HAL
open science

Étude de l'extension des cœurs convectifs par la sismologie des étoiles sous-géantes

Anthony Noll

▶ **To cite this version:**

Anthony Noll. Étude de l'extension des cœurs convectifs par la sismologie des étoiles sous-géantes. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2021. Français. NNT : 2021TOU30266 . tel-03683675

HAL Id: tel-03683675

https://theses.hal.science/tel-03683675

Submitted on 31 May 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *14/12/2021* **par :**

Anthony NOLL

Étude de l'extension des cœurs convectifs par la sismologie des étoiles sous-géantes

JURY

Michel RIEUTORD	IRAP	Président du Jury
Marie-Jo GOUPIL	Observatoire de Paris	Rapporteure
Marc-Antoine DUPRET	Université de Liège	Rapporteur
Orlagh CREEVEY	Observatoire de la Côte d'Azur	Examinatrice
Patrick EGGENBERGER	Université de Genève	Examinateur
Yveline LEBRETON	Observatoire de Paris	Examinatrice
François LIGNIÈRES	IRAP	Examinateur
Sébastien DEHEUVELS	IRAP	Directeur de Thèse

École doctorale et spécialité :
SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie
Unité de Recherche :
Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)
Directeur de Thèse :
Sébastien DEHEUVELS
Rapporteurs :
Marie-Jo GOUPIL et *Marc-Antoine DUPRET*

Résumé

Les cœurs convectifs jouent le rôle de réservoirs d'hydrogène durant la séquence principale d'étoiles de masse supérieures à environ 1,2 masses solaires. De ce fait, leur taille a une influence importante sur l'évolution stellaire. Néanmoins, plusieurs phénomènes physiques, qui restent mal compris par la théorie, étendent ces cœurs au-delà des limites définies par les critères classiques. Ils sont généralement modélisés par une extension simple du cœur, dont la dimension est un paramètre libre. Dans cette thèse, j'ai utilisé, pour contraindre cette extension, la sismologie des sous-géantes. Ces étoiles ont en effet un intérêt double : leur structure est encore dépendante du cœur convectif de séquence principale, et elles montrent dans leur spectre d'oscillations des modes mixtes qui permettent de sonder très précisément leur structure centrale. De ce fait, elles représentent une façon indirecte de contraindre et mesurer l'extension des cœurs convectifs.

Cependant, leur modélisation sismique est difficile, principalement à cause des variations fortement non-linéaires des fréquences des modes mixtes en fonction du temps. En conséquence, les techniques classiques de recherche de modèles optimaux (utilisation de grilles, optimisations itératives) échouent à reproduire les observations dans les incertitudes observationnelles. Pour cette raison, les étoiles sous-géantes ont été peu utilisées pour tester la physique stellaire, en dépit du très fort potentiel des modes mixtes. Une méthode spécialement adaptée à ce problème a été développée dans le cadre de cette thèse. L'idée sous-jacente est de découpler l'optimisation des paramètres stellaires qui sont très fortement dépendants des modes mixtes, la masse et l'âge, de celle des autres paramètres libres des modèles d'évolution stellaire. Cela assure une convergence robuste vers les modèles optimaux et ouvre la voie à une étude approfondie de la physique de ces étoiles.

Après avoir validé cette méthode en utilisant des tests à l'aveugle, je l'ai appliquée à une étoile sous-géante observée par la mission spatiale *Kepler* (NASA, 2009–2019). Ce travail a permis de significativement contraindre l'extension du cœur convectif que l'étoile a eu en séquence principale. Il a, de plus, permis de montrer les fortes contraintes obtenues grâce aux modes mixtes sur la densité centrale et le gradient de composition chimique dans le cœur. Aussi, il a mis en lumière une forte dégénérescence entre la fraction de masse initiale d'hélium et la masse de l'étoile, qui joue un rôle dominant dans la précision à laquelle les paramètres stellaires peuvent être mesurés par la sismologie des étoiles sous-géantes. La méthode d'optimisation développée lors de cette thèse a également été utilisée pour estimer les paramètres stellaires de plusieurs sous-géantes observées avec *Kepler* et TESS (NASA, lancé en 2008).

Par ailleurs, la plupart des codes d'évolution stellaire considèrent un mélange instantané des éléments chimiques dans les cœurs convectifs. Lors de mon travail de thèse, j'ai montré que cette hypothèse mène à des erreurs significatives sur l'abondance au cœur des éléments

chimiques dont le temps de mise à l'équilibre des réactions nucléaires est plus court que le temps caractéristique du mélange convectif, comme c'est le cas pour le ^{7}Li. Cela modifie la production d'énergie nucléaire et, *in fine*, la taille des cœurs convectifs. Ce travail m'a permis de montrer que pour rendre compte de façon cohérente des variations de la taille des cœurs convectifs au cours de l'évolution, il est nécessaire de considérer un mélange de type diffusif dans ces cœurs, et de prendre en compte les variations hors équilibre du ^{7}Be et du ^{7}Li.

Abstract

Convective cores are the hydrogen reservoirs of main-sequence stars that are more massive than around 1.2 solar masses. Therefore, their sizes strongly impact the stellar evolution. However, several physical processes, which remain poorly understood by theory, can extend those convective cores beyond the classical limits. Those are generally modeled as a crude extension of the core in stellar evolution codes the size of which is defined by a free parameter. In this thesis, I studied the seismology of subgiant stars in order to constrain this extension. Indeed, those stars are interesting for two reasons. Firstly, their structure is still highly dependent on the former main-sequence convective core. Secondly, they exhibit mixed modes which allow us to precisely probe the very center of the star. They are therefore an indirect way to measure the extensions of convective cores.

However, the seismic modeling of subgiants is challenging, mainly due to the highly non-linear variations of the frequencies of the mixed modes with time. Consequently, classical modeling methods, such as grids or iterative optimizations, fail to reproduce the observations within the uncertainties. For this reason, subgiant stars have not been much used as a laboratory to test stellar physics, despite the high potential of mixed modes. A specifically tailored method has therefore been developped during this thesis. Its main idea is to separate the optimization of the parameters which are highly dependent on the mixed modes, namely the mass and the age of the star, from the optimization of the other free parameters of the stellar evolution codes. This ensures a robust convergence to optimal models and paves the way to an in-depth study of the physics of the star.

After validating this method by testing it through Hares & Hounds exercises, I applied it to a subgiant star observed by the *Kepler* space mission (NASA, 2009–2019). This work allowed me to significantly constrain the extent of the convective core that this star used to have during the main sequence. Moreover, it showed that mixed modes provide strong constraings on the central density and the core composition gradient. Also, it highlighted a strong degeneracy between the initial helium mass fraction and the mass of the star, which plays a dominant role in the precision to which stellar parameters can be measured by the seismology of subgiants. Finally, the method developped during this thesis has also been used to model several subgiant stars observed with *Kepler* and TESS (NASA, launched in 2008).

On another note, most stellar evolution codes consider an instantenous mixing of the chemical elements in convective cores. During my thesis, I showed that this hypothesis leads to significant errors in the abundancies of the chemical elements for which the nuclear equilibrium timescale is lower than the convective timescale, as it is the case for ^{7}Li. This modifies the nuclear energy production, and thus the size of convective cores. This work allowed me to show that, in order to correctly take into account the variations of convective

core sizes during the main sequence, it is necessary to consider a diffusive mixing in the core and to take into account the variations of ^{7}Li and ^{7}Be abundances out of equilibrium.

Remerciements

Avant de rentrer dans le vif du sujet et de présenter le travail effectué durant les trois années de cette thèse, je tiens à remercier les quelques personnes sans qui il n'aurait été possible de mener ce projet à bien.

Tout d'abord, j'aimerais remercier les rapporteurs Marie-Jo et Marc-Antoine pour leur lecture approfondie du manuscrit et les remarques intéressantes qu'ils ont émises. Je remercie aussi les membres du jury, Michel, Orlagh, Patrick, Yveline et François pour leurs questions lors de la présentation de thèse ainsi que leurs remarques additionnelles sur le manuscrit, qui ont permis de l'améliorer et de l'approfondir.

Ensuite, je tiens bien entendu à adresser un immense remerciement à Sébastien pour son accompagnement tout au long de la thèse. Tu as toujours été disponible à la moindre question, très ouvert pour discuter des nombreux sujets qui ont été explorés et enthousiaste lorsque j'apportais de nouvelles idées. Merci aussi pour ta patience, notamment durant les quelques inévitables errements parsemés durant ces trois ans. Cela a été un véritable plaisir de travailler avec toi et il ne fait aucun doute que ta contribution dans cette thèse a été immense. J'espère pouvoir à l'avenir continuer à collaborer !

J'en profite pour remercier aussi tous les membres de l'équipe PS2E pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux, et les sympathiques moments durant les workshop. En particulier, je tiens à remercier Jérôme pour sa participation à ma première publication.

Bien sûr, ces trois années auraient largement été différentes et certainement bien moins agréables sans mes collègues et amis. Je tiens donc à remercier tout particulièrement Bonnie et Grégoire, mes compagnons de toujours à l'IRAP, mais aussi Jean-Sébastien, Baptiste, Louise, Tianqi, Naïs, Wilfried, Paul, Alisson, Florian, Benjamin, Stefano, Joey, Jules, Matteo, Thea et Marjorie. Je compte sur les futurs doctorants pour continuer à assurer la bonne ambiance !

Aussi, ces trois années ont été l'occasion de parler à un public plus large de ce domaine passionnant qu'est l'astrophysique, dans le cadre de l'association UniverSCiel. J'ai notamment eu l'honneur de faire partie de l'illustre équipe ballon stratosphérique, chargée d'envoyer des capteurs à 30 km d'altitude, ce qui ne se fait jamais sans un (gros) poil de frisson et d'improvisation. J'ai donc une pensée tout particulière pour Edoardo, Simon, Claire, JS, Paul, Christian et Jean-Claude. Je remercie aussi les présidents Sacha, David et Xan pour avoir courageusement dirigé le bateau durant ces années.

Et bien sûr, je tiens à faire une dédicace à Arthur, Etienne, Martin, Quentin et Sébastien, mes potes de Supaéro, pour être des sources continuelles de bons moments et faire preuve d'autant de tolérance avec mon humour. Vous êtes en or !

Enfin, je ne pourrais jamais assez remercier ma famille, pour votre soutien permanent, pour m'avoir toujours encouragé dans ce que je voulais faire et pour votre amour tout simplement. Rien de tout cela n'aurait été possible sans vous alors encore une fois, merci.

Table des matières

I. Introduction 14

1. La problématique de la taille des cœurs convectifs 15

1.1. Les méchanismes de transport à l'intérieur des cœurs 15
1.1.1. La théorie de la longueur de mélange 16
1.1.2. Les limites de la MLT 17
1.2. La définition des limites des cœurs convectifs 18
1.2.1. Limites classiques des zones convectives 18
1.2.2. Les processus pouvant étendre les cœurs au delà des critères classiques 21
1.2.3. La modélisation de l'extension des cœurs dans les codes d'évolution stellaires 23
1.2.4. L'impact de l'extension sur l'évolution stellaire 24
1.3. Contraintes observationnelles sur le paramètre d'overshoot 25
1.3.1. L'étude des amas 25
1.3.2. Etoiles binaires 26
1.3.3. La sismologie 27

2. L'astérosismologie 28

2.1. Équations de base de la sismologie stellaire 28
2.1.1. Équations de base de structure et évolution stellaires 28
2.1.2. Analyse perturbative 28
2.1.3. Le piégeage des modes 31
2.1.4. Analyse asymptotique 33
2.1.5. Equations sans approximation de Cowling pour modes dipolaires . . 37
2.1.6. La classification des modes 38
2.1.7. L'inertie des modes 38
2.2. Les oscillateurs de type solaires 39
2.2.1. Caractéristique des oscillations 39
2.2.2. Historique des détections de modes de type solaire 41
2.3. Les contraintes sismiques sur l'extension de cœur convectif 43
2.3.1. Les pulsateurs g 44
2.3.2. Les oscillateurs de type solaire 45
2.3.3. Les étoiles post-séquence principale 47

3. Les étoiles sous-géantes **48**
3.1. Définition, caractéristiques évolutives et structurelles 48
3.1.1. Caractéristiques évolutives 48
3.1.2. Caractéristiques structurelles 49
3.2. Propriétés sismiques 50
3.3. Les spécificités de la modélisation sismique des sous-géantes 51
3.3.1. Les difficultés inhérentes à la modélisation des sous-géantes 51
3.3.2. Les différentes approches utilisées dans la littérature 52
3.4. L'étude sismique des sous-géantes pour contraindre l'extension de cœur convectif 54

4. Problématique et plan **56**

II. Contraindre les cœurs convectifs via la modélisation sismique des sous-géantes **58**

5. Particularités sismiques des sous-géantes **60**
5.1. Structure sismique 60
5.1.1. Diagramme de propagation d'une étoile sous-géante 60
5.1.2. Quelle partie du profil de Brunt-Väisälä est la plus sensible à l'overshoot ? 62
5.1.3. Modes p-dominés et modes g-dominés 63
5.2. De l'intérêt de détecter plusieurs modes g-dominés 63

6. La double optimisation **65**
6.1. Principe général 65
6.2. Optimisation en masse et âge 65
6.2.1. Principe général 65
6.2.2. Trouver ν_g 67
6.2.3. Trouver $\Delta\nu$ 68
6.3. Optimisation des autres paramètres 69
6.4. Tests durant la préparation de la mission PLATO 70
6.4.1. Présentation et méthode 70
6.4.2. Résultats 70
6.5. Application de la méthode à des observations 74

7. Modélisation d'une sous-géante observée par Kepler : KIC10273246 **78**
7.1. Le choix de l'étoile et ses caractéristiques 78
7.1.1. Les critères de sélection 78
7.1.2. Extraction des paramètres sismiques 79
7.1.3. Extraction des paramètres non sismiques 81

7.2. Présentation de la méthode 82
7.2.1. Codes et physique utilisée 82
7.2.2. Le traitement des effets de surface 83
7.2.3. La modélisation de l'extension du cœur convectif en séquence principale 84
7.2.4. Stratégie d'optimisation 85
7.3. Résultats des optimisations 86
7.3.1. Paramètres des modèles et qualité de l'ajustement 86
7.3.2. À propos des incertitudes 87
7.3.3. Contraintes sur le cœur convectif 88
7.4. Contraintes sur la structure interne 89
7.4.1. Densité centrale 89
7.4.2. Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä 90
7.5. Autres aspects de la physique 92
7.5.1. Diffusion microscopique 92
7.5.2. Dégénérescence entre la fraction initiale d'hélium et la masse 95
7.6. Contraintes sur la rotation 98

8. Application de la méthode à d'autres sous-géantes 99
8.1. Choix des étoiles 99
8.2. Procédure de modélisation et résultats préliminaires 101
8.2.1. Procédure de modélisation 101
8.2.2. Résultats préliminaires 102

III. Influence des réseaux de réactions nucléaires et du mélange central sur les tailles des cœurs convectifs 103

9. Comment la taille du cœur dépend de la modélisation du mélange et des réactions nucléaires ? 105
9.1. Introduction 105
9.1.1. Les réactions nucléaires 105
9.1.2. Le mélange convectif 108
9.2. Impact sur la structure du cœur 109
9.2.1. Composition 109
9.2.2. Production d'énergie nucléaire 110
9.2.3. Influence sur la taille du cœur convectif 112
9.2.4. Quelles sont les caractéristiques des étoiles les plus sensibles à ce mécanisme ? 117
9.3. Influence du réseau de réactions nucléaires 117

10. Influence sur les observables sismiques 119
10.1. Méthodologie 119
10.1.1. Physique des modèles 120

10.1.2. Méthode utilisée 120
10.2. Résultats 121

IV. Conclusion et perspectives **125**

Avant-Propos

Dans cette thèse, je me suis concentré sur la question des cœurs convectifs. On les trouve au centre des étoiles plus massives qu'environ 1,2 masse solaire, durant la séquence principale. Ils sont à la fois le lieu où se produisent les réactions nucléaires et les réservoirs d'hydrogène de ces étoiles : leurs caractéristiques ont donc une influence directe et forte sur l'évolution stellaire, et notamment sur la détermination de l'âge des étoiles. Or, bien contraindre l'âge de ces étoiles est nécessaire si l'on veut, entre autres, mieux comprendre la formation des systèmes planétaires, ou explorer l'histoire de la Galaxie. Cependant, les mouvements de fluide convectifs se déroulant à l'intérieur de ces cœurs sont hautement turbulents et complexes à modéliser correctement. Le modèle utilisé dans les codes d'évolution stellaires est donc simpliste et sous-estime la taille de ces derniers. La solution adoptée jusqu'ici est d'étendre artificiellement les cœurs sur une distance quantifiée par un paramètre libre. Ce dernier influence donc fortement la durée de la séquence principale, des observations sont alors requises pour le contraindre et améliorer la modélisation stellaire.

Dans cette thèse, j'ai utilisé pour cela l'astérosismologie. Cette discipline étudie les fréquences des modes d'oscillations des étoiles pour explorer leur structure interne. En effet, de la même façon qu'un violon sonne différemment qu'un piano, des étoiles aux structures internes distinctes auront des modes différents. L'originalité de l'approche utilisée ici est qu'elle ne s'intéresse pas directement aux étoiles durant leur séquence principale, mais plutôt aux étoiles sous-géantes qu'elles sont devenues. Durant cette phase, qui se déroule juste après l'épuisement des ressources centrales en hydrogène, l'étoile ne possède plus de cœur convectif. En revanche, du fait de sa proximité avec la fin de la séquence principale, sa structure reste fortement dépendante de celle qu'elle avait durant cette période de son évolution Couplé à cela, ces étoiles présentent des modes dits mixtes, c'est-à-dire ayant une nature de mode de gravité (g) au cœur et de mode de pression (p) dans l'enveloppe. La première permet de sonder très finement la région centrale de l'étoile alors que la seconde leur permet d'avoir une amplitude suffisamment importante à la surface pour être détectables. Le principe de ma thèse est donc de se servir de ces modes pour sonder le cœur des sous-géantes et faire une « autopsie » de l'ancien cœur convectif. Cependant, ces étoiles restent aujourd'hui peu utilisées comme moyen de tester la physique stellaire, principalement car leur modélisation sismique est difficile. Les modes mixtes évoluent de façon non-linéaire et rapide par rapport au temps d'évolution de l'étoile, ce qui rend l'utilisation de grilles ou de méthodes itératives compliquée.

Un autre point pouvant jouer sur l'extension des cœurs convectifs est la composition de ceux-ci. En effet, les fractions de masses des différents éléments situés dans le cœur influent sur sa production d'énergie nucléaire et donc *in fine* sur la taille du cœur convectif. Or,

celles-ci dépendent du mélange au cœur ainsi que de la façon dont les réactions nucléaires s'y déroulant sont calculées. Ces deux points diffèrent selon les codes d'évolution stellaire et selon les paramètres choisis. J'ai donc étudié les différences structurelles entre des modèles ayant un mélange « instantané » (où tous les éléments sont homogénéisés) et un mélange « diffusif » (où la théorie de longueur de mélange est utilisée pour calculer les abondances). Je me suis aussi intéressé à l'influence que pouvait avoir des approximations communément faites dans les réseaux de réaction nucléaires.

Le plan de ce manuscrit est le suivant. Dans l'introduction, je passe en revue les différentes problématiques liées à l'extension des tailles de cœur au-delà des limites dictées par la théorie de longueur de mélange. Ensuite, je présente le domaine de l'astérosismologie et notamment les propriétés des oscillateurs de type solaire. Enfin, je me concentre sur le type d'étoiles étudié, les sous-géantes, pour en présenter les caractéristiques évolutives et structurelles. Dans la Partie II, j'expose les propriétés sismiques des sous-géantes et notamment la façon dont elles dépendent des caractéristiques du cœur convectif de séquence principale. Ensuite, je décris la méthode développée dans le cadre de cette thèse pour la modélisation sismique des sous-géantes. Enfin, je montre les résultats obtenus sur une étoile observée par *Kepler*. La Partie III est dédiée aux liens entre la taille des cœurs convectifs et le mélange s'y produisant, ainsi que les réseaux nucléaires qui y sont utilisés. Après une introduction théorique, je présente l'influence de ces différences sur les observables sismqiues durant la séquence principale. Enfin, je conclue et présente les perspectives ouvertes par ce travail.

Ressources informatiques

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans les logiciels suivants :

- Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA) (Paxton et al., 2011, 2013, 2015, 2018, 2019)
- CESTAM (Morel & Lebreton, 2008)
- Aarhus adiabatic oscillation package (ADIPLS) (Christensen-Dalsgaard, 2008)
- NumPy (Harris et al., 2020)
- SciPy (Virtanen et al., 2020)
- Matplotlib (Hunter, 2007)
- iPython (Perez & Granger, 2007)
- Astropy (Astropy Collaboration et al., 2013, 2018)
- LaTeX

Les calculs présentés ont été dans la très grande majorité effectués sur le calculateur interne de l'IRAP, Titan.

Première partie

Introduction

1. La problématique de la taille des cœurs convectifs

Nous allons dans ce chapitre nous intéresser d'abord aux propriétés des processus de transport dans les cœurs, puis voir comment leurs limites sont classiquement définies. Ensuite, nous étudierons quels phénomènes peuvent étendre ces cœurs au delà des ces limites et comment nous pouvons les contraindre observationnellement.

1.1. Les méchanismes de transport à l'intérieur des cœurs

On peut distinguer les cœurs des étoiles en deux catégories, selon le mécanisme de transport de l'énergie. On trouve ainsi des cœurs dits *radiatifs*, au sein desquels l'énergie est transportée par le rayonnement, et des cœurs dit *convectifs* où les mouvements de fluide sont en partie responsables du transport de l'énergie.

Ces processus sont les principaux moyens de transport d'énergie dans les étoiles. Dans le premier cas, ce sont les photons qui vont transporter l'énergie. La matière stellaire étant, en dehors de l'atmosphère, très opaque, leur libre parcours moyen ($\sim 2\,\mathrm{cm}$ d'après Kippenhahn et al. 2012) est extrêmement petit par rapport au rayon de l'étoile. Le transport par rayonnement est donc généralement modélisé comme un processus diffusif. On en déduit le gradient de température dans un cas de transport uniquement radiatif :

$$\nabla_{\mathrm{rad}} \equiv \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P}\right)_{\mathrm{rad}} = \frac{3}{64\pi\sigma G}\frac{\kappa L_r P}{m T^4} \tag{1.1}$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzmann, G la constante de gravité universelle, κ l'opacité moyenne de Rosseland, L_r la luminosité au rayon considéré, P la pression, m la masse contenue dans la sphère au rayon considéré et T la température.

L'autre mécanisme, la convection, repose sur des mouvements de fluide instables, entraînés par la poussée d'Archimède. Ces mouvements représentent un mécanisme de transport efficace dans les régions profondes de l'étoile. Dans le cœur et dans les enveloppes stellaires, le temps de retournement est considérablement plus court que celui de la diffusion thermique : les mouvements convectifs établissent une stratification adiabatique (Biermann, 1932). On définit alors, classiquement, $\nabla_{\mathrm{ad}} \equiv (\partial \ln T/\partial \ln P)_{\mathrm{ad}}$ le gradient adiabatique, qui représente le changement en température lors d'une contraction adiabatique. Ce gradient, défini par l'équation d'état de la matière, représente donc la stratification en température dans les zones convectives. On peut noter que cela n'est pas entièrement vrai dans les zones les plus superficielles de l'étoile (e.g., Maeder 2009, chap. 5.4), principalement à cause de

l'ionisation partielle en hélium et hydrogène qui provoque une forte hausse de l'opacité et donc une augmentation de la diffusivité thermique.

1.1.1. La théorie de la longueur de mélange

Dans les étoiles, les mouvements de fluide sont hautement turbulents : un rapide calcul montre ainsi des valeurs typiques du nombre de Reynolds de l'ordre de 10^{16}. Or la turbulence représente, encore à l'heure actuelle, un des problèmes non résolus majeurs de la mécanique des fluides (e.g., Rieutord 1997). En conséquence, celle-ci doit être modélisée de façon approchée si l'on veut comprendre les caractéristiques des zones convectives.

En physique stellaire, l'approche la plus communément utilisée est celle de la théorie de la *longueur de mélange* (MLT) qui a été initialement proposée par Prandtl (1925) puis adaptée à la question stellaire par Biermann (1932). Cependant, le formalisme communément utilisé, et que nous allons développer dans la suite, est celui développé par Böhm-Vitense (1958).

Cette approche modélise la convection de la façon suivante : un élément de fluide, avec un excès de température DT par rapport à son environnement, monte du fait de la poussée d'Archimède sur une distance l_m appelée longueur de mélange avant de se mélanger à son environnement. On note $\nabla \equiv \partial \ln T / \partial \ln P$ le gradient de température de l'environnement, et ∇_{B} ce même gradient, mais à l'intérieur de l'élément de fluide. On peut donc calculer son évolution radiale comme :

$$\frac{\partial (DT)}{\partial r} = -\frac{T}{H_p}(\nabla_{\mathrm{B}} - \nabla) \tag{1.2}$$

avec $H_p = -\mathrm{d}r/\mathrm{d}\ln P$ l'échelle de hauteur de pression. De plus, selon l'hypothèse de longueur de mélange, cet élément de fluide voyage sur une longueur l_m, on peut donc dire qu'en moyenne, les éléments se trouvant à un rayon r ont parcouru $l_m/2$. On en déduit alors la valeur moyenne de DT :

$$\frac{\langle DT \rangle}{T} = \frac{l_m}{2H_p}(\nabla - \nabla_{\mathrm{B}}) \tag{1.3}$$

Si on définit $\delta = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$ à pression constante, ρ étant la densité, alors on en déduit la variation de densité $\langle D\rho \rangle / \rho = -\delta \langle DT \rangle / T$. On prend $\langle DP \rangle = 0$ car l'élément de fluide est à la même pression que son environnement, la vitesse de convection étant généralement sub-sonique dans les étoiles de séquence principale. De plus, on néglige les variations de composition (i.e. $\langle D\mu \rangle = 0$), le mélange convectif étant estimé efficace et donc la région homogène.

On déduit de $\langle D\rho \rangle$ le travail W_{conv} exercé par la poussée d'Archimède. Chaque élément de fluide se trouve au rayon r ayant parcouru en moyenne $l_m/2$, on en déduit :

$$W_{\mathrm{conv}} = g\delta(\nabla - \nabla_{\mathrm{B}})\frac{l_m^2}{8H_p} \tag{1.4}$$

avec g la gravité au rayon r.

En théorie de longueur de mélange, on estime qu'environ la moitié du travail est transformé en énergie cinétique. On en déduit alors la vitesse du fluide v :

$$v^2 = g\delta(\nabla - \nabla_{\mathrm{B}})\frac{l_m}{8H_p} \tag{1.5}$$

Maintenant que l'on connaît la vitesse du fluide, on peut en déduire le flux d'énergie convectif :

$$F_{\mathrm{conv}} = \rho v c_p DT = \rho c_p T\sqrt{g\delta}\frac{l_m^2}{4\sqrt{2}}H_p^{-3/2}(\nabla - \nabla_{\mathrm{B}})^{3/2} \tag{1.6}$$

avec c_p la capacité thermique massique à pression constante. À noter que, hors régions superficielles de l'étoile, l'évolution de la température à l'intérieur de l'élément de fluide est adiabatique. On a en conséquence $\nabla_{\mathrm{B}} = \nabla_{\mathrm{ad}}$.

1.1.2. Les limites de la MLT

On peut déduire des équations ci-dessus que la théorie de longueur de mélange est une théorie *locale*, c'est-à-dire que les caractéristiques d'un élément de fluide ne dépendent que des conditions au rayon r auquel il se trouve. Or, cela représente une première limite de cette théorie : un élément de fluide traverse un milieu stratifié, et ses caractéristiques propres dépendent donc de celui-ci. De plus, la MLT, simpliste, ne prend pas en compte toutes les caractéristiques du fluide. Notamment, la multiplicité des tailles et énergies des tourbillons turbulents (Kolmogorov, 1941) est ignorée, ce qui peut fortement sous-estimer l'efficacité du mélange. Canuto & Mazzitelli (1991), dans un modèle prenant en compte un spectre de Kolmogorov, trouvent un flux convectif plus de 10 fois supérieur aux valeurs prévues par la MLT. En outre, ignorer la non-localité de la convection amène à mal estimer les frontières des zones convectives : ce point sera développé dans la Section 1.2.2 et est à l'origine de la question centrale de cette thèse.

Enfin, la longueur de mélange l_m est un paramètre libre. Celui-ci est alors souvent paramétré de la façon suivante :

$$l_m = \alpha_{\mathrm{MLT}} H_p, \tag{1.7}$$

α_{MLT} étant choisi *ad-hoc*. Ce dernier a notamment un impact important sur la détermination du rayon d'un modèle d'étoile avec enveloppe convective. En effet, un α_{MLT} élevé assure un transport plus efficace (voir Eq. 1.6), réduisant de ce fait l'épaisseur de l'enveloppe et donc le rayon de l'étoile. Si une calibration sur le Soleil est en conséquence aisée, il est difficile de pouvoir assurer qu'une valeur similaire soit compatible avec des étoiles aux caractéristiques ou stade évolutif différents (e.g., Tayar et al. 2017). L'utilisation de simulations numériques des zones les plus superficielles de l'étoile représente cependant une possibilité de calibrer ce paramètre pour des étoiles aux caractéristiques variées (Magic et al., 2015; Trampedach et al., 2014).

1.2. La définition des limites des cœurs convectifs

1.2.1. Limites classiques des zones convectives

Par définition, une zone est dite *convective* si la vitesse convective v est non nulle. À la limite d'une telle région, soit à l'endroit où $v = 0$, on déduit de l'équation 1.6 que le flux convectif est aussi nul et donc que l'énergie est entièrement transportée par le rayonnement. On a alors $\nabla = \nabla_{\mathrm{rad}}$. Si on se place dans le cadre de la théorie de longueur de mélange, on déduit de l'équation 1.5 que $v = 0$ est équivalent à

$$\nabla_{\mathrm{rad}} = \nabla_{\mathrm{ad}}, \tag{1.8}$$

communément appelé *limite de Schwarzschild*. De plus, si on prend en compte la stratification en composition de la région (négligée dans la Section 1.1.1), on trouve le critère suivant :

$$\nabla_{\mathrm{rad}} = \nabla_{\mathrm{ad}} + \frac{\phi}{\delta}\nabla_{\mu}, \tag{1.9}$$

où $\phi = -\partial \ln \rho / \partial \ln T$, μ étant le poids moléculaire moyen et $\nabla_{\mu} = \partial \ln \mu / \partial \ln P$. Cette égalité est appelée *limite de Ledoux*.

Comment correctement appliquer ces critères ?

Ces critères ayant été déduits d'une théorie de la convection, ils doivent être appliqués du côté convectif de la bordure de la zone convective. Or, comme le notent Gabriel et al. (2014), cela n'est pas le cas dans la majorité des codes d'évolutions stellaires.

Cette subtilité pose des problèmes lorsque les gradients qui rentrent en jeu dans les critères sont discontinus, comme c'est le cas dans les étoiles de faible masse avec cœur convectif, qui sont le sujet d'étude de cette thèse. En effet, dans ces étoiles la part entre le cycle CNO et la chaîne pp évolue durant la séquence principale en faveur du premier, ce qui induit une progression de la zone convective centrale. On observe alors une forte discontinuité en X à la frontière des cœurs de ces étoiles, qui provoque aussi une discontinuité en ∇_{μ}.

La Figure 1.1 représente schématiquement la situation typiquement rencontrée dans ce genre de cas. La taille du cœur convectif ainsi que les différents gradients sont ceux à l'itération n et l'on cherche la nouvelle limite du cœur à l'itération $n+1$. $\nabla_{\mathrm{rad}} - \phi/\delta\nabla_{\mu}$, dont la valeur définit la limite du cœur selon le critère de Ledoux, est représenté comme une fonction affine discontinue à la limite du cœur. ∇_{ad} est lui en pointillé comme ayant une valeur constante, comportement proche de celui rencontré dans les modèles. On remarque alors que, si l'on applique le critère depuis la zone convective, c'est-à-dire en prolongeant $\nabla_{\mathrm{rad}} - \phi/\delta\nabla_{\mu}$ depuis ses valeurs dans le cœur, on trouve une taille (définie par la limite A) plus importante que si l'on fait une simple interpolation entre deux points de la grille (limite B) situés à la limite du cœur. D'ailleurs, cette interpolation donne une taille de cœur similaire à l'itération $n+1$, qui donnera une taille similaire à l'itération $n+2$ etc. et donc une taille du cœur constante au fil de l'évolution de l'étoile, ce qui n'est pas compatible avec

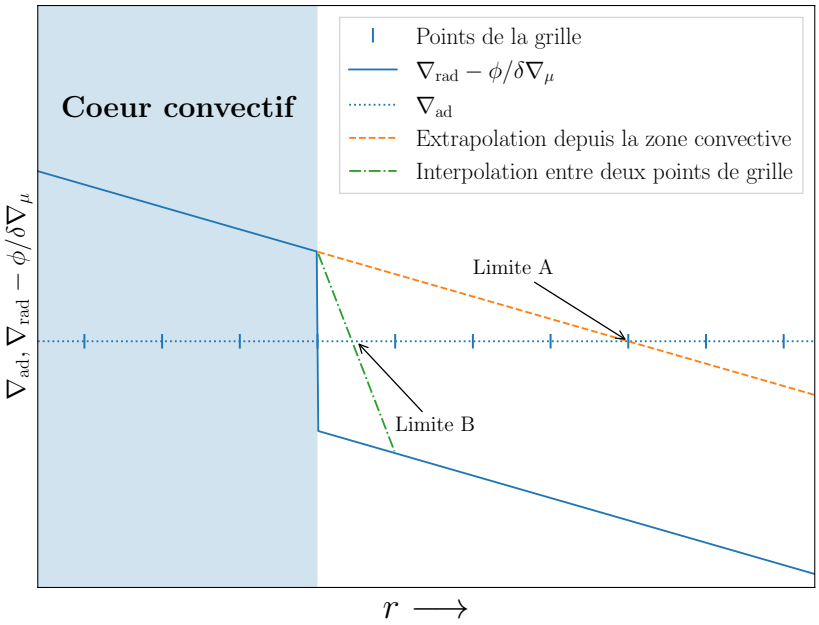

FIGURE 1.1. – Schéma montrant les différentes frontières du cœur définies d'après une simple interpolation (vert) ou en prolongeant $\nabla_{\rm rad}$ depuis sa valeur dans le cœur convectif.

l'augmentation de la part du cycle CNO. Ce comportement erroné est d'ailleurs retrouvé dans les modèles, comme en atteste la Figure 1.2, qui représente l'évolution de la masse du cœur convectif d'une étoile de 1,3 $M_\odot$ pour différents critères physiques. Il apparaît alors clairement qu'une évolution avec critère de Ledoux simple (courbe bleue) donne une masse de cœur constante.

Le code MESA répond à cette problématique via l'algorithme de *Predictive Mixing* (détaillé dans Paxton et al. 2018) et son évolution le *Convective Premixing Scheme* (voir Paxton et al. 2019). Le premier fonctionne de la manière suivante : définissons y tel que $y = \nabla_{\rm rad} - \nabla_{\rm ad}$ si l'on utilise le critère de Schwarzschild et $y = \nabla_{\rm rad} - \phi/\delta\nabla_\mu - \nabla_{\rm ad}$ si l'on utilise le critère de Ledoux. Le signe de y indique donc la stabilité de la région. Le *predictive mixing* trouve en premier la cellule pour laquelle y change de signe, et la définit comme une limite provisoire. Il regarde ensuite comment le signe de y change si la cellule extérieure à cette limite est entièrement mélangée au reste de la zone convective, i.e. si les opacités, températures, composition etc. sont calculées comme si la cellule faisait partie de la zone convective. Si le signe de y autour de la limite provisoire change et redevient positif (i.e. instable), alors le processus recommence avec la cellule suivante, jusqu'à ce que le changement de signe résiste à l'intégration de la cellule à la zone de mélange. Grâce à ce méchanisme, on peut ainsi « extrapoler » y de façon semblable à la courbe orange sur la Figure 1.1, et donc trouver la nouvelle limite en respectant les préconisations de Gabriel et al. (2014). On vérifie bien sur la Figure 1.2 que l'utilisation de cet algorithme, qui donne

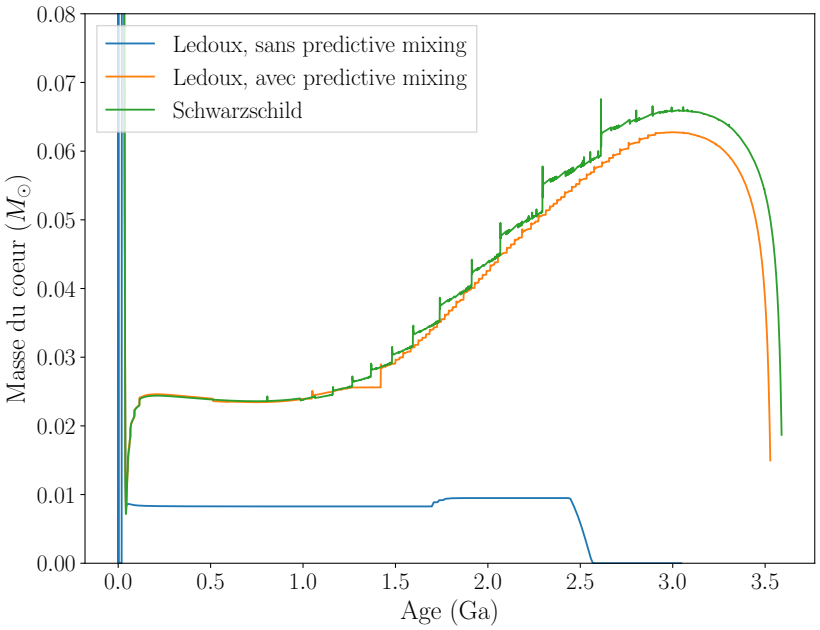

FIGURE 1.2. – Evolution de la masse du cœur convectif pour une étoile de 1,3 $M_\odot$, pour une limite calculée selon le critère de Ledoux, avec et sans predictive mixing, et selon le critère de Schwarzschild.

la courbe verte, permet d'obtenir un cœur qui grossit durant la séquence principale, en accord avec ce qui est physiquement attendu pour ce type d'étoiles.

Ce problème de taille de cœur constante avec le critère de Ledoux est retrouvé dans d'autres codes d'évolution stellaires, tels que CESTAM (Morel & Lebreton, 2008), qui n'implémentent pas d'algorithme permettant de suivre les préconisations de Gabriel et al. (2014).

Quel critère utiliser, entre Ledoux et Schwarzschild ?

Une autre question que l'on pourrait se poser est quel critère utiliser entre Schwarzschild et Ledoux. Si l'on suit le raisonnement de Gabriel et al. (2014), à l'intérieur du cœur, les deux sont équivalents puisque la zone convective (où l'on doit appliquer ces critères) est homogène et donc $\nabla_\mu = 0$. Cependant, on observe dans la Figure 1.2 une différence faible mais non négligeable de masse du cœur selon le critère utilisé. Notamment, on observe lorsque le critère de Schwarzschild est utilisé des pics et une taille de cœur plutôt erratique. Cela est dû à la formation, à l'extérieur du cœur, de zones convectivement instables du fait de l'augmentation de $\nabla_{\rm rad}$ à la sortie du cœur, elle-même dûe à l'augmentation de l'opacité à cause du changement de composition, qui redevient de ce fait supérieur à $\nabla_{\rm ad}$. Le cœur, en grandissant, va alors absorber ces régions et brutalement augmenter en taille, ce qui explique les pics observés sur la courbe. À l'itération suivante, l'absorption de ces petites

régions ayant un faible impact sur les caractéristiques globales du cœur, celui-ci retrouve une taille proche de celle d'avant. Cependant, on note que celle-ci n'est pas *exactement* celle qu'aurait eu le cœur s'il n'avait pas absorbé ces régions convectives extérieures. Cela modifie notamment la taille maximale du cœur lors de la séquence principale et donc la durée de celle-ci. Il est donc préféréable d'utiliser le critère de Ledoux pour ce type d'étoiles.

1.2.2. Les processus pouvant étendre les cœurs au delà des critères classiques

Nous avons vu dans la section précédente les critères classiques de limite du cœur. Or, plusieurs phénomènes physiques ignorés par la MLT peuvent étendre les cœurs au-delà des limites classiques et ont un impact important sur l'évolution de l'étoile (voir la Section 1.2.4). Dans cette partie, nous regarderons les phénomènes pouvant étendre le cœur et nous concentrerons principalement sur ceux que l'on rencontre à la limite des cœurs convectifs d'étoiles de faibles masses, c'est-à-dire moins de 1,5 $M_\odot$.

L'overshooting

Les critères de Schwarzschild et Ledoux définis en Section 1.2.1 sont une interprétation, dans le cadre de la théorie de longueur de mélange, du critère plus général de vitesse convective nulle $v = 0$. Or, cette théorie locale ignore des propriétés importantes du fluide, comme son inertie, qui peut permettre à une parcelle de fluide de pénétrer dans une région ayant pourtant une stratification stable. Cette région sera alors mélangée et aura des caractéristiques proches de celles d'une zone convective. Ce phénomène, appelé *overshooting*, est un des principaux responsables de l'extension des cœurs au-delà des limites classiques.

Une des premières estimations de l'ampleur de ce phénomène a été effectuée par Saslaw & Schwarzschild (1965) et Roxburgh (1965). Ils ont estimé une très faible amplitude du phénomène : le premier prédit ainsi une distance d'overshoot égale à moins de 2% de la taille du cœur et le deuxième à environ 1% de hauteur de pression. Les deux concluent donc que l'overshooting est un phénomène négligeable. Ces faibles amplitudes d'overshooting sont dues au freinage résultant de la poussée d'Archimède en dehors du cœur convectif, trop important pour permettre aux parcelles de fluide de s'étendre dans la zone stable sur de grandes distances. Shaviv & Salpeter (1973), en utilisant une modification non-locale de la MLT, trouvent en revanche des valeurs finies de distance d'overshoot, de l'ordre de 0,07 fois la hauteur de pression. Son modèle, qui inclut les échanges thermiques entre l'overshoot et le milieu stable, permet de réduire l'efficacité du freinage en dehors de la zone instable et donc d'étendre la pénétration des éléments convectifs. Roxburgh (1978, 1989) établit l'égalité suivante :

$$\int_V (L_{\rm nucl} - L_{\rm rad}) {\rm d}(1/T) = 0 \tag{1.10}$$

où $L_{\rm nucl}$ représente la luminosité produite par les réactions nucléaires, $L_{\rm rad}$ la luminosité transportée par le rayonnement, et V le volume contenant le cœur et la zone d'overshoot. Cette équation est communément appelée le *critère de Roxburgh* et permet d'avoir une

estimation grossière de la distance d'overshoot. Cependant, ce modèle néglige la viscosité turbulente et ne représente donc qu'une valeur maximum de la distance d'overshoot : Roxburgh (1978) trouve ainsi des cœurs jusqu'à 70% plus massifs que ceux définis par les critères classiques, ce qui est bien supérieur aux estimations actuelles.

Zahn (1991) introduit le principe de *pénétration convective*, où le mélange hors du cœur convectif est assez efficace pour imposer une stratification (quasiment) adiabatique au contraire de l'overshoot « classique » où la stratification thermique est la même que celle dans une zone radiative. Il démontre d'ailleurs que c'est le cas dans la majorité de la région d'extension du cœur. Enfin, il estime là aussi une extension de l'ordre de la hauteur de pression.

Nous voyons donc que le cadre théorique de ce phénomène d'overshoot est incertain, et que les formalismes divers présentés ici prédisent des extensions du cœur variées.

Autres processus de mélange

Nous allons dans cette sous-section rapidement introduire les effets sur le mélange de la semi-convection et de la rotation. Ces phénomènes n'ayant pas été pris en compte durant cette thèse, nous nous en tiendrons à une brève discussion.

On a vu que, pour les étoiles dont le cœur progresse durant la séquence principale, $\nabla_{\rm rad} > \nabla_{\rm ad}$ dans une région à l'extérieur du cœur, mais que celle-ci est stabilisée par un gradient de composition élevé. On se retrouve donc dans la situation $\nabla_{\rm ad} < \nabla_{\rm rad} < \nabla_{\rm ad} + \phi/\delta\nabla_\mu$. Ce genre de région, stable selon Ledoux mais instable selon Schwarzschild, est une région de *semi-convection*. Plus précisément, dans ce cas-ci il s'agit d'instabilité vibrationnelle de double diffusion (ODDC).

La semi-convection nécessite une approche théorique différente de la convection dans le cœur. Les prescriptions couramment utilisées (e.g., Langer et al. 1985) comportent toujours un paramètre libre, et son étude est un sujet toujours actif en mécanique des fluides (voir par exemple Garaud 2020). Moore & Garaud (2016), en utilisant une prescription de Wood et al. (2013), montrent que pour les étoiles de faible masse les régions de semi-convection sont efficacement mélangées, au point que l'on retrouve des modèles aux caractéristiques identiques à celles prescrites par le critère de Schwarzschild. À noter cependant que cette étude a été faite avec des modèles n'utilisant pas le *predictive mixing*, et ayant donc des tailles de cœur avec Ledoux sous-estimées (voir les Figures 2 ou 6 du papier par exemple). L'influence de la semi-convection est donc surestimée, la différence entre les tailles de cœurs prédites par Ledoux et Schwarzschild étant en réalité plus faible (voir la Figure 1.2).

La rotation peut influer, principalement, de trois façons différentes façon sur le mélange dans l'étoile. D'abord, la rotation différentielle en rayon peut avoir une influence sur les critères de stabilité des régions convectives. Par exemple, si on prend la force centrifuge dans le critère de Ledoux, on obtient le critère suivant (e.g., Maeder 2009) :

$$\nabla_{\rm ad} > \nabla - \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu + \frac{1}{\varpi^3}\frac{{\rm d}(\Omega^2\varpi^4)}{{\rm d}\varpi}\sin\vartheta \tag{1.11}$$

appelé critère de Solberg-Hoiland. ϖ est la distance à l'axe de rotation, Ω la vitesse angulaire et ϑ la colatitude. De ce fait, la rotation aura tendance à légèrement réduire la taille du cœur, ainsi qu'à le déformer, avec une réduction plus importante à l'équateur qu'aux pôles.

On peut aussi noter d'autres processus résultant de la rotation et influençant le mélange en dehors du coeur. D'abord, la rotation différentielle, à la fois horizontale et verticale, induit un cisaillement dont résulte un mélange turbulent dans les zones stratifiées stables (e.g., Talon & Zahn 1997; Mathis & Zahn 2004). Enfin, la circulation méridienne, induite par le déséquilibre thermique causé par la force centrifuge, peut aussi rajouter du mélange dans les zones radiatives (Eddington, 1926; Zahn, 1992).

1.2.3. La modélisation de l'extension des cœurs dans les codes d'évolution stellaires

Les différents processus physiques qui étendent le cœur au delà de sa limite, et plus encore leurs interactions, sont donc mal contraints par la théorie. En conséquence, ils sont modélisés de façon simpliste dans les codes d'évolution, avec un paramètre libre devant être calibré d'après des observations ou simulations. Ce paramètre est appelé paramètre d'*overshoot*, mais englobe en réalité les effets combinés de tous les phénomènes précédemment cités. Par la suite, le terme *overshoot* sera donc équivalent à une simple extension du cœur convectif, indépendamment du phénomène physique qui en est la cause.

Overshoot instantané / Step Overshooting

La prescription la plus simple est une extension simple du cœur, sur une distance $d_{\rm ov}$, extension dans laquelle le mélange est semblable à celui du cœur. Ce type d'extension est appelé *step overshooting* ou overshoot instantané. La distance d'overshooting est alors paramétrisée de la façon suivante :

$$d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} H_p \tag{1.12}$$

avec $H_p = -{\rm d}r/{\rm d}\ln P$ et $\alpha_{\rm ov}$ un paramètre libre. On note que cette paramétrisation comporte un problème : $H_p \to \infty$ lorsque $r \to 0$. En conséquence, si le cœur convectif est petit (ce qui est le cas pour les étoiles de faible masse), l'extension $d_{\rm ov}$ risque de prendre des valeurs non-physiques. Pour contrer cela, une solution est de tronquer $d_{\rm ov}$ en remplaçant H_p par une autre distance d'échelle $\tilde{H}_p$ si celle-ci est trop grande. La défintion de $\tilde{H}_p$ varie selon les codes d'évolution stellaires, ce qui peut poser problème dans le cas des étoiles de faible masse ayant des petits cœurs. Cela sera développé plus en profondeur plus tard dans le manuscrit, dans la Section 7.2.3.

Avec cette prescription, dans la zone d'overshooting, le mélange chimique est efficace : tous les élements sont homogénéisés. En revanche, l'efficacité du mélange thermique dépend des codes. Dans CESTAM, la stratification est par défaut adiabatique (de façon similaire à la pénétration convective de Zahn 1991), mais peut être égale au gradient radiatif si le

paramètre $\alpha_{\rm ov}$ est négatif. Dans MESA, le gradient de température dans la zone d'overshoot est par défaut égal au gradient radiatif. Noels et al. (2010) montrent que la différence entre les deux types de stratification peut être compensée par un faible ajustement de $\alpha_{\rm ov}$.

Overshoot diffusif

La deuxième prescription est inspirée des travaux de Freytag et al. (1996), qui a trouvé via des simulations 2D un profil de vitesse exponentiel dans la zone d'overshoot de l'enveloppe convective. Cette prescription applique un mélange diffusif autour du cœur convectif, avec le coefficient de diffusion suivante :

$$D_{\rm ov} = D_0 \exp\left(-\frac{2(r - R_{\rm cc})}{f_{\rm ov}\tilde{H}_p}\right) \tag{1.13}$$

avec D_0 le coefficient de diffusion calculé avec la MLT proche du cœur et $f_{\rm ov}$ un paramètre libre. Cette prescription comporte donc elle aussi un paramètre libre, et est elle aussi dépendante des différentes définitions de $\tilde{H}_p$ dans les codes d'évolution.

Il est généralement trouvé (e.g., Noels et al., 2010) qu'un overshoot diffusif donne une extension comparable à un step overshoot pour $f_{\rm ov} \sim \alpha_{\rm ov}/10$.

1.2.4. L'impact de l'extension sur l'évolution stellaire

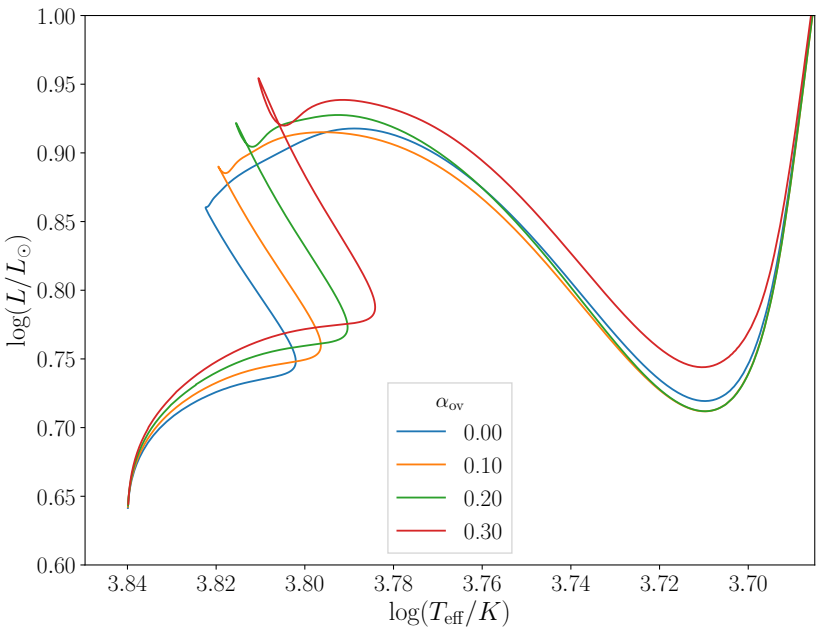

FIGURE 1.3. – Tracés évolutifs de modèles ayant des valeurs différentes de $\alpha_{\rm ov}$ dans un diagramme HR

L'incertitude liée à la définition de la taille des cœurs convectifs a un fort impact sur l'évolution de l'étoile : en effet, modifier la taille du cœur, c'est modifier la taille du réservoir d'hydrogène de l'étoile. De ce fait, les paramètres $\alpha_{\rm ov}$ ou $f_{\rm ov}$ ont une forte influence sur l'évolution stellaire. Pour illustrer cela, sont représentés en Figure 1.3 les tracés évolutifs dans un diagramme luminosité-température (Hertzsprung-Russell, HR) de modèles MESA de 1,5 $M_\odot$, ayant des valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ différentes. L'effet de l'overshoot sur les tracés évolutifs est important : des étoiles avec des cœurs plus gros atteignent des températures effectives plus faibles en séquence principale ainsi que des luminosités légèrement plus élevées. Aussi, la taille du cœur va avoir un fort impact sur la durée de la séquence principale. La Table 1.1 montre la durée de la séquence principale, définie arbitrairement par l'âge où la fraction de masse centrale en hydrogène atteint moins d'1%, des modèles de la Figure 1.3. On observe des différences de durée de séquence principale de plus de 20% entre le modèle sans overshoot et celui de $\alpha_{\rm ov} = 0{,}3$. Contraindre ce paramètre est donc obligatoire si l'on veut correctement estimer l'âge de l'étoile et la durée de sa séquence principale.

$\alpha_{\rm ov}$	Durée de la séquence principale (Ga)
0,00	2,292
0,10	2,480
0,20	2,673
0,30	2,868

Table 1.1. – Durée de la séquence principale pour un modèle de 1,5 $M_\odot$ avec différents tailles de cœur convectif

1.3. Contraintes observationnelles sur le paramètre d'overshoot

Nous avons vu que plusieurs processus physiques peuvent étendre le cœur convectif au delà de ses limites classiques, et que l'influence de cette extension sur l'évolution de l'étoile est importante. Des contraintes provenant de simulations ou d'observations sont par conséquent requises. Nous allons voir dans cette section les différentes méthodes utilisées dans la littérature.

1.3.1. L'étude des amas

La première méthode historiquement utilisée est l'étude des diagrammes couleur-magnitude des amas ouverts. En effet, comme le montre la Figure 1.3, la taille du cœur se reflète directement sur le tracé évolutif de l'étoile. La valeur de $\alpha_{\rm ov}$ influe donc sur l'aspect des diagrammes couleur-magnitude des amas, ce qui permet d'utiliser ces derniers comme contrainte indirecte de l'overshoot. Ainsi, Prather & Demarque (1974) montrent que du mélange supplémentaire au-delà du cœur permet d'expliquer les anomalies observées dans

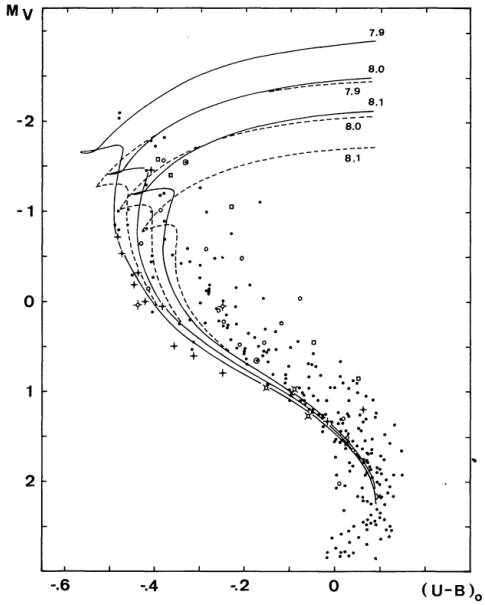

FIGURE 1.4. – Diagramme HR de l'amas des Pléiades. Différentes isochrones sont représentées avec et sans overshoot, en trait plein et pointillé respectivement. Le logarithme de l'âge des isochrones est indiqué. Figure extraite de Maeder & Mermilliod (1981).

le diagramme HR de M67. Maeder & Mermilliod (1981) arrivent à une conclusion similaire en étudiant 34 amas ouverts. La Figure 1.4, extraite de cet article, montre que la position des étoiles à la fin de la séquence principale est mieux reproduite par les isochrones avec overshoot (trait plein), qu'avec des isochrones calculées sans overshoot (trait pointillé) pour lesquelles un ajustement en âge ne suffit pas à reproduire les observations. Ils favorisent alors une valeur de distance d'overshooting égale à 0,25 H_p. Demarque et al. (1994) s'intéressent à NGC 2420 et trouvent là aussi un besoin d'extension de cœur (de l'ordre de 0,23 H_p), malgré l'utilisation de nouvelles opacités OPAL (Iglesias & Rogers, 1991), plus faibles, qui réduisent les tailles de cœur déduites du critère classique.

Enfin, plus récemment, VandenBerg et al. (2006) ont utilisé un modèle d'overshooting basé sur le critère de Roxburgh (équation 1.10), dont le paramètre libre est une fonction dépendant de la masse et de la métallicité de l'étoile. Celui-ci est nul lorsque l'étoile n'a pas de cœur convectif, et augmente progressivement entre 1,2 et 1,7 $M_\odot$ jusqu'à atteindre une valeur maximale qui reste constante pour les masses plus élevées. Ces valeurs de masse limites dépendent en outre de la métallicité de l'étoile. En utilisant ce modèle, ils arrivent à reproduire la morphologie des diagrammes couleur-magnitude de trois amas.

1.3.2. Etoiles binaires

Les paramètres stellaires (masses, rayons, luminosités...) des étoiles binaires à éclipse sont déterminés avec précision grâce à leurs caractéristiques orbitales et aux propriétés

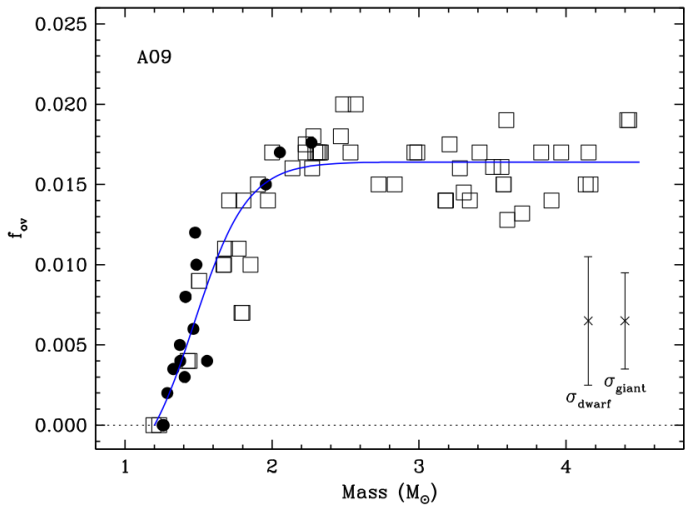

FIGURE 1.5. – Valeurs de $f_{\rm ov}$ trouvées en fonction de la masse de l'étoile. Figure tirée de Claret & Torres (2018)

des courbes de transit. En conséquence, même si elles ne contraignent que deux points du diagramme HR, celles-ci peuvent être assez fortes pour favoriser des modèles avec ou sans overshoot. Ainsi, Andersen et al. (1990) trouvent que prendre en compte l'overshoot permet de mieux reproduire les positions de binaires dans le diagramme HR. Par la suite, Claret (2007) trouve une faible dépendence du paramètre $\alpha_{\rm ov}$ avec la masse, qui sera confirmée par ses futurs travaux (Claret & Torres, 2016, 2017, 2018). La Figure 1.5, tirée de Claret & Torres (2018), montre une claire corrélation de $f_{\rm ov}$ avec la masse avant d'atteindre un plateau à $f_{\rm ov} \approx 0{,}018$ pour $M > 2{,}0\,M_\odot$. A noter cependant que ces résultats ont été discutés par Constantino & Baraffe (2018) (auxquels ont répondu Claret & Torres 2019), qui ne trouvent pas de contraintes significatives sur $f_{\rm ov}$ en utilisant une méthode similaire. Enfin, en utilisant une approche similaire, Stancliffe et al. (2015) modélisent 12 systèmes binaires et trouvent des extensions de cœur convectif entre 0,15 et 0,5 hauteurs de pression, sans trouver en revanche de corrélation avec la masse.

1.3.3. La sismologie

La sismologie est l'étude des ondes et surtout modes dans les étoiles dans le but d'explorer leur intérieur. En effet, chaque mode sonde une région diffèrente de l'intérieur stellaire : de ce fait, étudier le spectre complet d'oscillation d'une étoile permet de contraindre sa structure. On comprend dès lors que la sismologie est un moyen unique pour pouvoir sonder les cœurs convectifs. Etant la méthode utilisé dans cette thèse, elle est développée en profondeur dans la partie suivante.

2. L'astérosismologie

La seule façon de sonder de façon directe les intérieurs stellaires est l'étude de leurs modes d'oscillation. Cette discipline, appelée *astérosismologie*, est l'approche utilisée durant cette thèse. En conséquence, nous allons détailler les bases théoriques des oscillations observées dans les étoiles, afin de mieux en comprendre les caractéristiques. Nous allons ensuite nous attarder sur les propriétés de la classe d'oscillateurs étudiée durant cette thèse : les oscillateurs de type solaire. Enfin, nous verrons les applications concrètes de l'astérosismologie à l'étude des cœurs convectifs.

2.1. Équations de base de la sismologie stellaire

Dans cette section, nous allons suivre le déroulement de Unno et al. (1989) et Christensen-Dalsgaard (2003) afin de retrouver les caractéristiques principales des modes d'oscillations. Les effets de la rotation seront négligés.

2.1.1. Équations de base de structure et évolution stellaires

Pour obtenir les équations d'oscillations stellaires, nous partons des équations de l'hydrodynamique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \qquad \text{Équation de continuité} \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \qquad \text{Équation d'Euler} \qquad (2.2)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \qquad \text{Équation de Poisson} \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S = \frac{1}{T}(\epsilon_{\text{nucl}}) - \frac{1}{\rho T} \nabla \cdot \vec{F} \qquad \text{Équation d'énergie} \qquad (2.4)$$

$\vec{v}$ est la vitesse du fluide, S l'entropie, Φ le potentiel gravitationnel, ϵ_{nucl} le taux d'énergie volumique produit par les réactions nucléaires (on néglige les pertes par neutrinos), $\vec{F}$ le flux d'énergie. Si celle-ci est transportée par le rayonnement, il s'écrit alors, par approximation diffusive, $\vec{F} = -k_{\text{rad}} \nabla T$.

2.1.2. Analyse perturbative

Afin d'obtenir les équations d'oscillation à partir de ces équations, on effectue une analyse perturbative en posant :

$$f(\vec{r},t) = f_0(\vec{r}) + f'(\vec{r},t) \tag{2.5}$$

f étant ici une fonction quelconque, f_0 sa valeur à l'équilibre (qui suit donc les équations 2.1-2.4) et f' la perturbation *eulérienne*, petite par rapport aux quantités d'équilibre, de telle façon qu'elle peut être négligée au second ordre, ce qui nous permet de linéariser les équations. On définit de plus le déplacement $\vec{\xi}$ tel que :

$$\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{r_0} \tag{2.6}$$

avec $\vec{r}$ la position d'un élément de fluide après perturbation, et $\vec{r_0}$ sa position à l'équilibre. $\vec{\xi}$ est lui même séparé en composantes radiales et horizontales, respectivement $\vec{\xi_r}$ et $\vec{\xi_h}$, tout comme l'opérateur gradient (respectivement $\partial/\partial r\vec{e_r}$ et ∇_h). Enfin, nous nous plaçons dans l'approximation adiabatique. En effet, celle-ci simplifie grandement les équations et est très bien vérifiée dans la majeure partie des cas : pour le Soleil, le temps caractéristique de transfert thermique est de 10^3 ans dans l'enveloppe et de 10^7 ans en moyenne, ce qui est bien supérieur au temps caractéristique des oscillations, qui est généralement de l'ordre de la minute ou de l'heure. À noter que cela n'est pas vérifié dans les couches les plus superficielles : cela est une des causes des effets des surface, sur lesquels on reviendra en Section 7.2.2. L'analyse perturbative nous donne alors :

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\rho' + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial}(r^2\rho_0\xi_r)\right] = -\nabla_\mathrm{h}^2 p' - \rho_0\nabla_\mathrm{h}^2\Phi^2 \tag{2.7}$$

$$\rho_0\frac{\partial^2\xi_r}{\partial t^2} = -\frac{\partial p'}{\partial r} - \rho' g_0 - \rho_0\frac{\partial\Phi'}{\partial r} \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi'}{\partial r}\right) + \nabla_\mathrm{h}^2\Phi' = 4\pi G\rho' \tag{2.9}$$

Ces équations sont telles que les variables de temps, radiales et angulaires peuvent être séparées. Dès lors, la solution peut être écrite sous la forme $f(t,r,\theta,\phi) \propto f_1(t)f_2(r)f_3(\theta,\phi)$. On pose $f_1(t) = \exp(i\omega t)$, avec ω une fréquence angulaire. On pose aussi $f_2(r) = \tilde{f}(r)$, l'amplitude, que l'on cherchera à déterminer à partir de la structure de l'étoile. Enfin, le seul opérateur différentiel horizontal est ∇_h^2. La séparabilité des variables est donc possible si f_3 est une fonction propre de cet opérateur, ce qui correspond à la forme suivante :

$$f_3(\theta,\phi) = (-1)^m c_{l,m} P_l^m(\cos\theta)\exp(im\phi) \tag{2.10}$$

avec P_l^m un polynôme de Legendre et $c_{l,m}$ une constante de normalisation. Cette fonction, couramment notée Y_l^m, est une harmonique sphérique de degré l et d'ordre azimutal m. Elle est représentée sur la Figure 2.1, pour différentes valeurs de l et m entre 0 et 3. On peut noter que l représente le nombre total de lignes nodales (i.e. où $f_3 = 0$), et m représente le nombre de lignes nodales longitudinales. Les modes $l = 0$ sont ainsi appelés

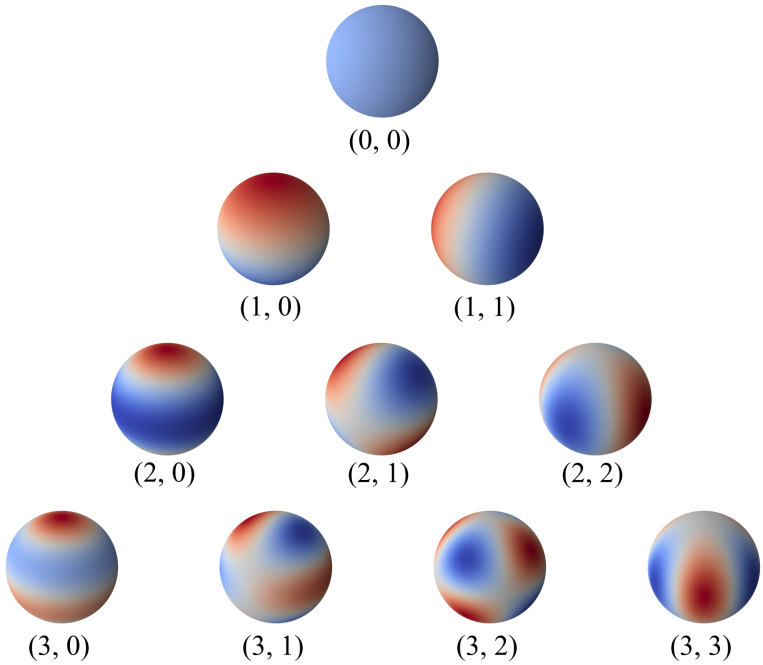

FIGURE 2.1. – Représentation des harmoniques sphériques, pour différentes valeurs de couples (l,m).

modes radiaux, $l = 1$ modes dipolaires et $l = 2$ modes quadripolaires. On rajoute à ces deux nombres le nombre n, appelé ordre radial, qui représente le nombre de nœuds radiaux (i.e. où $\tilde{f} = 0$). On note que dans le cas où la rotation est ignorée, on suppose une symétrie sphérique : on observe alors une dégénérescence en m, qui n'apparaît en conséquence pas dans les équations régissant la dynamique des oscillations.

On intègre alors cette expression dans les équations linéarisées, et on obtient les équations d'oscillation adiabatiques. On enlève le tilde de l'expression de l'amplitude et l'index 0 des valeurs à l'équilibre afin de simplifier l'écriture. On trouve alors :

$$\frac{\mathrm{d}\xi_r}{\mathrm{d}r} = -\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right)\xi_r + \frac{1}{\rho c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)p' \tag{2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}r} = \rho(\omega^2 - N^2)\xi_r + \frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}p' - \rho\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r} \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi'}{\mathrm{d}r}\right) = 4\pi G\left(\frac{p'}{c^2} + \frac{\rho\xi_r}{g}N^2\right) + \frac{l(l+1)}{r^2}\Phi' \tag{2.13}$$

avec Γ_1 l'indice adiabatique, $c^2 = \Gamma_1 p/\rho$ la vitesse du son. Aussi, deux fréquences sont introduites ici. La première est la *fréquence de Lamb*, S_l, définie par :

$$S_l^2 = \frac{l(l+1)c^2}{r^2}. \tag{2.14}$$

La deuxième est la *fréquence de Brunt-Vaïsälä*, définie par :

$$N^2 = g\left(\frac{1}{\Gamma_1 p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right). \tag{2.15}$$

Celle-ci représente notamment la fréquence d'oscillation d'une parcelle de fluide autour de sa position d'équilibre dans un milieu stratifié stable. Dans cette thèse, nous utiliserons surtout une autre expression de cette fréquence, sous la forme :

$$N^2 = \frac{\delta g}{H_p}\left(\nabla_{\mathrm{ad}} - \nabla + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu\right). \tag{2.16}$$

Celle-ci fait en effet apparaître les trois gradients ∇_{ad}, ∇ et ∇_μ couramment utilisés en structure stellaire.

2.1.3. Le piégeage des modes

Afin de déduire plus d'informations sur le comportement des modes, des simplifications supplémentaires sont requises. En effet, les équations d'oscillations 2.11-2.13 sont du quatrième ordre et comportent quatre variables dépendantes : ξ_r, p', Φ' et $\mathrm{d}\Phi'/\mathrm{d}r$, ce qui les rend difficiles à résoudre. En conséquence, on effectue communément l'*approximation de Cowling* (Cowling, 1941), qui consiste à négliger la perturbation du potentiel gravitationnel Φ' : $|\Phi'|$ est en effet petit si l ou n est grand. Cette approximation est particulièrement fausse dans le cas des ordres de faibles l et notamment dipolaires (Takata 2006, voir Section 2.1.5). À noter que l'approximation de Cowling est ici faite uniquement pour permettre la résolution analytique, et que Φ' est pris en compte dans les codes d'oscillations.

En négligeant donc Φ' et $\mathrm{d}\Phi'/\mathrm{d}r$, le système d'équations d'oscillations devient un système du second ordre. Celui-ci peut être réécrit, d'après la formulation de Unno et al. (1989), sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{X}}{\mathrm{d}r} = h(r)\frac{r^2}{c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right)\mathcal{P} \tag{2.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2 h(r)}(\omega^2 - N^2)\mathcal{X} \tag{2.18}$$

avec :

$$\mathcal{X} = r^2\xi_r \exp\left(-\int_0^r \frac{g}{c^2}\mathrm{d}r\right), \mathcal{P} = \frac{p'}{\rho}\exp\left(-\int_0^r \frac{N^2}{g}\mathrm{d}r\right), \tag{2.19}$$

et

$$h(r) = \exp\left[\int_0^r \left(\frac{N^2}{g} - \frac{g}{c^2}\right)\mathrm{d}r\right]. \tag{2.20}$$

Pour permettre d'obtenir des informations qualitatives sur le comportement des modes, on effectue d'abord une analyse locale en négligeant les variations spatiales des équations 2.17 et 2.18. On a en conséquence $\mathcal{X}(r), \mathcal{P}(r) \sim \exp(ik_r r)$ avec k_r défini par :

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right)\left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right) \tag{2.21}$$

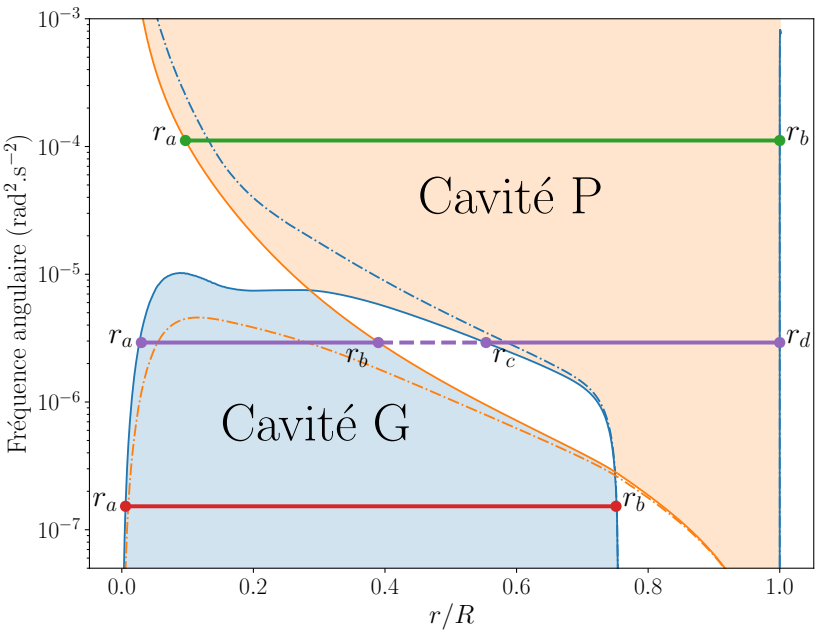

FIGURE 2.2. – Diagramme de propagation pour une étoile de 1,0 $M_\odot$ en séquence principale. La fréquence de Lamb $l = 1$ est représentée en orange et la fréquence de Brunt-Väisälä en bleu, en trait plein. En trait-pointillé sont représentés les équivalents modifiés de Takata (2006). Sont aussi représentées les fréquences d'un mode p, g, et mixte respectivement en vert rouge et violet.

Deux cas de figure apparaissent :

— Si $\omega^2 > S_l^2, N^2$ ou si $\omega^2 < S_l^2, N^2$ alors k_r^2 est positif, donc k_r est réel et l'onde se propage.

— Si $S_l^2 > \omega^2 > N^2$ ou $N^2 > \omega^2 > S_l^2$, alors k_r est imaginaire et l'onde est évanescente.

On déduit de cette analyse que les modes se propagent seulement dans les régions définies par les fréquences de Lamb et Brunt-Väisälä, qu'on appelle des cavités de propagation. On en définit alors deux types :

— Les cavités de hautes fréquences, où $\omega^2 > S_l^2, N^2$. Comme on peut le voir sur la Figure 2.2, cette cavité délimite un domaine fréquentiel bien supérieur à N^2. En conséquence, les modes se propageant dans cette cavité sont tels que $\omega^2 \gg N^2$, de sorte qu'on peut approximer k_r^2 par :

$$k_r^2 \approx \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{S_l^2}{\omega^2}\right). \tag{2.22}$$

On remarque que leur comportement est dominée par la vitesse du son, ces modes sont donc acoustiques et leur force de rappel est la pression : ce sont les modes p. La cavité est en conséquence nommée cavité P. Un exemple du domaine de propagation d'un tel mode est représenté par une ligne horizontale verte dans la Figure 2.2.

— Les cavités de basses fréquences, où $\omega^2 < S_l^2, N^2$. Dans ce cas, $\omega^2 \ll S_l^2$, et donc :

$$k_r^2 \approx \frac{l(l+1)}{r^2}\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right). \tag{2.23}$$

Cette fois-ci, leur comportement est dominé par la fréquence de Brunt-Väisälä, leur force de rappel résulte de la poussée d'Archimède : ce sont des modes g, et la cavité est appelée cavité G. La ligne horizontale rouge en est un exemple dans la Figure 2.2.

On peut déjà tirer des premières conclusions sur ce que sondent ces deux types de mode. Ainsi, les modes p sont sensibles au profil de vitesse du son. De plus, les ondes de pression se propagent jusqu'à la surface ce qui permet leur détection. De l'autre côté, les modes g dépendent de la fréquence de Brunt-Väisälä et donc des profils thermiques et chimiques (équation 2.16) dans les régions centrales de l'étoile. En revanche, contrairement aux ondes acoustiques, les ondes de gravité ne se propagent pas jusqu'à la surface, du moins pour les étoiles de masses proches de celle du Soleil, c'est-à-dire ayant une enveloppe convective. De ce fait, leurs amplitudes à la surface sont extrêmement faibles, ce qui rend leur détection quasi-impossible. Des affirmations de détection de modes g dans le Soleil ont cependant déjà été faites (García et al., 2004; Fossat et al., 2017), mais celles-ci restent controversées (Schunker et al., 2018; Appourchaux & Corbard, 2019).

Entre ces deux cas, certains modes peuvent se propager à la fois dans la cavité G dans la région centrale de l'étoile et dans la cavité P dans la région superficielle : ce sont des modes *mixtes*. Un exemple est représenté par une ligne horizontale violette sur la Figure 2.2. Ces modes sont au cœur de mon travail de thèse et seront développés en profondeur dans les Chapitres 3.3 et 5.

2.1.4. Analyse asymptotique

Dans cette partie, nous allons continuer l'étude des équations d'oscillations afin d'en tirer une expression analytique des fréquences des modes propres, et ainsi pouvoir les relier aux propriétés de l'étoile. Pour cela, nous effectuons une analyse asymptotique (c'est-à-dire pour des valeurs de n élevées) des équations 2.17 et 2.18. Il est possible de les réécrire sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}r^2} + \left[k_r^2 - f(P)\right] v = 0 \tag{2.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \left[k_r^2 - f(Q)\right] w = 0 \tag{2.25}$$

avec :

$$P(r) = \frac{r^2}{c^2}\left(\frac{S_l^2}{\omega^2} - 1\right) h(r), \quad Q(r) = \frac{1}{r^2}(\omega^2 - N^2) h(r)^{-1} \tag{2.26}$$

ainsi que :

$$v = \mathcal{X}|P|^{-1/2}\rho_c^{1/2}, \quad w = \mathcal{P}|Q|^{-1/2}\rho_c^{1/2}, \quad f(x) = |x|^{1/2}\frac{\mathrm{d}^2|x|^{-1/2}}{\mathrm{d}r^2} \tag{2.27}$$

ρ_c étant la densité au centre de l'étoile. Plusieurs remarques peuvent être faites sur ces équations.

Tout d'abord, si l'on se place dans le cas où n est élevé, la longueur d'onde du mode est petite par rapport à l'échelle de variations des quantités d'équilibre de l'étoile. En conséquence, $f(P)$ et $f(Q)$, qui contiennent les dérivées secondes de ces quantités, sont négligeables par rapport à k_r^2.

On note ensuite que ces équations comportent des singularités : v diverge lorsque $S_l^2 = \omega^2$ et w diverge lorsque $N^2 = \omega^2$. En outre, ces points singuliers coïncident avec les points tournants des équations, qui sont définies par les régions où $k_r^2 = 0$, $f(P)$ et $f(Q)$ étant négligés. D'après l'équation 2.21, cela correspond à $S_l^2 = \omega^2$ ou $N^2 = \omega^2$. La singularité de v est donc le point tournant de l'équation 2.25, noté r_a, et la singularité de w est le point tournant de l'équation 2.24, noté r_b. On remarque que dans les modèles, r_b coincide avec la surface de l'étoile pour la cavité P, comme c'est le cas dans la Figure 2.2. En conséquence, il n'y a pas de singularité dans w à haute fréquence. Cependant, afin de conserver une approche générale qui est aussi compatible avec le cas de la cavité G, le point singulier r_b est considéré quelconque.

Le principe de l'approche asymptotique, comparable à l'approximation JWKB utilisée en mécanique quantique, est le suivant : les expressions asymptotiques des équations 2.24 et 2.25 sont d'abord trouvées, ce qui nous permet donc d'avoir une forme des fonctions propres loin de leurs points tournants respectifs. On utilise alors les équations 2.17 et 2.18 pour exprimer w à partir de v et vice-versa, ce qui permet d'obtenir l'expression de ces deux fonctions à proximité de leurs points singuliers. Il reste à relier les différentes expressions de w et v, obtenues soit d'après les équations 2.24–2.25 soit d'après les équations 2.17–2.18. On applique ensuite la condition au bord, de sorte à annuler la propagation de l'onde vers l'extérieur de l'étoile, pour obtenir la condition aux modes propres suivante :

$$\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r = n\pi \tag{2.28}$$

avec n un entier. D'après cette condition, seul un nombre dénombrable de fréquences est possible, conformément aux observations.

Pour avoir une expression analytique des fréquences, on s'intéresse aux cas des modes de bas degré l, dont le point tournant interne est proche du centre : $r_a = 0$. De plus, le point tournant extérieur étant proche de la surface comme noté plus haut, on prend $r_b = R$. On peut alors se libérer de la dépendance à r_a et r_b et obtenir l'expression suivante :

$$\nu_{nl} = \left(n + \frac{l}{2} + \alpha\right) \Delta\nu \tag{2.29}$$

avec ν_{nl} la fréquence d'un mode de degré l et d'ordre radial n, α une fonction de la fréquence dépendante des propriétés des régions superficielles de l'étoile, et $\Delta\nu$ défini par :

$$\Delta\nu = \left(2\int_0^R \frac{\mathrm{d}r}{c}\right)^{-1} \tag{2.30}$$

avec R le rayon de l'étoile (Tassoul, 1980). Cette quantité, nommée la *grande séparation*, est une importante observable sismique. C'est en effet la différence entre les fréquences de deux modes de même degré l et d'ordre radiaux consécutifs, au premier ordre dans l'approximation asymtotique. On déduit de ce résultat une propriété de régularité intéressante des modes p : ils sont, pour des valeurs des n élevées (dans la pratique, $n \gtrsim 10$) approximativement également espacés en fréquence. De plus, on remarque que, d'après cette formule, les modes ν_{nl} et $\nu_{n-1,l+2}$ ont les mêmes fréquences. Or cette différence, définie comme la *petite séparation* et notée $\delta\nu$, n'est pas nulle d'après les observations. Il est donc intéressant de poursuivre l'analyse à l'ordre suivant. On trouve alors (Tassoul, 1980) :

$$\omega_{nl} = \left(n + \frac{l}{2} + \alpha\right)\Delta\nu - (Al(l+1) - \delta)\frac{\Delta\nu^2}{\nu_{nl}} \tag{2.31}$$

avec :

$$A = \frac{1}{4\pi^2\Delta\nu}\left(\frac{c(R)}{R} - \int_0^R \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{r}\right) \tag{2.32}$$

On voit notamment que $\delta\nu$, à travers le terme A de l'équation 2.31, est principalement sensible aux variations de vitesse du son dans le cœur de l'étoile. Il est donc un indicateur sismique important pour sonder les régions les plus centrales de l'étoile. On reviendra dans la section 2.3.2 sur son utilisation pour contraindre les cœurs convectifs d'oscillateurs p en séquence principale.

Modes g

Une analyse similaire est possible avec les modes g, qui donne une condition de quantification analogue :

$$\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r = n\pi. \tag{2.33}$$

On trouve alors l'expression suivante :

$$\nu_{nl} = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\pi^2(n+\alpha_{l,g})}\int_{r_1}^{r_2} N\frac{\mathrm{d}r}{r}, \tag{2.34}$$

avec $\alpha_{l,g}$ une constante dépendant de l. On peut réécrire l'équation 2.34 sous la forme, pour Π_{nl} la période des modes :

$$\Pi_{nl} = \frac{\Pi_0}{l(l+1)}(n+\alpha_{l,g}) \tag{2.35}$$

avec :

$$\Pi_0 = 2\pi^2\left(\int_{r_1}^{r_2} N\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^{-1} \tag{2.36}$$

On voit alors que, si l'on ignore les variations de r_a et r_b, les modes g de même degré sont asymptotiquement régulièrement espacés en période. On note la présence de la fréquence de Brunt-Väisälä dans l'expression de Π_0. Le signe de N^2 indiquant la stabilité du milieu, cette expression montre le fort intérêt que peuvent représenter les modes g pour contraindre les cœurs convectifs : nous reviendrons sur ce point dans la Section 2.3.1.

Modes mixtes

Nous avons vu l'approche asymptotique pour les modes de hautes fréquences p purs et de basses fréquences g purs. Dans les deux cas, les modes ne se propageaient que dans une seule cavité, respectivement P et G. Dans le cas *mixte*, c'est-à-dire dans le cas où les ondes se propagent à la fois dans la cavité P et dans la cavité G, une approche similaire à base de raccordement de fonctions d'Airy est possible.

Si l'on nomme les quatre points tournants r_a, r_b, r_c et r_d (avec $r_a < r_b < r_c < r_d$) alors la condition de fréquences propres est :

$$\cot\left(\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r\right) \tan\left(\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r\right) = \frac{1}{4} \exp\left(-2\int_{r_b}^{r_c} -ik_r \mathrm{d}r\right) \tag{2.37}$$

Le terme de droite, nommé q, est relié à l'importance du couplage entre les cavités P et G. Celui-ci est directement relié aux valeurs de k_r dans la zone évanescente entre les deux cavités. On notera que le principe de l'analyse JWKB, où l'on relie deux solutions asymptotiques, implique des cavités et zones évanescentes grandes et donc un couplage faible ($q \ll 1$). En continuant cette approximation, on déduit différentes conditions de modes propres possibles :

$$\int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O(q) \tag{2.38}$$

ou

$$\int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r = m\pi + O(q) \tag{2.39}$$

ou

$$\begin{gathered} \int_{r_a}^{r_b} k_r \mathrm{d}r = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \pm O(\sqrt{q}) \\ \text{et} \\ \int_{r_c}^{r_d} k_r \mathrm{d}r = m\pi \mp O(\sqrt{q}) \end{gathered} \tag{2.40}$$

avec n et m des entiers.

Ces trois conditions possibles, que nous appellerons (1), (2) et (3), ne peuvent pas être atteintes en même temps mais seulement séparément. Imaginons alors un mode qui respecte la condition (1). Celui-ci se comporte de façon quasi-similaire à un mode g, comme en témoigne la proximité (à $O(q)$ près) entre les équations 2.38 et 2.33 : la majorité de l'énergie de ce mode sera contenue dans la cavité G, c'est un mode g-dominé. S'il respecte la condition (2), il aura cette fois-ci un comportement quasi-similaire à un mode p : la majorité de l'énergie de ce mode sera contenu dans la cavité P, c'est un mode p-dominé. En revanche, s'il respecte *en même temps* $\int_{\mathrm{G}} k_r \mathrm{d}r \sim (n + 1/2)\pi$ et $\int_{\mathrm{P}} k_r \mathrm{d}r \sim m\pi$ alors c'est la condition (3) qui est respectée. Cette dernière a pour solution deux fréquences légèrement différentes (comme l'indiquent les symboles $\pm$ et $\mp$) : deux modes de nature p et g ne peuvent partager la même fréquence. En conséquence se produit ce qu'on appelle un

croisement évité, nommé ainsi car les fréquences de modes p et g donnent l'impression de « s'éviter » sans jamais se croiser. Ce principe a été observé notamment dans l'atmosphère terrestre (e.g. Langer et al. 1985) et pour la première fois dans des modèles stellaires par Scuflaire (1974) et Osaki (1975). Une illustration de ce phénomène à travers l'évolution des fréquences d'une étoile post-séquence principale sera montrée plus loin dans le manuscrit, Figure 3.2.

2.1.5. Equations sans approximation de Cowling pour modes dipolaires

Plus récemment, Takata (2006) a mené l'étude de modes dipolaires en prenant en compte les variations de potentiel gravitationnel. En effet, Takata (2005) montre que pour ces modes, il est possible de diminuer l'ordre des équations d'oscillations 2.11-2.13 de 4 à 2 sans négliger Φ' mais plutôt en utilisant une intégrale déduite de la conservation de quantité de mouvement. Il pose alors les fréquences de Lamb et Brunt-Väisälä modifiées telles que :

$$\mathcal{N}^2 = N^2 J^{-2} \tag{2.41}$$

$$\mathcal{S}_1^2 = S_1^2 J^2 \tag{2.42}$$

avec :

$$J = 1 - \frac{\rho}{\rho_{\rm av}} \tag{2.43}$$

avec $\rho_{\rm av}$ la densité moyenne à l'intérieur du rayon considéré. Ces dernières définissent de nouvelles cavités P et G, sans avoir recours à l'approximation de Cowling. La Figure 2.2 montre, en trait-pointillé, les deux fréquences modifiées pour une étoile en séquence principale de masse solaire. On voit notamment que c'est la fréquence de Brunt-Väisälä modifiée qui délimite la cavité P et la partie externe de la cavité G, et la fréquence de Lamb modifiée qui délimite la partie interne de la cavité G. On note de plus que la taille de la cavité P est légèrement impactée par la prise en compte des variations de Φ'.

Aussi, Takata (2016a,b) a appliqué ce formalisme aux modes mixtes, et a ainsi trouvé une nouvelle expression du couplage q entre les cavités P et G. Celle-ci ne découle d'ailleurs pas de l'hypothèse d'un couplage faible. Il trouve alors :

$$q = \frac{1 - (1 - e^{-2\pi X})^{1/2}}{1 + (1 - e^{-2\pi X})^{1/2}}, \tag{2.44}$$

avec :

$$X = \frac{1}{\pi} \int_{r_b}^{r_c} -ik_r \mathrm{d}r + X_b. \tag{2.45}$$

X_b est un terme négligeable par rapport au premier terme de X, sauf dans le cas de zones évanescentes fines. Le couplage alors trouvé est généralement plus important qu'en utilisant l'équation classique. Notamment, Mosser et al. (2017) montrent que prendre en compte Φ' est nécessaire pour pouvoir correctement calculer le couplage, qui peut être un indicateur sismique supplémentaire intéressant pour les étoiles montrant des modes

mixtes. Ils trouvent à partir d'observations des valeurs de couplage q supérieures à 0,25 pour les jeunes géantes et les sous-géantes tardives, indiquant un couplage fort pour ce type d'étoiles : le formalisme de Takata est donc nécessaire pour correctement les modéliser.

2.1.6. La classification des modes

Un mode, dans une étoile sans rotation, peut être classé de façon unique par son nombre de nœuds radiaux n dans sa cavité de propagation et son degré l. On note alors n_g le nombre de nœuds de ξ_r dans la cavité G, et n_p le nombre de nœuds de ξ_r dans la cavité P. La convention (Scuflaire, 1974) est de définir n tel que :

$$n = n_p - n_g \tag{2.46}$$

Il peut être montré que la détermination de n_p et n_g et donc n est satisfaisante si l'on suit l'approximation de Cowling (Gabriel & Scuflaire, 1979). Cependant, comme spécifié dans la Section 2.1.5, cette dernière est mal vérifiée pour les modes dipolaires dans les étoiles ayant un cœur dense. En conséquence, l'utilisation du schéma 2.46 échoue : cela a notamment été observé durant cette thèse lors du calcul de fréquences de sous-géantes via le code LOSC (Scuflaire et al., 2008), avec des nombres radiaux incohérents, c'est-à-dire qu'un mode ayant une évolution de fréquence continue avec l'évolution de l'étoile ne garde pas le même n. Takata (2006) propose alors une classification fonctionnant même sans approximation de Cowling, en utilisant les nœuds de :

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{3g}\left[\frac{\delta\Phi}{r} - \delta\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right)\right]. \tag{2.47}$$

Celle-ci, implémentée dans ADIPLS, trouve effectivement des nombres n cohérents pour les étoiles post-séquence principale.

2.1.7. L'inertie des modes

Nous rappelons brièvement dans cette section la notion d'inertie d'un mode, celle-ci étant un indicateur sismique intéressant. Notée généralement E, elle est définie par :

$$E = \frac{4\pi \int_0^R [|\xi_r(r)|^2 + l(l+1)|\vec{\xi_h}(r)|^2]\rho r^2 \mathrm{d}r}{M[|\xi_r(R)|^2 + l(l+1)|\vec{\xi_h}(R)|^2]}, \tag{2.48}$$

M étant la masse totale de l'étoile. À cause du terme ρr^2 dans l'intégrande, les modes à l'inertie élevée sont ceux dont l'amplitude de déplacements est importante dans les régions internes de l'étoile. Les modes se propageant dans la cavité G, plus profonde que la cavité P, ont donc une inertie plus élevée. Cela permet notamment de distinguer les modes mixtes ayant une nature dominée g, leur inertie étant importante du fait que la majorité de leur énergie est piégée dans les régions centrales de l'étoile.

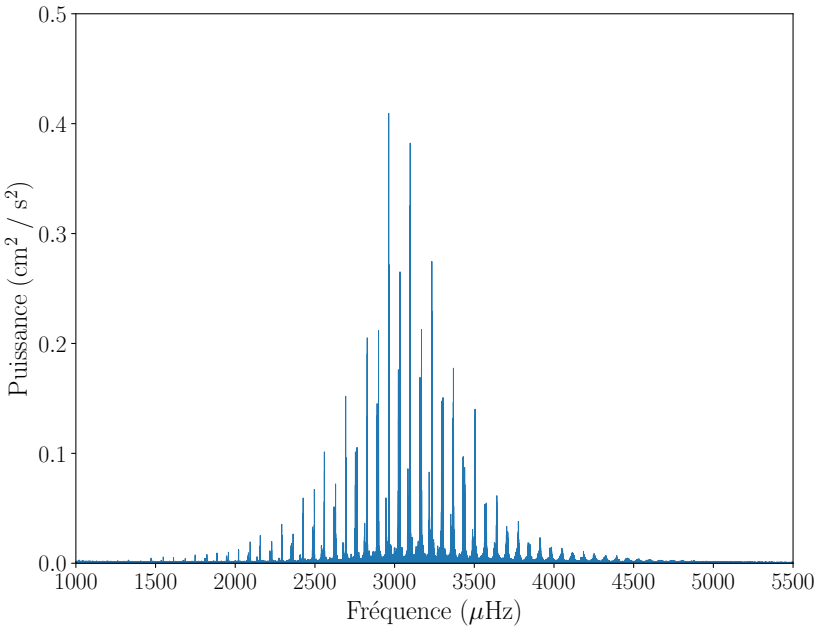

FIGURE 2.3. – Spectre d'oscillation du Soleil, données provenant de BiSON (Davies et al., 2014; Hale et al., 2016).

2.2. Les oscillateurs de type solaires

Maintenant que nous avons vu les caractéristiques des oscillations adiabatiques non-radiales, nous nous intéressons aux propriétés des oscillateurs étudiés durant cette thèse : les oscillateurs de type solaire.

2.2.1. Caractéristique des oscillations

Dans les oscillateurs de type solaire, les mouvements convectifs de l'enveloppe agissent comme un « bruit » qui rayonne acoustiquement et excitent une large gamme de fréquences, parmi lesquelles se trouvent les modes propres de l'étoile. Ces derniers, stables, sont donc à la fois excités et amortis en permanence. Ces modes acoustiques, radiaux et non-radiaux, sont alors de très faibles amplitudes, avec des vitesses à la surface de l'ordre du cm/s jusqu'au m/s, et des variations de luminosité de l'ordre du millionnième de magnitude (e.g., Aerts et al. 2010). Ce mécanisme permet d'exciter un nombre important de modes, comme observé sur la Figure 2.3 qui représente le spectre d'oscillation du Soleil observé par BiSON (Chaplin et al., 1996). La multitude des modes excités en fait des cibles intéressantes du point de vue sismologique : chaque mode « sondant » une zone plus ou moins profonde de l'étoile, en avoir de nombreux permet de véritablement explorer l'intérieur de l'étoile.

On comprend d'après le principe du mécanisme d'excitation qu'une enveloppe convective est nécessaire pour que l'étoile puisse montrer de tels modes. De plus, celle-ci doit être assez

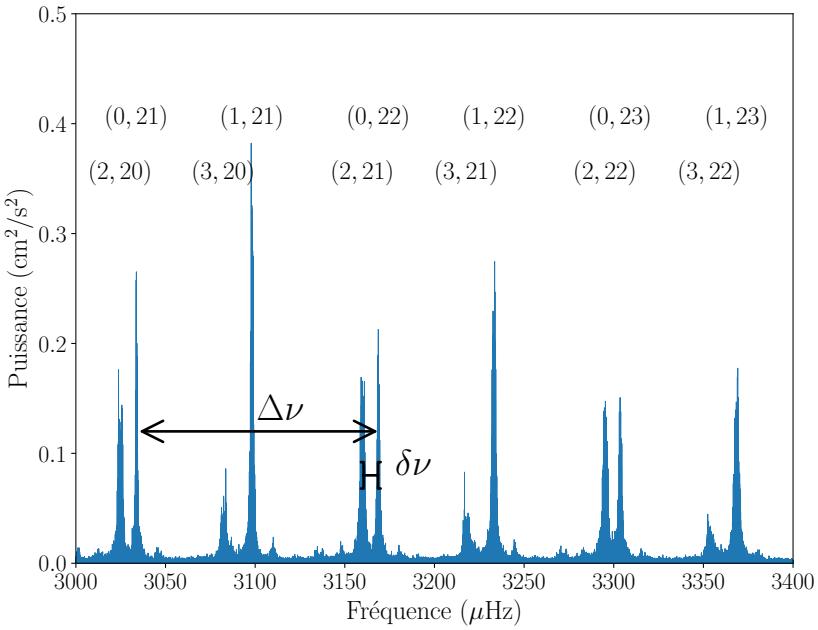

FIGURE 2.4. – Zoom sur le spectre solaire.

épaisse pour que la convection puisse être suffisamment vigoureuse. On trouve donc de tels modes dans les étoiles de séquence principale de masse $M \lesssim 1{,}5\,M_\odot$, ainsi que dans les étoiles sous-géantes et les géantes rouges.

Ce type d'oscillateur est aussi intéressant car le nombre radial n des modes visibles est généralement élevé, de l'ordre de 10 pour les étoiles en séquence principale, les sous-géantes et les jeunes géantes. En conséquence, les fréquences observées présentent les régularités trouvées grâce à l'approche asymptotique dans le chapitre précédent. La Figure 2.3, qui est un zoom sur le spectre du Soleil, en est une illustration. On y retrouve la grande séparation $\Delta\nu$ et la petite séparation $\delta\nu$, toutes deux représentées.

L'amplitude des modes excités stochastiquement dépend à la fois des caractéristiques du mouvement convectif et des caractéristiques du mode lui-même (e.g., Samadi & Goupil 2001; Belkacem et al. 2006). Globalement, l'enveloppe des amplitudes des oscillations prend la forme d'une gaussienne, comme on peut le voir sur la Figure 2.3. Le maximum de cette gaussienne se trouve à une fréquence appelée $\nu_{\max}$, qui vaut environ $3050\,\mu$Hz pour le Soleil. On notera de plus que, si le temps d'observation est inférieur au temps de vie du mode (i.e. le temps caractéristique d'amortissement), alors celui n'est pas résolu. Dans ce cas, l'amplitude dépend aussi de l'inertie du mode. Cela est notamment important pour les étoiles plus évoluées (Dupret et al., 2009).

2.2.2. Historique des détections de modes de type solaire

Étudier les modes du Soleil : l'héliosismologie

Comme le nom de la catégorie d'oscillateurs l'indique, les modes d'oscillateurs de type solaire ont été en premier détectés dans le Soleil, dans les années 60 (Leighton et al., 1962; Evans & Michard, 1962). Ces oscillations, de période d'environ cinq minutes, ont d'abord été attribuées à des mouvements convectifs. Ce sont Ulrich (1970) et Leibacher & Stein (1971) qui ont réinterprété ces oscillations comme des modes propres acoustiques du Soleil. La proximité de notre étoile et la qualité grandissante des mesures ont permis la détection de modes jusqu'à des degrés l égaux à 900 (Rabello-Soares et al., 2008), Les principaux instruments utilisés pour cela ont été IRIS (Fossat, 1991), BiSON et GONG (Harvey et al., 1996) au sol, ainsi que GOLF (Gabriel et al., 1997), MDI (Scherrer et al., 1995) et HMI (Hoeksema et al., 2018) dans l'espace, les deux premiers dans la sonde SOHO et le dernier dans SDO. Tous ces instruments utilisent l'effet Doppler pour mesurer le champ de vitesse à la surface du Soleil et en déduire ses modes d'oscillations. La découverte de nombreuses fréquences de modes propres du Soleil a permis de fortement contraindre la structure de celui-ci, notamment son profil de rotation (Duvall et al., 1984) et de vitesse du son (Christensen-Dalsgaard et al., 1985), dans une discipline nommée *héliosismologie*.

L'observation sismique d'autres étoiles : l'astérosismologie

Pour les étoiles lointaines, la détection des oscillations est difficile, notamment du fait de leurs faibles amplitudes. De plus, leurs surfaces ne peuvent pas être résolues, ou ne peuvent l'être dans des conditions permettant leur étude sismique. Se passe alors un phénomène d'annulation : un mode de degré l élevé comportera de nombreux secteurs visibles (voir la Figure 2.1) qui auront tendance à s'annuler. De ce fait, l'étude astérosismologique d'étoiles non résolues est généralement limitée, dans le cas des étoiles de type solaire, à des modes $l \lesssim 2$ et dans de rares cas jusqu'à $l = 4$ (Lund et al., 2017).

Brown et al. (1991) effectuent la première détection possible d'oscillations de type solaires dans Procyon, confirmée plus tard par Martić et al. (1999) et Barban et al. (1999). Kjeldsen et al. (1995) effectuent la première détection de modes individuels sur η Boo, confirmée par Kjeldsen et al. (2003). Bouchy & Carrier (2001) arrivent à détecter plus de 16 modes dans l'étoile voisine α Cen A, ouvrant la voie à des études astérosismologiques de celle-ci (e.g. Miglio & Montalbán 2005; de Meulenaer et al. 2010). Enfin, un important programme d'observation, regroupant 11 télescopes, a été entrepris dans le but d'obtenir un spectre d'oscillation détaillé de Procyon. Cela a abouti à la détection de plus de 57 modes dans l'étoile (Arentoft et al., 2008; Bedding et al., 2010).

Plus récemment, SONG (Grundahl et al., 2014) est un projet en cours de développement. Celui-ci est un réseau constitué à terme de huit observatoires dotés de spectroscopes, permettant ainsi une observation en continu des cibles. Celui-ci a notamment permis la détection, avec seulement un site, de modes dans la sous-géante μ Herculis (Grundahl et al., 2017).

L'arrivée des télescopes spatiaux permettant une photométrie de longue durée a permis un fort développement de l'astérosismologie observationnelle. Ces derniers ont plusieurs avantages : libérés de l'atmosphère terrestre, ils permettent des observations de haute qualité, et continues dans le temps si leur orbite le leur permet. Ils mesurent alors le flux lumineux de l'étoile pendant un temps important, duquel sont déduites les oscillations par transformée de Fourier.

La première détection spatiale d'oscillations stellaires fut effectuée avec le télescope Wide Fied Infra Red Explorer (WIRE) de la NASA. Sa mission première (un balayage complet du ciel en infrarouge) échoua à cause d'un souci technique, ce qui permit une reconversion en étude astérosismologique d'étoiles brillantes à l'aide de son pointeur stellaire. Les données alors recueillies permirent notamment la découverte d'oscillations dans la géante rouge α UMa (Buzasi et al., 2000) ainsi que dans l'étoile δ Scuti Altair (Buzasi et al., 2005). La première mission entièrement dédiée à l'astérosismologie fut Microvariability and Oscillations of Stars (MOST, Walker et al. 2003), lancée en 2003, qui permit notamment la découverte d'oscillations dans des géantes rouges (Barban et al., 2007).

Il fallut attendre la mission française Convection, Rotation et Transits planétaires (CoRoT, Baglin et al. 2006), lancée en 2006, pour véritablement ouvrir le champ de l'astérosismologie observationnelle. Prenant la forme d'un télescope de 0,27 mètre de diamètre, CoRoT observe des champs d'étoiles de magnitude $m_{\rm v} \sim 6 - 9$ durant 30 à 150 jours, ce qui permet d'obtenir des précisions fréquentielles inédites, de l'ordre du dixième de μHz, permettant ainsi de contraindre finement la structure stellaire. Grâce à ces données, des oscillations de type solaire ont pu être détectées dans des étoiles en séquence principales (Appourchaux et al., 2008; Michel et al., 2008; García et al., 2009; Benomar et al., 2010) ainsi que dans des étoiles post-séquence principale, que ça soit des géantes (De Ridder et al., 2009; Hekker et al., 2009; Miglio et al., 2009; Barban et al., 2009) ou des sous-géantes (Deheuvels et al., 2010a).

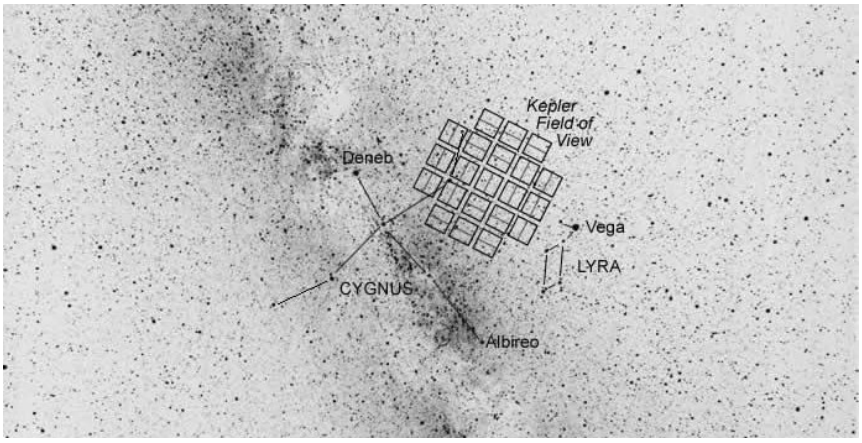

FIGURE 2.5. – Champ de vue de *Kepler*. Adapté de `https://www.nasa.gov/ames/kepler/kepler-field-of-view`, crédit Carter Roberts.

Kepler (Borucki et al., 2010), lancé en 2009, est une mission de la NASA dédiée à la découverte d'exoplanètes et à l'astérosismologie. Celle-ci adopte une stratégie différente de celle de CoRoT : un champ unique d'étoiles, situé à cheval sur les constellations du Cygne, de la Lyre et du Dragon, est observé de façon discontinue durant 4 ans (voir la Figure 2.5 pour une illustration de ce champ de vue sur le Ciel). La photométrie en résultant, d'une qualité inédite, permet alors l'obtention de fréquences de très haute précision pour un nombre d'étoiles important. Le satellite permet deux types d'observations, en longue cadence ou courte cadence, chaque mesure étant effectuée toutes les 29,43 minutes ou 58,53 secondes, respectivement. La première est de fait adaptée aux étoiles évoluées, ayant des modes propres de basses fréquences quand la seconde est adaptée aux jeunes géantes, sous-géantes et étoiles en séquence principale.

À la fin des quatre années qu'a duré sa mission nominale, le satellite a perdu deux de ses quatre roues à réactions, diminuant ses capacités de contrôle d'attitude. La suite de sa mission, nommée K2 (Howell et al., 2014), scrute 19 champs le long de l'écliptique durant 80 jours, diminuant de ce fait la précision fréquentielle des données obtenues et donc son intérêt pour l'investigation des oscillations de type solaires.

Sauf mention contraire, l'ensemble des données utilisées dans le cadre de cette thèse proviennent de la mission initiale.

TESS, lancé en 2018, est une mission de la NASA dédiée aussi à la détection d'exoplanètes. Au contraire de la stratégie adoptée par *Kepler*, elle effectue une observation quasi-complète du ciel, en scrutant 26 différents secteurs durant 27 jours et en prenant des mesures toutes les 2 ou 30 minutes. Si la faible durée des observations des secteurs diminue leur intérêt astérosismologique pour les oscillateurs de type solaire, deux zones du ciel, les *Continuing Viewing Zone* (CVZ), sont observées en continu pendant un an. Elles représentent donc des champs privilégiés pour l'investigation de ce type d'oscillateur. La mission a été étendue. Le satellite observe alors les mêmes secteurs de l'hémisphère sud que la mission nominale, légèrement décalés, avec une cadence longue réduite à 10 minutes et une cadence courte réduite à 20 secondes, augmentant de ce fait la fenêtre possible de fréquences détectables. La deuxième extension, en cours durant la rédaction de ce manuscrit, couvre l'hémisphère nord et l'écliptique.

Prochaine grande mission dédiée à la photométrie stellaire, la mission européenne PLAnetary Transits and Oscillations of stars (PLATO 2.0, Rauer et al. 2014) est prévue au lancement en 2026. La stratégie d'observation pourrait prendre la forme d'observations de deux régions du ciel durant 2 ans chacune, suivies de courtes observations de plusieurs régions du ciel. Le grand champ de vue du satellite ($\sim 2232\,\mathrm{deg}^2$, à comparer aux $115\,\mathrm{deg}^2$ de *Kepler*) promet l'obtention de courbes photométriques de haute qualité sur un nombre important d'étoiles. De plus, au contraire de *Kepler* dont la majorité des étoiles observées étaient de faible magnitude, PLATO se concentrera aussi sur des étoiles brillantes ce qui permettra de plus grandes contraintes provenant d'observations au sol.

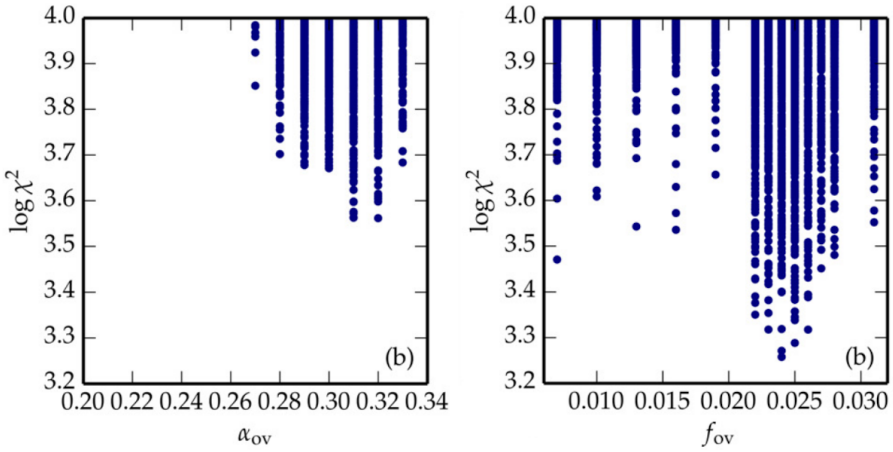

FIGURE 2.6. – χ^2 de différents modèles en fonction de α_{ov} (step overshoot) ou f_{ov} (overshoot diffusif), tirée de Moravveji et al. (2016).

2.3. Les contraintes sismiques sur l'extension de cœur convectif

Maintenant que nous avons présenté les caractéristiques des modes stellaires ainsi que la façon dont ils sont détectés, nous allons nous concentrer sur le sujet de cette thèse et voir comment ils permettent de contraindre les extensions de cœurs convectifs.

2.3.1. Les pulsateurs g

Les oscillateurs de type g sont des étoiles dont les modes g, au contraire des oscillateurs de type solaire, ont une amplitude suffisamment importante à la surface pour pouvoir être détectés. Ils peuvent faire partie des classes β Céphéides (β Cep), des étoiles de type B à pulsation lente (SPB) et des γ Doradus (γ Dor). Pour les deux premières classes, les modes sont excités par le mécanisme κ dû aux variations d'opacité d'éléments du groupe du fer. Le mécanisme d'excitation des γ Dor est lui partagé entre le phénomène de blocage convectif (Guzik et al., 2000) et le mécanisme κ.

Ces oscillateurs sont des cibles privilégiées pour contraindre les cœurs convectifs, principalement du fait du lien étroit entre les fréquences des modes g et la fréquence de Brunt-Väisälä. En effet, cette dernière définit la cavité G dans laquelle se propagent les modes de gravité. Or, les oscillateurs g sont des étoiles massives dont le cœur convectif régresse durant la séquence principale. Il laisse alors derrière lui une région comportant un fort gradient de composition chimique, qui va avoir un impact sur N à travers le terme ∇_μ de l'équation 2.16. Aussi, le fort gradient en composition chimique va provoquer une discontinuité dans N : c'est ce que l'on appelle un *glitch*. Ces deux caractéristiques vont rajouter une composante oscillante à l'espacement en période constant attendu de l'approche asymptotique. La période et l'amplitude de cette dernière permettent de finement sonder le gradient en composition chimique lié au cœur convectif (Miglio et al., 2008).

Degroote et al. (2010), en utilisant les donnés de la mission CoRoT (Baglin et al., 2006), ont montré qu'une valeur minimale $\alpha_{\rm ov} = 0{,}2$ est nécessaire pour expliquer les fréquences d'oscillations de HD 50230, une étoile de type SPB d'environ sept masses solaires. Moravveji et al. (2015, 2016) modélisent en détail KIC 10526294 et KIC 7760680, deux étoiles SPB de masses environ égales à $3{,}2\,M_\odot$. Ils trouvent de fortes contraintes sur $f_{\rm ov}$, avec des valeurs optimales respectives égales à 0,017 et 0,024. Dans les deux cas, l'overshoot diffusif est favorisé sur le step overshooting, comme visible sur la Figure 2.6 tirée de Moravveji et al. (2016), où les χ^2 (quantifiant l'écart entre les modèles et observations) sont inférieures pour les modèles avec overshoot diffusif. Ce résultat a été nuancé par Pedersen et al. (2021), qui en modélisant 26 étoiles SPB trouvent que pour 17 d'entre elles un step overshooting permet une meilleure modélisation. On peut d'ailleurs noter que dans les deux cas les χ^2 trouvés, qui expriment la qualité avec laquelle les observations sont reproduites par les modèles, sont assez élevés ($\log \chi^2 \sim 3$ dans la Figure 2.6), ce qui montre que de fortes améliorations restent à faire dans la description de la physique du cœur de ces modèles. Enfin, Mombarg et al. (2021) se sont intéressés à des étoiles de type γ Dor dans une gamme de masse entre 1,4 et $2{,}0\,M_\odot$. Des valeurs optimales de $f_{\rm ov}$ entre 0 et 0,03 ont été trouvées, avec de fortes incertitudes et sans comportement particulier en corrélation avec la masse de l'étoile.

Si les valeurs ou le type d'overshoot diffèrent entre les études mentionnées ci-dessus, toutes s'accordent sur la nécessité d'une extension des cœurs convectifs pour mieux reproduire les observations.

2.3.2. Les oscillateurs de type solaire

Comme nous l'avons vu, les oscillateurs de type solaires montrent des modes p. Le piégeage de ces derniers, défini par la fréquence de Lamb, n'est donc pas dépendant de la frontière du cœur. Cependant, les modes acoustiques sondent la vitesse du son dont le profil dépend de la composition. En effet, on a $c^2 \propto p/\rho$ et donc, sous hypothèse d'un gaz parfait, $c^2 \propto T/\mu$. En conséquence, la vitesse du son est discontinue à la limite du cœur convectif. Cela résulte en un « glitch » qui va provoquer une oscillation dans les fréquences dont les caractéristiques (amplitude, période) sont directement liées aux propriétés de la discontinuité (intensité, position acoustique) (Gough, 1990). Ainsi, Deheuvels et al. (2010b), en utilisant notamment $\delta\nu_{01}(n) = \nu_{n,0} - (\nu_{n,1} + \nu_{n-1,1})/2$ et $\delta\nu_{02,n} = \nu_{n,0} - \nu_{n-1,2}$, montrent qu'il est nécessaire d'ajouter de l'overshoot pour correctement retrouver les fréquences de HD 203608 observées en spectroscopie par HARPS. En effet, les petites séparations de ces dernières ne peuvent être correctement reproduites que par un modèle possédant un cœur convectif. L'étoile étant fortement sous-métallique et de masse légèrement sous-solaire ($\sim 0{,}9\,M_\odot$), étendre son cœur est obligatoire pour assurer sa survie durant la séquence principale.

Les modes p, cependant, restent principalement sensibles aux régions superficielles de l'étoile. Or, ces régions sont souvent mal modélisées, ce qui est à l'origine des *effets de surface*, sources de forts désaccord entre les modèles et les observations. Pour pallier cela, Roxburgh & Vorontsov (2003) proposent l'utilisation des ratios de fréquences des modes.

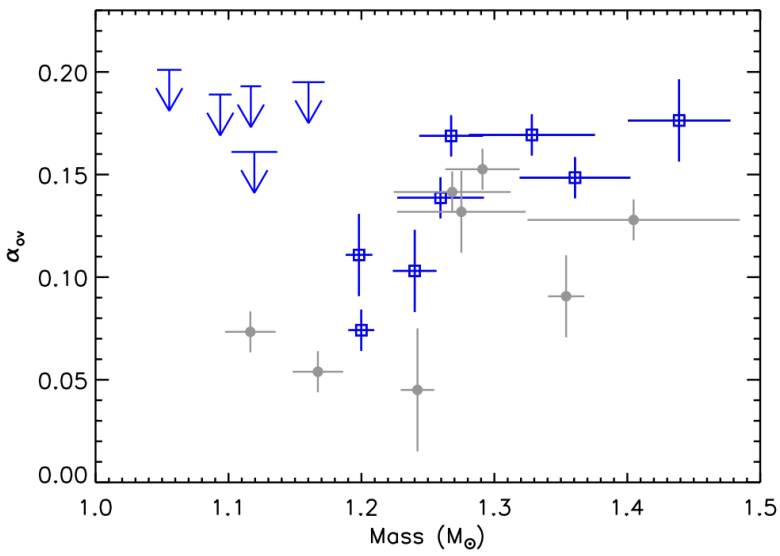

FIGURE 2.7. – Valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ pour différentes étoiles en séquence principale en fonction de leurs masses. Tirée de Deheuvels et al. (2016).

Ces derniers sont, si l'on note $\nu_{n,l}$ la fréquence d'ordre radial n et de degré l :

$$r_{01}(n) = \frac{d_{01}(n)}{\Delta_1(n)} \tag{2.49}$$

$$r_{10}(n) = \frac{d_{10}(n)}{\Delta_0(n+1)}, \tag{2.50}$$

avec :

$$d_{01}(n) = \frac{1}{8}(\nu_{n-1,0} - 4\nu_{n-1,1} + 6\nu_{n,0} - 4\nu_{n,1} + \nu_{n+1,0}) \tag{2.51}$$

$$d_{10}(n) = -\frac{1}{8}(\nu_{n-1,1} - 4\nu_{n,0} + 6\nu_{n,1} - 4\nu_{n+1,0} + \nu_{n+1,1}) \tag{2.52}$$

et

$$\Delta_l(n) = \nu_{n,l} - \nu_{n-1,l} \tag{2.53}$$

Ils montrent alors que ces derniers sont moins sensibles aux couches les plus externes de l'étoile, par rapport aux plus classiques petites séparations, résultat qui sera confirmé par Otí Floranes et al. (2005).

En utilisant ces ratios, couplés avec la petite séparation définie plus haut, Miglio & Montalbán (2005) modélisent α Cen en utilisant des données spectroscopiques. Ils trouvent notamment que les observables sismiques ne favorisent pas la présence d'un cœur convectif, ce qui élimine des valeurs d'overshoot élevées ($\alpha_{\rm ov} > 0{,}2$). En utilisant ces ratios, Silva Aguirre et al. (2013) arrivent à détecter un cœur convectif dans KIC 12009504 ($\sim 1{,}23\,M_\odot$), une étoile en séquence principale observée par *Kepler*. Ils montrent de plus que la taille obtenue

est supérieure à celle définie par le critère de Schwarzschild, impliquant la nécessité d'un phénomène étendant le cœur. Ce résultat, robuste, est obtenu en utilisant différents codes d'évolution et différentes méthodes de modélisation. Deheuvels et al. (2016) appliquent la méthode des ratios à 24 étoiles de faible masse observées par *Kepler*. Si 10 d'entre elles s'avèrent être des étoiles post-séquence principale, ils arrivent à obtenir des contraintes sur le paramètre d'overshoot et trouvent une corrélation avec la masse, de façon semblable aux contraintes provenant des étoiles binaires. La Figure 2.7, extraite de cet article, montre une tendance pour $\alpha_{\rm ov}$ à augmenter avec la masse de l'étoile. À noter que les auteurs n'ont pas pu différencier préférentiellement un overshoot diffusif ou instantané dans les incertitudes observationnelles.

Les oscillateurs de type solaire sont donc aussi des cibles intéressantes pour contraindre $\alpha_{\rm ov}$. Si la non-visiblité des modes g empêche de profiter de leur fort potentiel pour sonder le cœur, les modes p atteignent tout de même le cœur et permettent donc d'avoir des contraintes sur $\alpha_{\rm ov}$. De plus, les masses des oscillateurs p et g étant distinctes, l'étude des deux types d'oscillateurs est complémentaire et nécessaire pour contraindre les cœurs convectifs sur une large gamme de paramètres.

2.3.3. Les étoiles post-séquence principale

Une autre approche pour sonder les cœurs convectifs, indirecte, est de s'intéresser aux étoiles post-séquence principale, et principalement aux étoiles sous-géantes. Si elles n'ont plus de cœurs convectifs, leur structure est dépendante de celle qu'elles avaient durant la séquence principale, et peuvent dès lors contraindre l'extension du cœur. Dans la suite, nous allons développer les caractéristiques et la sismologie de ces étoiles, ces dernières étant le sujet d'étude principal de la thèse.

3. Les étoiles sous-géantes

Nous allons dans cette partie définir et présenter les caractéristiques structurelles et sismiques des étoiles sous-géantes, comprendre pourquoi elles sont difficiles à modéliser et voir l'intérêt qu'elles peuvent avoir du point de vue sismique pour contraindre les extensions de cœur convectif.

3.1. Définition, caractéristiques évolutives et structurelles

Une étoile peut être qualifiée de *sous-géante* si elle est plus brillante qu'une étoile de séquence principale de classe spectrale équivalente, mais moins brillante qu'une géante. Cette définition, observationnelle, coïncide avec une phase de l'évolution stellaire se produisant juste après la fin de la séquence principale lorsque l'étoile vient de finir de consommer son hydrogène central, jusqu'à ce qu'elle atteigne la branche des géantes rouges dans le diagramme HR. La définition de la fin de la branche des sous-géantes étant peu précise, on peut noter celle « sismique » de Mosser et al. (2014) : $(\Delta\nu/36{,}5\,\mu\mathrm{Hz})(\Delta\Pi_1/126\,\mathrm{s}) = 1$, $\Delta\Pi_1$ étant l'espacement en période des modes dipolaires de l'étoile.

3.1.1. Caractéristiques évolutives

L'étoile, juste après avoir terminé de brûler l'hydrogène en son cœur, va commencer une phase de combustion de l'hydrogène en couche, laissant un cœur d'hélium inerte. Si son cœur est radiatif durant la séquence principale (soit $M \lesssim 1{,}1\,M_\odot$) alors cette transition se fait progressivement : l'hydrogène est en effet épuisé graduellement à partir du centre. En revanche, si l'étoile a eu un cœur convectif, celui-ci est homogène et donc l'hydrogène est brusquement épuisé dans l'ensemble du cœur. Le déficit en énergie provoque une brusque contraction du cœur, sur une échelle de temps thermique, jusqu'à ce que la combustion de l'hydrogène en couche commence.

Ensuite, la façon dont l'étoile évolue sur la branche des sous-géantes dépend de sa masse. Ainsi, si une étoile est plus massive qu'environ $1{,}5\,M_\odot$, la combustion d'hydrogène en couche accroît la taille du cœur jusqu'à ce que ce dernier dépasse la limite de Schönberg-Chandrasekhar (Schönberg & Chandrasekhar, 1942). Celle-ci représente le ratio maximum entre la masse du cœur M_c et la masse de l'enveloppe M_e d'un modèle à l'équilibre, avec un cœur isotherme suivant la loi des gaz parfait. Il est défini par :

$$\left(\frac{M_c}{M_e}\right)_{\mathrm{SC}} = 0{,}37\left(\frac{\mu_e}{\mu_c}\right)^2 \tag{3.1}$$

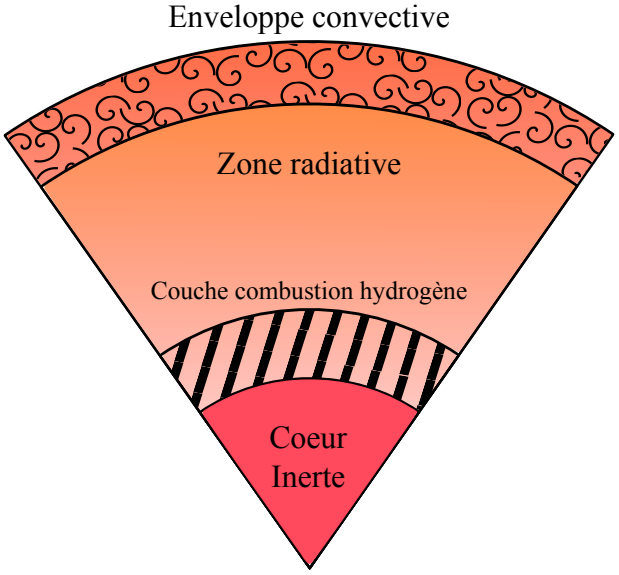

FIGURE 3.1. – Schéma de la structure typique d'une sous-géante

avec μ_e, μ_c les poids moléculaires moyens respectifs de l'enveloppe et du cœur.

Du fait du dépassement de cette limite, le cœur de l'étoile n'est plus capable de soutenir le poids de l'enveloppe et l'étoile n'est en conséquence plus en équilibre thermique. Le cœur se contracte tandis que l'enveloppe s'étend jusqu'au début de la combustion de l'hélium. L'étoile est alors une géante. Pour cette gamme de masse, la phase de sous-géante se déroule sur un temps de Kelvin-Helmholtz et est en donc très courte comparée au temps de vie de l'étoile, de l'ordre de 10^5 ans pour une étoile de plusieurs masses solaires. Les étoiles sous-géantes de masse supérieure à $1{,}5\,M_\odot$ sont donc statistiquement peu nombreuses dans le ciel, ce qui se traduit dans le diagramme HR par le « trou de Hertzsprung ».

Pour une étoile de plus faible masse, le gaz d'électrons dans le cœur est dégénéré. En conséquence, la limite de Schönberg-Chandrasekhar ne s'applique plus, et l'étoile brûle l'hydrogène en couche avec un cœur d'hélium inerte sur un temps dit nucléaire, c'est-à-dire de l'ordre de 10^9 années.

Durant cette thèse, mon travail se concentre donc sur les sous-géantes de masse supérieure à $\sim 1{,}1\,M_\odot$ (limite dépendant de la métallicité de l'étoile), afin qu'elles aient eu un cœur convectif durant la séquence principale, mais inférieure à $\sim 1{,}5\,M_\odot$ afin que leur phase de sous-géante soit assez longue pour pouvoir être observable.

3.1.2. Caractéristiques structurelles

La structure typique d'une étoile sous-géante est représentée de façon schématique sur la Figure 3.1.

Dans les régions superficielles de l'étoile se trouve une enveloppe convective. Cette dernière va se développer durant la phase de sous-géante, principalement du fait de l'augmentation de l'opacité résultant du refroidissement de l'étoile. Sous cette enveloppe se trouve

une zone radiative, qui surplombe la couche de combustion d'hydrogène, dont provient l'intégralité de l'énergie de l'étoile. Cette dernière enveloppe un cœur d'hélium inerte, résultat de la combustion de l'hydrogène durant la séquence principale, dont la matière est principalement dégénérée dans la gamme de masse étudiée durant la thèse.

Les propriétés de la région centrale de l'étoile, soit du cœur et de la couche de combustion de l'hydrogène, et en particulier sa composition chimique, dépendent fortement des caractéristiques du cœur que l'étoile avait durant sa séquence principale. En effet, elle est le résultat direct de la contraction de celui-ci : son étude permet donc une « autopsie » du cœur de séquence principale.

3.2. Propriétés sismiques

Les caractéristiques structurelles intéressantes des sous-géantes sont couplées à des propriétés sismiques remarquables. En effet, les étoiles post-séquence principale commencent à manifester des modes mixtes.

Cela est dû à deux raisons :

— Lors de la fin de la séquence principale, le cœur se contracte, induisant une forte augmentation de la densité centrale ρ_c qui va avoir pour effet de fortement augmenter les fréquences des modes g. En effet, d'après l'équation 2.34, celles-ci sont reliées à la fréquence de Brunt-Väisälä dans la zone de propagation des modes g. Or, pour les étoiles post-séquence principale celle-ci se trouve proche du centre de l'étoile où N est dominée par le terme g/Hp, que l'on peut alors approximer par (e.g., Deheuvels & Michel, 2011) :

$$\frac{g}{H_p} \sim \frac{\rho_c^2 \mu_c}{T_c} r^2, \tag{3.2}$$

le suffixe c indiquant que la quantité est prise au cœur. T_c est constant, le cœur inerte ne produisant pas d'énergie. En conséquence, l'augmentation de ρ_c provoque une hausse de N au cœur et donc une hausse des fréquences des modes g.

— Dans le même temps, l'enveloppe de l'étoile se dilate ce qui provoque une forte réduction de la densité moyenne. La grande séparation se comportant comme la racine carrée de la densité moyenne (Ulrich, 1986), les fréquences des modes p diminuent.

En définitive, les modes p et les modes g arrivent à des fréquences comparables : la condition de propagation 2.40 est respectée, et des croisements évités apparaissent dans le spectre d'oscillation. Ces modes, du fait de leur nature à la fois g et p, sont intéressants pour sonder la structure de l'étoile dans son ensemble. Leur nature g, comme précisé dans la Section 2.3.1, permet d'explorer les régions les plus centrales et sont sensibles à la fréquence de Brunt-Väisälä qui comporte des informations à la fois sur la structure thermique et chimique de l'étoile (voir l'équation 2.16). Leur nature p leur permet d'atteindre la surface (ils sont donc visibles) et les rendent sensibles aux caractéristiques de l'enveloppe.

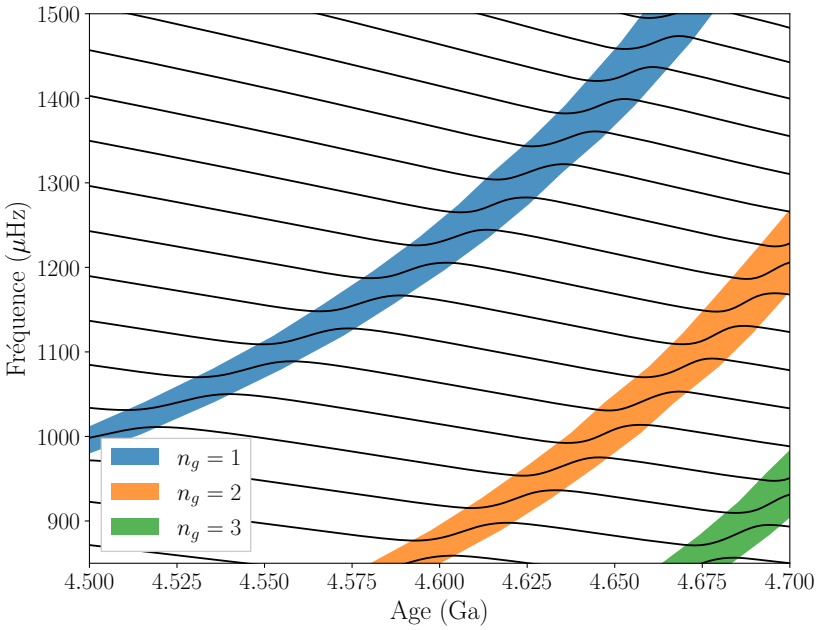

FIGURE 3.2. – Evolution des fréquences dipolaires pour un modèle de 1,3 $M_\odot$ en début de phase de sous-géante. Les régions colorées indiquent les périodes où les modes deviennent g-dominés, la couleur indiquant le nombre radial du mode g pur impliqué dans le croisement évité.

3.3. Les spécificités de la modélisation sismique des sous-géantes

3.3.1. Les difficultés inhérentes à la modélisation des sous-géantes

Les modes mixtes permettent donc de sonder avec précision les propriétés centrales de l'étoile. Cependant, une autre caractéristique typique de ces modes est leur évolution très rapide au regard de l'évolution stellaire. La Figure 3.2 montre l'évolution des fréquences dipolaires d'une étoile au début de son passage sur la branche des sous-géantes. On peut voir que, généralement, les fréquences ont tendance à décroître : cela est dû à la diminution des fréquences des modes p purs liée à l'augmentation du rayon de l'étoile. En revanche, on note certains épisodes d'augmentation brève de la fréquence des modes : ce sont les croisements évités. Les zones colorées montrent les périodes de l'évolution où ces derniers se produisent, et donc où les modes présentent un caractère fortement mixte. À ce moment, la plupart de leur énergie est contenue dans la cavité G : ils sont donc *g-dominés*. On qualifiera de *p-dominés* les autres modes.

Cette évolution rapide, couplée à l'évolution hautement non-linéaire des fréquences mixtes, rend la modélisation sismique des sous-géantes difficile. Ainsi, la fréquence d'un mode, durant un épisode de croisement évité, évolue de plusieurs μHz en un million d'an-

nées (cette valeur augmentant avec l'ordre radial n_g du mode g pur prenant part au croisement évité). Celle-ci est à comparer aux incertitudes observationnelles typiques des données *Kepler*, environ 0,1 μHz, et à la durée de la phase de sous-géantes de l'ordre du milliard d'années. De plus, la fréquence des modes g, à âge donné, dépend fortement de la masse de l'étoile, une différence en masse de l'ordre de 0,001 $M_\odot$ pouvant déjà modifier les fréquences de façon significative.

3.3.2. Les différentes approches utilisées dans la littérature

Nous avons vu que les fréquences des modes mixtes sont particulièrement sensibles à l'âge et à la masse de l'étoile. En conséquence, la modélisation sismique des sous-géantes, malgré ses difficultés, a gagné un intérêt particulier ces dernières années, notamment au regard des contraintes qu'elles permettent d'apporter sur les systèmes stellaires. La haute précision avec laquelle le rayon, la masse et l'âge de l'étoile peuvent être déterminés permet ainsi, par exemple, de caractériser les potentielles exoplanètes orbitant autour de l'étoile ou de contraindre avec finesse l'évolution de la Galaxie. Ces propriétés intéressantes sont de plus combinées à une quantité de donnée grandissante, notamment grâce à la mission TESS (e.g., Godoy-Rivera et al. 2021). Nous faisons donc dans cette section une courte revue des approches utilisées dans la littérature.

Utilisation de grilles de modèles

L'utilisation de grilles de modèles pour la modélisation sismique des sous-géantes est problématique. Notamment, les pas en masse requis pour la grille doivent être très faibles (de l'ordre de 0,001 $M_\odot$, voir Section 6.2.3) si l'on veut pouvoir correctement reproduire les fréquences au regard des incertitudes des données de *Kepler*, ce qui rend le calcul de la grille impraticable. De ce fait, les grilles ne peuvent facilement reproduire au plus près les observations. Elles restent cependant une approche intéressante pour retrouver les paramètres stellaires.

Stokholm et al. (2019) modélisent ainsi HR7322 en utilisant une approche bayésienne (la méthode BASTA, Silva Aguirre et al., 2015) couplée à une grille. Ils trouvent des modèles qui reproduisent correctement les modes p, mais mal les modes g-dominés au regard des petites incertitudes observationnelles.

Li et al. (2020a), modélisent 36 sous-géantes observées par *Kepler* et dont les fréquences ont été calculées par Li et al. (2020b). Ils trouvent alors des modèles statistiquement éloignés des observations, notamment, là encore, à cause des modes g-dominés : pour KIC6064910, on peut voir dans la Figure B1 des écarts entre les observations et les modèles de l'ordre d'environ 5 μHz pour les g-dominés, ce qui représente environ 50 fois les incertitudes typiques de *Kepler*. De plus, les paramètres des modèles diffèrent notablement d'autres estimations dans la littérature : par exemple, ils trouvent une masse de $1{,}49 \pm 0{,}08\, M_\odot$ pour KIC10273246, à comparer à la masse de $1{,}22 \pm 0{,}03\, M_\odot$ trouvée dans Noll et al. (2021).

Une solution possible pour pouvoir utiliser des grilles serait d'effectuer des interpolations entre les modèles. Li et al. (2020a) notent qu'il est possible de correctement interpoler en âge les fréquences radiales et dipolaires, via une spline cubique. Ils rencontrent cependant des difficultés à faire de même pour les modes quadripolaires g-dominés, cependant rarement détectés du fait de leur faible amplitude. Mais aussi, des interpolations entre les tracés évolutifs et notamment en masse sont requises. Pour l'instant, aucune n'a été testée sur des sous-géantes. On peut noter cependant, pour des étoiles en séquence principale, l'exemple d'AIMS (Rendle et al., 2019).

Utilisation de méthodes itératives

Une autre approche possible est d'utiliser des méthodes itératives. Ces dernières permettent notamment de trouver des valeurs précises des paramètres afin de pouvoir reproduire les fréquences au mieux. En revanche, la majorité de ces méthodes se basant sur des algorithmes de descente de gradient, elles sont sensibles aux minimums locaux. Elles sont, dans le cas des sous-géantes, peu utilisées dans la littérature. En effet, le comportement hautement non linéaire des modes mixtes rend l'utilisation d'une méthode se basant sur des dérivées difficile.

Utilisation d'autres paramètres stellaires

Il est aussi possible de s'intéresser à d'autres indicateurs que les fréquences individuelles. Ainsi, Farnir et al. (2021) proposent, de manière analogue à ce qui se fait pour les étoiles plus évoluées (e.g., Cunha et al., 2015), de reproduire les différences de fréquences consécutives en utilisant non pas directement des modèles stellaires, mais plutôt une expression dérivée de l'approche asymptotique. Celle-ci est paramétrée par différents indicateurs sismiques indépendants. Ils utilisent alors un algorithme de Levenberg-Marquardt pour trouver les valeurs de ces indicateurs qui permettent à l'expression asymptotique de reproduire au mieux les séparations de fréquences cibles. Ils montrent aussi, sur des modèles, que ces indicateurs sismiques sont intéressants pour contraindre la structure interne de l'étoile. En effet, parmi ceux-ci se trouvent notamment la différence de fréquence entre deux modes g-dominés et le couplage entre les cavités G et P, qui dépendent respectivement de la structure de la cavité G et de la zone évanescente, comme expliqué dans la Section 5. Enfin, ils confirment, comme énoncé dans Deheuvels & Michel (2011), que la différence entre deux modes g-dominés, combinée à la grande séparation, permet de contraindre la masse et l'âge de l'étoile. Cette méthode, cependant, n'a pas encore été appliquée à des observations réelles.

Utilisation du machine learning

Le machine learning, ou apprentissage profond, a été utilisé par Hon et al. (2020). Les observables utilisés incluent des observables globales (sismiques et non sismiques) et les fréquences individuelles via une image représentant le diagramme échelle de l'étoile. Ils

entraînent alors un réseau neuronal sur des modèles, avant d'utiliser ce réseau sur des observations réelles. Ils trouvent que celui-ci permet d'avoir des résultats qui sont compatibles avec ceux trouvés dans littérature, notamment Li et al. (2020a), Stokholm et al. (2019) et Deheuvels et al. (2020). On peut rajouter que les paramètres obtenus sur KIC10273246, modélisée en profondeur dans Noll et al. (2021), sont compatibles pour la masse, le rayon ainsi que, dans une moindre mesure, l'âge. Cette approche a l'intérêt d'être rapide, car si entraîner le réseau neuronal prend du temps, l'utiliser est quasiment instantané. Elle représente donc une approche intéressante pour obtenir des contraintes grossières, mais rapides, sur un grand nombre d'étoiles.

En revanche, on peut noter que la qualité statistique d'ajustement des fréquences individuelles n'est pas satisfaisante sur les modes non p-dominés, comme en témoigne la Figure 5 du papier. Cela limite l'intérêt que peut représenter cette méthode pour obtenir des modèles assez bons pour explorer précisément la structure interne de l'étoile. On peut imaginer cependant son utilité pour, par exemple, trouver un bon point de départ pour une méthode plus évoluée.

3.4. L'étude sismique des sous-géantes pour contraindre l'extension de cœur convectif

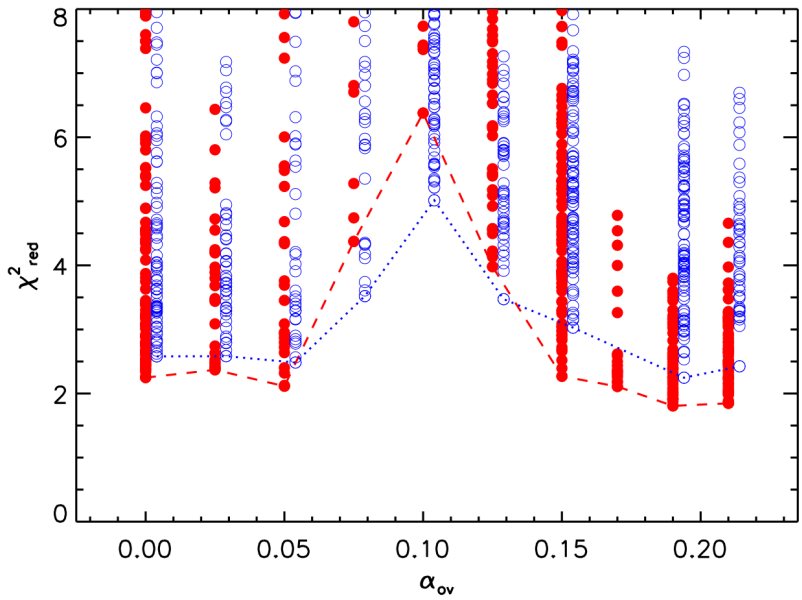

FIGURE 3.3. – Figure extraite de Deheuvels & Michel (2011), montrant le χ^2 réduit des modèles en fonction de $\alpha_{\rm ov}$.

Dans cette thèse, ce n'est pas tant d'obtenir les paramètres stellaires qui nous intéresse que d'utiliser les sous-géantes comme laboratoires de test de la physique stellaire, et

notamment des extensions des cœurs convectifs.

La première étude sismique d'une sous-géante menée dans cet esprit a été effectuée par Deheuvels & Michel (2011). Étudiant HD 49385, observée par CoRoT, ils trouvent que les fréquences d'oscillation de l'étoile peuvent être le mieux reproduites sans overshoot ou avec un overshoot moyen ($\alpha_{\rm ov} \sim 0{,}2$). La Figure 3.3 montre le χ^2 réduit de leur modèle (un faible χ^2 indiquant un meilleur fit des observations) en fonction de la valeur d'overshoot. On observe une claire bi-modalité, montrant ainsi la sensibilité de la structure des sous-géantes à la structure en séquence principale et les capacités d'investigation offertes par la sismologie. Elle ouvre donc la voie au travail effectué dans cette thèse.

4. Problématique et plan

Nous avons vu dans cette introduction différentes problématiques liées aux cœurs convectifs. Ces derniers, en tant que réservoirs de carburant de l'étoile, jouent un rôle central sur l'évolution et les caractéristiques stellaires. Cependant, leur structure et particulièrement leur taille restent aujourd'hui mal définies par la théorie, plusieurs processus physiques complexes étendant ces cœurs au-delà de leur limite classique. Nous avons donc besoin de contraintes observationnelles. Pour cela, j'ai étudié les fréquences des modes d'oscillations des étoiles, ce qui représente la seule façon de sonder directement les intérieurs stellaires. De plus, plutôt que d'étudier directement les cœurs convectifs d'étoiles en séquence principale, je me suis intéressé aux étoiles sous-géantes. En effet, ces dernières, proches de la fin de la séquence principale, ont une structure qui garde l'empreinte du cœur convectif. Couplé à cela, des modes mixtes commencent à apparaître dans le spectre d'oscillation, sensibles à la structure de la région centrale de l'étoile. Ces deux caractéristiques en font des cibles remarquables pour apporter des contraintes complémentaires sur les cœurs convectifs, par rapport à une étude directe d'étoiles en séquence principale.

Les sous-géantes restent cependant largement inexplorées d'un point de vue sismique : la haute sensibilité de leurs modes à leur structure et à leur évolution rend leur modélisation délicate. Si plusieurs méthodes ont été récemment proposées pour pouvoir estimer les paramètres stellaires de ce type d'étoile, aucune d'entre elles n'a permis de tirer pleinement parti du potentiel des modes mixtes. Le premier travail de ma thèse a donc été de mettre au point une méthode, à partir du travail de Deheuvels & Michel (2011), qui permette de reproduire finement les modes mixtes. Je me suis ensuite intéressé à tester celle-ci en étudiant, en profondeur, une sous-géante observée par le satellite *Kepler*. Ce travail a notamment permis de répondre aux questions suivantes :

— Quels sont les liens entre les fréquences d'oscillation de la sous-géante et sa structure ?
— Quelles contraintes sur le paramètre d'overshoot peut-on obtenir à partir de l'étude sismique des sous-géantes ?
— Quels sont les impacts de différents aspects de la microphysique (diffusion, composition...) sur la modélisation sismique des sous-géantes ?
— Quelles dégénérescences de paramètres peuvent être rencontrées lors de la modélisation sismique de sous-géantes ?

Dans la suite, nous allons commencer par étudier quelles contraintes précises les modes mixtes permettent d'obtenir sur la structure des sous-géantes. Ensuite, sera présentée la méthode utilisée ainsi que les tests qui ont été effectués dans le cadre de la préparation de la mission PLATO. Enfin, seront montrés les résultats obtenus sur la modélisation d'une sous-géante observée par *Kepler*, publiés dans Noll et al. (2021) et qui permettent de répondre aux questions listées plus haut.

L'étude de modèles d'évolution stellaire d'étoiles de faible masse ayant un cœur convectif m'a amené, sur la fin de ma thèse, à m'intéresser aux relations entre le mélange dans le cœur de l'étoile, les réactions nucléaires s'y produisant et sa taille. Le temps caractéristique de la convection dans le cœur des étoiles est très court par rapport au temps d'évolution nucléaire : le cœur est en conséquence couramment modélisé comme une région chimiquement homogène dans les codes d'évolution stellaire. Or, les temps caractéristiques des réactions nucléaires, qui modifient la composition du cœur, sont d'ordres de grandeur très variés, de la seconde jusqu'au milliard d'années. Les deux phénomènes peuvent donc être de temps caractéristiques comparables, et ne sont en conséquence pas entièrement découplés. J'ai donc étudié l'impact que pouvait avoir la modélisation de la convection comme un processus instantané par rapport à un processus diffusif, à la fois sur la structure de l'étoile et sur les modélisations sismiques en découlant. Les résultats de cette étude sont présentés dans une troisième et dernière partie.

Deuxième partie

Contraindre les cœurs convectifs via la modélisation sismique des sous-géantes

Nous avons vu dans l'introduction à la fois la nécessité d'avoir des contraintes sur les extensions de cœurs convectifs, mais aussi la possibilité qu'offre la modélisation sismique des sous-géantes pour en obtenir. Cette partie sera l'occasion de présenter le travail effectué durant cette thèse à ce propos. Nous allons d'abord voir les particularités sismiques des sous-géantes, et plus spécifiquement comment les modes mixtes nous permettent de contraindre la structure du cœur convectif que l'étoile avait durant la séquence principale. Ensuite, nous présenterons la méthode développée durant cette thèse, appelée double optimisation, dont le but est de reproduire au mieux les observations malgré les difficultés inhérentes à la modélisation des étoiles sous-géantes. Enfin, nous verrons l'application de cette méthode sur une étoile sous-géante observée par *Kepler*, KIC10273246, et notamment les contraintes obtenues sur $\alpha_{\rm ov}$ et la structure de l'étoile.

5. Particularités sismiques des sous-géantes

Dans ce chapitre, nous allons étudier les propriétés sismiques des sous-géantes afin de déterminer quelles sont celles permettant de contraindre au mieux $\alpha_{\rm ov}$.

5.1. Structure sismique

5.1.1. Diagramme de propagation d'une étoile sous-géante

La Figure 5.1 représente le diagramme de propagation d'une étoile sous-géante. Comme démontré dans l'introduction via l'approche asymptotique, la cavité P est délimitée par la fréquence de Lamb S^2 et la cavité G est délimitée par la fréquence de Brunt-Väisälä N^2. Le domaine de fréquences typiquement observable (environ $\nu_{\rm max} \pm 5\Delta\nu$) est représenté en pointillé.

On a vu que, lors de la phase de sous-géantes, les fréquences des modes p et g commencent à être du même ordre de grandeur, ce qui mène à l'apparition de modes mixtes, qui se propagent à la fois dans la cavité G au cœur de l'étoile et dans la cavité P dans l'enveloppe. On peut voir sur la Figure que cette dernière représente une grande majorité du rayon de l'étoile, au contraire de la cavité G qui est, elle, confinée à la région centrale de l'étoile. Cette disproportion (à comparer au cas en séquence principale, voir la Figure 2.2) est due à la structure typique des étoiles post-séquence principale, composées d'un cœur très dense et d'une enveloppe étendue peu dense. C'est cependant la région centrale de l'étoile qui nous intéresse dans le cadre de cette thèse.

Pour voir plus en détail cette région, la Figure 5.2 représente un zoom sur le cœur de l'étoile. Pour des raisons de lisibilité, l'abscisse est à présent la masse relative m/M.

Comme précisé dans la Section 3.1.2, la partie centrale d'une sous-géante est composée d'un cœur d'hélium inerte, entouré d'une couche de combustion d'hydrogène. Pour comprendre comment ces composantes se reflètent sur le profil de N^2, on utilise l'expression 2.16 que l'on rappelle par commodité ici :

$$N^2 = \frac{\delta g}{H_p}\left(\nabla_{\rm ad} - \nabla + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu\right). \tag{5.1}$$

Les termes dominants dans cette expression dépendent de la région de l'étoile :

— Le cœur est homogène. En conséquence, $\nabla_\mu = 0$, donc N^2 est dominée par la contribution thermique $\delta g/H_p(\nabla_{\rm ad} - \nabla)$, ce qui est vérifié sur la Figure 5.2. Mais aussi, le

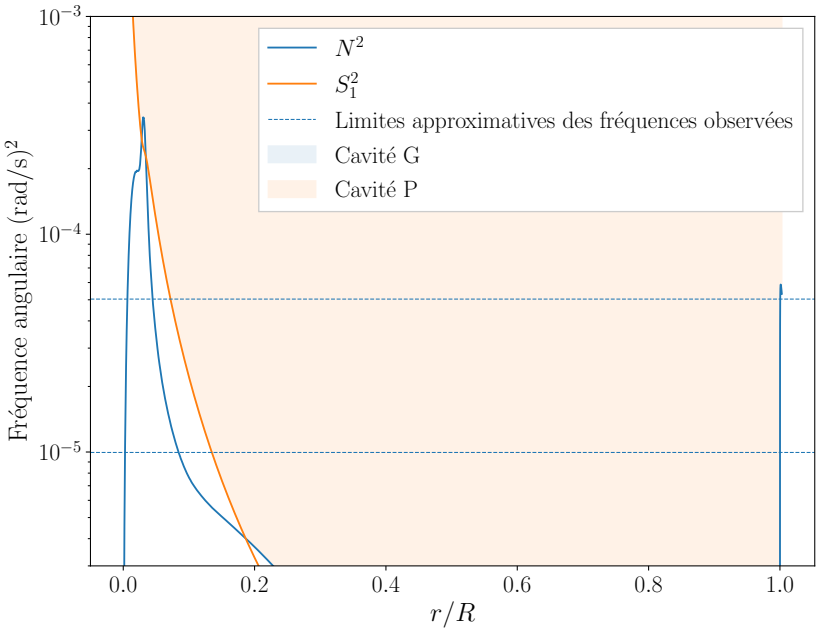

FIGURE 5.1. – Diagramme de propagation d'une jeune étoile sous-géante de 1,3 $M_\odot$ ayant une métallicité solaire.

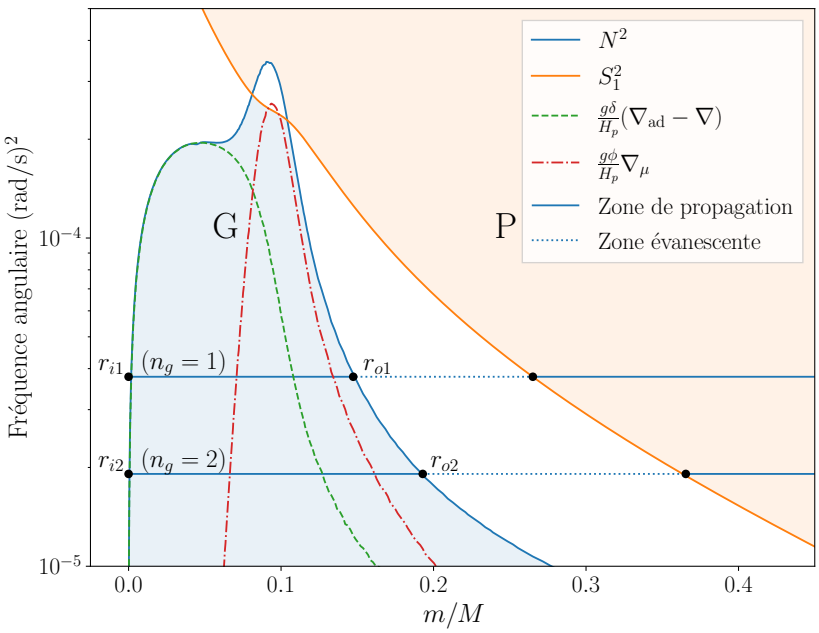

FIGURE 5.2. – Zoom sur la partie centrale du diagramme de propagation

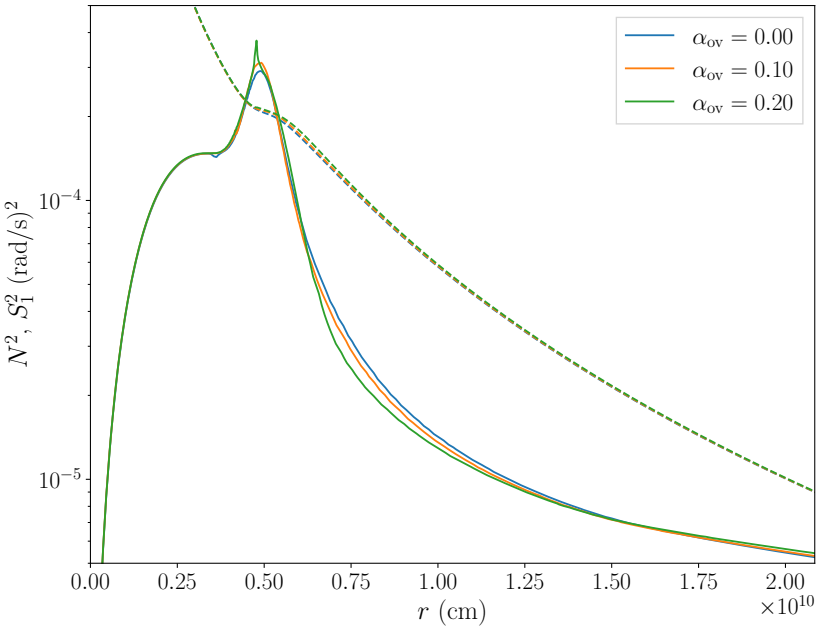

FIGURE 5.3. – Profils de N^2 et S_1^2, respectivement en trait plein et pointillés, pour des sous-géantes ayant des valeurs de α_{ov} différentes.

cœur est isotherme, car inerte : on en déduit que $\nabla_{ad} - \nabla \sim \nabla_{ad} \sim 1$ et donc que $N^2 \sim g\delta/H_p$ proche du centre. Elle est de ce fait principalement déterminée par la densité centrale dans cette région, comme montré par l'équation 3.2.

— La couche de combustion d'hydrogène n'est en revanche ni isotherme, ni homogène. Donc, la contribution thermique diminue du fait de l'augmentation de ∇ liée à la production d'énergie nucléaire, et la contribution compositionnelle n'est plus négligeable, ∇_μ augmentant fortement du fait des variations en X. En conséquence, le terme dominant est celui de ∇_μ, comme on peut le vérifier sur la Figure 5.2.

5.1.2. Quelle partie du profil de Brunt-Väisälä est la plus sensible à l'overshoot ?

Afin de savoir quelle région du profil de Brunt-Väisälä est la plus propice à renseigner sur α_{ov}, que l'on cherche à contraindre, on compare plusieurs jeunes sous-géantes ayant les mêmes caractéristiques, mais des valeurs de α_{ov} différentes. Comme on l'a vu dans l'introduction, α_{ov} modifie la durée de la séquence principale : on ne peut par conséquent pas comparer deux étoiles de même âge avec des valeurs différentes d'overshoot. On utilise donc la densité centrale ρ_c comme marqueur d'évolution, et on arrête l'évolution des modèles à la même valeur de ρ_c. Les profils de N^2 en résultant sont visibles sur la Figure 5.3.

On remarque que les parties centrales ($r \lesssim 0{,}50 \times 10^{10}$ cm), dominées par ρ_c, sont toutes identiques du fait du critère d'arrêt de l'évolution de ces étoiles. En revanche, les parties

dominées par ∇_μ diffèrent notablement les unes avec les autres. Si cette différence peut paraître faible par rapport au rayon de l'étoile, elle est suffisante pour pouvoir être sondée avec les modes mixtes, qui y sont très sensibles. Nous allons donc voir dans la partie suivante quels modes permettent de sonder la partie dominée par ∇_μ et donc contraindre $\alpha_{\rm ov}$.

5.1.3. Modes p-dominés et modes g-dominés

Les modes g-dominés ont la majorité de leur énergie comprise dans la cavité G, et les modes p-dominés dans la cavité P.

Les premiers suivent une condition de propagation proche de l'expression 2.39, et ont donc une fréquence proche de celle du mode p pur prenant part au croisement évité. Ils sont par conséquent principalement sensibles aux caractéristiques de l'enveloppe de l'étoile et peu à celles de la couche de combustion de l'hydrogène.

En revanche, les modes g-dominés suivent la condition de propagation 2.40 et ont alors une fréquence notablement différente de celle du mode p pur, se rapprochant de celle du mode g pur. Or, celle-ci dépend de l'intégrale de N (voir l'expression 2.34) et est donc fortement liée à la structure centrale de l'étoile.

L'écart de fréquences entre les modes p et g dominés dépend, elle, du couplage entre les deux cavités. Celui-ci est lié à la fois à la taille de la zone évanescente et à la valeur de k_r à l'intérieur de celle-ci. Cet écart est donc aussi un bon indicateur de $\alpha_{\rm ov}$: comme on le voit sur la Figure 5.3, la taille de la zone évanescente et la valeur de k_r (qui dépend de N) diffèrent selon les valeurs de $\alpha_{\rm ov}$. De ce fait, on s'attend à ce que l'écart entre les fréquences des modes p-dominés et g-dominés, nous informe du couplage et soit aussi un bon indicateur de $\alpha_{\rm ov}$.

Dans la suite du manuscrit, on utilisera le terme de mode g-dominé spécifiquement pour caractériser le mode prenant part au croisement évité et ayant la plus grande part d'énergie piégée dans la cavité G. Cette définition correspond donc aussi au mode ayant la fréquence la plus éloignée de celles définies par l'asymptotique des modes p dans un croisement évité.

5.2. De l'intérêt de détecter plusieurs modes g-dominés

Nous avons vu que les modes g-dominés sont des observables privilégiées pour contraindre la partie dominée par le gradient de composition. Cependant, on note que l'intégrande dans l'expression de la fréquence du mode g pur, N/r, favorise grandement les valeurs de N au cœur de l'étoile, au détriment des valeurs situées au niveau de la couche de combustion de l'hydrogène, limitant de ce fait la sensibilité des modes à cette région.

Une idée élaborée au début de la thèse a donc été de s'intéresser à des sous-géantes présentant plusieurs croisements évités, c'est-à-dire plusieurs modes fortement g-dominés. Les notations utilisées ici sont celles dérivant de la Figure 5.2, à savoir r_{i1} et r_{o1} pour les points tournant de la cavité G du mode mixte ayant $n_g = 1$, et r_{i2}, r_{o2} pour les équivalents

du mode mixte ayant $n_g = 2$. Les modes ici étudiés étant fortement g-dominés, on assimile ici leur fréquences à celle du mode g pur correspondant. On a alors :

$$\nu(n_g = 1) \sim \int_{r_{i1}}^{r_{o1}} \frac{N}{r} \mathrm{d}r \tag{5.2}$$

$$\nu(n_g = 2) \sim \int_{r_{i2}}^{r_{o2}} \frac{N}{r} \mathrm{d}r. \tag{5.3}$$

On en déduit alors la différence entre les deux fréquences égale à :

$$\nu(n_g = 1) - \nu(n_g = 2) \sim \int_{r_{i1}}^{r_{i2}} \frac{N}{r} \mathrm{d}r + \int_{r_{o2}}^{r_{o1}} \frac{N}{r} \mathrm{d}r. \tag{5.4}$$

Or, on voit sur la Figure 5.2 que $r_{i1} \approx r_{i2}$, et donc que le premier terme de 5.4 est négligeable. Il reste alors la deuxième intégrale, qui sonde N entre r_{o2} et r_{o1}. Cette dernière est *précisément* située à l'endroit dominé par ∇_μ, comme visible sur la Figure 5.2. On en déduit que la différence de fréquences entre deux modes g-dominés est un bon indicateur pour contraindre α_{ov}.

Ce raisonnement est bien entendu approximatif, n_g étant ici égal à 1 ou 2 et donc bien éloigné du régime asymptotique. Son utilisation est ici purement qualitative. Cependant, elle sera vérifiée plus tard lorsque modèles et observations seront comparées (voir la Section 7.4.2).

La quantité de croisements évités optimale pour contraindre α_{ov} est cependant le résultat d'un compromis. En effet, avoir beaucoup de modes g-dominés implique pour l'étoile d'être éloignée de la fin de la séquence principale. Or, on s'attend à ce que les sous-géantes plus proches de la branche des géantes soient de moins bons indicateurs de α_{ov}, leur structure ayant eu le temps de considérablement évoluer depuis la fin de la séquence principale. On s'est donc intéressé durant cette thèse aux étoiles présentant deux croisements évités visibles.

6. La double optimisation

Nous avons vu dans le chapitre précédent comment les modes mixtes permettent de contraindre $\alpha_{\rm ov}$ à travers la région dominée par ∇_μ de Brunt-Väisälä. Mais aussi, nous avons vu dans l'introduction les difficultés inhérentes à la modélisation des sous-géantes. Pour pouvoir répondre à ces dernières et profiter ainsi du potentiel des modes mixtes, une méthode spécifiquement dédiée aux sous-géantes a été developpée durant cette thèse et est présentée dans ce chapitre.

6.1. Principe général

Cette méthode, appelée *double optimisation*, cherche à reproduire les fréquences observées individuellement, ainsi que les observables non sismiques, à partir de modèles stellaires dont on calcule les fréquences à l'aide d'un code d'oscillation.

Son principe général est de séparer les paramètres ayant un très fort impact sur les fréquences, la masse et l'âge de l'étoile, des autres paramètres tels que la métallicité, la longueur de mélange, l'overshoot... Pour les premiers, une approche spécifique, adaptée aux caractéristiques sismiques des sous-géantes, est utilisée. Elle est détaillée dans la Section 6.2. Celle-ci est imbriquée dans la seconde étape, qui elle s'intéresse aux autres paramètres et utilise des méthodes plus traditionnelles, dont chaque point de grille ou itération de procédé itératif se basent sur des résultats de la première étape. Elle est détaillée dans la Section 6.3.

Cette type de méthode a été utilisé pour la première fois par Deheuvels & Michel (2011), sur une étoile observée par CoRoT. Durant cette thèse, si le principe général a été conservé, elle a été modifiée pour être rendue plus robuste, et des efforts ont été faits pour la rendre applicable rapidement à d'autres étoiles.

6.2. Optimisation en masse et âge

6.2.1. Principe général

L'optimisation en masse et âge n'a pour paramètres libres que, comme son nom l'indique, la masse et l'âge de l'étoile. Tous les autres paramètres sont considérés comme fixés. Pour pouvoir trouver le couple $(M; \text{âge})_{\rm opt}$ optimal permettant de reproduire au mieux les fréquences, on s'intéresse à deux observables sismiques seulement : la grande séparation $\Delta\nu$ et la fréquence d'un mode g pur ν_g. En effet, il peut être montré qu'un couple $(\Delta\nu; \nu_g)$ donné correspond à un couple $(M; \text{âge})$ unique (Deheuvels & Michel, 2011) . De ce fait,

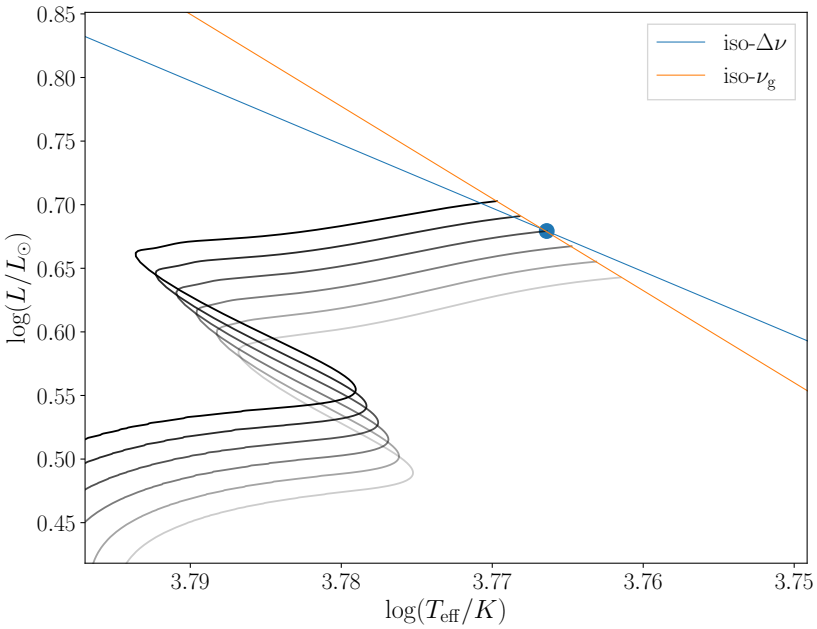

FIGURE 6.1. – Diagramme HR représentant les tracés évolutifs de modèles stellaires ayant des masses variant de 1,2 $M_\odot$ (gris clair) à 1,3 $M_\odot$ (gris foncé). Chaque évolution est arrêtée quand ν_g est correctement reproduite.

reproduire la grande séparation et la fréquence d'un mode g pur assure de trouver la masse et l'âge optimal pour ce modèle.

La Figure 6.1 illustre le principe de cette étape. Y sont tracées dans un diagramme HR deux lignes représentant les modèles ayant des valeurs identiques de $\Delta\nu$ (en bleu) et de ν_g (en orange). Pour la première, elle provient du fait que $L \propto T_{\rm eff}^5$ pour des modèles ayant la même grande séparation (voir l'appendice A de Deheuvels & Michel 2011). La seconde a été calculée à partir de modèles. Y sont aussi représentés différents tracés évolutifs, qui suivent l'évolution de plusieurs étoiles ayant des masses différentes et qui sont arrêtées lorsque celle-ci atteint une valeur donnée de ν_g.

Ce diagramme permet de voir que les deux tracés se croisent en un point unique du diagramme HR (le seul qui reproduit $(\Delta\nu; \nu_g)$), qui correspond, si tout le reste de la physique est fixé, à une masse unique (soit un tracé évolutif unique) et un âge unique (soit un tracé s'arrêtant à un moment donné). Cela facilite grandement le processus pour trouver $(M; \text{âge})_{\rm opt}$, puisqu'il suffit alors de ne s'intéresser qu'à deux observables plutôt qu'à l'ensemble des fréquences.

6.2.2. Trouver ν_g

Pour arriver à reproduire ν_g, on ne joue que sur l'âge de l'étoile. $\Delta\nu$ sera, elle, trouvée en faisant varier la masse de l'étoile.

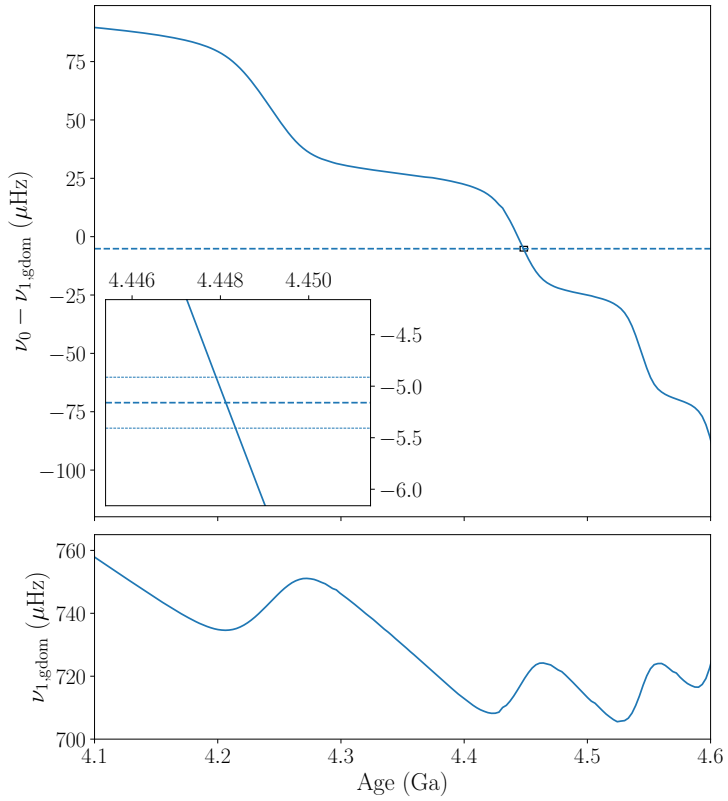

FIGURE 6.2. – Evolution de $\delta_g\nu$ (graphique du haut) et de la fréquence d'un mode g-dominé (graphique du bas). Une incrustation d'un zoom a été effectuée, avec les incertitudes typiques de *Kepler* représentées.

ν_g n'est pas directement accessible, comme le spectre d'oscillations est seulement composé de modes mixtes. Il apparaît alors naturel de prendre, comme indicateur, la fréquence d'un mode fortement g-dominé $\nu_{\mathrm{g-dom}}$: la fréquence de celui-ci est en effet la plus proche de celle du mode g pur. Cependant, l'évolution de $\nu_{\mathrm{g-dom}}$ n'est pas monotone, comme cela peut être observé sur le panneau du bas de la Figure 6.2, qui montre l'évolution des fréquences d'un modèle de sous-géante de 1,3 $M_\odot$. Cela est problématique, car une valeur observée de $\nu_{\mathrm{g-dom}}$ peut alors correspondre à plusieurs âges. En conséquence, la solution adoptée est de considérer la différence entre la fréquence g-dominée et la fréquence du mode radial le plus proche, que l'on notera $\delta_g\nu$. Effectivement, un mode radial étant toujours p pur, sa fréquence ne va majoritairement dépendre que de $\Delta\nu$. Faire la différence entre la fréquence de ce mode et celle d'un mode g-dominé permet donc de se débarrasser de la dépendance en $\Delta\nu$, et de ne garder qu'une évolution monotone dominée par les croisements évités successifs. Cela est vérifié sur la Figure 6.2, où le panneau du haut représente la variation de $\delta_g\nu$ avec le temps.

On peut aussi observer sur cette figure le temps caractéristique extrêmement court de l'évolution de $\delta_g\nu$, au regard des incertitudes observationnelles. Ainsi, l'incrustation zoomée

sur le panneau du haut représente, via une ligne horizontale, une valeur observée, entourée d'incertitudes observationnelles typiques de la mission *Kepler*. On peut voir que, à masse et physique fixée, $\delta_g\nu$ reproduit la valeur observée dans ses incertitudes pendant moins d'1 million d'années, ce qui est entre 2 et 3 ordres deux grandeurs inférieur au temps caractéristique évolutif de l'étoile.

6.2.3. Trouver $\Delta\nu$

La seconde étape est de trouver la masse permettant de reproduire la grande séparation, $\Delta\nu$. $\Delta\nu$ étant sensible aux effets de surface, on préfère reproduire au mieux les fréquences des modes radiaux, corrigées des effets de surface. Pour faire cela, on ajuste la masse des modèles ayant le « bon » âge, c'est-à-dire ayant $\delta_g\nu$ correctement reproduit. On essaie alors de minimiser le χ^2 radial défini par :

$$\chi^2_{\mathrm{rad}} = \sum_n \frac{\left(\nu^{\mathrm{mod}}_{0,n} - \nu^{\mathrm{obs}}_{0,n}\right)^2}{\sigma_n^2}, \tag{6.1}$$

avec $\nu^{\mathrm{mod}}_{0,n}$ et $\nu^{\mathrm{obs}}_{0,n}$ les fréquences radiales respectives des modèles et des observations, et σ_i leurs incertitudes observationnelles. Ce χ^2_{rad} quantifie donc la qualité de reproduction des fréquences radiales, un χ^2_{rad} faible étant meilleur.

Concrètement, on utilise un algorithme de Levenberg-Marquardt (Press et al., 1992). En effet, le comportement des fréquences radiales est largement dominé par $\Delta\nu$, qui évolue quasi-linéairement avec la masse pour des modèles ayant $\delta_g\nu$ fixé. Une simple approche newtonienne permet donc de rapidement trouver la masse permettant de reproduire $\Delta\nu$, la méthode de Levenberg-Marquard assurant une plus grande robustesse. Cette approche diffère de celle utilisée dans Deheuvels & Michel (2011), qui s'intéressait à une seule fréquence et non à toutes les fréquences radiales. Ce changement a notamment permis de rendre cette étape plus robuste au regard du traitement des effets de surface.

Additionnellement, on note que les incertitudes en masse trouvées lors de cette méthode, c'est-à-dire l'écart en masse tel que deux modèles aux âges optimisés mais autres paramètres identiques aient une différence de χ^2 égale à 1, est d'environ 0,0005 $M_\odot$. Cela montre la très grande sensibilité des fréquences des modes mixtes à la masse, et quantifie les pas en masse que devrait avoir une grille pour reproduire les observations *Kepler*.

À la fin de cette étape, tous les modèles ont donc une grande séparation $\Delta\nu$ ainsi que $\delta_g\nu$ correctement reproduits. Une illustration du diagramme échelle d'un modèle résultant de cette étape est visible en Figure 6.3 : on voit que les modes radiaux sont bien reproduits, ainsi que le mode g-dominé de fréquence égale à environ 700 μHz. En revanche, les autres fréquences sont éloignées des observations. Pour reproduire correctement les autres fréquences et ainsi obtenir de bons modèles, on joue sur les autres paramètres dans le cadre de la « deuxième » étape de ce processus.

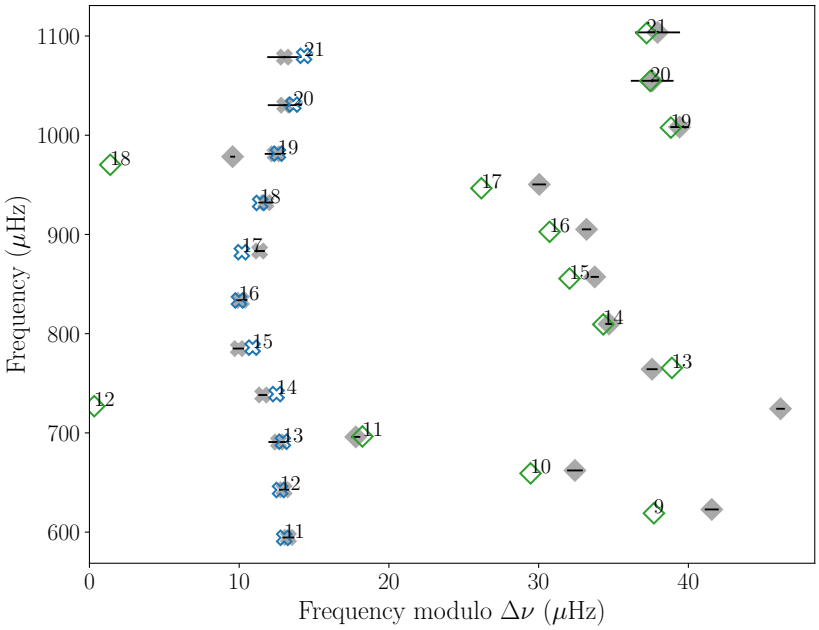

FIGURE 6.3. – Diagramme échelle d'un modèle optimisé en masse et en âge (symboles creux) comparé avec des observations cibles (symboles gris pleins).

6.3. Optimisation des autres paramètres

Pour trouver les autres paramètres, nous travaillons seulement avec des modèles qui sont le résultat de la première étape, l'optimisation en masse et âge. C'est-à-dire que les paramètres libres sont ici, par exemple, la métallicité, la longueur de mélange ou l'overshoot, mais non la masse et l'âge qui seront déterminés à chaque point de cette optimisation par le processus décrit en Section 6.2 : c'est le principe de l'optimisation imbriquée.

Cette approche permet de se détacher de la grande sensibilité en masse et âge des modes mixtes : les autres modes ayant un impact moindre sur les fréquences, il est alors possible d'explorer plus facilement l'espace des paramètres. On cherche dès lors à minimiser le χ^2 total défini par :

$$\chi^2 = \sum_i^{N_{\rm obs}} \frac{\left(x_i^{\rm obs} - x_i^{\rm mod}\right)^2}{\sigma_i^2}, \tag{6.2}$$

avec x_i l'intégralité des observables, qu'ils soient sismiques (toutes les fréquences observées) ou non sismiques (typiquement la luminosité, la température et la métallicité).

Cette méthode peut alors prendre la forme de grilles, ou de méthode d'optimisation itérative. En effet, il est attendu que les variations de χ^2 des modèles déjà optimisés en masse et âge par rapport aux autres paramètres soient relativement « douces » et linéaires. Durant la thèse, plusieurs approches ont été testées, notamment des grilles et une optimisation de type Levenberg-Marquardt. Elle sera précisée dans la Section 7.2.4.

6.4. Tests durant la préparation de la mission PLATO

6.4.1. Présentation et méthode

J'ai été impliqué dans la préparation de la mission PLATO. Dans le cadre du Work Package 124, en charge de la modélisation sismique des cibles, a été effectué, sous la direction de Margarida Cunha, un exercice de type *Hare & Hounds*. Pour celui-ci, une équipe a préparé une série de modèles calculés préalablement (hares), puis en a retiré les observables de surface et fréquences auxquels ils ont rajouté un bruit typique de ce qui est attendu de la mission pour une étoile de magnitude $V \sim 8$ observée pendant deux ans. Plusieurs équipes (hounds) ont ensuite tenté de retrouver les paramètres de ces modèles à partir de ces « données ». Le but ici étant de tester uniquement la précision des méthodes d'optimisation, la physique des hares et des modèles calculés par les équipes est la même (hors exception, comme on le verra dans la Section 6.4.2). De plus, les codes utilisés sont les mêmes : MESAv10108 (Paxton et al., 2015) couplé à ADIPLS (Christensen-Dalsgaard, 2008).

J'ai utilisé pour l'exercice la double optimisation, expliquée plus haut. Les autres équipes ont utilisé les méthodes suivantes :

— BASTA, en utilisant les observables sismiques globaux ($\Delta\nu$ et $\nu_{\max}$), avec ou sans contrainte de luminosité, ou les fréquences individuelles, avec et sans luminosité.

— AIMS (Rendle et al., 2019), qui utilise une grille couplée à des approches bayésienne et MCMC. Les observables sont soit toutes les fréquences individuelles, soit juste les fréquences radiales.

Cela a donc été l'occasion de tester la double optimisation sur un ensemble d'étoiles, qui couvre plusieurs masses et stades évolutifs. Pour l'optimisation des autres paramètres (Section 6.3), autres que la masse et l'âge, un simple algorithme de Levenberg-Marquardt a été utilisé. Les paramètres libres sont la métallicité [Fe/H] et la composition initiale en hélium Y_0. À noter qu'une loi d'enrichissement a été communiquée, permettant alors de déduire Y_0 de [Fe/H]. Cependant, afin de tester la méthode avec plusieurs paramètres libres, nous avons préféré la laisser libre. En outre, la longueur de mélange a été fixée à 1,84, et aucune diffusion microscopique ni overshoot n'ont été pris en compte.

6.4.2. Résultats

Qualité des fits

Les diagrammes échelle dans la Figure 6.4 représentent les fréquences des « étoiles » cibles ainsi que de celles des meilleurs modèles. On remarque directement que la méthode produit de très bons résultats : tous les hares ont leurs fréquences correctement reproduites par l'optimisation, que ce soit les modes p-dominés ou les modes g-dominés. Les caractéristiques de ces modèles sont résumées dans la Table 6.1 : les χ^2 réduits (notés χ^2_r), pour la plupart proches de 1, confirment cette première analyse visuelle et un bon accord statistique avec les « observations ». On note l'exception de Mulder et de Molly : nous y reviendrons plus

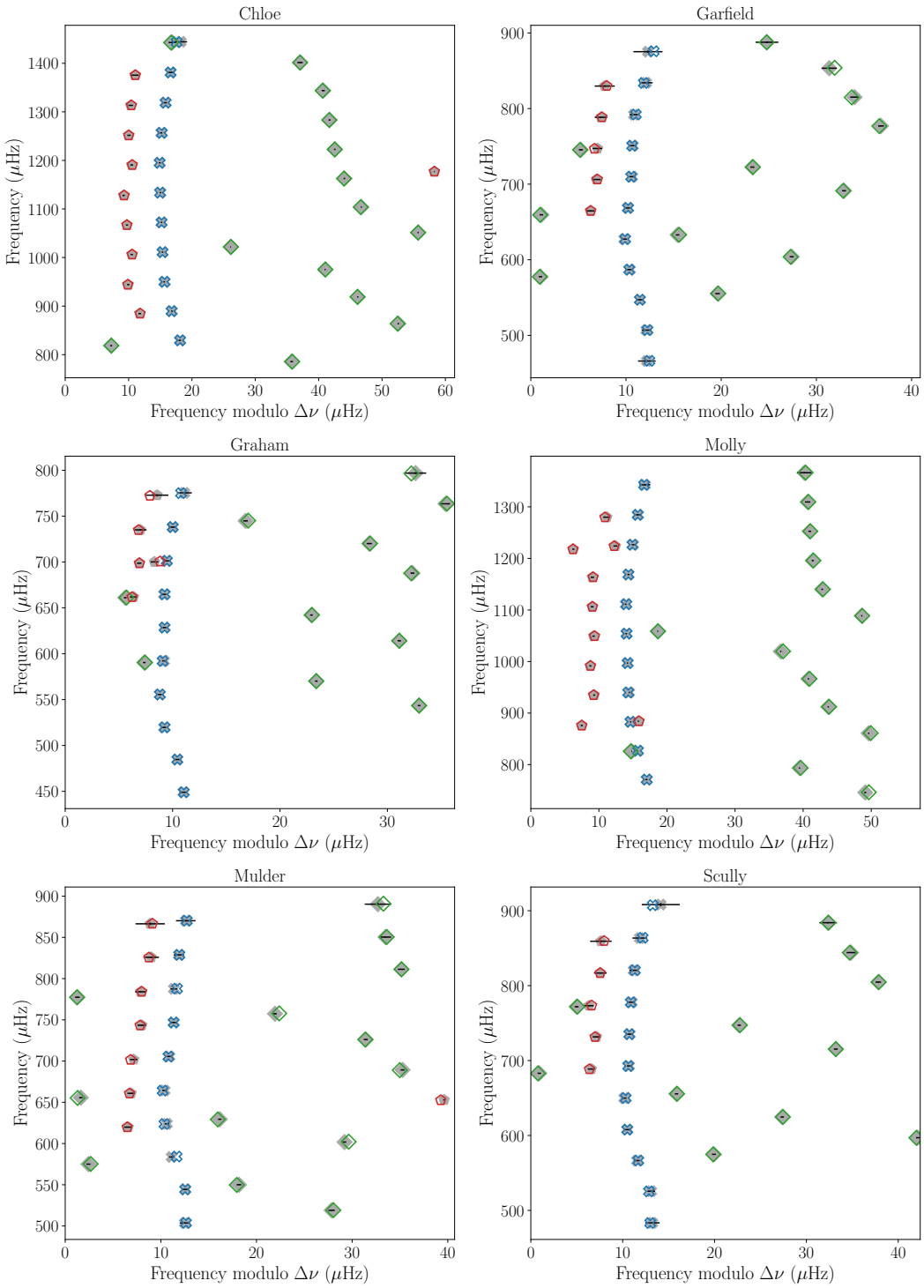

FIGURE 6.4. – Diagrammes échelles des *Hares* et des *Hounds*, respectivement en symboles plein et creux. Les fréquences radiales sont bleu, dipolaires en verts et quadripolaires en rouge. Les points sont décalés horizontalement de façon à ce que les modes radiaux aient approximativement la même abscisse, pour faciliter la comparaison.

Nom	X_0	Y_0	Z_0	M ($M_\odot$)	Age (Ga)	R ($R_\odot$)	χ^2_r
Chloe	0,697	0,275	0,026	1,04	11,16	1,72	1,8
Garfield	0,747	0,241	0,011	1,29	4,13	2,42	1,7
Graham	0,690	0,289	0,019	1,41	2,86	2,71	2,5
Molly	0,676	0,294	0,029	1,08	8,90	1,83	16,0
Mulder	0,703	0,282	0,014	1,29	3,38	2,42	13,3
Scully	0,717	0,272	0,010	1,18	4,58	2,30	1,7

TABLE 6.1. – Paramètres des meilleurs modèles pour chaque *hare*.

Nom	X_0	Y_0	Z_0	M	Age	R	Commentaire
Chloe	1,4	-3,4	-0,4	1,1	1,6	0,4	
Garfield	3,1	-9,6	-2,3	3,1	2,8	1,1	
Graham	-2,3	5,1	5,0	-1,7	-1,0	-0,5	
Molly	-0,5	1,6	-3,8	0,2	-2,8	0,0	Inclut du triage gravit,
Mulder	-1,3	4,1	-15,8	-0,6	-13,6	-0,4	Atmosphère différente
Scully	2,1	-5,4	-2,8	1,9	1,2	0,7	$Y_0 + 0{,}1$

TABLE 6.2. – Écarts relatifs en % des paramètres des meilleurs modèles avec les paramètres réels des hares, dans le sens « Modèles - Observations »

tard.

D'ailleurs, on note sur la Figure 6.4 et la Table 6.1 la diversité des stades évolutifs et masses des cibles : Graham est ainsi une étoile avec de nombreux croisements évités et une masse intermédiaire, quand Chloe est une étoile de masse quasi-solaire et proche de la TAMS avec un seul croisement évité. Ce travail représente donc un bon exercice pour la méthode.

Enfin, la comparaison de la double optimisation avec les autres méthodes utilisant des grilles a notamment permis de quantifier la différence en qualité d'ajustement des fréquences : les autres méthodes trouvent ainsi des χ^2 significativement supérieurs. AIMS trouve par exemple des χ^2_r de 108,6 pour Graham (pire cas) et 24,9 pour Molly (meilleur cas, comparé au χ^2_r de la double optimisation) quand BASTA trouve des χ^2_r de 60,9 pour Chloé (pire cas) et 3,2 pour Garfield (meilleur cas). Il faut cependant garder à l'esprit que ces méthodes sont bien plus rapides à utiliser que la double optimisation, et que les buts recherchés ne sont pas les mêmes : la double optimisation cherche à contraindre finement la structure de l'étoile, quand les autres méthodes cherchent à trouver ses paramètres globaux.

Comparaison avec les valeurs réelles

Une fois l'exercice terminé, nous avons pu avoir accès aux caractéristiques des hares.

Les écarts avec les valeurs réelles sont présentés dans la Table 6.2. On peut voir qu'ils

sont globalement faibles, notamment avec des masses trouvées avec une précision entre 0 et 3 %. L'âge, aussi, est précisément trouvé : cela est encourageant, l'étude sismique des sous-géantes dans le cadre de PLATO ayant notamment pour but de donner une forte contrainte sur l'âge des systèmes planétaires. Enfin, les masses étant précisément trouvées, il n'est pas étonnant que les rayons le soient encore plus : notre approche impose l'ajustement de $\Delta\nu$, qui se comporte comme la racine carrée de la densité moyenne de l'étoile.

On note que certains modèles, Molly, Mulder et Scully, ont des physiques différentes de celle avec laquelle les équipes ont calculé les modèles. Nous allons donc analyser ces étoiles au cas par cas.

Molly Molly inclut le triage gravitationnel : on s'attend donc à une influence sur l'âge de l'étoile, la chute d'éléments lourds dans le cœur rallongeant la durée de la séquence principale (e.g., Noerdlinger & Arigo 1980; Valle et al. 2014; Silva Aguirre et al. 2015). Cela n'est pas cependant pas observé ici, l'âge du meilleur modèle sans diffusion étant proche de celui avec diffusion. En revanche, l'absence de diffusion dans les modèles calculés paraît affecter les fréquences, le χ^2_r étant particulièrement élevé pour cette étoile. On verra en effet plus tard, dans la Section 7.5.1, que la diffusion affecte de manière significative les jeunes sous-géantes.

Mulder Mulder, elle, a une atmosphère différente : la relation $T - \tau$ résulte d'un ajustement au modèle d'atmosphère solaire C de Vernazza et al. (1981). Cela peut avoir un impact sur deux aspects : les effets de surface ainsi que le paramètre $\alpha_{\rm MLT}$ de longueur de mélange, qui pour rappel a été fixé durant l'exercice. L'optimisation nous donne alors des modèles ayant un mauvais ajustement des fréquences « observées » (comparativement aux autres hares), ainsi qu'un âge significativement inférieur. On rajoute que les autres équipes utilisant les fréquences mixtes ont, toutes, trouvé des âges comparables environ 10 % inférieur à la vraie valeur. Nous avons refait une optimisation en libérant cette fois $\alpha_{\rm MLT}$, pour voir si cette différente atmosphère pouvait être compensée par ce nouveau paramètre libre. On trouve alors une forte amélioration de l'ajustement des fréquences, avec $\chi^2_r = 3{,}2$ et des caractéristiques plus proches de celles du hare : l'âge est ainsi correctement reproduit à 0,6% près. Ce lien entre $\alpha_{\rm MLT}$ et l'âge pourrait ainsi être similaire à ce qui est observé pour des étoiles en séquence principale (Lebreton & Goupil, 2014).

Scully Scully a une valeur de Y_0 ne respectant pas la même loi d'enrichissement que les modèles de la grille pré-calculée, ce qui impacte particulièrement les équipes ayant modélisé les hares en utilisant celle-ci, qui suppose une loi fixe d'enrichissement. En revanche, Y_0 étant considéré comme un paramètre libre dans notre approche, cela ne devrait pas impacter nos résultats. C'est effectivement ce qu'on observe, avec une qualité d'ajustement (χ^2_r de l'ordre de 1) et d'accord des paramètres comparable à celle des étoiles à la physique non modifiée. Les autres équipes ont obtenu des masses surestimées de 2,5 à 5%, malgré des χ^2_r comparables à ceux obtenus pour les étoiles à la physique non modifiée. Cela est en accord avec Noll et al. (2021), qui montre que la dégénerescence entre la masse et la

composition initiale en hélium n'est pas levée pour les sous-géantes. Les âges ne paraissent en revanche pas affectés, en accord avec Li et al. (2020a) qui trouvent que les âges des meilleurs modèles sont robustes aux changements de Y_0.

La question des incertitudes

Les incertitudes, pour cet exercice, ont été déterminées en utilisant la matrice de covariance résultant du calcul des dérivées via l'algorithme de Levenberg-Marquardt (voir p. ex. Press et al. 1992). Elles sont de l'ordre de 0,001 $M_\odot$ pour la masse, 0,01 Ga pour l'âge, et 0,001 pour la métallicité et la composition en hélium initiale. Elles sont donc fortement sous-estimées par rapport aux différences avec les valeurs réelles des hares. On note qu'un tel comportement est aussi retrouvé par les autres équipes.

Nous avons a posteriori compris l'origine de notre sous-estimation des barres d'erreur. Elle provient de la dégéneréscence entre la masse et la fraction initiale d'hélium. Celle-ci, détaillée dans la Section 7.5.2, rend la topologie du χ^2 particulière : elle prend la forme d'une « vallée » étroite dans le plan (Y_0,M). L'algorithme LM faisant l'hypothèse que le χ^2 a une forme quadratique proche du minimum, il échoue à prendre en compte les fortes corrélations entre la masse et Y_0. Cela mène donc à des incertitudes sous-estimées. Dans le cadre de l'application de cette méthode à des observations, une solution a été d'effectuer une grille en Y_0 (voir la Section 7.2), ce qui a permis une estimation d'incertitudes plus réalistes.

6.5. Application de la méthode à des observations

Au-delà du but initial pour lequel elle a été créée, à savoir reproduire finement les modes mixtes pour pouvoir tester la physique, la double optimisation peut être utilisée pour estimer les paramètres stellaires de sous-géantes. Elle a ainsi été utilisée dans cet objectif pendant ma thèse, sur des sous-géantes observées avec *Kepler* et TESS.

KIC8524425 et KIC5955122

Dans Deheuvels et al. (2020) deux sous-géantes observées par *Kepler*, KIC8524425 et KIC5955122 ont été modélisées. Ces étoiles présentent des modes « splittés » par la rotation : celle-ci brise la symétrie sphérique et lève la dégénerescence en m. La séparation en fréquence des modes de même degré l et ordre radial n mais de m différents est alors connue sous le nom de splitting rotationnel. Le but de cet article est de sonder les profils de rotation de ces sous-géantes via une procédure d'inversion. Pour cela, on utilise le fait que, dans le cas d'une rotation lente, les splittings rotationnels peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$\delta_s\nu = \int_0^R K_{n,l}(r)\Omega(r)\,\mathrm{d}r, \tag{6.3}$$

$\Omega(r)$ étant la fréquence de rotation et $K_{n,l}$ le noyau rotationnel du mode considéré. Ce dernier dépend des quantités d'équilibre, et peut être calculé avec un code d'oscillation. Il

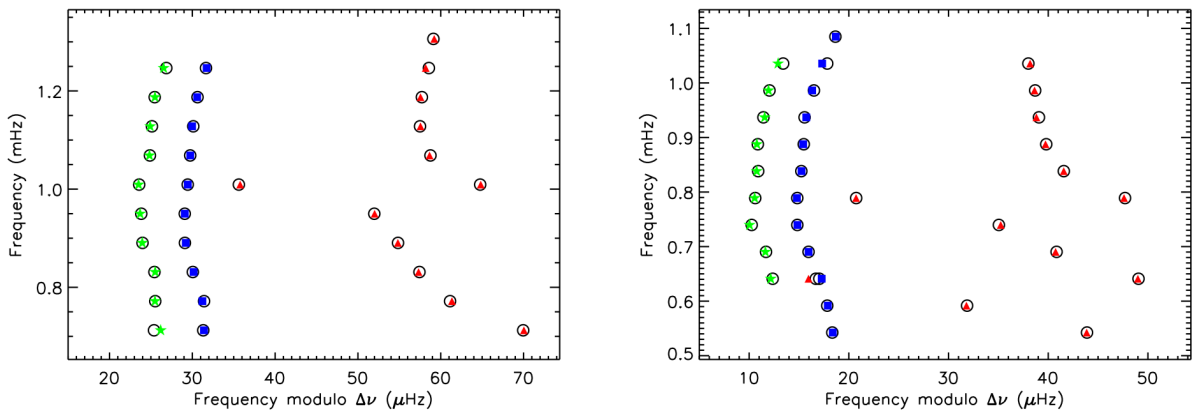

FIGURE 6.5. – Diagrammes échelles des meilleurs modèles de KIC8524425 (à gauche) et KIC5955122 (à droite). Les observations sont en symboles creux, et les meilleurs modèles en symboles pleins. Les modes radiaux, dipolaires et quadripolaires sont respectivement en bleu, rouge et vert.

faut fournir à celui-ci des modèles proches des observations, qui reproduisent correctement les modes non-splittés. La double optimisation est donc particulièrement intéressante ici, car elle permet de reproduire finement les modes mixtes, qui permettent ainsi de sonder Ω dans les régions profondes de l'étoile.

Les deux étoiles ont été modélisées via une grille de modèles optimisés en masse et âge, avec comme paramètres libres [Fe/H], Y_0 et $\alpha_{\rm MLT}$. KIC8524425 est une jeune sous-géante présentant un seul croisement évité, et de faible masse (1,113 $M_\odot$) et n'ayant donc pas eu de cœur convectif (ce point est confirmé par les meilleurs modèles obtenus). KIC5955122 présente deux croisements évités, et est juste assez massive pour avoir eu un cœur convectif dans les meilleurs modèles (1,218 $M_\odot$). Dans les deux cas, l'optimisation s'est bien déroulée avec des χ^2_r de 5,1 pour la première et de 2,0 pour la seconde. Les diagrammes échelle des meilleurs modèles avec les observations sont représentés en Figure 6.5 tirée de l'article.

Au cours de la modélisation, des modèles avec et sans overshoot de KIC5955122 ont été calculés. Les meilleurs modèles ont été obtenus sans overshooting. L'étoile ayant une masse juste suffisante pour avoir un cœur convectif, ce résultat serait en accord avec l'idée que la quantité d'overshoot dépend de la masse (Claret & Torres, 2018; Deheuvels et al., 2016). Ce résultat est important dans le cadre de la thèse, car il montre notamment que les sous-géantes peuvent permettre de discriminer un modèle avec d'un modèle sans overshoot.

Les conclusions de l'article sont que les deux étoiles ont une rotation proche de celle d'un corps rigide, avec des contrastes de rotation entre le cœur et l'enveloppe (que l'on peut mesurer grâce aux modes mixtes) proches de 1 (0,68 $\pm$ 0,47 pour KIC8524425 et 0,72 $\pm$ 0,37 pour KIC5855122). Or, la contraction du cœur en fin de séquence principale combinée avec la conservation du moment cinétique impliquerait un fort contraste pour des étoiles proches de la TAMS, ce qui n'est pas observé. Ce résultat, obtenu ici pour des jeunes sous-géantes, est complémentaire de résultats obtenus pour des étoiles plus évoluées

(Mosser et al., 2014; Deheuvels et al., 2014) et montre notamment que les processus de transport de moment cinétiquent perdent de leur efficacité durant la phase de sous-géante, en accord avec Eggenberger et al. (2019a).

La nature de ces processus reste cependant à déterminer. Les candidats sont le transport par ondes de gravité internes (Fuller et al., 2014; Pinçon et al., 2016), via les modes mixtes (Belkacem et al., 2015), via le champ magnétique (Maeder & Meynet, 2014) ou encore par des instabilités causées par celui-ci (Jouve et al., 2015; Fuller et al., 2019), aucun ne permettant seul d'expliquer les résultats obtenus via l'astérosismologie.

94 Aqr Aa

94 Aqr Aa est une étoile observée par TESS durant 27 jours, modélisée dans le cadre d'une étude de Metcalfe et al. (2020). La faible durée des observations implique que peu de fréquences ont été détectées : seulement 4 modes radiaux, 6 modes dipolaires et 2 modes quadripolaires. Les ordres radiaux des modes ayant pu être identifiés, la méthode de la double optimisation a pu être appliquée, en parallèle de modélisations effectuées par d'autres équipes. Les résultats de ces modélisations apparaissent comme compatibles avec les déterminations de paramètres provenant de l'astrométrie (l'étoile étant double), de la spectroscopie et de la photométrie : on trouve une étoile âgée de $6{,}2 \pm 0{,}2\,\mathrm{Ga}$, de $1{,}22 \pm 0{,}03\,M_\odot$ et ayant une métallicité de $0{,}15 \pm 0{,}05\,\mathrm{dex}$.

Le but de cette étude est de comparer la vitesse de rotation de l'étoile avec un modèle de saturation du freinage magnétique des étoiles de faible masse (van Saders et al., 2016). En utilisant l'astérosismologie comme moyen d'obtenir des valeurs précises des paramètres stellaires, Metcalfe et al. (2020) observent que la période de rotation de l'étoile est trop courte pour être compatible avec un modèle de freinage magnétique classique, ce qui favoriserait donc l'hypothèse d'une saturation du freinage magnétique.

HD 22146

HD 22146 est une étoile étudiée par Huber et al. (2019) et observée par TESS durant 27 jours. Elle comporte dans son système une Saturne chaude : cette étude cherche donc à caractériser précisément cette planète grâce à la détermination astérosismologique précise des caractéristiques de l'étoile par plusieurs équipes indépendantes. Tout comme 94 Aqr Aa, la courte durée pendant laquelle elle a été observée implique un faible nombre de fréquences détectées : 3 fréquences radiales, 4 fréquences dipolaires et 1 fréquence quadripolaire. La Figure 6.6 montre le diagramme échelle des observations et meilleurs modèles de l'étoile, tiré de Huber et al. (2019), et illustre le faible nombre de fréquences détectées. En conséquence, la double optimisation n'a pas pu être directement appliquée, et une approche plus traditionnelle avec des grilles en masse et âge a été effectuée. Les résultats obtenus sont cohérents avec ceux des autres équipes. On trouve alors une masse de $1{,}212 \pm 0{,}07\,M_\odot$, et un âge de $4{,}9 \pm 1{,}1\,\mathrm{Ga}$ dont dérivent une masse pour HD 22146 b de $0{,}190 \pm 0{,}018$ masse jovienne et un rayon de $0{,}836 \pm 0{,}031$ rayon jovien.

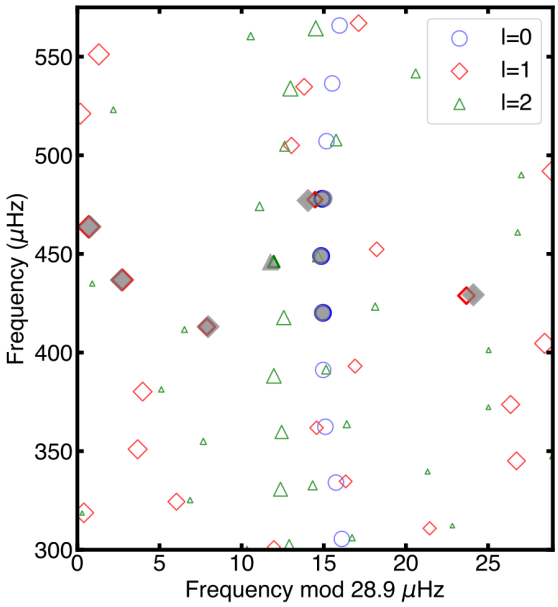

FIGURE 6.6. – Diagramme échelle des observations de HD 22146 (en symboles pleins) et du meilleur modèle obtenu (en symboles creux).

Les conclusions de l'article montrent notamment l'intérêt que peut représenter l'astérosismologie dans la détermination des caractéristiques exoplanétaires : HD 22146b est une des Saturnes chaudes les mieux caractérisées à la date de l'article. Ce type de travail, faisant la synergie entre astérosismologie et contrainte d'exoplanètes, préfigure ce qu'il sera possible d'obtenir avec PLATO sur un nombre important de cibles.

7. Modélisation d'une sous-géante observée par Kepler : KIC10273246

Afin de valider la méthode de la modélisation sismique des sous-géantes comme moyen de contraindre l'overshoot, mais aussi de tester la méthode de la double optimisation, un travail de modélisation approfondi a été effectué sur l'étoile sous-géante KIC10273246, observée par *Kepler*. Nous allons voir dans cette partie les différents résultats qui ont pu être obtenus de cette étoile, et qui ont été publiés dans Noll et al. (2021).

7.1. Le choix de l'étoile et ses caractéristiques

7.1.1. Les critères de sélection

A partir de l'étude des caractéristiques sismiques et structurelles des sous-géantes effectuée dans le Chapitre 5, nous établissons des critères de sélection afin de trouver une étoile dont les propriétés permettent de contraindre au mieux $\alpha_{\rm ov}$.

Les données utilisées proviennent de la mission *Kepler*. Nous avons privilégié les étoiles ayant été observées le plus longtemps possible, afin de pouvoir s'assurer d'une haute précision fréquentielle. Enfin, les données doivent être prises en cadence courte : les données longues cadences, prises toutes les 30 minutes, imposent une fréquence de Nyquist de 0,28 mHz, inférieure aux fréquences typiques observées dans les sous-géantes.

Le second critère est, bien entendu, la masse de l'étoile. En effet, nous avons vu que les étoiles ayant une masse inférieure à environ $1{,}2\,M_\odot$ ne possèdent pas de cœur convectif durant la séquence principale et sont en conséquence peu sensibles à $\alpha_{\rm ov}$. Il est important de noter que cette masse limite dépend de beaucoup de facteurs. Notamment, la composition de l'étoile : comme on peut le voir dans l'expression 1.1, le gradient radiatif dépend de l'opacité, qui elle-même dépend de la composition de l'étoile. Des étoiles faiblement métalliques auront ainsi des cœurs convectifs pour des masses plus faibles. Aussi, ajouter de l'overshoot peut jouer sur la « survie » de celui-ci dans les étoiles de faible masse : le petit cœur convectif développé par toutes les étoiles au début de la séquence principale, du fait de la combustion hors équilibre de ^{12}C et ^{3}He, peut subsister ou pas dépendamment de la valeur de $\alpha_{\rm ov}$.

Enfin, le dernier critère est le nombre de croisements évités. Du fait d'un compromis entre les contraintes structurelles apportées par un grand nombre de croisements évités et la perte de l'information structurelle de séquence principale résultant de l'évolution de l'étoile sur la branche des sous-géantes, nous avons donc choisi une étoile présentant deux

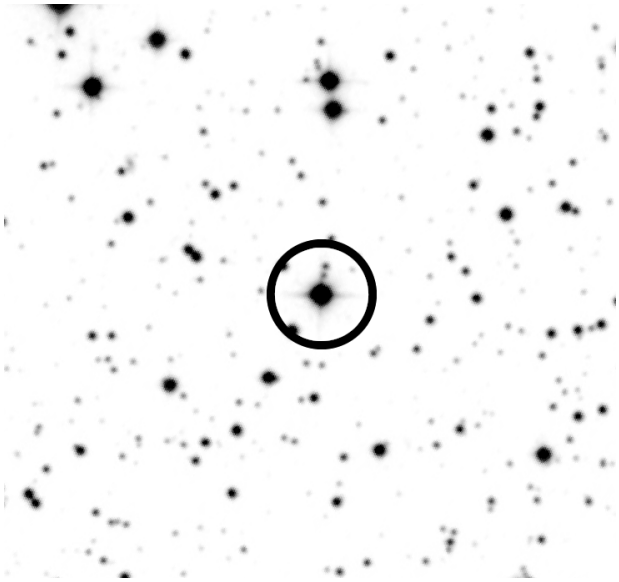

FIGURE 7.1. – KIC10273246 est au milieu du cercle noir. Image tirée de Aladdin, sur des données DSS © 1993–1995 California Institute of Technology.

croisements évités, comme expliqué dans la Section 5.2.

7.1.2. Extraction des paramètres sismiques

Extraction des fréquences

Ces différents critères ont mené au choix de KIC10273246, dont l'image est visible en Figure 7.1. Cette dernière a été observée durant 978 jours en courte cadence par *Kepler*. La Figure 7.2 représente son diagramme échelle observationnel. On voit clairement la présence de deux croisements évités, ce qui justifie son choix du point de vue sismique. Les fréquences de ses modes d'oscillation ont été extraites par Sébastien Deheuvels en utilisant une méthode de maximum de vraisemblance, d'après Appourchaux et al. (2008). Elles sont présentées dans la Table A.1 de Noll et al. (2021). On note que les incertitudes sont généralement de l'ordre de 0,1 μHz autour de $\nu_{\max}$, preuve de la très bonne qualité des données obtenues. A partir de ces fréquences a été déduite la grande séparation observationnelle, avec $\Delta\nu_{\rm obs} = 48{,}47 \pm 0{,}02\,\mu$Hz. Celle-ci équivaut à une grande séparation asymptotique de $\Delta\nu_{\rm as} = 50{,}63 \pm 0{,}02\,\mu$Hz (Mosser et al., 2013). De plus, on trouve $\nu_{\max} = 843 \pm 20\,\mu$Hz.

Les modes g-dominés, sur lesquels notre intérêt va se concentrer durant la modélisation, sont les modes dipolaires (1,11) et (1,18), ainsi que le mode quadripolaire (2,10). L'identification des modes a ici été effectuée à partir de modèles reproduisant grossièrement les fréquences.

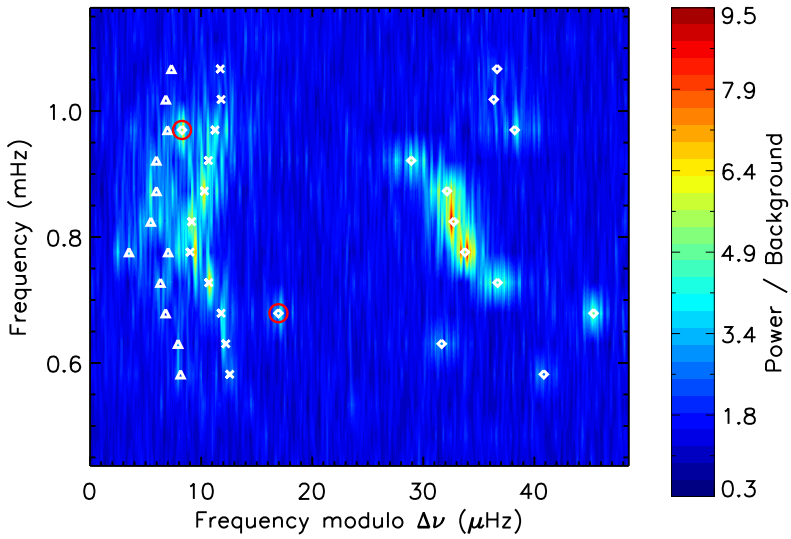

FIGURE 7.2. – Diagramme échelle observationnel de KIC10273246.

Relations d'échelle

Les caractéristiques de l'étoile telles que sa masse, son rayon ou sa gravité de surface peuvent être déduites des relations d'échelle sismiques (Brown et al., 1991). Ces dernières proviennent du fait que $\Delta\nu \sim \bar{\rho}^{1/2}$, avec $\bar{\rho}$ la densité moyenne de l'étoile, et que $\nu_{\rm ac} \sim gT_{\rm eff}^{-1/2}$, $\nu_{\rm ac}$ étant la fréquence de coupure acoustique et g la gravité de surface. Il est couramment admis que $\nu_{\rm ac}$ se comporte comme $\nu_{\rm max}$, ce qui est bien vérifié observationnellement (Stello et al., 2008; Huber et al., 2011) mais aussi théoriquement (Belkacem et al., 2011). On déduit de cela des relations d'échelle sur la masse, le rayon et la gravité de surface de l'étoile :

$$\frac{M}{M_\odot} \sim \left(\frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max,\odot}}\right)^3 \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\odot}\right)^{-4} \left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}}\right)^{3/2} ; \tag{7.1}$$

$$\frac{R}{R_\odot} \sim \left(\frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max,\odot}}\right) \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_\odot}\right)^{-2} \left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}}\right)^{1/2} ; \tag{7.2}$$

$$\frac{g}{g_\odot} \sim \left(\frac{\nu_{\rm max}}{\nu_{\rm max,\odot}}\right) \left(\frac{T_{\rm eff}}{T_{\rm eff,\odot}}\right)^{1/2} . \tag{7.3}$$

Ces relations sont souvent utilisées dans la cadre d'études astérosismologiques portant sur un nombre important de cibles, notamment pour celles dont le rapport signal à bruit est trop faible pour pouvoir récupérer les fréquences individuelles des modes. Ce genre d'approche est utilisé, par exemple, dans le cadre de l'archéologie galactique. Dans celui de notre modélisation, elle permet d'avoir une première approche grossière des caractéristiques de l'étoile avant d'effectuer une modélisation plus poussée. On trouve $M = 1{,}24 \pm 0{,}12\, M_\odot$,

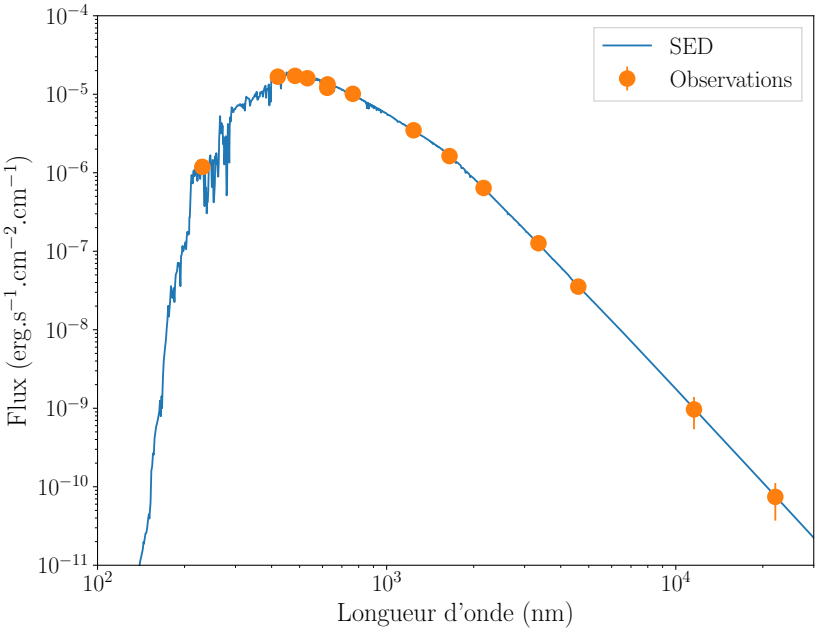

FIGURE 7.3. – Spectre ajusté aux observations.

$R = 2{,}10 \pm 0{,}07\,R_\odot$ et $\log g = 3{,}88 \pm 0{,}03$. La masse de l'étoile indique qu'elle a très probablement eu un cœur convectif durant sa séquence principale. Cela confirme le choix de KIC10273246 comme étoile cible.

7.1.3. Extraction des paramètres non sismiques

En complément des données sismiques, nous avons pris en compte la température effective, la métallicité et la luminosité de l'étoile dans notre modélisation. La première a été déduite de mesures spectroscopiques par Creevey et al. (2012). Ils trouvent des valeurs variées de $T_{\rm eff}$ en utilisant différentes méthodes à partir d'un même spectre, entre 5933 et 6380 K. Une moyenne donne une valeur de 6150 ± 100 K.

La métallicité a aussi été déduite de Creevey et al. (2012), avec $[\mathrm{Fe/H}] = -0{,}13 \pm 0{,}1$ dex. L'étoile étant légèrement sous-métallique par rapport au Soleil, on s'attend bien à ce qu'elle ait eu un cœur convectif durant sa séquence principale, au regard de la masse trouvée par les relations d'échelle.

La luminosité a été trouvée à partir d'un ajustement de distribution d'énergie spectrale (SED), d'après la méthode de Stassun & Torres (2016). Celle-ci consiste à ajuster la SED découlant des données photométriques provenant de plusieurs missions dans différentes longueurs d'onde, en utilisant des modèles d'atmosphère de Kurucz (2005). Nous avons extrait les données en utilisant l'outil VizieR (Ochsenbein et al., 2000). Celles-ci proviennent des missions GALEX (Martin et al., 2005), *Tycho-2* (Høg et al., 2000), 2MASS (Skrutskie et al., 2006), SDSS (Aguado et al., 2019), WISE (Wright et al., 2010) et *Gaia* (Evans

et al., 2018). Nous avons ensuite ajusté sur ces points des spectres Kurucz ayant la gravité de surface trouvée via les relations d'échelles, et la métallicité de Creevey et al. (2012). Les paramètres libres de cet ajustement sont la température effective, l'extinction et un facteur d'échelle entre les observations photométriques et les points photométriques synthétiques résultant de la convolution des différents filtres avec les spectres Kurucz. Enfin, on rajoute comme information *a priori* la température effective de Creevey et al. (2012) et l'extinction provenant de Green et al. (2019). On trouve $T_{\rm eff} = 6000 \pm 33\,{\rm K}$, et une extinction nulle. Le χ^2 réduit est de 0,7, indiquant un bon accord avec les observations, comme on peut le voir sur la Figure 7.3. Enfin, on prend en compte la parallaxe provenant de Gaia DR2 ainsi que le biais trouvé par Zinn et al. (2019) dans le champ de vue de *Kepler*. On déduit de cette valeur une luminosité $L = 5{,}74 \pm 0{,}17\,L_\odot$, qui sera utilisée dans la modélisation de l'étoile. On peut noter que les données provenant de Gaia DR3, sorties après la publication de l'article, trouvent effectivement une parallaxe supérieure à celle de Gaia DR2 comme prévu par Zinn et al. (2019). Cependant, la différence est moindre, la valeur de Gaia DR3 étant comprise dans les incertitudes de Gaia DR2. En utilisant cette nouvelle valeur de parallaxe, on trouve $L_{\rm DR3} = 5{,}82 \pm 0{,}09\,L_\odot$, compatible avec la valeur utilisée dans Noll et al. (2021).

7.2. Présentation de la méthode

7.2.1. Codes et physique utilisée

La code d'évolution utilisé est MESAv10108. Les tables d'équation d'état et d'opacité utilisées sont celles d'OPAL (Rogers et al., 1996; Iglesias & Rogers, 1996). Le mélange d'élements chimiques utilisé provient de Asplund et al. (2009). L'atmosphère des modèles suit le modèle « Eddington-gris ». Les zones convectives sont modélisées d'après la MLT telle que décrite dans Cox & Giuli (1968). Les modèles présentés dans Noll et al. (2021) prennent en compte le triage gravitationnel ainsi que la diffusion chimique, en résolvant les équations complètes de Burgers (1969). On note que la modélisation devait être au début de la thèse effectuée sans prendre en compte la diffusion microscopique, avant de la tester dans un second temps. Cependant, pour les raisons exposées dans la Section 7.5.1, la diffusion a été intégrée dans la modélisation principale. On sait que, pour les étoiles dans la gamme de masse étudiée, le triage gravitationnel est en partie compensé par les accélérations radiatives dans l'enveloppe, durant la séquence principale (Deal et al., 2018). Or, prendre en compte ces accélérations demande de recalculer les opacités à chaque itération du code d'évolution, ce qui est extrêmement couteux en temps de calcul. En conséquence, elles ont été ignorées. Leur impact a néanmoins été mesuré sur un modèle spécifique, comme détaillé dans la Section 7.5.1.

Nous avons vu dans la Section 1.2.1 que, pour les étoiles dans cette gamme de masse, il est préférable d'utiliser le critère de Ledoux. Nous avons donc utilisé cette prescription, couplée à l'algorithme de *predictive mixing* (décrit dans la même Section).

De plus, lors de l'optimisation, nous avons vu que certains modèles reproduisant cor-

rectement les fréquences avaient des valeurs de Y_0 supérieures à 0,31 pour des métallicités légèrement sous-solaires. Ce résultat est peu probable d'un point de vue astrophysique, l'enrichissement en hélium étant trop important par rapport à celui en métaux. Nous avons donc décidé de ne pas prendre en compte les modèles présentant $\Delta Y_0/\Delta Z_0 > 5$, sachant que la littérature s'accorde généralement sur des valeurs de $\Delta Y_0/\Delta Z_0$ comprises entre 1 et 3 (e.g., Silva Aguirre et al. 2015).

Enfin, le code d'oscillation utilisé est ADIPLS (Christensen-Dalsgaard, 2008).

7.2.2. Le traitement des effets de surface

On désigne sous le nom d'« effets de surface » l'impact de l'ensemble des processus physiques mal modélisés proches de la photosphère ayant un impact sur les fréquences (e.g., Christensen-Dalsgaard et al. 1996). Ces derniers sont dus à la non-adiabaticité de la convection ou des oscillations dans les régions les plus superficielles de l'étoile, et aux effets de la pression turbulente sur les modes.

Pour traiter ces effets de surface, trois approches sont possibles. La première est d'appliquer une correction aux fréquences selon une loi paramétrique (Kjeldsen et al., 2008; Ball & Gizon, 2014; Sonoi et al., 2015). La deuxième est une approche non-paramétrique, via des ratios de fréquences qui ont la propriété intéressante d'être non-sensibles aux couches externes de l'étoile (Roxburgh & Vorontsov, 2003; Roxburgh, 2005). La dernière est d'accoler une atmosphère 3D sur un modèle 1D, ce qui a déjà était fait sur le Soleil (Rosenthal et al., 1999) et sur d'autres étoiles (e.g., Sonoi et al. 2015; Jørgensen et al. 2017). Malgré des écarts toujours existant entre les observations et les modèles « patchés » (Jørgensen et al., 2019), cette approche est prometteuse à l'avenir.

L'approche non-paramétrique, intéressante en séquence principale, n'est pas applicable aux étoiles post-séquence principale à cause de la présence des modes mixtes. La seule option est alors d'utiliser le premier type de correction. La prescription de Kjeldsen et al. (2008), couramment utilisée dans la littérature, comporte un problème pour les étoiles post-séquence principale : elle ne prend pas en compte le type du mode considéré. Or, on sait que les modes mixtes g-dominés sont moins sensibles que les modes p-dominés aux effets de surface. Une solution est alors de rajouter un facteur $1/\mathcal{I}$, avec $\mathcal{I}$ le rapport entre l'inertie du mode et celle du mode radial avec la fréquence la plus proche. De ce fait, les modes à haute inertie, c'est-à-dire les modes g-dominés, sont moins impactés par la correction. C'est la correction utilisée notamment par Deheuvels & Michel (2011). Ball & Gizon (2017) ont étudié et comparé les différentes prescriptions de correction d'effets de surface pour les étoiles post-séquence principale. Ils trouvent notamment que la prescription de Kjeldsen et al. (2008), calibrée sur le Soleil, ne permet pas un ajustement aussi bon que les autres prescriptions. Nous avons donc utilisé la prescription de Ball & Gizon (2014). Celle-ci se base sur les résultats provenant d'études perturbatives (Gough, 1990; Goldreich et al., 1991) et propose une correction composée d'un terme proportionnel à $\nu^3/\mathcal{I}$ ajouté à un terme proportionnel à $\nu^{-1}/\mathcal{I}$. L'impact du dernier étant négligeable, nous avons

uniquement gardé le terme cubique. On rappelle ici son expression :

$$\delta\nu = \frac{a}{\mathcal{I}} \left(\frac{\nu}{\nu_{\rm ac}} \right)^3 \tag{7.4}$$

avec $\delta\nu$ la correction fréquentielle, et $\nu_{\rm ac}$ la fréquence de coupure acoustique (ici uniquement prise pour adimensionnaliser l'expression) et enfin a un paramètre libre à ajuster en fonction des observations.

Récemment, Ong et al. (2021b) ont développé une nouvelle approche pour le traitement des effets de surface des étoiles présentant des modes mixtes. Ils séparent les contributions des modes p purs et g purs prenant part au croisement évités et présentent le système sous forme matricielle (Ong & Basu, 2020). Ils introduisent ensuite les effets de surface via une perturbation n'affectant que la contribution des modes p purs. Ils montrent alors que les approches paramétriques du type de Ball & Gizon (2014) sont équivalentes à une troncature au premier ordre du système matriciel perturbé et en déduisent une version généralisée. Ils montrent enfin que cette troncature n'est pas adaptée dans le cas des étoiles très évoluées, c'est-à-dire ayant un grand nombre de modes g-dominés. Ong et al. (2021a), en modélisant des sous-géantes via ce traitement des effets de surface, montrent notamment qu'il peut être à l'origine de différences systématiques de masse dans le cas de modélisations à l'aide de grilles. Il serait intéressant de voir, à l'avenir, comment ce formalisme pourrait s'appliquer dans le cadre de la double optimisation.

7.2.3. La modélisation de l'extension du cœur convectif en séquence principale

Nous avons choisi de considérer l'extension de cœur convectif comme une simple extension de celui-ci, utilisant de ce fait la prescription de « step overshooting ». En effet, c'est celle historiquement utilisée dans la littérature, ce qui facilite des comparaisons avec d'autres études. En outre, nous avons aussi testé la prescription d'overshoot diffusif et montré que celle-ci ne modifie pas les conclusions de l'étude.

Dans MESA, la distance d'overshooting est définie par défaut de la façon suivante :

$$d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} \min\left(H_p, R_{cc}/\alpha_{\rm MLT}\right), \tag{7.5}$$

la région étendue étant mélangée avec un coefficient de diffusion pris à la limite intérieure du cœur. Le terme $\min\left(H_p, R_{cc}/\alpha_{\rm MLT}\right)$ est destiné au cas des petits cœurs convectifs : en effet, H_p diverge lorsqu'on se rapproche du centre de l'étoile, ce qui impliquerait une valeur de $d_{\rm ov}$ irréalistiquement grande si celle-ci était définie comme une simple fraction de H_p.

Il est important de noter que cette prescription diffère selon les codes d'évolutions. Ainsi, dans CESTAM, le facteur *ad-hoc* $1/\alpha_{\rm MLT}$ n'est pas présent et $d_{\rm ov}$ est défini tel que :

$$d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} \min\left(H_p, R_{cc}\right). \tag{7.6}$$

Dans le cas de petits cœurs convectifs, une même valeur de $\alpha_{\rm ov}$ aura donc des significations différentes parmi les codes, ce qui complique la comparaison des valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ trouvées avec des codes différents. On peut donc se demander quel est l'impact de cela sur notre étude. Pour cela, on effectue des évolutions sur la séquence principale de modèles, avec MESA, ayant des masses entre 1,1 et 2,0 $M_\odot$. Ensuite, on compare les valeurs de $\min(H_p, R_{cc})$ avec $\min(H_p, R_{cc}/\alpha_{\rm MLT})$, pris à la limite du cœur. Les ratios de ces valeurs sont présentées dans la Figure 7.4, pour $\alpha_{\rm MLT} = 2{,}0$. Si les deux prescriptions utilisent $d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} H_p$, on s'attend à un ratio de 1 : or, ce n'est pas le cas pour tous les modèles représentés. On peut interpréter cela comme le fait que l'ensemble des modèles MESA calculés utilisent, en fait, la prescription $d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} H_p/\alpha_{\rm MLT}$. Les modèles ayant des ratios entre 1 et 2 correspondent au cas où CESTAM utilise $\alpha_{\rm ov} H_p$ et MESA $\alpha_{\rm ov} H_p/\alpha_{\rm MLT}$: c'est le cas pour tous les modèles ayant $M > 1{,}6\,M_\odot$ durant toute leur séquence principale. Enfin, les valeurs de 2 correspondent au cas où les deux codes utilisent les prescriptions alternatives : c'est le cas pendant la majorité de la séquence principale d'étoiles ayant des masses inférieures à 1,4 $M_\odot$.

Il est donc capital de garder ces différences à l'esprit lorsque l'on compare les résultats de contraintes sur $\alpha_{\rm ov}$ provenant de codes différents. A noter que cette figure a été tracée en calculant simplement les deux prescriptions à partir de modèles MESA : on ignore donc l'impact sur l'évolution de cette différence. On estime cependant qu'elle ne doit pas changer significativement les résultats de cette section.

7.2.4. Stratégie d'optimisation

La modélisation de l'étoile a commencé par le calcul d'une grille grossière de modèles optimisés en masse et en âge (soit qui reproduisent $\Delta\nu$ et la fréquence d'un mode g pur). Les paramètres de celle-ci sont [Fe/H] (entre $-0{,}2$ et 0,2 avec un pas de 0,1), $\alpha_{\rm MLT}$ (entre 1,5 et 2,1 avec un pas de 0,2), Y_0 (entre 0,24 et 0,30 avec un pas de 0,02) et $\alpha_{\rm ov}$ (entre 0,0 et 0,2 avec un pas de 0,05). Une telle grille ne permet pas de trouver des modèles réellement satisfaisants, mais permet d'explorer l'espace des paramètres pour pouvoir détecter d'éventuels minimums locaux ainsi que de bons points de départ pour la suite de l'optimisation.

Ensuite, l'approche utilisée pour modéliser cette étoile est celle de la double optimisation présentée en Section 6. Pour optimiser $\alpha_{\rm ov}$ et Y_0, des grilles ont été utilisées. Pour le premier paramètre, les valeurs utilisées sont entre 0 et 0,25, séparées de 0,05. Pour le deuxième, elles sont entre 0,24 et 0,31, séparées de 0,01. Enfin, pour les autres paramètres, $\alpha_{\rm MLT}$ et [Fe/H], une optimisation de type Levenberg-Marquardt (LM) a été utilisée.

Cette double approche est principalement due à la différence dans l'influence de ces paramètres sur les fréquences. Ainsi, l'utilisation d'une unique optimisation pour tous les paramètres, testée lors des exercices PLATO, a montré ses limites. Notamment, la dégénerescence entre Y_0 et M pose des difficultés à l'algorithme LM pour se « déplacer » sur la topologie compliquée du χ^2. De plus, les incertitudes en découlant sont fortement sous-estimées. Dans le cas de $\alpha_{\rm ov}$, Deheuvels & Michel (2011) ont trouvé des minima secondaires (voir la Figure 17 de l'article) ce qui peut poser problème à un algorithme

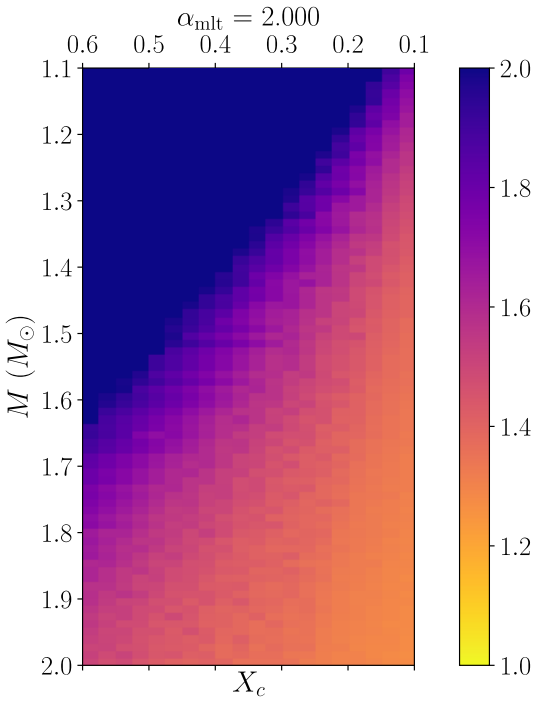

FIGURE 7.4. – Rapport entre min (H_p, R_{cc}) et min $(H_p, R_{cc}/\alpha_{\rm MLT})$, en fonction de la masse et de l'hydrogène central.

basé sur des dérivées tel que celui de LM. En revanche, ce dernier apparaît efficace pour pouvoir trouver $\alpha_{\rm MLT}$ et [Fe/H], une fois Y_0 et $\alpha_{\rm ov}$ fixés. Cette combinaison de méthodes est la plus robuste trouvée pour pouvoir trouver les meilleurs paramètres permettant de reproduire les observations et d'obtenir des incertitudes réalistes.

7.3. Résultats des optimisations

7.3.1. Paramètres des modèles et qualité de l'ajustement

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ sont résumés dans la Table 7.1. On peut voir que le meilleur modèle, obtenu pour $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$, a un χ^2 de 126 : une fois divisé par le nombre d'observables moins le nombre de paramètres libres, il correspond à un χ^2 réduit de 3,2. Son diagramme échelle est représenté en Figure 7.5, où l'on peut voir que l'ensemble des fréquences, y compris celles des modes g-dominés, est correctement reproduit. De plus, ses observables de surface (luminosité, température et métallicité) sont compatibles avec les observations à 1-σ près.

Les valeurs de masse, rayon et âge sont compatibles avec les valeurs trouvées dans Creevey et al. (2012) et Hon et al. (2020). On note cependant de fortes disparités avec la masse trouvée par Li et al. (2020a) : ces derniers donnent une valeur de $M = 1{,}49 \pm 0{,}08\, M_\odot$

$\alpha_{\rm ov}$	Age (Ga)	M ($M_\odot$)	R ($R_\odot$)	$T_{\rm eff}$ (K)	L ($L_\odot$)	[Fe/H] (dex)	$\alpha_{\rm MLT}$	Y_0	χ^2	χ^2_r
Uncert.	0,25	0,03	0,021	83	0,20	0,010	0,089	0,020	-	-
0,00	4,08	1,21	2,114	6109	5,61	0,005	1,77	0,29	316	8,1
0,05	3,89	1,21	2,106	6187	5,86	-0,034	1,81	0,29	254	6,5
0,10	4,03	1,23	2,118	6134	5,72	-0,030	1,74	0,28	202	5,2
0,15	3,89	1,22	2,110	6192	5,89	-0,073	1,74	0,28	126	3,2
0,20	3,97	1,27	2,124	6226	6,11	-0,155	1,64	0,24	442	11,3
0,25	3,26	1,31	2,135	6537	7,50	-0,184	2,06	0,26	3020	77,4

TABLE 7.1. – Paramètres des meilleurs modèles pour chaque valeur de $\alpha_{\rm ov}$.

et un âge logiquement plus faible de $2{,}84 \pm 0{,}60$ Ga. Cette différence peut s'expliquer par plusieurs facteurs : leur étude fixe la longueur de mélange, au contraire de la nôtre, néglige la diffusion atomique, et utilise les abondances de Grevesse & Sauval (1998). De plus, comme précisé plus haut, leur accord sismique est statistiquement nettement moins bon que celui obtenu dans cette étude. Enfin, on note Ong et al. (2021a), qui trouvent aussi des masses systématiquement inférieures à celles de Li et al. (2020a), en laissant la longueur de mélange et Y_0 comme paramètres libres (voir la Figure 4.a du papier).

7.3.2. À propos des incertitudes

On trouve que les incertitudes obtenues à partir des Hessiennes des optimisations (donc avec Y_0 et $\alpha_{\rm ov}$ fixés) sont faibles : 0,007 dex pour la métallicité, 0,002 pour $\alpha_{\rm MLT}$ qui correspondent à $0{,}004\,M_\odot$ pour la masse et 40 Ma pour l'âge. En revanche, de fortes dégénérescences entre la masse et Y_0 ont été observées (voir Section 7.5.2). On en a donc déduit que les incertitudes étaient principalement dominées par cette dégénérescence, ce qui nous a poussé à utiliser la grille en Y_0 pour pouvoir avoir une meilleure idée de ces dernières. Cette dégénérescence, ainsi que la démarche effectuée pour retrouver les incertitudes sont développées dans la Section 7.5.2.

7.3.3. Contraintes sur le cœur convectif

On peut voir sur la Table 7.1 que les modèles avec $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$ reproduisent significativement mieux les fréquences que ceux sans overshoot : on trouve ainsi une différence de χ^2 de 188. Les incertitudes à 3-σ étant obtenues à parti de modèles ayant $\chi^2_{\rm min} + 9$, cela montre le haut degré de significativité des résultats obtenus, et confirme l'intérêt que peut représenter la modélisation sismique des sous-géantes pour contraindre les extensions de cœur convectif.

La Figure 7.6 représente le χ^2 pour les différentes valeurs de $\alpha_{\rm ov}$. La tendance d'une diminution avec le χ^2 lorsque de l'overshoot est rajouté apparaît clairement. Mais aussi, sont représentées les contributions des fréquences au χ^2 en fonction de leur degré. Cela

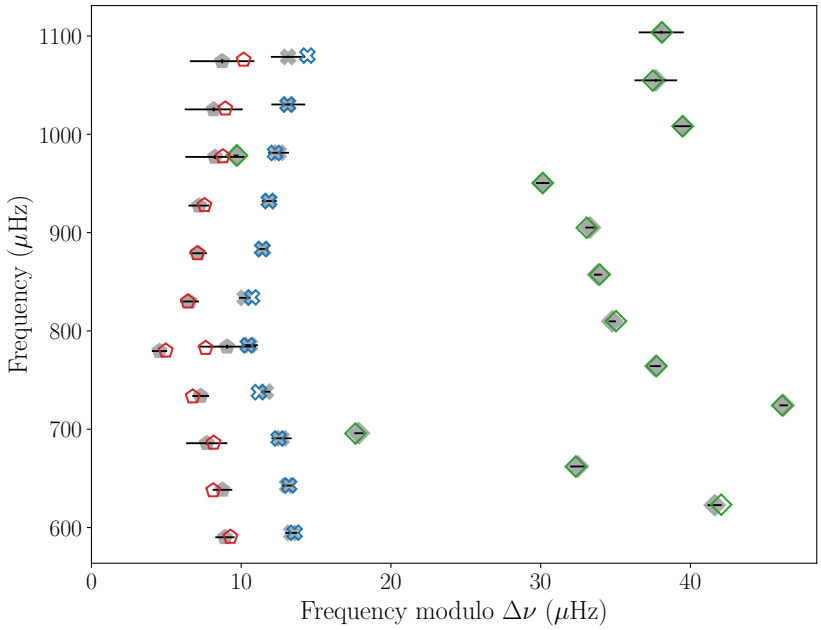

FIGURE 7.5. – Diagramme échelle du meilleur modèle. Les observations sont en gris, le modèle en symboles creux. Les modes radiaux, dipolaires et quadripolaires sont respectivement en bleu, vert et rouge. Les incertitudes à 3-σ sont représentées par des barres horizontales.

permet de pouvoir mesurer quels modes ont permis de faire la différence entre ces modèles. En l'occurence, ce sont les modes dipolaires qui ici permettent de distinguer entre les différentes valeurs de $\alpha_{\rm ov}$. Les contributions des modes radiaux et quadripolaires restent quasiment constantes entre les modèles sans overshoot et les modèles avec $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$. Cela montre le rôle central des croisements évités dans cette contrainte et confirme que la différence de structure entre ces modèles se situe dans le cœur, comme on pouvait l'attendre des approches théoriques effectuées plus haut.

7.4. Contraintes sur la structure interne

Une seconde partie du travail effectué sur cette étoile a été de voir quelles sont les relations entre la structure interne de l'étoile et ses fréquences d'oscillation. Notamment, nous nous sommes concentrés sur la densité centrale de l'étoile ainsi que son profil de Brunt-Väisälä.

7.4.1. Densité centrale

Comme nous l'avons vu, la densité centrale ρ_c est étroitement liée aux fréquences des modes mixtes. Pour quantifier cela, nous avons regardé les valeurs de ρ_c dans la grille

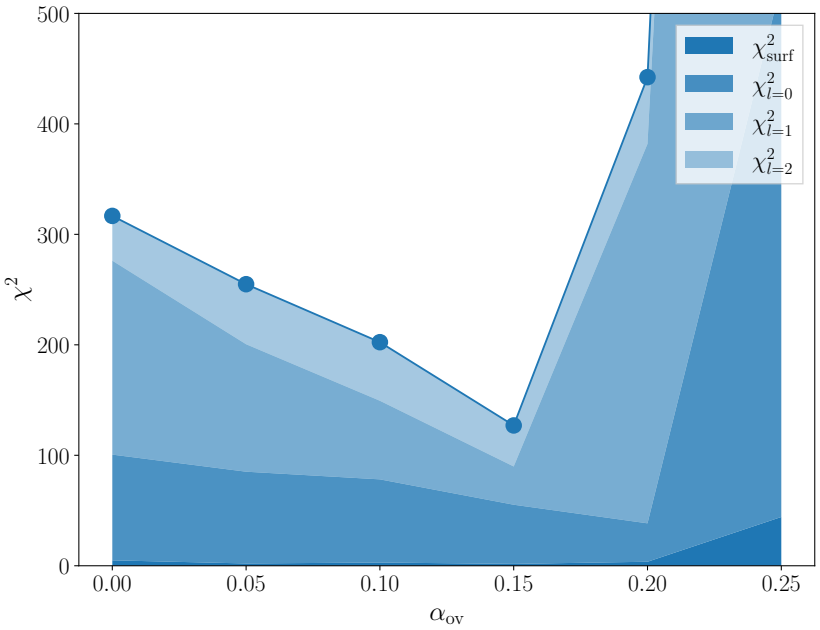

FIGURE 7.6. – χ^2 des meilleurs modèles pour différentes valeurs de $\alpha_{\rm ov}$. La contribution des fréquences au χ^2 en fonction de leur degré est indiquée par les zones colorées sous la courbe.

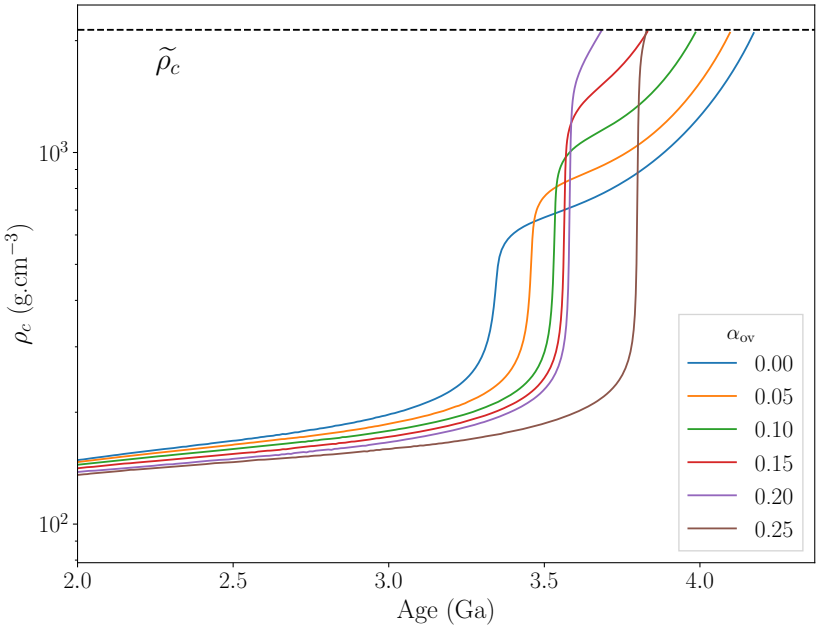

FIGURE 7.7. – Evolution de ρ_c avec l'âge, pour des modèles issus de l'optimisation en masse et âge et ayant des valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ différentes.

grossière définie au début de la Section 7.2.4, dans laquelle les deux seules contraintes utilisées sont ν_g et $\Delta\nu$. Il est alors marquant de voir l'écart-type obtenu dans les densités centrales de ces modèles : moins de $33\,\mathrm{g.cm^{-3}}$, ce qui représente environ 1% de la densité centrale, malgré la taille de l'espace des paramètres exploré.

Ce lien étroit contraint très fortement l'évolution de l'étoile et peut aider à comprendre pourquoi les modèles à fort overshoot ne permettent pas de reproduire correctement les fréquences observées. Pour cela, est tracée dans la Figure 7.7 l'évolution de la densité centrale pour cinq modèles avec des valeurs de α_{ov} différentes issus d'optimisation en masse et âge, le reste des paramètres étant identiques. La figure est zoomée sur la fin de la séquence principale. On note alors plusieurs choses. En premier, toutes les séquences évolutives s'arrêtent à la même valeur de ρ_c, comme mentionné ci-dessus. Nous appellerons dans la suite cette valeur la densité centrale optimale $\tilde{\rho}_c$. Nous remarquons aussi que l'amplitude du saut en ρ_c juste après la fin de la séquence principale, qui est due à la rapide contraction du cœur, augmente fortement lorsque de l'overshoot est rajouté. Cela est dû au fait que, l'overshoot augmentant la taille du cœur, les couches où reste de l'hydrogène sont plus éloignées du centre et donc plus froides. Une plus forte contraction est alors nécessaire pour pouvoir atteindre la température nécessaire à la combustion de l'hydrogène.

Cela permet de comprendre le « problème » qui se produit lorsque α_{ov} est trop grand : le saut de densité centrale est trop important et le modèle atteint $\tilde{\rho}_c$ lors de la contraction du cœur hors équilibre thermique à la fin de la séquence principale. Or, durant cette phase, la structure de l'étoile au cœur est fortement différente de celle lorsque l'hydrogène brûle en couche. Particulièrement, ∇_μ a une forme distincte du fait qu'il n'a pas eu le temps d'être remodelé par les réactions nucléaires. Cela a alors un impact direct sur les fréquences, qui ne sont plus compatibles avec les observations. L'optimisation globale est alors « forcée » de se déplacer dans l'espace des paramètres pour trouver de meilleurs modèles. Dans notre cas, les modèles qui en résultent ont des caractéristiques significativement différentes (voir la Table 7.1) et reproduisent nettement moins bien les observations.

7.4.2. Profil de la fréquence de Brunt-Väisälä

Une autre caractéristique fortement liée aux modes mixtes est la fréquence de Brunt-Väisälä (BV). Nous avons vu dans la Section 5.2 l'intérêt que représentent les étoiles avec plusieurs croisements évités pour contraindre α_{ov} via le profil de ∇_μ. Nous avons donc utilisé les modèles de la grille grossière pour pouvoir vérifier cela : la Figure 7.8 représente les profils de BV de tous les modèles de cette grille qui, pour rappel, reproduisent correctement $\Delta\nu$ et ν_g.

L'approche utilisée dans ce paragraphe est la suivante : nous allons en premier voir les contraintes apportées sur BV par la seule connaissance de $\Delta\nu$ et ν_g. Ensuite, nous allons mesurer l'apport du couplage entre les cavités P et G, ce qui va nous permettre d'évaluer l'information apportée par un seul mode g-dominé. Enfin, nous allons voir les contraintes apportées par le second mode g-dominé, afin de voir s'il est possible d'observer une différence par rapport à celle apportée par le couplage.

Nous pouvons voir sur la Figure 7.8 que les profils sont tous très similaires dans la région

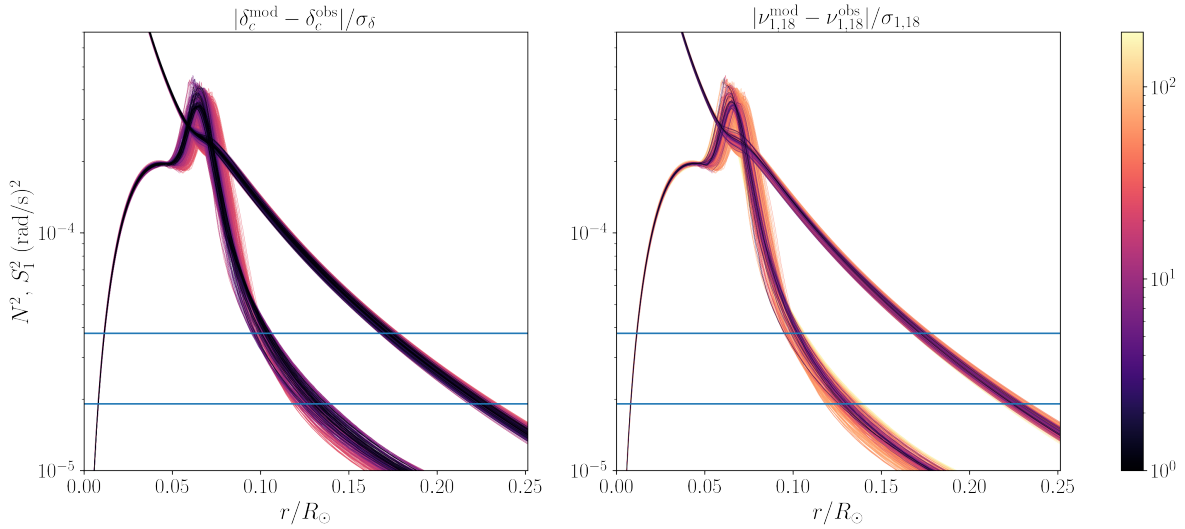

FIGURE 7.8. – Profils de N^2 et de S_1^2 des modèles de la grille grossière. Les profils de gauche et de droit sont respectivement colorés selon les accords avec les observations de δ_c et $\nu_{1,18}$. Les lignes horizontales représentent les fréquences angulaires observées des modes g-dominés

centrale ($r < 0{,}05\,R_\odot$) de l'étoile. Cette partie est, nous l'avons vu, dominée par le terme g/H_p de BV et de ce fait par la densité centrale. Il n'est donc pas surprenant que les modèles résultant de l'optimisation en masse et âge aient tous un même profil central de BV.

Cependant, on peut voir que les profils deviennent bien moins dégénérés pour des valeurs supérieures de rayon, dans la partie dominée par ∇_μ. On colore alors les profils selon des observables sismiques pour mesurer les contraintes qu'ils apportent sur la structure interne. Le graphique de gauche est coloré selon l'accord de $\delta_c\nu \equiv \nu_{1,12} - \nu_{1,11}$ avec les observations. Cela correspond à l'écart entre le mode g-dominé de basse fréquence et le mode dipolaire consécutif, qui est un bon indicateur du couplage entre les cavités P et G (Deheuvels & Michel, 2011). On voit que ce couplage permet notamment de bien contraindre la position du pic de ∇_μ, et donc la position de la couche de combustion de l'hydrogène. Cependant, au-delà, les profils sont mal contraints par le couplage : plusieurs modèles reproduisant correctement $\delta_c\nu$ (profils sombres sur la figure) ont des profils de BV différents, sur une région que nous avons vu pourtant sensible à l'overshoot. Il n'est donc pas possible de les différencier avec un seul mode g-dominé, et de l'information supplémentaire est alors requise.

Le graphique de droite est similaire à celui de gauche, les profils étant cependant colorés selon l'accord du mode g-dominé de haute fréquence $\nu_{1,18}$ avec les observations. On voit alors que tous les modèles reproduisant correctement ce mode ont des profils similaires de BV sur l'ensemble de la fenêtre représentée, et en particulier sur la région dominée par ∇_μ. Cela montre les fortes contraintes apportées par la fréquence du mode $\nu_{1,18}$. On déduit donc de cette étude que, en accord avec la Section 5.2, avoir plusieurs modes g-dominés

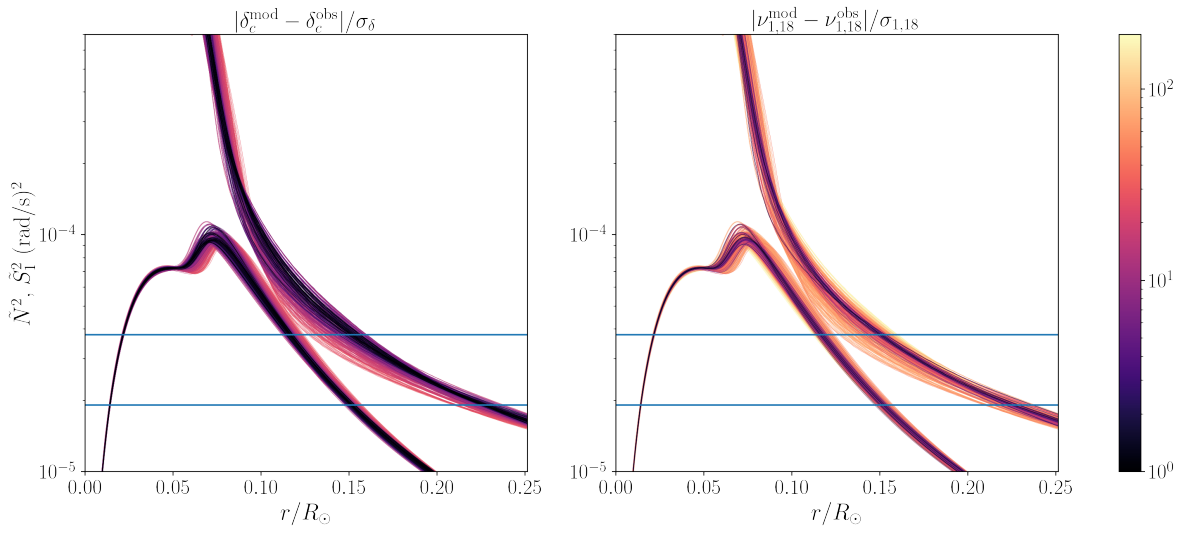

FIGURE 7.9. – Idem que 7.8 mais avec $\tilde{N}^2$ et $\tilde{S}_1^2$.

permet de mieux contraindre le profil de BV et *a priori* $\alpha_{\rm ov}$.

Il est intéressant de comparer ces résultats avec ceux obtenus sur les profils de fréquences de Lamb et BV modifiées selon la prescription de Takata (2006) (voir les expressions 2.41 et 2.42). En effet, les modes étudiés ici sont dipolaires et on peut observer que le facteur J trouvé dans ces expressions est éloigné de 1 au cœur de ces jeunes sous-géantes (e.g. la Figure 2 de Pinçon et al. 2020). La Figure 7.9 représente les profils de $\tilde{N}^2$ et $\tilde{S}_1^2$, dans une représentation analogue à la Figure 7.8. D'abord, il faut noter que, contrairement aux profils traditionnels, $\tilde{S}_1^2 < \tilde{N}^2$: les positions des deux profils sont donc inversées. Ensuite, les conclusions sont les mêmes que celles obtenues avec les profils traditionnels : les profils de $\tilde{N}^2$ sont mieux contraints par la différence entre les modes mixtes que par le couplage. On note d'ailleurs que pour ces profils, la corrélation entre la fréquence $\nu_{1,18}$ et les profils de $\tilde{N}^2$ est encore plus frappante, spécialement autour de $N^2 \sim \omega_{1,18}^2$, illustrant l'intérêt que représente la prise en compte de la perturbation du champ gravitationnel dans l'étude de la relation entre la structure et les modes dipolaires.

7.5. Autres aspects de la physique

La modélisation de KIC10273246 a été l'occasion de s'intéresser à d'autres aspects de la physique des modèles, et de mesurer l'impact de ces derniers sur la modélisation sismique de cette sous-géante.

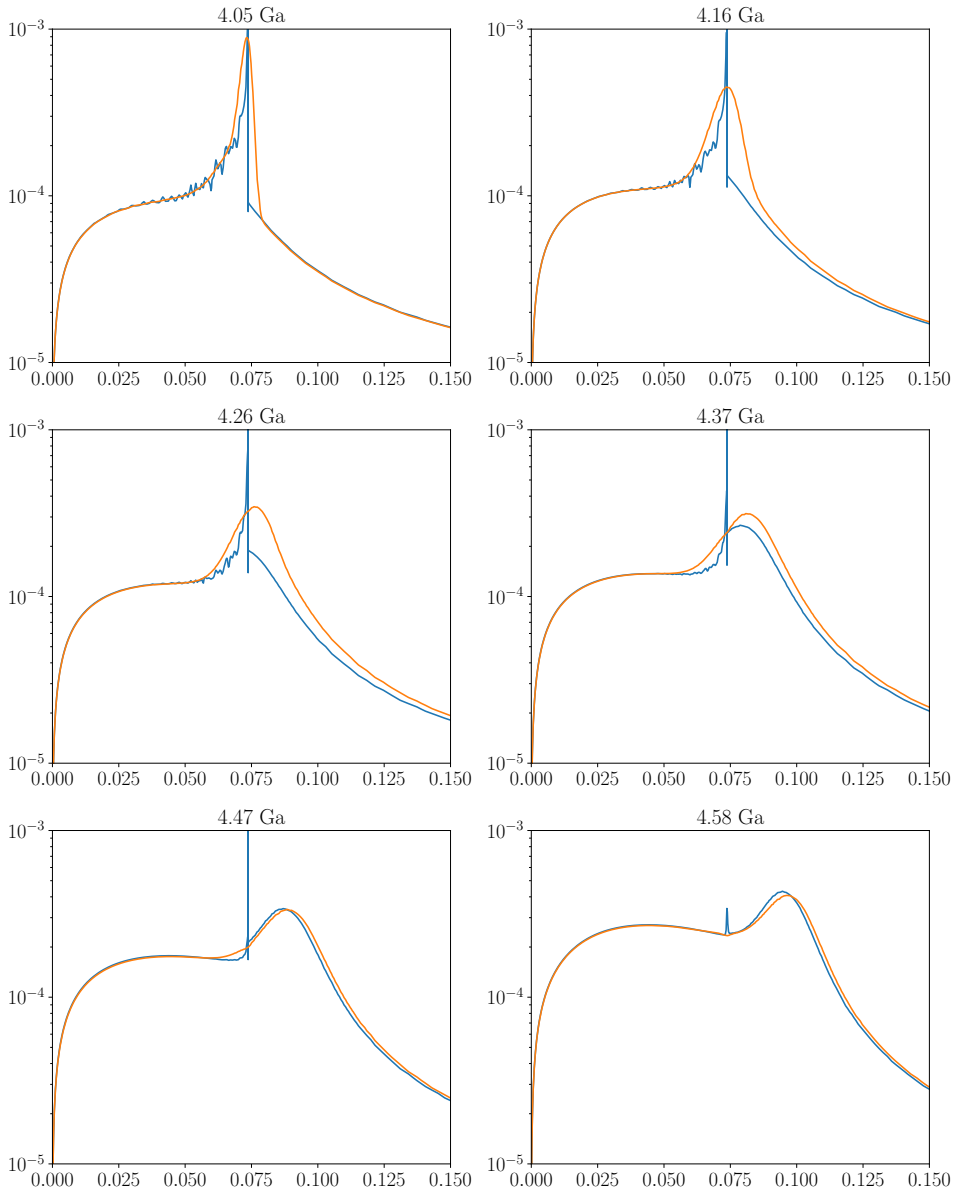

FIGURE 7.10. – Evolution du profil de Brunt-Väisälä avec (en orange) et sans (en bleu) diffusion microscopique, juste après la fin de la séquence principale, pour des modèles de 1,3 $M_\odot$.

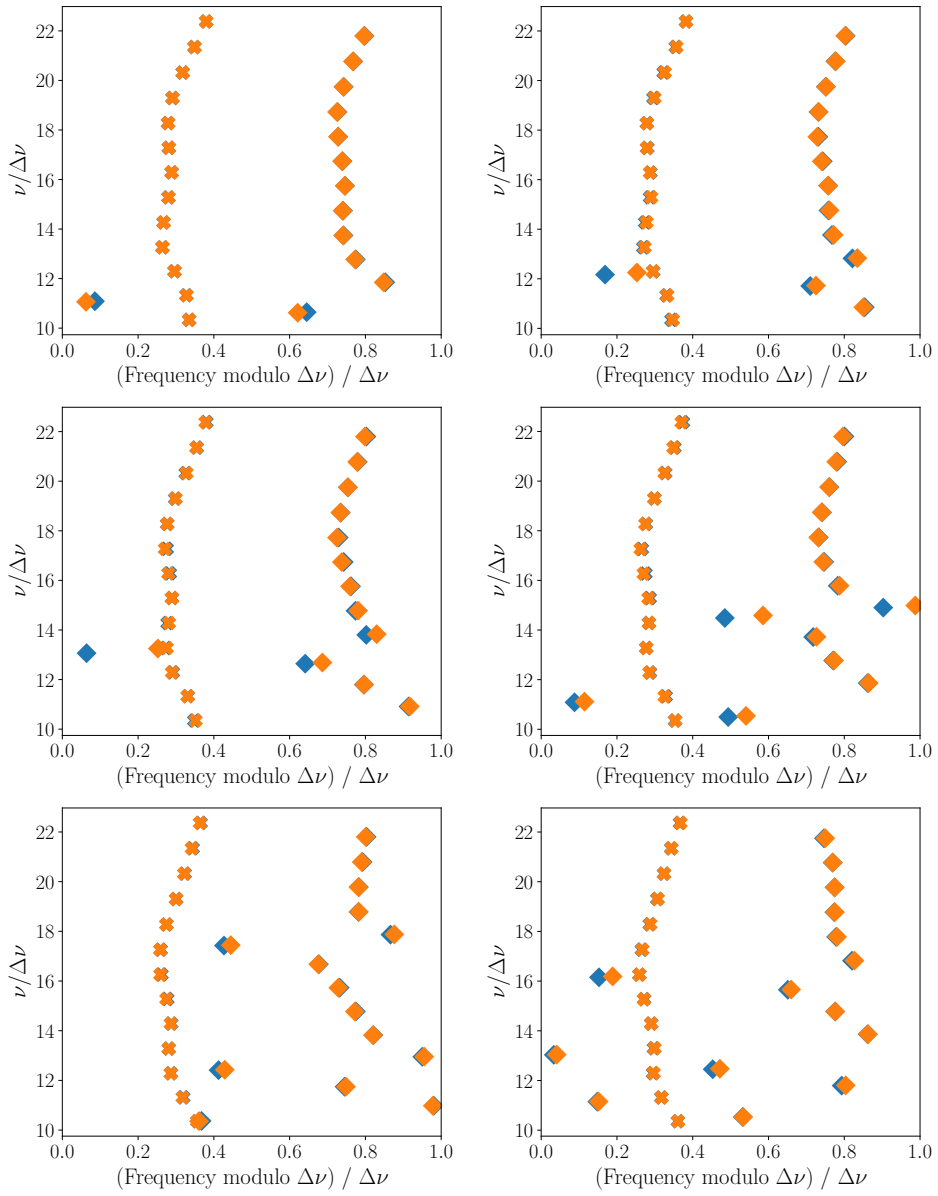

FIGURE 7.11. – Diagrammes échelles normalisés des modèles représentés dans la Figure 7.10

7.5.1. Diffusion microscopique

Durant la modélisation de KIC10273246, seuls le triage gravitationnel et la diffusion chimique ont été pris en compte. Cependant, il est connu que dans cette gamme de masse le triage gravitationnel commence à être compensé par les accélérations radiatives, ce qui peut avoir un impact sur la structure sismique des étoiles en séquence principale (Deal et al., 2018). Or, la prise en compte des accélérations radiatives requiert de recalculer les opacités à chaque pas de temps du code d'évolution, ce qui rallonge fortement le temps de calcul des modèles. En conséquence, il n'a pas été possible de prendre en compte ces accélérations radiatives durant la modélisation de KIC10273246, et dans la suite de cette section le terme « diffusion microscopique » n'incluera que le triage gravitationnel et la diffusion chimique.

La diffusion microscopique impacte la modélisation des sous-géantes pour deux raisons principales. La première est que, durant la séquence principale, le triage gravitationnel fait chuter les éléments lourds dans le cœur, ce qui modifie sa composition et diminue la quantité d'hydrogène qu'il contient. Cela raccourcit en conséquence la durée de la séquence principale : on s'attend donc à ce que l'âge soit particulièrement impacté par la prise en compte ou non de la diffusion microscopique. Les résultats de l'exercice PLATO (Section 6.4) n'étant pas allés dans ce sens, il sera intéressant de voir les paramètres obtenus sans diffusion pour cette étoile.

Le deuxième point est l'action de la diffusion chimique. Après la séquence principale, le cœur se contracte et laisse derrière lui un profil compositionnel irrégulier. La diffusion des élements permet alors de gommer ces différences, ce qui a un impact significatif sur les fréquences pour les sous-géantes très jeunes. La Figure 7.10 illustre cela via plusieurs profils de Brunt-Väisälä, arrêtés à des densités centrales identiques. On voit clairement que la diffusion agit assez sur le profil de BV pour modifier de façon significative les fréquences des modèles. Ces dernières sont d'ailleurs représentées sur la Figure 7.11 par le biais de diagrammes échelles normalisés par la grande séparation. On y voit clairement que les modes g-dominés, impactés par les différences centrales de profil de BV, sont ceux étant le plus différents entre les modèles avec et sans diffusion microscopique. La diffusion chimique a donc un rôle particulièrement important sur les jeunes sous-géantes. On voit d'ailleurs que les modèles représentés dans les Figures 7.10 et 7.11 ont entre 1 et 3 croisements évités visibles : la diffusion a donc une influence jusqu'à des sous-géantes relativement évoluées.

Dans le cas de KIC10273246, on note que la qualité d'ajustement des fréquences est meilleure si l'on prend en compte la diffusion microscopique. En effet, on trouve une différence de χ^2 égale à 71. Le meilleur modèle est plus massif ($1{,}29\,M_\odot$) et malgré cela plus âgé (4,85 Ga), comme attendu du fait de la chute des éléments lourds dans le cœur durant la séquence principale. Aussi, les conclusions sur $\alpha_{\rm ov}$ obtenues sans diffusion sont identiques : le meilleur modèle est celui ayant $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$, et la qualité de l'ajustement est fortement dégradée pour des valeurs d'overshoot élevées. Enfin, il est intéressant de noter sur la Figure 7.12 que les deux profils de BV sont proches, malgré l'impact qu'a la diffusion microscopique sur ceux-ci. Cela montre la robustesse des contraintes apportées par les modes mixtes sur ce profil : le profil de BV reste quasiment le même malgré l'impact

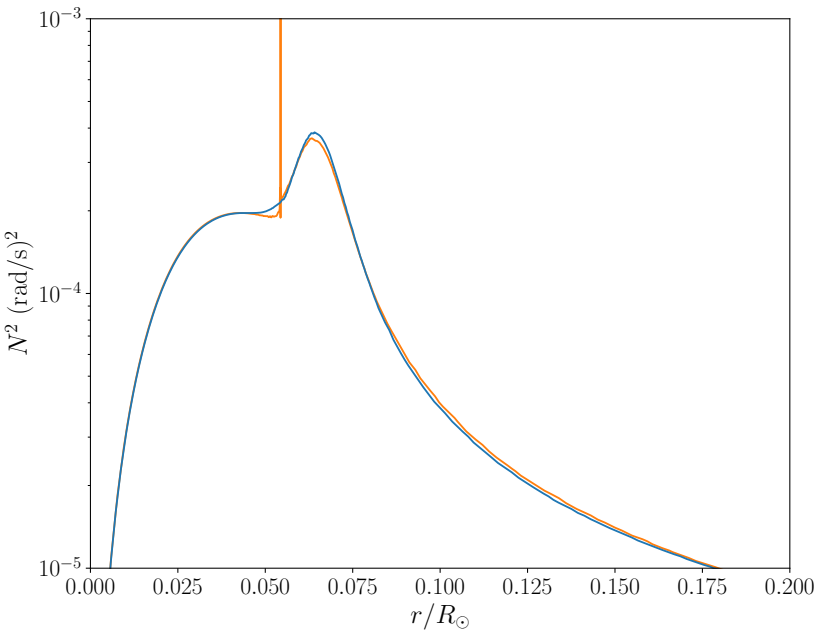

FIGURE 7.12. – Profils de BV pour les meilleurs modèles sans diffusion (en bleu) et avec diffusion (en orange)

potentiel que peut avoir la diffusion sur les fréquences.

Enfin, afin de mesurer le poids que peuvent avoir les accélérations radiatives sur les modèles de sous-géante, le meilleur modèle a été recalculé avec prise en compte de ces dernières. Les opacités sont calculées avec la méthode OPCD3 (Seaton, 2005), optimisée d'après Hu et al. (2011). On trouve un modèle avec une grande séparation légèrement différente (0,12 μHz supérieure) mais des différences non significatives entre les fréquences normalisées selon $\Delta\nu$. On conclut donc que les accélérations radiatives, si elles peuvent avoir une influence sur l'enveloppe durant la séquence principale, ne modifient pas nos conclusions sur les extensions de cœur convectif.

7.5.2. Dégénérescence entre la fraction initiale d'hélium et la masse

La dégénérescence entre la quantité initiale d'hélium Y_0 et la masse M est bien connue pour les étoiles en séquence principale (e.g., Lebreton & Goupil 2014). On peut le comprendre, par exemple, par homologie (e.g., Kippenhahn et al. 2012) : on trouve alors que $L \sim M^3\mu^4$. Or, Y_0 infuençant μ, on en déduit qu'une même valeur de luminosité peut être reproduite par différents couples (M, Y_0).

De plus, Li et al. (2020a) trouve une même dégénerescence pour les étoiles sous-géantes. Durant la modélisation de KIC10273246, nous avons noté en effet des modèles aux fréquences particulièrement similaires (même au regard des faibles incertitudes de *Kepler*) et qui ont pourtant des valeurs de Y_0 et de masse différentes. La Figure 7.13 représente

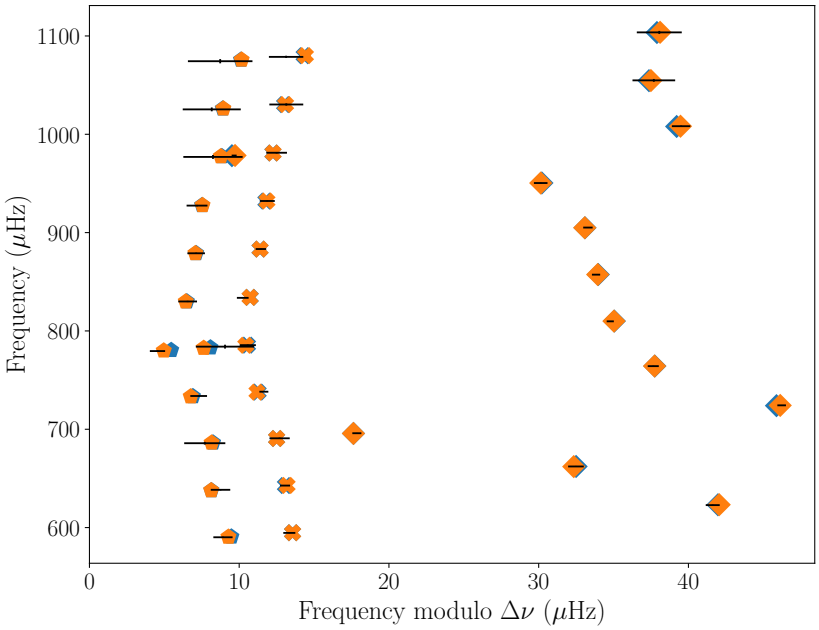

FIGURE 7.13. – Diagrammes échelle de deux modèles avec $Y_0 = 0{,}24$ (en orange) et 0,28 (en bleu)

les diagrammes échelles de deux de ces modèles, et la Table 7.2 leurs caractéristiques respectives. On observe sur la première que les fréquences sont proches, même par rapport aux faibles incertitudes des données (différence de χ^2 de 32). Or, leurs caractéristiques diffèrent fortement, notamment la masse ($\Delta M = 0{,}07\,M_\odot$). Il est donc difficile de pouvoir beaucoup plus contraindre la masse de cette étoile en utilisant les données *Kepler*. Cette dégénerescence est donc le facteur dominant contribuant aux incertitudes. Pour le quantifier, dans notre étude, nous avons utilisé les meilleurs modèles d'une grille en Y_0, c'est-à-dire les modèles ayant Y_0 fixé entre 0,24 et 0,30 mais $\alpha_{\rm MLT}$, [Fe/H], l'âge et la masse optimisés pour reproduire au mieux les fréquences. On ajuste ensuite une parabole à la fonction $\chi^2(Y_0)$ et on en déduit les incertitudes 3-σ à partir des valeurs donnant $\chi^2_{\rm min} + 9$. Les incertitudes en résultant, récapitulées dans la Table 7.1, apparaissent ainsi un ordre de grandeur supérieures à celles découlant des autres paramètres, confirmant que c'est bien cette dégénérescence qui domine les incertitudes notamment sur la masse.

Celle-ci peut d'ailleurs représenter un problème dans les cas où Y_0 est fixé par une loi d'enrichissement : les incertitudes sont sous-estimées, et les masses trouvées dépendent du facteur $\Delta Y/\Delta Z$ dont la valeur varie généralement entre 1 et 3 (e.g., Chiappini et al. 2002; Casagrande et al. 2007).

Enfin, on note que les valeurs des observables de surface sont aussi relativement proches pour les deux modèles présentés ci-dessus, avec des différences de $0{,}06\,L_\odot$ pour la luminosité et de 47 K pour la température effective. Des mesures spectroscopiques ne permettraient donc pas de facilement favoriser un modèle par rapport à l'autre.

Param.	$Y_0 = 0.24$	$Y_0 = 0.28$
M ($M_\odot$)	1,292	1,222
R ($R_\odot$)	2,152	2,109
Age (Ga)	4,13	3,88
L ($L_\odot$)	5,95	5,89
$T_{\rm eff}$ (K)	6145	6192
[Fe/H] (dex)	-0,098	-0,072
$\alpha_{\rm MLT}$	1,70	1,73
Y_0	0,24	0,28
χ^2	159	127

TABLE 7.2. – Caractéristiques des deux modèles représentés en Figure 7.13

7.6. Contraintes sur la rotation

Un mode quadripolaire g-dominé splitté par la rotation a été découvert dans le spectre d'oscillation de KIC10273246. On sait que les modes mixtes quadripolaires sont difficilement détectables, principalement dû au faible couplage entre les cavités P et G. Un examen approfondi des données couplé à des tests de significativité (détaillés dans Noll et al. 2021) ont permis d'établir clairement sa détection.

Le splitting rotationnel de ce mode a été mesuré à $\delta\nu_s = 0{,}53 \pm 0{,}03\,\mu$Hz. On utilise le meilleur modèle pour trouver le noyau rotationnel du mode étudié, que l'on relie au splitting rotationnel grâce à l'équation 6.3. On écrit alors $\delta\nu_s = K_g\langle\Omega_g\rangle + K_p\langle\Omega_p\rangle$, avec $\langle\Omega_g\rangle$ et $\langle\Omega_p\rangle$ les rotations moyennes dans les cavités G et P et K_g et K_p les intégrales de ce noyau dans ces mêmes cavités. On trouve que 84% de l'énergie du noyau est comprise dans la cavité G, montrant que le mode permet de sonder la rotation au cœur de l'étoile.

La valeur moyenne des splitting rotationnels pour cette étoile est de $0{,}45 \pm 0{,}02\,\mu$Hz, comparable à la rotation de surface 0,5 Hz (Campante et al., 2011). Le splitting moyen résultant principalement de modes p-dominés, on émet l'hypothèse que celui-ci mesure la rotation moyenne dans l'enveloppe de l'étoile. Si on prend en conséquence $\langle\Omega_p\rangle/(2\pi) \approx 0{,}45$ Hz, on trouve alors une rotation moyenne dans la cavité G de 0,65 Hz. Même si cette mesure est grossière, elle pourrait indiquer que l'étoile a une rotation quasi-solide, de façon comparable aux résultats de Deheuvels et al. (2020), qui concerne des sous-géantes ayant des stades évolutifs comparables à KIC10273246.

A noter que seule la valeur moyenne a pu être mesurée pour les autres modes non-radiaux, et non pas les splitting individuels, dû au fait que leurs valeurs est comparable à la largeur des modes ce qui complique leur mesure. Le cas particulier du mode $l = 2$ est dû à sa nature g-dominée : sa grande inertie implique une largeur plus faible et donc la possiblité de détecter son splitting.

8. Application de la méthode à d'autres sous-géantes

La continuité du travail effectué sur KIC 10273246 est d'appliquer la même méthode à d'autres sous-géantes afin d'obtenir des contraintes sur $\alpha_{\rm ov}$ pour des étoiles dans des gammes de paramètres différentes. Dans ce chapitre, nous présentons les critères de choix des étoiles ainsi que la méthodologie adoptée, pour finir sur des résultats préliminaires. Le travail présenté ici en est à ses débuts et fera l'occasion d'une publication dont la rédaction n'a pas encore commencé.

8.1. Choix des étoiles

Pour ce travail, il a été décidé de se concentrer sur les sous-géantes observées par *Kepler*. En effet, malgré les restrictions fortes sur les caractéristiques de l'étoile voulue (jeune sous-géante, gamme de masses étroite), le jeu de données de *Kepler* est assez riche pour fournir un nombre non négligeable de cibles intéressantes. La liste des étoiles sélectionnées est présentée dans la Table 8.1. Les paramètres de masse, rayon et $\log g$ présentés proviennent des relations d'échelle (équations 7.1–7.3), avec les valeurs de fréquences et de $\nu_{\rm max}$ provenant de Li et al. (2020b), à l'exception de KIC10005473 dont les données ont été communiquées par Amalie Stokholm, l'étoile ayant déjà été étudiée dans Stokholm et al. (2019). Enfin, la Figure 8.1 présente les diagrammes échelle observationnels de ces modèles.

Ces étoiles ont été sélectionnées de façon à couvrir des gammes de masse différentes (entre 1,1 et 1,57 $M_\odot$ d'après les relations d'échelle) ainsi que des stades évolutifs plus ou moins avancés : on peut voir sur les diagrammes échelle qu'elles présentent entre 1 et 3 croisements évités.

On note le cas particulier de KIC10005473. Cette étoile est en effet relativement brillante par rapport aux autres ($V = 5{,}9$, Evans et al. 2018) et a grâce à cela des observations interférométriques et donc un rayon fortement contraint ($2{,}00 \pm 0{,}03\,R_\odot$, Stokholm et al. 2019). Il sera alors très intéressant pour cette étoile de voir quel effet sur le processus de modélisation apportera cette nouvelle contrainte.

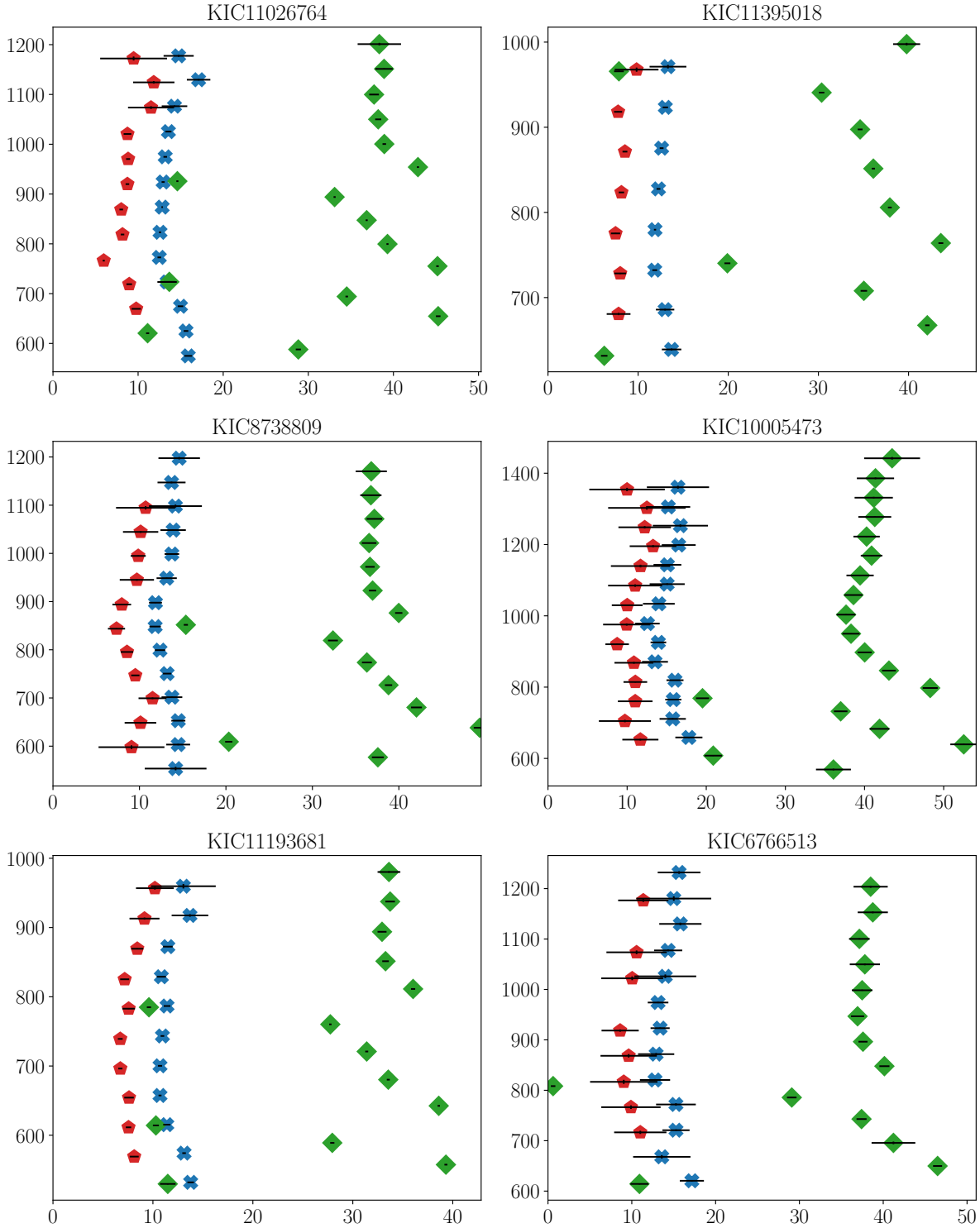

FIGURE 8.1. – Diagrammes échelle observationnels des cibles.

Nom	M ($M_\odot$)	R ($R_\odot$)	$\log g$
KIC11026764	$1{,}10 \pm 0{,}03$	$2{,}00 \pm 0{,}02$	$4{,}003 \pm 0{,}01$
KIC11395018	$1{,}32 \pm 0{,}08$	$2{,}20 \pm 0{,}05$	$3{,}978 \pm 0{,}01$
KIC8738809	$1{,}49 \pm 0{,}06$	$2{,}23 \pm 0{,}03$	$4{,}012 \pm 0{,}01$
KIC10005473	$1{,}33 \pm 0{,}07$	$2{,}03 \pm 0{,}04$	$4{,}060 \pm 0{,}01$
KIC11193681	$1{,}27 \pm 0{,}04$	$2{,}33 \pm 0{,}03$	$3{,}931 \pm 0{,}01$
KIC6766513	$1{,}57 \pm 0{,}10$	$2{,}22 \pm 0{,}05$	$4{,}032 \pm 0{,}01$

TABLE 8.1. – Paramètres des sous-géantes, obtenues d'après les relations d'échelle sismiques

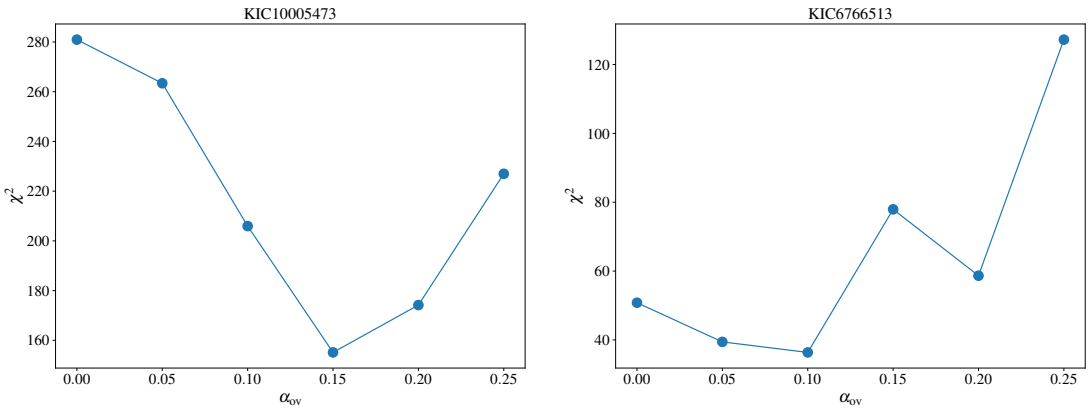

FIGURE 8.2. – χ^2 des meilleurs modèls en fonction de α_{ov} pour KIC 10005473 (à gauche) et KIC 6766513 (à droite).

8.2. Procédure de modélisation et résultats préliminaires

8.2.1. Procédure de modélisation

La procédure adoptée pour toutes les sous-géantes est la même que celle pour KIC10273246. Cependant, nous avons vu durant le travail effectué sur cette étoile que Y_0 a peu d'influence sur les fréquences. Il est donc aussi prévu de tester une optimisation avec une loi d'enrichissement en plus de l'approche grille en Y_0, ce paramètre étant alors déterminé par $Y_0 = 0{,}248 + 1{,}4Z_0$. Utiliser une telle loi, si elle n'influence pas les résultats obtenus sur α_{ov}, permettrait de pouvoir considérablement accélerer les processus de modélisation. Plus accessoirement, le code utilisé pour KIC10273246 a été porté de Fortran vers Python, afin de le rendre plus flexible. Le portage donne des résultats identiques à ceux de la version originale.

8.2.2. Résultats préliminaires

De premières modélisations ont été effectuées et ont donné lieu à des résultats préliminaires. On présente dans la Figure 8.2 les résultats sur $\alpha_{\rm ov}$ obtenus pour KIC10005473 et KIC6766513. On voit pour les deux étoiles des écarts significatifs de χ^2 (défini identiquement à l'équation 6.2) en fonction de l'$\alpha_{\rm ov}$, avec des meilleurs modèles obtenus avec $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$ pour KIC10005473 et $\alpha_{\rm ov} = 0{,}10$ pour KIC6766513. On note cependant, pour cette dernière, que le modèle à $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$ a des caractéristiques incohérentes avec les modèles ayant d'autres valeurs de $\alpha_{\rm ov}$, ce qui pourrait indiquer une mauvaise convergence de l'optimisation, et donc des vérifications supplémentaires requises.

Ces premiers résultats sont cependant encourageants, et rejoignent ceux de Noll et al. (2021) quant à la possibilité d'utiliser les sous-géantes comme moyen de contraindre $\alpha_{\rm ov}$.

Troisième partie

Influence des réseaux de réactions nucléaires et du mélange central sur les tailles des cœurs convectifs

Dans cette troisième partie, nous allons voir comment la modélisation des réactions nucléaires ainsi que celle du mélange dans le cœur convectif de l'étoile peuvent avoir une influence sur la taille de celui-ci.

Nous allons donc en premier lieu revenir sur les caractéristiques des réactions nucléaires et du mélange convectif au cœur des étoiles de faible masse ($\lesssim 2\,M_\odot$). Ensuite, nous expliquerons comment la façon dont ces deux phénomènes sont modélisés peut influencer la taille du cœur convectif, notamment dans le cas de modèles calculés avec de l'overshoot. Enfin, nous conclurons par une étude de l'influence que cette différence de taille peut avoir sur les observables sismiques durant la séquence principale.

Le travail présenté n'a pas encoré été publié, et n'est pas encore terminé. C'est donc une présentation préliminaire et non finalisée, notamment pour le Chapitre 10. Une première version de l'article a en revanche été rédigée pour le Chapitre 9.

9. Comment la taille du cœur dépend de la modélisation du mélange et des réactions nucléaires ?

Nous allons dans ce chapitre introduire les deux processus sur lesquels nous nous concentrons dans cette partie, le mélange central et les réactions nucléaires. Pour cela, nous exposerons leurs caractéristiques et leurs temps caractéristiques respectifs. Ensuite, nous verrons comment ils peuvent influencer la taille du cœur.

9.1. Introduction

9.1.1. Les réactions nucléaires

Caractéristiques

Durant la séquence principale, et dans la gamme de masse considérée, les réactions nucléaires se font en suivant soit la chaîne proton-proton (pp), soit le cycle Carbone-Azote-Oxygène (CNO). La première se produit principalement dans les étoiles de masse proche de la masse solaire alors qu'on retrouve la deuxième dans les étoiles plus massives. Dans ce travail, nous nous concentrerons sur la chaîne pp.

La chaîne pp est composée de plusieurs branches, pp-1, pp-2 et pp-3, qui représentent plusieurs façons de produire un noyau d'Hélium 4. Le schéma en Figure 9.1 représente les réactions se produisant dans les différentes branches de la chaîne. Les probabilités respectives de ces branches dépendent de la température, de la densité et de la composition dans le cœur de l'étoile. Ainsi, la Figure 9.2 représente la répartition de l'énergie totale produite par les réactions nucléaires, pour des étoiles de différentes masses, au cours de la séquence principale. Ces modèles sont calculés avec MESA et une métallicité solaire. On observe que la chaîne pp domine surtout pour les étoiles de faible masse et jeunes : le cycle CNO devient dominant vers $X_c \sim 0.1$ pour les étoiles de $1{,}2\,M_\odot$, $X_c \sim 0{,}3$ pour $1{,}5\,M_\odot$ et $X_c \sim 0{,}5$ pour les étoiles de $2\,M_\odot$.

En outre, nous pouvons noter que l'énergie produite par la chaîne pp est principalement divisée en trois :

— $^2\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$, qui domine à basse température ;
— La branche pp-1, qui est la branche favorisée à basse température ;
— La branche pp-2, qui domine à des températures supérieures.

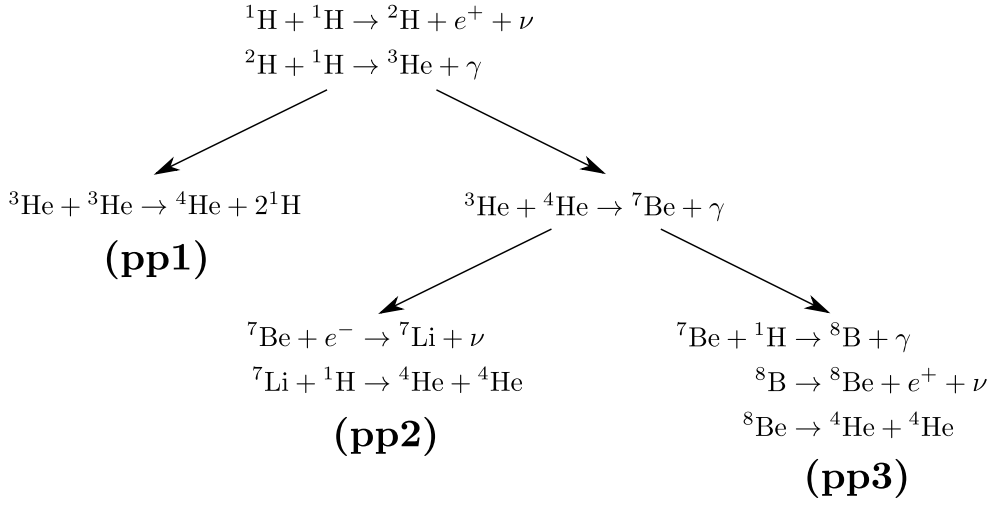

FIGURE 9.1. – Représentation des différentes réactions nucléaires composant la chaîne pp (inspiré de Kippenhahn et al. 2012)

Dans le dernier cas, on note que la majorité de l'énergie produite par la branche pp-2 provient de la réaction $^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$ ($\sim 96\%$) : on peut donc considérer que la quasi-totalité de l'énergie produite par la chaîne pp-2 l'est par la réaction impliquant le lithium.

Temps caractéristiques

On s'intéresse ici seulement à l'action des réactions nucléaires sur la fraction de masse d'un élément. On peut alors écrire, si on note X_i la fraction de masse de l'élément i (e.g., Kippenhahn et al. 2012) :

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t} = \frac{m_i}{\rho}\left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik}\right], \tag{9.1}$$

avec m_i la masse d'un noyau de cet élément, r_{ji} les taux des réactions qui créent l'élément i et r_{ik} les taux des réactions qui le consomment. Ces taux sont exprimés ici en nombre de réactions par unité de temps et de volume. On définit de plus le temps caractéristique τ_i tel que (e.g., Clayton 1968) :

$$\frac{\mathrm{d}n_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{n_i}{\tau_i} \tag{9.2}$$

avec n_i le nombre de particules de l'élément i.

On déduit alors l'expression de τ_i qui est :

$$\tau_i = \frac{X_i \rho}{m_i}\left(\sum_j r_{ij}\right)^{-1}. \tag{9.3}$$

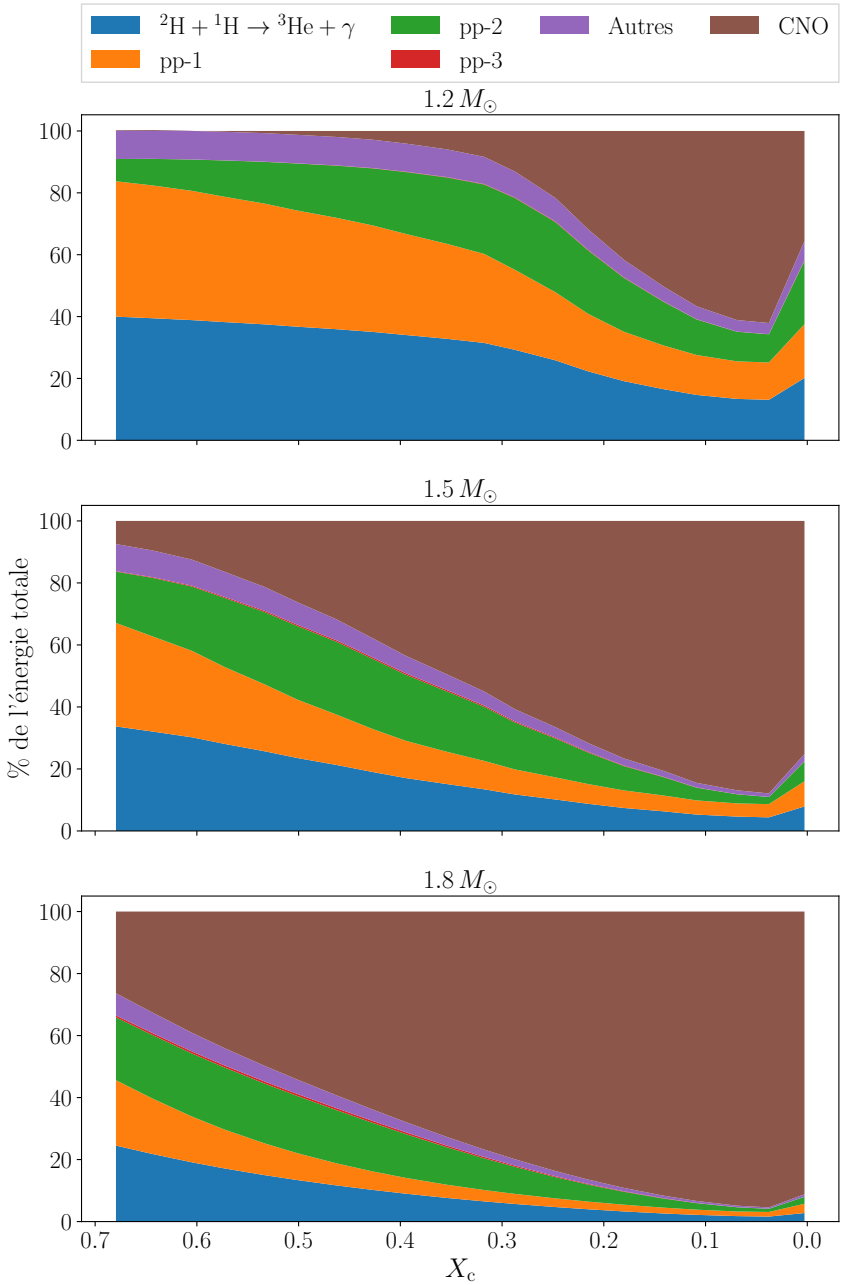

FIGURE 9.2. – Répartition de la production d'énergie nucléaire entre les différentes réactions, en fonction de X_c pour des étoiles de 1,2 (haut), 1,5 et 1,8 $M_\odot$.

Élément	τ
^{1}H	3,58 Ga
^{2}H	0,889 s
^{3}He	$2{,}84 \times 10^{4}$ a
^{4}He	5,67 Ga
^{7}Be	108 jours
^{7}Li	178 s
^{8}B	1,11 s

TABLE 9.1. – Temps caractéristiques nucléaires des éléments participant aux chaînes pp.

Ce temps exprime le temps caractéristique nécessaire à ce qu'un élément atteigne sa valeur d'équilibre, c'est-à-dire jusqu'à ce que $(\partial X/\partial t)_{\rm nucl} \approx 0$. Il est possible de calculer ces différents temps caractéristiques avec MESA, pour tous les éléments participant à la chaîne pp. Les résultats sont indiqués dans la Table 9.1, pour un modèle de 1,3 $M_\odot$ avec une métallicité solaire et arrêté à $X_c = 0{,}5$. Comme mentionné plus haut, ces résultats montrent la très grande diversité des temps caractéristiques selon les réactions, le deutérium ayant une durée de vie de moins d'une seconde (notamment du fait de sa grande réactivité avec les protons) quand le temps caractéristique pour les protons et l'hélium 4 sont du même ordre de grandeur, logiquement, que le temps d'évolution nucléaire de l'étoile.

Ces temps sont à comparer à celui de l'autre phénomène impactant la composition des cœurs stellaires, le mélange convectif.

9.1.2. Le mélange convectif

Le mélange dans les cœurs convectifs est très efficace, c'est-à-dire que le temps de retournement convectif est, pour les éléments les plus abondants, beaucoup plus court que le temps caractéristique nucléaire. En conséquence, la zone de mélange centrale est souvent considérée comme homogène dans les codes d'évolution stellaire. C'est par exemple le cas de CESTAM. Cependant, il est aussi possible de le modéliser comme un phénomène de mélange diffusif, avec un coefficient de diffusion $D_{\rm conv}$ calculé à partir de la MLT, ce qui est fait dans le code MESA. Ce dernier est relié à la vitesse de convection $v_{\rm conv}$ par :

$$v_{\rm conv} = 3\frac{D_{\rm conv}}{\alpha_{\rm MLT}\lambda}, \tag{9.4}$$

avec $\lambda = \max\left(H_p, (P/G\rho^2)^{1/2}\right)$ pour éviter la divergence de H_p proche du centre. On définit alors le temps caractéristique de la convection comme le temps de retournement convectif $\tau_{\rm conv}$ tel que :

$$\tau_{\rm conv} = \int_0^{R_{cc}} \frac{{\rm d}r}{v_{\rm conv}}. \tag{9.5}$$

Les valeurs de $\tau_{\rm conv}$ sont représentées dans la Figure 9.3, calculées sur les mêmes modèles que ceux utilisés pour la Figure 9.2. On peut noter que le temps caractéristique diminue

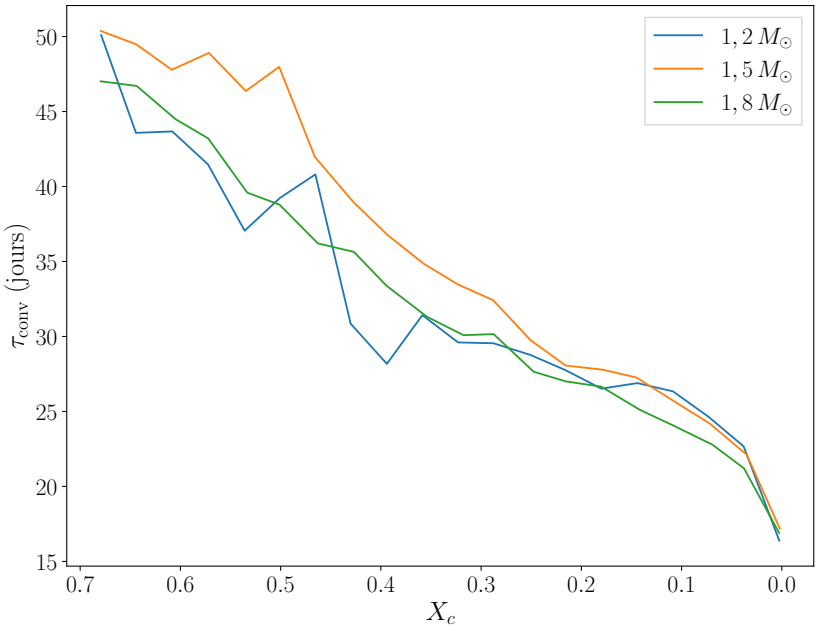

FIGURE 9.3. – Evolution de $\tau_{\rm conv}$ pour les trois étoiles représentées dans la Figure 9.2.

avec l'évolution de l'étoile, passant de environ 50 jours à 15 jours. De plus, on voit qu'il est relativement indépendant de la masse, du moins entre 1,2 et 1,8 $M_\odot$.

9.2. Impact sur la structure du cœur

Nous allons dans ce chapitre analyser les différences de structure causées par les différences d'implémentation du mélange central entre CESTAM et MESA. Pour cela, nous allons tout d'abord nous intéresser à l'impact sur le profil compositionnel, pour ensuite étudier celui sur la production d'énergie nucléaire, pour enfin converger vers une explication de comment cela peut modifier la taille du cœur.

9.2.1. Composition

En comparant les valeurs dans la Figure 9.3 et la Table 9.1 nous pouvons noter que $\tau_{\rm conv}$ est plus court que le temps caractéristique nucléaire pour ^{1}H, ^{3}He, ^{4}He. Cela veut dire que les changements en fraction de masse pour ces espèces dus aux réactions nucléaires sont trop lents par rapport au mélange convectif. Il ne peut donc pas se créer d'inhomogénité dans le cœur de ce fait : on en déduit que ces différents éléments sont homogènes dans le cœur.

En revanche, c'est l'inverse pour ^{2}H, ^{7}Li, et ^{8}B. Cela veut dire que le mélange convectif est trop « lent » pour empêcher la mise à l'équilibre de ces éléments chimiques : on s'attend

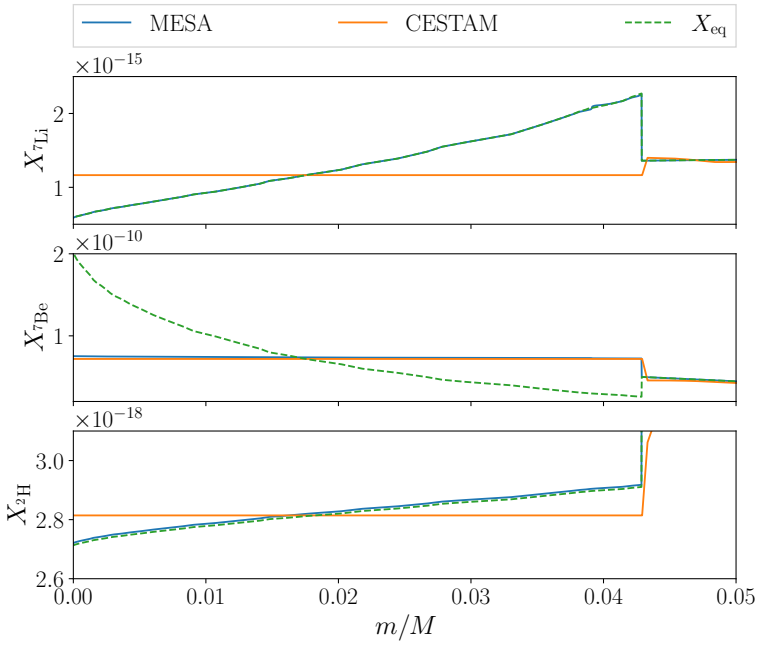

FIGURE 9.4. – Profils de fractions de masse de ^{7}Li, ^{7}Be et ^{2}H au cœur d'une étoile de 1,3 $M_\odot$ à métallicité solaire, arrêtée à $X_c = 0{,}4$. En bleu le profil calculé avec MESA, en orange avec CESTAM et en pointillés verts celui déduit des taux de réactions nucléaires.

donc à des inhomogénités dans le cœur pour ces trois éléments. De plus, l'écart entre τ_{conv} et τ_{nucl} étant important pour ces trois espèces, on s'attend à ce qu'elles atteignent leur fraction de masse d'équilibre.

Enfin, on peut noter le cas limite du ^{7}Be. En effet, si son temps caractéristique nucléaire est supérieur à τ_{conv}, il reste du même ordre de grandeur. Il est donc probable que le béryllium ne soit pas totalement homogène, mais n'atteigne pas sa fraction de masse d'équilibre.

Pour vérifier cela, on représente en Figure 9.4 les fractions de masse d'une espèce dans chaque cas : le deutérium, le lithium et le béryllium. Sont représentées en bleu et orange les valeurs provenant respectivement de modèles MESA et CESTAM ayant les mêmes caractéristiques : le premier suppose un mélange diffusif (il tient donc compte de τ_{conv}) quand le deuxième impose un cœur homogène. En pointillés verts sont représentées les fractions de masse à l'équilibre, qui sont calculées d'après les taux des réactions nucléaires auxquelles prend part l'élément en question, de sorte que $(\partial X_i/\partial t)_{\text{nucl}} = 0$. On observe sur cette figure ce qui était attendu de notre étude préliminaire : contrairement à CESTAM où tous les éléments sont homogènes, dans MESA le ^{7}Li et le ^{2}H sont bien à leur valeur d'équilibre : en effet, pour ces deux éléments $\tau_{\text{nucl}} < \tau_{\text{conv}}$ Au contraire, le ^{7}Be est quasi-homogène, car pour cet élément $\tau_{\text{nucl}} > \tau_{\text{conv}}$.

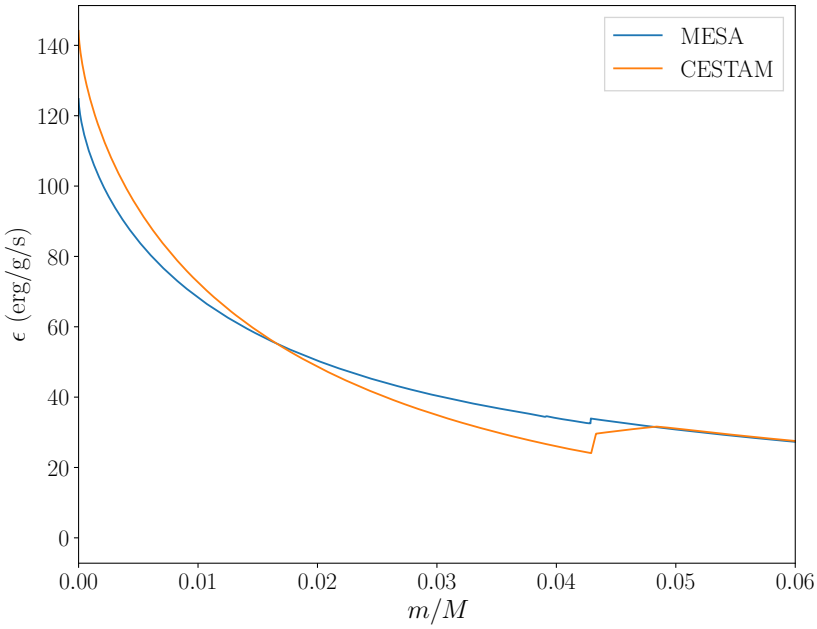

FIGURE 9.5. – Profil de ϵ dans le cœur de deux modèles de 1,3 $M_\odot$ à métallicité solaire stoppé $X_c = 0{,}4$, calculés avec MESA (bleu) et CESTAM (orange)

9.2.2. Production d'énergie nucléaire

Nous avons vu que les profils de composition diffèrent dans le cœur, entre MESA et CESTAM. Cela va avoir un impact direct sur la production d'énergie nucléaire. En effet, X_i, X_j les fractions de masse des deux réactifs de la réaction produisant l'énergie ϵ_{ij} sont reliées à celle-ci par l'équation suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{1+\delta_{ij}} \frac{Q}{m_i m_j} \rho X_i X_j \langle \sigma v \rangle, \tag{9.6}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, Q est l'énergie produite par réaction, σ sa section efficace et v la vitesse des particules en jeu. On déduit donc que les différences observées dans la Figure 9.4 impacteront directement l'énergie produite par les réactions impliquant le ^{7}Be, le ^{7}Li et le ^{2}H. Pour les deux premiers, cela peut avoir un impact fort sur le ϵ total : en effet, nous avons vu que les réactions pp-2, dominées par la réaction $^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$, représentent environ 20% de l'énergie totale pour une étoile de 1,5 $M_\odot$ au milieu de sa séquence principale.

La Figure 9.5 représente le taux de production d'énergie nucléaire ϵ calculée avec MESA et CESTAM : la différence entre les deux profils dans le cœur apparaît clairement, et s'annule dans la région radiative. On remarque aussi que proche du centre, $\epsilon_{\mathrm{CESTAM}} > \epsilon_{\mathrm{MESA}}$ au contraire des régions les plus externes du cœur. On peut attribuer directement cela aux différences de profil de $X_{^7\mathrm{Li}}$ visibles dans la Figure 9.4 : $X_{^7\mathrm{Li}}^{\mathrm{MESA}} < X_{^7\mathrm{Li}}^{\mathrm{CESTAM}}$ au

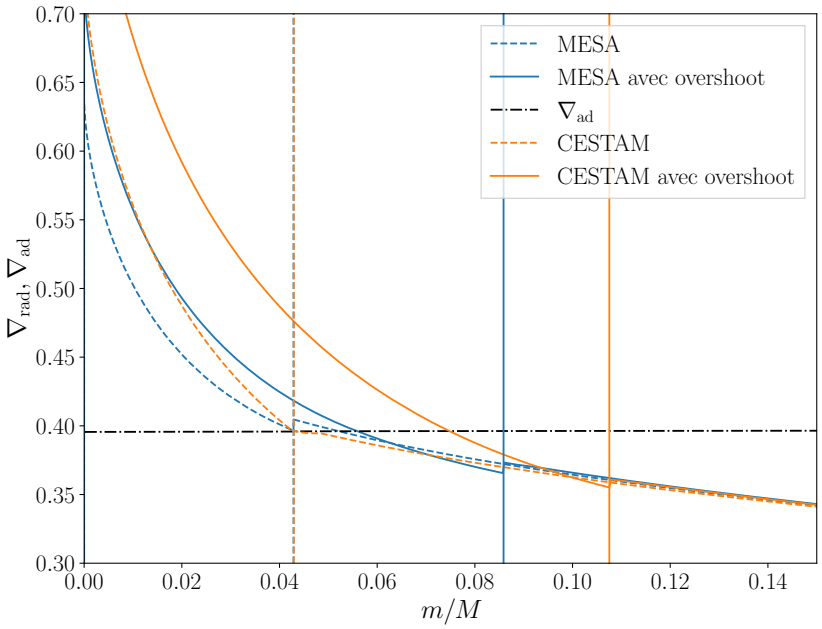

FIGURE 9.6. – Gradients radiatifs des modèles MESA (en bleu) et CESTAM (en orange) calculés sans overshoot (en pointillé) et avec $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$ (en trait plein). Les limites des cœurs convectifs sont représentées par des barres verticales.

centre de l'étoile, mais la tendance s'inverse dans les régions plus extérieures du cœur, de façon analogue à ce qui peut être vu pour ϵ.

Qu'en est-il de la luminosité du cœur, c'est-à-dire l'intégrale de ϵ ? Il est alors intéressant de constater qu'elle est la même pour les deux modèles : les différences dans le profil de ϵ se « compensent ». En conséquence, les deux étoiles ont des luminosités totales identiques.

Enfin, on pourrait se demander aussi l'impact de la différence en $X_{^2\rm H}$ entre MESA et CESTAM sur le profil de ϵ. En effet, le deutérium prend part à la réaction $^2\rm H + ^1\rm H \rightarrow ^3\rm He + \gamma$ qui représente une part non négligeable de la production d'énergie totale (voir la Figure 9.2). Cependant, la différence relative en fraction de masse est bien plus faible (autour de 3%) et donc l'impact de celle-ci sur la production d'énergie nucléaire est négligeable : l'énergie produite par cette réaction ne change pas significativement selon la façon dont est modélisé le mélange.

9.2.3. Influence sur la taille du cœur convectif

Nous allons ici faire le lien entre ces différences en ϵ et la taille des cœurs convectifs. Nous distinguons le cas sans overshoot, que nous verrons en premier, du cas avec overshoot.

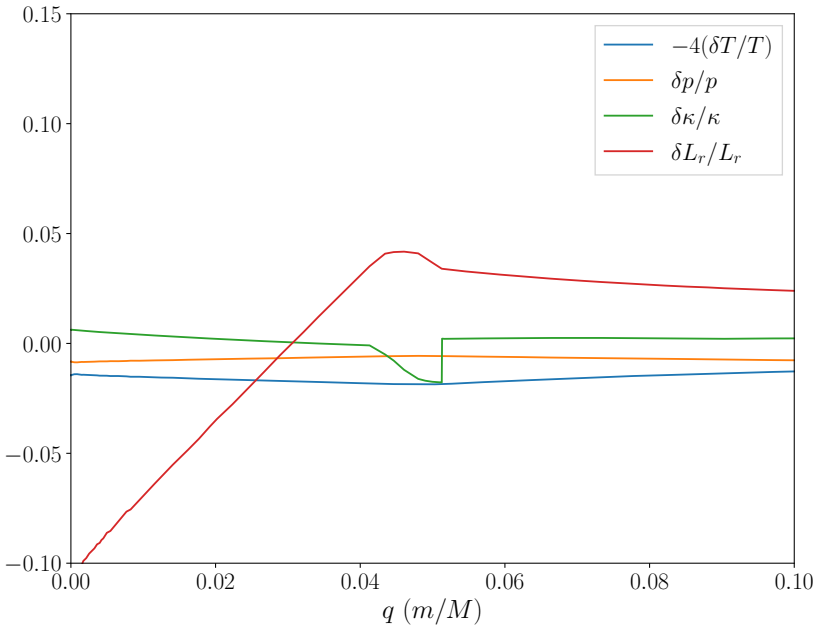

FIGURE 9.7. – Contributions des différents termes de l'équation 1.1 à la différence entre les gradients radiatifs des modèles CESTAM et MESA, dans le sens MESA-CESTAM.

Sans overshoot

Pour les étoiles en séquence principale, à l'équilibre thermique, l'intégrale de ϵ sur la masse correspond à la luminosité L_r à la couche considérée. Comme le montre l'équation 1.1, celle-ci est reliée au gradient radiatif, qui lui-même détermine la limite classique des cœurs convectifs. On s'attend donc à ce que la différence en ϵ se répercute sur $\nabla_{\rm rad}$. Cela est vérifié dans les modèles : la Figure 9.6 représente ainsi les gradients radiatifs de modèles équivalents calculés avec MESA et CESTAM. On y voit clairement des différences entre les profils des deux gradients dans le cœur, avant que ceux-ci ne se rejoignent dans la zone radiative.

Pour vérifier que l'origine de ces différences est bien L_r, on décompose l'équation 1.1 de la façon suivante :

$$\frac{\delta\nabla_{\rm rad}}{\nabla_{\rm rad}} = \frac{\delta\kappa}{\kappa} + \frac{\delta L_r}{L_r} + \frac{\delta P}{P} - \frac{\delta m}{m} - 4\frac{\delta T}{T}, \tag{9.7}$$

et on regarde quel terme domine dans la différence entre les deux gradients radiatifs.

La Figure 9.7 représente les différents termes de l'équation 9.7. On voit que c'est la différence de luminosité qui domine largement par rapport aux autres termes, ce qui est en accord avec le fait que les différences structurelles observées soient liées aux différences en fraction de masse de lithium.

Cependant, malgré les différences de profil dans le cœur, les deux gradients croisent

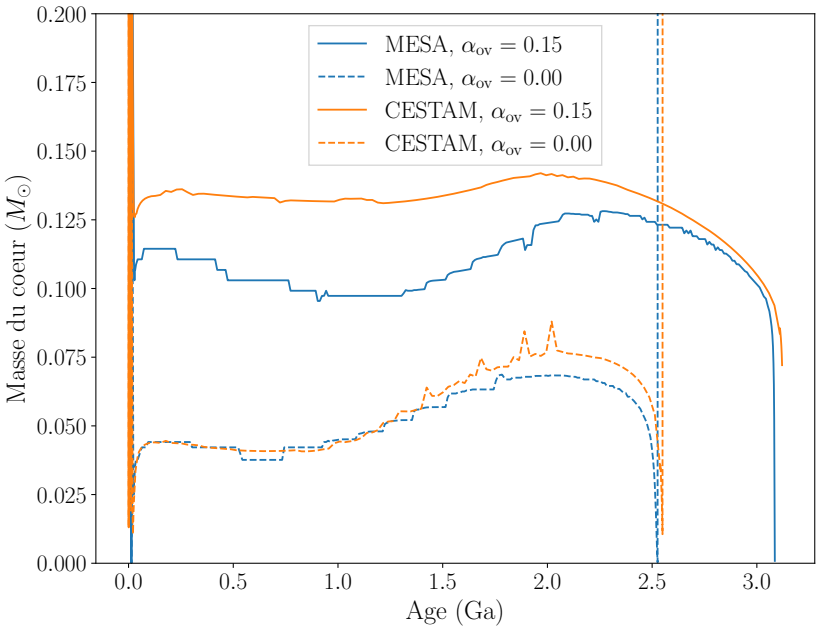

FIGURE 9.8. – Evolution de la masse du cœur, pour des modèles de 1,3 $M_\odot$ calculés avec MESA et CESTAM, avec et sans overshoot.

∇_{ad} au même rayon : ils définissent donc la même limite de cœur. On peut comprendre cela par le fait que le mélange est effectué après la détermination de la taille du cœur, et donc les pentes du gradients radiatifs sont modifiées mais pas le rayon où ils croisent le gradient adiabatique. Ces tailles sont d'ailleurs identiques sur toute la durée de la séquence principale. La Figure 9.8 représente en effet l'évolution de la masse du cœur pendant la séquence principale : les différences entre les modèles MESA et CESTAM sont faibles pour les modèles sans overshoot, et pourraient être expliquées par d'autres disparité entre les deux codes.

Avec overshoot

En revanche, la situation est différente lorsque l'on rajoute de l'overshoot dans les modèles. Dans cette étude, on utilise une prescription d'overshoot instantané, avec la distance d'overshoot d_{ov} prescrite par :

$$d_{ov} = \alpha_{ov} \min(H_p, R_{cc}), \tag{9.8}$$

afin de permettre la comparaison directe entre les deux codes.

On observe alors sur la Figure 9.8 la différence flagrante avec le cas sans overshoot : ici, les deux masses de cœur sont sensiblement différentes, avec des différences relatives de l'ordre de 30% au maximum, vers 1 milliard d'années.

Pourquoi cette différence n'est observée que dans le cas de modèles avec overshoot ? Ce

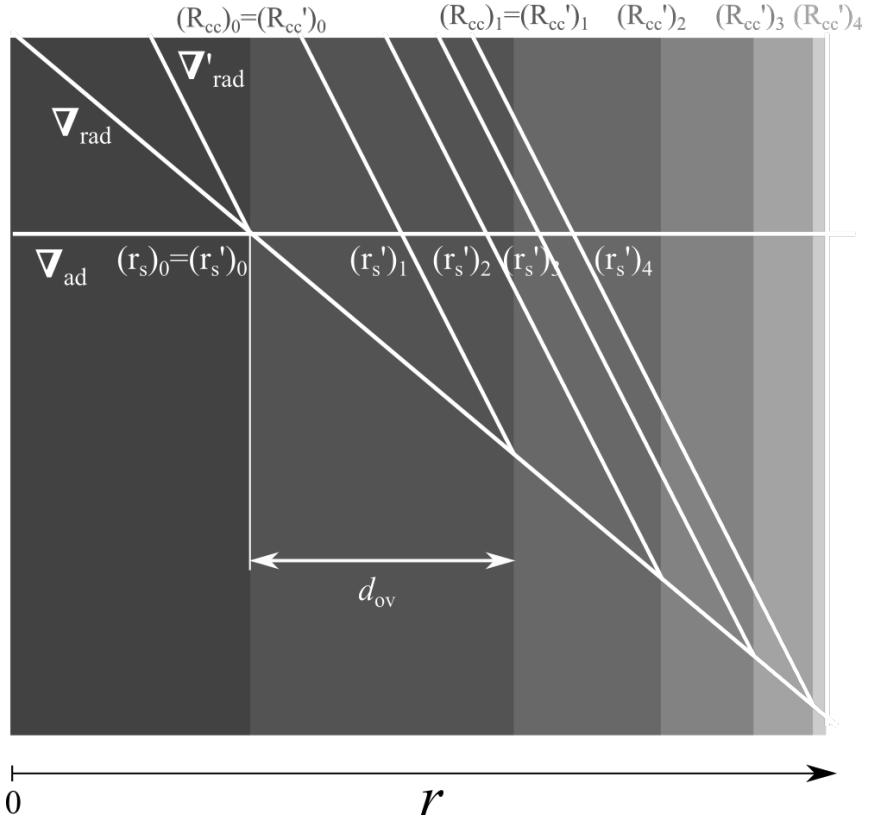

FIGURE 9.9. – Représentation schématique du modèle simplifié expliquant la différence de taille de cœurs des modèles avec overshoot provenant de CESAM et MESA.

processus est itératif, et pour le comprendre, nous avons développé un modèle simplifié basé sur la Figure 9.9. Celle-ci représente, schématiquement, les tailles de cœur et gradients d'un modèle simulant CESTAM, noté avec des primes $'$, et d'un modèle simulant MESA noté sans prime. Le gradient adiabatique, $\nabla_{\rm ad}$, est constant et identique pour les deux modèles. Les deux gradients radiatifs $\nabla_{\rm rad}$ sont modélisés comme des fonctions affines, de sorte à ce qu'ils aient des valeurs identiques dans la région radiative et des pentes différentes dans le cœur convectif, de façon analogue à ce qui peut être vu sur la Figure 9.7. On note que la pente de $\nabla_{\rm rad}$ est la même à l'intérieur qu'à l'extérieur du cœur, au contraire de celle de $\nabla'_{\rm rad}$. Les limites de Schwarzschild, c'est-à-dire où $\nabla_{\rm rad} = \nabla_{\rm ad}$, sont notées r_s et les limites des cœurs sont notées $R_{cc} \equiv r_s + d_{\rm ov}$. Enfin, le processus étant itératif, toutes les variables à l'itération n sont notées $()_n$.

Au départ, les deux modèles ont des tailles de cœur identiques et n'ont pas d'overshoot, soit $(r_s)_0 = (r'_s)_0 = (R_{cc})_0 = (R'_{cc})_0$. On étend alors les cœurs sur une distance $d_{\rm ov}$, d'où $(R_{cc})_1 = (r_s)_0 + d_{\rm ov}$ et $(R'_{cc})_1 = (r'_s)_0 + d_{\rm ov}$. A l'itération suivante, les gradients radiatifs définissent les nouvelles tailles de cœur. Du fait que la pente de $\nabla_{\rm rad}$ du modèle analogue à MESA est la même au dedans et au dehors du cœur, on a $(r_s)_0 = (r_s)_1$: le rayon de Schwarzschild n'avance pas. En revanche, on peut voir sur le schéma que le gradient

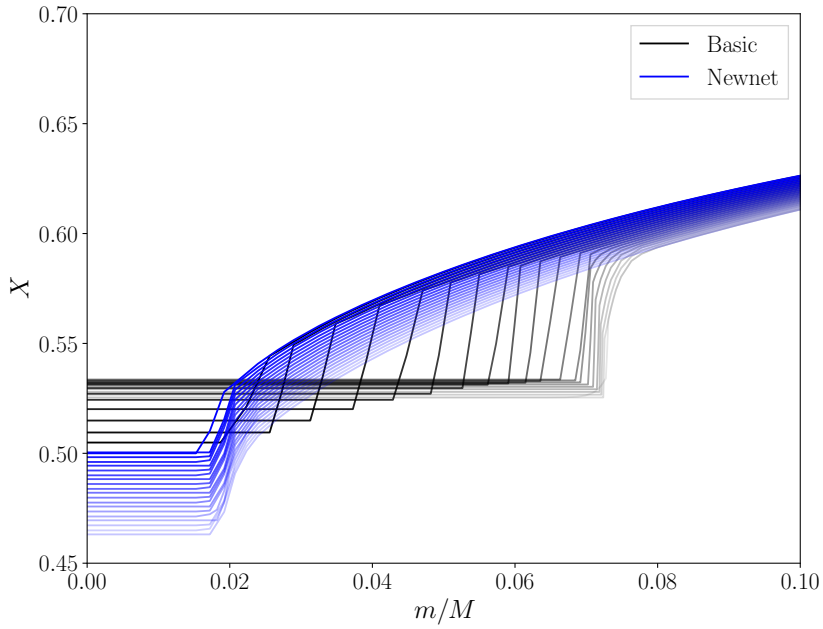

FIGURE 9.10. – Evolution du profil en X d'un modèle juste après ajout d'overshoot. Chaque profil est représenté à chaque itération en temps, du plus foncé au plus clair. En bleu le modèle est calculé avec un réseau newnet, analogue au cas d'un mélange diffusif, alors que le modèle en noir est calculé avec un modèle basic, analogue au cas d'un mélange instantané.

radiatif du modèle simulant CESTAM, ∇'_{rad}, définit un rayon de Schwarzschild différent à l'itération suivante, de telle sorte que $(r'_s)_1 \neq (r_s)_1$. Cette différence persiste une fois l'overshoot ajouté, d'où $(R_{cc})_2 \neq (R'_{cc})_2$. Ce processus se répète aux itérations suivantes, jusqu'à ce que les modèles convergent vers des tailles de cœur significativement différentes, comme observé sur la Figure 9.8.

Il est possible, à partir de ce modèle simplifié, de déduire une expression de Δr_s, c'est-à-dire l'écart entre les rayons de Schwarzschild des deux modèles. On trouve ainsi :

$$\Delta r_s = d_{\text{ov}} \left(\frac{a'}{a} - 1 \right) \tag{9.9}$$

avec a, a' les pentes respectives de ∇_{rad} et ∇'_{rad} dans le cœur. On peut alors voir que l'écart est directement dépendant de d_{ov} et donc que, comme $a'/a > 1$, Δr_s augmente avec α_{ov}.

Ce mécanisme peut directement être observé sur les modèles. Pour cela, on rajoute brusquement de l'overshoot au milieu de la séquence principale et on regarde l'évolution de la taille du cœur par pas de temps. La Figure 9.10 représente ainsi les profils en X pour un modèle calculé avec le réseau de nucléaire « basic » et le réseau nucléaire « newnet ». Comme expliqué dans le section 9.2.4, le premier est analogue au cas d'un mélange instantané et

le second au cas d'un mélange diffusif. On peut alors observer sur cette figure que, comme attendu d'après l'explication du modèle simplifié, le cœur grandit de façon significative à chaque pas de temps si le mélange est instantané, avant de converger vers une valeur sensiblement plus grande que ce qu'il aurait eu sans ce processus. En effet, un ajout simple d'overshoot aurait ici étendu le cœur à $m/M = 0{,}031$, ce qui est bien inférieur à la valeur d'environ 0,07 observée ici. Au contraire, un modèle ayant un mélange diffusif, en bleu, a un cœur dont la taille n'augmente pas.

9.2.4. Quelles sont les caractéristiques des étoiles les plus sensibles à ce mécanisme ?

Nous pouvons nous demander dans quels modèles ces différences de taille de cœur sont les plus importantes. Nous savons que celles-ci sont causées par la chaîne de réaction pp-2 : ce sont donc les étoiles de masses comprises entre 1,2 et 1,5 $M_\odot$ qui seront le plus concernées, comme on peut le voir sur la Figure 9.2 De plus, la part de la chaîne pp-2 change grandement au cours de la séquence principale : les étoiles plus jeunes, ayant des températures centrales plus faibles, ont une part de pp-2 plus élevée que les étoiles situées plutôt en fin de séquence principale. On peut donc s'attendre à ce que les différences de cœur pour les premières soient plus importantes que pour les secondes. Cela est vérifié dans les modèles : dans la Figure 9.8, on voit en effet que l'écart entre les tailles est plus important pour des X_c élevés, et avant de se réduire lorsque l'étoile est plus évoluée.

On conclut donc que ce sont principalement les étoiles de ayant des masses comprises entre 1,2 et 1,5 $M_\odot$ et en début de séquence principale qui seraient les plus sensibles au processus expliqué dans cette partie.

9.3. Influence du réseau de réactions nucléaires

Du fait que les temps caractéristiques nucléaires du lithium, béryllium et bore sont faibles devant le temps caractéristique nucléaire de l'étoile, il est commun de supposer les réactions $^2\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$, pp-2 et pp-3 à l'équilibre. Par exemple, cela correspond au réglage par défaut dans MESA (utilisation du réseau de réaction nucléaire `basic.net`).

Or, cette approximation est ici incorrecte. Ainsi, le béryllium, comme nous pouvons le voir dans la Figure 9.4, est homogène dans le cœur du fait que $\tau_{\mathrm{Be}}^{\mathrm{nucl}} > \tau_{\mathrm{conv}}$, et n'est donc pas à l'équilibre. Cela impacte directement l'énergie produite par la réaction $^7\mathrm{Li} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$: en effet, le lithium est lui à l'équilibre, et donc sa fraction de masse dépend directement de celle du béryllium, dû au fait qu'il est produit via la réaction $^7\mathrm{Be} + e^- \rightarrow {}^7\mathrm{Li} + \nu$. En conséquence, si on considère ces réactions comme étant à l'équilibre, le profil en ϵ résultant sera significativement différent, de façon analogue à ce qui a été observé entre MESA et CESTAM.

Considérer les réactions nucléaires du ^{7}Li et du ^{7}Be à l'équilibre a donc aussi un impact sur la taille des cœurs convectifs. Pour illustrer cela, on représente dans la Figure 9.11 l'évolution de la masse d'un cœur convectif pour deux modèles ayant des réseaux nucléaires

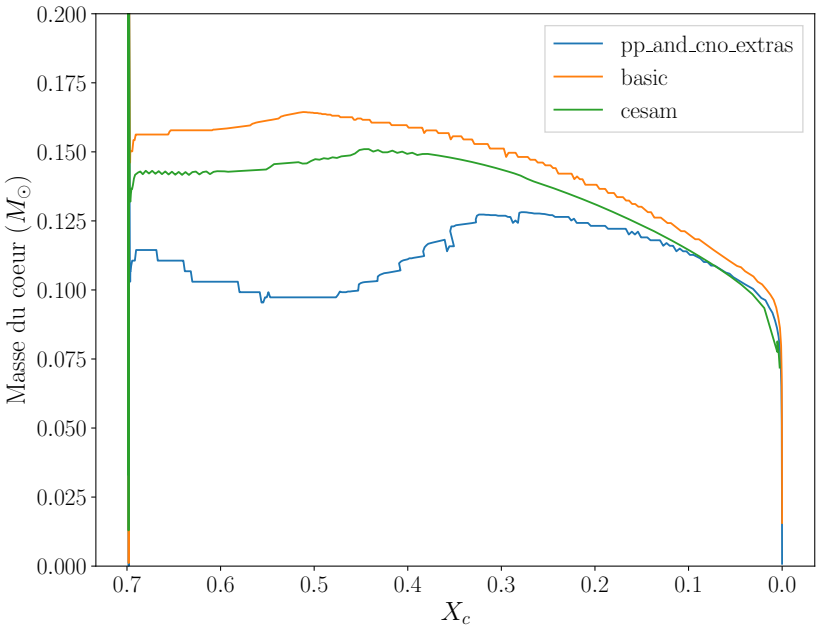

FIGURE 9.11. – Evolution de la taille du cœur de modèles de 1,3 $M_\odot$ calculé avec les réseaux « basic » et « pp and cno extras »

différents. On observe alors des tailles de cœurs différentes, dues au même processus que celui expliqué dans la section précédente. Cette différence n'est observée que dans les modèles incluant de l'overshoot.

Est aussi représentée sur la Figure 9.11, pour comparaison, la taille du cœur d'un modèle équivalent calculé avec CESTAM. On observe que la différence entre les modèles avec les deux réseaux de réactions est légèrement supérieure à celle entre MESA et CESTAM, mais est du même ordre de grandeur.

10. Influence sur les observables sismiques

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les différentes modélisations du mélange dans le cœur, ainsi que les réseaux de réactions nucléaires utilisés, avaient une influence sur la taille de celui-ci. Dans cette partie, nous allons effectuer un travail préliminaire pour quantifier cet effet, et notamment l'influence qu'il peut avoir sur la détermination des paramètres par modélisation sismique d'étoiles en séquence principale.

Pour faire cela, nous allons modéliser des étoiles *Kepler* de séquence principale au moyen de modèles calculés avec MESA. Nous allons calculer deux types de modèles : le premier suppose le ^{7}Li et le ^{7}Be à l'équilibre (réseau `basic`, nommés par la suite modèles basic) et le second prend en compte les variations de ^{7}Li et ^{7}Be hors équilibre (réseau `pp_and_cno_extras`, nommés par la suite modèles newnet). À l'avenir, il sera intéressant d'effectuer le même travail avec des modèles ayant des mélanges différents dans le cœur : cependant, le travail pour implémenter un mélange instantané dans MESA reste à faire et nous avons donc privilégié une comparaison entre les modèles utilisant des réseaux de réactions nucléaires différents comme première approche.

Dans ce chapitre sera présentée en premier la méthodologie adoptée, puis les résultats obtenus sur différentes étoiles observées par *Kepler*. Le travail étant ici préliminaire, je finirai par énoncer le travail restant à faire dans le cadre de la publication de ces résultats.

10.1. Méthodologie

La méthodologie adoptée pour ce travail est inspirée de Deheuvels et al. (2016). Elle consiste à modéliser des oscillateurs de type solaires en séquence principale observés par *Kepler* à partir des ratios de leurs fréquences, r_{01} et r_{10}, présentés dans la Section 2.3.2. Ces derniers ont en effet l'intérêt, pour rappel, d'être peu sensibles aux couches les plus superficielles de l'étoile, ce qui évite le problème des effets de surface. Ils permettent de ce fait de sonder le cœur de l'étoile. Notamment, le changement de composition entre le cœur homogène et la zone radiative provoque une forte variation de la vitesse du son, dont l'échelle spatiale est inférieure à la longueur d'onde des modes étudiés : cela correspond à un « glitch ». De ce glitch résulte une oscillation périodique des fréquences en fonction de l'ordre radial, dont la période dépend de la localisation du glitch et donc de la taille du cœur. Ce dernier étant situé au centre de l'étoile, la période de l'oscillation induite est plus grande que la fenêtre d'observation des fréquences et ne permet pas de directement estimer la profondeur du glitch. Cependant, elle a une influence suffisamment forte sur les

valeurs des ratios r_{01} et r_{10} pour être détectée et donc en retirer des contraintes sur la taille du cœur.

10.1.1. Physique des modèles

Les modèles ont été calculés en utilisant le code MESAv10108. De manière identique à la modélisation effectuée sur KIC10273246 dans le Chapitre 7, les tables utilisées sont celles d'OPAL, avec un mélange d'élements chimiques provenant de Asplund et al. (2009) et un modèle d'atmosphère Eddington-gris. Les zones convectives sont modélisées d'après Cox & Giuli (1968), avec une valeur de $\alpha_{\rm MLT}$ fixée à 1,84 calibrée sur le Soleil. La diffusion pour ces modèles n'a pas été prise en compte. La prescription d'overshoot utilisée est celle d'overshoot instantané, avec la définition de $d_{\rm ov}$ par défaut de MESA (voir l'équation 7.5). Le critère de Ledoux couplé au *predictive mixing* a été utilisé. Le code d'oscillation utilisé est ADIPLS. Enfin, les ratios étant peu sensibles aux couches superficielles de l'étoile, aucune correction paramétrique des effets de surface n'a été utilisée.

10.1.2. Méthode utilisée

La modélisation sismique s'est concentrée sur le ratio r_{01}, plutôt que le ratio r_{010} utilisé dans Deheuvels et al. (2016). En effet, r_{010} étant une combinaison de r_{10} et r_{01}. Ces derniers étant hautement corrélés, utiliser r_{010} peut provoquer un « sur-ajustement » (Roxburgh, 2018), qui se traduit dans la pratique par une matrice de corrélation mal conditionnée et donc difficile à inverser.

Plusieurs études ont montré que la valeur moyenne et la pente des ratios sont de bons indicateurs de la taille du cœur (Popielski & Dziembowski, 2005; Silva Aguirre et al., 2011). On les modélise donc par un polynôme de degré 2 de la forme :

$$P(\nu) = a_0 + a_1(\nu - \beta) + a_2(\nu - \gamma_1)(\nu - \gamma_1). \tag{10.1}$$

Cette prescription ajoute au polynôme de degré « habituel » 3 degrés de liberté, α, β et γ, qui permettent d'assurer que les coefficients a_n soient indépendants, c'est-à-dire exprimés dans une base orthonormée. Cela facilite les comparaisons avec les modèles. La procédure pour retrouver ces coefficients et assurer leur indépendance est décrite dans l'Appendice B de Deheuvels et al. (2016). Une différence entre cet article et le travail ici est que, le ratio r_{01} étant utilisé, la matrice de covariance est bien mieux conditionnée et donc facile à inverser. En conséquence, si Deheuvels et al. (2016) avaient besoin d'effectuer une troncation de la décomposition en valeurs singulières, celle-ci n'a pas été effectuée ici.

En première approche, une grille de modèles a été calculée. Les gammes de paramètres de celle-ci sont précisées dans la Table 10.1. Pour chaque modèle de la grille, les coefficients a_n ont été calculés avec les mêmes paramètres α, β et γ que l'étoile avec laquelle il est comparé, les coefficients devant être projetés dans la même base pour pouvoir être comparés.

Pour éviter d'être biaisé par les pas en X_c, une interpolation linéaire en $\Delta\nu$ a été effectuée pour les coefficients a_n, l'âge, X_c et les observables de surface. De ce fait, tous les résultats présentés ici ont la même grande séparation.

Param.	Min	Max	Pas
M ($M_\odot$)	1,1	1,4	0,05
[Fe/H] (dex)	-0,1	0,3	0,1
Y_0	0,26	0,30	0,04
$\alpha_{\rm ov}$	0	0,3	0,05
X_c	0	$X_{c,0}$	$X_{c,0}/60$

TABLE 10.1. – Paramètres de la grille de modèles

Enfin, les fréquences utilisées pour les observations sont celles obtenues dans Deheuvels et al. (2016). Les observables de surface n'ont pour l'instant pas été pris en compte. Il sera intéressant dans le travail final d'effectuer l'ajustement de la SED sur les différentes étoiles, de façon identique à ce qui a été fait sur KIC10273246, afin d'avoir des contraintes de luminosité robustes sur les étoiles.

10.2. Résultats

On s'attend d'après les arguments évoqués dans la Section 9.2.4 à ce que les étoiles de masses comprises entre 1,2 et 1,5 $M_\odot$ et en début de séquence principale soient les plus sensibles à la différence de taille de cœur causée par les processus évoqués dans cette partie. Nous avons donc sélectionné dans l'échantillon d'étoiles de Deheuvels et al. (2016) deux étoiles ayant des stades évolutifs différents pour estimer l'impact de ce dernier :

— KIC6225718, une étoile jeune ($X_c \sim 0{,}5$) et moyennement massive ($M \sim 1{,}26\,M_\odot$)
— KIC12258514, étoile plus évoluée ($X_c \sim 0{,}1$) et de même gamme de masse ($M \sim 1{,}24\,M_\odot$)

Les résultats sont présentés dans les Figures 10.1 et 10.2, respectivement pour KIC 6225718 et KIC 12258514. Elles représentent les coefficients a_1 et a_0 issus de l'interpolation en $\Delta\nu$, pour chaque séquence évolutive de la grille. On note que les nombres de valeurs représentées entre les deux figures ne sont pas les mêmes : cela est notamment dû à la valeur de la grande séparation de KIC 12258514, qui est petite du fait qu'elle est en fin de séquence principale. En conséquence, cette valeur de $\Delta\nu$ peut potentiellement ne jamais être atteinte durant la phase de séquence principale pour certains modèles de la grille, notamment pour les étoiles de plus faible masse.

La première observation est que les modèles ayant une valeur de $\alpha_{\rm ov}$ élevée sont les plus impactés par le changement de réseau nucléaire. En effet, ce sont les coefficents (a_0, a_1) des modèles ayant les plus hautes valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ qui changent le plus quand on utilise le réseau newnet à la place du basic. Ce résultat est cohérent avec le processus décrit dans la Section 9.2.3, qui a tendance à amplifier l'extension du cœur pour les modèles basic, comme le montre l'équation 9.9. D'ailleurs, à partir des observations représentées par une croix rouge, on peut voir que les valeurs optimales de $\alpha_{\rm ov}$ diffèrent selon le réseau utilisé. Ainsi, pour KIC6225718, les modèles basic indiquent $\alpha_{\rm ov,opt} \sim 0{,}20$ quand les modèles newnet indiquent $\alpha_{\rm ov,opt} \sim 0{,}30$. Pour KIC12258514, les différences sont moins marquées :

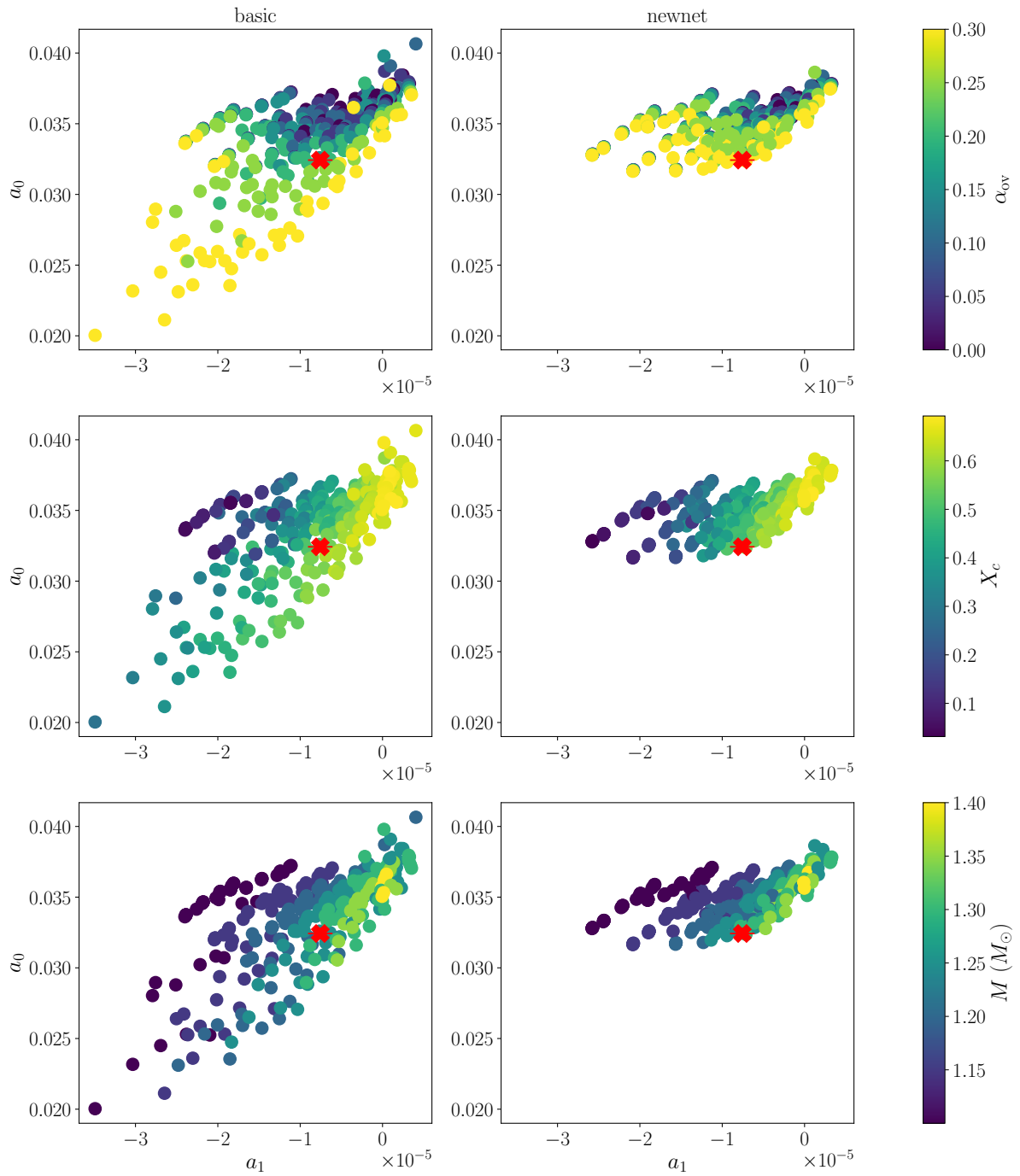

FIGURE 10.1. – Coefficients a_0 et a_1 des grilles calculés avec le réseau basic (gauche) et extras (droite), colorés selon X_c (haut), $\alpha_{\rm ov}$ (milieu) et M (bas). Les données observationnelles de KIC6225718 sont représentées par la croix rouge, avec leurs incertitudes.

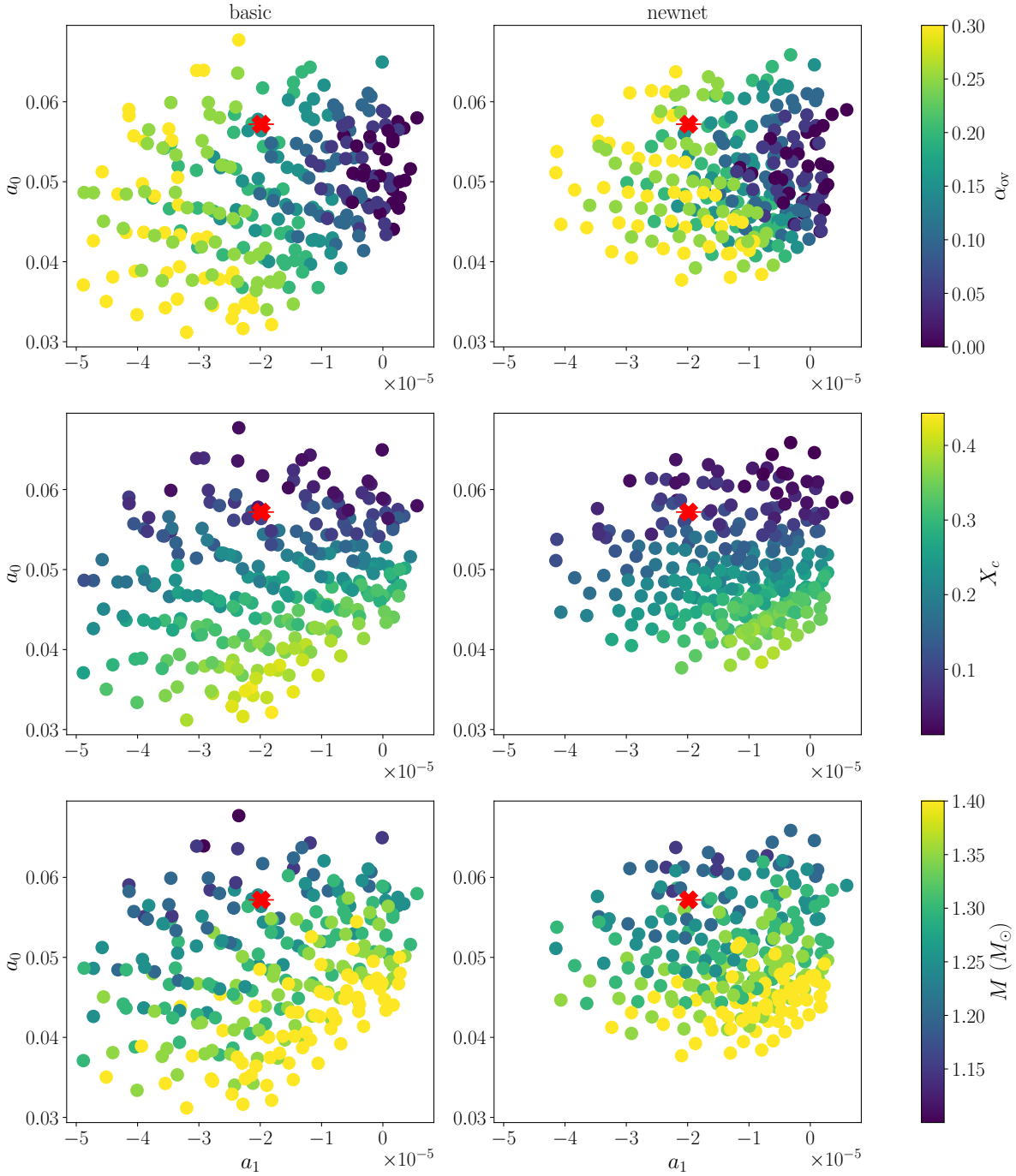

FIGURE 10.2. – Idem que la Figure 10.1, mais pour KIC12258514.

pour les deux réseaux, les meilleurs modèles favorisent tous des valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ égales à 0,2. On peut conclure que le changement de réseau joue un rôle principalement pour les étoiles en début de séquence principale.

Pour les autres paramètres représentés, X_c et M, aucune tendance flagrante n'apparaît à partir des données de la grille. Cependant, cette approche préliminaire n'est pas suffisante. À l'avenir, il sera nécessaire d'effectuer des optimisations pour déterminer les meilleurs modèles pour chaque étoile, pour les deux réseaux différents. On pourra alors déduire de ces résultats de potentielles systématiques sur la masse et le stade évolutif de l'étoile résultant du processus décrit dans cette partie.

Aussi, un travail nécessaire sera de comparer des modèles ayant les mêmes réseaux nucléaires, mais des prescriptions de mélange différentes au cœur. Pour cela, les possibilités sont de soit comparer directement MESA avec CESTAM, soit d'implémenter dans MESA un mélange instantané au cœur. Dans le premier cas, il sera tout de même nécessaire de recalculer la grille avec une prescription pour $d_{\rm ov}$ identique à celle de CESTAM, celle-ci ayant été calculée avec celle de base de MESA. La seconde solution, elle, serait très intéressante car elle assurerait que les seules différences entre les modèles soient causées par les différences de mélange au cœur. Cependant, l'implémentation d'un tel type de mélange reste à faire.

Quatrième partie

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette thèse, j'ai utilisé la sismologie des sous-géantes pour contraindre l'extension des cœurs convectifs.

Je me suis d'abord intéressé à trouver quels étaient les caractéristiques des sous-géantes qui permettraient de contraindre au mieux $\alpha_{\rm ov}$. À partir d'une étude qualitative dérivée de la théorie asymptotique, j'ai déduit que les sous-géantes présentant deux croisements évités, c'est-à-dire deux modes g-dominés, représentent un compromis intéressant entre les sous-géantes jeunes et donc proches de la séquence principale, et les sous-géantes plus évoluées présentant un nombre important de croisements évités et permettant ainsi de sonder finement la structure centrale de l'étoile. De plus, j'ai montré qu'avoir deux croisements évités permet de sonder précisément le gradient en composition chimique au niveau de la couche de combustion de l'hydrogène, région de l'étoile sous-géante la plus sensible à $\alpha_{\rm ov}$.

Cependant, la modélisation sismique des sous-géantes est difficile et requiert une méthode adaptée pour correctement reproduire les observations. Lors de mon travail de thèse, j'ai étendu, amélioré et rendu plus robuste la méthode initialement proposée par Deheuvels & Michel (2011). Celle-ci, désignée sous le nom de double optimisation, est une approche imbriquée comportant deux étapes. La première consiste à trouver la masse et l'âge qui permet de reproduire la grande séparation $\Delta\nu$ et la fréquence d'un mode mixte ν_g de l'étoile. En effet, il peut être montré que pour les sous-géantes, un unique couple (Masse, âge) correspond à un unique couple ($\Delta\nu$, ν_g), si le reste des paramètres est fixé. Dès lors, ce constat permet de trouver « facilement » les valeurs optimales de la masse et l'âge. Pour les autres paramètres, des approches plus traditionnelles comme des grilles ou des algorithmes itératifs sont possibles : seulement, à chaque pas, la masse et l'âge seront trouvés via la première étape. Cette méthode permet donc de séparer les paramètres « délicats » que sont la masse et l'âge pour mieux contraindre les autres et ainsi reproduire au mieux les observations. C'est, à ce jour, la seule approche capable de trouver des modèles reproduisant les fréquences des modes mixtes des sous-géantes dans les barres d'erreurs des données *Kepler*. Cela permet d'explorer finement la physique de l'étoile, ce qui est nécessaire si l'on veut contraindre la structure du cœur de séquence principale. En cela, cette approche diffère donc de ce qui est couramment fait dans la littérature, où seuls les paramètres de l'étoile cherchent à être retrouvés. Cette méthode a été testée dans le cadre d'un exercice PLATO. Celui-ci a consisté à modéliser six étoiles sous-géantes à partir de données synthétiques représentatives des futures données de PLATO. Ces observations simulées ont été générées par une autre équipe à partir de modèles d'évolution, et l'objectif de l'exercice était de tenter de retrouver leurs paramètres stellaires à l'aveugle. La méthode développée lors de cette thèse a alors réussi à reproduire correctement les fréquences des modèles cibles, avec des χ^2 réduits faibles (généralement de l'ordre de 1) mais aussi à retrouver les paramètres

de ces derniers, même si une sous-estimation des incertitudes a été notée. De plus, elle a été appliquée dans le cadre de Deheuvels et al. (2020), dont un des résultats intéressants pour cette thèse est qu'une sous-géante, juste assez massive pour avoir eu un cœur convectif en séquence principale, est mieux reproduite sans overshoot qu'avec. Cela montre que la structure des sous-géantes est sensible à la structure du cœur de séquence principale. De plus, ce résultat est en accord avec la dépendance de l'overshoot avec la masse trouvée dans la littérature.

Ensuite, j'ai appliqué la méthode sur une sous-géante observée par *Kepler*, KIC 10273246. Le choix de cette cible est basé sur les arguments énoncés plus haut : elle montre deux croisements évités et est assez massive pour avoir eu un cœur convectif durant la séquence principale. La méthode de la double optimisation, appliquée cette fois sur des observations, a réussi à reproduire fidèlement les observations, avec un χ^2 réduit pour le meilleur modèle égal à 3,2. Grâce à cette qualité de modélisation, des contraintes ont pu être obtenues sur $\alpha_{\rm ov}$: on trouve ainsi que le meilleur modèle est obtenu pour $\alpha_{\rm ov} = 0{,}15$, la différence de χ^2 avec le modèle sans overshoot étant égale à 188, rendant le résultat hautement significatif. De plus, on observe une forte dégradation de la qualité de l'ajustement des fréquences pour des valeurs de $\alpha_{\rm ov}$ supérieures à 0,2. Pour expliquer cela, j'ai montré que la fréquence d'un seul mode g-dominé suffit à contraindre très précisément la densité centrale. Or, quand $\alpha_{\rm ov} \geq 0{,}2$, la densité optimale permettant de reproduire le mode g-dominé est atteinte très près de la TAMS, pendant la phase de contraction hors équilibre thermique qui précède la phase de sous-géante. Dans ce cas, l'accord avec les autres observables, à la fois sismiques et classiques, se détériore très significativement. Additionnellement, je me suis intéressé au lien entre les fréquences des modes mixtes et le profil de Brunt-Väisälä. Notamment, j'ai montré le rôle du deuxième croisement évité (le premier étant fixé dans le cadre de la double optimisation) dans la contrainte du profil du gradient de composition chimique au niveau de la couche de combustion de l'hydrogène. Notamment, j'ai noté que des modèles qui reproduisent simultanément les deux modes g-dominés ont des profils de Brunt-Väisälä remarquablement similaires, notamment dans la partie dominée par le gradient de composition chimique, sensible à $\alpha_{\rm ov}$.

La modélisation de KIC10273246 a aussi été l'occasion de tester d'autres aspects de la physique. Notamment, la diffusion chimique des éléments joue un rôle important dans le cadre des jeunes sous-géantes : en effaçant les irrégularités dans le profil de composition dues au retrait du cœur, elle influence de façon non négligeable les fréquences des modes mixtes. Pour KIC10273246, il a été observé qu'elle améliore de façon significative la qualité de l'ajustement. Autre point, une forte dégénérescence a été trouvée entre la masse et la fraction initiale d'hélium. Ainsi, deux modèles ayant un écart en Y_0 de 0,04 et de masse de $0{,}07\,M_\odot$ présentent des fréquences difficilement différentiables, même au regard des petites incertitudes des données *Kepler*. Il en a été déduit que cette dégénérescence domine les incertitudes dans la détermination des paramètres de l'étoile, et que l'utilisation d'une loi d'enrichissement chimique de la Galaxie pour déterminer Y_0, ce qui est couramment fait pour la littérature, pourrait mener à une sous-estimation de celles-ci. De plus, cette dégénérescence explique certainement les trop faibles incertitudes trouvées dans l'exercice PLATO.

L'étude des cœurs convectifs m'a mené, au cours de cette thèse, à m'intéresser à un autre facteur pouvant influer sur la détermination de $\alpha_{\rm ov}$: la composition du cœur dans les modèles durant la séquence principale, qui dépend à la fois du mélange qui s'y produit et du réseau de réactions nucléaire utilisé. Ce travail, toujours en cours, a permis de tirer plusieurs conclusions. Premièrement, malgré le fait que le cœur convectif soit souvent approximé par une région homogène, cela n'est pas totalement le cas. En effet, le temps d'équilibre nucléaire de certains éléments est bien inférieur à celui de retournement convectif : en conclusion, ces derniers ne sont pas homogènes. Parmi ces éléments, on retrouve notamment le lithium, le deutérium et le bore. Or, le premier prend part à la chaîne de réaction pp-2, qui représente une part non négligeable de la production d'énergie nucléaire dans les étoiles de faible masse. En conséquence, les différences en composition de lithium induite par le mélange instantané influencent directement la production d'énergie au cœur. Nous avons alors relié cette production d'énergie au gradient radiatif, pour finalement en conclure que, lorsque de l'overshoot est ajouté, cela mène à des tailles de cœurs significativement différentes. Deuxièmement, nous avons aussi noté qu'un phénomène similaire apparaît lorsque l'on suppose ^{7}Li et ^{7}Be à l'équilibre : l'erreur faite ici est que ^{7}Be n'est en réalité pas à l'équilibre, car le mélange convectif l'en empêche. Cela influence la production d'énergie, qui *in fine* influence la taille de cœur dans des proportions semblables à celles du premier phénomène énoncé ici.

Dans un second temps, nous avons soumis ces différences à la modélisation sismique. Pour cela, nous avons calculé deux grilles de modèles en séquence principale, avec différents réseaux de réactions nucléaires. Nous avons ensuite utilisé ces grilles pour estimer la quantité d'overshoot nécessaire pour reproduire les observations sismiques de plusieurs étoiles de séquence principale observées avec *Kepler*. Nous avons alors observé que le réseau influence particulièrement la valeur de $\alpha_{\rm ov}$ optimale : les modèles utilisant un réseau nucléaire complet nécessitent une valeur plus grande que ceux utilisant un réseau approximé. L'amplitude de cette différence dépend principalement de la masse et du stade évolutif de l'étoile : les étoiles les moins massives, ainsi que les étoiles en début de séquence principale, sont ainsi les plus influencées. Aucune répercussion significative n'a été trouvée, pour l'instant, pour d'autres paramètres. Cependant, cela demandera du travail supplémentaire, notamment l'utilisation d'une optimisation sur un nombre important d'étoiles pour identifier de potentiels effets causés par le réseau. De plus, un travail identique sera effectué pour étudier l'influence du choix du type de mélange dans le cœur. Enfin, l'amplitude de ces effets dépendant de la masse, il sera intéressant de voir quelle influence ils peuvent avoir sur la relation masse–overshoot observée dans Deheuvels et al. (2016) ou Claret & Torres (2016). Ce travail fera l'occasion d'une publication soumise prochainement.

Perspectives

A l'avenir, le premier travail à effectuer sera d'appliquer la méthode de modélisation des sous-géantes à d'autres étoiles. Déjà présenté dans la Section 8, ce travail devra permettre d'obtenir des contraintes sur $\alpha_{\rm ov}$ pour des étoiles aux caractéristiques, en masse notamment, différentes. Il sera alors intéressant de confronter les résultats obtenus aux travaux déjà effectués sur les étoiles binaires à éclipses (Claret, 2007; Claret & Torres, 2019) ainsi qu'aux modélisations sismiques d'étoiles en séquence principale (Deheuvels et al., 2016), les deux montrant une augmentation de $\alpha_{\rm ov}$ avec la masse. De plus, appliquer la méthode à des étoiles à différents stades évolutifs sur la branche des sous-géantes permettra de mesurer quel type de sous-géante permet le mieux de contraindre $\alpha_{\rm ov}$. Enfin, ce travail pourra être l'occasion de mieux tester les systématiques dues aux lois d'enrichissement par rapport à des modélisations où Y_0 est laissé libre.

Nous avons vu, dans le cadre de la modélisation de KIC10273246, le très fort potentiel des modes mixtes pour sonder la région centrale du profil de Brunt-Väisälä. Or, ces contraintes sont bien évidemment dépendantes du modèle : pour pallier cela, il serait intéressant d'effectuer une procédure d'inversion du profil de Brunt-Väisälä. Cette approche, bien différente de celle adoptée dans Noll et al. (2021), permettrait d'obtenir les premières contraintes non-dépendantes de modèles sur la structure chimique centrale d'une sous-géante. La qualité des modèles obtenus, qui arrivent à bien reproduire les fréquences observées, représente un atout pour effectuer ces inversions. En outre, il est intéressant de noter sur la Figure 7.12 la proximité des profils de Brunt-Väisälä pour les deux meilleurs modèles avec et sans diffusion, ce qui montre la robustesse des contraintes provenant des modes mixtes. Récemment, Bellinger et al. (2021) ont réussi à inverser le profil en vitesse du son dans le cœur et la couche de combustion d'une étoile sous-géante. Inverser le profil de Brunt-Väisälä pourrait alors apporter un éclairage complémentaire sur la structure centrale de ce type d'étoiles : notamment, on peut voir sur les profils représentés en Figure 7.8 que les profils de la fréquence de Lamb, proportionnels à c^2/r^2, sont identiques là où les profils de Brunt-Väisälä ne le sont pas, apportant de ce fait une information supplémentaire. A noter cependant que ce travail requiert notamment l'élaboration de noyaux adaptés, dont la formulation et le calcul restent à implémenter et peuvent contenir des difficultés (Buldgen et al., 2017).

D'un autre point de vue, les étoiles sous-géantes représentent des cibles d'intérêt grâce à la précision des paramètres découlant de leur modélisation. Notamment, cela est intéressant dans le cadre de la modélisation d'exoplanètes (e.g., Huber et al. 2019) ou de l'archéologie galactique (e.g., Miglio et al. 2013). De ce fait, les sous-géantes, aux côtés des étoiles naines, représentent les cibles de prédilection pour la future mission PLATO.

On attend de cette dernière un jeu de données de haute qualité (comparable à celles de *Kepler*) sur un très grand nombre d'étoiles, situées dans des régions différentes du ciel. De plus, la mission TESS, toujours en cours, continue d'observer les « Continuing Viewing Zone » et donc d'augmenter le temps d'observation de ces régions dont découleront des données de qualité. Il sera alors nécessaire de développer, à l'avenir, une méthode robuste pour retrouver les paramètres de sous-géantes de façon correcte et rapide. Le travail effectué dans cette thèse, malgré une finalité différente qu'est la contrainte de la physique stellaire, permet de mieux comprendre ce type d'étoile et ainsi d'ouvrir des perspectives pour l'élaboration d'une méthode de modélisation automatique. Notamment, le lien étroit entre la densité centrale et les fréquences des modes g-dominés pourrait indiquer que ρ_c représente une variable de choix pour interpoler des modèles de grille. Mais surtout, ce nouveau jeu de données sera l'opportunité de pouvoir explorer finement l'intérieur d'étoiles aux caractéristiques diverses, ouvrant de ce fait de nouvelles voies à la physique stellaire. Les sous-géantes représentent dans ce cadre aussi des cibles de choix. Notamment, situées juste après la fin de la séquence principale, l'obtention de profils de rotation permettrait de contraindre fortement les processus de transport de moment cinétique dans l'intérieur des étoiles (e.g., Eggenberger et al. 2019b) dont la nature reste à déterminer. On peut noter d'ailleurs l'intérêt que ces étoiles peut aussi représenter pour des contraintes sur des modèles cosmologiques (Rato et al., 2021).

Enfin, des missions, dont l'astérosismologie représente une place centrale, sont candidates à la sélection Voyage 2050 de l'ESA : Chronos (Michel et al., 2021) et Haydn (Miglio et al., 2021). La sélection d'un de ces deux missions assureraient un très important jeu de données à long terme, dont les sous-géantes représentent un type d'étoile clé.

Noll, Deheuvels et Ballot 2021

A&A 647, A187 (2021)
https://doi.org/10.1051/0004-6361/202040055
© A. Noll et al. 2021

Astronomy & Astrophysics

Probing core overshooting using subgiant asteroseismology: The case of KIC10273246

A. Noll, S. Deheuvels, and J. Ballot

IRAP, Université de Toulouse, CNRS, CNES, UPS, Toulouse, France
e-mail: anoll@irap.omp.eu

Received 3 December 2020 / Accepted 26 January 2021

ABSTRACT

Context. The size of convective cores remains uncertain, despite their substantial influence on stellar evolution, and thus on stellar ages. The seismic modeling of young subgiants can be used to obtain indirect constraints on the core structure during main sequence, thanks to the high probing potential of mixed modes.

Aims. We selected the young subgiant KIC10273246, observed by *Kepler*, based on its mixed-mode properties. We thoroughly modeled this star, with the aim of placing constraints on the size of its main-sequence convective core. A corollary goal of this study is to elaborate a modeling technique that is suitable for subgiants and can later be applied to a larger number of targets.

Methods. We first extracted the parameters of the oscillation modes of the star using the full *Kepler* data set. To overcome the challenges posed by the seismic modeling of subgiants, we propose a method that is specifically tailored to subgiants with mixed modes and uses nested optimization. We then applied this method to perform a detailed seismic modeling of KIC10273246.

Results. We obtain models that show good statistical agreements with the observations, both seismic and non-seismic. We show that including core overshooting in the models significantly improves the quality of the seismic fit, optimal models being found for $\alpha_{\rm ov} = 0.15$. Higher amounts of core overshooting strongly worsen the agreement with the observations and are thus firmly ruled out. We also find that having access to two g-dominated mixed modes in young subgiants allows us to place stronger constraints on the gradient of molecular weight in the core and on the central density.

Conclusions. This study confirms the high potential of young subgiants with mixed modes to investigate the size of main-sequence convective cores. It paves the way for a more general study including the subgiants observed with *Kepler*, TESS, and eventually PLATO.

Key words. asteroseismology – convection – stars: evolution – stars: interiors – stars: individual: KIC10273246

1. Introduction

One of the most important current open questions in stellar physics is the extent of convective cores. Several physical processes are known to extend the convective core boundaries beyond the standard Schwarzschild limit. The most frequently quoted are overshooting of ascending blobs of fluids due to their inertia, rotational mixing or semi-convection. All these processes remain poorly described by theory, and the way they interact is understood even less. They are therefore generally modeled, in stellar evolution codes, as an extension of the mixed core over a distance $d_{\rm ov}$, which is often referred to as the distance of overshoot, even though other processes can contribute as well. In practice, this can either be achieved by simply extending the fully mixed central region, or by treating overshooting as a diffusive process, following a behavior found in numerical simulations (Freytag et al. 1996). In both cases, a free parameter controlling the extent of the additional mixing is required. Observations are therefore necessary to better constrain those processes.

Initial constraints have been obtained thanks to the study of the HR diagram of clusters (see e.g., Maeder & Mermilliod 1981, VandenBerg et al. 2006), and the modeling of eclipsing binaries (Claret & Torres 2016). Most of those studies favor adding overshooting, to various extents. Typically, $d_{\rm ov}$ is around $0.2\,H_p$, where H_p is the pressure scale height. Claret & Torres (2016) found that $\alpha_{\rm ov}$, the ratio between $d_{\rm ov}$ and H_p, increases with mass for stars under $2\,M_\odot$ before reaching a plateau. However, this result is still debated (Constantino & Baraffe 2018, Claret & Torres 2019).

Over the last decade, asteroseismology allowed us to probe the structure of stellar cores. Thanks to the data of CoRoT (Baglin et al. 2006), *Kepler* (Borucki et al. 2010) and now TESS (Ricker et al. 2014) missions, we have been able to precisely measure the oscillation frequencies of numerous pulsators. The study of pressure (p) modes in low-mass main sequence (MS) stars, showed the need for core overshooting to correctly reproduce the observed frequencies (Goupil et al. 2011, Deheuvels et al. 2010, Silva Aguirre et al. 2013). Deheuvels et al. (2016), modeling several MS stars, found that $\alpha_{\rm ov}$ increases with the mass. Moreover, gravity (g) mode pulsators, like slowly-pulsating B (SPB) stars, are interesting targets to constrain the additional mixing around convective cores. Indeed, gravity modes probe the inner chemical structure of the star and allow detailed investigation of the convective core extensions. Moravveji et al. (2015, 2016), when modeling SPB stars, found that overshoot was necessary, and they favored diffusive overshooting over a simple extension of the central mixed region.

Post-main-sequence stars are another way to put constraints on the amount of overshooting. Once the central hydrogen is exhausted, nuclear energy production stops, leaving an inert

Open Access article, published by EDP Sciences, under the terms of the Creative Commons Attribution License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

radiative helium core. This core then contracts, heating the surrounding hydrogen layers of the star until shell burning starts. At that moment, the star begins its subgiant phase, and evolves on a nuclear timescale for masses below about 1.5 solar masses ($M_\odot$). For stars that are close to the terminal-age main sequence (TAMS), the structure and the evolution remain highly influenced by the properties of the MS convective core. Interestingly, the star begins to exhibit mixed modes at that moment. These modes behave like gravity modes in the internal propagation cavity and pressure modes in the outer one. Thus, they allow us to finely probe the deepest layers of the star, all the while being observable. This and the proximity of the subgiant to the TAMS make the mixed modes of young subgiants valuable data in studying the extension of convective cores.

Another particularity of mixed modes is their very fast evolution, compared to the nuclear evolution timescale of the subgiant phase. Indeed, mixed mode frequencies change dramatically over the course of a few million years. This makes their seismic modeling challenging. Recently, increasing efforts have been made to model subgiants (Huber et al. 2019; Stokholm et al. 2019; Metcalfe et al. 2020; Deheuvels et al. 2020; Li et al. 2019, 2020), driven by both their great physical interest and the sudden increase of seismic data for these stars. Most of those works focused on finding the optimal stellar parameters for one or several subgiants. So far, few studies have used subgiants as tools to test stellar physics, mainly due to the challenges of their modeling, as mentioned above.

Deheuvels & Michel (2011) successfully constrained $\alpha_{\rm ov}$ from a subgiant observed by CoRoT, HD 49385, which exhibits only one g-dominated mode and is therefore very close to the TAMS. They found that either no overshooting, or a model with $\alpha_{\rm ov} = 0.19$ were giving equally good results. In this work, we modeled a young subgiant, KIC10273246, which was observed by *Kepler* over almost 1000 days. That star exhibits two g-dominated modes, which allows us to better constrain its inner structure. We performed a thorough seismic modeling of the star, in order to precisely estimate its stellar parameters and to place constraints on the extension of its MS convective core.

In Sect. 2, we show the utility of having access to two g-dominated mixed modes in young subgiants. In Sect. 3, we present the surface observables of KIC10273246 and perform a fresh analysis of its oscillation spectrum using the full *Kepler* data set. We then describe, in Sect. 4, the modeling technique that we adopted, which is an improved version of the method developed by Deheuvels & Michel (2011). Section 5 presents our optimal stellar models and the constraints that were obtained from the extent of the MS convective core for KIC10273246. We discuss these results in Sect. 6, and Sect. 7 is dedicated to our conclusions.

2. Probing potential of mixed modes

Just after the main sequence, the oscillation spectra of solar-like pulsators show the presence of mixed modes, which are due to the coupling between the observed p-modes and low radial-order g-modes ($n_g = 1, 2, 3$, n_g being the number of nodes in the g-mode cavity). The frequency spacing between low-order g-modes is large (several times the large separation of p modes), so that only a few are in the observable frequency window during the subgiant phase. Moreover, with n_g being low, the pure g modes that couple to p modes do not follow an asymptotic behavior (as described in Shibahashi 1979, Tassoul 1980). The oscillation spectra of subgiants therefore constrast with those of more evolved stars, which typically have more g-dominated modes than p-dominated modes, and for which n_g is of the order of several tens (e.g., Mosser et al. 2012).

The frequencies of mixed modes are mostly determined by two structural features of the star. The first is the g-mode (G) cavity, which is delimited by the Brunt-Väisälä frequency N. The second is the evanescent zone between the g-mode and p-mode (P) cavities, the latter being delimited by the Lamb frequency S_l.

The G cavity affects the frequency of the g-mode that is involved in the mixed mode frequency. G-mode frequencies, in the asymptotic theory, can be approximated by

$$\nu_{n,l} \approx \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2\pi^2(n-1/2)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{N}{r} \mathrm{d}r, \tag{1}$$

l being the degree of the mode, r_1 and r_2 the turning points in the G cavity, and r the local radius of the star. In our case, n_g is low for the observed modes, so the asymptotic expression given in Eq. (1) should not apply. However, it has been shown that it can provide qualitative information about the behavior of the mixed mode frequencies (Deheuvels et al. 2010). It tells us that g-dominated modes should give strong constraints on the Brunt-Väisälä frequency in the G cavity. One can write it in the following form (e.g., Kippenhahn et al. 2012):

$$N^2 = \frac{g\delta}{H_p}\left(\nabla_{\rm ad} - \nabla + \frac{\phi}{\delta}\nabla_\mu\right), \tag{2}$$

where g is the local gravity, $\delta = -(\partial \ln\rho/\partial \ln T)_{P,\mu}$, $\phi = (\partial \ln\rho/\partial \ln\mu)_{P,T}$, $\nabla_{\rm ad} = (\partial \ln T/\partial \ln P)_{\rm ad}$, $\nabla = \partial \ln T/\partial \ln P$, and $\nabla_\mu = \partial \ln\mu/\partial \ln P$. The Brunt-Väisälä frequency consequently carries information about both the thermal (two first terms in parentheses) and compositional structure (last term) of the star.

The evanescent zone affects the coupling between the two cavities, whose strength is linked to the size of this region and the value of N inside it (e.g., Unno et al. 1989). Using a toy model, Deheuvels & Michel (2011) showed that a strong coupling induces a shift of the $l \geq 1$ p-dominated frequencies that are close to a g-mode. The p-dominated frequencies therefore provide complementary information about the internal structure of the subgiant.

In this work, we investigated whether having several g-dominated modes in the observed oscillation spectrum could offer more information regarding the extension of the MS core. From above, we know that the frequencies of the g-dominated mixed modes are related to the N/r integral between the turning points of the G cavity. Figure 1 shows the propagation diagram of a subgiant close to the TAMS, highlighting the frequencies of the first two g-dominated $l = 1$ mixed modes, that is, those that arise due to the coupling of p modes with g modes of radial orders $n_g = 1$ and 2. We denote their turning points in the G cavity as r_{i1}, r_{o1} for the mode with $n_g = 1$, and r_{i2}, r_{o2} for the mode with $n_g = 2$. The difference between the two frequencies is thus mainly related to the Brunt-Väisälä frequency value between r_{o1} and r_{o2} (as the one in the $[r_{i1}, r_{i2}]$ region is negligible). This region, as it can be seen in Fig. 1, is dominated by the μ-gradient contribution. This gradient is related to the characteristics of the hydrogen-burning shell, especially the nuclear energy generation, and thus its temperature and composition. It has been shown that a H-burning shell structure depends on the MS core features, and especially on the amount of core overshooting. One can see this in Fig. 5 of Deheuvels & Michel (2010), which exhibits two Brunt-Väisälä profiles of stars having the same evolutionary stage and position in the HR diagram, but computed with different $\alpha_{\rm ov}$. The two profiles differ mainly

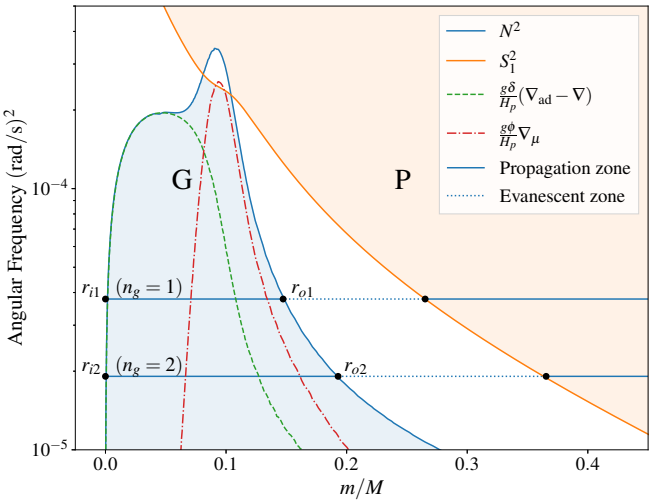

Fig. 1. Typical propagation diagram of a low-mass subgiant star. The Brunt-Väisälä frequency is represented in blue, delimiting the g-mode cavity (light blue). The Lamb frequency, in orange, delimits the p-mode cavity (light orange). Two g-dominated mixed mode angular frequencies, with $n_g = 1, 2$, are represented (solid lines in propagation zones, dotted lines in evanescent zones). The G cavity turning points are noted as r_{i1}, r_{i2} and r_{o1}, r_{o2}. Finally, the thermal and chemical contributions to the Brunt-Väisälä frequency are represented in green (dashed) and red (dot-dashed), respectively.

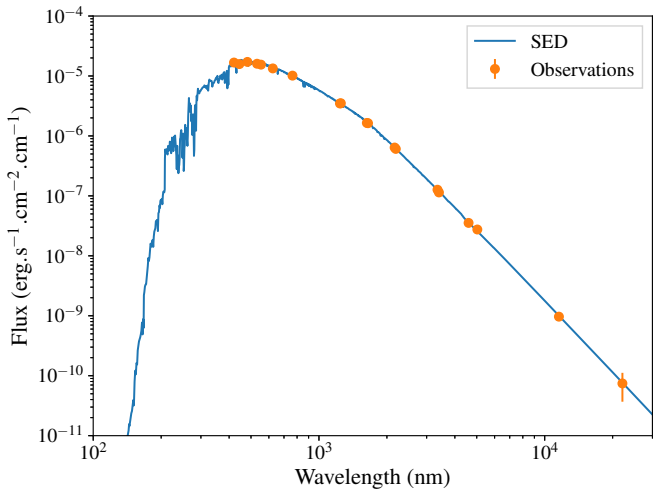

Fig. 2. Best fit of the SED using Kurucz atmosphere models. The orange points represent the observations with the corresponding error bars, and the blue curve represents the best fit SED model.

in the peak caused by the μ-gradient, and these structural differences are large enough to have a significant impact on the eigenfrequencies of the star.

For all those reasons, stars with two visible g-dominated modes are therefore expected to be interesting targets on which to place constraints on the efficiency of core overshooting. That criterion led us to the choice of KIC10273246, a subgiant with two g-dominated modes and a mass of $1.26 \pm 0.10\,M_\odot$ (Creevey et al. 2012), which places it safely in the mass range where stars are expected to have a convective core during the MS.

3. Observational properties of KIC 10273246

3.1. Surface constraints

3.1.1. Constraints from spectroscopy

Surface constraints were obtained for KIC10273246 by Creevey et al. (2012). The authors used different algorithms on the same spectra obtained with the FIES spectrograph. For our target, they found effective temperatures ($T_{\rm eff}$) ranging from 5933 to 6380 K. A weighted mean gives us a value of 6150 ± 100 K, which we have used to constrain our seismic modeling. The star was also found to have to have a sub-solar metallicity, with $[{\rm Fe/H}] = -0.13 \pm 0.1$ dex.

3.1.2. Constraints from broadband photometry

To obtain a reliable value of the luminosity of the star, we performed a spectral energy distribution (SED) fit, following the procedure of Stassun & Torres (2016). We extracted photometric values using the VizieR photometry tool. Those data come from the NUV filter from GALEX (Martin et al. 2005), the B_T and V_T filters from *Tycho*-2 (Høg et al. 2000), the J,H and K_s filters from 2MASS (Skrutskie et al. 2006), the gri filters from SDSS (Skrutskie et al. 2006), the W1-W4 filters from WISE (Wright et al. 2010), and the G magnitude from *Gaia* (Evans et al. 2018). The atmosphere model comes from the Kurucz atmosphere grid (Kurucz 2005), with the surface gravity ($\log g$) derived from the seismic relations (see Sect. 3.2.4), and the metallicity coming from spectroscopic measurements. We then fit the photometry points to the spectrum, with the $T_{\rm eff}$ and extinction A_v as free parameters. We also used the spectroscopic data from Creevey et al. (2012) and the extinction from Green et al. (2019) as priors. With a reduced χ^2 of 0.7, we found $T_{\rm eff} = 6000 \pm 33$ K, and $A_v = 0.00^{+0.037}_{-0.000}$ mag. The fit spectrum and the photometric data are represented in Fig. 2. Finally, we integrated the flux over all the wavelengths and used the distance from *Gaia* to obtain the luminosity of the star. According to Zinn et al. (2019), a parallax bias exists in the *Kepler* field, which depends on the G-band magnitude and the pseudo-color $\nu_{\rm eff}$ (effective wavenumber of the photon flux distribution in the *Gaia* band) of the star. We found $\varpi - \varpi_{Gaia} = 39.15 \pm 9.46\,\mu$as, which gives $L = 5.74 \pm 0.17\,L_\odot$. This result is, as expected, lower than the *Gaia* archive value ($5.92 \pm 0.13\,L_\odot$) due to the parallax offset.

3.2. Seismic constraints

3.2.1. Preparation of *Kepler* light curve

The subgiant KIC10273246 was observed with *Kepler* between quarters Q0 and Q11 (total duration of 978 days) in short cadence (58.85 s). An early seismic analysis of the target was performed by Campante et al. (2011) using the first four quarters of *Kepler* observations (325 days of data). They estimated the frequencies of oscillation modes of degrees $l = 0, 1$, and 2 over eight overtones. We revisited this analysis using the complete *Kepler* data set. The light curve of the star was processed using the *Kepler* pipeline developed by Jenkins et al. (2010). Corrections from outliers, occasional drifts and jumps were performed following the method of García et al. (2011). The power density spectrum (PSD) was then obtained by applying the Lomb-Scargle periodogram (Lomb 1976, Scargle 1982).

The PSD is shown in the shape of an échelle diagram in Fig. 3. We recall that the échelle diagram is built by dividing the PSD in consecutive chunks with a length corresponding

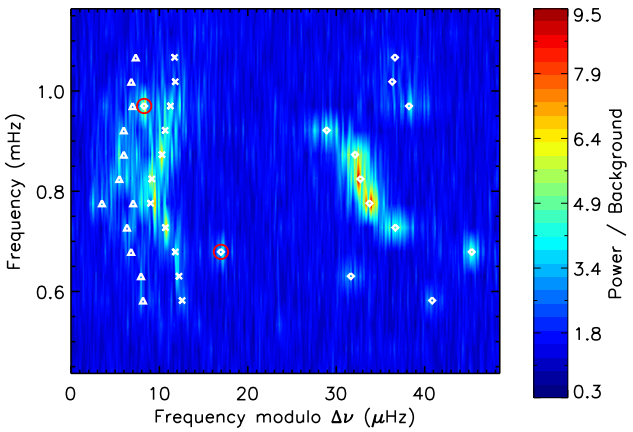

Fig. 3. Échelle diagram of KIC10273246, folded with $\Delta\nu = 48.2\,\mu$Hz. For clarity, the spectrum was smoothed over a 0.2-μHz boxcar. The white symbols indicate the frequencies that have been extracted for modes of degree $l = 0$ (crosses), $l = 1$ (diamonds), and $l = 2$ (triangles) in Sect. 3.2.2. The two $l = 1$ g-dominated mixed modes are circled in red.

to the large separation of acoustic modes $\Delta\nu$, and piling them up. Here, we used the estimate of $\Delta\nu = 48.2\,\mu$Hz obtained by Campante et al. (2011). The main interest of échelle diagrams is that acoustic modes of the same degree align in nearly straight ridges, which eases mode identification. The neighboring $l = 0$ and $l = 2$ ridges are readily identified on the left part of the échelle diagram (modes indicated by crosses and triangles, respectively, in Fig. 3).

The ridge of $l = 1$ modes (indicated by diamonds in Fig. 3) deviates from the nearly-vertical line that is expected for purely acoustic modes. This behavior is known to arise for dipolar modes in the presence of avoided crossings between low-order g modes and p modes in subgiants. Each avoided crossing is characterized by the presence of an additional mode, which lies away from the ridge of theoretical purely acoustic $l = 1$ modes (which would be a nearly vertical line at an abscissa of about 35 μHz in Fig. 3). This mode is most strongly trapped in the core and is thus g-dominated. The neighboring $l = 1$ modes are p-dominated, but their frequencies are nevertheless affected by the presence of the g-dominated mode. The modes with frequencies larger than the g-dominated mode are shifted to higher frequencies (to the right in the échelle diagram) and those with frequencies below the g-dominated mode are shifted to lower frequencies (to the left in the échelle diagram). These features are clearly visible in Fig. 3, corresponding to two $l = 1$ avoided crossings. The $l = 1$ g-dominated modes associated to these avoided crossings are circled in red in Fig. 3.

3.2.2. Extraction of oscillation mode parameters

To extract the parameters of the oscillation modes, we followed the method of Appourchaux et al. (2008). Here, we briefly recall the main steps of the procedure and refer the reader to that paper for more details.

Prior to fitting the individual oscillation modes, we modeled the background of the PSD. The contribution from granulation was modeled by two Harvey-like profiles, following the prescription of Karoff et al. (2013), and we added a white noise component to account for photon noise. The overall contribution from the oscillations was modeled as a Gaussian function. We fit this model to the PSD using maximum-likelihood estimation (MLE). The central frequency of the Gaussian function gives an estimate of the frequency of maximum power of the oscillations $\nu_{\max}$. To determine the error on this quantity, we subdivided the *Kepler* light curve in ten chunks of equal duration, and fit the background model on the PSD calculated with these time series. The error on $\nu_{\max}$ was taken as the standard deviation of the measurements of this quantity for each chunk. We thus obtained $\nu_{\max} = 843 \pm 20\,\mu$Hz. The PSD was then divided by the optimal background model.

We then performed a fit of the oscillation modes, which were modeled as Lorentzian functions to account for their finite lifetimes. Each mode profile of degree l, radial order n, and azimuthal order m was characterized by its central frequency $\nu_{n,l,m}$, its height $H_{n,l,m}$ and its line width $\Gamma_{n,l,m}$. Since dipolar modes have a mixed character, it cannot be assumed that they share similar heights and line widths with the neighboring radial modes, as is often done for main sequence solar-like pulsators. Most quadrupolar modes are expected to be p-dominated, owing to the weak coupling between the P and G cavities for these modes. We therefore assumed that the $l = 2$ modes have the same heights and widths as their closest $l = 0$ modes, with the exception of one g-dominated $l = 2$ mode, which is discussed below and in Sect. 3.2.3. Non-radial modes are split into multiplets by rotation. Owing to the slow rotation of subgiants, the effects of rotation on the mode frequencies can be found by applying a first-order perturbation analysis. The components of a rotational multiplet are thus expected to be equally spaced by the rotational splittings $\delta\nu_{n,l}$. We also assumed that they share similar line widths, and that their height ratios depend only on the inclination angle i of the star following the expressions given by Gizon & Solanki (2003). In principle, mixed modes can have different rotational splittings, because they probe the rotation at different depths in the star. This has been used to probe the internal rotation of subgiants (e.g., Deheuvels et al. 2014).

To test whether individual rotational splittings can be measured in KIC10273246, we first performed local fits of the non-radial modes. Following the method described by Deheuvels et al. (2015), we fit each mode using two different models: one under the H_0 hypothesis (no rotation, so that each mode is modeled as a single Lorentzian), and one under the H_1 hypothesis (rotation is considered and each mode is modeled as a set of $2l + 1$ Lorentzians separated by the rotational splitting). It is clear that hypothesis H_1 necessarily provides better fits to the data than hypothesis H_0 since it involves two additional free parameters (inclination angle and rotational splitting). The significance of hypothesis H_1 can be tested using the likelihoods ℓ_0 and ℓ_1 of the best fits obtained under the H_0 and H_1 hypotheses, respectively. As shown by Wilks (1938), the quantity $\Delta\Lambda \equiv 2(\ln \ell_1 - \ln \ell_0)$ follows the distribution of a χ^2 with Δn degrees of freedom, where Δn is the difference between the number of free parameters involved in hypotheses H_1 and H_0 (here, $\Delta n = 2$)[1]. For each multiplet, we thus obtained a value of $\Delta\Lambda$. The false-alarm probability was then given by the p-value $p = P(\chi^2(2\,\mathrm{d.o.f.}) \geqslant \Delta\Lambda)$, which corresponds to the probability that a mode under the null hypothesis can produce such a high value of $\Delta\Lambda$.

For dipolar modes, the lowest p-value that we found is 0.08, which is too high to consider the measurement as significant. This means that we cannot reliably extract individual rotational splittings for dipolar modes in this star. The most likely

[1] We note that the definition of $\Delta\Lambda$ in Sect. 3.1 of Deheuvels et al. (2015) contains an erroneous minus sign. This is just a typo and the results presented in the paper consider the correct expression for $\Delta\Lambda$.

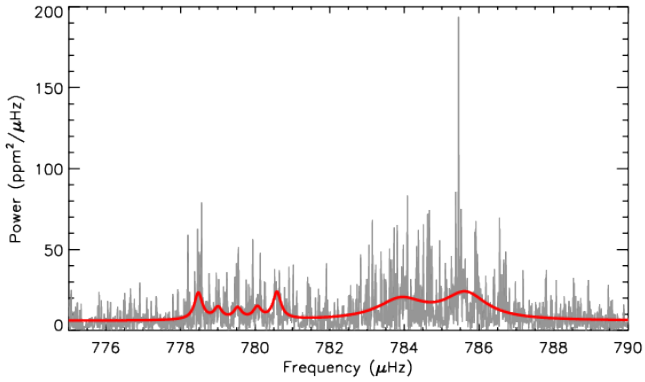

Fig. 4. Oscillation spectrum of KIC102773246 in the vicinity of a quadrupolar mode that was found to be significantly split by rotation (see Sect. 3.2.2). The thick red curve corresponds to our best-fit model of the spectrum. Two quadrupolar mixed modes are visible (around 779.4 μHz and 783.9 μHz) and one radial mode (around 785.6 μHz).

explanation is that the modes have large line widths compared to the rotational splitting. For quadrupolar modes, only one mode (the one with a frequency around 779.4 μHz) was found to have a low p-value, of about 4×10^{-5}, which shows a very high significance level. A rotational splitting of $0.53 \pm 0.03\,\mu$Hz was obtained for this mode (see Fig. 4). This mode is in fact a g-dominated mixed mode, as we show in Sect. 3.2.3.

We then performed a global fit of the modes (all the modes are fit simultaneously). Since individual splittings cannot be measured, we assumed a common rotational splitting for all $l = 1$ and $l = 2$ modes (except for the aforementioned $l = 2$ mode around 779.4 μHz). Since most non-radial modes are p-dominated, we expect the common rotational splitting to essentially measure the rotation in the envelope. The best fit corresponds to a rotational splitting of $\delta\nu = 0.45 \pm 0.02\,\mu$Hz for non-radial modes and an inclination angle of $i = 55 \pm 6°$. As was done for local fits, we also performed an additional fit of the modes without including the effects of rotation (null hypothesis). We could therefore estimate the p-value corresponding to the measurement of a mean rotational splitting. We found $p \sim 10^{-4}$, which indicates a high level of significance. Our results are compatible with the estimates of Campante et al. (2011), who had found $i \gtrsim 20°$ for this star, and optimal values of the rotational splitting slightly below 0.5 μHz.

The best-fit parameters for the oscillation modes (frequencies, heights, and line widths) are given in Table A.1. The uncertainties of the fit dipolar mode frequencies range from 0.08 to 0.50 μHz. The measured mode frequencies are in quite good agreement with the ones found by Campante et al. (2011). Discrepancies at the level of 3σ were found for only two modes (the dipole mode around 1055 μHz and the quadrupole mode around 880 μHz). Using the complete *Kepler* data set enabled us to detect $l = 0$ and $l = 2$ modes over three additional radial overtones compared to Campante et al. (2011). Our results are also in very good agreement with the recent measurements of mode frequencies for KIC10273246 by Li et al. (2020) using the complete *Kepler* data set (agreement at the level of 2σ or better for all oscillation modes).

3.2.3. Detection of an $l = 2$ mixed mode

We mentioned above that the $l = 2$ mode with a frequency of about 779.4 μHz is the only mode for which an individual rotational splitting could be measured. This mode also has other distinctive features. It is separated from the closest radial mode by $6.1 \pm 0.2\,\mu$Hz. By comparison, for the other radial orders, the average separation between the $l = 2$ mode and the neighboring $l = 0$ mode is 4.4 μHz, with a standard deviation of 0.4 μHz. This suggests that this mode might be an $l = 2$ mixed mode, the frequency of which is modified by the coupling between the p- and g-mode cavities. This hypothesis is strengthened by the fact that it has a short line width ($0.26 \pm 0.08\,\mu$Hz) compared to the width of the neighboring $l = 2$ modes (between 1.7 and 2.4 μHz). Indeed, if the mode under study is a g-dominated mixed mode, it should have a higher inertia than p-dominated $l = 2$ modes, and therefore a shorter line width. Figure 4 shows the profile of the radial mode that is closest to the $l = 2$ mode under study. There appears to be an additional mode in the left wing of the radial mode, at a frequency of about 783.9 μHz. To determine the significance of this mode, we performed local fits assuming either its presence (H_1 hypothesis) or absence (H_0 hypothesis). We found a p-value of 0.01, indicating a reasonable significance level. This also supports the identification of the $l = 2$ mode at 779.4 μHz as a mixed mode. In this case, the additional mode at 783.9 μHz would also be an $l = 2$ mixed mode undergoing an avoided crossing with its close neighbor. As is shown in Sect. 5, the best-fit models for KIC10273246 do show a pair of mixed modes in the vicinity of these two modes, which confirms our identification.

3.2.4. First estimates of stellar parameters using seismic scaling relations

To obtain first estimates of the global stellar parameters of the star, we used seismic scaling relations, which relate the global seismic parameters $\Delta\nu$ and $\nu_{\max}$ to stellar properties such as the mass, radius and surface gravity (Brown et al. 1991). These relations could be derived because $\nu_{\max}$ scales to an equally good approximation as the acoustic cut-off frequency (Brown et al. 1991; Stello et al. 2008; Belkacem et al. 2011).

To estimate the asymptotic large separation of acoustic modes, we followed the prescription of Mosser et al. (2013). We fit an expression of the type

$$\nu_{n,0} = \left[n + \frac{\alpha}{2}\,(n - n_{\max})^2 + \varepsilon_p \right] \Delta\nu_{\rm obs} \tag{3}$$

to the observed radial modes, where $\Delta\nu_{\rm obs}$ is the observed large separation around $\nu_{\max}$, α measures the curvature corresponding the to the second-order term in the asymptotic development, ε_p is an offset, and $n_{\max} = \nu_{\max}/\Delta\nu_{\rm obs}$. We thus obtained $\Delta\nu_{\rm obs} = 48.47 \pm 0.02\,\mu$Hz, which translates into an asymptotic large separation of $\Delta\nu_{\rm as} = 50.63 \pm 0.02\,\mu$Hz, following Mosser et al. (2013).

Using our estimates of $\Delta\nu_{\rm as}$, $\nu_{\max}$ from Sect. 3.2.2, and $T_{\rm eff}$ from Sect. 3.1, we could apply seismic scaling relations to derive preliminary estimates of the star's mass, radius, and surface gravity. We obtained $M = 1.24 \pm 0.12\,M_\odot$, $R = 2.10 \pm 0.07\,R_\odot$, and $\log g = 3.88 \pm 0.03$.

4. Seismic modeling method

4.1. Physics of the models

We used MESA v10108 (Paxton et al. 2015) evolution models, with OPAL equation of states and opacity tables (Rogers et al. 1996, Iglesias & Rogers 1996), with the solar mixture from Asplund et al. (2009). The models were computed with an

Eddington-gray atmosphere. The convection regions were treated using the standard mixing length theory (MLT) as prescribed in Cox & Giuli (1968), with a free parameter $\alpha_{\rm conv}$ corresponding to the ratio between the mixing length and the pressure scale height. Microscopic diffusion was taken into account, unless otherwise specified, using the Burgers formalism (Burgers 1969) and diffusion coefficients from Stanton & Murillo (2016). However, radiative accelerations have not been included in the computed models, as the increase in computational time could not be afforded in this study. The impact of those processes are discussed in Sect. 6.2.

As Gabriel et al. (2014) stated, for stars that have a growing convective core, it is necessary to use the Ledoux criterion to determine the radius of the convective core $R_{\rm cc}$. This way, we avoid the creation of unphysical convective zones outside the core in strongly chemically stratified regions, which may have an impact on the composition profile of the star and thus on its evolution. Moreover, we used the predictive mixing scheme (Paxton et al. 2018).

Core overshooting was modeled as a step extension of the convective core, over a distance

$$d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} \min\left(H_p, R_{\rm cc}/\alpha_{\rm conv}\right), \tag{4}$$

where $d_{\rm ov}$ is the distance of instant mixing overshooting, H_p the pressure scale height, and $\alpha_{\rm ov}$ a free parameter quantifying the phenomenon. Equation (4) replaces the traditional expression $d_{\rm ov} = \alpha_{\rm ov} H_p$ in order to prevent $d_{\rm ov}$ from becoming unphysically large when the core is small ($H_p \to \infty$ when $r \to 0$). It is important to note that this definition varies from one evolution code to another (see, e.g., Eq. (1) of Deheuvels & Michel 2011 for CESAM2K). Low-mass stars have small convective cores, therefore those differences must be kept in mind when comparing models coming from different codes. Additionally, the impact on our results of using a diffusive overshooting, as proposed by Freytag et al. (1996), is discussed in Sect. 6.1.

The adiabatic oscillations of the models were computed using ADIPLS (Christensen-Dalsgaard 2008), and the surface effects were corrected for using the cubic term of the prescription of Ball & Gizon (2014).

4.2. Why modeling subgiants is challenging

The frequencies of g-dominated mixed modes evolve over a very short time, with a non-linear change of several μHz per million years, which is much larger than the usual uncertainties coming from *Kepler* data. As this timescale is several orders of magnitude shorter than the typical nuclear evolution time of low-mass subgiants, reproducing the mixed modes with a traditional grid technique requires extremely small steps in mass and age. This makes this method prohibitive when the number of free parameters is large, as is required to test the model physics. Interpolation in age is possible (Li et al. 2020), but somewhat difficult for $l = 2$ g-dominated modes, which we observed in KIC10273246. Interpolation across tracks (as used e.g., in AIMS, Rendle et al. 2019) could mitigate the need for extremely fine steps in mass, but needs to be tested for subgiants, especially regarding the extreme sensitivity of the g-dominated frequencies to the masses of the models. Additionally, an "on-the-fly" optimization technique may perform badly due to the highly non-linear behavior of the mixed modes, especially during the computation of the derivatives in the case of a gradient-descent kind of algorithm.

To overcome those difficulties, a new approach is necessary. We thus developed a nested optimization, where we optimize the physical parameters of models (e.g., metallicity, initial helium abundance etc.) that have been optimized in mass and age beforehand. This way, we can handle those two sensitive parameters using a dedicated and specific procedure, separately from the other ones for which a more traditional technique is possible. This modeling method originates from Deheuvels & Michel (2011) and has been adapted to make it more robust. In the following, we recall the basic principles of this method and highlight the differences with the one used in the present study.

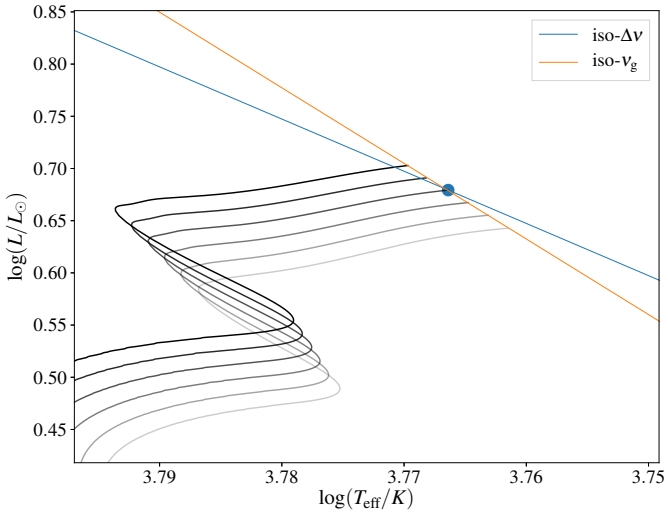

Fig. 5. HR-diagram representing the evolution tracks of stellar models with masses varying from 1.2 $M_\odot$ (lightest gray) to 1.3 $M_\odot$ (darkest gray) and otherwise identical physics. Each evolution is stopped when ν_g is correctly reproduced.

4.3. Optimization in mass and age

In that part of the optimization process, we compute models with only two free parameters, the mass and the age of the star, the rest being fixed. The optimization of those two parameters can be made easier thanks to the fact that, if all the other physical parameters (such as metallicity, mixing-length parameter...) are fixed, reproducing only $\Delta\nu$ and the frequency ν_g of a g-mode is enough to precisely constrain the mass and the age.

A physical justification of that approach can be found in Deheuvels & Michel (2011). We remind the reader of it here using a HR-diagram represented in Fig. 5. It shows the iso-$\Delta\nu$ line, as $L \propto T_{\rm eff}^5$ for models with the same large separation, and the iso-ν_g line, computed from stellar evolution models. The two lines meet at a unique point, that can be reached by tuning only the mass (i.e., choosing the "right" evolution path) and age (i.e., stopping at the right moment on that path). In concrete terms, our first step is, at a given mass, to find the age that correctly reproduces the ν_g frequency.

As we only see mixed modes and not pure g-modes, we cannot directly measure ν_g. A possible solution would be to choose a g-dominated mode (i.e., a non-radial mode far from its ridge) frequency. Unfortunately, such a frequency does not evolve monotonously with age, as can be seen in the upper panel of Fig. 6. We thus preferred to look at the distance between that g-dominated mode and its closest radial mode, which we call $\delta\nu$.

As we can see in the top panel of Fig. 6, this value always decreases with age, but it also keeps the interesting properties of the mixed modes as it evolves very quickly during an avoided crossing, allowing us to tightly constrain the age. This

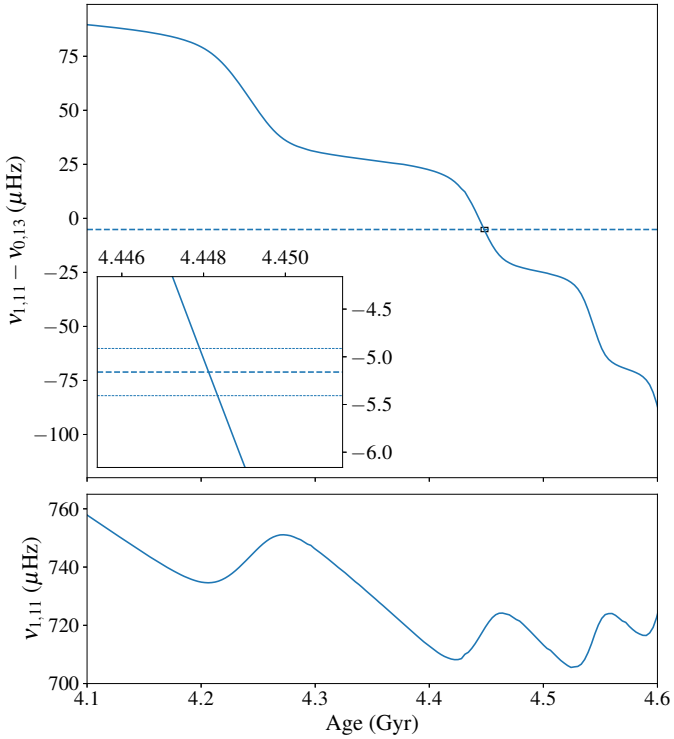

Fig. 6. Evolution of $\delta\nu$ (*top panel*) and $\nu_{1,11}$ (*bottom panel*) with age for a 1.3 $M_\odot$ star, after the main sequence. Here, like in our modeling of KIC10273246, $\delta\nu$ is defined as $\nu_{1,11} - \nu_{0,13}$, and the observed value is represented by the dotted line. The plot has been strongly magnified in order to see the 1-σ uncertainties from the data.

step would be equivalent to following a unique evolution path in Fig. 5 and stopping it when it crosses the iso-ν_g line.

We then optimize on those "good-age" models in order to correctly reproduce the large separation. In practice, to do this we minimize the χ^2 of only the radial modes, which we define as

$$\chi^2_{\rm rad} = \sum_n \frac{\left(\nu^{\rm mod}_{0,n} - \nu^{\rm obs}_{0,n}\right)^2}{\sigma^2_{0,n}}. \quad (5)$$

We do not take into account the non-radial modes at this stage to eliminate the complexity of behavior of the mixed modes. This approach differs from the one followed by Deheuvels & Michel (2011), who at this stage searched for models that minimized the difference between the observed average large separation and the one coming from the models. By using all the radial modes instead here, we found that the optimization process is more robust regarding the correction of near-surface effects. It may be observed that the behavior of $\Delta\nu$ (and, in turn, of the radial frequencies) is close to linear when varying the mass. Then, a simple Newton-type algorithm (such as a Levenberg-Marquard algorithm) is enough to quickly find the optimal mass. This step would then be equivalent to the right evolution path that leads to the meeting points of the two iso-lines on Fig. 5.

Figure 7 shows the échelle diagram of a model that we can obtain after that first step, with arbitrary physical parameters: metallicity [Fe/H] = −0.2 dex, mixing-length parameter $\alpha_{\rm conv} = 1.5$, initial helium abundance $Y_0 = 0.28$. We can see that the radial modes and $\delta\nu = \nu_{1,11} - \nu_{0,13}$ (the proxy for ν_g) are, by construction, correctly reproduced. However, the other frequencies are far from the observed ones. Especially, the g-dominated

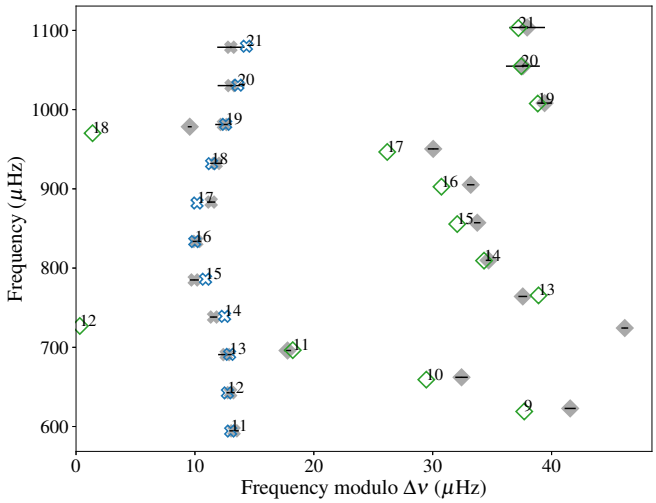

Fig. 7. Échelle diagram of a model optimized in mass and age (open symbols) and of the observed frequencies (full, with their 3-σ error bars). The radial and dipolar modes are represented by crosses and diamonds, respectively, with their radial order indicated.

mode $\nu_{1,18}$ is about 10 μHz away from the observations. Thus, to find a better matching model, we adjust the other parameters.

4.4. Optimizing the other parameters

Now that we have a method to correctly find the mass and the age of a star at a given physics, we must find the other parameters of the stars, this time taking into account all the observational constraints. Thus, we define a new χ^2 as

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_{\rm obs}} \frac{\left(x_i^{\rm obs} - x_i^{\rm mod}\right)^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{N_{\rm obs}} \Delta_i, \quad (6)$$

where $N_{\rm obs}$ is the total number of observational constraints, both seismic and non-seismic, $x_i^{\rm obs}$, $x_i^{\rm mod}$ the values of those observed constraints or their computed equivalent, and σ_i their respective uncertainties. We also introduced the quantities $\Delta_i \equiv (x_i^{\rm obs} - x_i^{\rm mod})^2/\sigma_i^2$, which indicate the contributions of every observable to the χ^2, to be used later.

As those parameters have a lower impact on the frequencies than the mass and age, it is now possible to use more traditional approaches. One possibility is to compute grids of models, where each model of the grid is optimized in mass and age. Another option is to perform an optimization using an iterative method, where again each iteration consists of an optimization of the mass and age. To model KIC10273246, we opted for a hybrid method, which is described in the following section.

4.5. Fitting procedure adopted for KIC10273246

For the modeling of KIC10273246, we left the initial metallicity $[Z/X]_0$, the mixing-length parameter $\alpha_{\rm conv}$, the initial helium abundance Y_0, and, of course, the overshoot parameter $\alpha_{\rm ov}$ as free parameters. At first, to explore the global behavior of the χ^2, we computed a very loose grid ([Fe/H] between −0.2 and 0.2, step 0.1; Y_0 between 0.24 and 0.28, step 0.02; $\alpha_{\rm conv}$ between 1.5 and 2.1, step 0.2 and $\alpha_{\rm ov}$ between 0.0 and 0.2, step 0.05). We recall that each model of this grid is optimized in mass and age as explained in Sect. 4.3. The purpose of this loose grid was to investigate whether double solutions or local minima exist. No

Table 1. Characteristics of the best models, for every value of α_{ov}.

α_{ov}	Age (Gyr)	$M/M_\odot$	$R/R_\odot$	T_{eff} (K)	$L/L_\odot$	$[Z/X]_0$ (dex)	α_{conv}	Y_0	χ^2
Uncert.	0.25	0.030	0.021	83	0.20	0.010	0.089	0.020	–
0.00	4.08	1.21	2.11	6109	5.60	0.005	1.77	0.29	315
0.05	3.89	1.20	2.10	6187	5.85	−0.034	1.81	0.29	255
0.10	4.03	1.22	2.11	6134	5.72	−0.030	1.74	0.28	201
0.15	3.88	1.22	2.11	6192	5.89	−0.073	1.74	0.28	127
0.20	3.96	1.27	2.12	6226	6.11	−0.155	1.64	0.24	446
0.25	3.26	1.31	2.13	6537	7.50	−0.184	2.06	0.26	3020

such features have been found. Moreover, those grids allowed us to identify the region of the best parameters.

We thereafter refined those parameters. As mentioned in Sect. 4.4, the optimization of $[Z/X]$, α_{conv}, Y_0, α_{ov} can be performed either through a grid approach or an iterative procedure. We therefore conducted several tests, using stellar models as mock observations, to determine which method is preferable. We found the best robustness when following a hybrid approach: for given values of Y_0 (0.26 through 0.31, step 0.01) and α_{ov} (0 through 0.25, step 0.05), we conducted iterative optimizations with the Levenberg-Marquardt algorithm to find optimal values of [Fe/H] and α_{conv}. This method differs from the one used in Deheuvels & Michel (2011) where a single grid was used for all the free parameters.

Among those models, we considered only those that were compatible with the observational estimates of the chemical enrichment law $\Delta Y_0/\Delta Z_0$. Typical values quoted for $\Delta Y_0/\Delta Z_0$ range from 1.4 to 4 (e.g., Chiappini et al. 2002, Balser 2006, Casagrande et al. 2006). We consequently had a conservative approach and took into account all models with $\Delta Y_0/\Delta Z_0 < 5$.

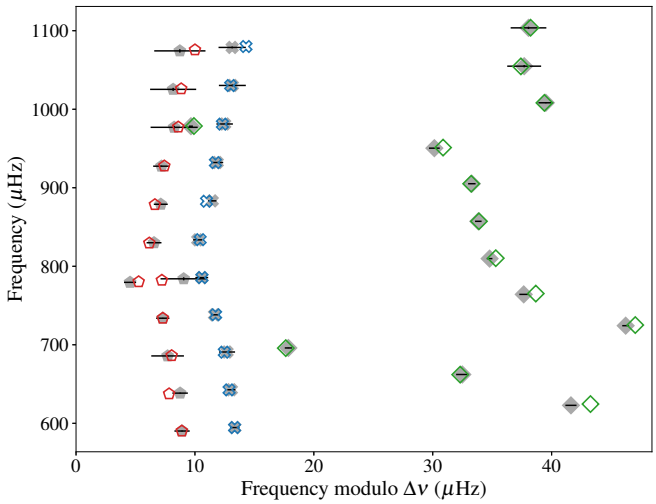

Fig. 8. Échelle diagram of the best model, with $\alpha_{ov} = 0.15$. Symbols and colors are identical to those in Fig. 7.

5. Results

In this section, we describe the general characteristics of the best models, before commenting the constraints on α_{ov}. We finally investigate at the internal structures of the best models and the constraints brought by the mixed modes.

5.1. General characteristics of the best models

Following the method described in Sect. 4.5, we obtained optimal models for each value of α_{ov}, whose characteristics are in Table 1. The best model, with $\alpha_{ov} = 0.15$, has a reduced χ^2 of 3.2. The échelle diagram of this model is represented in Fig. 8. Also, surface observables are consistent with the ones found in the literature, or with the SED fitting previously described: we find a less than 1-σ difference for the effective temperature T_{eff}, the metallicity [Fe/H], and the luminosity L. We found a radius and a mass that are consistent with the seismic scaling relations as well. We can note that, as expected from the mass-based prediction, all good models had a convective core during the MS. This supports our choice of using this star to constrain α_{ov}.

We note that our best-fit models are significantly less massive and are older than those of Li et al. (2020), who also performed a seismic modeling of KIC20173246 and found $M = 1.49 \pm 0.08\,M_\odot$ and an age of 2.84±0.60 Gyr. These discrepancies could be partially explained by the different assumptions made on the input physics. For instance, Li et al. (2020) considered a solar-calibrated mixing length parameter, while we left this parameter free in our study. Also, contrary to us, Li et al. (2020) neglected element diffusion and adopted the mixture of Grevesse & Sauval (1998). Finally, we stress that the agreement with the observed dipole mode frequencies, in particular for the g-dominated mode $\nu_{1,18}$, is significantly better in the present study than it is for the best-fit models of Li et al. (2020) (compare Fig. 10 of Li et al. 2020 to Fig. 8 of the present paper). These mismatches between models and observations for dipole modes are acknowledged by Li et al. (2020), and the authors attribute them to an imprecise modeling of the core structure.

For each combination of (α_{ov}, Y_0), our minimization using the LM algorithm can be used to derive uncertainties in the stellar parameters. The error bars in the free parameters of the fit ([Fe/H] and α_{conv}) are obtained as the diagonal coefficients of the inverse of the Hessian matrix. The uncertainties on the other parameters can then be obtained using Eq. (10) of Deheuvels et al. (2016). We thus obtain very small error bars, of the order of 0.007 for [Fe/H] and 0.002 for α_{conv}, which translates into uncertainties of approximately 0.004 $M_\odot$ for the stellar mass and 0.04 Gyr for the age. This means that for a given combination of (α_{ov}, Y_0), the available observables provide very strong constraints on the stellar parameters. By comparison, we find that optimal models with different Y_0 can yield similar agreement with the observations (statistically equivalent χ^2) but have quite different stellar parameters. This degeneracy of stellar models with respect to Y_0 is addressed in more detail in Sect. 6.3. It thus seems that the uncertainties in the stellar parameters are dominated by the model degeneracy in Y_0. We thus used the optimal models with different Y_0 to estimate uncertainties in the stellar parameters. For a given α_{ov}, we fit a second order

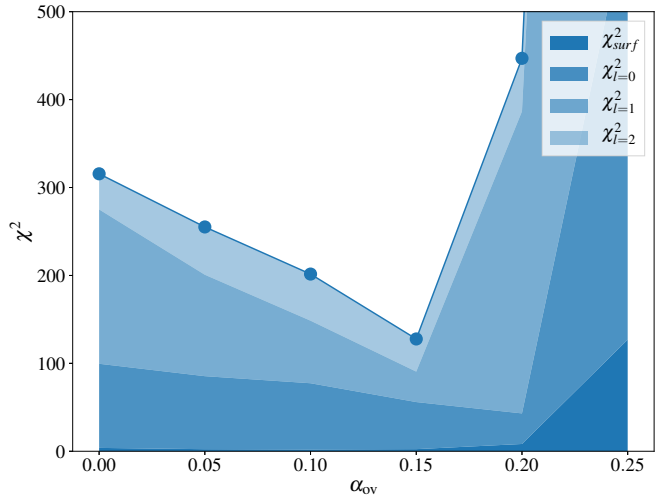

Fig. 9. χ^2 of the best model for every value of overshooting. The colored regions indicate the contributions to the χ^2 (i.e., the sum of Δ_i) of the surface observables ($T_{\rm eff}$, L and [Fe/H]) and the frequencies according to their degrees.

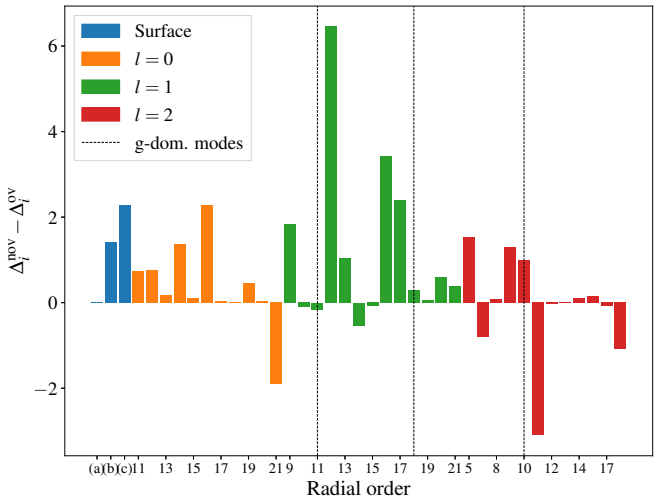

Fig. 10. Difference of the χ^2 contributions of the different observables, between $\alpha_{ov} = 0.0$ and 0.15 models. The two dipolar g-dominated modes are represented by dotted vertical lines. (a), (b), and (c) are $T_{\rm eff}$, L, and [Fe/H], respectively.

polynomial to the χ^2 curve and retrieved the interval of values corresponding to $\chi^2_{\rm min} + 1$. This gave us the 1-σ uncertainties, which are reported in Table 1.

5.2. Constraints on core overshooting

Figure 9 shows the variation in the χ^2 of the optimal models with α_{ov}. We can see that adding overshooting allows us to reproduce the observed frequencies significantly better, with the χ^2 of the models without overshoot and with $\alpha_{ov} = 0.15$ being 315 and 127, respectively.

To better understand which frequencies allow us to favor models with overshoot, we investigated the contributions of the different observables to the χ^2 (Δ_i in Eq. (6)). We denote the χ^2 contributions of the observables coming from the optimal models without overshoot as $\Delta_i^{\rm nov}$ and the equivalent from models with $\alpha_{ov} = 0.15$ as $\Delta_i^{\rm ov}$. Figure 10 represents the differences $\Delta_i^{\rm nov} - \Delta_i^{\rm ov}$, positive values meaning that the observable is better reproduced by the $\alpha_{ov} = 0.15$ model. As expected, we can see that the main χ^2 difference is due to the dipolar modes, which have a mixed behavior. However, we observe that the g-dominated modes (indicated by the dotted vertical lines) hardly contribute to distinguishing the models with and without overshooting. Both types of model fit the g-dominated frequencies well. The main contributors to the χ^2 differences are in fact the $l = 1$ p-dominated modes in the neighborhood of the g-dominated modes. As explained in Sect. 2, the frequencies of these modes are mainly influenced by the coupling between the P and the G cavities. The intensity of that coupling thus accounts for the main part of the differences between the models. We note that all those models correctly reproduce $\nu_{1,18}$, as the high sensitivity of this g-dominated mode strongly constrains the region of parameters of the models with the smallest χ^2. The major role played by the dipolar modes in the constraints on α_{ov} is also illustrated in Fig. 9, where the colored regions indicate the contributions to the χ^2 of the surface observables and modes depending on their degree.

Moreover, Fig. 9 indicates that the contribution to the χ^2 of the $l = 2$ modes hardly changes with α_{ov}. This was partly expected, because their evanescent zone is larger than that of the dipole modes, making the coupling between the G and P cavities weaker. Most of the detectable modes are therefore very strongly p-dominated and do not constrain the deep structure of the star, hence α_{ov}. Yet, one g-dominated $l = 2$ mode was detected ($\nu_{2,10}$, see Sect. 3.2.3). It is interesting to see that, in a similar way to the previous paragraph, its frequency is equally well reproduced by models with and without overshooting. One can see this in Fig. 10, where $\Delta_i^{\rm nov} - \Delta_i^{\rm ov}$ of that mode is less than 1-σ. On the other hand, the $(2, 11)$ mode, whose frequency is close enough to $\nu_{2,10}$ to be influenced by the coupling, varies substantially with α_{ov}. Figure 10 shows a 3-σ difference, despite the high 0.65 μHz observational uncertainty, confirming the key role of the coupling in the constraint on α_{ov}. Interestingly, however, while the $\alpha_{ov} = 0.15$ model better reproduces the dipolar modes, the $(2, 11)$ mode is better fit in the model without overshooting. Nevertheless, its large observational uncertainty prevents it from being too constraining.

Finally, we notice that adding a larger amount of overshooting ($\alpha_{ov} > 0.15$) strongly worsens the quality of the fit, placing a strong maximum limit on the value of α_{ov}. To better understand this behavior, we investigate the seismic constraints on the internal structure of the models in the next section.

5.3. Constraints on the internal structure from mixed modes

5.3.1. Constraints on central density

A tight link is expected between the g-dominated frequencies and the central density ρ_c. This comes from the relation between the g-mode frequencies and the Brunt-Väisälä frequency, which approximately scales as ρ_c (see Eq. (15) from Deheuvels & Michel 2011). To verify this, we investigated the constraints placed on ρ_c by the frequency of a g-dominated dipolar mode. For this purpose, we considered the values of ρ_c in the models computed in the loose grids defined in Sect. 4.5, in which models are optimized in mass and age in order to reproduce $\Delta\nu$ and the frequency of a g-dominated mode (here $\nu_{1,11}$, as described in Sect. 4.3). We observed that, despite the wide range of parameters considered, the standard deviation of ρ_c among those models is as low as 32.4 g cm^{-3}, which represents around 1% of the mean central density $\widetilde{\rho_c} = 2100$ g cm^{-3}. This standard

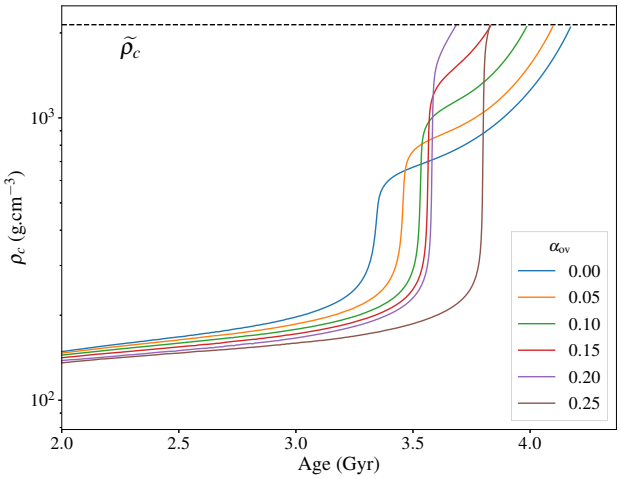

Fig. 11. Evolution of ρ_c with age, for models with different α_{ov} that have been optimized in mass and age in order to reproduce $\Delta\nu$ and ν_g.

deviation even decreases to 10 g cm^{-3} if we only keep the 200 best models, illustrating the tight relation between ρ_c and the frequency of a g-dominated mixed mode.

This plays a role in the increase of χ^2 for $\alpha_{ov} > 0.15$. To illustrate this point, we computed models with the same values of $[Z/X]$, Y_0, and α_{conv}, but with different values of α_{ov}. Each of these models was optimized in mass and age, as described above. Figure 11 shows the evolution of ρ_c with age for those models. One can see that they all reach approximately the same value of central density, $\widetilde{\rho_c}$, in accordance with the previous paragraph. Moreover, the intensity of the ρ_c jump that is due to the post-MS core contraction increases with α_{ov}. We can explain this by the fact that for bigger cores, the layers where hydrogen remains are more distant from the center. They are colder and require a stronger core contraction, hence a stronger jump in ρ_c, to reach the fusion temperature. Therefore, when α_{ov} increases, models that reach $\widetilde{\rho_c}$ are closer to the TAMS. When the model gets too close to the TAMS, this impacts the whole stellar structure. Internally, the μ-gradient in the core is very much affected, because the nuclear reactions in the H-burning shell did not have enough time to smooth its shape. In the outer layers, the convective envelope, which expands during the subgiant phase, has a different size. Those processes alter the frequencies (the g- and p-dominated ones, respectively), which are thereby not compatible with the observations.

5.3.2. Constraints on the Brunt-Väisälä profile.

Based on Eq. (1), we expect the frequency of mixed modes to place constraints on the integral of the Brunt-Väisälä frequency in the G cavity. To investigate this, in Fig. 12 we plot the N^2 profiles for the models of the loose grid defined in Sect. 4.5, which all reproduce the low-frequency g-dominated mode ($\nu_{1,11}$) and $\Delta\nu$. We observe that reproducing both already strongly constrains the part of the Brunt-Väisälä frequency dominated by the thermal term ($\nabla_{ad} - \nabla$), which corresponds to the most central layers ($r < 0.05\,R_\odot$). This was expected because of the $1/r$ factor in the Eq. (1) integral. On the contrary, the part of N^2 that is dominated by the μ-gradient changes significantly within the grid.

We expect that part to be strongly determined by the dipolar modes. We therefore investigated the constraints brought by the two most determining seismic features (see Sect. 2): the coupling intensity and the frequency of pure g-modes. As those two are not directly measurable, we used observational proxies. The intensity of the coupling can be quantified by $\delta \equiv \nu_{1,12} - \nu_{1,11}$, which is from Deheuvels & Michel (2011). That value is the difference between the low-frequency g-dominated mode ($\nu_{1,11}$) and the following dipolar p-dominated mode ($\nu_{1,12}$). Thus, δ increases with the coupling. The frequency of a pure g-mode is measured through $\nu_{1,18}$, which is the high-frequency g-dominated mode. For those two values, we color-coded, in Fig. 12, the profiles of the Brunt-Väisälä and Lamb frequencies based on their agreement with the observations (left panel for δ and right panel for $\nu_{1,18}$).

One can see on the right panel that models correctly reproducing the coupling (i.e., dark profiles) have very similar H-burning shell positions (N^2 peak around $r = 0.05\,R_\odot$). However, the Brunt-Väisälä profiles become more degenerate for higher r: several different profiles can reproduce δ within 1-σ. This degeneracy is lifted thanks to the high-frequency g-dominated mode: on the left panel, models closely reproducing $\nu_{1,18}$ all have similar Brunt-Väisälä profiles. This corroborates our theoretical approach in Sect. 2: the high-frequency g-dominated mode adding tight constraints on the shape of the μ-gradient. Important gains in structural constraints are therefore obtained from having a second detectable g-dominated mode.

6. Discussion

6.1. Diffusive overshooting

During this study, overshooting was modeled as a step extension of the convective core. However, Freytag et al. (1996) proposed another prescription, based on results coming from 2D simulations of A-stars and white dwarfs. Overshoot is then modeled as a diffusive process, with a coefficient D_{ov} exponentially decaying from the boundary of core, following the expression

$$D_{ov} = D_{conv} \exp\left[-\frac{2(r - R_{cc})}{f_{ov} H_p}\right], \tag{7}$$

with D_{conv} being the MLT derived coefficient taken just below $R_{cc,}$ and f_{ov} a free parameter that tunes the length scale of the overshooting region.

In order to compare the results coming from the two types of overshooting, we first found the f_{ov} that is equivalent to a given value of α_{ov}. In order to do this, we searched for the value of f_{ov} that gives models reaching the TAMS at the same age as models computed with a step overshooting and $\alpha_{ov} = 0.15$. We found $f_{ov} = 0.01$. After that, we modeled it using a method similar to the one used in Sect. 5 and compared the best model with the one computed with a step overshoot.

As we can see in Fig. 13, the differences between the frequencies and observables of the best models with step and diffusive overshoot are mainly less than 1-σ. We note the exception of the g-dominated $\nu_{2,10}$ mode, which is better reproduced by the diffusive overshoot model. However, its impact on the global χ^2 is counter-balanced by the generally better reproduced dipolar frequencies of the step overshoot model. Moreover, the difference between the characteristics of the two models are within the uncertainties of Table 1. Therefore, we cannot discriminate between the two kinds of modelings with the current set of data.

6.2. Effect of microscopic diffusion

The models presented in Sect. 5 of our study include both gravitational settling and chemical diffusion. Such processes,

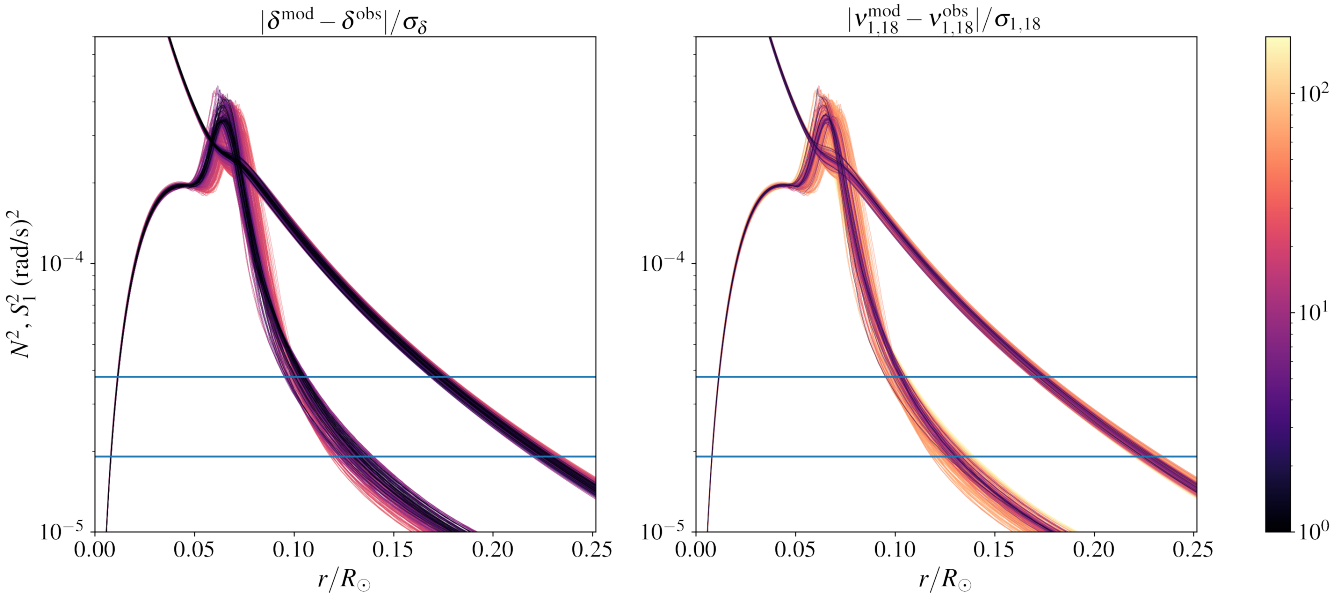

Fig. 12. N^2 profiles of the loose grid models. The *left and right panel* profiles are colored in relation to the difference between the models and the observations of $\nu_{1,18}$ and δ, respectively. Those differences are normalized by the observational uncertainties. The blue horizontal lines represent the observed g-dominated frequencies.

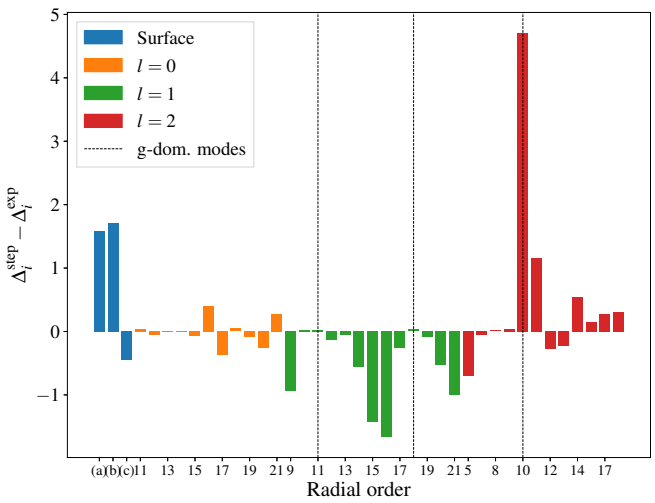

Fig. 13. Differences in the χ^2 contributions of the observables coming from the best models with step and diffusive overshoot.

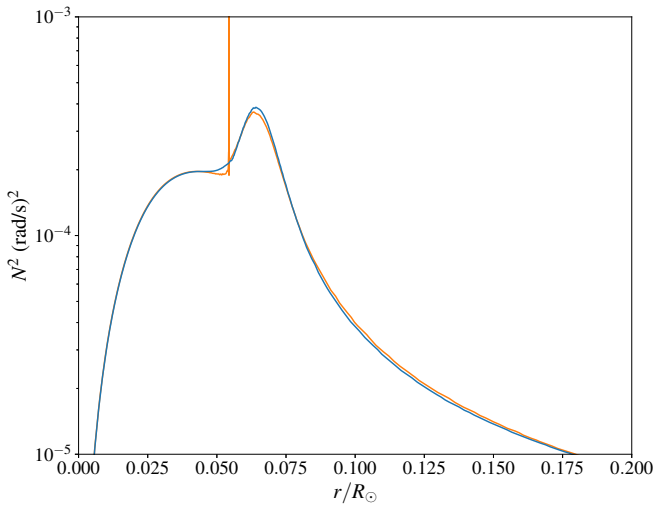

Fig. 14. Brunt-Väisälä profiles of the best models with gravitational settling and chemical diffusion (blue) and without those two processes (orange).

which happen to be necessary in order to correctly reproduce the helioseismic observations (Christensen-Dalsgaard et al. 1993), are expected to have an impact on our results for two main reasons. The first is the sinking during the main sequence of heavier elements because of the gravitational settling. This reduces the hydrogen abundance in the core and shortens the main sequence, which eventually decreases the age of models with same mean density. The second is the smoothing of the structure of the subgiant. High μ-gradient peaks, like the one produced by the withdrawal of the convective core, are strongly smoothed out by the chemical diffusion, which impacts the mixed mode frequencies. Thus, it is interesting to see how gravitational settling and chemical diffusion change the characteristics and the quality of the fit. We therefore modeled the star following a similar methodology, but without including those two processes. We found that the best model also has $\alpha_{\rm ov} = 0.15$, but provides a significantly worse agreement with the observations than the best diffusion model, with $\chi^2_{\rm nodiff} - \chi^2_{\rm diff} = 71$. It is more massive ($1.29\,M_\odot$) and older (4.85 Gyr), as was expected from the fact that heavy elements do not sink during the MS. We note that the surface observables are less well reproduced, with a best model that is too cold (5874 K, which represents 1.84 times the observational uncertainty) and has too low a luminosity ($5.0\,L_\odot$, which represents $4.3\,\sigma$).

Moreover, similarly to what we found in Sect. 5, the quality of the fit improves as $\alpha_{\rm ov}$ increases for $\alpha_{\rm ov} \leq 0.15$. However, this is less significant ($\chi^2_{\alpha_{\rm ov}=0} - \chi^2_{\alpha_{\rm ov}=0.15} = 24$). For higher values, the quality of the fit strongly worsens, in a comparable way to what has been found with gravitational settling and chemical diffusion.

Figure 14 illustrates the differences in the Brunt-Väisälä profiles between the two best models, with and without both

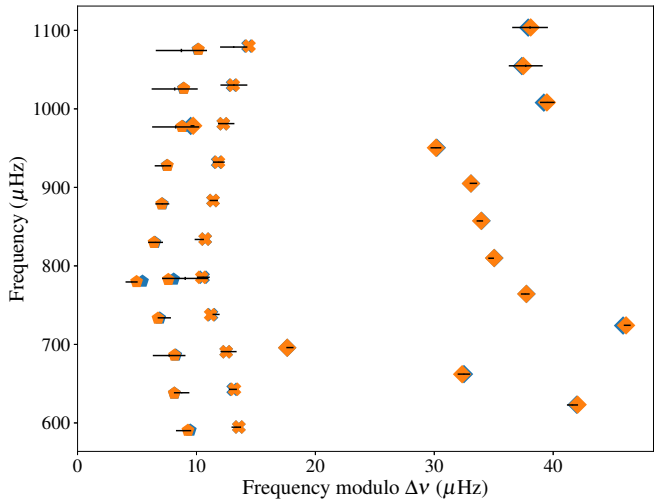

Fig. 15. Échelle diagrams of the best model (blue, $Y_0 = 0.28$) and the best model for $Y_0 = 0.24$ (orange). 3-σ uncertainties from the observations are represented by black bars.

Table 2. Characteristics of the two models of Fig. 15.

Param	$Y_0 = 0.24$ model	$Y_0 = 0.28$ model
M ($M_\odot$)	1.292	1.222
R ($R_\odot$)	2.152	2.109
Age (Gyr)	4.13	3.88
L ($L_\odot$)	5.95	5.89
$T_{\rm eff}$ (K)	6145	6192
[Fe/H] (dex)	−0.098	−0.072
$\alpha_{\rm conv}$	1.70	1.73
Y_0	0.24	0.28
χ^2	159	127

diffusive processes. One can see the high ∇_μ peak (at $r = 0.06\,R_\odot$) is, as expected, smoothed out by the chemical diffusion. Otherwise, the two profiles are remarkably similar, despite the different physics of the models, which highlights the robustness of the constraints coming from the mixed modes.

Finally, the effects of gravitational settling are expected to be somewhat counter-balanced in the envelope by radiative accelerations, which can have a significant impact on stars with masses greater than 1.1 $M_\odot$ (Deal et al. 2018). However, including the effects of radiative accelerations in the models increases the computational time of stellar evolution calculation by orders of magnitude, and it could not be afforded in the present study. To test the impact of this process on our modeling, we computed a model that takes into account radiative accelerations, with the same parameters as the best model for $\alpha_{\rm ov} = 0.15$. We obtained slightly different large separations ($\Delta\nu_{\rm rad} - \Delta\nu_{\rm norad} = 0.12\,\mu$Hz) but very similar frequencies, once normalized by the large separation. Radiative accelerations are therefore not expected to change the conclusions of this study.

6.3. Helium degeneracy

To model KIC10273246, we initially performed optimizations with fixed $\alpha_{\rm ov}$ and considering Y_0, $\alpha_{\rm conv}$ and [Fe/H] as free parameters. In this case, we observed an unwanted sensitivity of the Y_0 parameter to the guess value of our optimization process. This led us to the hybrid approach described in Sect. 4.5, using optimizations with fixed values of Y_0 and varying [Fe/H], $\alpha_{\rm conv}$. We found that optimal models with different values of Y_0 indeed have surprisingly close frequencies, despite their wide range of mass. This is illustrated in Fig. 15, which shows the échelle diagrams of the best model with $Y_0 = 0.28$ (blue) and the best model with $Y_0 = 0.24$ (orange), both of which have $\alpha_{\rm ov} = 0.15$. Those models have quite different characteristics, as reported in Table 2. However, their frequencies are almost indistinguishable, despite the very small uncertainties on the mode frequencies from *Kepler* data. Only the g-dominated $l = 2$ mode allows us to slightly favor the $Y_0 = 0.28$ model. Such degeneracy is related to the anti-correlation between mass and Y_0, that has been observed in MS stars (see e.g., Lebreton & Goupil 2014) as well as subgiant stars (Li et al. 2020). Additionally, we note that no monotonic behavior has been found between the age and Y_0. We therefore conclude that the seismic modeling of subgiants, despite bringing strong constraints on the deep structure of the star, does not lift the degeneracy between Y_0 and the mass.

6.4. Internal rotation

We mentioned in Sect. 3.2.2 that a rotational splitting of $0.53 \pm 0.03\,\mu$Hz could be measured with a high level of significance for the $l = 2$ mode at $779.4\,\mu$Hz. This is obviously not enough to probe the internal rotation in detail. However, since this mode is g-dominated, it can be used to place approximate constraints on the rotation in the core of the star.

Using our best-fit model from Sect. 5, we were able to compute the rotational kernel $K(r)$, which relates the splitting $\delta\nu_s$ of this mode to the rotation profile $\Omega(r)$:

$$\delta\nu_s = \int_0^R K(r)\Omega(r)/(2\pi)\,{\rm d}r. \tag{8}$$

This can be re-written as $\delta\nu_s = K_g\langle\Omega_g\rangle + K_p\langle\Omega_p\rangle$, where $\langle\Omega_g\rangle$ and $\langle\Omega_p\rangle$ are average rotation rates in the g- and p-mode cavities, respectively, and K_g (resp. K_p) corresponds to the integral of $K(r)$ in the g-mode (resp. p-mode) cavities. For the $l = 2$ mode under study, using our best-fit stellar model we found that 84% of the kernel energy is enclosed in the g-mode cavity, which confirms that the mode is indeed g-dominated.

Campante et al. (2011) found a clear rotational modulation in the *Kepler* light curve of KIC10273246. They thus estimated the surface rotation rate of the star to about $0.5\,\mu$Hz (rotation period of about 23 days). This value is comparable to the average rotational splitting of $0.45 \pm 0.02\,\mu$Hz that we obtained in this study. As mentioned in Sect. 3.2.2, this average splitting is dominated by the contribution of p-dominated modes, to the extent that it essentially measures the envelope rotation rate. Taken together, these two measurements suggest a low rotation contrast within the p-mode cavity, which is in line with the conclusions of Benomar et al. (2015) and Nielsen et al. (2015) for main-sequence solar-like pulsators.

The splitting measured for the $l = 2$ g-dominated mode is close to the rotation rate inferred for the envelope, which suggests a low amount of radial differential rotation in the star. If we take $\langle\Omega_p\rangle/(2\pi) \approx 0.45\,\mu$Hz, we obtain a core rotation rate of about $0.65\,\mu$Hz (rotation period of about 18 days). Clearly, more rotational splittings would be required to precisely measure the core rotation rate. However, our results indicate that KIC10273246 could be rotating nearly as a solid-body, like the two *Kepler* subgiants whose internal rotation profiles were recently measured (Deheuvels et al. 2020).

7. Conclusion

In this study, we performed a seismic modeling of KIC10273246, a subgiant observed by *Kepler*, and obtained strong constraints on the size of its MS convective core. We chose this target because it exhibits two dipolar g-dominated modes, which we expected to bring stronger constraints on the internal structure. We extracted the mode parameters from the oscillation spectrum of the star using the full *Kepler* data set and thus updated the mode frequencies that were previously obtained by Campante et al. (2011).

The seismic modeling of subgiants is notoriously complex. We here elaborated on the algorithm proposed by Deheuvels & Michel (2011). This method consists of a two-step approach. The purpose of the first step is to find the mass and age that match the large separation of p modes and the frequency of one g-dominated mixed mode. The second step optimizes the other free parameters ([Fe/H], Y_0, $\alpha_{\rm conv}$ and $\alpha_{\rm ov}$) to reproduce the other frequencies as closely as possible. In this work, we improved this algorithm to make it more robust. This enabled us to perform a detailed seismic modeling of KIC10273246, with a particular emphasis on the investigation of the size of the MS convective core.

We found models in good agreement with the observations, with a reduced χ^2 of 3.2 for the best model, and with surface observables that are reproduced to within less than 1σ. One key result of this study is that models with core overshooting during the MS reproduce the observations significantly better, with an optimal value of $\alpha_{\rm ov} = 0.15$. For higher values of $\alpha_{\rm ov}$, the quality of the fit significantly worsens. We found that such models are very close to the TAMS. Their internal structure thus differs from that of the lower-$\alpha_{\rm ov}$ solutions, and their seismic properties show strong mismatch with the observations. We tested the robustness of our conclusions by considering other choices for the input physics. No significant difference was found when modeling core overshooting as a diffusive process. Models computed without microscopic diffusion also favor models with $\alpha_{\rm ov} = 0.15$, albeit less significantly, and show a strong mismatch compared with the observations for higher values of $\alpha_{\rm ov}$. However, they yield poorer agreement with the seismic and surface observables compared to the models computed with microscopic diffusion. This study thus confirms the high potential of young subgiants with mixed modes to measure the extent of the MS convective cores.

We also investigated the information conveyed by the mixed modes about the core structure. We showed that the combined knowledge of the large separation $\Delta\nu$ and the frequency of one g-dominated mixed mode is enough to estimate the central density $\rho_{\rm c}$ to a precision of about 1%. This helps us understand why models with a greater amount of core overshooting ($\alpha_{\rm ov} > 0.15$) are not compatible with the observations. Because of their larger MS convective core, they have a higher $\rho_{\rm c}$ just after the end of the MS, and they thus reach the optimal central density closer to the TAMS. We then studied the roles of the different mixed mode frequencies in determining the profile of the Brunt-Väisälä frequency inside the star. While the first g-dominated mixed mode strongly constrains the thermal part, the second one helps constrain the part of the Brunt-Väisälä frequency that is dominated by the μ-gradient. We therefore confirm that having access to two g-dominated mixed modes helps better characterize the Brunt-Väisälä profile.

Also, despite the strong constraints that were obtained on the internal structure, we noted the existence of a degeneracy between the stellar mass and the initial helium abundance Y_0. This degeneracy, which is already well known for MS stars (e.g., Lebreton & Goupil 2014), is not lifted by the mixed modes. We find that it is in fact the main source of uncertainties in the determination of the stellar parameters. This should be kept in mind when modeling subgiants. Current modeling techniques, such as traditional grid-based methods, tend to miss a significant fraction of the best-fit models because of the size of the mesh. In such conditions, the degeneracy between Y_0 and mass could be explored only partially, thus causing the uncertainties on the stellar parameters to be underestimated.

As a byproduct of this work, we obtained partial constraints on the internal rotation of KIC10273246. We were not able not measure individual rotational splittings for the dipolar mixed modes, but we obtained a splitting of $0.53 \pm 0.03\,\mu$Hz for the only g-dominated $l = 2$ mixed mode in the spectrum of the star. Interestingly, this value is close to the surface rotation rate of $0.5\,\mu$Hz that was found for this star by Campante et al. (2011) using photometric data from *Kepler*. This suggests that this star might be rotating nearly as a solid-body, similarly to the two young subgiants recently studied by Deheuvels et al. (2020).

This work highlights the large potential of the seismic modeling of young subgiants to indirectly obtain constraints on the core structure of the star during the MS. The next step will be to use this method on a larger sample of stars drawn from the targets observed with *Kepler* and TESS, and therefore place quantitative constraints on the overshooting process in low-mass stars. The data from the upcoming PLATO mission (Rauer et al. 2014) will add a large amount of potential targets for this type of analysis.

Moreover, we show in this study that detecting several g-dominated dipole modes places stronger constraints on the shape of the Brunt-Väisälä profile, and therefore on the μ-gradient in the stellar core. It could thus be anticipated that more evolved subgiants, which show a larger number of g-dominated mixed modes, would be more favorable targets for our purpose. However, these stars are also further from the end of the MS, and a worry is that the chemical composition in the core might be less dependent on the properties of the MS core. We plan, therefore, to study this effect in a subsequent study.

Acknowledgements. We thank Morgan Deal for enlightening discussions about microscopic diffusion. We also thank the anonymous referee for comments that improved the clarity of this paper. We acknowledge support from from the project BEAMING ANR-18-CE31- 0001 of the French National Research Agency (ANR) and from the Centre National d'Etudes Spatiales (CNES).

References

Appourchaux, T., Michel, E., Auvergne, M., et al. 2008, A&A, 488, 705
Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, ARA&A, 47, 481
Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2006, in The CoRoT Mission Pre-Launch Status - Stellar Seismology and Planet Finding, eds. M. Fridlund, A. Baglin, J. Lochard, L. Conroy, et al., ESA Spec. Pub., 1306, 33
Ball, W. H., & Gizon, L. 2014, A&A, 568, A123
Balser, D. S. 2006, AJ, 132, 2326
Belkacem, K., Goupil, M. J., Dupret, M. A., et al. 2011, A&A, 530, A142
Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, MNRAS, 452, 2654
Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, Science, 327, 977
Brown, T. M., Gilliland, R. L., Noyes, R. W., & Ramsey, L. W. 1991, ApJ, 368, 599
Burgers, J. M. 1969, Flow Equations for Composite Gases (New York: Academic Press)
Campante, T. L., Handberg, R., Mathur, S., et al. 2011, A&A, 534, A6
Casagrande, L., Portinari, L., & Flynn, C. 2006, MNRAS, 373, 13
Chiappini, C., Renda, A., & Matteucci, F. 2002, A&A, 395, 789
Christensen-Dalsgaard, J. 2008, Ap&SS, 316, 113

Christensen-Dalsgaard, J., Proffitt, C. R., & Thompson, M. J. 1993, ApJ, 403, L75
Claret, A., & Torres, G. 2016, A&A, 592, A15
Claret, A., & Torres, G. 2019, ApJ, 876, 134
Constantino, T., & Baraffe, I. 2018, A&A, 618, A177
Cox, J. P., & Giuli, R. T. 1968, Principles of Stellar Structure (New York: Gordon and Breach)
Creevey, O. L., Doğan, G., Frasca, A., et al. 2012, A&A, 537, A111
Deal, M., Alecian, G., Lebreton, Y., et al. 2018, A&A, 618, A10
Deheuvels, S., & Michel, E. 2010, Astron. Nachr., 331, 929
Deheuvels, S., & Michel, E. 2011, A&A, 535, A91
Deheuvels, S., Michel, E., Goupil, M. J., et al. 2010, A&A, 514, A31
Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, A&A, 564, A27
Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, A&A, 580, A96
Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, A&A, 589, A93
Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, A&A, 641, A117
Evans, D. W., Riello, M., De Angeli, F., et al. 2018, A&A, 616, A4
Freytag, B., Ludwig, H. G., & Steffen, M. 1996, A&A, 313, 497
Gabriel, M., Noels, A., Montalbán, J., & Miglio, A. 2014, A&A, 569, A63
García, R. A., Hekker, S., Stello, D., et al. 2011, MNRAS, 414, L6
Gizon, L., & Solanki, S. K. 2003, ApJ, 589, 1009
Goupil, M. J., Lebreton, Y., Marques, J. P., et al. 2011, in GONG-SoHO 24: A New Era of Seismology of the Sun and Solar-Like Stars, J. Phys. Conf. Ser., 271, 012032
Green, G. M., Schlafly, E., Zucker, C., Speagle, J. S., & Finkbeiner, D. 2019, ApJ, 887, 93
Grevesse, N., & Sauval, A. J. 1998, Space Sci. Rev., 85, 161
Høg, E., Fabricius, C., Makarov, V. V., et al. 2000, A&A, 355, L27
Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, AJ, 157, 245
Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1996, ApJ, 464, 943
Jenkins, J. M., Caldwell, D. A., Chandrasekaran, H., et al. 2010, ApJ, 713, L120
Karoff, C., Campante, T. L., Ballot, J., et al. 2013, ApJ, 767, 34
Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, Stellar Structure and Evolution (Springer-Verlag Berlin Heidelberg)
Kurucz, R. L. 2005, Mem. Soc. Astron. It. Suppl., 8, 14
Lebreton, Y., & Goupil, M. J. 2014, A&A, 569, A21
Li, T., Bedding, T. R., Kjeldsen, H., et al. 2019, MNRAS, 483, 780
Li, T., Bedding, T. R., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2020, MNRAS, 495, 3431
Lomb, N. R. 1976, Ap&SS, 39, 447
Maeder, A., & Mermilliod, J. C. 1981, A&A, 93, 136
Martin, D. C., Fanson, J., Schiminovich, D., et al. 2005, ApJ, 619, L1
Metcalfe, T. S., van Saders, J. L., Basu, S., et al. 2020, ApJ, 900, 154
Moravveji, E., Aerts, C., Pápics, P. I., Triana, S. A., & Vandoren, B. 2015, A&A, 580, A27
Moravveji, E., Townsend, R. H. D., Aerts, C., & Mathis, S. 2016, ApJ, 823, 130
Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, A&A, 540, A143
Mosser, B., Michel, E., Belkacem, K., et al. 2013, A&A, 550, A126
Nielsen, M. B., Schunker, H., Gizon, L., & Ball, W. H. 2015, A&A, 582, A10
Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, ApJS, 220, 15
Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2018, ApJS, 234, 34
Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, Exp. Astron., 38, 249
Rendle, B. M., Buldgen, G., Miglio, A., et al. 2019, MNRAS, 484, 771
Ricker, G. R., Winn, J. N., Vanderspek, R., et al. 2014, in Space Telescopes and Instrumentation 2014: Optical, Infrared, and Millimeter Wave, SPIE Conf. Ser., 9143, 914320
Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, ApJ, 456, 902
Scargle, J. D. 1982, ApJ, 263, 835
Shibahashi, H. 1979, PASJ, 31, 87
Silva Aguirre, V., Basu, S., Brandão, I. M., et al. 2013, ApJ, 769, 141
Skrutskie, M. F., Cutri, R. M., Stiening, R., et al. 2006, AJ, 131, 1163
Stanton, L. G., & Murillo, M. S. 2016, Phys. Rev. E, 93
Stassun, K. G., & Torres, G. 2016, AJ, 152, 180
Stello, D., Bruntt, H., Preston, H., & Buzasi, D. 2008, ApJ, 674, L53
Stokholm, A., Nissen, P. E., Silva Aguirre, V., et al. 2019, MNRAS, 489, 928
Tassoul, M. 1980, ApJS, 43, 469
Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial Oscillations of Stars (Tokyo: University of Tokyo Press)
VandenBerg, D. A., Bergbusch, P. A., & Dowler, P. D. 2006, ApJS, 162, 375
Wilks, S. S. 1938, Ann. Math. Stat., 9, 60
Wright, E. L., Eisenhardt, P. R. M., Mainzer, A. K., et al. 2010, AJ, 140, 1868
Zinn, J. C., Pinsonneault, M. H., Huber, D., & Stello, D. 2019, ApJ, 878, 136

Appendix A: Observed frequencies

Table A.1. Estimated mode parameters for KIC10273246.

l	ν (μHz)	H (ppm^2 μHz^{-1})	Γ (μHz)
0	594.58 ± 0.13	$10.9^{+2.8}_{-2.2}$	$1.4^{+0.4}_{-0.3}$
0	642.73 ± 0.11	$10.5^{+3.3}_{-2.5}$	$1.2^{+0.5}_{-0.3}$
0	690.80 ± 0.23	$7.9^{+1.7}_{-1.4}$	$3.5^{+1.0}_{-0.8}$
0	738.19 ± 0.10	$18.4^{+2.7}_{-2.3}$	$1.7^{+0.2}_{-0.2}$
0	785.00 ± 0.13	$17.3^{+2.1}_{-1.8}$	$2.2^{+0.2}_{-0.2}$
0	833.65 ± 0.13	$18.9^{+2.4}_{-2.1}$	$2.4^{+0.3}_{-0.3}$
0	883.30 ± 0.12	$18.7^{+2.3}_{-2.1}$	$2.2^{+0.2}_{-0.2}$
0	932.16 ± 0.17	$13.0^{+1.6}_{-1.5}$	$2.8^{+0.3}_{-0.3}$
0	981.26 ± 0.30	$8.9^{+1.4}_{-1.2}$	$4.9^{+1.0}_{-0.8}$
0	1030.30 ± 0.38	$4.4^{+0.9}_{-0.7}$	$4.2^{+0.9}_{-0.8}$
0	1078.72 ± 0.38	$3.2^{+1.0}_{-0.8}$	$3.0^{+1.2}_{-0.9}$
1	622.85 ± 0.16	$6.2^{+1.8}_{-1.4}$	$1.6^{+0.5}_{-0.4}$
1	662.16 ± 0.17	$6.3^{+1.3}_{-1.0}$	$2.4^{+0.5}_{-0.4}$
1	695.96 ± 0.10	$11.1^{+5.7}_{-3.8}$	$0.7^{+0.5}_{-0.3}$
1	724.33 ± 0.10	$12.9^{+2.6}_{-2.1}$	$1.5^{+0.3}_{-0.3}$
1	764.19 ± 0.12	$13.0^{+1.7}_{-1.5}$	$2.6^{+0.3}_{-0.3}$
1	809.76 ± 0.08	$23.7^{+3.4}_{-3.0}$	$1.7^{+0.2}_{-0.2}$
1	857.24 ± 0.09	$19.6^{+2.6}_{-2.3}$	$2.0^{+0.2}_{-0.2}$
1	905.14 ± 0.10	$16.3^{+2.1}_{-1.8}$	$2.3^{+0.3}_{-0.2}$
1	950.42 ± 0.15	$9.1^{+1.2}_{-1.1}$	$3.0^{+0.4}_{-0.3}$
1	978.28 ± 0.10	$11.9^{+5.2}_{-3.6}$	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$
1	1008.23 ± 0.21	$5.8^{+0.8}_{-0.7}$	$3.5^{+0.5}_{-0.5}$
1	1054.85 ± 0.48	$2.4^{+0.4}_{-0.4}$	$6.2^{+1.3}_{-1.1}$
1	1103.65 ± 0.50	$2.0^{+0.5}_{-0.4}$	$6.1^{+3.1}_{-2.0}$
2	590.15 ± 0.21	$5.4^{+1.4}_{-1.1}$	$1.4^{+0.4}_{-0.3}$
2	638.42 ± 0.22	$5.2^{+1.6}_{-1.2}$	$1.2^{+0.5}_{-0.3}$
2	685.80 ± 0.46	$4.0^{+0.8}_{-0.7}$	$3.5^{+1.0}_{-0.8}$
2	733.83 ± 0.19	$9.2^{+1.3}_{-1.2}$	$1.7^{+0.2}_{-0.2}$
2	779.53 ± 0.03	$54.2^{+19.0}_{-14.1}$	$0.3^{+0.1}_{-0.1}$
2	784.03 ± 0.65	$12.5^{+3.2}_{-2.5}$	$1.5^{+0.5}_{-0.4}$
2	829.97 ± 0.21	$9.4^{+1.2}_{-1.1}$	$2.4^{+0.3}_{-0.3}$
2	878.97 ± 0.20	$9.3^{+1.2}_{-1.0}$	$2.2^{+0.2}_{-0.2}$
2	927.47 ± 0.23	$6.5^{+0.8}_{-0.7}$	$2.8^{+0.3}_{-0.3}$
2	976.97 ± 0.66	$4.4^{+0.7}_{-0.6}$	$4.9^{+1.0}_{-0.8}$
2	1025.32 ± 0.65	$2.2^{+0.4}_{-0.4}$	$4.2^{+0.9}_{-0.8}$
2	1074.32 ± 0.72	$1.6^{+0.5}_{-0.4}$	$3.0^{+1.2}_{-0.9}$

Bibliographie

Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, Asteroseismology

Aguado, D. S., Ahumada, R., Almeida, A., et al. 2019, ApJS, 240, 23

Andersen, J., Clausen, J. V., & Nordstrom, B. 1990, ApJ, 363, L33

Appourchaux, T., & Corbard, T. 2019, A&A, 624, A106

Appourchaux, T., Michel, E., Auvergne, M., et al. 2008, A&A, 488, 705

Arentoft, T., Kjeldsen, H., Bedding, T. R., et al. 2008, ApJ, 687, 1180

Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., & Scott, P. 2009, ARA&A, 47, 481

Astropy Collaboration, Robitaille, T. P., Tollerud, E. J., et al. 2013, A&A, 558, A33

Astropy Collaboration, Price-Whelan, A. M., Sipőcz, B. M., et al. 2018, AJ, 156, 123

Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., et al. 2006, in ESA Special Publication, Vol. 1306, The CoRoT Mission Pre-Launch Status - Stellar Seismology and Planet Finding, ed. M. Fridlund, A. Baglin, J. Lochard, & L. Conroy, 33

Ball, W. H., & Gizon, L. 2014, A&A, 568, A123

—. 2017, A&A, 600, A128

Barban, C., Michel, E., Martic, M., et al. 1999, A&A, 350, 617

Barban, C., Matthews, J. M., De Ridder, J., et al. 2007, A&A, 468, 1033

Barban, C., Deheuvels, S., Baudin, F., et al. 2009, A&A, 506, 51

Bedding, T. R., Kjeldsen, H., Campante, T. L., et al. 2010, ApJ, 713, 935

Belkacem, K., Goupil, M. J., Dupret, M. A., et al. 2011, A&A, 530, A142

Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M. J., Kupka, F., & Baudin, F. 2006, A&A, 460, 183

Belkacem, K., Marques, J. P., Goupil, M. J., et al. 2015, A&A, 579, A31

Bellinger, E. P., Basu, S., Hekker, S., Christensen-Dalsgaard, J., & Ball, W. H. 2021, ApJ, 915, 100

Benomar, O., Baudin, F., Marques, J. P., et al. 2010, Astronomische Nachrichten, 331, 956

Biermann, L. 1932, ZAp, 5, 117

Böhm-Vitense, E. 1958, ZAp, 46, 108

Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, Science, 327, 977

Bouchy, F., & Carrier, F. 2001, A&A, 374, L5

Brown, T. M., Gilliland, R. L., Noyes, R. W., & Ramsey, L. W. 1991, ApJ, 368, 599

Buldgen, G., Reese, D. R., & Dupret, M. A. 2017, A&A, 598, A21

Burgers, J. M. 1969, Flow Equations for Composite Gases

Buzasi, D., Catanzarite, J., Laher, R., et al. 2000, ApJ, 532, L133

Buzasi, D. L., Bruntt, H., Bedding, T. R., et al. 2005, ApJ, 619, 1072

Campante, T. L., Handberg, R., Mathur, S., et al. 2011, A&A, 534, A6

Canuto, V. M., & Mazzitelli, I. 1991, ApJ, 370, 295

Casagrande, L., Flynn, C., Portinari, L., Girardi, L., & Jimenez, R. 2007, MNRAS, 382, 1516

Chaplin, W. J., Elsworth, Y., Howe, R., et al. 1996, Sol. Phys., 168, 1

Chiappini, C., Renda, A., & Matteucci, F. 2002, A&A, 395, 789

Christensen-Dalsgaard, J. 2003, Lecture Notes on Stellar Oscillations

Christensen-Dalsgaard, J. 2008, Ap&SS, 316, 113

Christensen-Dalsgaard, J., Duvall, T. L., J., Gough, D. O., Harvey, J. W., & Rhodes, E. J., J. 1985, Nature, 315, 378

Christensen-Dalsgaard, J., Dappen, W., Ajukov, S. V., et al. 1996, Science, 272, 1286

Claret, A. 2007, A&A, 475, 1019

Claret, A., & Torres, G. 2016, A&A, 592, A15

—. 2017, ApJ, 849, 18

—. 2018, ApJ, 859, 100

—. 2019, ApJ, 876, 134

Clayton, D. D. 1968, Principles of stellar evolution and nucleosynthesis

Constantino, T., & Baraffe, I. 2018, A&A, 618, A177

Cowling, T. G. 1941, MNRAS, 101, 367

Cox, J. P., & Giuli, R. T. 1968, Principles of stellar structure

Creevey, O. L., Doğan, G., Frasca, A., et al. 2012, A&A, 537, A111

Cunha, M. S., Stello, D., Avelino, P. P., Christensen-Dalsgaard, J., & Townsend, R. H. D. 2015, ApJ, 805, 127

Davies, G. R., Chaplin, W. J., Elsworth, Y. P., & Hale, S. J. 2014, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 441, 3009

de Meulenaer, P., Carrier, F., Miglio, A., et al. 2010, A&A, 523, A54

De Ridder, J., Barban, C., Baudin, F., et al. 2009, Nature, 459, 398

Deal, M., Alecian, G., Lebreton, Y., et al. 2018, A&A, 618, A10

Degroote, P., Aerts, C., Baglin, A., et al. 2010, Nature, 464, 259

Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, A&A, 641, A117

Deheuvels, S., Brandão, I., Silva Aguirre, V., et al. 2016, A&A, 589, A93

Deheuvels, S., & Michel, E. 2011, A&A, 535, A91

Deheuvels, S., Bruntt, H., Michel, E., et al. 2010a, A&A, 515, A87

Deheuvels, S., Michel, E., Goupil, M. J., et al. 2010b, A&A, 514, A31

Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, A&A, 564, A27

Demarque, P., Sarajedini, A., & Guo, X. J. 1994, ApJ, 426, 165

Dupret, M. A., Belkacem, K., Samadi, R., et al. 2009, A&A, 506, 57

Duvall, T. L., J., Dziembowski, W. A., Goode, P. R., et al. 1984, Nature, 310, 22

Eddington, A. S. 1926, The Internal Constitution of the Stars

Eggenberger, P., den Hartogh, J. W., Buldgen, G., et al. 2019a, A&A, 631, L6

Eggenberger, P., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2019b, A&A, 621, A66

Evans, D. W., Riello, M., De Angeli, F., et al. 2018, A&A, 616, A4

Evans, J. W., & Michard, R. 1962, ApJ, 136, 493

Farnir, M., Pinçon, C., Dupret, M.-A., Noels, A., & Scuflaire, R. 2021, arXiv e-prints, arXiv :2107.08021

Fossat, E. 1991, Sol. Phys., 133, 1

Fossat, E., Boumier, P., Corbard, T., et al. 2017, A&A, 604, A40

Freytag, B., Ludwig, H. G., & Steffen, M. 1996, A&A, 313, 497

Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, ApJ, 796, 17

Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, MNRAS, 485, 3661

Gabriel, A. H., Charra, J., Grec, G., et al. 1997, Sol. Phys., 175, 207

Gabriel, M., Noels, A., Montalbán, J., & Miglio, A. 2014, A&A, 569, A63

Gabriel, M., & Scuflaire, R. 1979, Acta Astron., 29, 135

Garaud, P. 2020, in Multi-Dimensional Processes In Stellar Physics, ed. M. Rieutord, I. Baraffe, & Y. Lebreton, 13

García, R. A., Corbard, T., Chaplin, W. J., et al. 2004, Sol. Phys., 220, 269

García, R. A., Régulo, C., Samadi, R., et al. 2009, A&A, 506, 41

Godoy-Rivera, D., Tayar, J., Pinsonneault, M. H., et al. 2021, ApJ, 915, 19

Goldreich, P., Murray, N., Willette, G., & Kumar, P. 1991, ApJ, 370, 752

Gough, D. O. 1990, Comments on Helioseismic Inference, ed. Y. Osaki & H. Shibahashi, Vol. 367, 283, doi : 10.1007/3-540-53091-6

Green, G. M., Schlafly, E., Zucker, C., Speagle, J. S., & Finkbeiner, D. 2019, ApJ, 887, 93

Grevesse, N., & Sauval, A. J. 1998, Space Sci. Rev., 85, 161

Grundahl, F., Christensen-Dalsgaard, J., Pallé, P. L., et al. 2014, in Precision Asteroseismology, ed. J. A. Guzik, W. J. Chaplin, G. Handler, & A. Pigulski, Vol. 301, 69–75, doi : 10.1017/S1743921313014117

Grundahl, F., Fredslund Andersen, M., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2017, ApJ, 836, 142

Guzik, J. A., Kaye, A. B., Bradley, P. A., Cox, A. N., & Neuforge, C. 2000, ApJ, 542, L57

Hale, S. J., Howe, R., Chaplin, W. J., Davies, G. R., & Elsworth, Y. P. 2016, Sol. Phys., 291, 1

Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., et al. 2020, Nature, 585, 357

Harvey, J. W., Hill, F., Hubbard, R. P., et al. 1996, Science, 272, 1284

Hekker, S., Kallinger, T., Baudin, F., et al. 2009, A&A, 506, 465

Hoeksema, J. T., Baldner, C. S., Bush, R. I., Schou, J., & Scherrer, P. H. 2018, Sol. Phys., 293, 45

Høg, E., Fabricius, C., Makarov, V. V., et al. 2000, A&A, 355, L27

Hon, M., Bellinger, E. P., Hekker, S., Stello, D., & Kuszlewicz, J. S. 2020, MNRAS, 499, 2445

Howell, S. B., Sobeck, C., Haas, M., et al. 2014, PASP, 126, 398

Hu, H., Tout, C. A., Glebbeek, E., & Dupret, M. A. 2011, MNRAS, 418, 195

Huber, D., Bedding, T. R., Stello, D., et al. 2011, ApJ, 743, 143

Huber, D., Chaplin, W. J., Chontos, A., et al. 2019, AJ, 157, 245

Hunter, J. D. 2007, Computing in Science & Engineering, 9, 90

Iglesias, C. A., & Rogers, F. J. 1991, ApJ, 371, 408

—. 1996, ApJ, 464, 943

Jørgensen, A. C. S., Weiss, A., Angelou, G., & Silva Aguirre, V. 2019, MNRAS, 484, 5551

Jørgensen, A. C. S., Weiss, A., Mosumgaard, J. R., Silva Aguirre, V., & Sahlholdt, C. L. 2017, MNRAS, 472, 3264

Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, A&A, 575, A106

Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, Stellar Structure and Evolution

Kjeldsen, H., Bedding, T. R., & Christensen-Dalsgaard, J. 2008, ApJ, 683, L175

Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Viskum, M., & Frandsen, S. 1995, AJ, 109, 1313

Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Baldry, I. K., et al. 2003, AJ, 126, 1483

Kolmogorov, A. 1941, Akademiia Nauk SSSR Doklady, 30, 301

Kurucz, R. L. 2005, Memorie della Societa Astronomica Italiana Supplementi, 8, 14

Langer, N., El Eid, M. F., & Fricke, K. J. 1985, A&A, 145, 179

Lebreton, Y., & Goupil, M. J. 2014, A&A, 569, A21

Leibacher, J. W., & Stein, R. F. 1971, Astrophys. Lett., 7, 191

Leighton, R. B., Noyes, R. W., & Simon, G. W. 1962, ApJ, 135, 474

Li, T., Bedding, T. R., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2020a, MNRAS, 495, 3431

Li, Y., Bedding, T. R., Li, T., et al. 2020b, MNRAS, 495, 2363

Lund, M. N., Silva Aguirre, V., Davies, G. R., et al. 2017, ApJ, 835, 172

Maeder, A. 2009, Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars

Maeder, A., & Mermilliod, J. C. 1981, A&A, 93, 136

Maeder, A., & Meynet, G. 2014, ApJ, 793, 123

Magic, Z., Weiss, A., & Asplund, M. 2015, A&A, 573, A89

Martić, M., Schmitt, J., Lebrun, J. C., et al. 1999, A&A, 351, 993

Martin, D. C., Fanson, J., Schiminovich, D., et al. 2005, ApJ, 619, L1

Mathis, S., & Zahn, J. P. 2004, A&A, 425, 229

Metcalfe, T. S., van Saders, J. L., Basu, S., et al. 2020, arXiv e-prints, arXiv :2007.12755

Michel, E., Baglin, A., Auvergne, M., et al. 2008, Science, 322, 558

Michel, E., Haywood, M., Famaey, B., et al. 2021, Experimental Astronomy

Miglio, A., & Montalbán, J. 2005, A&A, 441, 615

Miglio, A., Montalbán, J., Noels, A., & Eggenberger, P. 2008, MNRAS, 386, 1487

Miglio, A., Montalbán, J., Baudin, F., et al. 2009, A&A, 503, L21

Miglio, A., Chiappini, C., Morel, T., et al. 2013, MNRAS, 429, 423

Miglio, A., Girardi, L., Grundahl, F., et al. 2021, Experimental Astronomy

Mombarg, J. S. G., Van Reeth, T., & Aerts, C. 2021, A&A, 650, A58

Moore, K., & Garaud, P. 2016, ApJ, 817, 54

Moravveji, E., Aerts, C., Pápics, P. I., Triana, S. A., & Vandoren, B. 2015, A&A, 580, A27

Moravveji, E., Townsend, R. H. D., Aerts, C., & Mathis, S. 2016, ApJ, 823, 130

Morel, P., & Lebreton, Y. 2008, Ap&SS, 316, 61

Mosser, B., Pinçon, C., Belkacem, K., Takata, M., & Vrard, M. 2017, A&A, 600, A1

Mosser, B., Michel, E., Belkacem, K., et al. 2013, A&A, 550, A126

Mosser, B., Benomar, O., Belkacem, K., et al. 2014, A&A, 572, L5

Noels, A., Montalban, J., Miglio, A., Godart, M., & Ventura, P. 2010, Ap&SS, 328, 227

Noerdlinger, P. D., & Arigo, R. J. 1980, ApJ, 237, L15

Noll, A., Deheuvels, S., & Ballot, J. 2021, A&A, 647, A187

Ochsenbein, F., Bauer, P., & Marcout, J. 2000, A&AS, 143, 23

Ong, J. M. J., & Basu, S. 2020, ApJ, 898, 127

Ong, J. M. J., Basu, S., Lund, M. N., et al. 2021a, arXiv e-prints, arXiv :2108.07370

Ong, J. M. J., Basu, S., & Roxburgh, I. W. 2021b, arXiv e-prints, arXiv :2107.03405

Osaki, Y. 1975, PASJ, 27, 237

Otí Floranes, H., Christensen-Dalsgaard, J., & Thompson, M. J. 2005, MNRAS, 356, 671

Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., et al. 2011, ApJS, 192, 3

Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., et al. 2013, ApJS, 208, 4

Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., et al. 2015, ApJS, 220, 15

Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., et al. 2018, ApJS, 234, 34

Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., et al. 2019, ApJS, 243, 10

Pedersen, M. G., Aerts, C., Pápics, P. I., et al. 2021, Nature Astronomy

Perez, F., & Granger, B. E. 2007, Computing in Science Engineering, 9, 21

Pinçon, C., Belkacem, K., & Goupil, M. J. 2016, A&A, 588, A122

Pinçon, C., Goupil, M. J., & Belkacem, K. 2020, A&A, 634, A68

Popielski, B. L., & Dziembowski, W. A. 2005, Acta Astron., 55, 177

Prandtl, L. 1925, Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik, 5, 136

Prather, M. J., & Demarque, P. 1974, ApJ, 193, 109

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing

Rabello-Soares, M. C., Korzennik, S. G., & Schou, J. 2008, Sol. Phys., 251, 197

Rato, J., Lopes, J., & Lopes, I. 2021, MNRAS, 507, 3434

Rauer, H., Catala, C., Aerts, C., et al. 2014, Experimental Astronomy, 38, 249

Rendle, B. M., Buldgen, G., Miglio, A., et al. 2019, MNRAS, 484, 771

Rieutord, M. 1997, Une introduction à la dynamique des fluides : cours avec exercices corrigés, Enseignement de la physique (Masson)

Rogers, F. J., Swenson, F. J., & Iglesias, C. A. 1996, ApJ, 456, 902

Rosenthal, C. S., Christensen-Dalsgaard, J., Nordlund, Å., Stein, R. F., & Trampedach, R. 1999, A&A, 351, 689

Roxburgh, I. W. 1965, MNRAS, 130, 223

—. 1978, A&A, 65, 281

—. 1989, A&A, 211, 361

—. 2005, A&A, 434, 665

—. 2018, arXiv e-prints, arXiv :1808.07556

Roxburgh, I. W., & Vorontsov, S. V. 2003, A&A, 411, 215

Samadi, R., & Goupil, M. J. 2001, A&A, 370, 136

Saslaw, W. C., & Schwarzschild, M. 1965, ApJ, 142, 1468

Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, Sol. Phys., 162, 129

Schönberg, M., & Chandrasekhar, S. 1942, ApJ, 96, 161

Schunker, H., Schou, J., Gaulme, P., & Gizon, L. 2018, Sol. Phys., 293, 95

Scuflaire, R. 1974, A&A, 36, 107

Scuflaire, R., Montalbán, J., Théado, S., et al. 2008, Ap&SS, 316, 149

Seaton, M. J. 2005, MNRAS, 362, L1

Shaviv, G., & Salpeter, E. E. 1973, ApJ, 184, 191

Silva Aguirre, V., Ballot, J., Serenelli, A. M., & Weiss, A. 2011, A&A, 529, A63

Silva Aguirre, V., Basu, S., Brandão, I. M., et al. 2013, ApJ, 769, 141

Silva Aguirre, V., Davies, G. R., Basu, S., et al. 2015, MNRAS, 452, 2127

Skrutskie, M. F., Cutri, R. M., Stiening, R., et al. 2006, AJ, 131, 1163

Sonoi, T., Samadi, R., Belkacem, K., et al. 2015, A&A, 583, A112

Stancliffe, R. J., Fossati, L., Passy, J. C., & Schneider, F. R. N. 2015, A&A, 575, A117

Stassun, K. G., & Torres, G. 2016, AJ, 152, 180

Stello, D., Bruntt, H., Preston, H., & Buzasi, D. 2008, ApJ, 674, L53

Stokholm, A., Nissen, P. E., Silva Aguirre, V., et al. 2019, MNRAS, 489, 928

Takata, M. 2005, PASJ, 57, 375

—. 2006, PASJ, 58, 893

—. 2016a, PASJ, 68, 109

—. 2016b, PASJ, 68, 91

Talon, S., & Zahn, J. P. 1997, A&A, 317, 749

Tassoul, M. 1980, ApJS, 43, 469

Tayar, J., Somers, G., Pinsonneault, M. H., et al. 2017, ApJ, 840, 17

Trampedach, R., Stein, R. F., Christensen-Dalsgaard, J., Nordlund, Å., & Asplund, M. 2014, MNRAS, 445, 4366

Ulrich, R. K. 1970, ApJ, 162, 993

—. 1986, ApJ, 306, L37

Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars

Valle, G., Dell'Omodarme, M., Prada Moroni, P. G., & Degl'Innocenti, S. 2014, A&A, 561, A125

van Saders, J. L., Ceillier, T., Metcalfe, T. S., et al. 2016, Nature, 529, 181

VandenBerg, D. A., Bergbusch, P. A., & Dowler, P. D. 2006, ApJS, 162, 375

Vernazza, J. E., Avrett, E. H., & Loeser, R. 1981, ApJS, 45, 635

Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. 2020, Nature Methods, 17, 261

Walker, G., Matthews, J., Kuschnig, R., et al. 2003, PASP, 115, 1023

Wood, T. S., Garaud, P., & Stellmach, S. 2013, ApJ, 768, 157

Wright, E. L., Eisenhardt, P. R. M., Mainzer, A. K., et al. 2010, AJ, 140, 1868

Zahn, J. P. 1991, A&A, 252, 179

—. 1992, A&A, 265, 115

Zinn, J. C., Pinsonneault, M. H., Huber, D., & Stello, D. 2019, ApJ, 878, 136