



HAL
open science

Réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires multipoints dans un contexte industriel : essais et simulations

Sébastien Talik

► **To cite this version:**

Sébastien Talik. Réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires multipoints dans un contexte industriel : essais et simulations. Autre. Université de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022LY-SEC007 . tel-03675700

HAL Id: tel-03675700

<https://theses.hal.science/tel-03675700>

Submitted on 23 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

ÉCOLE DOCTORALE MEGA
MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

par

Sébastien TALIK

**RÉPONSES VIBRATOIRES NON-LINÉAIRES À DES EXCITATIONS
ALÉATOIRES MULTIPOINTS DANS UN CONTEXTE INDUSTRIEL :
ESSAIS ET SIMULATIONS**

Présentée et soutenue publiquement le 16 février 2022, devant le jury d'examen :

T. BARANGER,	Professeur, UCB-Lyon 1	Présidente de jury
C. TOUZÉ,	Professeur, ENSTA Paris	Rapporteur
G. CHEVALLIER,	Professeur, FEMTO-ST Besançon	Rapporteur
E. SARROUY,	Maître de Conférences, École Centrale de Marseille	Examinatrice
F. HERVY,	Responsable Innovation à l'Agence de l'Innovation de Défense	Examinateur
J.-P. LAMBELIN,	Ingénieur Expert CEA, CEA/CESTA	Examinateur
M. CLAEYS,	Ingénieur CEA, CEA/CESTA	Examinateur
J.-J. SINOÛ,	Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de Thèse

Table des matières

Remerciements	7
Résumé	9
Abstract	11
Introduction	13
Contexte de l'étude	13
Plan de la thèse	15
1 État de l'art	17
1.1 Dynamique vibratoire linéaire	19
1.1.1 Analyse modale numérique	20
1.1.2 Analyse modale expérimentale	22
1.1.3 Éléments d'analyse des différents types d'excitation	22
1.2 Phénomènes vibratoires non-linéaires	26
1.3 Méthodes de simulations non-linéaires	29
1.3.1 Méthodes temporelles	30
1.3.2 Méthodes d'approximation	35
1.4 Réduction de modèle	37
1.4.1 Méthodes de condensation	38
1.4.2 Méthodes de sous-structuration	40
1.5 Modélisation d'une excitation aléatoire multipoints	42
1.5.1 Modélisations de Shinozuka et de Poirion	43
1.5.2 Choix de la discrétisation fréquentielle	45
1.5.3 Décomposition de Karhunen-Loève	48
1.6 Conclusion	51
2 Essais vibratoires sur la poutre bi-encastée CEA	53
2.1 Description de la poutre bi-encastée	55
2.2 Analyse modale expérimentale	56
2.3 Contrôle expérimental de l'excitation	57

2.4	Réponses vibratoires à une excitation bi-points	61
2.4.1	Phénomènes vibratoires observés lors de la campagne n° 1	61
2.4.2	Analyse de la signature non-linéaire lors de la campagne n° 2	65
2.5	Conclusion	73
3	Simulations vibratoires non-linéaires d'une poutre bi-encastree	75
3.1	Modélisation de deux excitations aléatoires corrélées	77
3.2	Modèle de la poutre avec prétension statique	79
3.3	Calcul des modes propres	82
3.4	Orthogonalité des modes de vibration	84
3.5	Problème non-linéaire complet	87
3.6	Méthode de l'équilibrage harmonique	89
3.7	Résultats numériques et comparaisons essais-calculs	91
3.7.1	Reproduction des effets liés à la corrélation entre les deux excitations	92
3.7.2	Comparaison des signatures non-linéaires numérique et expérimentale	96
3.8	Conclusion	102
4	Essais vibratoires sur la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 »	105
4.1	Motivations	107
4.2	Maquette industrielle HB2	107
4.2.1	Description de la maquette industrielle HB2	108
4.2.2	Instrumentation et moyen d'essais	109
4.3	Analyse modale expérimentale	113
4.4	Réponses vibratoires à une excitation aléatoire monopoint	119
4.4.1	Réponse vibratoire suivant la direction de l'excitation	120
4.4.2	Réponse vibratoire suivant une direction transverse de l'excitation	124
4.5	Réponses vibratoires à une excitation acoustique	129
4.5.1	Traitement des mesures brutes	129
4.5.2	Analyse de la signature non-linéaire due à l'excitation acoustique	131
4.6	Conclusion	143
5	Simulations vibratoires non-linéaires de la structure industrielle HB2	145
5.1	Modèle éléments finis de la maquette HB2	147
5.2	Analyse modale numérique et validation	149
5.3	Réduction du modèle	154
5.4	Modèle non-linéaire du frottement	155
5.4.1	Vecteur d'application de l'effort non-linéaire	155
5.4.2	Modèle de frottement	157
5.5	Méthode numérique pour les simulations non-linéaires	158
5.6	Modélisation originale d'une excitation aléatoire multipoints	163
5.6.1	Écriture du modèle	163
5.6.2	Calcul des termes d'acceptances modales	167

5.6.3	Validation de la modélisation et discussions	168
5.7	Simulation vibratoire non-linéaire à une excitation acoustique	173
5.7.1	Étude de la signature vibratoire non-linéaire numérique	173
5.7.2	Confrontation avec les mesures et discussions	176
5.8	Conclusion	188
Conclusion		191
	Bilan	191
	Perspectives	193
Bibliographie		195

À mes frères

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Jean-Jacques, pour m'avoir fait confiance durant ces trois années. Sa pédagogie, son dynamisme et sa rigueur m'ont permis de ne jamais me décourager durant ces trois belles années de thèse. Je tiens également à remercier Jean-Pierre qui a su encadrer avec minutie un projet de trois thèses dont celle-ci en est la conclusion finale. Son recul et son expertise m'ont permis d'adopter une méthode de travail que je continue d'employer aujourd'hui avec grande attention, en revenant toujours des choses les plus simples pour monter progressivement en complexité. Enfin, ce travail n'aurait pas été rendu possible sans l'appui infaillible de Maxence. Sa bienveillance, son sens inné de la physique et son soutien quotidien lors de ces trois années font de lui un encadrant idéal que je suis fier aujourd'hui d'appeler collègue. Je n'ai aucun doute concernant la réussite de nos futurs projets en commun.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour la lecture critique de mon manuscrit, pour la correction des quelques coquilles et pour les différentes remarques et critiques constructives qui me furent adressées le jour de la soutenance.

Ce travail n'aurait ensuite pas été possible sans le soutien quotidien des équipes du CEA/CESTA. Je tiens à remercier chacun des membres de mon laboratoire d'accueil, en particulier Jean-Marc et Olivier pour m'avoir accordé la liberté suffisante concernant la réalisation de ces travaux de thèse. Je tiens en particulier à remercier chaleureusement Dimitri et Renan, à la fois pour leurs conseils avisés mais également pour les centaines (au moins!) de kilomètres courus ensemble lors ces trois ans. Nul doute qu'il en reste encore des centaines pour déterminer qui est enfin le meilleur, même si chacun sait que vous faites de votre mieux. Merci également à Anne-Claire et Audrey qui m'ont permis de rester toujours très optimiste, chacun de vos conseils s'inscrit dans une temporalité qui restera nôtre, peu importe ce que signifie cette phrase. Je remercie enfin Didier pour m'avoir accepté dans son équipe à l'issue de ce projet de thèse et pour m'avoir laissé tout le temps nécessaire à la préparation de la soutenance.

Je remercie très profondément les membres de ma famille pour le soutien et l'encouragement reçu durant ces trois années de thèse. La confiance naturelle qu'ils m'ont accordée et qu'ils continuent de m'accorder est le socle sur lequel je m'appuie pour grandir au quotidien loin de chacun d'entre eux.

Enfin et surtout, le César des remerciements revient à l'ensemble de mes amis m'ayant suivi et accompagné durant ces trois ans. Où qu'ils soient actuellement, je remercie tous ces amis rencontrés à Lille, Nantes, Clermont-Ferrand et enfin Bordeaux pour les fous rires, les week-ends et les vacances qui m'ont permis de décompresser très facilement. Une pensée particulière pour Pauline qui a vu et suivi les doutes, les énervements, la fatigue et qui reste malgré tout très présente au quotidien pour évacuer tout cela. Ce projet de thèse n'aurait sans doute pas été réalisé sans sa présence. Je suis très heureux de penser que désormais, cette amitié est à durée indéterminée.

Résumé

Ces travaux de thèse portent sur l'étude numérique et expérimentale des réponses vibratoires non-linéaires de structures mécaniques soumises à des excitations aléatoires multipoints. Les études expérimentales menées au CEA/CESTA montrent que la réponse de certaines structures assemblées à des sollicitations vibratoires aléatoires multipoints est fortement dépendante d'une part du niveau de l'excitation et d'autre part de la corrélation de l'excitation aléatoire multipoints. Ces résultats expérimentaux ne peuvent pas être reproduits par une approche de simulation vibratoire linéaire.

L'objectif de ces travaux est de proposer et de mettre en place une méthode numérique pour étudier ces réponses vibratoires non-linéaires en fonction de l'excitation considérée. Le critère de satisfaction de cet objectif passe par une comparaison essais-calculs réalisée suite aux études numériques et expérimentales de maquettes d'essais bien définies. Ces maquettes sont construites afin d'être représentatives des objets industriels étudiés au CEA/CESTA. Du point de vue expérimental, la réalisation d'essais se veut physiquement motivée et l'excitation expérimentale se rapproche au plus près des sources d'excitations aléatoires et multipoints sollicitant les objets industriels du CEA/CESTA. Du point de vue numérique, des techniques avancées sont développées afin de prédire les comportements vibratoires non-linéaires sous excitations diverses dans le but d'une application dans le contexte industriel au CEA/CESTA.

Le premier objet d'étude est une poutre métallique bi-encastree, dont la non-linéarité est d'origine géométrique. La signature vibratoire non-linéaire de ce démonstrateur académique est étendue au cas des excitations aléatoires multipoints. La méthode de l'équilibrage harmonique est adaptée à cette nouvelle source de vibrations non-linéaires et les résultats numériques sont comparés aux mesures obtenues lors d'essais réalisés avec un nouveau dispositif expérimental mis en place durant ces travaux de thèse.

La maquette d'étude au cœur de ces travaux de thèse est une maquette industrielle conçue pour être représentative des objets étudiés au CEA/CESTA. Il s'agit de la maquette « Hypervelocity Ballistic 2 » (HB2). Cet assemblage présente des lames métalliques agissant comme des liaisons frottantes. Les essais réalisés en chambre acoustique permettent d'identifier le comportement dynamique linéaire et non-linéaire de cette structure et ainsi d'étudier l'évolution de la réponse vibratoire en fonction du niveau de l'excitation acoustique, assimilée à une excitation aléatoire multipoints. Un modèle numérique de la maquette HB2 est ensuite réalisé, réduit par une méthode de sous-structuration puis des relations non-linéaires de frottement sont introduites au niveau des liaisons frottantes. L'originalité de ces travaux de thèse provient également de la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints sur un nombre réduit de vecteurs d'effort. Cette modélisation est ainsi idéalement adaptée au cas des modèles industriels de grande envergure réduits à un nombre restreint de degrés de liberté. La réponse vibratoire non-linéaire de ce modèle est enfin obtenue numériquement grâce à la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires multipoints. Des comparaisons essais-calculs sont présentées afin de valider la stratégie de modélisation et simulation numérique proposée.

Abstract

This PhD work deals with the numerical and experimental study of the nonlinear vibration responses of mechanical structures subjected to multipoint correlated random excitations. Experimental studies led at CEA/CESTA show that the responses of some assembled structures to multipoint random vibration solicitations are strongly dependent on the level of excitation and on the correlation of the excitation. These experimental results cannot be numerically reproduced with the classical linear vibration simulation method.

The objective of this work is to propose and implement a numerical method in order to study these nonlinear vibration responses as a function of the considered excitation. The satisfaction of this objective goes with a tests-simulations comparison carried out following the numerical and experimental studies of well defined test structures. These structures are built to be representative of the industrial objects studied at CEA/CESTA. From the experimental point of view, the realization of tests is physically motivated and the experimental excitation is considered as close as possible to the sources of multipoint correlated random excitations soliciting the industrial objects studied at CEA/CESTA. From the numerical point of view, advanced numerical techniques are developed to predict the nonlinear behavior of mechanical systems subjected to complex excitations. The final goal is to be able to use such a numerical strategy in the CEA/CESTA industrial context.

The first test structure is a clamped-clamped steel beam that has a geometrical nonlinearity. The experimental nonlinear signature of this academic structure is extended to the case of multipoint correlated random excitations. The Harmonic Balance Method (HBM) is adapted to this new source of nonlinear vibrations and the numerical results are compared to experimental results obtained during tests performed using two electrodynamic shakers.

The second test structure which is at the heart of this thesis work is an industrial assembly designed to be representative of the objects studied at CEA/CESTA. This structure is named “Hypervelocity Ballistic 2” (HB2). This assembly presents metallic blades acting as friction joints. The tests led in an acoustic chamber allow to identify the linear and the nonlinear dynamic behavior of this assembly and thus to study the evolution of the vibration response according to the level of the acoustic excitation, considered as a multipoint random excitation. A numerical model of the HB2 model is then developed, reduced using a substructuring method and then linear joints are replaced by nonlinear friction models in the friction zone. The originality of this PhD work also comes from the modeling of a multipoint random excitation reduced on a restrained number of load vectors. This modeling is thus ideally suited to the case of large-scale industrial models reduced to a small number of degrees of freedom. The nonlinear vibration responses of this model are finally obtained numerically using the Harmonic Balance Method adapted to multipoint random excitations. Test-simulation comparisons are presented in order to highlight the proposed strategy based on nonlinear modeling and advanced numerical simulation tools.

Introduction

Cette thèse a été réalisée au CEA/CESTA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives/Centre d'Études Scientifiques et Techniques d'Aquitaine) en collaboration avec la DGA (Direction Générale de l'Armement) et le LTDS UMR 5513 (Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Structures) de l'École Centrale de Lyon.

Contexte de l'étude

Les travaux réalisés dans cette thèse s'intéressent à la dynamique non-linéaire de structures aéronautiques et spatiales. La dynamique des structures est un domaine de l'ingénierie qui étudie la réponse de structures mécaniques à des environnements et sollicitations. L'objectif de ce domaine est de prendre en compte les effets de la dynamique selon deux points de vue principaux : le premier concerne la garantie de tenue de la structure en elle-même pour déterminer si elle peut être endommagée par un environnement, le second étudie l'environnement transmis par ce système aux différents acteurs matériels et/ou humains accompagnant le système durant son exposition à cet environnement dynamique. Cette discipline est ainsi d'une importance capitale pour les industries aéronautique et spatiale. Le CEA fait partie des acteurs qui étudient et garantissent la tenue de structures aéronautiques soumises à de très forts niveaux vibratoires.

La compréhension et l'étude du comportement vibratoire des systèmes se basent classiquement sur des approches mêlant essais expérimentaux, modélisation et simulation. Tous les environnements dynamiques vécus par une structure mécanique lors de son cycle de vie ou nécessaires à sa qualification ne peuvent être reproduits en essais pour des raisons de coût et/ou de faisabilité. La logique mise en place pour garantir la tenue à l'environnement d'une structure consiste à utiliser les essais disponibles pour identifier un modèle prédictif de la structure. La simulation est alors basée sur un travail de modélisation puis sur une comparaison entre les mesures obtenues en essais et les résultats prédits par simulation numérique. Lorsque les comparaisons sont jugées satisfaisantes sur l'ensemble des essais réalisés, un cadre de validité est défini pour lequel les simulations sont jugées représentatives de la structure étudiée. Ce cadre permet de mener des calculs prédictifs du comportement vibratoire des systèmes pour des environnements ne pouvant pas être testés en essais.

Concernant les environnements dynamiques étudiés, ils sont généralement séparés entre les signaux

transitoires (chocs, impacts, chutes, etc.) et les signaux stationnaires (signaux périodiques stables au cours du temps). Ces travaux de thèse ne s'intéressent qu'au calcul de réponses vibratoires à des excitations stationnaires. Ces sources de vibration correspondent aux excitations qu'une structure aéronautique ou aérospatiale subit en phase de transport et en vol. L'environnement global appliqué à l'assemblage dynamique produit des vibrations qui sont réparties sur l'ensemble de la structure. Dans ces travaux de thèse, les environnements aléatoires multipoints sont plus particulièrement étudiés. L'une des originalités et l'un des objectifs forts de ces travaux de thèse sont de proposer une stratégie complète en expérimentation, modélisation et simulation numérique pour mieux comprendre et prédire le comportement vibratoire de systèmes non-linéaires complexes sous sollicitations aléatoires multipoints.

Pour étudier la réponse vibratoire d'une structure à un environnement multipoints, l'hypothèse d'un comportement linéaire est très répandue dans le monde scientifique et industriel et la résolution se fait alors en déterminant les fréquences et les niveaux maximum de résonance d'une structure expérimentale ou d'un modèle numérique pour une sollicitation donnée, ainsi que les déformations associées. Dès lors, si les fréquences et les niveaux de résonance des essais et du modèle numérique correspondent entre eux, le modèle est représentatif de la structure. Cette approche vibratoire est efficace et bien maîtrisée aujourd'hui mais elle se base sur une hypothèse très forte de linéarité : le niveau de réponse d'une structure est linéairement dépendant du niveau d'excitation. En pratique, des essais montrent régulièrement une relation non-linéaire forte entre le niveau d'excitation et le niveau de réponse, ce qui met en défaut ce type d'approche.

Après deux thèses sur l'étude de phénomènes vibratoires non-linéaires liés à des environnements sinusoïdaux et aléatoires monopoints [8, 58], le CEA/CESTA s'intéresse à l'étude de réponses vibratoires non-linéaires à des environnements aléatoires multipoints. En effet, les outils développés au CEA/CESTA durant ces deux précédentes thèses permettent de simuler la réponse d'un assemblage industriel contenant des liaisons non-linéaires à des excitations sinusoïdales ou aléatoires, en présence d'incertitudes de modélisation. Cependant, ces outils ne permettent pas de simuler une réponse vibratoire non-linéaire dans le cas d'une excitation par un bruit aérodynamique caractérisée par une excitation aléatoire, multipoints et partiellement corrélée. L'objectif de ces travaux de thèse est ainsi de proposer une démarche complète de modélisation et simulation de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires partiellement corrélées pour les structures comportant des interfaces non-linéaires. Deux objets d'étude seront considérés dans le cadre de cette thèse : une structure académique nommée « poutre CEA » correspondant à une poutre bi-encastée excitée en deux points, et une structure industrielle sous excitation acoustique au CEA/CESTA. À noter que la poutre bi-encastée a déjà été étudiée dans les deux précédentes thèses pour des excitations sinusoïdales et aléatoires monopoints.

Du point de vue académique, la simulation de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations monopoints est étudiée depuis plusieurs décennies. La simulation de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations multipoints est quant à elle peu répandue et ces travaux de thèse proposent une contribution scientifique sur ce dernier aspect. Du point de vue industriel, la mise en pratique d'un

développement et d'une technique numérique avancée en dynamique vibratoire non-linéaire à une maquette industrielle de grande envergure est un point important pour la garantie de tenue aux environnements dynamiques de structures aéronautiques modernes. Cette thèse propose ainsi de développer des outils numériques avancés directement applicables dans un cadre industriel.

Plan de la thèse

Ce manuscrit de thèse se compose de cinq chapitres. Le premier chapitre présente les techniques précédemment évoquées pour la dynamique vibratoire linéaire, c'est-à-dire, les méthodes classiques d'analyse modale numérique et expérimentale, puis les bases de l'analyse des environnements stationnaires voire transitoires. Des phénomènes vibratoires non-linéaires sont mis en évidence sur des exemples concrets. Un travail bibliographique présente ensuite une revue des méthodes de réduction de modèle et de simulation vibratoire non-linéaire afin de permettre la résolution de systèmes non-linéaires à échelle industrielle. Pour pouvoir appliquer ces méthodes à une structure soumise à un environnement aérodynamique complexe, la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints est nécessaire. Deux modèles sont présentés dans ce premier chapitre et sont adaptés aux codes internes utilisés lors de ces travaux de thèse.

Les chapitres suivants correspondent aux développements originaux de ces travaux de thèse. Tout d'abord, le chapitre 2 présente les essais vibratoires réalisés sur le premier objet d'étude : la poutre bi-encastrée CEA. Une analyse expérimentale préliminaire au marteau de choc est présentée afin d'identifier la signature linéaire de l'objet. Puis, le montage expérimental permettant de solliciter la poutre bi-encastrée CEA avec deux efforts aléatoires et corrélés entre eux est détaillé. Le contrôle de la corrélation en phase entre les deux efforts aléatoires temporels est effectué grâce au système Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Random du logiciel Simcenter Testlab de Siemens [46]. Enfin, la signature non-linéaire de la poutre en fonction de la corrélation de l'excitation aléatoire multipoints est observée et analysée.

Le chapitre 3 présente l'étude numérique associée à cette poutre bi-encastrée. S'appuyant sur la campagne d'essais réalisée sur la poutre bi-encastrée CEA, une modélisation de deux excitations aléatoires et corrélées est présentée sur la base de l'état de l'art donné dans le chapitre 1. Puis, un modèle analytique de la poutre est développé. Représentatif de la poutre bi-encastrée CEA, ce modèle contient des conditions aux limites non-idéales, une prétension statique ainsi que la présence de masses additionnelles correspondant aux accéléromètres présents durant la campagne d'essais. Le problème non-linéaire est résolu par l'intermédiaire de la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires. Les résultats de la simulation numérique sont comparés aux mesures de la campagne d'essais analysée dans le chapitre 2.

Le chapitre 4 présente l'étude expérimentale réalisée sur un assemblage plus complexe qui constitue le cœur de ces travaux de thèse : la maquette industrielle « Hypervelocity Ballistic 2 » (HB2), développée au CEA/CESTA. Cet assemblage contient une couronne de 23 liaisons de centrage pour

lesquelles du frottement se déclenche à fort niveau d'excitation. De même que pour l'étude expérimentale de la poutre bi-encastree CEA, une analyse modale de la maquette HB2 est présentée afin d'identifier la signature modale de cet assemblage industriel. L'utilisation de la vibrométrie laser à balayage 3D lors d'un essai à très faible niveau d'excitation est présentée pour identifier les différentes informations modales de la structure. Deux campagnes d'essais réalisées au cours de ces travaux de thèse sont ensuite traitées. Ainsi, les réponses vibratoires linéaires et non-linéaires de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint d'une part ainsi qu'à une excitation acoustique (considérée comme une excitation aléatoire multipoints) d'autre part sont données et analysées à différentes localisations de cet assemblage industriel.

Enfin, le chapitre 5 présente la stratégie de modélisation, de simulation et les résultats obtenus dans le cadre de l'étude numérique de la maquette HB2. La démarche proposée se veut générale afin de pouvoir être applicable à d'autres assemblages industriels comprenant des non-linéarités localisées dans des liaisons. Ainsi, le modèle éléments finis complet de la maquette HB2 est présenté puis réduit grâce à une méthode de sous-structuration hybride implémentée dans le code éléments finis ABAQUS. Une loi de liaison non-linéaire est introduite dans chacune des liaisons frottantes de la maquette HB2 puis le problème non-linéaire complet est résolu par l'intermédiaire de la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires. Pour ce faire, une méthode originale de modélisation d'une excitation aléatoire multipoints avec un nombre restreint de vecteurs d'effort est présentée. Idéalement adaptée au cas de modèles industriels de grande envergure, cette méthode est validée sur la référence du modèle éléments finis complet. Enfin, la signature non-linéaire du modèle numérique de la maquette HB2 est calculée et comparée aux mesures obtenues pour les seconde campagne d'essais présentée dans le chapitre 4 afin de répondre aux objectifs de ces travaux de thèse dans un contexte industriel.

Chapitre 1

État de l'art

Avant d'aborder des phénomènes vibratoires non-linéaires complexes, un état de l'art concernant les dynamiques vibratoires linéaire et non-linéaire est donné. Tout système est dit linéaire s'il respecte le principe de superposition : le signal de sortie est proportionnel au signal d'entrée, et cette loi de transformation est indépendante du signal d'entrée. Dès lors, de nombreux outils d'analyse d'une réponse vibratoire linéaire existent pour étudier la dynamique de tels systèmes. Ces outils sont présentés dans la première partie de ce chapitre. De plus, ces travaux de thèse mettent l'accent sur l'étude des excitations aléatoires multipoints. Cependant, d'autres sources de vibrations existent et sont étudiées dans l'industrie d'aujourd'hui. Ces différents types d'excitation sont également décrits dans la première partie de ce chapitre.

Pour certaines structures vibrantes, il apparaît parfois que le principe de superposition n'est plus respecté : dans ce cas, le système mécanique est dit non-linéaire. La réponse d'un système non-linéaire est alors dépendante du signal d'entrée. Afin d'illustrer de tels phénomènes, l'observation expérimentale de réponses non-linéaires à des excitations monopoints est donnée en deuxième partie de ce chapitre. Ces observations expérimentales sont issues de travaux antérieurs au CEA/CESTA pour les excitations sinusoïdales monopoints et d'études préliminaires sur la maquette qui servira d'application industrielle dans le cadre de cette thèse, « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2), qui est étudiée dans les chapitres 4 et 5, pour les excitations aléatoires monopoints. L'étude numérique des systèmes non-linéaires nécessite classiquement le développement de techniques numériques et méthodes de simulation qui sont rappelées en troisième partie de ce chapitre.

L'un des objectifs de ces travaux est d'adapter la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints à un modèle éléments finis de grande envergure pour application sur une maquette industrielle. Une étape de réduction ou condensation de modèle est alors nécessaire et la quatrième partie de ce chapitre s'intéresse ainsi aux différentes méthodes de réduction classiquement utilisées. Par ailleurs, la réponse vibratoire non-linéaire à des excitations aléatoires multipoints est encore peu étudiée mais la modélisation d'une telle excitation est connue. Cette modélisation est rappelée en dernière partie de ce chapitre.

L'ensemble des outils présents dans ce chapitre fait ainsi office d'état de l'art et donne une vision globale de la résolution d'un système mécanique linéaire, voire non-linéaire, à tout type de sollicitation. Parmi tous ces outils, notamment les méthodes de simulation non-linéaires et les méthodes de réduction, un choix a été fait en amont de ces travaux de thèse afin de considérer des outils appropriés vis-à-vis des applications industrielles visées et qui ont par ailleurs déjà été éprouvés sur d'autres systèmes dans le cadre des deux thèses réalisées au CEA/CESTA dans ce domaine [8, 58]. Ainsi, seule une méthode de résolution non-linéaire ainsi qu'une seule méthode de réduction sont employées dans le cadre de ces travaux de thèse pour étudier le comportement vibratoire non-linéaire de la poutre bi-encastrée CEA et de la maquette industrielle HB2.



FIGURE 1.1 – Pour un système linéaire, à toute combinaison linéaire (α, β) de plusieurs entrées (e_1, e_2) correspond la même combinaison linéaire des sorties respectives (s_1, s_2) .

1.1 Dynamique vibratoire linéaire

Dans cette partie, les systèmes mécaniques ayant un comportement vibratoire linéaire sont étudiés. Dans l'industrie, de tels systèmes sont généralement analysés par éléments finis avec une formulation de l'état du système qui est donnée par degré de liberté [29]. Ainsi, la description spatiale d'un système mécanique est discrète et elle est donnée par un vecteur déplacement $\mathbf{x}(t)$, un vecteur vitesse $\dot{\mathbf{x}}(t)$ et un vecteur accélération $\ddot{\mathbf{x}}(t)$. Chaque composante de ces vecteurs correspond à un degré de liberté du système à un instant t donné.

Une modélisation mécanique linéaire est classiquement donnée par l'équation de la dynamique du système sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) \quad (1.1)$$

Les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système vibratoire. Le vecteur $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ représente l'effort temporel sollicitant la structure. Cet effort temporel peut varier en fonction de la nature de l'excitation envisagée, différents types d'excitation très présents dans l'industrie sont donnés dans la section 1.1.3 de ce chapitre.

Pour un système linéaire, le théorème de superposition est respecté : toute combinaison linéaire d'une entrée induit la même combinaison linéaire de la sortie. Ce comportement dynamique se retrouve classiquement sur la figure 1.1. Pour une excitation sinusoïdale de la forme $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \mathbf{F}_{\text{excit}} \exp(j\omega t)$ (où $\mathbf{F}_{\text{excit}}$ représente le vecteur d'excitation défini à chaque degré de liberté du système éléments finis, j représente le nombre complexe $\sqrt{-1}$ et ω représente la pulsation de l'excitation sinusoïdale). Le théorème de superposition permet au vecteur déplacement $\mathbf{x}(t)$ de s'écrire sous la même forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} \exp(j\omega t) \quad (1.2)$$

où \mathbf{x} représente le vecteur déplacement défini à chaque degré de liberté du système éléments finis. Dès lors, la réécriture de l'équation de la dynamique (1.1) devient :

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.3)$$

où l'expression $(-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K})$ est une raideur dynamique. Les fréquences associées aux pulsations maximales sont dénommées fréquences de résonance.

L'objectif de la dynamique vibratoire linéaire est principalement de caractériser ces résonances à travers les notions de fréquence de résonance, d'amplitude de pics de résonance et d'amortissement. Cette caractérisation se réalise grâce aux méthodes d'analyse modale à la fois numérique et expérimentale.

1.1.1 Analyse modale numérique

Pour un modèle donné, il s'agit de trouver dans un premier temps les solutions de l'équation de la dynamique pour laquelle il n'y a ni amortissement et ni excitation :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi} \exp(j\omega t) \quad (1.5)$$

L'analyse modale consiste alors à caractériser les couples $(\mathbf{\Phi}, \omega)$ solutions de l'équation :

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{\Phi} \quad (1.6)$$

Les matrices de masse et de raideur associées sont réelles, symétriques et définies positives. Dès lors, le problème aux valeurs propres généralisé (1.6) possède N_m solutions indépendantes et pour lequel de nombreuses méthodes numériques existent pour en trouver les solutions [29]. Ces solutions indépendantes sous la forme $(\mathbf{\Phi}_i, \Omega_i)_{\forall i \in [1, N_m]}$ définissent les modes propres de la structure. Les Ω_i sont les pulsations propres et les $\mathbf{\Phi}_i$ sont les formes propres, toutes deux sont indépendantes de l'excitation $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$. Ces pulsations et formes propres caractérisent la réponse vibratoire du système décrit par l'équation (1.1).

Une normalisation des formes propres $\mathbf{\Phi}_i$ par rapport à la matrice de masse peut être classiquement exprimé par :

$$\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_i = 1 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_i = \Omega_i^2 \quad (1.8)$$

où la notation $.^T$ indique l'opérateur transposé.

Concernant la forme de la matrice d'amortissement \mathbf{D} , elle est choisie de sorte qu'elle soit également diagonale par projection modale. Les choix d'amortissement les plus courants dans la dynamique des structures sont :

- l'amortissement modal, il correspond à un facteur d'amortissement ξ_i par mode de structure :

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{D} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_{N_m} \Omega_{N_m} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

où $\mathbf{\Phi}$ correspond à la matrice des formes propres $\mathbf{\Phi}_i$,

— l'amortissement de Rayleigh, il correspond à deux constantes réelles α et β telles que :

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (1.10)$$

Ces constantes sont choisies ou calculées à partir de deux pulsations propres Ω_1 et Ω_2 de façon à obtenir deux amortissements modaux ξ_1 et ξ_2 équivalents. L'amortissement modal équivalent pour le $i^{\text{ème}}$ mode de vibration s'écrit :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\Omega_i} + \beta \Omega_i \right) \quad (1.11)$$

La constante α permet alors d'amortir les basses fréquences tandis que la constante β est choisie pour amortir les hautes fréquences.

— l'amortissement en séries de Caughey (pour lesquelles $N = 2$ correspond à l'amortissement de Rayleigh) :

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K})^k \right) \quad (1.12)$$

où les coefficients a_k sont estimés pour représenter un facteur d'amortissement ξ_i pour N modes ($\forall N \in \llbracket 1, N_m \rrbracket$). L'amortissement modal équivalent pour le $i^{\text{ème}}$ mode de vibration s'écrit :

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{\Omega_i} + a_1 \Omega_i + a_2 \Omega_i^3 + \dots + a_{N-1} \Omega_{N-1}^{2N-3} \right) \quad (1.13)$$

Avec ces trois choix classiques, la projection de la matrice d'amortissement \mathbf{D} sur la base modale donne également une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les facteurs d'amortissement modaux :

$$\Phi_i^T \mathbf{D} \Phi_i = 2\xi_i \Omega_i \quad (1.14)$$

Désormais, l'équation de la dynamique (1.3) projetée sur le $i^{\text{ème}}$ mode de vibration de la structure s'écrit :

$$(-\omega^2 \Phi_i^T \mathbf{M} + j\omega \Phi_i^T \mathbf{D} + \Phi_i^T \mathbf{K}) \mathbf{x} = \Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.15)$$

Le vecteur déplacement \mathbf{x} est supposé écrit sous la forme :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N_m} x_i \Phi_i \quad (1.16)$$

Ainsi en considérant les expressions (1.7), (1.8) et (1.14), chaque déplacement modal x_i s'écrit :

$$x_i = \frac{\Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{excit}}}{-\omega^2 + 2j\xi_i \omega \Omega_i + \Omega_i^2} \quad (1.17)$$

avec $\Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{excit}}$ qui représente le coefficient de participation modale du $i^{\text{ème}}$ mode de vibration de la structure.

1.1.2 Analyse modale expérimentale

Lors des études expérimentales réalisées sur la poutre bi-encastée CEA et sur la maquette industrielle HB2, une analyse modale expérimentale a été effectuée pour identifier et analyser les différentes formes propres et fréquences de résonance de chacune de ces structures sur une plage de fréquences bien spécifique. Cette analyse est présentée dans la section 2.2 du chapitre 2 pour la poutre bi-encastée CEA et dans la section 4.3 du chapitre 4 pour la maquette industrielle HB2.

Une analyse modale expérimentale peut généralement se réaliser avec un marteau de choc ou avec un excitateur électrodynamique. La réponse impulsionnelle de ce choc est traitée par le logiciel d'acquisition au niveau des différents accéléromètres placés sur la structure, puis une fonction de transfert entre la sortie à un accéléromètre et l'impulsion au point d'impact est donnée. D'un point de vue expérimental, la structure testée peut être considérée comme un système mécanique dont les degrés de liberté sont localisés aux emplacements des capteurs. Le vecteur de déplacement expérimental est de nouveau noté \mathbf{x} . L'analyse modale expérimentale consiste à identifier les formes et les pulsations propres d'un système linéaire dont la réponse serait celle qui est mesurée. La fonction de transfert \mathbf{H} entre l'excitation et la réponse s'écrit :

$$\mathbf{x} = H(\omega) \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.18)$$

L'équation (1.17) montre que toute fonction de transfert entre un point d'excitation et un point de réponse s'écrit comme un quotient de polynômes en ω :

$$H(\omega) = \frac{\sum_i \Phi_i^T \mathbf{F}_{\text{excit}} \prod_{k \neq i} (-\omega^2 + 2j\xi_k \omega \Omega_k + \Omega_k^2)}{\prod_k (-\omega^2 + 2j\xi_k \omega \Omega_k + \Omega_k^2)} \quad (1.19)$$

$H(\omega)$ est aussi dénommée fonction de réponse fréquentielle (FRF).

L'une des méthodes les plus répandues pour l'analyse modale expérimentale est la méthode du polynôme fréquentiel de référence [47]. Cette méthode consiste à optimiser les paramètres Φ_i , Ω_i et ξ_i afin que l'expression analytique (1.19) soit la plus proche possible des mesures expérimentales, au sens des moindres carrés.

Cette méthode est très efficace et permet une excellente analyse des résultats expérimentaux mais elle suppose une fonction de transfert expérimentale linéaire. La partie 1.2 illustre les limites de cette hypothèse linéaire par des phénomènes observés expérimentalement pour deux types d'excitation parmi les trois types d'excitation présentés dans la partie 1.1.3 suivante.

1.1.3 Éléments d'analyse des différents types d'excitation

Dans cette partie, trois types d'excitation, relativement présents dans l'industrie et dans le domaine de la dynamique des structures, sont donnés et étudiés à travers différents éléments d'analyse. Il s'agit des excitations sinusoïdales, aléatoires et de type choc.

Excitation sinusoïdale

Les excitations sinusoïdales correspondent aux excitations les plus employées dans l'industrie aujourd'hui. Elles peuvent être de deux types :

- à fréquence fixe : il s'agit alors d'observer et de caractériser la réponse vibratoire d'une structure à une fréquence bien précise. Par exemple, lors des premiers essais sur la maquette industrielle HB2 (voir chapitre 4), une excitation sinusoïdale à fréquence fixe, couplée à de la vibrométrie laser utilisée à la même fréquence, a permis d'observer avec précision les déformées de la structure aux différentes fréquences propres identifiées lors de l'analyse modale expérimentale.
- à fréquence dite « balayée » : il s'agit d'une force excitatrice sinusoïdale dont la fréquence varie relativement lentement sur une plage fréquentielle bien définie.

Les excitations en « sinus balayé » ont généralement une fréquence qui varie suffisamment lentement dans le temps pour que le signal puisse être considéré comme stationnaire à chaque instant. Cela permet de se ramener en chaque instant au cas d'un signal purement sinusoïdal à fréquence fixe. La vitesse de balayage ainsi que le sens de balayage sont contrôlés par le moyen d'essais. Un sinus balayé s'écrit sous la forme générale :

$$f(t) = |F(\omega)| \sin(\omega(t)t + \phi(\omega)) \quad (1.20)$$

où :

- $\omega(t)$ représente la pulsation de l'excitation, variable avec le temps t ,
- $F(\omega)$ représente l'amplitude de l'excitation, pouvant varier avec la fréquence donc avec le temps t ,
- $\phi(\omega)$ représente la phase de l'excitation, pouvant varier avec la fréquence donc avec le temps t .

En pratique, lorsqu'une structure est excitée par un signal sinusoïdal, une modélisation linéaire du système fait supposer une réponse sinusoïdale de même pulsation. Les essais avec excitation sinusoïdale sont souvent réalisés à amplitude d'excitation constante et le signal temporel de l'excitation est considéré comme un terme source mono-harmonique [8].

Excitation aléatoire

Des essais à « excitations aléatoires multipoints » sont réalisés au cours de ces travaux de thèse. Il est nécessaire pour cela de définir quelques notions essentielles parmi lesquelles la Densité Spectrale de Puissance (DSP) ou la valeur RMS d'un signal.

Les données physiques servant à l'observation d'un phénomène aléatoire, typiquement l'action de l'air sur une structure aéronautique complexe, peuvent être classées en processus ou événements. Deux familles de processus s'opposent : les processus dits déterministes, pouvant être décrits grâce à des expressions mathématiques explicites, et les processus dits stochastiques qui eux doivent être décrits

en termes probabilistes.

Un processus aléatoire se définit comme un ensemble de variables aléatoires parfois appelées enregistrements [32] ou échantillons [43] :

$$X(t) = \{X^{(k)}(t)\} \quad (1.21)$$

où $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ où N représente le nombre d'échantillons total considéré. Dès lors, un processus aléatoire peut s'étudier de deux manières :

- en considérant un échantillon donné qui fournit une fonction aléatoire du temps : c'est le point de vue temporel ;
- en considérant les valeurs de différents échantillons à un temps fixé : c'est le point de vue statistique.

Le point de vue temporel étudie une variable aléatoire (un échantillon) $x(t)$ sur une période de temps T . Sur cet échantillon, les notions suivantes sont définies :

— la moyenne temporelle $E(x)$:

$$E(x) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.22)$$

— la moyenne quadratique $E(x^2)$:

$$E(x^2) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)^2 dt \quad (1.23)$$

Ainsi la valeur RMS (de l'anglais « Root Mean Square ») est la valeur $x_{RMS} = \sqrt{E(x^2)}$.

- la variance σ_x^2 :

$$\sigma_x^2 = E((x - E(x))^2) \quad (1.24)$$

Il s'agit d'une moyenne du carré de l'écart entre $x(t)$ et sa valeur moyenne $E(x)$.

Un processus aléatoire est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont indépendantes de l'origine de temps fixée. Un processus aléatoire est dit ergodique si toutes ses propriétés statistiques sont égales aux propriétés temporelles. Dans ces travaux de thèse, seuls des processus aléatoires stationnaires sont considérés. Si besoin, la non-stationnarité d'un processus aléatoire est étudiée dans les travaux de Newland [43].

Dans le cadre des vibrations aléatoires, le signal $x(t)$ n'est pas périodique et la condition nécessaire pour réaliser la transformée de Fourier n'est pas respectée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \quad (1.25)$$

Dès lors, la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal, qui vérifie la condition (1.25), est préférée à la transformée de Fourier du signal temporel. Cette transformée de Fourier

donne indirectement des informations sur le contenu fréquentiel d'un signal aléatoire. Pour un processus aléatoire stationnaire, la fonction d'autocorrélation de $x(t)$ est définie par :

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau)dt \quad (1.26)$$

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) se définit alors comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ (formule de Wiener-Khintchine) :

$$S_{xx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau \quad (1.27)$$

Elle représente une distribution de l'énergie du signal considéré en fonction de la fréquence. Grâce à cette relation, la DSP est une fonction réelle à valeurs positives. À l'aide des équations (1.23) et (1.27), la relation suivante est obtenue :

$$x_{RMS}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)d\omega \quad (1.28)$$

Désormais, si deux processus aléatoires $x(t)$ et $y(t)$ stationnaires sont considérés, les fonctions de corrélations croisées sont définies par :

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] \quad (1.29)$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t)x(t+\tau)] \quad (1.30)$$

Les Densités Spectrales de Puissance Croisées $S_{xy}(\omega)$ et $S_{yx}(\omega)$ sont alors définies à partir de la transformée de Fourier de ces fonctions de corrélations croisées :

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau \quad (1.31)$$

$$S_{yx}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau) \exp(-i\omega\tau)d\tau \quad (1.32)$$

Ces Densités Spectrales de Puissance Croisées contiennent l'intégralité de l'information sur la corrélation entre les deux processus aléatoires $x(t)$ et $y(t)$. Ce sont des fonctions à valeurs complexes, liées l'une à l'autre par la relation suivante :

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(\omega)^* \quad (1.33)$$

où $*$ désigne l'opérateur mathématique conjugué.

La section 1.5 indique comment utiliser l'information contenue dans les DSP et dans les DSP croisées pour modéliser une excitation aléatoire multipoints.

Excitation de type choc

Les excitations de type choc sont particulièrement présentes dans l'industrie aéronautique. Il s'agit d'une charge mécanique, transitoire et locale, caractérisée par sa faible durée (par rapport à la fréquence propre du système considéré), sa haute fréquence éventuelle (≥ 1 kHz jusqu'à 1 MHz pour les chocs pyrotechniques) et sa grande amplitude, avec un temps de montée initial relativement court. L'environnement de choc est un sujet d'intérêt important car il peut induire une défaillance majeure entraînant la perte totale ou partielle d'une fonctionnalité de la structure étudiée. Une liste non exhaustive des problèmes pouvant être causés par des chocs au niveau des équipements est donnée ci-dessous :

- Impact sur l'électronique : dysfonctionnement de la carte électronique du matériel dû à la défaillance ou à la dégradation de composants électroniques.
- Impact sur la structure : apparition de fissures et de fractures dans les matériaux fragiles, déformation plastique locale ou fatigue accélérée des matériaux pour des chocs répétés.
- Impact sur les mécanismes internes au système : les composants tels que les roulements, les engrenages, les vis sont réputés sensibles aux excitations de type choc.

Pour traiter les données des réponses à un choc, l'historique temporel constitue la première des données accessibles puisque presque tous les signaux physiques sont obtenus par des capteurs enregistrant les variations de ces signaux dans le temps. Cependant, une mesure de choc sous forme d'historique temporel n'est pas directement utile à des fins d'ingénierie, par exemple pour comparer la sévérité des chocs et leur contenu en fréquence, ou pour comprendre leur effet sur les composants. Une représentation largement utilisée pour traiter les chocs est le Spectre de Réponse aux Chocs (SRC).

Le Spectre de Réponse aux Chocs (SRC) est une grandeur calculée à partir d'un transitoire d'entrée. Il permet de caractériser l'effet d'un choc sur un système dynamique afin d'estimer sa sévérité ou son potentiel d'endommagement. Le SRC permet ainsi de comparer des chocs entre eux et d'établir un critère d'équivalence entre un environnement transitoire mesuré et une simulation de cet environnement transitoire. La méthode de calcul du SRC consiste à appliquer un effort temporel comme excitation de base à un ensemble de systèmes à un seul degré de liberté, puis à calculer pour chacun d'eux le maximum temporel de leur réponse. Le SRC peut alors être défini pour tout paramètre d'entrée ou de réponse d'intérêt (déplacement, vitesse ou accélération).

1.2 Phénomènes vibratoires non-linéaires

Dans la réponse expérimentale de structures réelles, plusieurs phénomènes viennent contredire les résultats prédits avec une modélisation linéaire. Cette partie présente des exemples illustratifs de phénomènes vibratoires non-linéaires rencontrés pour deux types d'excitation : premièrement une excitation sinusoïdale monopoint sur la poutre bi-encastée CEA et extraits de travaux précédents [8],

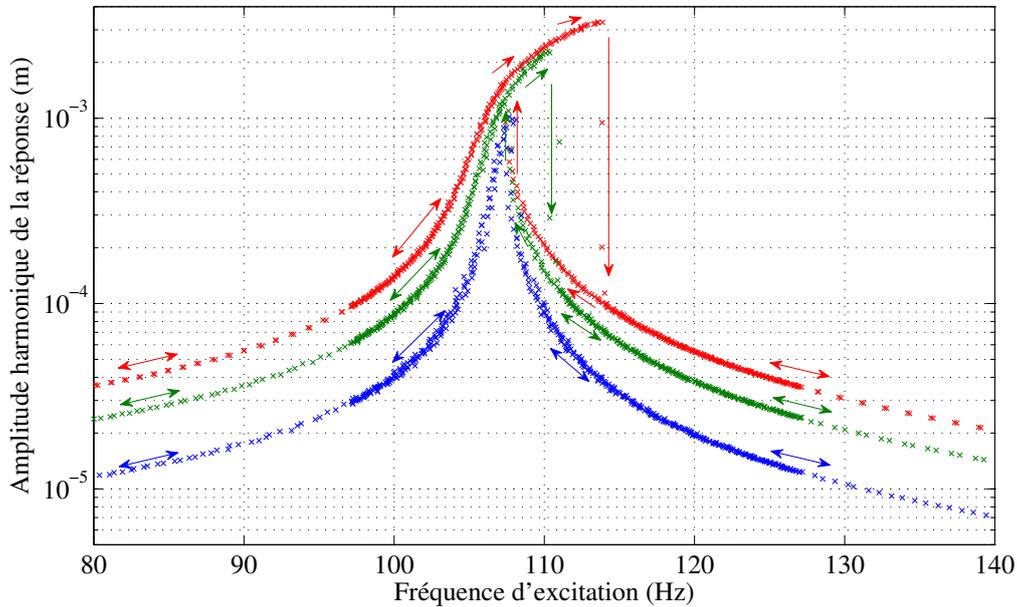


FIGURE 1.2 – Courbes de réponse fréquentielles harmoniques pour 3 niveaux d'excitation : 2 m.s^{-2} (bleu), 4 m.s^{-2} (vert) et 6 m.s^{-2} (rouge). Les flèches indiquent la direction du balayage fréquentiel, extraites des travaux de [8].

puis une excitation aléatoire monopoint, réalisés au cours de ces travaux de thèse (sur la maquette industrielle HB2, voir chapitre 4). Il est bon de rappeler que cette thèse questionne la signature vibratoire non-linéaire de structures à des excitations aléatoires multipoints, ces phénomènes expérimentaux sont exposés aux chapitres 2 et 4.

La figure 1.2 présente les résultats expérimentaux des travaux de Claeys et al. [8] sur la poutre bi-encastée CEA. La poutre, sollicitée uniformément par un exciteur électrodynamique, présente un comportement vibratoire non-linéaire en fonction du niveau de l'excitation de type sinus balayé. Cette poutre, qui fait l'objet des chapitres 2 et 3 de ce mémoire de thèse, est un système non-linéaire, dont la non-linéarité est géométrique et issue des grands déplacements. Sur la figure 1.2, l'amplitude de déplacement au centre de la poutre présente une discontinuité au voisinage de la résonance du premier mode de flexion de la poutre. Cette discontinuité, aussi appelée phénomène de « saut » et illustrée par chaque flèche verticale sur la figure 1.2, est de plus en plus marquée en fonction du niveau de l'excitation, ce qui est caractéristique d'un système vibratoire non-linéaire. Le déplacement au centre de la poutre dépend également du sens de balayage de l'excitation sinus balayé, représenté par des flèches sur la figure 1.2. Le comportement vibratoire de la poutre dépend ainsi de l'historique d'excitation de la structure : il s'agit d'un phénomène hystérétique caractéristique des structures non-linéaires soumises à une excitation sinusoïdale monopoint.

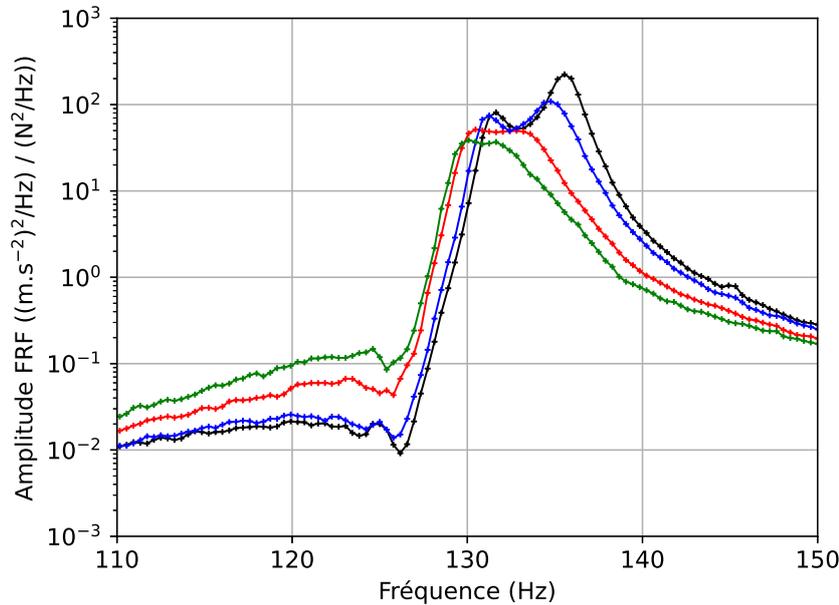


FIGURE 1.3 – FRF pour la maquette industrielle HB2 (chapitres 4 et 5) issues d'excitations aléatoires monopoint de niveaux 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

L'un des phénomènes également observés en dynamique non-linéaire est la dépendance de l'amortissement au niveau d'excitation. Dans un cadre linéaire, le niveau maximal de réponse à la résonance est fixé par l'amortissement et il est linéairement dépendant du niveau d'excitation d'après le théorème de superposition. La fonction de réponse fréquentielle (FRF), qui correspond à un signal de réponse divisé par le signal d'excitation, est ainsi indépendante du niveau d'excitation. De manière analogue, les fréquences de résonance des structures non-linéaires peuvent évoluer avec le niveau d'excitation. La figure 1.3 présente la fonction de réponse fréquentielle expérimentale de la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) qui fait l'objet des chapitres 4 et 5 de ce manuscrit de thèse. La non-linéarité de la maquette industrielle HB2 provient du frottement entre deux sous ensemble de la structure (voir chapitre 4). Les mesures correspondant à quatre niveaux d'excitation sont tracées pour des signaux aléatoires de DSP constante sur la bande de fréquence [50-1000] Hz. Une diminution du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences, notamment pour le mode originalement situé à 136 Hz. Ces phénomènes traduisent une augmentation de la dissipation de la structure avec le niveau d'excitation ainsi qu'un adoucissement du système, ce qui est incompatible avec une modélisation linéaire.

Pour résumer, des phénomènes non-linéaires peuvent être observés expérimentalement sur des structures industrielles et plus particulièrement pour des applications CEA. Ils se caractérisent par :

- la dépendance de la dissipation au niveau d'excitation,
- la dépendance des fréquences de résonance au niveau d'excitation,
- les réponses fréquentielles discontinues,
- les phénomènes hystérétiques,
- l'apparition de réponses harmoniques d'ordres supérieurs.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, les phénomènes vibratoires de structures soumises à des excitations aléatoires multipoints sont recherchés. Les observations expérimentales de phénomènes non-linéaires justifient la nécessité de passer à une modélisation non-linéaire des structures dans le cadre de l'analyse vibratoire pour pouvoir comprendre et simuler ces phénomènes observés lors des essais réalisés. La prédiction par la simulation nécessite donc la mise en place de techniques numériques permettant le calcul de réponses non-linéaires pour divers types d'excitation. Ces techniques sont explicitées dans la section suivante.

1.3 Méthodes de simulations non-linéaires

Pour retranscrire par la simulation les phénomènes non-linéaires précédemment cités, il faut introduire dans l'équation dynamique du système une force non-linéaire. De manière très générale, l'équation dynamique d'un système mécanique non-linéaire discret peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1.34)$$

où les notations employées sont les mêmes que dans la section 1.1. Les non-linéarités du système sont représentées sous la forme d'efforts extérieurs dans le vecteur $\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, ils dépendent a priori des vecteurs déplacement \mathbf{x} et vitesse $\dot{\mathbf{x}}$.

Le système mécanique discret étudié peut être indifféremment isostatique ou hyperstatique et chaque degré de liberté est associé à une masse. Ainsi, les matrices \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} sont inversibles en l'absence de modes de corps rigide. Par la suite, seule la réponse vibratoire stationnaire et forcée de tels systèmes non-linéaires est recherchée. Cette réponse peut être périodique ou apériodique. Dans le cadre de ces travaux de thèse, seules les réponses périodiques sont étudiées. Les méthodes à mettre en œuvre afin de calculer des solutions apériodiques diffèrent largement des méthodes de résolution pour les solutions périodiques.

À partir de la formulation du problème (1.34), de nombreuses approches existent et sont plus ou moins adaptées selon le type de problème traité. Il faut en premier temps faire la distinction entre les excitations sinusoïdales d'une part et les excitations aléatoires d'autre part. Globalement, les méthodes numériques pour résoudre des problèmes de dynamique non-linéaire sont plus développées

dans le cadre de systèmes soumis à une excitation sinusoïdale. En effet, la prise en compte d'une excitation aléatoire est plus délicate à traiter. Ce chapitre résume succinctement les différentes méthodes numériques adaptées pour les deux types d'excitations (sinusoïdale et aléatoire) même si uniquement l'excitation aléatoire multipoints est étudiée dans le cadre de ces travaux de thèse. La comparaison des différentes techniques numériques de résolution du problème non-linéaire a été effectuée dans de précédents travaux de thèse [8, 58].

Concernant la résolution de problèmes non-linéaires soumis à des excitations aléatoires, il existe plusieurs méthodes de résolution : la méthode de Fokker-Planck [56, 64], la méthode de perturbation [25], ou encore la méthode de moyenne stochastique [57]. Ces méthodes, limitées au cadre de faibles non-linéarités, sont des exemples connus de la littérature. Une approche plus générale consiste à résoudre les équations en utilisant une trajectoire de l'excitation. Dans le cadre de cette thèse, les travaux de Shinozuka [62, 63] sont utilisés et permettent de décrire sous certaines conditions l'excitation aléatoire multipoints sous la forme de série de Fourier. Dès lors, le problème dynamique non-linéaire est adapté à un formalisme plus classique dans lequel la source d'excitation est périodique, puisque décrite par une série de Fourier tronquée.

Les deux types d'excitations (sinusoïdale et aléatoire) sont donc modélisés par des signaux périodiques, seules les solutions périodiques engendrées par ces excitations sont recherchées dans le cadre de ces travaux de thèse. Pour trouver les solutions périodiques de l'équation non-linéaire (1.34) avec une excitation périodique, plusieurs méthodes numériques ont été développées [41, 69]. Ces méthodes peuvent être rassemblées en deux catégories principales : une première catégorie rassemble les méthodes dites « temporelles » utilisant un schéma d'intégration temporelle et la seconde catégorie rassemble les méthodes dites « d'approximation » de la solution sous une forme prédéterminée. Ces deux catégories sont présentées dans les parties suivantes et sont tirées principalement de [8, 58].

1.3.1 Méthodes temporelles

Pour les méthodes basées sur une approche temporelle, l'équation (1.34) est mise sous la forme d'équation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})) \end{Bmatrix} \quad (1.35)$$

Intégration temporelle directe

À partir d'un état initial $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$, l'équation (1.35) peut être intégrée pour trouver l'état du système à n'importe quel temps $t > 0$. D'un point de vue numérique, il faut utiliser un schéma d'intégration temporel couplé à une méthode de résolution non-linéaire.

Les schémas d'intégration consistent à exprimer la dérivée temporelle d'un état à partir de la connaissance des autres états temporels. Les schémas d'intégration se séparent en 2 grandes catégories :

- les schémas explicites : l'expression de la dérivée à l'instant t_{i+1} ne dépend que des états aux instants précédents [15],
- les schémas implicites : l'expression de la dérivée à l'instant t_{i+1} dépend des états antérieurs et de l'état à l'instant t_{i+1} lui-même [65].

L'intervalle de temps entre deux instants est noté h :

$$h = t_{i+1} - t_i \quad (1.36)$$

Cet intervalle peut être constant ou variable selon le schéma d'intégration choisi. Par la suite, il est considéré constant, sans perdre la généralité du propos. L'état du système à l'instant t_i est noté avec un indice i :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(t_i) \\ \dot{\mathbf{x}}(t_i) \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Tout schéma d'intégration peut s'écrire comme une combinaison linéaire des valeurs du vecteur d'état aux instants précédents et actuel :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad (1.38)$$

Beaucoup de schémas d'intégration existent. Dans cette partie, seul le schéma générique de Newmark, qui est l'un des schémas les plus utilisés, est brièvement présenté. Il est paramétré par deux constantes (γ, β) et par le pas de temps h . Il est généralement présenté sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i + h \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \\ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1.39)$$

Une fois le schéma fixé, l'état du système à l'instant $i+1$ est entièrement déterminé par la connaissance de l'état à l'instant i et par l'accélération à l'instant $i+1$. Pour calculer cette accélération $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$, il faut écrire l'équation de la dynamique à l'instant $i+1$:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) \quad (1.40)$$

En remplaçant les termes \mathbf{x}_{i+1} et $\dot{\mathbf{x}}_{i+1}$ par leur expression donnée par le schéma d'intégration (donné par l'équation (1.39)), l'équation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} (\mathbf{M} + \gamma h \mathbf{D} + \beta h^2 \mathbf{K}) \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} &= -\mathbf{D} (\dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{K} \left(\mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i \right) \\ &\quad + \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Dans le cas d'un système linéaire (c.a.d., le cas où \mathbf{F}_{nl} est nul), l'équation (1.39) est un système linéaire qui permet de déterminer \mathbf{x}_{i+1} . Dans le cas où \mathbf{F}_{nl} est une fonction non-linéaire, le terme non-linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_{i+1}, \dot{\mathbf{x}}_{i+1}) &= \mathbf{F}_{\text{nl}} \left(\left\{ \mathbf{x}_i + h \dot{\mathbf{x}}_i + h^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta h^2 \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right\}, \left\{ \dot{\mathbf{x}}_i + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma h \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right\} \right) \\ &= \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ainsi, en supposant l'état à l'instant i connu, une équation non-linéaire en $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$ est obtenue :

$$\mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} - \mathbf{F}_{\text{excit}} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = 0 \quad (1.43)$$

où les variables \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 sont définies par :

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{M} + \gamma h \mathbf{D} + \beta h^2 \mathbf{K} \quad (1.44)$$

$$\mathbf{S}_2 = [\{ \mathbf{K} \} \quad \{ \mathbf{D} + h \mathbf{K} \} \quad \{ h(1 - \gamma) \mathbf{D} + h^2 (\frac{1}{2} - \beta) \mathbf{K} \}] \quad (1.45)$$

À chaque pas de temps, un algorithme de Newton est mis en place pour résoudre le problème (1.43). L'itération initiale est donnée par la solution du problème linéaire (avec $\tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}}$ nul) :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(0)} = -\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} + \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{F}_{\text{excit}} \quad (1.46)$$

Ensuite, en notant $\mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}} \mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right)$, la matrice jacobienne de la fonction \mathbf{H} par rapport à $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$, la correction de l'algorithme de Newton s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k+1)} = \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} - \left[\mathbf{J}_{\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}} \mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \right]^{-1} \mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \quad (1.47)$$

Une fois la précision requise atteinte sur la valeur du résidu $\mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \right)$, la valeur de $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)}$ est sauvegardée :

$$\text{lorsque } \mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \right) < \varepsilon, \quad \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} = \ddot{\mathbf{x}}_{i+1}^{(k)} \quad (1.48)$$

Les valeurs de la position et de la vitesse à l'instant $i + 1$ peuvent alors être calculées en suivant le schéma d'intégration donné par l'équation (1.39) :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{i+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_i + h \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_i + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) \\ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_i + \gamma \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1.49)$$

L'état du système à l'instant $i + 1$ est alors parfaitement défini. De manière itérative, la réponse dynamique temporelle de la structure est construite progressivement d'instant en instant. Les résultats obtenus dépendent des paramètres du schéma d'intégration, du pas de temps h et de la précision demandée sur l'algorithme de Newton. Il est à noter que des procédures existent pour adapter le pas

de temps temporel à l'évolution de l'état $[\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i]$ afin de minimiser l'erreur d'intégration sans trop allonger le temps de calcul.

L'intégration temporelle permet donc de calculer la réponse stationnaire ou non d'un système non-linéaire. La façon de procéder la plus directe est de partir d'un état initial arbitraire (usuellement $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0] = [\mathbf{0}, \mathbf{0}]$) et d'imposer une excitation sinusoïdale de pulsation ω constante. La réponse transitoire du système puis la réponse stationnaire sont alors calculées.

Cette méthode a l'avantage d'être directement implémentée dans les codes éléments finis commerciaux mais elle a plusieurs inconvénients majeurs. Tout d'abord, le temps de calcul peut être extrêmement long pour le passage d'un état transitoire à la réponse stationnaire. Ensuite, il s'agit de la réponse stationnaire qui est calculée mais en cas de solution multiples, une seule est accessible alors que la section 1.2 montre des phénomènes d'hystérésis révélateurs de plusieurs solutions stables.

Méthode de tir

Pour remédier aux défauts de l'intégration temporelle, une méthode « de tir » [48] peut être envisagée. Cette méthode permet de trouver un état stationnaire sans avoir à attendre l'extinction des transitoires. Elle est basée sur l'idée qu'une solution $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$ est stationnaire et périodique si la solution au bout d'une période d'excitation donnée est identique à l'état initial :

$$[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] \left(t = \frac{2\pi}{\Omega} \right) = [\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] (t = 0). \quad (1.50)$$

La variable T représente la période d'oscillation et la variable \mathbf{x}_T la solution à l'instant T .

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \mathbf{x}_T = \mathbf{x} (t = T) \quad (1.51)$$

Pour un système dynamique défini, avec un schéma d'intégration fixé, l'évolution de l'état $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$ ne dépend que de l'état initial $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$. Ainsi, en se plaçant à $t = T$, si $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$, alors l'évolution de l'état $[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}]$ sur l'intervalle de temps $[T, 2T]$ est exactement la même que sur l'intervalle $[0, T]$. Dans ce contexte d'intégration temporelle numérique, la condition $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$ est ainsi une condition nécessaire et suffisante de périodicité de la solution.

Comme l'équation dynamique (1.35) et le schéma d'intégration donné par l'équation (1.38) sont fixés, l'état initial détermine intégralement la solution $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T]$. Trouver la solution stationnaire du problème (1.35) revient ainsi à trouver des conditions initiales $[\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$ telles que $[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] = [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]$. L'équation (1.34) se réécrit ainsi comme un problème d'optimisation non-linéaire :

$$\mathbf{H}(\Omega, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) = \|[\mathbf{x}_T, \dot{\mathbf{x}}_T] - [\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0]\|^2 = \mathbf{0} \quad (1.52)$$

Cette méthode présente l'avantage que la réponse temporelle du système n'est calculée que sur une seule période du signal d'excitation pour chaque itération. Au lieu d'attendre la fin d'un régime transitoire,

la convergence se fait directement vers le régime stationnaire. De plus la formulation (1.52), sous la forme d'un problème d'optimisation, permet de mettre en place une méthode de continuation. La continuation permet de suivre des branches de solution et d'avoir éventuellement accès à plusieurs réponses stationnaires pour une même fréquence d'excitation.

Méthode des différences finies

La méthode de tir présentée précédemment permet de transformer la recherche de solution périodique de l'équation dynamique en un problème d'optimisation qui utilise l'intégration temporelle. Cependant, l'intégration temporelle d'un problème non-linéaire fait également intervenir un problème d'optimisation. Il existe une alternative à la logique de la méthode de tir qui permet de regrouper les problèmes d'optimisation en un seul système. Il s'agit de la méthode des différences finies [55].

Le schéma d'intégration est de nouveau supposé fixé. À chaque instant t_{i+1} , l'intégration temporelle consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant en $\ddot{\mathbf{x}}_{i+1}$:

$$\mathbf{H} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} - \mathbf{F}_{\text{excit}} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{0} \quad (1.53)$$

Cette forme, introduite dans le cadre du schéma d'intégration de Newmark, est en réalité généralisable à tout schéma d'intégration. La condition de périodicité s'écrit également en accélération :

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{x}}_0 \quad (1.54)$$

Le pas d'intégration est défini comme une fraction de la période :

$$h = \frac{T}{n_T} \quad (1.55)$$

où n_T représente le nombre de segments dans une période. En reprenant l'expression (1.53), le problème complet de recherche d'une solution périodique du schéma d'intégration peut alors s'écrire par le

système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \ddot{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_1 \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_1) \\ \dots \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \dot{\mathbf{x}}_i \\ \ddot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{i+1} \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_{i+1}) \\ \dots \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-2} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-2} \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_{n_T-1}) \\ \mathbf{S}_1 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{S}_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{F}}_{\text{nl}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n_T-1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{n_T-1} \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{x}}_0 \right) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t_0) \end{array} \right. \quad (1.56)$$

Il s'agit alors d'un problème à $3 \cdot n \cdot n_T$ inconnues (avec n le nombre de degrés de liberté du problème discret). Le système (1.56) contient $n \cdot n_T$ équations non-linéaires auxquelles les relations linéaires du schéma d'intégration suivantes sont ajoutées :

$$\mathbf{x}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{x}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad \forall i \in \llbracket 0, n_T - 1 \rrbracket \quad (1.57)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{i+1} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \dot{\mathbf{x}}_{i+1-j} - h \sum_{j=0}^m \beta_j \ddot{\mathbf{x}}_{i+1-j} \quad \forall i \in \llbracket 0, n_T - 1 \rrbracket \quad (1.58)$$

Pour ces relations, la périodicité de la solution est également prise en compte. Si l'indice $i + 1 - j$ est négatif, il est remplacé par $i + 1 - j + n_T$. Il y a ainsi $2 \cdot n \cdot n_T$ relations supplémentaires. Il s'agit alors d'un problème d'optimisation de taille $3 \cdot n \cdot n_T$ (la taille du problème non-linéaire est $n \cdot n_T$). Le problème est dépendant de la pulsation Ω à travers le pas de temps qui lui est inversement proportionnel ($h = 2\pi/\Omega$). À l'instar du problème d'optimisation obtenu par la méthode de tir (voir l'équation (1.52)), le problème d'optimisation obtenu par la méthode des différences finies peut être traité par une méthode de continuation (non explicitée dans ce mémoire de thèse). Une des limites de cette méthode est la taille du système obtenu qui peut s'avérer importante afin d'obtenir une bonne précision. Cette méthode devient peu adaptée lorsque la réponse présente des gradients importants ou des composantes moyenne ou haute fréquence prononcées.

1.3.2 Méthodes d'approximation

Afin d'éviter le calcul du régime transitoire, de nombreuses méthodes se sont concentrées sur l'approche directe du régime permanent, à l'instar de la méthode de tir présentée dans la partie 1.3.1. Historiquement, les premières méthodes développées sont celles des perturbations, qui cherchent la

solution sous la forme d'une perturbation de la solution du système linéaire. De plus, leur domaine de validité est limité au voisinage du paramètre (une fréquence de résonance par exemple) autour duquel l'étude perturbative est effectuée. De nombreux exemples de ces méthodes sont présents dans la littérature [40]. Elles ont l'avantage de donner des solutions analytiques, mais leur adaptation à des problèmes industriels reste difficile.

Méthode de l'équilibrage harmonique

La méthode de l'équilibrage harmonique est la méthode employée dans le cadre de ces travaux de thèse afin de prédire et de simuler les réponses vibratoires non-linéaires de structures à des excitations aléatoires multipoints. Elle appartient à la catégorie des méthodes fréquentielles car elle développe la solution sous forme d'une série de Fourier. Le principe de base de la méthode de l'équilibrage harmonique (ou méthode HBM pour « Harmonic Balance Method ») incrémentale repose sur une méthode itérative de résolution de Newton-Raphson associée à la procédure de Galerkin (projection de la solution sur l'espace des fonctions trigonométriques). La mise en place de ces deux procédures permet la résolution algébrique d'un système non-linéaire pour lequel les inconnues sont les coefficients de Fourier de la solution.

La méthode de l'équilibrage harmonique [61, 7] répond au même objectif que la méthode de tir présentée en partie 1.3.1 : calculer la réponse stationnaire de l'équation dynamique non-linéaire (1.34) sans calculer sa réponse transitoire. Pour autant, à l'opposée de la méthode de tir, elle suppose un choix initial de la forme de la solution vibratoire. Comme une réponse périodique de pulsation Ω est recherchée, elle peut s'exprimer sous la forme d'une série de Fourier :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{B}_n \cos(n\Omega t) + \mathbf{A}_n \sin(n\Omega t)) \quad (1.59)$$

L'idée de la méthode est alors de tronquer cette série de Fourier et ainsi passer d'une fonction inconnue, continue en temps, à un nombre discret de variables inconnues. Il s'agit d'une approximation de la solution du problème à l'ordre p :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{n=1}^p (\mathbf{B}_n \cos(n\Omega t) + \mathbf{A}_n \sin(n\Omega t)) \quad (1.60)$$

Les termes d'excitation et non-linéaire sont également écrits dans cette base de Fourier :

$$\mathbf{F}_{nl}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^p (\mathbf{C}_n \cos(n\Omega t) + \mathbf{S}_n \sin(n\Omega t)) \quad (1.61)$$

$$\mathbf{F}_{excit}(t) = \mathbf{C}_{0,excit} + \sum_{n=1}^p (\mathbf{C}_{n,excit} \cos(n\Omega t) + \mathbf{S}_{n,excit} \sin(n\Omega t)) \quad (1.62)$$

Le problème s'écrit alors de manière matricielle entre les coefficients de Fourier :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_{0,excit} + \mathbf{C}_0 \quad (1.63)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} & -n\Omega\mathbf{D} \\ n\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n \\ \mathbf{C}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{n,excit} \\ \mathbf{C}_{n,excit} \end{bmatrix} \quad \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad (1.64)$$

Il reste désormais à exprimer les coefficients de Fourier de la force non-linéaire $(\mathbf{C}_0, (\mathbf{C}_n, \mathbf{S}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$ en fonction des coefficients $(\mathbf{B}_0, (\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$. Il existe parfois des relations analytiques entre ces termes mais de manière générale il peut être très difficile, voire impossible, de les déterminer. Une alternative très efficace à la détermination de ces relations analytiques est la méthode dénommée « Alternating Frequency-Time Method » (méthode AFT) [6]. Cette méthode consiste à basculer dans le domaine temporel pour y calculer la force non-linéaire avant de revenir dans l'espace de Fourier. Elle est résumée par le schéma suivant où FFT désigne la Transformée de Fourier Rapide (« Fast Fourier Transform ») :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_p \mathbf{B}_p] \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{F}_{nl}(t) \xrightarrow{\text{FFT}} [\mathbf{C}_0 \mathbf{S}_1 \mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_p \mathbf{C}_p] \quad (1.65)$$

Il existe alors une relation déterministe entre les coefficients de Fourier de la solution \mathbf{x} et ceux de la force non-linéaire \mathbf{F}_{nl} . L'équation (1.34) peut ainsi se mettre sous la forme d'un problème non-linéaire discret :

$$\mathbf{H}(\Omega, [\mathbf{B}_0 \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_p \mathbf{B}_p]) = \mathbf{0} \quad (1.66)$$

La méthode de l'équilibrage harmonique est au cœur de ces travaux de thèse. Par le passé, cette méthode a fait preuve d'efficacité pour traiter des problèmes de dynamique non-linéaire à échelle industrielle. Des travaux ont été réalisés par Claeys et al. pour démontrer son intérêt sur une structure industrielle munie de lames frottantes sollicitée par une excitation sinusoïdale [8] ainsi que par Roncen et al. pour démontrer son intérêt sur une structure industrielle sollicitée par une excitation aléatoire et munie à la fois de lames frottantes et à la fois d'amortisseurs non-linéaires composés d'élastomères [58]. Dans ces travaux de thèse, la méthode de l'équilibrage harmonique est utilisée dans un nouveau cas d'application, celui des excitations aléatoires multipoints. Par conséquent, l'un des enjeux de ces travaux de thèse est de proposer une extension des techniques de l'équilibrage harmonique déjà existantes à ce type d'excitation.

1.4 Réduction de modèle

Une des problématiques numériques de l'étude de maquettes industrielles de grande envergure, mettant en jeu différentes physiques et différents comportements linéaires ou non-linéaires, est de devoir discrétiser finement la structure complète par éléments finis. Par exemple, l'aviation civile s'intéresse au comportement dynamique de l'avion complet mais également au comportement dynamique de chacun des éléments principaux de l'avion (ailes, fuselage, train d'atterrissage, etc.). Une telle structure assemblée possède donc un très grand nombre de degrés de liberté pouvant aisément atteindre plusieurs millions de degrés de liberté. La question du temps de calcul et de la résolution numérique

d'une équation dynamique, éventuellement non-linéaire, se pose. De plus, l'introduction de méthodes numériques identifiées dans la partie 1.3, engendre d'autant plus de coût de calcul.

L'objectif de cette partie est donc d'exposer diverses approches dont l'objectif est de réduire la taille, c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté d'un modèle éléments finis tout en conservant au mieux le comportement mécanique du modèle complet.

Les méthodes les plus courantes de réduction de modèle sont la condensation statique et la condensation modale, présentés en section 1.4.1. L'une conserve exactement le comportement statique du modèle alors que l'autre conserve le comportement dynamique. La sous-structuration est une stratégie courante pour réduire la taille d'un modèle d'assemblage tout en conservant au maximum les comportements statique et dynamique du modèle complet. Elle consiste à séparer le modèle complet en sous-structures, à condenser de manière statique et modale les modèles de sous-structures puis à assembler tous les vecteurs de réduction pour obtenir un modèle réduit d'assemblage. Les trois principales méthodes historiques de sous-structuration sont présentées à la section 1.4.2 : la méthode de Craig et Bampton à interface fixe et les méthodes de Mac Neal et Craig-Chang à interface libre. Toutes ces méthodes sont décrites dans la plupart des ouvrages de référence autour de la méthode des éléments finis, cette étude se base sur les ouvrages de J.-F. Imbert [29] et celui de A. Girard et N. Roy [19]. Depuis la version 6.10, le logiciel ABAQUS propose une méthode de sous-structuration à interface hybride. Cet algorithme de sous-structuration a été breveté [35] par Dassault Système qui commercialise le logiciel ABAQUS, il est présenté en fin de cette section.

Toutes les méthodes présentées dans cette partie sont des méthodes dites « de Galerkin ». Elles consistent en une projection sur un espace vectoriel de l'équation dynamique non-linéaire :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\text{excit}} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (1.67)$$

1.4.1 Méthodes de condensation

Condensation statique

La condensation statique ou dite de Guyan [23] consiste à projeter l'équation dynamique (1.67) sur une base constituée des vecteurs obtenus en imposant un déplacement statique unitaire sur un degré de liberté. Tout d'abord, les degrés de liberté du modèle complet sont réordonnés et séparés en deux catégories : ceux qui seront retenus dans la condensation notés avec un indice r et ceux qui seront éliminés, notés avec un indice e . Dans cette nouvelle base réordonnée, le problème aux valeurs propres associé à l'équation (1.67) se réécrit ainsi :

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ee} & \mathbf{M}_{er} \\ \mathbf{M}_{er}^T & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{K}_{er}^T & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_e \\ \mathbf{0}_r \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

Pour calculer les vecteurs Ψ_r de la base de réduction, le déplacement d'un degré de liberté retenu est imposé unitaire, le déplacement des autres degrés de liberté retenus est imposé nul et les degrés de

liberté éliminés ne sont soumis à aucun effort. En suivant cette définition, l'équilibre statique suivant dans la base complète s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{K}_{er}^T & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Psi} = \{\boldsymbol{\Psi}_r\} = \begin{bmatrix} \{\boldsymbol{\Psi}_{r,e}\} \\ \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

où \mathbf{I}_d désigne la matrice identité. De ces équations, l'expression de la base de réduction de la condensation statique s'écrit :

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{er} \\ \mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

ce qui donne une relation linéaire entre le modèle complet et le modèle réduit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_e \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{x}_r \quad (1.71)$$

Cette condensation n'a d'intérêt que pour des calculs statiques de grande taille, et lorsque la réduction de degrés de liberté est massive, car les matrices obtenues sont pleines à l'inverse des matrices initiales généralement creuses. De plus, la méthode introduit des erreurs liées à la capacité des degrés de liberté retenus à représenter les formes propres recherchées. À l'inverse, les propriétés statiques de raideur sont conservées. Avec l'efficacité des méthodes de sous-structurations présentées dans la partie 1.4.2, la condensation de Guyan n'est pratiquement plus utilisée. Elle présente néanmoins un mécanisme qui se retrouve dans toutes les autres méthodes présentées ci-après.

Condensation dynamique

La condensation dynamique, aussi appelée projection modale, consiste à projeter l'équation dynamique non-linéaire (1.67) sur les modes propres du système $\boldsymbol{\Phi}_i$ qui ont été introduits en partie 1.1. La base modale est tronquée à un nombre fini N_m . Usuellement, les premiers modes propres sont conservés jusqu'à atteindre la borne supérieure des fréquences d'excitation étudiées. Dans le cadre des études non-linéaires, comme il peut y avoir des réponses à des harmoniques d'ordre supérieur, il est intéressant de conserver plus de modes que dans le cadre des études linéaires. L'équation dynamique du modèle réduit devient alors :

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\Phi} \dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}_{\text{excit}} + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (1.72)$$

où $\boldsymbol{\Phi} = \{\boldsymbol{\Phi}_i\}_{i=1..N_m}$ et $\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}$

Comme la partie 1.1 le montre, la base des modes propres diagonalise conjointement les matrices de masse, de raideur et d'amortissement. Les équations découplées suivantes sont ainsi obtenues :

$$\forall i \in [1, N_m] \quad \ddot{\mathbf{q}}_i + 2\xi_i \Omega_i \dot{\mathbf{q}}_i + \Omega_i^2 \mathbf{q}_i = \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{F}_{\text{excit}} + \boldsymbol{\Phi}_i^T \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_i) \quad (1.73)$$

Les vecteurs propres de ce modèle réduit sont ainsi les vecteurs unitaires qui sont associées aux pulsations propres Ω_i et correspondent ainsi exactement aux modes propres du modèle complet. Cette projection conserve la dynamique du système : par construction, les modes propres de la structure condensée ont les mêmes amplitudes modales que celles des modes propres du modèle complet. Le comportement statique n'est, quant à lui, plus conservé.

1.4.2 Méthodes de sous-structuration

La sous-structuration est une façon de combiner condensations statique et modale. Les méthodes de sous-structuration ont été créées pour répondre au problème de la synthèse modale : comment déterminer le comportement dynamique d'un assemblage dont les comportements statique et dynamique de chacune de ses sous-structures sont connus. Il s'agit alors de réaliser un modèle réduit de chaque sous-structure qui ait un bon comportement dynamique et qui puisse s'interfacer avec d'autres modèles réduits. Cette interface est réalisée grâce à des modes statiques d'interface. Ensuite les méthodes de sous-structuration proposent des méthodes d'assemblage des sous-structures entre elles. Dans la perspective de réduction de modèle de ce chapitre, ces méthodes d'assemblage ne sont pas étudiées. Le modèle complet est considéré comme une seule sous-structure qui est réduite en conservant les comportements statique et dynamique. Il existe de nombreuses méthodes de sous-structuration [14]. Quatre de ces méthodes de sous-structuration sont présentées dans cette partie :

- la méthode à interface fixe de Craig et Bampton [10],
- la méthode à interface libre de Mac Neal [39],
- la méthode à interface libre Craig Chang [11],
- la méthode à interface hybride implémentée dans le code éléments finis ABAQUS [35].

Sous-structuration à interface fixe

Dans la méthode de Craig et Bampton [10], pour une sous-structure donnée, la base de réduction est formée à partir d'un ensemble tronqué de modes propres Φ_{CB} à interface fixe : ces modes propres de la structure sont calculés en considérant les degrés de liberté frontière encastres. La base de réduction est complétée par des modes statiques de liaison $\Psi_r = -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er}$ précédemment définis (voir partie 1.4.1) : ces modes sont obtenus en calculant la déformée statique de la structure lorsqu'un degré de liberté frontière est imposé à 1, tous les autres étant imposés à 0.

Il faut alors réaliser une première distinction entre les degrés de liberté internes de la structure i et les degrés de liberté de liaison l . Les déplacements internes de la sous-structure sont liés linéairement aux degrés de liberté de liaison et aux p vecteurs des coordonnées modales :

$$\mathbf{x}_i = \Psi_r \mathbf{x}_l + \Phi_{CB} \mathbf{x}_p \quad (1.74)$$

Le passage du modèle complet au modèle réduit s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{ee}^{-1}\mathbf{K}_{er} & \Phi_{CB} \\ \mathbf{I}_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_l \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} \quad (1.75)$$

Ainsi les degrés de liberté retenus sont directement présents dans le modèle réduit, le comportement statique de la structure complète au niveau des degrés de liberté retenus est conservé exactement, comme pour une condensation statique. Les propriétés dynamiques du système sont aussi très bien conservées grâce à la conservation des modes dynamiques. La méthode de Craig et Bampton est ainsi la méthode de sous-structuration la plus largement employée dans le monde industriel, elle est notamment implémentée dans la plupart des codes de calculs éléments finis commerciaux.

Sous-structuration à interface libre

Les méthodes de Mac Neal [39, 29] et de Craig Chang [11, 19] utilisent les modes propres à interface libre Φ_p directement dans leur base de réduction. Cependant elles ne se basent pas sur les vecteurs statiques Ψ_r . Il faut introduire les vecteurs de flexibilité résiduelle $\mathbf{G}_{r,\text{res}}$ qui correspondent à la différence entre les vecteurs de flexibilité statique $\mathbf{G}_{r,0}$ et les vecteurs de flexibilité effective $\mathbf{G}_{r,p}$ des modes propres Φ_p . Les vecteurs de flexibilité statique $\mathbf{G}_{r,0}$ correspondent à la réponse de la sous-structure à un effort unitaire statique sur un degré de liberté r :

$$\mathbf{K} \mathbf{G}_{r,0} = \mathbf{1}_r \quad (1.76)$$

où $\mathbf{1}_r$ est le vecteur dont la $r^{\text{ième}}$ coordonnée vaut 1 et les autres coordonnées sont nulles.

Les vecteurs de flexibilité effective modale sont la projection des vecteurs $\mathbf{G}_{r,0}$ sur les modes propres Φ_p .

$$\mathbf{G}_{r,p} = \Phi_p^T \mathbf{G}_{r,0} \Phi_p \quad (1.77)$$

Les vecteurs de flexibilité résiduelle s'obtiennent par différence :

$$\mathbf{G}_{r,\text{res}} = \mathbf{G}_{r,0} - \sum_p \mathbf{G}_{r,p} \quad (1.78)$$

Le calcul des matrices de masse et de raideur des sous-structures réduites diffère selon la méthode employée. La méthode de Craig-Chang considère une matrice d'inertie résiduelle, qui associe une masse aux vecteurs $\mathbf{G}_{r,\text{res}}$, alors que la méthode de Mac Neal néglige cette inertie. Ces deux méthodes de sous-structuration à interface libre présentent l'avantage de conserver exactement les modes du modèle complet. Cependant, à l'inverse de la méthode de Craig et Bampton, les degrés de liberté retenus n'apparaissent pas directement dans la base de réduction. Les résultats de calculs ne peuvent ainsi pas être lus directement dans la base réduite.

De même, l'application d'un chargement ou d'un déplacement imposé ponctuel ne se fait pas simplement, il faut passer par une projection dans la base de réduction. Ces bases de réduction, même si elles répondent aux critères de fidélité du modèle complet, ne sont d'une part pas très pratiques d'utilisation et d'autre part ne sont généralement pas directement implémentées dans les codes éléments finis.

Sous-structuration à interface hybride

Le code éléments finis ABAQUS propose une méthode de sous-structuration à interface hybride. Cette méthode est une modification de la méthode de Craig et Bampton permettant de prendre en compte les modes de la structure à interface libre. L'algorithme fait l'objet d'un brevet Dassault Système [35] où il est détaillé.

Dans cette méthode de sous-structuration, les vecteurs de déplacement statique considérés Ψ_r sont ceux de la méthode de Craig et Bampton (déplacement imposé). Les modes Φ_p obtenus avec interface

libre sont ensuite considérés. Dans cette méthode, les modes Φ_{CB} obtenus avec interface fixe ou des modes obtenus avec certains degrés de liberté d'interface bloqués et d'autres libres (interface hybride) peuvent être pris en compte. Dans le cadre de la réduction de modèle avec une seule sous-structure, ce sont les modes Φ_p qui permettent d'obtenir la meilleure fidélité à la dynamique du modèle complet. L'idée de cette méthode est de se ramener dans le cadre de la méthode de Craig et Bampton à partir de ces vecteurs $\{\Psi_r, \Phi_p\}$. Les vecteurs statiques ne sont pas modifiés, par contre il faut annuler les déplacements aux interfaces pour les vecteurs Φ_p :

$$\Phi_p \rightarrow \tilde{\Phi}_p = \Phi_p - \sum_r \Phi_{p,r} \Psi_r = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{p,e} \\ \mathbf{0}_r \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

Les nouveaux vecteurs dynamiques $\tilde{\Phi}_p$ sont désormais nuls sur les degrés de liberté retenus, cependant, ils ne sont plus orthogonaux entre eux par rapport aux matrices de masse et raideur et même, rien n'assure qu'ils soient non-nuls et linéairement indépendants entre eux. Pour résoudre ce problème, un algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt est mis en place. Le produit scalaire considéré est $\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{v}$. L'algorithme d'orthogonalisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \tilde{\Phi}_1 \\ &\dots \\ \Phi_k &= \tilde{\Phi}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \tilde{\Phi}_k | \Phi_j \rangle \Phi_j \end{aligned} \quad (1.80)$$

Si un vecteur Φ_k est annulé par l'algorithme, il est éliminé de la base de réduction. Lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur est normalisé. Il est obtenu alors une base de réduction $[\Phi, \Psi]$ qui a exactement les mêmes propriétés que la base de réduction de Craig et Bampton. La différence est que les modes propres du modèle réduit sont cette fois-ci exactement ceux du modèle complet.

Cette dernière méthode combine tous les avantages des méthodes précédentes et présente surtout l'intérêt d'être déjà implémentée dans le code éléments finis ABAQUS. Elle permet de rendre compte de manière exacte de la réponse du modèle complet dans la gamme de fréquence couverte par la base modale. Cependant, lorsque des relations non-linéaires sont introduites, les vecteurs de réponse dynamiques sont modifiés et la réponse du modèle réduit n'est plus la même que celle du modèle complet. Cette méthode fut néanmoins utilisée dans le cadre d'une étude industrielle de dynamique non-linéaire pour les travaux de thèse précédemment développés au CEA [8, 58].

1.5 Modélisation d'une excitation aléatoire multipoints

Ces travaux de thèse se concentrent d'une part sur la simulation de la signature non-linéaire d'une structure et d'autre part sur la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints pour laquelle chaque terme d'excitation est potentiellement corrélé avec un autre. Pour ce faire, il existe deux grandes modélisations qui sont présentées dans cette partie : la modélisation issue des travaux de Shinozuka [62, 63] complétée par les travaux de Poirion et al. [49], ainsi que la modélisation selon la décomposition de Karhunen-Loève [38, 33].

1.5.1 Modélisations de Shinozuka et de Poirion

Cette partie détaille la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints issue des travaux de Shinozuka [62, 63] et complétée par les travaux de Poirion et al. [49].

L'idée principale de Shinozuka [62, 63] est d'approcher une excitation aléatoire multipoints réelle par une excitation aléatoire multipoints gaussienne simulée en vertu du théorème central limite. Cette approche se fait en simulant N_e sommes finies (de taille respective p) dont les fréquences sont équiréparties avec des phases aléatoires uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$. En d'autres termes, l'entier positif N_e représente dans ce manuscrit de thèse le nombre de points d'excitation concernés par l'excitation sur un domaine Ω . Le domaine Ω indique ainsi un domaine spatial. Concernant l'étude numérique de la poutre bi-encastree CEA donnée au chapitre 3, le domaine Ω est l'ensemble des abscisses des points situés sur la longueur de la poutre. Concernant l'étude numérique de la maquette industrielle HB2 donnée au chapitre 5, le domaine Ω est l'ensemble des degrés de liberté considérés dans le modèle éléments finis de la structure.

Dans ses travaux [63], Shinozuka démontre qu'une excitation aléatoire multipoints approchée par ces N_e séries possède les propriétés suivantes :

- la moyenne de chaque excitation aléatoire est nulle ;
- la fonction d'autocorrélation de chaque excitation temporelle simulée tend vers la fonction d'autocorrélation de l'excitation aléatoire multipoints réelle considérée à chaque point d'excitation du domaine Ω . En conséquence, en utilisant la relation de Wiener-Khintchine donnée par l'équation (1.27), la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de chaque excitation temporelle simulée tend vers la DSP de l'excitation aléatoire multipoints réelle considérée à chaque point d'excitation du domaine Ω ;
- la convergence de la fonction d'autocorrélation (de la DSP, respectivement) de chaque excitation temporelle simulée s'effectue en $1/p^2$ vers la fonction d'autocorrélation (de la DSP, respectivement) de l'excitation aléatoire multipoints réelle considérée à chaque point d'excitation.

Comme énoncé dans la partie 1.1.3, une excitation aléatoire monopoint peut être modélisée par sa description fréquentielle, la Densité Spectrale de Puissance, correspondant à la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de cette excitation temporelle. Dès lors, la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints se fait à partir de la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ (où ω indique la pulsation), qui est définie pour N_e excitations temporelles par :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1N_e}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2N_e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N_e1}(\omega) & S_{N_e2}(\omega) & \dots & S_{N_eN_e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.81)$$

où la fonction $S_{ii}(\omega)$ représente la DSP de l'excitation temporelle $f_i(t)$ (qui correspond à l'excitation temporelle multipoints définie au point d'excitation i dans le domaine Ω) et la fonction $S_{ij}(\omega)$

représente la Densité Spectrale Croisée entre les excitations temporelles $f_i(t)$ et $f_j(t)$ (qui correspond à l'excitation temporelle multipoints définie aux points d'excitation $j \neq i$). Grâce à la relation de Wiener-Khintchine donnée par l'équation (1.27), la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ est une matrice définie positive [63]. En utilisant la décomposition unique de Cholesky, la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ s'écrit :

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^*(\omega)^T \quad (1.82)$$

où la notation $.^*$ indique le complexe conjugué et la notation $.^T$ indique l'opérateur transposé. La matrice $\mathbf{H}(\omega)$ est une matrice triangulaire inférieure donnée par :

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ H_{N_e1}(\omega) & H_{N_e2}(\omega) & \dots & H_{N_eN_e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

où les coefficients $H_{ij}(\omega)$ sont déterminés avec les principaux mineurs de la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ [62]. L'excitation temporelle $f_k(t)$ est donnée par :

$$f_k(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p |H_{kl}(\omega_n)| \cos(\omega'_n t + \theta_{kl}(\omega_n) + \phi_{ln}) \right) \quad (1.84)$$

Les paramètres présents dans l'équation précédente (1.84) sont définis tels que :

- p est un entier positif non nul représentant la taille finie de chacune des séries de fonctions sinusoïdales pour chaque excitation temporelle. La partie 1.5.2 suggère d'utiliser l'entier p sous la forme d'une puissance de 2 afin d'utiliser la Transformée de Fourier Rapide (ou FFT pour «Fast Fourier Transform») ce qui permet de générer rapidement les séries [70] ;
- $\Delta\omega$ représente le pas de la plage de fréquences $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Il est défini par $\Delta\omega = (\omega_{max} - \omega_{min})/p$;
- ω_n correspond à la discrétisation fréquentielle [63]. Dans la partie 1.5.2, le choix de la discrétisation fréquentielle se pose suivant la discrétisation fréquentielle proposée dans les travaux de Shinozuka [62, 63] ou celle proposée dans tout algorithme de FFT [70] ;
- ω'_n défini par $\omega'_n = \omega_n + \delta\omega_n$ où $\delta\omega_i$ est une "petite" pulsation aléatoire suivant une loi uniforme sur un intervalle $\left[-\frac{\Delta\omega'}{2}, +\frac{\Delta\omega'}{2}\right]$ avec $\Delta\omega'$ choisi tel que $\Delta\omega' \ll \Delta\omega$. Cette petite pulsation est introduite pour éviter la périodicité de l'excitation simulée. Dans ces travaux de thèse, afin d'utiliser la méthode de l'équilibrage harmonique, c.a.d., afin de considérer les termes d'excitation sous la forme de série de Fourier, cette pulsation aléatoire est considérée comme nulle donc $\delta\omega_n = 0$ and $\omega'_n = \omega_n$;
- $\theta_{kl}(\omega_n)$ est défini par :

$$\theta_{kl}(\omega_n) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(H_{kl}(\omega_n))}{\Re(H_{kl}(\omega_n))} \right) \quad (1.85)$$

où \Im et \Re sont respectivement les parties imaginaire et réelle d'un nombre complexe. Puisque la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ est hermitienne, cela entraîne $\theta_{kk}(\omega) = 0$. Le déphasage entre les deux excitations temporelles $f_k(t)$ et $f_l(t)$ provient ainsi de la variable $\theta_{kl}(\omega_n)$;

- $\forall k \in \llbracket 1, N_e \rrbracket$, ϕ_{kn} sont des variables aléatoires indépendantes représentant la phase de chaque fonction sinusoïdale dans chacune des séries simulées. Ces variables aléatoires suivent une loi de distribution uniforme entre 0 et 2π . La partie aléatoire de l'excitation aléatoire multipoints provient de ces variables aléatoires.

En notations complexes, l'expression (1.84) devient :

$$f_k(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p H_{kl}(\omega_n) \exp(j\omega'_n t + \theta_{kl}(\omega_n) + \phi_{ln}) \right) \quad (1.86)$$

où j représente le nombre complexe $\sqrt{-1}$.

Dans leur modélisation [49], Poirion et al. ajoutent une nouvelle variable aléatoire indépendante par excitation pour pondérer l'amplitude de chaque fonction sinusoïdale :

$$f_k(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p Z_{ln} H_{kl}(\omega_n) \exp(j\omega'_n t + j\phi_{ln}) \right) \quad (1.87)$$

avec $Z_{ln} = \sqrt{-\log(U_{ln})}$ où les U_{ln} sont des variables aléatoires indépendantes et suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Cette modification par rapport à la modélisation de Shinozuka [62, 63] provient de la transformation de Box et Muller [4] suivante : soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la variable aléatoire $Y = \sqrt{-2\log(U_1)} \cos(2\pi U_2)$ suit une loi normale centrée réduite. Ainsi, Poirion et al. s'assurent que l'excitation aléatoire simulée est gaussienne quel que soit l'entier p , alors que pour la modélisation de Shinozuka et al. [62, 63], l'excitation est asymptotiquement gaussienne, c.a.d., pour $p \rightarrow \infty$.

1.5.2 Choix de la discrétisation fréquentielle

Pour p fixé, une trajectoire de l'excitation $f_k(t)$ peut être connue à partir de l'expression (1.87). Cependant, pour p relativement grand, le calcul de chacune des séries dans cette expression peut s'avérer très coûteux (en temps de calcul) et peu précis. Il faut alors réécrire ces expressions pour des instants t_n équidistants à l'aide d'une Transformée de Fourier Rapide.

De façon analogue à [32], $\mathbf{S}(\omega)$ est supposée nulle (au sens où chacun des coefficients de la matrice est identiquement nul) à l'extérieur d'un intervalle compact $[-f_m, +f_m]$. Alors, d'après le théorème de Shannon, il faut échantillonner en temps à une fréquence f_e qui doit être au moins deux fois supérieure à la fréquence maximale f_m de l'intervalle compact :

$$f_e \geq 2f_m \quad (1.88)$$

Le pas d'échantillonnage temporel est alors $h = 1/f_e$. Les instants de calcul de la trajectoire sont donc :

$$t_i = ih \quad \forall i \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad (1.89)$$

La durée de la trajectoire réalisée est ainsi $T = ph$.

Dès lors, il faut discrétiser le champ de fréquences $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ avec un certain formalisme. Dans cette partie, deux conventions différentes de discrétisation sont retenues :

- la discrétisation selon Shinozuka et al. [62, 63] qui sera présentée par la suite et qui est par ailleurs analogue à celle utilisée dans les travaux de Poirion et al. [49] ;
- la discrétisation telle qu'elle est présentée dans tout algorithme de FFT [70]. Dans le cadre de ces travaux de thèse, le code implémenté est écrit sous le langage Python qui utilise cette convention de discrétisation fréquentielle. Cette discrétisation sera présentée dans ce qui suit.

Discrétisation fréquentielle selon Shinozuka

Les points de discrétisation en fréquence sont obtenus par discrétisation de l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ avec le formalisme :

$$f_n = -\frac{f_e}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta p \quad \forall n \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad (1.90)$$

avec $\Delta p = f_e/p$. L'entier p est choisi comme étant un nombre pair en puissance de 2 pour permettre l'utilisation de l'algorithme de FFT.

La relation (1.87) reprise à l'instant discrétisé $t = t_i = ih = i\frac{1}{f_e}$ devient :

$$f_k(t_i) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp \left(j2\pi f_n i \frac{1}{f_e} + j\phi_{ln} \right) \right) \quad (1.91)$$

Avec le choix de discrétisation fréquentielle proposée par l'équation (1.90), il est obtenu :

$$f_k(t_i) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp \left(j2\pi \left(-\frac{f_e}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta p \right) i \frac{1}{f_e} + j\phi_{ln} \right) \right) \quad (1.92)$$

En notant que

$$\exp \left(j2\pi \left(-\frac{f_e}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta p \right) i \frac{1}{f_e} \right) = \exp(-j\pi i) \exp \left(j \frac{2\pi i}{f_e} \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{f_e}{p} \right) \quad (1.93)$$

et en séparant les termes indexés par l'indice n , l'expression (1.93) devient :

$$\exp \left(j2\pi \left(-\frac{f_e}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta p \right) i \frac{1}{f_e} \right) = \exp \left(j\pi i \left(-1 + \frac{1}{p} \right) \right) \exp \left(j2\pi n \frac{i}{p} \right) \quad (1.94)$$

L'expression (1.92) s'écrit alors :

$$f_k(t_i) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\exp \left(j\pi i \left(-1 + \frac{1}{p} \right) \right) \sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp(j\phi_{ln}) \exp \left(j2\pi n \frac{i}{p} \right) \right) \quad (1.95)$$

La somme sur n est une Transformée de Fourier Discrète (TFD) qui peut être calculée par mise en œuvre d'un algorithme de FFT :

$$f_k(t_i) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\exp \left(j\pi i \left(-1 + \frac{1}{p} \right) \right) \sum_{l=1}^k \mathbf{FFT}^{-1} (\mathbf{H}_{kl} \mathbf{Z}_l \exp(j\phi_l)) [i] \right) \quad (1.96)$$

où l'expression $\mathbf{x}[i]$ désigne le i -ième élément du vecteur \mathbf{x} . Cependant, les outils présents dans le langage Python ne permettent pas de calculer correctement la Transformée de Fourier Rapide Inverse (c.a.d., l'expression $\mathbf{FFT}^{-1}(\mathbf{x})[i]$) avec cette convention de discrétisation. La convention donnée par les travaux de Shinozuka n'est pas adaptée au code interne développé durant ces travaux de thèse. Une discrétisation fréquentielle selon un algorithme FFT comme présentée ci-dessous est adaptée dans ces travaux de thèse.

Discrétisation fréquentielle selon un algorithme de FFT

Les points de discrétisation en fréquence sont obtenus par discrétisation de l'intervalle $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ avec le formalisme :

$$f_n = \begin{cases} n\Delta p & \forall n \in \llbracket 0, (p/2) - 1 \rrbracket \\ -p\Delta p + n\Delta p & \forall n \in \llbracket (p/2), p - 1 \rrbracket \end{cases} \quad (1.97)$$

avec $\Delta p = f_e/p$. L'entier p est choisi comme étant un nombre pair en puissance de 2 pour respecter l'utilisation de l'algorithme de FFT.

La relation (1.87) reprise à l'instant discrétisé $t = t_i = ih = i\frac{1}{f_e}$ devient :

$$\begin{aligned} f_k(t_i) &= \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{\frac{p}{2}-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp \left(j2\pi f_n i \frac{1}{f_e} + j\phi_{ln} \right) \right) \\ &+ \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=\frac{p}{2}}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp \left(j2\pi f_n i \frac{1}{f_e} + j\phi_{ln} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.98)$$

En développant la discrétisation fréquentielle donnée par l'expression (1.97), il vient :

$$\begin{aligned} f_k(t_i) &= \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{\frac{p}{2}-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp \left(j2\pi i \frac{n}{p} \right) \exp(j\phi_{ln}) \right) \\ &+ \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=\frac{p}{2}}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp(-j2\pi i) \exp \left(j2\pi i \frac{n}{p} \right) \exp(j\phi_{ln}) \right) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Or, il est possible de reconnaître la relation suivante pour tout entier i :

$$\exp(-j2\pi i) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (1.100)$$

Les deux sommes se regroupent alors pour donner l'expression suivante :

$$f_k(t_i) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=0}^{p-1} Z_{ln} H_{kl}(2\pi f_n) \exp(j\phi_{ln}) \exp\left(j2\pi n \frac{i}{p}\right) \right) \quad (1.101)$$

Une somme en tant que terme de Transformée de Fourier Discrète (TFD) est identifiable. Cette somme peut être calculée par mise en œuvre d'un algorithme de FFT :

$$\begin{aligned} f_k(t_i) &= \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{FFT}^{-1} (\mathbf{H}_{kl} \mathbf{Z}_l \exp(j\phi_l)) [i] \right) \\ &= \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{H}_{kl} \mathbf{Z}_l \exp(j\phi_l) \right) [i] \right) \end{aligned} \quad (1.102)$$

Ainsi, le choix de la discrétisation fréquentielle telle qu'elle est présentée dans les outils disponibles dans tout algorithme de FFT [70] ainsi que le choix de l'entier p en tant que puissance de 2 permet d'accélérer la génération de signaux aléatoires corrélés grâce aux outils de Transformée de Fourier Rapide. Il est numériquement possible de simuler des signaux temporels aléatoires et corrélés pourvu que la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ soit connue.

1.5.3 Décomposition de Karhunen-Loève

Cette partie détaille la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints issue de la décomposition de Karhunen-Loève [38, 33]. Similaire à la modélisation de Shinozuka donnée dans la partie 1.5.1, l'idée principale est de simuler N_e sommes finies (de taille respective p) dont les fréquences sont équiréparties avec des phases aléatoires uniformément réparties sur $[0, 2\pi]$. Ces N_e sommes finies correspondent au nombre de points d'excitation concernés par l'effort aléatoire multipoints sollicitant la structure. Contrairement à la modélisation de Shinozuka, la décomposition de Karhunen-Loève ne se réalise pas dans la base canonique des points d'excitations mais dans une nouvelle base, la base de Karhunen-Loève, correspondant à la base des vecteurs propres de la matrice de densité spectrale $\mathbf{S}(\omega)$. Dans cette base, le vecteur temporel de l'excitation aléatoire multipoints $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ (voir équation (1.1)) s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sum_{k=1}^{N_e} \zeta_k(t) \mathbf{F}_k \quad (1.103)$$

où les variables $\zeta_k(t)$ et les vecteurs de propres de Karhunen-Loève \mathbf{F}_k sont définis dans cette section. Comme pour la modélisation de Shinozuka, la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints selon la décomposition de Karhunen-Loève se fait à partir de la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ donnée par l'équation (1.81). Afin de simplifier la modélisation proposée et pour faire le lien avec ce qui est proposée sur la maquette industrielle HB2 dans le chapitre 5, l'excitation aléatoire multipoints étudiée dans ces travaux de thèse est considérée comme identique pour tous les points d'excitation :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_e \rrbracket^2 \quad S_{ii}(\omega) = S_{jj}(\omega) = S(\omega) \quad (1.104)$$

L'excitation aléatoire multipoints est dès lors décrite par un niveau d'excitation $S(\omega)$ et une fonction de corrélation $C_{ij}(\omega)$ définie entre deux points d'excitation. La matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ s'écrit alors :

$$\mathbf{S}(\omega) = S(\omega)\mathbf{C}(\omega) = S(\omega) \begin{bmatrix} C_{11}(\omega) & C_{12}(\omega) & \dots & C_{1N_e}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & C_{22}(\omega) & \dots & C_{2N_e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_e1}(\omega) & C_{N_e2}(\omega) & \dots & C_{N_eN_e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.105)$$

Grâce à la relation de Wiener-Khintchine donnée par l'équation (1.27), la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ est une matrice hermitienne, c.a.d., $S_{ij}(\omega) = S_{ji}^*(\omega)$. Dès lors, en utilisant le théorème complexe spectral, $\mathbf{C}(\omega)$ possède N_e vecteurs propres indépendants $(\mathbf{F}_{\mathbf{k}})_{\forall \mathbf{k} \in \llbracket 1, N_e \rrbracket}$ associés à N_e valeurs propres réelles $(\lambda_{\mathbf{k}})_{\forall \mathbf{k} \in \llbracket 1, N_e \rrbracket}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_{12}(\omega) & \dots & C_{1N_e}(\omega) \\ C_{21}(\omega) & 1 & \dots & C_{2N_e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N_e1}(\omega) & C_{N_e2}(\omega) & \dots & 1 \end{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\omega) = \lambda_{\mathbf{k}}(\omega) \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\omega) \quad (1.106)$$

Ces vecteurs propres indépendants sont constants le long de la bande de fréquences d'intérêt si la fonction de corrélation décrivant l'excitation est indépendante de la fréquence. Ces vecteurs propres, aussi appelés modes de Karhunen-Loève (KL), sont choisis de façon à former une base orthonormale de vecteurs propres :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_e \rrbracket^2 \quad \mathbf{F}_{\mathbf{i}}(\omega)^T \mathbf{C}(\omega) \mathbf{F}_{\mathbf{j}}(\omega) = \delta_{ij} \quad (1.107)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

Afin d'illustrer un exemple concret de ces modes de KL, une fonction de corrélation spatiale et indépendante de la pulsation est considérée :

$$C_{ij}(\omega) = C_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{d}\right) \quad (1.108)$$

où les variables x_i et x_j représentent les abscisses de deux points d'excitation, et la variable d représente une distance caractéristique de corrélation. Ce type de corrélation est très répandue dans littérature et se retrouve dans de nombreux cas d'application pour les bruits de couche limite turbulente (voir [2] avec $\omega \rightarrow 0$). Ainsi, les quatre premiers modes de KL associés à un bruit de couche limite turbulente appliquée sur la poutre bi-encastée CEA (voir chapitres 2 et 3) en $N_e = 101$ points sont tracés sur la figure 1.4.

Dans la base de Karhunen-Loève, la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}^{\text{KL}}(\omega)$ peut s'écrire :

$$\mathbf{S}^{\text{KL}}(\omega) = S(\omega) \begin{bmatrix} \lambda_1(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{N_e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (1.109)$$

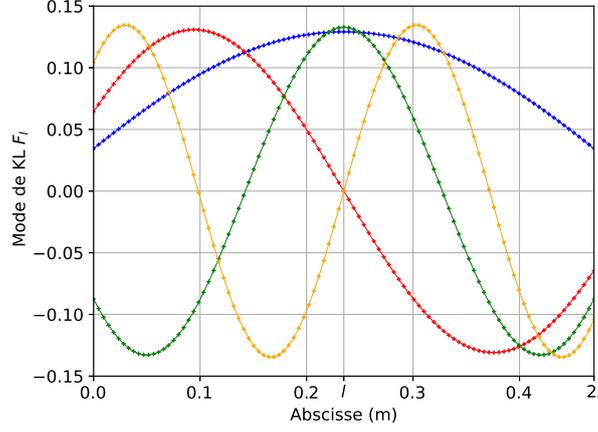


FIGURE 1.4 – Les quatre premiers modes de Karhunen-Loève (KL) associés à une fonction de corrélation indépendante de la pulsation d'une excitation aléatoire multipoints appliquée sur 101 points de la poutre bi-encastée CEA : 1^{er} mode de KL F_1 (bleu), 2^{ème} mode de KL F_2 (rouge), 3^{ème} mode de KL F_3 (vert) et 4^{ème} mode de KL F_4 (orange).

Dans cette base, la matrice $\mathbf{S}^{\text{KL}}(\omega)$ est diagonale avec des termes diagonaux positifs ou nuls. Dès lors, la décomposition de Cholesky peut être utilisée de nouveau et la matrice $\mathbf{S}^{\text{KL}}(\omega)$ peut se décomposer sous la forme :

$$\mathbf{S}^{\text{KL}}(\omega) = S(\omega) \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1(\omega)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2(\omega)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_{N_e}(\omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1(\omega)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2(\omega)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{\lambda_{N_e}(\omega)} \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Comme pour la modélisation de Shinozuka développée dans la section 1.5.1, chaque effort temporel $\zeta_k(t)$ dans la base de Karhunen-Loève est alors définie par :

$$\zeta_k(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \left(\sum_{n=1}^p \sqrt{S(\omega_n)} \sqrt{\lambda_k(\omega_n)} \cos(\omega_n t + \phi_{kn}) \right) \quad (1.111)$$

Les paramètres $\Delta\omega$, ω_n , ϕ_{kn} présents dans l'équation précédente (1.111) sont les mêmes que ceux utilisés dans la modélisation de Shinozuka (voir section 1.5.1). $S(\omega_n)$ est le niveau de l'excitation le long de la bande de fréquences d'intérêt. Grâce à l'équation (1.103), le vecteur temporel de l'excitation aléatoire multipoints $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{k=1}^{N_e} \left(\sum_{n=1}^p \sqrt{S(\omega_n)} \sqrt{\lambda_k(\omega_n)} \cos(\omega_n t + \phi_{kn}) \right) \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\omega_n) \quad (1.112)$$

L'information sur l'excitation aléatoire multipoints se retrouve ainsi dans les variables $S(\omega_n)$, $\lambda_k(\omega_n)$

et $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\omega_n)$ pour chaque point d'excitation et pour toute la bande de fréquences d'intérêt.

Comme pour la modélisation de Shinozuka (voir section 1.5.1), le choix de l'entier p en tant que puissance de 2 ainsi que le choix de la discrétisation fréquentielle selon un algorithme de FFT (voir section 1.5.2) permet de réécrire l'équation (1.111) à l'aide de Transformées de Fourier Rapide (FFT) [70] :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t_n) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_e} \sqrt{\mathbf{S}[n]} \sqrt{\lambda_{\mathbf{k}}[n]} \mathbf{F}_{\mathbf{k}}[n] \exp(j\phi_{\mathbf{k}}[n]) \right) \right) \quad (1.113)$$

où les vecteurs \mathbf{S} , $\lambda_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}$ et $\phi_{\mathbf{k}}$ sont respectivement les vecteurs définis par $\mathbf{S}[n] = S(\omega_n)$, $\lambda_{\mathbf{k}}[n] = \lambda_{\mathbf{k}}(\omega_n)$, $\mathbf{F}_{\mathbf{k}}[n] = \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\omega_n)$ et $\phi_{\mathbf{k}}[n] = \phi_{\mathbf{k}n}$.

L'équation (1.111), en comparaison avec l'équation (1.84), est une autre modélisation d'une excitation aléatoire multipoints. Ces deux méthodes utilisent la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ de deux façons différentes, mais l'idée principale reste la même : générer des séries de fonctions sinusoïdales dont chaque phase est une variable aléatoire indépendante suivant une loi de distribution uniforme entre 0 et 2π . Dans le chapitre 5, une nouvelle méthode originale de modélisation d'une excitation aléatoire multipoints à partir de la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ est présentée. Cette méthode a été développée durant ces travaux de thèse et elle est appliquée sur la résolution de vibrations non-linéaires pour la maquette industrielle HB2 soumise à une excitation acoustique.

1.6 Conclusion

Ce premier chapitre présente les outils nécessaires à la simulation de réponses vibratoires de systèmes industriels complexes au comportement non-linéaire et soumis à des excitations aléatoires multipoints. Cependant, ces outils nécessitent de dissocier les connaissances en dynamique vibratoire linéaire, généralement disponible sous tout logiciel de simulation présent dans l'industrie, des connaissances en dynamique vibratoire non-linéaire, encore relativement limitée dans l'industrie. Cette dissociation se réalise suite à l'observation de phénomènes vibratoires non-linéaires qui viennent contredire les hypothèses du comportement linéaire de la structure étudiée : le principe de superposition n'est plus vérifié expérimentalement.

Dès lors, les techniques d'analyse modale numérique et expérimentale ainsi que les différents types d'excitation qui sont relativement présents dans l'industrie sont introduits dans ce chapitre et doivent désormais être associés à un système mécanique non-linéaire. Puisque les phénomènes vibratoires non-linéaires identifiés dans ce chapitre montrent une véritable dépendance de la structure au type d'excitation, il est nécessaire pour cela de mettre en place des techniques numériques adaptées. Des méthodes temporelles et d'approximation sont ainsi présentées dans ce chapitre. Une seule méthode de simulation non-linéaire, la méthode de l'équilibrage harmonique, est utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse et elle est étendue au cadre des excitations aléatoires multipoints.

Une fois associées aux structures industrielles de grande envergure (en termes du nombre de degrés de liberté présents dans le modèle éléments finis), ces méthodes non-linéaires conduisent à des temps de calcul beaucoup trop importants pour un contexte industriel. Dès lors, il faut mettre en place des méthodes de réduction et condensation, correctement maîtrisées et implémentées dans les codes éléments finis présents dans l'industrie, qui sont également rappelées dans ce chapitre. La technique qui est utilisée dans ces travaux de thèse pour la maquette industrielle HB2 (voir chapitre 5) est la méthode de sous-structuration à interface hybride dans le code éléments finis ABAQUS.

Enfin, un effort de modélisation d'une excitation aléatoire multipoints est nécessaire pour la simulation de réponses vibratoires de structures soumises à telles excitations. Deux techniques de modélisation, la modélisation de Shinozuka et la décomposition de Karhunen-Loève, sont étudiées dans ce chapitre et sont adaptées aux algorithmes de simulation numérique utilisant la Transformée de Fourier Rapide afin d'améliorer le temps de calcul numérique nécessaire pour générer de telles excitations. La modélisation de Shinozuka est directement appliquée dans l'exercice numérique sur la poutre bi-encastree CEA (voir chapitre 3) qui est un démonstrateur académique des objectifs de ce manuscrit de thèse. Dès lors, fort de cette démonstration sur un exemple académique, le passage à l'application industrielle (maquette HB2, voir chapitre 5) nécessite une nouvelle modélisation d'une excitation aléatoire multipoints afin de réduire considérablement et efficacement le nombre de termes d'excitation. Cette méthode originale, différente de la méthode de décomposition de Karhunen-Loève et développée durant ces travaux de thèse, est présentée au chapitre 5.

Chapitre 2

Essais vibratoires sur la poutre bi-encastree CEA

Avant de s'intéresser à l'étude vibratoire d'un assemblage industriel complexe sollicité par une excitation acoustique, une étude sur un objet académique sollicité en deux points distincts a été traitée. Il s'agit d'une poutre métallique bi-encastree, la poutre CEA, qui peut avoir un comportement vibratoire non-linéaire sous certaines conditions d'excitations (comportement non-linéaire du type oscillateur de Duffing [36]).

La poutre bi-encastree développée au CEA/CESTA a précédemment été étudiée par Claeys et al. [8] et par Roncen et al. [58]. Ces travaux ont permis de caractériser le comportement vibratoire non-linéaire de cette structure sollicitée uniformément par une excitation sinusoïdale d'une part et par une excitation aléatoire d'autre part. Expérimentalement, les phénomènes vibratoires non-linéaires observés sont nombreux : décalage de la fréquence de résonance, saut d'amplitude, phénomènes d'hystérésis et réponses multi-harmoniques.

Cependant, la caractérisation expérimentale du comportement vibratoire non-linéaire de cette poutre bi-encastree à une excitation aléatoire multipoints est inconnue. Ces travaux ont pour but d'observer les évolutions potentielles de la signature non-linéaire de cette structure en fonction de la corrélation entre deux forces aléatoires et d'apporter une compréhension physique des phénomènes observés. De façon plus générale, cette campagne d'essais expérimentaux se positionne en amont d'une démarche globale qui vise à la prédiction des réponses dynamiques non-linéaires de la poutre étudiée sous sollicitations multipoints. Cette méthode est développée dans le chapitre 3.

Une description de la poutre bi-encastree et du montage expérimental est donnée dans la première partie de ce chapitre. Une analyse modale expérimentale réalisée durant cette étude est présentée en deuxième partie de ce chapitre afin d'identifier la signature linéaire de la poutre (fréquences propres et déformées associées) et ainsi de pouvoir ensuite comprendre au mieux les phénomènes vibratoires non-linéaires apparaissant lors de sollicitations plus importantes du système. La validation du contrôle

expérimental sur la corrélation entre les deux forces aléatoires est détaillée en troisième partie de ce chapitre. Enfin, les mesures des essais réalisés sur cette structure sous diverses sollicitations sont étudiées afin d'observer l'évolution de la signature non-linéaire en fonction de la corrélation d'une excitation aléatoire multipoints.

L'objectif de ce chapitre est non seulement d'analyser le comportement dynamique non-linéaire de la poutre CEA soumise à des excitations aléatoires multipoints variées mais également de fournir un nombre conséquent de résultats expérimentaux servant ainsi de référence dans le chapitre suivant pour valider la modélisation non-linéaire et la démarche scientifique proposée pour prédire la réponse non-linéaire associée.

L'ensemble des mesures présentées dans ce chapitre, c'est-à-dire les données d'entrées des deux cellules de force ainsi que les données de sortie des trois accéléromètres pour l'ensemble des essais réalisés, est disponible en libre accès [67].

2.1 Description de la poutre bi-encastrée

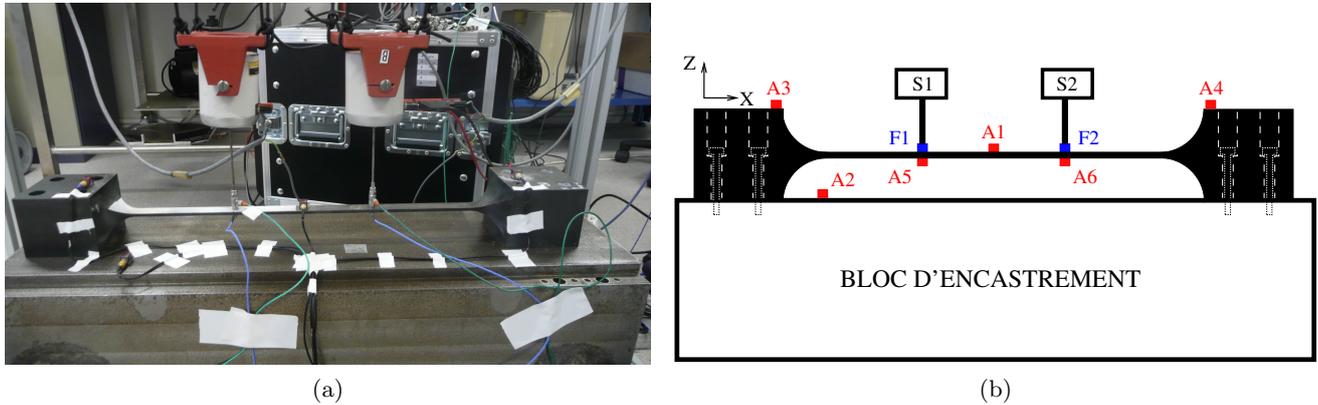


FIGURE 2.1 – Photographie (a) et schéma (b) du montage expérimental instrumenté par six accéléromètres (de A1 à A6) et deux capteurs de forces (F1, F2) reliés aux deux excitateurs électrodynamiques (S1, S2).

Le montage expérimental de la poutre métallique bi-encastrée est présenté sur la figure 2.1. La poutre est entièrement en acier et ses dimensions sont $470 \times 20 \times 5 \text{ mm}^3$. À chacune de ses extrémités, la poutre est reliée à un cube d'acier de dimensions $100 \times 100 \times 85 \text{ mm}^3$. La pièce complète (poutre et encastremets) a été fabriquée d'une seule pièce métallique pour éviter toute soudure. Des congés ont été dessinés entre la poutre et les cubes d'encastrement afin d'éviter les concentrations de contraintes. Les cubes sont vissés dans un bloc d'encastrement en acier posé sur le sol. Ce dispositif permet de s'assurer des conditions d'encastrement à chaque extrémité de la poutre.

Le montage est instrumenté avec six accéléromètres : quatre accéléromètres tridimensionnels A1 à A4 (de référence Endevco 66M5) et deux accéléromètres monodimensionnels A5 et A6 (de référence PCB 3652C22) qui ne mesurent que l'accélération suivant l'axe vertical Z de la poutre. Les accéléromètres A2, A3 et A4 sont présents pour s'assurer des bonnes conditions d'encastrement de la poutre durant les essais. En effet, les accélérations mesurées lors des essais par ces capteurs sont négligeables devant les accélérations mesurées par les accéléromètres présents sur la poutre et relèvent du bruit de mesure, ce qui valide les conditions d'encastrement sur le bloc en acier et la conception de la poutre CEA.

Deux capteurs de force F1 et F2 sont positionnés sous les tiges d'excitation des deux excitateurs électrodynamiques afin de contrôler le niveau en force des deux efforts temporels expérimentaux. Les cellules de force sont reliées aux excitateurs électrodynamiques S1 et S2 par deux tiges rigides. Les deux excitateurs sont montés en suspension à l'aide de câbles élastiques. La poutre est ainsi soumise à une excitation multipoints. Pour la suite de l'étude, cette excitation multipoints est aléatoire et corrélée grâce au système Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Random du logiciel Simcenter Testlab de Siemens [46]. Il est à noter que la position des deux excitateurs est fixe pour toute la

campagne d'essais et elle est symétrique par rapport au centre de la poutre. Le premier choix de définition de l'excitation est dès lors spatial et va permettre d'étudier la contribution des modes de vibration de la poutre en fonction de la corrélation en phase entre les deux efforts temporels aléatoires. Afin d'apporter une compréhension fine des effets et interactions entre ces deux sources d'excitation, quatre types d'excitations aléatoires sont étudiés dans la suite de ces travaux :

- deux efforts aléatoires en phase,
- deux efforts aléatoires en opposition de phase,
- deux efforts aléatoires en quadrature de phase,
- deux efforts aléatoires décorrélés.

Ces différents types d'essais permettent également de tester la robustesse de la modélisation du système et de la prédiction du comportement dynamique associé.

2.2 Analyse modale expérimentale

Le but de cette section est de fournir quelques résultats préliminaires classiques d'analyse modale expérimentale concernant la poutre bi-encastree. Ces résultats vont servir à la validation initiale du modèle linéaire qui est présenté dans le chapitre 3. En effet, puisque les conditions aux limites ne sont pas idéales (poutre bi-encastree mais à longueur effective non connue a priori), et puisque de nombreux accéléromètres sont présents sur la structure, une première étape préliminaire de calibration du modèle linéaire de la poutre est nécessaire. Les résultats de l'analyse modale expérimentale vont également permettre de mieux interpréter les observations de la signature non-linéaire de la poutre lors de la présentation des mesures dans la section 2.4.

L'analyse modale expérimentale de la poutre CEA est réalisée classiquement via une étude au marteau de choc dans la direction verticale Z . Trois points d'impact sont choisis pour réaliser cette analyse modale : aux positions des accéléromètres A1, A5 et A6. Pour chaque point d'impact, une moyenne de dix accélérances (rapport de l'accélération mesurée sur l'effort fourni par l'impact) correspondant à dix coups de marteau est réalisée pour chaque accéléromètre A1, A5 et A6. L'accélération moyenne pour chaque accéléromètre est représentée sur la figure 2.2 et pour chaque point d'impact. Il est possible d'observer sur les figures 2.2(a), 2.2(b) et 2.2(c) que l'amplitude de chaque accélérance aux fréquences f_2 et f_4 , est nulle pour l'accéléromètre A1 ce qui indique une forme antisymétrique de ces modes puisque l'accéléromètre A1 est situé au centre de la poutre. De plus, la similarité entre l'accélération mesurée par l'accéléromètre A5 (respectivement, l'accéléromètre A6) lorsque le point d'impact est en A5 (voir figure 2.2(b)) et l'accélération mesurée par l'accéléromètre A6 (respectivement, l'accéléromètre A5) lorsque le point d'impact est en A6 (voir figure 2.2(c)) est remarquée. Cela est dû à la position symétrique de ces accéléromètres.

Ensuite, les fréquences propres et les amortissements des différents modes de la poutre CEA sont déterminés via un algorithme d'optimisation PolyMAX [47] utilisé sur les accélérances moyennes de la figure 2.2. Le tableau 2.1 donne les fréquences propres et amortissements des différents modes propres de la poutre bi-encastree dans la bande de fréquences [20 – 1000] Hz. La valeur des amor-

tissements modaux identifiés montre que cette structure sans liaison est très résonnante. De plus, la forme de chaque mode est déterminée par le logiciel Simcenter Testlab de Siemens, c.a.d., la forme symétrique ou forme antisymétrique de chaque mode de vibration de la poutre (normal ou transverse).

Les quatre premiers modes de flexion ainsi que le premier mode transverse de la poutre sont identifiés et donnés dans le tableau 2.1. Un mode transverse est identifié alors que le coup de marteau est vertical, ce qui signifie que le choc généré a également une composante transverse.

Numéro de mode	Description du mode	Fréquence (Hz)	Amortissement modal (%)
1	symétrique de flexion	108.9	0.25
2	antisymétrique de flexion	307.0	0.12
1T	symétrique transverse	417.8	0.33
3	symétrique de flexion	594.9	0.13
4	antisymétrique de flexion	997.3	0.17

TABLEAU 2.1 – Modes de vibration de la poutre bi-encastree CEA identifiés à partir de l'analyse modale expérimentale au marteau de choc.

La masse de chaque accéléromètre est donnée dans le tableau 2.2. Les masses des accéléromètres A2, A3 et A4 (≤ 10 g) ne sont pas indiquées, puisque ces derniers sont situés sur le bloc d'encastrement en acier posé sur le sol ou sur chaque cube aux extrémités de la poutre (≈ 7000 g chacun) et n'ont ainsi pas d'influence sur le comportement mécanique de la poutre.

Accéléromètre	Masse mesurée (g)
A1	6.0
A5	1.1
A6	1.1

TABLEAU 2.2 – Masses des accéléromètres A1, A5 et A6 présents sur la poutre mesurées avec une balance de précision.

2.3 Contrôle expérimental de l'excitation

L'une des originalités de cette étude expérimentale repose sur le choix de l'excitation, aussi l'un des points primordiaux dans cette étude est de s'assurer expérimentalement que la corrélation choisie entre les deux forces temporelles est correctement respectée et maîtrisée durant les essais. Cette section a pour but de présenter le protocole expérimental mis en place et son implémentation via le système MIMO Random de Simcenter.

Pour une sollicitation temporelle aléatoire, la donnée d'entrée de chaque exciteur électrodynamique

est une Densité Spectrale de Puissance (DSP) et la corrélation entre les deux efforts temporels est définie par la Densité Spectrale Croisée (ou CSD pour « Cross Spectral Density ») définie dans le protocole expérimental par les notions de cohérence et de phase, conformément à l'équation (2.1) :

$$S_{12}(f) = \sqrt{\gamma_{12}^2(f)S_{11}(f)S_{22}(f)} \exp(j\phi_{12}(f)) \quad (2.1)$$

où $S_{11}(f)$ et $S_{22}(f)$ sont les DSP des excitations temporelles $F_1(t)$ et $F_2(t)$, qui correspondent respectivement aux forces mesurées par les cellules de force F1 et F2 sur la figure 2.1(b). f correspond à la fréquence d'acquisition, $\phi_{12}(f)$ est le déphasage entre les deux excitations temporelles $F_1(t)$ et $F_2(t)$, et $\gamma_{12}(f)$ est la cohérence entre ces deux forces. Expérimentalement, cette cohérence varie entre 0.05 et 0.98 ce qui signifie que les deux efforts temporels ne peuvent être ni parfaitement décorrélés (c.a.d., une cohérence égale à 0) ni parfaitement corrélés (c.a.d., une cohérence égale à 1). Cependant, ce dispositif expérimental est considéré comme suffisant pour générer deux forces aléatoires corrélées sur une large bande de fréquences.

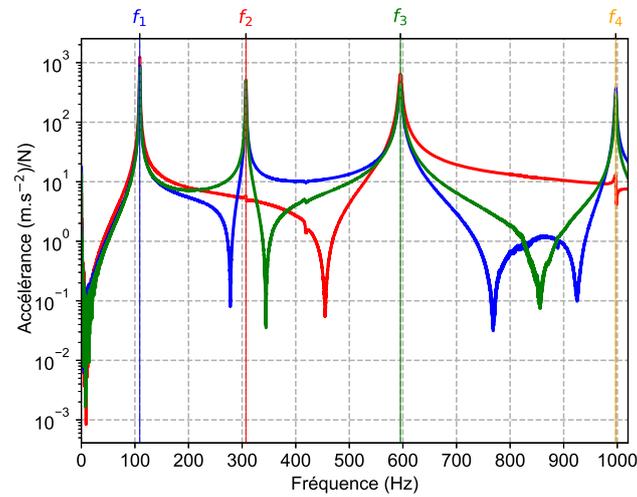
Comme précédemment indiqué, durant ces travaux, les quatre types d'excitations aléatoires multipoints étudiées sont :

- deux excitations aléatoires corrélées en phase : $\phi_{12} = 0^\circ$ et $\gamma_{12} = 0.98$;
- deux excitations aléatoires corrélées en opposition de phase : $\phi_{12} = 180^\circ$ et $\gamma_{12} = 0.98$;
- deux excitations aléatoires corrélées en quadrature de phase : $\phi_{12} = 90^\circ$ et $\gamma_{12} = 0.98$;
- deux excitations aléatoires décorrélées : $\gamma_{12} = 0.05$.

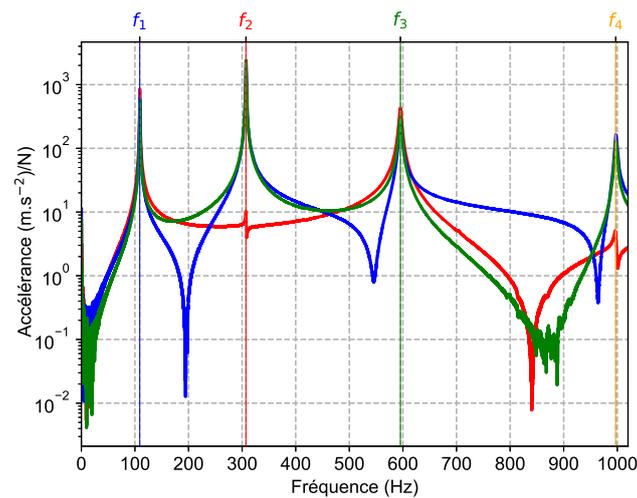
Pour chaque essai réalisé dans cette étude, la forme de la DSP de chaque excitation est un bruit blanc, c.a.d., le niveau d'excitation est le même sur toute la bande de fréquences. Le niveau de l'excitation est défini comme le niveau de DSP de la force en N^2/Hz ou l'effort efficace en N RMS sur cette plage de fréquences.

La fréquence d'échantillonnage est de 3200 Hz avec une résolution fréquentielle de 0.098 Hz. La durée totale d'un essai est de 307.2 s et le signal de sortie est divisé en 30 fenêtres temporelles de 10.24 s chacune. Un périodogramme estime ensuite la DSP de chaque signal temporel (force, accélération) dans chaque fenêtre temporelle. Ensuite, la DSP totale de chaque signal est calculée par une moyenne des estimations sur toutes les fenêtres temporelles [71]. La DSP d'entrée est constante au cours du temps pour assurer la stationnarité des phénomènes observés.

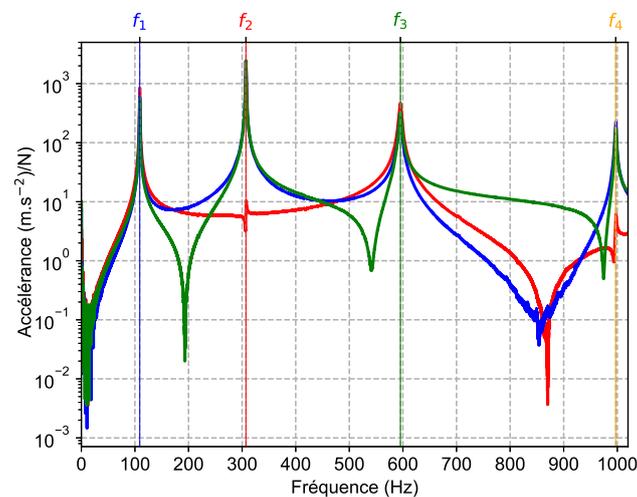
Afin d'illustrer et de valider ce protocole expérimental pour la génération de deux forces aléatoires corrélées, la figure 2.3(a) donne les deux entrées expérimentales temporelles observées durant l'une de ces fenêtres temporelles de 10.24 s pour deux excitations aléatoires en phase. Sur la figure 2.3(b), des zooms sur les entrées expérimentales temporelles sont donnés pour les quatre types de corrélation donnés ci-dessus (en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase et décorrélées). Ces résultats préliminaires permettent ainsi de valider le protocole expérimental mis en place pour générer une force aléatoire multipoints corrélée grâce au système MIMO de Simcenter [46].



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.2 – Accéléranes moyennes pour les trois points d'impact A1 (a), A5 (b) et A6 (c) pour les trois accéléromètres : A1 (rouge), A5 (bleu) et A6 (vert).

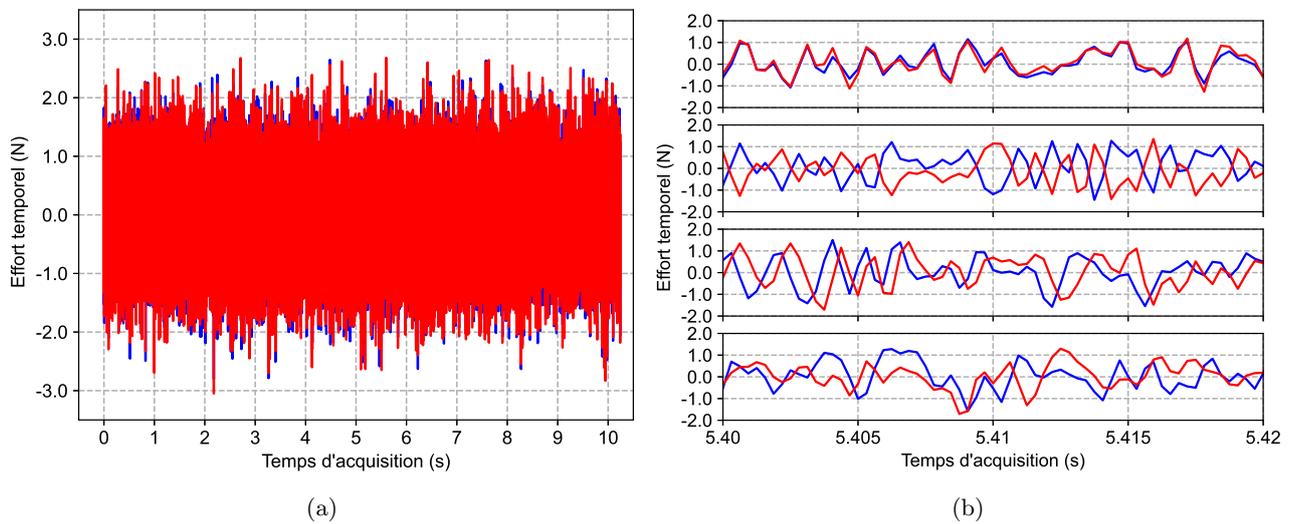


FIGURE 2.3 – Entrées expérimentales : (a) deux forces temporelles aléatoires en phase F1 (bleu) et F2 (rouge) générées avec le système MIMO Random [46] et (b) zoom sur les quatre configurations de corrélation étudiées (de haut en bas : en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase et deux excitations aléatoires décorréliées).

2.4 Réponses vibratoires à une excitation bi-points

Deux campagnes d'essais ont été réalisées durant ces travaux :

- campagne n° 1 : des essais sont réalisés avec le même niveau d'excitation (≈ 0.71 N RMS) sur la bande de fréquences $[20 - 1000]$ Hz. La réponse vibratoire de la poutre bi-encastree est étudiée sur l'ensemble de la bande fréquentielle d'excitation, plus spécifiquement, l'effet de la corrélation entre les deux forces aléatoires, pour les quatre types de corrélation présentés dans la section 2.3, sur l'amplification et/ou l'atténuation des modes de flexion de la poutre au voisinage de leur résonance respective est observé.
- campagne n° 2 : ensuite, une attention plus particulière est portée à la signature non-linéaire de la poutre, notamment l'évolution des contributions non-linéaires et présences des harmoniques de modes de vibration en fonction de la corrélation entre les deux excitations. De même, l'étude est effectuée pour les quatre types de corrélation présentés dans la section 2.3. Pour ce faire, un protocole expérimental original qui consiste à partitionner l'excitation sur 2 bandes de fréquences avec un niveau d'excitation différent est proposé. Tous les essais sont réalisés avec un niveau d'excitation "fort" (≈ 0.50 N RMS) sur la bande de fréquences $[20 - 500]$ Hz et un niveau d'excitation "faible" (≈ 0.0035 N RMS) sur la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz. L'objectif est alors de regarder sur la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz la signature non-linéaire provenant des harmoniques des modes excités sur la bande $[20 - 500]$ Hz.

2.4.1 Phénomènes vibratoires observés lors de la campagne n° 1

Les résultats expérimentaux pour les accéléromètres A1, A5 et A6 pour le même niveau d'excitation (≈ 0.71 N RMS) sur la bande de fréquences $[20 - 1000]$ Hz sont donnés sur la figure 2.4 pour les quatre types de corrélations précédemment donnés dans la section 2.3. Les valeurs expérimentales des fréquences propres et amortissements modaux des quatre premiers modes de flexion de la poutre sont données dans les tableaux 2.3 et 2.4 en fonction du type de corrélation étudié. Même si ces valeurs restent pratiquement inchangées en fonction du type de corrélation, il est noté qu'elles ne sont pas exactement les mêmes que celles mesurées lors de l'analyse modale expérimentale (voir tableau 2.1). Ceci est principalement dû à la présence des deux excitateurs électrodynamiques sur la poutre, à de faibles variations des conditions aux limites pendant les essais et à une contribution potentielle des non-linéarités [9, 60].

Dans les tableaux 2.5, 2.6 et 2.7 sont donnés respectivement les pics d'amplitude des DSP de sortie expérimentales pour les accéléromètres A1, A5 et A6, respectivement. Il est possible d'y observer que les quatre pics d'amplitude retenus correspondent aux quatre premiers modes de flexion de la poutre identifiés dans l'analyse modale expérimentale de la section 2.2. Il apparaît très clairement que la réponse vibratoire est principalement définie par des contributions linéaires, des pics correspondant à des contributions non-linéaires ne sont pas visibles. Ceci s'explique par le choix de l'excitation sur l'ensemble de la plage d'étude. La campagne n° 2 qui est explicitée par la suite permet de mieux abor-

der ce sujet.

Une atténuation ou une amplification de ces modes de vibration apparaît clairement en fonction de la configuration étudiée, c.a.d., en fonction de la corrélation de l'excitation multipoints. Ces résultats obtenus sont en accord avec la forme modale des modes de vibration (symétrique ou antisymétrique) en lien avec le type de corrélation choisi, c'est-à-dire le choix de la cohérence et du déphasage entre les deux forces temporelles des excitateurs électrodynamiques définis dans la section 2.3. Par exemple, les pics de DSP pour les modes symétriques (les modes antisymétriques, respectivement) sont amplifiés (atténués, respectivement) dans le cas de deux excitations temporelles en phase. À l'opposé, les pics de DSP pour les modes symétriques (les modes antisymétriques, respectivement) sont atténués (amplifiés, respectivement) dans le cas de deux excitations temporelles en opposition de phase. De plus, dans le cas de deux excitations aléatoires corrélées en quadrature de phase et dans le cas de deux excitations aléatoires décorrélées, les modes symétriques et les modes antisymétriques dans la bande de fréquences [20 – 1000] Hz apparaissent très clairement avec des niveaux de DSP non négligeables les uns par rapport aux autres. Par ailleurs, les modes antisymétriques n'ont par définition pas d'amplitude modale au centre de la poutre ce qui correspond aux résultats observés expérimentalement (par exemple sur la figure 2.4(a) aux fréquences f_2 et f_4). Les mesures pour les accéléromètres A5 et A6 sont très similaires en raison de leur position symétrique par rapport au centre de la poutre.

Enfin, certains pics additionnels, qui ne correspondent pas aux fréquences fondamentales des modes de vibration dans la bande de fréquence étudiée (f_1 , f_2 , f_3 et f_4), sont également observés (notamment au voisinage de 700 Hz sur la figure 2.4). Ces pics n'ont pas été observés lors de l'analyse modale expérimentale et correspondent certainement à un couplage entre l'excitateur électrodynamique, la tige excitatrice et la poutre bi-encastrée.

	Fréquence (Hz)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	112.1	111.6	111.3	111.4
f_2	300.8	300.5	300.1	300.2
f_3	581.8	583.3	580.8	582.2
f_4	987.2	986.3	986.1	986.1

TABLEAU 2.3 – Valeurs des fréquences propres expérimentales issues des DSP de sortie correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.71 N RMS pour les quatre types de corrélation étudiés sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.

	Amortissement modal (%)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
ξ_1	0.34	0.3	0.31	0.29
ξ_2	0.07	0.1	0.07	0.09
ξ_3	0.12	0.22	0.22	0.3
ξ_4	0.07	0.03	0.03	0.07

TABLEAU 2.4 – Valeurs des amortissements modaux expérimentaux issues des DSP de sortie correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.71 N RMS pour les quatre types de corrélation étudiés sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz

Fréquence	DSP d'accélération $((\text{m.s}^{-2})^2/\text{Hz})$			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	689.54	3.59	310.05	523.51
f_2	-	-	-	-
f_3	287.22	1.27	111.55	111.77
f_4	-	-	-	-

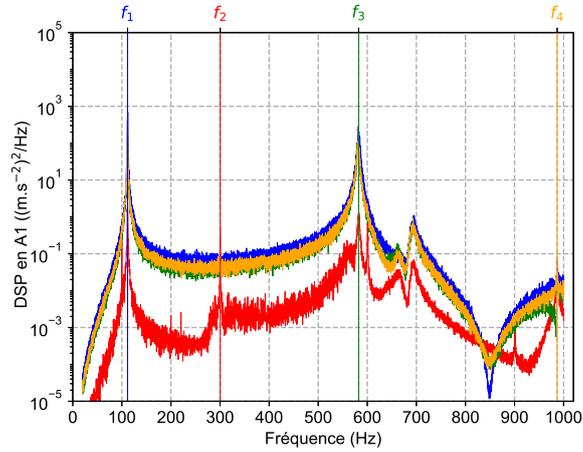
TABLEAU 2.5 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A1 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.71 N RMS pour les quatre types de corrélation étudiés sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.

Fréquence	DSP d'accélération $((\text{m.s}^{-2})^2/\text{Hz})$			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	344.67	1.76	153.52	260.13
f_2	176.25	24581.10	15603.50	10104.3
f_3	115.91	0.76	48.22	46.61
f_4	0.98	72.28	39.54	20.72

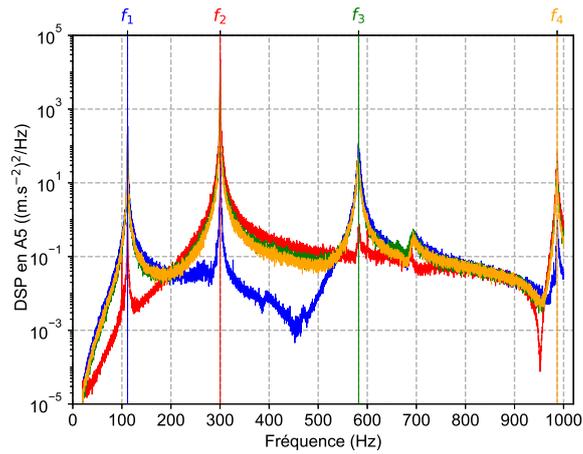
TABLEAU 2.6 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A5 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.71 N RMS pour les quatre types de corrélation étudiés sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.

Fréquence	DSP d'accélération $((\text{m.s}^{-2})^2/\text{Hz})$			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	326.03	1.74	147.56	248.31
f_2	176.66	24724.50	15691.70	10114.9
f_3	133.54	0.63	48.12	53.70
f_4	0.64	47.57	27.76	13.62

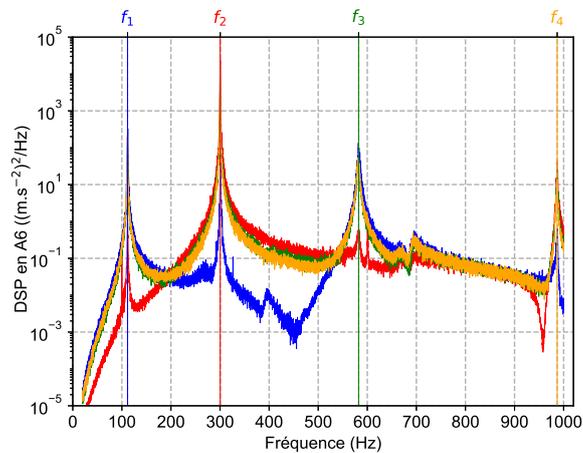
TABLEAU 2.7 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A6 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.71 N RMS pour les quatre types de corrélation étudiés sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 2.4 – DSP expérimentales des accéléromètres A1 (a), A5 (b) et A6 (c) pour une entrée aléatoire bi-points de niveau 0.71 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés : en phase (bleu), en opposition de phase (rouge), en quadrature de phase (vert) et deux excitations décorrélées (orange).

2.4.2 Analyse de la signature non-linéaire lors de la campagne n° 2

Comme décrit dans [59], le comportement d'une poutre bi-encastrée soumise à une excitation aléatoire uniforme est caractérisé par un raidissement ainsi que l'élargissement du pic de réponse au voisinage de la fréquence de résonance des modes de vibration. D'autres pics expérimentaux correspondant à des harmoniques de fréquence de résonance peuvent également apparaître. Ils caractérisent la signature non-linéaire de cette poutre à une excitation monopoint.

Dans le but d'analyser la signature non-linéaire de cette poutre à une excitation bi-points corrélée pour les quatre types de corrélations choisis et faire ainsi apparaître clairement les contributions des harmoniques des différents modes de vibration identifiés, un protocole expérimental similaire à celui de [59] est mis en place. Les essais sont réalisés avec un même niveau d'excitation (≈ 0.50 N RMS) sur la bande de fréquences $[20 - 500]$ Hz, dans laquelle seuls le premier mode (symétrique) de flexion de la poutre et le deuxième mode (antisymétrique) de flexion de la poutre résonnent, et avec un niveau d'excitation beaucoup plus faible (≈ 0.0035 N RMS) sur la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz. Dans cette seconde bande de fréquences, il est à noter que le troisième mode (symétrique) et le quatrième mode (antisymétrique) de la poutre sont présents et vont donc naturellement résonner à hauteur du niveau d'excitation choisi (phénomène linéaire). En utilisant ce protocole expérimental, l'apparition de pics supplémentaires (autre qu'aux fréquences f_3 et f_4) dans cette seconde bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz indique une signature expérimentale vibratoire qui est non-linéaire. Comme précédemment énoncé, il est bon de rappeler que des phénomènes non-linéaires de très faibles niveaux existent sans aucun doute lors de la campagne n° 1 mais sont masqués par les contributions linéaires prédominantes.

Les DSP des entrées et sorties expérimentales pour les quatre types de corrélation étudiés sont données sur les figures 2.5 et 2.6. Pour les DSP des entrées expérimentales, la courbe bleue correspond à la DSP d'effort de l'excitateur électrodynamique S1 et la courbe rouge correspond à la DSP d'effort de l'excitateur électrodynamique S2. Pour les DSP des sorties expérimentales, la courbe rouge correspond à la DSP d'accélération de l'accéléromètre A1, la courbe bleue correspond à la DSP d'accélération de l'accéléromètre A5 et la courbe verte correspond à la DSP d'accélération de l'accéléromètre A6.

Les valeurs expérimentales des fréquences propres des quatre premiers modes et des amortissements modaux des deux premiers modes de flexion de la poutre sont données dans les tableaux 2.8 et 2.9 en fonction du type de corrélation étudié. En comparaison avec les valeurs issues des essais précédents (voir tableaux 2.3 et 2.4), une légère augmentation de la valeur de chaque fréquence de résonance est observée avec l'augmentation du niveau d'excitation. Ce fait reflète un effet de raidissement.

En compléments des figures 2.5 et 2.6, les tableaux 2.10, 2.11 et 2.12 regroupent les amplitudes des pics expérimentaux observés sur les DSP d'accélération pour les résonances des quatre premiers modes de flexion de la poutre, pour les trois accéléromètres A1, A5 et A6, respectivement. Le même effet du choix de la corrélation entre les deux efforts aléatoires se retrouve sur l'amplitude de ces pics

de résonance, en accord avec ce qui a été observé dans la sous-section 2.4.1.

Considérons la configuration où les deux excitations aléatoires sont en phase pour laquelle les mesures d'entrées et de sorties sont représentées sur les figures 2.5(a) et 2.5(b). Plusieurs pics, non présents dans l'entrée expérimentale, sont observés sur la sortie expérimentale sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz. Cela indique un comportement vibratoire non-linéaire de la poutre. Un zoom sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz est donné sur la figure 2.7(a). Il est possible d'y observer que certains de ces pics expérimentaux correspondent aux harmoniques de la fréquence fondamentale du premier mode de vibration de la poutre f_1 ($5f_1$, $6f_1$, $7f_1$, $8f_1$ et $9f_1$) mais également à une combinaison de composantes harmoniques et fondamentale de modes ($2f_1 + f_2$ dans ce cas). Les contributions de ces harmoniques sont plus importantes au centre de la poutre (c.a.d., au niveau de l'accéléromètre A1) ce qui est cohérent avec le fait que le maximum d'amplitude modal du premier mode se situe au centre de la poutre. De même que pour la sous-section 2.4.1, les mesures obtenues pour les accéléromètres A5 et A6 sont très similaires du fait de leur position symétrique par rapport au centre de la poutre.

Pour la configuration où les deux excitations aléatoires sont en opposition de phase, les mesures d'entrées et de sorties sont représentées sur les figures 2.5(c) et 2.5(d). Comme précédemment, il est possible d'observer différents pics sur les DSP de sortie qui correspondent à des harmoniques du deuxième mode de vibration de la poutre ($2f_2$ et $3f_2$). Ce résultat expérimental est directement lié au choix de corrélation entre les deux excitations puisque le deuxième mode de vibration est un mode antisymétrique, ce qui est en accord avec ce qui a été observé dans la sous-section 2.4.1. Un zoom sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz est donné sur la figure 2.7(b).

Pour la configuration où les deux excitations aléatoires sont en quadrature de phase (respectivement, sont décorréliées), les mesures d'entrées et de sorties sont représentées sur les figures 2.6(a) et 2.6(b) (respectivement, sur les figures 2.6(c) et 2.6(d)). Les mesures expérimentales pour ces deux configurations de corrélation sont très similaires : le nombre de composantes non-linéaires observées sur les figures 2.7(c) et 2.7(d) sont plus nombreuses que pour les deux premières configurations (en comparaison avec les figures 2.7(a) et 2.7(b)). Les harmoniques du premier mode et du deuxième mode ($5f_1$, $6f_1$, $7f_1$, $2f_2$ et $3f_2$) ainsi que des combinaisons d'harmoniques de ces modes ($2f_1 + f_2$ et $f_1 + 2f_2$) sont visibles. Cela s'explique par le fait, qu'avec ce choix de corrélation entre les deux excitations aléatoires, tous les modes de vibration présents (symétriques et antisymétriques) sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz sont sollicités sans favoriser le premier ou le deuxième mode de vibration par rapport à sa forme modale.

Pour résumer tout cela, les tableaux 2.10, 2.11 et 2.12 regroupent l'ensemble des mesures des DSP expérimentales aux fréquences particulières (soit fréquence fondamentale des modes identifiés, soit harmoniques de modes, soit combinaisons d'harmoniques du premier et du deuxième mode) pour les différentes configurations de corrélations étudiées. Tous ces résultats démontrent que le choix de la corrélation entre les deux excitations aléatoires sollicitant la poutre induit des changements de la signature non-linéaire avec l'amplification et/ou l'atténuation de composantes non-linéaires dans la

réponse expérimentale observée.

Enfin, il est à noter que le contrôle de l'entrée expérimentale n'est pas parfait pour les quatre types de corrélation étudiés. Sur les figures 2.5(a), 2.5(c), 2.6(a) et 2.6(c), il est possible d'observer différents pics de résonance sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz qui ne sont pas souhaités initialement. Cela conduit à des pics observés sur la sortie expérimentale (phénomène linéaire). Cette imperfection peut s'expliquer par le fort couplage entre les deux points d'excitation et la réponse non-linéaire de la poutre. En effet, les deux excitateurs électrodynamiques sont positionnés à proximité des ventres de vibration du deuxième mode de vibration (voir figure 3.2 au chapitre 3 sur le modèle numérique de la poutre). Alors, le couplage entre la sortie expérimentale et l'entrée expérimentale est plus fort lorsque la corrélation entre les deux points d'excitations favorise les modes antisymétriques, c.a.d., lorsque les deux excitations sont en opposition de phase. Pour une configuration où les deux forces sont en phase, les modes antisymétriques sont atténués donc le second mode est atténué et le couplage expérimental l'est également, ce qui explique le faible nombre de pics dans l'entrée expérimentale sur la figure 2.5(a). Pour une configuration où tous les modes sont sollicités (pour deux excitations en quadrature de phase ou pour deux excitations décorréliées), le couplage est plus important ce qui explique un nombre de pics de résonances non souhaités plus important pour ces deux dernières configurations sur les figures 2.6(a) et 2.6(c) mais avec des amplitudes de résonances plus faibles.

	Fréquence (Hz)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorréliées
f_1	110.3	110.5	110.3	110.4
f_2	298	298.1	298	298
f_3	575.1	-	576.5	577.8
f_4	970.1	970.8	970.1	970.7

TABLEAU 2.8 – Valeurs des fréquences propres expérimentales issues des DSP de sortie correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés.

	Amortissement modal (%)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorréliées
ξ_1	0.3	0.31	0.17	0.16
ξ_2	0.08	0.11	0.08	0.08

TABLEAU 2.9 – Valeurs des amortissements modaux expérimentaux issues des DSP de sortie correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés.

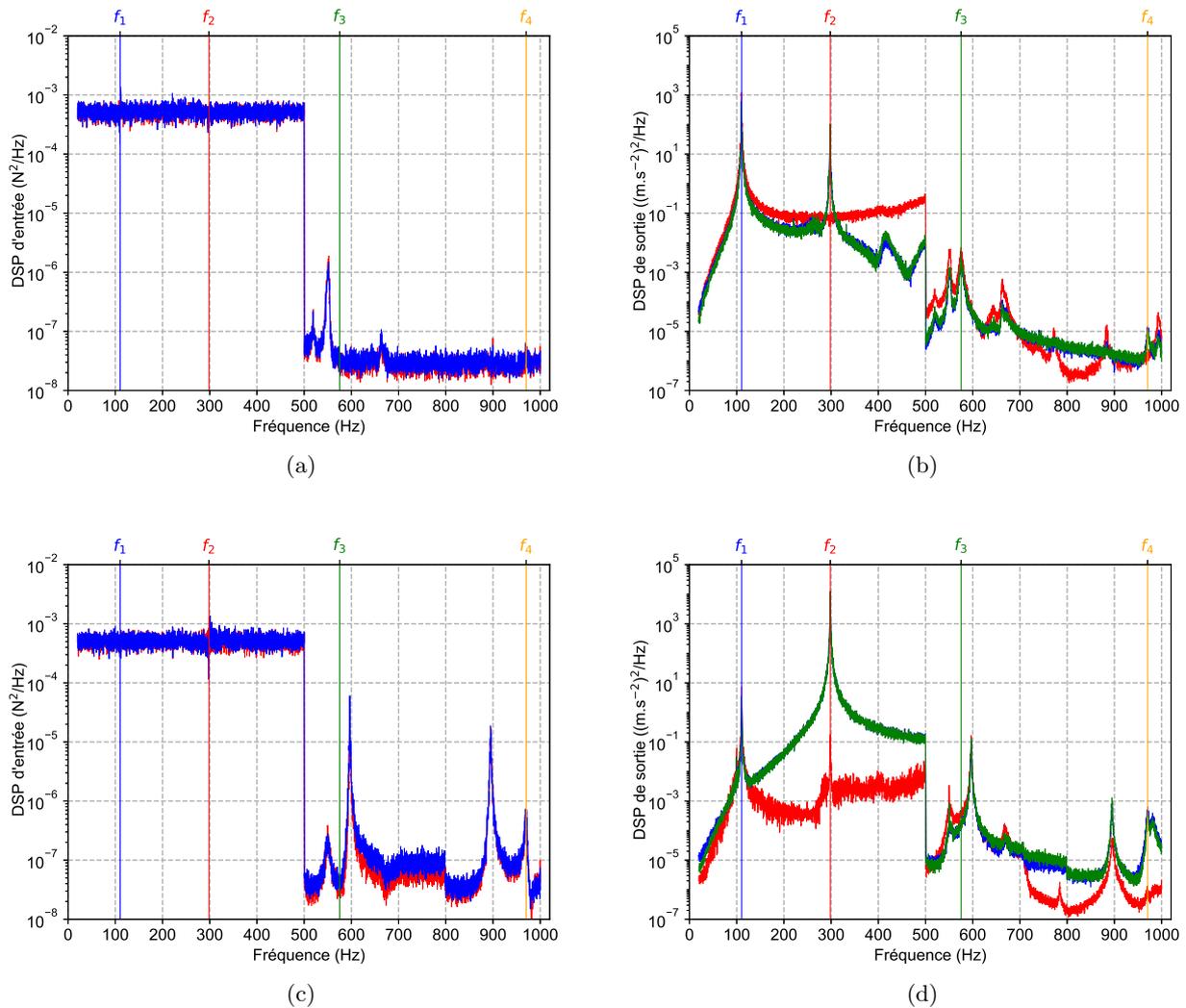


FIGURE 2.5 – DSP de sortie et d’entrée expérimentales de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz : (a-b) deux excitations aléatoires corrélées en phase ; (c-d) deux excitations aléatoires corrélées en opposition de phase ; (a-c) DSP d’entrée des excitateurs électrodynamiques S1 (bleu) et S2 (rouge) ; (b-d) DSP de sortie des accéléromètres A1 (rouge), A5 (bleu) et A6 (vert).

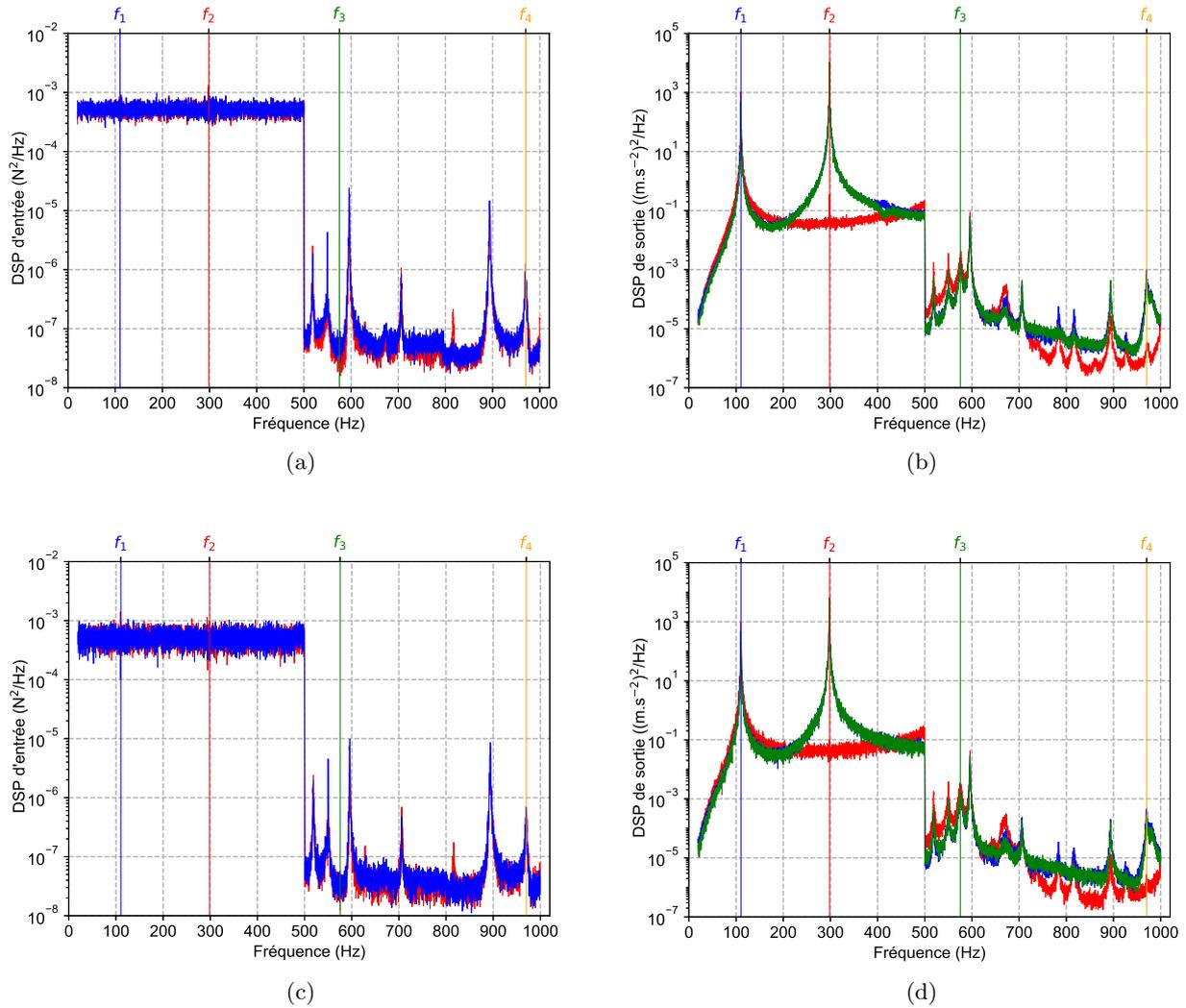


FIGURE 2.6 – DSP de sortie et d'entrée expérimentales de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz : (a-b) deux excitations aléatoires corrélées en quadrature de phase ; (c-d) deux excitations aléatoires décorrélées ; (a-c) DSP d'entrée des excitateurs électrodynamiques S1 (bleu) et S2 (rouge) ; (b-d) DSP de sortie des accéléromètres A1 (rouge), A5 (bleu) et A6 (vert).

Fréquence	DSP d'accélération ((m.s ⁻²) ² /Hz)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	$1 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^0$	$1 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^3$
f_2	-	-	-	-
f_3	$6 \cdot 10^{-3}$	-	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
f_4	$3 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
$2f_1 + f_2$	$2 \cdot 10^{-4}$	-	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
$5f_1$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
$2f_2$	-	$2 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$
$6f_1$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$f_1 + 2f_1$	-	-	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$7f_1$	$1 \cdot 10^{-5}$	-	-	-
$8f_1$	$1 \cdot 10^{-5}$	-	-	-
$3f_2$	-	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
$9f_1$	$4 \cdot 10^{-5}$	-	-	-

TABLEAU 2.10 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A1 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés.

Fréquence	DSP d'accélération ((m.s ⁻²) ² /Hz)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	$6 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$
f_2	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$
f_3	$3 \cdot 10^{-3}$	-	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
f_4	$1 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$2f_1 + f_2$	$4 \cdot 10^{-5}$	-	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$5f_1$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$2f_2$	-	$1 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
$6f_1$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$f_1 + 2f_1$	-	-	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$7f_1$	-	-	-	-
$8f_1$	-	-	-	-
$3f_2$	-	$8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$9f_1$	$1 \cdot 10^{-5}$	-	-	-

TABLEAU 2.11 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A5 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés.

Fréquence	DSP d'accélération ((m.s ⁻²) ² /Hz)			
	En phase	En opposition de phase	En quadrature de phase	Décorrélées
f_1	$6 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^0$	$5 \cdot 10^2$	$5 \cdot 10^2$
f_2	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$
f_3	$3 \cdot 10^{-3}$	-	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$
f_4	$1 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
$2f_1 + f_2$	$5 \cdot 10^{-5}$	-	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
$5f_1$	$1 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-4}$
$2f_2$	-	$1 \cdot 10^{-1}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$
$6f_1$	$8 \cdot 10^{-5}$	-	-	-
$f_1 + 2f_1$	-	-	$4 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$7f_1$	-	-	-	-
$8f_1$	-	-	-	-
$3f_2$	-	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
$9f_1$	$6 \cdot 10^{-6}$	-	-	-

TABLEAU 2.12 – Valeurs des pics expérimentaux des DSP de sortie pour l'accéléromètre A6 correspondant à une entrée expérimentale bi-points de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour les quatre types de corrélation étudiés.

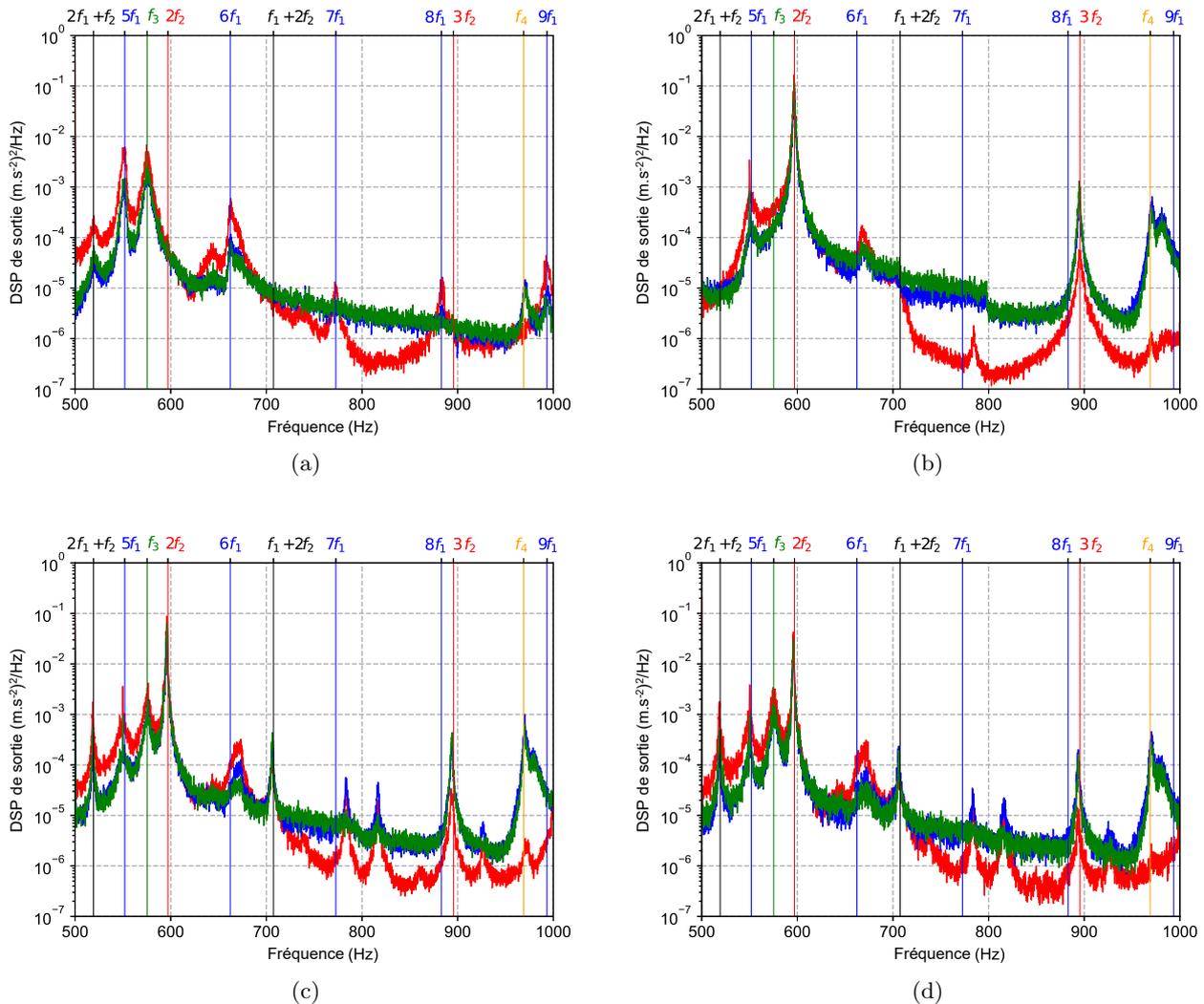


FIGURE 2.7 – DSP de sortie expérimentales sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour un niveau d’entrée de 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz pour l’accéléromètre A1 (courbes rouges), A5 (courbes bleues) et A6 (courbes vertes); les traits verticaux bleus représentent les harmoniques du premier mode de vibration; les traits verticaux rouges représentent les harmoniques du deuxième mode de vibration; les traits verticaux noirs représentent les combinaisons d’harmoniques; (a) deux excitations aléatoires corrélées en phase; (b) deux excitations aléatoires corrélées en opposition de phase; (c) deux excitations aléatoires corrélées en quadrature de phase; (d) deux excitations aléatoires décorréées.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude expérimentale complète sur la poutre bi-encastrée CEA est donnée. Avant de s'interroger sur la réponse dynamique de la poutre, une première étape d'analyse modale expérimentale au marteau de choc a été réalisée. Cette étape, essentielle à toute étude de structure dans le monde de l'ingénierie, a permis d'identifier les principaux modes de vibration de la poutre mais également les potentiels biais inhérents au dispositif expérimental qui pourraient apparaître lors des essais dynamiques. En effet, lors de cette analyse modale expérimentale, l'apparition de modes transverses met en évidence une composante transverse non souhaitée lors de la sollicitation de la poutre. De plus, l'analyse modale expérimentale permet une première validation initiale du modèle linéaire de la poutre, étape essentielle lors de la construction d'un modèle numérique d'une structure.

Dans les études expérimentales précédentes proposées dans les travaux de Claeys [8] et Roncen [58], la poutre était placée sur un excitateur électrodynamique et était soumise à une excitation sinusoïdale d'une part [8] et à une excitation aléatoire d'autre part [58]. La signature vibratoire non-linéaire de la poutre CEA à une excitation monopoint est alors bien identifiée. De ce fait, l'étude vibratoire présentée dans ce chapitre est complémentaire aux études précédentes puisqu'elle investigate la réponse vibratoire non-linéaire de la poutre à une excitation aléatoire multipoints.

Dès lors, un nouveau montage expérimental a été imaginé pour permettre une telle étude. Dans ce montage, deux excitateurs électrodynamiques sont montés en suspension et sollicitent la poutre CEA via des tiges excitatrices. La corrélation de l'excitation aléatoire multipoints se définit alors par le déphasage entre les deux efforts aléatoires temporels. Quatre types d'excitation aléatoire multipoints ont été imaginés pour étudier au mieux la signature expérimentale de la poutre à une excitation bi-points :

- deux efforts aléatoires en phase,
- deux efforts aléatoires en opposition de phase,
- deux efforts aléatoires en quadrature de phase,
- deux efforts aléatoires décorrélés.

La signature vibratoire de la poutre CEA soumise à ces quatre types d'excitation a été étudiée à travers deux campagnes expérimentales. La première campagne étudie la réponse vibratoire de la poutre sur l'ensemble de la bande fréquentielle d'excitation identifiée lors de l'analyse modale expérimentale. La seconde campagne est une campagne expérimentale originale adaptée des travaux précédents [58]. Elle permet de faire ressortir les contributions non-linéaires de la poutre en fonction du type d'excitation aléatoire multipoints. Pour ce faire, la bande fréquentielle d'excitation est divisée en deux et le niveau de l'excitation est choisi de manière à être considéré comme « élevé » sur la première bande fréquentielle et « faible » sur la seconde bande fréquentielle. Cela permet de faire apparaître dans cette seconde bande fréquentielle des contributions non-linéaires de modes sollicités dans la première bande fréquentielle.

Les résultats expérimentaux issus de ces deux campagnes permettent de caractériser la réponse vibratoire d'une poutre bi-encastée à une excitation aléatoire multipoints. Ils apportent des éléments de compréhension fine du comportement global et des contributions non-linéaires en fonction du choix de la corrélation entre les deux efforts aléatoires sollicitant la poutre. L'amplification et/ou l'atténuation de certains modes de flexion de la poutre est clairement observée selon la configuration de l'excitation. De plus, la signature non-linéaire identifiée se caractérise par la présence d'harmoniques de modes de vibration ou la combinaison de composantes harmoniques de ces modes. Une fois encore, la configuration de l'excitation permet d'amplifier et/ou d'atténuer ce phénomène non-linéaire avec l'observation de plus ou moins d'harmoniques et de combinaison de composantes harmoniques. L'ensemble de ces résultats expérimentaux vont servir de référence pour valider la modélisation de la poutre CEA et la méthodologie qui est retenue pour simuler la réponse dynamique non-linéaire du système soumis à des excitations aléatoires multipoints. En effet, l'un des objectifs de ces travaux de thèse est de montrer qu'un tel comportement vibratoire non-linéaire en fonction d'une excitation aléatoire multipoints peut être précisément modélisé et simulé. Aussi, le chapitre 3 qui suit a pour objectifs de proposer un modèle analytique de la poutre développé durant ces travaux, de présenter la technique numérique développée pour prédire les réponses non-linéaires ainsi que de donner les principaux résultats numériques qui sont comparés aux mesures présentées dans ce chapitre 2.

Pour rappel, l'ensemble des mesures présentées dans ce chapitre, c'est-à-dire les données d'entrées des deux cellules de force ainsi que les données de sortie des trois accéléromètres pour l'ensemble des essais réalisés, est disponible en libre accès [67].

Chapitre 3

Simulations vibratoires non-linéaires d'une poutre bi-encastree

La démarche de modélisation et de simulation de la réponse vibratoire non-linéaire de la poutre bi-encastree est présentée dans ce chapitre. Tout d'abord le modèle analytique de la structure est développé et adapté au montage expérimental présenté dans le chapitre 2. Les paramètres de ce modèle analytique sont recalés afin d'obtenir un modèle linéaire qui reproduise au mieux la réponse vibratoire linéaire en fonction de la corrélation d'une excitation aléatoire multipoints. Ensuite, le défi principal de la simulation est de retrouver les comportements non-linéaires sous sollicitations aléatoires multipoints mesurés expérimentalement. Un soin particulier a été porté à la modélisation qui prend en compte des conditions aux limites non-idéales, la présence des accéléromètres sur la structure ainsi que la potentielle présence d'une prétension statique dans la poutre bi-encastree. Ces travaux ont ensuite permis de mettre en œuvre une adaptation de la méthode classique d'équilibrage harmonique permettant d'estimer la réponse dynamique non-linéaire de la poutre à une excitation aléatoire multipoints.

La modélisation et l'étude numérique de systèmes de type poutre a reçu une attention considérable dans la littérature scientifique [34, 44]. Certains travaux se concentrent sur la modélisation de conditions aux limites non-idéales [66, 45, 16, 53, 27] pendant que d'autres proposent des méthodes numériques de simulation non-linéaire afin de prédire ou d'approcher le comportement vibratoire non-linéaire. Aussi, de nombreuses méthodes se retrouvent dans la littérature, à l'image de méthodes perturbatives [16] et du développement multi-échelles [41, 42]. Ces méthodes perturbatives sont limitées à des systèmes comprenant de "faibles" non-linéarités, ce qui n'est pas souhaitable pour l'étude vibratoire d'un modèle industriel éléments finis qui constitue la seconde application de ces travaux de thèse. Il existe alors d'autres méthodes numériques, telles que la méthode de l'équilibrage harmonique [26, 9, 72], la méthode de tir [54, 28, 59] ou la méthode Asymptotique Numérique couplée avec la méthode de l'équilibrage harmonique [20]. Les travaux précédents sur la poutre bi-encastree du CEA/CESTA [8, 58] ont permis de réaliser une étude comparative des différentes méthodes numériques existantes (en comparant notamment la méthode de tir à la méthode de l'équilibrage harmonique) et pour différentes types d'excitation (harmonique ou aléatoire). En outre, Roncen et al. [59] a directe-

ment comparé l'efficacité et la robustesse de ces techniques numériques pour la poutre soumise à une excitation aléatoire. Dans la lignée des travaux de Claeys et al. [9] et des travaux de Roncen et al. [59], ces travaux de thèse ne reprennent pas une étude comparative des méthodes numériques existantes mais ont pour but de prolonger les simulations avec une composante aléatoire sur des efforts multipoints. Aussi une des contributions de ces travaux de thèse est de proposer une extension de la méthode de l'équilibrage harmonique à une excitation aléatoire multipoints.

Une description de la modélisation de l'excitation aléatoire bi-points ainsi que le modèle analytique de la poutre bi-encastree sont donnés dans la première partie de ce chapitre. Les modes de flexion de la poutre sont ensuite calculés analytiquement, puis l'orthogonalité de la base modale est vérifiée dans la partie 3.4. Dès lors, le problème non-linéaire complet est écrit afin de prendre en compte les conditions expérimentales (conditions aux limites non-idéales, présence d'accéléromètres et prétension statique). La méthode de l'équilibrage harmonique adaptée à une excitation aléatoire est ensuite présentée dans la partie 3.6. Enfin, les résultats numériques sont discutés et comparés aux mesures expérimentales du chapitre 2 permettant ainsi de valider la stratégie de simulation de réponse vibratoire non-linéaire à une excitation aléatoire multipoints.

3.1 Modélisation de deux excitations aléatoires corrélées

Dans cette partie est détaillée la modélisation de deux excitations aléatoires corrélées, en repartant principalement des travaux de Shinozuka [62, 63]. L'idée principale, comme donnée dans le chapitre 1, est d'approcher toute excitation aléatoire réelle par une excitation aléatoire simulée gaussienne en utilisant le théorème central limite. Cela se réalise en générant une série finie de fonctions sinusoïdales d'amplitudes variées et de fréquences définies à intervalle régulier. L'avantage majeur de cette approche est de pouvoir utiliser directement cette modélisation dans la méthode de l'équilibrage harmonique qui est présentée dans la section 3.6 pour simuler une réponse vibratoire non-linéaire à une excitation aléatoire multipoints.

La modélisation de deux excitations aléatoires corrélées débute avec la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ (où ω désigne la pulsation), qui se définit pour deux excitations temporelles $f_1(t)$ et $f_2(t)$ par :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

où $S_{11}(\omega)$ et $S_{22}(\omega)$ sont respectivement les Densités Spectrales de Puissance (DSP) des excitations temporelles $f_1(t)$ et $f_2(t)$. $S_{21}(\omega)$ est la Densité Spectrale Croisée (DSC) des deux excitations temporelles $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Le type de corrélation étudiée dans ces travaux de thèse, c'est-à-dire une corrélation en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase ou une absence de corrélation est donné dans les termes extradiagonaux $S_{12}(\omega)$ et $S_{21}(\omega)$ à partir de l'équation :

$$S_{12}(\omega) = \sqrt{\gamma_{12}^2(\omega) S_{11}(\omega) S_{22}(\omega)} \exp(j\phi_{12}(\omega)) \quad (3.2)$$

Il est important de noter que l'équation (3.2) est la même équation que celle utilisée dans le dispositif expérimental (voir équation (2.1) dans le chapitre 2). Les paramètres $\gamma_{12}^2(\omega)$ et $\phi_{12}(\omega)$, représentant respectivement la cohérence et le déphasage de l'excitation aléatoire bi-points, sont définis dans la section 2.3 du chapitre 2 pour les quatre types d'excitations aléatoires multipoints étudiées. Grâce à la relation de Wiener-Khintchine, $\mathbf{S}(\omega)$ est définie positive [63] et de ce fait, elle se décompose suivant la transformation unique de Cholesky :

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{H}^*(\omega)^T \quad (3.3)$$

où les notations $*$ et $.^T$ indiquent respectivement le complexe conjugué et l'opérateur transposé. $\mathbf{H}(\omega)$ est une matrice triangulaire inférieure définie par :

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & 0 \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Les termes $H_{ij}(\omega)$ sont déterminés à partir de la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ par [62] :

$$H_{11}(\omega) = S_{11}(\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

$$H_{21}(\omega) = \frac{S_{21}(\omega)}{S_{11}(\omega)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

$$H_{22}(\omega) = (S_{22}(\omega) - |H_{21}(\omega)|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

Dès lors, les deux excitations temporelles aléatoires corrélées $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont données par :

$$f_1(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{n=1}^p |H_{11}(\omega_n)| \cos(\omega'_n t + \theta_{11}(\omega_n) + \phi_{1n}) \quad (3.8)$$

$$f_2(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{n=1}^p |H_{21}(\omega_n)| \cos(\omega'_n t + \theta_{21}(\omega_n) + \phi_{1n}) \quad (3.9)$$

$$+ \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{n=1}^p |H_{22}(\omega_n)| \cos(\omega'_n t + \theta_{22}(\omega_n) + \phi_{2n})$$

où chaque paramètre des équations (3.8) et (3.9) se définit par :

- p est l'ordre de la série de fonctions sinusoidales. Il doit être sous la forme d'une puissance de 2 afin d'utiliser la Transformée de Fourier Rapide (ou FFT pour « Fast Fourier Transform ») pour la méthode de l'équilibrage harmonique (voir section 3.6) ;
- $\Delta\omega$ correspond au pas de pulsation sur la bande $[\omega_{min}, \omega_{max}]$. Il est donné par $\Delta\omega = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{p}$;
- ω_n correspond à la pulsation discrétisée [63]. Elle est donnée par $\omega_n = \omega_{min} + (n - \frac{1}{2}) \Delta\omega$. Pour la simulation numérique, cette discrétisation fréquentielle est utile pour les algorithmes utilisant les FFT [70] ;
- ω'_n est défini par $\omega'_n = \omega_n + \delta\omega_n$, où $\delta\omega_n$ est une petite pulsation aléatoire introduite par Shinozuka [62, 63] pour éviter la périodicité de l'excitation aléatoire simulée. Dans ces travaux de thèse, afin d'utiliser la méthode de l'équilibrage harmonique (voir section 3.6), il est nécessaire d'avoir une excitation périodique donc il est nécessaire que $\delta\omega_n = 0$ et $\omega'_n = \omega_n$;
- $\theta_{ij}(\omega_n)$ est défini par :

$$\theta_{ij}(\omega_n) = \tan^{-1} \left(\frac{\Im(H_{ij}(\omega_n))}{\Re(H_{ij}(\omega_n))} \right) \quad (3.10)$$

où \Im et \Re sont respectivement les parties imaginaire et réelle d'un nombre complexe quelconque. Grâce à la relation de Wiener-Khintchine, $\mathbf{S}(\omega)$ est une matrice hermitienne, ce qui entraîne $\theta_{11}(\omega_n) = \theta_{22}(\omega_n) = 0$. Le déphasage entre les deux excitations temporelles $f_1(t)$ et $f_2(t)$ provient ainsi de la variable $\theta_{21}(\omega_n)$;

- ϕ_{1n} et ϕ_{2n} sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de distribution uniforme entre 0 et 2π . Elles représentent les phases aléatoires de chaque fonction sinusoidale de la série définissant chaque excitation. Le caractère aléatoire de l'excitation provient de ces variables aléatoires.

D'un point de vue numérique, générer de telles séries peut devenir un inconvénient au niveau du temps de calcul et de la mémoire vive utilisée lorsque p devient trop important. Puisque l'ordre de la série est sous la forme d'une puissance de 2 et que la discrétisation fréquentielle est correctement définie, il est possible d'utiliser les techniques de FFT pour accélérer le processus de génération d'une telle série [70]. Les équations (3.8) et (3.9) se réécrivent :

$$f_1(t_n) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\mathbf{H}_{11} e^{j\phi_1} \right) [n] \right) \quad (3.11)$$

$$f_2(t_n) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\mathbf{H}_{21} e^{j\phi_1} \right) [n] \right) + \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\mathbf{H}_{22} e^{j\phi_2} \right) [n] \right) \quad (3.12)$$

où la notation \mathbf{FFT}^{-1} désigne la Transformée de Fourier Rapide Inverse et j désigne le nombre complexe $\sqrt{-1}$. La notation $\mathbf{x}[n]$ indique le n -ième terme du vecteur \mathbf{x} . \mathbf{H}_{11} , \mathbf{H}_{21} , \mathbf{H}_{22} , ϕ_1 et ϕ_2 sont respectivement les vecteurs définis par $\mathbf{H}_{11}[n] = H_{11}(\omega_n)$, $\mathbf{H}_{21}[n] = H_{21}(\omega_n)$, $\mathbf{H}_{22}[n] = H_{22}(\omega_n)$, $\phi_1[n] = \phi_{1n}$ et $\phi_2[n] = \phi_{2n}$. t_n est le temps discrétisé $t_n = ndt$ où dt est le pas de temps.

Dans leur modélisation, Poirion et al. [49] ajoutent une nouvelle variable aléatoire indépendante par excitation pour pondérer l'amplitude de chaque fonction sinusoidale afin de respecter la transformation de Box et Muller [4]. Ainsi, ils s'assurent que l'excitation aléatoire simulée est gaussienne quel que soit l'entier p , alors que pour la modélisation de Shinozuka et al. [62, 63], l'excitation simulée est asymptotiquement gaussienne, c'est-à-dire lorsque $p \rightarrow \infty$. Dans ces travaux, afin de lisser au mieux les courbes simulées à un niveau d'excitation donné et identique à celui des essais (voir section 2.4), cette variable aléatoire n'est pas prise en compte. Ces courbes sont données dans la section 3.7.

En conclusion, à partir de la matrice de densité spectrale croisée, il est possible de simuler deux excitations temporelles aléatoires corrélées ou décorrélées. Ces deux excitations se retrouvent dans le modèle analytique de la poutre donné dans la section 3.2 suivante.

3.2 Modèle de la poutre avec prétension statique

Un modèle continu de la poutre est développé à partir des précédents travaux de Nayfeh [41] ainsi que des travaux de thèse de Claeys [8] et Roncen [58]. Les caractéristiques de la poutre sont supposées constantes en fonction de l'abscisse. Le faible rapport épaisseur sur longueur de la poutre étudiée permet de négliger les termes non-linéaires d'inertie et de courbure qui sont mis en avant par Nayfeh [41]. Un amortissement linéaire visqueux est ajouté au modèle pour prendre en compte la dissipation dans l'équation différentielle dynamique avec deux sources d'excitation. L'équation du modèle poutre retenu prend la forme :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = F_1(x_{F_1}, t) + F_2(x_{F_2}, t) + T(t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.13)$$

Toutes les notations sont définies dans les tableaux 3.1 et 3.2. Les deux sources d'excitation sont notées $F_1(x_{F_1}, t)$ et $F_2(x_{F_2}, t)$ et sont positionnées respectivement aux abscisses x_{F_1} et x_{F_2} .

$T(t)$ est la tension dans la poutre qui est invariante en fonction de l'abscisse x et qui vérifie la relation :

$$T(t) = T_0 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) \forall x \in [0, 2l] \quad (3.14)$$

où T_0 est une prétension statique introduite dans ces travaux. Dans ce modèle, contrairement aux études précédentes [8, 58], la force excitatrice totale n'est pas symétrique par rapport au centre de la poutre. Ainsi, il n'est pas possible de restreindre le modèle à sa demi-longueur $[0, l]$ et l'étude du modèle doit être effectuée sur toute la plage $[0, 2l]$. La notation l est gardée comme étant la demi-longueur de la poutre par respect pour les modèles développés dans les travaux de thèse sur le sujet [8, 58]. Il est

t	Temps
x	Abscisse
w	Déplacement transverse
u	Déplacement longitudinal
μ	Coefficient linéaire d'amortissement visqueux
x_{F_1}	Abscisse de la première source d'excitation
x_{F_2}	Abscisse de la seconde source d'excitation

TABLEAU 3.1 – Notations.

Notation	Paramètre physique	Valeur
ρ	Masse volumique	7850 kg.m^{-3}
A	Section de la poutre	10^{-4} m^2
I	Moment d'inertie de la section	$2.08 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$
E	Module d'Young	$205 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
l	Demi-longueur de la poutre	0.235 m

TABLEAU 3.2 – Valeur des paramètres physiques de la poutre.

important de noter, par rapport aux travaux précédents [8, 58], que la longueur de la poutre l n'est plus un paramètre du modèle à ajuster. La prétension statique T_0 devient le paramètre de recalage pour la comparaison essais-calculs.

Les conditions aux limites sont détaillées dans les équations (3.15), (3.16) et (3.17) et sont schématisées sur la figure 3.1.

$$T(0) = k_{liaison}u(0) \quad , \quad T(2l) = -k_{liaison}u(2l) \quad (3.15)$$

$$w(0) = 0 \quad , \quad w(2l) = 0 \quad (3.16)$$

$$EI \frac{\partial^2 w(0)}{\partial x^2} = k_{rot} \frac{\partial w(0)}{\partial x} \quad , \quad EI \frac{\partial^2 w(2l)}{\partial x^2} = -k_{rot} \frac{\partial w(2l)}{\partial x} \quad (3.17)$$

Ces conditions aux limites ont été introduites dans le modèle précédent [8, 58]. Elles s'expliquent

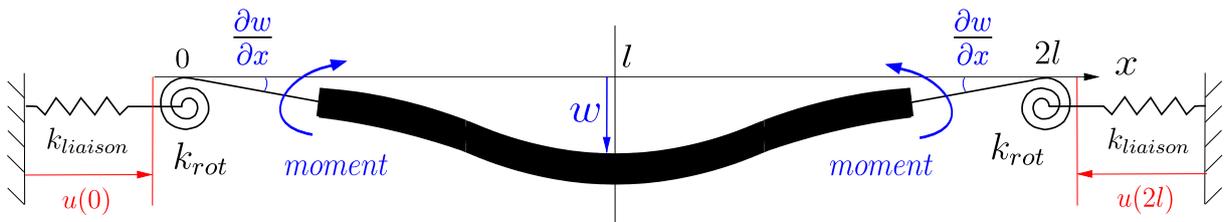


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites du modèle de poutre continu.

par le fait que les blocs d'encastrement sont rigoureusement déformables et peuvent fléchir sous l'effet d'une forte tension dans la poutre ou d'un effort tranchant important au niveau des encastresments. Elles sont caractérisées par des raideurs $k_{liaison}$ et k_{rot} qui sont des paramètres inconnus et qui sont recalés dans le modèle numérique. D'autres approches pour la définition de conditions aux limites non idéales existent dans la littérature à l'image de l'approche de Rezaei et Zamanian [53].

La tension dans la poutre $T(t)$ est invariante en fonction de l'abscisse x . Il vient :

$$\int_0^{2l} T(t) dx = T(t)2l = T_0 2l + EA \left(\int_0^{2l} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^{2l} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \quad (3.18)$$

En considérant l'équation (3.15), les conditions aux limites sur la tension donnent :

$$T(t)2l = T_0 2l + EA \left(-\frac{T(t)}{k_{liaison}} - \frac{T(t)}{k_{liaison}} + \int_0^{2l} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \quad (3.19)$$

Enfin, la tension dans la poutre $T(t)$ s'exprime :

$$T(t) = \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \left(T_0 + \frac{EA}{4l} \int_0^{2l} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \quad (3.20)$$

Le problème non-linéaire continu associé à ces conditions aux limites et à la prétension statique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= \frac{1}{\rho A} F_1(x_{F_1}, t) + \frac{1}{\rho A} F_2(x_{F_2}, t) \\ &+ \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{T_0}{\rho A} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &+ \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{E}{4l\rho} \int_0^{2l} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

En retirant le terme d'amortissement, les sources d'excitation et le terme non-linéaire, l'équation homogène associée à l'équation (3.21) est :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{T_0}{\rho A} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.22)$$

Désormais, il est dénommé la variable α telle que $\alpha = \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{T_0}{\rho A}$ et la technique de séparation des variables temporelles et spatiales est appliquée :

$$w(x, t) = f(t)g(x) \quad (3.23)$$

L'équation (3.22) devient :

$$f_{tt}g + \frac{EI}{\rho A} f g_{xxxx} - \alpha f g_{xx} = 0 \quad (3.24)$$

où la notation s_{xt} représente la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial s}{\partial x}$ d'une fonction $s(x, t)$. Traditionnellement, en isolant d'un côté les fonctions dépendantes de la variable temporelle et de l'autre côté les fonctions dépendantes de la variable spatiale, l'égalité des deux côtés, une constante C est mise en évidence telle que :

$$\frac{f_{tt}}{f} = -\frac{EI}{\rho A} \frac{g_{xxxx}}{g} + \alpha \frac{g_{xx}}{g} = C = -\omega^2 \quad (3.25)$$

La fonction g est alors solution de :

$$\frac{EI}{\rho A} g_{xxxx} - \alpha g_{xx} - \omega^2 g = 0 \quad (3.26)$$

La fonction g est choisie sous la forme $g(x) = \exp\left(\frac{\lambda x}{2l}\right)$ où λ est un paramètre modal. Il vient :

$$\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^4 - \alpha \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^2 - \omega^2 = 0 \quad (3.27)$$

Une expression de la pulsation ω d'un mode propre est alors :

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho A} \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^4 - \alpha \left(\frac{\lambda}{2l}\right)^2} \quad (3.28)$$

S'il n'y a pas de prétension statique T_0 , alors $\alpha = 0$ et la pulsation traditionnelle d'un mode d'une poutre bi-encastree est retrouvée [1].

3.3 Calcul des modes propres

Afin de calculer la forme des modes propres de la poutre bi-encastree avec des conditions aux limites non-idéales et une prétension statique, il convient d'étudier l'équation caractéristique pour le i -ème mode de flexion de la poutre :

$$\frac{EI}{\rho A} z^4 - \alpha z^2 - \omega_i^2 = 0 \quad (3.29)$$

La variable u est définie telle que $u = z^2$, ce qui conduit à :

$$\frac{EI}{\rho A} u^2 - \alpha u - \omega_i^2 = 0 \quad (3.30)$$

Le discriminant Δ_i est classiquement donné par :

$$\Delta_i = \alpha^2 + 4 \frac{EI}{\rho A} \omega_i^2 \geq 0 \quad (3.31)$$

Les deux solutions de l'équation (3.30) sont alors définies par :

$$u_{\pm, i} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\Delta_i}}{2 \frac{EI}{\rho A}} \quad (3.32)$$

Alors, les quatre solutions de l'équation (3.29) sont :

$$z_{1,i} = +\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad , \quad z_{2,i} = -\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad (3.33)$$

$$z_{3,i} = +j\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad , \quad z_{4,i} = -j\sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad (3.34)$$

Les variables $\tau_{1,i}$ et $\tau_{2,i}$ sont introduites par les expressions suivantes :

$$\tau_{1,i} = \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad , \quad \tau_{2,i} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta_i}}{2\frac{EI}{\rho A}}} \quad (3.35)$$

Enfin, le i -ème mode de flexion de la poutre $Y_i(x)$ s'écrit :

$$Y_i(x) = \alpha_i \sin(\tau_{1,i}x) + \beta_i \cos(\tau_{1,i}x) + \gamma_i \sinh(\tau_{2,i}x) + \delta_i \cosh(\tau_{2,i}x) \quad (3.36)$$

Dans le cas d'une absence de prétension statique $T_0 = 0$, il suit $\alpha = 0$ et $\tau_{1,i} = \tau_{2,i} = \frac{\lambda_i}{2l}$ comme ce qui était donné dans le modèle précédent [8, 58].

Les coefficients α_i , β_i , γ_i et δ_i peuvent être déterminés à partir des quatre conditions aux limites du problème définies par :

$$Y_i(0) = 0 \quad , \quad Y_i(2l) = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_i(0)}{dx^2} = \frac{dY_i(0)}{dx} \quad , \quad \frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_i(2l)}{dx^2} = -\frac{dY_i(2l)}{dx} \quad (3.38)$$

En définissant la variable $\eta = \frac{EI}{k_{rot}}$ ($\eta = 0$ dans le cas d'un encastrement parfait), les coefficients α_i , β_i , γ_i et δ_i sont alors solutions de :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \tau_{1,i} & \eta\tau_{1,i}^2 & \tau_{2,i} & -\eta\tau_{2,i}^2 \\ \sin(\tau_{1,i}2l) & \cos(\tau_{1,i}2l) & \sinh(\tau_{2,i}2l) & \cosh(\tau_{2,i}2l) \\ h_1(\tau_{1,i}, \eta) & h_2(\tau_{1,i}, \eta) & h_3(\tau_{2,i}, \eta) & h_4(\tau_{2,i}, \eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \\ \delta_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

avec :

$$h_1(\tau_{1,i}, \eta) = -\eta\tau_{1,i}^2 \sin(\tau_{1,i}2l) + \tau_{1,i} \cos(\tau_{1,i}2l) \quad (3.40)$$

$$h_2(\tau_{1,i}, \eta) = -\eta\tau_{1,i}^2 \cos(\tau_{1,i}2l) - \tau_{1,i} \sin(\tau_{1,i}2l) \quad (3.41)$$

$$h_3(\tau_{2,i}, \eta) = \eta\tau_{2,i}^2 \sinh(\tau_{2,i}2l) + \tau_{2,i} \cosh(\tau_{2,i}2l) \quad (3.42)$$

$$h_4(\tau_{2,i}, \eta) = \eta\tau_{2,i}^2 \cosh(\tau_{2,i}2l) + \tau_{2,i} \sinh(\tau_{2,i}2l) \quad (3.43)$$

Finalement, chaque paramètre modal λ_i est déterminé en recherchant les zéros du déterminant de la matrice 4x4 introduite dans l'équation (3.39), puis chaque forme modale Y_i est connue. Les quatre premiers modes propres (les deux modes symétriques et les deux modes antisymétriques) sont tracés sur la figure 3.2, avec la présence d'une prétension statique et de conditions aux limites non-idéales.

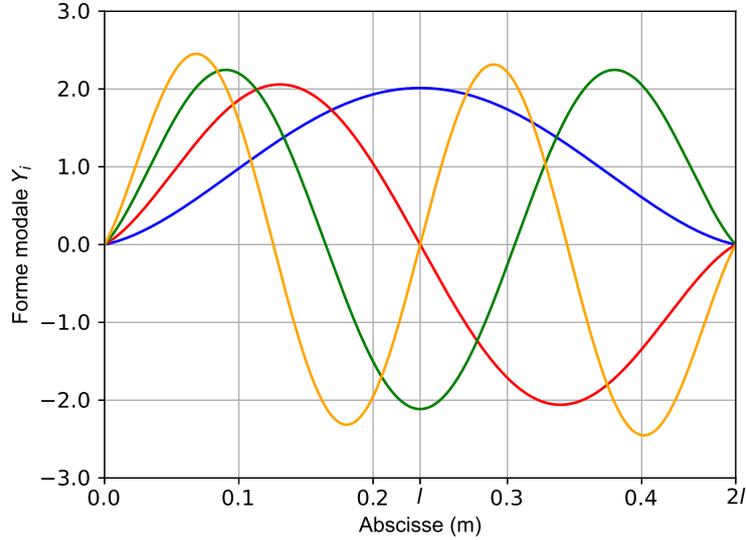


FIGURE 3.2 – Les quatre premières formes modales en fonction de l'abscisse x le long de la poutre : 1er mode (bleu), 2ème mode (rouge), 3ème mode (vert) et 4ème mode (orange).

3.4 Orthogonalité des modes de vibration

Dans cette partie est démontrée l'orthogonalité des modes de vibration, ce qui est une étape nécessaire à vérifier avant la projection du problème non-linéaire continu sur la base modale. En effet, en présence de nouvelles conditions aux limites non-idéales, l'orthogonalité n'est pas systématiquement vérifiée. Pour de très faibles valeurs de prétension statique ($\alpha \rightarrow 0$), pour le i -ème mode de vibration, il vient l'expression suivante :

$$\frac{d^4 Y_i(x)}{dx^4} = \left(\frac{\lambda_i}{2l}\right)^4 Y_i(x) \quad (3.44)$$

Cette équation est valable également pour le j -ème mode (avec $j \neq i$). Cela donne :

$$\left(\left(\frac{\lambda_i}{2l}\right)^4 - \left(\frac{\lambda_j}{2l}\right)^4\right) Y_i(x)Y_j(x) = \frac{d^4 Y_i(x)}{dx^4} Y_j(x) - \frac{d^4 Y_j(x)}{dx^4} Y_i(x) \quad (3.45)$$

En effectuant quatre intégrations par parties, la forme suivante se retrouve :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\lambda_i}{2l}\right)^4 - \left(\frac{\lambda_j}{2l}\right)^4\right) \int_0^{2l} Y_i(x)Y_j(x)dx &= \left[\frac{d^3 Y_i(x)}{dx^3} Y_j(x)\right]_0^{2l} - \left[\frac{d^2 Y_i(x)}{dx^2} \frac{dY_j(x)}{dx}\right]_0^{2l} \\ &\quad - \left[\frac{d^3 Y_j(x)}{dx^3} Y_i(x)\right]_0^{2l} + \left[\frac{d^2 Y_j(x)}{dx^2} \frac{dY_i(x)}{dx}\right]_0^{2l} \end{aligned} \quad (3.46)$$

En considérant les conditions aux limites (3.37) et (3.38) appliquées aux modes i et j , il est obtenu la simplification suivante :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\lambda_i}{2l} \right)^4 - \left(\frac{\lambda_j}{2l} \right)^4 \right) \int_0^{2l} Y_i(x) Y_j(x) dx &= \frac{d^2 Y_i(2l)}{dx^2} \frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_j(2l)}{dx^2} + \frac{d^2 Y_i(0)}{dx^2} \frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_j(0)}{dx^2} \\ &- \frac{d^2 Y_j(2l)}{dx^2} \frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_i(2l)}{dx^2} - \frac{d^2 Y_j(0)}{dx^2} \frac{EI}{k_{rot}} \frac{d^2 Y_i(0)}{dx^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

Alors, les modes de vibration avec ces conditions aux limites non-idéales sont orthogonaux avec le produit scalaire $\langle Y_i, Y_j \rangle = \int_0^{2l} Y_i Y_j dx$.

Maintenant que l'orthogonalité des modes de vibration a été démontrée, l'étape de projection du problème non-linéaire (3.21) continu associé aux conditions aux limites non-idéales et à la prétension statique est détaillée. Afin de simplifier la lecture, cette projection est détaillée en distinguant les membres de droite et les membres de gauche de l'équation (3.21).

Avant cela, le déplacement transverse $w(x, t)$ peut traditionnellement s'écrire sous la forme d'un produit de fonctions à une dimension tel que :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{N_m} a_i w_i(t) Y_i(x) \quad (3.48)$$

avec N_m le nombre de modes de vibration retenus. Pour la suite de notre étude, il est pris $N_m = 5$ (en lien avec les résultats expérimentaux du chapitre 2). $Y_i(x)$ définit le i -ème mode de vibration donné dans l'équation (3.36), $w_i(t)$ sont les fonctions inconnues qui sont déterminées par la suite par la méthode de l'équilibrage harmonique présentée dans la section 3.6. Les coefficients a_i correspondent à des paramètres dont l'expression est précisée dans ce qui suit.

Premièrement, le côté gauche de l'équation (3.21) est considéré :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.49)$$

En considérant l'équation (3.48), ce côté gauche se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{N_m} a_i Y_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \sum_{i=1}^{N_m} a_i Y_i \frac{dw_i}{dt} + \frac{EI}{\rho A} \sum_{i=1}^{N_m} a_i w_i \frac{d^4 Y_i}{dx^4} - \alpha \sum_{i=1}^{N_m} a_i w_i \frac{d^2 Y_i}{dx^2} \quad (3.50)$$

Grâce à la définition de la pulsation de chaque mode propre donnée par l'équation (3.28), il suit :

$$\sum_{i=1}^{N_m} a_i Y_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \sum_{i=1}^{N_m} a_i Y_i \frac{dw_i}{dt} + \sum_{i=1}^{N_m} \omega_i^2 a_i w_i Y_i \quad (3.51)$$

Cette équation est projetée sur le i -ème mode de vibration avec le produit scalaire $\langle Y_i, Y_j \rangle = \int_0^{2l} Y_i Y_j dx$. En considérant l'orthogonalité des modes de vibration entre eux démontrée précédemment, l'expression se simplifie :

$$a_i \frac{d^2 w_i}{dt^2} \int_0^{2l} Y_i^2(x) dx + \frac{\mu}{\rho A} a_i \frac{dw_i}{dt} \int_0^{2l} Y_i^2(x) dx + \omega_i^2 a_i w_i \int_0^{2l} Y_i^2(x) dx \quad (3.52)$$

Les paramètres a_i sont alors définis par :

$$a_i = \left[\int_0^{2l} Y_i^2(x) dx \right]^{-1} \quad (3.53)$$

Finalement, le terme de gauche de l'équation (3.21) projetée sur la base modale s'écrit :

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} + \frac{\mu}{\rho A} \frac{dw_i}{dt} + \omega_i^2 w_i \quad (3.54)$$

Désormais, les paramètres a_i étant déterminés, l'étape de la projection du problème non-linéaire continu pour le terme de droite de l'équation (3.21) est détaillée :

$$\frac{1}{\rho A} F_1(x_{F_1}, t) + \frac{1}{\rho A} F_2(x_{F_2}, t) + \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{E}{4l\rho} \int_0^{2l} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.55)$$

$F_1(x_{F_1}, t)$ et $F_2(x_{F_2}, t)$ sont des forces ponctuelles, elles sont mises sous la forme suivante :

$$F_1(x_{F_1}, t) = f_1(t) \delta(x, x_{F_1}) \quad (3.56)$$

$$F_2(x_{F_2}, t) = f_2(t) \delta(x, x_{F_2}) \quad (3.57)$$

où $\delta(x, x_k)$ est une distribution de Dirac définie à l'abscisse x pour toute fonction f par :

$$\forall (a, b) \in [0, 2l]^2 \int_a^b \delta(x, x_k) f(x) dx = \begin{cases} f(x_k) & \text{si } x_k \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.58)$$

Grâce à la définition de la pulsation de chaque mode propre donnée par l'équation (3.28), il suit :

$$\frac{1}{\rho A} f_1 \delta(x, x_{F_1}) + \frac{1}{\rho A} f_2 \delta(x, x_{F_2}) + \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}} \right)^{-1} \frac{E}{4l\rho} \int_0^{2l} \left(\sum_{i=1}^{N_m} a_i w_i \frac{dY_i}{dx} \right)^2 dx \sum_{i=1}^{N_m} a_i w_i \frac{d^2 Y_i}{dx^2} \quad (3.59)$$

Cette équation est projetée sur le i -ème mode de vibration avec le produit scalaire $\langle Y_i, Y_j \rangle = \int_0^{2l} Y_i Y_j dx$. En considérant l'orthogonalité des modes de vibration entre eux démontrée précédemment, l'expression se simplifie :

$$\Gamma_{i,1} f_1 + \Gamma_{i,2} f_2 + \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \Gamma_{ijkm} w_j w_k w_m \quad (3.60)$$

où :

$$\Gamma_{i,1} = \frac{1}{\rho A} \int_0^{2l} \delta(x, x_{F_1}) Y_i(x) dx = \frac{1}{\rho A} Y_i(x_{F_1}) \quad (3.61)$$

$$\Gamma_{i,2} = \frac{1}{\rho A} \int_0^{2l} \delta(x, x_{F_2}) Y_i(x) dx = \frac{1}{\rho A} Y_i(x_{F_2}) \quad (3.62)$$

$$\Gamma_{ijkm} = -\frac{E}{4l\rho} \left(1 + \frac{EA}{lk_{liaison}}\right)^{-1} a_j a_k a_m \int_0^{2l} \frac{dY_j}{dx} \frac{dY_k}{dx} dx \int_0^{2l} \frac{dY_i}{dx} \frac{dY_m}{dx} dx \quad (3.63)$$

L'équation de mouvement de la poutre bi-encastree (3.21) est projetée sur la base modale et l'équation projetée pour le i -ème mode de vibration s'écrit :

$$\ddot{w}_i + \frac{\mu}{\rho A} \dot{w}_i + \omega_i^2 w_i = \Gamma_{i,1} f_1 + \Gamma_{i,2} f_2 + \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \Gamma_{ijkm} w_j w_k w_m \quad (3.64)$$

3.5 Problème non-linéaire complet

Après avoir établi la forme de chaque mode de vibration de la poutre aux conditions d'encastrement non-idéales avec une précontrainte statique, il est possible d'écrire le problème non-linéaire complet sous forme matricielle afin de prendre en compte les différentes composantes expérimentales extérieures, c'est-à-dire les accéléromètres, les deux blocs d'encastrement et la précontrainte statique.

Concernant plus spécifiquement la prise en compte d'une masse additionnelle du fait de la présence des trois accéléromètres sur la poutre (accéléromètres A1, A5 et A6), des études préliminaires ont effectivement permis de montrer que ces éléments ont un effet non négligeable. Aussi leur apport permet un recalage au niveau des fréquences des différents modes de flexion de la poutre. Pour ce qui est des deux blocs d'encastrement, la contribution additionnelle correspond à la possibilité de rotation de la poutre au niveau de chaque extrémité et à caractériser la liaison poutre bloc d'encastrement par l'intermédiaire de deux jonctions en raideur comme illustré sur la figure 3.1.

Pour écrire le problème non-linéaire complet, il faut déterminer les énergies cinétique et potentielle de l'ensemble du système complet suivant : la poutre, les deux blocs d'encastrement, les trois accéléromètres (A1, A5 et A6), et la précontrainte statique. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle totales définies par les grandeurs E_c et E_p de la poutre sont :

$$E_c = E_{c,poutre} + E_{c,m_{A1}} + E_{c,m_{A5}} + E_{c,m_{A6}} \quad (3.65)$$

$$E_p = E_{p,poutre} + E_{p,k_0} + E_{p,k_{2l}} + E_{p,T_0} \quad (3.66)$$

avec $E_{c,poutre}$ l'énergie cinétique liée à la poutre, $E_{c,m_{A1}}$ l'énergie cinétique liée à l'accéléromètre A1, $E_{c,m_{A5}}$ l'énergie cinétique liée à l'accéléromètre A5 et $E_{c,m_{A6}}$ l'énergie cinétique liée à l'accéléromètre A6. $E_{p,poutre}$, E_{p,k_0} , $E_{p,k_{2l}}$, E_{p,T_0} correspondent respectivement à l'énergie potentielle liée à la poutre,

l'énergie potentielle liée au bloc d'encastrement situé à $x = 0$, l'énergie potentielle liée au bloc d'encastrement situé à $x = 2l$ et l'énergie potentielle liée à la précontrainte statique introduite T_0 . Chacune de ces contributions s'exprime sous la forme :

$$E_{c,poutre} = \frac{1}{2} \int_0^{2l} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dt \quad , \quad E_{p,poutre} = \frac{1}{2} \int_0^{2l} EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3.67)$$

$$E_{p,k_0} = \frac{1}{2} k_{rot} \left(\frac{\partial w(0)}{\partial x} \right)^2 \quad , \quad E_{p,k_{2l}} = \frac{1}{2} k_{rot} \left(\frac{\partial w(2l)}{\partial x} \right)^2 \quad (3.68)$$

$$E_{p,T_0} = \frac{1}{2} \int_0^{2l} T_0 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad , \quad E_{c,m_{A1}} = \frac{1}{2} m_{A1} \left(\frac{\partial w(x_{A1})}{\partial t} \right)^2 \quad (3.69)$$

$$E_{c,m_{A5}} = \frac{1}{2} m_{A5} \left(\frac{\partial w(x_{A5})}{\partial t} \right)^2 \quad , \quad E_{c,m_{A6}} = \frac{1}{2} m_{A6} \left(\frac{\partial w(x_{A6})}{\partial t} \right)^2 \quad (3.70)$$

où chaque paramètre physique ρ , A , E , I , l est donné dans le tableau 3.2. k_{rot} est la raideur d'encastrement introduite dans les conditions aux limites données dans la section 3.2. m_{A1} est la masse de l'accéléromètre A1 situé en abscisse x_{A1} , m_{A5} est la masse de l'accéléromètre A5 situé en abscisse x_{A5} , m_{A6} est la masse de l'accéléromètre A6 situé en abscisse x_{A6} . Les matrices de masse et de raideur du système complet (la poutre, les accéléromètres, les raideurs d'encastrement et la prétension statique) peuvent s'exprimer dans la base des modes propres sous la forme :

$$E_p \approx \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{K} \mathbf{w} \quad , \quad E_c \approx \frac{1}{2} \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{w}} \quad (3.71)$$

avec la matrice de masse du système complet \mathbf{M} et la matrice de raideur du système complet \mathbf{K} définies par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{poutre} + \mathbf{M}^{m_{A1}} + \mathbf{M}^{m_{A5}} + \mathbf{M}^{m_{A6}} \quad (3.72)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{poutre} + \mathbf{K}^{k_0} + \mathbf{K}^{k_{2l}} + \mathbf{K}^{T_0} \quad (3.73)$$

En considérant les équations (3.67) à (3.70) et l'équation (3.48), les expressions des termes K_{ij} et M_{ij} (avec i l'indice de ligne de la matrice et j l'indice de colonne de la matrice) s'écrivent :

$$K_{ij}^{poutre} = \int_0^{2l} EI a_i a_j Y_i''(x) Y_j''(x) dx \quad , \quad K_{ij}^{T_0} = \int_0^{2l} T_0 2l a_i a_j Y_i'(x) Y_j'(x) dx \quad (3.74)$$

$$K_{ij}^{k_0} = k_{rot} a_i a_j Y_i'(0) Y_j'(0) \quad , \quad K_{ij}^{k_{2l}} = k_{rot} a_i a_j Y_i'(2l) Y_j'(2l) \quad (3.75)$$

$$M_{ij}^{poutre} = \int_0^{2l} \rho A a_i a_j Y_i(x) Y_j(x) dx \quad , \quad M_{ij}^{m_{A1}} = m_{A1} a_i a_j Y_i(x_{A1}) Y_j(x_{A1}) \quad (3.76)$$

$$M_{ij}^{m_{A5}} = m_{A5} a_i a_j Y_i(x_{A5}) Y_j(x_{A5}) \quad , \quad M_{ij}^{m_{A6}} = m_{A6} a_i a_j Y_i(x_{A6}) Y_j(x_{A6}) \quad (3.77)$$

Il est important de noter qu'à partir du problème aux valeurs propres généralisé $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0}$, il est possible d'estimer les nouvelles pulsations propres du système complet Ω_i adapté au contexte expérimental (présence des accéléromètres, de la potentielle prétension statique et des conditions non-idéales d'encastrement). Ces pulsations naturelles Ω_i sont légèrement différentes des pulsations ω_i de

la section 3.2 puisqu'aucune masse additionnelle n'était présente initialement dans ce modèle.

Une matrice d'amortissement modal \mathbf{D} est ensuite définie à partir d'un amortissement modal ξ_i pour chaque mode de vibration :

$$\forall i \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, D_{ii} = 2\xi_i \Omega_i \quad (3.78)$$

Le vecteur d'excitation général $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$, correspondant aux forces extérieures $F_1(x_{F_1}, t)$ et $F_2(x_{F_2}, t)$, est défini par :

$$\forall i \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, \mathbf{F}_{\text{excit}}[i](t) = \rho A \Gamma_{i,1} a_i f_1(t) + \rho A \Gamma_{i,2} a_i f_2(t) \quad (3.79)$$

où $\Gamma_{i,1}$, $\Gamma_{i,2}$ et a_i sont donnés respectivement par les équations (3.61), (3.62) et (3.53) dans la section 3.4 pour chaque mode i de vibration du système complet.

Le vecteur correspondant à la contribution non-linéaire $\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{w}(t))$ s'exprime sous la forme :

$$\forall i \in \llbracket 1, N_m \rrbracket, \mathbf{F}_{\text{NL}}[i](t) = \rho A \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{m=1}^{N_m} \Gamma_{ijkm} w_j(t) w_k(t) w_m(t) \quad (3.80)$$

où chaque Γ_{ijkm} est donné par l'équation (3.63) dans la section 3.4.

Finalement, l'équation dynamique non-linéaire adapté au système expérimental du chapitre 2 peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{w}(t)) \quad (3.81)$$

Pour rappel, la base des modes propres considérée par la suite se compose des 5 premiers modes de flexion $\mathbf{w}(t) = [w_1(t) \ w_2(t) \ w_3(t) \ w_4(t) \ w_5(t)]^T$. Ce choix résulte de calculs numériques préliminaires permettant une bonne représentation des phénomènes physiques observés expérimentalement.

3.6 Méthode de l'équilibrage harmonique

Dans cette section, la méthode numérique proposée se base sur une extension de la méthode classique de l'équilibrage harmonique pour les excitations aléatoires multipoints.

La méthode de l'équilibrage harmonique (ou méthode HBM décrite dans le chapitre 1) cherche la réponse du système non-linéaire défini dans l'équation (3.81) sous forme de série de Fourier finie (si cette solution existe), sous la forme :

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{n=1}^p (\mathbf{A}_n \sin(n\Omega t) + \mathbf{B}_n \cos(n\Omega t)) \quad (3.82)$$

où p correspond à l'ordre choisi de la série de Fourier finie et où $(\mathbf{B}_0, (\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$ sont les coefficients de Fourier inconnus de la solution $\mathbf{w}(t)$ à déterminer. Comme discuté dans [59], la méthode

de l'équilibrage harmonique peut être adaptée à une excitation aléatoire en choisissant la résolution fréquentielle Δf comme fréquence fondamentale de l'excitation. Dans ce cas, l'excitation aléatoire multipoints est perçue comme une excitation déterministe multipoints avec une pulsation fondamentale $\Omega = 2\pi\Delta f$ et le vecteur force $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ peut être défini par une série de Fourier finie d'ordre p , tel que :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sum_{n=1}^p (\mathbf{S}_{n,\text{excit}} \sin(n\Omega t) + \mathbf{C}_{n,\text{excit}} \cos(n\Omega t)) \quad (3.83)$$

De plus, il est supposé que la contribution non-linéaire $\mathbf{F}_{\text{NL}}(t)$ peut être exprimée en série de Fourier finie d'ordre p :

$$\mathbf{F}_{\text{NL}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^p (\mathbf{S}_n \sin(n\Omega t) + \mathbf{C}_n \cos(n\Omega t)) \quad (3.84)$$

où $(\mathbf{C}_0, (\mathbf{S}_n, \mathbf{C}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$ sont les coefficients de Fourier de la force non-linéaire \mathbf{F}_{NL} .

Afin de déterminer la valeur des coefficients de Fourier \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_n et \mathbf{B}_n , les expressions (3.82), (3.83) et (3.84) sont réinjectées dans l'équation (3.81). Cela conduit à un ensemble $N_m(2p+1)$ équations non-linéaires données par :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0 \quad (3.85)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} & -n\Omega\mathbf{D} \\ n\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{n,\text{excit}} \\ \mathbf{C}_{n,\text{excit}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n \\ \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad (3.86)$$

Les différents ordres harmoniques sont ainsi séparés. Les termes d'excitation $\mathbf{S}_{n,\text{excit}}$ et $\mathbf{C}_{n,\text{excit}}$ sont connus, la difficulté est de calculer les termes \mathbf{S}_n et \mathbf{C}_n . Dans le cas particulier d'une non-linéarité cubique, une relation analytique directe peut être exprimée entre les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires \mathbf{S}_n et \mathbf{C}_n et les coefficients de Fourier de la réponse $[\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_p\mathbf{B}_p]$. Cependant pour beaucoup de fonctions non-linéaires et en particulier pour l'exemple industriel qui est traité au chapitre 5, une expression analytique de cette relation n'est pas disponible. Un processus de calcul itératif pour ces coefficients non-linéaires est dès lors utilisé. Il s'agit de la méthode AFT (« Alternating Frequency-Time domain method ») développée par Cameron et Griffin [6]. Cette méthode est décrite par le schéma suivant où FFT désigne la Transformée de Fourier Rapide (« Fast Fourier Transform ») :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{B}_0\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{A}_p\mathbf{B}_p] \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \mathbf{W}(t) \xrightarrow{(3.80)} \mathbf{F}_{\text{nl}}(t) \xrightarrow{\text{FFT}} [\mathbf{C}_0\mathbf{S}_1\mathbf{C}_1 \dots \mathbf{S}_p\mathbf{C}_p] \quad (3.87)$$

Les coefficients $(\mathbf{C}_0, (\mathbf{S}_n, \mathbf{C}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$ dépendent des coefficients $(\mathbf{B}_0, (\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$. Enfin, les équations non-linéaires (3.85) et (3.86) sont résolues en minimisant la relation suivante :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \Omega) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}_{\text{excit}} - \mathbf{B}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) \quad (3.88)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \text{Diag} \left(\mathbf{K}, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} & -n\Omega\mathbf{D} \\ n\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} \end{array} \right]_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket} \right) \quad (3.89)$$

$$\mathbf{B}_{\text{excit}} = [0 \ \mathbf{S}_{1,\text{excit}} \ \mathbf{C}_{1,\text{excit}} \ \dots \ \mathbf{S}_{p,\text{excit}} \ \mathbf{C}_{p,\text{excit}}]^T \quad (3.90)$$

$$\mathbf{B}_{\text{NL}} = [\mathbf{C}_0 \ \mathbf{S}_1 \ \mathbf{C}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_p \ \mathbf{C}_p]^T \quad (3.91)$$

Minimiser l'équation (3.88) impose un critère de convergence qui est choisi sous la forme :

$$\frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega})\|_2}{\|\mathbf{B}_{\text{excit}}\|_2} < \epsilon_{HBM} \quad (3.92)$$

où ϵ_{HBM} est une précision numérique choisie et $\|\cdot\|_2$ est la norme quadratique. Pour le reste de l'étude, ϵ_{HBM} est choisi égal à 10^{-5} . La minimisation de l'équation (3.88) se fait classiquement par une descente de Newton.

3.7 Résultats numériques et comparaisons essais-calculs

L'objectif de cette section est de comparer les résultats de la simulation avec les essais présentés dans le chapitre 2. Une attention particulière est accordée à la compréhension et à l'analyse du comportement dynamique non-linéaire du système poutre bi-encastree.

Comme pour les mesures présentées dans le chapitre 2, les résultats numériques sont décomposés en deux parties principales :

- la comparaison entre les simulations numériques et les essais est donnée pour analyser le comportement dynamique global de la poutre avec un niveau de DSP constant sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz. L'objectif de cette première analyse est de vérifier la capacité de la simulation à reproduire les effets liés aux quatre configurations des deux excitations aléatoires corrélées (c'est-à-dire les excitations corrélées en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase et les excitations décorrélées). Les simulations numériques sont effectuées avec une excitation idéale, c'est-à-dire avec un niveau de DSP rigoureusement constant le long de la bande de fréquences [20 – 1000] Hz). Les essais expérimentaux associés correspondent à la campagne d'essais n° 1 décrite dans le chapitre 2 ;
- la comparaison entre les simulations numériques et les essais est donnée pour analyser plus précisément la signature non-linéaire de la poutre selon les quatre configurations d'excitations aléatoires corrélées. Pour atteindre cet objectif, deux séries de simulations numériques sont réalisées : les premières considèrent une excitation idéale avec un niveau de DSP élevé rigoureusement constant le long de la bande de fréquences [20 – 500] Hz et un niveau de DSP faible rigoureusement constant le long de la bande de fréquences [500 – 1000] Hz. Les secondes sont réalisées en interpolant l'excitation expérimentale mesurée pour chaque type de corrélation le long de la bande de fréquences [20 – 1000] Hz. Ces entrées expérimentales mesurées se retrouvent sur les figures 2.5(a), 2.5(c), 2.6(a) et 2.6(c). Ce choix de considérer deux modélisations d'excitation permet d'évaluer l'origine des effets non-linéaires observés sur la réponse dynamique non-linéaire de la poutre bi-encastree. Les essais expérimentaux associés correspondent à la

Paramètre	Cas 1	Cas 2
Bande de fréquences à fort niveau	[20 – 1000] Hz	[20 – 500] Hz
k_{rot}	2320 N.m	1834 N.m
$k_{liaison}$	$8.11 \cdot 10^7$ N.m ⁻¹	$8.11 \cdot 10^7$ N.m ⁻¹
T_0	2809 N	3231 N
m_{A1}	0.006 kg	0.006 kg
m_{A5}	0.00171 kg	0.00171 kg
m_{A6}	0.00171 kg	0.00171 kg

TABLEAU 3.3 – Valeurs des paramètres numériques identifiés pour les deux cas étudiés.

campagne d'essais n° 2 décrite dans le chapitre 2.

Le tableau 3.3 donne les valeurs physiques des paramètres actualisés et identifiés pour chacun des cas étudiés. Comme décrit précédemment dans [9, 59], certaines variations des fréquences fondamentales de la poutre (identifiées à faible excitation) sont observées d'une expérience à l'autre. Claeys et al. [9] supposent que ces variations de fréquences proviennent de l'évolution des contraintes statiques dans la poutre induites par les deux blocs d'encastrement vissés au gros bloc d'acier et ils ont proposé de mettre à jour la fréquence propre par une demi-longueur effective de la poutre. Dans ces travaux, le réajustement des fréquences propres a été effectué en mettant à jour les paramètres physiques donnés dans le tableau 3.3. Le facteur d'amortissement modal des cinq premiers modes de flexion utilisés pour les données numériques sont : $\xi_1 = 0.40\%$, $\xi_2 = 0.085\%$, $\xi_3 = 0.45\%$, $\xi_4 = 0.15\%$ et $\xi_5 = 1.5\%$. Il faut noter que le cinquième mode de flexion est en dehors de la gamme de fréquences d'intérêt (avec une fréquence observée expérimentalement autour de 1464 Hz) mais il demeure utile pour avoir un recalage optimal du modèle.

3.7.1 Reproduction des effets liés à la corrélation entre les deux excitations

Comme expliqué précédemment, la comparaison entre les résultats numériques et les essais est d'abord effectuée avec un niveau de DSP constant sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz.

Les figures 3.3(a-c-e), 3.3(b-d-f), 3.4(a-c-e) et 3.4(b-d-f) donnent les résultats numériques (courbes bleues) comparés aux mesures expérimentales (courbes rouges) pour les quatre types d'excitations aléatoires corrélées (c'est-à-dire, excitations corrélées en phase, excitations corrélées en opposition de phase et excitations corrélées en quadrature de phase, et excitations décorréliées, respectivement). Les résultats sont fournis pour les accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f).

Les simulations numériques sont en bon accord avec les données expérimentales. Il est clairement démontré que les effets liés à la corrélation choisie entre les deux excitations aléatoires sont bien reproduits par les résultats numériques. Selon la configuration d'excitation choisie, l'atténuation et l'amplification de chaque mode dans la bande de fréquences [20 – 1000] Hz sont bien reproduites. Comme

discuté précédemment dans la section 2.4, tous ces résultats peuvent être facilement interprétés en considérant la relation entre la forme de chaque mode propre (modes de vibration symétriques ou antisymétriques) et le type d'excitation choisi. Ces premières comparaisons entre essais et résultats numériques valident l'approche proposée pour la modélisation d'une excitation aléatoire corrélée multipoints ainsi que la modélisation de la poutre bi-encastree avec des conditions aux limites non-idéales, la présence de masses additionnelles et une précontrainte statique additionnelle. Elle démontre par ailleurs l'efficacité et la robustesse de la technique numérique mise en place pour reproduire la réponse dynamique d'un système non-linéaire sous sollicitations aléatoires multipoints.

Il est également possible d'observer que la simulation numérique ne reproduit pas un pic de fréquence expérimental de faible amplitude (au voisinage de 700 Hz). L'apparition de ce pic de fréquence est peut-être due à une excitation parasite hors plan, qui provoque l'excitation d'un mode transverse de la poutre mais qui n'a pas été identifié lors de l'analyse modale expérimentale (voir section 2.2). En effet, il résulte de biais expérimentaux inhérents au dispositif expérimental, tels que le positionnement imparfait des deux excitateurs électrodynamiques.

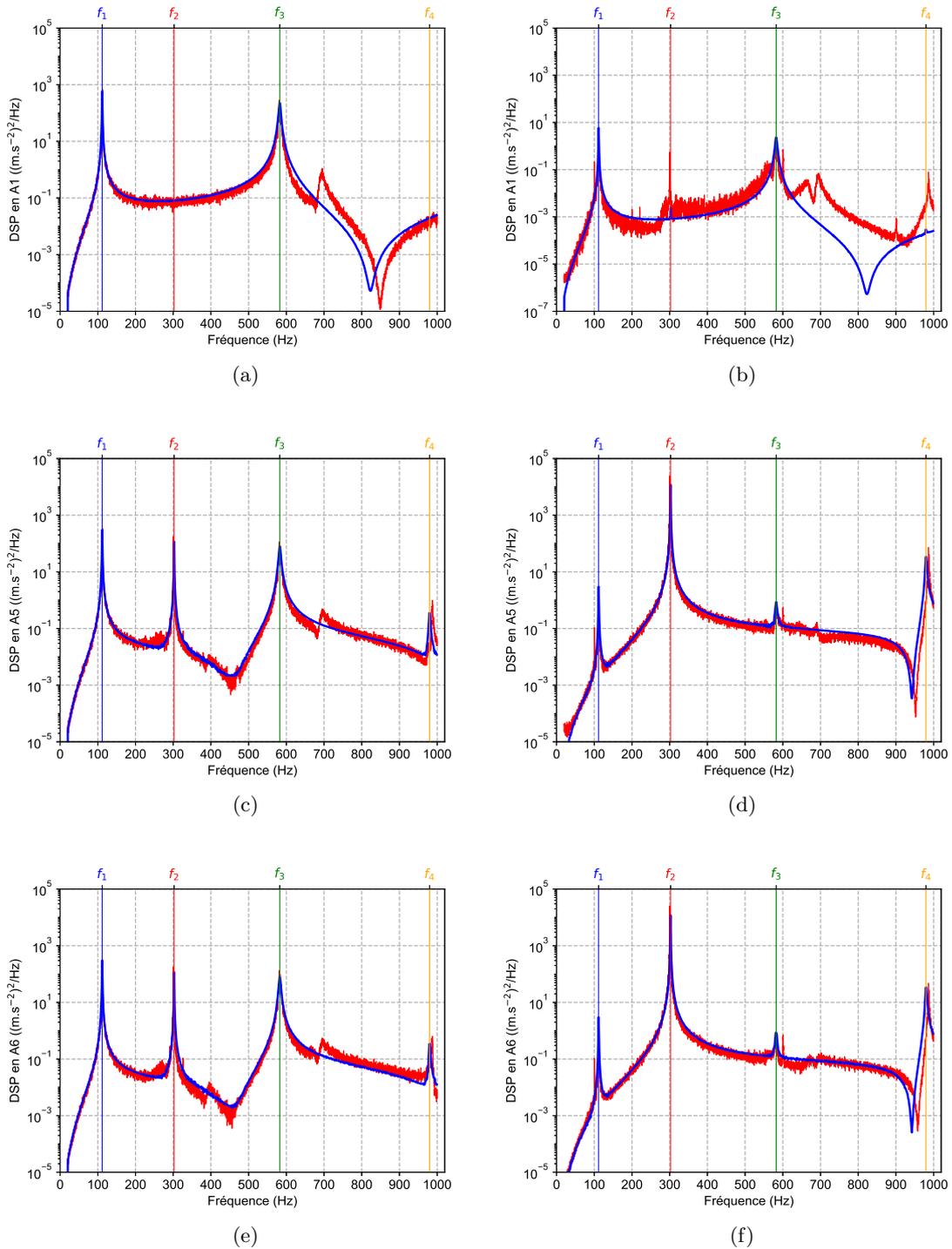


FIGURE 3.3 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique correspondant à une entrée aléatoire bi-points corrélée en phase (a-c-e) ou en opposition de phase (b-d-f) de niveau 0.71 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.

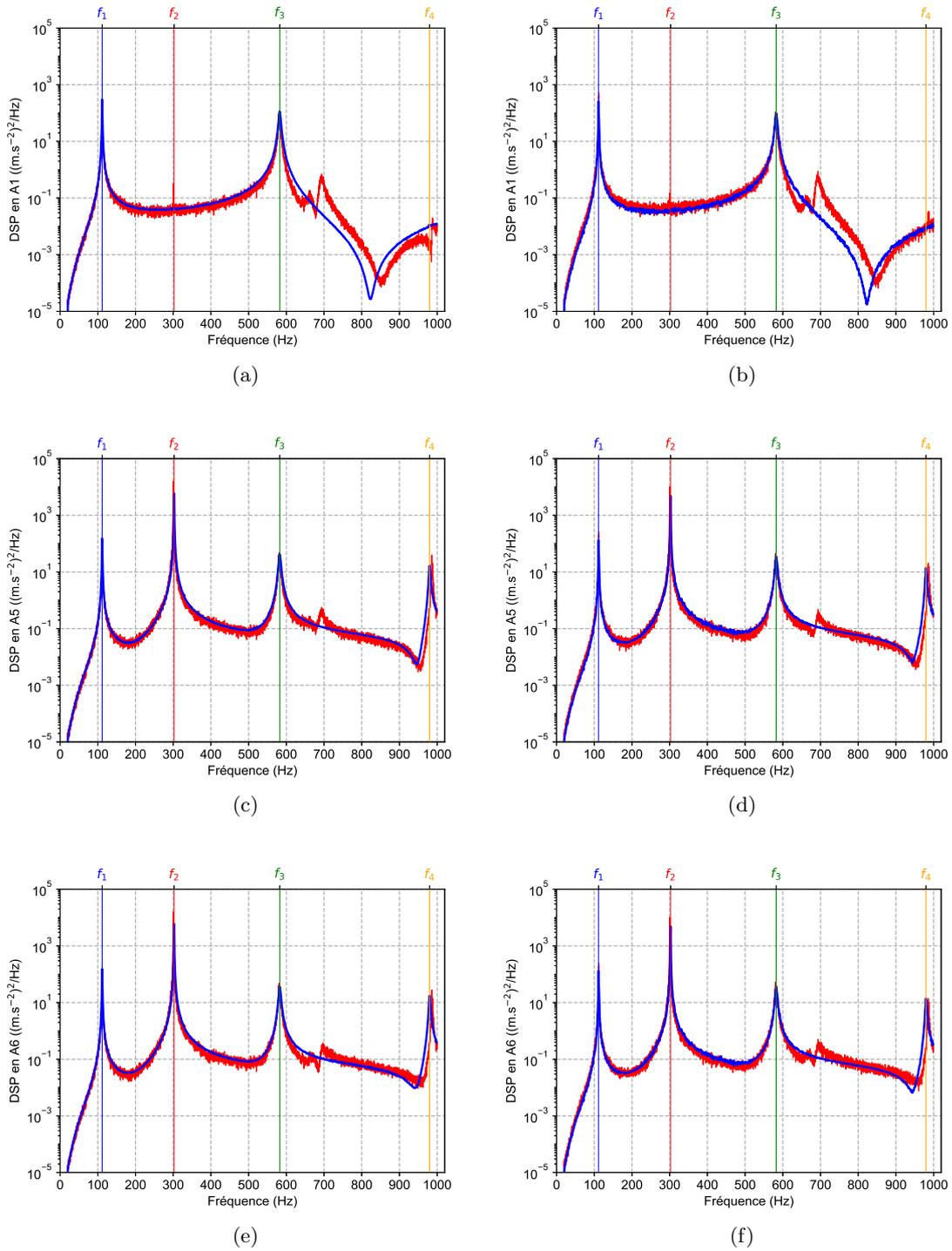


FIGURE 3.4 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique correspondant à une entrée aléatoire bi-points corrélée en quadrature de phase (a-c-e) ou pour deux excitations aléatoires décorrélées (b-d-f) de niveau 0.71 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 1000] Hz.

3.7.2 Comparaison des signatures non-linéaires numérique et expérimentale

Dans cette section sont étudiées la capacité du modèle non-linéaire de la poutre ainsi que la technique numérique développée à reproduire la signature non-linéaire expérimentale et l'évolution des contributions non-linéaires et des composantes harmoniques en fonction du choix de la corrélation entre les deux excitations aléatoires.

Comme expliqué précédemment dans la section 2.4, un protocole expérimental original a été proposé pour analyser le comportement non-linéaire de la poutre bi-encastree. Le protocole est basé sur un niveau élevé d'excitation aléatoire sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz (où seuls le premier mode symétrique Y_1 et le premier mode antisymétrique Y_2 sont présents) combiné à un faible niveau d'excitation le long de la bande de fréquences [500 – 1000] Hz. Ainsi, la signature vibratoire sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz fait ressortir un comportement complexe, qui résulte de l'apparition et de la combinaison d'harmoniques des différents modes de vibration de la poutre.

Les figures 3.5, 3.6, 3.7 et 3.8 illustrent les résultats numériques (courbes bleues et vertes) comparés aux mesures expérimentales (courbes rouges) pour les quatre configurations des deux excitations aléatoires corrélées choisies. Des zooms sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz avec identification des harmoniques et de la combinaison des harmoniques sont fournis pour mieux évaluer la comparaison entre les essais et la simulation numérique. Il est à noter que les résultats numériques définis par les courbes bleues se réfèrent à l'utilisation d'une excitation idéale, alors que les résultats numériques donnés par les courbes vertes se réfèrent à l'utilisation d'une interpolation linéaire de l'excitation expérimentale mesurée et donnée sur les figures 2.5(a), 2.5(c), 2.6(a) et 2.6(c) en fonction de la corrélation étudiée.

Tout d'abord, les simulations numériques basées sur l'interpolation de l'excitation expérimentale mesurée sont en bon accord avec les essais. En effet, l'apparition de pics d'amplitude supplémentaires correspondant aux harmoniques ou à la combinaison de composantes harmoniques est bien prédite par la simulation numérique (voir, par exemple, nf_1 , nf_2 ou $\pm nf_1 \pm mf_2$ où n et m sont des entiers). De plus, l'évolution (c'est-à-dire l'apparition, l'atténuation ou l'amplification) de chaque harmonique ou combinaison de composantes harmoniques en fonction des différentes configurations des excitations est bien reproduite. Il est également intéressant de noter que le pic de fréquence du mode symétrique f_3 et du second mode antisymétrique f_4 appartiennent à ce second intervalle de fréquence [500 – 1000] Hz. Ces faibles contributions pour f_3 et f_4 sont uniquement dues au faible niveau d'excitation le long de la bande de fréquences [500 – 1000] Hz. Une fois encore, ces comparaisons entre les essais et les résultats numériques valident la stratégie numérique proposée et la modélisation à la fois du système de poutre bi-encastree non-linéaire et des excitations aléatoires corrélées multipoints.

Deuxièmement, la comparaison des deux séries de simulations numériques (c.a.d., la première avec une excitation idéale et la seconde avec une interpolation de l'excitation expérimentale mesurée) peut conduire à des recommandations intéressantes concernant la modélisation du signal d'entrée. En ef-

fet, il est clairement montré que le fait de considérer une excitation idéale (avec un niveau de DSP élevé rigoureusement constant le long de la bande de fréquences $[20 - 500]$ Hz, et un niveau de DSP faible rigoureusement constant le long de la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz) ne permet pas de reproduire exactement la signature non-linéaire de la poutre, alors qu'une interpolation linéaire de l'excitation mesurée permet une très bonne correspondance avec les essais. Ceci est particulièrement vrai pour l'apparition de certains pics de fréquence spécifiques, tels que : $2f_1 + f_2$ et $5f_1$ pour des excitations corrélées en phase ; $2f_2$ pour des excitations corrélées en opposition de phase ; $2f_1 + f_2$, $5f_1$, $2f_2$ et $3f_2$ pour des excitations corrélées en quadrature de phase ou des excitations décorrélées. Ces résultats démontrent sans ambiguïté qu'une modélisation fine du signal d'excitation est indispensable et que le modèle non-linéaire intrinsèque de la poutre n'est pas suffisant à lui seul pour reproduire la complexité des résultats expérimentaux.

Avec l'excitation en opposition de phase, il y a une forte réponse du mode antisymétrique 2. Sans phénomène non-linéaire, il ne doit pas y avoir de réponse à la fréquence $3f_2$ mais parce que le système est non-linéaire, il est prédit et il est observé une réponse à la fréquence $3f_2$: il s'agit de la signature non-linéaire de la poutre, qui se produit même avec une entrée idéale. Avec l'excitation en quadrature de phase, même avec l'entrée idéale, il est prédit et il est observé une réponse à la fréquence $2f_1 + f_2$. Il s'agit d'une signature non-linéaire qui disparaît si l'un des modes 1 ou 2 n'est pas assez excité. Cette réponse harmonique n'apparaît pas avec l'excitation en opposition de phase puisque le mode 1 est fortement atténué.

Enfin, quelques petites différences sont cependant perceptibles entre les résultats simulés et les essais expérimentaux, en particulier pour l'accéléromètre A1. Comme discuté précédemment, la raison principale est due à des biais expérimentaux provenant du montage expérimental. En effet, les forces externes ponctuelles pour les deux excitateurs électrodynamiques peuvent ne pas être parfaitement appliquées dans la direction verticale pendant les essais. Cela conduit à des contributions modales supplémentaires et à des interactions entre les modes de flexion et les autres modes hors plan, qui ne sont pas pris en compte dans le modèle présenté dans cette étude.

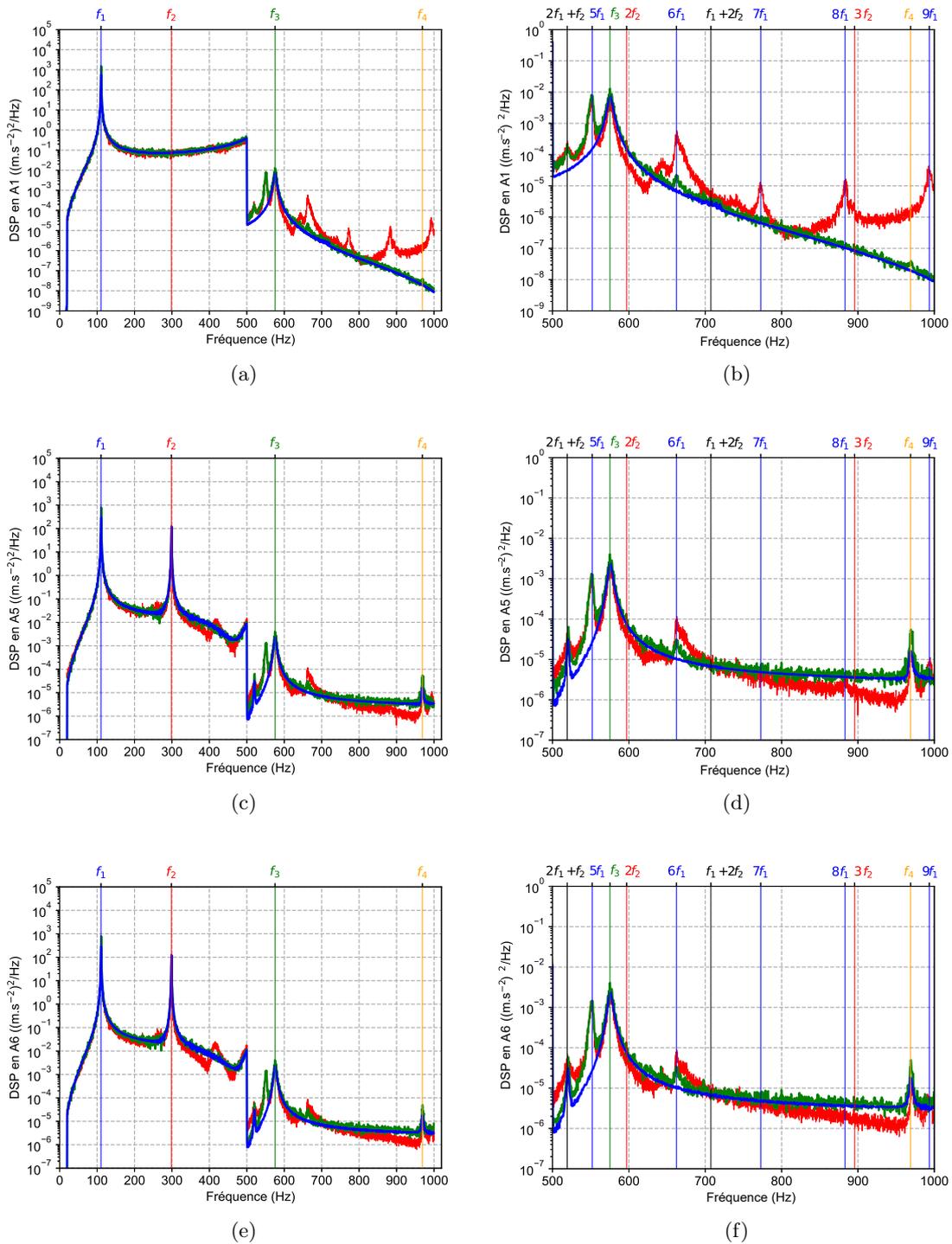


FIGURE 3.5 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues et vertes) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique (courbes bleues) et expérimentale interpolée (courbes vertes) correspondant à une entrée aléatoire bi-points corrélée en phase de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz - (b-d-f) Zoom sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz.

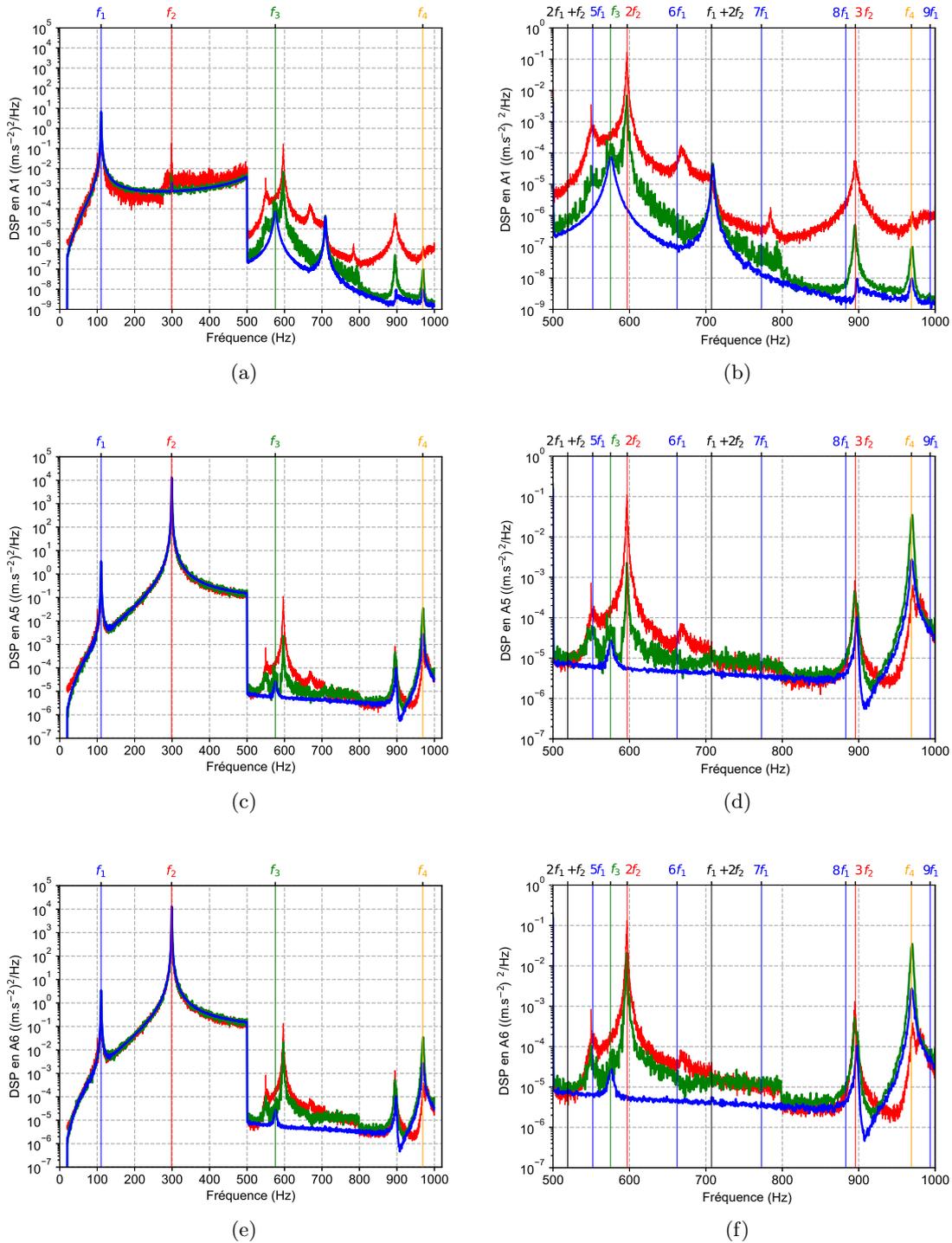


FIGURE 3.6 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues et vertes) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique (courbes bleues) et expérimentale interpolée (courbes vertes) correspondant à une entrée aléatoire bi-points corrélée en opposition de phase de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz - (b-d-f) Zoom sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz.

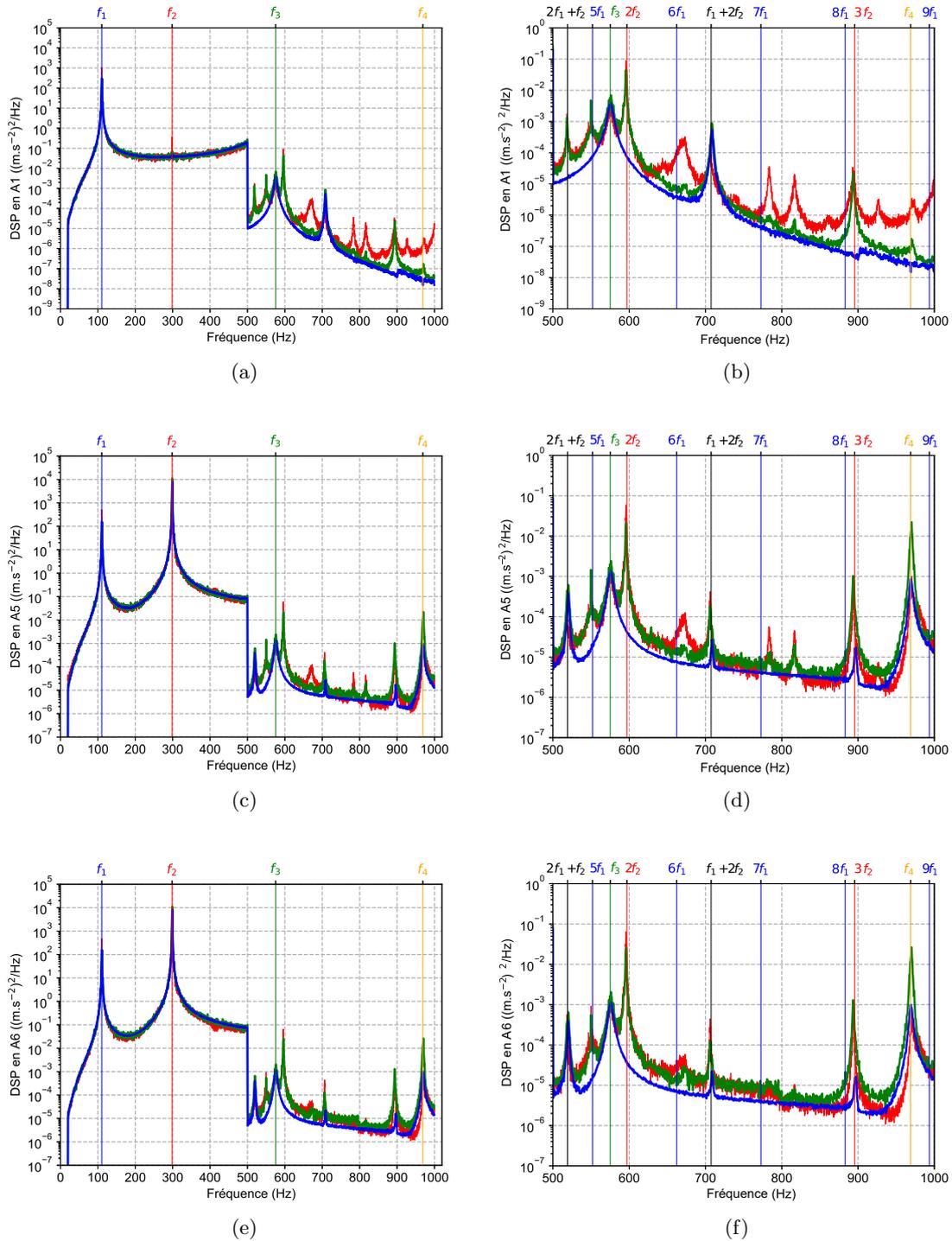


FIGURE 3.7 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues et vertes) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique (courbes bleues) et expérimentale interpolée (courbes vertes) correspondant à une entrée aléatoire bi-points corrélée en quadrature de phase de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences $[20 - 500]$ Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz - (b-d-f) Zoom sur la bande de fréquences $[500 - 1000]$ Hz.

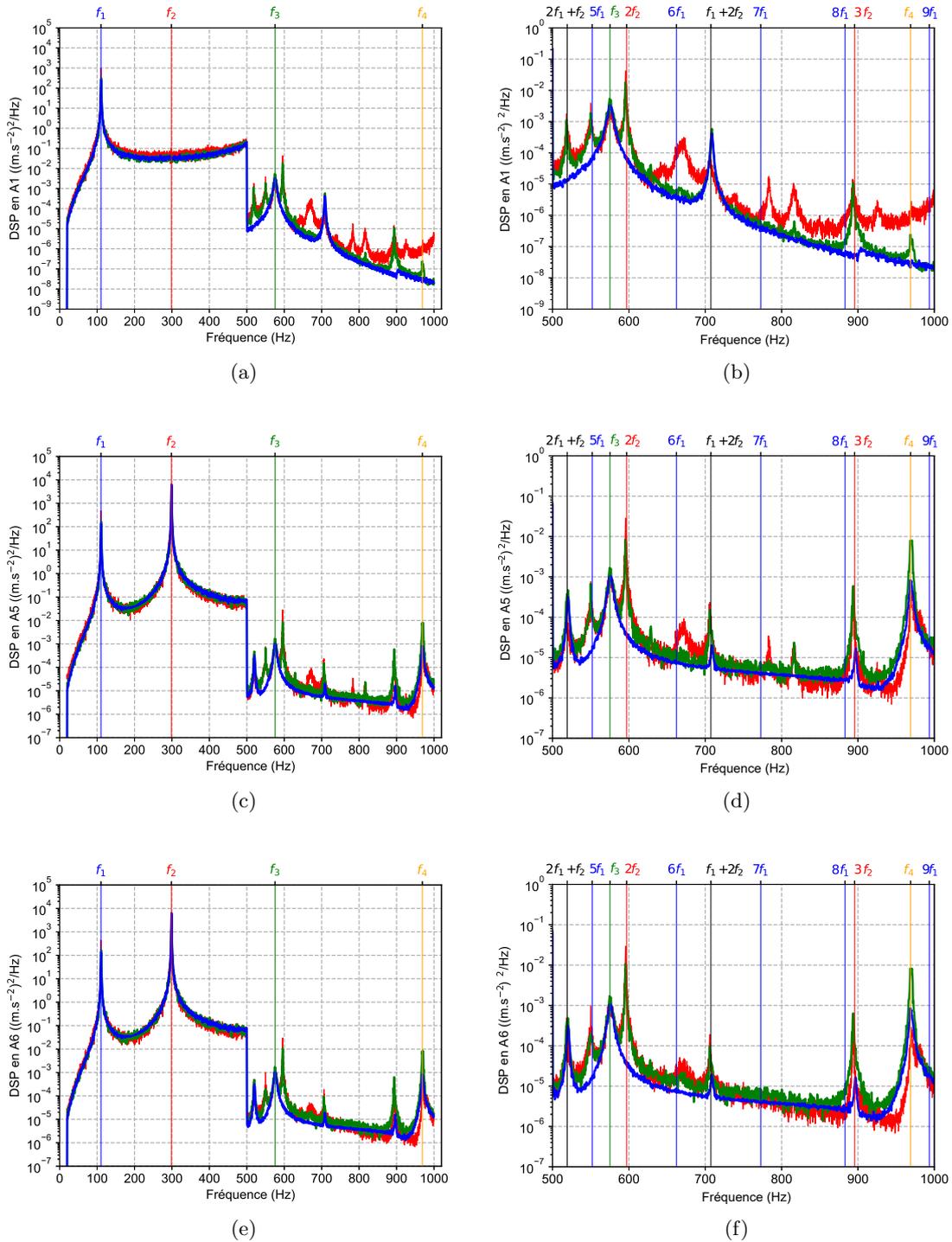


FIGURE 3.8 – DSP expérimentales (courbes rouges) et numériques (courbes bleues et vertes) des accéléromètres A1 (a-b), A5 (c-d) et A6 (e-f) pour une DSP idéale numérique (courbes 9 bleues) et expérimentale interpolée (courbes vertes) correspondant à une entrée aléatoire bi-points décorrélée de niveau 0.50 N RMS sur la bande de fréquences [20 – 500] Hz et de niveau 0.0035 N RMS sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz - (b-d-f) Zoom sur la bande de fréquences [500 – 1000] Hz.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude numérique complète sur la poutre bi-encastree CEA est donnée. Une modélisation du signal d'entrée aléatoire bi-points est développée et adaptée aux différentes entrées expérimentales étudiées dans le chapitre 2. Une modélisation d'une poutre non-linéaire associée au dispositif expérimental est donnée avec la prise en compte de conditions aux extrémités non-idéales, de l'évolution de précontraintes statiques dans la poutre suite au vissage des blocs d'encastrement, et de la présence des accéléromètres sur la poutre. Puisqu'il est adapté au dispositif expérimental, ce modèle nécessite un calcul des modes de vibration et une vérification de l'orthogonalité de la base modale, ce qui est démontré dans ce chapitre. Le développement et l'extension de la technique d'équilibrage harmonique pour un système non-linéaire sous sollicitations aléatoires multipoints corrélés ou non-corrélés sont également développés dans ce chapitre.

Ensuite, la signature non-linéaire du modèle de poutre proposé est étudiée pour les deux campagnes expérimentales analysées dans le chapitre 2. Dès lors, la comparaison entre les simulations et les essais expérimentaux pour les différentes campagnes d'essais s'avère satisfaisante. Il y a une très bonne corrélation sur l'ensemble de la bande fréquentielle d'excitation pour la campagne n° 1 ce qui valide la modélisation du signal d'entrée aléatoire bi-points et ce qui valide également le modèle de la poutre bi-encastree adaptée au dispositif expérimental.

En ce qui concerne l'étude de la signature non-linéaire par l'intermédiaire de la campagne expérimentale n° 2, la simulation numérique fait apparaître les principales contributions non-linéaires du système poutre en fonction de l'excitation aléatoire multipoints considérée, ce qui est un point très satisfaisant de ce volet numérique. En effet, la méthodologie proposée pour reproduire les différentes configurations des deux excitations aléatoires (en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase ou décorrélées) s'adapte parfaitement à la technique numérique mise en place pour reproduire la signature non-linéaire de la poutre. Cela valide ainsi l'efficacité et la robustesse de la méthode numérique proposée dans ce chapitre.

En conclusion, cette première étude de réponses vibratoires non-linéaires sur la poutre CEA soumise à des excitations multipoints répond aux objectifs visés. Différents phénomènes non-linéaires ont été observés expérimentalement et ils sont tous reproduits par la simulation [68]. Un effort particulier a été porté sur la modélisation de la poutre bi-encastree CEA étudiée, sur la modélisation de l'excitation aléatoire bi-points mais également sur la technique numérique développée validant ainsi les objectifs initiaux de ces travaux de thèse.

Dans la suite de ces travaux de thèse, la méthodologie développée dans ce chapitre est appliquée pour étudier le comportement vibratoire non-linéaire d'une structure industrielle, plus complexe, sollicitée par un effort acoustique. Comme la sollicitation mécanique excitant la poutre bi-encastree CEA, cet effort se définit comme un effort aléatoire multipoints corrélé. Cependant, le nombre de points sollicités sur la structure devient beaucoup plus important que ce qui a été étudié sur la poutre bi-

encastrée CEA. La modélisation de cet effort acoustique de grande envergure, couplée à une technique numérique de simulation vibratoire non-linéaire, devient ainsi l'enjeu principal qui découle des travaux préliminaires sur la poutre bi-encastrée. Comme ce qui a été proposé en amont de la simulation pour l'étude de la poutre bi-encastrée CEA, une première étude expérimentale de la signature non-linéaire de la structure industrielle HB2 à une excitation acoustique est donnée dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Essais vibratoires sur la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 »

La structure « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) appartenant au CEA/CESTA est le cas d'application de ces travaux de thèse. Cette maquette est conçue sur la base de publications scientifiques [21, 13] dont la forme est représentative d'un véhicule de transport supersonique. Il s'agit d'un assemblage représentatif d'une structure industrielle pour laquelle la réponse vibratoire est influencée par l'apparition de frottements dans certaines liaisons. Ce chapitre présente la démarche expérimentale et les résultats obtenus avec cette maquette d'essais.

Une étude expérimentale complète, similaire à l'étude proposée dans le chapitre 2 sur la poutre académique CEA, est présentée dans ce chapitre. Une description complète de la maquette HB2 et du moyen d'essais est donnée en première partie de ce chapitre. Une analyse modale expérimentale, effectuée à la fois grâce aux données accélérométriques des capteurs et à la fois grâce à la vibrométrie laser à balayage, est présentée en deuxième partie de ce chapitre afin d'identifier la signature linéaire de la maquette HB2 (fréquences propres et déformées associées). Ces étapes préliminaires sont essentielles pour comprendre au mieux les phénomènes vibratoires non-linéaires apparaissant lors de sollicitations plus importantes de la structure. Puis, la signature vibratoire non-linéaire de la maquette HB2 est observée expérimentalement sous diverses sollicitations en troisième partie de ce chapitre. Premièrement, la maquette est soumise à une excitation mécanique aléatoire monopoint grâce à un excitateur électrodynamique et dont le niveau de l'excitation augmente au cours des essais. Une identification de la signature non-linéaire à une excitation aléatoire monopoint est dès lors proposée. Enfin, le cas des excitations aléatoires multipoints est étudié expérimentalement grâce à un montage expérimental spécifique. La maquette, placée dans une chambre acoustique appartenant au CEA/CESTA, est sollicitée par un bruit acoustique grâce à des batteries de haut-parleurs. Le niveau du bruit acoustique augmente au cours des essais et une identification de la signature non-linéaire de la structure correspondant à cette excitation acoustique, une excitation aléatoire multipoints, est également donnée.

L'objectif de ce chapitre est multiple. L'analyse modale expérimentale d'une structure industrielle complexe par vibrométrie laser à balayage est combinée à celle obtenue par les accéléromètres lors de la sollicitation de la maquette HB2 par un excitateur électrodynamique, et permet de valider le modèle éléments finis complet proposé dans le chapitre suivant. Puis, une signature non-linéaire de cette maquette à une excitation aléatoire monopoint (à l'image de celle observée dans les travaux de Roncen [58] sur la maquette industrielle «Harmonie Gamma») est identifiée tout comme la signature non-linéaire de la même structure à une excitation acoustique considérée comme une excitation aléatoire multipoints. Ce nombre conséquent de résultats expérimentaux sert de référence dans le chapitre suivant pour valider la modélisation non-linéaire et la démarche proposée afin de prédire la réponse non-linéaire d'un modèle éléments finis complet soumis à une excitation aléatoire multipoints.

4.1 Motivations

Ces travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des travaux réalisés au CEA/CESTA par Claeys [8] sur la maquette « Harmonie » et par Roncen [58] sur la maquette « Harmonie-Gamma ». Chacune des études vibratoires expérimentales sur ces maquettes ont permis de caractériser la dépendance de la réponse au niveau d'excitation monopoint. Ces deux maquettes, possédant des liaisons frottantes à l'image de la maquette HB2, ont ainsi montré une réponse vibratoire non-linéaire pour un type d'excitation (sinusoïdale ou aléatoire) monopoint. Le frottement a un effet double sur ces assemblages : en raideur et en dissipation. Le frottement traduit le relâchement d'une contrainte de liaison par l'apparition de glissement. Il entraîne ainsi une diminution de la raideur locale. À l'échelle d'un assemblage complet, l'apparition de frottement dans les liaisons conduit ainsi généralement à un effet adoucissant : l'évolution locale des raideurs entraîne une baisse de fréquence de résonance de la structure [8, 58]. De plus, le frottement est un phénomène dissipatif qui contribue à augmenter l'amortissement global du système.

Désormais, la satisfaction des résultats obtenus par Claeys [8] et Roncen [58] sur leur maquette industrielle respective a permis de valider une méthodologie de simulation de réponse vibratoire non-linéaire à des excitations monopoints. La maquette HB2 étudiée dans ces travaux de thèse paraît alors pour le CEA/CESTA comme un défi novateur et ambitieux dans la recherche d'une méthode de simulation de réponse vibratoire non-linéaire à une excitation aléatoire multipoints.

Expérimentalement, un moyen d'essais original a été conçu et réalisé au CEA/CESTA pour étudier la réponse vibratoire de structures industrielles à des excitations acoustiques. Ce moyen d'essais, une chambre acoustique réverbérante munie de batteries de haut-parleurs, permet de pousser encore plus loin l'étude expérimentale de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires multipoints. Ces travaux de thèse présentent ainsi les premières études expérimentales réalisés avec ce moyen d'essais sur une maquette industrielle complexe, au comportement vibratoire non-linéaire, qui vont servir de référence pour la simulation et la garantie de structures aéronautiques soumises à des excitations acoustiques. Cette méthodologie de simulations de réponses vibratoires non-linéaires à une excitation aléatoire multipoints est présentée dans le chapitre 5. Par ailleurs, la vibrométrie laser à balayage, déjà utilisée sur la structure « Harmonie » dans les travaux de Claeys [8], est de nouveau employée durant ces travaux de thèse pour permettre à mieux caractériser les réponses linéaires et non-linéaires de la structure complexe HB2 soumise à une excitation électrodynamique d'une part et soumise à une excitation acoustique d'autre part. Ces différents travaux expérimentaux sont présentés dans ce chapitre.

4.2 Maquette industrielle HB2

Dans cette partie, une description complète de la maquette HB2 est donnée afin d'analyser les différents sous-ensembles composant la structure. Puis, l'instrumentation employée est décrite entièrement à travers une fiche d'instrumentation pour repérer et localiser les différents accéléromètres

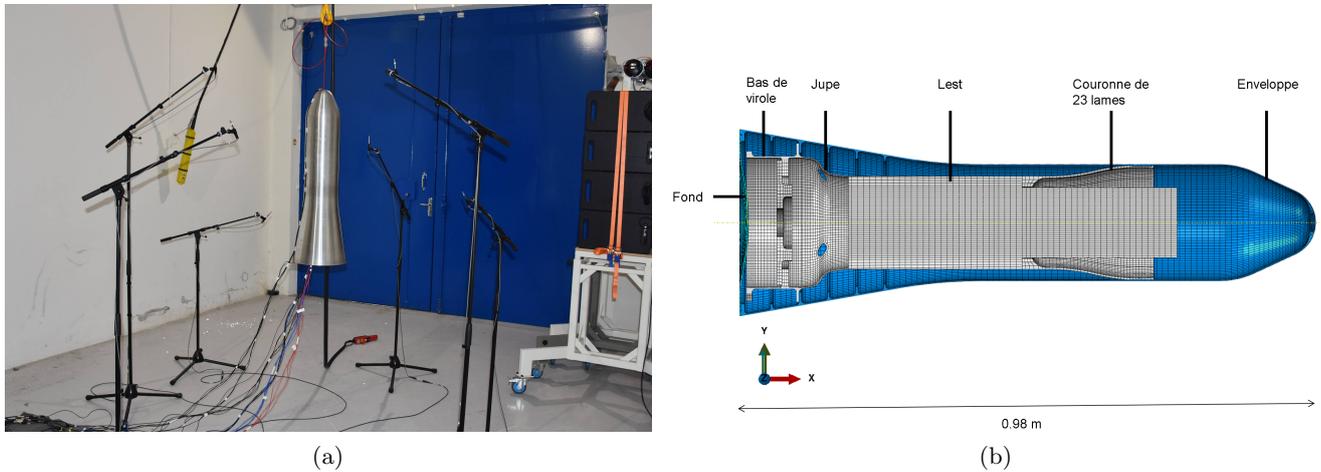


FIGURE 4.1 – Photographie (a) et schéma (b) de la maquette industrielle HB2. Sur la photographie (a), la maquette est placée dans la chambre acoustique au CEA/CESTA. Elle est entourée par six microphones nécessaire pour le contrôle du niveau acoustique. Le repère (X, Y, Z) indiqué sur le schéma (b) est le repère global utilisé pour toute l'étude sur la maquette HB2.

choisis dans ce manuscrit de thèse parmi les 21 présents sur l'ensemble de la maquette. Le moyen d'essais, la chambre acoustique au CEA/CESTA, est finalement présenté afin de comprendre comment sont réalisés les essais avec une excitation aléatoire surfacique.

4.2.1 Description de la maquette industrielle HB2

La structure « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) est une maquette entièrement métallique représentant un véhicule de transport balistique supersonique avec chargement interne. La forme extérieure triconique de la structure est issue de la littérature scientifique [21, 13], elle a fait l'objet de plusieurs études aérodynamiques expérimentales et numériques. La figure 4.1 présente une photographie de la maquette ainsi qu'un schéma des différents éléments composant la structure.

La maquette HB2 se décompose en deux parties principales : un colis interne et une enveloppe externe triconique. L'ensemble est réalisé dans un unique alliage d'aluminium. L'enveloppe externe a une épaisseur de 1.5 mm et est renforcée par des raidisseurs circulaires. Le fond plat, à gauche sur la figure 4.1(b), est distinct du reste de l'enveloppe afin de permettre l'insertion du colis interne. Le fond est lié à l'enveloppe par des liaisons boulonnées. La surface excitée par l'excitation acoustique est dénommée « surface mouillée ». Dans ces travaux de thèse, les fluctuations de pression au niveau du nez et au niveau du fond ne sont pas modélisés, la surface mouillée se limite donc à la paroi latérale externe de l'enveloppe.

L'essentiel de la masse du colis interne (entre 25 et 27.3 kg) est concentré dans un lest plein axi-symétrique situé à l'avant (dans la direction $X \geq 0$). Une couronne de 23 lames permet de centrer le

colis dans l'enveloppe. Un espace creux est laissé entre deux lames pour permettre le passage de câbles d'instrumentation lors des essais. Lors de l'insertion du colis dans l'enveloppe, les lames sont déformées et le bord supérieur de chacune d'elles est déplacé d'1 mm vers l'intérieur. Le contact lame-enveloppe est permanent et la force d'appui est très faible (de l'ordre de 1 N). Le seuil de glissement de Coulomb des lames contre la paroi intérieure de l'enveloppe est ainsi facilement atteint. À l'arrière, une virole d'épaisseur 1.5 mm est soudée au lest. Sur la figure 4.1(b), il est possible de distinguer le bas de la virole de la jupe. La pièce qui est la plus sollicitée au niveau des contraintes mécaniques est la jupe. L'accroche entre le colis et l'enveloppe est assurée par deux brides assemblées l'une à l'autre par 12 liaisons boulonnées.

Cette maquette industrielle apparaît ainsi comme un assemblage complexe, dans lequel 23 liaisons frottantes viennent provoquer un comportement vibratoire non-linéaire en fonction de l'excitation. Le mouvement des lames contre la paroi intérieure est ainsi le mouvement recherché durant ces essais réalisés avec une excitation acoustique. Pour analyser le comportement vibratoire de la maquette HB2, différents accéléromètres sont positionnés sur l'ensemble de la maquette.

4.2.2 Instrumentation et moyen d'essais

La maquette HB2 est instrumentée avec 21 accéléromètres : 15 accéléromètres tridimensionnels A1 à A15 (de référence Endevco 66M6) et 6 accéléromètres monodimensionnels A21 à A26 (de référence PCB 352A6). Par souci de lisibilité, seule une partie de ces accéléromètres est photographiée sur la figure 4.2(a) et schématisée sur les figures 4.2(b) et 4.3. L'ensemble des accéléromètres situés à l'intérieur de la maquette sont reliés au moyen d'acquisition par des câbles visibles sur la figure 4.1(a) passant par l'un des six trous situés sur le fond (voir figure 4.3(b)). L'ensemble des accéléromètres est donné dans le tableau 4.1 avec leur positionnement sur chaque sous-ensemble (illustré sur la figure 4.1(b)) composant la maquette HB2. Les lames sont volontairement dissociées du colis interne afin d'isoler l'accéléromètre A21 qui est l'un des capteurs choisis pour l'analyse de la signature vibratoire non-linéaire à une excitation acoustique (voir section 4.5). L'origine du repère (X, Y, Z) est situé à proximité de l'accéléromètre A4 au centre du fond.

Le moyen expérimental utilisé est la chambre acoustique réverbérante photographiée sur les figures 4.1(a) et 4.4(a). Deux batteries de 12 haut-parleurs, schématisées sur la figure 4.4(a) sont placées respectivement dans deux coins de la chambre acoustique afin d'assurer un champ de pression homogène autour de la maquette HB2. Un module Hautes Fréquences (HF) est présent sur les batteries de haut-parleurs afin de pouvoir générer une excitation acoustique allant à des fréquences très élevées (de l'ordre de 15 kHz). Dans ces travaux de thèse, seul le comportement vibratoire de la maquette HB2 à basses fréquences (jusqu'à 1000 Hz) est étudié. Ainsi, ces modules HF sont pas utilisés dans le cadre de ces travaux de thèse. La maquette HB2 est placée en suspension à 1.50 m au-dessus du sol à l'aide d'un treuil afin d'éviter toute résonance acoustique avec le sol et afin d'avoir des conditions mécaniques de type libre-libre.

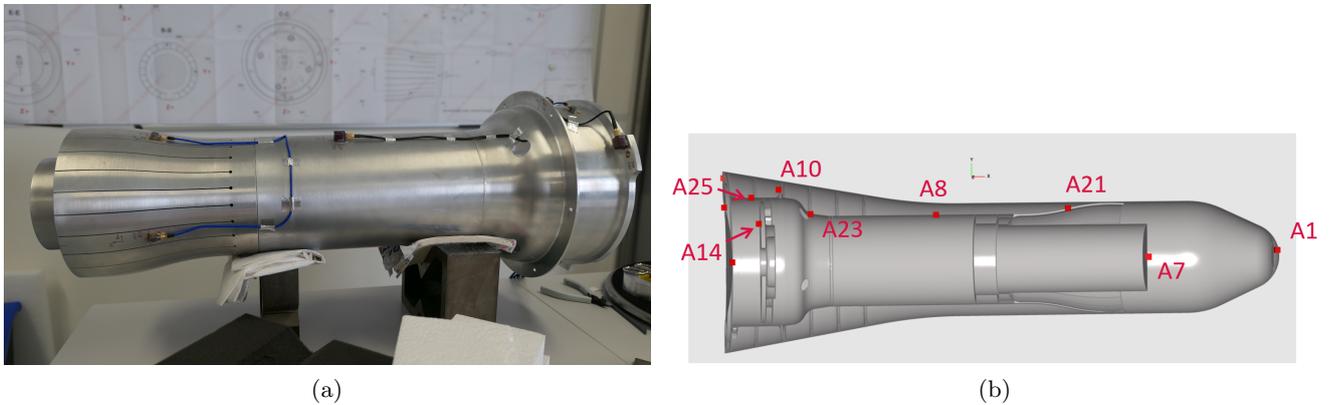


FIGURE 4.2 – (a) Photographie du colis interne avec son instrumentation - (b) Quinze accéléromètres tridimensionnels sont présents sur la maquette (A1 à A15) ainsi que six accéléromètres monodimensionnels (A21 à A26). Par souci de lisibilité, tous les accéléromètres ne sont pas représentés ici.

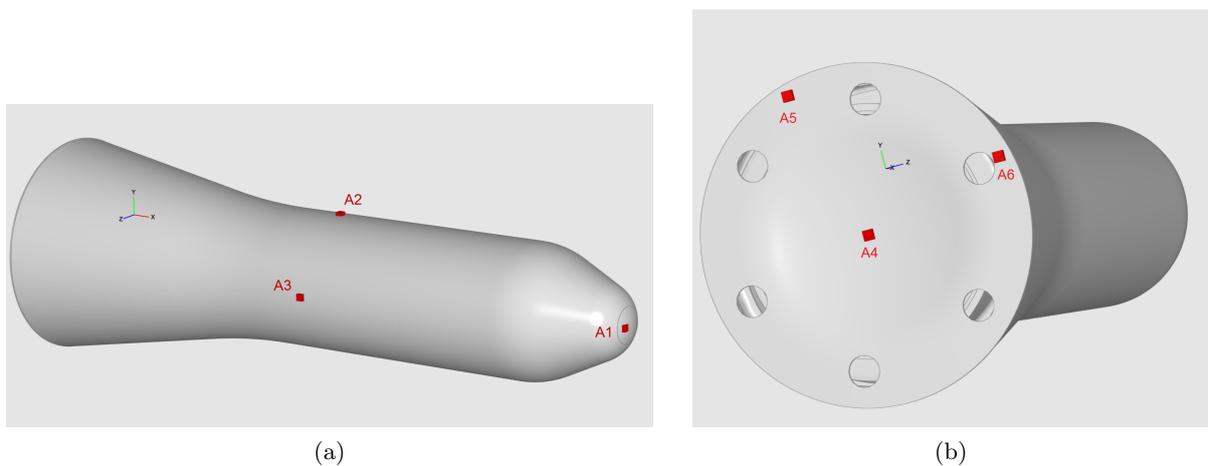


FIGURE 4.3 – (a) Trois accéléromètres tridimensionnels sont présents sur l'enveloppe (A1, A2 et A3) - (b) Trois accéléromètres tridimensionnels sont présents sur le fond (A4, A5 et A6).

Le principe de la chaîne de mesure et de la boucle d'asservissement de la chambre acoustique du CEA/CESTA se retrouve sur la figure 4.5. Le pilotage des haut-parleurs se fait sur plusieurs voies d'entrées, il s'agit alors d'un système Single-Input-Multiple-Output (SIMO) ou Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO). Durant ces travaux de thèse, il y a un unique signal de commande pour tous les haut-parleurs, le système SIMO est utilisé. Dès lors, suite à une chaîne de transmission composée de contrôleurs (des filtres, des égaliseurs et des limiteurs), d'amplificateurs et de transducteurs, les haut-parleurs émettent une excitation acoustique dans toute la chambre acoustique.

Cette excitation acoustique, assimilable à une onde de pression, est enregistrée par les six micro-

Sous-ensemble	Nom	Position (X, Y, Z) (en m)	Nombre de voies
Enveloppe	A1	(0.9683, 0.0, 0.0141)	3
Enveloppe	A2	(0.4799, 0.10, 0.0)	3
Enveloppe	A3	(0.4799, 0.0, 0.10)	3
Fond	A4	(0.0032, 0.0, 0.0)	3
Fond	A5	(-0.012, 0.1433, -0.0384)	3
Fond	A6	(-0.012, 0.0384, 0.1433)	3
Colis interne	A7	(0.7336, 0.0, 0.015)	3
Colis interne	A8	(0.3602, 0.08, 0.0)	3
Colis interne	A9	(0.3602, 0.0, 0.08)	3
Colis interne	A10	(0.0852, 0.1271, 0.0)	3
Colis interne	A11	(0.0852, 0.0153, 0.1262)	3
Colis interne	A12	(0.009, 0.0987, -0.076)	3
Colis interne	A13	(0.009, 0.0165, 0.1235)	3
Colis interne	A14	(0.0402, 0.0673, 0.0)	3
Colis interne	A15	(0.0402, 0.0, 0.0673)	3
Lames	A21	(0.5933, 0.0892, -0.00008)	1 (voie Z)
Lames	A22	(0.5933, -0.00008, -0.0982)	1 (voie Y)
Colis interne	A23	(0.1405, 0.0837, 0.0)	1 (voie Y)
Colis interne	A24	(0.1381, 0.0, 0.0847)	1 (voie Z)
Colis interne	A25	(0.0376, 0.1135, 0.0)	1 (voie Y)
Colis interne	A26	(0.0376, 0.0, 0.1135)	1 (voie Z)

TABLEAU 4.1 – Liste des accéléromètres présents sur la maquette HB2.

phones placés arbitrairement dans la chambre acoustique (voir figure 4.1(a)). Ce placement aléatoire autour de la maquette HB2 permet d'assurer un champ de pression homogène dans l'ensemble de la chambre, il s'agit alors d'une excitation acoustique dite en bruit diffus. Le niveau de pression mesuré par chaque microphone est envoyé au système d'acquisition à l'aide de conditionneurs, puis le système d'acquisition réalise la moyenne arithmétique des six niveaux de pression pour la comparer à l'excitation de consigne. Dans ces travaux de thèse, l'excitation acoustique considérée est un bruit blanc, c.a.d., avec une Densité Spectrale de Puissance constante dans la bande de fréquences [100 – 1000] Hz. Dès lors, via le système de pilotage de Simcenter, il est possible de générer expérimentalement une excitation acoustique considérée comme une excitation aléatoire multipoints.

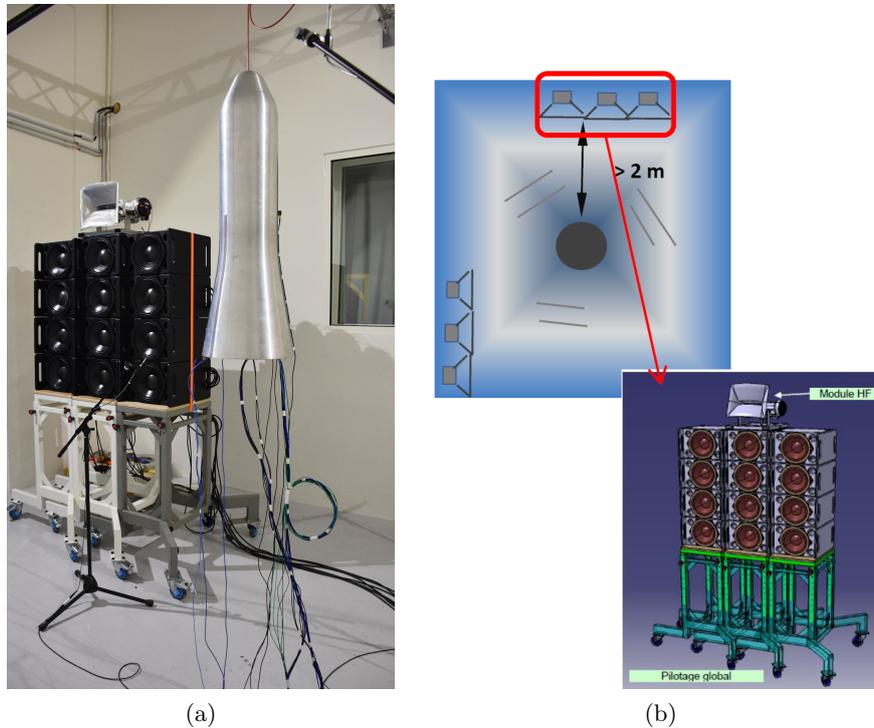


FIGURE 4.4 – Photographie (a) et schéma (b) du moyen d’essais. Sur la photographie (a), la maquette HB2 est placée en suspension à l’aide d’un treuil dans la chambre acoustique au CEA/CESTA.

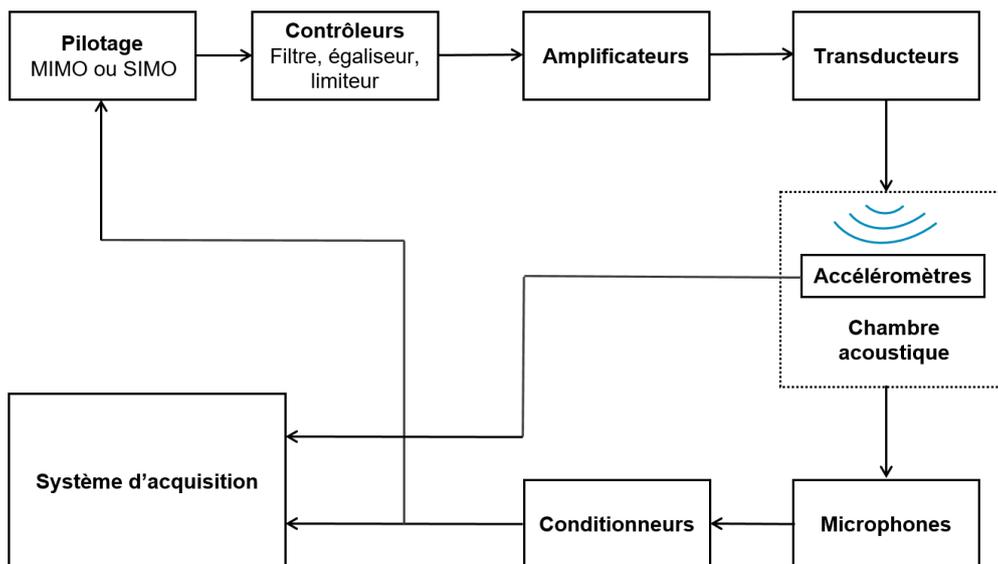


FIGURE 4.5 – Schéma de la chaîne de mesure et de la boucle d’asservissement.



FIGURE 4.6 – Photographies du montage expérimental pour les mesures vibrométriques laser à balayage 3D de la maquette HB2 sollicitée en un point par un exciteur électrodynamique monté en suspension.

4.3 Analyse modale expérimentale

Avant d'étudier la signature non-linéaire de la maquette HB2, une première étape d'analyse modale expérimentale est réalisée dans l'objectif de valider le modèle éléments finis qui est présenté dans le chapitre 5. Pour cela, deux moyens d'essais et de mesures couplés sont employés pour identifier et caractériser les premiers modes propres de la maquette HB2 : les données accélérométriques ainsi que l'utilisation de la vibrométrie laser à balayage 3D. Ces moyens permettent l'acquisition de l'accélération en certains points précis de la maquette HB2 sollicitée par un exciteur électrodynamique monté en suspension. Le montage expérimental associé à l'analyse modale expérimentale est donné sur la figure 4.6. La structure est sollicitée à faible niveau afin d'éviter le frottement des lames contre l'enveloppe et tout phénomène non-linéaire potentiel. Seuls les modes de vibration situés dans la bande de fréquences $[100 - 1000]$ Hz sont recherchés dans cette première partie d'étude expérimentale.

Les accéléromètres situés sur la maquette HB2 et donnés dans le tableau 4.1 permettent d'obtenir un nombre conséquent de réponses accélérométriques à la fois sur l'enveloppe externe de la structure et sur le colis interne. Ces accéléromètres sont représentés dans le logiciel Simcenter Testlab, le logiciel d'acquisition des mesures d'essais, sur la figure 4.7(a). Les formes géométriques simples reliant les accéléromètres sur la figure 4.7(a) sont des surfaces créées par l'utilisateur afin de symboliser les différents composants de la maquette HB2. Ainsi, la surface en rouge représentée par un triangle représente l'enveloppe externe avec les accéléromètres A1, A2 et A3. La surface en vert représentée par un triangle représente le fond de la maquette avec les accéléromètres A4, A5 et A6. Les autres formes géométriques représentent des éléments du colis interne (lames, lest, etc.). Ces différentes formes

géométriques vont permettre d'observer, avec ce nombre restreint d'accéléromètres, les déformées modales obtenues lors de l'analyse modale expérimentale réalisée sur les données accélérométriques.

Les mesures par accéléromètres permettent d'effectuer une analyse modale expérimentale sur un nombre relativement restreint de nœuds. Cela donne une bonne approximation des fréquences et amortissements modaux mais cela ne suffit pas à visualiser correctement les déformées modales, et en particulier les modes complexes qui interviennent à hautes fréquences. En complément de ces mesures, la vibrométrie laser à balayage a été utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse pour observer le mouvement sur un quart de surface de la maquette HB2.

La vibrométrie laser utilise l'effet Doppler pour mesurer la vitesse d'un point en mouvement. Lorsque le faisceau laser incident est réfléchi par le point de mesure en mouvement, la fréquence du faisceau laser réfléchi est modifiée par effet Doppler. Un traitement numérique permet une mesure de la vitesse instantanée du point de mesure. Le dispositif est dit «à balayage» parce que des servomoteurs permettent de modifier automatiquement la position du point de mesure pour passer à un nouveau point de mesure. Le dispositif qui a été utilisé permet ainsi d'enregistrer successivement le mouvement de toute une grille de points de mesure sur un quart de l'enveloppe externe de la maquette HB2. Le signal de contrôle de l'excitateur électrodynamique est enregistré et permet de synchroniser les enregistrements de vitesse effectués sur les différents points de mesures. Au final, une visualisation globale du champ de vitesse dans la zone de mesure est obtenue.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, un vibromètre laser à balayage 3D a été utilisé [50]. Ce dispositif a auparavant été utilisé dans les travaux de Claeys pour observer le mouvement d'une lame de frottement sur la maquette «Harmonie» et ainsi apporter une meilleure compréhension des phénomènes non-linéaires locaux associés [8]. Le vibromètre laser à balayage 3D est constitué de trois vibromètres laser 1D [51] dont les faisceaux arrivent avec des angles d'incidence différents sur la structure. Les données des trois vibromètres sont traitées par un logiciel qui déduit la vitesse du point de mesure dans les trois directions d'un repère préalablement défini. Le champ de vitesse obtenu est alors en trois dimensions, comme les mesures apportées par les accéléromètres. Le vibromètre laser 3D est positionné pour pouvoir observer le mouvement d'un quart de surface de la maquette HB2, comme le montre la figure 4.6. Les points de mesure concernés par la vibrométrie laser sont représentés sur la figure 4.7(b) et sont implémentés en post-traitement dans le logiciel d'acquisition Simcenter Testlab.

Une fois les géométries des accéléromètres et de la vibrométrie laser à balayage importées et unies pour former une unique géométrie visible sur la figure 4.8, les Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) sont données pour chaque nœud de la géométrie. L'excitation choisie correspond à une excitation aléatoire de bas niveau définie par une DSP de niveau constant (0.10 N RMS) le long de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz. Enfin, les fréquences propres, les amortissements et les déformées des différents modes de la maquette HB2 sont déterminés via l'algorithme d'optimisation PolyMAX [47] utilisé sur les FRF provenant à la fois des différents accéléromètres et à la fois des points de mesure de la vibrométrie laser 3D. Les fréquences, les amortissements et la description de chaque mode sont

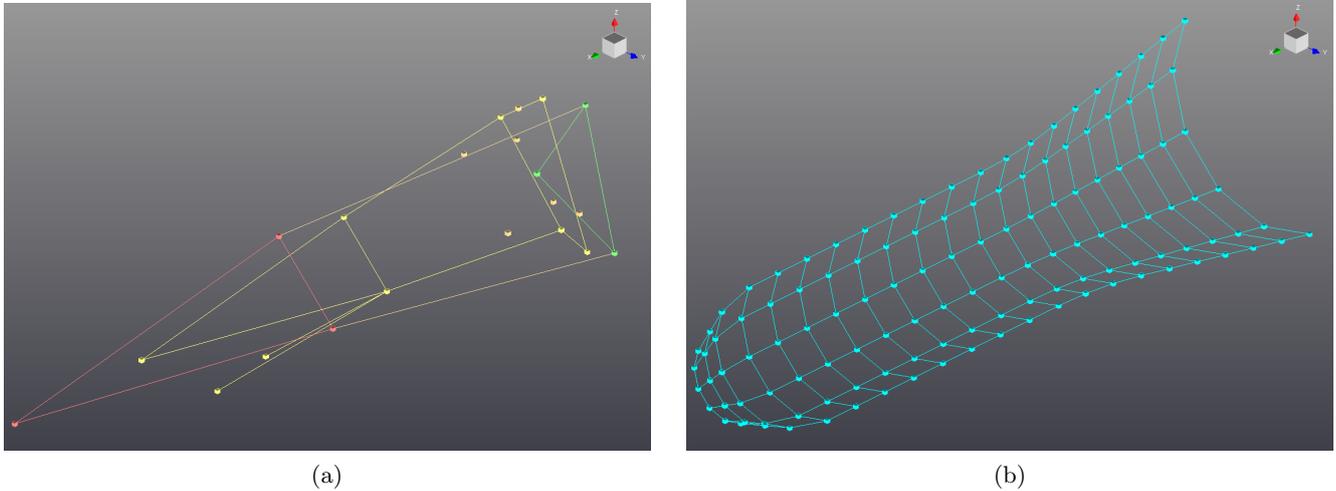


FIGURE 4.7 – Géométrie utilisée lors de l’analyse modale expérimentale avec d’une part les accéléromètres présents sur la maquette HB2 (a) et d’autre part les nœuds ciblés par le vibromètre laser à balayage 3D (b). Les formes géométriques liant les nœuds (représentés par des cubes) sont créées afin d’observer les déformées modales obtenues lors de l’analyse modale expérimentale.

donnés dans le tableau 4.2. Vingt modes de vibration sont identifiés expérimentalement le long de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz. Les données de l’analyse modale expérimentale serviront de référence pour valider le modèle éléments finis de la maquette HB2 présenté dans le chapitre 5.

Pour identifier au mieux les modes de vibration de la maquette HB2, le critère d’autoMAC (pour « Modal Assurance Criterion » [52]) est calculé pour tous les modes propres expérimentaux :

$$\text{autoMAC}^{ij}(\%) = 100 \times \frac{(\Phi_{\text{exp}}^i | \Phi_{\text{exp}}^j)^2}{(\Phi_{\text{exp}}^i | \Phi_{\text{exp}}^i) (\Phi_{\text{exp}}^j | \Phi_{\text{exp}}^j)} \quad (4.1)$$

où $(\cdot | \cdot)$ représente le produit scalaire hermitien, Φ_{exp}^i (respectivement Φ_{exp}^j) représente le i -ème (respectivement j -ème) mode de vibration expérimental identifié. Un critère d’autoMAC proche de 0% entre deux modes de vibration indique que ces deux modes sont découplés tandis qu’un critère d’autoMAC proche de 100% indique deux modes fortement couplés entre eux. Le calcul du critère d’autoMAC donne lieu à une matrice symétrique par définition qui est représentée sur la figure 4.9. La figure 4.9 indique ainsi que les modes 5 à 8 sont relativement couplés entre eux et qu’il est difficile de les dissocier. Ainsi, dans le tableau 4.2, les modes 5 à 8 sont décrits en tant que « modes d’ensemble ». De même, les modes 11 et 12 sont couplés entre eux mais ne sont pas descriptibles expérimentalement avec cette précision de mesure, ils sont vus comme des modes d’ensemble. Comme les modes 11 et 12, les modes 17 et 18 ne sont couplés à aucun autre mode et sont considérés comme des modes d’ensemble. Un visuel des différentes déformées propres à chaque mode est proposé dans le chapitre suivant lors de la confrontation des essais avec les simulations numériques concernant l’analyse modale de la maquette

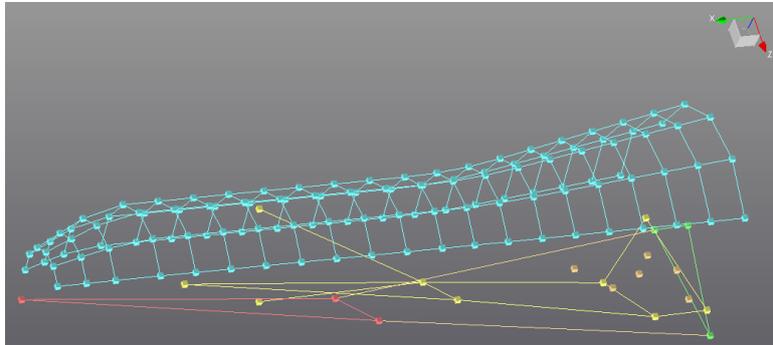


FIGURE 4.8 – Union des deux moyens d’acquisition (accéléromètres et vibrométrie laser à balayage 3D) pour former une unique géométrie sur le logiciel Simcenter Testlab et réaliser l’analyse modale expérimentale de la maquette HB2.

HB2.

L’ajout des mesures issues de la vibrométrie laser change significativement les résultats de l’analyse modale expérimentale. À partir des FRF provenant uniquement des données capteurs, l’analyse modale permet d’identifier 19 modes expérimentaux sur la plage de fréquences [100 – 1000] Hz (contre 20 modes expérimentaux pour l’analyse modale réalisée avec l’union des données capteurs et des données issues de la vibrométrie laser). Ces 19 modes expérimentaux sont très similaires (pour les fréquences propres et les amortissements modaux) de ceux présentés dans le tableau 4.2, seul le mode 13, non identifié et assimilé à un mode d’ensemble dû au moyen d’essais, n’est pas identifié avec les données capteurs. La matrice du critère d’autoMAC est représentée sur la figure 4.10 pour cette analyse modale expérimentale réalisée uniquement à partir des données capteurs. En comparant la figure 4.10 à la figure 4.9, il est possible d’observer qu’il existe beaucoup plus de modes couplés sur l’analyse modale issue des données capteurs que sur l’analyse modale réalisée avec l’union des deux données. Cela est cohérent avec le fait que la précision sur les déformées modale augmente avec le nombre plus important de points de mesure.

La vibrométrie laser à balayage a ainsi divers avantages :

- elle permet d’améliorer la visualisation des déformées modales en ajoutant un nombre conséquent de points de mesure tout en conservant une bonne confiance pour les autres informations modales (fréquences et amortissements) issues d’une analyse modale expérimentale réalisée à partir de données capteurs.
- Elle permet une analyse non intrusive de la structure étudiée contrairement à l’ajout de capteurs (accéléromètres, cellules de force) qui ont un impact sur le comportement vibratoire de la structure par leur présence. Dans le cas où la structure étudiée est de moins grande envergure, par exemple avec une taille caractéristique de l’ordre du capteur, la vibrométrie laser se révèle

Numéro de mode	Description du mode	Fréquence (Hz)	Amortissement modal (%)
1	Mode transverse selon Z	130.9	0.48
2	Mode transverse selon Y	135.4	0.39
3	Mode de lames	336.2	0.23
4	Mode d'enveloppe (2 lobes)	344.7	0.32
5	Mode d'ensemble	353.4	0.39
6	Mode d'ensemble	371.6	0.32
7	Mode d'ensemble	396.6	0.71
8	Mode d'enveloppe (2 lobes)	408.1	0.56
9	Mode d'enveloppe (3 lobes)	474.8	0.51
10	Mode d'enveloppe (3 lobes)	478.4	0.62
11	Mode d'ensemble	526.6	0.86
12	Mode d'ensemble	577.9	1.00
13	Mode d'ensemble	688.3	0.23
14	Mode d'enveloppe (4 lobes)	713.7	0.78
15	Mode d'enveloppe (3 lobes)	734.5	0.89
16	Mode d'enveloppe (3 lobes)	751.8	0.49
17	Mode d'ensemble	780.5	0.44
18	Mode d'ensemble	831.5	0.40
19	Mode d'enveloppe (4 lobes)	868.1	0.59
20	Mode transverse selon Y	925.0	0.92

TABLEAU 4.2 – Modes de vibration de la maquette HB2 identifiés à partir de l'analyse modale expérimentale à l'excitateur électrodynamique. Certains modes parmi les vingt indiqués ne sont pas décrits par manque de précision. Les modes d'enveloppe sont donnés avec un nombre de lobes circonferentiels qui apparaissent sur l'enveloppe lors de chaque déformée modale. Deux lobes longitudinaux sont également présents pour les modes situés respectivement à 734.5 Hz, 751.8 Hz et 868.1 Hz.

alors être très intéressante.

- Dans le cadre de l'étude de la maquette HB2, ce moyen d'acquisition reste néanmoins indissociable des données capteurs puisque les têtes lasers ne peuvent pas cibler les éléments internes de l'assemblage. Dès lors, pour l'étude d'un assemblage industriel complexe avec une structure externe et des composants internes, ces deux moyens d'acquisition (les accéléromètres et la vibrométrie laser) doivent être couplés afin de réaliser l'analyse modale expérimentale complète de l'assemblage. Une méthode optimale pour utiliser ces deux moyens est de placer l'ensemble des capteurs disponibles sur la partie interne de la structure et d'étudier les vibrations de l'enveloppe externe via la vibrométrie laser 3D.

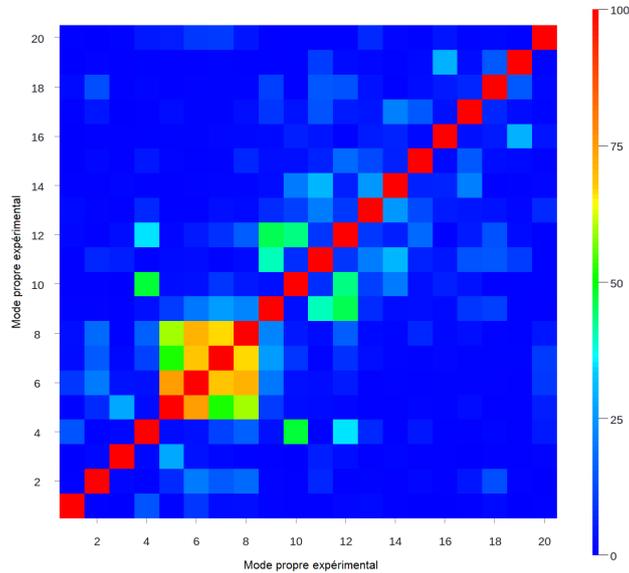


FIGURE 4.9 – Matrice du critère d’autoMAC (en %) établie entre les différents modes propres expérimentaux de la maquette HB2.

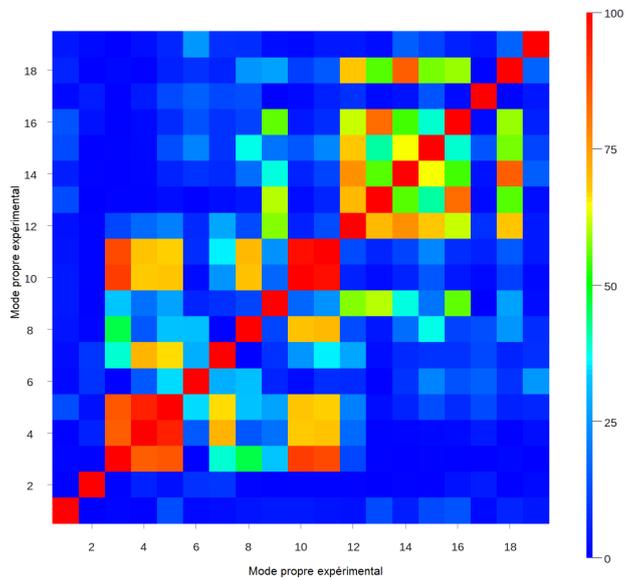


FIGURE 4.10 – Matrice du critère d’autoMAC (en %) établie entre les différents modes propres expérimentaux de la maquette HB2 obtenus uniquement avec les données issues des accéléromètres (c.a.d., en retirant les données issues de la vibrométrie laser).



FIGURE 4.11 – Photographie du montage expérimental de la maquette HB2 soumise à une excitation mécanique aléatoire monopoint exercée par un excitateur électrodynamique.

4.4 Réponses vibratoires à une excitation aléatoire monopoint

Avant de s'intéresser à la signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation aléatoire multipoints, le cas d'une excitation aléatoire monopoint est étudié. À l'aide d'un excitateur électrodynamique placé en suspension par un bras mécanique, comme indiqué sur la figure 4.11, la maquette HB2 est sollicitée en un unique point. Le point d'excitation choisi est un point de l'enveloppe où se situe l'accéléromètre tridimensionnel A2. L'excitation est dirigée suivant l'axe Y global. Une tête d'impédance permet alors de mesurer l'effort fourni par l'excitateur et l'accélération donnée par l'accéléromètre. Pour rester dans le cadre des excitations aléatoires, une excitation de type bruit blanc est choisie pour solliciter la structure le long de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz.

Les fonctions de réponse en fréquence (FRF) sont définies comme la racine carré du rapport de la DSP d'une accélération mesurée par un accéléromètre de la maquette HB2 sur la DSP de l'excitation en force. Ainsi, les FRF expérimentales sont étudiées dans cette section pour quatre niveaux d'excitation croissants. Considérant le nombre conséquent d'accéléromètres présents sur la maquette HB2, seul un nombre limité d'accéléromètres est donné dans cette partie. Pour information, les observations expérimentales qui suivent se retrouvent sur l'ensemble des accéléromètres présents sur la maquette. Pour l'étude de la réponse vibratoire de la maquette HB2 à une excitation acoustique, qui est au cœur de ces travaux de thèse, les résultats expérimentaux sont donnés pour l'ensemble des accéléromètres.

De plus, la signature non-linéaire d'un assemblage industriel avec des liaisons frottantes à une excitation aléatoire monopoint a été étudiée par Roncen [58].

Les cinq accéléromètres choisis pour l'analyse des mesures vibratoires à une excitation aléatoire monopoint sont sélectionnés afin de donner un aperçu de la signature non-linéaire de la structure industrielle en différentes localisations et de pouvoir expliquer les phénomènes physiques observés avec un minimum de courbes expérimentales afin de ne pas perdre le lecteur dans un ensemble trop conséquent de résultats. Ainsi, les cinq accéléromètres retenus sont :

- l'accéléromètre tridimensionnel A1, schématisé sur la figure 4.3(a), et présent sur l'enveloppe externe et plus précisément sur le nez de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre suivant l'axe Y global sont données dans la figure 4.12 et celles suivant l'axe Z global sont données dans la figure 4.16 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A4, schématisé sur la figure 4.3(b), et présent au centre du fond de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre suivant l'axe Y global sont données dans la figure 4.13 et celles suivant l'axe X global sont données dans la figure 4.17 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A7, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent sur le bout du colis interne de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre suivant l'axe Y global sont données dans la figure 4.14 et celles suivant l'axe Z global sont données dans la figure 4.18 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A10, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent en amont du colis interne de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre suivant l'axe Y global sont données dans la figure 4.15 et celles suivant l'axe Z global sont données dans la figure 4.19 ;
- l'accéléromètre monodimensionnel A21, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent sur l'une des 23 lames de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre suivant l'axe Z global sont données dans la figure 4.20 ;

4.4.1 Réponse vibratoire suivant la direction de l'excitation

Concernant les mesures de l'accéléromètre A1 situé sur le nez de la maquette HB2, la figure 4.12 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe Y global en fonction du niveau d'excitation. Sur une majorité de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz, les courbes sont toutes confondues, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur ces points de fréquence. Cependant, entre 110 Hz et 150 Hz où se situent les deux premiers modes transverses de la maquette HB2, les courbes se distinguent (voir figure 4.12(b)) ce qui est caractéristique d'un phénomène vibratoire non-linéaire. Concernant la bande fréquentielle [110 – 150] Hz, une diminution de l'amplitude du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences, notamment pour le mode originalement situé à 136 Hz. Cela est cohérent avec l'analyse modale expérimentale puisque

le mode situé à 136 Hz est le mode transverse suivant la direction Y globale qui est la direction de l'excitation. Ainsi, au fur et à mesure que le niveau de l'excitation augmente, les lames sont sollicitées et viennent frotter contre l'enveloppe externe. Une excitation mécanique aléatoire monopoint située sur l'enveloppe de la structure HB2 permet ainsi d'observer expérimentalement une signature vibratoire non-linéaire sur l'enveloppe de la structure.

Concernant un autre point de l'enveloppe, plus précisément l'accéléromètre A4 situé au centre du fond de la maquette HB2, la figure 4.13 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe Y global en fonction du niveau d'excitation. De même que pour l'accéléromètre A1, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur une majeure partie de la bande de fréquences [300 – 1000] Hz. Concernant la bande de fréquences [110 – 150] Hz étudiée sur la figure 4.13(b), les FRF ne se confondent pas pour les points d'amplitudes de faible niveau qui se retrouvent loin de la fréquence de résonance de chaque mode transverse. Ce résultat sans conséquence sur l'objectif de la thèse et sur les résultats associés est a priori dû à des niveaux en DSP d'accélération extrêmement faibles dans le bruit de mesure. Les FRF tracées à ces fréquences correspondent au bruit de mesure divisé par le niveau d'excitation. Cela se retrouve sur d'autres accéléromètres pour cette bande de fréquences (voir notamment l'accéléromètre A10 sur la figure 4.15(b) étudié ci-après). Malgré cette différence de niveau, il est possible d'observer sur la courbe de plus haut niveau (courbe verte) que la résonance du mode transverse selon l'axe Y globale, originalement située à 136 Hz, est significativement atténuée. Dès lors, la signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint se retrouve également sur le fond de la structure pour les modes transverses de la maquette.

Concernant les mesures des accéléromètres A7 et A10 situés de part et d'autre du colis interne de la maquette HB2, les figures 4.14 et 4.15 donnent l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe Y global en fonction du niveau d'excitation. Comme pour le comportement vibratoire de l'enveloppe, le même phénomène vibratoire non-linéaire se retrouve sur le colis interne de la structure. Pour les modes transverses de la structure, une diminution du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences. Ainsi, l'augmentation du niveau d'excitation induit une sollicitation de plus en plus importante des lames qui vient atténuer le mouvement vibratoire du colis interne. La signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint se retrouve également sur le colis interne et notamment pour les modes de vibration transverses de la maquette HB2 mais également les modes du colis interne.

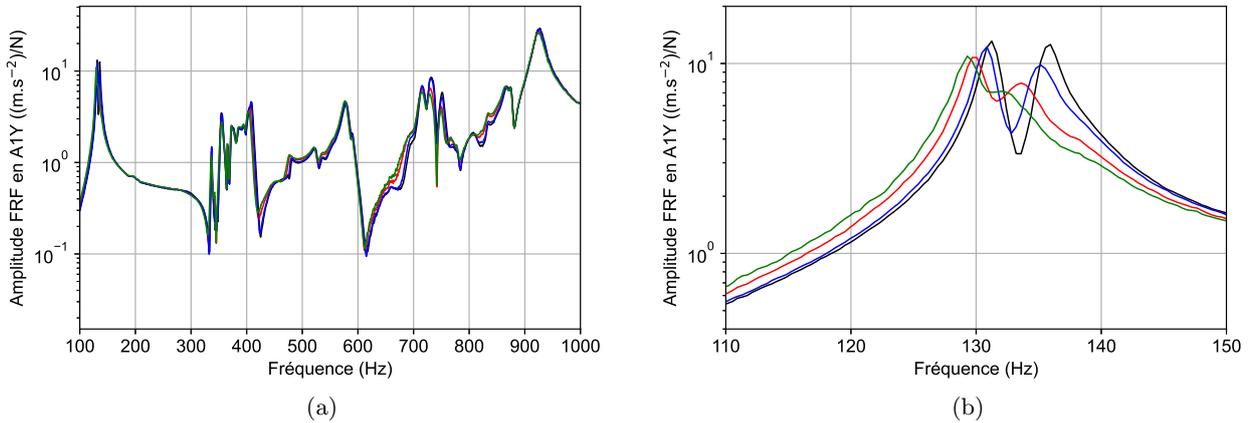


FIGURE 4.12 – (a) Mesures de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Y global - (b) Zoom sur la bande de fréquences [110 – 150] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

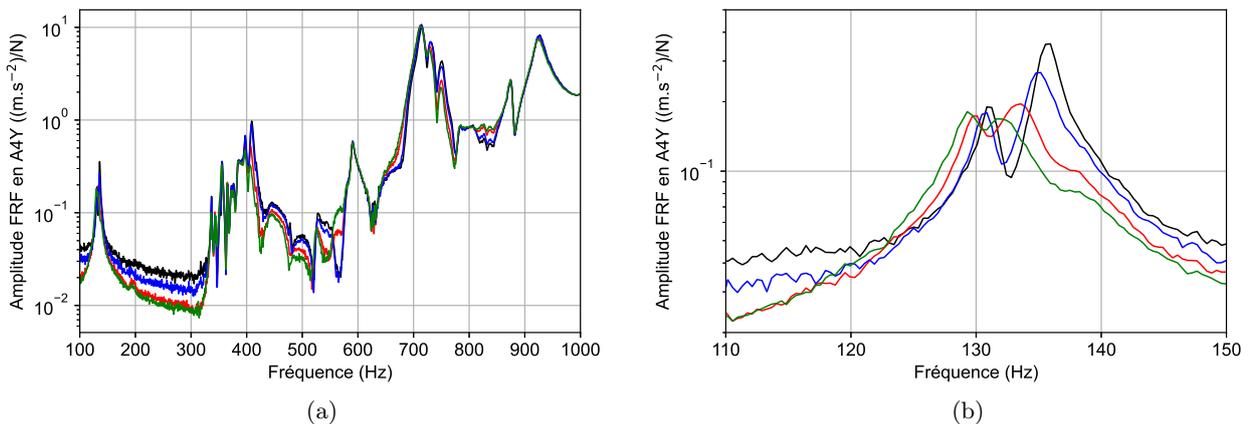


FIGURE 4.13 – (a) Mesures de l'accéléromètre A4 suivant l'axe Y global - (b) Zoom sur la bande de fréquences [110 – 150] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

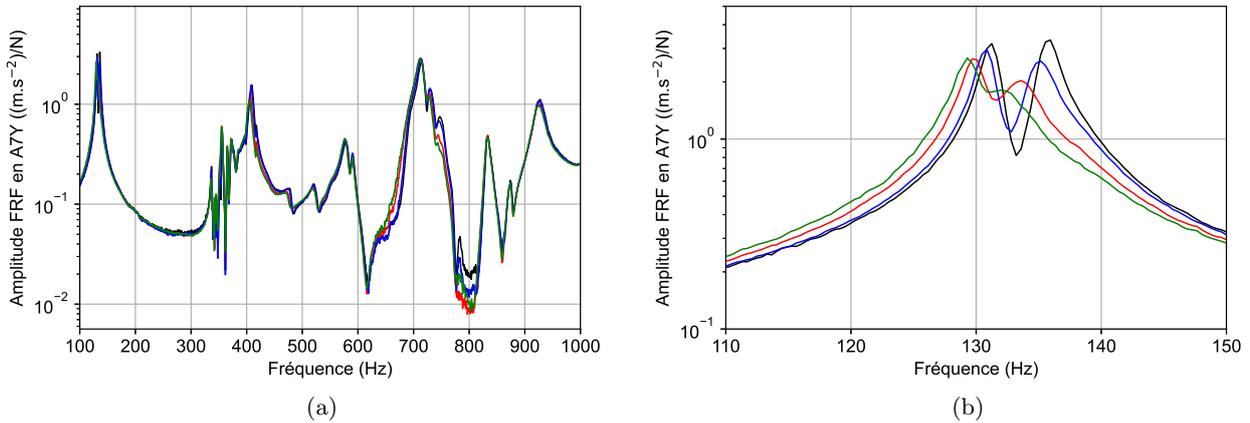


FIGURE 4.14 – (a) Mesures de l'accéléromètre A7 suivant l'axe Y global - (b) Zoom sur la bande de fréquences [110 – 150] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

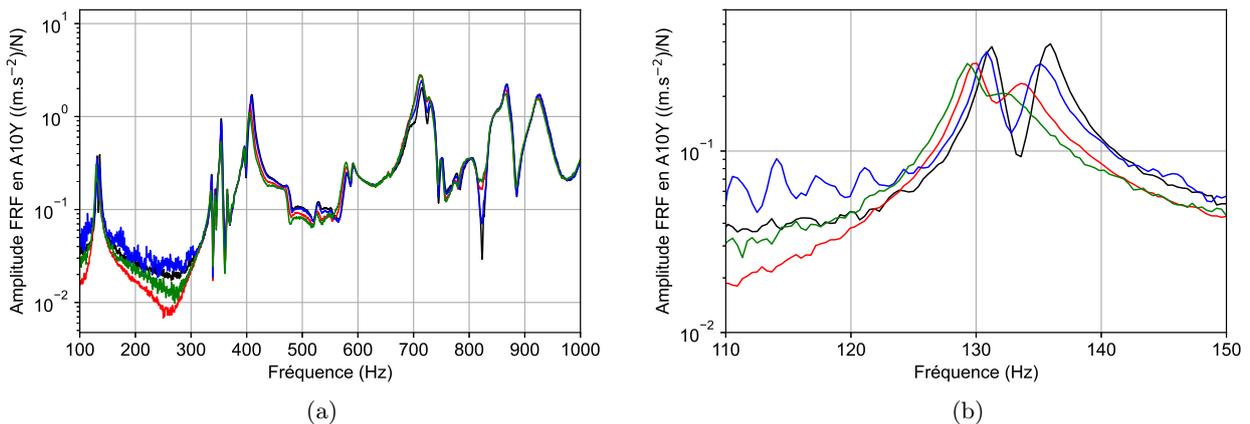


FIGURE 4.15 – (a) Mesures de l'accéléromètre A10 suivant l'axe Y global - (b) Zoom sur la bande de fréquences [110 – 150] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

4.4.2 Réponse vibratoire suivant une direction transverse de l'excitation

Concernant les mesures de l'accéléromètre A1 situé sur le nez de la maquette HB2, la figure 4.16 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe Z global en fonction du niveau d'excitation. Sur une majorité de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz, les courbes sont toutes confondues, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur ces points de fréquence. Cependant, entre 110 Hz et 150 Hz où se situent les deux premiers modes transverses de la maquette HB2 et entre 450 Hz et 500 Hz, les courbes se distinguent (voir figure 4.16(b)) ce qui est caractéristique d'un phénomène vibratoire non-linéaire. Concernant la bande fréquentielle [110 – 150] Hz, une diminution du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences, notamment pour le mode originalement situé à 136 Hz. Cela est cohérent avec l'analyse modale expérimentale puisque le mode situé à 136 Hz est le mode transverse suivant la direction Y globale qui est la direction de l'excitation. Le même phénomène non-linéaire se retrouve sur le mode situé aux alentours de 480 Hz, qui provient, lorsque le système reste dans le cadre d'un comportement linéaire, du mode d'enveloppe d'après l'analyse modale expérimentale. Une excitation mécanique aléatoire monopoint située sur l'enveloppe de la structure HB2 permet ainsi d'observer expérimentalement une signature vibratoire non-linéaire sur l'enveloppe de la structure suivant une direction transverse de l'excitation.

Concernant un autre point de l'enveloppe, plus précisément l'accéléromètre A4 situé au centre du fond de la maquette HB2, la figure 4.17 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe X global (qui est la direction d'intérêt sur le fond de la maquette) en fonction du niveau d'excitation. De même que pour l'accéléromètre A1, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur une majeure partie de la bande de fréquences [300 – 1000] Hz, mise à part le phénomène dissipatif décrit précédemment vers 480 Hz qui, d'après l'analyse modale expérimentale fournie dans la section 4.3, est la fréquence de résonance d'un mode de l'enveloppe. Concernant la bande de fréquences [110 – 150] Hz étudiée sur la figure 4.17(b), il est possible d'observer sur la courbe de plus haut niveau (courbe verte) que la résonance du mode transverse selon l'axe Y globale, originalement situé à 136 Hz, est complètement atténuée. Dès lors, la signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint se retrouve également sur le fond de la structure (suivant une direction transverse de l'excitation) pour les modes transverses de la maquette.

Concernant les mesures des accéléromètres A7 et A10 situés à l'avant et à l'arrière du colis interne de la maquette HB2, les figures 4.18 et 4.19 donnent l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon l'axe Z global en fonction du niveau d'excitation. Comme pour le comportement vibratoire de l'enveloppe, le même phénomène vibratoire non-linéaire se retrouve sur le colis interne de la structure. Pour les modes transverses de la structure, une diminution du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences. Ainsi, l'augmentation du niveau d'excitation induit une sollicitation de plus en plus importante des lames qui vient atténuer le mouvement vibratoire du colis interne. Sur la bande fréquentielle [450 – 500] Hz, la même signature vibratoire non-linéaire ob-

servée sur l'enveloppe et sur le fond se retrouve sur ces accéléromètres présents sur le colis interne. Pour les mesures de l'accéléromètre A7 données par la figure 4.18, cela s'observe sur de nombreux modes de vibration, notamment ceux situés entre 300 Hz et 400 Hz et ceux situés entre 700 Hz et 800 Hz, ce qui ne s'observait ni sur les accéléromètres A1 et A4 situés sur l'enveloppe ni sur l'accéléromètre A10 situé en amont du colis interne (voir figure 4.19). Il doit ainsi s'agir de modes de vibration du colis interne pour lesquels l'amplitude modale est plus importante en bout du colis (c.a.d., au niveau de l'accéléromètre A7) plutôt qu'en amont du colis (c.a.d., au niveau de l'accéléromètre A10). La signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint se retrouve également sur le colis interne et notamment pour les modes de vibration transverses de la maquette HB2 mais également les modes du colis interne.

Enfin, le comportement vibratoire de la maquette HB2 au niveau des lames s'observe via l'accéléromètre A21 sur la figure 4.20. Cet accéléromètre, monodimensionnel, mesure l'accélération d'une lame de vibration selon l'axe Z global. De même que pour l'accéléromètre A1, sur une majorité de la bande de fréquences [100 – 1000] Hz, les courbes sont toutes confondues, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur ce domaine fréquentiel. La sollicitation des lames et le phénomène dissipatif n'impactent pas le comportement vibratoire de la maquette HB2 au niveau des lames et notamment pour les modes des lames situés entre 300 Hz et 400 Hz. Cependant, il est également possible d'observer la signature non-linéaire au niveau des modes transverses de la maquette HB2 situés entre 100 Hz et 200 Hz (voir figure 4.20(b)). Une diminution du pic de résonance est observée pour les deux modes de vibration situés à 131 Hz et 136 Hz ainsi qu'un décalage des fréquences de résonance de ces modes vers les basses fréquences. De même, la diminution de l'amplitude de résonance est observée pour les modes situés entre 450 Hz et 500 Hz identifiés, lorsque le système reste dans le cadre d'un comportement linéaire, comme des modes d'enveloppe durant l'analyse modale expérimentale. Ainsi, la signature non-linéaire de la maquette HB2 à une excitation mécanique aléatoire monopoint se retrouve également sur les lames de la maquette (suivant une direction transverse de l'excitation) uniquement pour les modes transverse de la structure.

Ces comportements vibratoires observés sur les différents accéléromètres A1, A4, A7, A10 et A21 quadrillant ainsi l'ensemble de la maquette HB2 se retrouvent sur tous les accéléromètres présents lors des essais suivant leur localisation : sur l'enveloppe, sur le fond, sur le colis interne ou sur l'une des 23 lames de la maquette.

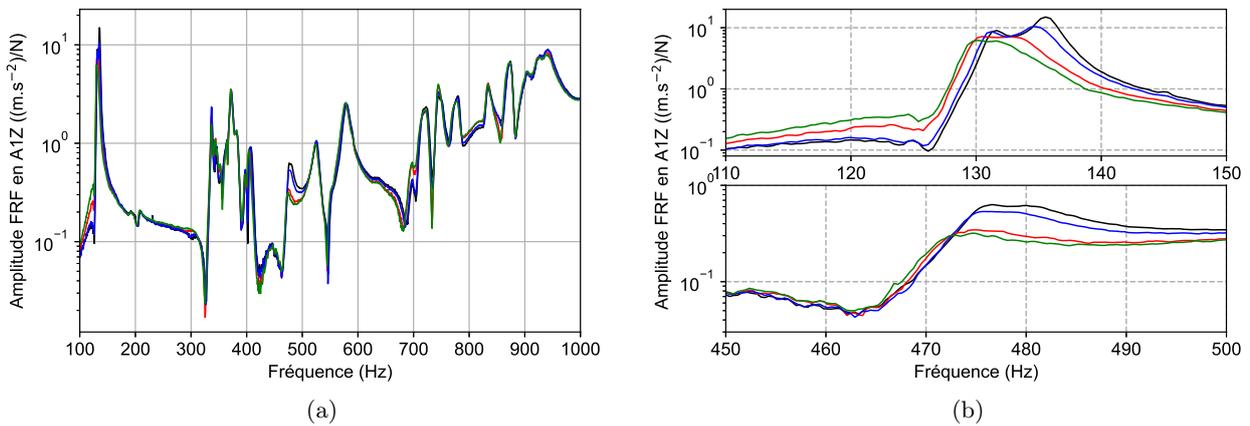


FIGURE 4.16 – (a) Mesures de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Z global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [110 – 150] Hz et [450 – 500] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

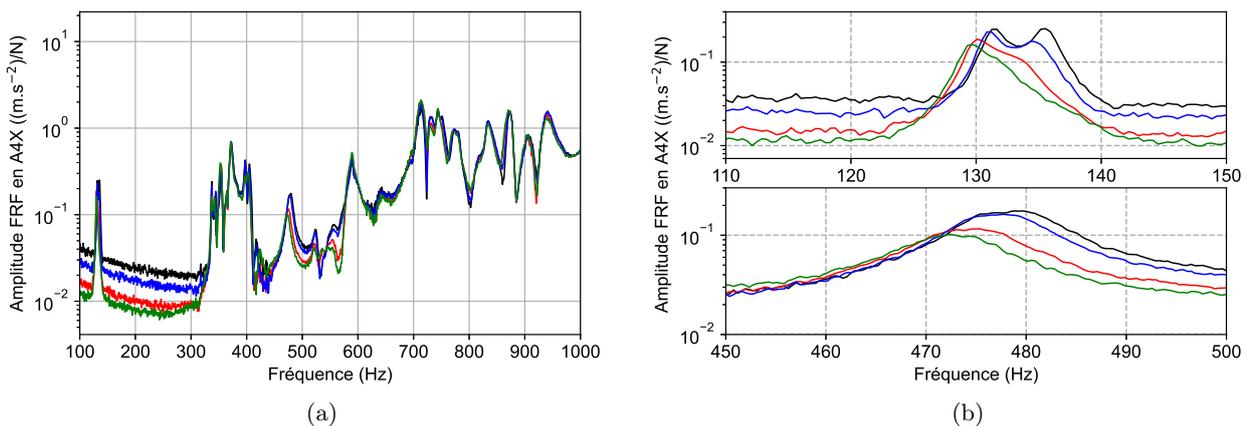


FIGURE 4.17 – (a) Mesures de l'accéléromètre A4 suivant l'axe X global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [110 – 150] Hz et [450 – 500] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

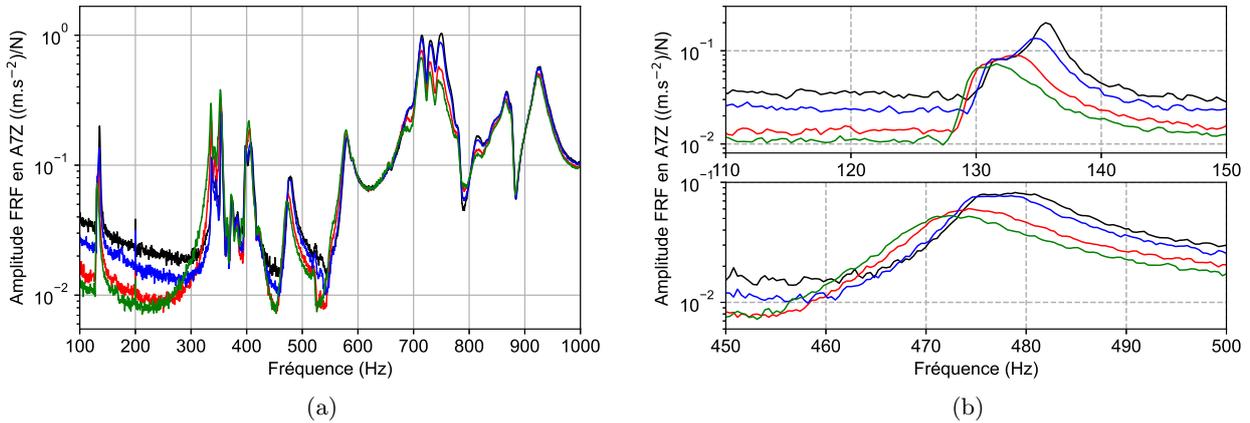


FIGURE 4.18 – (a) Mesures de l'accéléromètre A7 suivant l'axe Z global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [110 – 150] Hz et [450 – 500] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

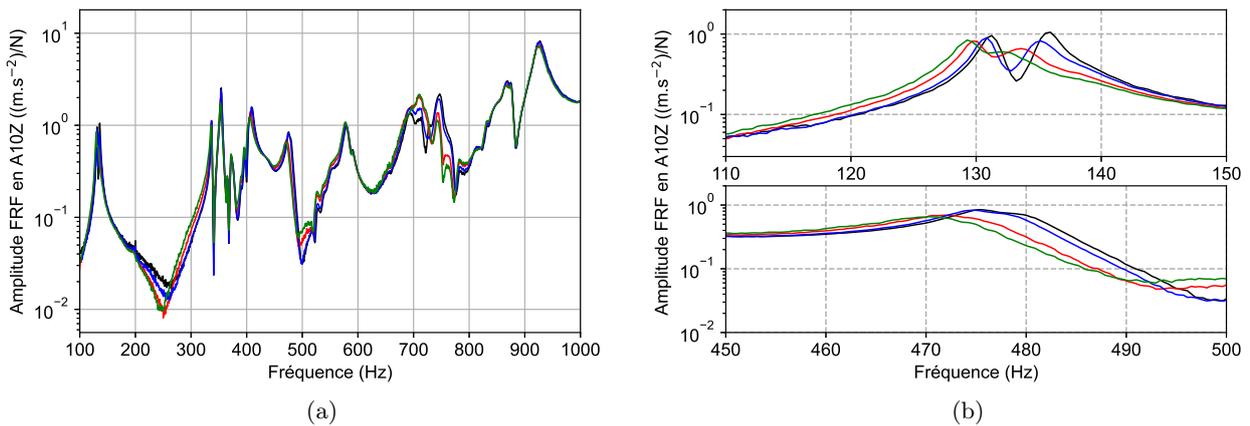


FIGURE 4.19 – (a) Mesures de l'accéléromètre A10 suivant l'axe Z global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [110 – 150] Hz et [450 – 500] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

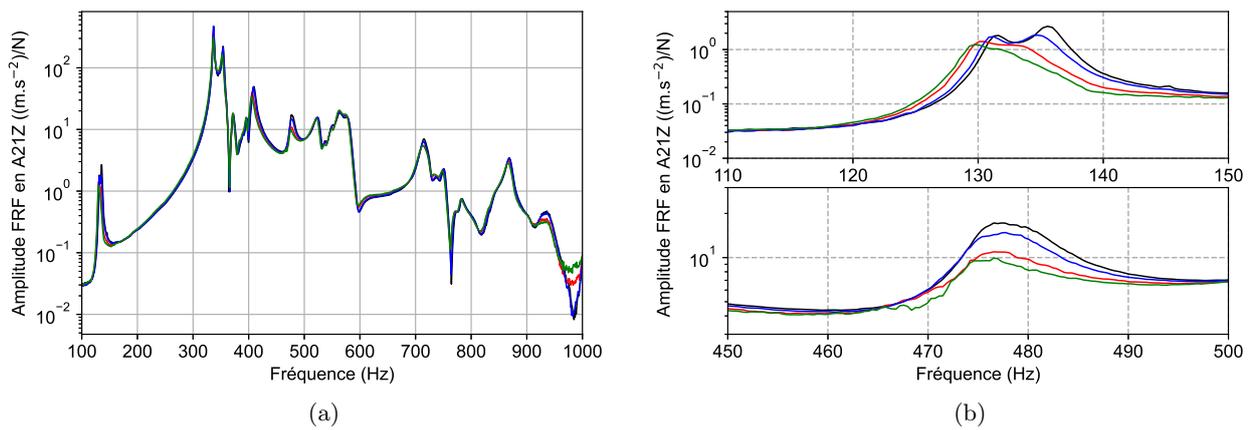


FIGURE 4.20 – (a) Mesures de l'accéléromètre A21 suivant l'axe Z global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [110 – 150] Hz et [450 – 500] Hz. L'excitation aléatoire monopoint est un bruit blanc correspondant au niveau RMS suivant : 0.10 N RMS (noir), 0.14 N RMS (bleu), 0.24 N RMS (rouge) et 0.31 N RMS (vert).

4.5 Réponses vibratoires à une excitation acoustique

Maintenant que le comportement vibratoire de la maquette HB2 à une excitation aléatoire mono-point est connu et analysé, le but de ces travaux de thèse est d'identifier le comportement non-linéaire de la structure à une excitation aléatoire multipoints. Pour ce faire, le choix d'utiliser une excitation acoustique, assimilée à une excitation aléatoire surfacique et corrélée spatialement sur toute la surface mouillée de la structure, est pris.

Comme précédemment expliqué, les essais effectués dans la chambre acoustique au CEA/CESTA se font à l'aide de deux batteries de haut-parleurs. Ces deux batteries, placées d'une part et d'autre de la pièce, sont alimentées en tension par le système de pilotage de Simcenter. Il s'agit du même logiciel d'essais que celui utilisé pour les essais réalisés sur la poutre bi-encastree CEA et décrit dans le chapitre 2. Pour rappel, le contrôle expérimental se réalise par la moyenne des niveaux de pression mesurés par les six microphones placés dans la chambre acoustique. Situés aléatoirement autour de la maquette HB2, la prise de moyenne de ces six microphones permet d'assurer que le champ de pression autour de la structure est homogène dans l'ensemble de la pièce. Il s'agit d'un bruit diffus. La consigne d'entrée de cette excitation acoustique lors des essais réalisés sur la maquette HB2 est un bruit blanc, c'est-à-dire une excitation aléatoire dont la Densité Spectrale de Puissance (DSP) est constante dans la bande de fréquences d'intérêt.

La bande de fréquences étudiée dans ces travaux de thèse est la bande [100 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est définie par un niveau RMS global associé à une DSP constante le long de cette bande de fréquences. Pour définir ce niveau RMS global, il est nécessaire d'utiliser une grandeur relative au domaine de l'acoustique : le dB SPL (pour « Sound Pressure Level »). La conversion avec le niveau RMS de l'excitation acoustique est donnée par :

$$x \text{ [Pa RMS]} = 20 \log_{10} \left(\frac{x}{x_0} \right) \text{ [dB SPL]} \quad (4.2)$$

où $x_0 = 20 \cdot 10^{-6}$ Pa est une constante prise dans des conditions normales de pression et de température pour les essais réalisés. Ainsi, dans ce manuscrit de thèse, les niveaux relatifs aux essais réalisés s'expriment en dB et sont associés à une grandeur RMS qui permet de définir une Densité Spectrale de Puissance de l'excitation acoustique (en Pa^2/Hz). Les différents niveaux acoustiques pris en compte avec la chambre acoustique et le moyen d'essais au CEA/CESTA sont des niveaux allant de 90 dB à 130 dB par pas de 5 dB. Dès lors, le comportement vibratoire non-linéaire de la maquette HB2 est observé au fur et à mesure que le niveau acoustique s'intensifie.

4.5.1 Traitement des mesures brutes

Avant de présenter les mesures effectuées lors des essais dans la chambre acoustique, il est nécessaire de traiter les données brutes. La figure 4.21 présente les mesures brutes de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Z global mises sous la forme de FRF (c'est-à-dire, la racine carré du rapport de la DSP de l'accélération sur la DSP du niveau acoustique). Sur la figure 4.21(a) le long de la bande de

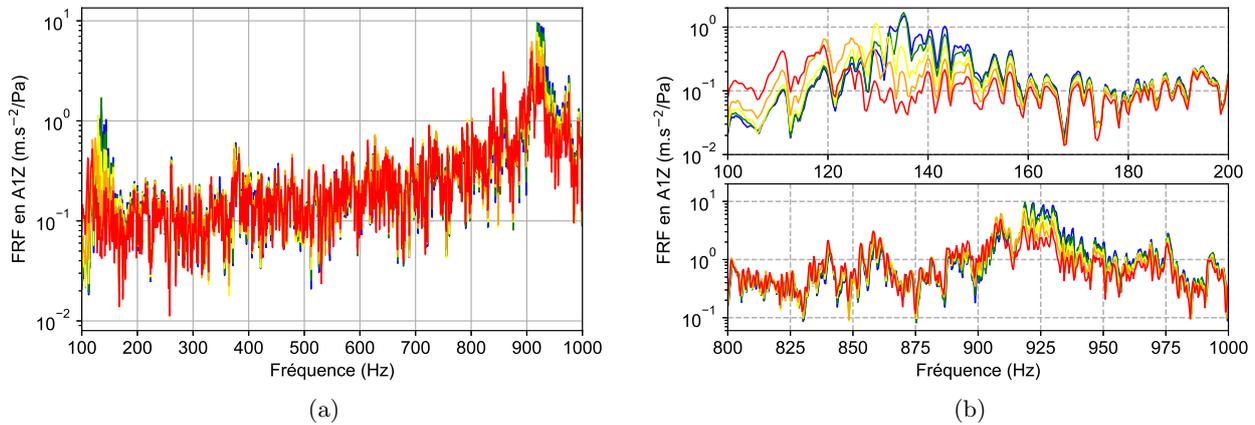


FIGURE 4.21 – (a) Mesures brutes de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Z global - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

fréquences [100 – 1000] Hz, il est relativement difficile de distinguer les courbes entre elles afin d'observer un phénomène vibratoire linéaire ou non-linéaire. Sur la figure 4.21(b), un zoom sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz permet tout de même d'observer le phénomène non-linéaire précédemment identifié avec l'excitation aléatoire monopoint : une baisse de la fréquence de résonance ainsi qu'une augmentation de l'amortissement du système en fonction du niveau de l'excitation. Ce phénomène s'observe uniquement pour les modes transverses de la maquette HB2. Pour le reste de la bande fréquentielle, où interviennent davantage de modes de vibration, les résonances acoustiques rendent les mesures réelles de DSP difficiles à lire pour chaque accéléromètre. En particulier, le phénomène non-linéaire autour de la bande de fréquences [450 – 500] Hz n'est pas identifié.

L'originalité dans ces travaux de thèse est l'introduction d'une force acoustique : une force aléatoire multipoints et corrélée spatialement sur tous les points de la surface extérieure de la maquette HB2. Ainsi, le phénomène non-linéaire lié à une physique vibratoire est désormais lié à une physique acoustique. Le problème devient vibro-acoustique. L'introduction de la physique acoustique permet d'introduire des modes acoustiques également appelés modes de Helmholtz. Ces résonances acoustiques existent dès lors qu'il y a de l'air dans une cavité [5]. Dans ce montage expérimental, les modes de Helmholtz principalement concernés sont ceux de la chambre acoustique. Afin de limiter l'impact visuel des modes acoustiques sur le phénomène vibratoire non-linéaire d'intérêt, il est nécessaire de traiter les données brutes de mesure. Le traitement des mesures brutes est le suivant :

- chaque DSP d'accélération est divisée par une DSP de pression théorique correspondant à la DSP de l'excitation acoustique pour le niveau en dB considéré. Cela est nécessaire afin de ramener toutes les DSP à un niveau équivalent : pour un système linéaire, ce rapport donne le module

de la fonction de transfert au carré. Ainsi, tout écart important entre les courbes ramenées à un niveau de référence indique un phénomène vibratoire non-linéaire, en contradiction avec le principe de superposition explicité dans le chapitre 1.

- Afin de limiter l'impact des résonances acoustiques, le traitement se réalise sur des bandes d'octave. Pour rappel, une bande d'octave est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ pour lequel la relation mathématique suivante est vérifiée :

$$f_2 = 2^{\frac{1}{N}} f_1 \quad (4.3)$$

L'entier N définit la largeur de l'intervalle. Ainsi, si $N = 3$, alors il s'agit d'une bande de tiers d'octave, etc. Dans ce manuscrit, le choix de $N = 48$ (une bande de quarante-huitième d'octave) est le choix le plus pertinent concernant la lisibilité des données traitées par rapport à l'observation d'un phénomène vibratoire non-linéaire. Ensuite, l'aire sous la courbe traitée (c'est-à-dire, la DSP de l'accélération pris à un accéléromètre divisée par la DSP de pression théorique du niveau acoustique correspondant) est calculée pour chaque bande d'octave le long de la plage de fréquences $[100 - 1000]$ Hz. Puis, la racine carrée de cette grandeur est calculée. Le traitement des données brutes de mesures s'écrit ainsi :

$$a_{\text{RMS}}(f_c) = \sqrt{\frac{\int_{f_c 2^{-\frac{1}{2N}}}^{f_c 2^{\frac{1}{2N}}} DSP_{\text{réelle}}(f) df}{\int_{f_c 2^{-\frac{1}{2N}}}^{f_c 2^{\frac{1}{2N}}} DSP_{\text{acoustique}}(f) df}} \quad (4.4)$$

où f_c est la fréquence centrale de la bande d'octave considérée, $DSP_{\text{réelle}}(f)$ est la DSP de l'accélération brute mesurée par un accéléromètre, $DSP_{\text{acoustique}}(f)$ est la DSP de pression acoustique relative au niveau acoustique considéré (c.a.d., de 90 dB à 130 dB).

La grandeur mesurée $a_{\text{RMS}}(f_c)$ représente ainsi un rapport d'une valeur efficace d'accélération sur une valeur efficace de pression par bande de fréquences. Cette grandeur n'a pas réellement de sens physique, elle est liée au niveau d'énergie (en accélération) du système divisé par le niveau acoustique imposé (en pression). La lecture de ces données en fonction du niveau acoustique permet ainsi d'observer correctement les phénomènes vibratoires associés au frottement des lames de la maquette HB2.

4.5.2 Analyse de la signature non-linéaire due à l'excitation acoustique

Dans cette section, les mesures traitées des accélérations sont analysées pour un nombre limité d'accéléromètres. Seules les accélérations relatives à cinq niveaux d'excitation acoustique (de 90 dB à 130 dB par pas de 10 dB) pour cinq accéléromètres sont présentées et analysées. Les cinq accéléromètres choisis pour l'analyse des mesures vibratoires à une excitation acoustique sont les mêmes que ceux choisis pour l'excitation aléatoire monopoint, à savoir :

- l'accéléromètre tridimensionnel A1, schématisé sur la figure 4.3(a), et présent sur l'enveloppe externe et plus précisément sur le nez de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre sont données dans la figure 4.22 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A4, schématisé sur la figure 4.3(b), et présent au centre du fond de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre sont données dans la figure 4.23 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A7, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent sur le bout du colis interne de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre sont données dans la figure 4.24 ;
- l'accéléromètre tridimensionnel A10, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent en amont du colis interne de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre sont données dans la figure 4.25 ;
- l'accéléromètre monodimensionnel A21, schématisé sur la figure 4.2(b), et présent sur l'une des 23 lames de la maquette HB2. Les mesures associées à cet accéléromètre sont données dans la figure 4.26 ;

Concernant les mesures de l'accéléromètre A1 situé sur le nez de la maquette HB2, la figure 4.22 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon les trois axes X, Y et Z globaux en fonction du niveau d'excitation. L'accélération mesurée selon l'axe Z, donnée par les figures 4.22(e) et 4.22(f) est la plus intéressante à observer. En effet, sur une majorité de la bande de fréquences, plus précisément entre 200 Hz et 800 Hz, les courbes sont toutes confondues, il n'y a aucun phénomène vibratoire non-linéaire observable sur ce domaine fréquentiel. Sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz, où se situent les deux modes transverses de la maquette, les courbes se distinguent. La figure 4.22(f) montre très nettement un phénomène vibratoire non-linéaire : il y a une diminution de la fréquence de résonance ainsi qu'une diminution de l'amplitude de résonance lorsque le niveau de l'excitation acoustique augmente. Au fur et à mesure que le niveau de l'excitation augmente, les lames sont sollicitées et viennent frotter contre l'enveloppe externe. Le frottement a un effet double sur la structure : en raideur et en dissipation. Ce frottement traduit le relâchement d'une contrainte de liaison par l'apparition de glissement. Il entraîne ainsi une diminution de la raideur locale. L'apparition de frottement dans les lames conduit également à un effet adoucissant : l'atténuation locale des raideurs entraîne une baisse de fréquence de résonance de la structure. De plus, le frottement est un phénomène dissipatif qui contribue à augmenter l'amortissement de la maquette. Il est possible d'observer le même phénomène non-linéaire sur la figure 4.22(f) pour le deuxième mode transverse situé, lorsque le système reste dans le cadre d'un comportement linéaire, vers 925 Hz. Le comportement vibratoire selon l'axe Y, donné par les figures 4.22(c) et 4.22(d), est similaire à celui qui vient d'être détaillé pour l'axe Z. Avec un phénomène non-linéaire pour le premier mode transverse entre 100 Hz et 200 Hz ainsi que le deuxième mode transverse entre 800 Hz et 1000 Hz. Enfin, le comportement vibratoire selon l'axe X, donné par les figures 4.22(a) et 4.22(b), révèle également une signature non-linéaire de la maquette au niveau du nez dans les deux bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. De plus, sur le reste de la bande fréquentielle, notamment entre 500 Hz et 800 Hz, les courbes pour les différents niveaux d'excitation se distinguent les unes des autres ce qui révèle un comportement vibratoire non-linéaire. La bande de fréquences (environ 300 Hz) sur laquelle s'étend ce phénomène non-linéaire est si importante

qu'il semble difficile d'identifier ce phénomène, la baisse de l'amplitude de résonance vers 780 Hz en fonction du niveau acoustique s'accompagne d'un décalage progressif de cette fréquence de résonance vers 510 Hz avec le niveau d'excitation.

Concernant les mesures de l'accéléromètre A4 situé au centre du fond de la maquette HB2, la figure 4.23 donne l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon les trois axes X, Y et Z globaux en fonction du niveau d'excitation. De même que pour l'accéléromètre A1, l'accélération mesurée selon les axes Y et Z révèle un comportement vibratoire non-linéaire sur les deux bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz : il y a une diminution de la fréquence de résonance ainsi qu'une diminution de l'amplitude de résonance lorsque le niveau de l'excitation acoustique augmente. Le niveau mesuré pour le premier mode transverse, situé dans la bande de fréquences [100 – 200] Hz reste cependant beaucoup plus faible que celui mesuré pour l'accéléromètre A1, ce qui s'explique par le fait que le mode transverse a une amplitude modale moins importante au centre du fond de la structure que sur le nez de l'enveloppe. La forte augmentation de niveau de l'accélération qui s'observe sur les trois axes X, Y et Z globaux à partir de 300 Hz, notamment suivant l'axe X, est due à la présence de modes de vibration qui sont des modes du fond de la maquette. Le comportement vibratoire selon l'axe X, qui est l'axe d'intérêt de l'accéléromètre A4, donné par les figures 4.23(a) et 4.23(b), n'indique aucune distinction entre les courbes de différents niveaux acoustiques entre 100 Hz et 300 Hz et entre 550 Hz et 1000 Hz. Les observations effectuées pour les modes transverses de la maquette HB2 se retrouvent cependant pour les modes de fond situés entre 300 Hz et 500 Hz (voir figure 4.23(a)) : il est possible d'identifier une diminution de l'amplitude de résonance avec une augmentation du niveau acoustique, mais la diminution de la fréquence de résonance ne se retrouve pas le long de cette bande fréquentielle. Le mouvement des lames conduit uniquement à un effet dissipatif augmentant l'amortissement de la maquette au niveau du fond. Les contributions non-linéaires observées sur l'accéléromètre A1 se retrouvent ainsi sur l'axe d'intérêt de l'accéléromètre A4. Il y a un faible impact notable du frottement des lames sur le comportement vibratoire du fond de la maquette HB2.

Concernant les mesures des accéléromètres A7 et A10 situés à l'avant et à l'arrière du colis interne de la maquette HB2, les figures 4.24 et 4.25 donnent l'évolution du comportement vibratoire de la maquette selon les trois axes X, Y et Z globaux en fonction du niveau d'excitation. Les phénomènes vibratoires observés suivant les axes Y et Z sont similaires à ceux décrits pour l'accéléromètre A1 pour les deux bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz : il y a une diminution de la fréquence de résonance ainsi qu'une diminution de l'amplitude de résonance lorsque le niveau de l'excitation acoustique augmente. La signature non-linéaire de la maquette HB2, caractérisée par le frottement des lames contre l'enveloppe en fonction du niveau acoustique, s'observe ainsi sur l'ensemble du colis interne. Concernant les modes de vibration qui sont des modes du colis interne, situés vers 700 Hz et observés sur les figures 4.24(c), 4.24(e), 4.25(c) et 4.25(e), il n'y a pas d'évolution notable du comportement vibratoire de la structure en fonction du niveau acoustique. Enfin, le comportement vibratoire selon l'axe X, donné par les figures 4.24(a), 4.24(b), 4.25(a) et 4.25(b), révèle également une signature non-linéaire de la maquette qui est très présente dans les deux bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. Sur le reste de la bande fréquentielle, notamment entre 500 Hz et 800 Hz, les

courbes se distinguent ce qui révèle un comportement vibratoire non-linéaire important, notamment pour l'accéléromètre A7 suivant la direction globale X (voir figure 4.24(b)). Le frottement des lames agit ainsi également sur le comportement vibratoire du colis interne, et d'autant plus en bout de colis, en fonction du niveau de l'excitation aléatoire multipoints.

Enfin, le comportement vibratoire de la maquette HB2 au niveau des lames s'observe via l'accéléromètre A21 sur la figure 4.26. Cet accéléromètre, monodimensionnel, mesure l'accélération d'une lame métallique selon l'axe Z global. Il est possible d'observer sur la figure 4.26(a) les deux modes de vibration transverses situés dans les deux bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz, ainsi que le mode du colis situé à 700 Hz. Pour ces trois modes de vibration, le même phénomène vibratoire non-linéaire est observé : il y a une diminution de la fréquence de résonance pour les modes transverses ainsi qu'une diminution de l'amplitude de résonance lorsque le niveau de l'excitation acoustique augmente. Cependant, le mode principal observable sur cet accéléromètre est un mode de lame situé entre 300 Hz et 400 Hz sur la figure 4.26(a). Il n'y a pas d'évolution notable de l'accélération mesurée dans la bande de fréquences [300 – 400] Hz en fonction du niveau acoustique, révélant ainsi qu'il n'y a pas d'impact du frottement sur les modes de vibration des lames de la maquette HB2.

Pour résumer tout cela, les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5 regroupent pour les accéléromètres étudiés l'ensemble des rapports des niveaux RMS de l'accélération mesurée suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz (voir tableau 4.3), sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz (voir tableau 4.4) où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2 ainsi que sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz (voir tableau 4.5) où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2. Grâce aux données indiquées dans les tableaux 4.3, 4.4 et 4.5, une nouvelle grandeur est calculée : le coefficient de dissipation de niveau RMS par rapport au niveau de référence acoustique de 90 dB. Ce coefficient se définit comme le rapport d'un niveau RMS sur une bande de fréquences (c.a.d., soit [100 – 1000] Hz, soit [100 – 200] Hz ou soit [800 – 1000] Hz) sur le niveau RMS pour le niveau acoustique de 90 dB de la même bande de fréquences. Ces coefficients de dissipation de niveau RMS, par axe global pour chaque accéléromètre, sont donnés dans les tableaux 4.6, 4.7 et 4.8. Leur valeur sera comparée à la valeur des résultats numériques données dans le chapitre 5 afin de valider la confrontation essais-calculs. Les valeurs indiquées dans l'ensemble de ces tableaux appuient les observations sur la réponse vibratoire de la maquette HB2 pour ces différents accéléromètres en fonction du niveau acoustique. Par exemple, le tableau 4.7 montre qu'avec l'hypothèse de linéarité de la réponse en fonction du niveau, la réponse simulée à 130 dB peut être surestimée d'un facteur d'environ 2 dans la bande de fréquences [100 – 200] Hz. Il y a bien une dissipation de la structure au fur et à mesure que les lames sont sollicitées pour venir frotter contre la paroi interne de l'enveloppe externe. Ces comportements vibratoires observés sur les différents accéléromètres A1, A4, A7, A10 et A21 quadrillant ainsi l'ensemble de la maquette HB2 se retrouvent sur tous les accéléromètres présents lors des essais suivant leur localisation : sur l'enveloppe, sur le fond, sur le colis interne ou sur l'une des 23 lames de la maquette.

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ((m.s ⁻²)/Pa)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.356	0.335	0.297	0.260	0.215
A1Y	0.805	0.757	0.734	0.677	0.592
A1Z	1.434	1.342	1.154	1.023	0.840
A4X	1.628	1.615	1.560	1.452	1.225
A4Y	0.501	0.481	0.462	0.471	0.441
A4Z	0.574	0.558	0.520	0.493	0.457
A7X	0.035	0.033	0.031	0.027	0.021
A7Y	0.114	0.109	0.099	0.099	0.095
A7Z	0.124	0.120	0.113	0.107	0.095
A10X	0.287	0.266	0.243	0.215	0.192
A10Y	0.169	0.158	0.145	0.143	0.141
A10Z	0.189	0.187	0.183	0.177	0.167
A21Z	1.322	1.307	1.151	1.111	1.064

TABLEAU 4.3 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz.

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ((m.s ⁻²)/Pa)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.130	0.116	0.095	0.081	0.059
A1Y	0.407	0.485	0.469	0.370	0.210
A1Z	0.492	0.446	0.345	0.290	0.212
A4X	0.170	0.171	0.168	0.162	0.142
A4Y	0.013	0.013	0.012	0.010	0.007
A4Z	0.014	0.012	0.011	0.010	0.007
A7X	0.010	0.009	0.008	0.008	0.008
A7Y	0.098	0.117	0.111	0.087	0.045
A7Z	0.121	0.111	0.083	0.068	0.046
A10X	0.031	0.037	0.037	0.030	0.018
A10Y	0.014	0.015	0.014	0.011	0.008
A10Z	0.029	0.026	0.021	0.018	0.014
A21Z	0.104	0.095	0.076	0.067	0.055

TABLEAU 4.4 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2.

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ((m.s ⁻²)/Pa)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.689	0.649	0.565	0.496	0.403
A1Y	1.566	1.444	1.411	1.28	1.109
A1Z	2.973	2.774	2.369	2.083	1.687
A4X	0.742	0.748	0.731	0.725	0.677
A4Y	0.481	0.457	0.448	0.424	0.378
A4Z	0.823	0.770	0.664	0.598	0.512
A7X	0.042	0.036	0.031	0.023	0.013
A7Y	0.070	0.063	0.057	0.048	0.040
A7Z	0.130	0.121	0.103	0.088	0.071
A10X	0.456	0.422	0.405	0.351	0.282
A10Y	0.201	0.191	0.185	0.179	0.173
A10Z	0.204	0.198	0.184	0.174	0.170
A21Z	0.157	0.144	0.122	0.109	0.093

TABLEAU 4.5 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	0.94	0.83	0.73	0.60
A1Y	1.0	0.94	0.92	0.84	0.74
A1Z	1.0	0.94	0.80	0.71	0.59
A4X	1.0	0.99	0.96	0.89	0.75
A4Y	1.0	0.96	0.92	0.94	0.88
A4Z	1.0	0.97	0.91	0.86	0.79
A7X	1.0	0.93	0.88	0.77	0.58
A7Y	1.0	0.95	0.86	0.87	0.83
A7Z	1.0	0.97	0.91	0.87	0.77
A10X	1.0	0.92	0.85	0.75	0.67
A10Y	1.0	0.94	0.86	0.85	0.84
A10Z	1.0	0.99	0.97	0.94	0.88
A21Z	1.0	0.99	0.87	0.84	0.80

TABLEAU 4.6 – Valeurs des coefficients de dissipation du niveau RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	0.89	0.73	0.62	0.46
A1Y	1.0	1.19	1.15	0.91	0.52
A1Z	1.0	0.91	0.70	0.59	0.36
A4X	1.0	1.0	0.99	0.95	0.84
A4Y	1.0	1.01	0.96	0.79	0.51
A4Z	1.0	0.84	0.75	0.67	0.52
A7X	1.0	0.87	0.80	0.77	0.75
A7Y	1.0	1.20	1.14	0.89	0.46
A7Z	1.0	0.92	0.68	0.56	0.38
A10X	1.0	1.19	1.20	0.97	0.58
A10Y	1.0	1.06	0.99	0.81	0.61
A10Z	1.0	0.90	0.71	0.61	0.49
A21Z	1.0	0.91	0.73	0.64	0.53

TABLEAU 4.7 – Valeurs des coefficients de dissipation du niveau RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	0.94	0.82	0.72	0.59
A1Y	1.0	0.92	0.90	0.82	0.71
A1Z	1.0	0.93	0.80	0.70	0.57
A4X	1.0	1.00	0.99	0.98	0.91
A4Y	1.0	0.95	0.93	0.88	0.78
A4Z	1.0	0.94	0.81	0.73	0.63
A7X	1.0	0.86	0.73	0.54	0.31
A7Y	1.0	0.90	0.81	0.69	0.57
A7Z	1.0	0.93	0.79	0.68	0.54
A10X	1.0	0.92	0.89	0.77	0.62
A10Y	1.0	0.95	0.92	0.89	0.86
A10Z	1.0	0.97	0.90	0.85	0.83
A21Z	1.0	0.92	0.78	0.70	0.59

TABLEAU 4.8 – Valeurs des coefficients de dissipation du niveau RMS de l'accélération mesurée par un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2.

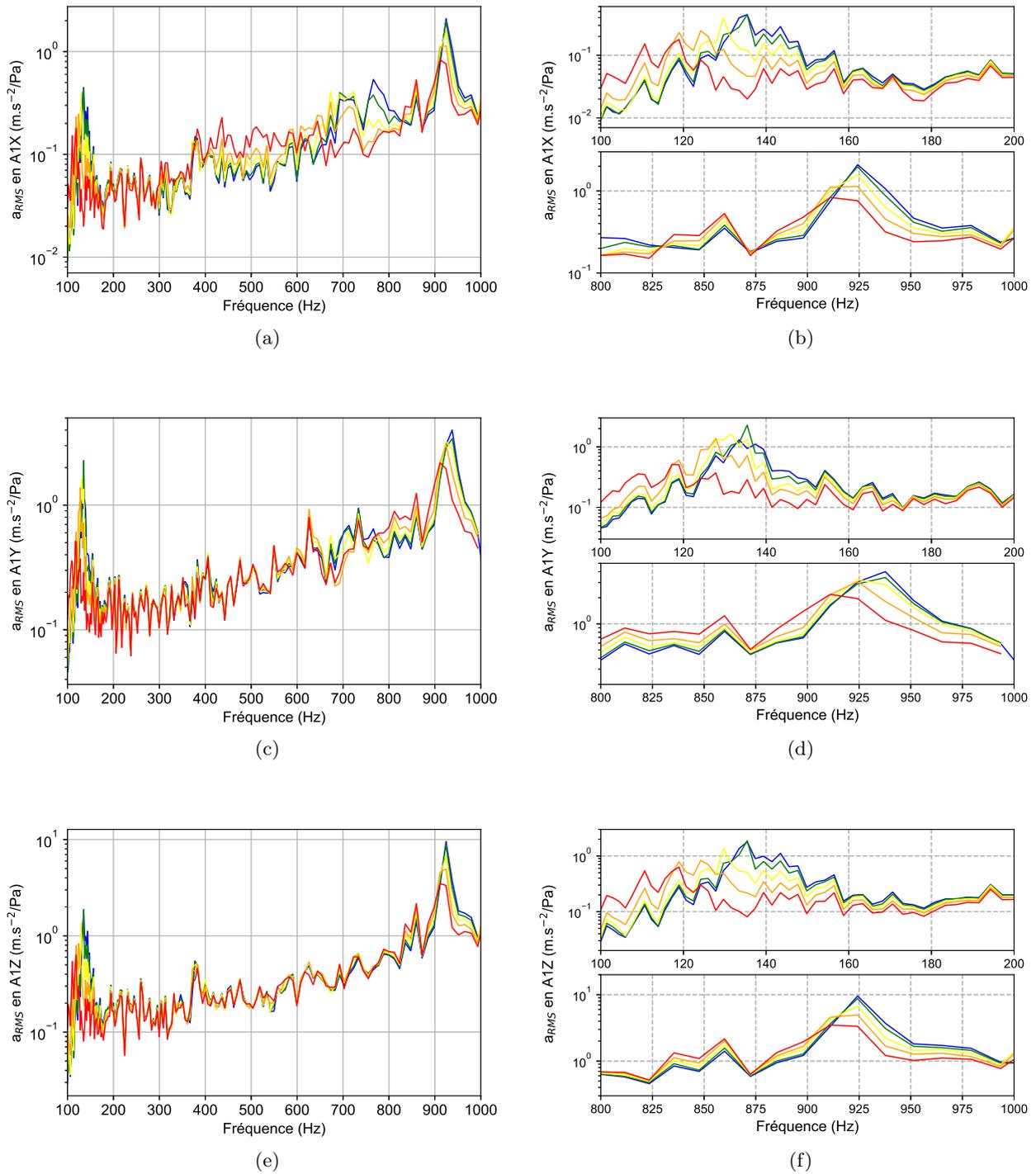


FIGURE 4.22 – Mesures de l’accéléromètre A1 traitées sur une bande en 48ème d’octave : (a-b) suivant l’axe X global, (c-d) suivant l’axe Y global et (e-f) suivant l’axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L’excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

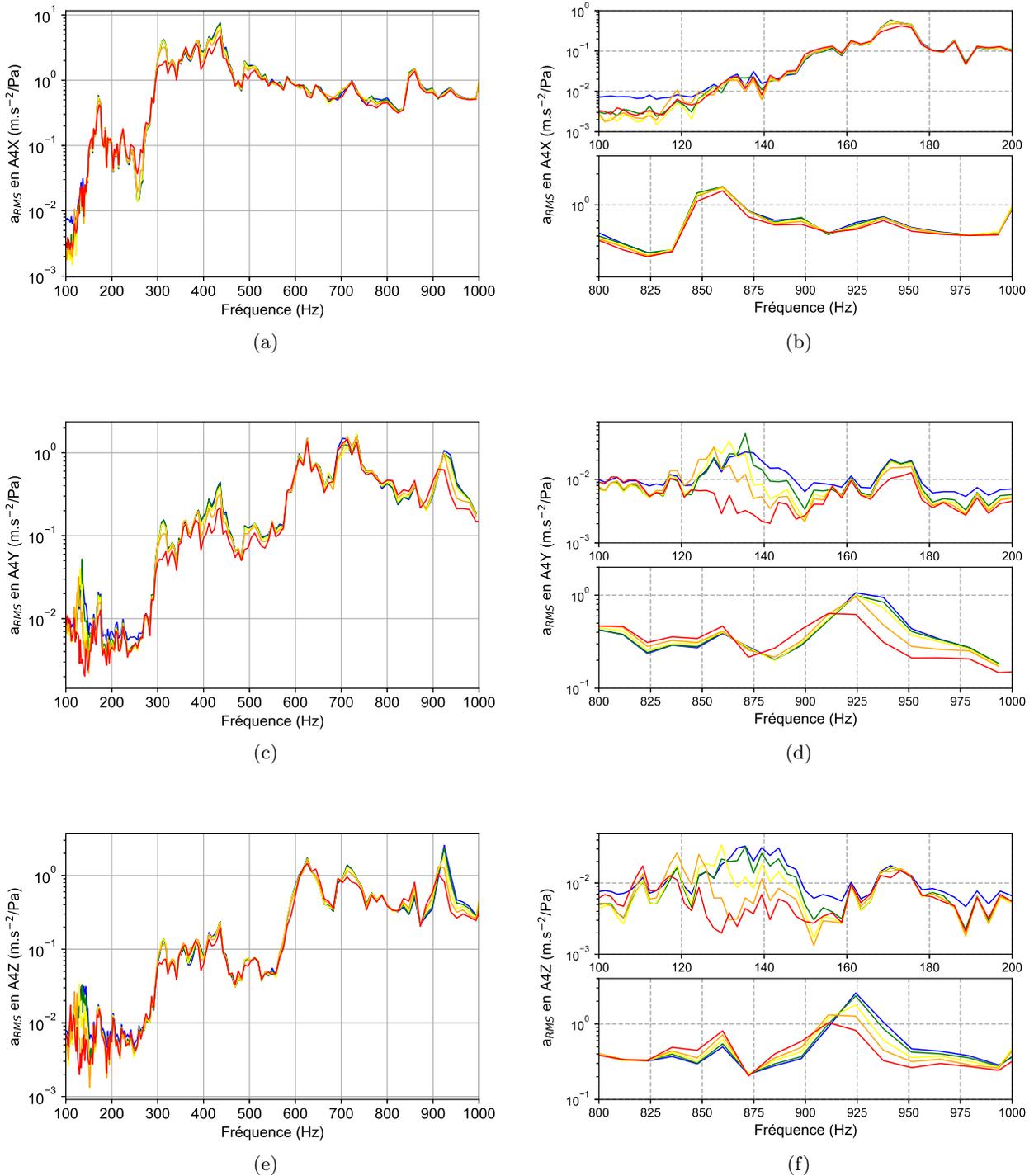


FIGURE 4.23 – Mesures de l'accéléromètre A4 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

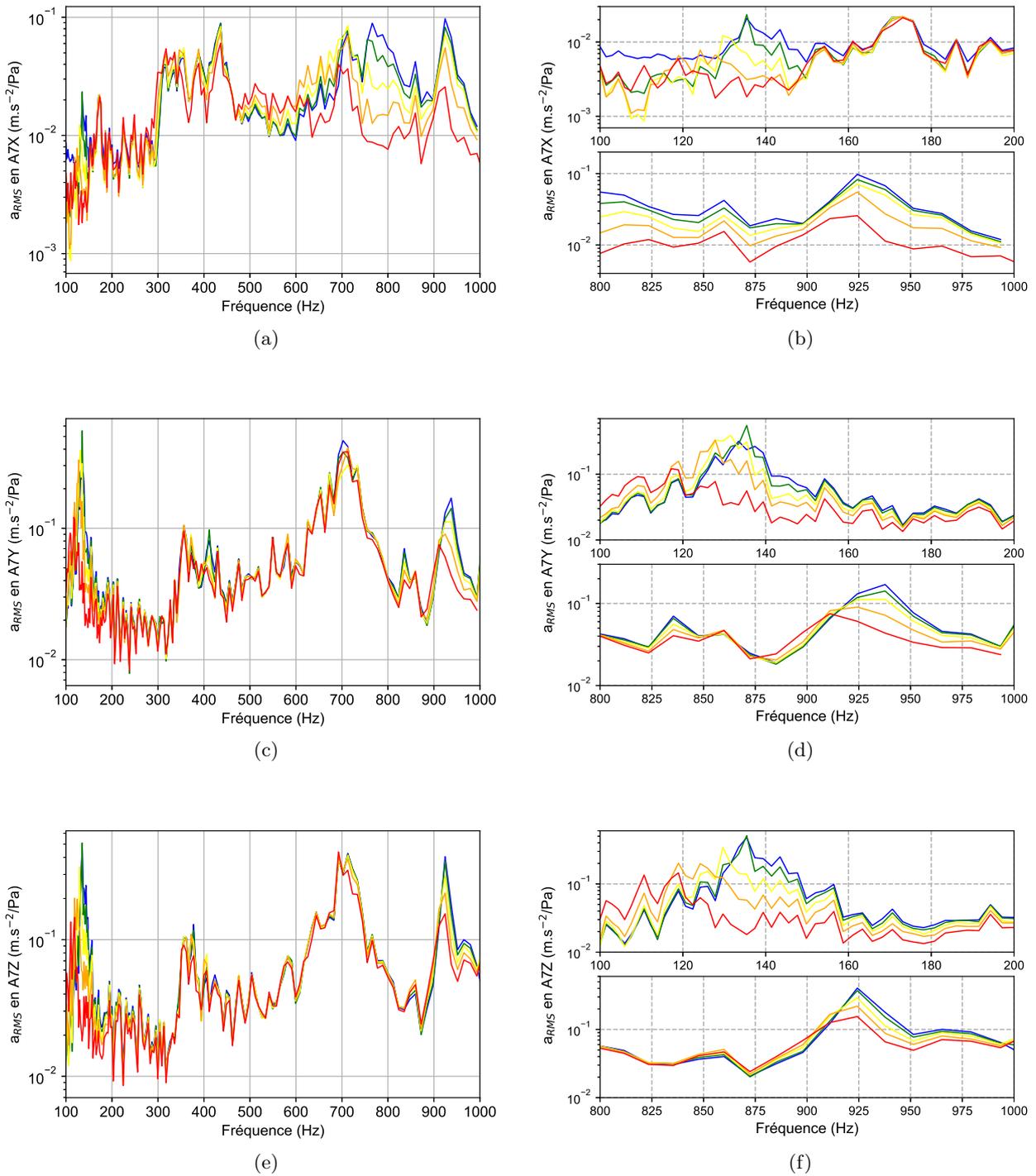


FIGURE 4.24 – Mesures de l’accéléromètre A7 traitées sur une bande en 48ème d’octave : (a-b) suivant l’axe X global, (c-d) suivant l’axe Y global et (e-f) suivant l’axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L’excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

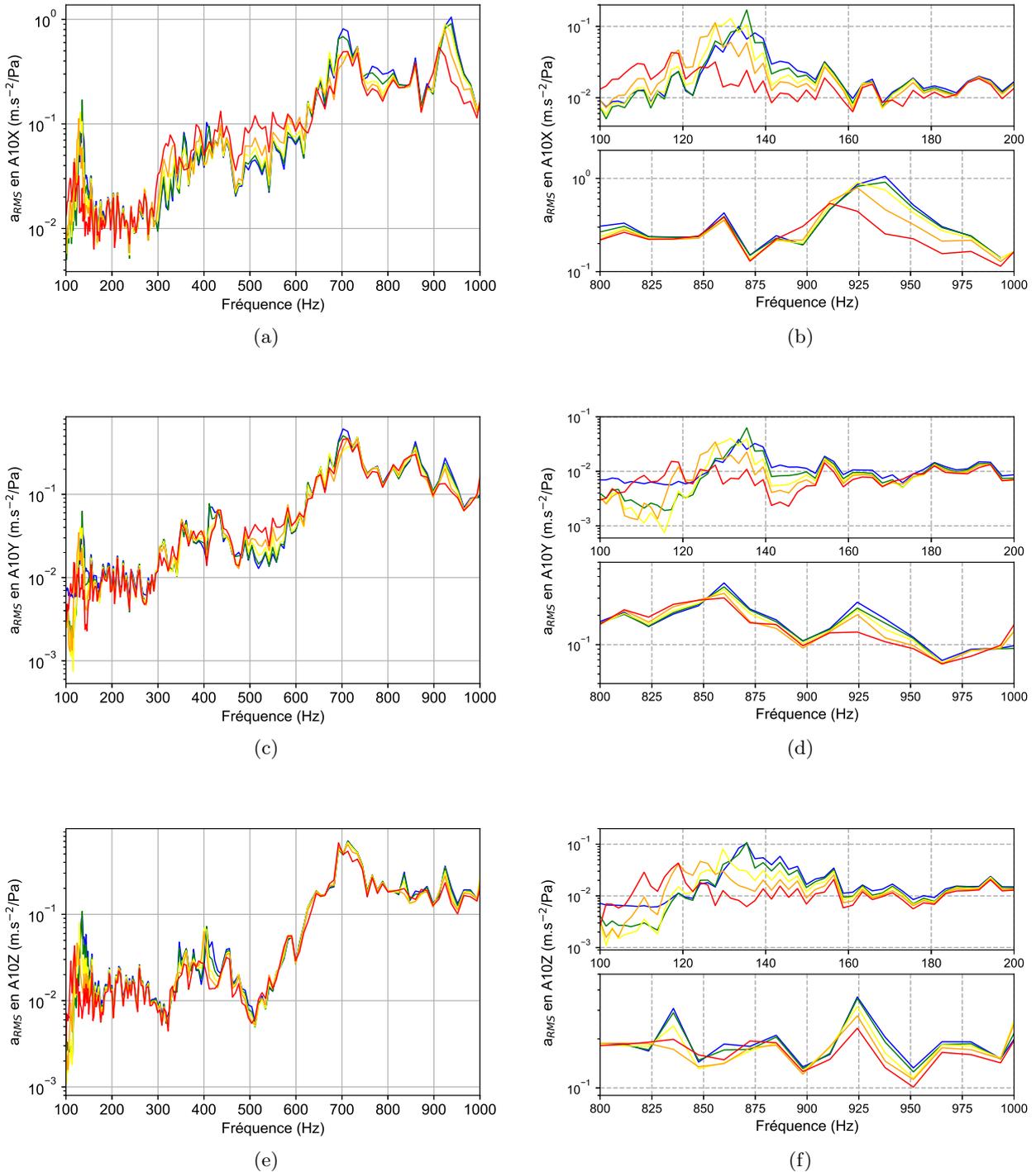


FIGURE 4.25 – Mesures de l'accéléromètre A10 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

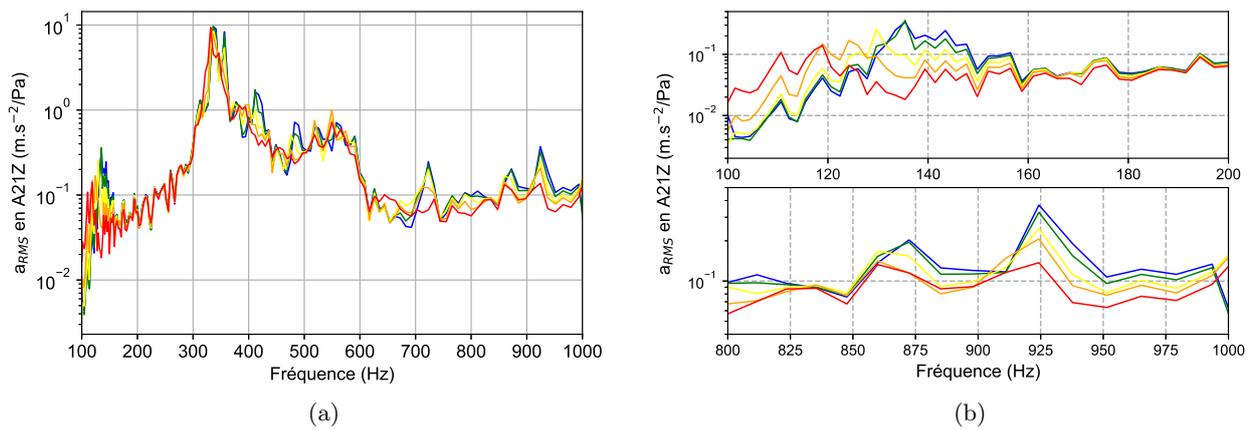


FIGURE 4.26 – (a) Mesures de l'accéléromètre A21 suivant l'axe Z global traitées sur une bande en 48ème d'octave - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude expérimentale complète sur la maquette industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) est donnée. La maquette HB2, dont la dimension de l'ordre du mètre, est constituée d'une enveloppe externe triconique et d'un colis interne. Ce colis interne possède une couronne de 23 lames qui s'appuient contre la paroi intérieure de l'enveloppe. Dès lors, le frottement des lames contre la paroi induit une force de frottement s'opposant au mouvement de la maquette ce qui engendre un comportement vibratoire non-linéaire.

La réponse dynamique de la maquette HB2 est caractérisée dans une première étape d'analyse modale expérimentale. La maquette est tout d'abord sollicitée par une excitation mécanique aléatoire monopoint de bas niveau grâce à un excitateur électrodynamique monté en suspension. Elle dispose par ailleurs d'un grand nombre d'accéléromètres tridimensionnels sur l'ensemble de sa géométrie qui permettent ainsi d'apporter une première information sur l'analyse modale expérimentale de la structure. Couplé à ces données accélérométriques, un vibromètre laser à balayage 3D a été employé pour analyser finement le comportement vibratoire d'un pan de l'enveloppe extérieure de la maquette HB2 lorsqu'elle est sollicitée par l'excitateur électrodynamique. Dès lors, l'ensemble des Fonctions de Réponse en Fréquence des points visés par la vibrométrie laser à balayage et celles des accéléromètres donne une analyse modale expérimentale complète de la structure industrielle HB2. Cette analyse modale expérimentale permettra de réaliser une validation initiale du modèle éléments finis de la maquette qui est présenté dans le chapitre 5.

Suite à l'identification de ses principaux modes de vibration, la signature expérimentale non-linéaire de la maquette HB2 est recherchée. Pour ce faire, deux types de sollicitations sont étudiés :

- une excitation mécanique aléatoire monopoint,
- une excitation acoustique qui constitue une excitation surfacique aléatoire multipoints.

L'étude de l'excitation mécanique aléatoire monopoint, réalisée avec un excitateur électrodynamique, a permis de mettre en avant la présence d'un comportement vibratoire non-linéaire qui se caractérise par une diminution de l'amplitude de résonance ainsi qu'une diminution de la fréquence propre de certains modes de vibration de la maquette HB2 lors de l'augmentation du niveau de l'excitation. Cette signature non-linéaire se retrouve sur les principaux modes transverses de la structure industrielle et sur l'ensemble des accéléromètres couvrant une grande partie de la maquette.

L'originalité de ces travaux de thèse provient de la seconde campagne d'essais qui s'intéresse à la réponse de la structure sous excitation acoustique. La recherche de la signature non-linéaire d'un assemblage industriel soumis à cette sollicitation s'inscrit ainsi dans la continuité des travaux expérimentaux sur la poutre académique CEA présentés au chapitre 2 puisque l'excitation acoustique constitue une excitation aléatoire multipoints définie avec une fonction de corrélation. Placée dans une chambre acoustique munie de batteries de haut-parleurs, la maquette HB2 possède une signature vibratoire non-linéaire observée expérimentalement en fonction du niveau acoustique. Cette signature

non-linéaire est similaire à celle observée avec l'excitation mécanique monopoint : il y a une diminution de la fréquence de résonance ainsi qu'une diminution de l'amplitude de résonance lorsque le niveau de l'excitation acoustique augmente. Au fur et à mesure que le niveau de l'excitation augmente, les lames sont sollicitées et viennent frotter contre l'enveloppe externe.

La signature non-linéaire de la maquette industrielle HB2 soumise à une excitation aléatoire multipoints est dès lors observée suite à ces essais en chambre acoustique. Cette réponse vibratoire non-linéaire diffère cependant de la signature non-linéaire observée pour une excitation mécanique monopoint. En effet, du fait que l'excitation est uniforme sur toute la surface extérieure, la diminution de la fréquence de résonance ainsi que la diminution de l'amplitude de résonance se réalise de façon homogène pour les deux premiers modes transverses en fonction du niveau acoustique. Pour l'excitation aléatoire monopoint dirigée suivant l'axe Y global, le premier mode transverse suivant cet axe est davantage amorti voire complètement atténué selon l'accéléromètre observé sur la structure industrielle.

Désormais, l'objectif de ces travaux de thèse est de prédire la réponse vibratoire non-linéaire observée expérimentalement de la maquette industrielle HB2 soumise à une excitation aléatoire multipoints. Ces travaux de modélisation et de simulation numérique sont présentés au chapitre 5 suivant.

Chapitre 5

Simulations vibratoires non-linéaires de la structure industrielle HB2

La démarche de modélisation et de simulation de la réponse vibratoire non-linéaire de la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) est présentée dans ce chapitre. Tout d'abord, le modèle éléments finis complet de la maquette est présenté. Les paramètres de ce modèle éléments finis et la justification de la modélisation des liaisons sont donnés afin d'obtenir un modèle linéaire fiable. La confiance donnée au modèle éléments finis provient alors de la comparaison entre l'analyse modale numérique et l'analyse modale expérimentale. Cette comparaison est donnée et analysée dans la deuxième section de ce chapitre.

Grâce à la méthode de réduction hybride présente dans le logiciel ABAQUS et exposée dans le chapitre 1, le modèle éléments finis complet de la maquette HB2 est réduit. Les nœuds du modèle réduit et les modes propres numériques conservés dans cette condensation sont présentés dans la troisième section de ce chapitre.

Une fois le modèle condensé à un nombre réduit de nœuds, une loi non-linéaire de frottement est introduite pour modéliser le comportement dynamique de chacune des lames présentes sur la partie interne de la maquette HB2. Ce modèle impose un certain formalisme du vecteur d'application de l'effort non-linéaire. Ce formalisme et la modélisation de l'effort non-linéaire de contact entre chaque lame de la maquette HB2 avec les éléments de la paroi interne de l'enveloppe sont présentés dans la quatrième section de ce chapitre.

Une fois les modèles de connecteurs linéaires associés aux zones de non-linéarités locales remplacés par des modèles de liaisons non-linéaires, une étape supplémentaire présentée dans la cinquième section de ce chapitre permet d'obtenir un système d'équations non-linéaires dans la base réduite du modèle éléments finis. Ce système optimisé d'équations non-linéaires est traité par la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires et auparavant utilisée dans l'étude numérique de la poutre CEA présentée au chapitre 3.

Enfin, le cas des excitations aléatoires multipoints est abordé. Un effort de modélisation de l'excitation acoustique sur un modèle éléments finis réduit est présenté dans l'avant-dernière section de ce chapitre. Cette modélisation de l'excitation aléatoire multipoints, originale et différente des modélisations de Shinozuka et de Karhunen-Loève introduites dans le chapitre 1, est au cœur de ces travaux de thèse. Une étape de validation de cette modélisation est également donnée, elle se base sur une comparaison avec un calcul linéaire effectué via ABAQUS sur le modèle éléments finis complet de la maquette HB2. Cette modélisation est adaptée à la méthode de l'équilibrage harmonique et la simulation de la réponse dynamique de la maquette HB2 associée à la campagne d'essais réalisée avec l'excitation acoustique est effectuée. Une comparaison essais-calculs conclut alors ce chapitre et permet ainsi de répondre aux objectifs initiaux de thèse concernant la simulation de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires multipoints sur les structures industrielles CEA.

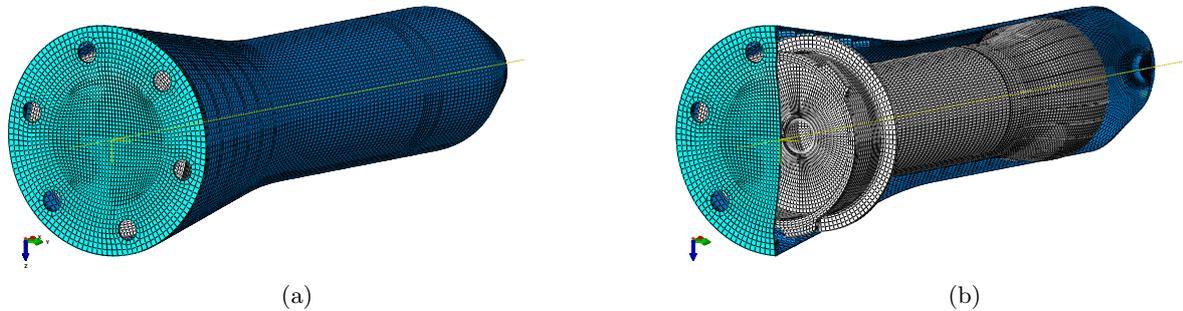


FIGURE 5.1 – (a) Modèle éléments finis de la maquette industrielle HB2 (b) Vue en coupe du modèle éléments finis complet avec la présentation des composants internes.

Composant	Nombre de nœuds	Nombre d'éléments	Éléments SC8R	Éléments C3D8R
Enveloppe externe	42484	22860	17280	5580
Fond	4874	2328	2328	0
Lest	112 266	97 394	5624	91 770
Couronne de 23 lames	12336	5580	4620	960

TABLEAU 5.1 – Maillage du modèle éléments finis complet de la maquette HB2.

5.1 Modèle éléments finis de la maquette HB2

La structure est modélisée par l'intermédiaire du logiciel éléments finis ABAQUS. La figure 5.1 présente deux vues du modèle éléments finis de la maquette HB2. Sur la figure 5.1, l'enveloppe tronconique externe est colorée en bleu foncé tandis que le fond de la maquette, observable avec ses six trous nécessaires au montage et à l'instrumentation, est coloré en bleu cyan. La vue en coupe de la figure 5.1(b) permet de visualiser les différents composants internes colorés en blanc de la structure industrielle, c'est-à-dire le bas de la virole, la jupe, le lest et la couronne de 23 lames présentés dans le chapitre précédent. Cette partie détaille la méthode et les choix de modélisation tout d'abord au niveau des composants de l'assemblage pris individuellement puis au niveau des liaisons entre ces composants.

Chaque composant du modèle numérique complet est dessiné séparément puis maillé. La taille moyenne du maillage utilisé est d'environ 10 mm. Le modèle éléments finis complet de la maquette HB2 possède 171 960 nœuds et 128 162 éléments. Chaque sous-ensemble est composé de deux types d'éléments finis avec des éléments solides coques (intitulés SC8R) pour modéliser les parois fines et des éléments solides volumiques (intitulés C3D8R) pour modéliser les parties massives. Le tableau 5.1 regroupe les informations concernant le maillage utilisé pour chaque composant de la maquette HB2.

Les liaisons de la maquette HB2 sont multiples et concernent l'interface entre les différents compo-

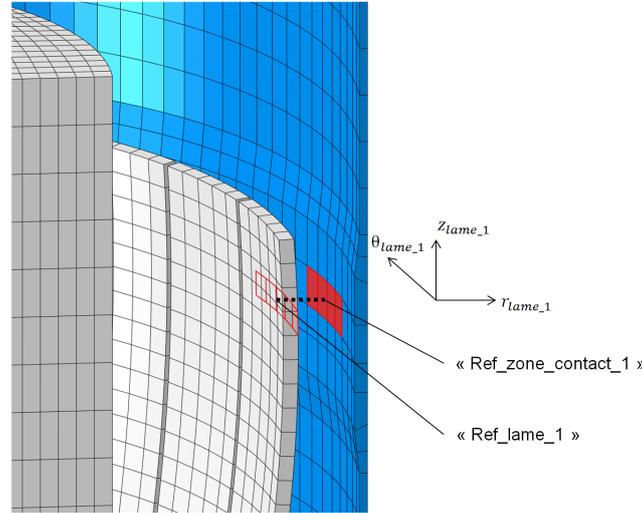


FIGURE 5.2 – Modélisation éléments finis d'une lame (nommée lame_1) parmi les 23 lames de la maquette HB2.

sants de l'assemblage. Le fond est lié à l'enveloppe par des liaisons vissées. Cette liaison est représentée par un couplage infiniment rigide des nœuds de l'interface. L'accroche entre le colis et l'enveloppe est assurée par deux brides assemblées l'une à l'autre par 12 liaisons vissées. Ces liaisons sont représentées dans le modèle par des connecteurs infiniment rigides entre deux nœuds de référence qui contrôlent chacun le déplacement d'un douzième de la bride. Cette modélisation représente une liaison infiniment rigide et permet de calculer les efforts totaux transitant dans la liaison. La liaison lames-enveloppe est présentée ci-dessous.

La figure 5.2 présente le modèle éléments finis d'une lame parmi les 23 présentes sur la maquette HB2. Pour chaque lame de la couronne, un repère local cylindrique est donné puis des nœuds de référence sont définis pour chaque lame afin de relier numériquement la couronne à l'enveloppe externe (observable en bleu sur la figure 5.2). Le contact entre chaque lame et l'enveloppe externe se réalise avec des connecteurs. Du côté de chaque lame, les nœuds de référence sont dénommés « Ref_lame_1 » (pour la lame 1 par exemple). Du côté de l'enveloppe, les nœuds de référence sont dénommés « Ref_zone_contact_1 » (pour les nœuds de l'enveloppe associés à la lame 1 par exemple). Les connecteurs représentant chaque liaison sont infiniment rigides (de raideur 10^{10} N.m⁻¹) dans les directions r_{lame_1} , θ_{lame_1} et z_{lame_1} ainsi qu'en rotation autour de z_{lame_1} pour chaque lame. Les rotations autour de r_{lame_1} et θ_{lame_1} sont laissés libres pour chaque lame.

La modélisation des liaisons non-linéaires se base sur une vision de modélisation « nécessaire et juste suffisante ». Elle permet ainsi de prendre en compte ces éléments non-linéaires tout en s'assurant d'une implémentation aisée de ces contributions dans la résolution numérique pour la prédiction de la réponse vibratoire non-linéaire. La description détaillée de la modélisation des liaisons frottantes est

développée par la suite dans la section 5.4.

5.2 Analyse modale numérique et validation

Une fois le modèle éléments finis d'une structure industrielle construit, ce dernier doit être validé avant d'en étudier les réponses vibratoires pour divers environnements dynamiques. Le critère de validation retenu dans ces travaux de thèse est la comparaison de l'analyse modale numérique avec l'analyse modale expérimentale présentée dans le chapitre 4.

Le code éléments finis ABAQUS permet de calculer la base modale numérique du modèle éléments finis avec des conditions aux limites libre-libre. Cette analyse modale numérique réalisée sur la plage de fréquences [100 – 1000] Hz permet d'identifier 56 modes propres numériques, dont 23 modes de lames situés entre 355 Hz et 366 Hz. Puis, afin de comparer les premiers modes de résonance expérimentaux et numériques, le logiciel FEMTOOLS est utilisé et la comparaison se réalise avec le calcul de deux grandeurs :

- l'erreur $\epsilon_f(\%)$ entre les fréquences propres numériques et expérimentales en prenant comme référence les fréquences propres expérimentales :

$$\epsilon_f(\%) = 100 \times \frac{|f_{\text{exp}} - f_{\text{num}}|}{f_{\text{exp}}} \quad (5.1)$$

où les grandeurs f_{exp} et f_{num} représentent respectivement les fréquences propres expérimentale et numérique d'un mode de vibration.

- le critère de MAC (pour « Modal Assurance Criterion » [52]) calculé à partir des déformées modales numériques et expérimentales :

$$\text{MAC}^{ij}(\%) = 100 \times \frac{(\Phi_{\text{exp}}^i | \Phi_{\text{num}}^j)^2}{(\Phi_{\text{exp}}^i | \Phi_{\text{exp}}^i) (\Phi_{\text{num}}^j | \Phi_{\text{num}}^j)} \quad (5.2)$$

où $(.|.)$ représente le produit scalaire hermitien, Φ_{exp}^i (respectivement Φ_{num}^j) représente le i -ème (respectivement j -ème) mode de vibration expérimental (respectivement numérique) identifié. Un critère de MAC proche de 0% entre deux modes de vibration indique que ces deux modes sont découplés tandis qu'un critère de MAC proche de 100% indique deux modes fortement couplés entre eux.

Grâce au logiciel FEMTOOLS, neuf couples de modes expérimentaux et numériques sont identifiés sur la base d'un critère de MAC supérieur à 80%. Ces couples de modes sont décrits dans le tableau 5.2 et sont aussi représentés sur les figures 5.3, 5.4 et 5.5 dans les repères YX et YZ de la maquette HB2. Sur ces figures, le modèle éléments finis présenté dans ce chapitre est donné en bleu et le modèle expérimental visible sur la figure 4.8 au chapitre 4 est représenté en rouge. Il est possible d'observer

Couple n°	Description du mode	f_{exp} (Hz)	f_{num} (Hz)	ϵ_f (%)	MAC(%)
1	Mode transverse	130.9	136.2	4.1	98.1
2	Mode transverse	135.4	139.4	2.89	98.0
3	Mode de lames	336.2	365.2	8.60	89.7
4	Mode d'enveloppe (2 lobes)	344.7	408.7	18.57	94.5
5	Mode d'enveloppe (3 lobes)	474.8	502.9	5.91	90.7
6	Mode d'enveloppe (3 lobes)	478.4	504.8	5.51	90.3
7	Mode d'enveloppe (4 lobes)	713.7	685.5	3.96	81.7
8	Mode transverse	925.0	905.9	2.06	86.2
9	Mode d'enveloppe (5 lobes)	1033.6	992.5	3.97	90.9

TABLEAU 5.2 – Couples de modes numériques et expérimentaux identifiés à partir de l'analyse modale numérique du modèle éléments finis complet de la maquette HB2.

sur ces figures la précision apportée par l'utilisation du vibromètre laser à balayage 3D qui permet de donner des déformées modales très similaires à celles obtenues numériquement. Ce très bon niveau de corrélation sur un nombre important de modes de vibration permet de valider le modèle éléments finis linéaire de la structure « Hypervelocity Balistic 2 ». Le faible nombre de modes numériques appariés aux modes expérimentaux s'explique par le fait que l'excitation monopoint oriente la réponse des modes : pour les modes d'enveloppe doubles et pour le second mode transverse, souvent un seul des deux modes doubles est identifié expérimentalement. De plus, il n'y a que deux capteurs sur les lames, ce qui explique qu'il est difficile d'identifier les modes de lame expérimentalement.

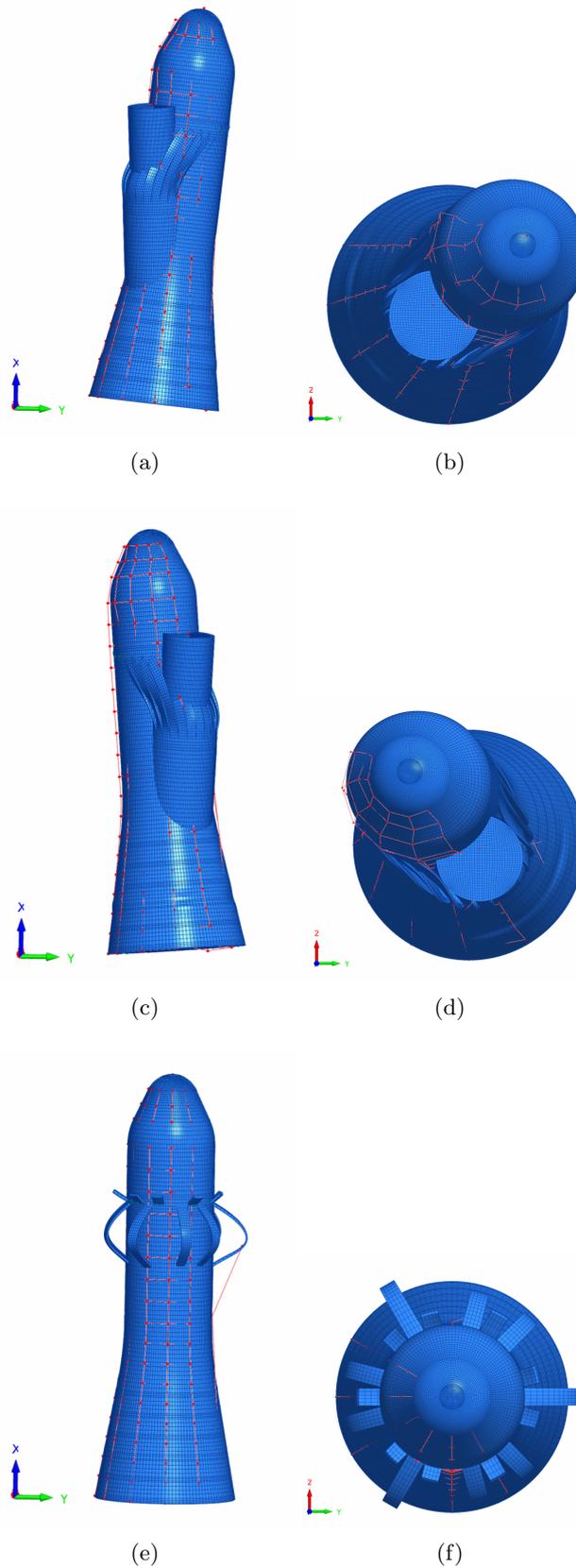


FIGURE 5.3 – Vues des modes expérimentaux et numériques fortement couplés dans les repères YX (a-c-d) et YZ (b-d-f) : couple n° 1 (a-b), couple n° 2 (c-d) et couple n° 3 (e-f).

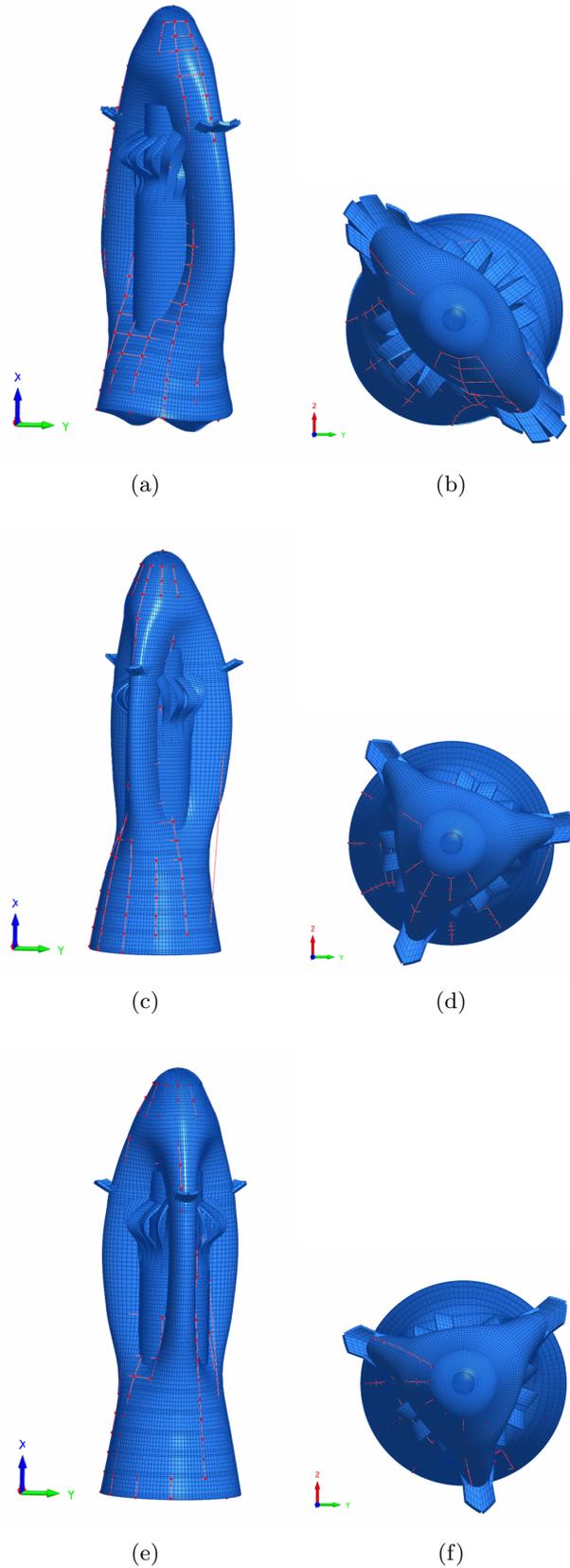


FIGURE 5.4 – Vues des modes expérimentaux et numériques fortement couplés dans les repères YX (a-c-d) et YZ (b-d-f) : couple n° 4 (a-b), couple n° 5 (c-d) et couple n° 6 (e-f).

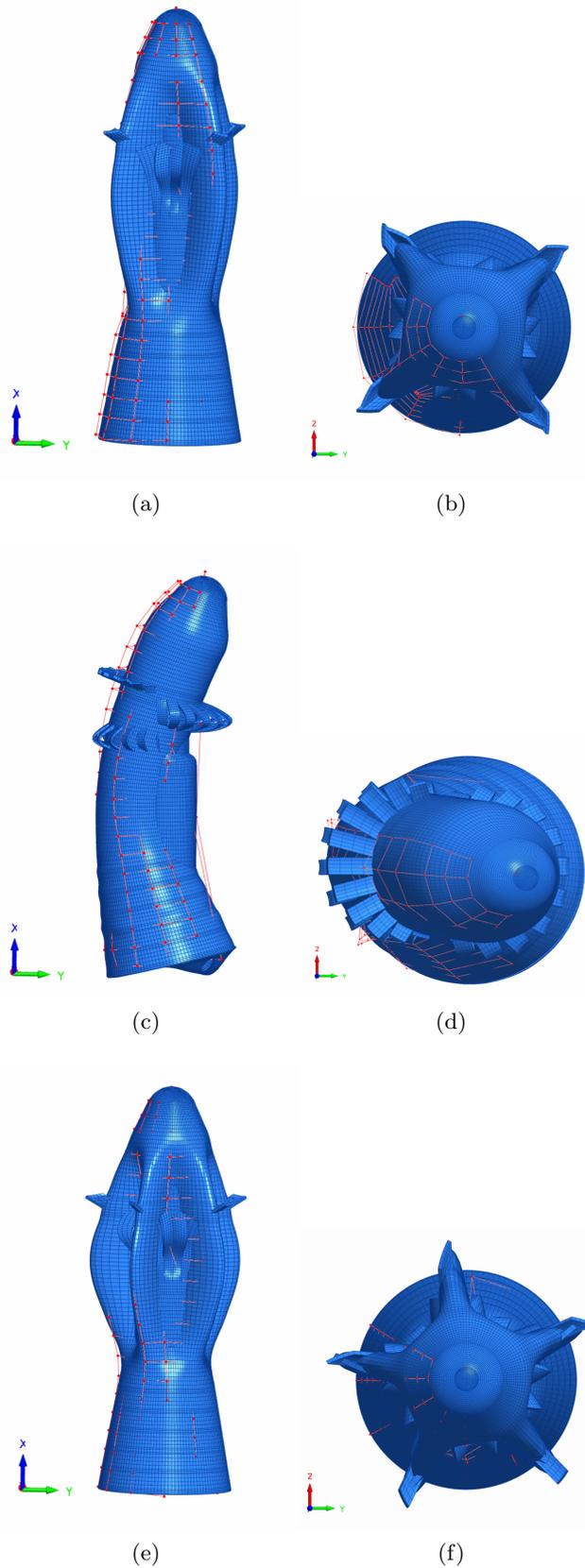


FIGURE 5.5 – Vues des modes expérimentaux et numériques fortement couplés dans les repères YX (a-c-d) et YZ (b-d-f) : couple n° 7 (a-b), couple n° 8 (c-d) et couple n° 9 (e-f).

5.3 Réduction du modèle

Le modèle éléments finis complet de la maquette HB2 présentée dans la section 5.2 contient 515 880 degrés de liberté. Comme explicité dans le chapitre 1, un tel modèle rend la simulation de réponses vibratoires non-linéaires extrêmement longue voire impossible à mettre en place. Afin de contrer cette difficulté, une méthode de réduction est mise en place. Cette méthode, détaillée dans le chapitre 1, est la méthode de sous-structuration à interface hybride développée par DASSAULT et implémentée dans le code éléments finis ABAQUS [35]. Cette méthode permet de réduire le nombre de degrés de liberté total du modèle éléments finis complet afin de ne conserver qu'un nombre restreint de degrés de liberté. Les degrés de liberté, à la fois physiques et modaux, retenus dans l'étude numérique de la maquette HB2 sont les suivants :

- pour chaque accéléromètre (la table d'instrumentation est présentée au chapitre 4, voir tableau 4.1), les degrés de liberté selon X, Y et Z (dans le repère global du modèle) du nœud le plus proche de la position du capteur sont retenus. Les accéléromètres A14 et A15 ne sont pas étudiés dans ce modèle numérique. Ainsi, 19 accéléromètres sont décrits dans le modèle éléments finis de la maquette HB2 ce qui donne 57 degrés de liberté physiques retenus permettant une comparaison directe avec les essais lors de la présentation des résultats numériques donnée dans la section 5.7.
- Pour chaque lame parmi les 23 présentes sur la maquette HB2, les degrés de liberté des nœuds de référence « Ref_zone_contact_k » ($\forall k \in \llbracket 1, 23 \rrbracket$) sont ceux en translation selon la direction θ dans le repère cylindrique local de chaque lame sont retenus. Ce sont sur ces degrés de liberté dans la base réduite que sont appliqués les efforts non-linéaires. Les degrés de liberté des nœuds de référence « Ref_lame_k » sont volontairement exclus de la base de réduction afin d'améliorer la convergence des calculs [8]. Ainsi, 23 degrés de liberté physiques sont également retenus permettant la simulation de réponses vibratoires non-linéaires.
- De plus, dans ce modèle, les modes propres de la maquette HB2 correspondant aux fréquences propres entre 100 Hz et 1000 Hz sont introduits dans la base réduite. Cela correspond à 56 modes propres numériques, ce qui permet ainsi de retenir 56 degrés de liberté modaux dans le modèle réduit.

La réduction du modèle éléments finis complet de la maquette HB2 réalisée permet alors de passer à un modèle avec 136 degrés de liberté. La méthode de sous-structuration hybride présente dans le code éléments finis ABAQUS permet donc de réduire considérablement la taille du problème dynamique à traiter par la suite. Avant l'introduction des efforts non-linéaires, l'équation de la dynamique dans la base réduite s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) \quad (5.3)$$

$\mathbf{x}(t)$ est le vecteur déplacement dans la base réduite, \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} sont respectivement les matrices réduites de masse, d'amortissement et de raideur et $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ est la description du vecteur de l'exci-

tation aléatoire multipoints dans la base réduite. La méthode originale développée durant ces travaux de thèse afin de décrire un tel vecteur sera explicitée dans la section 5.6.

Quant à la matrice réduite d'amortissement \mathbf{D} , elle est créée par une procédure d'identification expérimentale. En effet, grâce à l'analyse modale expérimentale présentée dans le chapitre 4, un amortissement modal par mode de vibration est identifié (voir tableau 4.2). Un modèle de Rayleigh est dès lors introduit pour définir l'amortissement tel que $\mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$. L'identification des paramètres α et β se fait à partir de l'amortissement modal obtenu expérimentalement sur les modes transverses situés respectivement à 131 Hz et 925 Hz ce qui donne les paramètres suivants : $\alpha = 11.9 \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

Maintenant que le problème dynamique linéaire réduit est posé pour simuler le comportement vibratoire de la maquette HB2, un modèle non-linéaire doit être introduit afin de reproduire le frottement des lames métalliques de la maquette HB2 et le comportement non-linéaire global du système.

5.4 Modèle non-linéaire du frottement

Dans ces travaux de thèse, l'introduction d'un modèle de frottement se fait en remplaçant une raideur linéaire par une liaison non-linéaire. Les modèles non-linéaires de frottement considérés sont de dimension 1 : l'allongement dans la direction de la liaison produit une force non-linéaire dans la direction de la liaison. Cette direction peut être quelconque (verticale, horizontale, diagonale, en rotation, ...). La définition de cette liaison non-linéaire et son interaction avec le modèle complet sont explicitées dans cette section. Ces choix de modélisation proviennent de précédents travaux de thèse [8].

5.4.1 Vecteur d'application de l'effort non-linéaire

Numériquement, pour annuler l'effet d'une liaison il suffit de retrancher la matrice de raideur de la liaison à la matrice de raideur du modèle complet :

$$\mathbf{K}_{\text{m.c.}} - k_{\text{liaison m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}} \mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}}^T = \mathbf{K}_{\text{m.c. sans liaison}} \quad (5.4)$$

où m.c. signifie « modèle complet » et la notation T indique l'opérateur transposé. $\mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}}$ est le vecteur liaison exprimé dans la base complète. En reprenant les notations du chapitre 1, la base de réduction pour le modèle complet s'écrit :

$$[\Psi_{\mathbf{r}}, \Phi_{\mathbf{p}}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{\text{ee}}^{-1} \mathbf{K}_{\text{er}} & \{\Phi_{\mathbf{p}}\}_{p=1..N_m} \\ \{\mathbf{I}_{\mathbf{d}}\}_r & \mathbf{0}_{r, N_m} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Les matrices \mathbf{K}_{ee} et \mathbf{K}_{er} s'obtiennent en séparant les degrés de liberté retenus (r) des degrés de liberté éliminés (e) dans la matrice de raideur du modèle complet :

$$\mathbf{K}_{\text{m.c.}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{ee}} & \mathbf{K}_{\text{er}} \\ \mathbf{K}_{\text{re}} & \mathbf{K}_{\text{rr}} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Le vecteur liaison est également séparé entre degrés de liberté éliminés et degrés de liberté retenus :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison m.c.}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^e \\ \mathbf{V}^r \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

L'effort de liaison non-linéaire peut se réécrire de différentes manières [8]. Dans le cas où tous les nœuds du vecteurs liaison sont retenus, chaque modèle de liaison est indépendant des autres et l'effort total sur la structure dû aux liaisons s'écrit simplement comme la somme des modèles de liaison.

Dans le cas d'une liaison pour laquelle un nœud n'est pas retenu, l'expression du vecteur liaison doit être recalculée. Défini comme un cas de chargement de la structure dans le code éléments finis ABAQUS lors de l'étape de sous-structuration, le vecteur liaison est projeté sur le modèle réduit. Une astuce numérique pour définir ce cas de chargement consiste à créer dans le modèle éléments finis un nouveau nœud de référence « Ref_liaison_k » dont le mouvement est donné par le vecteur liaison :

$$x_{\text{Ref_liaison_k}} = x_{\text{Ref_zone_contact_k}} - x_{\text{Ref_lame_k}} \quad (5.8)$$

Le cas de chargement associé au vecteur $\mathbf{V}_{\text{liaison k m.c.}}$ est alors équivalent à un chargement sur le nœud « Ref_liaison_k », ce qui peut être défini aisément dans ABAQUS. L'expression de la raideur de la liaison pour laquelle un nœud n'est pas retenu se déduit alors du résultat issu de l'étape de sous-structuration.

Enfin, il y a le cas où il existe un ensemble de liaisons pour lesquelles un nœud n'est pas retenu. Ce cas est celui mis en place dans ces travaux de thèse avec l'élimination des 23 nœuds de référence « Ref_lame_k », pour chaque lame afin d'améliorer la convergence numérique [8]. Dans ce cas, l'effort engendré par un modèle d'une liaison (c.a.d., une lame) peut en particulier entraîner une contribution sur le degré de liberté « Ref_zone_contact_k », impliqué dans une autre liaison (c.a.d., une autre lame). Afin d'écrire cet effort global des liaisons frottantes, il faut au préalable introduire 23 points virtuels « Ref_liaison_k », dont chaque mouvement est donné par l'équation (5.8). En reprenant la méthode explicitée ci-dessus, il faut créer 23 cas de chargement différents dans ABAQUS lors de l'étape de sous-structuration. Soient $\mathbf{V}_{\text{liaison k}}^*$ ces cas de chargement, il est alors possible de définir un ensemble de liaisons :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison k}} = \mathbf{V}_{\text{liaison k}}^* - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{k_{\text{liaison j m.c.}}}{k_{\text{liaison k m.c.}}} \right) \left(\frac{\mathbf{V}_{\text{liaison j}}|_{\text{Ref zone contact k}}}{\mathbf{V}_{\text{liaison j}}|_{\text{Ref zone contact j}}} \right) \mathbf{V}_{\text{liaison j}} \quad (5.9)$$

$$k_{\text{liaison k}} = \frac{k_{\text{liaison k m.c.}}}{\mathbf{V}_{\text{liaison k}}|_{\text{Ref zone contact k}}} \quad (5.10)$$

Avec ces définitions, les modèles de liaison peuvent être traités indépendamment et sommés :

$$\mathbf{F}_{\text{liaisons}}(\mathbf{x}) = \sum_j k_{\text{liaison j}} u_j \mathbf{V}_{\text{liaison j}} \quad (5.11)$$

où $u_j = \mathbf{V}_{\text{liaison j}}^T \mathbf{x}$.

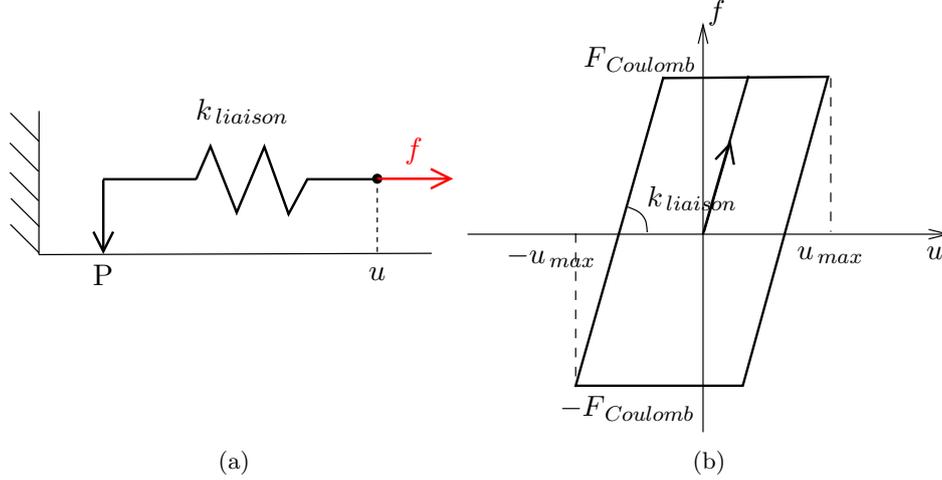


FIGURE 5.6 – Schéma (a) et diagramme force-déplacement (b) d'un modèle de frottement de Coulomb élastique.

Dans le cadre d'une modélisation non-linéaire de ces liaisons, les efforts linéaires $k_{liaison,j} u_j$ sont remplacés par des efforts non-linéaires $f_{nl,liaison,j}(u_j)$. Pour réaliser cette substitution, un effort non-linéaire $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x})$ est introduit à droite dans l'équation de la dynamique (5.3) :

$$\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) = \sum_j (k_{liaison,j} u_j - f_{nl,liaison,j}(u_j)) \mathbf{V}_{liaison,j} \quad (5.12)$$

Le problème non-linéaire associé au modèle éléments finis de la maquette HB2 écrit dans sa base réduite est ainsi :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{excit} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

5.4.2 Modèle de frottement

Une fois le vecteur liaison défini, il reste à introduire la force non-linéaire de dimension 1 : $f_{nl,liaison}(u)$. De nombreux modèles de frottement ont été développés pour représenter la force non-linéaire induite par le frottement, parmi lesquels le modèle de Coulomb élastique, de Dahl [12], d'Iwan [30, 31], de Valanis [17] ou de LuGre [18].

Pour le phénomène de frottement observé sur la maquette HB2, un modèle de frottement de Coulomb élastique est retenu. Ce modèle est schématisé sur la figure 5.6(a), il consiste à mettre en série un ressort linéaire et un frotteur de Coulomb. Le glissement se déclenche dans le frotteur de Coulomb lorsque la force f qu'il subit dépasse le seuil de Coulomb $F_{Coulomb}$. Alors, le glissement du point P est tel que la force f reste égale au seuil de Coulomb. Deux phases sont alors distinguées :

- une phase d'accroche où $|f| < F_{Coulomb}$ et où le point P reste immobile $v_P = 0$

— une phase de glissement où $|f| = F_{Coulomb}$ et où $v_P = \dot{u}$

Au niveau algorithmique, une formulation itérative est mise en place [22]. À chaque étape i de l'itération temporelle, le frotteur de Coulomb est tout d'abord supposé en position accrochée entre l'état $i - 1$ et i . Une force virtuelle ${}^{vir}f$ est ainsi calculée :

$${}^{vir}f = f_{i-1} + k_{liaison}(u_i - u_{i-1}) \quad (5.14)$$

Ensuite le comportement du frotteur de Coulomb est pris en compte. Deux états sont alors considérés. Si la force virtuelle ${}^{vir}f$ est inférieure au seuil de Coulomb, le frotteur reste dans l'état d'accroche et la force de liaison est égale à cette force virtuelle. Si la force virtuelle dépasse le seuil de Coulomb, alors le frotteur est dans un état de glissement, et la force de liaison est égale au seuil de Coulomb :

$$f_i = \begin{cases} {}^{vir}f & \text{si } |{}^{vir}f| < F_{Coulomb} \quad (\text{accroche}) \\ \text{signe}({}^{vir}f) F_{Coulomb} & \text{si } |{}^{vir}f| \geq F_{Coulomb} \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (5.15)$$

En appliquant ce schéma à un mouvement périodique, le diagramme force-déplacement présenté sur la figure 5.6(b) est obtenu. Enfin, comme expliqué précédemment, cette force non-linéaire vient se substituer à la force linéaire de liaison et ainsi, la force vectorielle non-linéaire qui intervient dans l'équation de la dynamique est :

$$\mathbf{F}_{nl, liaison}(u_i) = (k_{liaison} u_i - f_i) \mathbf{V}_{liaison} \quad (5.16)$$

Lorsque plusieurs liaisons interviennent dans une structure, comme c'est le cas pour la maquette HB2, les forces vectorielles non-linéaires s'ajoutent entre elles. L'équation de la dynamique devient :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{excit} + \sum_{liaison} \mathbf{F}_{nl, liaison}(\mathbf{V}_{liaison}^T \mathbf{x}) \quad (5.17)$$

La maquette « Hypervelocity Balistic 2 » comporte 23 contacts lame-enveloppe et pour chaque contact, le frottement peut se déclencher en translation selon θ et en translation selon z pour chaque repère local cylindrique de chaque lame. Pour la simulation de réponses vibratoires non-linéaires à une excitation acoustique, seules les composantes en translation selon θ sont considérées comme des liaisons non-linéaires. Une étude préalable par éléments finis via ABAQUS montre que cette rotation est la rotation prédominante pour un effort statique sollicitant une lame. Ainsi, un seul paramètre à identifier, identique pour les 23 lames, permet l'identification de la force non-linéaire de l'ensemble des liaisons frottantes : $F_{Coulomb, \theta}$. Le frottement est ainsi appliqué seulement à un seul mouvement de chaque lame, pour lesquelles le bord supérieur est considéré indéformable. Une manière d'aller au-delà de la modélisation proposée pourrait être de rajouter des modèles non-linéaires de frottement associés aux mouvements de chaque lame dans lesquels leur bord supérieur se déforme.

5.5 Méthode numérique pour les simulations non-linéaires

L'équation (5.17) est résolue en utilisant la méthode de l'équilibrage harmonique, introduite au chapitre 1 et employée au chapitre 3 dans lequel elle est étendue aux excitations aléatoires. Une extension

de la méthode de l'équilibrage harmonique est proposée dans cette partie pour le cas de l'application industrielle HB2. Pour minimiser la taille des calculs non-linéaires, une méthode de condensation initialement introduite par Hahn et Chen [24] est utilisée. Cette méthode repose sur la séparation des degrés de liberté dits « linéaires » et les degrés dits « non-linéaires », c'est-à-dire les degrés de liberté retenus pour lesquels il y a introduction du modèle de frottement non-linéaire explicité précédemment.

Les vecteurs de déplacement, de force d'excitation et de force non-linéaire sont décomposés en séries de Fourier :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{n=1}^p \mathbf{A}_n \sin(n\Omega t) + \mathbf{B}_n \cos(n\Omega t) \quad (5.18)$$

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^p \mathbf{S}_n \sin(n\Omega t) + \mathbf{C}_n \cos(n\Omega t) \quad (5.19)$$

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sum_{n=1}^p (\mathbf{S}_{\text{n,excit}} \sin(n\Omega t) + \mathbf{C}_{\text{n,excit}} \cos(n\Omega t)) \quad (5.20)$$

où p correspond à l'ordre choisi de la série de Fourier finie et où $(\mathbf{B}_0, (\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$, $(\mathbf{C}_0, (\mathbf{S}_n, \mathbf{C}_n)_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket})$ et $(\mathbf{S}_{\text{n,excit}}, \mathbf{C}_{\text{n,excit}})_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ sont respectivement les coefficients de Fourier de la solution $\mathbf{x}(t)$ à déterminer, de la force non-linéaire $\mathbf{F}_{\text{nl}}(t)$ et de l'effort aléatoire multipoints $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$. Il est bon de rappeler que la méthode de l'équilibrage harmonique peut être adaptée à une excitation aléatoire en choisissant la résolution fréquentielle Δf comme fréquence fondamentale de l'excitation. Dans ce cas, l'excitation aléatoire multipoints est perçue comme une excitation déterministe multipoints avec une pulsation fondamentale $\Omega = 2\pi\Delta f$. La pulsation fondamentale Ω est fixe au cours de la résolution du système non-linéaire, elle est généralement très petite pour avoir une discrétisation fine de la plage de fréquences considérée. La variable p est aussi liée à la discrétisation et prend de grandes valeurs ce qui entraîne un coût de calcul assez important pour le nombre de degrés de liberté non-linéaires considéré dans cette étude. Pour rappel, l'ensemble de la plage fréquentielle est décrite sans avoir recours à une continuation en fréquence pour l'excitation aléatoire. Dans le cadre de l'étude numérique réalisée sur la maquette HB2, les valeurs suivantes ont été choisies : $p = 2^{10} = 1024$ et $\Delta f = 1.95$ Hz. Ce sont les valeurs maximales qu'il est possible de prendre avec les moyens informatiques utilisés et le nombre de degrés de liberté non-linéaires considéré.

Afin de déterminer la valeur des coefficients de Fourier \mathbf{B}_0 , \mathbf{A}_n et \mathbf{B}_n , les expressions (5.18), (5.19) et (5.20) sont réinjectées dans l'équation (5.13). Cela conduit à un ensemble $N_{\text{ddl}}(2p + 1)$ équations non-linéaires (où N_{ddl} correspond au nombre de degrés de liberté dans le modèle réduit de l'objet industriel considéré) données par :

$$\mathbf{K}\mathbf{B}_0 = \mathbf{C}_0 \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} & -n\Omega\mathbf{D} \\ n\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\text{n,excit}} \\ \mathbf{C}_{\text{n,excit}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n \\ \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \quad \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad (5.22)$$

En réunissant toutes les harmoniques n , un système de taille $N_{\text{ddl}}(2p+1)$ est obtenu :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}_{\text{excit}} + \mathbf{B}_{\text{nl}} \quad (5.23)$$

avec :

$$\mathbf{A} = \text{Diag} \left(\mathbf{K}, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} & -n\Omega\mathbf{D} \\ n\Omega\mathbf{D} & \mathbf{K} - (n\Omega)^2\mathbf{M} \end{array} \right]_{\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket} \right) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{B}_{\text{excit}} = [\mathbf{0} \ \mathbf{S}_1, \text{excit} \ \mathbf{C}_1, \text{excit} \ \dots \ \mathbf{S}_p, \text{excit} \ \mathbf{C}_p, \text{excit}]^T \quad (5.25)$$

$$\mathbf{B}_{\text{nl}} = [\mathbf{C}_0 \ \mathbf{S}_1 \ \mathbf{C}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_p \ \mathbf{C}_p]^T \quad (5.26)$$

À ce stade, la résolution du problème non-linéaire (5.23) est trop coûteuse d'une part par le calcul des efforts non-linéaires et d'autre part par la taille du système à résoudre. Une méthode de substitution est alors employée sur les degrés de liberté spécifiques aux efforts non-linéaires pour réduire la taille du système non-linéaire et faciliter le calcul de l'effort non-linéaire. L'idée repose sur un changement de base permettant de séparer la base de calcul en vecteurs sur lesquels un effort non-linéaire s'applique et en vecteurs selon lesquels l'équation de la dynamique est linéaire. Le gain de calcul est très important puisque le nombre de degrés de liberté non-linéaires est faible (23 pour la maquette HB2) par rapport au nombre de degrés de liberté du modèle réduit (136 pour la maquette HB2).

Soit q le nombre de vecteurs d'application des efforts non-linéaires. Ces q vecteurs $\{\mathbf{V}_{\text{liaison}, i}\}_{i=1..q}$ sont choisis pour être les premiers vecteurs de la nouvelle base, ils sont obtenus lors de l'étape de sous-structuration réalisée avec le code éléments finis ABAQUS. La nouvelle base est obtenue en appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille de vecteurs $\{\mathbf{V}_i\}_{i=1..N_{\text{ddl}}+q} = \{\{\mathbf{V}_{\text{liaison}, i}\}_{i=1..q}, [\mathbf{I}_d]_{N_{\text{ddl}}}\}$. Le produit scalaire considéré pour cet algorithme est le produit scalaire cartésien de l'espace $\mathbb{R}^{N_{\text{ddl}}}$, noté (\cdot, \cdot) . L'algorithme s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_1 &= \frac{\mathbf{V}_1}{\|\mathbf{V}_1\|} \\ &\dots \\ \tilde{\mathbf{V}}_i &= \frac{\mathbf{V}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_i | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j}{\left\| \mathbf{V}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_i | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\|} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Au final, les vecteurs nuls sont éliminés et une base orthonormale $\tilde{\mathbf{V}} = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1..N_{\text{ddl}}}$ est créée. Dans cette nouvelle base, les vecteurs liaisons s'expriment uniquement en fonction des q premiers vecteurs de la base :

$$\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j + \left\| \mathbf{V}_{\text{liaison}, i} - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison}, i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\| \tilde{\mathbf{V}}_i \quad \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad (5.28)$$

Les degrés de liberté correspondant à ces q premiers vecteurs sont désignés comme les degrés de liberté « non-linéaires », parce que la force non-linéaire agit uniquement sur eux. Les variables sont

ainsi séparées dans la nouvelle base entre les q degrés de liberté non-linéaires et les $r = N_{\text{ddl}} - q$ degrés de liberté « linéaires » :

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_q \\ \mathbf{x}_r \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{V}} \ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{V}} \dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{V}} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{F}_{\text{excit}}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_q) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Le même changement de base est effectué dans le domaine de Fourier :

$$\Lambda = \text{Diag} \left(\tilde{\mathbf{V}}_q, \tilde{\mathbf{V}}_q, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_q, \tilde{\mathbf{V}}_r, \tilde{\mathbf{V}}_r, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_r \right)_{(2p+1)N_{\text{ddl}}} \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{V}}_q = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=1..q}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_r = \{\tilde{\mathbf{V}}_i\}_{i=q..N_{\text{ddl}}} \quad (5.31)$$

$$\Lambda^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{X}_r \end{bmatrix} \quad \Lambda^T \mathbf{A} \Lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{qq} & \mathbf{A}_{qr} \\ \mathbf{A}_{rq} & \mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix} \quad \Lambda^T \mathbf{B}_{\text{excit}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{excit},q} \\ \mathbf{B}_{\text{excit},r} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

L'équation de la dynamique se réécrit dès lors dans la base de Fourier (voir équation (5.23)) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{qq} & \mathbf{A}_{qr} \\ \mathbf{A}_{rq} & \mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{X}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{excit},q} \\ \mathbf{B}_{\text{excit},r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

L'équation précédente permet d'établir une relation linéaire entre \mathbf{X}_r et \mathbf{X}_q :

$$\mathbf{X}_r = \mathbf{A}_{rr}^{-1} (\mathbf{B}_{\text{excit},r} - \mathbf{A}_{rq} \mathbf{X}_q) \quad (5.34)$$

Dès lors, par substitution, le système (5.33) peut se réécrire sous la forme d'un système non-linéaire de dimension $(2p+1)q$:

$$(\mathbf{A}_{qq} - \mathbf{A}_{qr} \mathbf{A}_{rr}^{-1} \mathbf{A}_{rq}) \mathbf{X}_q = \mathbf{B}_{\text{excit},q} - \mathbf{A}_{qr} \mathbf{A}_{rr}^{-1} \mathbf{B}_{\text{excit},r} + \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \quad (5.35)$$

Ce dernier système de taille $(2p+1)q$ est celui qui est résolu. Une fois \mathbf{X}_q déterminé, la solution \mathbf{X} du problème (5.23) est retrouvée en appliquant les relations (5.32) et (5.34) :

$$\mathbf{X} = \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{X}_q \\ \mathbf{A}_{rr}^{-1} (\mathbf{B}_{\text{excit},r} - \mathbf{A}_{rq} \mathbf{X}_q) \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Dans l'équation (5.35), la méthode AFT est utilisée pour obtenir la relation $\mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q)$. Cette méthode est à la base du calcul des efforts non-linéaires définis en fonction de l'amplitude de la réponse dans ces travaux de thèse adaptés aux cas des excitations aléatoires multipoints. Tout d'abord, le domaine temporel est retrouvé à l'aide d'une transformée de Fourier inverse :

$$\mathbf{x}_q(t) = \mathbf{B}_0 + \sum_{n=1}^p (\mathbf{A}_n \sin(n\Omega t) + \mathbf{B}_n \cos(n\Omega t)) \quad (5.37)$$

où les coefficients $(\mathbf{B}_0, (\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n)_{\forall n \in [1,p]})$ sont les coefficients de Fourier inconnus de la solution $\mathbf{x}_q(t)$ à déterminer. Grâce à ces déplacements, les allongements dans la direction de chaque liaison $u_{\text{liaison},i} = \mathbf{V}_{\text{liaison},i}^T \mathbf{x}$ sont déduits grâce à l'équation (5.28) :

$$u_{\text{liaison},i}(t) = \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison},i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \{\mathbf{x}_q\}_j(t) + \left\| \mathbf{V}_{\text{liaison},i} - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{V}_{\text{liaison},i} | \tilde{\mathbf{V}}_j) \tilde{\mathbf{V}}_j \right\| \{\mathbf{x}_q\}_i(t) \quad (5.38)$$

La force non-linéaire pour chaque liaison peut alors être directement calculée par le modèle décrit dans la section 5.4. Ce dernier s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{nl liaison } i} = (k_{\text{liaison } i} u_{\text{liaison}, i} - f_{\text{nl liaison}}(u_{\text{liaison}, i})) \mathbf{V}_{\text{liaison } i} \quad (5.39)$$

Il faut alors considérer l'expression du vecteur $\mathbf{V}_{\text{liaison } i}$ donnée par l'équation (5.28) dans la nouvelle base $\tilde{\mathbf{V}}_j$. Enfin, la contribution de chaque liaison i est sommée pour obtenir un vecteur d'effort non-linéaire pour les degrés de liberté non-linéaires :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_q(t)) = \sum_{i=1}^q \mathbf{F}_{\text{nl liaison } i}(\mathbf{x}_q(t)) \quad (5.40)$$

Une fois cette force non-linéaire calculée dans le domaine temporel, elle est projetée dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une Transformée de Fourier. La démarche AFT, qui a été explicitement détaillée pour un modèle éléments finis associé à un assemblage industriel, peut se résumer par le schéma suivant où FFT désigne la Transformée de Fourier Rapide (« Fast Fourier Transform ») :

$$\mathbf{X}_q \xrightarrow{\text{FFT}^{-1}} \mathbf{x}_q(t) \rightarrow \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_q(t)) \xrightarrow{\text{FFT}} \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \quad (5.41)$$

La relation non-linéaire $\mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q)$ est désormais explicite et permet de traiter l'équation (5.35) comme un problème d'optimisation non-linéaire :

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_q) = (\mathbf{A}_{\text{qq}} - \mathbf{A}_{\text{qr}} \mathbf{A}_{\text{rr}}^{-1} \mathbf{A}_{\text{rq}}) \mathbf{X}_q - \mathbf{B}_{\text{excit}, q} - \mathbf{A}_{\text{qr}} \mathbf{A}_{\text{rr}}^{-1} \mathbf{B}_{\text{excit}, r} + \mathbf{B}_{\text{nl}}(\mathbf{X}_q) \quad (5.42)$$

Minimiser l'expression (5.42) impose un critère de convergence qui est choisi sous la forme :

$$\frac{\|\mathbf{H}(\mathbf{X}_q)\|_2}{\|\mathbf{B}_{\text{excit}, q}\|_2} < \epsilon_{HBM} \quad (5.43)$$

où ϵ_{HBM} est une précision numérique choisie et $\|\cdot\|_2$ est la norme quadratique. Pour le reste de l'étude, ϵ_{HBM} est choisi égal à 10^{-3} . La minimisation de l'équation (5.42) se fait classiquement par une descente de Newton.

5.6 Modélisation originale d'une excitation aléatoire multipoints

Dans cette section, une modélisation originale d'une excitation aléatoire multipoints adaptée à un nombre restreint de termes d'excitation est présentée. Cette modélisation s'appuie sur les notions explicitées dans la section 1.5 du chapitre 1. Pour rappel, une excitation aléatoire multipoints se décrit à partir de la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}(\omega)$ (où ω indique la pulsation), qui est définie pour N_e excitations temporelles par :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega) & S_{12}(\omega) & \dots & S_{1N_e}(\omega) \\ S_{21}(\omega) & S_{22}(\omega) & \dots & S_{2N_e}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{N_e1}(\omega) & S_{N_e2}(\omega) & \dots & S_{N_eN_e}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

où la fonction $S_{ii}(\omega)$ représente la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de l'excitation temporelle $f_i(t)$, qui s'applique au degré de liberté i . La fonction $S_{ij}(\omega)$ représente la Densité Spectrale Croisée (DSC) entre les excitations temporelles $f_i(t)$ et $f_j(t)$, qui correspond à l'excitation temporelle multipoints définie au degré de liberté $j \neq i$. Grâce à la relation de Wiener-Khintchine donnée par l'équation (1.27) (voir chapitre 1), la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ est définie positive [63].

La première partie de cette section donne la modélisation de cette excitation et en montre les intérêts dans un contexte industriel pour lequel seul un nombre restreint de degrés de liberté est considéré. La seconde partie de cette section présente la façon dont sont calculés certains termes de cette modélisation, appelés acceptances modales, à partir d'une résolution linéaire simple. Enfin, la validation de cette modélisation est démontrée à partir de la comparaison avec un calcul linéaire sur le modèle éléments finis complet de la maquette HB2 sollicitée sur l'ensemble des degrés de liberté de sa surface extérieure.

5.6.1 Écriture du modèle

La méthode originale de modélisation de l'excitation est rédigée dans cette partie pour rester dans un formalisme adaptée à la méthode de l'équilibrage harmonique présentée dans la section 5.5. L'idée principale derrière cette méthode est de projeter la matrice de densité spectrale $\mathbf{S}(\omega)$ sur la base de modes de vibration $[\mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}}, \dots, \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}}]$ du modèle éléments finis complet de la structure considérée. Ces modes de vibration doivent être normalisés par rapport à la matrice de masse de la structure. Comme pour la description de la décomposition de Karhunen-Loève donnée dans la section 1.5 du chapitre 1, le vecteur $\mathbf{F}_{\text{excit}}^{\text{m.c.}}(t)$ s'écrit dans la base de modes de vibration de la structure :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}^{\text{m.c.}}(t) = \sum_{k=1}^{N_m} y_k(t) \mathbf{Y}_k^{\text{m.c.}} \quad (5.45)$$

où les variables $y_k(t)$ sont définies dans cette section. Les vecteurs $\mathbf{Y}_k^{\text{m.c.}}$ correspondent aux modes de vibration du modèle éléments finis complet considéré. Ainsi, le vecteur $\mathbf{F}_{\text{excit}}^{\text{m.c.}}(t)$ est la description du

vecteur de l'excitation aléatoire multipoints dans la base complète du modèle éléments finis considéré.

La projection de la matrice de densité spectrale $\mathbf{S}(\omega)$ sur la base de modes de vibration $[\mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}}, \dots, \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}}]$ du modèle éléments finis complet conduit à une nouvelle matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ définie par :

$$\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) = \mathbf{P}^T \mathbb{S}(\omega) \mathbf{P} \quad (5.46)$$

où $.^T$ indique l'opérateur transposé. Les matrices $\mathbb{S}(\omega)$ et \mathbf{P} sont décrites par :

$$\mathbb{S}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(\omega) & \mathbf{S}(\omega) & \dots & \mathbf{S}(\omega) \\ \mathbf{S}(\omega) & \mathbf{S}(\omega) & \dots & \mathbf{S}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{S}(\omega) & \mathbf{S}(\omega) & \dots & \mathbf{S}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Alors, la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ peut se réécrire :

$$\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}} & \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}} & \dots & \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}} \\ \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}} & \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}} & \dots & \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}} & \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}} & \dots & \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\omega) \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

À ce stade, il est nécessaire de démontrer que la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ est semi-définie positive grâce à la propriété mathématique suivante :

$$\mathbf{A} \text{ est semi-définie positive} \Leftrightarrow \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (5.50)$$

Premièrement, la matrice $\mathbb{S}(\omega)$ peut être réécrite :

$$\mathbb{S}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} [\mathbf{S}(\omega)] \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Soit \mathbf{x} un vecteur de dimensions $N_m N_e \times 1$ où au moins un de ses coefficients (chacun d'entre eux est un vecteur de dimensions $N_e \times 1$) est non nul. Le vecteur \mathbf{x} est défini tel que :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_m} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Grâce à l'équation (5.51), la relation suivante est obtenue :

$$\mathbf{x}^T \mathbb{S}(\omega) \mathbf{x} = \left(\sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{x}_i \right)^T \mathbf{S}(\omega) \left(\sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{x}_i \right) \quad (5.53)$$

Puisqu'au moins un des coefficients du vecteur \mathbf{x} n'est pas nul, un des vecteurs \mathbf{x}_i n'est pas nul, alors la somme $\left(\sum_{i=1}^{N_m} \mathbf{x}_i \right)$ n'est pas nulle. Grâce à la propriété mathématique donnée par l'équation (5.50) et puisque $\mathbf{S}(\omega)$ est définie positive, il en résulte que $\mathbf{x}^T \mathbb{S}(\omega) \mathbf{x} \geq 0$. Par conséquent, la matrice $\mathbb{S}(\omega)$ est semi-définie positive. La même méthode est appliquée pour démontrer que la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ est également semi-définie positive. Soit \mathbf{z} un vecteur de dimensions $N_m N_e \times 1$ où au moins un de ses coefficients (chacun d'eux est un vecteur de dimensions $N_e \times 1$) est non nul :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{N_m} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Grâce à l'équation (5.46), la formule suivante est trouvée :

$$\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{P}^T \mathbb{S}(\omega) \mathbf{P} \mathbf{z} = (\mathbf{P} \mathbf{z})^T \mathbb{S}(\omega) (\mathbf{P} \mathbf{z}) \quad (5.55)$$

Puisque au moins un des coefficients du vecteur \mathbf{z} n'est pas nul et que \mathbf{P} correspond à une matrice de vecteurs propres d'une structure non rigide, alors un des coefficients du vecteur $(\mathbf{P} \mathbf{z})$ n'est pas nul. Grâce à la propriété mathématique donnée par l'équation (5.50) et puisque $\mathbb{S}(\omega)$ est semi-définie positive, il en résulte que $\mathbf{z}^T \mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) \mathbf{z} \geq 0$. Ceci démontre que la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ est semi-définie positive.

Comme pour la description de la modélisation de Shinozuka donnée dans la section 1.5 du chapitre 1, la décomposition de Choleksy est utilisée de nouveau :

$$\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{G}^*(\omega)^T \quad (5.56)$$

La matrice $\mathbf{G}(\omega)$ est une matrice triangulaire inférieure donnée par :

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} G_{11}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ G_{21}(\omega) & G_{22}(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ G_{N_m 1}(\omega) & G_{N_m 2}(\omega) & \dots & G_{N_m N_m}(\omega) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

De manière analogue à la modélisation de Shinozuka pour la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints, les coefficients $G_{ij}(\omega)$ sont déterminés à partir des principaux mineurs de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$. Les termes de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ (voir équation (5.49)) sont appelés acceptances modales et leur calcul fait l'objet de la partie 5.6.2. Les termes d'acceptances modales sont trouvés à partir d'un calcul linéaire réalisé sur le modèle complet de la structure, en considérant soit un mode de vibration pour

les éléments diagonaux de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ soit deux modes de vibration pour les éléments extra-diagonaux.

Cette méthode permet de considérer une matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ de dimensions $N_m \times N_m$ qui est plus intéressante que de considérer la matrice $\mathbf{S}(\omega)$ de dimensions $N_e \times N_e$. Cela est d'autant plus intéressant lorsque N_e devient grand, ce qui est le cas dans le cadre d'un contexte industriel où N_e correspond au nombre de degrés de liberté de la surface concernée par l'excitation. Dans le cadre de la maquette HB2, le nombre de degrés de liberté sur la surface extérieure de l'enveloppe est de 142 074 et le nombre de modes utilisés est de 56. Cette méthode définit N_m excitations qui sont modales et représentatives de l'excitation aléatoire corrélée multipoints complète. Ensuite, l'excitation modale temporelle $(y_k(t))_{\forall k \in \llbracket 1, N_m \rrbracket}$ est donnée par :

$$y_k(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p |G_{kl}(\omega_n)| \cos(\omega_n t + \theta_{kl}(\omega_n) + \phi_{ln}) \right) \quad (5.58)$$

où les variables p , $\Delta\omega$, ω_n , $\theta_{kl}(\omega_n)$ et ϕ_{ln} sont les mêmes variables que celles employées dans la section 1.5 du chapitre 1. Grâce à l'équation (5.45), la description du vecteur de l'excitation aléatoire multipoints dans la base complète du modèle éléments finis considéré donné par le vecteur $\mathbf{F}_{\text{excit}}^{\text{m.c.}}(t)$ peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}^{\text{m.c.}}(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{k=1}^{N_m} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p |G_{kl}(\omega_n)| \cos(\omega_n t + \theta_{kl}(\omega_n) + \phi_{ln}) \right) \mathbf{Y}_{\mathbf{k}}^{\text{m.c.}} \quad (5.59)$$

La méthode de condensation utilisée sous ABAQUS assure que les modes de vibration du modèle réduit sont exactement ceux du modèle complet. Dès lors, le vecteur de l'excitation aléatoire multipoints dans la base réduite $\mathbf{F}_{\text{excit}}(t)$ peut s'écrire :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \sum_{k=1}^{N_m} \left(\sum_{l=1}^k \sum_{n=1}^p |G_{kl}(\omega_n)| \cos(\omega_n t + \theta_{kl}(\omega_n) + \phi_{ln}) \right) \mathbf{Y}_{\mathbf{k}} \quad (5.60)$$

où les vecteurs $\mathbf{Y}_{\mathbf{k}}$ correspondent aux modes de vibration du modèle réduit du modèle éléments finis considéré.

Comme pour la modélisation de Shinozuka, le choix de l'entier p en tant que puissance de 2 ainsi que le choix de la discrétisation fréquentielle selon un algorithme de FFT (voir section 1.5.2 du chapitre 1) permet de réécrire l'équation (5.60) à l'aide de Transformées de Fourier Rapide (FFT) [70] :

$$\mathbf{F}_{\text{excit}}(t_n) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left(\mathbf{FFT}^{-1} \left(\sum_{k=1}^{N_m} \left(\sum_{l=1}^k \mathbf{G}_{\mathbf{k}l} [n] \exp(j\phi_{\mathbf{l}} [n]) \right) \mathbf{Y}_{\mathbf{k}} \right) \right) \quad (5.61)$$

où $\mathbf{G}_{\mathbf{k}l}$ et $\phi_{\mathbf{l}}$ sont les vecteurs définis respectivement par $\mathbf{G}_{\mathbf{k}l}[n] = G_{kl}(\omega_n)$ et $\phi_{\mathbf{l}}[n] = \phi_{ln}$. La grandeur t_n est le temps discrétisé $t_n = n \cdot dt$ où dt est le pas d'échantillonnage temporel.

Il convient de noter qu'avec ce choix de modélisation, les N_m variables aléatoires sont dépendantes les unes des autres, mais il y a beaucoup moins de variables aléatoires que dans la description complète de l'excitation aléatoire multipoints pour laquelle il y a N_e variables aléatoires.

5.6.2 Calcul des termes d'acceptances modales

Cette partie présente la méthode employée dans ces travaux de thèse afin d'identifier les termes de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ de dimensions $N_m \times N_m$. Ces termes, appelés acceptances modales, sont trouvés par une routine interne liant le code éléments finis ABAQUS et des scripts écrits en langage Python. Les calculs réalisés sous ABAQUS sont linéaires et permettent de relier une donnée de sortie, un déplacement modal ou réel, à une donnée d'entrée. La donnée d'entrée pour réaliser le calcul des acceptances modales est une DSP de niveau unitaire sur la bande de fréquences d'intérêt. La clef de cette méthode est de réaliser une simulation avec un seul mode de vibration mais avec la bonne excitation définie sur la surface extérieure du modèle éléments finis complet et avec la bonne fonction de corrélation. Ainsi, si un seul mode i est considéré dans le calcul, une fonction de transfert relie le déplacement modal $U_{i,\text{modal}}(\omega)$ du mode considéré à l'excitation par l'acceptance modale $S_{ii}^{\text{proj}}(\omega)$:

$$U_{i,\text{modal}}(\omega) = \mathcal{H}_i(\omega) S_{ii}^{\text{proj}}(\omega) \quad (5.62)$$

Chaque fonction de transfert $\mathcal{H}_i(\omega)$ est définie par :

$$\mathcal{H}_i(\omega) = \frac{1}{\Omega_i^2 + j2\xi_i\Omega_i\omega - \omega^2} \quad (5.63)$$

où ξ_i est l'amortissement modal associé au mode i , la variable j représente le nombre complexe $\sqrt{-1}$. Dans le cadre de ces travaux de thèse, l'amortissement choisi pour chaque mode est $\xi_i = 0.01$ mais sa valeur est indépendante du calcul des acceptances modales. La pulsation propre Ω_i est trouvée auparavant par une analyse modale numérique de la structure en conditions libre-libre. Ainsi, chaque coefficient diagonal de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ est trouvé grâce au calcul linéaire restreint à un mode de vibration.

Ensuite, si deux modes i et j du modèle éléments finis complet sont considérés dans le calcul linéaire alors la connaissance des déplacements modaux $U_{i,\text{modal}}(\omega)$ et $U_{j,\text{modal}}(\omega)$ permettent d'obtenir les termes extradiagonaux de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ à travers l'équation suivante :

$$S_{ij}^{\text{proj}}(\omega) = \frac{U_{\text{ddl}}(\omega) - \left(Y_{i,\text{ddl}}^{\text{m.c.}}\right)^2 U_{i,\text{modal}}(\omega) - \left(Y_{j,\text{ddl}}^{\text{m.c.}}\right)^2 U_{j,\text{modal}}(\omega)}{Y_{i,\text{ddl}}^{\text{m.c.}} Y_{j,\text{ddl}}^{\text{m.c.}} \left(\mathcal{H}_i(\omega) \mathcal{H}_j^*(\omega) + \mathcal{H}_i^*(\omega) \mathcal{H}_j(\omega)\right)} \quad (5.64)$$

où la variable $U_{\text{ddl}}(\omega)$ est le déplacement d'un degré de liberté du modèle éléments finis. La grandeur $Y_{i,\text{ddl}}^{\text{m.c.}}$ représente l'amplitude modale du mode de vibration i pris au degré de liberté considéré.

Une routine Python est écrite afin de réaliser l'ensemble des étapes nécessaires pour identifier les termes de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$. Cette routine réalise les opérations suivantes :

- une première étape d'analyse modale est réalisée avec le modèle éléments finis complet de la structure considérée afin d'identifier les grandeurs Ω_i et $Y_{i,\text{ddl}}^{\text{m.c.}}$. Un seul calcul sur le modèle complet est nécessaire pour cette étape.
- Mode par mode, un calcul linéaire est effectué avec une excitation acoustique définie avec sa fonction de corrélation. Chaque calcul permet de trouver la sortie modale $U_{i,\text{modal}}(\omega)$. À la suite des calculs, les termes diagonaux $S_{ii}^{\text{proj}}(\omega)$ sont connus à partir de l'équation (5.62). Cela nécessite ainsi N_m calculs linéaires indépendants sur le modèle éléments finis complet.
- Enfin, un calcul linéaire est réalisé en ne conservant uniquement que deux modes distincts i et j pour la même excitation acoustique. Chaque calcul permet d'accéder au déplacement d'un degré de liberté du modèle éléments finis complet $U_{\text{ddl}}(\omega)$, puis grâce à l'équation (5.64), les termes extradiagonaux $S_{ij}^{\text{proj}}(\omega)$ sont trouvés. Cela nécessite ainsi $\frac{N_m \times (N_m - 1)}{2}$ calculs linéaires indépendants sur le modèle complet de la structure considérée.

Désormais, le modèle proposé pour l'excitation aléatoire multipoints est validé par la comparaison avec un calcul éléments finis réalisé sous ABAQUS. Cette validation est présentée dans la partie suivante, elle est accompagnée d'une discussion concernant les choix pris afin de simplifier l'étude vibratoire de la maquette HB2 soumise à une excitation acoustique.

5.6.3 Validation de la modélisation et discussions

Premièrement, la méthode proposée dans la partie 5.6 est validée sur la base d'un calcul linéaire réalisé sous ABAQUS. La structure HB2 est sollicitée par une excitation définie comme un bruit de couche limite turbulente, dont la fonction de corrélation est spatiale et indépendante de la fréquence. Ainsi, la routine présentée dans la partie 5.6.2 pour le calcul des acceptances modales n'est à effectuer qu'une seule fois pour l'ensemble de la plage de fréquences d'intérêt. Le bruit de couche limite turbulente s'applique sur tous les degrés de liberté de la surface extérieure du modèle éléments finis de la maquette HB2, cela représente 142 074 termes d'excitations aléatoires et corrélés. La méthode proposée s'intéresse quant à elle à la projection de la matrice de densité spectrale sur les deux premiers modes de la maquette ($N_m = 2$). La figure 5.7 présente les résultats numériques des accélérations sur le nez de la maquette HB2, où se situe l'accéléromètre A1, suivant les trois directions principales de l'étude. Ces accélérations sont issues de deux méthodes numériques : la première méthode est celle disponible via ABAQUS pour le calcul linéaire du modèle éléments finis complet de la maquette HB2 sollicitée par une excitation aléatoire multipoints définie sur la surface extérieure avec une fonction de corrélation correspondant à un bruit de couche limite turbulente. La seconde méthode est la résolution du problème linéaire réduit et défini avec $N_m = 2$ efforts modaux aléatoires et corrélés. Cette résolution se fait via la méthode de l'équilibrage harmonique en l'absence de termes non-linéaires. À partir de la figure 5.7, il est ainsi possible de conclure que les deux méthodes numériques donnent exactement le même résultat au niveau de l'accéléromètre A1 et cela a été vérifié également sur l'ensemble des accéléromètres retenus dans le modèle réduit. Une erreur numérique de moins de 1% est calculée à

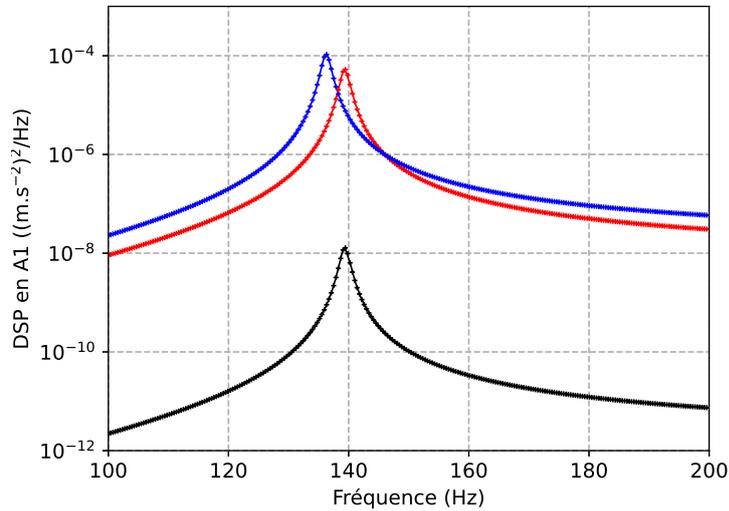


FIGURE 5.7 – Comparaison des résultats numériques au niveau de l'accéléromètre A1 suivant les directions X (noir), Y (bleu) et Z (rouge) pour une excitation définie comme un bruit de couche limite turbulente (de niveau égal à 90 dB) issus de deux méthodes numériques : (traits pleins) résolution complète via ABAQUS (croix) résolution via une routine Python avec l'excitation aléatoire multipoints projetée sur les deux premiers modes de la maquette HB2.

partir de ces courbes. L'erreur se calcule en prenant l'aire sous chaque courbe (croix ou traits pleins). Cette figure valide d'une part la méthode proposée dans la partie 5.6 et d'autre part la routine employée pour calculer les acceptances modales. Le gain proposé par la méthode est alors très important puisque deux efforts aléatoires suffisent pour avoir le même résultat que celui obtenu via un résolution complète effectuée avec 142 074 termes d'excitations aléatoires et corrélés.

Maintenant que la méthode est validée en ne conservant que deux modes de vibration de la maquette HB2, l'étude s'étend sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz sur laquelle 56 modes de vibration sont identifiés. Concernant le calcul des acceptances modales croisées, cela représente l'identification de 1 540 termes extradiagonaux de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ nécessitant alors 1 540 calculs sur le modèle éléments finis complet de la maquette HB2. Chaque calcul est réalisé avec deux modes de vibration de la maquette et reste relativement court par rapport à un calcul sur modèle complet. Cependant, si la fonction de corrélation de l'excitation acoustique dépend de la fréquence alors les 1 540 calculs sont à effectuer pour chaque fréquence discrétisée, ce qui devient beaucoup trop onéreux pour l'étude numérique de ces travaux de thèse. Dès lors, la présence de ces termes extradiagonaux est remise en question. La figure 5.8 présente la comparaison de deux méthodes numériques, la première considère ces termes extradiagonaux et la seconde méthode les néglige. Les résultats numériques sont les accélérations sur le nez de la maquette HB2, où se situe l'accéléromètre A1, suivant les trois directions principales X, Y et Z, pour une excitation définie comme un bruit de couche limite turbulente

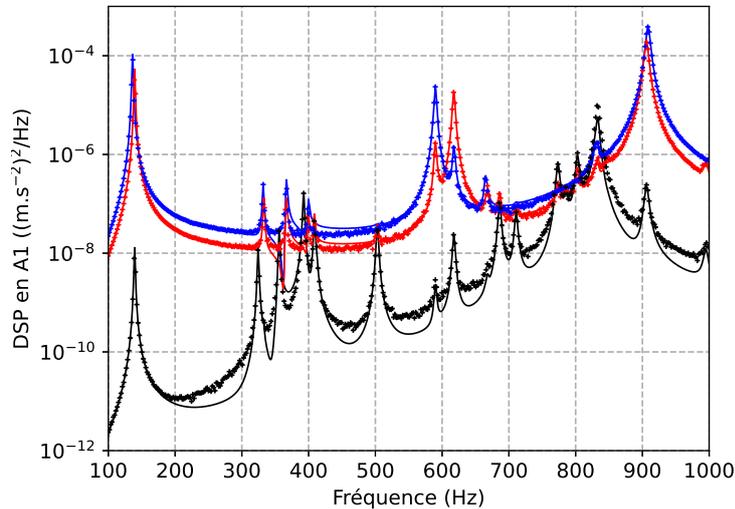


FIGURE 5.8 – Comparaison des résultats numériques au niveau de l'accéléromètre A1 suivant les directions X (noir), Y (bleu) et Z (rouge) pour une excitation définie comme un bruit de couche limite turbulente issu de deux méthodes numériques : (traits pleins) résolution complète via ABAQUS (croix) résolution via une routine Python avec l'excitation aléatoire multipoints projetée sur les 56 premiers modes de la maquette HB2 sans considérer les acceptances modales croisées.

de niveau égal à 90 dB. En analysant la figure 5.8, les méthodes numériques donnent sensiblement le même résultat suivant les directions Y et Z, et un écart s'observe suivant la direction X pour les fréquences situées loin des fréquences de résonance de chaque mode. Cela permet de conclure sur le fait que les termes d'acceptances modales croisées apportent de l'information sur l'excitation pour les fréquences situées loin des fréquences de résonance des modes. Pour les fréquences de résonance, seuls les termes d'acceptances modales propres à chaque mode sont nécessaires. Pour la suite de ces travaux de thèse, le calcul de ces termes extradiagonaux sera négligé afin de ne conserver que les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$.

La comparaison aux mesures est ensuite donnée pour un faible niveau d'excitation (90 dB). Le contexte de l'étude expérimentale est vibroacoustique et le code éléments finis ABAQUS ne permet pas de considérer la présence de l'air autour et à l'intérieur de la structure. L'excitation modélisée via ABAQUS est alors sous-estimée par rapport aux conditions d'essais. Afin de pouvoir prendre en compte la présence de l'air, le logiciel de simulation vibroacoustique Wave6 est utilisé. Ce logiciel permet la modélisation des volumes d'air autour et à l'intérieur de la structure grâce aux méthodes de calcul de propagation acoustique qui sont implémentées : la méthode des éléments de frontière [3] (méthode BEM) et la méthode de éléments finis acoustiques [37] (méthode FEA). La comparaison de deux méthodes numériques est proposée sur la figure 5.9. Ces deux méthodes sont la méthode BEM employée uniquement pour modéliser le volume d'air externe autour de la maquette HB2 avec le logi-

ciel Wave6 et la méthode employée par le code éléments finis ABAQUS sans considérer la présence de l'air. Les résultats numériques proposés sur la figure 5.9 sont les accélérations sur le nez de la maquette HB2, où se situe l'accéléromètre A1, suivant la direction Z. Ces résultats numériques sont comparés aux mesures brutes pour le niveau d'excitation acoustique de 90 dB. Il est intéressant de remarquer que l'information du volume d'air externe, apportée par le logiciel Wave6, donne une réelle plus-value dans la modélisation de l'excitation. La méthode BEM et le logiciel Wave6 sont alors préférés à ABAQUS pour l'étude numérique proposée dans ce chapitre. Le calcul des termes d'acceptances modales est identique avec Wave6 : un seul mode de vibration est considéré pour récupérer les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$. Ainsi, le niveau d'accélération simulée pour les différents accéléromètres présents dans le modèle est proche des données d'essais avec la méthode BEM appliquée à l'environnement extérieur de la maquette HB2. À titre d'information, la prise en compte du volume d'air interne dans la maquette et l'utilisation de la méthode FEA n'améliorent pas significativement ces résultats sur cette bande fréquentielle. Ces éléments ne sont alors pas pris en compte pour la suite de ces travaux.

Pour une excitation de type bruit diffus, la fonction de corrélation dépend de la fréquence et l'identification des termes d'acceptances modales nécessite alors de se faire à chaque pas de fréquence. Afin d'alléger le temps de calcul, les acceptances modales ne sont extraites qu'aux fréquences de résonance des modes considérés. La matrice $\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega)$ utilisée pour l'étude numérique sur la maquette HB2 est dès lors simplifiée pour s'écrire :

$$\mathbf{S}^{\text{proj}}(\omega) \approx \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\Omega_1) \mathbf{Y}_1^{\text{m.c.}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\Omega_2) \mathbf{Y}_2^{\text{m.c.}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}T} \mathbf{S}(\Omega_{N_m}) \mathbf{Y}_{N_m}^{\text{m.c.}} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

En d'autres termes, l'excitation aléatoire multipoints considérée dans l'étude numérique de la maquette HB2 est volontairement sous-estimée aux fréquences situées loin des fréquences de résonance des modes de vibration présents sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz. Le but de l'étude numérique est de proposer un modèle qui représente le phénomène non-linéaire observé expérimentalement et ce phénomène est visualisé uniquement aux fréquences de résonance des modes de vibration de la maquette HB2.

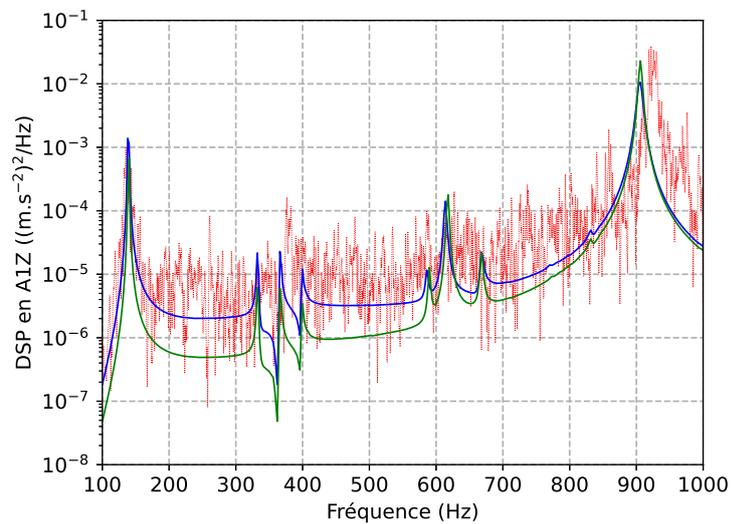


FIGURE 5.9 – Comparaison des résultats numériques avec les mesures brutes (rouge) au niveau de l'accéléromètre A1 suivant la direction Z. Pour les méthodes numériques, le bruit diffus simulé peut être définie sous ABAQUS sans considérer de volume d'air (vert) ou peut être définie sous Wave6 en considérant le volume d'air externe (bleu).

5.7 Simulation vibratoire non-linéaire à une excitation acoustique

Dans cette partie, les résultats issus de la simulation sont comparés aux résultats expérimentaux de la campagne d'essais concernant la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » sollicitée par une excitation acoustique. Les mesures sont données et analysées dans la partie 4.5 du chapitre 4. Cette comparaison est réalisée sur l'ensemble des accéléromètres choisis pour la présentation des mesures et présents à différentes localisations de la structure. L'excitation acoustique numérique correspond à une excitation aléatoire multipoints modélisée par une projection sur les 56 modes de vibration de la structure dans la plage fréquentielle d'intérêt [100 – 1000] Hz, comme explicité dans la partie 5.6. Le paramètre du modèle de frottement utilisé pour réaliser ce jeu de simulations est le même pour tous les niveaux d'excitation : $F_{\text{Coulomb}, \theta} = 0.05 \text{ N}$. Afin d'apprécier l'ordre de grandeur de ce chiffre, un calcul statique avec déplacement imposé sur une lame métallique isolée est réalisé sous ABAQUS. La force radiale appliquée sur une lame est estimée à 0.1 N. L'ordre de grandeur du seuil de Coulomb paraît ainsi raisonnable.

Avant de présenter les résultats numériques, il est bon de rappeler que les résultats issus de la simulation sont traités avant d'être comparés aux mesures. En effet, du fait des résonances acoustiques (voir chapitre 4), un traitement des mesures brutes est nécessaire pour la visualisation des phénomènes vibratoires non-linéaires. Ce traitement consiste à calculer le rapport de la valeur efficace d'accélération sur la valeur efficace de pression par bande de fréquences. Chaque bande de fréquences considérée dans ces travaux de thèse est une bande en 48ème d'octave le long de la plage fréquentielle [100 – 1000] Hz.

Dans un premier temps, les résultats numériques sont analysés seuls afin d'identifier la signature vibratoire non-linéaire numérique associée au modèle de frottement choisi dans la partie 5.4. Puis, dans un second temps, ces résultats sont comparés aux mesures de la campagne expérimentale réalisée avec une excitation acoustique. Cette comparaison se fait à travers une superposition graphique des résultats expérimentaux et numériques traités par bandes d'octave. La comparaison des coefficients de dissipation numériques et expérimentaux par niveau acoustique permet également de conclure sur la comparaison essais-calculs de cette étude. Pour rappel, ces coefficients sont introduits au chapitre 4 pour caractériser le phénomène non-linéaire observé expérimentalement.

5.7.1 Étude de la signature vibratoire non-linéaire numérique

Le premier accéléromètre de l'étude est l'accéléromètre A1 situé sur le nez de l'enveloppe triconique de la maquette HB2. Les résultats issus de la simulation numérique sont donnés sur la figure 5.10 pour les différents niveaux acoustiques. Cette figure présente les résultats suivant les trois axes globaux X, Y et Z de la maquette HB2. Suivant l'axe Z global de la maquette, il est possible d'observer sur les figures 5.10(e) et 5.10(f) que les courbes issues de la simulation numérique sont confondues entre 300 Hz et 850 Hz, où certaines résonances sont représentées. Il y a ainsi trois résonances entre 300 Hz et 400 Hz et trois résonances entre 580 Hz et 700 Hz, elles correspondent à des modes de vibration obtenus par la simulation. Aucun phénomène vibratoire non-linéaire n'est observable aux fréquences respectives de ces

modes. Cependant, concernant les modes transverses de la maquette HB2 situés respectivement dans les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz, une distinction des courbes en fonction du niveau acoustique est observée numériquement, ce qui est représentatif d'une signature vibratoire non-linéaire. Il s'agit de la même signature vibratoire non-linéaire que celle observée expérimentalement : il y a une diminution de l'amplitude et une diminution de la fréquence de résonance en fonction du niveau acoustique. Ce phénomène est très bien représenté pour le premier mode transverse au niveau de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Z global. Suivant l'axe Y global, il est possible d'observer sur les figures 5.10(c) et 5.10(d) que la signature vibratoire est très proche de celle analysée suivant l'axe Z global. La différence entre les deux axes réside dans le fait que la signature non-linéaire est beaucoup plus marquée pour le premier mode transverse suivant l'axe Y que celle observée suivant l'axe Z. En effet, le mode transverse est complètement atténué pour le niveau acoustique de 130 dB. À l'opposé, le deuxième mode transverse situé sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz ne voit ni son amplitude de résonance ni sa fréquence de résonance fortement modifiées par le niveau acoustique : la signature non-linéaire suivant cette direction n'est pas bien représentée numériquement pour ce mode de vibration. Suivant l'axe X global, il est possible d'observer sur les figures 5.10(a) et 5.10(b) la même signature vibratoire que celles analysées suivant les axes Y et Z. Le niveau d'accélération simulé suivant l'axe X est toutefois beaucoup plus faible que le niveau d'accélération simulée pour les autres axes. Toutefois, la même signature vibratoire non-linéaire est observée sur les modes transverses de la maquette HB2, mais également sur d'autres modes de vibration intermédiaires, notamment pour les modes situés à 500 Hz et à environ 710 Hz pour lesquels l'atténuation de la résonance est très marquée en fonction du niveau acoustique. Numériquement, ces modes de vibration correspondent à des modes d'enveloppe, il est ainsi cohérent d'observer un tel phénomène pour un nœud situé sur l'enveloppe de la structure. Une confrontation des résultats simulés avec les mesures pour l'accéléromètre A1 est donnée ci-après dans la partie 5.7.2.

Le deuxième accéléromètre de l'étude est l'accéléromètre A4 situé sur le centre du fond de la maquette HB2. Les résultats issus de la simulation numérique sont donnés sur la figure 5.11 pour les différents niveaux acoustiques. Cette figure présente les résultats suivant les trois axes globaux X, Y et Z de la maquette HB2. L'analyse des résultats numériques pour les axes Y et Z est similaire à celle réalisée pour l'accéléromètre A1 suivant les mêmes axes : il n'y a globalement aucune distinction entre les courbes en fonction du niveau acoustique sur une large partie de la plage fréquentielle et ainsi il n'y a aucune signature non-linéaire marquée par la simulation numérique entre 300 Hz et 800 Hz. Toutefois, le même phénomène vibratoire non-linéaire est observé sur les modes transverses, c'est-à-dire qu'il y a une diminution de l'amplitude de résonance et une diminution de la fréquence de résonance en fonction du niveau acoustique. Ces phénomènes, notamment la diminution de la fréquence de résonance, sont très marqués pour le premier mode transverse. De même que pour l'accéléromètre A1 suivant l'axe Y, l'atténuation du mode transverse pour l'accéléromètre A4 suivant l'axe Y est totale. Enfin, les résultats numériques suivant l'axe X, donnés par les figures 5.11(a) et 5.11(b), n'apportent aucune information importante sur le comportement vibratoire de la maquette puisque seulement deux résonances, dont le premier mode de fond à 400 Hz, sont présentes. Aucun phénomène vibratoire non-linéaire n'est réellement observé suivant cet axe. Une confrontation des résultats simulés avec les

mesures pour l'accéléromètre A4 est donnée ci-après dans la partie 5.7.2.

Le troisième accéléromètre de l'étude est l'accéléromètre A7 situé au sommet du colis interne de la maquette HB2. Les résultats issus de la simulation numérique sont donnés sur la figure 5.12 pour les différents niveaux acoustiques. Cette figure présente les résultats suivant les trois axes globaux X, Y et Z de la maquette HB2. L'analyse des résultats numériques suivant les axes Y et Z est identique à celle réalisée pour les résultats numériques pour l'accéléromètre A1 suivant les mêmes axes. Il est possible d'observer une signature vibratoire non-linéaire suivant les trois axes pour les modes transverses de la maquette HB2, et cela notamment pour le premier mode situé à 139 Hz. D'autres résonances sont marquées entre 300 Hz et 800 Hz et font intervenir les autres modes de vibration issus de l'analyse modale numérique réalisée sous ABAQUS mais aucun phénomène vibratoire non-linéaire n'est observé sur cette partie de la plage fréquentielle. Toutefois, une résonance à 830 Hz est observée sur les figures 5.12(c) et 5.12(d), cette résonance voit son amplitude complètement atténuée au fur et à mesure que le niveau acoustique simulé augmente. Ce mode est très marqué au sommet du colis interne de la maquette HB2 par rapport à la résonance observée sur les figures 5.10(c) et 5.10(d) pour l'accéléromètre A1 et sur les figures 5.11(c) et 5.11(d) pour l'accéléromètre A4, cela est cohérent avec la déformée modale observée numériquement : ce mode correspond au premier mode longitudinal, il n'est pas observable pour les nœuds situés sur l'enveloppe correspondant aux accéléromètres A1 et A4. Une confrontation des résultats simulés avec les mesures pour l'accéléromètre A7 est donnée ci-après dans la partie 5.7.2.

Le quatrième accéléromètre de l'étude est l'accéléromètre A10 situé sur la virole en bas du colis interne de la maquette HB2. Les résultats issus de la simulation numérique sont donnés sur la figure 5.13 pour les différents niveaux acoustiques. Cette figure présente les résultats suivant les trois axes globaux X, Y et Z de la maquette HB2. Ces résultats sont en cohérence avec les résultats numériques donnés pour l'accéléromètre A7. La signature non-linéaire est observée suivant les trois axes X, Y et Z pour les deux modes transverses de la maquette HB2 mais également pour le mode précédemment cité à 830 Hz. Ce mode est très présent suivant les axes Y et Z sur les figures 5.11(c), 5.11(d), 5.11(e) et 5.11(f). À l'opposé, le deuxième mode transverse situé vers 906 Hz est peu résonant suivant les axes Y et Z contrairement à l'axe X. Le mode transverse observé sous ABAQUS a en effet une amplitude modale relativement faible à l'emplacement du nœud associé à l'accéléromètre A10. Une confrontation des résultats simulés avec les mesures pour l'accéléromètre A10 est donnée ci-après dans la partie 5.7.2.

Enfin, le dernier accéléromètre de l'étude est l'accéléromètre A21 situé sur l'une des 23 lames de la maquette HB2. Les résultats issus de la simulation numérique sont donnés sur la figure 5.14 pour les différents niveaux acoustiques. Cette figure présente les résultats suivant l'axe global Z de la maquette HB2. Il est possible d'observer sur ce jeu de simulations que le phénomène vibratoire non-linéaire est très marqué pour le premier mode transverse de la structure : le mode originalement situé à 139 Hz pour une excitation acoustique de 90 dB est complètement atténué pour une excitation acoustique de 130 dB. Les modes de colis et certains modes de lames, situés entre 350 Hz et 850 Hz résonnent très fortement en fonction du niveau acoustique au niveau de l'accéléromètre A21.

Une signature non-linéaire est notamment observée à 500 Hz et à 710 Hz pour laquelle la résonance concernée est complètement atténuée à 130 dB. Ces fréquences correspondent à des modes couplés de lames et d'enveloppe d'après l'analyse modale numérique. Une confrontation des résultats simulés avec les mesures pour l'accéléromètre A21 est donnée ci-après dans la partie 5.7.2.

Pour résumer ces observations, les tableaux 5.3, 5.4 et 5.5 regroupent pour les accéléromètres étudiés l'ensemble des rapports des niveaux RMS de l'accélération simulée suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz (voir tableau 5.3), sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz (voir tableau 5.4) où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2 ainsi que sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz (voir tableau 5.5) où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2. Grâce aux données indiquées dans les tableaux 5.3, 5.4 et 5.5, une nouvelle grandeur est calculée : le coefficient de dissipation de niveau RMS par rapport au niveau de référence acoustique de 90 dB. Ce coefficient introduit au chapitre 4 se définit comme le rapport d'un niveau RMS sur une bande de fréquences (soit [100 – 1000] Hz, soit [100 – 200] Hz ou soit [800 – 1000] Hz) sur le niveau RMS pour le niveau acoustique de 90 dB de la même bande de fréquences. Ces coefficients de dissipation de niveau RMS, par axe global pour chaque accéléromètre, sont donnés dans les tableaux 5.6, 5.7 et 5.8. Les valeurs indiquées dans l'ensemble de ces tableaux appuient les résultats observés sur la réponse vibratoire simulée de la maquette HB2 pour ces différents accéléromètres en fonction du niveau acoustique. Il y a bien une dissipation de la structure au fur et à mesure que les lames sont sollicitées par le niveau acoustique. La signature non-linéaire de la maquette HB2 n'est représentée en simulation que suivant les axes Y et Z. Ces comportements vibratoires observés sur les différents accéléromètres A1, A4, A7, A10 et A21 quadrillant ainsi l'ensemble de la maquette HB2 se retrouvent sur tous les accéléromètres retenus pour la simulation (voir section 5.3) suivant leur localisation : sur l'enveloppe, sur le fond, sur le colis interne ou sur l'une des 23 lames de la maquette.

5.7.2 Confrontation avec les mesures et discussions

Maintenant que l'analyse des résultats numériques est donnée à différentes localisations de la maquette HB2, la confrontation avec les essais est réalisée. Pour ce faire, la superposition des résultats numériques et expérimentaux sur les différentes plages fréquentielles de l'étude est donnée ainsi que la comparaison des coefficients de dissipation numériques et expérimentaux. Les figures associées à cette confrontation sont les mêmes figures que celles utilisées pour l'analyse des résultats numériques.

Concernant la comparaison essais-calculs pour l'accéléromètre A1 situé sur le nez de l'enveloppe triconique de la maquette HB2, la superposition de l'ensemble des données est réalisée sur la figure 5.10. Premièrement, le niveau d'accélération simulé suivant les trois axes est bien inférieur à celui mesuré entre 200 Hz et 800 Hz. D'une part, cela est dû au choix du calcul des termes d'acceptances modales croisées pour l'excitation acoustique donné dans la partie 5.6.3. En effet, dans ces travaux de thèse, le choix a été d'insister sur la représentation du niveau acoustique pour les fréquences égales aux fréquences de résonance des modes issus de l'analyse modale numérique, tout en négligeant l'infor-

mation sur le niveau d'excitation pour les fréquences situées en dehors des fréquences de résonance pour des questions de temps de calcul. Cela explique le fait que la comparaison essais-calculs des niveaux d'accélération est bonne au niveau des fréquences de résonance des modes transverses de la maquette HB2 (voir figures 5.10(e) et 5.10(f)), mais également le fait que le niveau acoustique diminue fortement loin de ces résonances. C'est le cas notamment à partir de 180 Hz suivant les axes Y et Z pour l'accéléromètre A1. D'autre part, le choix du niveau acoustique simulé ne reste cependant pas le seul facteur puisque les résonances observées sur les résultats numériques entre 300 Hz et 400 Hz et celles observées entre 580 Hz et 700 Hz ne sont pas présentes expérimentalement pour l'accéléromètre A1, elles sont masquées par un niveau acoustique expérimental trop important et/ou par un couplage expérimental vibroacoustique inexpliqué dû au moyen d'essais utilisé. De même, la différence de niveau entre les courbes expérimentales et numériques suivant l'axe X est très importante sur les figures 5.10(a) et 5.10(b). La mesure suivant la direction X du capteur n'est pas exactement celle simulée suivant la direction X globale puisque l'accéléromètre A1 est placé sur le nez de l'enveloppe là où une légère courbure apparaît. Pour les autres capteurs, la différence de niveau entre les courbes numériques et expérimentales suivant la direction X est moins marquée. Les signatures vibratoires non-linéaires restent cependant cohérentes : il y a bien une diminution de l'amplitude de résonance et une diminution de la fréquence de résonance pour les modes transverses de la maquette HB2. Numériquement, il n'y a pas de différence de comportement vibratoire entre 90 dB et 100 dB, puis une dissipation très forte de l'amplitude de résonance à partir de 100 dB apparaît et enfin une diminution de la fréquence de résonance s'observe à partir du niveau acoustique de 120 dB. Expérimentalement, les deux phénomènes se réalisent simultanément en fonction du niveau acoustique ce qui n'est pas représenté numériquement. La signature numérique de ce phénomène suivant l'axe Y est également surestimée : le premier mode transverse est complètement atténué alors qu'il ne l'est pas expérimentalement. Cela peut être dû au choix du modèle de frottement employé, avec un coefficient de seuil de Coulomb trop faible. Cependant, la comparaison essais-calculs reste très satisfaisante quant à l'objectif de représentation du phénomène vibratoire non-linéaire sur le premier mode transverse suivant la direction Z. En effet, comme cela est donné dans le tableau 5.4 pour les données de l'accéléromètre A1 suivant l'axe Z, un coefficient de dissipation de 0.36 est atteint numériquement ce qui est exactement le même coefficient de dissipation de 0.36 donné dans la tableau 4.7 dans le chapitre 4. La comparaison des coefficients de dissipation numériques et expérimentaux apporte une nouvelle information sur la capacité du modèle à représenter la signature non-linéaire de la maquette HB2. Dans l'ensemble, cette confrontation essais-calculs pour l'accéléromètre A1 est satisfaisante.

Concernant la comparaison essais-calculs pour l'accéléromètre A4 situé sur le centre du fond de la maquette HB2, la superposition de l'ensemble des données est réalisée sur la figure 5.11. D'une part, le niveau acoustique simulé est, contrairement à l'accéléromètre A1, bien représenté puisque les niveaux d'accélération simulés suivant les trois axes globaux sont du même ordre de grandeur que les mesures, avec les mêmes tendances : une augmentation progressive de l'accélération à partir de 300 Hz. Suivant les axes Y et Z étudiés sur les figures 5.11(c), 5.11(d), 5.11(e) et 5.11(f), certaines résonances numériques ne sont pas présentes expérimentalement ce qui n'est pas expliqué. La représentation du phénomène vibratoire non-linéaire est très satisfaisante suivant l'axe Z pour le premier mode transverse

de la maquette, mais il est une nouvelle fois surestimé suivant la direction Y. Suivant l'axe X de la maquette, les résultats numériques donnés sur les figures 5.11(a), 5.11(b) ne donnent pas du tout une bonne représentation du comportement vibratoire observé expérimentalement. Une seule résonance principale y est représentée, elle est due au mode de vibration du fond de la maquette. L'écart entre les résultats numériques et expérimentaux suivant l'axe X pour cet accéléromètre est dû à la présence de résonances acoustiques particulièrement présentes sur le fond de la maquette, dont l'existence a été prouvée par des études acoustiques réalisées au CEA/CESTA en dehors de ces travaux de thèse. Cette confrontation essais-calculs pour l'accéléromètre A4 est également satisfaisante suivant l'axe X.

Concernant la comparaison essais-calculs pour les accéléromètres A7 et A10 situés de part et d'autre du colis interne de la maquette HB2, la superposition de l'ensemble des données est réalisée sur les figures 5.12 et 5.13. L'analyse et la comparaison des jeux de données sont également similaires aux confrontations essais-calculs pour les accéléromètres A1 et A4. Globalement, le phénomène vibratoire non-linéaire est bien représenté pour le premier mode transverse suivant la direction Z, il est surestimé pour le premier mode transverse suivant la direction Y et des résonances importantes obtenues par simulation sont absentes des résultats expérimentaux. La représentation du niveau acoustique est également très satisfaisante : la tendance suivie par les niveaux d'accélération simulée suivant les trois axes globaux est la même que celle observée expérimentalement. Le chemin expérimental suivi par la signature vibratoire non-linéaire n'est pas le même que le chemin numérique en fonction du niveau acoustique. Expérimentalement, la chute de l'amplitude ainsi que la diminution de la fréquence de résonance sont simultanées en fonction du niveau acoustique alors que numériquement, il est observé en premier lieu une chute de l'amplitude puis une diminution de la fréquence de résonance à partir du niveau acoustique de 120 dB. Concernant le second mode transverse, les phénomènes non-linéaires numériques sont beaucoup moins prononcés que ceux observés expérimentalement, cela se confirme dans le tableau 5.8 où les coefficients de dissipation calculés sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz évoluent très peu en fonction du niveau. Pourtant, la comparaison des coefficients de dissipation expérimentaux et numériques sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz, où se situe le premier mode transverse de la maquette, suivant l'axe Z est très satisfaisante. Pour l'accéléromètre A7, un coefficient de dissipation numérique de 0.44 est obtenu à 130 dB, très proche du coefficient de dissipation expérimental égal à 0.38. Pour l'accéléromètre A10, un coefficient de dissipation numérique de 0.47 est obtenu à 130 dB, très proche du coefficient de dissipation expérimental égal à 0.49. Ces confrontations essais-calculs pour les accéléromètres A7 et A10 sont ainsi satisfaisantes.

Concernant la comparaison essais-calculs pour l'accéléromètre A21 situé sur l'une des 23 lames de la maquette HB2, la superposition de l'ensemble des données est réalisée sur la figure 5.11. Contrairement à ce qui est analysé pour les autres accéléromètres de l'étude, le premier mode transverse suivant la direction Z pour l'accéléromètre A21 est complètement atténué à 130 dB. Le phénomène vibratoire est ainsi surestimé pour ce mode comme l'indiquent les coefficients de dissipation entre 100 Hz et 200 Hz dans le tableau 5.7. Deux autres modes de vibration, correspondant à des modes couplés de lames et d'enveloppe, situés numériquement à 500 Hz et à 710 Hz sont complètement atténués pour les résultats numériques et ils le sont également pour les résultats expérimentaux. En effet, les résonances

situées expérimentalement à 480 Hz et 720 Hz sont également complètement atténués à partir de 130 dB. Ce comportement vibratoire est ainsi très bien reproduit par la simulation et il ne concerne pas uniquement les modes transverses de la maquette HB2. Enfin, la comparaison essais-calculs se dégrade à partir de 750 Hz puisque les modes de lames résonnent très fortement dans les résultats de simulation mais sont peu présents expérimentalement. La physique acoustique, présente en essais avec la présence d'un espace entre chaque lame ainsi que la présence d'un espace creux laissé par la 24ème lame manquante, permet certainement d'atténuer le comportement vibratoire des lames à partir de 750 Hz ce qui n'est pas représenté par le choix de cette simulation numérique.

En conclusion, à la lumière des éléments présentés dans cette partie, la simulation vibratoire non-linéaire de la maquette HB2 sollicitée par une excitation acoustique est satisfaisante sur de nombreux points : il est possible de rendre compte d'un phénomène vibratoire non-linéaire à différentes localisations de la structure industrielle suivant différents degrés de liberté, notamment les degrés de liberté selon les axes Y et Z. Les résultats numériques présentés sont cohérents avec les essais avec notamment de très bonnes corrélations essais-calculs sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz où se situe le premier mode transverse de la structure HB2. Toutefois, certains autres résultats numériques ne sont pas en accord complet avec les mesures de la campagne d'essais réalisée. En particulier, l'ensemble des données suivant l'axe X n'est pas suffisamment corrélé aux essais et le phénomène vibratoire non-linéaire sur le deuxième mode transverse de la maquette n'est pas suffisamment représenté par rapport aux données expérimentales. Pour autant, l'ensemble des choix pris pour réaliser ce jeu de simulations, c'est-à-dire le choix du modèle de frottement donné dans la partie 5.4, le choix des degrés de liberté en translation selon la direction θ qui sont retenus pour introduire ces modèles non-linéaires ainsi que le choix du seuil de Coulomb, a permis de rendre compte d'un phénomène vibratoire non-linéaire complexe qui se retrouve sur plusieurs modes de vibration (à 139 Hz, 500 Hz, 710 Hz et 900 Hz) d'une structure industrielle. Ceci répond à l'un des objectifs de ces travaux de thèse qui était de proposer un modèle « maîtrisé, juste et suffisant » permettant de reproduire certains phénomènes non-linéaires. La satisfaction globale sur les résultats de simulation et les confrontations essais-calculs associées provient ainsi d'une part de la très bonne corrélation sur le niveau d'excitation simulée grâce à une modélisation originale d'une excitation aléatoire multipoints sur un nombre réduit de degrés de liberté, et d'autre part sur la représentation d'un phénomène vibratoire non-linéaire complexe sur une structure industrielle en fonction du niveau de cette excitation simulée.

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ((m.s ⁻²)/Pa)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.129	0.139	0.129	0.128	0.127
A1Y	1.404	1.405	1.326	1.212	1.152
A1Z	1.418	1.415	1.319	1.177	1.299
A4X	2.044	2.044	2.041	2.041	2.042
A4Y	0.603	0.602	0.589	0.566	0.560
A4Z	0.651	0.652	0.634	0.596	0.616
A7X	0.037	0.039	0.038	0.037	0.037
A7Y	0.154	0.153	0.149	0.157	0.156
A7Z	0.165	0.166	0.162	0.164	0.173
A10X	0.345	0.345	0.337	0.327	0.328
A10Y	0.249	0.248	0.222	0.213	0.227
A10Z	0.263	0.262	0.249	0.231	0.233
A21Z	0.695	0.702	0.678	0.682	0.652

TABLEAU 5.3 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération simulée à l'emplacement d'un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz.

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ((m.s ⁻²)/Pa)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.007	0.007	0.002	0.002	0.003
A1Y	0.416	0.414	0.154	0.060	0.037
A1Z	0.435	0.432	0.151	0.092	0.158
A4X	0.034	0.034	0.034	0.034	0.034
A4Y	0.013	0.013	0.005	0.002	0.002
A4Z	0.013	0.013	0.005	0.003	0.004
A7X	0.003	0.003	0.001	0.001	0.001
A7Y	0.096	0.096	0.036	0.017	0.011
A7Z	0.101	0.100	0.036	0.026	0.044
A10X	0.021	0.021	0.008	0.003	0.002
A10Y	0.019	0.019	0.007	0.003	0.002
A10Z	0.023	0.023	0.008	0.006	0.011
A21Z	0.103	0.102	0.039	0.018	0.014

TABLEAU 5.4 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération simulée à l'emplacement d'un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2.

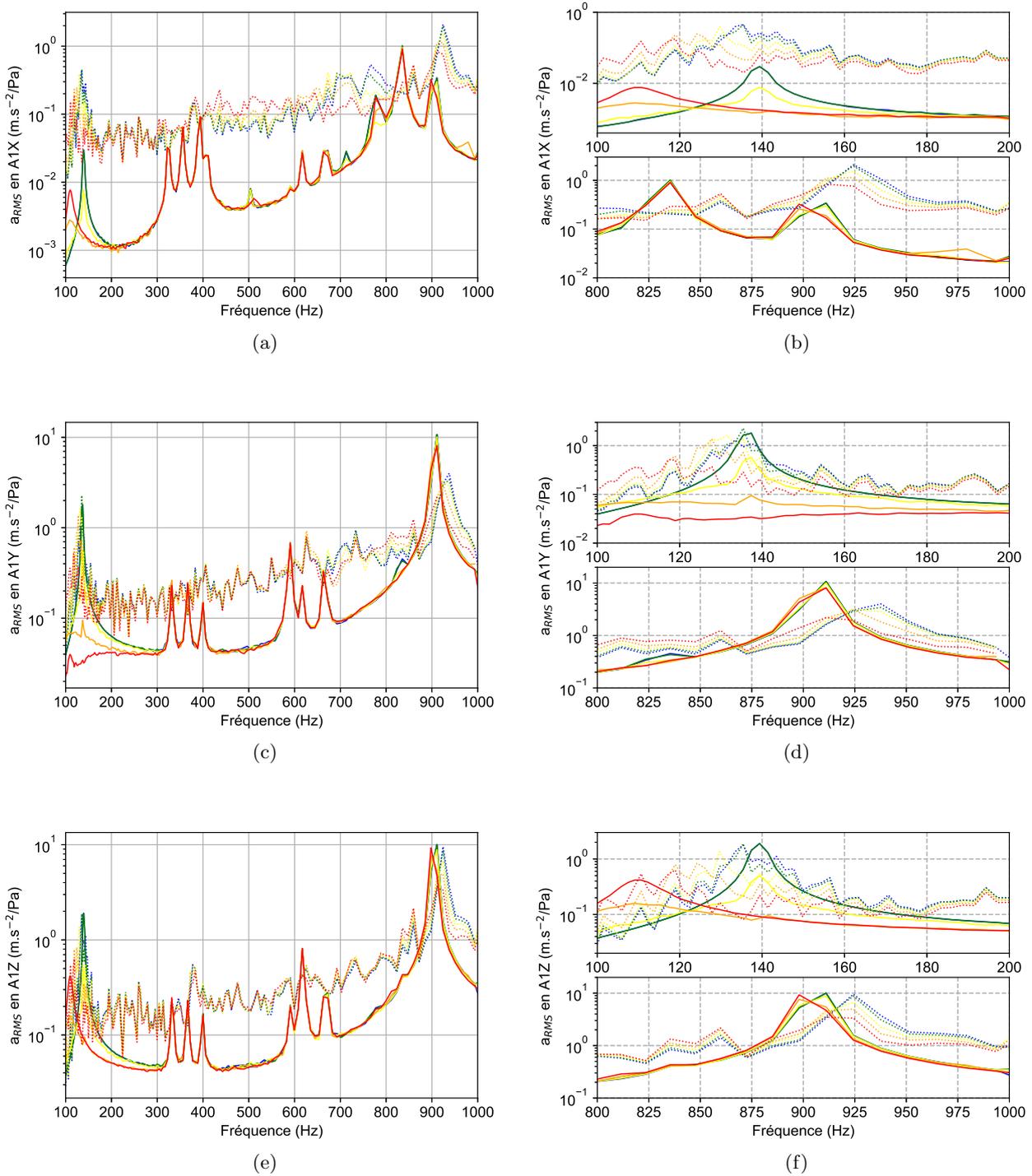


FIGURE 5.10 – Simulations numériques (traits pleins) et mesures expérimentales (pointillés) de l'accéléromètre A1 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

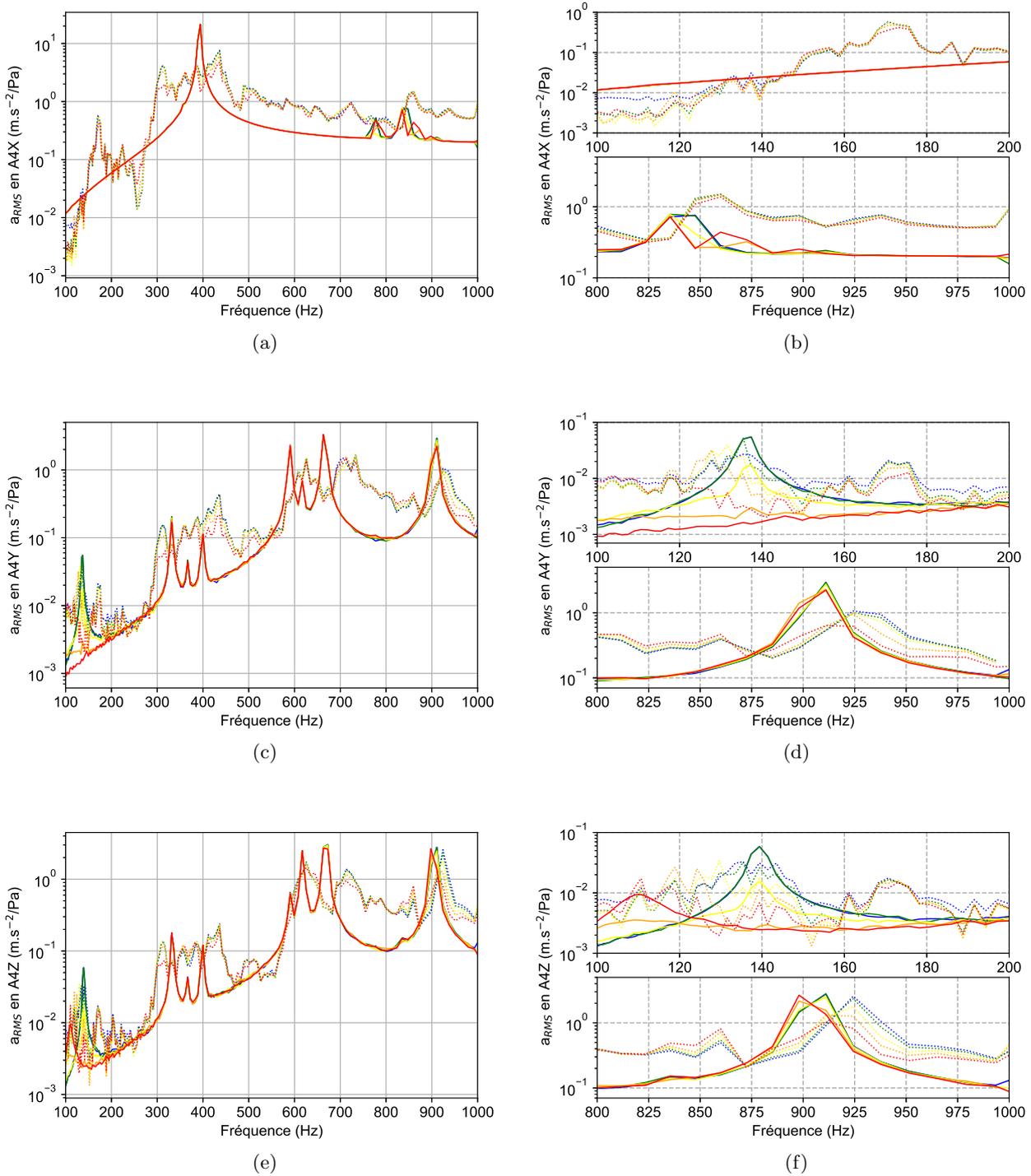


FIGURE 5.11 – Simulations numériques (traits pleins) et mesures expérimentales (pointillés) de l'accéléromètre A4 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

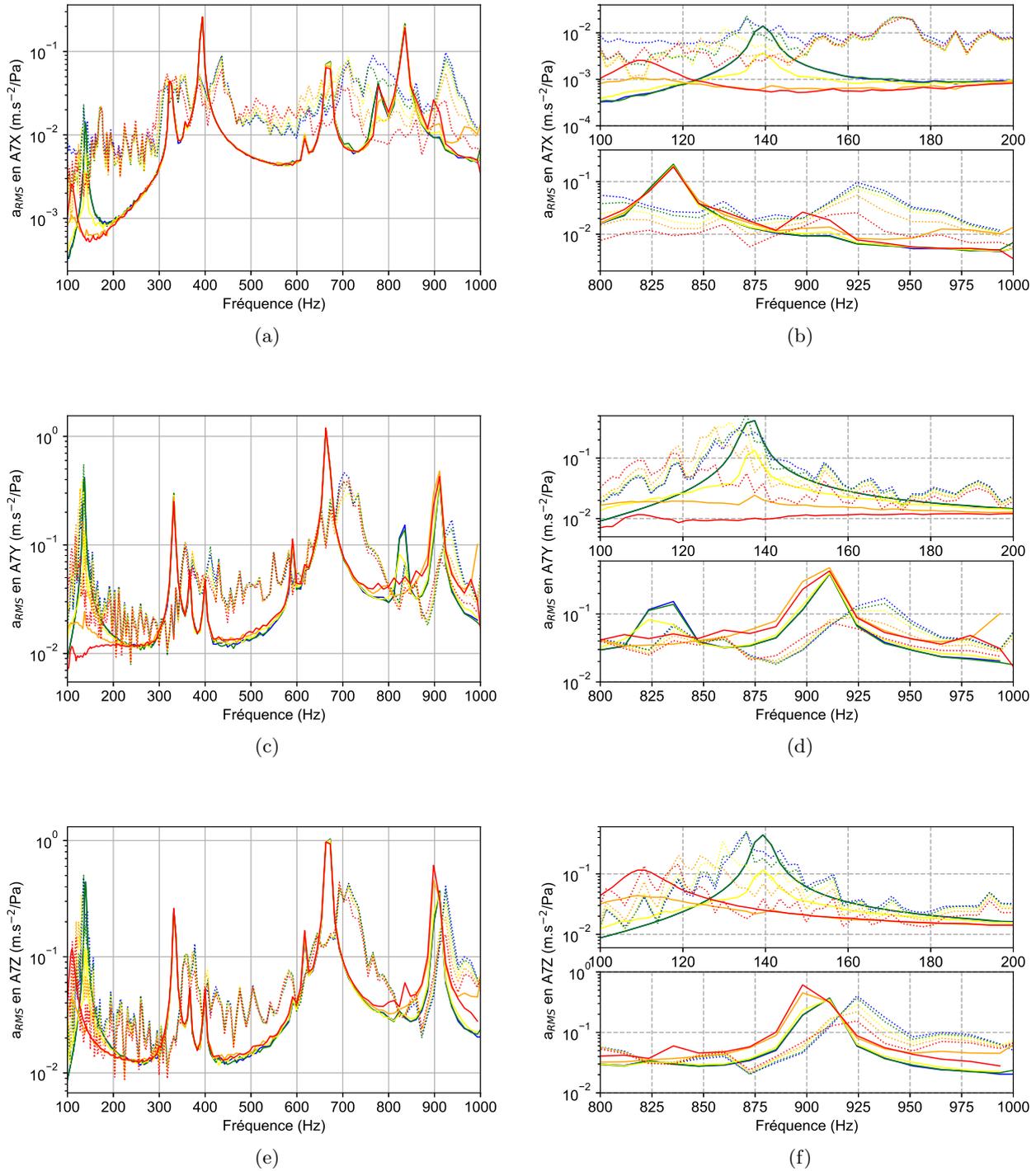


FIGURE 5.12 – Simulations numériques (traits pleins) et mesures expérimentales (pointillés) de l'accéléromètre A7 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

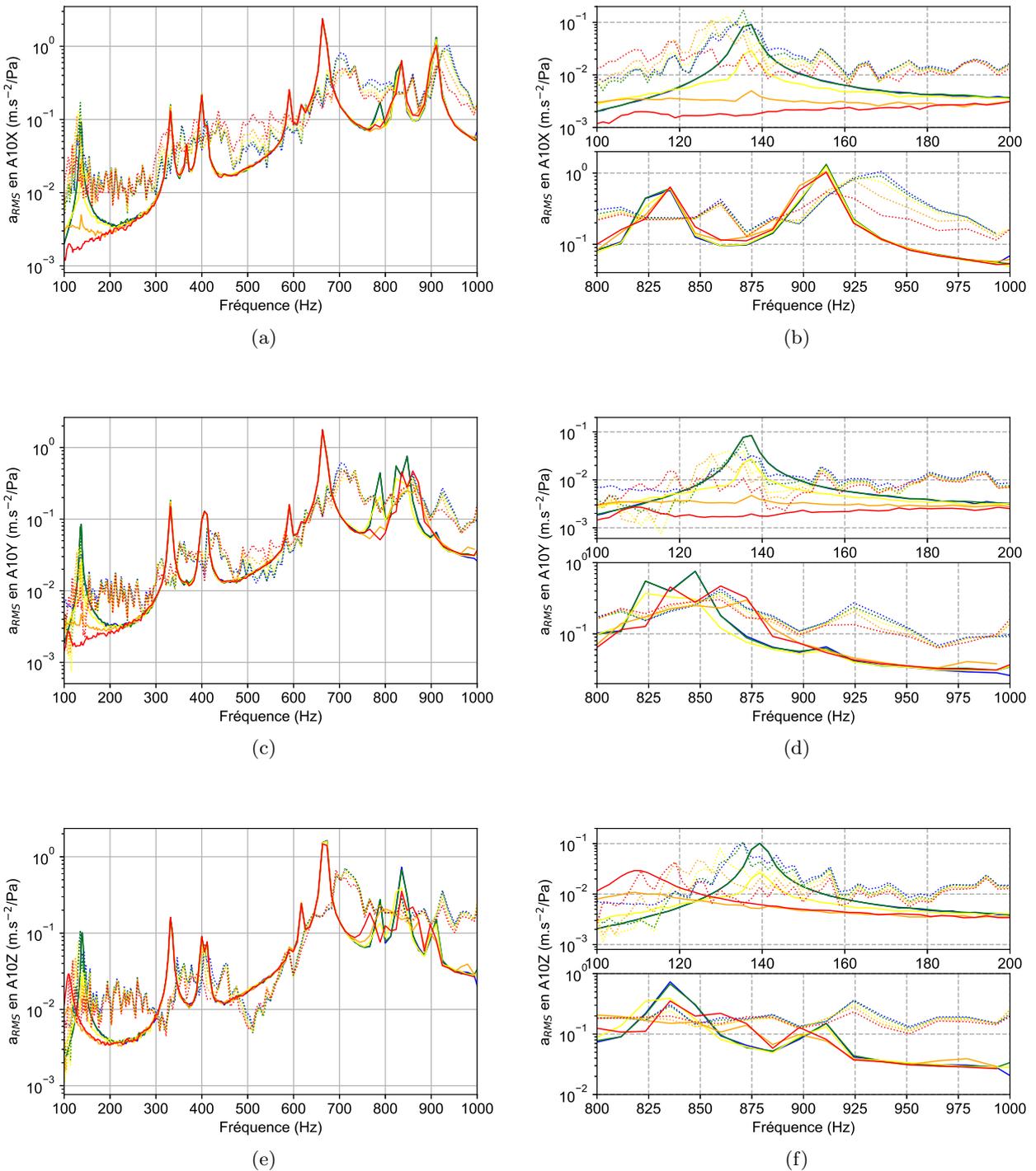


FIGURE 5.13 – Simulations numériques (traits pleins) et mesures expérimentales (pointillés) de l'accéléromètre A10 traitées sur une bande en 48ème d'octave : (a-b) suivant l'axe X global, (c-d) suivant l'axe Y global et (e-f) suivant l'axe Z global - (b-d-f) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

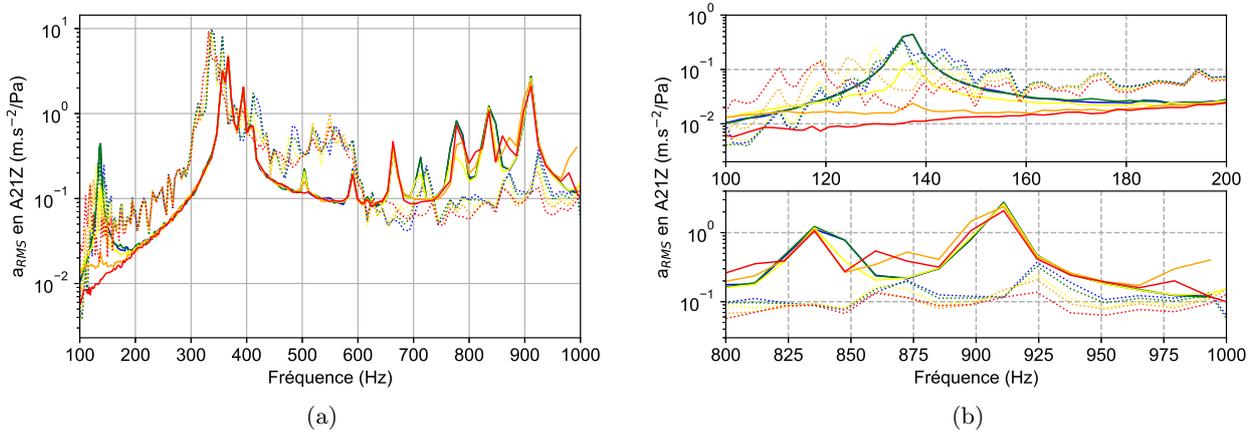


FIGURE 5.14 – (a) Simulations numériques (traits pleins) et mesures expérimentales (pointillés) de l'accéléromètre A21 suivant l'axe Z global traitées sur une bande en 48ème d'octave - (b) Zooms sur les bandes de fréquences [100 – 200] Hz et [800 – 1000] Hz. L'excitation acoustique est un bruit blanc correspondant au niveau acoustique suivant : 90 dB (bleu), 100 dB (vert), 110 dB (jaune), 120 dB (orange), 130 dB (rouge).

Accéléromètre	Rapport des niveaux RMS ($(m.s^{-2})/Pa$)				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	0.266	0.289	0.272	0.266	0.262
A1Y	2.952	2.958	2.802	2.560	2.433
A1Z	2.981	2.975	2.785	2.482	2.741
A4X	0.335	0.343	0.306	0.292	0.307
A4Y	0.805	0.808	0.768	0.713	0.672
A4Z	0.831	0.828	0.778	0.710	0.787
A7X	0.052	0.058	0.054	0.054	0.053
A7Y	0.119	0.117	0.116	0.155	0.134
A7Z	0.111	0.111	0.113	0.149	0.183
A10X	0.407	0.413	0.390	0.376	0.360
A10Y	0.260	0.259	0.155	0.145	0.202
A10Z	0.212	0.200	0.150	0.109	0.135
A21Z	0.839	0.850	0.799	0.829	0.713

TABLEAU 5.5 – Valeurs des rapports des niveaux RMS de l'accélération simulée à l'emplacement d'un accéléromètre suivant un axe global sur le niveau RMS du niveau acoustique en fonction du niveau acoustique global. Les niveaux RMS sont calculés sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	1.08	1.00	0.99	0.98
A1Y	1.0	1.00	0.94	0.86	0.82
A1Z	1.0	0.99	0.93	0.83	0.92
A4X	1.0	1.00	0.99	0.99	0.99
A4Y	1.0	0.99	0.98	0.94	0.93
A4Z	1.0	1.00	0.97	0.92	0.95
A7X	1.0	1.04	1.00	0.99	0.99
A7Y	1.0	0.99	0.97	1.02	1.01
A7Z	1.0	1.00	0.98	0.99	1.05
A10X	1.0	1.00	0.98	0.95	0.95
A10Y	1.0	0.99	0.89	0.86	0.91
A10Z	1.0	0.99	0.95	0.88	0.88
A21Z	1.0	1.01	0.98	0.98	0.94

TABLEAU 5.6 – Valeurs des coefficients de dissipation calculés à partir des accélérations simulées en fonction du niveau acoustique global. Ces coefficients sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 1000] Hz.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	0.99	0.35	0.25	0.43
A1Y	1.0	0.99	0.37	0.15	0.09
A1Z	1.0	0.99	0.35	0.21	0.36
A4X	1.0	1.00	1.00	0.99	1.00
A4Y	1.0	0.99	0.39	0.19	0.16
A4Z	1.0	0.99	0.36	0.22	0.30
A7X	1.0	0.99	0.37	0.23	0.32
A7Y	1.0	0.99	0.38	0.17	0.11
A7Z	1.0	0.99	0.36	0.25	0.44
A10X	1.0	0.99	0.37	0.15	0.10
A10Y	1.0	0.99	0.37	0.17	0.11
A10Z	1.0	0.99	0.36	0.26	0.47
A21Z	1.0	0.99	0.38	0.17	0.14

TABLEAU 5.7 – Valeurs des coefficients de dissipation calculés à partir des accélérations simulées en fonction du niveau acoustique global. Ces coefficients sont calculés sur la bande de fréquences [100 – 200] Hz où se situe le premier mode transverse double de la maquette HB2.

Accéléromètre	Coefficient de dissipation				
	90 dB	100 dB	110 dB	120 dB	130 dB
A1X	1.0	1.09	1.02	0.99	0.98
A1Y	1.0	1.00	0.95	0.87	0.82
A1Z	1.0	0.99	0.93	0.83	0.92
A4X	1.0	1.02	0.91	0.87	0.91
A4Y	1.0	1.00	0.95	0.89	0.83
A4Z	1.0	0.99	0.94	0.85	0.95
A7X	1.0	1.10	1.03	1.02	1.00
A7Y	1.0	0.98	0.97	1.30	1.13
A7Z	1.0	0.99	1.01	1.34	1.64
A10X	1.0	1.01	0.96	0.92	0.89
A10Y	1.0	0.99	0.60	0.56	0.78
A10Z	1.0	0.95	0.71	0.52	0.64
A21Z	1.0	1.01	0.95	0.98	0.85

TABLEAU 5.8 – Valeurs des coefficients de dissipation calculés à partir des accélérations simulées en fonction du niveau acoustique global. Ces coefficients sont calculés sur la bande de fréquences [800 – 1000] Hz où se situe le deuxième mode transverse de la maquette HB2.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude numérique sur la structure industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) est donnée. La première étape est la validation du modèle éléments finis de cette maquette. En effet, la modélisation des différents sous-ensembles composant l'assemblage ainsi que la modélisation des connecteurs liant ces sous-ensembles sont validées par une comparaison des analyses modales expérimentale et numérique. Une bonne corrélation essais-calculs a été obtenue par le calcul du critère de MAC entre les différents modes propres numériques et expérimentaux identifiés. À l'issue de ce travail, la réponse numérique du modèle éléments finis linéaire doit être parfaitement en accord avec la réponse expérimentale de la structure à faible niveau d'excitation. Pour ce faire, la campagne d'essais réalisée avec l'excitateur électrodynamique seul placé en suspension (voir chapitre 4) sert de référence. Cet objectif préliminaire de construction d'un modèle éléments finis de grande envergure est validé également.

Une fois ce modèle validé, ce dernier est réduit selon la méthode de réduction hybride présente dans le code éléments finis ABAQUS et présentée dans le chapitre 1. Désormais, les nœuds retenus sont les nœuds les plus proches géométriquement des accéléromètres (ces nœuds servent à la comparaison essais-calculs des deux campagnes d'essais), les 23 nœuds situés sur l'enveloppe en face chaque lame métallique de la maquette HB2 et les nœuds fictifs représentant les 56 modes de vibration issus de l'analyse modale numérique réalisée sur la plage de fréquences [100 – 1000] Hz. La simulation se fait ainsi sur un modèle réduit composé de 136 degrés de liberté alors que le modèle éléments finis complet se compose de 515 880 degrés de liberté.

Ensuite, les modèles de liaison de contact entre les lames et l'enveloppe externe sont remplacés par des modèles non-linéaires de Coulomb. Chaque modèle de liaison est associé à un unique paramètre de recalage : la force seuil de Coulomb. Celle-ci est considérée unique pour l'ensemble de la couronne de lames, aucune question de désaccordage n'est abordée dans ce manuscrit de thèse. De même, le modèle non-linéaire de Coulomb élastique n'est introduit que pour le degré de liberté en translation selon la direction θ de chaque repère cylindrique local placé sur chaque lame de la couronne. Dès lors, 23 degrés de liberté non-linéaires sont étudiés dans ce chapitre.

Une fois les vecteurs d'application des efforts non-linéaires correctement introduits, une réécriture du problème non-linéaire du modèle éléments finis réduit est effectuée. En effet, une procédure de condensation permet alors de réduire la taille du problème non-linéaire à résoudre : il correspond au nombre 23 de liaisons non-linéaires introduites dans le problème. Les degrés de liberté associés aux autres nœuds du modèle condensé (c'est-à-dire les accéléromètres et les modes propres), sont retirés du problème non-linéaire selon la procédure explicitée dans ce chapitre. Ainsi, le calcul numérique n'est pas impacté par le nombre conséquent d'accéléromètres et de modes de vibration identifiés sur la plage de fréquences [100 – 1000] Hz. Le problème non-linéaire est résolu avec la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires.

L'une des originalités majeures de ces travaux de thèse est la modélisation d'une excitation aléatoire multipoints, à savoir une excitation acoustique, sur un modèle éléments finis réduit. Avec cette modélisation, l'information de l'excitation aléatoire multipoints, et notamment sa fonction de corrélation, sur l'ensemble de la surface extérieure du modèle éléments finis complet se retrouve sur l'ensemble des degrés de liberté du modèle réduit. Pour cela, la matrice de densité spectrale est projetée sur la base des modes de vibration du modèle éléments finis complet. Ainsi, le nombre de termes d'excitation est considérablement réduit puisqu'il ne concerne que les 56 modes de vibration identifiés sur la plage de fréquences [100 – 1000] Hz, améliorant alors le coût du calcul numérique. Des efforts aléatoires, modaux et corrélés, sont de ce fait modélisés et calculés à partir de l'information de l'excitation aléatoire multipoints. Une étude préliminaire, précédant la résolution du problème non-linéaire, est le calcul des termes d'acceptances modales définies dans ce chapitre. Le logiciel de simulation vibroacoustique Wave6 est retenu dans ces travaux de thèse afin de prendre en compte l'effet du volume d'air situé à proximité de la maquette HB2. Une validation de la modélisation de cette excitation aléatoire multipoints, tout en analysant les défauts et les avantages du calcul des termes d'acceptances modales, est fournie dans ce chapitre.

La comparaison essais-calculs présentée dans ce chapitre concerne la campagne d'essais réalisée avec les batteries de haut-parleurs situées de part et d'autre de la chambre acoustique. La comparaison de cette seconde campagne d'essais est très satisfaisante. Les calculs montrent pour l'ensemble des nœuds retenus (correspondant aux accéléromètres) le phénomène non-linéaire complet observé pour plusieurs modes de vibration de la maquette HB2 : il y a bien une diminution de la fréquence de résonance et une diminution de l'amplitude de résonance avec l'augmentation du niveau acoustique. Ces deux phénomènes non-linéaires ne sont pas représentés exactement de la même manière selon le niveau acoustique. Numériquement, il y a d'abord une dissipation très forte de l'amplitude de résonance à partir de 100 dB puis une diminution de la fréquence de résonance à partir de 120 dB. Expérimentalement, les deux phénomènes se réalisent simultanément en fonction du niveau acoustique.

Ce dernier chapitre démontre la pertinence de la démarche de simulation vibratoire non-linéaire dans un contexte industriel. L'objectif de prédire la réponse non-linéaire d'une structure industrielle sous excitation acoustique a amené à s'intéresser à la question de la modélisation de l'excitation aléatoire multipoints sur un modèle réduit ce qui constitue un apport significatif de ces travaux. Une réponse concrète à la problématique industrielle imposée par le CEA/CESTA a ainsi été apportée avec la simulation de réponses vibratoires non-linéaires d'un assemblage industriel soumis à une excitation aléatoire multipoints. La simulation permet dorénavant d'envisager l'utilisation de modèles éléments finis complets comportant des éléments non-linéaires dans des phases de prédiction et dimensionnement de système complexes à interfaces non-linéaires.

Conclusion

Ces travaux de thèse s'articulent autour de deux objets d'étude : la poutre bi-encastree CEA et la maquette industrielle « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2). Les méthodes et développements numériques sont validés par une comparaison essais-calculs pour chaque objet d'étude.

Bilan

Les travaux sur la poutre bi-encastree CEA ont permis de mettre en place un dispositif expérimental original pour l'étude de la réponse vibratoire non-linéaire de cette structure académique en fonction de la corrélation entre deux efforts aléatoires. Avant cela, une analyse modale expérimentale au marteau de choc a été présentée afin d'identifier la signature linéaire (fréquences propres, amortissements modaux et déformées modales) du système. Par l'intermédiaire de deux excitateurs électro-dynamiques montés en suspension, le système Multiple-Input-Multiple-Output (MIMO) Random du logiciel Simcenter Testlab de Siemens a été utilisé afin de solliciter la poutre avec une excitation aléatoire multipoints. La signature non-linéaire de la poutre en fonction des quatre types de corrélation entre les deux excitations temporelles a été observée et étudiée expérimentalement ce qui constitue une première contribution originale de ces travaux de thèse.

L'étude numérique proposée ensuite sur cette poutre bi-encastree est également originale sur certains points. Un modèle analytique d'une poutre bi-encastree a été développé en se rapprochant au plus près de la configuration expérimentale de la poutre bi-encastree CEA : conditions aux limites non-idéales, introduction d'une prétension statique, ajout de masses additionnelles correspondant à la présence des accéléromètres sur la partie utile de la poutre. Cette étude propose également une modélisation de l'effort aléatoire bi-points adaptée à la méthode de l'équilibrage harmonique étendue aux efforts aléatoires. Les résultats numériques comparés aux mesures expérimentales sont ainsi très satisfaisants ce qui valide la démarche proposée dans ces travaux de thèse pour ce démonstrateur académique.

Le cœur de ces travaux de thèse porte ensuite sur l'analyse expérimentale et numérique d'un assemblage industriel. La maquette « Hypervelocity Balistic 2 » (HB2) est conçue et réalisée pour exhiber un comportement vibratoire non-linéaire provoqué par des phénomènes de frottement obtenus grâce à 23 lames métalliques agissant comme des liaisons frottantes. Autour de cet assemblage industriel,

une démarche complète d'ingénieur a été mise en place.

D'une part, l'étude expérimentale s'appuie sur une analyse modale réalisée grâce à une union des données capteurs et des données issues de l'utilisation de la vibrométrie laser à balayage 3D. Puis, deux campagnes d'essais ont été réalisées au cours de ces travaux de thèse afin d'observer la signature non-linéaire de la maquette HB2 en fonction de deux types d'excitation : une excitation mécanique aléatoire monopoint et une excitation acoustique réalisée dans une chambre acoustique présente au CEA/CESTA via l'utilisation de batteries de haut-parleurs. L'étude expérimentale basée sur l'observation des accélérations en plusieurs points de l'assemblage montre les effets importants des liaisons non-linéaires pour ces deux types d'excitation.

D'autre part, l'étude numérique de la maquette HB2 passe par la description du modèle éléments finis de cet assemblage industriel. La validation de ce modèle éléments finis est réalisée grâce à une comparaison des analyses modales numérique et expérimentale. Afin d'étudier la signature vibratoire de ce modèle, une première étape de réduction est effectuée afin de conserver uniquement les degrés de liberté nécessaires à l'observation des résultats et à l'introduction d'efforts non-linéaires dans le problème vibratoire. Pour ce faire, des modèles non-linéaires de Coulomb sont introduits au niveau des liaisons frottantes. Enfin, la méthode de l'équilibrage harmonique adaptée aux excitations aléatoires est employée afin d'observer la signature non-linéaire de la maquette HB2 pour les deux types d'excitation étudiés lors des campagnes d'essais. Pour cela, l'originalité de ces travaux de thèse s'appuie sur une modélisation de l'excitation aléatoire multipoints réduit à un nombre restreint de vecteurs d'excitation. Adaptée au contexte industriel, cette modélisation est validée sur la base d'une comparaison avec le modèle éléments finis complet. Enfin, les résultats de la simulation numérique comparés aux mesures expérimentales sont une nouvelle fois très satisfaisants ce qui valide la démarche proposée dans ces travaux de thèse pour ce démonstrateur industriel.

La pertinence de la démarche d'étude proposée dans ce manuscrit de thèse a été prouvée par de très bonnes corrélations essais-calculs à la fois sur une structure académique et sur un objet industriel. À cet égard, ces travaux de thèse abordent plus particulièrement des développements sur :

- une compréhension expérimentale des phénomènes non-linéaires observables pour des systèmes sous excitations aléatoires multipoints,
- une modélisation originale de l'excitation aléatoire multipoints,
- des simulations et prédictions de réponses vibratoires non-linéaires à des excitations aléatoires multipoints.

En conclusion, l'apport de ces travaux de thèse est une démarche industrielle complète alliant expérimentation, modélisation et simulation numérique, ce qui permet la prise en compte de modèles non-linéaires de liaison ou de non-linéarités géométriques pour des excitations aléatoires multipoints. Les très bonnes corrélations essais-calculs obtenues sur les deux maquettes d'essais étudiées prouvent la pertinence de la démarche proposée. L'ensemble des résultats démontrent par ailleurs la nécessité d'une compréhension et prise en compte des phénomènes non-linéaires afin de mieux appréhender et

prédire les comportements vibratoires dans un contexte industriel.

Perspectives

Ces travaux de thèse peuvent ouvrir sur diverses perspectives d'étude pouvant être académiques et/ou industrielles.

D'abord, la caractérisation du frottement pourrait être travaillée de sorte que la loi de frottement non-linéaire implémentée soit physiquement motivée par rapport au phénomène observé pour chaque liaison frottante du système mécanique étudié. Pour cela, une description claire et précise du comportement vibratoire de chaque liaison doit être connue, grâce à l'utilisation par exemple d'un vibromètre laser à balayage 3D observant le phénomène. D'autres modèles de frottement existent déjà dans la littérature (Dahl, LuGre, etc.) par rapport au modèle de Coulomb utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse, mais ces modèles peuvent s'avérer plus compliqués à mettre en place dans un contexte industriel notamment lorsque le phénomène frottant est très localisé et réparti dans différentes zones. De même, le nombre de degrés de liberté non-linéaires peut être augmenté avec la prise en compte de la translation selon la direction Z dans le repère local de chaque lame mais cela alourdirait le coût du calcul numérique. La question fondamentale est de trouver un équilibre entre une modélisation juste nécessaire et maîtrisée, le coût numérique et l'implémentation voire l'identification des paramètres associés à des modèles de frottement plus complexes.

De plus, l'implémentation de la modélisation originale de l'excitation aléatoire multipoints sur un nombre réduit de points pourrait être optimisée. Le calcul des termes d'acceptances modales, décrit au chapitre 5, peut en effet être automatisé sur les logiciels éléments finis WAVE6 et/ou ABAQUS, suivant le choix de la fonction de corrélation décrivant l'excitation aléatoire multipoints, via des scripts internes afin de gagner en temps de calcul. Il serait notamment possible d'écrire ces routines sur l'ensemble de la plage fréquentielle d'intérêt pour la structure industrielle considérée. Ainsi, la perte d'information observée à des fréquences situées loin des fréquences de résonance n'en serait plus une et la simulation de réponses vibratoires non-linéaires des structures industrielles étudiées au CEA/CESTA serait désormais complète pour toute excitation aléatoire multipoints.

Enfin, l'étude proposée dans le cadre de ces travaux de thèse se limite aux sources de vibration caractérisées par des signaux stationnaires. Désormais, la question se pose pour l'étude du comportement vibratoire non-linéaire de structures académiques et industrielles en fonction de sollicitations transitoires de type chocs. La vision expérimentale d'une telle étude permettrait de monter en compétences vis-à-vis de la caractérisation du Spectre de Réponse aux Chocs (SRC) pour une structure ayant un comportement vibratoire non-linéaire, et ainsi pouvoir évaluer la réponse de la structure considérée à ce type de sollicitation à forte amplitude sur une durée relativement faible. D'un point de vue numérique, l'utilisation de petits modèles réduits peut être envisagée avec un schéma d'intégration dynamique non-linéaire implicite. L'apport essentiel de cette étude sur les environnements dynamiques transitoires serait de donner des informations plus fines et plus réalistes sur une autre partie du cycle

de vie d'une structure mécanique. Cette étude pourrait alors se comparer aux simulations de choc usuellement déployées dans les études industrielles, avec des schémas d'intégration explicites et la prise en compte de nombreuses sources de non-linéarités (contacts et frottements en particulier).

Bibliographie

- [1] R.D. Blevins. Formulas for natural frequency and mode shape. *Krieger publishing company*, 1979.
- [2] B.M. Efimtsov. Characteristics of the field of turbulent wall pressure fluctuations at large Reynolds numbers. *Soviet Physics Acoustics*, 28 :289–292, 1982.
- [3] M. Bonnet. Équations intégrales et éléments de frontière : application en mécanique des solides et des fluides. *Éditions Eyrolles*, 1995.
- [4] G.E.P. Box and M.E. Muller. A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 29(2) :610–611, 1958.
- [5] M. Bruneau. *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes Sciences Publicat., 1998.
- [6] T.M. Cameron and J.H. Griffin. An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 56(1) :149–154, 03 1989.
- [7] Y.K. Cheung and S.L. Lau. Incremental time - space finite strip method for non-linear structural vibrations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10(2) :239–253, 1982.
- [8] M. Claeys. *Réponses vibratoires non-linéaires dans un contexte industriel : essais et simulations*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 2015.
- [9] M. Claeys, J.-J. Sinou, J.-P. Lambelin, and B. Alcoverro. Multi-harmonic measurements and numerical simulations of nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(12) :4196–4212, 2014.
- [10] R.R. Craig and M.C.C. Bampton. Coupling of substructure for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 1(2) :1313–1319, 1968.
- [11] R.R. Craig and C.J. Chang. On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. In *Proceeding 18th AIAA/ASME Structure, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 89–99, 1977.
- [12] P.R. Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14 :1675–1682, 1976.
- [13] D. Damljjanovic, B. Rasuo, S. Mandic, S. Vukovic, and J. Isakovic. Usability of the comparative experimental-numerical supersonic test cases with the HB reference model. *Proceedings of the 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, 2014.

- [14] D. de Klerk, D.J. Rixen, and S.N. Voormeeren. General framework for dynamical substructuring : history, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46(5) :1169–1181, 2008.
- [15] M.A. Dokainish and K. Subbaraj. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I. explicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1373–1386, 1989.
- [16] A. Eigoli and M. Ahmadian. Nonlinear vibration of beams under nonideal boundary conditions. *Acta Mechanica*, 218 :259–267, 05 2011.
- [17] L. Gaul and J. Lenz. Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints. *Acta Mechanica*, 125(1-4) :169–181, 1997.
- [18] L. Gaul and R. Nitsche. The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54 :93–106, 2001.
- [19] A. Girard and N. Roy. *Dynamique des structures industrielles*. Hermes Science Publications - Lavoisier, 2003.
- [20] A. Givois, A. Grolet, O. Thomas, and J.-F. Deü. On the frequency response computation of geometrically nonlinear flat structures using reduced-order finite element models. *Nonlinear Dynamics*, 97 :1747–1781, 2019.
- [21] J.D. Gray. Summary report on aerodynamic characteristics of standard models HB-1 and HB-2. *Tech. rep. AEDC-TDR-64-137*. Arnold Engineering Development Center, 1964.
- [22] J. Guillen and C. Pierre. An efficient, hybrid, frequency-time domain method for the dynamics of large-scale dry-friction damped structural systems. In *IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts*, pages 169–178. Springer, 1999.
- [23] R.J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA*, 3(2), 1965.
- [24] E.J. Hahn and P.Y. Chen. Harmonic balance analysis of general squeeze film damped multidegree-of-freedom rotor bearing systems. *Journal of Tribology*, 116 :499–507, 1994.
- [25] J.H. He. The homotopy perturbation method for nonlinear oscillators with discontinuities. *Applied mathematics and computation*, 151(1) :287–292, 2004.
- [26] J.L. Huang, R.K.L. Su, Y.Y. Lee, and S.H. Chen. Nonlinear vibration of a curved beam under uniform base harmonic excitation with quadratic and cubic nonlinearities. *Journal of Sound and Vibration*, 330(21) :5151–5164, 2011.
- [27] Z. Huang, Y. Wang, W. Zhu, and Z. Huang. Deterministic and random response evaluation of a straight beam with nonlinear boundary conditions. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*, 8, 01 2020.
- [28] S.M. Ibrahim, B.P. Patel, and Y. Nath. Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response of isotropic/composite curved beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(10) :1073–1084, 2009.
- [29] J.-F. Imbert. *Analyse de structures par éléments finis*. Sup'Aero - Cepadues Edition, 1991.
- [30] W.D. Iwan. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :893–900, 1966.

- [31] W.D. Iwan. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34 :612–617, 1967.
- [32] R. Bouc Y. Guenard P. Orsero J-L. Armand, S. Bellizzi. *Méthodes Probabilistes appliquées à la Dynamique des Structures*. 1990.
- [33] G. Kerschen, J.-C. Golinval, A. F. Vakakis, and L. A. Bergman. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems : an overview. *Nonlinear Dynamics*, 41 :147–169, 2005.
- [34] G. Kerschen, K. Worden, A.F. Vakakis, and J.-C. Golinval. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(3) :505–592, 2006.
- [35] M. Kim, V. Belsky, and M. Belyi. Substructure generation using automated multilevel substructuring, 2013. Patent US 2013/0124150A1 and EP 2597578A1.
- [36] I. Kovacic and M.J. Brennan. *The Duffing equation*. John Wiley & Sons, 2011.
- [37] C. Lesueur. Rayonnement acoustique des structures. *Éditions Eyrolles*, 1988.
- [38] M. Loeve. *Probability Theory*. Springer-Verlag, 1977.
- [39] R. Mac Neal. Hybrid method of component mode analysis. *Computers and Structures*, 1(4) :581–601, 1971.
- [40] A.H. Nayfeh. *Perturbation Methods*. J. Wiley and Sons, 1973.
- [41] A.H. Nayfeh. *Nonlinear oscillations*. J. Wiley and Sons, 1979.
- [42] A.H. Nayfeh. *Introduction to perturbation techniques*. J. Wiley, 1993.
- [43] D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*. 1975.
- [44] J.P. Noël and G. Kerschen. Nonlinear system identification in structural dynamics : 10 more years of progress. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 83 :2–35, 2017.
- [45] M. Pakdemirli and H. Boyacı. Non-linear vibrations of a simple-simple beam with a non-ideal support in between. *Journal of Sound and Vibration*, 268(2) :331–341, 2003.
- [46] B. Peeters, , and J. Debillé. Multiple-input-multiple-output random vibration control : Theory and practice. *Proceedings of the 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA*, pages 507–516, 01 2002.
- [47] B. Peeters, H. Van der Auweraer, P. Guillaume, and J. Leuridan. The polymax frequency-domain method : a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration*, 11(3-4) :395–409, 2004.
- [48] M. Peeters, R. Viguié, G. Sérandour, G. Kerschen, and J.-C. Golinval. Nonlinear normal modes, part 2 : Toward a practical computation using numerical continuation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 :195–216, 2009.
- [49] F. Poirion and C. Soize. Numerical simulation of homogeneous and inhomogeneous Gaussian stochastic vector fields. *La Recherche Aéronautique*, 1989, 01 1989.
- [50] Polytec. Psv-500-3d scanning vibrometer datasheet. URL <http://www.polytec.com>.

-
- [51] Polytec. Psv-500 scanning vibrometer datasheet. URL <http://www.polytec.com>.
- [52] J.A. Randall. The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. *Sound and Vibration*, 2003.
- [53] M.P. Rezaei and M. Zamanian. A two-dimensional vibration analysis of piezoelectrically actuated microbeam with nonideal boundary conditions. *Physica E : Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 85 :285–293, 2017.
- [54] P. Ribeiro. Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods. *Computers and Structures*, 82(17) :1413–1423, 2004.
- [55] R.D. Richtmyer and K.W. Morton. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. New York : Interscience Publishers, 1957.
- [56] H. Risken. *Fokker-Planck equation*. The Fokker-Planck Equation.
- [57] J.B. Roberts and P.D. Spanos. Stochastic averaging : an approximate method of solving random vibration problems. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 21(2) :111–134, 1986.
- [58] T. Roncen. *Réponses vibratoires non-linéaires dans un contexte industriel : essais et simulations sous sollicitations sinusoïdale et aléatoire en présence d'incertitudes*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 2018.
- [59] T. Roncen, J.-P. Lambelin, and J.-J. Sinou. Nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions and stochastic excitations - experiments, modeling and simulations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 74 :14–29, 2019.
- [60] T. Roncen, J.-J. Sinou, and J.-P. Lambelin. Non-linear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions and uncertainties – modeling, numerical simulations and experiments. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110 :165–179, 2018.
- [61] E. Sarrouy and J.-J. Sinou. Non-linear periodic and quasi-periodic vibrations in mechanical systems - on the use of the harmonic balance methods. In Farzad Ebrahimi, editor, *Advances in Vibration Analysis Research*, Chapter 21. INTECH, Open Access Publisher, 2011.
- [62] M. Shinozuka. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49(1B) :357–368, 1971.
- [63] M. Shinozuka and C.-M. Jan. Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, 25(1) :111–128, 1972.
- [64] B.F. Spencer and L.A. Bergman. On the numerical solution of the flokker-planck equation for nonlinear stochastic systems. *Nonlinear Dynamics*, 4(4) :357–372, 1993.
- [65] K. Subbaraj and M.A. Dokainish. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-II. implicit methods. *Computers & Structures*, 32(6) :1387–1401, 1989.
- [66] M. Tabaddor. Influence of nonlinear boundary conditions on the single-mode response of a cantilever beam. *International Journal of Solids and Structures*, 37(36) :4915–4931, 2000.
- [67] S. Talik, M. Claeys, J.-P. Lambelin, A. Banvillet, and J.-J. Sinou. : Dataset of measurements for the experimental CEA-beam benchmark structure subjected to two correlated and uncorrelated broadband random excitations. *Data In Brief*, page submitted, 2022.

-
- [68] S. Talik, J.-J. Sinou, M. Claeys, and J.-P. Lambelin. Nonlinear vibrations of a beam with non-ideal boundary conditions and subjected to two correlated or uncorrelated broadband random excitations - experiments, modeling and simulations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2022.
- [69] A.F. Vakakis, L.I. Manevitch, Y.V. Mikhlin, V.N. Pilipchuck, and A.A. Zevin. *Normal modes and localization in nonlinear systems*. J. Wiley and Sons, 1996.
- [70] W.T. Vetterling, B.P. Flannery, W.H. Press, and S.A. Teukolsy. *Numerical Recipes in Fortran 77*. Cambridge University Press, 1992.
- [71] P. Welch. The use of Fast Fourier Transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 15(2) :70–73, 1967.
- [72] S.-Q. Ye, X.-Y. Mao, H. Ding, J.-C. Ji, and L.-Q. Chen. Nonlinear vibrations of a slightly curved beam with nonlinear boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 168 :105294, 2020.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur J-J. SINOÛ

et les rapports de

M. G. CHEVALLIER
Professeur - FEMTO ST - 24 rue de l'Épitaphe - 25000 BESANCON

et de

M. C. TOUZE
Professeur - IMSIA - Unité mixte CNRS - ENSTA Paris - EDF - CEA - 828 bd des Maréchaux
91762 Palaiseau cedex

Monsieur TALIK Sébastien

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 8 février 2022

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon
Le directeur des Formations

Grégory VIAL

