



HAL
open science

Formulation et mise en œuvre d'un élément continu de plaque orthotrope et de plaque multicouche non-symétriques

Karima Khlifi

► **To cite this version:**

Karima Khlifi. Formulation et mise en œuvre d'un élément continu de plaque orthotrope et de plaque multicouche non-symétriques. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. CY Cergy Paris Université; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2022. Français. NNT : 2022CYUN1089 . tel-03687452

HAL Id: tel-03687452

<https://theses.hal.science/tel-03687452v1>

Submitted on 3 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Cergy-Pontoise
Université de Sfax

Thèse de Doctorat

École doctorale n° 417

Présentée par
Karima KHLIFI

**FORMULATION ET MISE EN ŒUVRE D'UN
ÉLÉMENT CONTINU DE PLAQUE ANISOTROPE
ET DE PLAQUE MULTICOUCHE NON
SYMÉTRIQUE**

Soutenue à ISAE-SUPMECA le 25 Février 2022

Membres du jury :

M. Abdelkhalek ELHAMI, Professeur des Universités, Institut National des Sciences Appliquées de ROUEN (INSA de ROUEN), **Président**

M. Hervé LE SOURNE, Enseignant-Chercheur HDR, Institut Catholique d'Arts et Métiers (ICAM), site de NANTES, **Rapporteur**

M. Chokri BOURAOUI, Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sousse (ENISO), **Rapporteur**

Mme. Molka ATTIA HILI, Maître de Conférences HDR, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Tunis (ENSIT), **Examinatrice**

M. Jean-Baptiste CASIMIR, Professeur des Universités, Institut Supérieur de Mécanique de Paris (SUPMECA), **Directeur de thèse**

M. Ali AKROUT, Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis (ENIT), **Directeur de thèse**

M. Mohamed HADDAR, Professeur, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), **Co-encadrant**

Titre : Formulation et mise en oeuvre d'un élément continu de plaque orthotrope et de plaque multicouche non-symétriques

Résumé : Le présent travail de thèse traite du développement d'un élément continu de plaque orthotrope et de plaque multicouche non-symétriques basé sur l'utilisation d'une nouvelle série de Lévy dite *Série de Lévy enrichie*. La démarche consiste dans un premier temps à valider ces nouvelles séries pour des plaques orthotropes à symétries matérielles et géométriques confondues. Cette formulation est basée sur la résolution des équations de mouvement sans avoir recours à la superposition de Gorman qui suppose un découplage des contributions symétriques et anti-symétriques. La matrice de rigidité est ensuite obtenue par projection des déplacements et des efforts de frontières sur des bases de projection convenables. Dans un second temps, nous avons développé un élément continu pour une plaque orthotrope dont les axes d'orthotropie sont orientés de manière quelconque. La formulation est ensuite étendue aux éléments de plaques multicouches non-symétriques pour lesquels le couplage entre les mouvements de flexion et de membrane est pris en compte. La validation de ces éléments est menée par une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de modélisation éléments finis.

Mots clés : Méthode des éléments continus, Matrice de raideur dynamique, Plaques orthotropes non-symétriques, Plaques multicouches non symétriques, Plaques sandwichs

Title : Formulation and implementation of a continuous element for non-symmetrical orthotropic plates and multilayer plates

The present thesis deals with the development of a continuous element of orthotropic plate and non-symmetric multilayer plate based on the use of a new Lévy series called *Lévy series enriched*. The first step is to validate these new series for orthotropic plates with coincident material and geometrical symmetries. This formulation is based on the resolution of the equations of motion without using the Gorman superposition which supposes a decoupling of the symmetric and anti-symmetric contributions. The stiffness matrix is then obtained by projecting the displacements and boundary forces on suitable projection bases. In a second step, we developed a continuous element for a thin plate constructed from orthotropic materials such that the principal axes of orthotropy are not parallel to the coordinate system adopted to the plate edges. The formulation is then extended to non-symmetric multilayer plate elements for which the cou-

pling between bending and membrane motions is taken into account. The accuracy of this strong formulations is demonstrated by comparing results with those obtained by the Finite Element Method.

Keywords : Dynamic Stiffness Method, Dynamic Stiffness Matrix, non-symmetrical orthotropic plates, non-symmetrical multilayer plates, Sandwich plates

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été réalisés en cotutelle entre le laboratoire QUARTZ à l'Institut Supérieur de Mécanique de Paris (ISAE-SUPMECA) et le Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Productique (LA2MP).

Tout d'abord, j'exprime ma sincère reconnaissance aux Professeurs Jean-Baptiste CASIMIR et Ali AKROUT, mes directeurs de thèses. Je les remercie pour m'avoir fait confiance et m'avoir accueilli dans leur laboratoire, pour leurs aides multiples, leurs suivis méthodiques de l'avancement de mes travaux de recherche, leurs conseils avisés ainsi que leur rigueur scientifique. Je ne les remercierai jamais assez. J'ai tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon co-encadrant Professeur Mohamed HADDAR de m'avoir aidé durant la thèse.

Je remercie vivement les rapporteurs Hervé LE SOURNE et Chokri BOURAOUI d'avoir accepté la lourde tâche d'évaluer mon manuscrit de thèse. Je remercie vivement également le Professeur ELHAMI de me faire l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes sincères remerciements à mes collègues Emna SGHAIER, Reza BABAJANI-VALASHEDI et à tout le personnel du laboratoire QUARTZ qui m'ont aidé à mener à bien mes travaux de thèse par leur bonne humeur, leur encouragement et leur soutien durant toutes ces années.

Enfin, je dédie ce travail a l'âme de mon père, mes mères (Fatma, Zohra) et pour toute ma famille sans qui je ne serais jamais arrivée là.

Table des matières

1	Introduction générale	15
1.1	Généralités concernant les matériaux multicouches et sandwichs . . .	16
1.2	Présentation générale du problème	20
2	Synthèse bibliographique	23
2.1	Introduction	23
2.2	Etudes vibratoires des plaques	23
2.2.1	Les origines - La théorie classique	23
2.2.2	Les plaques épaisses - La théorie du premier ordre	25
2.2.3	Les théories d'ordre supérieur	27
2.2.4	Les plaques multicouches	27
2.3	Méthodes numériques de résolution des modèles de plaque : Etat de l'art	29
2.3.1	Méthode des éléments finis	29
2.3.2	Méthode de Rayleigh-Ritz	30
2.3.3	Méthode des éléments de frontières	30
2.3.4	Méthodes des éléments continus : état de l'art	31
2.4	Conclusion	35
3	Séries de Levy enrichies	37
3.1	Introduction	37
3.2	Plaque de Kirchhoff orthotrope à symétries matérielles et géométriques confondues	40
3.2.1	Définition géométrique et matérielle	40
3.2.2	Hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff	41
3.2.3	Loi de comportement orthotrope et relations efforts-déplacement	42
3.2.4	Principe de Hamilton	43
3.3	Développement de nouvelles séries de Lévy	45
3.3.1	Définition	45
3.3.2	Construction de la série	46
3.3.3	Matrice de raideur dynamique d'une plaque orthotrope à sy- métries matérielles et géométriques confondues	49
3.4	Validation numérique du modèle	53
3.4.1	Analyse modale	53
3.4.2	Réponses harmoniques	56

3.4.3 Performances CPU	62
3.5 Conclusion	63
4 Element continu de plaque en flexion à directions d'orthotropie quelconques	65
4.1 Introduction	65
4.2 Plaques de Kirchhoff à direction d'orthotropie quelconque	65
4.2.1 Définition géométrique et matérielle	65
4.2.2 Hypothèses cinématiques	66
4.2.3 Loi de comportement et relations efforts/déplacements	66
4.2.4 Equations du mouvement	67
4.3 Matrice de raideur dynamique	68
4.3.1 Solution forte des équations du mouvement	68
4.3.2 Construction de la matrice de raideur dynamique	73
4.4 Validation numérique du modèle	76
4.5 Conclusion	80
5 Formulation d'éléments continus de structures multicouches	81
5.1 Introduction	81
5.2 Géométrie	82
5.3 Modélisation poutre	83
5.3.1 Hypothèses cinématiques	83
5.3.2 Loi de comportement et relations efforts-déplacement	83
5.3.3 Principe de Hamilton	84
5.3.4 Matrice de transfert dynamique	85
5.3.5 Matrice de raideur dynamique	86
5.3.6 Réponse harmonique	86
5.3.7 Les limites d'une modélisation poutre	92
5.4 Théorie de plaque multicouche	94
5.4.1 Hypothèses cinématiques	94
5.4.2 Loi de comportement	95
5.4.3 Efforts internes	96
5.4.4 Relations efforts/déplacements	99
5.4.5 Principe de Hamilton	99
5.4.6 Cas particulier d'une plaque bicouche à deux matériaux isotropes	100
5.5 Solutions de Lévy	102
5.5.1 Cas général	102
5.5.2 Plaque bicouche à matériaux isotropes	103
5.5.3 Matrice de raideur dynamique	112
5.6 Validation numérique	118
5.6.1 Propriétés géométriques et matérielles	119
5.6.2 Analyse modale	119
5.7 Conclusion	119
6 Conclusion générale et perspectives	121

Annexe	130
.1 Flexion de plaque de Kirchhoff	131
.2 Traction/flexion de poutre plane multicouche	135
.3 Membrane/Flexion de plaque	139

Table des figures

1.1	Composite stratifié	16
1.2	Matériaux pour les peaux	17
1.3	Matériaux pour les âmes	18
1.4	Répartition des matériaux composites dans le Boeing 787	19
1.5	Bateau en composite	19
2.1	Expérience de Chladni - Planche extraite de [1] (1809)	24
2.2	Equation de Germain-Lagrange extraite de <i>Papiers de Sophie GERMAIN</i> . Source Gallica.	24
2.3	Conservation des normales	25
2.4	Déformation de cisaillement constante dans l'épaisseur	26
2.5	Champ de déplacement du modèle zig-zag d'ordre supérieur	29
2.6	Décomposition de Gorman	33
3.1	Géométrie de la plaque	40
3.2	Modes SS, SA, AS et AA de la plaque orthotrope	56
3.3	Chargement symétrique-symétrique	57
3.4	Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique	58
3.5	Chargement Antisymétrique-symétrique	59
3.6	Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-symétrique	59
3.7	Chargement ponctuel	60
3.8	Chargement ponctuel	61
3.9	Réponse harmonique pour différents niveaux d'amortissement	62
4.1	Géométrie de la plaque	66
4.2	Organigramme montrant la procédure d'élaboration du DSM et sa mise en oeuvre	76
5.1	Géométrie d'un stratifié non symétrique	82
5.2	Réponses harmoniques comparées sur [0,4000 Hz]	89
5.3	Réponses harmoniques comparées sur [4000, 10000 Hz]	90
5.4	Réponses harmoniques du couplage flexion/traction sur [0, 4000 Hz]	91
5.5	Réponses harmoniques du couplage flexion/traction sur [4000, 10000 Hz]	91
5.6	Maillages éléments finis des six modèles de plaques	92
5.7	Réponses harmoniques comparées EC poutre/EF plaque	93

Liste des tableaux

1.1	Composites sandwich à âmes pleines (gauche) et à âmes creuses (droite)	17
3.1	Propriétés élastiques et géométriques de la plaque orthotrope	54
3.2	Fréquences propres des modes SS pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (50×25, 67×33, 100×50 éléments)	54
3.3	Fréquences propres des modes SA pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	55
3.4	Fréquences propres des modes AS pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	55
3.5	Fréquences propres des modes AA pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	55
3.6	Temps CPU (500 fréquences traitées) et temps CPU/fréquence.	62
4.1	Propriétés élastiques et géométriques de la plaque orthotrope	77
4.2	Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 15^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	77
4.3	Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 30^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	77
4.4	Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 45^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	77
4.5	Formes de mode caractéristiques d'une plaque rectangulaire libre pour une orientation nulle et de 15° des axes d'orthotropie.	78
4.6	Déformées modales EC et EF d'une plaque à axes d'orthotropie inclinés de 30°	79
5.1	Maillages éléments finis	88
5.2	Propriétés des matériaux	119
5.3	Propriétés géométriques de la plaque multicouche	119
5.4	Fréquences propres d'une plaque multicouche non-symétrique. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)	119

1 Introduction générale

Historiquement, l'analyse harmonique des structures constituées de matériaux composites est traitée depuis l'apparition de ces matériaux par les ingénieurs et les chercheurs des secteurs de la construction mécanique, du bâtiment ou du génie civil. L'analyse vibratoire de ces structures est ainsi au cœur d'une activité de recherche intense et d'études dont les applications sont très vastes tant d'un point de vue académique qu'industriel. Cette dernière s'étend à de nombreux domaines parmi lesquels on peut citer, les technologies spatiales, l'ingénierie civile et navale, le bâtiment, les transports terrestres, l'aéronautique, ainsi que l'ingénierie nucléaire, du fait de leur caractéristiques avantageuses dont la principale est un faible rapport masse/résistance mécanique. Deux grandes problématiques peuvent être associées à l'utilisation des matériaux composites. Premièrement, la diversité de leurs domaines d'application les expose à une grande variété de modes de sollicitation et d'endommagement. Deuxièmement, le choix d'un matériau composite pour une application particulière nécessite d'avoir une bonne connaissance de ses propriétés. Dès lors, l'évaluation de ses propriétés présente un grand intérêt. Ces deux problématiques se déclinent en des variantes multiples selon le type d'endommagement à détecter (délaminage, fissuration, etc ...) ou la nature de la propriété à évaluer (mécanique, thermique, chimique etc ...). En conséquence, le comportement des éléments structuraux de type plaques ou coques soumis à vibrations mérite d'être étudié de manière exhaustive mais le problème est particulièrement complexe dans la mesure où aucune des solutions exactes connues ne couvrent toutes les conditions limites possibles, toutes les structures matériaux et tous les chargements rencontrés en pratique. Pour assurer ce contrôle, la détermination des caractéristiques dynamiques de ces composants doit être menée de manière approfondie par une modélisation aussi précise que possible. Notre travail de thèse apporte à cette problématique une contribution concernant les plaques orthotropes et multicouches. Il est ainsi nécessaire de débiter par une présentation très générale de ces structures. Le contexte industriel d'exploitation de ce type d'éléments structuraux est également précisé.

1.1 Généralités concernant les matériaux multicouches et sandwichs

Les stratifiées

Il est évident que les matériaux traditionnels ne peuvent rivaliser dans certains domaines avec les matériaux composites. Grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques combinées à leur légèreté, leur bonne résistance chimique et une meilleure tenue en fatigue, les matériaux multicouches occupent un large créneau dans l'élaboration des pièces composites. Le composite stratifié (Figure 1.1)¹ ou multicouche est constitué d'empilements de plis unidirectionnels ou bi-directionnels. Une couche de stratifié est souvent appelée une strate ou un pli. Ces couches sont le plus souvent des matériaux isotropes ou orthotropes dont les axes matériels peuvent différer d'une strate à l'autre. Parfois, l'épaisseur de ces plis est très faible, de l'ordre 0,125 mm pour un matériau de type carbone-époxy de type aéronautique et de 0,3 mm pour ceux qui sont utilisés dans l'industrie nautique. Les stratifiés présentent un avantage permettant de créer des matériaux aux propriétés mécaniques orientées de manière optimale afin de mieux répondre aux sollicitations s'exerçant sur la structure.

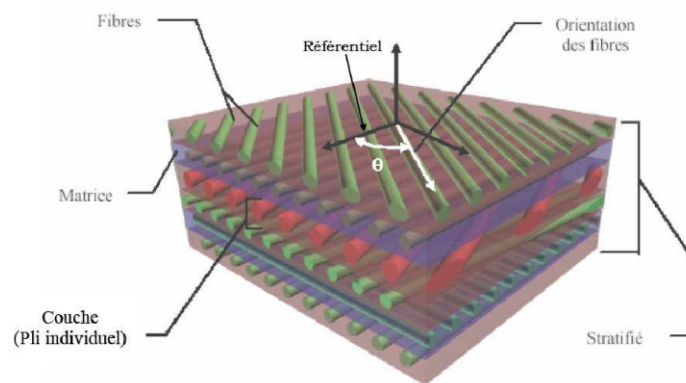


FIGURE 1.1 – Composite stratifié

Les sandwichs

Les sandwichs sont des matériaux qui présentent une solution de compromis permettant à la fois de rigidifier et d'alléger une structure. Ces structures possèdent deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant une âme de forte épaisseur et de faible résistance (Table 1.1)². L'ensemble forme un matériau de grande légèreté.

1. Illustration extraite de : [2]
 2. Illustrations extraites de : [3]

1.1. GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES MATÉRIAUX MULTICOUCHES ET SANDWICHS

Les sandwichs possèdent ainsi une bonne résistance aux efforts de flexion et souvent de bonnes propriétés d'isolation thermique ou acoustique.

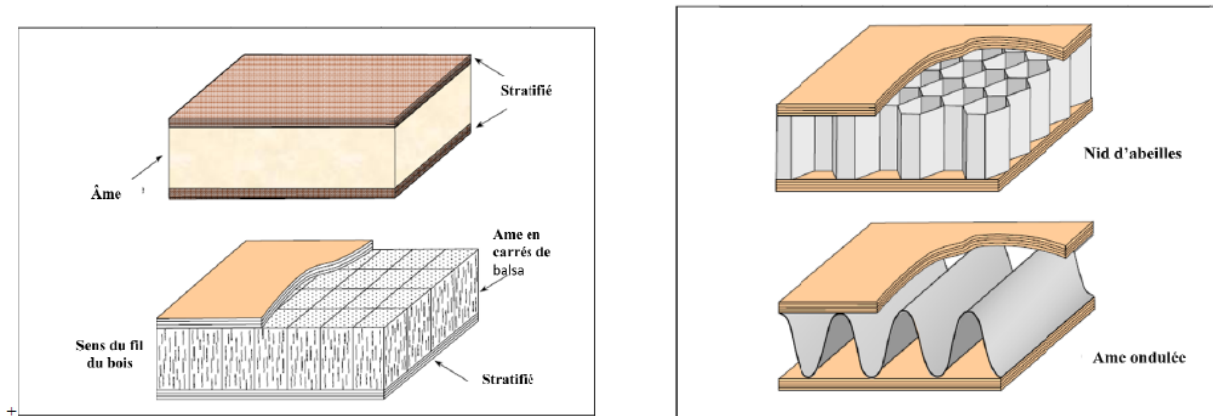


TABLE 1.1 – Composites sandwich à âmes pleines (gauche) et à âmes creuses (droite)

- Les peaux ou semelles :
Les peaux sont généralement constituées de tout matériau pouvant être obtenu sous forme de plaque (Figure 1.2). Elles peuvent être en matériau isotrope ou orthotrope, homogène ou inhomogène ou encore multicouche. Dans ce dernier cas, le choix de la nature et de l'empilement des couches dépendra de l'utilisation du matériau composite. Les peaux ont pour but de résister aux efforts de flexion qui se traduisent par des contraintes normales (traction ou compression).

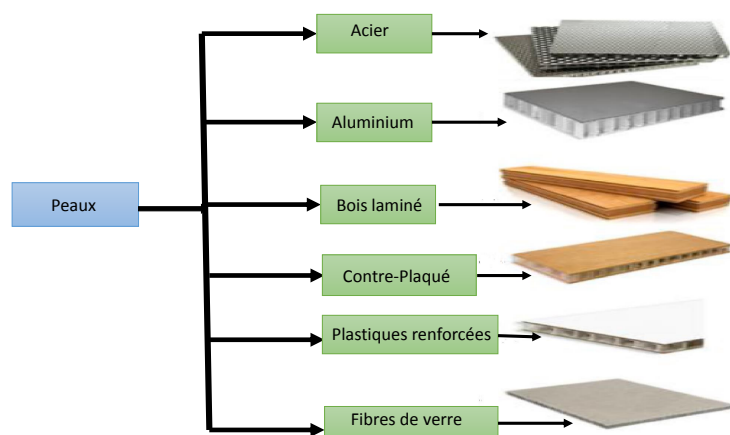


FIGURE 1.2 – Matériaux pour les peaux

- L'âme ou cœur :

L'âme est précisément l'élément central d'une structure sandwich. La conception de cet élément se caractérise par une faible masse et de faibles caractéristiques mécaniques. Le rôle mécanique principal de cette âme est de supporter les efforts de compression et de cisaillement engendrés suite au mouvement de glissement des semelles sous chargement, et de maintenir leur écartement. Elles ont souvent un rôle d'isolation acoustique ou thermique en revanche. Dans le secteur industriel, les types d'âmes le plus communs sont le bois de balsa, les nids d'abeilles et les mousses en polymères rigides (Figure 1.3).

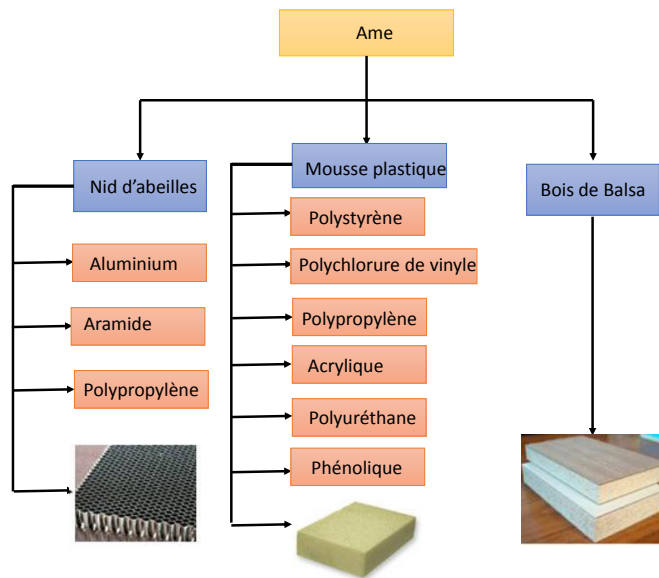


FIGURE 1.3 – Matériaux pour les âmes

Le contexte industriel

Aujourd'hui, l'emploi des matériaux composites dans des domaines aussi divers que l'aéronautique, l'automobile, la construction navale ou le bâtiment enregistre une progression importante.

Construction aéronautique

Ces dernières années, l'apparition de nouveaux matériaux constitutifs du cœur des sandwichs a encouragé les constructeurs d'avions civils et militaires à utiliser davantage ces structures composites. Par exemple, les planchers du Boeing 787 sont fabriqués en utilisant des matériaux composites. Contrairement aux structures métalliques, sa structure en sandwich lui confère une grande légèreté et par voie de conséquence conduit à une réduction de la consommation de carburant de l'appareil. On a ainsi l'habitude de considérer que ces matériaux s'inscrivent dans une démarche

globale d'écoconception. (Figure 1.4)³.

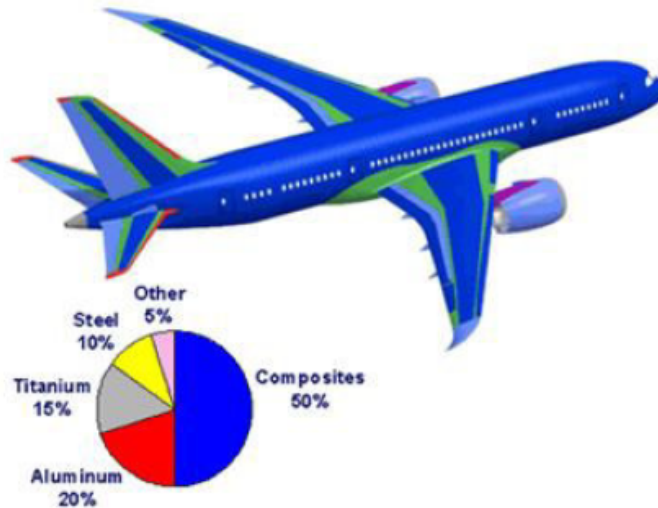


FIGURE 1.4 – Répartition des matériaux composites dans le Boeing 787

Construction navale

Les matériaux composites sont depuis très longtemps largement utilisés en construction navale (Figure 1.5)⁴. En effet, les caractéristiques de légèreté et surtout la bonne résistance à la corrosion de ces matériaux suscitent de l'intérêt depuis de très nombreuses années. Les propriétés exceptionnelles de ces structures en font le matériau idéal pour apporter des gains de masse de 40 % à 50 %.

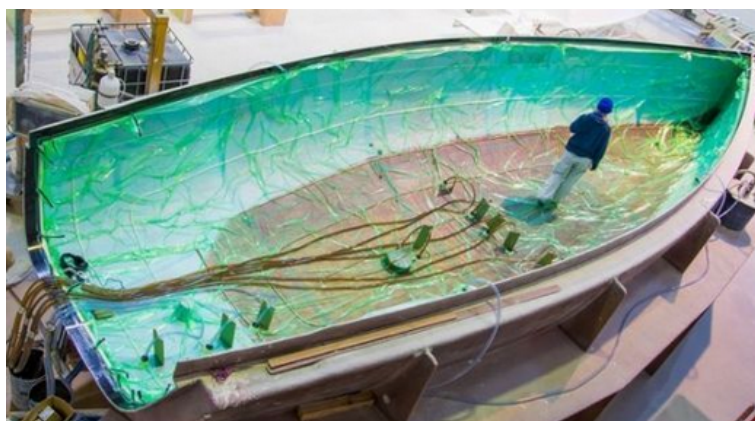


FIGURE 1.5 – Bateau en composite

3. Illustration extraite de : [4]

4. Illustration extraite de : [4]

Bâtiment et génie civil

Parmi les matériaux de construction très utilisés actuellement, les composites occupent une part de plus en plus importante grâce à leurs propriétés isolantes d'un point de vue thermique et phonique associées à des caractéristiques mécaniques de plus en plus performantes. Ainsi, dans ces secteurs l'isolation thermique et l'isolation acoustique sont les principales fonctionnalités recherchées auxquelles les matériaux structurés et multicouches sont particulièrement adaptés. En génie civil, les matériaux composites prennent également de plus en plus d'importance notamment dans les projets de réhabilitation des infrastructures routières et le renforcement des structures.

1.2 Présentation générale du problème

Pour étudier les caractéristiques vibratoires de structures complexes les chercheurs ont développé plusieurs approches. La méthode des éléments finis (FEM) reste la plus efficace et la plus utilisée aujourd'hui. Les fonctions d'interpolation utilisées dans cette méthode sont en général indépendantes des fréquences de sollicitation de la structure. Ainsi, la FEM nécessite une discrétisation de la structure dépendante du domaine fréquentiel d'étude, ce qui peut conduire à des volumes de données très conséquents pour obtenir suffisamment de précision lorsque la fréquence augmente. Cela peut entraîner une augmentation significative du coût de calcul, en particulier dans les processus itératifs d'optimisation. Naturellement, la demande excessive de ressources et de temps de calcul peut être évitée si des méthodes d'analyse et des techniques de solution plus précises sont disponibles sans accroître les données de modélisation. Pour l'analyse des vibrations des structures, une méthode alternative est ainsi développée depuis une quarantaine d'années basée sur l'absence de discrétisation, cette méthode est donc qualifiée de *méthode meshless*. On la désigne régulièrement en France par *Méthode des Eléments Continus* (MEC) ou à l'international par *Méthode de la Raideur Dynamique* (Dynamic Stiffness Method - DSM). Cette méthode est considérée comme une méthode qui conduit à des résultats dont la précision est nettement améliorée sur de larges gammes de fréquences et dont les coûts en termes de temps de calcul et de volume de données restent très limités.

L'objectif visé dans cette thèse s'inscrit ainsi dans cette approche meshless de caractérisation dynamique d'éléments structuraux composites de type plaque. Cette méthode autorise une modélisation à la fois légère et précise d'assemblages complexes d'éléments structuraux géométriquement simples. Les éléments développés et utilisés par cette approche se sont peu à peu enrichis dans le sens de modèles matériaux de plus en plus complexes. Notre travail s'est ainsi attaché à développer plus particulièrement un élément continu de plaque permettant de prendre en compte les effets de membrane (vibrations dans le plan) et les effets de flexion couplés. Cet élément doit permettre la modélisation meshless de plaques multicouches non symétriques à plis

orthotropes pour lesquelles les phénomènes de couplage membrane/flexion influencent considérablement le comportement vibratoire. Il vient parachever des développements antérieurs concernant les plaques composites mais en levant toutes les hypothèses simplificatrices qui ont pu être faites jusqu'à présent. Ce mémoire est constitué de quatre chapitres et d'une conclusion.

Dans le premier chapitre, nous avons éclairci l'analyse vibratoire des différents types de structure et les approches numériques variationnelles développées et utilisées. Une étude bibliographique focalisée sur la méthode des éléments continus (DSM), nous a aidé à faire une comparaison entre cette approche analytique et les autres méthodes numériques. A la fin de ce chapitre, un état de l'art concernant l'analyse des structures de plaque multicouches à plis anisotropes est présenté.

Le second chapitre de cette thèse est dédié au développement de l'élément continu d'une plaque orthotrope selon la flexion de Kirchhoff. Cette formulation est basée sur la résolution des équations du mouvement par l'utilisation d'une nouvelle série de Lévy désignée *Séries de Lévy Enrichies* qui permet de ne plus faire appel à la classique décomposition de Gorman. Les hypothèses de découplage des contributions symétriques et antisymétriques sont ainsi levées. La validation de cet élément est assurée par une confrontation des résultats obtenus avec ceux issus de modélisations éléments finis pour différents types de chargements. Ce modèle a fait l'objet du développement d'un code de calcul implémenté en langage Fortran dont une grande partie du code est généré automatiquement par le code de calcul formel Maple. Le modèle éléments finis permettant la validation des résultats est quant à lui simulé numériquement à l'aide d'un code de calcul industriel (ABAQUS).

Le troisième chapitre propose d'exploiter les séries de Lévy enrichies pour développer un élément continu de plaque orthotrope dont les directions d'orthotropie sont orientées par rapport aux axes de symétrie géométrique. Dans ce cadre, la résolution des équations du mouvement générales est détaillée à l'aide de ces séries puis une matrice de raideur dynamique est construite. La validation de l'élément développé est présentée par la comparaison des résultats issus de notre formulation avec ceux obtenus par la Méthode des Elément Finis.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à la modélisation d'un élément continu de plaque multicouche et sandwich non symétrique. Cette formulation est basée dans un premier temps sur un modèle d'élément continu de poutre multicouche qui permet de mettre en évidence les limitations de ce type de modélisation. Dans un second temps, un modèle plaque est développé basé une nouvelle fois sur l'utilisation des séries de Lévy enrichies. Le nombre de plis est quelconque, leur répartition n'est pas nécessairement symétrique ce qui induit des couplages entre les mouvements de flexion et de membrane. Ce chapitre se termine également par une validation numérique réalisée par confrontation de ce modèle avec un modèle éléments finis.

Enfin, ce travail se termine par une conclusion générale permettant de synthétiser la contribution réalisée pour l'étude vibratoire des structures composites et les perspectives envisagées à l'avenir.

2 Synthèse bibliographique

2.1 Introduction

Ce chapitre dresse un état de l'art permettant de définir le cadre général de cette thèse. Il se décompose en deux parties principales :

- Une première partie est consacrée à une synthèse des travaux de recherche concernant les théories vibratoires de plaques susceptibles d'être utilisées avec un focus sur l'analyse vibratoire des stratifiés et des plaques en structure sandwich.
- La seconde partie dresse un état de l'art concernant l'approche qui nous intéresse plus particulièrement : la *Méthode des Eléments Continus* également désignée *the Dynamic Stiffness Method*.

2.2 Etudes vibratoires des plaques

De manière générale, on distingue différentes théories relatives au comportement vibratoire des plaques. Ces théories ont été développées depuis plus de 200 ans et continuent à être adaptées de nos jours à la modélisation des plaques anisotropes et multicouches. Ces théories sont basées sur des hypothèses plus ou moins simplificatrices qu'il s'agit de rappeler. Il est donc sans doute utile de présenter dans un premier temps les théories qui se sont succédées et qui ont permis d'approcher de mieux en mieux les comportements observés.

2.2.1 Les origines - La théorie classique

Les premières modélisations pertinentes de plaque sont proposées au tout début du XIX^{ème} siècle à la suite d'observations expérimentales menées et présentées à travers toute l'Europe par Ernst Chladni à la fin du XVIII^{ème} siècle [1]. Sa célèbre expérience consistait à faire vibrer une plaque recouverte de sable sous l'action d'un archet et d'observer les figures géométriques décrites par la concentration des grains

de sable le long de lignes (Figure 2.1).

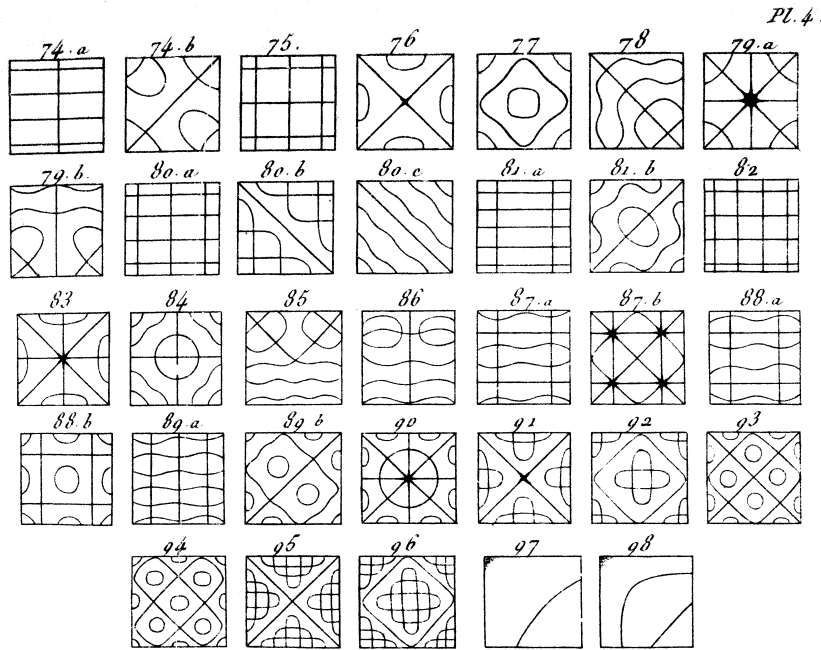


FIGURE 2.1 – Expérience de Chladni - Planche extraite de [1] (1809)

Une première tentative de modélisation est réalisée par Bernoulli en 1788 et proposée à l'Académie de Saint-Petersbourg. Elle consistait à considérer une plaque comme un ensemble de poutres perpendiculaires dont les vibrations avaient déjà été largement étudiées. Cette première approche trop simpliste ne permit pas de prévoir les observations de Chladni.

Un concours est alors lancé par l'Institut de France pour parvenir à expliquer ce phénomène. Après plusieurs tentatives et avec l'aide d'un illustre membre du jury, Joseph-Louis Lagrange, le concours est finalement remporté par Sophie Germain en 1815 dont l'équation biharmonique (Figure 2.2) est aujourd'hui connue comme celle de Germain-Lagrange [5].

FIGURE 2.2 – Equation de Germain-Lagrange extraite de *Papiers de Sophie GERMAIN*. Source Gallica.

Des solutions à l'équation de Germain-Lagrange sont proposées rapidement en 1818 par Fourier [6] qui exploite les séries qu'il a défini pour résoudre l'équation de

la chaleur ainsi que par Poisson par une approche plus classique [7].

Les équations de plaques et leurs solutions développées dans cette première moitié du XIXème siècle restent cependant insatisfaisantes vis à vis des conditions aux limites correspondant à un bord libre. Poisson [8] décrit ces conditions aux limites dès 1829 par 3 équations mais en 1850 Kirchhoff [9] démontre que ces conditions ne peuvent être satisfaites simultanément. Les travaux de ce dernier permettent de décrire la condition de bord libre par seulement 2 équations tout en assurant l'unicité de la solution.

En 1888, les hypothèses de Kirchhoff sont reprises par Love qui établit ce qu'on appelle aujourd'hui la théorie de Love-Kirchhoff des plaques minces [10]. Elle est basée sur les hypothèses suivantes :

- Les normales au feuillet moyen restent normales à ce feuillet au cours de la déformation.

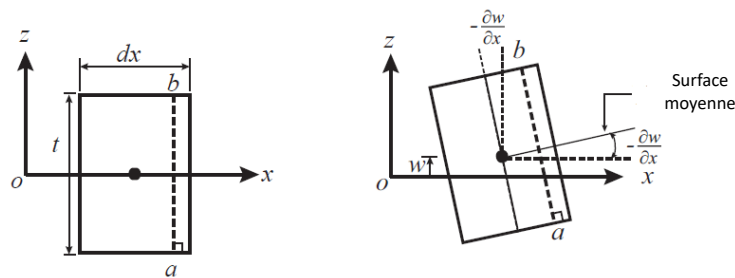


FIGURE 2.3 – Conservation des normales

- Il n'y a pas de déformation dans le sens de l'épaisseur de la plaque.
- Le feuillet moyen ne se déforme pas dans son plan.

Dans le cadre d'un modèle dynamique, on estime que cette théorie reste pertinente lorsque l'épaisseur de la plaque est petite vis à vis des longueurs d'ondes étudiées.

2.2.2 Les plaques épaisses - La théorie du premier ordre

Les conditions aux limites pour un problème de plaque considérée comme milieu tridimensionnel sont, quant à elles, décrites par 3 équations sur les bord libres correspondant à l'annulation de 3 composantes du tenseur des contraintes. La théorie de Love-Kirchhoff n'implique que deux relations du fait de la non prise en compte de l'énergie de déformation liée au cisaillement transverse [11]. Cette approximation a révélé une difficulté de la théorie classique pour prévoir les concentrations de contraintes observées sur des plaques trouées lorsque le diamètre des trous sont de

l'ordre de l'épaisseur de plaque. La prise en compte des effets du cisaillement transverse devient nécessaire pour adresser ces problèmes.

A l'instar de Timoshenko pour les poutres, Reissner en 1944 puis Hencky établissent un nouveau jeu d'équations différentielles concernant la flexion de plaques, tenant compte de l'énergie de déformation du cisaillement transverse. Ils utilisent un champ de déplacement linéaire dans l'épaisseur permettant une inclinaison des normales au feuillet moyen [12], [13]. A ce titre, cette théorie est qualifiée de théorie du premier ordre. Ces équations sont complétées par des conditions aux limites qui s'expriment cette fois-ci par 3 équations directement déduites de la théorie tridimensionnelle.

Suivant les mêmes hypothèses, Bolle définit un facteur de correction de cisaillement [14] qui permet de corriger la principale approximation de cette théorie selon laquelle les contraintes de cisaillement sont constantes dans l'épaisseur. L'année suivante c'est Uflyang qui exploite ces hypothèses pour modéliser les vibrations de ce type de plaques [15] et évalue le facteur correctif à $2/3$.

Enfin, en 1951, Mindlin [16] propose un critère pour la détermination du facteur de correction et l'évalue pour sa part à $5/6$. Son nom est définitivement associé à celui de Reissner ou Uflyang pour désigner ces modèles de plaques respectivement statiques et dynamiques. On considère en général que ces théories sont à utiliser dès que l'épaisseur de la plaque est supérieur au dixième de ses dimensions latérales.

La première hypothèse de Love-Kirchhoff est donc remplacée par une hypothèse de section plane avec une déformation de cisaillement γ constante dans l'épaisseur (voir figure 2.4).

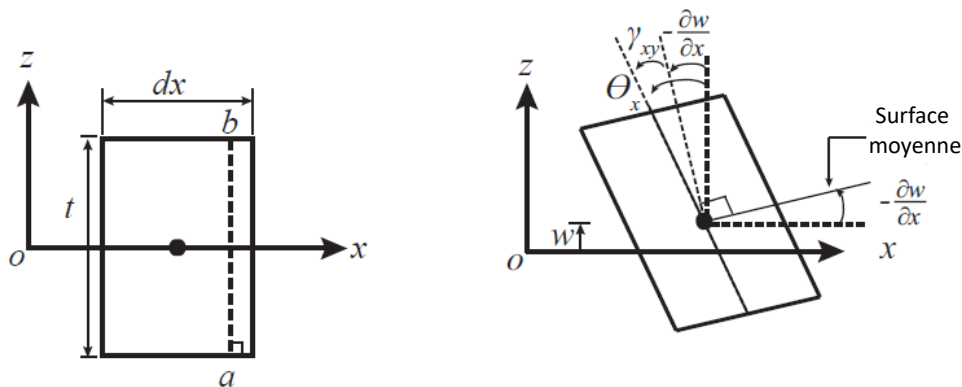


FIGURE 2.4 – Déformation de cisaillement constante dans l'épaisseur

2.2.3 Les théories d'ordre supérieur

Par la suite, des champs de déplacement plus riches dans l'épaisseur de la plaque sont proposés régulièrement [17], [18], [19], [20]. Ils consistent, pour la plupart, en une expression polynômiale du champ de déplacement de la forme :

$$U_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + z\phi_i^1(x, y) + \dots + z^n\phi_i^n(x, y)$$

Ces champs de déplacements permettent d'obtenir des contraintes de cisaillement non constantes dans l'épaisseur comme le prévoit l'élasticité tridimensionnelle.

A titre d'exemple, Levinson [19] propose un champ de déplacement du troisième ordre de la forme :

$$U_i(x, y, z) = z\phi_i^1(x, y) + z^3\phi_i^3(x, y)$$

Ce champ permet en particulier la possibilité d'annuler le cisaillement sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque en l'absence de chargement.

On peut également classer dans cette catégories les théories pour lesquelles les champs de déplacement postulés sont de nature trigonométriques [21], [22] ou trigonométriques hyperboliques [23].

2.2.4 Les plaques multicouches

L'avènement de ce type de matériau dans les années 50 a amené de nombreuses études dont l'objectif a été d'adapter les théories de plaques existantes. C'est d'abord le modèle statique de Love-Kirchhoff qui fait l'objet d'une réécriture en 1961 par Reissner et Stavsky [24], [25] puis le modèle dynamique de Uflyang-Mindlin en 1966 par Yang et al. [26]. La principale nouveauté dans ces travaux est la prise en compte des effets du couplage membrane-flexion qui apparaît lorsque la plaque ne présente pas de plan de symétrie dans le sens de l'épaisseur.

On distingue en général deux approches :

- la plus simple qui consiste en un procédé d'homogénéisation : la plaque multicouche est assimilée à une plaque homogène équivalente. Les degrés de libertés sont alors identiques à celui d'une simple plaque.
- la plus précise qui consiste à introduire autant de paramètres cinématiques qu'il y a de plis dans le multicouche. Cette dernière approche dite *multiplis* nécessite évidemment beaucoup plus de ressources numériques.

La première approche est développée en utilisant l'une quelconque des théories de plaque homogène déjà citée que ce soit la théorie classique [27] (Classical Lamination Theory - théorie classique des stratifiés), la théorie du premier ordre [26] ou des théories d'ordre supérieur [28], [22]. Ces modèles ne permettent pas de prendre

en compte la continuité des contraintes de cisaillement à l'interface de deux couches, ce que permet en revanche les approches multiplis.

Certains modèles multiplis ont pu être ramenés à un modèle homogène tout en assurant la continuité des contraintes de cisaillement. C'est le cas des modèles dits *Zig-Zag*. Ces modèles [29] sont une extension aux plaques de modèles poutres multicouches développés dès les années trente par Lekhnitskii [30]. Ils s'avèrent nécessaires dès lors que les plis présentent des propriétés élastiques très différentes.

Ils permettent de mieux décrire les effets d'interface. Ainsi, différents modèles issus de l'approche multipli ont été proposés. Le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche ou ensemble de couches). On applique à chaque sous-structure une théorie du cisaillement transverse du premier ordre ou un modèle d'ordre supérieur. La cinématique des modèles zig-zag satisfait a priori les conditions de contact et est indépendante du nombre de couches. Le principal avantage du champ de déplacement des modèles zig-zag réside dans la bonne modélisation de la déformation de la normale à la surface déformée, ainsi que dans la vérification des conditions de continuité, sans toutefois augmenter le nombre de degrés de libertés et l'ordre des équations de la théorie du cisaillement. L'utilisation de coefficients de correction du cisaillement transversal est évitée. Sur la base du concept de Di Sciuva [31], plusieurs auteurs ont apporté des améliorations significatives aux modèles zig-zag (Murakami et al. [32], Averill et al. [33], He et al. [34], Icardi et al. [35], Carrera et al. [36, ?]). La principale amélioration est l'introduction d'une distribution non linéaire des déplacements. Ainsi, afin de mieux décrire la déformation en cisaillement des matériaux composites, des études ont associé aux modèles zig-zag les théories d'ordre supérieur (Cho et al. [37], [38]). Ils superposent le champ zig-zag (linéaire par morceau) à un champ de déplacement d'ordre élevé (souvent cubique) fig.2.5. Les conditions de compatibilité sont satisfaites sur les surfaces supérieures et inférieures des plaques afin de réduire le nombre de paramètres [39].

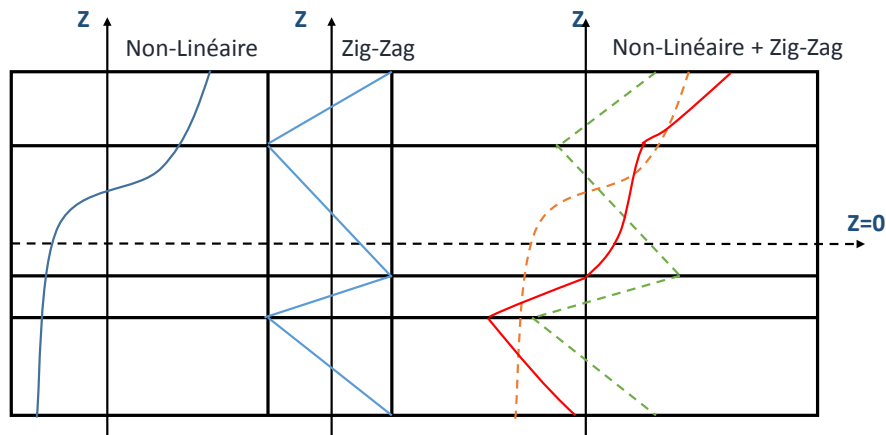


FIGURE 2.5 – Champ de déplacement du modèle zig-zag d'ordre supérieur

2.3 Méthodes numériques de résolution des modèles de plaque : Etat de l'art

2.3.1 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est sans aucun doute l'une des techniques numériques les plus populaires de ces cinquante dernières années. Il s'agit d'une méthode numérique puissante pour la résolution d'équations aux dérivées partielles dans divers problèmes d'ingénierie, tels que la mécanique des structures et des solides, l'acoustique, la mécanique des fluides et la conduction thermique. Cette méthode permet la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Elle est couramment utilisée comme une méthode de discrétisation afin de simuler le comportement de structure complexe. Les principes généraux de la MEF sont regroupés dans un livre de référence écrit par Zienkiewicz [40].

L'utilisation de cette méthode s'est largement développée et répandue pour la conception et l'analyse des produits industriels, elle a cependant certaines limites pour les modèles qui font intervenir des dérivées d'ordre élevé des champs inconnus. En effet, contrairement à la méthode de Rayleigh-Ritz, l'utilisation des dérivées multiples des fonctions de forme nécessite la mise en œuvre d'éléments dont les dérivées des fonctions de forme restent continues entre les éléments. Ce type d'élément est beaucoup plus complexe à mettre en œuvre et n'est pas encore très utilisé. Une autre limite de la méthode des éléments finis est le blocage des plaques en cisaillement. Ceci est dû au fait que certains modèles de plaques exigent un degré d'interpolation plus faible pour le cisaillement transversal que pour la flèche. Cette contrainte, bien que théoriquement mineure, peut également rendre l'implémentation de ces modèles de plaques plus compliquée.

2.3.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Pour comprendre et résoudre le problème de la réponse harmonique des structures, les chercheurs ont développé des méthodes basées sur la résolution soit analytique soit numérique d'équation différentielle du mouvement pour des conditions aux limites appliquées. Parmi ces approches, l'une des plus usitée est la méthode de Rayleigh-Ritz. Cette approche permet, en projetant les déplacements sur une base donnée, d'implémenter un modèle pour des plaques rectangulaires soumises à des chargements et des conditions aux limites variées. Le principal avantage de cette méthode réside dans le fait que, avec un choix approprié de la base de projection, les dérivées successives des fonctions de base sont simples à obtenir, est par conséquent, cette méthode est bien adaptée aux modèles nécessitant le calcul de dérivées multiples de la base. La précision des résultats obtenus est souvent relative aux choix de la base. Beslin et al.[41] furent parmi les premiers à proposer une base qui est adaptée au calcul de vibration pour diverses conditions aux limites. Cette méthode est classiquement employée en vibration pour étudier les structures de type complexes telles que les plaques et les coques raidies. Cette approche a été utilisé par Wang et [42] pour modéliser les problèmes de vibration libres des coques. Jafari et Bagheri[43] présentent par la suite, une étude analytique, expérimental et par élément finis afin d'analyser le comportement vibratoire d'une coque raidie avec un nombre assez important de raidisseurs externes.

2.3.3 Méthode des éléments de frontières

La méthode des éléments de frontière (BEM) est une méthode de calcul numérique bien établie pour l'analyse de problèmes d'ingénierie complexes. La BEM est une méthode plus récente qui s'est imposée dans les dernières années 1970 comme une alternative à la MEF dans l'analyse des problèmes d'ingénierie. Il existe une littérature abondante concernant l'application de la BEM. Néanmoins, elle est restre relative-ment faible par rapport aux développements de la méthode MEF pour l'analyse des plaques. La méthode BEM transforme les équations différentielles et les conditions aux limites en équations intégrales en utilisant les fonctions de Green. L'intégration est effectuée uniquement sur les intégrales de surface. C'est un avantage distinct par rapport à la MEF, car seule la frontière est discrétisée, et non le corps entier. Il en résulte une réduction de la dimension spatiale d'une unité [44]. Cela signifie que la BEM peut offrir une grande facilité pour la génération du maillage et simplifier le processus de manière significative. Cependant, l'exigence de la solution fondamentale limite l'application de cette méthode. Comme la MEF, la BEM a été appliquée aux théories des plaques de Kirchhoff et de Mindlin pour les plaques épaisses. Un résumé des formulations intégrales de cette approche peut être trouvé dans le livre de Jaswon et Symm [45]. C'est sur la BEM que les développements les plus importants ont été réalisés au cours de la dernière décennie pour la résolution numérique de problèmes de plaques, en particulier pour la flexion de plaques isotropes élastiques ([46], [47], [48]). L'une des caractéristiques les plus intéressantes de l'approche BEM est que les formulations intégrales impliquent des variables limites conventionnelles telles que la

déflexion, le moment de flexion et de torsion et la force de cisaillement équivalente, sur lesquelles les conditions limites habituelles sont imposées dans la théorie de la flexion de Kirchhoff. Certaines extensions de cette méthode concernent la flexion de plaques isotropes sur des fondations élastiques, et les problèmes de vibration libre et de flambage ([49], [50]). Bien que les formulations BEM soient maintenant bien établies pour les plaques minces isotropes, leurs application à l'analyse des plaques orthotropes n'a été tentée que rarement.

2.3.4 Méthodes des éléments continus : état de l'art

L'utilisation de la méthode des éléments finis est extrêmement puissante pour calculer la réponse harmonique et les caractéristiques modales de structures composites, mais des limites apparaissent lorsque la densité de modes augmente. La précision des résultats dépend beaucoup de la finesse de maillage et des études de convergence doivent être menées. Sans aucun doute, le maillage éléments finis doit dépendre de la fréquence la plus élevée de l'analyse. Le nombre de degrés de libertés du modèle augmente avec la valeur de la fréquence d'intérêt. Cette augmentation du nombre d'éléments finis nécessite un temps et un effort de calcul plus importants pour résoudre le problème.

Pour surmonter ces difficultés, plusieurs méthodes sans maillage ont été développées, notamment la Méthode de Rigidité Dynamique (Dynamic Stiffness Method ou DSM) [51]. La DSM a depuis subi d'importantes évolutions et il existe aujourd'hui des formes dérivées de cette méthode que l'on peut regrouper sous la désignation *Méthodes des éléments continus* (CEM) et qui inclut la *Méthode des Eléments Spectraux* (SEM) [52]. On peut dire que ces méthodes sont basées sur la solution exacte des équations différentielles de mouvement appelée encore solution forte par opposition aux solutions faibles des formulations intégrales. Par conséquent, cette technique consiste à utiliser un maillage minimal de la structure et on peut qualifier ces méthodes de *meshless*. Ces approches ont été largement développées pour les éléments de poutre au cours des vingt dernières années du 20^{ème} siècle [53, 54, 55, 56, 57, 58, 59].

Le principale idée de ces méthodes est de représenter le comportement dynamique des structures sous la forme d'un système matriciel reliant les efforts extérieurs et les déplacements sur les frontières du domaine pour des conditions aux limites libres (conditions de Neuman). Elles sont basées sur la construction de la matrice de rigidité dynamique qui est fonction de la pulsation ω du régime harmonique. Le système matriciel résultant a la forme suivante :

$$\mathbf{K}(\omega)\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.1)$$

où $\mathbf{K}(\omega)$ est la matrice de rigidité dynamique, \mathbf{U} est le vecteur des déplacements et \mathbf{F} est le vecteur des forces définis sur la frontière du domaine élémentaire. Dans le cas d'une frontière linéique il s'agit de projections des composantes de ces vecteurs sur une base fonctionnelle.

L'extention de ces approches aux éléments de plaque est cependant difficile. La principale difficulté est qu'il n'existe pas de solution exacte pour les équations différentielles du mouvement. Néanmoins, au cours des vingt dernières années, des formulations DSM pour les éléments de plaque ont été développées. L'idée principale est basée sur le développement en série des solutions fortes des équations du mouvement. Ainsi, au delà des modèles de plaque présentés dans la première partie de cette synthèse bibliographique, se pose le problème de la recherche de solutions. On entend par solutions, l'ensemble des champs satisfaisant les équations du modèle et les conditions aux limites associées. La recherche de telles solutions a été menée parallèlement à la construction des modèles dès les premiers travaux de Sophie Germain. Il a été très vite constaté, que dans le cas général d'un problème de dynamique de plaque, aucune expression analytique de ces solutions ne pouvait être établie comme il l'avait été pour les problèmes de poutre. Seuls des développements en séries ont permis d'approcher ces solutions. La convergence de ces développements plus ou moins rapide dépend néanmoins du type de séries exploitée.

Les premiers travaux en ce sens ont été menés par Fourier puis par Navier peu après l'établissement de l'équation de Germain-Lagrange évoquée précédemment. Il s'agit en réalité de doubles séries de Fourier dont les coefficients vont satisfaire un système d'équations algébriques qu'une approche numérique parviendra à déterminer. Ainsi, dans le cas d'une plaque rectangulaire en appui sur chacun de ses bords, le champ de déplacement vertical harmonique est décrit par une expression de la forme :

$$w(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

L'équation aux dérivées partielles de Germain-Lagrange se ramène alors à un système d'équations algébriques linéaire paramétré par la fréquence d'excitation satisfait par les coefficients A_{ij} .

Un peu plus tard, Lévy propose des séries simples qui permettent d'améliorer la convergence et de traiter d'autres type de conditions aux limites. Ainsi, dans le cas d'une plaque en appui sur deux cotés opposés, les deux autres restant libre, le déplacement harmonique vertical est cherché sous la forme :

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} f(x) \sin \frac{m\pi y}{b}$$

L'équation aux dérivées partielles de Germain-Lagrange se ramène alors à une équation différentielle du 4ème ordre paramétrée par la fréquence d'excitation satisfaite par la fonction $f(x)$. Ces solutions de Lévy sont limitées aux seules plaques pour lesquelles deux bords opposés sont simplement supportés. Les plaques soumises à de telles conditions aux limites sont souvent appelées plaques de Lévy.

Ainsi, bien que le problème théorique de la recherche de solutions pour une plaque rectangulaire ait une histoire qui s'étend sur environ deux siècles, il n'en reste pas moins que la plupart des solutions théoriques proposées dans un premier temps se limitent à des conditions aux limites particulières. Leissa [60, 61] a donné un aperçu exhaustif des solutions approchées pour le cas libre. Les solutions approximatives pour ce type de conditions aux limites sont basées sur des séries construites avec les fonctions propres de la poutre et une procédure de Rayleigh-Ritz. Plus tard, Gorman [62] a décrit une méthode de superposition pour traiter la vibration libre d'une plaque avec n'importe quel degré de précision. Son idée consiste à superposer deux solutions de Lévy précises pour satisfaire exactement à la fois une condition limite libre et les propriétés de symétrie des modes. Chaque contribution doublement symétrique, doublement antisymétrique et antisymétrique-symétrique est décomposée en deux blocs de construction pour lesquels une solution exacte de type Lévy est utilisée. Par conséquent, n'importe quel degré d'exactitude peut être obtenu. Dans cette approche, le problème de réponse harmonique pour des conditions de Neuman est ainsi décomposée en sous-problèmes qui sont affectés de conditions aux limites plus simples. La solution est décomposée en quatre contributions, respectivement, symétrique-symétrique (SS), antisymétrique-antisymétrique (AA), symétrique-antisymétrique (SA) et antisymétrique-symétrique (AS), seulement un quart de la plaque complètement libre est ainsi analysée (voir Figure 2.6).

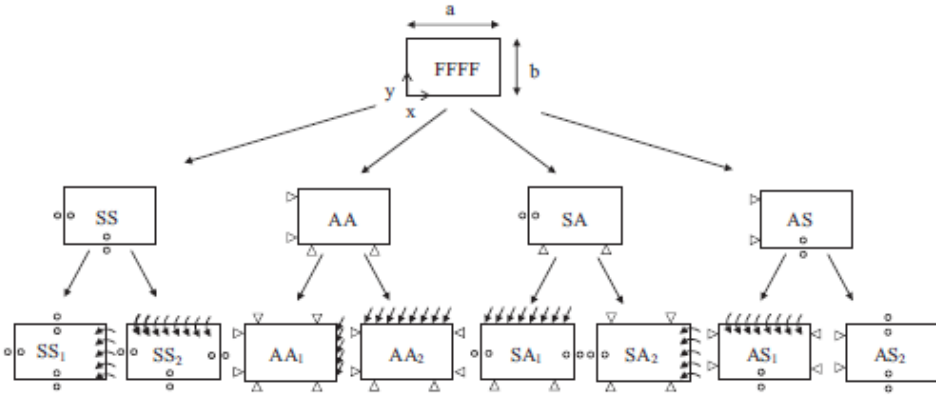


FIGURE 2.6 – Décomposition de Gorman

Les petites paires de cercles indiquent que la plaque a une réaction verticale au bord nulle et que la pente de la plaque prise perpendiculairement au bord est égale à zéro. Les flèches courbées signifient un moment non nul. Le déplacement $W_0(x, y)$ peut être exprimé comme suit :

$$W_0(x, y) = W_{SS}(x, y) + W_{AA}(x, y) + W_{SA}(x, y) + W_{AS}(x, y) \quad (2.2)$$

Aujourd'hui, dans le contexte des méthodes meshless et de la puissance des moyens de calcul allant croissant, de nombreuses études ont donné de nouvelles perspectives

aux solutions de type Navier et Lévy pour traiter les problèmes de déformation statique, de flambage ou d'analyse dynamique des plaques. Suite aux travaux de Langley [63] consacrés aux plaques raidies, le premier manuel incluant des formulations DSM de type plaques de Lévy a été écrit par Leung en 1993 [64]. Cet auteur donne par ailleurs une présentation exhaustive des éléments de poutre et d'éléments continus de plaque qui ont été développés jusqu'au début des années 90. Au cours de cette décennie, certaines formulations élémentaires de plaque ont été décrites par d'autres auteurs. Par exemple, Bercin traite des éléments de plaque orthotropes [65], Bercin et Langley ont traité le problème de l'assemblage d'éléments de plaque non coplanaires incluant des vibrations dans le plan [66] et Leung et Zhou des plaques composites [67].

Cependant, afin de formuler un élément continu de plaque pouvant supporter une liaison avec un autre élément continu de plaque coplanaire ou non coplanaire le long de l'un de ses quatre bords, des solutions pour des conditions aux limites entièrement naturelles sont nécessaires. Avec ce type de solutions, les matrices élémentaires de rigidité dynamique résultantes peuvent être assemblées pour constituer une matrice de rigidité dynamique structurelle de la même manière que la procédure d'assemblage de la méthode des éléments finis. En 2005, en utilisant la décomposition de Gorman, Casimir et al. [68] ont développé un élément continu de plaque rectangulaire avec des conditions aux limites libre. La procédure consiste à traiter quatre matrices de rigidité dynamique liées à chaque contribution de symétrie et une opération matricielle est décrite pour combiner ces quatre matrices en une matrice de rigidité dynamique complète. Bien que cette formulation incluant les conditions aux limites naturelles ait eu la capacité de supporter n'importe quelle autre connexion de plaque, les formulations d'éléments de plaques de Lévy, donc pour des conditions aux limites particulières, n'ont pas été abandonnées et de nombreuses théories de plaques ont été incluses. Par exemple, en 2011, Boscolo et Banerjee ont développé la matrice de raideur dynamique pour une plaque dans le cadre d'une théorie de déformation en cisaillement du premier ordre en utilisant les séries de Lévy [69] ou incluant la rigidité dans le plan [70]. Peu après ces auteurs ont analysé les plaques composite de Mindlin [71, 72]. La théorie de la déformation en cisaillement d'ordre supérieur a également été incluse par Fazzolari et al. [73] dans une formulation élément continu.

Les formulations DSM pour des conditions aux limites naturelles font l'objet des recherches les plus récentes. En 2015, la décomposition de Gorman des quatre contributions de symétrie a été utilisée de nouveau pour décrire les éléments continus de plaque. Au cours de cette année, de telles formulations concernaient les plaques rectangulaires isotropes pour les vibrations transversales par Banerjee et al. [74], pour les vibrations dans le plan par Nefovska-Danilović et Petronijević [75] et pour la théorie du cisaillement de Mindlin par Kolarević et al. [76] tandis que Ghorbel et al. avaient décrit une formulation élémentaire pour une plaque rectangulaire orthotrope [77]. L'année suivante, l'extension de la décomposition de Gorman aux vibrations dans le plan a été utilisée avec succès pour décrire une plaque orthotrope dans le plan avec des conditions aux limites naturelles par Ghorbel et al. [78], un élément continu

incluant des effets de déformation en cisaillement d'ordre supérieur a été décrit par Kolarević et al. [79] et un élément de plaque sandwich a été développé par Marjanović et al. [80] pour de telles conditions aux limites. Diverses formulations d'éléments de plaques sont toujours en cours. Par exemple, en 2017, Damnjanović et al. ont traité des plaques composites raidies [81, 82] et Nefovska-Danilović et al. des plaques multicouches [83, 84], toutes deux pour des conditions aux limites entièrement naturelles. En 2018 et 2019, Kumar et al. ont décrit un élément continu de plaque de Lévy incluant un matériau à gradient fonctionnel [85, 86] et, Papkov et Banerjee ont traité une plaque orthotrope de Mindlin pour des conditions aux limites entièrement naturelles [87].

Kumar et al. [88] ont utilisé la CPT (Classical plate theory) pour formuler la DSM et l'algorithme de Wittrick-Williams pour extraire la valeur propre des plaques FGM (functionally graded material). Dans la plupart des articles publiés à ce jour, l'analyse de la vibration libre des plaques en se basant sur la méthode meshless DSM a été effectué en utilisant l'approche de superposition de Gorman. Récemment, de nouvelles solutions ont été obtenues par Khelifi et al. [89], ils ont développé un nouvel élément continu de plaque orthotrope pour des conditions aux limites de type Neumann sans faire appel à la méthode de superposition de Gorman, ce travail est l'objet de cette thèse. Pour les plaques rectangulaires minces composites, de nouvelles solutions ont été obtenues par Papkov et Banerjee [90] et Papkov [91, 92] en appliquant la méthode de superposition. Ils ont constaté que pour une plaque qui est soit serrée, soit libre sur ses quatre bords, c'est-à-dire CCCC et FFFF, respectivement, les problèmes de valeurs limites peuvent être réduites aux solutions de systèmes infinis réguliers d'équations linéaires. La loi connue du comportement asymptotique de la solution unique pour ces systèmes a été utilisée pour construire la matrice de rigidité dynamique [93] pour l'analyse des vibrations libres de plaques minces rectangulaires pour des conditions limites arbitraires. Cette approche a ensuite été généralisée pour les plaques minces composites orthotropes par Liu et Banerjee [94, 95]. Nefovska-Danilovic et al. nefovska15 ont développé la DSM pour étudier le problème de vibration des structures plaques en combinant la méthode de superposition de Gorman avec la méthode de projection. Bien que la DSM ait été utilisée pour étudier les caractéristiques de vibration libre de structures à plaques couplées dans certaines publications [96], dans ce travail la méthode de la rigidité dynamique (DSM) est mise en œuvre pour étudier les comportements de vibrations libres et forcées de structures de plaques minces, couplées en trois dimensions. Les vibrations en flexion et dans le plan sont prises en compte. Dans la formulation, les structures de plaques couplées sont divisées en plusieurs sous-plaques, puis les matrices de rigidité dynamiques des sous-plaques sont dérivées séparément en combinant la méthode de superposition avec la méthode de projection.

2.4 Conclusion

Cette synthèse bibliographique a été dédiée à l'acquisition des connaissances théoriques nécessaires à la modélisation du comportement vibratoire des plaques et la

recherche de solutions numériques. Dans un premier temps, nous avons présenté les théories de plaque généralement utilisées, ainsi qu'une revue sommaire des approches numériques. Le contexte meshless présenté dans un second temps permet d'inscrire la contribution de nos travaux dans une démarche générale de développement de nouveaux types d'éléments. Cette démarche reste la condition sine qua non pour que la Méthode des Éléments Continus puisse continuer son développement et trouver de nouvelles applications.

Le chapitre suivant portera sur la présentation d'une formulation et mise en œuvre d'un élément continu de plaque orthotrope de Kirchhoff basée sur de nouvelles séries de Lévy permettant de ne pas faire appel à la décomposition de Gorman.

3 Séries de Levy enrichies

3.1 Introduction

Le développement d'éléments continus de plaque basée sur la décomposition de Gorman est aujourd'hui limité par les hypothèses inhérentes à cette approche. En effet, il s'avère que la décomposition du champ de déplacement en 4 contributions telle que décrite au chapitre précédent n'est possible que pour une catégorie limitée d'équations aux dérivées partielles. Cette limitation n'est apparue que récemment lorsque des formulations basées sur des théories de plaques plus précises ou plus générales ont été abordées. Il est nécessaire de préciser avant tout cette limitation qui est restée longtemps ignorée.

La décomposition de Gorman est basée sur 4 contributions distinctes possédant des propriétés de symétrie particulières. Elle consiste à exploiter la propriété que toute fonction dont le domaine de définition est située dans un plan (x,y) peut être considérée comme la somme de 4 fonctions respectivement symétrique-symétrique, symétrique-antisymétrique, antisymétrique-symétrique et antisymétrique-antisymétrique. Ainsi, dans le cas du champ de déplacement vertical $w(x, y)$ d'une plaque en flexion, on peut écrire :

$$w(x, y) = w_{SS}(x, y) + w_{SA}(x, y) + w_{AS}(x, y) + w_{AA}(x, y)$$

avec :

$$\begin{cases} w_{SS}(x, y) = \frac{1}{4} [w(x, y) + w(-x, y) + w(x, -y) + w(-x, -y)] = w_{SS}(-x, y) = w_{SS}(x, -y) = w_{SS}(-x, -y) \\ w_{SA}(x, y) = \frac{1}{4} [w(x, y) + w(-x, y) - w(x, -y) - w(-x, -y)] = w_{SA}(-x, y) = -w_{SA}(x, -y) = -w_{SA}(-x, -y) \\ w_{AS}(x, y) = \frac{1}{4} [w(x, y) - w(-x, y) + w(x, -y) - w(-x, -y)] = -w_{AS}(-x, y) = w_{AS}(x, -y) = -w_{AS}(-x, -y) \\ w_{AA}(x, y) = \frac{1}{4} [w(x, y) - w(-x, y) - w(x, -y) + w(-x, -y)] = -w_{AA}(-x, y) = -w_{AA}(x, -y) = w_{AA}(-x, -y) \end{cases}$$

Chacune de ces contributions est déterminée de manière indépendante et donne lieu à 4 matrices de raideurs dynamiques indépendantes. La formulation d'un élément continu basé sur cette décomposition est en réalité la formulation de 4 éléments continus définis par les matrices de raideurs $[\mathbf{K}_{SS}]$, $[\mathbf{K}_{SA}]$, $[\mathbf{K}_{AS}]$ et $[\mathbf{K}_{AA}]$ respectivement symétrique-symétrique, symétrique-antisymétrique, antisymétrique-symétrique et antisymétrique-antisymétrique. La matrice de raideur élémentaire $[\mathbf{K}]$ est ensuite obtenue par un regroupement dans une seule et même matrice de ces contributions

selon l'expression (Eq. 3.1).

$$[\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{K}_{SS}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\mathbf{K}_{SA}] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{K}_{AS}] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [\mathbf{K}_{AA}] \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Le succès de cette approche est lié au fait que chacune de ces contributions satisfait également l'équation aux dérivées partielles dont on souhaite déterminer la solution. En effet, prenons le cas du problème harmonique de la plaque en flexion de Kirchhoff. L'équation de Germain-Lagrange est donnée par (Eq. 3.2).

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \omega^2 w = 0 \quad (3.2)$$

Prenons la contribution SS donnée par $w_{SS}(x, y) = \frac{1}{4} [w(x, y) + w(-x, y) + w(x, -y) + w(-x, -y)]$. On constate que cette expression est telle que :

$$\begin{aligned} & \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial y^4} \right) + \rho h \omega^2 w_{SS} \\ &= \frac{1}{4} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, y) + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x, y) \right) + \frac{1}{4} \rho h \omega^2 w(x, y) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(-x, y) + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(-x, y) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(-x, y) \right) + \frac{1}{4} \rho h \omega^2 w(-x, y) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, -y) + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(x, -y) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x, -y) \right) + \frac{1}{4} \rho h \omega^2 w(x, -y) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(-x, -y) + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(-x, -y) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(-x, -y) \right) + \frac{1}{4} \rho h \omega^2 w(-x, -y) \end{aligned}$$

Cette expression est évidemment nulle si la fonction w satisfait elle-même l'équation (Eq. 3.2). On peut conclure que la contribution SS satisfait elle aussi l'équation de Germain-Lagrange et, on vérifie facilement qu'il en est de même pour les 3 autres contributions.

Supposons maintenant vouloir chercher des solutions d'une équation plus complexe de la forme suivante :

$$\alpha \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \alpha' \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + \beta \omega^2 w = 0 \quad (3.3)$$

La contribution SS est telle que :

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial y^4} \right) + \alpha' \frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^3 \partial y} + \beta \omega^2 w_{SS} \\ &= \frac{1}{4} \alpha \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, y) + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}(x, y) + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x, y) \right) + \frac{1}{4} \alpha' \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y}(x, y) + \frac{1}{4} \beta \omega^2 w(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(-x,y)+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}(-x,y)+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(-x,y)\right)-\frac{1}{4}\alpha'\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}(-x,y)+\frac{1}{4}\beta\omega^2 w(x,y) \\
& +\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,-y)+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}(x,-y)+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x,-y)\right)-\frac{1}{4}\alpha'\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}(x,-y)+\frac{1}{4}\beta\omega^2 w(x,-y) \\
& +\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(-x,-y)+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}(-x,-y)+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(-x,-y)\right)+\frac{1}{4}\alpha'\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}(-x,-y)+\frac{1}{4}\beta\omega^2 w(-x,-y)
\end{aligned}$$

Lorsque le déplacement w satisfait l'équation 3.3, l'expression précédente se réduit à :

$$\begin{aligned}
& \alpha\left(\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial y^4}\right)+\alpha'\frac{\partial^4 w_{SS}}{\partial x^3\partial y}+\beta\omega^2 w_{SS} \\
& =\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(-x,y)+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}(-x,y)+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(-x,y)\right)-\frac{1}{4}\alpha'\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}(-x,y)+\frac{1}{4}\beta\omega^2 w(x,y) \\
& +\frac{1}{4}\alpha\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,-y)+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}(x,-y)+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}(x,-y)\right)-\frac{1}{4}\alpha'\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}(x,-y)+\frac{1}{4}\beta\omega^2 w(x,-y)\neq 0
\end{aligned}$$

La contribution SS ne satisfait donc pas l'équation 3.3 et il en est de même pour les autres contributions. Il est impossible dans ce cas de découpler ces contributions et de les déterminer séparément. Ceci traduit le fait qu'un chargement symétrique-symétrique ne produit plus un champ de déplacement symétrique-symétrique mais un champ de déplacement quelconque. On peut parler de couplage des contributions symétriques et antisymétriques.

L'objectif de ce chapitre est de définir une nouvelle approche qui permette de s'affranchir de la décomposition de Gorman afin de déterminer la solution d'équations de plaque plus générales. Cette perspective nous à amener à définir des séries de Lévy plus générales n'ayant aucune propriété de symétrie. Il s'agit d'une contribution scientifique qui permettra le développement ultérieurs d'éléments continus intégrant des théories de plaque quelconques pour lesquelles l'équation de Germain-Lagrange n'est plus satisfaite.

On se limite pour l'instant aux plaques orthotropes dont les axes de symétries matérielles et géométriques sont confondus. La formulation élément continu de telles plaques a été déjà développée avec succès à l'aide de la décomposition de Gorman. L'objectif ici est avant tout de reformuler ces éléments sans faire appel à cette décomposition dont on vient d'expliquer les limitations. De nouvelles séries de Lévy dites *enrichies* décrivant le mouvement de manière globale sans hypothèse de symétrie sont alors décrites et exploitées pour développer cette catégorie d'éléments. Une matrice de raideur dynamique unique englobant l'ensemble des couplages pourra ainsi être construite. Cette reformulation permettra d'évaluer dans un premier temps les performances de ces séries vis à vis de celles utilisées jusqu'à présent avant de pouvoir être exploitées sur d'autres problèmes. Elle permettra de valider avant tout cette nouvelle approche dans le cadre d'éléments continus éprouvés.

Ce chapitre se décompose en trois parties :

- dans la première partie, le modèle théorique des plaques orthotropes de Kirchhoff est rappelé.
- la seconde partie présente la formulation élément continu basée sur des séries de Lévy enrichies.
- enfin, une dernière partie, est consacrée à la validation de cette approche par comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de la Méthode des Eléments Finis.

3.2 Plaque de Kirchhoff orthotrope à symétries matérielles et géométriques confondues

3.2.1 Définition géométrique et matérielle

On entend ici par plaque orthotrope symétrique une plaque rectangulaire dont les axes de symétrie géométriques et les axes d'orthotropie sont confondus. La symétrie matérielle correspond ainsi à la symétrie géométrique de la plaque. Si l'on prend le cas de renforts tissés, il s'agit de tissus dont la trame et la chaîne sont parallèles aux côtés de la plaque.

La géométrie de la plaque est définie dans un système de coordonnées cartésiennes, la figure 3.1 montre une plaque rectangulaire orthotrope définie par une épaisseur h et des dimensions $2a \times 2b$. L'origine O d'un système de coordonnées cartésiennes est choisie au centre du plan médian, l'axe Z étant la normale à ce plan.

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

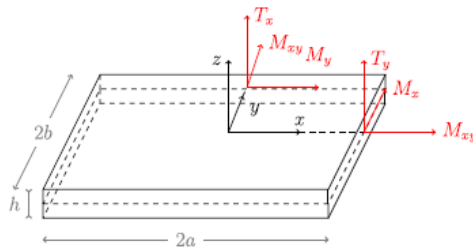


FIGURE 3.1 – Géométrie de la plaque

Le feuillet moyen de la plaque est défini par :

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a \\ -b \leq y \leq b \\ z = 0 \end{cases}$$

Le matériau utilisé dans ce chapitre est un matériau orthotrope tels que les directions d'orthotropie 1 et 2 soient respectivement confondues avec les axes x et y . Ainsi, on note, les propriétés matérielles suivantes qui interviennent dans la flexion de Kirchhoff :

- E_1 : Module Young longitudinal suivant la direction x
- E_2 : Module Young longitudinal suivant la direction y
- G_{12} : Module de Coulomb
- ν_{12} : Coefficient de Poisson
- ρ : Masse volumique

3.2.2 Hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff

Les hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff consistent à considérer que les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation, c'est à-dire que nous pouvons négliger le cisaillement transverse d'un point de vue des déformations. Ces hypothèses se traduisent par un champ de déplacement pour le mouvement de flexion décrit par les relations suivantes 3.4 :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial W}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = W(x, y, t) \end{cases} \quad (3.4)$$

u , v et w sont les déplacements d'un point $M(x, y, z)$ quelconque du volume selon les directions x , y et z respectivement. W est le déplacement selon z de la projection du point M sur le feuillet moyen suivant ou flèche.

β_y and β_x sont les rotations autour des axes x et y et se définissent par l'équation 3.5 :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \\ \beta_y = \frac{\partial W}{\partial y} \end{cases} \quad (3.5)$$

Le tenseur des petites déformations défini par $\bar{\bar{\epsilon}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\overline{\text{grad} \mathbf{U}}} + \overline{\overline{\text{grad}^T \mathbf{U}}} \right)$ a alors

pour composantes, dans le système ce coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \epsilon_{zz} = 0 \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \\ \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

3.2.3 Loi de comportement orthotrope et relations efforts-déplacement

On rappelle la loi de comportement tridimensionnelle de l'élasticité linéaire orthotrope en termes de souplesses.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{1}{E_2} \sigma_{yy} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{zz} \\ \epsilon_{zz} = \frac{-\nu_{13}}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{yy} + \frac{1}{E_3} \sigma_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{xz} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{xy} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La théorie de Kirchhoff fait par ailleurs l'hypothèse d'une contrainte dans le sens de l'épaisseur $\sigma_{zz} = 0$ ¹. Les relations comportementales tridimensionnelles deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E_1} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{yy} \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{xx} + \frac{1}{E_2} \sigma_{yy} \\ \epsilon_{zz} = \frac{-\nu_{31}}{E_3} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{yy} \\ 2\epsilon_{yz} = \frac{1}{G_{23}} \sigma_{yz} \\ 2\epsilon_{xz} = \frac{1}{G_{13}} \sigma_{xz} \\ 2\epsilon_{xy} = \frac{1}{G_{12}} \sigma_{xy} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \epsilon_{xx} + \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \epsilon_{xx} + \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2G_{12}\epsilon_{xy} \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Les contraintes de Cauchy permettent de définir des efforts généralisés (résultantes et moments) par intégration dans l'épaisseur de la plaque. On ramène ainsi ces inconnues de type effort à des champs surfaciques définis sur un domaine identique à celui des déplacements du feuillet moyen. On définit ainsi :

- Les efforts tranchants :

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz, \quad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yz} dz$$

1. Cette hypothèse est en contradiction avec le champ cinématique postulé puisque ce champ conduit à une déformation ϵ_{zz} nulle également. Cette contradiction est l'une des failles du modèle de Kirchhoff mais reste admissible pour les plaques minces.

3.2. PLAQUE DE KIRCHHOFF OTHOTROPE À SYMÉTRIES MATÉRIELLES ET GÉOMÉTRIQUES CONFONDUES

- Les moments de flexion :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xx}dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{yy}dz$$

- Le moment de torsion :

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{xy}dz$$

En utilisant les lois de comportement dans ces définitions, nous obtenons les relations entre moments et champ de déplacement vertical :

$$\begin{cases} M_x = -\frac{h^3}{12}D_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12}D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ M_y = -\frac{h^3}{12}D_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12}D_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ M_{xy} = -\frac{h^3}{6}D_{66}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} \end{cases} \quad (3.9)$$

avec :

$$\begin{cases} D_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ D_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ D_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ D_{66} = G_{12} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour ce qui est des efforts tranchants, ils sont déterminés à partir des équations d'équilibre d'un élément de surface. En l'absence de chargement réparti et en négligeant l'inertie de rotation, l'équilibre des moments selon x et y donnent :

$$\begin{cases} -M_y(x, y + dy)dx + M_y(x, y)dx - M_{xy}(x + dx, y)dy + M_{xy}(x, y)dy + T_y(x, y + dy)dxdy = 0 \\ M_x(x + dx, y)dy - M_x(x, y)dy + M_{xy}(x, y + dy)dx - M_{xy}(x, y)dx - T_x(x + dx, y)dxdy = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial M_y}{\partial y}dxdy - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dxdy + T_ydxdy = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x}dxdy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}dxdy - T_xdxdy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \end{cases}$$

Soit, en termes de déplacement vertical :

$$\begin{cases} T_x = -\frac{h^3}{12}D_{11}\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{h^3}{12}(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2} \\ T_y = -\frac{h^3}{12}D_{22}\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \frac{h^3}{12}(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y} \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2.4 Principe de Hamilton

Equations du mouvement

Le principe de Hamilton est un principe général qui s'applique à une grande classe de problèmes en mécanique. Ce principe établit que le déplacement réel qu'un corps subit entre deux instants t_1 et t_2 , parmi toutes les trajectoires possibles, est celui qui permet à la fonction lagrangienne $T - V$ intégrée entre ces deux instants à laquelle on ajoute le travail des forces non conservatives d'atteindre un extremum. Dans le cas

d'un solide élastique T est l'énergie cinétique du système et V l'énergie de déformation élastique. Ainsi :

$$\forall \delta u(t), \delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

où δW est le travail des forces non conservatives.

Ce développement variationnel est précisé en Annexe A et conduit aux équations du mouvement en termes de déplacements et d'efforts internes. Elle s'écrivent dans le cadre des hypothèses cinématiques de Kirchhoff et en négligeant l'énergie cinétique de rotation :

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \operatorname{div} \operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} = 0 \quad (3.12)$$

Soit, dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \right)_\alpha = \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} \right) = \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} = 0$$

C'est à dire, dans le système de coordonnées cartésiennes défini par le repère $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = 0$$

En utilisant la loi de comportement 3.9, on obtient :

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{h^3}{12} D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{h^3}{6} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^3}{12} D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0 \quad (3.13)$$

Conditions aux limites

La formulation élément continu et la construction de la matrice de raideur dynamique sont fondées sur la solution de la forme forte du problème élastodynamique pour des conditions aux limites de type Neuman. On parle aussi de conditions aux limites naturelles ou bien de conditions aux limites libres. Ce sont des conditions de type effort qui sont imposées sur les quatres bords de la plaque, ces efforts sont soit des efforts transverses soit des moments de flexion. Ces bords restent libres pour tout mouvement, c'est à dire qu'aucun déplacement n'est imposé.

Les termes du développement variationnel intégrés sur la frontière de la plaque permettent de préciser les conditions aux limites possibles sur cette frontière. Elle s'écrivent pour des conditions aux limites naturelles (voir Annexe A) :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{M}_{nn} \\ \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \operatorname{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}_n + \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \end{cases} \quad (3.14)$$

où \mathbf{t} est le vecteur tangent à la frontière, \mathbf{n} le vecteur normal dirigé vers l'extérieur du domaine et s une abscisse curviligne décrivant le contour. Dans le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions $2a \times 2a$ ces conditions s'écrivent sur chacun des bords :

- Sur les côtés $x = \pm a$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{xx} = \mathcal{M}_{xx} \\ \frac{M_{xy}}{\partial y} + \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \mathbf{j} \right] \cdot \mathbf{i} = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \mathcal{T}_x + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y} \end{array} \right.$$

En utilisant la loi de comportement 3.9, ces conditions s'écrivent en termes de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{h^3}{12} D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \mathcal{M}_{xx} \\ -\frac{h^3}{12} D_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{h^3}{12} (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = \mathcal{T}_x + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

On pose $\mathcal{F}_{zx} = \mathcal{T}_x + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y}$. Cet effort est appelé *effort de Kirchhoff*.

- Sur les côtés $y = \pm b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{yy} = \mathcal{M}_{yy} \\ \frac{M_{xy}}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) \mathbf{j} \right] \cdot \mathbf{j} = 2 \frac{M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = \mathcal{T}_y + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial x} \end{array} \right.$$

En utilisant la loi de comportement 3.9, ces conditions s'écrivent en termes de déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{h^3}{12} D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \mathcal{M}_{yy} \\ -\frac{h^3}{12} (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} - \frac{h^3}{12} D_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = \mathcal{T}_y + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial x} \end{array} \right. \quad (3.16)$$

On pose $\mathcal{F}_{zy} = \mathcal{T}_y + \frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial x}$.

3.3 Développement de nouvelles séries de Lévy

3.3.1 Définition

La méthode de superposition de Gorman ne permettait d'analyser qu'un quart de plaque ou une plaque rectangulaire pour chaque contribution de symétrie. L'utilisation des séries de Lévy présentées dans ce paragraphe simplifie le problème. Elles permettent de décrire une solution générale de la forme forte du problème élastodynamique sans faire appel à une décomposition du mouvement en quatre contributions.

Comme évoqué en introduction, ces solutions permettront d'envisager des problèmes de plaque plus généraux pour lesquels les quatre contributions ne sont pas découplées et ne peuvent être évaluées de manière indépendante.

Dans le cas d'une oscillation harmonique, le déplacement transversal peut être exprimé comme suit :

$$W(x, y, t) = W_0(x, y) e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

La nouvelle série de Levy proposée est définie par l'expression suivante :

$$W_0(x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} {}_1W_m(x) \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} {}_2W_m(y) \cos(k_{2m}x) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3W_m(x) \sin(k_{3m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_4W_m(y) \sin(k_{4m}x) \quad (3.18)$$

Les coefficients k_{im} dépendent de l'entier m et pourront être choisis ultérieurement. β_x et β_y sont les deux rotations selon les axes x et y , elles sont déterminées à partir de l'équation 3.5. En introduisant l'expression 3.18 dans l'équation 3.5 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_x(x, y) = - \sum_{m=0}^{+\infty} {}_1W'_m(x) \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} k_{2m} {}_2W_m(y) \sin(k_{2m}x) \\ \quad - \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3W'_m(x) \sin(k_{3m}y) - \sum_{m=1}^{+\infty} k_{4m} {}_4W_m(y) \cos(k_{4m}x) \\ \beta_y(x, y) = - \sum_{m=0}^{+\infty} k_{1m} {}_1W_m(x) \sin(k_{1m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} {}_2W'_m(y) \cos(k_{2m}x) \\ \quad + \sum_{m=1}^{+\infty} k_{3m} {}_3W_m(x) \cos(k_{3m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_4W'_m(y) \sin(k_{4m}x) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

3.3.2 Construction de la série

Ici, quatre séries sont utilisées là où la superposition de Gorman nécessite 2 séries pour chaque contribution de symétrie, soit un total de huit séries. Par conséquent, seules les quatre fonctions de la famille ${}_1W_m(x)$, ${}_2W_m(y)$, ${}_3W_m(x)$ et ${}_4W_m(y)$ doivent être obtenues. La procédure est décrite ici.

Tout d'abord, les équations du mouvement doivent être résolues pour les conditions aux limites naturelles. Par conséquent, l'expression 3.18 est introduite dans l'équation du mouvement 3.13.

On obtient deux systèmes découplés d'équations différentielles le long de l'axe des x et de l'axe des y . Ces systèmes sont donnés par les Eqs.3.20 et 3.21.

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{d^4 {}_1W_m}{dx^4} + a_2(m) \frac{d^2 {}_1W_m}{dx^2} + a_3(m) {}_1W_m = 0 \\ a'_1 \frac{d^4 {}_3W_m}{dx^4} + a'_2(m) \frac{d^2 {}_3W_m}{dx^2} + a'_3(m) {}_3W_m = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \frac{d^4 {}_2W_m}{dy^4} + b_2(m) \frac{d^2 {}_2W_m}{dy^2} + b_3(m) {}_2W_m = 0 \\ b'_1 \frac{d^4 {}_4W_m}{dy^4} + b'_2(m) \frac{d^2 {}_4W_m}{dy^2} + b'_3(m) {}_4W_m = 0 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{h^3}{12} D_{11}, & a_2(m) &= \frac{h^3}{6} (D_{12} + 2D_{66}) k_{1m}^2, & a_3(m) &= \left[\rho h \omega^2 - \frac{h^3}{12} D_{22} k_{1m}^4 \right]. \\ a'_1 &= -\frac{h^3}{12} D_{11}, & a'_2(m) &= \frac{h^3}{6} (D_{12} + 2D_{66}) k_{3m}^2, & a'_3(m) &= \left[\rho h \omega^2 - \frac{h^3}{12} D_{22} k_{3m}^4 \right]. \\ b_1 &= -\frac{h^3}{12} D_{22}, & b_2(m) &= \frac{h^3}{6} (D_{12} + 2D_{66}) k_{2m}^2, & b_3(m) &= \left[\rho h \omega^2 - \frac{h^3}{12} D_{11} k_{2m}^4 \right] \\ b'_1 &= -\frac{h^3}{12} D_{22}, & b'_2(m) &= \frac{h^3}{6} (D_{12} + 2D_{66}) k_{4m}^2, & b'_3(m) &= \left[\rho h \omega^2 - \frac{h^3}{12} D_{11} k_{4m}^4 \right] \end{aligned}$$

On peut remarquer que les deux systèmes d'équations différentielles satisfaites par les fonctions inconnues ${}_1W_m$, ${}_3W_m$ et ${}_2W_m$, ${}_4W_m$ (Eqs. 3.20 et 3.21) sont découplés. Un système d'équations différentielles ordinaires le long de l'axe x est obtenu comme suit :

$$\begin{cases} {}_1W_m''''(x) &= -\frac{a_2(m)}{a_1}{}_1W_m''(x) - \frac{a_3(m)}{a_1}{}_1W_m(x) \\ {}_3W_m''''(x) &= -\frac{a'_2(m)}{a'_1}{}_3W_m''(x) - \frac{a'_3(m)}{a'_1}{}_3W_m(x) \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} {}_2W_m''''(y) &= -\frac{b_2(m)}{b_1}{}_2W_m''(y) - \frac{b_3(m)}{b_1b}{}_2W_m(y) \\ {}_4W_m''''(y) &= -\frac{b'_2(m)}{b'_1}{}_4W_m''(y) - \frac{b'_3(m)}{b'_1}{}_4W_m(y) \end{cases} \quad (3.23)$$

Les deux système d'équations 3.22 et 3.23 peuvent être mis en forme matricielle :

$${}_1Z'_m(x) = {}^1T_m {}^1Z_m(x), \quad {}_3Z'_m(x) = {}^3T_m {}^3Z_m(x) \quad (3.24)$$

$${}_2Z'_m(y) = {}^2T_m {}^2Z_m(y), \quad {}_4Z'_m(y) = {}^4T_m {}^4Z_m(y) \quad (3.25)$$

avec

$${}_jZ_m(x) = [{}_jW_m(x), {}_jW'_m(x), {}_jW''_m(x), {}_jW'''_m(x)]^T, \quad j = 1, 3$$

et

$${}_jZ_m(y) = [{}_jW_m(y), {}_jW'_m(y), {}_jW''_m(y), {}_jW'''_m(y)]^T, \quad j = 2, 4$$

Dans laquelle :

$${}^1T_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3(m)}{a_1} & 0 & -\frac{a_2(m)}{a_1} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$${}^3T_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a'_3(m)}{a'_1} & 0 & -\frac{a'_2(m)}{a'_1} & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^2T_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{b_3(m)}{b_1} & 0 & -\frac{b_2(m)}{b_1} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$${}^4T_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{b'_3(m)}{b'_1} & 0 & -\frac{b'_2(m)}{b'_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Les solutions générales des équations 3.24 et 3.25 sont déterminées en utilisant les valeurs propres distinctes et la matrice correspondante des vecteurs propres des matrices compagnons 1T_m , 2T_m , 3T_m and 4T_m . Ces solutions sont exprimées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1Z_m(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^iQ_m e^{i\lambda_m x} \\ {}^3Z_m(x) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^iQ_m e^{i\lambda_m x} \\ {}^2Z_m(y) = \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^iQ_m e^{i\lambda_m y} \\ {}^4Z_m(y) = \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^iQ_m e^{i\lambda_m y} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Soient, ${}^i\lambda_m, {}^iQ_m$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de 1T_m puis ${}^i\lambda_m, {}^iQ_m$ pour $i \in \{5, 6, 7, 8\}$ respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de 3T_m .

De même, ${}^i\lambda_m, {}^iQ_m$ pour $i \in \{9, 10, 11, 12\}$ respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de 2T_m puis ${}^i\lambda_m, {}^iQ_m$ pour $i \in \{13, 14, 15, 16\}$ respectivement les valeurs propres et vecteurs propres de 4T_m .

Les fonctions ${}_1W_m, {}_3W_m$ selon la direction x et ${}_2W_m, {}_4W_m$ selon la direction y peuvent être développées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_1W_m(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^1Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_1W'_m(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^2Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_1W''_m(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^3Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_1W'''_m(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^4Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_3W_m(x) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^1Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_3W'_m(x) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^2Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_3W''_m(x) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^3Q_m e^{i\lambda_m x} \\ {}_3W'''_m(x) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^4Q_m e^{i\lambda_m x} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_2W_m(y) = \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^1Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_2W'_m(y) = \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^2Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_2W''_m(y) = \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^3Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_2W'''_m(y) = \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^4Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_4W_m(y) = \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^1Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_4W'_m(y) = \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^2Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_4W''_m(y) = \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^3Q_m e^{i\lambda_m y} \\ {}_4W'''_m(y) = \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^4Q_m e^{i\lambda_m y} \end{array} \right. \quad (3.28)$$

- dans le cas particulier où $m = 0$ les fonctions ${}_1W_0$ et ${}_2W_0$ sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{h^3}{12} Q_{11} \frac{d^4 {}_1W_0}{dx^4} = -\rho h \omega^2 {}_1W_0(x) \\ -\frac{h^3}{12} Q_{22} \frac{d^4 {}_2W_0}{dy^4} = -\rho h \omega^2 {}_2W_0(y) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} {}_1W_0(x) = \sum_{i=1}^4 {}^iA_0 e^{i\lambda_0 x} \\ {}_2W_0(y) = \sum_{i=5}^8 {}^iA_0 e^{i\lambda_0 y} \end{cases} \quad (3.30)$$

où les valeurs propres ${}^i\lambda_0$ sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} {}^1\lambda_0 = \sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{11}h^2}} & {}^5\lambda_0 = \sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}^2\lambda_0 = -\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{11}h^2}} & {}^6\lambda_0 = -\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}^3\lambda_0 = i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{11}h^2}} & {}^7\lambda_0 = i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}^4\lambda_0 = -i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{11}h^2}} & {}^8\lambda_0 = -i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \end{cases} \quad (3.31)$$

Les équations 3.27,3.28,3.29 et 3.18 permettent alors de déterminer les solutions de Lévy enrichies. Ces solutions s'écrivent :

$$\begin{aligned} W_0(x, y) &= \sum_{i=1}^4 {}^iA_0 e^{i\lambda_0 x} + \sum_{i=5}^8 {}^iA_0 e^{i\lambda_0 y} \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m x} \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m y} \cos(k_{2m}x) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m x} \sin(k_{3m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m y} \sin(k_{4m}x) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Les expressions 3.27,3.28,3.29 et 3.19 permettent de déterminer les rotations comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_x(x, y) &= -\sum_{i=1}^4 {}^iA_0 {}^i\lambda_0 e^{i\lambda_0 x} - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^{2i}Q_m e^{i\lambda_m x} \cos(k_{1m}y) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m y} k_{2m} \sin(k_{2m}x) - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^{2i}Q_m e^{i\lambda_m x} \sin(k_{3m}y) \\ &- \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m y} k_{4m} \cos(k_{4m}x) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \beta_y(x, y) &= \sum_{i=5}^8 {}^iA_0 {}^i\lambda_0 e^{i\lambda_0 y} - \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^4 {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m x} k_{1m} \sin(k_{1m}y) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=9}^{12} {}^iA_m {}^{2i}Q_m e^{i\lambda_m y} \cos(k_{2m}x) + \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=5}^8 {}^iA_m {}^{1i}Q_m e^{i\lambda_m x} k_{3m} \cos(k_{3m}y) \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{i=13}^{16} {}^iA_m {}^{2i}Q_m e^{i\lambda_m y} \sin(k_{4m}x) \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3.3 Matrice de raideur dynamique d'une plaque orthotrope à symétries matérielles et géométriques confondues

Les séries de Lévy présentées ici sont exploitées pour construire la matrice de raideur dynamique d'une plaque dont les axes d'orthotropie sont confondus avec ses axes de symtrie géométrique.

La matrice de raideur dynamique de la plaque est obtenue à partir des deux matrices qui permettent de relier les déplacements et efforts généralisés sur le contour de la plaque aux constantes d'intégration du système d'équations différentielles. De la même façon que pour les formulation éléments continus de plaque déjà développées, les fonctions inconnues sur les 4 cotés sont projetées sur des bases de série de Fourier. Des développements en série de Fourier à $2N + 1$ termes pour des fonctions

périodiques de périodes $2a$ et $2b$ sont utilisés.

Dans un premier temps, les vecteurs déplacement sur les bords de la plaque $x = a$, $y = b$, $x = -a$ et $y = -b$ sont définis comme suit :

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} w_0(a, y) \\ \beta_x(a, y) \\ w_0(x, b) \\ \beta_y(x, b) \\ w_0(-a, y) \\ \beta_x(-a, y) \\ w_0(x, -b) \\ \beta_y(x, -b) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

De même les vecteurs efforts extérieurs sont définis sous la forme suivante :

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{zx}(a, y) \\ \mathcal{M}_x(a, y) \\ \mathcal{F}_{zy}(x, b) \\ \mathcal{M}_y(x, b) \\ -\mathcal{F}_{zx}(-a, y) \\ -\mathcal{M}_x(-a, y) \\ -\mathcal{F}_{zy}(x, -b) \\ -\mathcal{M}_y(x, -b) \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

En appliquant la méthode de projection [68], la dépendance de \tilde{u} et \tilde{f} vis à vis des variables spatiales x et y est éliminée. Les composantes des vecteurs \tilde{u} et \tilde{f} sont ensuite développées en série de Fourier comme suit :

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{S}W_n \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{A}W_n \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ \frac{1}{S}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{S}\beta_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{A}\beta_{xn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ \frac{2}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}W_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{A}W_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ \frac{2}{S}\beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}\beta_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{A}\beta_{yn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ \frac{3}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{3}{S}W_n \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{A}W_n \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ \frac{3}{S}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{S}\beta_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{A}\beta_{xn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ \frac{4}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{4}{S}W_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{A}W_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ \frac{4}{S}\beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{S}\beta_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{A}\beta_{yn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} {}^1_S \mathcal{F}_{zx0} + \sum_{n=1}^N {}^1_S \mathcal{F}_{zxn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N {}^1_A \mathcal{F}_{zxn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ {}^1_S \mathcal{M}_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^1_S \mathcal{M}_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N {}^1_A \mathcal{M}_{xn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ {}^2_S \mathcal{F}_{zy0} + \sum_{n=1}^N {}^2_S \mathcal{F}_{zyn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N {}^2_A \mathcal{F}_{zyn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ {}^2_S \mathcal{M}_{y0} + \sum_{n=1}^N {}^2_S \mathcal{M}_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N {}^2_A \mathcal{M}_{yn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ - {}^3_S \mathcal{F}_{zx0} - \sum_{n=1}^N {}^3_S \mathcal{F}_{zxn} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^N {}^3_A \mathcal{F}_{zxn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ - {}^3_S \mathcal{M}_{x0} - \sum_{n=1}^N {}^3_S \mathcal{M}_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^N {}^3_A \mathcal{M}_{xn} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \\ - {}^4_S \mathcal{F}_{zy0} - \sum_{n=1}^N {}^4_S \mathcal{F}_{zyn} \cos \frac{n\pi x}{a} - \sum_{n=1}^N {}^4_A \mathcal{F}_{zyn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \\ - {}^4_S \mathcal{M}_{y0} - \sum_{n=1}^N {}^4_S \mathcal{M}_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} - \sum_{n=1}^N {}^4_A \mathcal{M}_{yn} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

avec :

$$\begin{bmatrix} {}^1_S W_0 \\ {}^1_S \beta_{x0} \\ {}^2_S W_0 \\ {}^2_S \beta_{x0} \\ {}^3_S W_0 \\ {}^3_S \beta_{y0} \\ {}^4_S W_0 \\ {}^4_S \beta_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, -b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, -b) dx \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} {}^1_S W_n \\ {}^1_A W_n \\ {}^1_S \beta_{xn} \\ {}^1_A \beta_{xn} \\ {}^2_S W_n \\ {}^2_A W_n \\ {}^2_S \beta_{yn} \\ {}^2_A \beta_{yn} \\ {}^3_S W_n \\ {}^3_A W_n \\ {}^3_S \beta_{xn} \\ {}^3_A \beta_{xn} \\ {}^4_S W_n \\ {}^4_A W_n \\ {}^4_S \beta_{yn} \\ {}^4_A \beta_{yn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, -b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, -b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix}
 {}^1_S \mathcal{F}_{zx0} \\
 {}^1_S \mathcal{M}_{x0} \\
 {}^2_S \mathcal{F}_{zy0} \\
 {}^2_S \mathcal{M}_{y0} \\
 {}^3_S \mathcal{F}_{zx0} \\
 {}^3_S \mathcal{M}_{x0} \\
 {}^4_S \mathcal{F}_{zy0} \\
 {}^4_S \mathcal{M}_{y0}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(a, y) dy \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(a, y) dy \\
 \frac{1}{2b} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, b) dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, b) dx \\
 \frac{1}{2a} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(-a, y) dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(-a, y) dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, -b) dx \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, -b) dx
 \end{bmatrix}
 \text{ et }
 \begin{bmatrix}
 {}^1_S \mathcal{F}_{zxn} \\
 {}^1_A \mathcal{F}_{zxn} \\
 {}^1_S \mathcal{M}_{xn} \\
 {}^1_A \mathcal{M}_{xn} \\
 {}^2_S \mathcal{F}_{zyn} \\
 {}^2_A \mathcal{F}_{zyn} \\
 {}^2_S \mathcal{M}_{yn} \\
 {}^2_A \mathcal{M}_{yn} \\
 {}^3_S \mathcal{F}_{zxn} \\
 {}^3_A \mathcal{F}_{zxn} \\
 {}^3_S \mathcal{M}_{xn} \\
 {}^3_A \mathcal{M}_{xn} \\
 {}^4_S \mathcal{F}_{zyn} \\
 {}^4_A \mathcal{F}_{zyn} \\
 {}^4_S \mathcal{M}_{yn} \\
 {}^4_A \mathcal{M}_{yn}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(-a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{F}_{zx}(-a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(-a, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b \mathcal{M}_x(-a, y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{F}_{zy}(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, b) \cos \frac{n\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a \mathcal{M}_y(x, b) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} dx
 \end{bmatrix}
 \quad (3.40)$$

Les conditions aux limites de Neuman 3.15 et 3.16 sont utilisées pour exprimer les efforts extérieurs dans l'expression 3.40 ce qui permet d'obtenir la relation matricielle entre les projections de ces efforts sur la base de Fourier et les constantes d'intégration figurant dans la solution générale 3.26. La même opération est réalisée pour les déplacements dans l'expression 3.39. Il est ainsi possible de mettre en relation les vecteurs déplacement/force et les constantes d'intégration notées C_p :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{U}} &= \mathbf{H}(\omega) \mathbf{C}_p \\
 \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{G}(\omega) \mathbf{C}_p
 \end{aligned}
 \quad (3.41)$$

dans laquelle :

$$(\tilde{\mathbf{U}})^T = \begin{bmatrix}
 {}^1_S W_0 & {}^1_S \beta_{x0} & {}^2_S W_0 & {}^2_S \beta_{y0} & {}^3_S W_0 & {}^3_S \beta_{x0} & {}^4_S W_0 & {}^4_S \beta_{y0} \cdots & {}^1_S W_N & {}^1_A W_N & {}^1_S \beta_{xN} & {}^1_A \beta_{xN} \\
 {}^2_S W_N & {}^2_A W_N & {}^1_S \beta_{yN} & {}^2_A \beta_{xN} & {}^3_S W_N & {}^3_A W_N & {}^3_S \beta_{xN} & {}^3_A \beta_{xN} & {}^4_S W_N & {}^4_A W_N & {}^4_S \beta_{yN} & {}^4_A \beta_{yN}
 \end{bmatrix}_{(8+16N)}
 \quad (3.42)$$

$$(\tilde{\mathbf{F}})^T = \begin{bmatrix}
 {}^1_S \mathcal{F}_{zx0} & {}^1_S \mathcal{M}_{x0} & {}^2_S \mathcal{F}_{zy0} & {}^2_S \mathcal{M}_{y0} & {}^3_S \mathcal{F}_{zx0} & {}^3_S \mathcal{M}_{x0} & {}^4_S \mathcal{F}_{zy0} & {}^4_S \mathcal{M}_{y0} \cdots & {}^1_S \mathcal{F}_{zxn} & {}^1_A \mathcal{F}_{zxn} & {}^1_S \mathcal{M}_{xn} \\
 {}^1_A \mathcal{M}_{xN} & {}^2_S \mathcal{F}_{zyn} & {}^2_A \mathcal{F}_{zyn} & {}^2_S \mathcal{M}_{yn} & {}^2_A \mathcal{M}_{yn} & {}^3_S \mathcal{F}_{zxn} & {}^3_A \mathcal{F}_{zxn} & {}^3_S \mathcal{M}_{xn} & {}^3_A \mathcal{M}_{xn} & {}^4_S \mathcal{F}_{zyn} & {}^4_A \mathcal{F}_{zyn} \\
 {}^4_S \mathcal{M}_{yN} & {}^4_A \mathcal{M}_{yN}
 \end{bmatrix}_{(8+16N)}
 \quad (3.43)$$

et

$$(\tilde{\mathbf{C}}_p)^T = \begin{bmatrix}
 {}^1_A 0 & {}^2_A 0 & {}^3_A 0 & {}^4_A 0 & {}^5_A 0 & {}^6_A 0 & {}^7_A 0 & {}^8_A 0 \cdots & {}^1_A N & {}^2_A N & {}^3_A N & {}^4_A N \\
 {}^5_A N & {}^6_A N & {}^7_A N & {}^8_A N & {}^9_A N & {}^{10}_A N & {}^{11}_A N & {}^{12}_A N & {}^{13}_A N & {}^{14}_A N & {}^{15}_A N & {}^{16}_A N
 \end{bmatrix}_{(8+16N)}
 \quad (3.44)$$

La taille des matrices \mathbf{H} et \mathbf{G} dépend du nombre de termes de la solution générale

3.18. Pour considérer des matrices carrées, le nombre de termes dans la série de Lévy doit être le même que le nombre de termes du développement en série de Fourier. L'élimination du vecteur \mathbf{C}_p des relations 3.41 donne la relation entre projections des efforts extérieurs \tilde{F} sur le contour de la plaque et les projections de ses déplacements \tilde{U} . On a :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad (3.45)$$

où \mathbf{K} est la matrice de raideur dynamique de la plaque entière. Cette matrice relie les projections vecteurs déplacements et forces extérieures \tilde{U} et \tilde{F} sur les quatre bords de la plaque :

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \cdot \mathbf{H}(\omega)^{-1} \quad (3.46)$$

3.4 Validation numérique du modèle

Ce paragraphe présente une validation numérique de l'élément continu développé par cette nouvelle approche. Cette validation est basée sur une comparaison des résultats obtenus avec ceux issus de modèles éléments finis élaborés avec le code de calcul Abaqus. Plusieurs exemples numériques sont décrits et discutés pour établir la précision de la présente formulation pour l'études des vibrations de plaques rectangulaires orthotropes. Les fréquences naturelles, les formes de mode et les réponses harmoniques pour des conditions aux limites naturelles sont traitées.

L'idée de la MEC établit une relation étroite entre les problèmes de dynamique structurelle et de propagation des ondes. Ici, la signification physique de cette solution générale s'interprète facilement si on se place du point de vu de la propagation des ondes. Cette solution est définie par l'utilisation de la série de Lévy enrichie dont les termes impliquent le nombre d'onde dans les directions x et y . On choisit ici les nombres d'onde $k_{1m} = \frac{m\pi}{b}$, $k_{3m} = \frac{(2m-1)\pi}{2b}$ dans la direction x et les nombres d'onde $k_{2m} = \frac{m\pi}{a}$, $k_{4m} = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$ dans la direction y . Ces paramètres pourront varier en fonction du type de structure étudiée. Cette adaptation forme l'un principaux apports de notre modélisation analytique par rapport à la bibliographie.

3.4.1 Analyse modale

Nous considérons une plaque rectangulaire orthotrope dont les axes d'orthotropie sont parallèles aux côtés de la plaque dirigés par les axes d'un repère Oxy (voir la figure 3.1). Il s'agit de renforts unidirectionnels parallèle à l'axe x de ce repère. Les propriétés de ce matériau sont résumées dans le tableau (3.1) ci-dessous.

TABLE 3.1 – Propriétés élastiques et géométriques de la plaque orthotrope

Module d'Young suivant x	$E_x = 18.1$ GPa
Module d'Young suivant y	$E_y = 50.9$ GPa
Module de cisaillement	$G_{xy} = 11$ GPa
Coefficient de poisson	$\nu_{xy} = 0.4$
Masse volumique	$\rho = 1526$ kg/m ³
Longueur de la plaque	$2a = 1$ m
Largeur de la plaque	$2b = 0.5$ m
Épaisseur de la plaque	$h = 0.002$ m

Une analyse modale a été réalisée pour des conditions aux limites libres. Ce calcul fournit une première validation de l'élément développé.

Les fréquences propres sont parfois obtenues en utilisant l'algorithme de William-Wittrick. Dans cette étude, ces fréquences sont simplement évaluées par des calculs de réponse pour divers cas de charge sur un intervalle de fréquences donné et en détectant les pics de résonance. Quatre cas de charge, excitant des modes symétriques-symétriques (SS), symétriques-antisymétriques (SA) (symétriques le long de x et antisymétriques le long de y), symétriques-antisymétriques (AS) (antisymétriques le long de x et symétriques le long de y) et antisymétriques-antisymétriques (AA) sont utilisés.

- **Modes symétriques-symétriques.**

La Table 3.2 donne les dix premières fréquences propres correspondant à ces modes obtenues par la formulation éléments continus (MEC) et par 3 modèles éléments finis Discrete Kirchhoff Quadrangle dont le nombre d'éléments est précisé.

TABLE 3.2 – Fréquences propres des modes SS pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (50×25, 67×33, 100×50 éléments)

SS Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DSM (n=11)	7.3	40.9	62.1	78.3	114.4	130.6	205.0	215.4	306	321.9
DKQ FE (100x50)	7.26	40.95	62.17	78.35	114.7	130.6	205.1	216.4	306.8	323.3
DKQ FE (67x33)	7.26	41.00	62.24	78.41	115.1	130.8	205.6	218.0	308.3	325.0
DKQ FE (50x25)	7.26	41.07	62.34	78.48	115.7	130.0	206.3	220.3	310.4	328.9

L'étude de convergence des résultats obtenus par la MEF montre que plus de 5000 éléments finis sont nécessaires pour atteindre la précision des résultats de la MEC (voir le tableau 3.2).

- **Modes Symétriques-Antisymétriques.**

La table 3.3 donne les dix premières fréquences propres correspondant à ces modes.

TABLE 3.3 – Fréquences propres des modes SA pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

SA Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DSM	24.1	63.10	125.8	167.3	186.9	228.3	245.1	324.2	359.3	437.7
DKQ FE	24.09	63.1	125.9	167.6	187.2	229.0	245.4	324.3	362.0	438.2

- **Modes Antisymétriques-Symétriques.**

La table 3.4 donne les dix premières fréquences propres correspondant à ces modes.

TABLE 3.4 – Fréquences propres des modes AS pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

AS Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DSM	19.68	53.17	64.78	86.70	134.7	140.6	214.5	230.9	267.2	297.5
DKQ FE	19.68	53.16	64.77	86.65	134.7	140.6	214.3	230.8	267.1	297.3

- **Modes Antisymétrique-Antisymétrique.**

La table 3.5 donne les dix premières fréquences propres correspondant à ces modes.

TABLE 3.5 – Fréquences propres des modes AA pour une plaque rectangulaire orthotrope avec des conditions aux limites libre. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

AA Mode	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DSM	11	37.97	81.45	137.8	158.3	171.3	228.3	254.3	308.0	377.6
DKQ FE	10.99	39.22	85.12	137.9	155.3	171.2	228.2	251.3	307.7	372.0

Ces tableaux démontrent que la formulation MEC décrite dans cette étude produit des résultats en bon accord avec les résultats EF. Quelques formes de mode représentatives obtenues par la formulation MEC sont illustrées sur la figure 3.2. Chaque forme de mode est calculée avec la série de Levy de l'équation 3.18 pour une fréquence propre donnée.

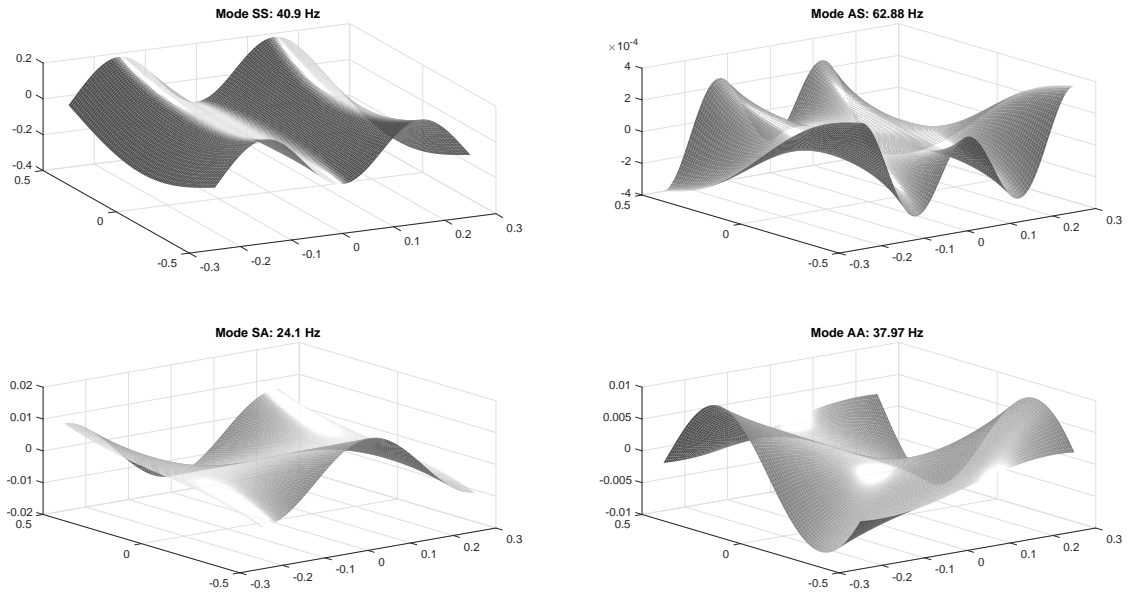


FIGURE 3.2 – Modes SS, SA, AS et AA de la plaque orthotrope

Comme le montrent les tableaux 3.2-3.5, les fréquences propres de la plaque rectangulaire mince FFFF ont été calculées à l'aide de l'EC basé sur les séries de Lévy enrichies et ont été comparées aux résultats de la MEF. La comparaison des fréquences naturelles montre l'efficacité de la formulation proposée en termes de précision numérique. Cette analyse modale est complétée dans les paragraphes qui suivent par l'analyse de réponses harmoniques et leur comparaison avec des réponses EF sur une gamme de fréquences donnée.

3.4.2 Réponses harmoniques

Pour évaluer les performances de la formulation, plusieurs cas de charges harmoniques sont envisagés. Les réponses obtenues par la MEC pour un nombre de termes croissant ($n=5$, $n=7$, $n=11$) permettent d'évaluer la rapidité de convergence des résultats. Les réponses obtenues par la MEF pour sur la bande de fréquences $[0, 500]$ Hz sont utilisées pour comparaison et validation. La structure est soumise à des forces harmoniques distribuées le long des bords de la plaque ou situées en un seul point.

Chargement Symétrique-Symétrique

Le chargement symétrique-symétrique utilisé est constitué d'une force répartie le long des bords définis par $y = b$ et $y = -b$ (voir la figure 3.3).

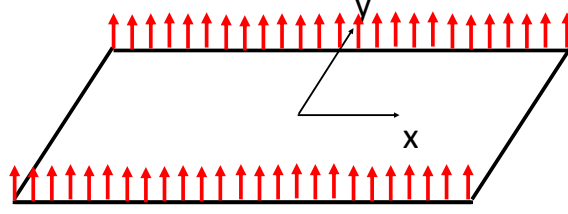


FIGURE 3.3 – Chargement symétrique-symétrique

Les projections de cette charge sur la base fonctionnelle de Fourier satisfont les équations 3.47 et 3.48.

$$F_2(x) = \frac{2}{S}F_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}F_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{A}F_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \quad (3.47)$$

et

$$F_4(x) = \frac{4}{S}F_0 + \sum_{n=1}^N \frac{4}{S}F_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{A}F_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \quad (3.48)$$

donc, par identification, on obtient les composantes suivantes : $\frac{2}{S}F_0 = 1$ et $\frac{4}{S}F_0 = 1$.

La réponse harmonique de la plaque est évaluée sur le point situé à $x = a$ et $y = b$ selon la base de Fourier donnée par l'équation 3.49 sur le bord 1 :

$$w_0(a, b) = \frac{1}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{S}W_n(-1)^n + \sum_{n=1}^N \frac{1}{A}W_n(-1)^{n+1} \quad (3.49)$$

La réponse obtenue est présentée par la figure (3.4).

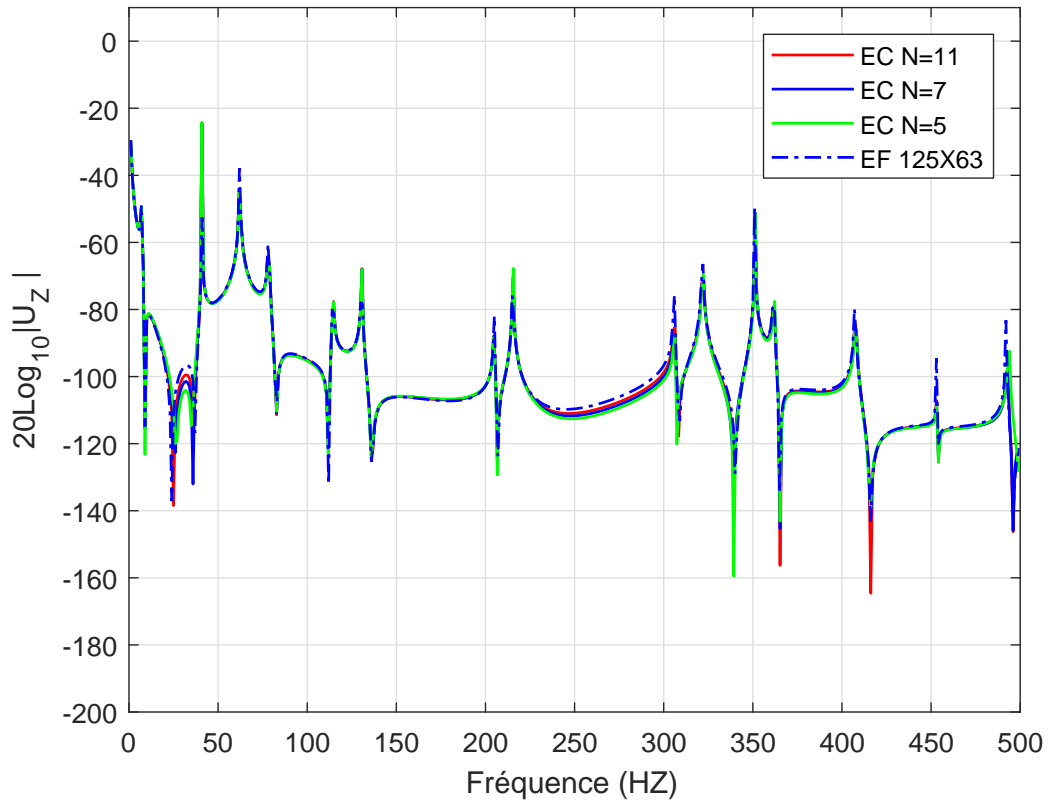


FIGURE 3.4 – Réponse harmonique pour un chargement symétrique-symétrique

Chargement Antisymétrique-Symétrique

La structure est soumise à deux forces harmoniques unitaires opposées distribuées le long des bords de la plaque définis par $y = b$ et $y = -b$. Le chargement est représenté dans la figure 3.5 et est décrit par les composantes suivantes sur la base de Fourier : ${}^2_S F_0 = 1$ et ${}^4_S F_0 = -1$.

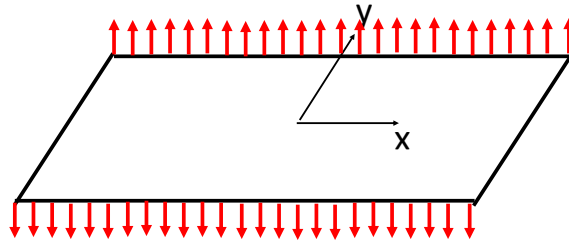


FIGURE 3.5 – Chargement Antisymétrique-symétrique

La réponse harmonique de la plaque est évaluée sur le point situé à $x = 0$ et $y = b$ selon la base de Fourier donnée par l'équation 3.50 sur le bord 2.

$$w_0(0, b) = \frac{2}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}W_n \quad (3.50)$$

La réponse obtenue est présentée par la figure (3.6).

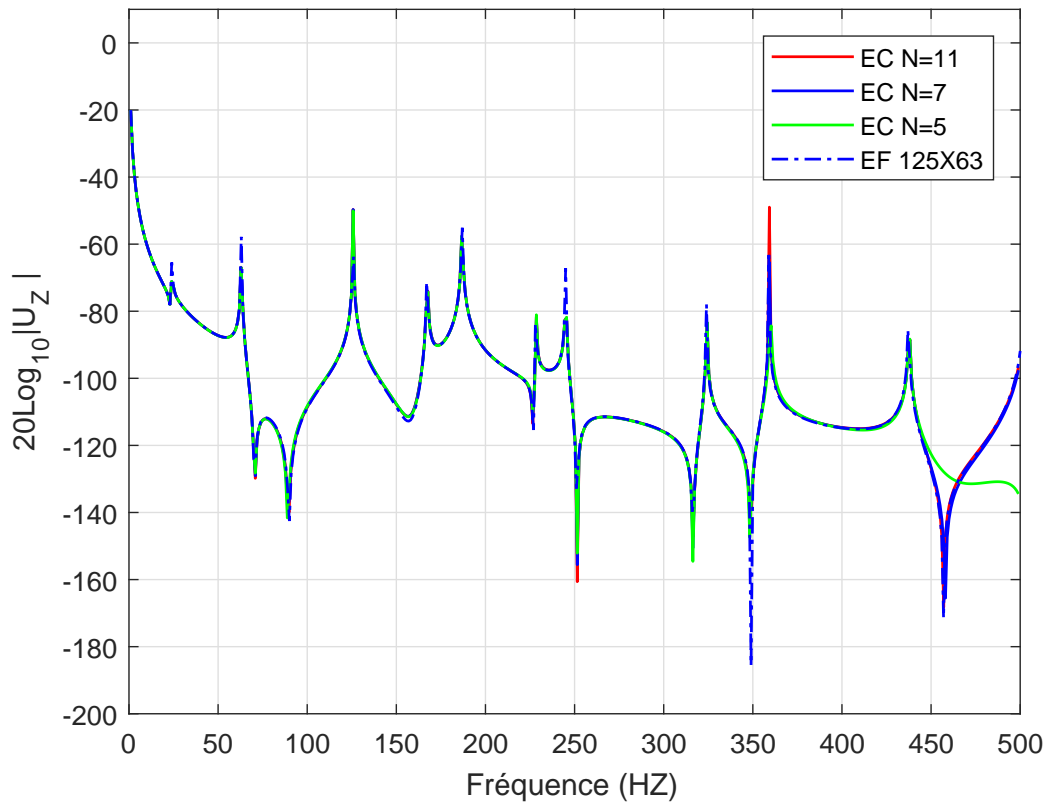


FIGURE 3.6 – Réponse harmonique pour un chargement antisymétrique-symétrique

Une excellente concordance des résultats numériques obtenus par la MEC avec

ceux obtenus par la MEF sur l'intervalle de fréquence $[0, 500]$ Hz est ainsi mise en évidence pour ces deux cas de charge répartis.

Chargement ponctuel

La plaque est maintenant soumise à un chargement vertical ponctuel unitaire en un point situé à $y = b$ et $x = 0$. Les projections de cette charge unitaire sur la base fonctionnelle sont évaluées par développement en série de Fourier de la fonction Dirac, on obtient : ${}^2_S F_0 = \frac{1}{2a}$ and ${}^2_S F_n = {}^2_A F_n = \frac{1}{a}$. Ce cas de charge est illustré sur la figure (3.7).

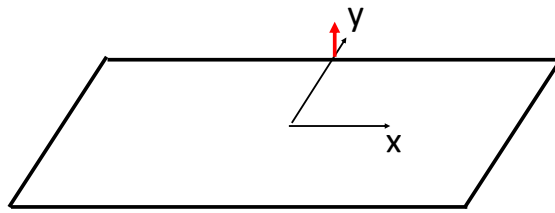


FIGURE 3.7 – Chargement ponctuel

La réponse harmonique au point situé à $y = b$ et $x = 0$ est donnée par :

$$w_0(0, b) = {}^2_S W_0 + \sum_{n=1}^N {}^2_S W_n \quad (3.51)$$

Elle est représentée sur la figure (3.8).

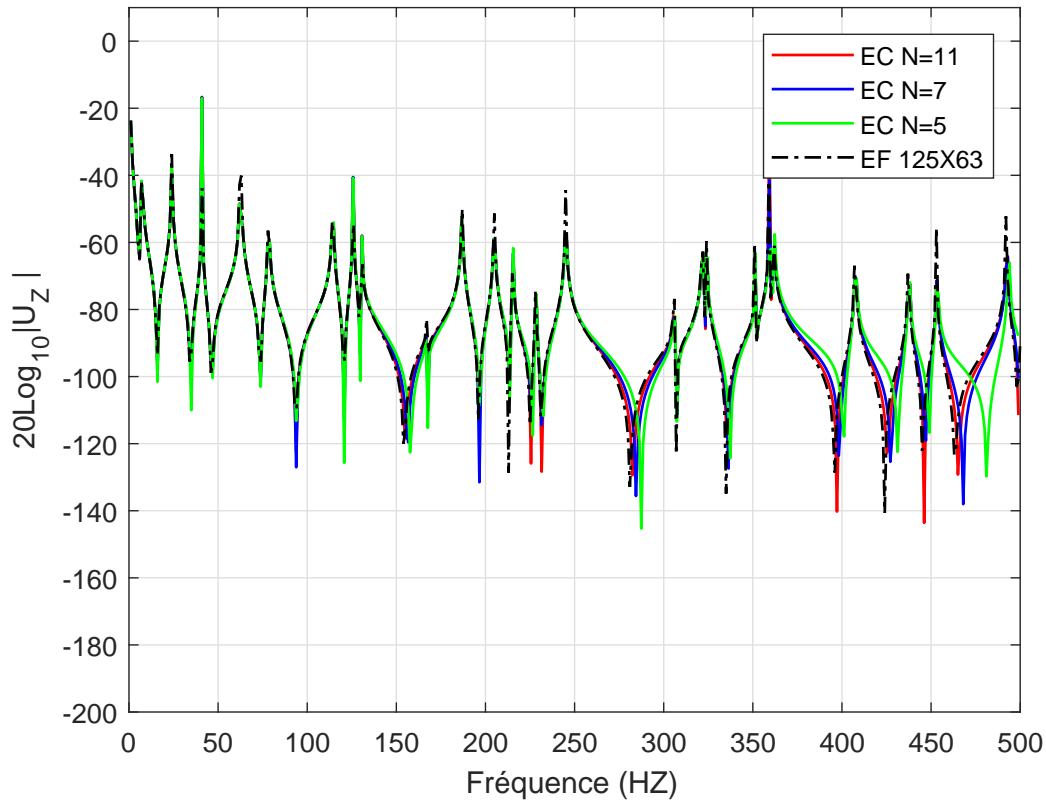


FIGURE 3.8 – Chargement ponctuel

Là encore, une excellente concordance avec les résultats EF est observée.

Réponse harmonique amortie

Toutes les courbes de réponse harmonique présentées jusqu'à maintenant ont été déterminées sans introduire d'amortissement dans les caractéristiques du matériau. Les réponses non amorties sont très précieuses pour avoir des comparaisons efficaces entre la MEF et MEC. La figure (3.9) présente un amortissement structural pour une force ponctuelle pour une gamme de fréquence étendue à $[500, 1000]$ Hz. L'amortissement structural est défini par l'introduction de modules d'Young complexes qui permettent de décrire un amortissement dont l'angle de perte δ est tel que $\tan \delta = \frac{E_I}{E_R}$ où E_R présente la partie réelle du module complexe E et E_I sa partie imaginaire.

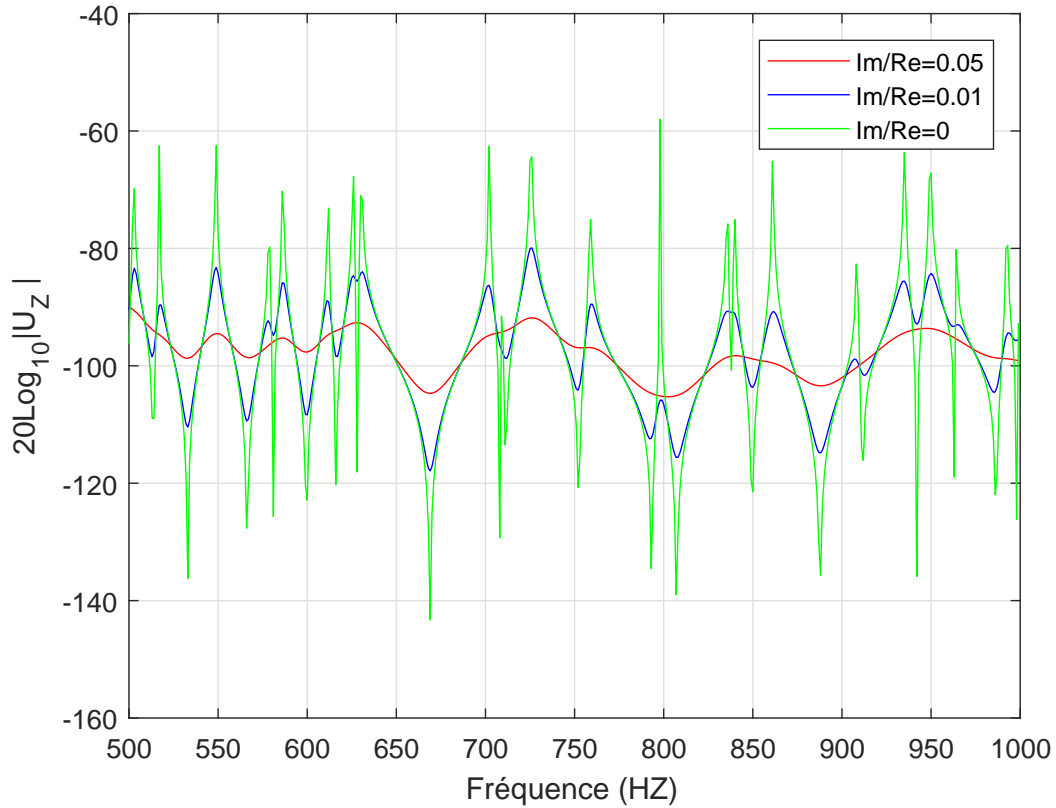


FIGURE 3.9 – Réponse harmonique pour différents niveaux d'amortissement

3.4.3 Performances CPU

Ce paragraphe a pour but d'évaluer les performances de la présente formulation en termes de rapidité d'exécution pour l'évaluation de réponses harmoniques. Ainsi, le tableau 3.6 ci-dessous présente le temps de calcul pour l'évaluation de la réponse de 500 fréquences duquel est déduit le temps CPU pour une seule fréquence. Ce temps est évalué pour un nombre croissant de termes des séries.

TABLE 3.6 – Temps CPU (500 fréquences traitées) et temps CPU/fréquence.

n (EC)	3	5	7	9	11
Temps CPU (500 fréquences traitées)	1s	5s	13s	27s	42s
Temps CPU/fréquence	2ms	10ms	26ms	54ms	84ms

Le temps de calcul pour un modèle EF dont le maillage est constitué de 125×63 éléments (précision équivalente à $n=11$) est d'environ $7s$ par fréquence traitée. Ces résultats montrent clairement la supériorité en terme de temps de calcul de notre formulation.

3.5 Conclusion

L'approche proposée est suffisamment générale pour décrire la solution exacte de la réponse harmonique des plaques orthotropes sous des conditions aux limites libres sans utiliser la décomposition des solutions en contributions symétriques et antisymétriques. Cela simplifie le traitement de la matrice de raideur dynamique mais surtout lève l'hypothèse de découplage des mouvements symétriques et antisymétrique liée à la décomposition de Gorman. Pour les plaques rectangulaires, quatre séries sont utilisées au lieu de huit. Les avantages classiques de la MEC par rapport à la MEF sont préservés, précision avec des séries tronquées, temps de calcul réduit et allocation de mémoire très limitée.

Dans ce chapitre, un nouvel élément continu de plaque a ainsi été développé. Il est formulé sur la base de modèle de Love-Kirchhoff. L'objectif est de construire la matrice de raideur dynamique sans l'utilisation de la décomposition de Gorman en se basant sur une nouvelle série de Lévy pour une plaque sous des conditions aux limites libres. La performance et la fiabilité de l'élément développé ont été évaluées à travers une série d'applications en flexion de plaque orthotrope pour différents cas de chargement. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux obtenus par des modélisations élément finis. Les exemples numériques ont montré la simplicité, la stabilité et le moindre coût en termes de temps du calcul de l'élément continu développé.

4 Element continu de plaque en flexion à directions d'orthotropie quelconques

4.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est de développer un nouvel élément continu permettant de modéliser sans maillage des plaques orthotropes dont les directions d'orthotropie sont orientées de manière quelconque vis à vis des axes de symétrie de la plaque. Les séries de Lévy enrichies présentées au chapitre précédent sont exploitées de manière à pouvoir rechercher les solutions de l'équation de flexion qui présente dans ce cas des termes croisés qui introduisent un couplage entre les contributions symétriques et antisymétriques. Ces contributions ne peuvent donc être évaluées de manière indépendante. Les éléments continus basés sur la décomposition de Gorman trouvent ici leur limite. Des rigidités de couplage sont introduites sur l'équation du mouvement, les solutions sont recherchées sous la forme de séries de Lévy enrichies puis une matrice de raideur dynamique est construite.

4.2 Plaques de Kirchhoff à direction d'orthotropie quelconque

4.2.1 Définition géométrique et matérielle

La géométrie de l'élément est identique à celle du chapitre précédent. Il s'agit d'une plaque rectangulaire de dimensions $2a \times 2b$ d'épaisseur h .

En ce qui concerne le matériaux constitutif, il s'agit d'un matériau orthotrope dont la première direction d'inertie est orientée d'un angle θ par rapport à l'axe de symétrie Ox de la plaque (Figure 4.1).

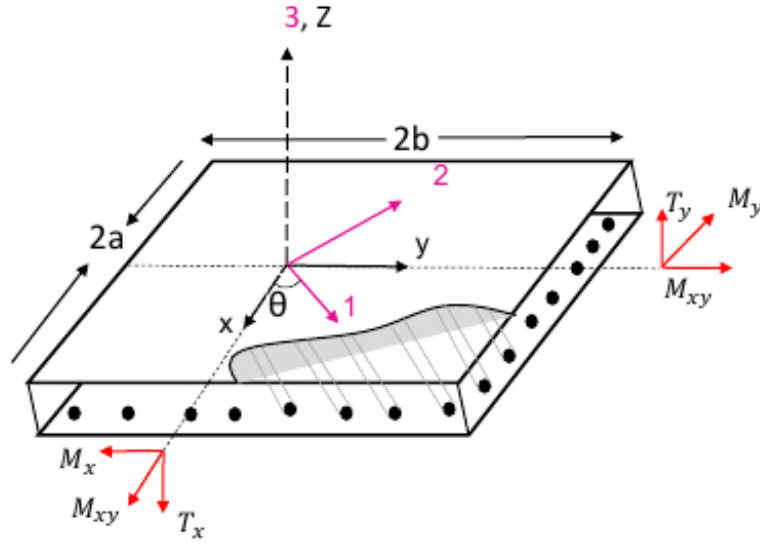


FIGURE 4.1 – Géométrie de la plaque

4.2.2 Hypothèses cinématiques

Les hypothèses cinématiques sont celles de Love-Kirchhoff, elles ont été décrites au chapitre précédent, elles restent identiques. Seule la loi de comportement est à exprimer dans la base (\mathbf{x}, \mathbf{y}) à partir de son expression dans la base d'orthotropie.

4.2.3 Loi de comportement et relations efforts/déplacements

La connaissance des déformations en tout point situé sur le feuillet moyen de la plaque orthotrope permet d'obtenir les contraintes en utilisant la loi de comportement. Dans le cas où les axes principaux d'orthotropie sont orientés selon un angle θ par rapport aux axes de symétrie de la plaque qui définissent le système de coordonnées adopté, les champs de contraintes de Cauchy s'écrivent sous la forme décrite par l'équation 4.1. Cette loi remplace la relation 3.8 du chapitre précédent, elle introduit des coefficients d'élasticité supplémentaire \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} traduisant un couplage entre les contraintes normales et les déformations de cisaillement dans le plan de la plaque.

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \bar{Q}_{11}\epsilon_{xx} + \bar{Q}_{12}\epsilon_{yy} + \bar{Q}_{16}\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} = \bar{Q}_{12}\epsilon_{xx} + \bar{Q}_{22}\epsilon_{yy} + \bar{Q}_{26}\gamma_{xy} \\ \sigma_{xy} = \bar{Q}_{16}\epsilon_{xx} + \bar{Q}_{26}\epsilon_{yy} + \bar{Q}_{66}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (4.1)$$

Les termes \bar{Q}_{ij} sont les raideurs du matériau orthotrope dans les axes de symétrie de la plaque, leur expression dépend donc des propriétés matérielles et de l'angle d'inclinaison des directions d'orthotropie. Ces termes sont donnés par :

$$\begin{cases} \bar{Q}_{11} = D_{11} \cos^4 \theta + 2(D_{12} + 2D_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_{22} \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} = (D_{11} + D_{22} - 4D_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + D_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} = D_{11} \sin^4 \theta + 2(D_{12} + 2D_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} = (D_{11} - D_{12} - 2D_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta + (D_{12} - D_{22} + 2D_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} = (D_{11} - D_{12} - 2D_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta + (D_{12} - D_{22} + 2D_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} = (D_{11} + D_{22} - 2D_{12} - 2D_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + D_{66} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{cases} \quad (4.2)$$

où D_{ij} sont des constantes déjà définies au chapitre précédent (Eq. 3.10). Elles dépendent uniquement des constantes matérielles.

Les définitions des efforts généralisés T_x , T_y , M_x , M_y et M_{xy} reste identiques à celles données au chapitre précédent.

En utilisant les lois de comportement dans ces définitions, nous obtenons les relations entre moments et champ de déplacement vertical :

$$\begin{cases} M_x = -\frac{h^3}{12} \bar{Q}_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} \bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^3}{6} \bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_y = -\frac{h^3}{12} \bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} \bar{Q}_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^3}{6} \bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{xy} = -\frac{h^3}{12} \bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{h^3}{12} \bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{h^3}{6} \bar{Q}_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (4.3)$$

On remarquera les termes de couplage flexion/cisaillement \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} s'annulent lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = \frac{\pi}{2}$.

4.2.4 Equations du mouvement

Le principe de Hamilton a permis d'obtenir l'équation d'équilibre dynamique au chapitre précédent. Cette équation reste ici identique (Eq. 3.12). Dans le système de coordonnées cartésiennes, elle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

L'équation du mouvement proprement dite est obtenue en introduisant la loi de comportement 4.3 dans l'équation 4.4. On obtient cette fois-ci :

$$-\frac{h^3}{12} \bar{Q}_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{h^3}{3} \bar{Q}_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} - \frac{h^3}{6} (\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^3}{3} \bar{Q}_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - \frac{h^3}{12} \bar{Q}_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Comme on peut le constater, cette équation présente des termes relatifs à $\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}$ et $\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y}$ dus au couplage flexion/cisaillement qui induisent des couplages au niveau des contributions symétriques et antisymétriques du mouvement. Ce phénomène impose l'utilisation des séries de Lévy enrichies dans la recherche de solutions.

4.3 Matrice de raideur dynamique

4.3.1 Solution forte des équations du mouvement

La solution des équations du mouvement est cherchée sous la forme d'une série de Lévy enrichie pour une plaque orthotrope quelconque ($\theta \neq 0$) pour laquelle les constantes de rigidité réduites \bar{Q}_{16} et \bar{Q}_{26} sont différentes de zéro. L'équation du mouvement donne alors :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{h^3}{12}\bar{Q}_{11} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^4{}_1W_m(x)}{dx^4} \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^4{}_3W_m(x)}{dx^4} \sin(k_{3m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} {}_2W_m(y)k_{3m}^4 \cos(k_{3m}x) \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_4W_m(y)k_{4m}^4 \sin(k_{4m}x) \left. \right] - \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{16} \left[-\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^3{}_1W_m}{dx^3} k_{1m} \sin(k_{1m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d{}_2W_m}{dy} k_{2m}^3 \sin(k_{2m}x) \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^3{}_3W_m(x)}{dx^3} k_{3m} \cos(k_{3m}y) - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d{}_4W_m}{dy} k_{3m}^3 \cos(k_{3m}x) \left. \right] \\
 & + \frac{h^3}{6}(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^2{}_1W_m}{dx^2} k_{1m}^2 \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^2{}_2W_m}{dy^2} k_{2m}^2 \cos(k_{2m}x) \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^2{}_3W_m}{dx^2} k_{3m}^2 \sin(k_{3m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^2{}_4W_m}{dy^2} k_{4m}^2 \sin(k_{4m}x) \left. \right] - \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{26} \left[\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d{}_1W_m}{dx} k_{1m}^3 \sin(k_{1m}y) \right. \\
 & - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^3{}_2W_m}{dy^3} k_{2m} \sin(k_{2m}x) - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d{}_3W_m}{dx} \left(\frac{m\pi}{b}\right)^3 \cos\frac{m\pi y}{b} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^3{}_4W_m}{dy^3} k_{4m} \cos(k_{4m}x) \left. \right] \\
 & - \frac{h^3}{12}\bar{Q}_{22} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} {}_1W_m(x)k_{1m}^4 \cos(k_{1m}y) + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{d^2{}_2W_m}{dy^2} \cos(k_{2m}x) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3W_m(x)k_{3m}^4 \sin\frac{m\pi y}{b} \right. \\
 & + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{d^4{}_4W_m}{dy^4} \sin(k_{4m}x) \left. \right] = -\rho h w^2 \left[\sum_{m=0}^{+\infty} {}_1W_m(x) \cos(k_{1m}y) \right. \\
 & + \sum_{m=0}^{+\infty} {}_2W_m(y) \cos(k_{2m}x) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_3W_m(x) \sin(k_{3m}y) + \sum_{m=1}^{+\infty} {}_4W_m(y) \sin(k_{4m}x) \left. \right]
 \end{aligned}$$

où ${}_1W_m(x)$, ${}_2W_m(y)$, ${}_3W_m(x)$ et ${}_4W_m(y)$ sont des fonctions qui satisfont les deux systèmes d'équations différentielles d'ordre 8 qui suivent.

Ainsi, le système d'équations différentielles d'ordre 8 couplées satisfait par ${}_1W_m$ et ${}_3W_m$ est :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{h^3}{12}\bar{Q}_{11} \frac{d^4{}_1W_0}{dx^4} = -\rho h w^2 {}_1W_0(x) \\
 -\frac{h^3}{12}\bar{Q}_{11} \frac{d^4{}_1W_m}{dx^4} - \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{16} k_{3m} \frac{d^3{}_3W_m}{dx^3} + \frac{h^3}{6}(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) k_{1m}^2 \frac{d^2{}_1W_m}{dx^2} + \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{26} k_{3m}^3 \frac{d{}_3W_m}{dx} \\
 - \left[\frac{h^3}{12}\bar{Q}_{22} k_{1m}^4 - \rho h w^2 \right] {}_1W_m = 0 \\
 -\frac{h^3}{12}\bar{Q}_{11} \frac{d^4{}_3W_m}{dx^4} + \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{16} k_{1m} \frac{d^3{}_1W_m}{dx^3} + \frac{h^3}{6}(\bar{Q}_{12} + 2\bar{Q}_{66}) k_{3m}^2 \frac{d^2{}_3W_m}{dx^2} - \frac{h^3}{3}\bar{Q}_{26} k_{1m}^3 \frac{d{}_1W_m}{dx} \\
 + \left[\rho h w^2 - \frac{h^3}{12}\bar{Q}_{22} k_{3m}^4 \right] {}_3W_m = 0
 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

et le système d'équations différentielles d'ordre 8 couplées satisfait par ${}_2W_m$ et ${}_4W_m$

est :

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}\frac{d^4_2W_0}{dy^4} = -\rho h w^2 {}_2W_0(y) \\ -\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}\frac{d^4_2W_m}{dy^4} - \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{26}k_{4m}\frac{d^3_4W_m}{dy^3} + \frac{h^3}{6}(\overline{Q}_{12} + 2\overline{Q}_{66})k_{2m}^2\frac{d^2_2W_m}{dy^2} + \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{16}k_{4m}^3\frac{d_4W_m}{dy} \\ + \left[\rho h w^2 - \frac{h^3}{12}\overline{Q}_{11}k_{2m}^4 \right] {}_2W_m = 0 \\ -\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}\frac{d^4_4W_m}{dy^4} + \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{26}k_{2m}\frac{d^3_2W_m}{dy^3} + \frac{h^3}{6}(\overline{Q}_{12} + 2\overline{Q}_{66})k_{4m}^2\frac{d^2_4W_m}{dy^2} - \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{16}k_{2m}^3\frac{d_2W_m}{dy} \\ - \left[\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{11}k_{4m}^4 - \rho h w^2 \right] {}_4W_m = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

- Pour $m \geq 1$, les fonctions ${}_1W_m$ et ${}_3W_m$ de la variable x sont donc solutions de :

$$\begin{cases} \zeta_1 \frac{d^4_1W_m}{dx^4} + \zeta_2(m) \frac{d^3_3W_m}{dx^3} + \zeta_3(m) \frac{d^2_1W_m}{dx^2} + \zeta_4(m) \frac{d_3W_m}{dx} + \zeta_5(m) {}_1W_m = 0 \\ \zeta_1 \frac{d^4_3W_m}{dx^4} - \zeta_2(m) \frac{d^3_1W_m}{dx^3} + \zeta_3(m) \frac{d^2_3W_m}{dx^2} - \zeta_4(m) \frac{d_1W_m}{dx} + \zeta_5(m) {}_3W_m = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

avec $\zeta_1 = -\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{11}$, $\zeta_2(m) = -\frac{h^3}{3}\overline{Q}_{16}k_{3m}$, $\zeta_3(m) = \frac{h^3}{6}(\overline{Q}_{12} + 2\overline{Q}_{66})k_{1m}^2$,

$\zeta_4(m) = \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{26}k_{3m}^3$, $\zeta_5(m) = \left[\rho h w^2 - \frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}k_{1m}^4 \right]$

et les fonctions ${}_2W_m$ et ${}_4W_m$ de la variable y sont solutions de :

$$\begin{cases} \eta_1 \frac{d^4_2W_m}{dy^4} + \eta_2(m) \frac{d^3_4W_m}{dy^3} + \eta_3(m) \frac{d^2_2W_m}{dy^2} + \eta_4(m) \frac{d_4W_m}{dy} + \eta_5(m) {}_2W_m = 0 \\ \eta_1 \frac{d^4_4W_m}{dy^4} - \eta_2(m) \frac{d^3_2W_m}{dy^3} + \eta_3(m) \frac{d^2_4W_m}{dy^2} - \eta_4(m) \frac{d_2W_m}{dy} + \eta_5(m) {}_4W_m = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

avec $\eta_1 = -\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}$, $\eta_2(m) = -\frac{h^3}{3}\overline{Q}_{26}k_{4m}$, $\eta_3(m) = \frac{h^3}{6}(\overline{Q}_{12} + 2\overline{Q}_{66})k_{2m}^2$,

$\eta_4(m) = \frac{h^3}{3}\overline{Q}_{16}k_{4m}^3$, $\eta_5(m) = \left[\rho h w^2 - \frac{h^3}{12}\overline{Q}_{11}k_{2m}^4 \right]$.

- pour $m=0$ la fonction ${}_1W_0$ est solution de :

$$-\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{11}\frac{d^4_1W_0}{dx^4} = -\rho h w^2 {}_1W_0(x) \quad (4.10)$$

où ${}_1\lambda_0, {}_2\lambda_0, {}_3\lambda_0$ et ${}_4\lambda_0$ sont les solutions de l'équation caractéristique de 4.10, elles sont définies par :

$$\begin{cases} {}_1\lambda_0 = \sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{\overline{Q}_{11}h^2}} \\ {}_2\lambda_0 = -\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{\overline{Q}_{11}h^2}} \\ {}_3\lambda_0 = i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{\overline{Q}_{11}h^2}} \\ {}_4\lambda_0 = -i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{\overline{Q}_{11}h^2}} \end{cases} \quad (4.11)$$

et la fonction ${}_2W_0$ est solution de :

$$-\frac{h^3}{12}\overline{Q}_{22}\frac{d^4_2W_0}{dy^4} = -\rho h w^2 {}_2W_0(y) \quad (4.12)$$

CHAPITRE 4. ELEMENT CONTINU DE PLAQUE EN FLEXION À
DIRECTIONS D'ORTHOTROPIE QUELCONQUES

avec ${}_5\lambda_0, {}_6\lambda_0, {}_7\lambda_0$ et ${}_8\lambda_0$ solutions de l'équation caractéristique de 4.12, elles sont définies par :

$$\begin{cases} {}_5\lambda_0 = \sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}_6\lambda_0 = -\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}_7\lambda_0 = i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \\ {}_8\lambda_0 = -i\sqrt[4]{\frac{12\rho w^2}{Q_{22}h^2}} \end{cases} \quad (4.13)$$

La recherche de solutions consiste ici à poser à poser $D_x = \frac{d}{dx}$ et $D_y = \frac{d}{dy}$. On peut alors écrire les systèmes d'équations 4.8 et 4.9 sous la forme matricielle qui suit :

$$\begin{bmatrix} L_{b_{11}} & L_{b_{12}} \\ L_{b_{21}} & L_{b_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_1W_m \\ {}_3W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{bmatrix} L_{b'_{11}} & L_{b'_{12}} \\ L_{b'_{21}} & L_{b'_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_2W_m \\ {}_4W_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

où $L_{b_{ij}}(i, j = 1, 2)$ et $L_{b'_{ij}}(i, j = 1, 2)$ sont les opérateurs différentiels donnés par :

$$\begin{cases} L_{b_{11}} = D_x^4 + \frac{\zeta_3(m)}{a_1} D_x^2 + \frac{\zeta_5(m)}{\zeta_1} \\ L_{b_{12}} = \frac{\zeta_2(m)}{\zeta_1} D_x^3 + \frac{\zeta_4(m)}{\zeta_1} D_x \\ L_{b_{21}} = -\frac{\zeta_2(m)}{a_1} D_x^3 - \frac{\zeta_4(m)}{\zeta_1} D_x \\ L_{b_{22}} = D_x^4 + \frac{\zeta_3(m)}{\zeta_1} D_x^2 + \frac{\zeta_5(m)}{a_1} \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} L_{b'_{11}} = D_y^4 + \frac{\eta_3(m)}{\eta_1} D_y^2 + \frac{\eta_5(m)}{\eta_1} \\ L_{b'_{12}} = \frac{\eta_2(m)}{\eta_1} D_y^3 + \frac{\eta_4(m)}{\eta_1} D_y \\ L_{b'_{21}} = -\frac{\eta_2(m)}{\eta_1} D_y^3 - \frac{\eta_4(m)}{\eta_1} D_y \\ L_{b'_{22}} = D_y^4 + \frac{\eta_3(m)}{\eta_1} D_y^2 + \frac{\eta_5(m)}{\eta_1} \end{cases} \quad (4.17)$$

En exploitant le determinant de la matrice de l'équation 4.14 pour déterminer les fonctions ${}_1W_m$ et ${}_3W_m$, on obtient :

$$(\mu^4 + a_1(m)\mu^3 + b_1(m)\mu^2 + c_1(m)\mu + d_1(m)) \Xi = 0 \quad (4.18)$$

avec $\Xi = {}_1W_m, {}_3W_m$

$$\begin{cases} a_1(m) = \frac{2\zeta_3(m)}{\zeta_1} + \frac{\zeta_2(m)^2}{\zeta_1^2} \\ b_1(m) = \frac{2\zeta_5(m)}{\zeta_1} + \frac{\zeta_3(m)^2}{\zeta_1^2} + \frac{2\zeta_2(m)\zeta_4(m)}{\zeta_1^2} \\ c_1(m) = \frac{2\zeta_5(m)\zeta_3(m)}{\zeta_1^2} + \frac{\zeta_4(m)^2}{\zeta_1^2} \\ d_1(m) = \frac{\zeta_5(m)^2}{\zeta_1^2} \end{cases} \quad (4.19)$$

En exploitant le determinant de la matrice de l'équation (4.15) pour déterminer les fonctions ${}_2W_m$ et ${}_4W_m$, on obtient :

$$(\nu^4 + a'_1(m)\nu^3 + b'_1(m)\nu^2 + c'_1(m)\nu + d'_1(m)) \Psi = 0 \quad (4.20)$$

avec $\Psi = {}_2W_{m,4} W_m$

$$\begin{cases} a'_1(m) = \frac{2\eta_3(m)}{\eta_1} + \frac{\eta_2(m)^2}{\eta_1^2} \\ b'_1(m) = \frac{2\eta_5(m)}{\eta_1} + \frac{\eta_3(m)^2}{\eta_1^2} + \frac{2\eta_2(m)\eta_4(m)}{\eta_1^2} \\ c'_1(m) = \frac{2\eta_5(m)\eta_3(m)}{\eta_1^2} + \frac{\eta_4(m)^2}{\eta_1^2} \\ d'_1(m) = \frac{\eta_5(m)^2}{\eta_1^2} \end{cases} \quad (4.21)$$

Les racines de ces deux équations quadratiques sont les valeurs propres des matrices compagnons associées :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d'_1(m) \\ 1 & 0 & 0 & -c'_1(m) \\ 0 & 1 & 0 & -b'_1(m) \\ 0 & 0 & 1 & -a'_1(m) \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d'_1(m) \\ 1 & 0 & 0 & -c'_1(m) \\ 0 & 1 & 0 & -b'_1(m) \\ 0 & 0 & 1 & -a'_1(m) \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

On obtient après résolution de ces équations :

$$\begin{cases} {}_1W_m(x) = {}^1A_m e^{+\mu_m x} + {}^2A_m e^{-\mu_m x} + {}^3A_m e^{+2\mu_m x} + {}^4A_m e^{-2\mu_m x} \\ \quad + {}^5A_m e^{+3\mu_m x} + {}^6A_m e^{-3\mu_m x} + {}^7A_m e^{+4\mu_m x} + {}^8A_m e^{-4\mu_m x} \\ {}_3W_m(x) = {}^1B_m e^{+\mu_m x} + {}^2B_m e^{-\mu_m x} + {}^3B_m e^{+2\mu_m x} + {}^4B_m e^{-2\mu_m x} \\ \quad + {}^5B_m e^{+3\mu_m x} + {}^6B_m e^{-3\mu_m x} + {}^7B_m e^{+4\mu_m x} + {}^8B_m e^{-4\mu_m x} \\ {}_2W_m(y) = {}^1D_m e^{+\nu_m y} + {}^2D_m e^{-\nu_m y} + {}^3D_m e^{+2\nu_m y} + {}^4D_m e^{-2\nu_m y} \\ \quad + {}^5D_m e^{+3\nu_m y} + {}^6D_m e^{-3\nu_m y} + {}^7D_m e^{+4\nu_m y} + {}^8D_m e^{-4\nu_m y} \\ {}_4W_m(y) = {}^1E_m e^{+\nu_m y} + {}^2E_m e^{-\nu_m y} + {}^3E_m e^{+2\nu_m y} + {}^4E_m e^{-2\nu_m y} \\ \quad + {}^5E_m e^{+3\nu_m y} + {}^6E_m e^{-3\nu_m y} + {}^7E_m e^{+4\nu_m y} + {}^8E_m e^{-4\nu_m y} \end{cases} \quad (4.23)$$

L'utilisation des expressions 4.23 dans les équations (4.8) et (4.9) donne, de plus, des relations entre les constantes d'intégrations ${}^iA_m, {}^iB_m, {}^iD_m$ et iE_m avec $i = 1, 8$. On obtient :

$$\begin{aligned} {}^1A_m &= {}^1L_m {}^1B_m, & {}^2A_m &= -{}^1L_m {}^2B_m \\ {}^3A_m &= {}^2L_m {}^3B_m, & {}^4A_m &= -{}^2L_m {}^4B_m \\ {}^5A_m &= {}^3L_m {}^5B_m, & {}^6A_m &= -{}^3L_m {}^6B_m \\ {}^7A_m &= {}^4L_m {}^7B_m, & {}^8A_m &= -{}^4L_m {}^8B_m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^1D_m &= {}^1k_m {}^1E_m, & {}^2D_m &= -{}^1k_m {}^2E_m \\ {}^3D_m &= {}^2k_m {}^3E_m, & {}^4D_m &= -{}^2k_m {}^4E_m \\ {}^5D_m &= {}^3k_m {}^5E_m, & {}^6D_m &= -{}^3k_m {}^6E_m \\ {}^7D_m &= {}^4k_m {}^7E_m, & {}^8D_m &= -{}^4k_m {}^8E_m \end{aligned}$$

avec

$${}^i L_m = -\frac{\frac{\zeta_2(m)}{\zeta_1} i \mu_m^3 + \frac{\zeta_4(m)}{\zeta_1} i \mu_m}{i \mu_m^4 + \frac{\zeta_3(m)}{\zeta_1} i \mu_m^2 + \frac{\zeta_5(m)}{\zeta_1}}$$

$${}^i k_m = -\frac{\frac{\eta_2(m)}{\eta_1} i \mu_m^3 + \frac{\eta_4(m)}{\eta_1} i \mu_m}{i \mu_m^4 + \frac{\eta_3(m)}{\eta_1} i \mu_m^2 + \frac{\eta_5(m)}{\eta_1}}$$

d'ou les solutions de Lévy enrichies en déplacement :

$$\begin{aligned} W(x, y) = & {}^1 B_0 e^{1\mu_0 x} + {}^2 B_0 e^{2\mu_0 x} + {}^3 B_0 e^{3\mu_0 x} + {}^4 B_0 e^{4\mu_0 x} + {}^1 E_0 e^{1\nu_0 y} + {}^2 E_0 e^{2\nu_0 y} + {}^3 E_0 e^{3\nu_0 y} + {}^4 E_0 e^{4\nu_0 y} \\ & + \left({}^1 L_m {}^1 B_m e^{+1\mu_m x} - {}^1 L_m {}^2 B_m e^{-1\mu_m x} + {}^2 L_m {}^3 B_m e^{+2\mu_m x} - {}^2 L_m {}^4 B_m e^{-2\mu_m x} \right. \\ & \left. + {}^3 L_m {}^5 B_m e^{+3\mu_m x} - {}^3 L_m {}^6 B_m e^{-3\mu_m x} + {}^4 L_m {}^7 B_m e^{+4\mu_m x} - {}^4 L_m {}^8 B_m e^{-4\mu_m x} \right) \cos(k_{1m} y) \\ & + \left({}^1 B_m e^{+1\mu_m x} + {}^2 B_m e^{-1\mu_m x} + {}^3 B_m e^{+2\mu_m x} + {}^4 B_m e^{-2\mu_m x} \right. \\ & \left. + {}^5 B_m e^{+3\mu_m x} + {}^6 B_m e^{-3\mu_m x} + {}^7 B_m e^{+4\mu_m x} + {}^8 B_m e^{-4\mu_m x} \right) \sin(k_{3m} y) \\ & + \left({}^1 k_m {}^1 E_m e^{+1\nu_m y} - {}^1 k_m {}^2 E_m e^{-1\nu_m y} + {}^2 k_m {}^3 E_m e^{+2\nu_m y} - {}^2 k_m {}^4 E_m e^{-2\nu_m y} \right. \\ & \left. + {}^3 k_m {}^5 E_m e^{+3\nu_m y} - {}^3 k_m {}^6 E_m e^{-3\nu_m y} + {}^4 k_m {}^7 E_m e^{+4\nu_m y} - {}^4 k_m {}^8 E_m e^{-4\nu_m y} \right) \cos(k_{2m} x) \\ & + \left({}^1 E_m e^{+1\nu_m y} + {}^2 E_m e^{-1\nu_m y} + {}^3 E_m e^{+2\nu_m y} + {}^4 E_m e^{-2\nu_m y} \right. \\ & \left. + {}^5 E_m e^{+3\nu_m y} + {}^6 E_m e^{-3\nu_m y} + {}^7 E_m e^{+4\nu_m y} + {}^8 E_m e^{-4\nu_m y} \right) \sin(k_{4m} x) \\ \beta_x(x, y) = & -\frac{\partial W}{\partial x} = -\sum_{m=0}^{+\infty} {}^1 W'_m(x) \cos(k_{1m} y) + \sum_{m=0}^{+\infty} {}^2 W_m(y) k_{2m} \sin(k_{2m} x) - \sum_{m=1}^{+\infty} {}^3 W'_m(x) \sin(k_{3m} y) \\ & - \sum_{m=1}^{+\infty} {}^4 W_m(y) k_{4m} \cos(k_{4m} y) \\ \beta_y(x, y) = & -\frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{m=0}^{+\infty} {}^1 W_m(x) k_{1m} \sin(k_{1m} y) - \sum_{m=0}^{+\infty} {}^2 W'_m(y) \cos(k_{2m} x) - \sum_{m=1}^{+\infty} {}^3 W_m(x) k_{3m} \cos(k_{3m} y) \\ & - \sum_{m=1}^{+\infty} {}^4 W'_m(y) \sin(k_{4m} x) \end{aligned}$$

4.3.2 Construction de la matrice de raideur dynamique

Par une démarche analogue au cas précédent, la matrice de rigidité de la plaque est évaluée par projection sur une base de Fourier des champs inconnus efforts et déplacement définis sur le contour de la plaque. On écrit pour un développement en série de Fourier de $2N + 1$ termes sur chaque coté de la plaque :

$$\begin{pmatrix} w(a, y) \\ \beta_x(a, y) \\ w(x, b) \\ \beta_y(x, b) \\ w(-a, y) \\ \beta_x(-a, y) \\ w(x, -b) \\ \beta_y(x, -b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{1}{S}W_n \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{A}W_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{1}{S}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{S}\beta_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{A}\beta_{xn} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{2}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}W_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{A}W_n \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \frac{2}{S}\beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{S}\beta_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{A}\beta_{yn} \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \frac{3}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{3}{S}W_n \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{A}W_n \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{3}{S}\beta_{x0} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{S}\beta_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N \frac{3}{A}\beta_{xn} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \frac{4}{S}W_0 + \sum_{n=1}^N \frac{4}{S}W_n \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{A}W_n \sin \frac{n\pi x}{a} \\ \frac{4}{S}\beta_{y0} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{S}\beta_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{A}\beta_{yn} \sin \frac{n\pi x}{a} \end{pmatrix}$$

Tandis que :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{S}W_0 \\ \frac{1}{S}\beta_{x0} \\ \frac{2}{S}W_0 \\ \frac{2}{S}\beta_{y0} \\ \frac{3}{S}W_0 \\ \frac{3}{S}\beta_{x0} \\ \frac{4}{S}W_0 \\ \frac{4}{S}\beta_{x0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) dx \end{bmatrix} & \quad \tilde{u}_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{S}W_N \\ \frac{1}{A}W_N \\ \frac{1}{S}\beta_{xN} \\ \frac{1}{A}\beta_{xN} \\ \frac{2}{S}W_N \\ \frac{2}{A}W_N \\ \frac{2}{S}\beta_{yN} \\ \frac{2}{A}\beta_{yN} \\ \frac{3}{S}W_N \\ \frac{3}{A}W_N \\ \frac{3}{S}\beta_{xN} \\ \frac{3}{A}\beta_{xN} \\ \frac{4}{S}W_N \\ \frac{4}{A}W_N \\ \frac{4}{S}\beta_{yN} \\ \frac{4}{A}\beta_{yN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.24)$$

CHAPITRE 4. ELEMENT CONTINU DE PLAQUE EN FLEXION À
DIRECTIONS D'ORTHOTROPIE QUELCONQUES

Après extraction des constantes d'intégration, on aboutit à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}
 {}^1W_0 \\
 {}^2\beta_{x0} \\
 {}^3W_0 \\
 {}^4\beta_{x0} \\
 {}^5W_0 \\
 {}^6\beta_{y0} \\
 {}^7W_0 \\
 {}^8\beta_{y0} \\
 \vdots \\
 {}^1W_N \\
 {}^2\beta_{xN} \\
 {}^3W_N \\
 {}^4\beta_{xN} \\
 {}^5W_N \\
 {}^6\beta_{yN} \\
 {}^7W_N \\
 {}^8\beta_{yN} \\
 \vdots \\
 {}^1W_N \\
 {}^2\beta_{xN} \\
 {}^3W_N \\
 {}^4\beta_{xN} \\
 {}^5W_N \\
 {}^6\beta_{yN} \\
 {}^7W_N \\
 {}^8\beta_{yN}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b b [\mathbf{H}_{1M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a a [\mathbf{H}_{2M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{3M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{4M}(x)] dx \\
 \vdots & & \vdots \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{1M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{1M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{2M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{2M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{3M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{3M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{4M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{4M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 {}^1B_0 \\
 {}^2B_0 \\
 {}^3B_0 \\
 {}^4B_0 \\
 {}^1E_0 \\
 {}^2E_0 \\
 {}^3E_0 \\
 {}^4E_0 \\
 \vdots \\
 {}^1B_N \\
 {}^2B_N \\
 {}^3B_N \\
 {}^4B_N \\
 {}^5B_N \\
 {}^6B_N \\
 {}^7B_N \\
 {}^8B_N \\
 {}^1E_N \\
 {}^2E_N \\
 {}^3E_N \\
 {}^4E_N \\
 {}^5E_N \\
 {}^6E_N \\
 {}^7E_N \\
 {}^8E_N
 \end{pmatrix}
 \quad (4.25)$$

De même pour les termes d'efforts :

$$\begin{pmatrix}
 F_{zx}(a, y) \\
 M_x(a, y) \\
 F_{zy}(x, b) \\
 M_y(x, b) \\
 F_{zx}(-a, y) \\
 M_x(-a, y) \\
 F_{zy}(x, -b) \\
 M_y(x, -b)
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 {}^1S F_{zx0} + \sum_{n=1}^N {}^1S F_{zxn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N {}^1A F_{zxn} \sin \frac{N\pi y}{b} \\
 {}^1S M_{x0} + \sum_{n=1}^N {}^1S M_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^N {}^1A M_{xn} \sin \frac{N\pi y}{b} \\
 {}^2S F_{zy0} + \sum_{n=1}^N {}^2S F_{zyn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N {}^2A F_{zyn} \sin \frac{N\pi x}{a} \\
 {}^2S M_{y0} + \sum_{n=1}^N {}^2S M_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} + \sum_{n=1}^N {}^2A M_{yn} \sin \frac{N\pi x}{a} \\
 -{}^3S F_{zx0} - \sum_{n=1}^N {}^3S F_{zxn} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^N {}^3A F_{zxn} \sin \frac{N\pi y}{b} \\
 -{}^3S M_{x0} - \sum_{n=1}^N {}^3S M_{xn} \cos \frac{n\pi y}{b} - \sum_{n=1}^N {}^3A M_{xn} \sin \frac{N\pi y}{b} \\
 -{}^4S F_{zy0} - \sum_{n=1}^N {}^4S F_{zyn} \cos \frac{n\pi x}{a} - \sum_{n=1}^N {}^4A F_{zyn} \sin \frac{N\pi x}{a} \\
 -{}^4S M_{y0} - \sum_{n=1}^N {}^4S M_{yn} \cos \frac{n\pi x}{a} - \sum_{n=1}^N {}^4A M_{yn} \sin \frac{N\pi x}{a}
 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} {}^1_S F_{zx0} \\ {}^1_S M_{x0} \\ {}^2_S F_{zy0} \\ {}^2_S M_{y0} \\ {}^3_S F_{zx0} \\ {}^3_S M_{x0} \\ {}^4_S F_{zy0} \\ {}^4_S M_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b F_{zx}(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b M_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-a}^a M_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-b}^b M_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-b}^b F_{zy}(x, -b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-b}^b M_y(x, -b) dx \end{bmatrix} \quad \tilde{F}_N = \begin{bmatrix} {}^1_S F_{zxN} \\ {}^1_A F_{zxN} \\ {}^1_S M_{xN} \\ {}^1_A M_{xN} \\ {}^2_S F_{zyN} \\ {}^2_A F_{zyN} \\ {}^2_S M_{yN} \\ {}^2_A M_{yN} \\ {}^3_S F_{zxN} \\ {}^3_A F_{zxN} \\ {}^3_S M_{xN} \\ {}^3_A M_{xN} \\ {}^4_S F_{zyN} \\ {}^4_A F_{zyN} \\ {}^4_S M_{yN} \\ {}^4_A M_{yN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Après extraction des constantes d'intégration, on aboutit à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} {}^1_S F_{zx0} \\ {}^1_S M_{x0} \\ {}^2_S F_{zy0} \\ {}^2_S M_{y0} \\ {}^3_S F_{zx0} \\ {}^3_S M_{x0} \\ {}^4_S F_{zy0} \\ {}^4_S M_{y0} \\ \vdots \\ {}^1_S F_{zxN} \\ {}^1_A F_{zxN} \\ {}^1_S M_{xN} \\ {}^1_A M_{xN} \\ {}^2_S F_{zyN} \\ {}^2_A F_{zyN} \\ {}^2_S M_{yN} \\ {}^2_A M_{yN} \\ {}^3_S F_{zxN} \\ {}^3_A F_{zxN} \\ {}^3_S M_{xN} \\ {}^3_A M_{xN} \\ {}^4_S F_{zyN} \\ {}^4_A F_{zyN} \\ {}^4_S M_{yN} \\ {}^4_A M_{yN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{1M}(y)] dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{2M}(x)] dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{3M}(y)] dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{4M}(x)] dx \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{1M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{1M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{2M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{2M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{3M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{3M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{4M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{4M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1_{B0} \\ {}^2_{B0} \\ {}^3_{B0} \\ {}^4_{B0} \\ {}^1_{E0} \\ {}^2_{E0} \\ {}^3_{E0} \\ {}^4_{E0} \\ \vdots \\ {}^1_{BN} \\ {}^2_{BN} \\ {}^3_{BN} \\ {}^4_{BN} \\ {}^5_{BN} \\ {}^6_{BN} \\ {}^7_{BN} \\ {}^8_{BN} \\ {}^1_{EN} \\ {}^2_{EN} \\ {}^3_{EN} \\ {}^4_{EN} \\ {}^5_{EN} \\ {}^6_{EN} \\ {}^7_{EN} \\ {}^8_{EN} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

A partir des expressions (4.25,4.27), on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{H}_a(\omega) \mathbf{C}_p \\ \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{G}_a(\omega) \mathbf{C}_p \end{aligned} \quad (4.28)$$

La matrice de raideur dynamique de la plaque orthotrope complète est déterminée alors en éliminant les constantes d'intégration. Cette matrice, notée \mathbf{K}_a , se présente comme suit :

$$\mathbf{K}_a(\omega) = \mathbf{H}_a(\omega)^{-1} \mathbf{G}_a(\omega) \quad (4.29)$$

Pour conclure ce paragraphe, on trouvera l'organigramme récapitulant la procédure de construction de la matrice de raideur dynamique dans le cas des plaques et sa mise en oeuvre dans le cadre d'une analyse de réponse harmonique et d'une analyse modale.

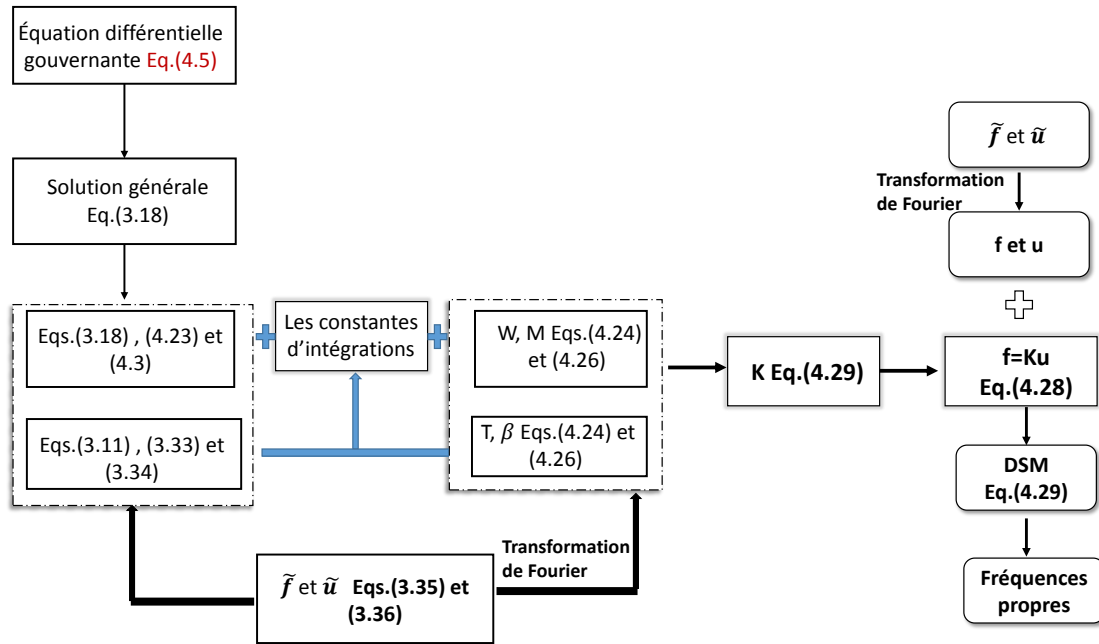


FIGURE 4.2 – Organigramme montrant la procédure d'élaboration du DSM et sa mise en oeuvre

4.4 Validation numérique du modèle

La validation numérique de l'élément continu de la plaque à orientation quelconque des axes d'orthotropie est menée en comparant l'analyse modale réalisée avec celle obtenue par la Méthode des Eléments Finis. La solution est déterminée ici par l'utilisation de notre série de Lévy enrichie avec nombre d'onde dans la direction x donnés par $k_{1m} = k_{3m} = \frac{m\pi}{b}$ et dans la direction y donnés par $k_{2m} = k_{4m} = \frac{m\pi}{a}$. La structure étudiée est une plaque orthotrope ayant les propriétés suivantes :

TABLE 4.1 – Propriétés élastiques et géométriques de la plaque orthotrope

Module d'Young suivant x	$E_x = 120$ GPa
Module d'Young suivant y	$E_y = 10$ GPa
Module de cisaillement	$G_{xy} = 4.8$ GPa
Coefficient de poisson	$\nu_{xy} = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 1510$ kg/m ³
Longueur de la plaque (2a)	$L = 1$ m
Largeur de la plaque (2b)	$l = 0.5$ m
Épaisseur de la plaque	$h = 0.002$ m

Les tables 4.2, 4.3, 4.4 ci-dessous donnent les premières fréquences propres d'une plaque rectangulaire pour des inclinaisons de l'orthotropie respectives de $\theta = 15^\circ$, $\theta = 35^\circ$ et $\theta = 45^\circ$. Pour la modélisation continue, ces fréquences propres sont déterminées par l'analyse d'une réponse harmonique à un chargement unilatéral uniformément réparti sur le côté situé en $x = a$, compte tenu de l'inclinaison des directions d'orthotropie, ce chargement permet de solliciter l'ensemble des modes de flexion.

TABLE 4.2 – Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 15^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

Modes propres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MEC (n=11)	8.16	14.56	19.7	23.07	29.32	35.6	49.23	55.87	57.86	62.87
MEF(100x50)	7.27	17.49	19.95	22.64	31.0	36.62	47.83	56.94	59.62	61.67

TABLE 4.3 – Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 30^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

Modes propres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MEC (n=11)	6.2	17.6	52.8	70.8	115.0	198.6	88.16	99.3	320	369
MEF(100x50)	6.5	17.5	53.7	68.7	116.5	198.1	85.6	96.7	304	372

Les déformées modales correspondant à ces fréquences sont représentées dans le tableau de figures 4.6.

TABLE 4.4 – Fréquences propres d'une plaque libre rectangulaire orthotrope pour $\theta = 45^\circ$. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

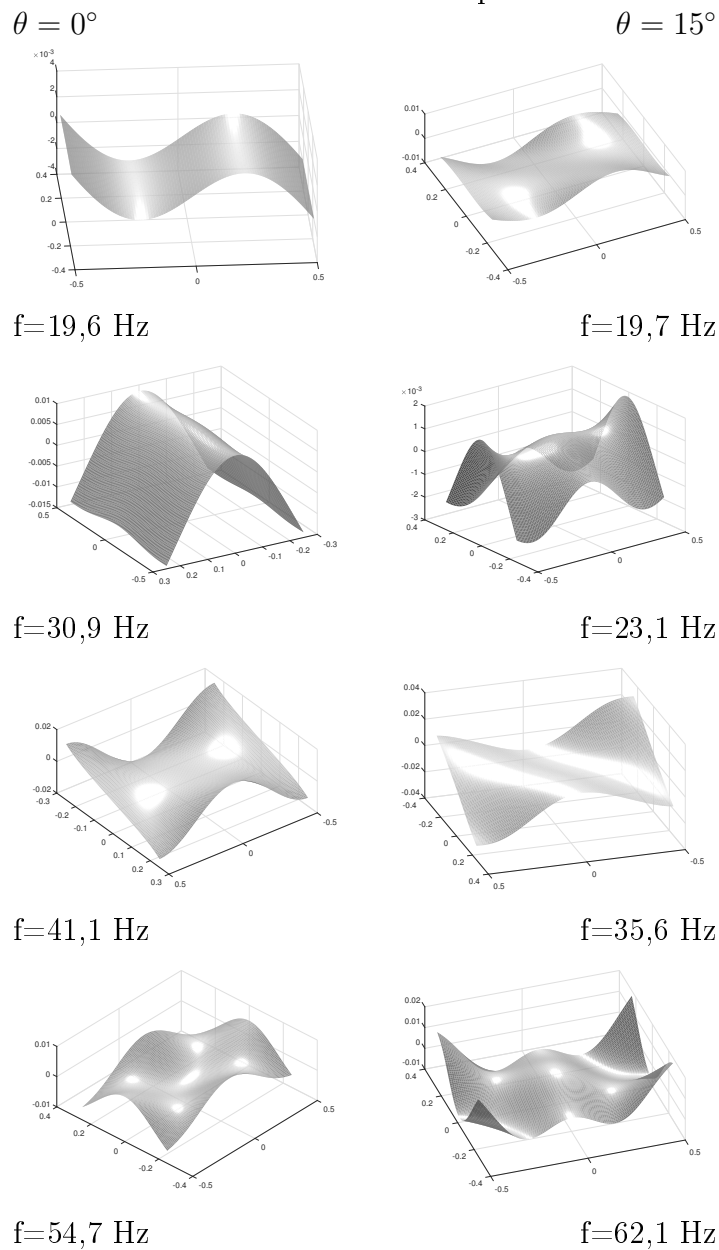
Modes propres	1	2	3	4	5	6	7	8
MEC (n=11)	5.9	14	32.0	80.1	96.8	121.8	323.4	407.2
MEF(100x50)	5.8	16	34.8	69.24	94.6	121.9	320.0	401.9

Le tableau de figures 4.5 montre les motifs nodaux d'une plaque rectangulaire en vibration libre et illustre le changement de la forme de ces motifs en fonction de

*CHAPITRE 4. ELEMENT CONTINU DE PLAQUE EN FLEXION À
DIRECTIONS D'ORTHOTROPIE QUELCONQUES*

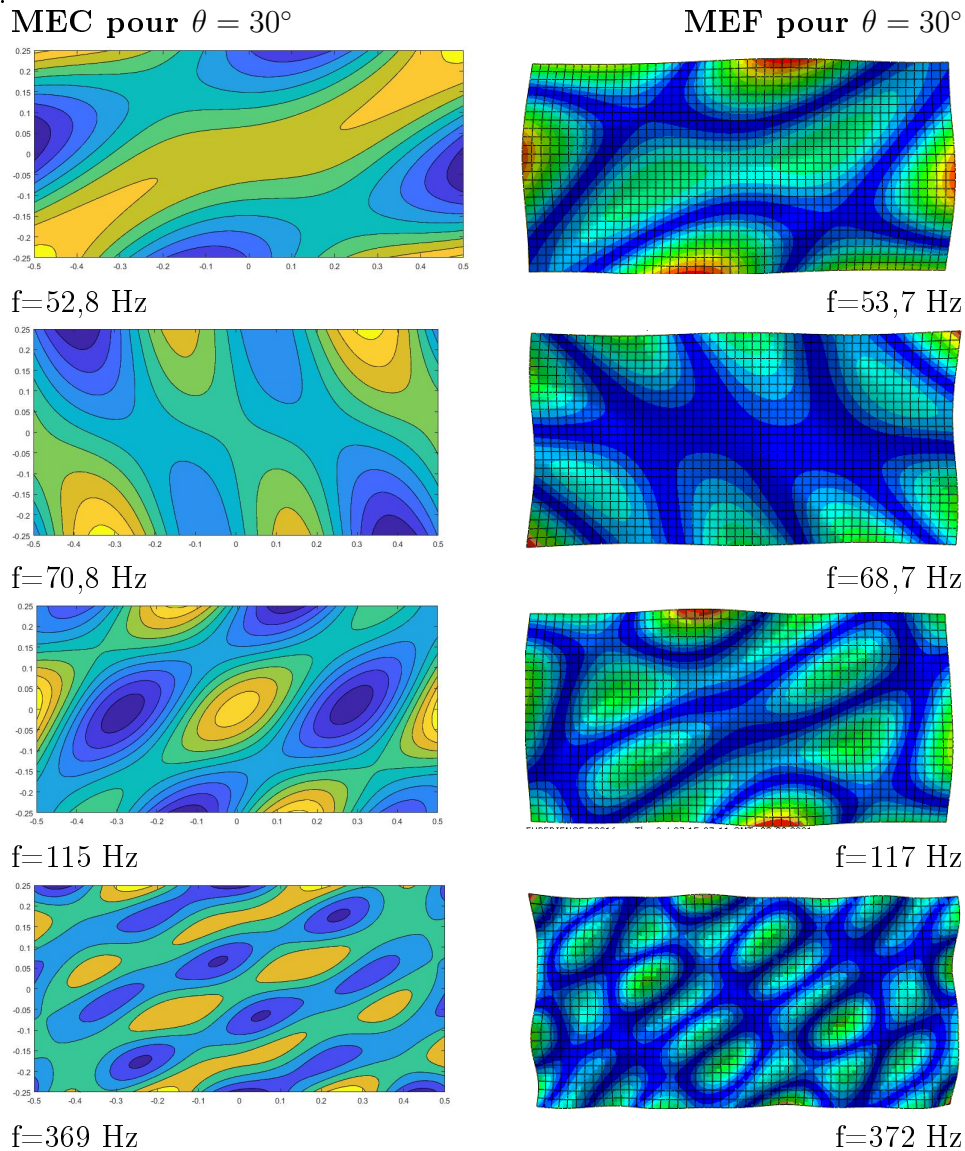
l'orientation des axes d'orthotropie. Pour le cas orthotrope $\theta = 0$, une forme de mode peut être identifiée par le nombre de lignes nodales parallèles à chaque bord. De tels numéros de mode ne peuvent pas être attribués dans le cas orthotrope quelconque puisqu'il n'y a pas de moyen clair d'identification. On constate que les formes de modes et les fréquences naturelles des plaques généralement orthotropes sont fortement affectées par l'orientation des axes élastiques du matériau et que de telles structures ne présentent pas un comportement facilement prévisible.

TABLE 4.5 – Formes de mode caractéristiques d'une plaque rectangulaire libre pour une orientation nulle et de 15° des axes d'orthotropie.



Le tableau de figures 4.6 montre une comparaison des champs de déplacement calculés par le modèle élément continu et le modèle élément fini.

TABLE 4.6 – Déformées modales EC et EF d'une plaque à axes d'orthotropie inclinés de 30° .



Ces analyses modales comparées montrent une bonne concordance à la fois en termes de fréquences mais aussi en termes de champ de déplacement entre les deux types de modélisation ce qui constitue une première validation de notre modèle. Cette validation est néanmoins incomplète puisqu'il s'agirait également de confronter les réponses harmoniques calculées par ces deux modèles sur tout un intervalle fréquentiel. Un développement logiciel complémentaire reste à réaliser dans ce but.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu développer un nouvel élément continu susceptible de modéliser des plaques rectangulaires dont l'orientation des axes d'orthotropie est quelconque. L'utilisation des séries de Lévy enrichies présentées au chapitre précédent s'est avérée nécessaire pour pouvoir prendre en compte le couplage entre les contributions SS, AS, SA et AA. Ce couplage se traduit concrètement par le fait qu'un chargement symétrique conduit à un champ de déplacement qui ne l'est pas. Il s'agit d'une nouvelle contribution à la méthode des éléments continus puisqu'un tel élément n'a jamais été formulé. La validation a ensuite été réalisée en comparant nos résultats à ceux de la méthode des éléments finis (MEF) d'un point de vue analyse modale. Du point de vue de la réponse harmonique, des développements complémentaires sont à prévoir.

5 Formulation d'éléments continus de structures multicouches

5.1 Introduction

En sciences des matériaux composites, le terme multicouche ou stratifié signifie que deux couches ou plus, appelées également plis, sont combinées à une échelle macroscopique pour former un troisième matériau utile. L'avantage des multicouches est que, s'ils sont correctement conçus, présentent généralement de meilleures qualités que leurs composants ou constituants et parfois d'autres qualités qu'aucun des composants ne possèdent. Ainsi, dans de nombreux cas, l'utilisation de stratifiés est plus efficace. Au cours des dernières années, de grands progrès dans les sciences et technologies ont motivé les recherches concernant ces matériaux. Le développement de ces matériaux dits structurés a amélioré les performances mécanique, phonique, thermique tout en conservant une grande fiabilité. Ce chapitre présente la formulation et mise en œuvre d'éléments continus de matériaux stratifiés pour lesquels il n'existe aucune symétrie dans le sens de l'épaisseur. Nous qualifions ces matériaux de multicouches non symétriques. Devant la difficulté de la tâche et pour adresser le problème de manière progressive, deux approches sont présentées successivement.

La première approche concerne une modélisation de type poutre. Cette modélisation permet de représenter le comportement de structures dont une des dimensions est grande devant les deux autres. Elle permet de mettre en évidence, dans ce cas simple, le couplage flexion/traction que l'on retrouve également dans le cas des plaques. De manière à considérer cette modélisation comme un cas limite de la modélisation plaque qui suivra, nous nous limitons au cas des problèmes plans, c'est à dire que nous n'envisageons pas le couplage flexion/torsion. Ceci conduit à considérer uniquement le cas d'empilements de plis isotropes ou orthotropes dont un des axes d'orthotropie est confondu avec l'axe longitudinal. Pour de telles modélisations planes, seule la flexion dans le plan de symétrie du volume est considérée.

La seconde approche est celle des modèles plaques dont les mouvements de flexion et de membrane sont couplés. On parle, dans le cas des plaques, de couplage flexion/membrane.

La définition de la géométrie et des matériaux dans le sens de l'épaisseur de ces

structures est identique. Elle est précisée dans le paragraphe qui suit.

5.2 Géométrie

On considère des éléments structuraux de type poutre ou plaque élaborés par superposition de N_c plis dont les matériaux constitutifs sont de nature orthotrope. Chaque pli est défini par une épaisseur et des directions d'orthotropie qui lui sont propres. On considère une adhésion parfaite des plis les uns aux autres de telle sorte qu'il y ait continuité du champ de déplacement à l'interface de deux plis. La séquence des plis est absolument quelconque. Les deux figures ci-dessous précisent la configuration géométrique de ces éléments.

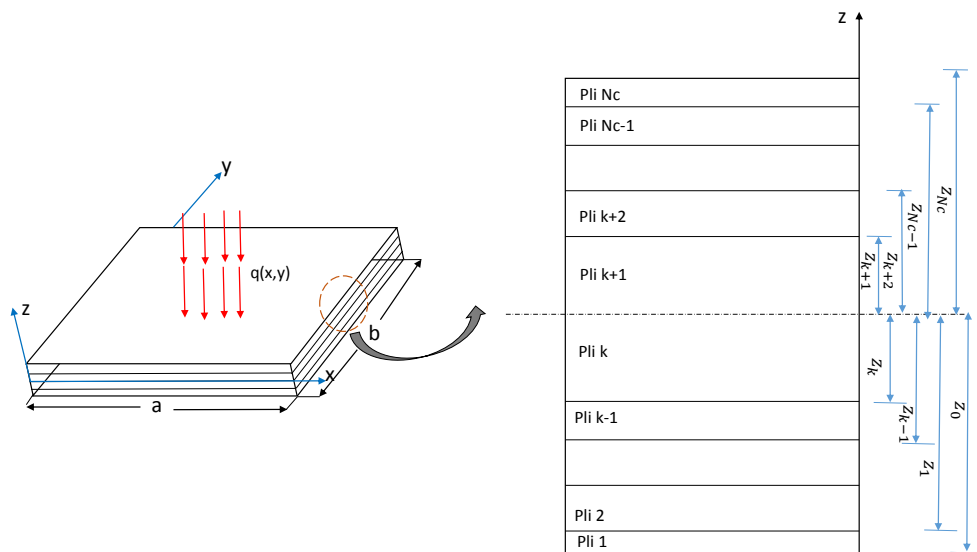


FIGURE 5.1 – Géométrie d'un stratifié non symétrique

Le feuillet moyen ou le plan moyen de la plaque est la surface plane située à mi-épaisseur. Dans le cas général, la répartition des plis de part et d'autre de ce plan est quelconque mais pourra, dans certains cas particuliers, présenter des propriétés de symétrie géométrique et matérielle ou même d'antisymétrie vis à vis des caractéristiques élastiques.

5.3 Modélisation poutre

5.3.1 Hypothèses cinématiques

On rappelle les hypothèses cinématiques classiques qui permettent de prendre en compte ou non l'effet de cisaillement. Le plan de flexion est le plan (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) :

- Cinématique de Timoshenko : les sections restent planes de telle sorte que le champ de déplacement puisse s'écrire :

$$\begin{cases} u(x, z) = U(x) + \theta_Y(x)z \\ w(x, z) = W(x) \end{cases} \quad (5.1)$$

où u est le déplacement longitudinal selon l'axe x , $U(x)$ le déplacement longitudinal du centre géométrique de la section, θ_Y la rotation de la section autour de l'axe Y , w le déplacement vertical d'un point quelconque de la section et W le déplacement vertical du centre géométrique ou flèche.

- Cinématique d'Euler-Bernoulli : les sections restent normales la fibre neutre de telle sorte qu'il n'y a pas de distorsion angulaire. Cette hypothèse consiste à supposer que $\theta_Y(x) = -\frac{dW}{dx}$.

Le tenseur des petites déformations défini par $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \mathbf{U} + \overline{\text{grad}}^T \mathbf{U} \right)$ a alors pour composantes, dans le système de coordonnées cartésiennes :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \mathbf{U} + \overline{\text{grad}}^T \mathbf{U} \right) \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dU}{dx} + z \frac{d\theta_Y}{dx} \\ 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_Y + \frac{dW}{dx} \end{cases} \quad (5.2)$$

Dans le cas de la cinématique d'Euler Bernoulli, la distorsion angulaire $2\epsilon_{xy}$ est donc nulle.

5.3.2 Loi de comportement et relations efforts-déplacement

La loi de Hooke dans l'hypothèse des poutres, c'est à dire en supposant $\sigma_{yy} \sim \sigma_{zz} \sim 0$ permet d'évaluer les contraintes de Cauchy, elle s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)\epsilon_{xx} \\ \sigma_{xz} = 2G(z)\epsilon_{xz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = E(z)\frac{dU}{dx} + E(z)z\frac{d\theta_Y}{dx} \\ \sigma_{xz} = -G(z)\theta_Y + G(z)\frac{dW}{dx} \end{cases} \quad (5.3)$$

Les constantes élastiques E et G sont le module d'Young le long de l'axe de la poutre, et le module de Coulomb dans le plan (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) .

Dans le cas de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, la contrainte de cisaillement ne peut être déduite de la loi de comportement. Elle reste non nulle malgré le fait que la distorsion $2\epsilon_{xz}$ soit nulle. Cette contrainte est déduite des équations d'équilibre.

Les contraintes de Cauchy permettent de définir des efforts généralisés (résultante et moment) par intégration dans l'épaisseur de la plaque. On définit ainsi l'effort généralisé \mathbf{F} et le moment généralisé \mathbf{M} par :

- Résultante des contraintes $\mathbf{F} = \int_S \sigma_{xx} \mathbf{X} + \sigma_{xz} \mathbf{Z} dS$

- Moment des contraintes en G : $\int_S \mathbf{GM} \wedge (\sigma_{xx} \mathbf{X} + \sigma_{xz} \mathbf{Z}) dS$

Soit, en utilisant la loi de comportement :

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \int_S E(z) \left(\frac{dU}{dx} + z \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \mathbf{X} + G(z) \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \mathbf{Z} dS \\ \mathbf{M} = \int_S z \mathbf{Z} \wedge \left[\left[E(z) \left(\frac{dU}{dx} + z \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \mathbf{X} + G(z) \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \mathbf{Z} \right] \right] dS = \int_S z E(z) \left(\frac{dU}{dx} + z \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \mathbf{Y} dS \end{cases}$$

On définit ainsi par projection sur \mathbf{X} et \mathbf{Z} , l'effort normal N , l'effort tranchant T_Z et le moment de flexion M_Y ainsi que les raideurs K_T , K_C , K_{TF} . Cette dernière raideur étant la raideur de couplage flexion/traction.

$$\begin{cases} N = K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \\ T_Z = K_C \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \\ M_Y = K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \end{cases} \quad (5.4)$$

avec $K_T = \int_S E(z) dS$, $K_{TF} = \int_S z E(z) dS$, $K_C = \int_S G(z) dS$ et $K_F = \int_S E(z) z^2 dS$.

Dans le cas de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, l'effort tranchant T_Z est déterminé par les équations d'équilibre d'un élément de longueur. En l'absence de chargement réparti et en négligeant l'inertie de rotation, l'équilibre du moment donne :

$$M_Y(x + dx)dx - M_Y(x, y) + T_Z(x + dx)dx = 0 \Rightarrow T_Z = -\frac{dM_Y}{dx}$$

Soit, en termes de déplacement vertical, pour l'hypothèse d'Euler-Bernoulli :

$$T_Z = -K_{TF} \frac{d^2U}{dx^2} + K_F \frac{d^2\theta_Y}{dx^2} \quad (5.5)$$

5.3.3 Principe de Hamilton

Ce principe a déjà été présenté au deuxième chapitre. Il permet de déterminer d'une part les équations d'équilibre et d'autre part les conditions aux limites qui permettent de résoudre le problème élastodynamique. Il s'écrit ici :

$$\forall \delta u(t), \delta w(t), \delta \theta_Y, \delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} W dt = 0$$

Le développement variationnel est précisé en Annexe B. Il conduit aux équations du mouvement en termes de déplacements et d'efforts internes. Elle s'écrivent dans le cadre des hypothèses cinématiques de Timoshenko :

$$\begin{cases} \rho S \frac{d^2U}{dt^2} = \frac{dN}{dx} \\ \rho S \frac{d^2W}{dt^2} = \frac{dT_Z}{dx} \\ \rho I_Y \frac{d^2\theta_Y}{dt^2} = \frac{dM_Y}{dx} - T_Z \end{cases} \quad (5.6)$$

5.3.4 Matrice de transfert dynamique

Le caractère unidimensionnel du problème permet la recherche de solutions fortes du problème élastodynamique par la résolution directe de l'ensemble des équations. Dans le cas des hypothèses de Timoshenko et pour un régime harmonique de pulsation ω , l'ensemble des équations 5.4 et 5.6 constitue un système différentiel d'ordre 1. En effet, ces équations écrites pour un régime harmonique donnent :

$$\begin{cases} N = K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\Theta_Y}{dx} \\ T_Z = K_C \left(-\Theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \\ M_Y = K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\Theta_Y}{dx} \\ -m_h \omega^2 U = \frac{dN}{dx} \\ -m_h \omega^2 W = \frac{dT_Z}{dx} \\ -I_h \omega^2 \Theta_Y = \frac{dM_Y}{dx} - T_Z \end{cases}$$

où ω est la pulsation du régime. La première et la troisième équations donnent :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} = \frac{K_F N}{K_T K_F - K_{TF}^2} - \frac{K_{TF} M_Y}{K_T K_F - K_{TF}^2} \\ \frac{d\Theta_Y}{dx} = -\frac{K_{TF} N}{K_T K_F - K_{TF}^2} + \frac{(K_T K_F - K_{TF}^2 + K_{TF}^2) M_Y}{K_T K_F^2 - K_{TF}^2 K_F} = -\frac{K_{TF} N}{K_T K_F - K_{TF}^2} + \frac{K_T M_Y}{K_T K_F - K_{TF}^2} \end{cases}$$

d'où le système différentiel du premier ordre :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx} = \frac{K_F N}{K_T K_F - K_{TF}^2} - \frac{K_{TF} M_Y}{K_T K_F - K_{TF}^2} \\ \frac{dW}{dx} = \frac{T_Z}{K_C} + \Theta_Y \\ \frac{d\Theta_Y}{dx} = -\frac{K_{TF} N}{K_T K_F - K_{TF}^2} + \frac{K_T M_Y}{K_T K_F - K_{TF}^2} \\ \frac{dN}{dx} = -m_h \omega^2 U \\ \frac{dT_Z}{dx} = -m_h \omega^2 W \\ \frac{dM_Y}{dx} = -I_h \omega^2 \Theta + T_Z \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous une forme matricielle :

$$\frac{d\mathbf{E}}{dx} = [\mathbf{D}_\omega] \mathbf{E} \quad (5.7)$$

où $\langle E \rangle = \langle U, W, \theta_Y, N, T_Z, M_Y \rangle$ et

$$[\mathbf{D}_\omega] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_F}{K_T K_F - K_{TF}^2} & 0 & -\frac{K_{TF}}{K_T K_F - K_{TF}^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{K_C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{K_{TF}}{K_T K_F - K_{TF}^2} & \frac{K_T}{K_T K_F - K_{TF}^2} & 0 \\ -m_h \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m_h \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_h \omega^2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$\mathbf{E}(x)$ est un vecteur d'état dépendant de la variable x et de la pulsation ω . Il est obtenu par résolution du système d'équations différentielles 5.7. En utilisant l'exponentielle de matrice, on obtient :

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(0) e^{[\mathbf{D}_\omega]x} \quad (5.9)$$

$\mathbf{E}(0)$ est le vecteur d'état à l'extrémité $x = 0$ de la poutre. Cette relation linéaire permet de définir une matrice de transfert dynamique en x notée $[\mathbf{T}_\omega(\mathbf{x})]$ reliant le vecteur d'état situé à l'origine $x = 0$ de la poutre et le vecteur d'état en un point quelconque x telle que :

$$\mathbf{E}(x) = [\mathbf{T}_\omega(x)]\mathbf{E}(0) \quad (5.10)$$

Le système différentiel 5.7 permet d'obtenir l'équation satisfaite par cette matrice, on a :

$$\frac{d[\mathbf{T}_\omega(x)]}{dx}\mathbf{E}(0) = [\mathbf{D}_\omega][\mathbf{T}_\omega(x)]\mathbf{E}(0)$$

Soit :

$$\frac{d[\mathbf{T}_\omega(x)]}{dx} = [\mathbf{D}_\omega][\mathbf{T}_\omega(x)] \quad (5.11)$$

avec pour condition à l'origine $[\mathbf{T}_\omega(0)] = [\mathbf{I}]$ où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité. La matrice de transfert dynamique en x solution est alors :

$$[\mathbf{T}_\omega(x)] = e^{[\mathbf{D}_\omega]x} \quad (5.12)$$

La relation matricielle entre les deux vecteurs d'états situés aux deux extrémités de la poutre est ensuite donnée par la matrice $[\mathbf{T}_\omega(L)]$. Cette matrice est notée par la suite simplement $[\mathbf{T}_\omega]$, soit : $\mathbf{E}(L) = [\mathbf{T}_\omega]\mathbf{E}(0)$ avec :

$$[\mathbf{T}_\omega] = e^{[\mathbf{D}_\omega]L} \quad (5.13)$$

5.3.5 Matrice de raideur dynamique

La formulation de l'élément continu de poutre repose sur le calcul de la matrice de raideur dynamique. En séparant les composantes d'efforts et de déplacement dans le vecteur d'état \mathbf{E}_ω et en considérant qu'à l'origine de la poutre $x = 0$ les efforts internes sont opposés aux efforts extérieurs, on obtient [59] :

$$[\mathbf{K}_\omega] = \begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{12}]^{-1}[\mathbf{T}_{11}] & -[\mathbf{T}_{12}]^{-1} \\ -[\mathbf{T}_{12}]^{-T} & [\mathbf{T}_{22}][\mathbf{T}_{11}]^{-1} \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

5.3.6 Réponse harmonique

Ce paragraphe a pour but de valider numériquement l'élément continu de poutre multicouche développé par comparaison avec des modèles éléments finis de plaque multicouche et d'évaluer les limites de ce type de modélisation dans la cadre des plaques.

La poutre étudiée est constituée de deux matériaux superposés de même épaisseur. Il s'agit de :

- un acier d'épaisseur 40 mm de masse volumique 7800 kg/m³, de module d'Young 210000 MPa et de coefficient de Poisson 0,3.

- Un aluminium d'épaisseur 40 mm de masse volumique 2700 kg/m^3 , de module d'Young 70000 MPa et de coefficient de Poisson 0,27.

Ces deux matériaux sont superposés pour constituer une poutre de longueur 1 m et de largeur notée par la suite b . Lorsque la largeur b est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur totale $a = 40 + 40 \text{ mm}$, la structure peut être assimilée à une poutre, lorsque cette largeur augmente, le comportement de la structure s'éloigne de celle d'une poutre pour tendre vers un comportement de plaque.

La validation du modèle élément continu de type poutre multicouche est réalisée en fixant la largeur b à 60 mm. Cette poutre soumise à des conditions aux limites libres est sollicitée à une de ses extrémités par un effort vertical T_Z provoquant la flexion. La réponse est évaluée à l'extrémité sollicitée et, dans un premier temps, dans la direction de la sollicitation. Dans un second temps, la réponse est évaluée en cette même extrémité mais dans la direction longitudinale de manière à mettre en évidence le couplage flexion/membrane afin de vérifier que ce phénomène est correctement représenté.

Trois modèles éléments finis plaque dont les maillages sont de plus en plus fins sont utilisés. Ces maillages sont représentés dans le tableau de figures 5.3.6 ci-dessous.

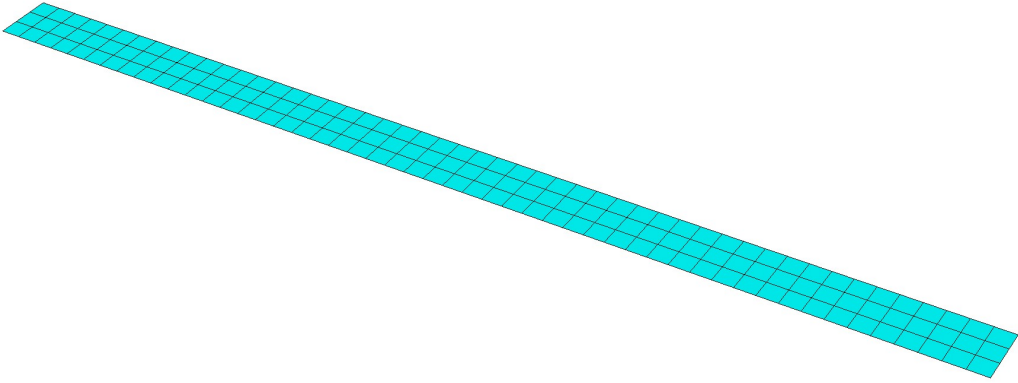
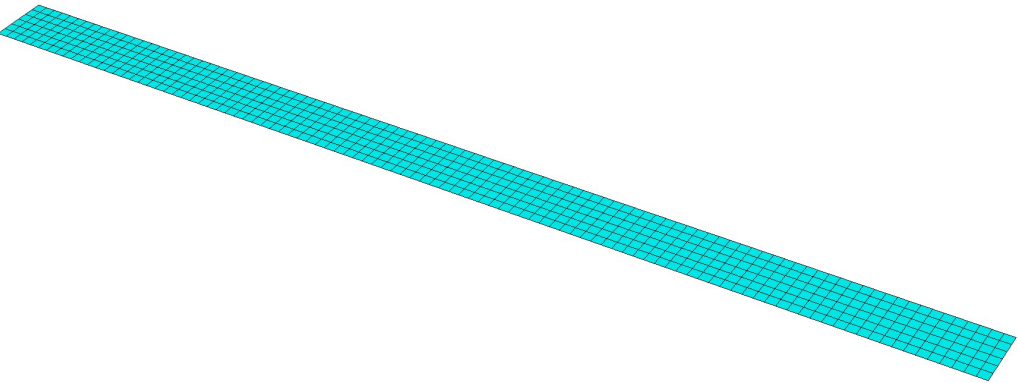
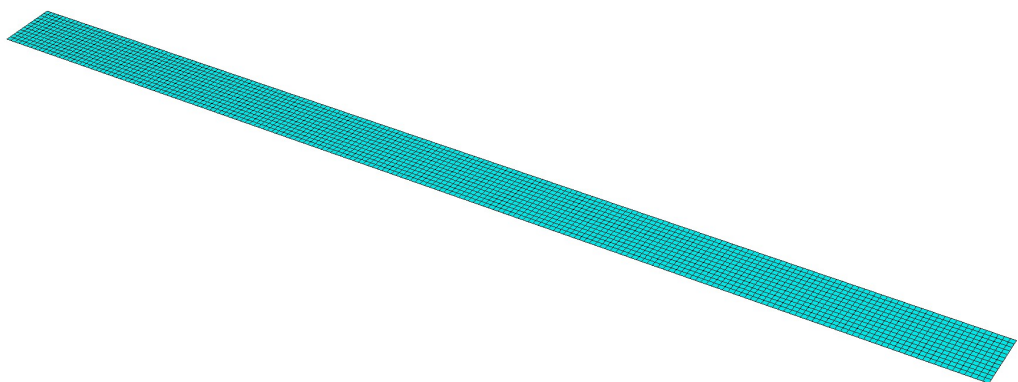
 <p>Maillage 3x50 éléments DKQ</p>
 <p>Maillage 6x100 éléments DKQ</p>
 <p>Maillage 12x200 éléments DKQ</p>

TABLE 5.1 – Maillages éléments finis

Les courbes de réponses obtenues par ces modèles et par la formulation éléments continus sont données sur les figures 5.2 et 5.3 suivantes respectivement sur les intervalles fréquentiels [0,4000 Hz] et [4000, 10000 Hz].

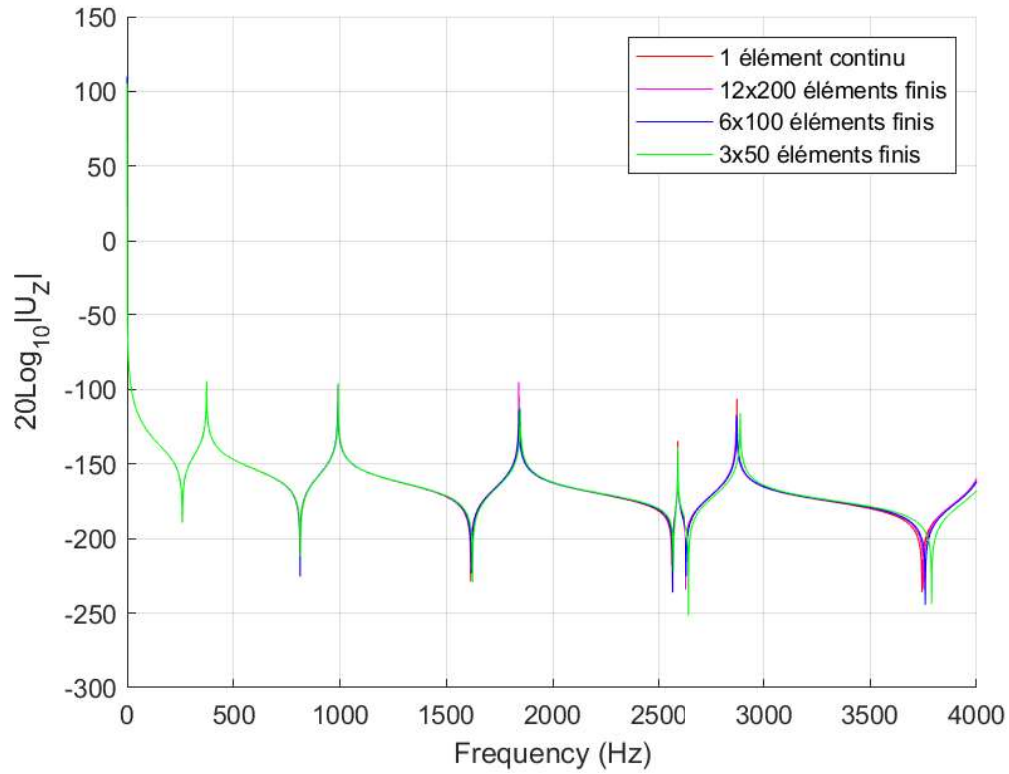


FIGURE 5.2 – Réponses harmoniques comparées sur [0,4000 Hz]

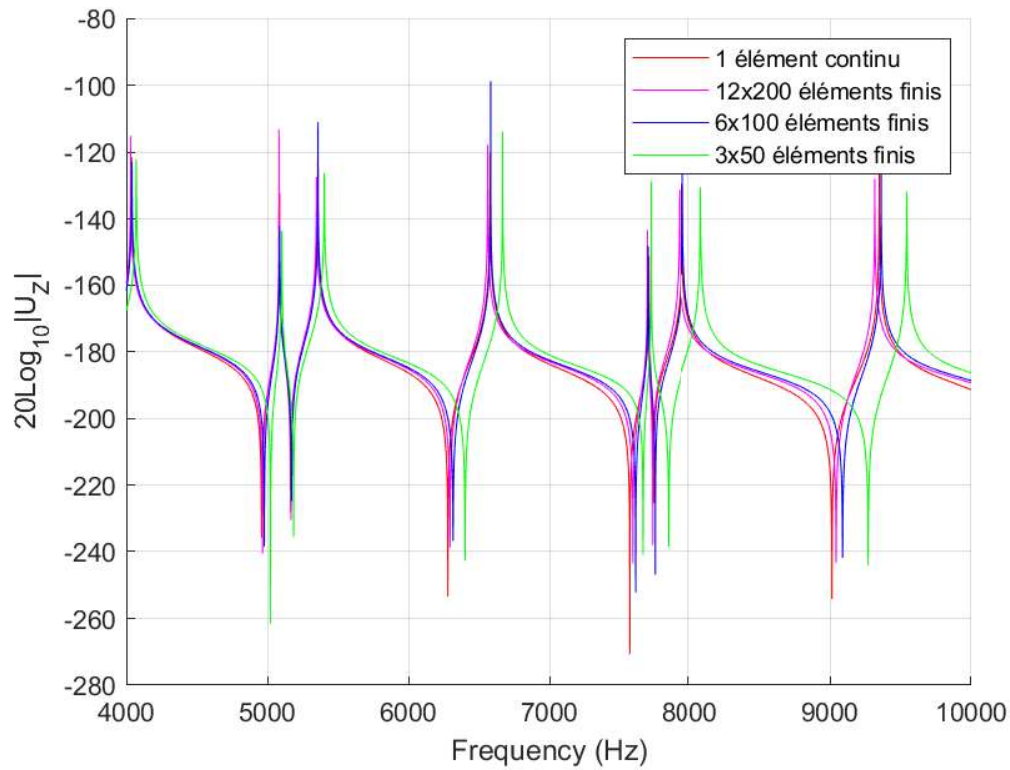


FIGURE 5.3 – Réponses harmoniques comparées sur [4000, 10000 Hz]

On observe une parfaite convergence des réponses éléments finis vers la réponse de notre formulation. Les éléments finis DKQ étant basés sur la cinématique de Kirchhoff il a été nécessaire d'ajuster le coefficient de Timoshenko de notre formulation. Il a pu être évalué numériquement à 0,74.

Les deux séries de réponses harmoniques 5.4 et 5.5 qui suivent mettent en évidence le couplage flexion/traction puisque le chargement reste le même mais la réponse est évaluée dans la direction de l'axe longitudinal de la poutre.

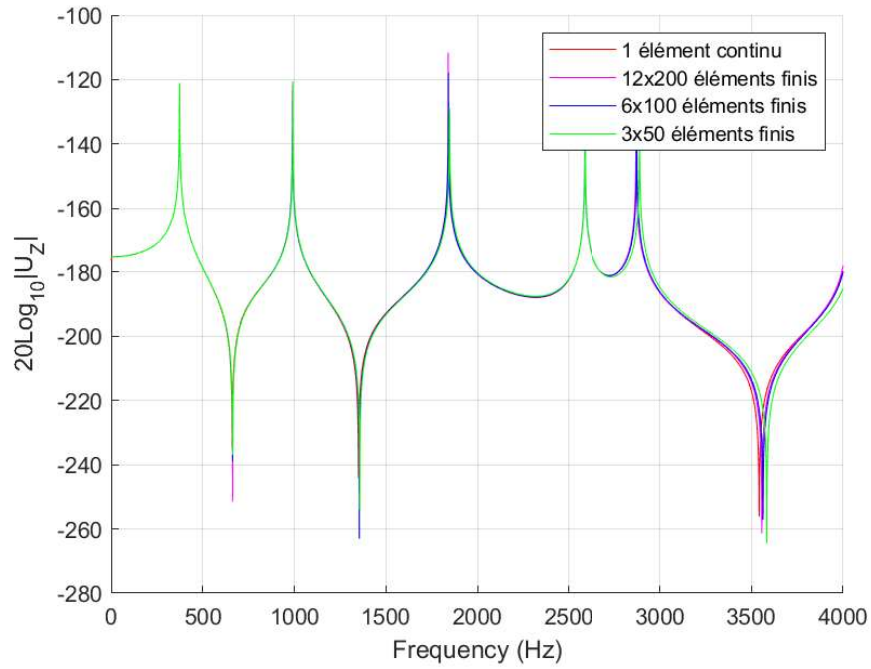


FIGURE 5.4 – Réponses harmoniques du couplage flexion/traction sur [0, 4000 Hz]

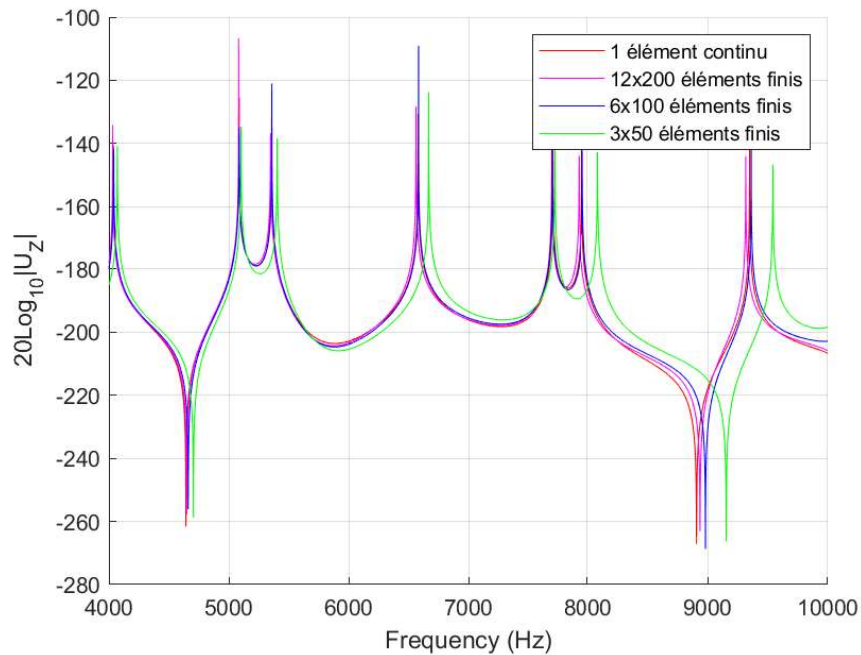


FIGURE 5.5 – Réponses harmoniques du couplage flexion/traction sur [4000, 10000 Hz]

Une excellente concordance entre les deux types de modélisation est là aussi observée, ce qui confirme la validité numérique du modèle élément continu de poutre

multicouche. Le couplage flexion/traction est parfaitement représenté.

5.3.7 Les limites d'une modélisation poutre

Dans ce paragraphe, la géométrie de la plaque est modifiée de manière à ce que son comportement s'éloigne d'un comportement de poutre et se rapproche de celui d'une plaque. Ces simulations permettent d'évaluer le domaine de validité d'une modélisation poutre pour représenter le comportement en flexion/traction d'une plaque multicouche. Les réponses harmoniques de six plaques de géométries distinctes sont comparées à celles produites par notre modèle de poutre multicouche. L'unique paramètre géométrique qui est modifié est la largeur b de la plaque. Celle-ci passe de la dimension initiale 60 mm à respectivement 120 mm, 240 mm, 300 mm, 360 mm et 480 mm. Les maillages éléments finis correspondant à ces modèles sont représentés sur la figure 5.6 ci-dessous.

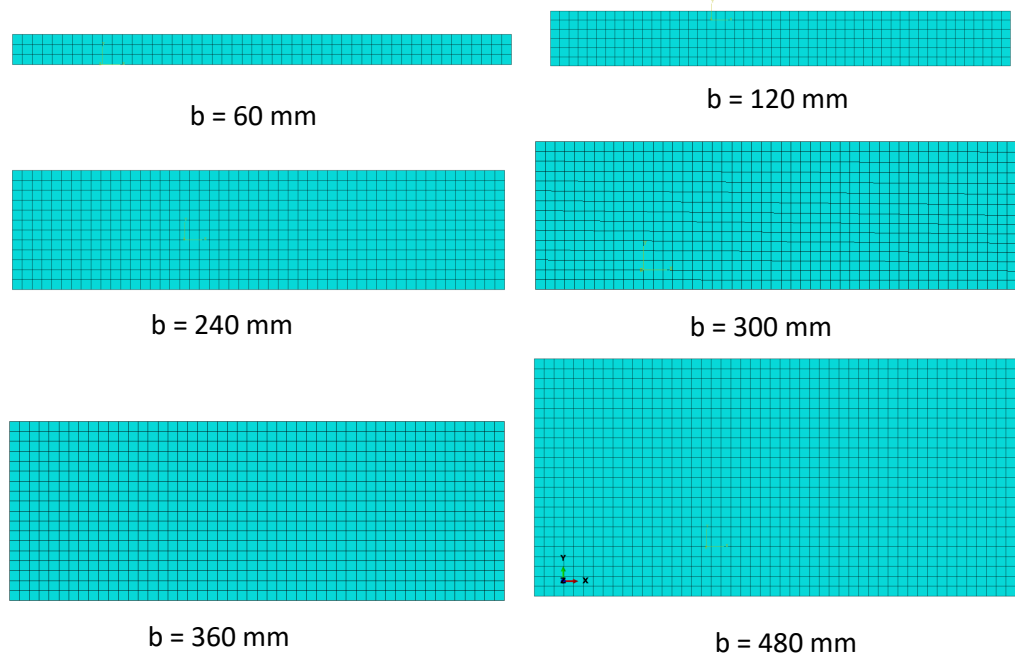


FIGURE 5.6 – Maillages éléments finis des six modèles de plaques

Les plaques sont en configuration libre, le chargement harmonique imposé est un effort unité s'exerçant au milieu d'un des côtés libres de la plaque. La réponse est évaluée au point d'excitation.

Les réponses obtenues pour chaque modèle sont représentées sur la figure 5.7 ci-dessous.

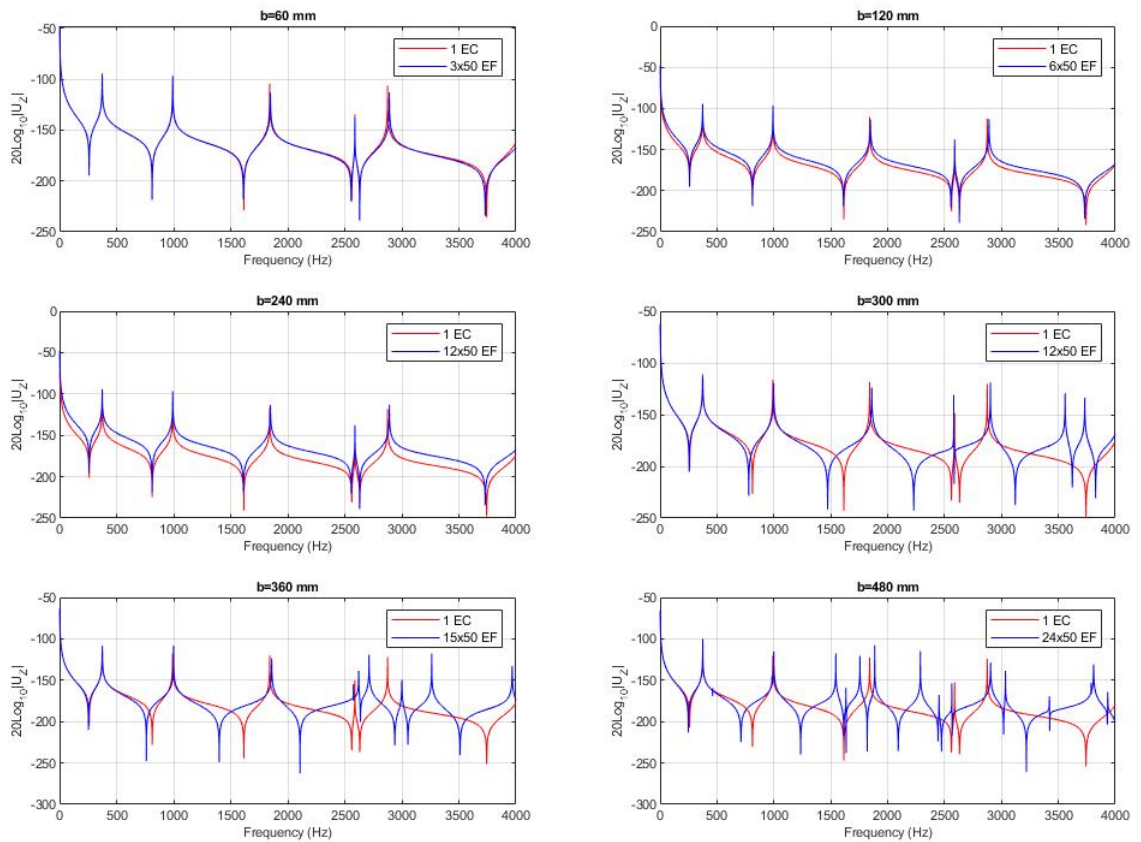


FIGURE 5.7 – Réponses harmoniques comparées EC poutre/EF plaque

On peut commenter les observations sur la gamme de fréquences $[0, 4000\text{Hz}]$ choisie :

- Pour un ratio b/a inférieur à 0,3, les réponses harmoniques en termes de pics de résonance sont semblables seuls les niveaux de réponses différent. Le modèle plaque est moins raide et cette différence est croissante avec le ratio b/a .
- A partir d'un ratio b/a de 0,3, apparaissent des résonances que le modèle poutre ne peut prévoir. L'analyse modale des ces modèles montre qu'il s'agit de modes impliquant la flexion le long de la largeur de la plaque. Pour ces géométries, le premier mode de cette flexion étant inférieur à 4000 Hz, la réponse harmonique est largement influencée par ce mode sur l'intervalle de fréquence étudié.

En conclusion, l'utilisation d'un modèle de poutre multicouche reste pertinent pour la prédiction des fréquences propres d'une plaque lorsque la fréquence propre du mode de flexion dans le sens de la largeur est éloignée de l'intervalle de fréquence

étudié. Il trouve ses limites rapidement en termes de raideur et de manière plus progressive en termes de fréquences propres à condition de se situer sur un intervalle fréquentiel n'impliquant pas le premier mode de flexion dans le plan perpendiculaire au plan de flexion de la poutre plane. Dans ces cas là, un modèle de plaque multicouche s'avère nécessaire. Cette formulation est présentée dans la suite de ce chapitre.

5.4 Théorie de plaque multicouche

5.4.1 Hypothèses cinématiques

Les hypothèses de Love-Kirchhoff du comportement en flexion sont associées à un champ cinématique permettant de décrire les mouvements dans le plan de la plaque. Cette cinématique prend en compte le mouvement dit de membrane pour lequel tous les points le long de la normale sont supposés subir un même mouvement parallèle au plan de la plaque. Cette hypothèse consiste à considérer un déplacement dans le plan homogénéisé malgré le fait que chaque couche possède une raideur de membrane distincte. Ainsi, le champ de déplacement total $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ est exprimé en fonction du champ de déplacement du feuillet moyen. Il est supposé de la forme : $\mathbf{E}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\mathbf{X} + v(x, y, z, t)\mathbf{Y} + w(x, y, z, t)\mathbf{Z}$ avec :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = U(x, y, t) + z\beta_x \\ v(x, y, z, t) = V(x, y, t) + z\beta_y \\ w(x, y, z, t) = W(x, y, t) \end{cases} \quad (5.15)$$

où les fonctions U et V sont les déplacements dans le plan des points du feuillet moyen, W est le déplacement des points du feuillet moyen dans la direction perpendiculaire à ce plan, $\beta_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$ et $\beta_y = -\frac{\partial W}{\partial y}$ sont les rotations des sections respectivement autour des axes y et x .

Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, ce champ cinématique permet de définir le tenseur des petites déformations $\bar{\epsilon}$ par :

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \mathbf{E} + \overline{\text{grad}}^T \mathbf{E} \right)$$

ce qui donne, dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) , les composantes de déformation suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y} - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ 2\epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ 2\epsilon_{xz} = \gamma_{xz} = 0 \\ 2\epsilon_{yz} = \gamma_{yz} = 0 \end{cases} \quad (5.16)$$

Le champ de déformation est donc la superposition de :

— déformations de membrane :

$$\{\epsilon^m\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

— déformations de flexion :

$$\{\epsilon^f\} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^f \\ \epsilon_{yy}^f \\ \gamma_{xy}^f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

On peut exprimer les déformations de flexion en fonction des courbures et de la cote z du point M par rapport au feuillet moyen. Ainsi, les déformations s'écrivent :

$$\epsilon^f = z\mathbf{K}(x, y) \quad (5.19)$$

en posant :

$$\mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

$\mathbf{K}(x, y)$ est le vecteur des courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Le champ de déformation s'écrit alors :

$$\epsilon = \epsilon^m(x, y) + z\mathbf{K}(x, y) \quad (5.21)$$

5.4.2 Loi de comportement

Le champ des contraintes de Cauchy dans la couche numéro k s'exprime dans le cas d'un matériau orthotrope par les relations comportementales suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^k = \bar{Q}_{11}^k \epsilon_{xx} + \bar{Q}_{12}^k \epsilon_{yy} + \bar{Q}_{16}^k \gamma_{xy} \\ \sigma_{yy}^k = \bar{Q}_{12}^k \epsilon_{xx} + \bar{Q}_{22}^k \epsilon_{yy} + \bar{Q}_{26}^k \gamma_{xy} \\ \sigma_{xy}^k = \bar{Q}_{16}^k \epsilon_{xx} + \bar{Q}_{26}^k \epsilon_{yy} + \bar{Q}_{66}^k \gamma_{xy} \end{cases} \quad (5.22)$$

soit

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^k = \bar{\mathbf{Q}}^k \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

d'où

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}^k = \bar{\mathbf{Q}}^k \begin{pmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + z \bar{\mathbf{Q}}^k \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

$\bar{\mathbf{Q}}^k$ est la matrice de rigidité de la couche numéro k dans le système d'axes dans lequel sont définies les coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Ses termes sont donc fonctions des propriétés du matériau et de l'orientation des directions d'orthotropie par rapport aux axes x et y .

$\bar{\mathbf{Q}}^k$ est définie de la même façon que l'expression 4.2 du chapitre précédent mais en considérant chaque couche k , soit :

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{Q}_{11}^k = Q_{11}^k \cos^4 \theta + 2(Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22}^k \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12}^k = (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 4Q_{66}^k) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}^k (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22}^k = Q_{11}^k \sin^4 \theta + 2(Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{22}^k \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16}^k = (Q_{11}^k - Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \cos^3 \theta \sin \theta + (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \sin^3 \theta \cos \theta \\ \bar{Q}_{26}^k = (Q_{11}^k - Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \cos \theta \sin^3 \theta + (Q_{12}^k - Q_{22}^k + 2Q_{66}^k) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66}^k = (Q_{11}^k + Q_{22}^k - 2Q_{12}^k - 2Q_{66}^k) \cos^2 \theta \sin^2 \theta + Q_{66}^k (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \end{cases} \quad (5.25)$$

où les composantes Q_{ij}^k ne sont fonctions que des propriétés matériau de la couche numéro k , c'est à dire de son comportement vis à vis de ses axes d'orthotropie. Ces composantes sont définies par :

$$\begin{cases} Q_{11}^k = \frac{E_1^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\ Q_{22}^k = \frac{E_2^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\ Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_2^k}{1-\nu_{12}^k \nu_{21}^k} \\ Q_{66}^k = G_{12}^k \end{cases} \quad (5.26)$$

où E_1^k et E_2^k sont les modules d'Young dans les directions d'orthotropie 1 et 2 du pli numéro k , G_{12}^k et ν_{12}^k sont le module de Coulomb et le coefficient de Poisson dans le plan (1,2) du pli numéro k .

5.4.3 Efforts internes

Efforts de membrane

Si on pose $\boldsymbol{\sigma}^m = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})^T$, la théorie classique des stratifiés définit les efforts internes de membrane par :

$$\mathbf{N}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz \quad (5.27)$$

soit :

$$\mathbf{N}(x, y) = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \bar{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + z \bar{\mathbf{Q}}^k \mathbf{K}(x, y) dz \quad (5.28)$$

En intégrant dans l'épaisseur :

$$\mathbf{N}(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k - z_{k-1}) \right] \boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \mathbf{K}(x, y) \quad (5.29)$$

Ce qui s'écrit matriciellement :

$$\mathbf{N}(x, y) = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + \mathbf{B}\mathbf{K}(x, y) \quad (5.30)$$

en introduisant les matrices :

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k - z_{k-1}) \quad (5.31)$$

et

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5.32)$$

Les efforts de membrane (N_x, N_y, N_{xy}) dans le cas d'un stratifié non symétrique ne sont donc pas seulement fonctions des déformations en membrane ($\epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0$), mais sont également fonctions des courbures de flexion et torsion.

Si on cherche à exprimer les composantes de matrices \mathbf{A} en fonction de l'épaisseur e_k de chaque couche, on obtient, en se référant à la figure 5.1 :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{Q}_{ij}^k e_k \quad (5.33)$$

et en considérant la matrice \mathbf{B} , ces composantes s'écrivent :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1}) \frac{(z_k + z_{k-1})}{2} \quad (5.34)$$

on obtient :

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{Q}_{ij}^k e_k \bar{z}_k \quad (5.35)$$

où la quantité $\bar{z}_k = \frac{(z_k + z_{k-1})}{2}$ est la cote du plan moyen géométrique du k-ème pli vis à vis du plan moyen géométrique de la plaque.

Moments de flexion et de torsion

Les efforts de flexion et torsion sont définis par :

$$\mathbf{M}(x, y) = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma}^m z dz \quad (5.36)$$

soit :

$$\mathbf{M}(x, y) = \sum_{k=1}^{N_c} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \left[\bar{\mathbf{Q}}^k \boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + z \bar{\mathbf{Q}}^k \mathbf{K}(x, y) \right] z dz \quad (5.37)$$

Ce qui conduit à :

$$\mathbf{M}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \mathbf{K}(x, y) \quad (5.38)$$

Le vecteur des moments de flexion s'écrit donc :

$$\mathbf{M}(x, y) = \mathbf{B} \boldsymbol{\epsilon}^m(x, y) + \mathbf{D} \mathbf{K}(x, y) \quad (5.39)$$

avec :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_c} \bar{\mathbf{Q}}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5.40)$$

Les moments de flexion et de torsion sont donc fonctions des courbures en flexion et en torsion, mais sont également fonction des déformations dans le plan de la plaque stratifiée.

Les matrices caractérisent le comportement équivalent de la plaque respectivement en membrane (\mathbf{A}), en flexion-torsion (\mathbf{D}), en couplage membrane-flexion (\mathbf{B}). Le couplage est nul ($\mathbf{B} = \mathbf{0}$) lorsque le stratifié est symétrique (l'empilement des couches symétrique par rapport au plan moyen de la plaque).

Les composantes de la matrice \mathbf{D} peuvent aussi s'exprimer en fonction des quantité déjà introduites e_k et \bar{z}_k . En effet on a :

$$z_k^3 - z_{k-1}^3 = (z_k^2 + z_{k-1}^2)(z_k - z_{k-1}) + z_k^2 z_{k-1} - z_k z_{k-1}^2$$

soit :

$$z_k^3 - z_{k-1}^3 = (z_k - z_{k-1})^3 + 3(z_k - z_{k-1})(z_k + z_{k-1})^2 - 3(z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

et donc :

$$4(z_k^3 - z_{k-1}^3) = e_k^3 + 12e_k \bar{z}_k^2$$

On obtient ainsi :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N_c} \bar{Q}_{ij}^k \left[\frac{e_k^3}{12} + e_k \bar{z}_k^2 \right] \quad (5.41)$$

5.4.4 Relations efforts/déplacements

En introduisant les relations déformations/déplacements dans les relations comportementales précédentes, il est possible d'établir les relations efforts internes/déplacements généralisés. Ainsi, en détaillant chacune des composantes d'effort interne, on obtient :

$$\begin{cases} N_x(x, y) = A_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2B_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ N_y(x, y) = A_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - B_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2B_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ N_{xy}(x, y) = A_{61} \frac{\partial U}{\partial x} + A_{62} \frac{\partial V}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - B_{61} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - B_{62} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2B_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5.42)$$

et :

$$\begin{cases} M_x(x, y) = B_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ M_y(x, y) = B_{12} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\ M_{xy}(x, y) = B_{61} \frac{\partial U}{\partial x} + B_{62} \frac{\partial V}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - D_{61} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_{62} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2D_{66} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (5.43)$$

5.4.5 Principe de Hamilton

Ce principe s'écrit de la même façon que précédemment (voir chapitre 2) :

$$\forall \delta \mathbf{U}(t), \delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$

où T est l'énergie cinétique du solide, V son énergie de déformation et δW le travail des forces non conservatives dans le déplacement $\delta \mathbf{U}(t)$. Ce développement variationnel est précisé en Annexe C et conduit aux équations du mouvement en termes de déplacements et d'efforts internes. Elle s'écrivent dans le cadre des hypothèses cinématiques retenues et en négligeant l'énergie cinétique de rotation :

$$\begin{cases} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \mathbf{div} \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \\ \rho_S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \mathit{div} \mathit{div} \overline{\mathbf{M}} = 0 \end{cases}$$

Soit, dans le système de coordonnées cartésiennes défini par les axes de symétrie de la géométrie rectangulaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \rho_S \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \rho_S \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} = \rho_S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.44)$$

où $\rho_S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz$ est la masse surfacique du multicouche. En considérant la masse volumique ρ^k de chaque pli, la masse surfacique du multicouche s'écrit :

$$\rho_S = \sum_{k=1}^{N_c} \rho^k (z_k - z_{k-1})$$

La combinaison des équations comportementales et des équations d'équilibre dynamique, permet d'établir les équations du mouvement de la plaque multicouche, c'est à dire les équations satisfaites par les seuls déplacements généralisés. On obtient :

$$\mathbf{A}_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mathbf{A}_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \mathbf{B}_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \mathbf{B}_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - 3\mathbf{B}_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial^2 x \partial y} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5.45)$$

$$\mathbf{A}_{22} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \mathbf{A}_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \mathbf{B}_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} - \mathbf{B}_{16} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - 3\mathbf{B}_{26} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial^2 y} = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{11} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \mathbf{B}_{22} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + \mathbf{B}_{12} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right) + \mathbf{B}_{16} \left(3 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right) + \mathbf{B}_{26} \left(3 \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \right) \\ - \mathbf{D}_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2(\mathbf{D}_{12} + 2\mathbf{D}_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - \mathbf{D}_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + q = \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.4.6 Cas particulier d'une plaque bicouche à deux matériaux isotropes

Les cas les plus simples de stratifiés permettant de mettre en évidence le couplage membrane/flexion sont ceux des plaques constituées uniquement de deux plis de matériaux différents. Parmi ces cas, celui d'une plaque dont les deux plis sont isotropes et d'épaisseurs identiques est le plus élémentaire.

Les systèmes d'équations présentés précédemment se simplifient. D'une part, du fait de l'identité e des épaisseurs des deux plis, les composantes des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} se réduisent à :

$$\begin{cases} A_{ij} = \left(\overline{Q}_{ij}^1 + \overline{Q}_{ij}^2 \right) e \\ B_{ij} = \left(\overline{Q}_{ij}^1 - \overline{Q}_{ij}^2 \right) \frac{e^2}{2} \\ D_{ij} = \left(\overline{Q}_{ij}^1 + \overline{Q}_{ij}^2 \right) \frac{e^3}{3} \end{cases} \quad (5.48)$$

en considérant que le plan moyen du pli 1 est à la cote $e/2$ et que le plan moyen du pli 2 se situe à la cote $-e/2$.

D'autre part, du fait de l'isotropie des deux plis, les coefficients \overline{Q}_{ij} s'identifient aux coefficients Q_{ij} et de plus $\overline{Q}_{16} = \overline{Q}_{26} = 0$. On a alors :

$$\begin{cases} A_{ij} = (Q_{ij}^1 + Q_{ij}^2) e \\ B_{ij} = (Q_{ij}^1 - Q_{ij}^2) \frac{e^2}{2} \\ D_{ij} = (Q_{ij}^1 + Q_{ij}^2) \frac{e^3}{3} \end{cases} \quad (5.49)$$

et $A_{16} = A_{26} = B_{16} = B_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$ avec :

$$\begin{cases} Q_{11}^k = Q_{22}^k = \frac{E^k}{1-\nu^k} \\ Q_{12}^k = \frac{\nu^k E^k}{1-\nu^k} \\ Q_{66}^k = G^k \end{cases} \quad (5.50)$$

Les équations du mouvement deviennent puisque $h = 2e$:

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 2\rho_s e \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ A_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (A_{21} + A_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = 2\rho_s e \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ B_{11} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + B_{11} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 U}{\partial x y^2} \right) - D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \rho_s 2e \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.51)$$

Par ailleurs :

$$D_{12} + 2D_{66} = \left(\bar{Q}_{12}^1 + \bar{Q}_{12}^2 \right) \frac{e^3}{3} + 2 \left(\bar{Q}_{66}^1 + \bar{Q}_{66}^2 \right) \frac{e^3}{3} = \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} \right) \frac{e^3}{3} + 2(G^1 + G^2) \frac{e^3}{3}$$

Pour un matériau isotrope, on a $G^k = \frac{E^k}{2(1+\nu^k)}$ donc :

$$\begin{aligned} D_{12} + 2D_{66} &= \frac{e^3}{3} \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} + \frac{E^1}{1+\nu^1} + \frac{E^2}{1+\nu^2} \right) \\ &= \frac{e^3}{3} \left[\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} + \frac{E^1(1-\nu^1)}{1-\nu^1} + \frac{E^2(1-\nu^2)}{1-\nu^2} \right] = \frac{e^3}{3} \left(\frac{E^1}{1-\nu^1} + \frac{E^2}{1-\nu^2} \right) \\ &= \frac{e^3}{3} (Q_{11}^1 + Q_{11}^2) = D_{11} \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} A_{12} + A_{66} &= \left(\bar{Q}_{12}^1 + \bar{Q}_{12}^2 \right) e + \left(\bar{Q}_{66}^1 + \bar{Q}_{66}^2 \right) e = \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} \right) e + (G^1 + G^2) e \\ &= e \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} + \frac{E^1}{2(1+\nu^1)} + \frac{E^2}{2(1+\nu^2)} \right) \\ &= e \left[\frac{2\nu^1 E^1}{2(1-\nu^1)} + \frac{2\nu^2 E^2}{2(1-\nu^2)} + \frac{E^1(1-\nu^1)}{2(1-\nu^1)} + \frac{E^2(1-\nu^2)}{2(1-\nu^2)} \right] \\ &= e \left[\frac{E^1(1+\nu^1)}{2(1-\nu^1)} + \frac{E^2(1+\nu^2)}{2(1-\nu^2)} \right] = e \left[\frac{E^1}{2(1-\nu^1)} + \frac{E^2}{2(1-\nu^2)} \right] \end{aligned}$$

On écrira donc les équations du mouvement sous la forme simplifiée :

$$\begin{cases} A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = \rho_s 2e \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ A_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} = \rho_s 2e \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ B_{11} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + B_{11} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 U}{\partial x y^2} \right) - D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2D \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - D \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \rho_s 2e \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{cases} \quad (5.52)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = \left(\frac{E^1}{1-\nu^1} + \frac{E^2}{1-\nu^2} \right) e \\ A_{66} = \left[\frac{E^1}{2(1+\nu^1)} + \frac{E^2}{2(1+\nu^2)} \right] e \\ A_{12} = \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} + \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} \right) e \\ D = \frac{e^3}{3} \left(\frac{E^1}{1-\nu^1} + \frac{E^2}{1-\nu^2} \right) \\ B_{11} = \left(\frac{E^1}{1-\nu^1} - \frac{E^2}{1-\nu^2} \right) \frac{e^2}{2} \\ B_{12} = \left(\frac{\nu^1 E^1}{1-\nu^1} - \frac{\nu^2 E^2}{1-\nu^2} \right) \frac{e^2}{2} \end{array} \right. \quad (5.53)$$

Le couplage membrane/flexion est caractérisé par les composantes B_{11} et B_{12} qui s'annulent évidemment lorsque les deux matériaux sont identiques.

5.5 Solutions de Lévy

5.5.1 Cas général

Compte tenu des ordres de dérivations impliquées dans les équations du mouvement couplées, il semble impossible d'isoler séparément les solutions symétrique-symétriques, antisymétriques-antisymétrique, symétrique-antisymétriques et antisymétrique-symétriques. On se propose donc de chercher des solutions numériques par l'utilisation de séries de Lévy enrichies de manière à s'affranchir de l'hypothèse de découplage.

La modification de ces séries consiste à les compléter de manière à ne pas limiter les solutions cherchées au cas de symétries habituelles. Les séries de Lévy enrichies proposées sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_1(x) \cos(k_{1n}y) + U_2(x) \sin(k_{2n}y) + U_3(y) \cos(k_{3n}x) + U_4(y) \sin(k_{4n}x) \\ V(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} V_1(x) \cos(k_{1n}y) + V_2(x) \sin(k_{2n}y) + V_3(y) \cos(k_{3n}x) + V_4(y) \sin(k_{4n}x) \\ W(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_1(x) \cos(k_{1n}y) + W_2(x) \sin(k_{2n}y) + W_3(y) \cos(k_{3n}x) + W_4(y) \sin(k_{4n}x) \end{array} \right. \quad (5.54)$$

avec :

$$k_{jn} = \begin{cases} \frac{n\pi}{b}, & j = 1, 2 \\ \frac{n\pi}{a}, & j = 3, 4 \end{cases} \quad (5.55)$$

que l'on écrira de manière plus concise :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ V(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ W(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{jn}(y) L_{jn}(x) \end{array} \right. \quad (5.56)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{1n}(y) = \cos \frac{n\pi y}{b} \\ L_{2n}(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \\ L_{3n}(x) = \cos \frac{n\pi x}{a} \\ L_{4n}(x) = \sin \frac{n\pi x}{a} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L'_{1n}(y) = -\frac{n\pi}{b} L_{2n}(y) \\ L'_{2n}(y) = \frac{n\pi}{b} L_{1n}(y) \\ L'_{3n}(x) = -\frac{n\pi}{a} L_{4n}(x) \\ L'_{4n}(x) = \frac{n\pi}{a} L_{3n}(x) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L''_{1n}(y) = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 L_{1n}(y) \\ L''_{2n}(y) = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 L_{2n}(y) \\ L''_{3n}(x) = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 L_{3n}(x) \\ L''_{4n}(x) = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 L_{4n}(x) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} L'''_{1n}(y) = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 L_{2n}(y) \\ L'''_{2n}(y) = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 L_{1n}(y) \\ L'''_{3n}(x) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 L_{4n}(x) \\ L'''_{4n}(x) = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 L_{3n}(x) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L''''_{1n}(y) = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 L_{1n}(y) \\ L''''_{2n}(y) = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 L_{2n}(y) \\ L''''_{3n}(x) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 L_{3n}(x) \\ L''''_{4n}(x) = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 L_{4n}(x) \end{array} \right.$$

5.5.2 Plaque bicouche à matériaux isotropes

Pour un régime harmonique de pulsation ω , les équations du mouvement pour ce cas particulier s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \rho_s 2e\omega^2 U = 0 \\ A_{11} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \rho_s 2e\omega^2 V = 0 \\ B_{11} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + B_{11} \frac{\partial^3 V}{\partial y^3} + B_{12} \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 y} + \frac{\partial^3 U}{\partial x y^2} \right) - D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - 2D \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} - D \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \rho_s 2e\omega^2 W = 0 \end{array} \right. \quad (5.57)$$

Les solutions de Lévy satisfont donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U''_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{jn}(y) L''_{jn}(x) \\ + A_{66} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{jn}(x) L''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U''_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ + (A_{12} + A_{66}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V'_{jn}(x) L'_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V'_{jn}(y) L'_{jn}(x) \\ - B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W'''_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{jn}(y) L'''_{jn}(x) \\ + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{jn}(y) L_{jn}(x) = 0 \\ A_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{jn}(x) L''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V''_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ + A_{66} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V''_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{jn}(y) L''_{jn}(x) \\ + (A_{12} + A_{66}) \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U'_{jn}(x) L'_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U'_{jn}(y) L'_{jn}(x) \\ - B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{jn}(x) L'''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W'''_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{jn}(y) L_{jn}(x) = 0 \\ B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U'''_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{jn}(y) L'''_{jn}(x) \\ + B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{jn}(x) L'''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V'''_{jn}(y) L_{jn}(x) \\ + B_{12} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V''_{jn}(x) L'_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 V'_{jn}(y) L''_{jn}(x) \\ + B_{12} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U'_{jn}(x) L''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 U''_{jn}(y) L'_{jn}(x) \\ - D \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W'''_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{jn}(y) L'''_{jn}(x) \\ - 2D \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W'_{jn}(x) L''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W'_{jn}(y) L''_{jn}(x) \\ - D \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{jn}(x) L''''_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{jn}(y) L''''_{jn}(x) \\ + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{jn}(x) L_{jn}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{jn}(y) L_{jn}(x) = 0 \end{array} \right. \quad (5.58)$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{j_n}''(x) L_{j_n}(y) - \sum_{j=3}^4 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 U_{j_n}(y) L_{j_n}(x) \\
 + A_{66} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 U_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{j_n}''(y) L_{j_n}(x) \\
 + (A_{12} + A_{66}) \sum_{n=1}^{+\infty} - \frac{n\pi}{b} V_{1_n}'(x) L_{2_n}(y) + \frac{n\pi}{b} V_{2_n}'(x) L_{1_n}(y) - \frac{n\pi}{a} V_{3_n}'(y) L_{4_n}(x) + \frac{n\pi}{a} V_{4_n}'(y) L_{3_n}(x) \\
 - B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{j_n}'''(x) L_{j_n}(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 W_{3_n}(y) L_{4_n}(x) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 W_{4_n}(y) L_{3_n}(x) \\
 + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 U_{j_n}(y) L_{j_n}(x) = 0 \\
 A_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 V_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{j_n}''(y) L_{j_n}(x) \\
 + A_{66} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{j_n}''(x) L_{j_n}(y) - \sum_{j=3}^4 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 V_{j_n}(y) L_{j_n}(x) \\
 + (A_{12} + A_{66}) \sum_{n=1}^{+\infty} - \frac{n\pi}{b} U_{1_n}'(x) L_{2_n}(y) + \frac{n\pi}{b} U_{2_n}'(x) L_{1_n}(y) - \frac{n\pi}{a} U_{3_n}'(y) L_{4_n}(x) + \frac{n\pi}{a} U_{4_n}'(y) L_{3_n}(x) \\
 - B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 W_{1_n}(x) L_{2_n}(y) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 W_{2_n}(x) L_{1_n}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{j_n}'''(y) L_{j_n}(x) \\
 + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 V_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{j_n}(y) L_{j_n}(x) = 0 \\
 B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 U_{j_n}''''(x) L_{j_n}(y) + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 U_{3_n}(y) L_{4_n}(x) - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3 U_{4_n}(y) L_{3_n}(x) \\
 + B_{11} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 V_{1_n}(x) L_{2_n}(y) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 V_{2_n}(x) L_{1_n}(y) + \sum_{j=3}^4 V_{j_n}''''(y) L_{j_n}(x) \\
 + B_{12} \sum_{n=1}^{+\infty} - \left(\frac{n\pi}{b}\right) V_{1_n}''(x) L_{2_n}(y) + \left(\frac{n\pi}{b}\right) V_{2_n}''(x) L_{1_n}(y) - \sum_{j=3}^4 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 V_{j_n}'(y) L_{j_n}(x) \\
 + B_{12} \sum_{n=1}^{+\infty} - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 U_{j_n}'(x) L_{j_n}(y) - \left(\frac{n\pi}{a}\right) U_{3_n}''(y) L_{4_n}(x) + \left(\frac{n\pi}{a}\right) U_{4_n}''(y) L_{3_n}(x) \\
 - D \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{j_n}''''(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 W_{j_n}(y) L_{j_n}(x) \\
 - 2D \sum_{n=1}^{+\infty} - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 W_{j_n}''(x) L_{j_n}(y) - \sum_{j=3}^4 \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 W_{j_n}''(y) L_{j_n}(x) \\
 - D \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 W_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{j_n}(y)'''' L_{j_n}(x) \\
 + \rho_s 2e\omega^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^2 W_{j_n}(x) L_{j_n}(y) + \sum_{j=3}^4 W_{j_n}(y) L_{j_n}(x) = 0
 \end{array} \right. \tag{5.59}$$

Par identification, on obtient pour chacune des trois équations, quatre équations différentielles satisfaites par les fonctions inconnues U_{1-4_n} , V_{1-4_n} et W_{1-4_n} . Elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{11}U''_{1_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}V'_{2_n} - B_{11}W'''_{1_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] U_{1_n} = 0 \\
 A_{11}U''_{2_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}V'_{1_n} - B_{11}W'''_{2_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] U_{2_n} = 0 \\
 A_{66}U''_{3_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}V'_{4_n} + B_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 W_{4_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] U_{3_n} = 0 \\
 A_{66}U''_{4_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}V'_{3_n} - B_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 W_{3_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] U_{4_n} = 0 \\
 A_{66}V''_{1_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}U'_{2_n} + B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 W_{2_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] V_{1_n} = 0 \\
 A_{66}V''_{2_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}U'_{1_n} - B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 W_{1_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] V_{2_n} = 0 \\
 A_{11}V''_{3_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}U'_{4_n} - B_{11}W'''_{3_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] V_{3_n} = 0 \\
 A_{11}V''_{4_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}U'_{3_n} - B_{11}W'''_{4_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right] V_{4_n} = 0 \\
 B_{11}U'''_{1_n} - B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 V_{2_n} + B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right) V''_{2_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U'_{1_n} - DW'''_{1_n} + 2D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W''_{1_n} \\
 + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] W_{1_n} = 0 \\
 B_{11}U'''_{2_n} + B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 V_{1_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right) V''_{1_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U'_{2_n} - DW'''_{2_n} + 2D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W''_{2_n} \\
 + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] W_{2_n} = 0 \\
 -B_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 U_{4_n} + B_{11}V'''_{3_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 V'_{3_n} + B_{12} \left(\frac{n\pi}{a} \right) U''_{4_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \right] W_{3_n} \\
 + 2D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 W''_{3_n} - DW'''_{3_n} = 0 \\
 B_{11} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^3 U_{3_n} + B_{11}V'''_{4_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 V'_{4_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{a} \right) U''_{3_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^4 \right] W_{4_n} \\
 + 2D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 W''_{4_n} - DW'''_{4_n} = 0
 \end{array} \right. \quad (5.60)$$

Par identification, on obtient pour chacune des trois équations, deux équations différentielles satisfaites par les fonctions inconnues U_{1-2_n} , V_{1-2_n} et W_{1-2_n} . Elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 A_{11}U''_{1_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}V'_{2_n} - B_{11}W'''_{1_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] U_{1_n} = 0 \\
 A_{11}U''_{2_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}V'_{1_n} - B_{11}W'''_{2_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] U_{2_n} = 0 \\
 A_{66}V''_{1_n} + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}U'_{2_n} + B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 W_{2_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] V_{1_n} = 0 \\
 A_{66}V''_{2_n} - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}U'_{1_n} - B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 W_{1_n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] V_{2_n} = 0 \\
 B_{11}U'''_{1_n} - B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 V_{2_n} + B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right) V''_{2_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U'_{1_n} - DW'''_{1_n} + 2D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W''_{1_n} \\
 + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] W_{1_n} = 0 \\
 B_{11}U'''_{2_n} + B_{11} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 V_{1_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right) V''_{1_n} - B_{12} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 U'_{2_n} - DW'''_{2_n} + 2D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 W''_{2_n} \\
 + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] W_{2_n} = 0
 \end{array} \right. \quad (5.61)$$

Par identification, on obtient pour chacune des trois équations, deux équations diffé-

rentielles satisfaites par les fonctions inconnues U_{3-4n} , V_{3-4n} et W_{3-4n} . Elles s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{66}U_{3n}'' + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}V_{4n}' + B_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3W_{4n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]U_{3n} = 0 \\ A_{66}U_{4n}'' - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}V_{3n}' - B_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3W_{3n} + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]U_{4n} = 0 \\ A_{11}V_{3n}'' + (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}U_{4n}' - B_{11}W_{3n}''' + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]V_{3n} = 0 \\ A_{11}V_{4n}'' - (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{a}U_{3n}' - B_{11}W_{4n}''' + \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]V_{4n} = 0 \\ -B_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3U_{4n} + B_{11}V_{3n}''' - B_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2V_{3n}' + B_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)U_{4n}'' - DW_{3n}'''' + 2D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2W_{3n}'' \\ + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\right]W_{3n} = 0 \\ B_{11}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3U_{3n} + B_{11}V_{4n}''' - B_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2V_{4n}' - B_{12}\left(\frac{n\pi}{a}\right)U_{3n}'' - DW_{4n}'''' + 2D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2W_{4n}'' \\ + \left[\rho_s 2e\omega^2 - D\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\right]W_{4n} = 0 \end{array} \right. \quad (5.62)$$

que l'on écrira de manière simple le premier système d'équations différentielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1U_{1n}'' + C_2(n)V_{2n}' + C_3W_{1n}''' + C_4(n)U_{1n} = 0 \\ C_1U_{2n}'' - C_2(n)V_{1n}' + C_3W_{2n}''' + C_4(n)U_{2n} = 0 \\ C_5V_{1n}'' + C_2(n)U_{2n}' + C_6(n)W_{2n} + C_7(n)V_{1n} = 0 \\ C_5V_{2n}'' - C_2(n)U_{1n}' - C_6(n)W_{1n} + C_7(n)V_{2n} = 0 \\ -C_3U_{1n}''' - C_6(n)V_{2n} + C_8(n)V_{2n}'' + C_9(n)U_{1n}' + C_{10}W_{1n}'''' + C_{11}(n)W_{1n}'' + C_{12}(n)W_{1n} = 0 \\ -C_3U_{2n}''' + C_6(n)V_{1n} - C_8(n)V_{1n}'' + C_9(n)U_{2n}' + C_{10}W_{2n}'''' + C_{11}(n)W_{2n}'' + C_{12}(n)W_{2n} = 0 \end{array} \right. \quad (5.63)$$

⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1n}'' = -\frac{C_2(n)}{C_1}V_{2n}' - \frac{C_3}{C_1}W_{1n}''' - \frac{C_4(n)}{C_1}U_{1n} \\ U_{2n}'' = \frac{C_2(n)}{C_1}V_{1n}' - \frac{C_3}{C_1}W_{2n}''' - \frac{C_4(n)}{C_1}U_{2n} \\ V_{1n}'' = -\frac{C_2(n)}{C_5}U_{2n}' - \frac{C_6(n)}{C_5}W_{2n} - \frac{C_7(n)}{C_5}V_{1n} \\ V_{2n}'' = \frac{C_2(n)}{C_5}U_{1n}' + \frac{C_6(n)}{C_5}W_{1n} - \frac{C_7(n)}{C_5}V_{2n} \\ W_{1n}'''' = -\left[\frac{C_9(n) + \frac{C_3C_4(n)}{C_1} + \frac{C_2^2(n)C_3}{C_1} + \frac{C_8(n)C_2(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]U_{1n}' + \left[\frac{C_6(n) + \frac{C_3C_2(n)C_7(n)}{C_1C_5} + \frac{C_8(n)C_7(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]V_{2n} - \frac{C_{11}(n)}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}W_{1n}'' \\ - \left[\frac{C_{12}(n) + \frac{C_3C_2(n) + C_6(n)}{C_1C_5} + \frac{C_6(n)C_8(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]W_{1n} \\ W_{2n}'''' = -\left[\frac{C_9(n) + \frac{C_3C_4(n)}{C_1} + \frac{C_2^2(n)C_3}{C_1} + \frac{C_8(n)C_2(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]U_{2n}' - \left[\frac{C_6(n) + \frac{C_3C_2(n)C_7(n)}{C_1C_5} + \frac{C_8(n)C_7(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]V_{1n} - \frac{C_{11}(n)}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}W_{2n}'' \\ - \left[\frac{C_{12}(n) + \frac{C_3C_2(n) + C_6(n)}{C_1C_5} + \frac{C_6(n)C_8(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}}\right]W_{2n} \end{array} \right. \quad (5.64)$$

avec $C_1 = A_{11}$, $C_2(n) = (A_{12} + A_{66})\frac{n\pi}{b}$, $C_3 = -B_{11}$, $C_4(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$,
 $C_5 = A_{66}$, $C_6(n) = B_{11}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^3$, $C_7(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$, $C_8(n) = B_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)$,
 $C_9(n) = -B_{12}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$
 $C_{10} = -D$, $C_{11}(n) = 2D\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $C_{12}(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - D\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]$

le système couplé d'équations différentielles ordinaires (5.64) peut être écrit sous forme matricielle :

$$\frac{d^1 \mathbf{Z}_n}{dx} = {}^1 \mathbf{R}(n) {}^1 \mathbf{Z}_n \quad (5.65)$$

On pose $\langle {}^1 Z_n \rangle = (U_{1n}, U'_{1n}, U_{2n}, U'_{2n}, V_{1n}, V'_{1n}, V_{2n}, V'_{2n}, W_{1n}, W'_{1n}, W''_{1n}, W'''_{1n}, W_{2n}, W'_{2n}, W''_{2n}, W'''_{2n})$, on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^1 Z'_{n1} = {}^1 Z_{n2} \\ {}^1 Z'_{n2} = -\frac{C_2(n)}{C_1} {}^1 Z_{n8} - \frac{C_3}{C_1} {}^1 Z_{n12} - \frac{C_4(n)}{C_1} {}^1 Z_{n1} \\ {}^1 Z'_{n3} = {}^1 Z_{n4} \\ {}^1 Z'_{n4} = \frac{C_2(n)}{C_1} {}^1 Z_{n6} - \frac{C_3}{C_1} {}^1 Z_{n16} - \frac{C_4(n)}{C_1} {}^1 Z_{n3} \\ {}^1 Z'_{n5} = {}^1 Z_{n6} \\ {}^1 Z'_{n6} = -\frac{C_2(n)}{C_5} {}^1 Z_{n4} - \frac{C_6(n)}{C_5} {}^1 Z_{n13} - \frac{C_7(n)}{C_5} {}^1 Z_{n5} \\ {}^1 Z'_{n7} = {}^1 Z_{n8} \\ {}^1 Z'_{n8} = \frac{C_2(n)}{C_5} {}^1 Z_{n2} + \frac{C_6(n)}{C_5} {}^1 Z_{n9} - \frac{C_7(n)}{C_5} {}^1 Z_{n7} \\ {}^1 Z'_{n9} = {}^1 Z_{n10} \\ {}^1 Z'_{n10} = {}^1 Z_{n11} \\ {}^1 Z'_{n11} = {}^1 Z_{n12} \\ {}^1 Z'_{n12} = -\left[\frac{C_9(n) + \frac{C_3 C_4(n)}{C_1} + \frac{C_2^2(n) C_3}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_2(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n2} + \left[\frac{C_6(n) + \frac{C_3 C_2(n) C_7(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_7(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n7} - \frac{C_{11}(n)}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} {}^1 Z_{n11} \\ \quad - \left[\frac{C_{12}(n) + \frac{C_3 C_2(n) + C_6(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_6(n) C_8(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n9} \\ {}^1 Z'_{n13} = {}^1 Z_{n14} \\ {}^1 Z'_{n14} = {}^1 Z_{n15} \\ {}^1 Z'_{n15} = {}^1 Z_{n16} \\ {}^1 Z'_{n16} = -\left[\frac{C_9(n) + \frac{C_3 C_4(n)}{C_1} + \frac{C_2^2(n) C_3}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_2(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n4} - \left[\frac{C_6(n) + \frac{C_3 C_2(n) C_7(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_7(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n5} - \frac{C_{11}(n)}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} {}^1 Z_{n15} \\ \quad - \left[\frac{C_{12}(n) + \frac{C_3 C_2(n) + C_6(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_6(n) C_8(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right] {}^1 Z_{n13} \end{array} \right.$$

soit :

$${}^1 \mathbf{R}(n) = \begin{pmatrix} [{}^1 \mathbf{R}_{11}(n)] & [{}^1 \mathbf{R}_{12}(n)] \\ [{}^1 \mathbf{R}_{21}(n)] & [{}^1 \mathbf{R}_{22}(n)] \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

dans laquelle :

$${}^1 R_{11}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_4(n)}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_2(n)}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_4(n)}{C_1} & 0 & 0 & \frac{C_2(n)}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_2(n)}{C_5} & -\frac{C_7(n)}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{C_2(n)}{C_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_7(n)}{C_5} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.67)$$

et :

$${}^1R_{12}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_3}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_4(n)}{C_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_6(n)}{C_5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_6(n)}{C_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

$${}^1R_{21}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^1F_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1F_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1F_{1n} & -{}^1F_{2n} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.69)$$

et :

$${}^1R_{22}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1F_{3n} & 0 & -\frac{C_{11}(n)}{C_{10}+\frac{C_3^2}{C_1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1F_{3n} & 0 & -\frac{C_{11}(n)}{C_{10}+\frac{C_3^2}{C_1}} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.70)$$

$${}^1F_{1n} = - \left[\frac{C_9(n) + \frac{C_3 C_4(n)}{C_1} + \frac{C_2^2(n) C_3}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_2(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right]$$

$${}^1F_{2n} = \left[\frac{C_6(n) + \frac{C_3 C_2(n) C_7(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_8(n) C_7(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right], \quad {}^1F_{3n} = - \left[\frac{C_{12}(n) + \frac{C_3 C_2(n) + C_6(n)}{C_1 C_5} + \frac{C_6(n) C_8(n)}{C_5}}{C_{10} + \frac{C_3^2}{C_1}} \right]$$

On écrira de manière plus simple le deuxième système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} C_{13}U_{3n}'' + C_{14}(n)V_{4n}' + C_{15}(n)W_{4n} + C_{16}(n)U_{3n} = 0 \\ C_{13}U_{4n}'' - C_{14}(n)V_{3n}' - C_{15}(n)W_{3n} + C_{16}(n)U_{4n} = 0 \\ C_{17}V_{3n}'' + C_{14}(n)U_{4n}' + C_{18}W_{3n}'' + C_{19}(n)V_{3n} = 0 \\ C_{17}V_{4n}'' - C_{14}(n)U_{3n}' + C_{18}W_{4n}'' + C_{19}(n)V_{4n} = 0 \\ -C_{15}(n)U_{4n} - C_{18}V_{3n}''' + C_{20}(n)V_{3n}' + C_{21}(n)U_{4n}'' + C_{22}W_{3n}'' + C_{23}(n)W_{3n}'' + C_{24}(n)W_{3n} = 0 \\ C_{15}(n)U_{3n} - C_{18}V_{4n}''' + C_{20}(n)V_{4n}' - C_{21}(n)U_{3n}'' + C_{22}W_{4n}'' + C_{23}(n)W_{4n}'' + C_{24}(n)W_{4n} = 0 \end{cases} \quad (5.71)$$

⇒

$$\left\{ \begin{array}{l}
 U''_{3n} = -\frac{C_{14}(n)}{C_{13}}V'_{4n} - \frac{C_{15}(n)}{C_{13}}W_{4n} - \frac{C_{16}(n)}{C_{13}}U_{3n} \\
 U''_{4n} = \frac{C_{14}(n)}{C_{13}}V'_{3n} + \frac{C_{15}(n)}{C_{13}}W_{3n} - \frac{C_{16}(n)}{C_{13}}U_{4n} \\
 V''_{3n} = -\frac{C_{14}(n)}{C_{17}}U'_{4n} - \frac{C_{18}}{C_{17}}W'''_{3n} - \frac{C_{19}(n)}{C_{17}}V_{3n} \\
 V''_{4n} = \frac{C_{14}(n)}{C_{17}}U'_{3n} - \frac{C_{18}}{C_{17}}W'''_{4n} - \frac{C_{19}(n)}{C_{17}}V_{4n} \\
 W'''_{3n} = -\left[\frac{C_{20}(n) + \frac{C_{18}C_{19}(n)}{C_{17}} + \frac{C_{14}^2(n)C_{18}}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{14}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] V'_{3n} + \left[\frac{C_{15}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n)C_{16}(n)}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{16}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] U_{4n} \\
 -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} W'''_{3n} - \left[\frac{C_{24}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n) + C_{15}(n)}{C_{17}C_{13}} + \frac{C_{21}(n)C_{15}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] W_{3n} \\
 W'''_{4n} = -\left[\frac{C_{20}(n) + \frac{C_{18}C_{19}(n)}{C_{17}} + \frac{C_{14}^2(n)C_{18}}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{14}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] V'_{4n} - \left[\frac{C_{15}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n)C_{16}(n)}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{16}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] U_{3n} \\
 -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} W'''_{4n} - \left[\frac{C_{24}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n) + C_{15}(n)}{C_{17}C_{13}} + \frac{C_{21}(n)C_{15}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] W_{4n}
 \end{array} \right. \quad (5.72)$$

avec $C_{13} = A_{66}$, $C_{14}(n) = (A_{12} + A_{66}) \frac{n\pi}{a}$, $C_{15}(n) = B_{11} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^3$, $C_{16}(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{11} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]$,

$C_{17} = A_{11}$, $C_{18} = -B_{11}$, $C_{19}(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - A_{66} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]$, $C_{20}(n) = -B_{12} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$,

$C_{21}(n) = B_{12} \left(\frac{n\pi}{b}\right)$, $C_{22} = -D$, $C_{23}(n) = 2D \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, $C_{24}(n) = \left[\rho_s 2e\omega^2 - D \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4\right]$

le système couplé d'équations différentielles ordinaires (5.72) peut être écrit sous forme matricielle :

$$\frac{d^2 \mathbf{Z}_n}{dy} = {}^2\mathbf{R}(n) \mathbf{Z}_n \quad (5.73)$$

On pose $\langle {}^2 \mathbf{Z}_n \rangle = (U_{3n}, U'_{3n}, U_{4n}, U'_{4n}, V_{3n}, V'_{3n}, V_{4n}, V'_{4n}, W_{3n}, W'_{3n}, W''_{3n}, W'''_{3n}, W_{4n}, W'_{4n}, W''_{4n}, W'''_{4n})$,

on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^2Z'_{n1} = {}^2Z_{n2} \\ {}^2Z'_{n2} = -\frac{C_{14}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n8} - \frac{C_{15}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n13} - \frac{C_{16}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n1} \\ {}^2Z'_{n3} = {}^2Z_{n4} \\ {}^2Z'_{n4} = \frac{C_{14}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n6} + \frac{C_{15}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n9} - \frac{C_{16}(n)}{C_{13}} {}^2Z_{n3} \\ {}^2Z'_{n5} = {}^2Z_{n6} \\ {}^2Z'_{n6} = -\frac{C_{14}(n)}{C_{17}} {}^2Z_{n4} - \frac{C_{18}}{C_{17}} {}^2Z_{n12} - \frac{C_{19}(n)}{C_{17}} {}^2Z_{n5} \\ {}^2Z'_{n7} = {}^2Z_{n8} \\ {}^2Z'_{n8} = \frac{C_{14}(n)}{C_{17}} {}^2Z_{n2} - \frac{C_{18}}{C_{17}} {}^2Z_{n16} - \frac{C_{19}(n)}{C_{17}} {}^2Z_{n7} \\ {}^2Z'_{n9} = {}^2Z_{n10} \\ {}^2Z'_{n10} = {}^2Z_{n11} \\ {}^2Z'_{n11} = {}^2Z_{n12} \\ {}^2Z'_{n12} = -\left[\frac{C_{20}(n) + \frac{C_{18}C_{19}(n)}{C_{17}} + \frac{C_{14}^2(n)C_{18}}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{14}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n6} + \left[\frac{C_{15}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n)C_{16}(n)}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{16}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n3} \\ -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} {}^2Z_{n11} - \left[\frac{C_{24}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n) + C_{15}(n)}{C_{17}C_{13}} + \frac{C_{21}(n)C_{15}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n9} \\ {}^2Z'_{n13} = {}^2Z_{n14} \\ {}^2Z'_{n14} = {}^2Z_{n15} \\ {}^2Z'_{n15} = {}^2Z_{n16} \\ {}^2Z'_{n16} = -\left[\frac{C_{20}(n) + \frac{C_{18}C_{19}(n)}{C_{17}} + \frac{C_{14}^2(n)C_{18}}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{14}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n8} - \left[\frac{C_{15}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n)C_{16}(n)}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{16}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n1} \\ -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} {}^2Z_{n15} - \left[\frac{C_{24}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n) + C_{15}(n)}{C_{17}C_{13}} + \frac{C_{21}(n)C_{15}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right] {}^2Z_{n13} \end{array} \right.$$

soit :

$${}^2\mathbf{R}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} [{}^2\mathbf{R}_{11}(\mathbf{n})] & [{}^2\mathbf{R}_{12}(\mathbf{n})] \\ [{}^2\mathbf{R}_{21}(\mathbf{n})] & [{}^2\mathbf{R}_{22}(\mathbf{n})] \end{pmatrix} \quad (5.74)$$

dans laquelle :

$${}^2R_{11}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{C_{16}(n)}{C_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{14}(n)}{C_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_{16}(n)}{C_{13}} & 0 & 0 & \frac{C_{14}(n)}{C_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{14}(n)}{C_{17}} & -\frac{C_{19}(n)}{C_{17}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{C_{14}(n)}{C_{17}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{19}(n)}{C_{17}} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.75)$$

et :

$${}^2R_{12}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{15}}{C_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{15}}{C_{13}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{18}}{C_{17}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{18}}{C_{17}} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

$${}^2R_{21}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^1F_{5n} & 0 & 0 & {}^1F_{5n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^1F_{5n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1F_{4n} \end{pmatrix} \quad (5.77)$$

et :

$${}^2R_{22}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1F_{6n} & 0 & -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1F_{6n} & 0 & -\frac{C_{23}(n)}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

avec :

$${}^1F_{4n} = - \left[\frac{C_{20}(n) + \frac{C_{18}C_{19}(n)}{C_{17}} + \frac{C_{14}^2(n)C_{18}}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{14}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right]$$

$${}^1F_{5n} = \left[\frac{C_{15}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n)C_{16}(n)}{C_{13}C_{17}} + \frac{C_{21}(n)C_{16}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right], \quad {}^1F_{6n} = - \left[\frac{C_{24}(n) + \frac{C_{18}C_{14}(n) + C_{15}(n)}{C_{17}C_{13}} + \frac{C_{21}(n)C_{15}(n)}{C_{13}}}{C_{22} + \frac{C_{18}^2}{C_{17}}} \right]$$

Soient ${}^i\lambda_n$ $i \in \{1, \dots, 16\}$ les valeurs propres de ${}^1R(n)$ et iQ_n ses vecteurs propres, la solution peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{Z}_n = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^iQ_n e^{i\lambda_n x}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^iQ_n e^{i\lambda_n x} \\ U'_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{2i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ U_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{3i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ U'_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{4i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ V_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{5i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ V'_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{6i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ V_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{7i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ V'_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{8i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{9i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W'_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{10i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W''_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{11i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W'''_{1_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{12i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{13i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W'_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{14i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W''_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{15i}Q_n e^{i\lambda_n x} \\ W'''_{2_n}(x) = \sum_{i=1}^{16} {}^i\alpha_n {}^{16i}Q_n e^{i\lambda_n x} \end{array} \right.$$

De même, ${}^i\lambda_n$ $i \in \{17, \dots, 32\}$ les valeurs propres de ${}_2R(n)$ et iQ_n ses vecteurs propres, la solution peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{Z}_n = \sum_{i=17}^{32} {}^i\alpha_n {}^iQ_n e^{i\lambda_n y}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{1i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ U'_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{2i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ U_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{3i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ U'_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{4i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ V_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{5i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ V'_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{6i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ V_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{7i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ V'_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{8i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{9i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W'_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{10i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W''_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{11i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W'''_{3_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{12i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{13i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W'_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{14i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W''_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{15i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \\ W'''_{4_n}(y) = \sum_{i=17}^{32} \alpha_{i_n} Q_{16i_n} e^{\lambda_{i_n} y} \end{array} \right.$$

5.5.3 Matrice de raideur dynamique

Les séries de Lévy enrechies sont exploitées pour construire la matrice de raideur dynamique d'une plaque multicouche non-symétrique. la matrice de rigidité de la

plaque est évaluée par projection sur une base de Fourier des champs inconnus efforts et déplacement définis sur le contour de la plaque multicouche. Les 8 fonctions définissant le déplacement de membrane et de flexion sur chacun des bords sont projetées sur une base de Fourier définie par :

$$\begin{pmatrix} U(a, y) \\ V(a, y) \\ W(a, y) \\ \beta_x(a, y) \\ U(x, b) \\ V(x, b) \\ W(x, b) \\ \beta_y(x, b) \\ U(-a, y) \\ V(-a, y) \\ W(-a, y) \\ \beta_x(-a, y) \\ U(x, -b) \\ V(x, -b) \\ W(x, -b) \\ \beta_y(x, -b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1_S U_0 + \sum_{k=1}^N {}^1_S U_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A U_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S V_0 + \sum_{k=1}^N {}^1_S V_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A V_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S W_0 + \sum_{k=1}^N {}^1_S W_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A W_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S \beta_{x0} + \sum_{k=1}^N {}^1_S \beta_{xk} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A \beta_{xk} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^2_S U_0 + \sum_{k=1}^N {}^2_S U_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A U_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S V_0 + \sum_{k=1}^N {}^2_S V_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A V_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S W_0 + \sum_{k=1}^N {}^2_S W_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A W_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S \beta_{y0} + \sum_{k=1}^N {}^2_S \beta_{yk} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A \beta_{yk} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^3_S U_0 + \sum_{k=1}^N {}^3_S U_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A U_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S V_0 + \sum_{k=1}^N {}^3_S V_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A V_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S W_0 + \sum_{k=1}^N {}^3_S W_k \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A W_k \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S \beta_{x0} + \sum_{k=1}^N {}^3_S \beta_{xk} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A \beta_{xk} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^4_S U_0 + \sum_{k=1}^N {}^4_S U_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A U_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S V_0 + \sum_{k=1}^N {}^4_S V_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A V_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S W_0 + \sum_{k=1}^N {}^4_S W_k \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A W_k \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S \beta_{y0} + \sum_{k=1}^N {}^4_S \beta_{yk} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A \beta_{yk} \sin \frac{k\pi x}{a} \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

tandis que :

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_0 = & \begin{bmatrix} {}^1_S U_0 \\ {}^1_S V_0 \\ {}^1_S W_0 \\ {}^1_S \beta_{x0} \\ {}^2_S U_0 \\ {}^2_S V_0 \\ {}^2_S W_0 \\ {}^2_S \beta_{y0} \\ {}^3_S U_0 \\ {}^3_S V_0 \\ {}^3_S W_0 \\ {}^3_S \beta_{x0} \\ {}^4_S U_0 \\ {}^4_S V_0 \\ {}^4_S W_0 \\ {}^4_S \beta_{y0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b U(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b V(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a U(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a V(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b U(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b V(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b W(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a U(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a V(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a W(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) dx \end{bmatrix} \\
 \tilde{u}_N = & \begin{bmatrix} {}^1_A U_N \\ {}^1_S U_N \\ {}^1_S V_N \\ {}^1_A V_N \\ {}^1_S W_N \\ {}^1_A W_N \\ {}^1_S \beta_{xN} \\ {}^1_A \beta_{xN} \\ {}^2_S U_N \\ {}^2_A U_N \\ {}^2_S V_N \\ {}^2_A V_N \\ {}^2_S W_N \\ {}^2_A W_N \\ {}^2_S \beta_{yN} \\ {}^2_A \beta_{yN} \\ {}^3_S U_N \\ {}^3_A U_N \\ {}^3_S V_N \\ {}^3_A V_N \\ {}^3_S W_N \\ {}^3_A W_N \\ {}^3_S \beta_{xN} \\ {}^3_A \beta_{xN} \\ {}^4_S U_N \\ {}^4_A U_N \\ {}^4_S V_N \\ {}^4_A V_N \\ {}^4_S W_N \\ {}^4_A W_N \\ {}^4_S \beta_{yN} \\ {}^4_A \beta_{yN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \int_{-b}^b U(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b U(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b V(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b V(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a U(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a U(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b U(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b U(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b V(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b V(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b W(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b \beta_x(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a U(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a U(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \beta_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \end{bmatrix} \\
 & (5.80)
 \end{aligned}$$

En factorisant ces développements par chacune des constantes d'intégration, on aboutit à l'écriture matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix}
 {}^1U_0 \\
 {}^1V_0 \\
 {}^1W_0 \\
 \beta_{x0} \\
 U_0 \\
 V_0 \\
 W_0 \\
 \beta_{y0} \\
 U_0 \\
 V_0 \\
 W_0 \\
 \beta_{y0} \\
 \vdots \\
 {}^1U_N \\
 {}^1V_N \\
 {}^1W_N \\
 \beta_{xN} \\
 U_N \\
 V_N \\
 W_N \\
 \beta_{yN} \\
 U_N \\
 V_N \\
 W_N \\
 \beta_{yN} \\
 U_N \\
 V_N \\
 W_N \\
 \beta_{xN} \\
 U_N \\
 V_N \\
 W_N \\
 \beta_{yN} \\
 U_N \\
 V_N \\
 W_N \\
 \beta_{yN}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{1M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{2M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{3M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{4M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{50}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{5M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{60}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{6M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{70}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{7M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{80}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{8M}(x)] dx \\
 \vdots & & \vdots \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{1M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{10}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{1M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{2M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{20}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{2M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{3M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{30}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{3M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{4M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{40}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{4M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{50}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{5M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{50}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{5M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{60}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{6M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{60}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{6M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{70}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{7M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{H}_{70}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{H}_{7M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{80}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{8M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{H}_{80}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{H}_{8M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 {}^1\alpha_0 \\
 {}^2\alpha_0 \\
 {}^3\alpha_0 \\
 {}^4\alpha_0 \\
 {}^5\alpha_0 \\
 {}^6\alpha_0 \\
 {}^7\alpha_0 \\
 {}^8\alpha_0 \\
 {}^9\alpha_0 \\
 {}^{10}\alpha_0 \\
 {}^{11}\alpha_0 \\
 {}^{12}\alpha_0 \\
 {}^{13}\alpha_0 \\
 {}^{14}\alpha_0 \\
 {}^{15}\alpha_0 \\
 {}^{16}\alpha_0 \\
 \vdots \\
 {}^1\alpha_N \\
 {}^2\alpha_N \\
 {}^3\alpha_N \\
 {}^4\alpha_N \\
 {}^5\alpha_N \\
 {}^6\alpha_N \\
 {}^7\alpha_N \\
 {}^8\alpha_N \\
 {}^9\alpha_N \\
 {}^{10}\alpha_N \\
 {}^{11}\alpha_N \\
 {}^{12}\alpha_N \\
 {}^{13}\alpha_N \\
 {}^{14}\alpha_N \\
 {}^{15}\alpha_N \\
 {}^{16}\alpha_N \\
 {}^{17}\alpha_N \\
 {}^{18}\alpha_N \\
 {}^{19}\alpha_N \\
 {}^{20}\alpha_N \\
 {}^{21}\alpha_N \\
 {}^{22}\alpha_N \\
 {}^{23}\alpha_N \\
 {}^{24}\alpha_N \\
 {}^{25}\alpha_N \\
 {}^{26}\alpha_N \\
 {}^{27}\alpha_N \\
 {}^{28}\alpha_N \\
 {}^{29}\alpha_N \\
 {}^{30}\alpha_N \\
 {}^{31}\alpha_N \\
 {}^{32}\alpha_N
 \end{pmatrix}
 \quad (5.81)$$

De même pour les forces :

$$\begin{pmatrix} N_x(a, y) \\ N_{xy}(a, y) \\ F_{zx}(a, y) \\ M_x(a, y) \\ N_y(x, b) \\ N_{xy}(x, b) \\ F_{zy}(x, b) \\ M_y(x, b) \\ -N_x(-a, y) \\ -N_{xy}(-a, y) \\ -F_{zx}(-a, y) \\ -M_x(-a, y) \\ -N_y(x, -b) \\ -N_{xy}(x, -b) \\ -F_{zy}(x, -b) \\ -M_y(x, -b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^1_S N_{x_0} + \sum_{k=1}^N {}^1_S N_{x_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A N_{x_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S N_{xy_0} + \sum_{k=1}^N {}^1_S N_{xy_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A N_{xy_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S F_{zx_0} + \sum_{k=1}^N {}^1_S F_{zx_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A F_{zx_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^1_S M_{x_0} + \sum_{k=1}^N {}^1_S M_{x_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^1_A M_{x_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^2_S N_{y_0} + \sum_{k=1}^N {}^2_S N_{y_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A N_{y_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S N_{xy_0} + \sum_{k=1}^N {}^2_S N_{xy_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A N_{xy_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S F_{zy_0} + \sum_{k=1}^N {}^2_S F_{zy_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A F_{zy_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^2_S M_{y_0} + \sum_{k=1}^N {}^2_S M_{y_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^2_A M_{y_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^3_S N_{x_0} + \sum_{k=1}^N {}^3_S N_{x_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A N_{x_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S N_{xy_0} + \sum_{k=1}^N {}^3_S N_{xy_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A N_{xy_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S F_{zx_0} + \sum_{k=1}^N {}^3_S F_{zx_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A F_{zx_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^3_S M_{x_0} + \sum_{k=1}^N {}^3_S M_{x_k} \cos \frac{k\pi y}{b} + \sum_{k=1}^N {}^3_A M_{x_k} \sin \frac{k\pi y}{b} \\ {}^4_S N_{y_0} + \sum_{k=1}^N {}^4_S N_{y_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A N_{y_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S N_{xy_0} + \sum_{k=1}^N {}^4_S N_{xy_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A N_{xy_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S F_{zy_0} + \sum_{k=1}^N {}^4_S F_{zy_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A F_{zy_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \\ {}^4_S M_{y_0} + \sum_{k=1}^N {}^4_S M_{y_k} \cos \frac{k\pi x}{a} + \sum_{k=1}^N {}^4_A M_{y_k} \sin \frac{k\pi x}{a} \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

tandis que :

$$\tilde{f}_0 = \begin{bmatrix} {}^1_S N_{x_0} \\ {}^1_S N_{xy_0} \\ {}^1_S F_{zx_0} \\ {}^1_S M_{x_0} \\ {}^2_S N_{y_0} \\ {}^2_S N_{xy_0} \\ {}^2_S F_{zy_0} \\ {}^2_S M_{y_0} \\ {}^3_S N_{x_0} \\ {}^3_S N_{xy_0} \\ {}^3_S F_{zx_0} \\ {}^3_S M_{x_0} \\ {}^4_S N_{y_0} \\ {}^4_S N_{xy_0} \\ {}^4_S F_{zy_0} \\ {}^4_S M_{y_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b N_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b N_{xy}(a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b F_{zx} dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b M_x(a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a N_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a F_{zy} dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a M_y(a, y)(x, b) dx \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b N_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b N_{xy}(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) dy \\ \frac{1}{2b} \int_{-b}^b M_x(-a, y) dy \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a N_y(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) dx \\ \frac{1}{2a} \int_{-a}^a M_y(x, b) dx \end{bmatrix} \quad \tilde{f}_N = \begin{bmatrix} {}^1_S N_{xN} \\ {}^1_A N_{xN} \\ {}^1_S N_{xyN} \\ {}^1_A N_{xyN} \\ {}^1_S F_{zxN} \\ {}^1_A F_{zxN} \\ {}^1_S M_{xN} \\ {}^1_A M_{xN} \\ {}^2_S N_{yN} \\ {}^2_A N_{yN} \\ {}^2_S N_{xyN} \\ {}^2_A N_{xyN} \\ {}^2_S F_{zyN} \\ {}^2_A F_{zyN} \\ {}^2_S M_{yN} \\ {}^2_A M_{yN} \\ {}^3_S N_{xN} \\ {}^3_A N_{xN} \\ {}^3_S N_{xyN} \\ {}^3_A N_{xyN} \\ {}^3_S F_{zxN} \\ {}^3_A F_{zxN} \\ {}^3_S M_{xN} \\ {}^3_A M_{xN} \\ {}^4_S N_{yN} \\ {}^4_A N_{yN} \\ {}^4_S N_{xyN} \\ {}^4_A N_{xyN} \\ {}^4_S F_{zyN} \\ {}^4_A F_{zyN} \\ {}^4_S M_{yN} \\ {}^4_A M_{yN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_x(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_x(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_{xy}(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_{xy}(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_x(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_x(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_{xy}(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b N_{xy}(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b F_{zx}(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(-a, y) \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{b} \int_{-b}^b M_x(-a, y) \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_y(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_y(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a N_{xy}(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, -b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a F_{zy}(x, -b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a M_y(x, b) \sin \frac{N\pi x}{a} dx \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

Puis par factorisation, on obtient :

$$\begin{pmatrix}
 {}^1_S N_{x0} \\
 {}^1_S N_{xy0} \\
 {}^1_S F_{zx0} \\
 {}^1_S M_{x0} \\
 {}^1_S N_{y0} \\
 {}^1_S N_{xy0} \\
 {}^1_S F_{zy0} \\
 {}^1_S M_{y0} \\
 \vdots \\
 {}^1_S N_{xN} \\
 {}^1_S N_{xyN} \\
 {}^1_S F_{zxN} \\
 {}^1_S M_{xN} \\
 {}^1_S N_{yN} \\
 {}^1_S N_{xyN} \\
 {}^1_S F_{zyN} \\
 {}^1_S M_{yN} \\
 \vdots \\
 {}^1_S N_{xN} \\
 {}^1_S N_{xyN} \\
 {}^1_S F_{zxN} \\
 {}^1_S M_{xN} \\
 {}^1_S N_{yN} \\
 {}^1_S N_{xyN} \\
 {}^1_S F_{zyN} \\
 {}^1_S M_{yN}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{1M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{2M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{3M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{4M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{50}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{5M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{60}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{6M}(x)] dx \\
 \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{70}(y)] dy & \dots & \frac{1}{2b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{7M}(y)] dy \\
 \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{80}(x)] dx & \dots & \frac{1}{2a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{8M}(x)] dx \\
 \vdots & & \vdots \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{1M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{10}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{1M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{2M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{20}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{2M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{3M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{30}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{3M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{4M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{40}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{4M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{50}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{5M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{50}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{5M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{60}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{6M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{60}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{6M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{70}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{7M}(y)] \cos \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{b} \int_{-b}^b [\mathbf{G}_{70}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy & \dots & \int_{-b}^b \frac{1}{b} [\mathbf{G}_{7M}(y)] \sin \frac{N\pi y}{b} dy \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{80}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{8M}(x)] \cos \frac{N\pi x}{a} dx \\
 \frac{1}{a} \int_{-a}^a [\mathbf{G}_{80}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx & \dots & \int_{-a}^a \frac{1}{a} [\mathbf{G}_{8M}(x)] \sin \frac{N\pi x}{a} dx
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 {}^1\alpha_0 \\
 {}^2\alpha_0 \\
 {}^3\alpha_0 \\
 {}^4\alpha_0 \\
 {}^5\alpha_0 \\
 {}^6\alpha_0 \\
 {}^7\alpha_0 \\
 {}^8\alpha_0 \\
 {}^9\alpha_0 \\
 {}^{10}\alpha_0 \\
 {}^{11}\alpha_0 \\
 {}^{12}\alpha_0 \\
 {}^{13}\alpha_0 \\
 {}^{14}\alpha_0 \\
 {}^{15}\alpha_0 \\
 {}^{16}\alpha_0 \\
 \vdots \\
 {}^1\alpha_N \\
 {}^2\alpha_N \\
 {}^3\alpha_N \\
 {}^4\alpha_N \\
 {}^5\alpha_N \\
 {}^6\alpha_N \\
 {}^7\alpha_N \\
 {}^8\alpha_N \\
 {}^9\alpha_N \\
 {}^{10}\alpha_N \\
 {}^{11}\alpha_N \\
 {}^{12}\alpha_N \\
 {}^{13}\alpha_N \\
 {}^{14}\alpha_N \\
 {}^{15}\alpha_N \\
 {}^{16}\alpha_N \\
 {}^{17}\alpha_N \\
 {}^{18}\alpha_N \\
 {}^{19}\alpha_N \\
 {}^{20}\alpha_N \\
 {}^{21}\alpha_N \\
 {}^{22}\alpha_N \\
 {}^{23}\alpha_N \\
 {}^{24}\alpha_N \\
 {}^{25}\alpha_N \\
 {}^{26}\alpha_N \\
 {}^{27}\alpha_N \\
 {}^{28}\alpha_N \\
 {}^{29}\alpha_N \\
 {}^{30}\alpha_N \\
 {}^{31}\alpha_N \\
 {}^{32}\alpha_N
 \end{pmatrix}
 \quad (5.84)$$

La matrice de raideur dynamique de la plaque multicouche complète est déterminée à partir des deux expressions (5.81,5.84), alors en éliminant les constantes d'intégration. Cette matrice, notée $\mathbf{K}(\omega)$, se présente comme suit :

$$\mathbf{K}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)^{-1} \cdot \mathbf{G}(\omega) \quad (5.85)$$

5.6 Validation numérique

Après avoir déterminé la matrice de raideur dynamique pour une plaque multicouche non-symétrique, la validation de cet élément s'effectue par une comparaison des résultats obtenus par notre formulation et ceux obtenus par la méthode des éléments finis sur le code de calcul Abaqus. La validation n'a pu s'effectuer que par une confrontation concernant l'analyse modale.

5.6.1 Propriétés géométriques et matérielles

Les plaques multicouches étudiées dans cette partie sont des plaques multicouches non-symétrique. les plis sont constitués d'un acier isotrope et d'un aluminium. les propriétés de ces matériaux sont présentées dans le tableau ci-dessous.

TABLE 5.2 – Propriétés des matériaux

Matériaux	E(GPa)	ν	ρ
Acier	210	0.3	7800
Aluminium	70	0.27	2700

La géométrie est celle décrite par sur la figure (5.1). Les dimensions sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

TABLE 5.3 – Propriétés géométriques de la plaque multicouche

Longueur de la palque	$2a = 1$ m
Largeur de la plaque	$2b = 0.36$ m
Epaisseur de la plaque	$h = 0.04$ m

5.6.2 Analyse modale

Le tableau 5.4 ci-dessous donnent les premières fréquences naturelles d'une plaque multicouche à deux plis isotropes différentes pour des conditions aux limites naturelles.

TABLE 5.4 – Fréquences propres d'une plaque multicouche non-symétrique. DSM (n=11), DKQ FE (100×50 éléments)

Modes propres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
MEC (n=11)	350.3	568.4	920.7	1218.5	1385.2	1789.4	1895.7	2460.3	2590.6	2698.8
MEF(100x50)	374.9	593.0	999.2	1222.9	1423.3	1859.2	1947.7	2575.7	2622	2712.8

Ce tableau permet d'observer une relative concordance des résultats EF et des résultats obtenus par notre modèle même s'il subsiste des écarts. La validation du modèle décrit dans ce chapitre n'est donc que partielle. Par ailleurs, elle nécessiterait une confrontation des réponses harmoniques calculées. On considère qu'il s'agit d'un premier élément de validation qui reste d'intérêt mais qui devra être complété de manière beaucoup plus exhaustive.

5.7 Conclusion

Ce chapitre décrit une présentation détaillée de la formulation de la matrice de raideur dynamique de structures multicouches non-symétriques. L'objectif visé par ce

chapitre était de développer un élément continu de structure multicouche permettant de prendre en compte le couplage entre les effets de membrane et les effets de flexion. Cet objectif a été réalisé en partie puisque un premier modèle poutre a pu être développé et validé complètement alors qu'un second modèle plaque hohmogénéisé n'a pu être que partiellement validé pour l'analyse modale. Pour compléter cette validation, des développements logiciels complémentaires seront nécessaires pour améliorer la précision des résultats et dans un second temps pour pouvoir valider des calculs de réponse harmonique.

6 Conclusion générale et perspectives

Les matériaux composites et en particulier les matériaux multicouches, dont l'industrialisation est en pleine croissance, possèdent des propriétés mécaniques intéressantes en termes de masse, de raideur et d'amortissement que les matériaux traditionnels ne peuvent fournir. Ainsi, pour une meilleure conception et mise en œuvre de cette classe de matériaux, il est nécessaire d'en avoir une parfaite connaissance du point de vue de leur comportement mécanique et en particulier de leur comportement vibratoire. Actuellement, afin de réduire les coûts de production, la plupart des essais expérimentaux réalisés jadis sur structures réelles sont remplacés par des simulations numériques, les essais restant indispensable pour caractériser le comportement des matériaux constitutifs ou pour recalibrer les modèles. Ces nouveaux enjeux ont motivé le travail des équipes de recherche pour modéliser plus finement les structures réelles. En ce qui concerne les matériaux composites et les structures multicouches, l'approche la plus efficace et la plus utilisée aujourd'hui dans le cadre de l'analyse vibratoire des structures complexes est évidemment la Méthode des Elements Finis. Néanmoins, la précision des résultats obtenus par cette méthode est conditionnée par la finesse du maillage et le choix des fonctions d'interpolation. Ceci pose de nombreux problèmes lorsque la discrétisation est corrélée à la gamme de fréquences d'étude. Cette thèse s'inscrit dans une démarche alternative basée sur une approche meshless appelée Méthode des Eléments Continus. Cette approche trouve ces limitations dans la géométrie des domaines d'études et dans la complexité de résolution du problème continu élastodynamique. C'est sur ce second point que nos travaux ont permis une avancée significative dans la mesure où nous avons pu développer deux nouveaux types d'éléments dont la complexité du comportement vibratoire a pu être prise en compte. Il s'agit d'une part des plaques rectangulaires dont les directions d'orthotropie sont quelconques et d'autre part les plaques rectangulaires multicouches à empilements non-symétriques.

Dans ce travail de recherche, nous avons ainsi décrit le développement d'éléments continus de plaques basée sur les solutions quasi-exactes des équations de l'élastodynamique. Cette approche est fondée sur la construction d'une matrice de rigidité dynamique, fonction de la fréquence, qui relie le vecteur d'efforts généralisés au vecteur des déplacements généralisés. Dans le cadre des éléments de plaques, ce sont en réalité les projections de ces efforts sur une base fonctionnelle convenablement choisie qui sont impliquées dans cette relation linéaire. Les conditions aux limites libres sont nécessaires pour pouvoir réaliser ultérieurement les assemblages de ces éléments

structuraux non discrétisés mais ajoutent de la complexité dans la recherche des solutions. A cette complexité s'ajoute celle du comportement de ces plaques impliquant des couplages entre contributions symétriques et antisymétriques mais aussi entre mouvements dans le plan et hors du plan. Face à ces complexités, il a été nécessaire de définir dans un premier temps de nouvelles formes de solutions généralisant les classiques séries de Lévy utilisées jusqu'à présent. La précision des résultats reste uniquement conditionnée par le nombre de termes pris en compte dans ces séries fonctionnelles. Les nouvelles séries ont ensuite pu être utilisées avec succès dans le cadre du développement des éléments de plaques cités. Elles permettent de s'affranchir de la décomposition de Gorman basée sur une hypothèse de découplage des mouvements symétriques et antisymétriques. Nos modèles offrent toujours un bon compromis entre précision et rapidité de calcul. Ils ont ensuite été validés numériquement complètement ou de manière partielle, les réponses harmoniques et l'analyse modale réalisées sont conformes à celles prédites par la Méthode des Eléments Finis.

Perspectives

Les nouvelles séries présentées laissent envisager la perspective de développement de plaques qui ne seraient plus rectangulaires puisque les hypothèses de symétrie ont pu être levées. Ces développements pourraient concerner :

- dans un premier temps, des plaques quadrangulaires quelconques.
- puis, la prise en compte de théories de plaques d'ordre plus élevés dans le cas des plaques orthotropes et multicouches.
- l'utilisation de cette approche dans des processus itératifs d'optimisation des multicouches pour lesquels le nombre de simulations est très important.

Bibliographie

- [1] E. F. F. Chladni. *Traité d'Acoustique*. 1809.
- [2] Hocine Menana, B. Douine, Kévin Berger, Jean Lévêque, and M. Hinaje. Caractérisation électromagnétique des matériaux conducteurs non conventionnels. 06 2016.
- [3] Minh Phuc Hoang. *Homogénéisation analytique de structures de nid d'abeille pour des plaques composites sandwich*. PhD thesis, Reims, 2015.
- [4] Fabien Marchetti, Kerem Ege, Quentin Leclere, Bert Roozen, Mathias Kersemans, and Joost Segers. Caractérisation dynamique large bande d'un sandwich en nids d'abeille. In *JJCAB 2019 : Journées Jeunes Chercheurs en vibrations, Acoustique et Bruit*, 2019.
- [5] S. Germain. *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*. 1821.
- [6] J. Fourier. Note relative aux vibrations des surfaces élastiques. *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pages 129–136, 1818.
- [7] S.D. Poisson. Sur l'intégrale l'équation relative aux vibrations des plaques élastiques. *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, pages 125–128, 1818.
- [8] S.D. Poisson. Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. *Mémoires de l'Académie des Sciences*, VIII :357–570, 1829.
- [9] G. Kirchhoff. Ueber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. *Crelles Journal*, 1850.
- [10] A. E. H. Love. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. *Philosophical trans. of the Royal Society*, Vol. serie A, No 17, 1888.
- [11] E. Reissner. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 5 (1) :55–68, 1947.
- [12] E. Reissner. On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 23 :184–191, 1944.
- [13] H. Hencky. Über die berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten. *Ingenieur-Archiv*, 16 :72–76, 1947.
- [14] L. Bolle. Contribution au probleme linéaire de flexion d'une plaque élastique, parts 1 and 2. *Bulletin Technique de la Suisse Romande*, 21 :281–285, 1947.
- [15] Y.S. Uflyand. Wave propagation by transverse vibrations of beams and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 12 :287–300, 1948.

- [16] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18 :31–38, 1951.
- [17] E. Reissner F. B. Hildebrand and G. B. Thomas. Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. *NACA Technical Note No. 1833*, 1949.
- [18] R. M. Christensen et E. M. Wu K. H. Lo. A high-order theory of plate deformation-part 1 : Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, 44(4) :662–668, 1977.
- [19] M. Levinson. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6) :343–350, 1980.
- [20] P. Subramanian. A higher order theory for bending of isotropic plates. *Computers and Structures*, 49(1) :199–204, 1993.
- [21] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29 (8) :901–916, 1991.
- [22] S. Bordas et T. Rabczuk et H. Nguyen-Xuan Ch. Thai, A. Ferreira. Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 43 :89–108, 2014.
- [23] K. P. Soldatos. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94 :195–220, 1992.
- [24] E. Reissner et Y. Stavsky. Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 28, 1961.
- [25] Y. Stavsky. Bending and stretching of laminated aeolotropic plates. *Proceedings ASCE 87*, 1961.
- [26] Y. Stavsky P.C. Yang, C.H. Norris. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solids and Structures*, 2 :665–684, 1966.
- [27] L. B.L. Mayberry C.W. Bert. Free vibrations of unsymmetrically laminated anisotropic plates with clamped edges. *Journal of Composite Materials*, 3(2) :282–293, 1969.
- [28] J.N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51(4) :745–752, 1984.
- [29] S.A. Ambartsumyan. On a general theory of bending of anisotropic plates. *Investiia Akad Nauk SSSR Ot Tekh Nauk*, 4, 1958.
- [30] S.G. Lekhnitskii. Strength calculation of composite beams. *Vestn Inzh Tekh*, 9, 1935.
- [31] M Di Sciuva, M Gherlone, and L Librescu. Implications of damaged interfaces and of other non-classical effects on the load carrying capacity of multilayered composite shallow shells. *International journal of non-linear mechanics*, 37(4-5) :851–867, 2002.
- [32] H Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. 1986.

- [33] Ronald C Averill. Static and dynamic response of moderately thick laminated beams with damage. *Composites Engineering*, 4(4) :381–395, 1994.
- [34] Ling-Hui He. A linear theory of laminated shells accounting for continuity of displacements and transverse shear stresses at layer interfaces. *International journal of solids and structures*, 31(5) :613–627, 1994.
- [35] U Icardi. Higher-order zig-zag model for analysis of thick composite beams with inclusion of transverse normal stress and sublaminates approximations. *Composites Part B : Engineering*, 32(4) :343–354, 2001.
- [36] E Carrera. On the use of the murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers & Structures*, 82(7-8) :541–554, 2004.
- [37] Maenghyo Cho, Ki-Ook Kim, and Min-Ho Kim. Efficient higher-order shell theory for laminated composites. *Composite Structures*, 34(2) :197–212, 1996.
- [38] Maenghyo Cho and Jun-Sik Kim. A postprocess method for laminated shells with a doubly curved nine-noded finite element. *Composites Part B : Engineering*, 31(1) :65–74, 2000.
- [39] Achraf Tafla. Eléments finis mixtes-hybrides naturels sans facteurs correctifs du cisaillement pour les plaques et les coques composites multicouches. *France : University of Reims Champagne Ardenne*, 2007.
- [40] Olgierd Cecil Zienkiewicz, Robert Leroy Taylor, Robert Leroy Taylor, and Robert Lee Taylor. *The finite element method : solid mechanics*, volume 2. Butterworth-heinemann, 2000.
- [41] O Beslin and J Nicolas. A hierarchical functions set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *Journal of sound and vibration*, 202(5) :633–655, 1997.
- [42] CM Wang, S Swaddiwudhipong, and J Tian. Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners. *Journal of engineering mechanics*, 123(2) :134–142, 1997.
- [43] AA Jafari and M Bagheri. Free vibration of non-uniformly ring stiffened cylindrical shells using analytical, experimental and numerical methods. *Thin-Walled Structures*, 44(1) :82–90, 2006.
- [44] John P Wolf and Chongmin Song. *Finite-element modelling of unbounded media*. Wiley Chichester, 1996.
- [45] Maurice Aaron Jaswon. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. 1977.
- [46] G Bezine. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Research Communications*, 5(4) :197–206, 1978.
- [47] Morris Stern. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *International journal of solids and structures*, 15(10) :769–782, 1979.
- [48] Qinghua Du, Zhenhan Yao, and Guoshu Song. Solution of some plate bending problems using the boundary element method. *Applied mathematical modelling*, 8(1) :15–22, 1984.

-
- [49] G Bezine. A mixed boundary integralâfinite element approach to plate vibration problems. *Mechanics research communications*, 7(3) :141–150, 1980.
- [50] G Bezine. A new boundary element method for bending of plates on elastic foundations. *International journal of solids and structures*, 24(6) :557–565, 1988.
- [51] R.W Clough and J. Penzien. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, New-York, 1975.
- [52] U. Lee. *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. Wiley, Singapore, 2009.
- [53] T.H. Richard and Y.T. Leung. An accurate method in structural vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 55-3 :363–376, 1977.
- [54] R. Lunden and B. Akesson. Damped second-order rayleigh-timoshenko beam vibration in space - an exact complex dynamic member stiffness matrix. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19-3 :431–449, 1983.
- [55] J.R. Banerjee. Coupled bending-torsional dynamic stiffness matrix for beam elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :1283–1289, 1989.
- [56] J.R. Banerjee, S. Guo, and W.P. Howson. Exact dynamic stiffness matrix of a bending-torsion coupled beam including warping. *Computers and Structures*, 59(4) :613–621, 1996.
- [57] J.R. Banerjee. Free vibration of axially loaded composite timoshenko beams using the dynamic stiff ?ness matrix method. *Computers and Structures*, 69 :197–208, 1998.
- [58] J.R. Banerjee. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 247-1 :97–115, 2001.
- [59] J.B. Casimir, T. Vinh, and C. Duforet. Dynamic behaviour of structures in large frequency range by continuous element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 267 :1085–1106, 2003.
- [60] A.W. Leissa. *Vibration of plates*. Nasa-SP160, 1969.
- [61] A.W. Leissa. The free vibration of rectangular plates. 31(3) :257–293, 1973.
- [62] D.J. Gorman. Free vibration analysis of the completely free rectangular plate by the method of superposition. *Journal of Sound and Vibration*, 57-3 :437–447, 1978.
- [63] R.S. Langley. Application of the dynamic stiffness metho to the free and forced vibrations of aircraft panels. *Journal of Sound and Vibration*, 135(2) :319–331, 1989.
- [64] A.Y.T Leung. *Dynamic stiffness and substructures*. Springer-Verlag, 1993.
- [65] AN Bercin. Analysis of orthotropic plate structures by the direct-dynamic stiffness method. *Mechanics Research Communications*, 22(5) :461–466, 1995.
-

- [66] AN Bercin and RS Langley. Application of the dynamic stiffness technique to the in-plane vibrations of plate structures. *Computers and Structures*, 59(5) :869–875, 1996.
- [67] A.Y.T Leung and W.E. Zhou. Dynamic stiffness analysis of laminated composite plates. *Thin-Walled Structures*, 25(2) :109–133, 1996.
- [68] J.B. Casimir, S. Kevorkian, and T. Vinh. The dynamic stiffness matrix of two-dimensional elements : application to kirchhoff’s plate continuous elements. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :571–689, 2005.
- [69] M. Boscolo and J.R. Banerjee. Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory. *Computers and Structures*, 89 :395–410, 2011.
- [70] M. Boscolo and J.R. Banerjee. Dynamic stiffness method for exact inplane free vibration analysis of plates and plate assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 330 :2928–2936, 2011.
- [71] M. Boscolo and J.R. Banerjee. Dynamic stiffness formulation for composite mindlin plates for exact modal analysis of structures. part i : Theory. *Computers and Structures*, 96-97 :61–73, 2012.
- [72] M. Boscolo and J.R. Banerjee. Dynamic stiffness formulation for composite mindlin plates for exact modal analysis of structures. part i : Results and applications. *Computers and Structures*, 96-97 :74–83, 2012.
- [73] F.A. Fazzolari, M. Boscolo, and J.R. Banerjee. An exact dynamic stiffness element using a higher order shear deformation theory for free vibration analysis of composite plate assemblies. *Composite Structures*, 96 :262–278, 2013.
- [74] J.R. Banerjee, X.Liu S.O. Papkov and, and D.Kennedy. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case. *Journal of Sound and Vibration*, 342 :177–199, 2015.
- [75] M. Nefovska-Danilović and M. Petronijević. In-plane free vibration and response analysis of isotropic rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Computers and Structures*, 152 :82–95, 2015.
- [76] N. Kolarević, M. Nefovska-Danilović, and M. Petronijević. Dynamic stiffness elements for free vibration analysis of rectangular mindlin plate assemblies. *Journal of Sound and Vibration*, 359 :84–106, 2015.
- [77] O. Ghorbel, J.B. Casimir, L. Hammami, I.Tawfiq, and M.Haddar. Dynamic stiffness formulation for free orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 346 :361–375, 2015.
- [78] O. Ghorbel, J.B. Casimir, L. Hammami, I.Tawfiq, and M.Haddar. In-plane dynamic stiffness matrix for a free orthotropic plate. *Journal of Sound and Vibration*, 364 :234–246, 2016.
- [79] N. Kolarević, M. Marjanović, M. Nefovska-Danilović, and M. Petronijević. Free vibration analysis of plate assemblies using the dynamic stiffness method based on the higher order shear deformation theory. *Journal of Sound and Vibration*, 364 :110–132, 2016.

- [80] M. Marjanović, N. Kolarević, M. Nefovska-Danilović, and M. Petronijević. Free vibration study of sandwich plates using a family of novel shear deformable dynamic stiffness elements :limitations and comparison with the finite element solutions. *Thin-Walled Structures*, 107 :678–694, 2016.
- [81] E. Damnjanović, M. Nefovska-Danilović, M. Petronijević, and M. Marjanović. Application of the dynamic stiffness method in the vibration analysis of stiffened composite plates. *Procedia Engineering*, 199 :224–229, 2017.
- [82] E. Damnjanović, M. Marjanović, and M. Nefovska-Danilović. Free vibration analysis of stiffened and cracked laminated composite plate assemblies using shear-deformable dynamic stiffness elements. *Composite Structures*, 180 :723–740, 2017.
- [83] M. Nefovska-Danilović, N. Kolarević, M. Marjanović, and M. Petronijević. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies - part i : Theory. *Composite Structures*, 159 :728–744, 2017.
- [84] M. Marjanović, N. Kolarević, M. Nefovska-Danilović, and M. Petronijević. Shear deformable dynamic stiffness elements for a free vibration analysis of composite plate assemblies - part ii : Numerical examples. *Composite Structures*, 159 :184–196, 2017.
- [85] S. Kumar, V. Ranjan, and P. Jana. Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Composite Structures*, 197 :39–53, 2018.
- [86] S. Kumar and P. Jana. Application of dynamic stiffness method for accurate free vibration analysis of sigmoid and exponential functionally graded rectangular plates. *International Journal of Mechanical Science*, 163, 2010.
- [87] S.O. Papkov and J.R. Banerjee. Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of specially orthotropic mindlin plates with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 458 :522–543, 2019.
- [88] Subodh Kumar, Vinayak Ranjan, and Prasun Jana. Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Composite Structures*, 197 :39–53, 2018.
- [89] K Khlifi, JB Casimir, A Akrouf, and M Haddar. Dynamic stiffness method : New levyâs series for orthotropic plate elements with natural boundary conditions. *Engineering Structures*, 245 :112936, 2021.
- [90] SO Papkov and JR Banerjee. A new method for free vibration and buckling analysis of rectangular orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 339 :342–358, 2015.
- [91] SO Papkov. Vibrations of a rectangular orthotropic plate with free edges : Analysis and solution of an infinite system. *Acoustical Physics*, 61(2) :136–143, 2015.
- [92] SO Papkov. A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems. *Journal of Sound and Vibration*, 369 :228–245, 2016.

- [93] JR Banerjee, SO Papkov, X Liu, and D Kennedy. Dynamic stiffness matrix of a rectangular plate for the general case. *Journal of Sound and Vibration*, 342 :177–199, 2015.
- [94] X Liu and JR Banerjee. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies–part i : Theory. *Composite Structures*, 132 :1274–1287, 2015.
- [95] X Liu and JR Banerjee. An exact spectral-dynamic stiffness method for free flexural vibration analysis of orthotropic composite plate assemblies–part i : Theory. *Composite Structures*, 132 :1274–1287, 2015.
- [96] Chunyu Zhang, Guoyong Jin, Tiangui Ye, and Yantao Zhang. Harmonic response analysis of coupled plate structures using the dynamic stiffness method. *Thin-Walled Structures*, 127 :402–415, 2018.

Annexe A

.1 Flexion de plaque de Kirchhoff

Principe de Hamilton pour une plaque soumise à un ensemble d'efforts extérieurs non-conservatifs s'exerçant sur sa frontière s'écrit :

$$\forall \delta W(t), \delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt = 0$$

où T est l'énergie cinétique de la plaque, V son énergie de déformation élastique et δW_{ext} le travail des forces extérieures non conservatives pour le déplacement δW . La variation de ces trois quantités pour toute variation de flèche δW est détaillé ci-dessous :

- En négligeant l'énergie cinétique de rotation :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho h \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dS dt = \int_S \int_{t_1}^{t_2} \rho h \left(\frac{\partial \delta W}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dt dS$$

Une intégration par parties donne :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_S \rho h \left[\delta W \frac{\partial W}{\partial t} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho h \delta W \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dt dS$$

- La variation de l'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$\delta V = \delta \frac{1}{2} \int_S \bar{\bar{\bar{\sigma}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv$$

La loi de comportement orthotrope s'écrit à l'aide d'un d'un tenseur du quatrième ordre : $\bar{\bar{\bar{\sigma}}} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}$ tel que $C_{ijkl} = C_{klij}$ du fait de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations. On a donc :

$$\delta V = \delta \frac{1}{2} \int_S \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \frac{1}{2} \int_S \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} + \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \int_S \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \int_V \bar{\bar{\bar{\sigma}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv$$

La cinématique de Kirchhoff donne un tenseur des petites déformations tel que :

$$[\epsilon] = -z \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \end{array} \right) = -z [\text{grad}\{\text{grad}W\}] \Rightarrow \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} = -z \bar{\bar{\bar{C}}} \text{grad}W$$

$$\Rightarrow \delta V = \int_S -z\bar{\sigma} : \delta \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} W dv = \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -z\bar{\sigma} : \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W dz dS$$

En introduisant les efforts internes $M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -z\sigma_{\alpha\beta} dz$, on obtient :

$$\delta V = - \int_S \overline{\overline{M}} : \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W dS$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \right) &= \frac{\left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \right)_{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{(\mathbf{grad} \delta W)_{\beta} M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{(\mathbf{grad} \delta W)_{\beta}}{\partial \alpha} M_{\beta\alpha} + (\mathbf{grad} \delta W)_{\beta} \frac{M_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} \\ \Rightarrow \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \right) &= \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W : \overline{\overline{M}} + (\mathbf{grad} \delta W) \cdot \text{div} \overline{\overline{M}} \end{aligned}$$

La variation d'énergie de déformation élastique devient :

$$\delta V = - \int_S \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \right) - (\mathbf{grad} \delta W) \cdot \text{div} \overline{\overline{M}} dS$$

On a également :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \right) &= \frac{\left(\delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \right)_{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \delta W \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \delta W}{\partial \alpha} \frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta} + \delta W \frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \Rightarrow \text{div} \left(\delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \right) &= \mathbf{grad} \delta W \cdot \text{div} \overline{\overline{M}} + \delta W \text{div} \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \end{aligned}$$

La variation d'énergie de déformation élastique devient :

$$\delta V = - \int_S \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \right) - \text{div} \left(\delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \right) + \delta W \text{div} \mathbf{div} \overline{\overline{M}} dS$$

Le théorème de la divergence en dimension 2 permet de ramener l'intégrale de surface sur S à une intégrale définie sur son contour ∂S dont la normale dirigée vers l'extérieur est notée \mathbf{n} . La variation d'énergie de déformation élastique devient alors :

$$\delta V = \int_{\partial S} -\mathbf{grad} \delta W \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta W \text{div} \mathbf{div} \overline{\overline{M}} dS$$

Sur le contour ∂S , le gradient de δW est projeté sur la tangente au contour \mathbf{t} et la normale au contour \mathbf{n} , c'est à dire : $\mathbf{grad} \delta W = \frac{\partial \delta W}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial \delta W}{\partial s} \mathbf{t}$, n étant une coordonnée orthogonale à l'abscisse curviligne s . On obtient :

$$\delta V = \int_{\partial S} -\frac{\partial \delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial \delta W}{\partial s} \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta W \text{div} \mathbf{div} \overline{\overline{M}} dS$$

Le contour étant fermé, une intégration par parties du second terme donne :

$$\delta V = \int_{\partial S} -\frac{\partial \delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta W \text{div} \mathbf{div} \overline{\overline{M}} dS$$

- Les efforts extérieurs qu'une plaque peut subir sur son contour de normale \mathbf{n} sont un effort tranchant \mathcal{T}_n , un moment de flexion \mathcal{M}_{nn} et un moment de torsion \mathcal{M}_{nt} . L'équilibre d'un élément de surface montre que le moment de torsion est équivalent à un effort tranchant de valeur $\frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s}$. Son travail est alors $\int_{\partial S} \delta W \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} ds$. Le travail de ces forces s'écrit donc :

$$\delta W_{ext} = \int_{\partial S} \mathcal{M}_{nn} \frac{\partial \delta W}{\partial n} + \left(\mathcal{T}_n + \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \right) \delta W ds$$

Le principe de Hamilton s'écrit alors, en choisissant δW s'annulant aux instant t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} & \forall W(t), \int_{t_1}^{t_2} \int_S -\delta W \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \delta W \operatorname{div} \operatorname{div} \overline{\overline{M}} dS dt \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} -\frac{\partial \delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \delta W \operatorname{div} \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} + \mathcal{M}_{nn} \frac{\partial \delta W}{\partial n} + \left(\mathcal{T}_n + \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \right) \delta W ds dt \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'équation du mouvement dans le domaine S en l'absence de chargement réparti :

$$\rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \operatorname{div} \operatorname{div} \overline{\overline{M}} = 0$$

et les conditions aux limites libres sur le contour ∂S :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{M}_{nn} \\ \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \operatorname{div} \overline{\overline{M}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}_n + \frac{\partial \mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \end{cases}$$

Annexe B

.2 Traction/flexion de poutre plane multicouche

Lorsque la poutre est constituée d'un empilement de couches, son énergie cinétique est évaluée à partir de l'énergie cinétique dT d'une tranche élémentaire de longueur dx qui subit un déplacement dans le plan de composantes U , W et une rotation θ_Y . On a :

$$dT = \frac{1}{2} \int_S \rho(z) dS \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \rho(z) dS \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_S \rho(z) z^2 dS \left(\frac{d\theta_Y}{dt} \right)^2 dx$$

L'énergie cinétique d'une poutre de longueur L est donc :

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_h \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + m_h \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 + I_h \left(\frac{d\theta_Y}{dt} \right)^2 dx$$

avec $m_h = \int_S \rho(z) dS$ et $I_h = \int_S \rho(z) z^2 dS$.

Le principe de Hamilton pour une poutre soumise à un ensemble d'efforts extérieurs non-conservatifs s'exerçant à ses extrémités s'écrit : $\forall \delta U(t), \delta W(t), \delta \int_{t_1}^{t_2} T - V dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{ext} dt = 0$ où T est l'énergie cinétique de la poutre, V son énergie de déformation élastique et δW_{ext} le travail des forces extérieures pour les déplacements $\delta U, \delta W, \delta \theta_Y$.

La variation de ces trois quantités pour toutes variations $\delta U, \delta W$ est détaillée ci-dessous :

- Variation d'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \delta \int_0^L m_h \left(\frac{dU}{dt} \right)^2 + m_h \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 + I_h \left(\frac{d\theta_Y}{dt} \right)^2 dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m_h \left(\frac{dU}{dt} \right) \left(\frac{d\delta U}{dt} \right) + m_h \left(\frac{dW}{dt} \right) \left(\frac{d\delta W}{dt} \right) + I_h \left(\frac{d\theta_Y}{dt} \right) \left(\frac{d\delta \theta_Y}{dt} \right) dx dt \\ &= \int_0^L \left[m_h \left(\delta U \frac{dU}{dt} + \delta W \frac{dW}{dt} \right) + I_h \delta \theta_Y \frac{d\theta_Y}{dt} \right]_{t_1}^{t_2} dt \end{aligned}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L m_h \left(\delta U \frac{d^2 U}{dt^2} + \delta W \frac{d^2 W}{dt^2} \right) + I_h \delta \theta_Y \frac{d^2 \theta_Y}{dt^2} dx dt$$

- L'énergie de de déformation élastique d'une poutre de longueur L s'obtient à partir de la densité d'énergie de déformation $\frac{1}{2} \bar{\sigma} : \bar{\epsilon}$ soit :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \epsilon_{xz} dS dx = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \left(\frac{dU}{dx} + z \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \sigma_{xx} + \sigma_{xz} \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) dS dx \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{dU}{dx} \int_S \sigma_{xx} dS + \frac{d\theta_Y}{dx} \int_S z \sigma_{xx} dS + \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \int_S \sigma_{xz} dS dx \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{2} \int_0^L N \frac{dU}{dx} + M_Y \frac{d\theta_Y}{dx} + T_Z \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) dx \end{aligned}$$

En utilisant la loi de comportement :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{dU}{dx} + \left(K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{d\theta_Y}{dx} + K_C \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right)^2 dx \\ \Rightarrow \delta V &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(K_T \frac{d\delta U}{dx} + K_{TF} \frac{d\delta \theta_Y}{dx} \right) \frac{dU}{dx} + \left(K_{TF} \frac{d\delta U}{dx} + K_F \frac{d\delta \theta_Y}{dx} \right) \frac{d\theta_Y}{dx} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left(K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{d\delta U}{dx} + \left(K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{d\delta \theta_Y}{dx} + 2K_C \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \left(-\delta \theta_Y - \frac{d\delta W}{dx} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d\delta U}{dx} \left(K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \right) + \frac{d\delta \theta_Y}{dx} \left(K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \right) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \left(K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{d\delta U}{dx} + \left(K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \right) \frac{d\delta \theta_Y}{dx} + 2K_C \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \left(-\delta \theta_Y - \frac{d\delta W}{dx} \right) dx \\ &= \int_0^L \frac{d\delta U}{dx} \left(K_T \frac{dU}{dx} + K_{TF} \frac{d\theta_Y}{dx} \right) + \frac{d\delta \theta_Y}{dx} \left(K_{TF} \frac{dU}{dx} + K_F \frac{d\theta_Y}{dx} \right) dx \\ &\quad + \int_0^L K_C \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) \left(-\delta \theta_Y + \frac{d\delta W}{dx} \right) dx \\ \Rightarrow \delta V &= \int_0^L \frac{d\delta U}{dx} N + \frac{d\delta \theta_Y}{dx} M_Y + K_C T_Z \left(-\delta \theta_Y + \frac{d\delta W}{dx} \right) dx \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} V dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta N \frac{dU}{dx} + N \frac{d\delta U}{dx} + \delta M_Y \frac{d\theta_Y}{dx} + M_Y \frac{d\delta \theta_Y}{dx} + \delta T_Z \left(-\theta_Y + \frac{dW}{dx} \right) + T_Z \left(-\delta \theta_Y + \frac{d\delta W}{dx} \right) dx dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [\delta U N + \delta \theta_Y M_Y + \delta W T_Z]_0^L - \int_0^L \delta U \frac{dN}{dx} + \delta \theta_Y \frac{dM_Y}{dx} - T_Z \delta \theta_Y + \delta W \frac{dT_Z}{dx} dx dt \end{aligned}$$

- Les efforts extérieurs pouvant s'exercer aux extrémités de la poutre sont un effort normal \mathcal{N} , un efforts vertical \mathcal{T}_Z et un moment de flexion \mathcal{M}_Y . Le travail de ces efforts s'écrit :

$$\delta W_{ext} = \delta U(0)\mathcal{N}_0 + \delta U(L)\mathcal{N}_L + \delta W(0)\mathcal{T}_{Z0} + \delta W(L)\mathcal{T}_{ZL} + \delta\theta_Y(0)\mathcal{M}_{Y0} + \delta\theta_Y(L)\mathcal{M}_{YL}$$

Le principe de Hamilton permet d'obtenir d'une part :

$$\forall \delta U, \delta W, \delta\theta_Y, \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta U \left(\frac{dN}{dx} - \rho S \frac{d^2 U}{dt^2} \right) + \delta\theta_Y \left(\frac{dM_Y}{dx} - T_Z - \rho I_Y \frac{d^2 \theta_Y}{dt^2} \right) + \delta W \left(\frac{dT_Z}{dx} - \rho S \frac{d^2 W}{dt^2} \right) dt$$

d'où les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m_h \frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{dN}{dx} \\ m_h \frac{d^2 W}{dt^2} = \frac{dT_Z}{dx} \\ I_h \frac{d^2 \theta_Y}{dt^2} = \frac{dM_Y}{dx} - T_Z \end{cases}$$

et d'autre part :

$$\forall \delta U, \delta W, \delta\theta_Y, \int_{t_1}^{t_2} [\delta U N + \delta\theta_Y M_Y + \delta W T_Z]_0^L$$

$$- \delta U(0)\mathcal{N}_0 - \delta U(L)\mathcal{N}_L - \delta W(0)\mathcal{T}_{Z0} - \delta W(L)\mathcal{T}_{ZL} - \delta\theta_Y(0)\mathcal{M}_{Y0} - \delta\theta_Y(L)\mathcal{M}_{YL} dt$$

d'où les conditions aux limites :

- en $x = L$:

$$\begin{cases} N = \mathcal{N}_L \text{ ou } U \text{ imposé} \\ T_Z = \mathcal{T}_{ZL} \text{ ou } W \text{ imposé} \\ M_Y = \mathcal{M}_{YL} \text{ ou } \theta_Y \text{ imposé} \end{cases}$$

- en $x = 0$:

$$\begin{cases} N = -\mathcal{N}_0 \text{ ou } U \text{ imposé} \\ T_Z = -\mathcal{T}_{Z0} \text{ ou } W \text{ imposé} \\ M_Y = -\mathcal{M}_{Y0} \text{ ou } \theta_Y \text{ imposé} \end{cases}$$

Annexe C

.3 Membrane/Flexion de plaque

Le Principe de Hamilton permet d'établir les équations du mouvement d'une plaque lorsque celle-ci subit également des mouvements de membrane. L'énergie cinétique est complétée pour tenir compte des mouvements de membrane.

On note \mathbf{U} le déplacement du feuillet moyen dans le plan de la plaque. Son énergie cinétique est évaluée à partir de l'énergie cinétique dT d'un élément de surface dS qui subit le déplacement \mathbf{U} dans le plan et W hors du plan (l'énergie cinétique de rotation étant ici négligée). On a :

$$dT = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz \left[\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 \right] dS$$

L'énergie cinétique d'une plaque de surface S est donc :

$$T = \frac{1}{2} \int_S \rho_S \left[\left(\frac{d\mathbf{U}}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dW}{dt} \right)^2 \right] dS$$

avec $\rho_S = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) dz$ la masse surfacique de la plaque.

- La variation de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \frac{1}{2} \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_S \rho_S \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^2 + \rho_S \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dS dt \\ \Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt &= \int_S \int_{t_1}^{t_2} \rho_S \left(\frac{\partial \delta \mathbf{U}}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right) + \rho_S \left(\frac{\partial \delta W}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) dt dS \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = \int_S \rho_S \left[\delta \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \delta W \frac{\partial W}{\partial t} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho_S \delta \mathbf{U} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \rho_S \delta W \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dt dS$$

- La variation de l'énergie de déformation élastique s'écrit :

$$\delta V = \delta \frac{1}{2} \int_S \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} dv$$

La loi de comportement orthotrope s'écrit à l'aide d'un d'un tenseur du quatrième ordre : $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}}$ tel que $C_{ijkl} = C_{klij}$ du fait de la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformation. On a donc :

$$\delta V = \delta \frac{1}{2} \int_S \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \frac{1}{2} \int_S \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} + \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \int_S \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} : \bar{\bar{\bar{C}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv = \int_V \bar{\bar{\bar{\sigma}}} : \delta \bar{\bar{\bar{\epsilon}}} dv$$

La cinématique retenue permet de compléter le penseur des petites déformations par une contribution dans le plan de la plaque. On a ainsi :

$$\bar{\bar{\bar{\epsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}} \mathbf{U} + \overline{\text{grad}}^T \mathbf{U} \right) - z \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} W$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy étant symétrique :

$$\delta V = \int_S \bar{\bar{\bar{\sigma}}} : \overline{\text{grad}} \delta \mathbf{U} - z \bar{\bar{\bar{\sigma}}} : \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W dv$$

En introduisant les efforts internes $N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dz$ et $M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_{\alpha\beta} dz$, on obtient :

$$\delta V = \int_S \bar{\bar{N}} : \overline{\text{grad}} \delta \mathbf{U} dS - \int_S \bar{\bar{M}} : \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W dS$$

On a (voir Annexe A) : $\text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \bar{\bar{M}} \right) = \overline{\text{grad}} \mathbf{grad} \delta W : \bar{\bar{M}} + (\mathbf{grad} \delta W) \cdot \text{div} \bar{\bar{M}}$ et :

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \right) &= \frac{\left(\delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \right)_{\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\delta U_{\beta} N_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{\delta U_{\beta}}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} + \delta U_{\beta} \frac{N_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} \\ \Rightarrow \text{div} \left(\delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \right) &= \overline{\text{grad}} \delta \mathbf{U} : \bar{\bar{N}} + \delta \mathbf{U} \cdot \text{div} \bar{\bar{N}} \end{aligned}$$

La variation d'énergie de déformation élastique devient :

$$\delta V = \int_S \text{div} \left(\delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \right) - \delta \mathbf{U} \cdot \text{div} \bar{\bar{N}} dS - \int_S \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \bar{\bar{M}} \right) - (\mathbf{grad} \delta W) \cdot \text{div} \bar{\bar{M}} dS$$

On a également (Annexe A) : $\text{div} \left(\delta W \text{div} \bar{\bar{M}} \right) = \mathbf{grad} \delta W \cdot \text{div} \bar{\bar{M}} + \delta W \text{div} \text{div} \bar{\bar{M}}$.

La variation d'énergie de déformation élastique devient :

$$\delta V = \int_S \text{div} \left(\delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \right) - \delta \mathbf{U} \cdot \text{div} \bar{\bar{N}} dS - \int_S \text{div} \left(\mathbf{grad} \delta W \cdot \bar{\bar{M}} \right) - \text{div} \left(\delta W \text{div} \bar{\bar{M}} \right) + \delta W \text{div} \text{div} \bar{\bar{M}} dS$$

Le théorème de la divergence donne, si on note \mathbf{n} la normale au contour de la plaque ∂S :

$$\delta V = \int_{\partial S} \delta \mathbf{U} \cdot \bar{\bar{N}} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{grad} \delta W \cdot \bar{\bar{M}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \text{div} \bar{\bar{M}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta \mathbf{U} \cdot \text{div} \bar{\bar{N}} + \delta W \text{div} \text{div} \bar{\bar{M}} dS$$

Sur le contour ∂S , le gradient de δW est projeté sur la tangente au contour \mathbf{t} et la normale au contour \mathbf{n} , c'est à dire : $\mathbf{grad}\delta W = \frac{\partial\delta W}{\partial n}\mathbf{n} + \frac{\partial\delta W}{\partial s}\mathbf{t}$, n étant une coordonnée orthogonale à l'abscisse curviligne s . On obtient :

$$\delta V = \int_{\partial S} \delta\mathbf{U} \cdot \overline{\overline{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial\delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial\delta W}{\partial s} \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{N}}} + \delta W \mathit{div} \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} ds$$

Le contour étant fermé, une intégration par parties du troisième terme donne :

$$\delta V = \int_{\partial S} \delta\mathbf{U} \cdot \overline{\overline{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial\delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} ds - \int_S \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{N}}} + \delta W \mathit{div} \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} ds$$

- Les efforts extérieurs qu'une plaque peut subir sur son contour de normale \mathbf{n} sont un effort normal dans le plan \mathcal{N}_n , un effort tangent au contour dans le plan \mathcal{N}_t , un effort trachant \mathcal{T}_n , un moment de flexion \mathcal{M}_{nn} et un moment de torsion \mathcal{M}_{nt} . L'équilibre d'un élément de surface montre que le moment de torsion est équivalent à un effort tranchant de valeur $\frac{\partial\mathcal{M}_{nt}}{\partial s}$. Son travail est alors $\int_{\partial S} \delta W \frac{\partial\mathcal{M}_{nt}}{\partial s} ds$. Le travail de ces forces s'écrit donc :

$$\delta W_{ext} = \int_{\partial S} \mathcal{N}_n \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} + \mathcal{N}_t \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} + \mathcal{M}_{nn} \frac{\partial\delta W}{\partial n} + \left(\mathcal{T}_n + \frac{\partial\mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \right) \delta W ds$$

Le principe de Hamilton s'écrit alors, en choisissant $\delta\mathbf{U}$ et δW s'annulant aux instant t_1 et t_2 :

$$\begin{aligned} \forall \delta\mathbf{U}(t), \forall \delta W(t), \int_{t_1}^{t_2} \int_S -\rho_S \delta\mathbf{U} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \rho_S \delta W \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{N}}} + \delta W \mathit{div} \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} dS dt \\ - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} \delta\mathbf{U} \cdot \overline{\overline{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial\delta W}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} + \delta W \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \delta W \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} ds dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial S} \mathcal{N}_n \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} + \mathcal{N}_t \delta\mathbf{U} \cdot \mathbf{t} + \mathcal{M}_{nn} \frac{\partial\delta W}{\partial n} + \left(\mathcal{T}_n + \frac{\partial\mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \right) \delta W ds dt = 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne pour l'équation du mouvement dans le domaine S en l'absence de chargement réparti :

$$\begin{cases} \rho_S \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{N}}} = \mathbf{0} \\ \rho_S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \mathit{div} \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} = 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites libres sur le contour ∂S :

$$\begin{cases} \overline{\overline{\mathbf{N}}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{N}_n \mathbf{n} + \mathcal{N}_t \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{M}_{nn} \\ \frac{\partial \mathbf{t} \cdot \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n}}{\partial s} + \mathbf{div} \overline{\overline{\mathbf{M}}} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{T}_n + \frac{\partial\mathcal{M}_{nt}}{\partial s} \end{cases}$$