + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{uq_i}^j + w_{q_i q_i}^i + B_2^{2i} w_u^i + 2B_1^i s_{uu} + 1(B_1^i)^2 w_{uu}^i + 2 \sum_{j=1}^n B_1^i B_1^j w_{uu}^j + s_{q_i u} \\
 & + B_1^i w_{uq_i}^i + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{uq_i}^j + 2B_2^{2i} w_u^i + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_u^r) + B_3^{3i} (\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + \sum_{r=1}^n B_1^r w_u^r + B_1^i w_u^i + w_{q_i}^i + s_u \\
 & + \sum_{j=1}^n B_1^j w_u^j - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r w_u^r) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_3^{2ji} (w_{q_i}^j + B_1^i w_u^j) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2ir} w_{q_i}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_3^{3i} w_u^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_3^{2ir} w_u^r
 \end{aligned}$$

1.2 Le résultat général

$$\begin{aligned}
N^{B_3^{2ij}} = & (B_1^i s_{uq_i q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^i B_1^r w_{uq_i q_j}^r + s_{q_i q_i q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i q_j}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r q_j}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uq_j}^r + (B_1^i)^2 s_{uuq_j} \\
& + \sum_{r=1}^n (B_1^i)^2 B_1^r w_{uuq_j}^r + B_1^i s_{q_i u q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^r B_1^i w_{uq_i q_j}^r + B_2^{2i} B_1^i w_{uq_j}^i + B_2^{2i} w_{q_i q_j}^i + B_2^{2i} s_{uq_j} + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uq_j}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r q_j}^r \\
& + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_j}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_2^{2i} w_{uq_j}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_2^{2r} w_{uq_j}^r) + \sum_{r=1}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{2ij} B_1^r w_u^r + B_1^j (B_1^i s_{uq_i u} + \sum_{r=1}^n B_1^i B_1^r w_{uq_i u}^r + s_{q_i q_i u} \\
& + \sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i u}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r u}^r + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uu}^r + (B_1^i)^2 s_{uuu} + \sum_{r=1}^n (B_1^i)^2 B_1^r w_{uuu}^r + B_1^i s_{q_i uu} + \sum_{r=1}^n B_1^r B_1^i w_{uq_i u}^r + B_2^{2i} B_1^i w_{uu}^i \\
& + B_2^{2i} w_{q_i u}^i + B_2^{2i} s_{uu} + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} B_1^r w_{uu}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r u}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i u}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r B_2^{2i} w_{uu}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^i B_2^{2r} w_{uu}^r) + B_2^{2j} (B_1^i w_{uq_i}^j + w_{q_i q_i}^j \\
& + B_2^{2i} w_u^j + (B_1^i)^2 w_{uu}^j + B_1^i w_{uq_i}^j + B_2^{2i} w_u^j - B_2^{2i} w_u^j) + B_3^{2ij} (\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + \sum_{r=1}^n B_1^r w_u^r + B_1^i w_u^i + w_{q_i}^i + s_u + \sum_{r=1}^n B_1^r w_u^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r \\
& - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_1^r w_u^r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2rj} (w_{q_i}^r + B_1^i w_u^r) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ir} w_{q_j}^r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^r B_3^{2ij} w_u^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_1^j B_3^{2ir} w_u^r
\end{aligned}$$

En différenciant (1.8) par rapport à A on obtient : $-4w_{q_i}^i + f_t - 2B_1^i w_u^i = 0$ donc en différenciant par rapport à B_1^i on a

$$\text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\}, w_u^i = 0$$

et par suite

$$f_t = 4w_{q_i}^i$$

Or $f = f(t)$ donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n\}$ $w_{q_i q_i}^i = w_{q_i q_j}^i = 0$.

Ainsi

$$\begin{aligned}
N^{B_2^{2i}} = & B_1^i s_{uq_i} + s_{q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i}^j + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + (B_1^i)^2 s_{uu} + B_1^i s_{q_i u} \\
& + B_2^{2i} w_{q_i}^i + B_2^{2i} s_u - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i}^r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N^{B_3^{3i}} &= B_1^i s_{uq_i q_i} + s_{q_i q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i q_i}^j + (B_1^i)^2 s_{uuq_i} + B_1^i s_{q_i u q_i} + B_2^{2i} s_{uq_i} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_i}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r \\
 &+ B_1^i (B_1^i s_{uq_i u} + s_{q_i q_i u} + (B_1^i)^2 s_{uuu} + B_1^i s_{q_i uu} + B_2^{2i} s_{uu}) + B_2^{2i} (s_{uq_i} + 2B_1^i s_{uu} + s_{q_i u}) + B_3^{3i} \left(\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + w_{q_i}^i + s_u \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_3^{2ji} (w_{q_i}^j) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2ir} w_{q_i}^r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N^{B_3^{2ij}} &= B_1^i s_{uq_i q_j} + s_{q_i q_i q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i q_j}^r + (B_1^i)^2 s_{uuq_j} + B_1^i s_{q_i u q_j} + B_2^{2i} s_{uq_j} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_j}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r \\
 &+ B_1^j (B_1^i s_{uq_i u} + s_{q_i q_i u} + (B_1^i)^2 s_{uuu} + B_1^i s_{q_i uu} + B_2^{2i} s_{uu}) + B_2^{2j} (+w_{q_i q_i}^j) + B_3^{2ij} \left(\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + w_{q_i}^i + s_u - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r \right) \\
 &\quad + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2rj} (w_{q_i}^r) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ir} w_{q_j}^r
 \end{aligned}$$

On reprend alors (1.8) pour $A = 0$ et on différencie par rapport à $B_1^i B_2^i$ pour obtenir $s_{uu} = 0$.

Ainsi on pose

$$s = um(t, q_1, \dots, q_n) + l(t, q_1, \dots, q_n)$$

Alors

$$N^{B_2^{2i}} = 2B_1^i m_{q_i} + um_{q_i q_i} + l_{q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i}^j + \sum_{r=1}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + B_2^{2i} w_{q_i}^i + B_2^{2i} m - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i}^r$$

$$\begin{aligned}
 N^{B_3^{3i}} &= 3B_1^i m_{q_i q_i} + um_{q_i q_i q_i} + l_{q_i q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i q_i}^j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_i}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r + 3B_2^{2i} m_{q_i} + B_3^{3i} \left(\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + w_{q_i}^i \right. \\
 &\quad \left. + m - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_3^{2ji} (w_{q_i}^j) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{3i} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2ir} w_{q_i}^r
 \end{aligned}$$

1.2 Le résultat général

$$\begin{aligned}
N^{B_3^{2ij}} &= 2B_1^i m_{q_i q_j} + u m_{q_i q_i q_j} + l_{q_i q_i q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i q_j}^r + B_2^{2i} m_{q_j} + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_j}^r + \sum_{r=1}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r + B_1^j m_{q_i q_i} \\
&+ B_2^{2j} w_{q_i q_i}^j + B_3^{2ij} \left(\sum_{r=1}^n w_{q_r}^r + w_{q_i}^i + m - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n w_{q_r}^r \right) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2rj} (w_{q_i}^r) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ij} w_{q_r}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ir} w_{q_j}^r
\end{aligned}$$

(1.8) pour $u = B = 0$ donne que

l est solution de l'équation.

De même, (1.8) différencié par rapport à u donne que

m est solution de l'équation.

Il nous reste alors un polynôme en B_1 , B_2 et B_3 .

On différencie (1.8) pour un i particulier et pour $B_2 = B_3 = l = u = 0 : w_t^i - 4\lambda(m_{q_i q_i q_i} + \sum_{j \neq i} m_{q_i q_j q_j}) = 0$ or comme m est solution de l'équation on obtient

$$4m_t = \sum_{i=1}^n w_{tq_i}^i = \sum_{i=1}^n f_{tt}$$

Cette fois en différenciant (1.8) par rapport à B_3^{3i} pour $B_2 = B_1 = u = l = 0$ on trouve $m_{q_i} = 0$ donc aussi $m_t = 0$.

Ainsi on pose

$$w_{q_i}^i = -c_1$$

$$f = -4tc_1 + c_2$$

$$m = c_3$$

Alors

$$N^{B_2^{2i}} = l_{q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i}^j + 2B_2^{2i} c_1 + B_2^{2i} c_3 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i}^r$$

$$N^{B_3^{3i}} = l_{q_i q_i q_i} + \sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i q_i}^j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_i}^r + 3B_3^{3i} c_1 + B_3^{3i} c_3 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_3^{2ji} (w_{q_i}^j) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2ir} w_{q_i}^r$$

$$N^{B_3^{2ij}} = l_{q_i q_i q_j} + \sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i q_j}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_j}^r + 3B_3^{2ij} c_1 + B_2^{2j} w_{q_i q_i}^j + B_3^{2ij} c_3 + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2rj} (w_{q_i}^r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ir} w_{q_j}^r$$

Ainsi il reste :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n B_1^i w_t^i - \sum_{i=1}^n \lambda \left(\sum_{j=1}^n B_1^j w_{q_i q_i q_i}^j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_i q_i}^r + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n B_3^{2ji} (w_{q_i q_i}^j) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2ir} w_{q_i q_i}^r \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \lambda \left(\sum_{r=1}^n B_1^r w_{q_i q_i q_j}^r + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_2^{2r} w_{q_i q_j q_j}^r + B_2^{2j} w_{q_i q_i q_j}^j + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^n B_3^{2rj} (w_{q_i q_j}^r) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^n B_3^{2ir} w_{q_j q_j}^r \right) \\ & - \sum_{i=1}^n B_2^{2i} \lambda (w_{q_i q_i q_i}^i + \sum_{j \neq i} w_{q_j q_j q_i}^i) - \sum_{i=1}^n B_3^{3i} \lambda \left(\sum_{j \neq i} (w_{q_j q_i}^i + w_{q_j q_j}^i) \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \lambda B_3^{i2j} (w_{q_i q_i}^j + \sum_{k \neq i} w_{q_k q_i}^j) = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

En différenciant par rapport à B_1^i , on a

$$w^i \text{ solution de l'équation .}$$

En différenciant par rapport à B_3^{3i} avec $i \neq j$ on obtient $w_{q_j q_j}^i = 0$.

Ainsi $w_t^i = 0$ et

$$w_{q_j}^i = c_{4_{i,j}}.$$

Alors dans 1.7 on obtient

$$c_{4_{i,j}} = -c_{4_{j,i}}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} f &= -4tc_1 + c_2 \\ w^i &= -c_1 q_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n c_{4_{i,j}} q_j + c_{5_i} \\ m &= c_3 \end{aligned}$$

l est solution de l'équation

On trouve donc une base de $\mathcal{H}$ formée de $\frac{n(n-1)}{2} + n + 3 = \frac{n(n+1)}{2} + 3$ isovecteurs.

Comme l'application $N \mapsto \tilde{N}$ est injective on liste ici les $\tilde{N}$.

On obtient ainsi :

1.2 Le résultat général

$$\tilde{N}_1 = -4t \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n q_i \frac{\partial}{\partial q_i}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\text{Pour } i < j, \tilde{N}_{4_{i,j}} = q_j \frac{\partial}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial}{\partial q_j}$$

$$\tilde{N}_{5_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}$$

1.2.2.2 Les symétries

On a donc

$$(e^{K\tilde{N}_1})u(t, q_1, \dots, q_n) = u(e^{-4K}t, e^{-K}q_1, \dots, e^{-K}q_n)$$

$$(e^{K\tilde{N}_2})u(t, q_1, \dots, q_n) = u(t + K, q_1, \dots, q_n)$$

$$(e^{K\tilde{N}_3})u(t, q_1, \dots, q_n) = e^K u(t, q_1, \dots, q_n)$$

$$(e^{K\tilde{N}_{4_{i,j}}})u(t, q_1, \dots, q_i, \dots, q_j, \dots, q_n) = u(t, q_1, \dots, -\sin(K)q_j + \cos(K)q_i, \dots, \sin(K)q_i + \cos(K)q_j, \dots, q_n)$$

$$(e^{K\tilde{N}_{5_i}})u(t, q_1, \dots, q_i, \dots, q_n) = u(t, q_1, \dots, q_i + K, \dots, q_n)$$

On vérifie que :

— Si u est une solution $e^{K\tilde{N}_*}u$ est encore une solution.

—

$$e^{K\tilde{N}_*}e^{K'\tilde{N}_*}u = e^{(K+K')\tilde{N}_*}u$$

—

$$\frac{\partial e^{K\tilde{N}_*}u}{\partial K} \Big|_{K=0} u = \tilde{N}_* u$$

On retrouvera ces résultats dans le cas où $n = 1$ dans 1.3.4.3.

Seuls les $\tilde{N}_{4_{i,j}}$ ne sont pas présents pour $n = 1$, ils proviennent des rotations dans le plan (q_i, q_j) et sont analogues à ce que l'on trouve dans [Qui15a] pour l'équation de la chaleur.

Dans un soucis de cohérence avec [Qui15b], on renomme les $\tilde{N}$ comme suit : $\tilde{N}_1 = \tilde{N}_2$; $\tilde{N}_{2_i} = \tilde{N}_{5_i}$; $\tilde{N}_{3_{ij}} = \tilde{N}_{C_{4_{i,j}}}$; $\tilde{N}_5 = \tilde{N}_1$; $\tilde{N}_7 = \tilde{N}_3$.

1.2.2.3 Un peu d'algèbre

On calcule alors tous les crochets de Lie pour les isovecteurs de l'équation avec le Laplacien.

On obtient :

	$\tilde{N}_1$	$\tilde{N}_2$	$\tilde{N}_3$	$\tilde{N}_{4_{ij}}$	$\tilde{N}_{4_{ki}}$	$\tilde{N}_{4_{kl}}$	$\tilde{N}_{5_i}$	$\tilde{N}_{5_j}$
$\tilde{N}_1$	0	$-4\tilde{N}_2$	0	0	0	0	$-\tilde{N}_{5_j}$	$-\tilde{N}_{5_j}$
$\tilde{N}_2$	$4\tilde{N}_2$	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{N}_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{N}_{4_{ij}}$	0	0	0	0	$\tilde{N}_{4_{kj}}$	0	$\tilde{N}_{5_j}$	$\tilde{N}_{5_i}$
$\tilde{N}_{4_{ki}}$	0	0	0	$-\tilde{N}_{4_{kj}}$	0	$\tilde{N}_{4_{il}}$	$-\tilde{N}_{5_k}$	0
$\tilde{N}_{4_{kl}}$	0	0	0	0	$-\tilde{N}_{4_{il}}$	0	0	0
$\tilde{N}_{5_i}$	$\tilde{N}_{5_i}$	0	0	$-\tilde{N}_{5_j}$	$\tilde{N}_{5_k}$	0	0	0
$\tilde{N}_{5_j}$	$\tilde{N}_{5_j}$	0	0	$\tilde{N}_{5_i}$	0	0	0	0

Cette base d'isovecteurs avec ses relations forme une algèbre de Lie que l'on note $\mathcal{VV}_n$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ isomorphe à $\mathbb{R}\tilde{N}_3 \oplus (<\tilde{N}_1, \tilde{N}_2> \ltimes (so(n) \ltimes \mathbb{R}^n))$

On définit une représentation fidèle de $\mathcal{VV}_n$ dans $\mathcal{M}_{n+2}$ en associant à

$$x = a\tilde{N}_1 + b\tilde{N}_2 + c\tilde{N}_3 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n d_{ij}\tilde{N}_{4_{ij}} + \sum_{i=1}^n e_i\tilde{N}_{5_i} \in \mathcal{VV}_n$$

la matrice

$$\psi_n((x)) = \begin{pmatrix} 4a+c & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b & c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ e_1 & 0 & 3a+c & -d_{1,2} & \dots & -d_{1,n} \\ \vdots & \vdots & d_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -d_{n-1,n} \\ e_n & 0 & d_{1,n} & \dots & d_{n-1,n} & 3a+c \end{pmatrix}$$

On vérifie que $[\psi_n(x), \psi_n(y)] = \psi_n([x, y])$ sur les vecteurs de base $\tilde{N}_1, \dots, \tilde{N}_{5_i}$.

Traitons maintenant du passage de n à $n+1$.

A un élément $x' = (x, 0, \dots, 0)$ de $\mathcal{VV}_{n+1}$ on associe

$$\psi_{n+1}(x') = \left(\begin{array}{c|c} \psi_n(x) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On note par θ_n l'application qui associe aux éléments de $\mathcal{VV}_n$ les éléments correspondants de $\mathcal{VV}_{n+1}$.

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

On a donc

$$\begin{aligned} \theta_n : \mathcal{V}\mathcal{V}_n &\rightarrow \mathcal{V}\mathcal{V}_{n+1} \\ x = (a, b, c, d_{1,2}, \dots, d_{n-1,n}, e_1, \dots, e_n) &\mapsto x' = (x, 0, \dots, 0, e_{n+1}) \end{aligned}$$

Alors en notant

$$\begin{aligned} \theta'_n : \mathcal{M}_{n+2} &\rightarrow \mathcal{M}_{n+3} \\ M = (m_{ij}) &\mapsto M' = \left(\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ \hline e_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 3a + c \end{array} \right) \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}\mathcal{V}_n & \xrightarrow{\theta_n} & \mathcal{V}\mathcal{V}_{n+1} \\ \psi_n \downarrow & & \downarrow \psi_{n+1} \\ \mathcal{M}_{n+2} & \xrightarrow{\theta'_n} & \mathcal{M}_{n+3} \end{array}$$

C'est à dire

$$\theta'_n(\psi_n(x)) = \psi_{n+1}(\theta_n(x))$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

1.3.1 Le résultat

Soient $\nu \in \mathbb{R}$, G et L des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies respectivement sur M et $\mathcal{J} \times \mathcal{O}$.

On considère une équation $(\mathcal{E})$ de la forme

$$\nu \frac{\partial u}{\partial t} - G(t, q, u, \frac{\partial u}{\partial q}, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial q^{k-1}}) - L(t, q) \frac{\partial^k u}{\partial q^k} = 0 \quad (1.10)$$

pour $\nu \neq 0$, $L \neq 0$, $k > 2$, $t \in J$ (un intervalle de $\mathbf{R}$) et $q \in \mathcal{O}$ (un ensemble ouvert dans $\mathbf{R}$).

Remarque 1.3.1.1

Il s'agit d'un cas particulier de $\mathcal{E}_{g,k,n}$ pour $T = -\nu$, $Q = -L$ et $R = -G$ avec une seule variable d'espace et $R_{B_k} = 0$.

Théorème 1.3.1.2

— N^q ne dépend que de t et q

On note alors

$$N^t = -f(t)$$

$$N^q = -w(t, q)$$

— Si $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}$, $G_{B_{k-1}B_i} = 0$ alors N^u seulement de t, q et u et est affine en u .

On note :

$$N^u = um(t, q) + l(t, q)$$

On a de plus :

$$N^A = B_1 w_t + l_t + um_t + Af_t + Am$$

$$N^{B_1} = B_1 m + B_1 w_q + l_q + um_q$$

$$N^{B_{i+1}} = N_q^{B_i} + B_{i+1} w_q + B_1 N_u^{B_i} + \sum_{j=1}^i B_{j+1} N_{B_j}^{B_i} \text{ pour } 1 \leq i \leq k-2$$

Ainsi que les deux relations suivantes :

$$f_t = kw_q - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$$

$$\begin{aligned} & \nu(B_1 w_t + um_t + l_t) + G_t f + G_q w - G_u(um + l) - G_{B_1}(B_1 m + B_1 w_q + um_q + l_q) \\ & - \sum_{i=2}^{k-1} G_{B_i} N^{B_i} - L N_q^{B_{k-1}} - L B_1 N_u^{B_{k-1}} - L \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i}^{B_{k-1}} = -G(kw_q + m - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Démonstration : G étant indépendante de B_k , on décide de ne pas considérer cette variable comme indépendante des autres.

On a donc pour $i \in \{1, \dots, k-2\}$

$$\beta_i = dt dB_i - B_{i+1} dt dq$$

$$d\beta_i = -dB_{i+1} dt dq$$

D'après le théorème 1.2.1.1, on a $N^t = -f(t)$, $N^q = -e_{B_1}$, $N^u = e - B_1 e_{B_1}$, $N^A = Ae_u + Af_t + e_t$ et $N^{B_1} = B_1 e_u + e_q$.

Ainsi on obtient par le lemme 1.2.1.4 :

$$N^{B_2} = 2B_1 e_{uq} + e_{qq} + 2B_2 e_{B_1 q} + B_1^2 e_{uu} + 2B_1 B_2 e_{B_1 u} + B_2^2 e_{B_1 B_1} + B_2 e_u \quad (1.12)$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

et pour $i \neq 1$,

$$N^{B_{i+1}} = N_q^{B_i} + B_{i+1}e_{B_1q} + B_1N_u^{B_i} + B_1B_{i+1}e_{B_1u} + B_2B_{i+1}e_{B_1B_1} + \sum_{j=1}^{k-2} B_{j+1}N_{B_j}^{B_i} \quad (1.13)$$

Comme γ est une 2-forme on pose : $\mathcal{L}_N(\gamma) = a\alpha + \sum_{j=1}^{k-2} b_j\beta_j + c\gamma + g d\alpha$ où a est une 1-forme telle que ($a = a_1dt + a_2dq + a_3du + a_4dA + \sum_{j=1}^{n-1} a_{5,j}dB_j$) et b_i, c et g pour $i \in \{1, \dots, k-2\}$ sont des 0-formes.

D'après 1.1.1.4 on peut prendre $a_3 = 0$.

$$\begin{aligned} & (\nu N^A - G_t N^t - G_q N^q - G_u N^u - \sum_{i=1}^{k-1} G_{B_i} N^{B_i}) dtdq + (\nu A - G) dN^t dq + (\nu A - G) dtdN^q \\ & - LdN^t dB_{k-1} - LdtdN^{B_{k-1}} - L_t N^t dtdB_{k-1} - L_q N^q dtdB_{k-1} = a_1 dtdu - a_1 B_1 dtdq + a_2 dqdu \\ & - a_2 Adqdt + a_4 dAdu - a_4 AdAdt - a_4 B_1 dAdq + \sum_{j=1}^{k-1} a_{5,j} dB_j du - \sum_{j=1}^{k-1} a_{5,j} AdB_j dt - \sum_{j=1}^{k-1} a_{5,j} B_1 dB_j dq \\ & + \sum_{j=1}^{k-2} b_j dB_j dt - \sum_{j=1}^{k-2} b_j B_{j+1} dqdt + c Adtdq - c G dtdq + LcdtdB_{k-1} - g dAdt - g dB_1 dq \end{aligned}$$

$dtdq$	:	$\nu N^A - G_t N^t - G_q N^q - G_u N^u - \sum_{i=1}^{k-1} G_{B_i} N^{B_i} + (\nu A - G) N_t^t + (\nu A - G) N_q^q - L N_q^{B_{k-1}}$	=	$-a_1 B_1 + a_2 A + \sum_{j=1}^{k-2} b_j B_{j+1} + c\nu A - cG$	(1)
$dtdu$	:	$(\nu A - G) N_u^q - L N_u^{B_{k-1}}$	=	a_1	(2)
$dtdA$	:	$(\nu A - G) N_A^q - L N_A^{B_{k-1}}$	=	$a_4 A + g$	(3)
$dtdB_i (i \neq k-1)$	:	$(\nu A - G) N_{B_i}^q - L N_{B_i}^{B_{k-1}}$	=	$a_{5,i} A - b_i$	(4)
$dtdB_{k-1}$	:	$(\nu A - G) N_{B_{k-1}}^q - L N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} - L N_t^t - L_t N^t - L_q N^q$	=	$a_{5,k-1} A - c\lambda$	(5)
$dqdB_i (i \neq q-1)$	:	$-(\nu A - G) N_{B_i}^t$	=	$a_{5,i} B_1 + g \text{ (si } i=1)$	(6)
$dudB_i (i \neq k-1)$	:	0	=	$-a_{5,i}$	(7)
$dAdB_i$	:	0	=	0	(8)
$dB_j dB_i (i \neq j, j \neq k-1)$	:	0	=	0	(9)
$dB_i dB_{k-1}$	:	$-L N_{B_i}^t$	=	0	(10)
$dqdu$	:	$-(\nu A - G) N_u^t$	=	a_2	(11)
$dqdA$	:	$-(\nu A - G) N_A^t$	=	$a_4 B_1$	(12)
$dqdB_{k-1}$	:	$-(\nu A - G) N_{B_{k-1}}^t - L N_q^t$	=	$a_{5,k-1} B_1$	(13)
$dAdu$	:	0	=	a_4	(14)
$dB_{k-1} du$	:	λN_u^t	=	$a_{5,k-1}$	(15)

On a $a_{5,k-1} = a_4 = a_2 = a_{5,i}$.

$$cL = L(-f_t + N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}}) - L_t f - L_q e_{B_1}$$

$$b_i = L N_{B_i}^{B_{k-1}} + (\nu A - G) e_{B_1 B_1} \text{ si } i = 1$$

$$g = -L N_A^{B_{k-1}}$$

$$a_1 = -(\nu A - G) e_{B_1 u} - L N_u^{B_{k-1}}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \nu(Ae_u + Af_t + e_t) + G_t f + G_q e_{B_1} - G_u(e - B_1 e_{B_1}) - G_{B_1}(B_1 e_u + e_q) - \sum_{i=2}^{k-1} G_{B_i} N^{B_i} - L N_q^{B_{k-1}} - L B_1 N_u^{B_{k-1}} \\ & - L \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i}^{B_{k-1}} = (\nu A - G)(e_{B_1 q} + B_1 e_{B_1 u} + B_2 e_{B_1 B_1} + N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} e_{B_1}) \quad (1.14) \end{aligned}$$

Il est nécessaire d'avoir le résultat suivant pour la suite :

Lemme 1.3.1.3

$$N_{B_j}^{B_i} = 0 \text{ pour } j > i$$

Démonstration : On raisonne par récurrence :

$$N_{B_j}^{B_1} = 0 \text{ pour } j \neq 1$$

On suppose le résultat vrai pour i montrons le pour $i + 1$

Par (1.13) $N_{B_j}^{B_{i+1}} = 0$ pour $j > i + 1$ par hypothèse de récurrence. ■

$$\frac{\partial 1.14}{\partial A} \text{ donne } \nu(e_u - e_{B_1 q} - B_1 e_{B_1 u} - N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} + f_t - B_2 e_{B_1 B_1} + \frac{L_t}{L} f + \frac{L_q}{L} w) = 0$$

En utilisant (1.13) une nouvelle fois :

Pour $k = 3$ on a $N_{B_{k-1} B_2}^{B_{k-1}} = 2e_{B_1 B_1}$ donc en différenciant par rapport à B_2 , on obtient $e_{B_1 B_1} = 0$.

Pour $k \neq 3$ on a $N_{B_{k-1} B_2}^{B_{k-1}} = e_{B_1 B_1}$ donc en différenciant par rapport à B_2 , on obtient $e_{B_1 B_1} = 0$.

Ainsi dans tous les cas on pose

$$e = B_1 w(t, q, u) + s(t, q, u)$$

On a ainsi

$$f_t = N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} + w_q - s_u - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$$

Pour $k = 3$ on a donc $f_t = 3w_q + 3B_1 w_u - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$ or f étant indépendante de B_1 on obtient $w_u = 0$ et $f_t = 3w_q - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$.

Pour $k \neq 3$:

D'après (1.13), $N_{B_{i+1}}^{B_{i+1}} = w_q + B_1 w_u + N_{B_i}^{B_i}$ ainsi par récurrence on a $N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} = (k-1)w_q + k B_1 w_u + s_u$.

Alors $f_t = k w_q + k B_1 w_u - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$ mais comme f est indépendante de B_1 on obtient $w_u = 0$ et $f_t = k w_q - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w$.

Ainsi dans tous les cas

$$w_u = 0$$

et

$$f_t = k w_q - \frac{L_t}{L} f - \frac{L_q}{L} w.$$

On rappelle que $N_{B_{k-1}}^{B_{k-1}} = (k-1)w_q + s_u \forall k > 3$.

On différencie (1.14) par rapport à B_1 et B_{k-1} et on obtient grâce à l'hypothèse $\frac{\partial^2 G}{\partial B_{k-1} \partial B_i} = 0$: $-L s_{uu} - L N_{B_1 B_{k-2}}^{B_{k-1}} = 0$.

Lemme 1.3.1.4

$$\text{Pour } i > 2, N_{B_1 B_{i-1}}^{B_i} = (i) s_{uu}.$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

Démonstration : On raisonne par récurrence sur k .

$$i = 2 : N_{B_1 B_1}^{B_2} = 2s_{uu} = (i)s_{uu}$$

$$i = 3 : N_{B_1 B_2}^{B_3} = s_{uu} + 2s_{uu} = (i)s_{uu}$$

$$i \rightarrow i + 1 : \text{On suppose que } N_{B_1 B_{i-1}}^{B_i} = (i)s_{uu}.$$

$$N_{B_1 B_{i-1}}^{B_{i+1}} = s_{uu} + i s_{uu} = (i+1)s_{uu} \quad \blacksquare$$

Ainsi $s_{uu} = 0$.

On pose donc

$$s = um(t, q) + l(t, q)$$

On a alors

$$N^A = B_1 w_t + l_t + um_t + A f_t + A m$$

$$N^{B_1} = B_1 m + B_1 w_q + l_q + um_q \quad \blacksquare$$

Théorème 1.3.1.5

La somme $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ est directe ; en particulier $\mathcal{H}$ est isomorphe à une sous algèbre de $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{J}$ est abélienne (cf. 1.1.3.12).

Démonstration : En considérant $N \in \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$, on a $N^t = N^q = N^u = 0$ et d'après l'expression de N^A et N^{B_i} pour $1 \leq i \leq k-1$ dans 1.3.1.2, on obtient $N = 0$; ainsi $\mathcal{J} \cap \mathcal{H} = \{0\}$. \blacksquare

Théorème 1.3.1.6

Supposons que $G = c(t, q)B_1 + d(t, q)u$. Alors :

—

l est solution de l'équation

$$\frac{\partial^{k-2} m}{\partial q^{k-2}} = 0$$

$$\nu m_t + d_t f + \frac{1}{k} d_q f_t q + d_q b - c m_q + d f_t q = 0$$

$$\frac{1}{k} \nu f_{tt} q + \nu b_t + c_t f + \frac{1}{k} c_q f_t q + c_q b - \frac{1}{k} f_t c + c f_t = 0$$

$$N_{B_r q}^{B_{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i B_r}^{B_{k-1}} + N_{B_{r-1}}^{B_{k-1}} = 0 \quad \forall 2 \leq r \leq k-1$$

— $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$; en particulier, $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}} \cong \mathcal{H}$.

Démonstration : — 1.11 pour $A = B_i = u = 0 \forall i \in \{1, \dots, k-1\}$ donne $\nu l - t - \lambda N_{q_a=B_i=u=0}^{B_{k-1}} - dl - cl_q = 0$.

Or par récurrence on montre que $N_{qA=B_i=u=0}^{B_{k-1}} = \frac{\partial^k l}{\partial q^k}$ donc

l est solution

Par récurrence on montre que $\forall j \in \{1, \dots, k-1\} \quad N_u^{B_j} = \frac{\partial^j m}{\partial q^j}$ donc $N_{B_1}^{B_j} = j \frac{\partial^{j-1} m}{\partial q^{j-1}}$.

Toujours par récurrence on peut montrer que $\forall i \in \{3, \dots, k-1\}$, $N_{B_2}^{B_i} = \frac{i(i-1)}{2} \frac{\partial^{i-2} m}{\partial q^{i-2}}$ et on a $N_{B_2}^{B_2} = 2w_q + m$.

$\frac{\partial 1.11}{\partial B_2}$ permet d'obtenir

$$-\lambda N_{qB_2}^{B_{k-1}} - \lambda B_1 N_{uB_2}^{B_{k-1}} - \lambda \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i B_2}^{B_{k-1}} - \lambda N_{B_1}^{B_{k-1}} = 0$$

Alors on a

$$\frac{\partial^{k-2} m}{\partial q^{k-2}} = 0$$

$\frac{\partial 1.11}{\partial B_1}$ nous donne

$$\nu w_t + c_t f + c_q w - cm - cw_q - \lambda N_{qB_1}^{B_{k-1}} - \lambda N_u^{B_{k-1}} - \lambda B_1 N_{uB_1}^{B_{k-1}} - \lambda \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i B_1}^{B_{k-1}} + ckw_q + cm = 0$$

Ainsi

$$\frac{1}{k} \nu f_{tt} q + \nu b_t + c_t f + \frac{1}{k} c_q f_t q + c_q b - \frac{1}{k} f_t c + c f_t = 0$$

Enfin grâce à $\frac{\partial 1.11}{\partial u}$,

$$\nu m_t + d_t f + d_q w - cm_q + dkw_q - \lambda N_{uq}^{B_{k-1}} - \lambda B_1 N_{uu}^{B_{k-1}} - \lambda \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i u}^{B_{k-1}} = 0$$

d'où

$$\nu m - t + d_t f + \frac{1}{k} d_q f_t q + d_q b - cm_q + d f_t q = 0$$

$\forall 2 < r \leq k-1$, $\frac{\partial 1.11}{\partial B_r}$ donne

$$N_{B_r q}^{B_{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} B_{i+1} N_{B_i B_r}^{B_{k-1}} + N_{B_{r-1}}^{B_{k-1}} = 0$$

— l n'étant pas relié aux autres fonctions présentes on a $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$. ■

La plupart de ces résultats sont présentés dans [LV19] dans lequel la bonne hypothèse pour le théorème 2 est $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial B_i \partial B_{n-1}} = 0$ et pour lequel ce n'est pas l'expression de chaque N^{B_i} qui est donnée mais seulement celle de N^{B_1} .

1.3.2 L'équation de Kuramoto-Sivashinsky

On peut appliquer ces résultats à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky qui modélise les comportements chaotiques, notamment les phénomènes de turbulence en chimie et la combustion.

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

On considère donc l'équation

$$u_t + \mu u_{qqqq} + u_{qq} + uu_q = 0 \quad \text{avec } \mu > 0$$

(voir [Tem12], p.142). C'est un cas particulier de [NA11] (pour $K = 1$ et $\nu = -1$)

D'après le théorème 1.3.1.2, pour $n = 1$, $k = 4$, $\nu = 1$, $\lambda = -\mu$ et $G = -B_2 - uB_1$, on a :

$$w = \frac{1}{4}f_t q + b(t)$$

$$N^{B_1} = B_1 m + B_1 w_q + l_q + u m_q$$

$$N^{B_2} = 2B_1 m_q + l_{qq} + u m_{qq} + 2B_2 w_q + B_2 m$$

$$N^{B_3} = 2B_1 m_{qq} + l_{qqq} + u m_{qqq} + B_2 m_q + B_3 w_q + B_1 m_{qq} + 2B_2 m_q + B_3(2w_q + m)$$

$$\begin{aligned} B_1 w_t + u m_t + l_t + B_1(u m + l) + u(B_1 m + B_1 w_q + u m_q + l_q) + N^{B_2} + \mu(N_q^{B_3} + B_1 N_u^{B_3} + B_2 N_{B_1}^{B_3} + B_3 N_{B_2}^{B_3}) \\ = (B_2 + u B_1)(4w_q + m) \quad (1.15) \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 1.15}{\partial u^2}$ donne $m_q = 0$, $\frac{\partial 1.15}{\partial u}$ pour $B_1 = 0$ donne $l_{qq} = 0$ et $m_t = -l_q$ donc on pose

$$l = -m_t q + c_1(t)$$

Par $\frac{\partial^2 1.15}{\partial u \partial B_1}$, on obtient

$$m = \frac{3}{4}f_t$$

Grâce à $\frac{\partial^2 1.15}{\partial B_1 \partial q}$

$$f = c_2 t + c_3$$

$\frac{\partial 1.15}{\partial B_1}$ pour $u = B_1 = 0$,

$$c_1(t) = -b_t$$

Par $\frac{\partial 1.15}{\partial B_2}$, $w_q = 0$ donc

$$f_t = m = 0, \quad w = b(t) \quad \text{et } l = -b_t$$

Alors 1.15 permet d'obtenir $b_{tt} = 0$ ainsi on pose $b = -c_1 t + c_4$ et c_1 est une constante.

$$\begin{aligned} N_1 &= -t \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \\ N_2 &= \frac{\partial}{\partial q} \\ N_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

forment une base de $\mathcal{G}$.

Pour rappel $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ et pour tout $N \in \mathcal{H}$ on peut définir $\tilde{N}$ comme précédemment pour obtenir :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_2 &= -\frac{\partial}{\partial q} \\ \tilde{N}_3 &= -\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

On peut ainsi associer à une solution u une autre solution

$$e^{K\tilde{N}_2}u(t, q) = u(t, q - K)$$

ou encore

$$e^{K\tilde{N}_3}u(t, q) = u(t + K, q)$$

Dans ce cas on trouve

$$\mathcal{J} = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \langle N_2, N_3 \rangle$$

On a bien $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ ce qui confirme sur l'exemple le théorème 1.3.1.2 par contre $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ ce qui est cohérent avec 1.3.1.6 dans la mesure où $G = -uB_1 - B_2$ n'est pas de la forme $G = c(t, q)B_1 + d(t, q)u$.

On obtient également une troisième symétrie d'après 1.1.3 : on pose $\tilde{t} = t$, $\tilde{q} = q + Kt$ et $\tilde{u} = u + K$; en gardant les notations de 1.1.3 on a $\tilde{u}(t, q) = v(\tilde{t}, \tilde{q})$ donc $u(t, q) + K = v(t, q + Kt)$ et on trouve donc $v(t, q) = u(t, q - Kt) + K$ solution si $u(t, q)$ est solution.

1.3.3 Korteweg de Vries généralisée

On s'intéresse désormais à une équation de mécanique des fluides, d'hydrodynamique, qui modélise la propagation d'ondes de grande longueur d'onde et de faible amplitude relative, à la surface d'un liquide.

Ce modèle pour les vagues en faible profondeur décrit les solitons non-topologique qui sont des ondes d'amplitude constante et de faible extension spatiale qui naît et se propage dans un milieu dispersif.

$$u_t + \phi(t, q)u^\alpha u_q + g(t, q)u_{qqq} + h(t, q)u_q + i(t, q)u_{qq} = 0 \quad (1.16)$$

On applique le théorème 1.3.1.2 pour $k = 3$, $\nu = 1$, $L = -g$ et $G = -\phi(t, q)u^\alpha u_q - i(t, q)u_{qq} - h(t, q)u_q$.

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

On a

$$f_t = 3w_q + \frac{g_t}{g}f + \frac{g_q}{g}w$$

$$\begin{aligned} & B_1w_t + um_t + l_t + (-\phi_t u^\alpha B_1 - i_t B_2 - h_t B_1)f + (-\phi_q u^\alpha B_1 - i_q B_2 - h_q B_1)w + \phi \alpha u^{\alpha-1} B_1(um + l) \\ & + (\phi u^\alpha + h)(B_1m + B_1w_q + um_q + l_q) + i(2B_1m_q + B_1w_{qq} + l_{qq} + um_{qq} + 2B_2w_q + B_2m) \\ & + g(2B_1m_{qq} + B_1w_{qqq} + l_{qqq} + um_{qqq} + 2B_2w_{qq} + B_2m_q + B_1m_{qq} + B_2(2m_q + w_{qq})) \\ & + (-\phi(t, q)u^\alpha B_1 - i(t, q)B_2 - h(t, q)B_1)(3w_q + m + \frac{g_t}{g}f + \frac{g_q}{g}w) \quad (1.17) \end{aligned}$$

1.3.3.1 Equations de Korteweg de Vries à coefficients variables

On se réduit ici au cas traité dans [GW92] :

$$u_t + \phi(t, q)uu_q + g(t, q)u_{qqq} = 0.$$

Pour ce type d'équations, les auteurs ont déjà déterminé les symétries ainsi que les algèbres de Lie associées mais avec la méthode des prolongateurs d'Olver.

On retrouve ici les symétries en utilisant les isovecteurs et plus particulièrement en appliquant les théorèmes précédents.

Il s'agit de l'équation 1.16 mais pour $\alpha = 1$, $h = i = 0$.

1.17 devient alors

$$\begin{aligned} & B_1w_t + um_t + l_t + (-\phi_t u B_1)f + (-\phi_q u B_1)w + \phi B_1(um + l) + (\phi u)(B_1m + B_1w_q + um_q + l_q) \\ & + g(2B_1m_{qq} + B_1w_{qqq} + l_{qqq} + um_{qqq} + 2B_2w_{qq} + B_2m_q + B_1m_{qq} + B_2(2m_q + w_{qq})) \\ & + (-\phi(t, q)u B_1)(3w_q + m + \frac{g_t}{g}f + \frac{g_q}{g}w) \quad (1.18) \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 1.18}{\partial u^2}$ donne $m_q = 0$ donc on pose

$$m = c_1(t)$$

Par $\frac{\partial 1.18}{\partial B_2}$, on a $w_{qq} = 0$ alors on pose

$$w = c_2(t)q + c_3(t)$$

$\frac{\partial^2 1.18}{\partial B_1 \partial u}$ donne

$$-\phi_t f - \phi_q(c_2q + c_3) + \phi c_1 - 2\phi c_2 - \phi \frac{g_t}{g}f - \phi \frac{g_q}{g}(c_2q + c_3) = 0$$

Par $\frac{\partial 1.18}{\partial B_1}$

$$l = \frac{-c_{2t}q - c_{3t}}{\phi}$$

De $\frac{\partial 1.18}{\partial u}$ on obtient

$$l_q = \frac{-c_{1t}}{\phi}$$

1.18 pour $u = B_1 = 0$ donne

$$l_t + gl_{qqq} = 0$$

On a toujours

$$f_t = 3c_2 + \frac{g_t}{g}f + \frac{g_q}{g}(c_2q + c_3)$$

L'équation de Korteweg de Vries dans l'article d'Harrison-Estabrook

Dans l'article décrivant la méthode des isovecteurs [HE71], les auteurs déterminaient déjà les symétries de l'équation de Korteweg de Vries suivante :

$$u_t + uu_q + \epsilon u_{qqq} = 0$$

Grâce aux équations précédentes, ici pour $\phi = \alpha = 1$ et $g = \epsilon$, on retrouve les isovecteurs :

$$\tilde{N}_1 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + 2u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_3 = t \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial q}$$

L'équation classique de Korteweg de Vries

On s'intéresse maintenant à l'équation de Korteweg de Vries la plus connue :

$$u_t + 6uu_q + u_{qqq} = 0$$

C'est un cas particulier de l'équation précédente pour $\phi = 6$ et $g = 1$. [?]

On obtient $c_1 = 2c_2$, $c_{1t} = c_{2t} = 0$, $l = \frac{-c_{3t}}{6}$ donc on pose

$$c_3(t) = c_4t + c_5$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

On a aussi $f_t = 2c_2$.

On a ainsi une base d'isovecteurs de dimension 4 :

$$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_3 = 6t \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} - 2u \frac{\partial}{\partial u}$$

Pour $N \in \mathcal{H} = \{N \in \mathcal{G} | l = 0\}$, on définit $\tilde{N}$ et on a alors les symétries suivantes :

$$\exp(K\tilde{N}_1)u(t, q) = u(t - K, q)$$

$$\exp(K\tilde{N}_2)u(t, q) = u(t, q - K)$$

$$\exp(K\tilde{N}_4)u(t, q) = \exp(-2K)u(\exp(-3K)t, \exp(-K)q)$$

Dans ce cas on trouve

$$\mathcal{J} = \{0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_4 \rangle$$

On a bien $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ ce qui confirme sur cet exemple également le théorème 1.3.1.2 par contre $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ ce qui est une fois de plus cohérent avec 1.3.1.6 dans la mesure où $G = -6uB_1$ n'est pas de la forme $G = c(t, q)B_1 + d(t, q)u$.

Pour $N \notin \mathcal{H}$, on a :

$$T_{N_4, K}u(t, q) = u(t, q - 6Kt) + K$$

1.3.3.2 Braken

On considère un autre type d'équations de Korteweg de Vries décrites dans [Bra05] :

$$u_t + u_{qqq} + (\alpha + 1)u^\alpha u_q = 0$$

L'auteur en trouve les symétries par la méthode des prolongateurs d'Olver.

C'est un cas particulier de 1.16 pour $\phi = \alpha + 1$, $g = 1$ et $i = h = 0$.

On obtient ici les symétries grâce aux isovecteurs.

Comme g est ici une constante on a

$$w = \frac{1}{3}f_t q + c_1(t)$$

Ensuite $\frac{\partial 1.17}{\partial B_2}$ donne $m = c_2(t)$.

Pour $u = B_1 = 0$, on doit dissocier deux cas :

– $\alpha = 0$

$$l_t + l_q + l_{qq} = 0$$

Par $\frac{\partial 1.17}{\partial B_1}$ on peut poser

$$f = c_3 t + c_4$$

$$c_1 = \frac{2}{3}c_3 t + c_5$$

Grâce à $\frac{\partial 1.17}{\partial u}_{B_1=0}$, on a

$$m = c_2$$

– $\alpha \neq 0$

$$l_t + l_{qq} = 0$$

Pour considérer $\frac{\partial 1.17}{\partial B_1}$, on doit encore séparer deux cas :

– $\alpha \neq 1$

$\frac{\partial 1.17}{\partial B_1}$ pour $u = 0$ permet d'obtenir

$$f = c_3 t + c_4$$

$$c_1(t) = c_1$$

$\frac{\partial 1.17}{\partial B_1}$ en divisant par $(\alpha + 1)u^{\alpha-1}$ on a alors

$$l = 0$$

$$c_2 = \frac{2}{3\alpha}c_3$$

– $\alpha = 1$

$\frac{\partial^2 1.17}{\partial B_1 \partial u}$ permet d'avoir $c_2 = \frac{2}{3}f_t$.

Par $\frac{\partial 1.17}{\partial u}$, $l_t = l_{qq} = 0$, $c_2 = -2l_q t + \frac{2}{3}c_3$ et $f = \frac{-3}{2}l_q t^2 + c_3 t + c_4$.

Grâce à $\frac{\partial^2 1.17}{\partial B_1 \partial q}$ on a $l_q = 0$.

Enfin : $l = c_5$ et $c_1 = -2c_5 t + c_6$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

Les exponentielles ci-dessous se calculent classiquement sauf pour celle associée au $\tilde{N}_3$ dans le cas où $\alpha = 0$ pour laquelle on travaille dans le groupe associé à l'algèbre de Lie engendrée par A et B ci-dessous.

On pose $A = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q}$ et $B = 2t \frac{\partial}{\partial q}$.

On travaille dans le groupe affine $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ avec pour $a \neq 0$, $(a, b)(a', b') = (aa', ab' + b)$.

$\langle A, B \rangle$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe affine.

En termes matriciels on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $e^{aA+bB} = \begin{pmatrix} e^a & \frac{b}{a}(e^a - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Un calcul similaire sera d'ailleurs nécessaire pour l'une des symétries des solitons internes dans l'océan (p.57).

On obtient alors de manière résumée

$\alpha = 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q}$ $\tilde{N}_3 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + 2t \frac{\partial}{\partial q}$ $\tilde{N}_4 = u$	$\exp(K \tilde{N}_1)u(t, q) = u(t + K, q)$ $\exp(K \tilde{N}_2)u(t, q) = u(t, q + K)$ $\exp(K \tilde{N}_3)u(t, q) = u(\exp(3K)t, \exp(K)q + (1 - \exp(-2K))t)$ $\exp(K \tilde{N}_4)u(t, q) = \exp(-K)u(t, q)$
$\alpha = 1$	$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q}$ $\tilde{N}_3 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + 2u$	$\exp(K \tilde{N}_1)u(t, q) = u(t + K, q)$ $\exp(K \tilde{N}_2)u(t, q) = u(t, q + K)$ $\exp(K \tilde{N}_3)u(t, q) = \exp(-2K)u(\exp(-3K)t, \exp(-K)q)$
$\alpha \neq 0; 1$	$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q}$ $\tilde{N}_3 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} - \frac{2}{\alpha}u$	$\exp(K \tilde{N}_1)u(t, q) = u(t + K, q)$ $\exp(K \tilde{N}_2)u(t, q) = u(t, q + K)$ $\exp(K \tilde{N}_3)u(t, q) = \exp(-\frac{2K}{\alpha})u(\exp(-3K)t, \exp(-K)q)$

Pour $\alpha \neq 1$, on trouve $\mathcal{J} = \{0\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ et donc

$$\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$$

Ceci est cohérent pour $\alpha = 0$ car alors G est de la forme particulière $G = c(t, q)B_1 + d(t, q)u$.

Pour $\alpha = 1$ $\mathcal{J} = \{0\}$ et $\mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$ donc $\mathcal{G} \neq \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ ce qui est normal car G contient un terme en uB_1 .

1.3.3.3 Les applications

On détermine désormais les symétries des applications décrites dans [Cri95].

Il s'agit de cas particuliers de 1.16 pour lesquels g , ϕ , h et i sont toujours des constantes, ainsi on peut simplifier les résultats 1.17 qui deviennent :

$$w = \frac{1}{3}f_t q + c_1(t)$$

$$\begin{aligned} & B_1 w_t + u m_t + l_t + \phi \alpha u^{\alpha-1} B_1 (u m + l) + (\phi u^\alpha + h)(B_1 m + B_1 w_q + u m_q + l_q) \\ & + i(2B_1 m_q + l_{qq} + u m_{qq} + 2B_2 w_q + B_2 m) + g(2B_1 m_{qq} + l_{qqq} + u m_{qqq} + B_2 m_q + B_1 m_{qq} + 2B_2 m_q) \\ & + (-\phi u^\alpha B_1 - i B_2 - h B_1)(3w_q + m) \quad (1.19) \end{aligned}$$

Par $\frac{\partial 1.19}{\partial B_2}$, on peut poser

$$m = \frac{i}{9g} f_t q + c_2(t)$$

Alors 1.19 devient :

$$\begin{aligned} & B_1 \left(\frac{1}{3} f_{tt} q + c_{1t} \right) + u \left(\frac{i}{9g} f_{tt} q + c_{2t} \right) + l_t + \phi \alpha u^{\alpha-1} B_1 \left(u \left(\frac{i}{9g} f_t q + c_2 \right) + l \right) + (\phi u^\alpha + h) \left(B_1 \left(\frac{i}{9g} f_t q + c_2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} B_1 f_t + u \frac{i}{9g} f_t + l_q \right) + i \left(2B_1 \frac{i}{9g} f_t + l_{qq} \right) + g l_{qqq} + (-\phi u^\alpha B_1 - h B_1) \left(f_t + \frac{i}{9g} f_t q + c_2 \right) \quad (1.20) \end{aligned}$$

1. Ondes de surface

$$u_t + 6(h_1 - h_2)u u_q + u_{qqq} = 0$$

On a $\phi = 6(h_1 - h_2)$, $g = 1$, $\alpha = 1$ et $h = i = 0$.

$\frac{\partial^2 1.20}{\partial u \partial B_1}$ donne $c_2 = \frac{2}{3} f_t$.

Par $\frac{\partial 1.20}{\partial u}$, on peut poser

$$l = \frac{-1}{9(h_1 - h_2)} f_{tt} q + c_3(t)$$

Pour $u = B_1 = 0$, 1.20 donne $c_3(t) = c_3$.

$\frac{\partial 1.20}{\partial B_1}$ permet d'obtenir

$$f = c_4 t + c_5$$

$$l = c_3$$

$$m = \frac{2}{3} c_4$$

$$w = \frac{1}{3} c_4 q - 6(h_1 - h_2) c_3 t + c_6$$

On obtient ainsi une base de $\mathcal{G}$ de 4 isovecteurs.

On peut définir pour $N \in \mathcal{H}$:

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

$$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{K\tilde{N}_1}u(t, q) = u(t - K, q)$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow e^{K\tilde{N}_2}u(t, q) = u(t, q - K)$$

$$\tilde{N}_3 = 3t\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial q} - 2u \rightarrow e^{K\tilde{N}_3}u(t, q) = e^{2K}u(e^{3K}t, e^Kq)$$

Alors

$$\mathcal{G} \neq \mathcal{J} \bigoplus \mathcal{H} \text{ où } \mathcal{J} = \{0\} \text{ et } \mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$$

Pour $N \notin \mathcal{H}$, on a :

$$S_4 = 6(h_1 - h_2)t\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \rightarrow T_{N_4, K}u(t, q) = u(t, q - 6(h_1 - h_2)Kt) + K$$

2. Solitons internes dans l'océan

$$u_t + ruu_q + \beta u_{qqq} + cu_q = 0$$

Ici $\phi = r, \alpha = 1, g = \beta, h = c$ et $i = 0$.

$\frac{\partial^2 1.20}{\partial u \partial B_1}$ donne $c_2 = \frac{2}{3}f_t$.

Par $\frac{\partial 1.20}{\partial u}$, on peut poser

$$l = \frac{-2}{3r}f_{tt}q + c_3(t)$$

Pour $u = B_1 = 0$, 1.20 donne $c_3(t) = c_3$.

$\frac{\partial 1.20}{\partial B_1}$ permet d'obtenir

$$f = c_4t + c_5$$

$$l = c_3$$

$$m = \frac{2}{3}c_4$$

$$w = \frac{1}{3}c_4q - rc_3t + \frac{2}{3}cc_4t + c_6$$

On obtient ainsi une base de $\mathcal{G}$ de 4 isovecteurs.

On peut définir pour $N \in \mathcal{H}$:

$$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{K\tilde{N}_1}u(t, q) = u(t + K, q)$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow e^{K\tilde{N}_2}u(t, q) = u(t, q + K)$$

$$\tilde{N}_3 = 3t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + 2ct \frac{\partial}{\partial q} + 2u \frac{\partial}{\partial u} \rightarrow e^{K\tilde{N}_3} u(t, q) = e^{2K} u(e^{3K} t, e^K q + c(1 - e^{-2K})e^{3K} t)$$

Alors

$$\mathcal{G} \neq \mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \text{ où } \mathcal{J} = \{0\} \text{ et } \mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$$

On obtient une quatrième symétrie par le N qui n'est pas dans $\mathcal{H}$:

$$S_4 = rt \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \rightarrow T_{N_4, K} u(t, q) = u(t, q - rKt) + K$$

3. Acoustique de liquides bouillonnants

On considère

$$u_t + uu_q + \frac{1}{\sigma^2} u_{qqq} + \frac{-1}{Re} u_{qq} = 0$$

$$\phi = 1, g = \frac{1}{\sigma^2}, i = \frac{-1}{Re} \alpha = 1 \text{ et } h = 0.$$

$$\frac{\partial^2 1.20}{\partial u \partial B_1} \text{ donne } c_2 = 0 \text{ et } f = c_3.$$

$$\frac{\partial 1.20}{\partial B_1} \text{ permet d'obtenir}$$

$$l = -c_{1t}$$

$$\text{Pour } u = B_1 = 0, 1.20 \text{ donne } l_t = 0 \text{ et } c_{1tt} = 0.$$

On a donc

$$w = c_4 t + c_5$$

$$l = -c_4$$

On obtient ainsi une base de $\mathcal{G}$ de 3 isovecteurs.

On peut définir pour $N \in \mathcal{H}$:

$$\tilde{N}_1 u(t, q) = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{K\tilde{N}_1} u(t, q) = u(t + K, q)$$

$$\tilde{N}_2 u(t, q) = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow e^{K\tilde{N}_2} u(t, q) = u(t, q + K)$$

Alors

$$\mathcal{G} \neq \mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \text{ où } \mathcal{J} = \{0\} \text{ et } \mathcal{H} = \langle N_1, N_2 \rangle$$

On obtient la troisième symétrie pour le N qui n'appartient pas à $\mathcal{H}$:

$$S_3 u(t, q) = t \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u} \rightarrow T_{N_3, K} u(t, q) = u(t, q - Kt) + K$$

4. Jupiter

$$u_t + A_n u^2 u_q + \beta u_{qqq} = 0$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

On a $\phi = A_n, g = \beta, \alpha = 2$ et $h = i = 0$.

$\frac{\partial^2 1.20}{\partial u \partial B_1}$ donne $f = c_3$ et $l = -c_2$.

Pour $u = B_1 = 0, 1.20$ donne $c_2(t) = c_2$.

$\frac{\partial 1.20}{\partial B_1}$ permet d'obtenir $c_1(t) = c_1$.

On obtient ainsi une base de $\mathcal{G}$ de 3 isovecteurs.

On peut définir pour $N \in \mathcal{H}$:

$$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{K\tilde{N}_1} u(t, q) = u(t + K, q)$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow e^{K\tilde{N}_2} u(t, q) = u(t, q + K)$$

Alors

$$\mathcal{G} \neq \mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \text{ où } \mathcal{J} = \{0\} \text{ et } \mathcal{H} = \langle N_1, N_2 \rangle$$

5. Lignes de transmission électrique

$$u_t + Au^m u_q + \beta u_{qqq} - \delta u_{qq} = 0$$

Ici $i = -\delta, g = \beta, \phi = A, \alpha = m$ et $h = 0$.

Pour $u = B_1 = 0, 1.20$ donne $l_t - \delta l_{qq} + \beta l_{qqq}$.

$\frac{\partial 1.20}{\partial B_1} u=0$ permet d'obtenir

$$f = c_3 t + c_4$$

$$c_1 = \frac{-2\delta^2}{9\beta} c_3 t + c_5$$

Par $\frac{\partial 1.20}{\partial u} B_1=0$, on a $c_2(t) = c_2, c_3 = 0$ et on peut poser

$$l = c_6$$

On obtient ainsi une base de $\mathcal{G}$ de 4 isovecteurs et on peut définir pour $N \in \mathcal{H}$:

$$\tilde{N}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow e^{K\tilde{N}_1} u(t, q) = u(t + K, q)$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\partial}{\partial q} \rightarrow e^{K\tilde{N}_2} u(t, q) = u(t, q + K)$$

$$\tilde{N}_3 = u \rightarrow e^{K\tilde{N}_3} u(t, q) = e^K u(t, q)$$

Alors

$$\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H} \text{ où } \mathcal{J} = \langle N_4 \rangle \text{ et } \mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$$

1.3.4 L'équation de Vigot

1.3.4.1 Intérêt de l'équation

La recherche des solutions de l'équation de la chaleur est fortement reliée au mouvement Brownien B.3.

Comme on l'expliquera en détail dans 1.3.6, on peut également relier des équations de type chaleur mais d'ordre supérieur à une notion analogue au mouvement Brownien B.3 dans le cas d'une mesure signée et non de probabilité que l'on nommera pseudo-processus.

Avant de détailler la pseudo-stochastique, on considère d'abord l'équation la plus simple du type décrit juste avant à savoir :

$$(\mathcal{E}) : u_t = -\frac{\partial^4 u}{\partial q^4}$$

On va retrouver les symétries en appliquant les nouveaux théorèmes démontrés dans cette section même si on peut également les déduire de 1.5 .

1.3.4.2 Calcul des isovecteurs

D'après le théorème (1.3.1.6), comme ici $k = 4$, $\lambda = -\lambda$, $\nu = 1$ et $G = c = d = 0$, on a :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

l est solution

$$m_{qq} = 0$$

$$m_t = 0$$

On pose alors

$$m = c_4 q + c_5$$

On a aussi $\frac{1}{4}f_{tt}q + b_t = 0$ donc en différenciant par rapport à q on obtient $f_{tt} = 0$ puis $b_t = 0$.

On pose donc

$$f = -c_1 t - c_2$$

$$b = -c_3$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

D'après l'expression de $N^{B_{i+1}}$ on a

$$N^{B_3} = l_{qqq} + 3c_4 B_2 - \frac{3}{4}c_1 B_3 + c_4 q B_3 + c_5 B_3$$

Enfin, toujours d'après (1.3.1.6), pour $r = 3$ on obtient

$$c_4 = 0$$

On trouve alors comme base d'isovecteurs :

$$N_1 = 4t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} - 4A \frac{\partial}{\partial A} - B_1 \frac{\partial}{\partial B_1} - 2B_2 \frac{\partial}{\partial B_2} - 3B_3 \frac{\partial}{\partial B_3}$$

$$N_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$N_3 = u \frac{\partial}{\partial u} + A \frac{\partial}{\partial A} + B_1 \frac{\partial}{\partial B_1} + B_2 \frac{\partial}{\partial B_2} + B_3 \frac{\partial}{\partial B_3}$$

$$N_4 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$N_l = l \frac{\partial}{\partial u} + l_t \frac{\partial}{\partial A} + l_q \frac{\partial}{\partial B_1} + l_{qq} \frac{\partial}{\partial B_2} + l_{qqq} \frac{\partial}{\partial B_3}, \text{ avec } l \text{ une solution de l'équation}$$

On a

$$\tilde{N}_1 = -q \frac{\partial}{\partial q} - 4t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_2 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = -\frac{\partial}{\partial q}$$

1.3.4.3 Les symétries

Une fois exponentiée, voici la manière dont les éléments de la base agit sur une solution u de l'équation :

$$e^{\alpha \tilde{N}_1} u(t, q) = u(e^{-4\alpha} t, e^{-\alpha} q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_2} u(t, q) = u(t - \alpha, q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_3} u(t, q) = e^\alpha u(t, q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_4} u(t, q) = u(t, q - \alpha)$$

1.3.4.4 Algèbre

on a :

$$\mathcal{J}_0 = \langle N_3, N_l \rangle$$

$$\mathcal{O} = \langle N_1, N_2, N_3, N_l \rangle$$

$$\mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3, N_5 \rangle$$

Alors

$$\mathcal{K} = \langle N_1, N_2, N_3 \rangle$$

$$\mathcal{J} = \langle N_l \rangle \text{ ce qui confirme } \mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}$$

L'algèbre des isovecteurs avait déjà été déterminée par Vigot ([Vig16]). Cette algèbre a une base $(N_i) (1 \leq i \leq 4)$ avec pour crochets la table suivante :

	N_1	N_2	N_3	N_4
N_1	0	$-4N_2$	0	$-N_4$
N_2	$4N_2$	0	0	0
N_3	0	0	0	0
N_4	N_4	0	0	0

Ainsi $\mathcal{H} = \mathbf{R} \oplus \mathcal{L}$, avec $\mathcal{L}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension 3 avec une algèbre dérivée de dimension 2. $\mathcal{L}$ est isomorphe à l'algèbre sur $\mathbb{R}$ considérée dans [Jac79] (p. 13, ligne 1 pour $\alpha = 4$).

1.3.5 Laplacien / Vigot : le lien

En reprenant la matrice obtenu dans le cadre de l'équation avec le laplacien mais en dimension 1, on obtient

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3a + c & e & 0 \\ 0 & 4a + c & 0 \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

Cette matrice est donc différente de celle trouvée pour l'équation de Vigot toutefois ces deux matrices sont conjuguées.

En effet on note

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour rappel on a avec l'équation de Vigot :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $PA_1P^{-1} = B_1$, $PA_2P^{-1} = B_2$, $PA_3P^{-1} = B_3$ et $PA_4P^{-1} = B_4$

1.3.6 La pseudo stochastique

Par analogie avec le lien entre l'équation de la chaleur et mouvement Brownien B.3, plusieurs approches permettent de définir un pseudo processus associé aux équations de type chaleur d'ordre supérieur.

L'une d'elle est la subordination [Boc05], [JS96] avec quelques différences suivant les auteurs : T.Funaki considère un mouvement Brownien itéré dans [F⁺79] pour l'ordre 4 et [HO96], [OZ99] généralisent ceci, K.Burdzy s'intéresse aux propriétés de leurs chemins dans [Bur93] là où dans [BM95] K.Burdzy et A.Madrecki définissent une intégrale stochastique par rapport à leur processus.

Dans [BDM19] [BM15], S. Mazzuchi et S. Bonaccorsi construisent quant à eux les pseudo processus en terme de limite d'échelle des marches aléatoires dans le plan complexe. Les questions d'intégration sont alors traitées dans [ACM18], [AM16], [AM19], [Maz18] .

On présente ici les pseudo processus en suivant le travail de Krylov , repris par K. J. Hochberg [Hoc78]. Cette approche permet une caractérisation de la particule et de sa trajectoire [N⁺96], [N⁺01] . Néanmoins, la difficulté réside dans le fait que la mesure considérée peut prendre des valeurs négatives donc les outils de stochastique classique ne s'appliquent pas. Plusieurs propriétés standard ont tout de même pu être démontrées [BHO00], [BO05], [BOR01], [HO94], [NO00] .

1.3.6.1 Pseudo processus

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure signée (elle peut prendre des valeurs négatives) telle que $\mu(\Omega) = 1$. Soient T un ensemble arbitraire et S un espace métrique muni de la tribu borélienne notée $\mathcal{B}(S)$.

Définition 1.3.6.1 (Pseudo variable aléatoire)

Soit $(S, \mathcal{B}(S))$ un espace mesurable.

On définit une pseudo variable aléatoire de Ω dans S , toute fonction mesurable X de Ω vers S .

Définition 1.3.6.2 (Pseudo processus stochastique)

Un pseudo-processus stochastique est une famille de pseudo-variables aléatoires définies sur le même espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ indexée par T et à valeurs dans S . Un pseudo-processus stochastique est noté par $\{X_t\}, t \in T$.

Définition 1.3.6.3 (Chemin d'un pseudo-processus)

Notons par S^T l'ensemble des applications définies sur T en tout point et à valeurs dans S .

Fixons $\omega \in \Omega$ et désignons par $X(\omega) \in S^T$ l'application : $t \mapsto X_t(\omega)$. Une telle application est appelée chemin du pseudo-processus stochastique $\{X_t\}, t \in T$.

Définition 1.3.6.4 (Mesure signée induite par un pseudo-processus stochastique)

Soit $\{X_t\}, t \in T$ un pseudo-processus stochastique, $\mathcal{B}(S^T)$ la σ -algèbre borélienne de S^T et l'applica-

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

tion suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_X : (\Omega, \mathcal{A}) &\rightarrow (S^T, \mathcal{B}(S^T)) \\ w &\mapsto \Phi_X(w) = X(w)\end{aligned}$$

$\tilde{\mu}_X$ la mesure signée sur $(S^T, \mathcal{B}(S^T))$ définie pour tout $\tilde{D} \in \mathcal{B}(S^T)$ par

$$\tilde{\mu}_X(\tilde{D}) = \mu \circ \Phi_X^{-1}(\tilde{D})$$

mesure signée sur un espace de fonctions.

La probabilité $\tilde{\mu}_X$ est dite induite par le pseudo-processus stochastique $\{X_t\}, t \in T$ sur l'espace mesuré $(S^T, \mathcal{B}(S^T))$.

Définition 1.3.6.5 (Mesures signées fini-dimensionnelles)

Soient deux pseudo-processus stochastiques $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$.

On suppose que ces deux processus sont à valeurs dans $(S, \mathcal{B}(S))$. (Dans cette définition, on ne suppose pas qu'ils sont définis sur le même espace de probabilité.)

On dit alors que $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$ possèdent les mêmes mesures signées fini-dimensionnelles si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t_1, \dots, t_k \in T$, les pseudo vecteurs (donc de dimension finie) aléatoires $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$ et $Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}$ sont de même mesure.

Pour tout $A \in \mathcal{B}(S)^k$, on a :

$$\mu_X\{\omega_X \in \Omega_X : (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A\} = \mu_Y\{\omega_Y \in \Omega_Y : (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \in A\}$$

Remarque 1.3.6.6

On suppose que le pseudo-processus $\{X_t\}, t \in T$ est défini sur l'espace mesurable $(\Omega_X, \mathcal{A}_X, \mu_X)$ et le pseudo-processus $\{Y_t\}, t \in T$ est défini sur l'espace de probabilité $(\Omega_Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$.

Lorsque deux pseudo-processus stochastiques $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$ possèdent les mêmes mesures signées fini-dimensionnelles, ils induisent alors la même mesure signée sur $(S^T, \mathcal{B}(S^T))$, c'est-à-dire :

$$\forall \tilde{D} \in \mathcal{B}(S^T), \quad \tilde{\mu}_X(\tilde{D}) = \tilde{\mu}_Y(\tilde{D})$$

Définition 1.3.6.7 (Pseudo-processus markovien)

C'est un pseudo-processus stochastique possédant la propriété de Markov :

$\forall n \geq 0$, pour toute suite d'états $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j) \in S^{n+2}$

$$\mu(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mu(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Définition 1.3.6.8 (Fonction de transition markovienne signée)

On appelle fonction de transition markovienne signée toute fonction $p(., .; ., .)$ vérifiant les propriétés

suivantes :

Pour $0 < s < t$, $\xi \in S$, et B un borélien de S ,

- $p(s, \cdot; t, B)$ est une fonction $\mathcal{B}(S)$ -mesurable.
- $p(s, \xi; t, \cdot)$ est une mesure de signée sur $\mathcal{B}(S)$.
- Equation de Chapman-Kolmogorov avec $s < t < u$

$$p(s, \xi; u, B) = \int_S p(t, \eta; u, B) p(s, \xi; t, d\eta)$$

Remarque 1.3.6.9

Lorsque $p(s, \xi, t, B)$ ne dépend que de la différence $t - s$, on parle de fonction de transition signée stationnaire et alors l'équation de Chapman Kolmogorov se réécrit

$$p_{s+t}(\xi, B) = \int_S p_t(\eta, B) p_s(\xi, d\eta)$$

Proposition 1.3.6.10 (Pseudo-processus associé à une fonction de transition markovienne signée)

Si $p(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ est une fonction de transition markovienne signée et si $p(\cdot)$ est une mesure signée des ensembles B alors il existe un pseudo-processus de Markov $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ dont les pseudo variables aléatoires prennent leurs valeurs dans S et pour lequel avec mesure totale 1 :

$$\mu(X_0(\omega) \in B) = p(B)$$

$$\mu(X_t(\omega) \in B | X_s) = p(s, X_s; t, B)$$

De manière analogue aux transformations qui transforment un mouvement Brownien en un mouvement Brownien, on présente la proposition suivante :

Proposition 1.3.6.11

Toutes ces fonctions ont la même distribution par rapport à μ :

- $x(t), t \geq 0$
- $-x(t), t \geq 0$
- $x(t+s) - x(s), t \geq 0, s \geq 0$
- $t^{\frac{1}{2}} x(\frac{1}{t}), t > 0$
- $cx(\frac{t}{c^4}), t \geq 0, c > 0$

1.3.6.2 Lien avec l'équation de Vigot

On considère le problème suivant :

1.3 Forme particulière pour l'ordre $k \neq 2$ et pour une seule variable d'espace : application en physique et pseudo stochastique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ u(0, x) &= g(x) \end{cases}$$

Une solution à ce problème est

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, x - y)g(y)dy \quad \text{avec} \quad p(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix\xi) \exp(-\xi^4 t) d\xi$$

Soit $C = \{x | a_i \leq X_{t_i} \leq b_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \subset \Omega$ avec $0 < t_1 < \dots < t_n$ un ensemble de cylindres.

On définit la mesure signée associée à l'équation comme suit :

$$\mu(C) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_i - x_{i-1}) dx_i \quad \text{avec} \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_0 = 0$$

μ est markovienne au sens de 1.3.6.8.

1.3.6.3 Pseudo Intégration

Définition 1.3.6.12 (Fonction tame)

Une fonction est dite "tame" si c'est une fonction borélienne d'un nombre fini d'observations $x(t_i)$.

Définition 1.3.6.13 (Limite faible de fonctions tames)

Une suite de fonctions tames f_n a une limite faible si $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n \psi)$ existe pour chaque fonction tame $\psi = \psi(x(t_1), \dots, x(t_m))$ avec $\psi \in \mathcal{S}$.

Cette limite faible définit une fonction $L(\psi)$ sur $\mathcal{S}$.

Définition 1.3.6.14 (Intégrale pseudo-stochastique)

On définit l'intégrale pseudo-stochastique

$$I(\phi) = \int_0^t \phi(x(s))(dx)^j(s)$$

comme limite faible de sommes de Riemann

$$\sum_{k=1}^l \phi(x(\frac{k-1}{n}))[x(\frac{k}{n}) - x(\frac{k-1}{n})]^j + \phi(x(\frac{l}{n}))[x(t) - x(\frac{l}{n})]^j$$

où $j = 1, 2, 3, 4, 0 \leq t \leq 1$ et l est le plus grand entier inférieur ou égal à nt .

Proposition 1.3.6.15

- $I(\phi_1 + \phi_2) = I(\phi_1) + I(\phi_2)$
- $I(k\phi) = kI(\phi)$

Théorème 1.3.6.16 (Pseudo-lemme d'Itô)

Soit f une fonction polynomiale, exponentielle ou de Schwartz. Alors au sens faible :

$$f(x(b)) - f(x(a)) = \int_a^b f'(x(t)) dx(t) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(x(t)) (dx)^2(t) + \frac{1}{6} \int_a^b f^{(3)}(x(t)) (dx)^3(t) - \int_a^b f^{(4)}(x(t)) dt$$

De manière analogue à la relation $(dx)^2(t) = dt$ pour un processus de Wiener, on a

$$(dx)^4(t) = -24dt$$

Chapitre 2

L'ordre 2

Sommaire

2.1	Le résultat et l'application à l'équation de la chaleur	68
2.1.1	La théorie	68
2.1.2	Symétries de l'équation de la chaleur	71
2.2	Les équations dérivées de la chaleur	72
2.2.1	Black Scholes	72
2.2.1.1	Explication du modèle, lien avec l'équation	72
2.2.1.2	Recherche des isovecteurs	74
2.2.1.3	Les symétries	76
2.2.1.4	Un peu d'algèbre	77
2.2.1.5	Lien avec l'équation de la chaleur	78
2.2.2	L'équation de la chaleur rétrograde	78
2.2.2.1	Cas particulier $V = 0$	79
2.2.2.2	Cas particulier $V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2$:	81
2.2.3	L'équation de Burgers	86
2.2.3.1	Calcul des isovecteurs	86
2.2.3.2	Les symétries	88
2.2.3.3	L'algèbre	88
2.2.3.4	Rapport à l'équation de la chaleur	89
2.3	De l'équation de Burgers au modèle d'Hodgkin-Huxley	89
2.4	Craddock Platen	92
2.4.1	Explications	92
2.4.2	Calcul des symétries	93
2.4.3	Des modèles particuliers	102
2.4.3.1	Prix d'une option	102
2.4.3.2	Les modèles affines	103
2.4.3.3	Le modèle de Longstaff	104

2.1 Le résultat et l'application à l'équation de la chaleur

2.1.1 La théorie

Pour une équation de la forme suivante :

$$(\mathcal{E}_{g,2}) : Q(t, q, u) \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + T(t, q) \frac{\partial u}{\partial t} + R(t, q, u, B_1) = 0 \quad (2.1)$$

avec $R, Q \neq 0$ et $T \neq 0$ des fonctions C^∞ définies sur M , on a des résultats supplémentaires :

Théorème 2.1.1.1

— Sous les hypothèses précédentes, en considérant $(\mathcal{E}_{g,2})$ on a :

$$N^q = N^q(t, q)$$

On note $N^q = -w(t, q)$.

— Si on suppose de plus $Q = Q(t, q)$ et R linéaire en B_1 alors N^u est affine en u . On note $N^u = um(t, q) + l(t, q)$.

On a aussi des relations entre les différentes fonctions auxiliaires introduites :

$$-QT_t f + TQ_t f + TQ_f t - QT_q w - 2TQw_q + TQ_q w = 0$$

et

$$\begin{aligned} QT_{B_1} w_t + QT_{um} t + QT_l t - QR_t f - QR_q w + QR_u um + QR_u l + QR_{B_1} B_1 m + QR_{B_1} B_1 w_q \\ + QR_{B_1} um_q + QR_{B_1} l_q - QRw_q + Q^2 B_1 m_q + Q^2 B_1 w_{qq} + Q^2 um_{qq} + Q^2 l_{qq} + Q^2 B_1 m_q \\ = -RQ_t f - RQ_q w + QR(m + w_q) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Et alors

$$N^A = Am + Af_t + B_1 w_t + um_t + l_t$$

$$N^{B_1} = B_1 m + B_1 w_q + um_q + l_q$$

Démonstration : — Comme Q ne dépend pas de $\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$, on choisit de ne pas considérer cette variable comme indépendante afin de simplifier le calcul.

Ainsi, on se passe de la forme différentielle β .

On a alors

$$\alpha = du - Adt - B_1 dq$$

$$d\alpha = -dAdt - dB_1 dq$$

On pose

$$\gamma = (TA + R)dtdq + QdtdB_1$$

2.1 Le résultat et l'application à l'équation de la chaleur

On a alors

$$d\gamma = TdAdtdq + R_ududtdq + R_{B_1}dB_1dtdq + Q_qdqdt dB_1 = -Td\alpha dq + R_u\alpha dtdq + R_{B_1}d\alpha dt - Q_qd\alpha dt$$

$(\mathcal{E}_g)$ est équivalente à l'annulation de ces formes.

En posant $I = \langle \alpha, d\alpha, \gamma \rangle$, I est bien un idéal différentiel fermé.

Comme γ est une 2-forme, on pose

$$\mathcal{L}_N(\gamma) = a\alpha + g\gamma + zd\alpha$$

avec $a = a_1dt + a_2dq + a_3du + a_4dA + a_5dB_1$ une 1-forme, g et z des 0-formes.

Quitte à modifier a_1 et a_2 , on peut supposer que $a_3 = 0$ (1.1.1.4).

En identifiant les coefficients :

$$\begin{array}{llll} dtdq & : & TN^A + AT_tN^t + AT_qN^q + R_tN^t + R_qN^q + R_uN^u + R_{B_1}N^{B_1} & \\ & & (TA + R)N_t^t + (TA + R)N_q^q + QN_q^{B_1} & = Aa_2 - B_1a_1 + (TA + R)g \\ dtdu & : & (TA + R)N_u^q + QN_u^{B_1} & = a_1 \\ dtdA & : & (TA + R)N_A^q + QN_A^{B_1} & = Aa_4 + z \\ dtdB_1 & : & (TA + R)N_{B_1}^q + Q_tN^t + Q_qN^q + Q_uN^u + QN_t^t + QN_{B_1}^{B_1} & = Aa_5 + Qg \\ dqdu & : & 0 & = a_2 \\ dqdA & : & 0 & = B_1a_4 \\ dqdB_1 & : & 0 & = B_1a_5 + z \\ dudA & : & 0 & = -a_4 \\ dudB_1 & : & 0 & = -a_5 \\ dAdB_1 & : & 0 & = 0 \end{array}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$z = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$Qg = -(TA + R)e_{B_1B_1} - Q_tf - Q_qe_{B_1} + Q_u(e - B_1e_{B_1}) - Qf_t + Q(e_u + B_1e_{uB_1} + e_{qB_1})$$

$$a_1 = -(TA + R)e_{B_1u} + Q(B_1e_{uu} + e_{qu})$$

Alors

$$\begin{aligned} & T(Ae_u + Af_t + e_t) - AT_tf - AT_qe_{B_1} - R_tf - R_qe_{B_1} + R_u(e - B_1e_{B_1}) + R_{B_1}(B_1e_u + e_q) - (TA + R)f_t \\ & - (TA + R)e_{B_1q} + Q(B_1e_{uq} + e_{qq}) = -B_1(TA + R)e_{B_1u} + QB_1(B_1e_{uu} + e_{qu}) = (TA + R)g \end{aligned}$$

En égalant les deux expressions de g :

$$\begin{aligned} & Q(T(Ae_u + Af_t + e_t) - AT_tf - AT_qe_{B_1} - R_tf - R_qe_{B_1} + R_u(e - B_1e_{B_1}) + R_{B_1}(B_1e_u + e_q) - (TA + R)f_t \\ & - (TA + R)e_{B_1q} + Q(B_1e_{uq} + e_{qq}) - B_1(TA + R)e_{B_1u} + QB_1(B_1e_{uu} + e_{qu})) = (TA + R)(-(TA + R)e_{B_1B_1} \\ & - Q_tf - Q_qe_{B_1} + Q_u(e - B_1e_{B_1}) - Qf_t + Q(e_u + B_1e_{uB_1} + e_{qB_1})) \quad (2.3) \end{aligned}$$

2.3 est une équation polynomiale en A .

On égale les coefficients de $A^2 : e_{B_1 B_1} = 0$

On pose alors

$$e = B_1 w(t, q, u) + s(t, q, u)$$

On égale maintenant les coefficients de A pour obtenir : $2QT_w q + 2TQB_1 w_u = Q_t T f + Q_q T w - Q_u T s - Q T_t f + T Q f_t - Q T_q w$

En différentiant par rapport à B_1 , $w_u = 0$.

Ainsi

$$N^q = -w(t, q)$$

– On suppose désormais que $Q_u = 0$ et R linéaire en B_1 .

On a donc

$$-Q T_t f + T Q f_t + T Q f_t - Q T_q w - 2T Q w_q + T Q_q w = 0$$

Les termes constants en A donnent :

$$\begin{aligned} QT B_1 w_t + Q T s_t - Q R_t f - Q R_q w + Q R_u s + Q R_{B_1} B_1 s_u + Q R_{B_1} B_1 w_q + Q R_{B_1} s_q - Q R w_q \\ + Q^2 B_1 s_{uu} + Q^2 B_1 w_{qq} + Q^2 s_{qq} + Q^2 B_1^2 s_{uu} + Q^2 B_1 s_{uq} = -R Q_t f - R Q_q w + Q R(s_u + w_q) \end{aligned}$$

En différentiant 2 fois par rapport à B_1 on a $s_{uu} = 0$.

Donc on pose

$$N^u = u m(t, q) + l(t, q)$$

Alors

$$-Q T_t f + T Q f_t + T Q f_t - Q T_q w - 2T Q w_q + T Q_q w = 0$$

et

$$\begin{aligned} QT B_1 w_t + Q T u m_t + Q T l_t - Q R_t f - Q R_q w + Q R_u u m + Q R_u l + Q R_{B_1} B_1 m + Q R_{B_1} B_1 w_q \\ + Q R_{B_1} u m_q + Q R_{B_1} l_q - Q R w_q + Q^2 B_1 m_q + Q^2 B_1 w_{qq} + Q^2 u m_{qq} + Q^2 l_{qq} + Q^2 B_1 m_q \\ = -R Q_t f - R Q_q w + Q R(m + w_q) \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1.2

La somme $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ est directe; en particulier $\mathcal{H}$ est isomorphe à une sous algèbre de $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$.

Démonstration : Soit $N \in \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$. Au vue des expressions des différents N^* , on a $N = 0$.

■

Corollaire 2.1.1.3

$\mathcal{J}$ est un idéal abélien de $\mathcal{G}$

Démonstration : D'après 1.1.3.12, $\mathcal{J}$ est un idéal et $[\mathcal{J}, \mathcal{J}] \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$ or d'après le théorème précédent $\mathcal{J} \cap \mathcal{H} = \{0\}$.

■

2.1 Le résultat et l'application à l'équation de la chaleur

Théorème 2.1.1.4

Supposons que $R = c(t, q)B_1 + d(t, q)u$.
Alors $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$. En particulier $\mathcal{H}$ est isomorphe à $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$.

Démonstration : Pour $u = B_1 = 0$ dans (2.2), on a l est solution. Les autres fonctions f , w et m sont indépendantes de l . ■

2.1.2 Symétries de l'équation de la chaleur

On commence ici par présenter l'application des résultats précédents à l'équation de la chaleur. Elle décrit le phénomène physique de conduction thermique.

Plusieurs des exemples suivant se rapporteront à cette première équation des plus classiques. Les symétries ont déjà été calculées dans [BC69] et dans [HE71].

On considère donc l'équation

$$u_t - \nu u_{qq} = 0$$

On applique le théorème 2.1 pour $Q = \nu$, $T = -1$ et $R = 0$.

On a

$$f_t = 2w_q$$

Alors $w_{qq} = 0$.

$$B_1 w_t + u m_t + l_t - \nu(B_1 m_q + B_1 w_{qq} + u m_{qq} + l_{qq} + B_1 m_q) = 0 \quad (2.4)$$

Pour $u = B_1 = 0$ on a que

l est solution de l'équation de la chaleur

$\frac{\partial(2.4)}{\partial B_1}$ donne $w_t - 2\nu m_q$ donc $m_{qq} = 0$. On pose

$$m = c_1(t)q^2 + c_2(t)q + c_3(t)$$

$\frac{\partial(2.4)}{\partial u}$ permet d'obtenir $m_t - \nu m_{qq}$. On a donc $c_{1t}q^2 + c_{2t}q + c_{3t} = 2\nu c_1(t)$. Alors

$$m = c_1 q^2 + c_2 q + 2\nu c_1 t + c_4$$

Enfin

$$w = 4\nu c_1 t q + 2\nu c_2 t + c_5 q + c_6$$

$$f = 4\nu c_1 t^2 + 2c_5 t + c_7$$

On obtient donc

$$\tilde{N}_1 = 4\nu t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 4\nu t q \frac{\partial}{\partial q} + (q^2 + 2\nu t) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = 2\nu t \frac{\partial}{\partial q} + q u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_5 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_6 = \frac{\partial}{\partial q}$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

2.2.1 Black Scholes

On peut appliquer les résultats précédents pour trouver les symétries de l'équation de Black-Scholes.

C'est l'équation la plus connue en mathématiques financières :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

2.2.1.1 Explication du modèle, lien avec l'équation

Sur un marché financier supposé sans opportunité d'arbitrage et sans versement de dividendes aux actionnaires, on considère une option européenne sur une action S au prix d'exercice K à la maturité T .

On note S_t le prix de l'actif sous jacent à l'instant t . S_t suit un mouvement brownien.

On pose $\xi = (S_T - K)^+$ le gain (ou *payoff*) (on achète seulement si $K < S_T$).

On suppose que le portefeuille contient, en plus de l'actif risqué S_t , un actif non risqué R_t (typiquement une obligation).

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

En notant r_t le taux d'intérêt instantané, σ_t la volatilité du marché et μ_t un paramètre réel, on a :

$$dR_t = r_t R_t dt$$

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

On évalue la position continuellement en fonction des prix du marché et on note V_t la *mark to market value* on a donc

$$V_t = \beta_t R_t + \alpha_t S_t.$$

Une stratégie de financement est alors un couple (β_t, α_t) .

Comme on suppose à $t = 0$ que l'on investit V_0 , qu'on fait évoluer les titres au cours du temps et qu'il n'y a ni apport ni retrait d'argent, on parle de stratégie autofinancée

$$dV_t = \beta_t dR_t + \alpha_t dS_t.$$

On utilise la notation suivante : si $X_t, t \geq 0$ est un processus adapté, on note $X^a(t)$ la valeur de X_t actualisée.

Soit $X^a(t) = \frac{X_t}{R_t}$.

On note a_t le coefficient d'actualisation à l'instant t , $a_t = \frac{1}{R_t}$.

La formule d'intégration par parties donne

$$dV^a(t) = -r_t V^a(t) dt + a_t dV_t$$

$$dS^a(t) = -r_t S^a(t) dt + a_t dS_t = -r_t a_t S_t dt + a_t dS_t.$$

On a alors, comme $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t R_t$,

$$\alpha_t dS^a(t) = -r_t a_t (V_t - \beta_t R_t) dt + a_t \alpha_t dS_t = -r_t V^a(t) dt + a_t (\beta_t dR_t + \alpha_t dS_t).$$

On en déduit immédiatement que (α_t, β_t) est autofinancée si et seulement si $dV^a(t) = \alpha_t dS^a(t)$.

Une stratégie autofinancée est entièrement caractérisée par la valeur initiale du portefeuille V_0 et le processus α_t .

En effet, une stratégie est autofinancée si et seulement si

$$V^a(t) = V^a(0) + \int_0^t \alpha_u dS^a(u) = V_0 + \int_0^t \alpha_u dS(u).$$

On obtient alors β_t via la relation

$$\beta_t = V^a(t) - \alpha_t S^a(t) = V_0 + \int_0^t \alpha_u dS^a(u) - \alpha_t S^a(t).$$

Une fois ce détail réglé, comme V est une fonction de S et t , on applique le lemme d'Itô à deux variables :

$$dV = (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

On considère alors le portefeuille de couverture delta (*delta-hedge portfolio*) . Il a pour valeur des acquis :

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$$

Entre t et $t + \Delta t$, $\Delta \Pi = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S$.

Or

$$\Delta V = (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}) \Delta t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \Delta W \quad \text{et} \quad \Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W.$$

Donc

$$\Delta \Pi = -\frac{\partial V}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta t \quad \text{et l'incertitude est levée.}$$

Comme on a supposé un marché sans opportunité d'arbitrage, le taux de rendement doit être égal à tout instrument sans risque.

En notant r le taux de rendement sans risque, on doit avoir

$$r \Pi \Delta t = \Delta \Pi.$$

On trouve ainsi l'équation de Black Scholes.

2.2.1.2 Recherche des isovecteurs

On pose $q = \ln(S)$ et $u(t, q) = C(t, \exp(q)) = u(t, S)$. L'équation devient alors :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial q} - ru = 0$$

D'après nos notations on a $R = (r - \frac{\sigma^2}{2})B_1 - ru$, $T = 1$ et $Q = \frac{1}{2} \sigma^2$. Ainsi $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$.

On note $\tilde{r} = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\tilde{s} = r + \frac{\sigma^2}{2}$.

Par le théorème 2.1 on obtient :

$$\frac{\sigma^2}{2} f_t - 2 \frac{\sigma^2}{2} w_q = 0 \text{ donc}$$

$$f_t = 2w_q$$

et

$$w_{qq} = 0$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

La deuxième équation du théorème 2.1 en divisant par Q donne :

$$\begin{aligned} B_1 w_t + u m_t + l_t - r(u m + l) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(B_1 m + B_1 w_q + u m_q + l_q) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)B_1 w_q + r u w_q \\ + \frac{\sigma^2}{2}(B_1 m_q + u m_{qq} + l_{qq} + B_1 m_q) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)B_1(m + w_q) - r u(m + w_q) \end{aligned}$$

En différentiant par rapport à B_1 on obtient :

$$w_t = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)w_q - \sigma^2 m_q$$

Comme $w_{qq} = 0$, $w_{tqq} = \sigma^2 m_{qqq} = 0$ on a

$$m_{qqq} = 0.$$

En différentiant par rapport à u :

$$m_t = -\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)m_q - 2r w_q - \frac{\sigma^2}{2}m_{qq}$$

En plus on a $m_{tqq} = 0$, donc

$$m_{qq} = \text{constante}.$$

En prenant $u = B_1 = 0$, on trouve que l est solution de l'équation.

En travaillant avec les différentes équations obtenues juste avant, on a les relations suivantes :

$$f_{tt} = 2w_{qt} = -2\sigma^2 m_{qq} = 2C_1$$

$$f = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$$

$$w_q = C_1 t + \frac{1}{2}C_2$$

Donc

$$m_q = -\frac{C_1}{\sigma^2}q + v(t)$$

$$m_{tt} = -\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v_t - 2C_1 r$$

Ainsi

$$m_{ttq} = 0$$

Par l'expression de m_q on déduit que $v_t = \text{constante}$.

L'expression de m_t nous donne $m_{tq} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{C_1}{\sigma^2}$, so

$$v_t = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{C_1}{\sigma^2}$$

$w_{tt} = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})f_{tt} + \sigma^2 m_{tq} = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})2C_1 - \sigma^2(r - \frac{\sigma^2}{2})(\frac{C_1}{\sigma^2})$ by the expression of m_t .

Donc

$$w_{tt} = 0$$

C'est à dire, $w_t = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})C_2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})C_1t + \sigma^2(\frac{C_1}{\sigma^2}q) - \sigma^2v(t) = C_4$

Ainsi

$$v = \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})C_1}{\sigma^2}t + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma^2}C_2 - \frac{C_4}{\sigma^2}$$

Donc on a :

$$f = C_1t^2 + C_2t + C_3$$

$$w = C_1tq + \frac{1}{2}C_2q + C_4t - C_5$$

$$m = \frac{\tilde{r}C_1}{\sigma^2}tq - \frac{C_1}{2\sigma^2}q^2 + (\frac{\tilde{r}C_2}{2\sigma^2} - \frac{C_4}{\sigma^2})q - \frac{\tilde{s}^2C_1}{2\sigma^2}t^2 + (-\frac{\tilde{s}^2C_2}{2\sigma^2} + \frac{\tilde{r}^2C_4}{\sigma^2} + \frac{C_1}{2})t + C_6$$

Finalement on trouve une base d'isovecteurs de dimension 6.

2.2.1.3 Les symétries

Pour tout $N \in \mathcal{H}$, on calcule d'abord $\tilde{N} = -N^t \frac{\partial}{\partial t} - N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u$.

On a alors :

$$\tilde{N}_1 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tq \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\tilde{r}}{\sigma^2}tq - \frac{1}{2\sigma^2}q^2 - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma^2}t^2 + \frac{1}{2}t)u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}q \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\tilde{r}}{2\sigma^2}q - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma^2}t)u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = t \frac{\partial}{\partial q} + (-\frac{1}{\sigma^2}q + \frac{\tilde{r}^2}{\sigma^2}t)u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = -\frac{\partial}{\partial q}$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Après exponentiation, voici la manière dont certains $\tilde{N}$ agissent sur une solution u de l'équation :

$$e^{\alpha \tilde{N}_3} u(t, q) u(t + \alpha, q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_4} u(t, q) = e^{(-\frac{1}{\sigma^2} q + \frac{r^2}{\sigma^2} t) \alpha} u(t, q + \alpha t)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_5} u(t, q) = u(t, q + \alpha)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_6} u(t, q) = e^\alpha u(t, q)$$

2.2.1.4 Un peu d'algèbre

On trouve :

$$\mathcal{J}_0 = \langle N_6, N_l \rangle$$

$$\mathcal{O} = \langle N_1, N_2, N_3, N_6, N_l \rangle$$

$$\mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle$$

$$\mathcal{K} = \langle N_1, N_2, N_3, N_6 \rangle$$

$$\mathcal{J} = \langle N_l \rangle \quad \text{on retrouve ainsi } \mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

$$\mathcal{M} = \langle N_3, N_5, N_6 \rangle$$

Il avait déjà été démontré ([Les12]) que $\mathcal{H}$ est de dimension 6, et qu'elle est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{H}_{0,0}$ que l'on retrouvera juste après. Ceci n'est pas surprenant dans la mesure où l'équation de Black Scholes peut être réduite à l'équation de la chaleur.

2.2.1.5 Lien avec l'équation de la chaleur

En effet à partir de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial q} - ru = 0$$

en effectuant le changement de variables $\tau = -\frac{2}{\sigma^2}t$ et en posant $k = \frac{2r}{\sigma^2}$

on a

$$-\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + (k-1) \frac{\partial u}{\partial q} - ku = 0.$$

Pour α et β tels que $2\alpha + (k-1) = 0$ et $\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k$ en considérant $u(\tau, q) = \exp(\alpha q + \beta \tau)v(\tau, q)$, v est solution de :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial q^2}$$

2.2.2 L'équation de la chaleur rétrograde

Nous allons expliciter ici la détermination des isovecteurs de l'équation de la chaleur rétrograde avec potentiel.

Celle-ci est en effet d'une extrême importance dans la théorie des processus de Berntein [Hou13b], [HL19a], notamment concernant leurs applications à la mécanique quantique euclidienne.

Elle intervient aussi dans la théorie des modèles affines de taux d'intérêt [Hou13a] [Qui15a].

On considère ainsi l'équation :

$$(\mathcal{E}_\kappa^V) : \kappa \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - V(t, q)u = 0$$

On a $Q = \frac{\kappa^2}{2}$, $T = \kappa$ et $R = -V(t, q)u$ donc $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$.

De plus en appliquant le théorème 2.1 on obtient :

$$f_t = 2w_q$$

Donc on peut poser

$$w = \frac{1}{2}f_t q + a(t).$$

La deuxième équation donne :

$$\kappa(B_1 w_t + u m_t + l_t) + V_t u f + V_q u w - V u m - V l + V u w_q + \frac{\kappa^2}{2}(B_1 m_q + u m_{qq} + l_{qq} + B_1 m_q) + V u(m + w_q) = 0$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

Pour $u = B_1 = 0$, on trouve que l est solution de l'équation.

En différentiant par rapport à B_1 on a

$$w_t = -\kappa m_q$$

Donc on peut poser

$$m = \frac{-1}{4K} f_{tt} q^2 - \frac{1}{K} a_t q + b(t).$$

En différentiant par rapport à u on obtient

$$m_t = -\frac{1}{\kappa} (V_t f + V_q w + 2V w_q + \frac{\kappa^2}{2} m_{qq})$$

c'est à dire

$$\frac{-1}{4\kappa} f_{ttt} q^2 - \frac{1}{\kappa} a_{tt} q + b_t = \frac{-1}{\kappa} (V_t f + \frac{1}{2} V_q f_t q + V_q a + V f_t - \frac{\kappa}{4} f_{tt})$$

2.2.2.1 Cas particulier $V = 0$

On obtient

$$\frac{-1}{4} f_{ttt} q^2 - a_{tt} q + b_t = \frac{\kappa}{4} f_{tt}$$

En différentiant deux fois par rapport à q on a $f_{ttt} = 0$.

Donc

$$f = 2C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

En différentiant par rapport à q on a $a_{tt} = 0$.

Ainsi

$$w = 2C_1 t q + \frac{C_2}{2} q + C_4 t + C_5$$

Finalement $b_t = \kappa C_1$ et

$$m = -\frac{C_1}{\kappa} q^2 - \frac{C_4}{\kappa} q + \kappa C_1 t + C_6$$

On a donc une base d'isovecteurs :

$$N_1 = -2t^2 \frac{\partial}{\partial t} - 2tq \frac{\partial}{\partial q} + \kappa t u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$N_2 = -t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q}$$

$$N_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$N_4 = -t \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\kappa} q u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$N_5 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$N_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Un peu d'algèbre

On trouve :

$$\mathcal{J}_0 = \langle N_6, N_l \rangle$$

$$\mathcal{O} = \langle N_1, N_2, N_3, N_6, N_l \rangle$$

$$\mathcal{H} = \langle N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 \rangle$$

$$\mathcal{K} = \langle N_1, N_2, N_3, N_6 \rangle$$

$$\mathcal{J} = \langle N_l \rangle \quad \text{on retrouve ainsi } \mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$$

$$\mathcal{M} = \langle N_2, N_3, N_5, N_6 \rangle$$

Soient : $M_1 = N_1$, $M_2 = N_2$, $M_3 = \frac{1}{\kappa} N_3$, $M_4 = N_4 - \frac{1}{2} N_3$, $M_5 = N_5$ et $M_6 = N_6$.

Proposition 2.2.2.1

- $\forall \kappa, \mathcal{B}_\kappa = (M_1^{(\kappa)}, \dots, M_6^{(\kappa)})$ est une base de $\mathcal{H}(\mathcal{E}_h^{V=0})$, donc $(M_1^{(-\kappa)}, \dots, M_6^{(-\kappa)})$ est une base de $\mathcal{H}(\mathcal{E}_{-\kappa}^{V=0})$
- Les constantes de structure de $\mathcal{H}_\kappa^{V=0}$ dans la base $\mathcal{B}_\kappa$ ne dépendent pas de κ ; en particulier $\forall u \neq v \neq 0$, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{H}(\mathcal{E}_u^{V=0})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{E}_v^{V=0})$

Remarque 2.2.2.2

Ceci étant un cas particulier des résultats plus généraux de H. Quintard ([Qui15a])

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

Les symétries Pour tout $N \in \mathcal{H}$, on calcule d'abord $\tilde{N} = -N^t \frac{\partial}{\partial t} - N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u$.

On a alors :

$$\tilde{N}_1 = 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2tq \frac{\partial}{\partial q} - q^2 u + \kappa t u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_3 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = t \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\kappa} q u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = -\frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Après exponentiation, voici la manière dont les $\tilde{N}$ agissent sur une solution u de l'équation :

$$e^{\alpha \tilde{N}_1} u(t, q) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha t}} e^{\frac{-\alpha q^2}{-\kappa(1-\alpha t)}} u\left(\frac{2t}{1+\alpha t}, \frac{2q}{1+\alpha t}\right)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_2} u(t, q) = u(e^{\alpha t}, e^{\frac{\alpha}{2}} q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_3} u(t, q) = u(t - \alpha, q)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_4} u(t, q) = e^{\frac{-q\alpha}{\kappa}} u(t, q + \alpha t)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_5} u(t, q) = u(t, q - \alpha)$$

$$e^{\alpha \tilde{N}_6} u(t, q) = e^{\alpha} u(t, q)$$

2.2.2.2 Cas particulier $V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2$:

Pour ce potentiel on obtient :

$$\frac{1}{4} f_{ttt} q^2 + a_{tt} q - \kappa b_t - 2D f_t q^2 + \frac{2Ca}{q^3} - 2Daq + \frac{\kappa}{4} f_{tt}$$

Comme f , a et b sont indépendants de q on peut évaluer les termes en q^5 , q^4 , q^3 et les termes constants en q .

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_{ttt} & = & 8Df_t \\ a_{tt} & = & 2Da \\ 2Ca & = & 0 \\ b_t & = & \frac{1}{4}f_{tt} \end{array} \right\}$$

On trouve exactement le même système que dans [HJC14] et [Qui15a]. On va expliciter les $\tilde{N}$ pour $N \in \mathcal{H}$.

On a donc

$$b = \frac{1}{4}f_t + c_1$$

Plusieurs cas sont alors à distinguer :

1. $C = 0$ On se retrouve ici dans un contexte proche de celui de [HL19b].

- (a) $D > 0$

Remarque 2.2.2.3

Pour $D = 1$ on se retrouve avec l'équation de l'oscillateur harmonique.

Résoudre cette équation joue un rôle fondamental dans l'établissement de la formule de Feynman-Kac.

Pour plus de détails sur ce cas, voir [Var07] p.59.

$$\begin{aligned} f &= \frac{-c_2}{\sqrt{8D}}e^{-\sqrt{8D}t} + \frac{c_3}{\sqrt{8D}}e^{\sqrt{8D}t} + c_4 \\ a &= c_5e^{-\sqrt{2D}t} + c_6e^{\sqrt{2D}t} \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{-1}{\sqrt{8D}}e^{-\sqrt{8D}t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{8D}t} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{\sqrt{8D}}{4\kappa}e^{-\sqrt{8D}t} q^2 + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{8D}t} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{1}{\sqrt{8D}}e^{\sqrt{8D}t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}e^{\sqrt{8D}t} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(-\frac{\sqrt{8D}}{4\kappa}e^{\sqrt{8D}t} q^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{8D}t} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_5 = -e^{-\sqrt{2D}t} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\sqrt{2D}}{\kappa}e^{-\sqrt{2D}t} qu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_6 = -e^{\sqrt{2D}t} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\sqrt{2D}}{\kappa}e^{\sqrt{2D}t} qu \frac{\partial}{\partial u}$$

- (b) $D = 0$

$$f = c_2t^2 + c_3t + c_4$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

$$a = c_5 t + c_6$$

On trouve

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tq \frac{\partial}{\partial q} + \left(-\frac{1}{2\kappa} q^2 + \frac{t}{2}\right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{4} u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_5 = t \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\kappa} qu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_6 = \frac{\partial}{\partial q}$$

(c) $D < 0$

$$f = \frac{c_2}{\sqrt{8D}} \sin(\sqrt{8Dt}) - \frac{c_3}{\sqrt{8Dt}} + c_4$$

$$a = c_5 \cos(\sqrt{2Dt}) + c_6 \sin(\sqrt{2Dt})$$

Ainsi on a

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{\sqrt{8D}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\sqrt{8D} \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{4\kappa} q^2 + \frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{4}\right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = -\frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{\sqrt{8D}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(-\sqrt{8D} \frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{4\kappa} q^2 + \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{4}\right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_5 = \cos(\sqrt{2Dt}) \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\sqrt{2D}}{\kappa} \sin(\sqrt{2Dt}) qu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_6 = \sin(\sqrt{2Dt}) \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\sqrt{2D}}{\kappa} \cos(\sqrt{2Dt}) qu \frac{\partial}{\partial u}$$

2. $a = 0$

(a) $D > 0$

$$f = \frac{-c_2}{\sqrt{8D}}e^{-\sqrt{8D}t} + \frac{c_3}{\sqrt{8D}}e^{\sqrt{8D}t} + c_4$$

Alors

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{-1}{\sqrt{8D}}e^{-\sqrt{8D}t} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{8D}t} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{\sqrt{8D}}{4\kappa}e^{-\sqrt{8D}t} q^2 + \frac{1}{4}e^{-\sqrt{8D}t} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{1}{\sqrt{8D}}e^{\sqrt{8D}t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}e^{\sqrt{8D}t} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(-\frac{\sqrt{8D}}{4\kappa}e^{\sqrt{8D}t} q^2 + \frac{1}{4}e^{\sqrt{8D}t} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

(b) $D = 0$

$$f = c_2 t^2 + c_3 t + c_4$$

Donc

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tq \frac{\partial}{\partial q} + \left(-\frac{1}{2\kappa} q^2 + \frac{t}{2} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{4} u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

(c) $D < 0$

$$f = \frac{c_2}{\sqrt{8D}} \sin(\sqrt{8D}t) - \frac{c_3}{\sqrt{8D}t} \cos(\sqrt{8D}t) + c_4$$

Ainsi on a

$$\tilde{N}_1 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{\sin(\sqrt{8D}t)}{\sqrt{8D}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\cos(\sqrt{8D}t)}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\sqrt{8D} \frac{\sin(\sqrt{8D}t)}{4\kappa} q^2 + \frac{\cos(\sqrt{8D}t)}{4} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

$$\tilde{N}_3 = -\frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{\sqrt{8D}} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{2} q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\sqrt{8D} \frac{\cos(\sqrt{8Dt})}{4\kappa} q^2 + \frac{\sin(\sqrt{8Dt})}{4} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_4 = \frac{\partial}{\partial t}$$

Un point algébrique

Dans tous les cas :

$$\mathcal{J}_0 = \langle N_1 \rangle$$

$$\mathcal{O} = \langle N_1, N_2, N_3, N_4 \rangle = \mathcal{K}$$

Pour $D \neq 0$, $\mathcal{M} = \langle N_1, N_4 \rangle$ mais pour $D = 0$, $\mathcal{M} = \langle N_1, N_3, N_4, N_6 \rangle$ lorsque ceux-ci existent.

Pour une cohérence de notation, on note dans la suite de cette partie $\mathcal{H}_{C,D}$ et non pas seulement $\mathcal{H}$ comme dans [HJC14] et [Qui15a]. Alors pour $C \neq 0$, $\mathcal{H}_{C,D} \simeq \mathcal{H}_{1,0}$ est de dimension 4; pour $C = 0$, $\mathcal{H}_{C,D} \simeq \mathcal{H}_{0,0}$ est de dimension 6 ([HJC14]; [LQ14]).

De plus, $\mathcal{H}_{1,0} \subseteq \mathcal{H}_{0,0}$ ([LQ14]). Ces algèbres de Lie possèdent des bases canoniques, continues en D pour un C fixé, et compatible avec les inclusions

$$\mathcal{H}_{C,D} \subseteq \mathcal{H}_{0,D}.$$

Plusieurs des résultats présentés ici ont déjà été obtenus par P. Lescot, H. Quintard et J.C. Zambrini dans le cadre (équivalent) de l'équation de Hamilton Jacobi Bellman ([LZ07], [LQ14], [HJC14])

En posant

$$S(t, q) = -\kappa \ln(u(t, q))$$

on retrouve l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$-\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 - V - \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} = 0$$

Comme dans ([HJC14]) on pose $B = -\frac{\partial S}{\partial q}$ et $E = -\frac{\partial S}{\partial t}$.

Si on note α le paramètre de la transformation générée par un isovecteur N il existe une application

$$e^{\alpha N} : (t, q, S, E, B) \mapsto (t_\alpha, q_\alpha, S_\alpha, E_\alpha, B_\alpha)$$

On note $e^{\alpha \tilde{N}}$ l'application qui transforme u en u_α pour $\tilde{N} \in \tilde{\mathcal{H}}$ associé à $N \in \mathcal{H}$ ([HJC14], [LZ07] dans lequel il y a une erreur de signe).

On a alors

$$\tilde{N}(S) = -\frac{\kappa}{u} \left(-N^q \frac{\partial}{\partial q} - N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^u \right)$$

Pour u solution de $(\mathcal{E}_\kappa^V)$ associé au processus de Bernstein, on note u_* la solution associée au processus dual.

Théorème 2.2.2.4

u_* est solution de l'équation $(\mathcal{E}_{-\kappa}^V)$
 De plus si on note $\tilde{N} = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + \phi \frac{\partial}{\partial u} + \dots$ un isovecteur de $(\mathcal{E}_\kappa^V)$ alors $\tilde{N}_* = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + \phi_* \frac{\partial}{\partial u} + \dots$ est un isovecteur de $(\mathcal{E}_{-\kappa}^V)$ pour $\phi_* = \phi + \frac{\kappa}{2} N_t^t$ (cette formule est d'ailleurs involutive)

Ceci justifie une affirmation dans ([TZ97]).

L'application $N \mapsto N_*$ définit un isomorphisme entre $\mathcal{H}(\mathcal{E}_\kappa^V)$ et $\mathcal{H}(\mathcal{E}_{-\kappa}^V)$ pour tout $\kappa \neq 0$ donc $\tilde{N} \mapsto \tilde{N}_*$ définit un isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{H}}_\kappa^V$ et $\tilde{\mathcal{H}}_{-\kappa}^V$ ([HJC14]).

2.2.3 L'équation de Burgers

L'équation de Burgers est une équation aux dérivées partielles issue de la mécanique des fluides. Elle apparaît dans divers domaines des mathématiques appliquées, comme la modélisation de la dynamique des gaz, de l'acoustique ou du trafic routier.

On note u la vitesse et ν le coefficient de viscosité cinématique.

On considère l'équation de Burgers avec viscosité :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial q} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = 0$$

2.2.3.1 Calcul des isovecteurs

On applique les résultats précédents pour $k = 2$, $n = 1$, $Q = -\nu$, $T = 1$ et $R = uB_1$.

On a

$$N^t = -f(t)$$

$$N^q = -w(t, q)$$

$$N^u = um(t, q) + l(t, q)$$

$$N^A = Am + aF_t + B_1 w_t + um_t + l_t$$

$$N^{B_1} = B_1 m + B_1 w_q + um_q + l_q$$

$$N^{B_2} = N_q^{B_1} + B_2 w_q + B_1 B_2 w_u + B_1 N_u^{B_1} + B_2 N_{B_1}^{B_1}$$

$$f_t = 2w_q$$

2.2 Les équations dérivées de la chaleur

$$\begin{aligned} -\nu(B_1 w_t + u m_t + l_t + B_1 u m + B_1 l + u B_1 m + u B_1 w_q + u^2 m_q + u l_q - u B_1 w_q - \nu B_1 m_q - \nu B_1 w_{qq} - \nu u m_{qq} - \nu l_{qq} - \nu B_1 m_q) \\ = -\nu u B_1 (m + w_q) \quad (2.5) \end{aligned}$$

Pour $u = B_1 = 0$ dans (2.5) on a $-l_t + \nu l_{qq} = 0$

$$\frac{\partial^2(2.5)}{\partial u^2} : m_q = 0 \text{ donc } m = m(t).$$

$$\frac{\partial^2(2.5)}{\partial u \partial B_1} \text{ donne } m = w_q.$$

Par $\frac{\partial(2.5)}{\partial B_1}$ on obtient $w_t = -l$.

Grâce à $\frac{\partial(2.5)}{\partial u}$ on a $m_t = -l_q$ or $m_{tq} = 0$ donc $l_{qq} = 0$ et par suite $l_t = 0$.

On déduit alors $w_{tt} = 0$ d'où $f_{ttt} = 0$.

On pose

$$f = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$$

Alors

$$m = w_q = c_1 t + \frac{1}{2} c_2$$

D'où $-l_q = m_t = c_1$ donc

$$l = -c_1 q + c_4$$

Ainsi $w_t = c_1 q + c_4$ donc

$$w = c_1 t q + \frac{c_2}{2} q + c_4 t + c_5$$

On trouve ici une base de $\mathcal{G}$ d'isovecteurs de dimension 5.

Pour $N \in \mathcal{H}$, on définit les $\tilde{N}$:

$$\tilde{N}_2 = t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} q \frac{\partial u}{\partial q} + \frac{1}{2} u$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_5 = \frac{\partial u}{\partial q}$$

Pour $N \notin \mathcal{H}$, on définit les S :

$$S_1 = -t^2 \frac{\partial}{\partial t} - t q \frac{\partial}{\partial q} - q \frac{\partial}{\partial u} + t u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$S_4 = -t \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u}$$

On retrouve les résultats de ([OME11]).

2.2.3.2 Les symétries

On exponentie les $\tilde{N}$.

Ils agissent alors sur une solution u de l'équation de Burgers de la manière suivante :

$$\exp(\alpha \tilde{N}_2)u(t, q) = \exp\left(\frac{-1}{2}\alpha\right)u(\exp(-\alpha)t, \exp(-\frac{\alpha}{2})q)$$

$$\exp(\alpha \tilde{N}_3)u(t, q) = u(t + \alpha, q)$$

$$\exp(\alpha \tilde{N}_5)u(t, q) = u(t, q + \alpha)$$

On obtient également 2 symétries supplémentaires à partir des S qui sont :

$$T_{N_1, \alpha}u(t, q) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha t}} \exp\left(\frac{q\alpha}{1 - \alpha t}\right)u\left(\frac{t}{1 + \alpha t}, \frac{q}{1 + \alpha t}\right)$$

$$T_{N_4, \alpha}u(t, q) = u(t, q - \alpha t) + \alpha$$

2.2.3.3 L'algèbre

$$\mathcal{H} = \langle N_2; N_3; N_5 \rangle$$

$$\mathcal{J} = \{0\}$$

$$\mathcal{O} = \{N_1; N_2; N_3\}$$

$$\mathcal{M} = \{N_2; N_3; N_5\}$$

$$\mathcal{K} = \{N_2; N_3\}$$

2.3 De l'équation de Burgers au modèle d'Hodgkin-Huxley

Ici $\mathcal{G} \neq \mathcal{H} \oplus \mathcal{J}$, ce qui ne contredit en rien le théorème 2.1.1.4 dans la mesure où R contient un terme en uB_1 .

2.2.3.4 Rapport à l'équation de la chaleur

On utilise la transformation de Hopf-Cole pour retrouver l'équation de la chaleur ([Eva98]) ([Liu17]).

On commence par considérer l'équation de Burgers sous la forme :

$$u_t = (\nu u_q - \frac{u^2}{2})_q.$$

On pose $\phi(t, q) = \exp(\frac{-1}{2\nu}U)$ tel que $\frac{\partial U}{\partial q} = u$.

On a alors $u(t, q) = -2\nu \frac{\phi_q}{\phi}$.

Comme u vérifie l'équation de Burgers,

$$-2\nu(\frac{\phi_t}{\phi})_q = -(2\nu^2 \frac{\phi_{qq}}{\phi})_q$$

On intègre et on obtient $\phi_t = \nu \phi_{qq} + g(t)\phi$.

On pose $\psi = \phi \exp(-\int g dt)$.

On obtient alors

$$\psi_t = \nu \psi_{qq}$$

2.3 De l'équation de Burgers au modèle d'Hodgkin-Huxley

Comme dans l'article [AD17], on considère l'équation

$$u_t + uu_q - u_{qq} - \gamma u - \delta u^2 - \epsilon u^3 = 0$$

On cherche ici les symétries de ce type d'équation mais en utilisant la méthode des isovecteurs contrairement aux auteurs qui utilisaient la méthode des prolongateurs d'Olver [Olv00].

On peut appliquer le théorème 2.1 avec $Q = -1$, $T = 1$ et $R = uB_1 - \gamma u - \delta u^2 - \epsilon u^3$.

On a $f_t = 2w_q$ donc on pose

$$w = \frac{1}{2}f_t q + a(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} B_1 w_t + u m_t + l_t + (u m + l)(B_1 - \gamma - 2\delta u - 3\epsilon u^2) + u(B_1 m + B_1 w_q + u m_q + l_q) - u w_q (B_1 - \gamma - \delta u - \epsilon u^2) \\ - B_1 m_q - B_1 w_{qq} - u m_{qq} - l_{qq} - B_1 m_q - (m + w_q)(u B_1 - \gamma u - \delta u^2 - \epsilon u^3) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

On obtient un polynôme en u .

Les constantes donnent un polynôme en B_1 qui permet d'avoir

$$l_t - \gamma l - l_{qq} = 0$$

$$l = 2m_q - \frac{1}{2}f_{tt}q - a_t$$

En identifiant les coefficients en u^3 , on a

$$2\epsilon(w_q - m) = 0$$

Ceux en u^2 donnent

$$\delta(-m + 2w_q) + m_q - 3\epsilon l = 0$$

Enfin ceux en u forment un polynôme en B_1 d'où

$$m = w_q$$

$$m_t - 2\delta l + l_q + 2\gamma w_q = 0$$

Ainsi on a $w = \frac{1}{2}f_t q + a(t)$, $l = \frac{-1}{2}f_{tt}q - a_t$ et $m = \frac{1}{2}f_t$.

En substituant ceci dans les équations précédentes on a

$$\delta f_{tt}q + 2\delta a_t + \gamma f_t = 0$$

$$\frac{\delta}{2}f_t + \frac{3}{2}\epsilon f_{tt}q + 3\epsilon a_t = 0$$

$$f_{ttt} - \gamma f_{tt} = 0$$

$$a_{tt} - \gamma a_t = 0$$

On distingue alors deux cas :

1. $\gamma = 0$

$$f = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

$$a = a_4 t + a_5$$

$$l = -a_1 q - a_4$$

$$m = a_1 t + \frac{1}{2}a_2$$

2.3 De l'équation de Burgers au modèle d'Hodgkin-Huxley

$$w = \frac{1}{2}f_t q + a$$

(a) $\epsilon = 0$

– $\delta = 0$

– $\delta \neq 0$ donc $f_t = a_t = 0$

On obtient $f = a_3$, $a = a_5$ et $l = m = 0$.

(b) $\epsilon \neq 0$ donc $f_{tt} = 0$

– $\delta = 0$

$f = a_2 t + a_3$, $a = a_5$, $l = 0$ et $m = \frac{1}{2}a_2$

– $\delta \neq 0$

On a $f = a_3$, $a = a_5$, $l = 0$ et $m = 0$.

2. $\gamma \neq 0$

$$f = \frac{1}{\gamma^2}e^{\gamma t} + a_1 t + a_2$$

$$a = \frac{1}{\gamma}e^{\gamma t} + a_3$$

$$l = \frac{-1}{2}e^{\gamma t} q - e^{\gamma t}$$

$$m = \frac{1}{2\gamma}e^{\gamma t} + \frac{1}{2}a_1$$

$$w = \frac{1}{2}f_t q + a$$

(a) $\epsilon = 0$

– $\delta = 0$ donc $f_t = 0$

On a $f = a_2$, $a = \frac{1}{\gamma}e^{\gamma t} + a_3$, $l = e^{\gamma t}$

– $\delta \neq 0$ donc $f_t = 0$

On a $f = a_2$, $a = a_3$, $l = 0$

(b) $\epsilon \neq 0$ donc $f_{tt} = 0$

– $\delta = 0$ alors $a = a_3$ et $f = a_2$

– $\delta \neq 0$ $f = a_2$ et $a = a_3$

Ainsi on retrouve les résultats de [AD17] :

1. Pour γ , δ et ϵ des constantes quelconques on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial q}$$

2. Pour $\epsilon \neq 0$ et $\delta = \gamma = 0$ on trouve en plus

$$2t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} - u \frac{\partial}{\partial u}$$

3. Pour $\gamma \neq 0$ et $\delta = \epsilon = 0$ on a en plus des deux isovecteurs généraux

$$e^{\gamma t} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \gamma \frac{\partial}{\partial u} \right)$$

4. Pour $\gamma = \delta = \epsilon = 0$ on retrouve l'équation de Burgers précédemment étudiée.

2.4 Craddock Platen

On reprend ici l'article [CD01] dans lequel les auteurs utilisent la méthode des prolongateurs d'Olver [Olv00] pour calculer les symétries des différentes équations mentionnées, et on les retrouve grâce à la méthode des isovecteurs, en utilisant les théorèmes démontrés précédemment dans un cadre un peu plus général.

2.4.1 Explications

Soit $X = \{X_t, t \in [0, T]\}$ un processus stochastique satisfaisant l'équation différentielle stochastique d'Itô

$$dX_t = \phi(X_t)dt + \sqrt{2X_t}dW_t \quad (2.7)$$

pour $t \in [0, T]$ où W est un processus de Wiener standard et ϕ une fonction de dérive.

Ce type de processus contient les processus GSR qui ont des applications en finance notamment. En effet certains processus GSR présentent une propriété connue sous le nom de réversion de moyenne qui les rend idéals pour modéliser des taux d'intérêts.

La densité de transition $p(t, q, r)$ pour X est donné par la solution fondamentale de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (aq + b) \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - \phi(q) \frac{\partial u}{\partial q} = 0. \quad (2.8)$$

de sorte que $u(t, q) = \int_0^\infty \phi(r)p(t, q, r)dr$ soit une solution du problème de Cauchy pour (2.8) avec $u(0, q) = \psi(q)$ (voir par exemple [RY13]).

2.4 Craddock Platen

2.4.2 Calcul des symétries

D'après le théorème (2.1), ici $T = 1$, $Q = -(aq + b)$ et $R = -\phi(q)B_1$, on obtient donc :

$$w = \frac{2}{a}(aq + b)w_q - \frac{aq + b}{a}f_t \quad (2.9)$$

$$-(aq + b)(w_t + \phi'(q)w - (aq + b)(w_{qq} + 2m_q) + \phi(q)w_q) + a\phi(q)w = 0 \quad (2.10)$$

$$m_t = \phi(q)m_q + (aq + b)m_{qq} \quad (2.11)$$

et l est solution de l'équation.

Par 2.9, comme $\frac{\partial}{\partial q}(\frac{w}{\sqrt{aq+b}}) = \frac{1}{2\sqrt{aq+b}}f_t$:

$$w = (aq + b)f_t + \sqrt{aq + b}K(t)$$

Alors 2.10 devient :

$$m_q = \frac{1}{2}f_{tt} + \frac{1}{2\sqrt{aq+b}}K_t + \frac{\phi'(q)}{2}f_t + \frac{1}{2\sqrt{aq+b}}\phi'(q)K + \frac{a^2}{8(aq+b)^{\frac{3}{2}}}K - \frac{a}{4(aq+b)^{\frac{3}{2}}}\phi(q)K$$

D'où

$$m = \frac{\phi(q)}{2}f_t + \frac{1}{2}f_{tt}q + \frac{\sqrt{aq+b}}{a}K_t + \frac{1}{2\sqrt{aq+b}}\phi(q)K - \frac{a}{4\sqrt{aq+b}}K + L(t)$$

L'équation 2.11 nous donne ainsi :

$$\begin{aligned} & 8(aq+b)^{\frac{3}{2}}qf_{ttt} + \frac{16}{a}(aq+b)^2K_{tt} + 16(aq+b)^{\frac{3}{2}}L_t + 3a^3K - 8(aq+b)^{\frac{3}{2}}f_t(\phi(q)\phi'(q) + (aq+b)\phi''(q)) \\ & - 8(aq+b)K(\phi(q)\phi'(q) + (aq+b)\phi''(q)) + 8aK(-a\phi(q) + \frac{1}{2}\phi^2(q) + (aq+b)\phi'(q)) = 0 \end{aligned}$$

On considère $-a\phi(q) + \frac{1}{2}\phi^2(q) + (aq+b)\phi'(q) = Aq^{\frac{3}{2}} + Bq^2 + Cq + D\sqrt{q} + E$.

En dérivant par rapport à q on a $(aq+b)\phi''(q) + \phi(q)\phi'(q) = \frac{3}{2}Aq^{\frac{1}{2}} + 2Bq + C + \frac{1}{2}Dq^{-\frac{1}{2}}$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} & 8(aq+b)^{\frac{3}{2}}qf_{ttt} + \frac{16}{a}(aq+b)^2K_{tt} + 16(aq+b)^{\frac{3}{2}}L_t + 3a^3K - 8(aq+b)^{\frac{3}{2}}f_t(\frac{3}{2}Aq^{\frac{1}{2}} + 2Bq + C + \frac{1}{2}Dq^{-\frac{1}{2}}) \\ & - 8(aq+b)K(\frac{3}{2}Aq^{\frac{1}{2}} + 2Bq + C + \frac{1}{2}Dq^{-\frac{1}{2}}) + 8aK(Aq^{\frac{3}{2}} + Bq^2 + Cq + D\sqrt{q} + E) = 0 \end{aligned}$$

L, K, f étant trois fonctions ne dépendant que de t , pour $a = 1$ et $b = 0$ on a :

$$\begin{aligned} q^{\frac{5}{2}} &: 8f_{ttt} - 16Bf_t &= 0 \\ q^2 &: 16K_{tt} - 12Af_t - 16BK + 8BK &= 0 \\ q^{\frac{3}{2}} &: 16L_t - 8Cf_t - 12AK + 8AK &= 0 \\ q &: -8CK + 8CK - 8f_tD &= 0 \\ \sqrt{q} &: -4KD + 8KD &= 0 \\ 1 &: 3K + 8EK &= 0 \end{aligned}$$

1. $K = 0$,

(a) $f_t \neq 0$

Alors

$$D = A = 0$$

$$L_t = \frac{1}{2}Cf_t$$

$$f_{ttt} = 2Bf_t$$

i. $B = 0$

$$f = c_1t^2 + c_2t + c_3$$

$$L = \frac{c_1C}{2}t^2 + \frac{c_2C}{2}t + c_4$$

Alors

$$m = c_1(\phi t + q + \frac{C}{2}t^2) + c_2(\frac{\phi}{2} + \frac{C}{2}t) + c_4$$

$$w = q(2c_1t + c_2)$$

ii. $B > 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) + C_3$$

$$L = \frac{C_1C}{2\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) - \frac{C_2C}{2\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) + C_4$$

$$w = C_1 \exp(\sqrt{2B}t)q + C_2 \exp(-\sqrt{2B}t)q$$

$$m = C_1 \exp(\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2B}}q + \frac{C}{2\sqrt{2B}} \right) + C_2 \exp(-\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2B}}q - \frac{C}{2\sqrt{2B}} \right) + C_4$$

2.4 Craddock Platen

iii. $B < 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) + C_3$$

$$L = \frac{C_1 C}{2\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) - \frac{C_2 C}{2\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) + C_4$$

$$w = C_1 \cos(\sqrt{-2B}t)q + C_2 \sin(\sqrt{-2B}t)q$$

$$m = \cos(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{\phi C_1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-2B} q C_2 - \frac{C_2 C}{2\sqrt{-2B}} \right) + \sin(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{\phi C_2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-2B} q C_1 - \frac{C_1 C}{2\sqrt{-2B}} \right) + C_4$$

(b) $f_t = 0$

$$f = C_1$$

$$L = C_2$$

$$w = 0$$

$$m = C_2$$

2. $K \neq 0$

Alors

$$D = 0$$

et

$$E = \frac{-3}{8}$$

$$L_t = \frac{1}{2} C f_t + \frac{1}{4} A K$$

(a) $A \neq 0$

$$f_t = \frac{4}{3A} K_{tt} - \frac{2B}{3A} K$$

$$f_{ttt} = 2B f_t$$

i. $B = 0$

$$f = \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2t + C_3$$

Alors

$$K = \frac{1}{8}AC_1t^3 + \frac{3}{16}AC_2t^2 + C_4t + C_5$$

$$L = \frac{1}{128}A^2C_1t^4 + \frac{1}{64}A^2C_2t^3 + (\frac{1}{4}C_1C + \frac{1}{8}AC_4)t^2 + (\frac{1}{2}C_2C + \frac{1}{4}AC_5)t + C_6$$

$$w = C_1tq + C_2q + \frac{1}{8}AC_1t^3\sqrt{q} + \frac{3}{16}AC_2t^2\sqrt{q} + C_4t\sqrt{q} + C_5\sqrt{q}$$

$$\begin{aligned} m = & \frac{\phi}{2}(C_1t+C_2) + \frac{1}{2}qC_1 + \sqrt{q}(\frac{3}{8}AC_1t^2 + \frac{3}{8}AC_2t + C_4) + \frac{1}{2\sqrt{q}}\phi(\frac{1}{8}AC_1t^3 + \frac{3}{16}AC_2t^2 + C_4t + C_5) \\ & - \frac{1}{4\sqrt{q}}(\frac{1}{8}AC_1t^3 + \frac{3}{16}AC_2t^2 + C_4t + C_5) + \frac{1}{128}A^2C_1t^4 + \frac{1}{64}A^2C_2t^3 + (\frac{1}{4}C_1C + \frac{1}{8}AC_4)t^2 \\ & + (\frac{1}{2}C_2C + \frac{1}{4}AC_5)t + C_6 \end{aligned}$$

ii. $B > 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) + C_3$$

$$K = C_4 \exp(\frac{\sqrt{2B}t}{2}) + C_5 \exp(-\frac{\sqrt{2B}t}{2}) + \frac{2C_1}{3B} \exp(\sqrt{2B}t) + \frac{2C_2}{3B} \exp(-\sqrt{2B}t)$$

$$\begin{aligned} L = & (\frac{1}{2}C + \frac{A}{6B})\frac{C_1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) - (\frac{1}{2}C + \frac{A}{6B})\frac{C_2}{\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2B}}AC_4 \exp(\frac{\sqrt{2B}t}{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2B}}AC_5 \exp(\frac{-\sqrt{2B}t}{2}) + C_6 \end{aligned}$$

$$w = (q + \frac{2}{3B}\sqrt{q})C_1 \exp(\sqrt{2B}t) + (q + \frac{2}{3B}\sqrt{q})C_2 \exp(-\sqrt{2B}t) + \sqrt{q}C_4 \exp(\frac{\sqrt{2B}t}{2}) + \sqrt{q}C_5 \exp(\frac{-\sqrt{2B}t}{2})$$

2.4 Craddock Platen

$$\begin{aligned}
m = & C_1 \exp(\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2B}q + \sqrt{q} \sqrt{2B} \frac{2}{3B} + \frac{\phi}{3B\sqrt{B}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} + \frac{C}{2\sqrt{2B}} + \frac{A}{6\sqrt{2B}} \right) \\
& + C_2 \exp(-\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2B}q - \sqrt{q} \sqrt{2B} \frac{2}{3B} + \frac{\phi}{3B\sqrt{B}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} - \frac{C}{2\sqrt{2B}} - \frac{A}{6\sqrt{2B}} \right) \\
& + C_4 \exp\left(\frac{\sqrt{2B}t}{2}\right) \left(\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} + \frac{A}{2\sqrt{2B}} \right) \\
& + C_5 \exp\left(\frac{-\sqrt{2B}t}{2}\right) \left(-\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} - \frac{A}{2\sqrt{2B}} \right) + C_6
\end{aligned}$$

iii. $B < 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) + C_3$$

$$K = C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + C_5 \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + \frac{2C_1}{3B} \cos(\sqrt{-2B}t) + \frac{2C_2}{3B} \sin(\sqrt{-2B}t)$$

$$\begin{aligned}
L = & \left(\frac{C}{2\sqrt{-2B}} + \frac{A}{6B\sqrt{-2B}} \right) C_1 \sin(\sqrt{-2B}t) - \left(\frac{C}{2\sqrt{-2B}} + \frac{A}{6B\sqrt{-2B}} \right) C_2 \cos(\sqrt{-2B}t) \\
& + \frac{C_4 A}{2\sqrt{-2B}} \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) - \frac{C_5 A}{2\sqrt{-2B}} \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + C_6
\end{aligned}$$

$$w = C_1 \cos(\sqrt{-2B}t) \left(q + \frac{2\sqrt{q}}{3B} \right) + C_2 \sin(\sqrt{-2B}t) \left(q + \frac{2\sqrt{q}}{3B} \right) + \sqrt{q} C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + \sqrt{q} C_5 \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
m = & C_1 \left(\cos(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{3B\sqrt{q}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} \right) + \sin(\sqrt{-2B}t) \left(-\frac{-\sqrt{-2B}q}{2} - \frac{2\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{3B} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{C}{2\sqrt{-2B}} + \frac{A}{6B\sqrt{-2B}} \right) \right) + C_2 \left(\sin(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{3B\sqrt{q}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} \right) + \cos(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{-\sqrt{-2B}q}{2} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{2\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{3B} - \frac{C}{2\sqrt{-2B}} - \frac{A}{6B\sqrt{-2B}} \right) \right) + C_4 \left(\sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} + \frac{A}{2\sqrt{-2B}} \right) \right. \\
& + \left. \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) \right) + C_5 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} - \frac{A}{2\sqrt{-2B}} \right) \right. \\
& + \left. \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) \right) + C_6
\end{aligned}$$

(b) $A = 0$

$$K_{tt} = \frac{1}{2}BK$$

$$f_{ttt} = 2Bf_t$$

i. $B = 0$

$f_{ttt} = 0$ donc

$$f = \frac{1}{2}C_1t^2 + C_2t + C_3$$

Alors $K_{tt} = 0$ d'où

$$K = C_4t + C_5$$

Ainsi

$$L = \frac{1}{4}CC_1t^2 + \frac{1}{2}CC_2t + C_6$$

C'est à dire :

$$w = C_1tq + C_2q + C_4t\sqrt{q} + C_5\sqrt{q}$$

$$m = C_1\left(\frac{\phi t}{2} + \frac{q}{2} + \frac{1}{4}Ct^2\right) + C_2\left(\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}Ct\right) + C_4\left(\sqrt{q} + \frac{\phi t}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}t\right) + C_5\left(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}\right) + C_6$$

ii. $B > 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) + C_3$$

$$K = C_4 \exp\left(\frac{\sqrt{2B}t}{2}\right) + C_5 \exp\left(-\frac{\sqrt{2B}t}{2}\right)$$

$$L = \frac{1}{2\sqrt{2B}}CC_1 \exp(\sqrt{2B}t) - \frac{1}{2\sqrt{2B}}CC_2 \exp(-\sqrt{2B}t) + C_6$$

$$w = qC_1 \exp(\sqrt{2B}t) + qC_2 \exp(-\sqrt{2B}t) + \sqrt{q}C_4 \exp\left(\frac{\sqrt{2B}}{2}t\right) + \sqrt{q}C_5 \exp\left(-\frac{\sqrt{2B}}{2}t\right)$$

2.4 Craddock Platen

$$m = C_1 \exp(\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\sqrt{2B}q}{2} + \frac{C}{2\sqrt{2B}} \right) + C_2 \exp(-\sqrt{2B}t) \left(\frac{\phi}{2} - \frac{\sqrt{2B}q}{2} - \frac{C}{2\sqrt{2B}} \right) \\ + C_4 \exp\left(\frac{\sqrt{2B}t}{2}\right) \left(\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) + C_5 \exp\left(\frac{-\sqrt{2B}t}{2}\right) \left(-\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) + C_6$$

iii. $B < 0$

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) - \frac{C_2}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) + C_3$$

$$K = C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + C_5 \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right)$$

$$L = \frac{C}{2\sqrt{-2B}} C_1 \sin(\sqrt{-2B}t) - \frac{C}{2\sqrt{-2B}} C_2 \cos(\sqrt{-2B}t) + C_6$$

$$w = C_1 \cos(\sqrt{-2B}t)q + C_2 \sin(\sqrt{-2B}t)q + \sqrt{q}C_4 \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) + \sqrt{q}C_5 \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right)$$

$$m = C_1 \left(\cos(\sqrt{-2B}t) \frac{\phi}{2} + \sin(\sqrt{-2B}t) \left(\frac{1}{2\sqrt{-2B}}q + \frac{C}{2\sqrt{-2B}} \right) \right) + C_2 \left(\sin(\sqrt{-2B}t) \frac{\phi}{2} \right. \\ \left. + \cos(\sqrt{-2B}t) \left(-\frac{1}{2\sqrt{-2B}}q - \frac{C}{2\sqrt{-2B}} \right) \right) + C_4 \left(-\sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) \right) + C_5 \left(\cos\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} + \sin\left(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}\right) \left(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) \right) + C_6$$

Résumé

Pour

$$u_t - qu_{qq} - \phi u_q = 0$$

On pose

$$-\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + q\phi' = Aq^{\frac{3}{2}} + Bq^2 + Cq + D\sqrt{q} + E \quad (2.12)$$

$3 + 8E \neq 0$		<i>Isovecteurs</i>
$D = 0$	$B = 0$	$\tilde{N}_1 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2qt \frac{\partial}{\partial q} + (\phi t + q + \frac{C}{2} t^2) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi}{2} + \frac{C}{2} t) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$
	$B > 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2B}} e^{\sqrt{2B}t} \frac{\partial}{\partial t} + e^{\sqrt{2B}t} q \frac{\partial}{\partial q} + e^{\sqrt{2B}t} (\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2B}} q + \frac{C}{2\sqrt{2B}}) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2B}} e^{-\sqrt{2B}t} \frac{\partial}{\partial t} + e^{-\sqrt{2B}t} q \frac{\partial}{\partial q} + e^{-\sqrt{2B}t} (\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2B}} q - \frac{C}{2\sqrt{2B}}) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$
	$B < 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \cos(\sqrt{-2B}t) q \frac{\partial}{\partial q}$ $+ (\cos(\sqrt{-2B}t)(\frac{\phi}{2}) + \sin(\sqrt{-2B}t)(-\frac{1}{2}\sqrt{-2B}q - \frac{C}{2\sqrt{-2B}})) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \sin(\sqrt{-2B}t) q \frac{\partial}{\partial q}$ $+ (\sin(\sqrt{-2B}t)(\frac{\phi}{2}) + \cos(\sqrt{-2B}t)(\frac{1}{2}\sqrt{-2B}q - \frac{C}{2\sqrt{-2B}})) u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$
$D \neq 0$		$\tilde{N}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_2 = u \frac{\partial}{\partial u}$

2.4 Craddock Platen

$3 + 8E = 0$		<i>Isovecteurs</i>
$A \neq 0$	$B = 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{2}t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (tq + \frac{1}{8}At^3\sqrt{q}) \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi}{2}t + \frac{1}{2}q + \sqrt{q}\frac{3}{8}At^2 + \frac{1}{16\sqrt{q}}\phi At^3 - \frac{1}{32\sqrt{q}}At^3 + \frac{1}{128}A^2t^4 + \frac{1}{4}Ct^2)u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + (q + \frac{3}{16}At^2\sqrt{q}) \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi}{2} + \sqrt{q}\frac{3}{8}At + \frac{3}{32\sqrt{q}}\phi A - \frac{3}{64\sqrt{q}}At^2 + \frac{1}{64}A^2t^3 + \frac{1}{2}Ct)u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = t\sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + (\sqrt{q} + \frac{1}{2\sqrt{q}}\phi t - \frac{1}{4\sqrt{q}}t + \frac{1}{8}At^2)u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{1}{2\sqrt{q}}\phi - \frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{1}{4}At)u \frac{\partial}{\partial u}$
	$B > 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + (q + \frac{2}{3B}\sqrt{q}) \exp(\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(\sqrt{2B}t)(\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2B}q + \sqrt{q}\sqrt{2B}\frac{2}{3B} + \frac{\phi}{3B\sqrt{B}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} + \frac{C}{2\sqrt{2B}} + \frac{A}{6\sqrt{2BB}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = -\frac{1}{-\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + (q + \frac{2}{3B}\sqrt{q}) \exp(-\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(-\sqrt{2B}t)(\frac{\phi}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2B}q - \sqrt{q}\sqrt{2B}\frac{2}{3B} + \frac{\phi}{3B\sqrt{B}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}} - \frac{C}{2\sqrt{2B}} - \frac{A}{6\sqrt{2BB}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = \sqrt{q} \exp(\frac{\sqrt{2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(\frac{\sqrt{2B}}{2}t)(\sqrt{q}\frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} + \frac{A}{2\sqrt{2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \exp(-\frac{\sqrt{2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(-\frac{\sqrt{2B}}{2}t)(-\sqrt{q}\frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} - \frac{A}{2\sqrt{2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$
	$B < 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \cos(\sqrt{-2B}t)(q + \frac{2\sqrt{q}}{3B}) \frac{\partial}{\partial q} + (\cos(\sqrt{-2B}t)(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{3B\sqrt{q}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}}) + \sin(\sqrt{-2B}t)(-\frac{\sqrt{-2B}q}{2} - \frac{2\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{3B} + \frac{C}{2\sqrt{-2B}} + \frac{A}{6B\sqrt{-2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = \frac{1}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \sin(\sqrt{-2B}t)(q + \frac{2\sqrt{q}}{3B}) \frac{\partial}{\partial q} + (\sin(\sqrt{-2B}t)(\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{3B\sqrt{q}} - \frac{1}{6B\sqrt{q}}) + \cos(\sqrt{-2B}t)(\frac{\sqrt{-2B}q}{2} + \frac{2\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{3B} - \frac{C}{2\sqrt{-2B}} - \frac{A}{6B\sqrt{-2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = \sqrt{q} \cos(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}) \frac{\partial}{\partial q} + (\sin(\frac{\sqrt{-2B}t}{2})(-\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} + \frac{A}{2\sqrt{-2B}}) + \cos(\frac{\sqrt{-2B}t}{2})(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \sin(\frac{\sqrt{-2B}t}{2}) \frac{\partial}{\partial q} + (\cos(\frac{\sqrt{-2B}t}{2})(\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2} - \frac{A}{2\sqrt{-2B}}) + \sin(\frac{\sqrt{-2B}t}{2})(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$

$A = 0$	$B = 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{2}t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tq \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi t}{2} + \frac{q}{2} + \frac{1}{4}Ct^2)u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi t}{2} + \frac{Ct}{2})u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = t\sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + (\sqrt{q} + \frac{\phi t}{2\sqrt{q}} - \frac{t}{4\sqrt{q}})u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}})u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_6 = u$
	$B > 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2B}} \exp(\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + q \exp(\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(\sqrt{2B}t)(\frac{\phi}{2} + \frac{\sqrt{2B}q}{2} + \frac{C}{2\sqrt{2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2B}} \exp(-\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + q \exp(-\sqrt{2B}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(-\sqrt{2B}t)(\frac{\phi}{2} - \frac{\sqrt{2B}q}{2} - \frac{C}{2\sqrt{2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = \sqrt{q} \exp(\frac{\sqrt{2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(\frac{\sqrt{2B}}{2}t)(\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \exp(-\frac{\sqrt{2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\exp(-\frac{\sqrt{2B}}{2}t)(-\sqrt{q} \frac{\sqrt{2B}}{2} + \frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_6 = u$
	$B < 0$	$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{-2B}} \sin(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \cos(\sqrt{-2B}t)q \frac{\partial}{\partial q}$ $+ (\cos(\sqrt{-2B}t)\frac{\phi}{2} + \sin(\sqrt{-2B}t)(\frac{1}{2\sqrt{-2B}}q + \frac{C}{2\sqrt{-2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\sqrt{-2B}} \cos(\sqrt{-2B}t) \frac{\partial}{\partial t} + \sin(\sqrt{-2B}t)q \frac{\partial}{\partial q}$ $+ (\sin(\sqrt{-2B}t)\frac{\phi}{2} + \cos(\sqrt{-2B}t)(-\frac{1}{2\sqrt{-2B}}q - \frac{C}{2\sqrt{-2B}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$ $\tilde{N}_4 = \sqrt{q} \cos(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (-\sin(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t)(\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2}) + \cos(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t)(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \sin(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + (\cos(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t)(\frac{\sqrt{-2B}\sqrt{q}}{2}) + \sin(\frac{\sqrt{-2B}}{2}t)(\frac{\phi}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}))u \frac{\partial}{\partial u}$ $\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$

2.4.3 Des modèles particuliers

2.4.3.1 Prix d'une option

On applique les résultats à un exemple simple de prix d'une option sur un actif.

On considère donc l'équation suivante :

$$u_t - qu_{qq} - \frac{\alpha q}{1 + \frac{1}{2}\alpha q} u_q = 0$$

On a alors $\phi(q) = \frac{\alpha q}{1 + \frac{1}{2}\alpha q}$ et $A = B = C = D = E = 0$.

D'où

$$\tilde{N}_1 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2qt \frac{\partial}{\partial q} + (\frac{\alpha q}{1 + \frac{1}{2}\alpha q} + q)u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\alpha q}{2 + \alpha q} u \frac{\partial}{\partial u}$$

2.4 Craddock Platen

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

2.4.3.2 Les modèles affines

Les processus GSR avec une fonction de dérive affine sont utilisés par Cox, Ingersoll et Ross (CIR) pour modéliser les prix d'obligations.

Pour ces modèles affines, déjà étudiés dans ([Qui15b]), afin d'unifier les notations on considère $W_t = \frac{\alpha}{2}w(t)$, $X_t = \frac{\alpha}{2}r(t) + \frac{\beta}{2}$ et $\phi : x \rightarrow -\lambda q + \frac{\alpha\theta}{2} + \frac{\lambda\beta}{2}$ où θ est le ϕ dans ([Qui15b]).

L'équation 2.8 devient alors

$$u_t - qu_{qq} - (-\lambda q + \frac{\alpha\theta}{2} + \frac{\lambda\beta}{2})u_q = 0.$$

Ici $A = 0$, $B = \frac{1}{2}\lambda^2 > 0$, $C = -\frac{\alpha\theta\lambda}{2} - \frac{\lambda^2\beta}{2}$, $D = 0$ et $E = -\frac{1}{8}(4\alpha\theta + 4\lambda\beta + \alpha^2\theta^2 + \lambda^2\beta^2 + 2\lambda\beta\alpha\theta)$.

– Premier cas : $4\alpha\theta + 4\lambda\beta + \alpha^2\theta^2 + \lambda^2\beta^2 + 2\lambda\beta\alpha\theta = 3$

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\lambda} \exp(\lambda t) \frac{\partial}{\partial t} + q \exp(\lambda t) \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial t} + q \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial q} + \exp(-\lambda t) (-\lambda q + \frac{\alpha\theta}{2} + \frac{\lambda\beta}{2}) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = \sqrt{q} \exp(\frac{\lambda}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + \exp(\frac{\lambda}{2}t) (\frac{\alpha\theta}{4\sqrt{q}} + \frac{\lambda\beta}{4\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \exp(-\frac{\lambda}{2}t) \frac{\partial}{\partial q} + \exp(-\frac{\lambda}{2}t) (-\lambda\sqrt{q} + \frac{\alpha\theta}{4\sqrt{q}} + \frac{\lambda\beta}{4\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}}) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

– Deuxième cas : $4\alpha\theta + 4\lambda\beta + \alpha^2\theta^2 + \lambda^2\beta^2 + 2\lambda\beta\alpha\theta \neq 3$

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{\lambda} \exp(\lambda t) \frac{\partial}{\partial t} + \exp(\lambda t) q \frac{\partial}{\partial q} + \exp(\lambda t) (-\frac{\lambda q}{2} + \frac{1}{2\lambda} q + \frac{\alpha\theta}{2} + \frac{\lambda\beta}{2}) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda t) \frac{\partial}{\partial t} + \exp(-\lambda t) q \frac{\partial}{\partial q} + \exp(-\lambda t) (-\frac{\lambda q}{2} - \frac{1}{2\lambda} q) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

2.4.3.3 Le modèle de Longstaff

Par contraste, Longstaff modélise les prix d'obligations avec un processus GSR dans lequel la fonction de drift est $\phi(q) = \alpha - \beta\sqrt{q}$.

Alors $A = B = 0$, $C = \frac{1}{2}\beta^2$, $D = \beta - \alpha\beta - \frac{\beta}{2}$ et $E = -\alpha + \frac{\alpha^2}{2}$.

1. Premier cas : $\alpha \in \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$

$$\tilde{N}_1 = \frac{1}{2}t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tq \frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{(\alpha - \beta\sqrt{q})t}{2} + \frac{q}{2} + \frac{1}{8}\beta^2 t^2 \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = t \frac{\partial}{\partial t} + q \frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{(\alpha - \beta\sqrt{q})t}{2} + \frac{\beta^2 t}{4} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = t\sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + \left(\sqrt{q} + \frac{(\alpha - \beta\sqrt{q})t}{2\sqrt{q}} - \frac{t}{4\sqrt{q}} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = \sqrt{q} \frac{\partial}{\partial q} + \left(\frac{(\alpha - \beta\sqrt{q})}{2\sqrt{q}} - \frac{1}{4\sqrt{q}} \right) u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

2. Deuxième cas : $\alpha \notin \{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\}$

$$\tilde{N}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_2 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Chapitre 3

Cas non linéaire : l'équation de Frey

On présente ici un article soumis sur l'équation de Frey qui est une équation d'un modèle financier (voir les notions de finance C).

Les résultats des pages 112 à 115 se déduisent des considérations des pages 13 à 15 pour lesquelles les résultats présentés s'appliquent ici mais comme nous soumettons cet article séparément nous repartons du début et en anglais pour les besoins du journal dans lequel nous soumettons.

Sommaire

3.1	Introduction	106
3.2	Towards the Frey equation	107
3.2.1	Financial framework	107
3.2.2	Black Scholes model	108
3.2.3	The tracking error	109
3.3	Computation of the symmetries	112
3.3.1	The method of isovectors	112
3.3.2	Computation of the isovectors	114
3.3.3	The symmetries and some algebra	120

Symmetries of a non linear variant of Black-Scholes equation

Laurène Valade

ABSTRACT :

On the one side in 1971, B. Kent Harrison and Frank B. Estabrook [HE71] introduced a method to determine the symmetries of partial differential equations (PDEs). These last years, the determination of the symmetries of PDEs in Mathematical Physics, in Mathematical Biology and in Financial Mathematics has proved useful [HL19b], [HJC14], [Les12], [LQ14], [LZ02].

On the other side, in 2000, R. Frey [Fre00] characterized perfect hedging strategies by a nonlinear version of the Black-Scholes PDE to take into account the market illiquidity.

The symmetries of this equation was determined by L.A Bordag in the 2000s [Bor06], [Bor08], [Bor15], [BC07], [BF] and by M. Bobrov in 2009 [Bob09] in an unpublished paper using Olver's prolongation method [Olv00].

The aim of this article, after presenting the Frey equation, is to compute the symmetries of this PDE with the method of isovectors due to Harrison Estabrook and to present some results on the Lie algebra of symmetries itself.

3.1 Introduction

Before 1998, the Black Scholes model was the most used in mathematical finance.

Unfortunately, the LTCM financial crises showed that the model had a breach : it was based on assuming that an investor was able to sell or buy a large amount of an asset without any effect on its price.

This problem caused large loss for investors and so now, it is necessary to take into account this new factor.

Here, we present the model introduced by Frey in 2000 [Fre00] in which the hedging strategy affects the derivative price process.

Frey derived a retroactive formula for the dynamic hedging into the volatility of the market. So the volatility increases when the trader uses a hedging strategy which asks for more buys if the price increases and which decreases if he has to sell in reaction at a price increase.

In this case, the standard hedging strategy of Black Scholes can't erase all the risks. In fact when one derives the explicit formula which represents the loss for an investor which uses this hedging, one has some idea of the risk due to the lack of liquidity of the market.

That's why Frey developped a caracterisation of perfect hedging strategy, that takes into account the new factor of risk, by a non linear variant of the Black Scholes standard partial differential equation.

3.2 Towards the Frey equation

A preliminary version of this paper was presented in 2017 by the author as Master's Thesis at the University of Rouen-Normandie.

3.2 Towards the Frey equation

3.2.1 Financial framework

In a financial market assumed without arbitrage opportunities and without payment of dividends to shareholders, a European option on a share S at the strike price K with maturity T is considered.

The investor wants to replicate a derivative contract on the stock using the dynamic trading strategy .

In the opposite of the classical analysis of the derivative assets, here it is assumed that the investor is a big trader.

S_t denotes the stochastic processus on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ representing the price of the stock at time t . S_t satisfies a SDE driven by a Brownian motion.

$\xi = (S_T - K)^+$ represents the payoff (the option is used if and only if $K < S_T$).

It is assumed that the portfolio contains, in addition to the risky asset S_t , a riskless one R_t (typically a bond). The financial market associated with the bond is supposed to be totally liquid.

Noting r_t the instantaneous interest rate, σ_t the market volatility and μ_t a real parameter, :

$$dR_t = r_t R_t dt$$

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

The position is continuously evaluated according to market prices so one considers the mark to market value denoted by V_t . It verifies

$$V_t = \beta_t R_t + \alpha_t S_t.$$

A financing strategy is then a couple (β_t, α_t) .

As it is assumed at $t = 0$ that the trader invests V_0 , that the securities evolve over time and that there is neither contribution nor withdrawal of money, it is a self-financing strategy

$$dV_t = \beta_t dR_t + \alpha_t dS_t.$$

The following notation is used :

if X_t , $t \geq 0$ is an adapted process, $X^a(t)$ is the discounted value of X_t : $X^a(t) = \frac{X_t}{R_t}$.

a_t denotes the discount coefficient at time t , $a_t = \frac{1}{R_t}$.

The formula of integration by parts gives

$$dV^a(t) = -r_t V^a(t)dt + a_t dV_t$$

$$dS^a(t) = -r_t S^a(t)dt + a_t dS_t = -r_t a_t S_t dt + a_t dS_t.$$

As $V_t = \alpha_t S_t + \beta_t R_t$,

$$\begin{aligned} \alpha_t dS^a(t) &= -r_t a_t (V_t - \beta_t R_t)dt + a_t \alpha_t dS_t = \\ &= -r_t V^a(t)dt + a_t (\beta_t dR_t + \alpha_t dS_t). \end{aligned}$$

Immediately (α_t, β_t) is self-financing if and only if $dV^a(t) = \alpha_t dS^a(t)$.

A self-financing strategy is fully characterized by the initial portfolio value V_0 and the process α_t .

Indeed, a strategy is self-financing if and only if

$$V^a(t) = V^a(0) + \int_0^t \alpha_u dS^a(u) = V_0 + \int_0^t \alpha_u dS^a(u).$$

So β_t is obtained by the relation

$$\beta_t = V^a(t) - \alpha_t S^a(t) = V_0 + \int_0^t \alpha_u dS^a(u) - \alpha_t S^a(t).$$

As V is a function of S and t , one can apply Itô's lemma for two variables :

$$dV = (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

3.2.2 Black Scholes model

In the Black Scholes model, the delta-hedge portfolio is considered, it consists of being short one option and long $\frac{\partial V}{\partial S}$ shares at time t . The value of these holdings is

$$\Pi = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$$

Between t and $t + dt$,

$$d\Pi = -dV + \frac{\partial V}{\partial S} dS.$$

But

$$dV = (\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2})dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

3.2 Towards the Frey equation

et

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW.$$

So

$$d\Pi = -\frac{\partial V}{\partial t} dt - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt \quad \text{and the uncertainty is lifted.}$$

As the market is assumed without arbitrage opportunity, the rate of return must be equal to that of the riskless instrument.

By assuming $r_t = r$ the riskless rate of return, it is necessary to have

$$r\Pi dt = d\Pi.$$

Thanks to this one finds the Black Scholes equation for $u = V$.

Let u^{BS} be the Black Scholes price of the derivative for a volatility of reference σ and $r = 0$.

u^{BS} satisfies

$$u_t^{BS}(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 u_{SS}^{BS}(t, S) = 0 \text{ et } u(T, S) = h(S)$$

3.2.3 The tracking error

It is necessary to make some hypothesis :

Hypothesis

(A1) : The stockholdings process (α_t) is left-continuous

$$(\alpha_t = \lim_{s \rightarrow < t} \alpha_s).$$

(A2) : The right-continuous process α^+ defined by $\alpha^+ = \lim_{s \rightarrow > t} \alpha_s$ is a semi-martingale.

(A3) : The downward jumps of the strategy are bounded ($\Delta \alpha_t^+ = \alpha_t^+ - \alpha_t > \frac{-1}{\bar{\rho}}$ for a $\bar{\rho} > 0$ fixed).

(A4) : Let W a brownian motion, $\sigma > 0$ and $0 \leq \rho < \bar{\rho}$. It is assumed that the strategy (α_t) satisfies the hypothesis (A1), (A2) et (A3), and that the asset price process solves the following stochastic differential equation (SDE) :

$$dS_t = \sigma S_{t-} dW_t + \rho S_{t-} d\alpha_t^+, \text{ where } S_{t-} \text{ denotes the left limit of } S_t$$

(A5) : The function $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ belongs to $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ and $\forall (t, S) \in [0, T] \times \mathbb{R}^+$,

$$\rho S \Phi_S(t, S) < 1.$$

Proposition :

Using a strategy $\alpha_t = \Phi(t, S_t)$ satisfying (A5) and assuming that the price process $S_t = S_t(\rho, \alpha)$ follows an Itô process of the form

$$dS_t = v(t, S_t)S_t dW_t + b(t, S_t)dt.$$

Then under the assumptions (A4) we have

$$v(t, S) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \Phi_S(t, S)}$$

et

$$b(t, S) = \frac{\rho S}{1 - \rho S \Phi_S(t, S)} (\Phi_t(t, S) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2}{(1 - \rho S \Phi_S(t, S))^2} \Phi_{SS})$$

This proposition, due to Frey [Fre00], describes the feedback-effect from the dynamic hedging on the volatility : the constant volatility σ is transformed into the time and space by the action of the big trader.

Démonstration : By the Itô lemma, as $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}$, we have

$$d(\Phi(t, S_t)) = \Phi_t(t, S_t)dt + \Phi_S(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2} \Phi_{SS}(t, S_t)v^2(t, S_t)S_t^2 dt.$$

So by the assumption (A4) and as we have a process of the form $dS_t = v(t, S_t)S_t dW_t + b(t, S_t)dt$ we obtain

$$\begin{aligned} dS_t &= v(t, S_t)S_t dW_t + b(t, S_t)dt \\ &= \sigma S_{t-} dW_t + \rho S_{t-} d\alpha_t^+ \\ &= \sigma S_t dW_t + \rho S_t \Phi_S(t, S_t) dS_t + \rho S_t (\Phi_t dt + \frac{1}{2} \Phi_{SS} d\langle S \rangle_t) \\ &= \sigma S_t dW_t + \rho S_t \Phi_S(t, S_t) dS_t + \rho S_t (\Phi_t(t, S_t) + \frac{1}{2} \Phi_{SS} v^2 S_t^2) dt \end{aligned}$$

Therefore

$$(1 - \rho S_t \Phi_S(t, S_t)) dS_t = \sigma S_t dW_t + \rho S_t (\Phi_t(t, S_t) dt + \frac{1}{2} \Phi_{SS}(t, S_t) d\langle S \rangle_t).$$

Because $\rho S_t \Phi_S(t, S_t) < 1$ we can deduce the proposition. ■

The tracking error is defined by : $e_T^M = \xi - V_T^M = \xi - (V_0 + \int_0^T \alpha_s dS_s(\rho, \alpha))$.

Remark :

The amount $\frac{1}{\rho S_t}$ measures the depth of the market : that is the necessary change in the large trader's stock position to cause a price movement of a unit of account.

Proposition : Suppose that the large trader uses the Black Scholes trading strategy and that $u_S^{BS}(t, S)$ satisfies (A5) taking $\Phi = u_S^{BS}(t, S)$.

Then

$$e_T^M = \int_0^T \frac{1}{2} \sigma^2 \left(\frac{1}{(1 - \rho S_s u_{SS}^{BS}(s, S_s))^2} - 1 \right) S_s^2 u_{SS}^{BS}(s, S_s) ds$$

3.2 Towards the Frey equation

Démonstration : By definition of the tracking error $e_T^M = \xi - (u^{BS}(0, S_0) + \int_0^T u_S^{BS}(t, S_t) dS_t)$.

According to the previous proposition $v(t, S, u^{BS}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S u_{SS}^{BS}(t, S)}$.

By the Itô formula :

$$\begin{aligned} \xi = u^{BS}(T, S_T) &= u^{BS}(0, S_0) + \int_0^T u_S^{BS}(t, S_t) dS_t + \int_0^T (u_t^{BS}(t, S_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} u_{SS}^{BS}(t, S_t) v^2(t, S_t, u^{BS}) S_t^2) dt \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} e_T^M &= \int_0^T u_S^{BS}(t, S_t) dS_t + \int_0^T (u_t^{BS}(t, S_t) + \frac{1}{2} u_{SS}^{BS}(t, S_t) v^2(t, S_t, u^{BS}) S_t^2) dt \\ &\quad - \int_0^T u_S^{BS}(t, S_t) dS_t \end{aligned}$$

But $u_t^{BS}(t, S) = -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 u_{SS}^{BS}(t, S)$ and $v(t, S, u^{BS}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S u_{SS}^{BS}(t, S)}$. ■

Obviously, the aim is to find a hedging strategy that minimizes the tracking error.

In this framework, Frey gives a perfect strategy :

Proposition : Assuming $u \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ is a solution of the following non linear variant of the Black Scholes equation following :

$$u_t(t, S) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \rho S u_{SS}(t, S))^2} S^2 u_{SS}(t, S) = 0$$

where $h(S) = u(T, S)$ and $u_S(t, S)$ satisfies (A5).

Then the selffinancing strategy with $\alpha_t = u_S(t, S_t)$ as stock-trading-strategy and $V_t = u(t, S_t)$ as value process is a perfect replication strategy for the derivative, that is $e_T^M = 0$.

Démonstration : By the Itô formula :

$$\begin{aligned} \xi &= u(T, S_T) \\ &= u(0, S_0) + \int_0^T u_S(t, S_t) dS_t + \int_0^T (u_t(t, S_t) + \frac{1}{2} u_{SS}(t, S_t) v^2(t, S_t, u) S_t^2) dt \\ &= u(0, S_0) + \int_0^T u_S(t, S_t) dS_t + \int_0^T (u_t(t, S_t) \\ &\quad + \frac{1}{2} u_{SS}(t, S_t) (\frac{\sigma}{1 - \rho S u_{SS}})^2 S_t^2) dt \end{aligned}$$

But

$$u_t + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{(1 - \rho S u_{SS})^2} S^2 u_{SS} = 0 \text{ so } \xi = u(0, S_0) + \int_0^T u_S(t, S_t) dS_t.$$

So

$$e_T^M = \xi - u(0, S_0) - \int_0^T u_S(t, S_t) dS_t = 0$$

3.3 Computation of the symmetries

So we consider this equation :

$$(\mathcal{E}) : u_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{u_{SS}}{(1 - \rho S \lambda(S) u_{SS})^2}$$

3.3.1 The method of isovectors

We will apply the method due to Harrison Estabrook [HE71] to find the symmetries of this non linear partial differential equation.

Remark : This method has already been applied to find the symmetries of many PDE's, for instance : the Black Scholes equation [Les12], the backward heat equation with potential [LQ14], the Hamilton-Jacobi-Bellman equation [HL19b] [LZ02] or the equation $\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial q^4}$ [LV19].

Remark : In [LV19] we have developed a rather general framework to compute the symmetries with this method but unfortunately this equation doesn't enter in this class of equation. That's why I present this computation alone.

However in my ongoing PhD Thesis some properties will be jointly proven for these two types of equations.

We denote by $u(t, S)$ a solution of the Frey equation.

Temporarily we consider u , $A = \frac{\partial u}{\partial t}$, $B_1 = \frac{\partial u}{\partial S}$ and $B_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$ as independent variables .

We take $M := J \times O \times \mathbb{R}^2$ as state space, a point will be denoted by (t, S, u, A, B_1, B_2) .

The computations will be carried out in the differential algebra $\wedge T^*M$.

We will express the partial differential equation as the vanishing of a family of first-order differential forms.

We set $\alpha := du - A dt - B_1 dS$, a 1-form.

Then we have $d\alpha = -dA dt - dB_1 dS$.

And we set also

$$\begin{aligned} \beta &:= dt dB_1 - B_2 dt dS \\ \gamma &:= A dt dS + \frac{1}{2(1+W)} \sigma^2 S^2 dt dB_1 = A dt dS + Q dt dB_1 \end{aligned}$$

where $W(S, B_2) = -2\rho S \lambda(S) B_2 + \rho^2 S^2 \lambda(S)^2 B_2^2$.

The equation $(\mathcal{E})$ is equivalent to the vanishing of α , β and γ .

We have :

$$d\gamma = -d\alpha dS - Q_S d\alpha dt + Q_{B_2} dB_2 \beta - Q_{B_2} B_2 d\beta.$$

3.3 Computation of the symmetries

For $I = \langle \alpha, \beta, \gamma, d\alpha, d\beta \rangle$, I is a closed differential ideal in $\wedge T^*M$ ($d(I) \subset I$).

Lemma : Each 2-form of I can be expressed as $a\alpha + z d\alpha + \xi$ with z a 0-form, $\xi \in \langle \beta, \gamma, d\beta \rangle$ and $a = a_t dt + a_S dS + a_u du + a_A dA + a_{B_1} dB_1 + a_{B_2} dB_2$ a 1-form for which we may assume $a_u = 0$.

Remark : This lemma is inspired by a remark in ([HE71] p. 658)

Démonstration : If $a_u \neq 0$, we can change $a\alpha$ into $a'\alpha$ where $a'_u = 0$ thanks to

$$a'_t = a_t + a_u A$$

$$a'_S = a_S + a_u B_1$$

because $du = A dt + B_1 dS + \alpha$. ■

In TM , the generic vector field is :

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^S \frac{\partial}{\partial S} + N^u \frac{\partial}{\partial u} + N^A \frac{\partial}{\partial A} + \sum_{l=1}^2 N^{B_l} \frac{\partial}{\partial B_l}.$$

Definition : The vector field $N \in T^1(M)$ is an isovector for $(\mathcal{E})$ if $\mathcal{L}_N(I) \subset I$.

We define

$$\tilde{N} = -N^t \frac{\partial}{\partial t} - N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u.$$

Lemma : Let N an isovector.

There exists a function $F = F_N(t, S, u, A, B_1)$ such that :

$$\begin{aligned} N^t &= -F_A \\ N^S &= -F_{B_1} \\ N^u &= F + AN^t + B_1 N^S \\ N^A &= AF_u + F_t \\ N^{B_1} &= B_1 F_u + F_S \end{aligned}$$

Remark : This lemma is already present in ([HE71], p. 657). It is used in various particular cases for instance in [HL19b],[Les12],[LQ14],[LZ02].

Démonstration : Let N an isovector; as α is the only 1-form among the generators of I , we shall have $\mathcal{L}_N(\alpha) = \xi\alpha$.

We set $F = N \lrcorner \alpha$ ([HE71]).

Then

$$F = N^u - AN^t - B_1 N^S$$

but $\mathcal{L}_N(\alpha) = N \lrcorner d\alpha + d(N \lrcorner \alpha)$ so $N \lrcorner d\alpha = \xi\alpha - dF$.

That is

$$\begin{aligned} -N^A dt + N^t dA - N^{B_1} dS + N^S dB_1 &= \xi(du - A dt - B_1 dS) - F_t dt \\ &\quad - F_S dS - F_u du - F_A dA - F_{B_1} dB_1 - F_{B_2} dB_2 \end{aligned}$$

By identifying the coefficients we obtain :

$$\begin{aligned} dt &: -N^A &= -A\xi - F_t \\ dA &: N^t &= -F_A \\ dS &: -N^{B_1} &= -B_1\xi - F_S \\ dB_1 &: N^S &= -F_{B_1} \\ du &: 0 &= \xi - F_u \\ dB_2 &: 0 &= -F_{B_2} \end{aligned}$$

3.3.2 Computation of the isovectors

The aim is to determine the symmetries of the Frey's equation and in order to do this it is necessary to find the isovectors.

Theorem : We have $N^t = N^t(t)$

Remark : This theorem is available in the framework of [LV19] but also for a very general class of equations and the proof will be presented in my ongoing PhD Thesis

Démonstration : As γ is a 2-form, we need to have

$$\mathcal{L}_N(\gamma) = a\alpha + b\beta + g\gamma + z d\alpha$$

with $a = a_1 dt + a_2 dS + a_4 dA + a_{5,1} dB_1 + a_{5,2} dB_2$ a 1-form, b, g and z 0-forms. (3.3.1)

By identifying the coefficients :

$$\begin{aligned} dS dB_1 &: QN_S^t - AN_{B_1}^t &= B_1 a_{5,1} + z \\ dudB_1 &: QN_u^t &= -a_{5,1} \\ dAdB_1 &: QN_A^t &= 0 \\ dAdt &: -AN_A^S - QN_A^{B_1} &= -Aa_4 - z \\ dudA &: 0 &= a_4 \end{aligned}$$

$$N_A^t = -F_{AA} = 0$$

then

$$F = Af(t, q, u, B_1) + e(t, q, u, B_1)$$

We obtain

$$-2Qf_S - 2B_1Qf_u + Af_{B_1} = 0.$$

As Q and f are not dependent on A ,

3.3 Computation of the symmetries

$$f_{B_1} = 0$$

It follows $f_u = 0$ and also $f_{q_i} = 0$.

So $f = f(t)$. ■

Proposition :

$$N^{B_2} = 2B_1e_{uS} + e_{SS} + 2B_2e_{B_1S} + B_1^2e_{uu} + 2B_1B_2e_{B_1u} + B_2e_u + B_2^2e_{B_1B_1} \quad (3.1)$$

Remark : This proposition is available in the framework of a general class of equations and the proof will be presented in my ongoing PhD Thesis

Démonstration : According to the previous theorem we have

$$N^t = -f(t)$$

$$N^S = -e_{B_1}$$

$$N^u = e - B_1e_{B_1}$$

$$N^A = Ae_u + Af_t + e_t$$

and

$$N^{B_1} = B_1e_u + e_S$$

We set

$$\mathcal{L}_N(\beta) = h\alpha + l\beta + m\gamma + rd\alpha$$

$$\begin{aligned} dt dB_1 &: -f_t + e_u + B_1e_{uB_1} + e_{sB_1} + B_2e_{B_1B_1} &= Ah_{5,1} + l + Qm \\ dt dS &: B_1e_{uS} + e_{SS} - N^{B_2} + B_2f_t + B_2e_{B_1S} &= Ah_2 - B_1h_1 - B_2l + Am \\ dt du &: B_1e_{uu} + e_{uS} + B_2e_{B_1u} &= h_1 \\ dS du &: 0 &= h_2 \\ dB_1 dS &: 0 &= -B_1h_{5,1} - r \\ dA dt &: 0 &= Ah_4 - r \\ dA du &: 0 &= h_4 \end{aligned}$$

But $A + B_2Q = 0$ so

$$N^{B_2} = 2B_1e_{uS} + e_{SS} + 2B_2e_{B_1S} + B_1^2e_{uu} + 2B_1B_2e_{B_1u} + B_2e_u + B_2^2e_{B_1B_1}$$
■

To continue the computation, it is easier to define a new $\tilde{\gamma}$. By setting

$$\tilde{\gamma} = (1 + W)dudS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 dtdB_1,$$

$$\langle \alpha, \beta, \tilde{\gamma}, d\alpha \rangle = I \text{ because } \gamma - \frac{\tilde{\gamma}}{1+W} = -\alpha dS.$$

We want $\mathcal{L}_N(\tilde{\gamma}) = a\alpha + b\beta + z\gamma + gd\alpha$ with $a = a_1 dt + a_2 dS + a_4 dA + a_{5,1} dB_1 + a_{5,2} dB_2$, b , z and g 0-forms.

$$\begin{aligned} dtdS & : (1+W)N_t^u + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_S^{B_1} & = & Aa_2 - B_1 a_1 \\ & & & - B_2 b \\ dudS & : (1+W)N_u^u + (1+W)N_S^S \\ & & + W_S N^S + W_{B_2} N^{B_2} & = & -a_2 + (1+W)z \\ dAdS & : (1+W)N_A^u & = & -B_1 a_4 \\ dB_1 dS & : (1+W)N_{B_1}^u - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_S^t & = & -B_1 a_{5,1} - g \\ dB_2 dS & : (1+W)N_{B_2}^u & = & -B_1 a_{5,2} \\ dtdu & : -(1+W)N_t^S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_u^{B_1} & = & a_1 + Aa_3 \\ dAdu & : -(1+W)N_A^S & = & a_4 \\ dB_1 du & : -(1+W)N_{B_1}^S - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_u^t & = & a_{5,1} \\ dB_2 du & : -(1+W)N_{B_2}^S & = & a_{5,2} \\ dtdB_1 & : \sigma^2 S N^S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_t^t \\ & & + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_{B_1}^{B_1} & = & Aa_{5,1} + b + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 z \\ dtdB_2 & : \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_{B_2}^{B_1} & = & Aa_{5,2} \\ dAdB_1 & : \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_A^t & = & 0 \\ dB_1 dB_2 & : -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_{B_2}^t & = & 0 \\ dtdA & : \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_A^{B_1} & = & Aa_4 + g \\ dB_1 dB_2 & : \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N_{B_2}^t & = & 0 \end{aligned}$$

$$g = -Aa_4$$

$$b = -Aa_{5,1} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 z - \sigma^2 S e_{B_1} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (e_u + e_{SB_1} + B_1 e_{uB_1})$$

$$a_{5,1} = (1+W)e_{B_1 B_1}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_1 = (1+W)(e_{B_1 t}) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 (B_1 e_{uu} + e_{SU})$$

$$B_1 a_{5,1} = -(1+W)(e_{B_1} - B_1 e_{B_1 B_1} - e_{B_1}) - g$$

$$a_2 = (1+W)z - (1+W)(e_u - B_1 e_{B_1 u}) + W_S e_{B_1} - W_{B_2} N^{B_2} + (1+W)e_{B_1 S}$$

3.3 Computation of the symmetries

$$\begin{aligned}
(1+W)(e_t - B_1 e_{B_1 t}) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 (B_1 e_{uS} + e_{SS}) &= A(1+W)z \\
&- (1+W)(Ae_u - AB_1 e_{B_1 u}) + AW_S e_{B_1} - AW_{B_2} N^{B_2} \\
&- B_1(1+W)e_{B_1 t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 B_1 (B_1 e_{uu} + e_{Su}) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 B_2 z \\
&+ (1+W)Ae_{B_1 S} + \sigma^2 S B_2 e_{B_1} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 B_2 f_t \\
&- \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 B_2 (e_u + e_{SB_1} + B_1 e_{uB_1}) + AB_2(1+W)e_{B_1 B_1} \quad (3.2)
\end{aligned}$$

By combining (3.1) and (3.2), for $A(1+W) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 B_2 = 0$ by multiplying by $1+W$, we get a polynômial equation in B_2 .

The terms in B_2^4 give

$$\rho^2 \lambda(S)^2 e_t + \frac{1}{2} \sigma^2 e_{B_1 B_1} = 0 \quad (3.3)$$

Those in B_2^3 allow to obtain :

$$\begin{aligned}
-4\rho^2 \lambda(S)^2 e_t &= \rho \sigma^2 S \lambda(S) B_1 e_{B_1 u} - \rho \sigma^2 S \lambda'(S) e_{B_1} + \frac{3}{2} \rho \sigma^2 S \lambda(S) e_{B_1 S} \\
&+ \rho \sigma^2 S \lambda(S) e_u + \frac{1}{2} \rho \sigma^2 S \lambda(S) f_t - \frac{1}{2} \rho \sigma^2 S \lambda(S) e_{B_1 S} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

The coefficients in B_2^2 are :

$$\begin{aligned}
6\rho^2 \lambda(S)^2 e_t - \rho^2 \sigma^2 S^2 \lambda(S)^2 B_1 e_{uS} - \frac{1}{2} \rho^2 \sigma^2 S^2 \lambda(S)^2 e_{SS} &= \\
&- \rho \sigma^2 S \lambda(S) e_u - \rho \sigma^2 \lambda(S) e_{B_1} + \rho \sigma^2 S \lambda'(S) e_{B_1} + \frac{1}{2} \rho^2 \sigma^2 S^2 \lambda(S)^2 B_1^2 e_{uu} \\
&- \rho \sigma^2 S \lambda(S) f_t - \frac{1}{2} \sigma^2 e_{B_1 B_1} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Those in B_2 give

$$\begin{aligned}
-4\rho S \lambda(S) e_t &= -\sigma^2 S^2 B_1 e_{uB_1} + \sigma^2 S e_{B_1} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f_t \\
&- \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 e_{B_1 S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 e_{B_1 S} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Finally for $B_2 = 0$ we have

$$e_t = -\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 (B_1^2 e_{uu} + 2B_1 e_{Su} + e_{SS}) \quad (3.7)$$

(3.3) and (3.7) give

$$e_{B_1 B_1} = \rho^2 S^2 \lambda(S)^2 (B_1^2 e_{uu} + 2B_1 e_{Su} + e_{SS}) \quad (3.8)$$

(3.3) and (3.5) with (3.8) allow to obtain

$$3\rho S\lambda(S)(B_1^2 e_{uu} + 2B_1 e_{uS} + e_{SS}) + e_u + f_t + \left(\frac{1}{S} - \frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)}\right)e_{B_1} = 0 \quad (3.9)$$

By (3.4) and (3.6) we have

$$\left(\frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)}\right)e_{B_1} = 2B_1 e_{uB_1} + 2e_{B_1 S} + e_u \quad (3.10)$$

We consider the f_t of (3.9) in (3.6) equalizing with (3.3) and thanks to (3.8) dividing by $3\rho S^3\lambda(S)\sigma^2$ we have :

$$\left(\frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)} + \frac{1}{S}\right)e_{B_1} = 2e_{B_1 S} + 2B_1 e_{B_1 u} + 7\rho S\lambda(S)(B_1^2 e_{uu} + 2B_1 e_{uS} + e_{SS}) + e_u$$

With (3.10) $B_1^2 e_{uu} + 2B_1 e_{uS} + e_{SS} = 0$, so by (3.8) $e_{B_1 B_1} = 0$.

Setting

$$e = w(t, S, u)B_1 + y(t, S, u)$$

(3.3) implies $w_t = y_t = 0$

We differentiate (3.4) with respect to B_1 and we obtain $w_u = 0$ then with respect to u we have y_{uu} .

So we pose

$$y(S, u) = um(S) + l(S)$$

(3.4) becomes $-\lambda'(S)w + \lambda(S)w_S + \lambda(S)m + \frac{1}{2}f_t = 0$.

Differentiating (3.5) with respect to B_1 and we have $w_{SS} = 2m_S$ then with respect to u we obtain $m_{SS} = 0$.

We set

$$m = aS + b$$

Then differentiating twice (3.6) with respect to S we have $a = 0$ so $w = cS + d$.

(3.7) implies $l_{SS} = 0$ so we pose $l = gS + h$.

(3.4) dividing by $3\rho\sigma^2 S^3\lambda(S)$

$$0 = -\frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)}\left(c + \frac{d}{S}\right) + c + b + \frac{1}{2}f_t \quad (3.11)$$

Dividing by $2\rho\sigma^2 S^3\lambda(S)$, (3.5) implies

$$0 = b + c + \frac{d}{S} - \frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)}(cS + d) + f_t \quad (3.12)$$

3.3 Computation of the symmetries

We divide (3.6) by $3\rho\sigma^2 S^3 \lambda(S)$ and we have

$$0 = c + \frac{d}{S} + \frac{1}{2}f_t$$

So differentiating with respect to S , $f_t = 0$ then $d = 0$.

By (3.12) $(\frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)}S - 1)c = b$.

But b and c are constants so we separate in two cases :

- First case : $b = c = 0$
 $f = -c_1$ and $e = c_2S + c_3$
 Then :

$$N^t = c_1$$

$$N^S = 0$$

$$N^u = c_2S + c_3$$

$$N^A = 0$$

$$N^{B_1} = c_2$$

$$N^{B_2} = 0$$

We find the following isovectors :

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$N_2 = S \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial B_1}$$

$$N_3 = \frac{\partial}{\partial u}$$

- Second case : there exists a constant k such that $S \frac{\lambda'(S)}{\lambda(S)} = k$
 Then $\lambda(S) = \omega S^k$
 So $e = c_2S + c_3 - c_4SB_1 + (1 - k)c_4u$ et $f = -c_1$.
 We have :

$$N^t = c_1$$

$$N^S = c_4S$$

$$N^u = (1 - k)c_4u + c_2S + c_3$$

$$N^A = A(1 - k)c_4$$

$$N^{B_1} = -B_1kc_4 + c_2$$

$$N^{B_2} = -c_4 B_2 - B_2 k c_4$$

We find as isovectors :

$$N_1 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$N_2 = S \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial B_1}$$

$$N_3 = \frac{\partial}{\partial u}$$

$$N_4 = S \frac{\partial}{\partial S} + (1-k)u \frac{\partial}{\partial u} + (1-k)A \frac{\partial}{\partial A} - kB_1 \frac{\partial}{\partial B_1} - (1+k)B_2 \frac{\partial}{\partial B_2}$$

	N_1	N_2	N_3	N_4
N_1	0	0	0	0
N_2	0	0	0	$(1-k)N_2$
N_3	0	0	0	$(1-k)N_3$
N_4	0	$-(1-k)N_2$	$-(1-k)N_3$	0

3.3.3 The symmetries and some algebra

Definition : We shall denote by $\mathcal{G}$ the isovector algebra of the equation; this is the set of isovectors.

We denote

$$\mathcal{H} = \{N \in \mathcal{G} | l = 0\}$$

Proposition : Due to formal properties ([HE71], p.654) of the Lie derivative, these isovectors constitute a Lie algebra for the usual bracket of vector fields on M .

If α denotes the parameter of a transformation generated by a isovector $N \in \mathcal{H}$, there exists an application

$$e^{\alpha N} : (t, q_1, \dots, q_n, u, A, B_1^1, \dots, B_1^n) \mapsto (t_\alpha, q_{1\alpha}, \dots, q_{n\alpha}, u_\alpha, A_\alpha, B_{1\alpha}^1, \dots, B_{1\alpha}^n)$$

Then

$$e^{\alpha N}(u) = u + \alpha N^u \text{ by approximating to the first order}$$

The application associated with $N \in \mathcal{H}$ which transforms a solution u into a solution u_α for $\tilde{N} \in \tilde{\mathcal{H}}$ is denoted by $e^{\alpha \tilde{N}}$ ([HJC14], [Les12], [LZ07] in which there is a sign mistake).

By definition

$$u_\alpha = \exp^{\alpha \tilde{N}}(u)(t_\alpha, q_{1\alpha}, \dots, q_{n\alpha})$$

That is

$$u + \alpha N^u = (u + \alpha \tilde{N}(u))(t + \alpha N^t, q_1 + \alpha N^{q_1}, \dots, q_n + \alpha N^{q_n})$$

3.3 Computation of the symmetries

So

$$u + \alpha N^u = u + \alpha N^t \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha N^{q_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} + \dots + \alpha N^{q_n} \frac{\partial u}{\partial q_n} + \alpha \tilde{N}(u)(t, q)$$

The transformation

$$N \mapsto \tilde{N}$$

is thus given by $\tilde{N}(u) = -N^t \frac{\partial u}{\partial t} - N^{q_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} - \dots - N^{q_n} \frac{\partial u}{\partial q_n} + N^u$

Proposition : The application $N \mapsto -\tilde{N}$ is a morphism of Lie algebra from $\mathcal{H}$ to $\wedge T^*(\mathbb{R}^{n+1})$.

Remark : This result is true in a more general case and the proof will be present in my ongoing PhD thesis

— First case :

$$\tilde{N}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_2 = S$$

$$\tilde{N}_3 = 1$$

Therefore, after exponentiation the symmetries are :

$$u(t, S) \rightarrow u(t - \alpha, S)$$

$$u(t, S) \rightarrow \exp(\alpha S)u(t, S)$$

$$u(t, S) \rightarrow \exp(\alpha)u(t, S)$$

— Second case :

$$\tilde{N}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_2 = S$$

$$\tilde{N}_3 = 1$$

$$\tilde{N}_4 = -S \frac{\partial}{\partial S} + (1 - k)u$$

The symmetries are the following :

$$u(t, S) \rightarrow u(t - \alpha, S)$$

$$u(t, S) \rightarrow \exp(\alpha S)u(t, S)$$

$$u(t, S) \rightarrow \exp(\alpha)u(t, S)$$

$$u(t, S) \rightarrow \exp((1 - k)\alpha)u(t, \exp(-\alpha)S)$$

Definition :

$$\mathcal{J}_0 := \{N \in \mathcal{G} | N^t = N^q = 0\},$$

Theorem :

$\mathcal{J}_0$ is an ideal of $\mathcal{G}$.

Démonstration : The proof of this theorem is written in [LV19] in a more general case. ■

Proposition : $N \mapsto -\tilde{N}$ is a morphism of Lie algebras.

Démonstration : The argument from [HJC14] is still true here. ■

Definition : We define :

$$\mathcal{J} = \{N \in \mathcal{G} | m = N^t = N^q = 0\},$$

and

$$\mathcal{M} = \{N \in \mathcal{H} | m = c \text{ with } c \text{ a constant}\}$$

We have for this Frey's equation,

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} = \langle N_2, N_3 \rangle$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} = \langle N_1, N_4 \rangle$$

Theorem $\mathcal{H}$ is a subalgebra of $\mathcal{G}$, $\mathcal{J}$ is an abelian ideal of $\mathcal{G}$ and the sum $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ is direct; in particular $\mathcal{H}$ is isomorphic to a subalgebra of $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$.

Démonstration : The proof of this theorem is also written in [LV19] for a more general equation. ■

Here we have

$$\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}.$$

Hence

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}} \simeq \mathcal{H}.$$

Conclusion

Dans cette thèse, trois aspects généraux ont été traités à propos des équations aux dérivées partielles en lien avec des modèles stochastiques :

1. Résultats théoriques sur les symétries des EDP :

Dans un cas très général, on démontre une propriété sur les isovecteurs qui permet de faciliter les calculs de ceux-ci.

De manière plus particulière, en distinguant l'ordre 2 de l'ordre $k > 2$ dans la démonstration, deux équations permettent de trouver les isovecteurs d'équations répondant au type donné.

2. De nombreuses applications sont mises en avant :

En physique avec les équations de Korteweg de Vries dont les symétries sont retrouvées par la méthode des isovecteurs, celle comprenant le bilaplacien dont les symétries sont découvertes et le lien avec la pseudo-stochastique expliqué, l'équation de la chaleur, celle rétrograde avec les différents potentiels ou encore celle de Burgers dont on a retrouvé les symétries facilement grâce aux différents théorèmes démontrés.

En mathématiques financières, le troisième chapitre détermine les symétries de l'équation de Frey, une variante non linéaire de l'équation de Black Scholes dont les symétries sont aussi rappelées. Également plusieurs applications de l'article de Craddock Platen dont les symétries sont retrouvées par la méthode des isovecteurs sont en lien avec des modèles financiers.

3. Des propriétés ont été obtenues à propos des algèbres de Lie notamment le lien entre le type d'EDP et le fait que l'ensemble des isovecteurs est la somme directe d'une algèbre de Lie et d'un idéal, l'un et l'autre canoniquement définis, ou non.

Il pourrait alors être intéressant d'étudier d'autres points :

- Les résultats concernant l'ordre 2 dans le second chapitre ainsi que ceux concernant l'équation de Frey sont très proches toutefois leurs démonstrations sont assez différentes. Serait-il possible de trouver un cadre d'équations incluant ces deux types dont les isovecteurs auraient les mêmes propriétés démontrées de la même manière ?
- On pourra utiliser les théorèmes démontrés dans cette thèse pour les appliquer à d'autres équations.
- Peut être peut-on étendre les cadres choisis à des types d'équations plus larges.
- On a développé le concept de pseudo-stochastique et il serait alors utile d'étendre ces notions.

CHAPITRE 3 : Cas non linéaire : l'équation de Frey

Annexe A

Algèbre de Lie

Définition A.0.0.1

Soit V un espace vectoriel sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

Un crochet de Lie est une loi de composition interne sur V vérifiant les propriétés suivantes :

- bilinéarité : $\forall x, x', y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, [\lambda x + \mu x', y] = \lambda[x, y] + \mu[x', y]$
 $\forall x, y, y' \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, [x, \lambda y + \mu y'] = \lambda[x, y] + \mu[x, y']$
- l'application bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ est alternée : $\forall x \in V, [x, x] = 0$
- Relation de Jacobi : $\forall x, y, z \in V, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Définition A.0.0.2

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

Une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ muni d'un crochet de Lie.

Lemme A.0.0.3

$\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie pour le crochet des champs de vecteurs

Démonstration : Soit V une variété différentielle et X et Y deux champs de vecteurs sur V .

On note $X.f$ la dérivée de la fonction f dans la direction du champ X . Le crochet de Lie de X et Y est l'unique champ de vecteur, noté $[X, Y]$, tel que, pour toute fonction f lisse,

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

L'application $[\cdot, \cdot]$ ainsi définie est bien un crochet de Lie sur les champs de vecteurs. ■

Pour des rappels de calcul différentiel : [Qui15b]

Annexe B

Rappel de stochastique

B.1 Les processus stochastiques

Définition B.1.0.1 (Tribu)

Soit Ω un ensemble. On appelle tribu (ou σ -algèbre) sur Ω un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de Ω qui vérifie :

- $\mathcal{F}$ n'est pas vide ($\mathcal{F} \neq \emptyset$)
- $\mathcal{F}$ est stable par complémentaire :
 $\forall B \in \mathcal{F}, {}^c B \in \mathcal{F}$ (où ${}^c B$ désigne le complémentaire de B dans X)
- $\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable :
 $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{F}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$.

Définition B.1.0.2 (Tribu borélienne)

Soit Ω un espace topologique.

La tribu borélienne est la plus petite tribu sur Ω contenant tous les ensembles ouverts.

Définition B.1.0.3 (Espace mesurable)

Un espace mesurable est un couple $(\Omega, \mathcal{F})$ où Ω est un ensemble et $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω .

Définition B.1.0.4 (Mesure)

On appelle mesure μ une fonction définie sur $\mathcal{F}$ tribu de Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$ qui vérifie :

- l'ensemble vide a une mesure nulle : $\mu(\emptyset) = 0$
- l'application μ est σ -additive :
si $E_1, E_2, \dots$ est une famille dénombrable de parties de Ω appartenant à $\mathcal{F}$, et si ces parties sont deux à deux disjointes, alors la mesure $\mu(E)$ de leur réunion E est égale à la somme des mesures des parties :

$$\mu \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

Remarque B.1.0.5

On appelle *espace mesuré* un espace mesurable muni d'une mesure.

Définition B.1.0.6 (Probabilité)

On appelle *mesure de probabilité* (ou *probabilité*) une mesure $\mathbb{P}$ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Remarque B.1.0.7

On appelle *espace de probabilité* un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité.

Définition B.1.0.8 (Variable aléatoire)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable.
On appelle *variable aléatoire* de Ω vers E , toute fonction mesurable X de Ω vers E .

Définition B.1.0.9

Sur $(E, \mathcal{E})$, on définit une mesure de probabilité, notée $\mathbb{P}_X$, par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$$

La probabilité $\mathbb{P}_X$ est appelée *loi de probabilité* de la variable aléatoire X .

On désigne par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, T un ensemble arbitraire et E un espace métrique muni de la tribu borélienne notée $\mathcal{B}(E)$. T est souvent appelé ensemble des indices. E est appelé espace d'état.

Définition B.1.0.10 (Processus stochastique)

Un *processus stochastique* est une famille de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ indexée par T et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Un processus stochastique est noté par $\{X_t\}$, $t \in T$.

La valeur de la variable aléatoire X_t en un certain $\omega \in \Omega$ est désignée par $X_t(\omega)$.

Définition B.1.0.11 (Loi spatiale)

La famille de toutes les distributions finies-dimensionnelles de X s'appelle la *loi spatiale* du processus.

Définition B.1.0.12 (Chemin ([Mey66]))

Notons par E^T l'ensemble des applications définies sur T en tout point et à valeur dans E .
Fixons $\omega \in \Omega$ et désignons par $X(\omega) \in E^T$ l'application $: t \mapsto X_t(\omega)$. Une telle application est appelée *chemin* du processus stochastique $\{X_t\}$, $t \in T$.

Définition B.1.0.13 (Mesure de probabilité induite par un processus stochastique)

Soit $\{X_t\}$, $t \in T$ un processus stochastique, $\mathcal{B}(E^T)$ la σ -algèbre borélienne de E^T (c'est-à-dire, la

B.1 Les processus stochastiques

σ -algèbre engendrée par les ouverts de la topologie produit de E^T) et l'application suivante :

$$\begin{aligned}\Phi_X : (\Omega, \mathcal{F}) &\rightarrow (E^T, \mathcal{B}(E^T)) \\ w &\mapsto \Phi_X(w) = X(w)\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbb{P}}_X$ la mesure de probabilité sur $(E^T, \mathcal{B}(E^T))$ définie pour tout $\tilde{D} \in \mathcal{B}(E^T)$ par

$$\tilde{\mathbb{P}}_X(\tilde{D}) = \mathbb{P} \circ \Phi_X^{-1}(\tilde{D})$$

mesure de probabilité sur un espace de fonctions.

La probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_X$ est dite induite par le processus stochastique $\{X_t\}, t \in T$ sur l'espace mesuré $(E^T, \mathcal{B}(E^T))$.

Définition B.1.0.14 (Lois fini-dimensionnelles)

Soient deux processus stochastiques $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$.

On suppose que ces deux processus sont à valeur dans $(E, \mathcal{B}(E))$. (Dans cette définition, on ne suppose pas qu'ils sont définis sur le même espace de probabilité.)

On dit alors que $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$ possèdent les mêmes lois finis dimensionnelles si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $t_1, \dots, t_k \in T$, les vecteurs (donc de dimension finie) aléatoires $X_{t_1}, \dots, X_{t_k}$ et $Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}$ sont de même loi.

Pour tout $A \in \mathcal{B}(E)^k$, on a :

$$\mathbb{P}_X\{\omega_X \in \Omega_X : (X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \in A\} = \mathbb{P}_Y\{\omega_Y \in \Omega_Y : (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k}) \in A\}$$

Remarque B.1.0.15

On suppose que le processus $\{X_t\}, t \in T$ est défini sur l'espace de probabilité $(\Omega_X, \mathcal{F}_X, \mathbb{P}_X)$ et le processus $\{Y_t\}, t \in T$ est défini sur l'espace de probabilité $(\Omega_Y, \mathcal{F}_Y, \mathbb{P}_Y)$.

Lorsque deux processus stochastiques $\{X_t\}, t \in T$ et $\{Y_t\}, t \in T$ possèdent les mêmes lois finis dimensionnelles, ils induisent alors la même mesure de probabilité sur $(E^T, \mathcal{B}(E^T))$, c'est-à-dire :

$$\forall \tilde{D} \in \mathcal{B}(S^T), \quad \tilde{\mathbb{P}}_X(\tilde{D}) = \tilde{\mathbb{P}}_Y(\tilde{D})$$

Définition B.1.0.16 (Processus markovien)

C'est un processus stochastique possédant la propriété de Markov :

$\forall n \geq 0$, pour toute suite d'états $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j) \in E^{n+2}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$

Définition B.1.0.17 (Fonction de transition markovienne)

On appelle fonction de transition markovienne toute fonction $p(., .; ., .)$ vérifiant les propriétés suivantes :

Pour $0 < s < t$, $\xi \in E$, et A un borélien de E ,

- $p(s, .; t, A)$ est une fonction $\mathcal{B}(E)$ -mesurable.
- $p(s, \xi; t, .)$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{B}(E)$.
- Equation de Chapman-Kolmogorov avec $s < t < u$

$$p(s, \xi; u, A) = \int_E p(t, \eta; u, A) p(s, \xi; t, d\eta)$$

Remarque B.1.0.18

Lorsque $p(t, \xi, s, A)$ ne dépend que de la différence $t - s$ on parle de fonction de transition stationnaire et alors l'équation de Chapman Kolmogorov se réécrit

$$p_{s+t}(\xi, A) = \int_E p_t(\eta, A) p_s(\xi, d\eta)$$

Proposition B.1.0.19 (Processus stochastique associé à une fonction de transition markovienne ([Doo53]))

Si $p(., .; ., .)$ est une fonction de transition markovienne et si $p(., .)$ est une distribution de probabilité des ensembles A alors il existe un processus de Markov $\{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ dont les variables aléatoires prennent leurs valeurs dans E et pour lequel avec probabilité 1 :

$$\mathbb{P}(X_0(\omega) \in A) = p(A)$$

$$\mathbb{P}(X_t(\omega) \in A | X_s) = p(s, X_s; t, A)$$

B.2 Le mouvement Brownien**B.2.1 sa construction**

On considère X_t un processus gaussien, c'est à dire que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien ou encore que les X_{t_i} est une variable aléatoire qui suit la loi normale.

On note $cov(s, t) = \mathbb{E}(X_s X_t) - \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t)$.

Quitte à considérer $Y_t = X_t - \mathbb{E}(X_t)$, on peut supposer que le processus est centré.

On suppose également que c'est un processus à accroissements indépendants ($X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendants).

En changeant X_t par $X_t - X_{t_0}$ si besoin on suppose $X_{t_0} = 0$.

B.2 Le mouvement Brownien

Soit $F(t) = \text{cov}(t, t)$.

F est croissante : en effet pour $s < t$ $X_s = X_s - 0$ est indépendante de $X_t - X_s$ alors $F(t) = \mathbb{E}((X_s + X_t - X_s)^2) = \mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}((X_t - X_s)^2) \geq \mathbb{E}(X_s^2)$.

Aussi si F est constante $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2) = 0$ donc $X_t = X_s$.

On supprime désormais les intervalles où X est constant et alors F est strictement croissante.

Pour $s < t$, $\mathbb{E}(X_s X_t) = \mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)) = \mathbb{E}(X_s^2)$.

Ainsi $\text{cov}(s, t) = F(s \wedge t)$.

Réciproquement si X est un processus gaussien centré nul en 0 tel que $\text{cov}(s, t) = \text{cov}(s, s) \wedge \text{cov}(t, t)$ alors le processus est à accroissements indépendants : pour $s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$,

$$\mathbb{E}((X_{s_2} - X_{s_1})(X_{t_2} - X_{t_1})) = \text{cov}(s_2, t_2) - \text{cov}(s_2, t_1) + \text{cov}(s_1, t_1) - \text{cov}(s_1, t_2) = \text{cov}(s_2, s_2) - \text{cov}(s_2, s_1) + \text{cov}(s_1, s_1) - \text{cov}(s_1, s_1) = 0$$

Si on appelle G la fonction inverse de F (F est strictement croissante) et considérons $Y_t = X_{G(t)}$.

Y est un processus gaussien centré à accroissement indépendants de covariance $\text{cov}(s, t) = s \wedge t$.

Définition B.2.1.1

On dit qu'un processus stochastique $B_t(\omega)$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un mouvement brownien nul en 0 si c'est un processus gaussien centré de noyau de covariance $\text{cov}(s, t) = s \wedge t$ et qu'il est continu ($\forall \omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega)$ est continue)

Théorème B.2.1.2

Il existe un mouvement brownien

Démonstration : Voir [McK69] ■

B.2.2 ...comme martingale

Proposition B.2.2.1

Soit (B_t) un mouvement brownien défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
 Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t)$ une famille croissante de sous tribus.
 — $\mathcal{F}_t$ est engendrée par les valeurs de B_s pour $s \in \mathbb{Q}$.
 — $\forall 0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.

Démonstration : — Par continuité de $t \mapsto B_t$

— $\forall 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s$, $B_t - B_s$ est indépendant de $(B_{s_1}, \dots, B_{s_n}, B_s)$.

Soit (t_n) une suite de points rationnels dense dans $[0, s]$.

Soit $\mathcal{G}_n = \sigma(B_{t_i}, i \leq n)$.

$B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{G}_n$ donc aussi de $\bigcup_n \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_s$. ■

Définition B.2.2.2 (Martingale)

On dit que $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à $\mathcal{F}_t$ si :

- $\forall t \geq 0, X_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable
- $\forall t \geq 0, \mathbb{E}(|X_t|) < \infty$
- $\forall 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$

Proposition B.2.2.3

- B_t est une martingale
- $B_t^2 - t$ est une martingale
- $\forall \alpha, \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$ est une martingale

Démonstration : – Pour $s < t, B_t = B_s + B_t - B_s$ et comme $B_t - B_s$ est centré indépendant de $\mathcal{F}_s$ donc

$$\mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = 0$$

$$- B_t^2 = B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2$$

$$\text{Or } \mathbb{E}(B_s(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s) = B_s \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) = 0, \mathbb{E}((B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s)^2) = t - s \text{ et } \mathbb{E}(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 + t - s.$$

D'où la conclusion

$$- \exp(\alpha B_t) = \exp(\alpha B_s) \exp(\alpha(B_t - B_s)) \text{ donc } \mathbb{E}(\exp(\alpha B_t) | \mathcal{F}_s) = \exp(\alpha B_s) \mathbb{E}(\exp(\alpha(B_t - B_s))) = \exp(\alpha B_s) \exp(\frac{\alpha^2(t-s)}{2}) \text{ (car si } X \text{ est une gaussienne centrée de variance } \sigma^2 \mathbb{E}(\exp(\alpha X)) = \exp(\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2})) \quad \blacksquare$$

Théorème B.2.2.4

(Voir [McK69]) Soit $\mathcal{F}_t$ une famille croissante de sous tribus et X_t un processus continu nul en 0 tel que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2 t}{2})$ est une martingale. Alors X_t est un mouvement brownien.

B.2.3 ...comme processus de Markov**Théorème B.2.3.1**

Pour toute fonction f borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t > 0$, on note

$$P_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp(-\frac{(x-y)^2}{2t}) dy$$

Alors, pour $s < t$, on a $E(f(B_t) | \mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(B_s)$.

Démonstration : On pose $Z = B_t - B_s$.

Z est indépendante de $\mathcal{F}_s$.

On a alors $E(f(B_t) | \mathcal{F}_s) = E(f(B_s + Z) | \mathcal{F}_s) = h(B_s)$, où $h(x) = E(f(x + Z))$.

Comme $Z = B_t - B_s$ est une variable gaussienne centrée de variance $t - s$, on obtient le résultat. ■

Proposition B.2.3.2

La famille d'opérateurs linéaires $f \mapsto P_t(f)$, définie pour $t > 0$, vérifie :

1. $P_t \circ P_s = P_{t+s}$.

B.2 Le mouvement Brownien

2. Si f est continue bornée, $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(f)(x) = f(x)$, et $(t, x) \rightarrow P_t(f)(x)$ est continue.
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $P_t(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.
4. Si f a ses deux premières dérivées continues et bornées, alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(P_t(f)(x) - f(x)) = \frac{1}{2}f''(x)$.
5. Si f est bornée, alors $P_t(f)$ est de classe C^∞ , et, pour $t > 0$, $\partial_t P_t f = \frac{1}{2}\partial^2_x P_t f$.
6. Si de plus f a ses deux premières dérivées bornées, $\partial^2_x P_t f = P_t(f'')$.

Démonstration : 1. Il suffit décrire, pour $0 < s < t < u$,

$$E(f(B_u)|F_s) = E(f(B_u)|F_t|F_s) = E(P_{u-t}(f)(B_t)|F_s).$$

Ceci donne $P_{u-s}(f)(B_s) = P_{t-s}(P_{u-t}(f))(B_s)$.

Puis on identifie.

2. On a

$$P_t(f)(x) = E(f(x + B_t)) = E(f(x + \sqrt{t}X)),$$

où X est une variable gaussienne centrée réduite.

On peut ensuite passer à la limite.

3. Ceci résulte de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.

Si f est positive intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, on écrit $\int P_t(f)(x) dx = \int \int f(x + \sqrt{t}u) dx \gamma(du)$, où la mesure $\gamma(du)$ est la mesure gaussienne standard, puis on applique le théorème de Fubini.

4. On commence par le cas où la fonction f a ses trois premières dérivées bornées.

Alors on écrit, à l'aide d'une formule de Taylor à l'ordre 2 et d'une variable gaussienne X centrée réduite

$$P_t(f)(x) = E(f(x + \sqrt{t}X)) = f(x) + \sqrt{t}f'(x)E(X) + \frac{t}{2}f''(x)E(X^2) + t^{\frac{3}{2}}E(K),$$

où K est une fonction bornée.

On obtient ainsi $P_t(f)(x) = f(x) + \frac{t}{2}f''(x) + o(t)$, ce qui donne la dérivée cherchée.

On obtient ainsi dans ce cas la convergence uniforme de $\frac{P_t(f) - f}{t}$ vers $\frac{1}{2}f''$.

Alors $\frac{P_{t+s}(f) - P_t(f)}{s} = P_t(\frac{P_s(f) - f}{s})$.

On peut ainsi passer à la limite et obtenir $\partial_t P_t f = \frac{1}{2}P_t(f'')$ pour f ayant 3 dérivées bornées.

Ceci se réécrit $P_t(f) - f = \frac{1}{2} \int_0^t P_s f'' ds$.

Si f a seulement deux dérivées continues et bornées, on peut trouver une suite de fonctions f_n ayant trois dérivées continues et bornées telles que f_n, f'_n et f''_n convergent uniformément vers f, f' et f'' respectivement (prendre par exemple $f_n = P_{1/n}(f)$).

On peut ensuite passer à la limite dans la formule précédente.

On obtient alors le résultat en dérivant en $t = 0$, à condition de remarquer que, si f'' est continue bornée, la fonction $t \mapsto P_t(f'')(x)$ est continue.

Enfin, on démontre directement en dérivant sous le signe intégral que $P_t(f)$ est de classe C^∞ pour toute fonction f bornée, et que $\partial_t P_t f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_t f$.

Enfin, le fait que $P_t(f'') = (P_t f)''$ vient du fait que P_t est une convolution, et donc que P_t commute aux dérivations. ■

B.3 Lien avec l'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d \times]0, \infty[$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

où l'on note $\Delta u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, avec la condition initiale $u(0, \cdot) = f$.

On introduit donc l'équation fondamentale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u \\ u(0, \cdot) = \delta_0 \end{cases}$$

où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.

La solution fondamentale (ou noyau de la chaleur) associée à ce problème s'obtient par exemple en considérant la densité d'un mouvement brownien :

$$u_0(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

et la solution du problème général s'obtient par convolution :

$$u(t, x) = u_0(t, \cdot) * g = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(t, x - y) g(y) dy = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2t}\right) g(y) dy$$

Or d'après cette expression on a

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x(g(B))$$

où B désigne un mouvement brownien.

Ainsi on peut relier la solution de l'équation de la chaleur à un processus stochastique.

B.4 L'intégrale de Wiener

Théorème B.4.0.1

(voir [EB02]) Il existe une unique application linéaire continue $I : L^2([0, 1], dx) \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$ telle que $I(\mathbb{1}_{[0, t]}) = B_t$.

Pour toute fonction f de $L^2([0, 1], dx)$, $I(f)$ est une variable gaussienne centrée de covariance $\int_0^1 f^2(t) dt$.

En particulier, I réalise une isométrie entre $L^2([0, 1], dx)$ et son image dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$.

On notera $I(f) = \int_0^1 f(t) dB_t$.

De plus, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions de $L^2([0, 1], dt)$, le vecteur $(I(f_1), I(f_2), \dots, I(f_n))$ est gaussien centré de covariance $E(I(f_i)I(f_j)) = \int_0^1 f_i(t)f_j(t)dt$.

B.4 L'intégrale de Wiener

Démonstration : Soit f une fonction en escalier $f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$, avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$.

Par linéarité, on doit avoir $I(f) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$.

C'est une variable gaussienne centrée, dont il est facile de calculer la covariance car les variables $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont indépendantes centrées de covariance $t_{i+1} - t_i$.

On remarque alors que

$$E(I(f)^2) = \sum_i a_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^1 f^2(t) dt = \|f\|_2^2.$$

Les fonctions en escalier sont denses dans $L^2([0, 1], dt)$, et I se prolonge par continuité en une unique application définie sur $L^2([0, 1], dt)$ vérifiant $E(I(f)^2) = \int_0^1 f^2(t) dt$.

Une limite dans L^2 de variables gaussiennes étant gaussienne, on voit que $I(f)$ est une gaussienne centrée de variance $\|f\|_2^2$.

C'est tout ce dont on a besoin.

Par bilinéarité, on aura aussi $E(I(f_1)I(f_2)) = \int f_1 f_2 dt$.

La dernière propriété est évidente lorsque les fonctions sont en escalier, et se prolonge à toutes les fonctions de L^2 par continuité. ■

CHAPITRE B : Rappel de stochastique

Annexe C

Rappel de finance

Voir [EB02]

Définition C.0.0.1

Actif

Titre, contrat ou produit physique qui est susceptible de produire pour son détenteur des gains lorsqu'il est transmis ou négocié en contrepartie d'une certaine prise de risque.

Définition C.0.0.2

Opportunité d'arbitrage

Stratégie minorée ($\exists c \geq 0$ tel que $\forall t \geq 0, V^a(t) \geq -c$ où V^a est la valeur actualisée) telle que $V_0 = 0$ (on part de rien), $\mathbb{P}(V_T \geq 0) = 1$ (on est sûr de ne pas perdre d'argent) et $\mathbb{P}(V_T \geq 0) > 0$ (avec une probabilité non nulle, on fait un réel profit).

Définition C.0.0.3

Couverture

La couverture est une pratique qui consiste à se protéger contre un risque non désiré.

Définition C.0.0.4

Actif sous-jacent

Actif sur lequel porte un produit dérivé. Il peut être financier ou physique.

Définition C.0.0.5

Produit dérivé

Instrument de gestion des risques financiers. Sa valeur fluctue en fonction de l'évaluation du prix de l'actif sous-jacent.

Définition C.0.0.6

Liquidité du marché

Elle correspond à la possibilité pour un investisseur d'effectuer une transaction pour un volume impor-

| tant sans affecter le cours du titre. (contraire : illiquide)

Définition C.0.0.7

| Volatilité

| Elle mesure les fluctuations de la valeur d'un actif et donc son risque. Mathématiquement c'est l'écart type des rentabilités de l'actif.

Définition C.0.0.8

| Option européenne d'achat

| Il s'agit d'un titre qui donne le droit mais pas l'obligation à son détenteur d'acheter à la date de maturité T fixée une action S au prix d'exercice K fixé.

| C'est une variable aléatoire positive et $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Définition C.0.0.9

| Delta d'une option

| Mesure la sensibilité de la valeur d'une option aux fluctuations de la valeur du sous-jacent. Mathématiquement ceci correspond à la dérivée de la valeur théorique par rapport au cours du sous-jacent.

Définition C.0.0.10

| Gamma d'une option

| Il représente la sensibilité du delta aux variations de la valeur du sous-jacent. C'est la dérivée du delta par rapport au sous-jacent.

Définition C.0.0.11

| Obligation

| Titre de dette à long terme. Elle peut être émise par un Etat, une collectivité locale ou une entreprise. C'est une valeur mobilière qui constitue une créance sur son émetteur. Cette dette est émise dans une devise donnée pour une durée définie et elle donne droit au paiement d'un intérêt fixe ou variable appelé coupon qui est parfois capitalisé jusqu'à sa maturité.

Définition C.0.0.12

| Mark to market value

| La position est évaluée en permanence suivant les prix courants du marché.

Définition C.0.0.13

| Liquidation value

| Ce sont les fonds qu'un investisseur obtient quand il vend ses actions. Cette valeur est inférieure à la valeur précédemment définie.

Définition C.0.0.14

| Réplication

| Stratégie visant à ce que le portefeuille s'adapte au prix du sous-jacent.

Par exemple : 400 actions peuvent être répliquées par l'achat de 800 option au delta 0,5.

Définition C.0.0.15

Erreur de réplication

C'est la différence entre la valeur du produit dérivé suivant la stratégie de couverture autofinancée conçue pour être répliquée et le profit de ce produit dérivé à maturité.

CHAPITRE C : Rappel de finance

Annexe D

Symmetries of partial differential equations and stochastic processes in mathematical physics and in finance (avec P. Lescot)

P.Lescot, L.Valade

Journal of Physics : Conference Series [LV19]

ABSTRACT : In 1971, B. Kent Harrison and Frank B. Estabrook introduced a method to determine the symmetries of partial differential equations (PDEs). These last years, the determination of the symmetries of PDEs in Mathematical Physics, in Mathematical Biology and in Financial Mathematics has proved useful. The computations effected in all these cases let appear a remarkable degree of similarity between them. So with the same aim in mind, we develop a general framework for the computation of the symmetries with this method, we give properties of isovectors for a rather general type of PDE's and some results on the Lie algebra itself. Finally we present three examples for which all the results we exposed hold.

D.1 The method of isovectors

We shall give an overview of joint work with Helene Quintard and Jean-Claude Zambrini ([HJC14]) and of L. Valade's ongoing PhD Thesis ([Val]).

The method of isovectors was introduced in [HE71] in order to classify up to equivalence (systems of) partial differential equations appearing in mathematical physics.

Given a system of partial differential equations, after if necessary making a change of variable(s) and/or unknown function(s), we can express it as the vanishing of a family of first-order differential forms. An isovector is then defined as a vector field in all the variables preserving the differential ideal generated by the forms.

For the one-dimensional heat equation, the symmetries were determined (using a different language) by Bluman and Cole ([BC69]).

Olver's *prolongation method* ([Olv00]) provides a somewhat different approach.

Let us now give some details. We shall consider an equation ($\mathcal{E}$) of the shape

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(t, q, u, \frac{\partial u}{\partial q}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial q^{n-1}}) + \lambda \frac{\partial^n u}{\partial q^n}$$

for $\lambda \neq 0$, $n \geq 2$, $t \in J$ (an interval of $\mathbf{R}$) and $q \in O$ (an open set in $\mathbf{R}$).

In order to study the symmetries of the equation, we shall temporarily consider $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial q}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial q^{n-1}}$ as *independent* variables.

We shall take as state space $M := J \times O \times \mathbf{R}^{n+1}$, the generic point of which will be denoted by $(t, q, u, A, B_1, \dots, B_{n-1})$.

All of our computations will take place in the differential algebra $\wedge T^*M$.

We set :

$$\alpha := du - A dt - B_1 dq$$

$$\gamma := (A - G) dt dq - \lambda dt dB_{n-1}$$

and, for $1 \leq i \leq n-2$,

$$\beta_i = dt dB_i - B_{i+1} dt dq;$$

we now have

$$d\alpha = -dA dt - dB_1 dq$$

and

$$d\beta_i = -dB_{i+1} dt dq.$$

($\mathcal{E}$) is equivalent to the simultaneous vanishing of these forms on a 2-dimensional submanifold of M .

We define I as the ideal of $\wedge T^*M$ generated by α , $d\alpha$, the β_i , the $d\beta_i$, and γ .

D.1 The method of isovectors

Lemme D.1.0.1

$$d\gamma \in I$$

Démonstration :

$$d\gamma = dAdtdq - dGdtdq = -d\alpha dq - G_u dudtdq - \sum_{i=1}^{n-1} G_{B_i} dB_i dtdq$$

but $dudtdq = \alpha dtdq$ and $dB_i dtdq = d\beta_{i-1}$ for all i between 1 and $n-1$.

So $d\gamma \in I$. ■

Therefore I is closed under d (i.e. $d(I) \subseteq I$), hence is a differential ideal of $\wedge T^*(M)$.

We shall denote by $\mathcal{G}$ the *isovector algebra* of $(\mathcal{E})$; this is the set of vector fields $N \in TM$ such that

$$\mathcal{L}_N(I) \subseteq I.$$

Due to the formal properties ([HE71] p.654) of the Lie derivative, these isovectors constitute a Lie algebra for the usual bracket of vector fields on M .

We shall write each $N \in \mathcal{G}$ as

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u \frac{\partial}{\partial u} + N^A \frac{\partial}{\partial A} + \sum_{i=1}^{n-1} N^{B_i} \frac{\partial}{\partial B_i};$$

then we define

$$\tilde{N} = -N^t \frac{\partial}{\partial t} - N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u.$$

Théorème D.1.0.2

For each $N \in \mathcal{G}$, N^t depends only on t , N^q depends only on t and q and N^u depends only on t , q and u .

Théorème D.1.0.3

Under the additional hypothesis $\frac{\partial^2 G}{\partial B_1 \partial B_{n-1}} = 0$, for each $N \in \mathcal{G}$, N^u is affine in u .

Now we can set $N^u = l(t, q) + um(t, q)$.

There exist two other functions $f(t)$ and $w(t, q)$ such that :

$$N^t = -f(t)$$

$$N^q = -w(t, q)$$

$$N^A = B_1 w_t + l_t + u m_t + A f_t + A m$$

$$N^{B_i} = B_i m + B_i w_q + l_q + u m_q \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

1

Detailed proofs of the previous two theorems will be given in a subsequent paper.

Définition D.1.0.4

$$\mathcal{J}_0 := \{N \in \mathcal{G} \mid N^t = N^q = 0\},$$

Théorème D.1.0.5

$\mathcal{J}_0$ is an ideal of $\mathcal{G}$.

Démonstration : In fact if we consider $N \in \mathcal{G}$ and $M \in \mathcal{J}_0$ then we have

$$[N, M]^t = [N, M](t) = N(M(t)) - M(N(t)) = N(M^t) - M(N^t) = -M^t \frac{\partial N^t}{\partial t} = 0$$

because $M^t = 0$ and N^t only depends on t .

Similarly,

$$[N, M]^q = [N, M](q) = N(M(q)) - M(N(q)) = N(M^q) - M(N^q) = -M^t \frac{\partial N^q}{\partial t} - M^q \frac{\partial N^q}{\partial q} = 0$$

because $M^t = M^q = 0$ and N^q only depends on t and q .

Now the result is proved ■

From now we assume the hypothesis of theorem D.1.0.3 to be satisfied.

Lemme D.1.0.6

We pose $N^u = l + u m$ and $N'^u = l' + u m'$. Then

$$[N, N']^u = [N, N'](u) = N(N'^u) - N'(N^u) = N(l') + (l + u m)m' + u N(m') - N'(l) - (l' + u m')m - u N'(m)$$

Hence

$$l_{[N, N']} = N(l') - N'(l) + l m' - l' m$$

and

$$m_{[N, N']} = N(m') - N'(m).$$

1. La bonne condition pour le théorème D.1.0.3 est $\frac{\partial^2 G}{\partial B_1 \partial B_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et l'expression N^{B_i} est seulement vraie pour $i = 1$

D.2 Examples

Proposition D.1.0.7

$N \mapsto -\tilde{N}$ is a morphism of Lie algebras.

Démonstration : The argument in [HJC14] is still true here. ■

Définition D.1.0.8

We define :

$$\mathcal{J} = \{N \in \mathcal{G} | m = N^t = N^q = 0\}$$

and

$$\mathcal{H} = \{N \in \mathcal{G} | l = 0\}.$$

Théorème D.1.0.9

$\mathcal{H}$ is a subalgebra of $\mathcal{G}$, $\mathcal{J}$ is an abelian ideal of $\mathcal{G}$ and the sum $\mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$ is direct; in particular $\mathcal{H}$ is isomorphic to a subalgebra of $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$.

Démonstration : For $N \in \mathcal{H}$ and $N' \in \mathcal{H}$, $[N, N']^u = [N, N'](u) = N(N'^u) - N'(N^u) = umm' + uN(m') - um'm - uN'(m)$. Hence $l_{[N, N']} = 0$ and then $[N, N'] \in \mathcal{H}$; hence $\mathcal{H}$ is a subalgebra of $\mathcal{G}$.

$\mathcal{J}$ is an ideal of $\mathcal{G}$ according to the same reasoning as D.1.0.5. Moreover it is abelian because $\forall N \in \mathcal{J}$ and $\forall N' \in \mathcal{J}$, $[N, N'] = 0$.

Considering $N \in \mathcal{J} \cap \mathcal{H}$, we have $N^t = N^q = N^u = 0$ and according to the expression of N^A and N^{B_i} for $1 \leq i \leq n-1$ in D.1.0.3, we obtain $N = 0$; hence $\mathcal{J} \cap \mathcal{H} = \{0\}$. ■

We call $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}}$ the isovector algebra of the equation $(\mathcal{E})$.

Théorème D.1.0.10

Let us assume that either $G = 0$ or $n = 2$ and G is of the form $G = c(t)B_1 + V(t, q)u$ (this is the case in the examples below). Then $\mathcal{G} = \mathcal{J} \oplus \mathcal{H}$; in particular, $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{J}} \cong \mathcal{H}$.

D.2 Examples

1. We can apply the method and these result to find symetries of the Black-Scholes equation

This is the most famous equation in Mathematical Finance :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

We set $q = \ln(S)$ and $u(t, q) = C(t, \exp(q)) = u(t, S)$. Now the equation becomes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial q} - ru = 0$$

According to our notations $G = -(r - \frac{\sigma^2}{2})B_1 + ru$ and $\lambda = -\frac{1}{2}\sigma^2$.

Here it turns out ([Les12]) that $\mathcal{H}$ has dimension 6, and is isomorphic to the algebra $\mathcal{H}_{0,0}$ below. This is not surprising inasmuch that both the Black–Scholes equation and the HJB equation with $V = 0$ can be reduced to the heat equation. Nevertheless our computation does not depend upon that reduction, and would actually suggest it; notably, the quantities $r + \frac{\sigma^2}{2}$ and $r - \frac{\sigma^2}{2}$ appear in a natural way.

2. Now we present the *backward heat equation with potential V* :

$$\theta^2 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\theta^4}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + Vu.$$

Here we have $\lambda = -\theta^2/2$ and $G = \frac{1}{\theta^2}Vu$.

In the case of the potential

$$V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2 ,$$

let $\mathcal{H}_{C,D} := \mathcal{H}_V$. Then for $C \neq 0$, $\mathcal{H}_{C,D} \simeq \mathcal{H}_{1,0}$ has dimension 4; for $C = 0$, $\mathcal{H}_{C,D} \simeq \mathcal{H}_{0,0}$ has dimension 6 (see [HJC14], [LQ14] and [Qui15a] chapter 2).

Furthermore, $\mathcal{H}_{1,0} \subseteq \mathcal{H}_{0,0}$ ([LQ14]). In addition these Lie algebras possess canonical bases, continuous in D for fixed C , and compatible with the inclusions

$$\mathcal{H}_{C,D} \subseteq \mathcal{H}_{0,D} .$$

This computation was effected in [HJC14] (see also [LQ14], [LZ02] and [Qui15a]) using the transformation $S = -\theta^2 \ln(u)$, that converts $(\mathcal{E})$ to the Hamilton–Jacobi–Bellman equation $(\mathcal{HJB}^V)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\theta^2}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 - V.$$

3. Finally we have

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial q^4}.$$

Here it is evident that $\lambda = -1$ and $G = 0$.

The algebra of isovectors has been determined by Vigot ([Vig16]) and Valade ([Val]) where q is x . $\mathcal{H}$ has a basis $(X_i)(1 \leq i \leq 4)$ with brackets :

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	X_1	0
X_2	0	0	$4X_2$	0
X_3	$-X_1$	$-4X_2$	0	0
X_4	0	0	0	0

One has

D.3 Comments

$$-\tilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$-\tilde{X}_2 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\tilde{X}_3 = q \frac{\partial}{\partial q} + 4t \frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\tilde{X}_4 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

Therefore $\mathcal{H} = \mathbf{R} \oplus \mathcal{L}$, with $\mathcal{L}$ a three-dimensional solvable Lie algebra with 2-dimensional derived algebra. $\mathcal{L}$ is isomorphic to the algebra over $\mathbb{R}$ considered in [Jac79] (p. 13, line 1 for $\alpha = 4$).

Once exponentiated, here is how the basis elements of $\tilde{\mathcal{H}} = \{\tilde{N} | N \in \mathcal{H}\}$ act on a solution u of the equation :

$$e^{\alpha \tilde{X}_1} u(t, q) = u(t + \alpha, q)$$

$$e^{\alpha \tilde{X}_2} u(t, q) = u(t, q + \alpha)$$

$$e^{\alpha \tilde{X}_3} u(t, q) = u(e^{4\alpha} t, e^\alpha q)$$

$$e^{\alpha \tilde{X}_4} u(t, q) = e^\alpha u(t, q)$$

The equation is deeply related to Hochberg's pseudo-process ([Hoc78]).

D.3 Comments

We present here only results for one variable in space but in [Qui15a], H. Quintard has determined the structure of the isovector algebra for the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \Delta u + V u.$$

for quadratic V .

Also, some works are in progress about the equation $u_t = \Delta^2 u$ ([Val]).

We want also to extend this method to more general equations.

For example in an equation of financial mathematics due to Frey

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 q^2 \frac{u_{qq}}{(1 - \rho q \lambda(q) u_{qq})^2} = 0$$

(In the literature q is S and it represents the price of the stock that we consider)

Here ρ is a real parameter and λ a given function.

It is a nonlinear version of the Black–Scholes equation, first considered by Frey ([Fre00]). Bobrov ([Bob09]), in an unpublished paper, determined the isovectors; they were computed again in a different way by Valade ([Val]).

Defining

$$\tilde{V}_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\tilde{V}_2 = q \frac{\partial}{\partial u},$$

and

$$\tilde{V}_3 = \frac{\partial}{\partial u},$$

then, when λ is not of the form ωq^k , it appears that $\tilde{\mathcal{G}}$ is generated by $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ and $\tilde{V}_3$; in particular, it is abelian of dimension 3.

When $\lambda(q) := \omega q^k$, $\tilde{\mathcal{G}}$ is generated by $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$, $\tilde{V}_3$ and

$$\tilde{V}_4 := -q \frac{\partial}{\partial q} + (1 - k)u \frac{\partial}{\partial u}$$

and it has a far more interesting structure ([Bob09],[Val]).

We have

$$\tilde{\mathcal{J}} = \langle \tilde{V}_2, \tilde{V}_3 \rangle .$$

We are trying to generalize this.

Annexe E

Bernstein processes, isovectors and mechanics (avec P. Lescot)

Paul Lescot, Laurène Valade

À paraître dans *Geometry and Invariance in Stochastic Dynamics* Springer [LV22]

Abstract

We investigate the symmetries of a class of diffusions processes ("Bernstein's reciprocal" processes) introduced in the eighties for the solution of a problem stated by Schrödinger in 1931. Those diffusions satisfy two unusual properties. Although typically not time-homogeneous, they are time reversible. Also their infinitesimal coefficients are specific functions of positive solutions of time adjoint parabolic equations. The symmetries of these PDEs will therefore be transformed into symmetries of the diffusions and provide relations between them hard to guess otherwise.

We shall use an algebraico-geometric method ("of isovectors") and mention applications in finance and mathematical physics. As can be expected Schrödinger's initial motivation was quantum mechanics.

E.1 Introduction

Since, according to K. Itô, his stochastic calculus should be regarded as a deformation of Leibniz-Newton calculus along Brownian-like trajectories, it is a natural hope that the study of the symmetries of stochastic differential equations should have the same impact as its deterministic counterpart (essentially due to S. Lie) for ODEs. A number of works in this direction have been published along the years. Recently we can mention, in particular, [ADVM⁺20], [DVMU16] or [DVMU20].

The option chosen here is different and follows directly from the above Schrödinger's idea. Instead of look for a general theory valid for all kinds of stochastic differential equations, we focus on those

which are solutions of Schrödinger's problem. What we shall loose in generality will be compensated by their strong analogy with quantum mechanics which was precisely at the origin of his idea. Or, equivalently, with the benefit of knowing the future of the early thirties, we can be inspired by Feynman's path integrals approach to quantum mechanics, involving purely symbolic diffusion processes. Indeed Bernstein's reciprocal processes share a lot of qualitative properties with those "diffusions". This perspective is described in detail in the review [Zam15].

We shall start with a short summary of Schrödinger's problem and its solutions for the class of elementary mechanical systems (originally this author considered only the one dimensional free case). This will be sufficient to understand the origin of the specific class of processes and our transfer from symmetries of underlying PDEs to the ones of associated diffusions. In particular, we shall limit ourselves to one type of those PDEs, backward parabolic equations (well defined for final boundary conditions). They correspond, in our framework, to the usual description of diffusions in term of increasing filtrations. The adjoint dextrcription can be obtained without further computations.

Then we shall describe the method of isovectors. Inspired by Cartan's approach to partial differential equations in term of differential forms and theirs exterior differential calculus, it has been formulated by Harrison and Estabrook as a tool for the study of the invariance group of these equations [HE71]. This method is particularly suitable to anlyse the symmetries of the class of Bernstein's reciprocal processes.

A number of examples will be given, motivated by Stochastic finance or the analogy with Quantum Physics which was the initial motivation of Schrödinger.

E.2 Summary

- A summary of Schrödinger's problem and its solution
- The method of isovectors
- Bernstein processes
- Parametrization of a one-factor affine model
- Generalized Brownian Bridges
- References

E.3 A summary of Schrödinger's problem and its solution

Consider a real valued diffusion process $Z(t)$ defined on a finite time interval, say $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Let's suppose that, in addition to the date of its initial probability $\mu_{-\frac{T}{2}} = \delta_{-\frac{T}{2}}(dx)$ we are given also a final one $\mu_{\frac{T}{2}} = \delta_{\frac{T}{2}}(dz)$ distinct from the probability associated with the evolution of $\delta_{-\frac{T}{2}}$ under the diffusion equation. Such evolutions may be rare but they are possible and result manifestly from a conditioning. Schrödinger's problem is : what is the most probable evolution between those two probabilities? [Zam15] The answer was given by the same author : the optimal process Z is such that

E.3 A summary of Schrödinger's problem and its solution

$P(Z(t) \in A) = \int_A \eta^*(t, q) \eta(t, q) dq$, for A a Borelian, where η^* and η are respectively positive solutions of two adjoint parabolic partial differential equations :

$$\begin{cases} -\frac{\partial \eta^*}{\partial t} &= H_0 \eta^* \\ \eta^*(\frac{-T}{2}, x) &= \eta_{\frac{-T}{2}}^*(x) \end{cases}$$

and

$$\begin{cases} -\frac{\partial \eta}{\partial t} &= H_0 \eta \\ \eta(\frac{-T}{2}, z) &= \eta_{\frac{-T}{2}}(z) \end{cases}$$

and $H_0 = \frac{-\kappa}{2} \Delta$, for κ a positive constant and $\eta_{\frac{-T}{2}}^*, \eta_{\frac{-T}{2}}$ are two unspecified positive functions.

A corresponding pair of variational principles inspired by stochastic Optimal Control theory provides the drift of the SDE solved by the optimal process : $dZ(t) = \kappa \frac{\nabla \eta}{\eta}(t, Z(t)) dt + \kappa^{\frac{1}{2}} dW(t)$ for $W(t)$ a Wiener process and an initial distribution $\delta_{\frac{-T}{2}}$ and an associated filtration $\mathcal{P}_t$ increasing on the time interval. The stochastic variational principle corresponding to the adjoint PDE provides a backward SDE whose increment $d_*Z(t)$ points towards the past of $Z(t)$: $d_*Z(t) = -\kappa \frac{\nabla \eta^*}{\eta^*}(t, Z(t)) dt + \kappa^{\frac{1}{2}} d_*W_*(t)$ for an associated decreasing filtration $\mathcal{F}_t$ from a final data $\delta_{\frac{T}{2}}$. W_* is defined in complete analogy with $W(t)$ and $\mathcal{P}_t$. For the purpose of the symmetry analysis it is sufficient to consider the more familiar forward SDE as no new computations are needed.

Bernstein measures are constructed from the joint probability $M(dq, dZ)$ at the boundaries of the time interval $[\frac{-T}{2}, \frac{T}{2}]$. In the special Markovian case considered by Schrödinger, it is of the form $M(dq, dZ) = u_{\frac{-T}{2}}^*(q) h(q, T, Z) u_{\frac{T}{2}}(Z) dq dZ$ where $h(q, T, Z)$ is the integral kernel $e^{\frac{-1}{\kappa} T H}(q, Z)$, and we have allowed a more general Hamiltonian operator $H = H_0 + V(Z)$ for a given bounded below scalar potential V .

Then the two marginals of M , for given boundary probabilities $\delta_{\frac{-T}{2}}$ and $\delta_{\frac{T}{2}}$ provide a nonlinear integral system of equations for $u_{\frac{-T}{2}}^*$ and $u_{\frac{T}{2}}$. A. Beurling proved in 1960 the existence and uniqueness of its positive solutions [Beu60] under general conditions. In other words the Markovian Bernstein diffusions are well defined ([Zam15] and references therein for more details).

In recent years Schrödinger's problem and its solution have been re-interpreted in a measure theoretic perspective and in the context of Mass Transportation theory ([Léo13] and references therein). In particular, the reciprocal Bernstein diffusions solving Schrödinger's problem can, curiously, be regarded as regularization of the Monge-Kantorovich problem solved ten years after Schrödinger by Kantorovich.

Schrödinger's problem is at the origin of the program of Stochastic Deformation [Zam15]. Its aim is the elaboration of the randomized mechanics whose existence was suggested, in particular by Bernstein and whose Feynman's Path integral theory can be regarded as a (very) informal description.

E.4 The method of isovectors

The method of isovectors was introduced in [DVMU21] in order to classify up to equivalence (systems of) partial differential equations appearing in mathematical physics.

Given a system of partial differential equations, one expresses it, adding if necessary some of the derivatives of the unknown function as auxiliary unknowns, as the vanishing of a family of first-order differential forms. An isovector is then defined as a vector field in all the variables preserving the differential ideal generated by the forms.

For the one-dimensional heat equation, it was determined (using a different language) by Bluman and Cole ([BC69]).

Olver's *prolongation method* ([Olv00]) provides a somewhat different approach.

Let us now give some details. We shall consider an equation of the shape

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(t, q, u, \frac{\partial u}{\partial q}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial q^{n-1}}) + \lambda \frac{\partial^n u}{\partial q^n}$$

for $n \geq 2$, $t \in J$ (an interval of $\mathbf{R}$), $q \in O$ (an open set in $\mathbf{R}^n$), u a function of t and q , λ a constant and $G : J \times O \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ a C^∞ function of t, q, u and its derivatives in space.

In order to study the symmetries of the equation, we shall temporarily consider $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial q}, \dots, \frac{\partial^{n-1} u}{\partial q^{n-1}}$ as *independent* variables.

We now consider a differential equation $(\mathcal{E})$ of order $n = 2$.

We note $u(t, q)$ a solution of this equation.

We define $B_1 = \frac{\partial u}{\partial q}$.

We consider $u, A = \frac{\partial u}{\partial t}$ and B_1 as independent variables.

Let $\alpha = du - A dt - \sum_{i=1}^n B_1^i dq_i$, a 1-differential form.

So we have $d\alpha = -dA dt - dB_1 dq$.

The equation $(\mathcal{E})$ is equivalent to the vanishing of the forms $\alpha, d\alpha$ and of a certain number of differential forms of degrees at least 2 noted $\delta_j, d\delta_j$ où $j \in \mathbb{N}$.

We pose $I = \langle \alpha, d\alpha, \delta_j, d\delta_j \rangle$. It is a closed differential ideal of the algebra of the differential forms.

Lemme E.4.0.1

Each 2-forms of I can be written $a\alpha + z d\alpha + \xi$ with z a 0-form, $\xi \in \langle \delta_j, d\delta_j \rangle$ for $j \in \mathbb{N}$ and a 1-form of the type $a_1 dt + a_2 dq + a_3 du + a_4 dA + a_5 dB_1$ for which we can suppose $a_3 = 0$.

Démonstration : If $a_3 \neq 0$, we replace $a\alpha$ by $a'\alpha$ where

$$a' = (a_1 + Aa_3)dt + (a_2 + B_1a_3)dq + a_4dA + a_5dB_1$$

■

E.4 The method of isovectors

We note

$$N = N^t \frac{\partial}{\partial t} + N^q \frac{\partial}{\partial q} + N^u \frac{\partial}{\partial u} + N^A \frac{\partial}{\partial A} + B_1 \frac{\partial}{\partial B_1}.$$

Définition E.4.0.2

We say that N is an isovector of $(\mathcal{E})$ if $\mathcal{L}_N(I) \subset I$.

To compute these isovectors, we use the method developed by Harrison Estabrook in ([HE71]) and already set up to find the symmetries of many equations for instance in ([Les12], [LQ14], [HJC14], [LV19], [LZ02], [LZ07], [Qui15a] and [Val]).

We denote by $\mathcal{G}$ the set of isovectors.

Lemme E.4.0.3

$\mathcal{G}$ is a Lie algebra for the usual bracket of vector fields.

Lemme E.4.0.4

Let $N \in \mathcal{G}$. There is a function $F = F_N(t, q, u, A, B_1)$ such that

$$\begin{aligned} N^t &= -F_A \\ N^q &= -F_{B_1} \\ N^u &= F + AN^t + B_1 N^q \\ N^A &= AF_u + F_t \\ N^{B_1} &= B_1 F_u + F_q \end{aligned}$$

Remarque E.4.0.5

This lemma is present in ([HE71], p. 657).

Proposition E.4.0.6

N^t depends only of t . We note $N^t = -f(t)$.

For an equation of the following form :

$$(\mathcal{E}_{g,2}) : Q(t, q, u) \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + T(t, q) \frac{\partial u}{\partial t} + R(t, q, u, B_1) = 0$$

with $Q \neq 0$, we have complementary results :

Théorème E.4.0.7

— Under the previous hypothesis, considering $(\mathcal{E}_{g,2})$ we have :

$$N^q = N^q(t, q)$$

We note $N^q = -w(t, q)$.

— If we suppose also that $Q = Q(t, q)$ and R is linear in B_1 then N^u is affine in u . We pose

$N^u = um(t, q) + l(t, q)$ where l and m are functions of t and q .

We have also relations between the various auxiliary functions introduced : $-QT_t f + TQ_t f + TQf_t - QT_q w - 2TQw_q + TQ_q w = 0$ and

$$\begin{aligned} QT B_1 w_t + QT um_t + QT l_t - QR_t f - QR_q w + QR_u um + QR_u l + QR_{B_1} B_1 m + QR_{B_1} B_1 w_q \\ + QR_{B_1} um_q + QR_{B_1} l_q - QRw_q + Q^2 B_1 m_q + Q^2 B_1 w_{qq} + Q^2 um_{qq} + Q^2 l_{qq} + Q^2 B_1 m_q \\ = -RQ_t f - RQ_q w + QR(m + w_q) \end{aligned}$$

Démonstration : The proof of this theorem will be detailed in the second author PhD thesis [Val]. ■

E.4.1 Examples

E.4.1.1 Black Scholes

We can apply the previous results to find the symmetries of the Black Scholes equation. It is the most famous equation in financial mathematics :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

where $C(t, S)$ denotes the price of a call option with maturity T and strike price K on an underlying asset satisfying $S_t = S$, σ is the volatility and r the risk free interest rate.

We pose $q = \ln(S)$ and $u(t, q) = C(t, \exp(q)) = C(t, S)$. The equation becomes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial u}{\partial q} - ru = 0$$

According to our notations we have $T = 1$, $Q = \frac{1}{2}\sigma^2$ and $R = (r - \frac{\sigma^2}{2})B_1 - ru$.

We note $\tilde{r} = r - \frac{\sigma^2}{2}$ and $\tilde{s} = r + \frac{\sigma^2}{2}$.

By Theorem 3.7 we obtain :

$$-\frac{\sigma^2}{2} f_t - 2\frac{\sigma^2}{2} w_q = 0 \text{ so}$$

$$f_t = 2w_q$$

and

$$w_{qq} = 0$$

E.4 The method of isovectors

– We divide by Q to find :

$$\begin{aligned} B_1 w_t + u m_t + l_t - r(u m + l) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(B_1 m + B_1 w_q + u m_q + l_q) - (r - \frac{\sigma^2}{2})B_1 w_q + r u w_q \\ + \frac{\sigma^2}{2}(B_1 m_q + u m_{qq} + l_{qq} + B_1 m_q) = (r - \frac{\sigma^2}{2})B_1(m + w_q) - r u(m + w_q) \end{aligned}$$

Differentiating with respect to B_1 we obtain :

$$w_t = (r - \frac{\sigma^2}{2})w_q - \sigma^2 m_q$$

As $w_{qq} = 0$, $w_{tqq} = \sigma^2 m_{qqq} = 0$ so

$$m_{qqq} = 0.$$

Differentiating with respect to u we have :

$$m_t = -(r - \frac{\sigma^2}{2})m_q - 2r w_q - \frac{\sigma^2}{2}m_{qq}$$

In addition we have $m_{tqq} = 0$, so

$$m_{qq} = \text{constant}.$$

Taking $u = B_1 = 0$, we find that l is a solution of the equation.

Working with the different equations obtained above, we have the following relations :

$$f_{tt} = 2w_{qt} = -2\sigma^2 m_{qq} = 2C_1$$

$$f = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$$

$$w_q = C_1 t + \frac{1}{2}C_2$$

So

$$m_q = -\frac{C_1}{\sigma^2}q + v(t)$$

$$m_{tt} = -(r - \frac{\sigma^2}{2})v_t - 2C_1 r$$

Hence

$$m_{ttq} = 0$$

But by the expression of m_q we deduce that $v_t = \text{constant}$.

The expression of m_t gives us $m_{tq} = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{C_1}{\sigma^2}$, so

$$v_t = (r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{C_1}{\sigma^2}$$

$w_{tt} = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})f_{tt} + \sigma^2 m_{tq} = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})2C_1 - \sigma^2(r - \frac{\sigma^2}{2})(\frac{C_1}{\sigma^2})$ by the expression of m_t .

So

$$w_{tt} = 0$$

As well, $w_t = \frac{1}{2}(r - \frac{\sigma^2}{2})C_2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})C_1t + \sigma^2(\frac{C_1}{\sigma^2}q) - \sigma^2v(t) = C_4$

Hence

$$v = \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})C_1}{\sigma^2}t + \frac{(r - \frac{\sigma^2}{2})}{2\sigma^2}C_2 - \frac{C_4}{\sigma^2}$$

So we have :

$$f = C_1t^2 + C_2t + C_3$$

$$w = C_1tq + \frac{1}{2}C_2q + C_4t - C_5$$

$$m = \frac{\tilde{r}C_1}{\sigma^2}tq - \frac{C_1}{2\sigma^2}q^2 + (\frac{\tilde{r}C_2}{2\sigma^2} - \frac{C_4}{\sigma^2})q - \frac{\tilde{s}^2C_1}{2\sigma^2}t^2 + (-\frac{\tilde{s}^2C_2}{2\sigma^2} + \frac{r^2C_4}{\sigma^2} + \frac{C_1}{2})t + C_6$$

Finally we find a basis $(N_i)_{1 \leq i \leq 6}$ of 6 isovectors, for which

$$\tilde{N}_1 = -t^2 \frac{\partial}{\partial t} - tq \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\tilde{r}}{\sigma^2}tqu \frac{\partial}{\partial u} - \frac{1}{2\sigma^2}q^2u \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma^2}ut^2 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{2}ut \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = -t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\tilde{r}}{2\sigma^2}qu \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\tilde{s}^2}{2\sigma^2}tu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_3 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = -t \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\sigma^2}qu \frac{\partial}{\partial u} + \frac{r^2}{\sigma^2}tu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

E.4 The method of isovectors

E.4.1.2 Backward heat equation with potentiel V

As observed before, we can limit ourselves to this equation, well defined for a final boundary condition, in the context of Schrödinger's problem.

The theorem can also be applied to determine the isovectors and so the symmetries of the backward heat equation with a potential $V(t, q)$. Although we assumed in the first paragraph that the potential V is time independant, the symmetry analysis does not require this hypothesis.

This equation is very important in the theory of Bernstein process, especially concerning their applications to the Euclidian Quantum Mechanics.

It is also present in the theory of affine interest rate models.

The results are already obtained by P. Lescot, H. Quintard and J.C. Zambrini for the equivalent Hamilton-Jacobi-Bellman equation ([HJC14], [LZ02], [LZ07]).

We consider the equation :

$$(\mathcal{E}_\kappa^V) : \kappa \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} - V(t, q)u = 0$$

Applying Theorem 3.7 we obtain :

$$f_t = 2w_q$$

So we can pose

$$w = \frac{1}{2}f_t q + a(t).$$

The second equation is :

$$\kappa(B_1 w_t + u m_t + l_t) + V_t u f + V_q u w - V u m - V l + V u w_q + \frac{\kappa^2}{2}(B_1 m_q + u m_{qq} + l_{qq} + B_1 m_q) + V u(m + w_q) = 0$$

For $u = B_1 = 0$, l is a solution of the equation.

Differentiating according to B_1 we have

$$w_t = -\kappa m_q$$

So we can pose

$$m = \frac{-1}{4K} f_{tt} q^2 - \frac{1}{K} a_t q + b(t).$$

Differentiating according to u we obtain

$$m_t = -\frac{1}{\kappa}(V_t f + V_q w + 2V w_q + \frac{\kappa^2}{2} m_{qq})$$

That is

$$\frac{-1}{4\kappa} f_{ttt} q^2 - \frac{1}{\kappa} a_{tt} q + b_t = \frac{-1}{\kappa} (V_t f + \frac{1}{2} V_q f_t q + V_q a + V f_t - \frac{\kappa}{4} f_{tt})$$

Particular case $V = 0$

We obtain

$$\frac{-1}{4} f_{ttt} q^2 - a_{tt} q + b_t = \frac{\kappa}{4} f_{tt}$$

Differentiating twice with respect to q we have $f_{ttt} = 0$.

So

$$f = 2C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Differentiating with respect to q we have $a_{tt} = 0$.

Hence

$$w = 2C_1 t q + \frac{C_2}{2} q + C_4 t + C_5$$

Finally $b_t = \kappa C_1$ and

$$m = -\frac{C_1}{\kappa} q^2 - \frac{C_4}{\kappa} q + \kappa C_1 t + C_6$$

Hence we have a basis of isovectors for which :

$$\tilde{N}_1 = -2t^2 \frac{\partial}{\partial t} - 2tq \frac{\partial}{\partial q} + \kappa t u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_2 = -t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} q \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\tilde{N}_4 = -t \frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{\kappa} q u \frac{\partial}{\partial u}$$

$$\tilde{N}_5 = \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\tilde{N}_6 = u \frac{\partial}{\partial u}$$

We find a basis of isovectors similar to that of ([LZ02] and [Olv00]).

E.5 Bernstein processes

Particular case $V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2$:

For this potential we obtain :

$$\frac{1}{4}f_{ttt}q^2 + a_{tt}q - \kappa b_t - 2Df_tq^2 + \frac{2Ca}{q^3} - 2Daq + \frac{\kappa}{4}f_{tt} = 0$$

Because f , a and b are independent of q , after multiplying by q^3 , we can equal the terms in q^5 , q^4 , q^3 and the constant terms in q .

$$\begin{cases} f_{ttt} &= 8Df_t \\ a_{tt} &= 2Da \\ 2Ca &= 0 \\ b_t &= \frac{1}{4}f_{tt} \end{cases}$$

We find exactly the same system as in [HJC14] and [Qui15a].

E.5 Bernstein processes

For simplicity, we shall only consider processes with values in $\mathbf{R}$.

Many familiar stochastic processes can be viewed as Bernstein processes, solving Schrödinger's problem. Instead of a time interval centred in 0, we shall consider, here, an interval $[0, T]$, and denote by θ the constant $\sqrt{\kappa}$.

Let us mention a few classical examples :

1. The Brownian Motion (see e.g. [LZ02], p. 200)

For $t_0 = 0$, $t_1 = T > 0$, $\mu_0 = \delta_0$ and $\mu_1 = \mathcal{N}(0, \theta^2 T)$, $z(t) = \theta w(t)$ is a Bernstein process for $V = 0$, $\eta(t, q) = 1$ and $\eta_*(t, q) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{q^2}{2\theta^2 t}}$.

Here

$$dz(t) = \theta dw(t).$$

2. The Brownian Bridge (see [LZ02], p. 201).

Here $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $V = 0$, $\mu_0 = \mu_1 = \delta_0$ and

$$\eta(t, q) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{q^2}{2\theta^2(1-t)}}.$$

Then

$$dz(t) = \theta dw(t) - \frac{z(t)}{1-t} dt.$$

3. The Ornstein–Uhlenbeck process starting from 0

Here $t_0 = 0$, $t_1 = T > 0$, $\mu_0 = \delta_0$, $\mu_1 = \mathbf{N}(0, \frac{\theta^2}{2\omega}(1 - e^{-2\omega T}))$, $V = \frac{\omega^2 q^2}{2}$ and

$$\eta(t, q) = e^{\frac{\omega}{2\theta^2}(\theta^2 t - q^2)}.$$

We have

$$dz(t) = \theta dw(t) - \omega z(t) dt.$$

E.6 Parametrization of a one-factor affine model

A *one-factor affine interest rate model* is characterized by an instantaneous rate $r(t)$, satisfying a stochastic differential equation of the following type :

$$dr(t) = \sqrt{\alpha r(t) + \beta} dw(t) + (\phi - \lambda r(t)) dt ,$$

under the risk-neutral probability Q ($\alpha = 0$ corresponds to the Vasicek model, and $\beta = 0$ corresponds to the Cox–Ingersoll–Ross model; see [Hen05], [HL19a]).

Assuming $\alpha \neq 0$, let us set

$$\theta = \frac{\alpha}{2} ,$$

$$\tilde{\phi} := \phi + \frac{\lambda\beta}{\alpha} ,$$

$$\delta := \frac{4\tilde{\phi}}{\alpha} ,$$

$$\begin{aligned} C &:= \frac{\alpha^2}{8} \left(\tilde{\phi} - \frac{\alpha}{4} \right) \left(\tilde{\phi} - \frac{3\alpha}{4} \right) \\ &= \frac{\alpha^4}{128} (\delta - 1)(\delta - 3) , \end{aligned}$$

$$D := \frac{\lambda^2}{8} ,$$

and define the potential

$$V(t, q) = \frac{C}{q^2} + Dq^2 .$$

Théorème E.6.0.1

(see [HJC14], Theorem 5.4) Consider the process

$$z(t) = \sqrt{\alpha r(t) + \beta}$$

and the stopping time

$$\tilde{T} = \inf\{t > 0 | \alpha r(t) + \beta = 0\}.$$

1) One has $\tilde{T} = +\infty$ a.s. for $\delta \geq 2$, and $\tilde{T} < +\infty$ a.s. for $\delta < 2$. 2) There exists a process $y(t)$

E.6 Parametrization of a one-factor affine model

satisfying the stochastic differential equation

$$\forall t > 0$$

$$dy(t) = \theta dw(t) + \tilde{B}(t, y(t))dt$$

relatively to the canonical increasing filtration of the Brownian w , where

$$\tilde{B} \equiv_{def} \theta^2 \frac{\frac{\partial \eta}{\partial q}}{\eta} .$$

for a certain solution η of $(\mathcal{E}_V)$

For each given $t > 0$, the law of $y(t)$ is $\eta(t, q)\eta_*(t, q)dq$, where η_* satisfies the dual equation $(\mathcal{E}'_V)$.

One has

$$z(t) = y(t) \quad \forall t \in [0, \tilde{T}[$$

In particular, in case $\delta \geq 2$, z itself is a Bernstein process on any interval $[0, T_0]$ ($T_0 > 0$).

Proposition E.6.0.2

The isovector algebra associated with the affine model has dimension 6 if and only if $\delta \in \{1, 3\}$; in the opposite case, it has dimension 4.

Let us analyze more closely the first case; the general case is considered in [HJC14].

1) $\tilde{\phi} = \frac{\alpha}{4}$, i.e. $\delta = 1$. Then $y(t)$ is a solution of

$$dy(t) = \frac{\alpha}{2}dw(t) - \frac{\lambda}{2}y(t)dt ,$$

i.e. $y(t)$ is an Ornstein–Uhlenbeck process, and the potential V is quadratic.

Here

$$\eta(t, q) = e^{\frac{\lambda t}{4} - \frac{\lambda q^2}{\alpha^2}} .$$

From

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(z_0 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t e^{\frac{\lambda s}{2}} dw(s) \right) \\ &= e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left(z_0 + \tilde{w} \left(\frac{\alpha^2 (e^{\lambda t} - 1)}{4\lambda} \right) \right) , \end{aligned}$$

($\tilde{w}$ denoting another Brownian motion),

it appears that $y(t)$ follows a normal law ν_t with mean $e^{-\frac{\lambda t}{2}} z_0$ and variance $\frac{\alpha^2 (1 - e^{-\lambda t})}{4\lambda}$.

For each $T > 0$, $(y(t))_{0 \leq t \leq T}$ is a Bernstein process with $\mu_0 = \delta_{z_0}$ and $\mu_1 = \nu_T$.

The law of $y(t)$ therefore has density

$$\rho_t(q) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{2\pi(1-e^{-\lambda t})}} e^{(-\frac{2\lambda(q - e^{-\frac{\lambda t}{2}} z_0)^2}{\alpha^2(1-e^{-\lambda t})})}.$$

Whence

$$\begin{aligned} \eta_*(t, q) &= \frac{\rho_t(q)}{\eta(t, q)} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi \sinh(\frac{\lambda t}{2})}} \\ &\quad e^{(\frac{-\lambda q^2 - \lambda q^2 e^{-\lambda t} + 4\lambda q z_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} - 2\lambda z_0^2 e^{-\lambda t}}{\alpha^2(1-e^{-\lambda t})})} \end{aligned}$$

and one may check that, as was to be expected, η_* satisfies $(\mathcal{E}'_V)$.

2) $\tilde{\phi} = \frac{3\alpha}{4}$, i.e. $\delta = 3$.

Then

$$\eta(t, q) = q e^{\frac{\lambda}{\alpha^2}(\frac{3\alpha^2 t}{4} - q^2)}.$$

Let us define

$$s(t) = e^{\frac{\lambda t}{2}} \frac{1}{y(t)};$$

then an easy computation using Itô's formula gives

$$ds(t) = -\frac{\alpha}{2} e^{\frac{\lambda t}{2}} s(t)^2 dw(t);$$

in particular, $s(t)$ is a forward martingale.

It may be seen that, in case $X_0 = 0$,

$$X_t = e^{-\lambda t} Y\left(\frac{\alpha^2(e^{\lambda t} - 1)}{4\lambda}\right)$$

where Y is a $BESQ^3$ (squared Bessel process with parameter 3) with $Y(0) = 0$. But, for fixed $t > 0$, Y_t has the same law as tY_1 , and $Y_1 = \|B_1\|^2$ is the square of the norm of a 3-dimensional Brownian motion (see [GJY03]); the law of Y_1 is therefore

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u}{2}} \sqrt{u} \mathbf{1}_{u \geq 0} du.$$

E.7 Generalized Brownian Bridges

Therefore the density $\rho_t(q)$ of the law of $y(t)$ is given by :

$$\rho_t(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{16\lambda^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3(1 - e^{-\lambda t})^{\frac{3}{2}}} q^2 e^{-\frac{2\lambda q^2}{\alpha^2(1 - e^{-\lambda t})}}$$

and

$$\eta_*(t, q) = \frac{\rho_t(q)}{\eta(t, q)} = \frac{16\lambda^{\frac{3}{2}}}{\alpha^3\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-\lambda t})^{-\frac{3}{2}} q e^{\frac{3\lambda t}{4} - \frac{\lambda q^2}{\alpha^2 \tanh(\frac{\lambda t}{2})}}.$$

For $X_0 \neq 0$, a Bessel function appears in the expression for η_* .

M. Houda and the first author ([HL19a]) have extended these computations.

E.7 Generalized Brownian Bridges

Let us fix $T > 0$ and $\beta \in \mathbf{R}$. Mansuy's generalized Brownian Bridge ([Man04]) $X^{(\beta, \gamma, T, x)}$ as the solution $X(t)$ of the stochastic differential equation

$$dX(t) = \theta dw(t) - \beta \frac{X(t)}{T - t} dt$$

with initial value $X(0) = x$.

It is a Bernstein process for

$$\eta(t, q) := (T - t)^{-\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{\beta q^2}{2\theta^2(T-t)}}$$

and

$$V(t, q) := \frac{\beta(\beta - 1)q^2}{2(T - t)^2},$$

an example of *semi-classical potential*.

Conclusion

The class of Bernstein reciprocal processes allows a study of its symmetries founded on its quantum-like analogy. In particular, as suggested by Feynman, it should allow the construction of a dynamical theory where those symmetries should play a role as fundamental as in classical mechanics. Although a lot of progress have been made since [Zam86] much more should be done. Using the symmetries, how can we define a stochastic version of classical integrability? Such a notion should inject in stochastic analysis key ideas of dynamical systems theory. For instance a stochastic deformation of Symplectic Geometry

whose symplectomorphisms would precisely describe all transformations preserving dynamical structures.

Since Schrödinger's original problem is now regarded as a foundational aspect of Optimal transportation theory it is likely that, in this area also, those processes will play an important role as natural regularizations of the traditional analytical and deterministic approaches.

E.8 Acknowledgements

Both authors are extremely grateful to Professors

Marco Fuhrman, Elisa Mastrogiovanni, Paola Morando and

Stefania Ugolini for their excellent organization of the conference and their wonderful hospitality.

Professor Jean-Claude Zambrini was kind enough to read a preliminary version of our manuscript ;

his comments and suggestions led to numerous improvements in the structure and style of our text.

We thank him heartily for his efforts.

Bibliographie

- [ACM18] S Albeverio, N Cangiotti, and S Mazzucchi. Generalized feynman path integrals and applications to higher-order heat-type equations. *Expositiones Mathematicae*, 36(3-4) :406–429, 2018.
- [AD17] AV Aksenov and KP Druzhkov. Symmetries and reductions of burgers–huxley equation. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 788, page 012002. IOP Publishing, 2017.
- [ADVM⁺20] Sergio Albeverio, Francesco C De Vecchi, Paola Morando, Stefania Ugolini, et al. Weak symmetries of stochastic differential equations driven by semimartingales with jumps. *Electronic Journal of Probability*, 25, 2020.
- [AM16] Sergio Albeverio and Sonia Mazzucchi. A unified approach to infinite-dimensional integration. *Reviews in Mathematical Physics*, 28(02) :1650005, 2016.
- [AM19] Sergio Albeverio and Sonia Mazzucchi. Infinite dimensional integrals and partial differential equations for stochastic and quantum phenomena. *Journal of Geometric Mechanics*, 11(2) :123, 2019.
- [BC69] George W Bluman and Julian D Cole. The general similarity solution of the heat equation(transformation groups used to find similarity solutions for partial differential equations and heat equation). *J. Math. Mech.*, 18 :1025–1042, 1969.
- [BC07] Ljudmila A Bordag and Alina Y Chmakova. Explicit solutions for a nonlinear model of financial derivatives. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 10(01) :1–21, 2007.
- [BDM19] Stefano Bonaccorsi, Mirko D’Ovidio, and Sonia Mazzucchi. Probabilistic representation formula for the solution of fractional high-order heat-type equations. *Journal of Evolution Equations*, 19(2) :523–558, 2019.
- [Beu60] Arne Beurling. An automorphism of product measures. *Annals of Mathematics*, pages 189–200, 1960.
- [BF] Ljudmila A Bordag and R Frey. Pricing options in illiquid markets :symmetry reductions and exact solutions. *Nonlinear Models in Mathematical Finance : Research Trends in Option Pricing*.

- [BHO00] Luisa Beghin, Kenneth J Hochberg, and Enzo Orsingher. Conditional maximal distributions of processes related to higher-order heat-type equations. *Stochastic processes and their applications*, 85(2) :209–223, 2000.
- [BM95] Krzysztof Burdzy and Andrzej Madrecki. An asymptotically 4-stable process. *JOURNAL OF FOURIER ANALYSIS AND APPLICATIONS*, 1 :97–118, 1995.
- [BM15] Stefano Bonaccorsi and Sonia Mazzucchi. High order heat-type equations and random walks on the complex plane. *Stochastic processes and their Applications*, 125(2) :797–818, 2015.
- [BO05] L Beghin and E Orsingher. The distribution of the local time for “pseudoprocesses” and its connection with fractional diffusion equations. *Stochastic processes and their applications*, 115(6) :1017–1040, 2005.
- [Bob09] Maxim Bobrov. Optimal systems of subalgebras for a nonlinear Black-Scholes equation. *arXiv preprint 0901.2826*, 2009.
- [Boc05] Salomon Bochner. *Harmonic analysis and the theory of probability*. Courier Corporation, 2005.
- [BOR01] L Beghin, E Orsingher, and T Ragozina. Joint distributions of the maximum and the process for higher-order diffusions. *Stochastic processes and their applications*, 94(1) :71–93, 2001.
- [Bor06] Ljudmila A Bordag. Symmetry reductions of a nonlinear option pricing model. *arXiv preprint math/0604207*, 2006.
- [Bor08] Ljudmila A Bordag. On option-valuation in illiquid markets : invariant solutions to a nonlinear model. In *Mathematical control theory and finance*, pages 71–94. Springer, 2008.
- [Bor15] Ljudmila A Bordag. *Geometrical Properties of Differential Equations : Applications of the Lie Group Analysis in Financial Mathematics*. World Scientific Publishing Co Inc, 2015.
- [Bra05] Paul Bracken. Symmetry properties of a generalized korteweg-de vries equation and some explicit solutions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2005(13) :2159–2173, 2005.
- [Bur93] Krzysztof Burdzy. Some path properties of iterated brownian motion. In *Seminar on Stochastic Processes, 1992*, pages 67–87. Springer, 1993.
- [CD01] MJ Craddock and Anthony Haynes Dooley. Symmetry group methods for heat kernels. *Journal of Mathematical Physics*, 42(1) :390–418, 2001.
- [CP04] Mark Craddock and Eckhard Platen. Symmetry group methods for fundamental solutions. *Journal of Differential Equations*, 207(2) :285–302, 2004.
- [Cri95] DG Crighton. Applications of kdv. In *KdV’95*, pages 39–67. Springer, 1995.
- [Doo53] Joseph Leo Doob. *Stochastic processes*, volume 101. New York Wiley, 1953.
- [DVMU16] Francesco C De Vecchi, Paola Morando, and Stefania Ugolini. Reduction and reconstruction of stochastic differential equations via symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 57(12) :123508, 2016.

BIBLIOGRAPHIE

- [DVMU20] Francesco C De Vecchi, Paola Morando, and Stefania Ugolini. Symmetries of stochastic differential equations using girsanov transformations. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 53(13) :135204, 2020.
- [DVMU21] Francesco C De Vecchi, Paola Morando, and Stefania Ugolini. Reduction and reconstruction of sdes via girsanov and quasi doob symmetries. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 54(18) :185203, 2021.
- [EB02] Alison Etheridge and Martin Baxter. *A course in financial calculus*. Cambridge University Press, 2002.
- [Eva98] Lawrence C Evans. Partial differential equations. *Graduate studies in mathematics*, 19(2), 1998.
- [F⁺79] Tadahisa Funaki et al. Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 55(5) :176–179, 1979.
- [Fre00] Rüdiger Frey. Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. *Model Risk*, pages 125–136, 2000.
- [GJY03] Anja Göing-Jaeschke and Marc Yor. A survey and some generalizations of bessel processes. *Bernoulli*, 9(2) :313–349, 2003.
- [GW92] JP Gazeau and P Winternitz. Symmetries of variable coefficient korteweg–de vries equations. *J. Math. Phys.*, 33 :4087, 1992.
- [HE71] B Kent Harrison and Frank B Estabrook. Geometric approach to invariance groups and solution of partial differential systems. *J. Math. Phys.*, 12(4) :653–666, 1971.
- [Hen05] Sandrine Henon. *Évaluation et couverture de produits dérivés dans les marchés imparfaits : un modèle de taux avec volatilité stochastique*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, 2005.
- [HJC14] Lescot Paul; Quintard Hélène and Zambrini Jean-Claude. Solving stochastic differential equations with Cartan’s exterior differential system. *arxiv preprint 1404.4802*, 2014.
- [HL19a] Mohamad Houda and Paul Lescot. Some bernstein processes similar to cox–ingersoll–ross ones. *Stochastics and Dynamics*, 19(06) :1950047, 2019.
- [HL19b] Mohamad Houda and Paul Lescot. Two computations concerning the isovectors of the backward heat equation with quadratic potential. *Methods and Applications of Analysis*, 2019.
- [HO94] Kenneth J Hochberg and Enzo Orsingher. The arc-sine law and its analogs for processes governed by signed and complex measures. *Stochastic Processes and their applications*, 52(2) :273–292, 1994.
- [HO96] Kenneth J Hochberg and Enzo Orsingher. Composition of stochastic processes governed by higher-order parabolic and hyperbolic equations. *Journal of Theoretical Probability*, 9(2) :511–532, 1996.

- [Hoc78] Kenneth J Hochberg. A signed measure on path space related to Wiener measure. *ANN PROBAB*, pages 433–458, 1978.
- [Hou13a] Mohamad Houda. Applications des processus de bernstein au calcul stochastique pour des marchés financiers avec des taux d'intérêt. 2013.
- [Hou13b] Mohamad Houda. Bernstein processes described by forward and backward heat equations. *arXiv preprint arXiv :1309.5566*, 2013.
- [Jac79] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications, 1979.
- [JS96] Niels Jacob and René L Schilling. Subordination in the sense of s. bochner—an approach through pseudo differential operators. *Mathematische Nachrichten*, 178(1) :199–231, 1996.
- [Léo13] Christian Léonard. A survey of the schrödinger problem and some of its connections with optimal transport. *arXiv preprint arXiv :1308.0215*, 2013.
- [Les12] Paul Lescot. Symmetries of the Black-Scholes equation. *Methods Appl. Anal.* 19(2) pp. 147-160, 2012.
- [Liu17] Tai-Ping Liu. Hopf-cole transformation. *BULLETIN OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS ACADEMIA SINICA NEW SERIES*, 12(1) :71–101, 2017.
- [LQ14] Paul Lescot and Hélène Quintard. Symmetries of the backward heat equation with potential and interest rate models. *CR ACAD SCI I-MATH*, 352(6) :525–528, 2014.
- [LV19] P Lescot and L Valade. Symmetries of partial differential equations and stochastic processes in mathematical physics and in finance. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 1194, page 012070. IOP Publishing, 2019.
- [LV22] Paul Lescot and Laurène Valade. Bernstein processes, isovectors and mechanics. In *Geometry and Invariance in Stochastic Dynamics*. Springer, Switzerland, 2022.
- [LZ02] Paul Lescot and Jean-Claude Zambrini. Isovecteurs pour l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman, différentielles stochastiques formelles et intégrales premières en mécanique quantique euclidienne. *CR ACAD SCI I-MATH*, 335(3) :263–266, 2002.
- [LZ07] Paul Lescot and Jean-Claude Zambrini. Probabilistic deformation of contact geometry, diffusion processes and their quadratures. In *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V*, pages 203–226. Springer, 2007.
- [Man04] Roger Mansuy. On a one-parameter generalization of the brownian bridge and associated quadratic functionals. *Journal of Theoretical Probability*, 17(4) :1021–1029, 2004.
- [Maz18] S Mazzucchi. Infinite dimensional oscillatory integrals with polynomial phase and applications to higher-order heat-type equations. *Potential Analysis*, 49(2) :209–223, 2018.
- [McK69] Henry P McKean. *Stochastic integrals*, volume 353. American Mathematical Soc., 1969.
- [Mey66] Paul André Meyer. *Probability and potentials*, volume 1318. Blaisdell Pub. Co., 1966.
- [N⁺96] Kunio Nishioka et al. Monopoles and dipoles in biharmonic pseudo process. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 72(3) :47–50, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

- [N⁺01] Kunio Nishioka et al. Boundary conditions for one-dimensional biharmonic pseudo process. *Electronic Journal of Probability*, 6, 2001.
- [NA11] Mehdi Nadjafikhah and Fatemeh Ahangari. Symmetry reduction of two-dimensional damped kuramoto—sivashinsky equation. *Communications in Theoretical Physics*, 56(2) :211, 2011.
- [NO00] Ya Nikitin and E Orsingher. On sojourn distributions of processes related to some higher-order heat-type equations. *Journal of Theoretical Probability*, 13(4) :997–1012, 2000.
- [Olv00] Peter J Olver. *Applications of Lie groups to differential equations*, volume 107. Springer, 2000.
- [OME11] Aziz Ouhadan, Toufik Mekkaoui, and El-Hassan Elkinani. Invariant and some new exact solutions of burgers equation. 2011.
- [OZ99] Enzo Orsingher and Xuele Zhao. Iterated processes and their applications to higher order differential equations. *Acta Mathematica Sinica*, 15(2) :173–180, 1999.
- [Qui15a] Hélène Quintard. Symétries d’équations aux dérivées partielles, calcul stochastique, applications à la physique mathématique et à la finance. *preprint theses.fr/2015ROUES022*, 2015.
- [Qui15b] Hélène Quintard. *Symétries d’équations aux dérivées partielles, calcul stochastique, applications à la physique mathématique et à la finance*. PhD thesis, Rouen, 2015.
- [RY13] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Tem12] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Springer Science & Business Media, 2012.
- [TZ97] M Thieullen and J-Cl Zambrini. Probability and quantum symmetries. i. the theorem of noether in schrödinger’s euclidean quantum mechanics. In *Annales de l’IHP Physique théorique*, volume 67, pages 297–338, 1997.
- [Val] L Valade. PhD thesis in progress.
- [Var07] SR Srinivasa Varadhan. *Stochastic processes*, volume 16. American Mathematical Soc., 2007.
- [Vig16] Alexis Vigot. *Représentation stochastique d’équations aux dérivées partielles d’ordre supérieur à 3 issues des neurosciences*. PhD thesis, Paris 6, 2016.
- [Zam86] Jean-Claude Zambrini. Variational processes and stochastic versions of mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 27(9) :2307–2330, 1986.
- [Zam15] Jean-Claude Zambrini. The research program of stochastic deformation (with a view toward geometric mechanics). In *Stochastic analysis : a series of lectures*, pages 359–393. Springer, 2015.