



**HAL**  
open science

# Espace de Teichmüller du fibré des repères d'une 3-variété hyperbolique réelle

Théo Jamin

► **To cite this version:**

Théo Jamin. Espace de Teichmüller du fibré des repères d'une 3-variété hyperbolique réelle. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2021. Français. NNT : 2021ANGE0041 . tel-03692271

**HAL Id: tel-03692271**

**<https://theses.hal.science/tel-03692271>**

Submitted on 9 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

Par

**Théo JAMIN**

## **Espace de Teichmüller du fibré des repères d'une 3-variété hyperbolique réelle**

Thèse présentée et soutenue à l'Université d'ANGERS, le 13 décembre 2021  
Unité de recherche : LAREMA, UMR CNRS 6093  
Thèse N° : 211794

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Nicolas THOLOZAN    Chargé de recherche au CNRS à l'ENS ULM.  
Julien GRIVAUX     Professeur à l'Université SORBONNE.

### **Composition du Jury :**

Président :	Jean-Jacques LOEB	Professeur des Universités à l'Université d'ANGERS.
Examineurs :	Alessandra IOZZI	Titular professor à École polytechnique fédérale de ZÜRICH.
	Jean-Jacques LOEB	Professeur des Universités à l'Université d'ANGERS.
	Nicolas THOLOZAN	Chargé de recherche au CNRS à l'ENS ULM.
	Julien GRIVAUX	Professeur à l'Université SORBONNE.
Directeur de thèse :	Laurent MEERSSEMAN	Professeur des Universités à l'Université d'ANGERS.
Co-encadrant de thèse :	Marcel NICOLAU	Professeur des Universités à l'Université autonome de BARCELONE.



# RÉSUMÉ

---

DEPUIS LES TRAVAUX DE M. KURANISHI à la fin des années 1950, la théorie des déformations de structures complexes, sur les variétés complexes compactes, à été largement développée. Jusqu'à récemment, l'étude de ces déformations était surtout locale, infinitésimale, sauf dans certains cas en basse dimension. Les travaux de TEICHMÜLLER ont, par exemple, permis de montrer que l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$ , c'est-à-dire l'espace des classes d'équivalence de structures complexes sur  $S$  isotopes (via un  $C^\infty$ -difféomorphisme) à l'identité, admet une structure de variété complexe. Par ailleurs, nous savons qu'en général, l'espace de Teichmüller d'une variété compacte orientée n'admet pas de structure de variété ni même de structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique. Ce phénomène est dû, en grande partie, à l'existence de saut de la dimension des groupes d'isotropie. Ce n'est qu'en 2019 que L. MEERSSEMAN a donné dans [74], une structure de champ analytique (en explicitant un atlas de ce champ) à l'espace de Teichmüller d'une variété complexe compacte sous une hypothèse relativement souple (précisément, il faut que les dimensions des groupes d'automorphismes  $C^\infty$ -difféomorphes à l'identité soient bornées).

Parallèlement, les travaux [31] d'E. GHYS, ont permis d'établir que l'espace de Kuranishi des variétés de la forme  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un groupe discret co-compact agissant librement et de façon totalement discontinue, est donné par le germe analytique de la variété de représentation  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$  pointée au morphisme trivial  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow \mathrm{Id} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Il est montré dans cet article que les déformations de l'holonomie de la  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure naturelle de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , via la variété de représentation, donnent lieu à de nouvelles structures complexes et que la famille correspondante est complète, c'est-à-dire que toute déformation de la structure complexe de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  suffisamment petite est donnée par la déformation de cette holonomie. De plus,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  agit par conjugaison sur cette variété de représentations en préservant les structures complexes.

Une question à laquelle répond cette thèse est de savoir s'il est possible, par ce procédé, de construire l'espace de Teichmüller, ou au moins un ouvert de celui-ci, des variétés  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Nous montrons qu'effectivement, la famille tautologique au dessus de la variété de représentation est toujours complète sur un ouvert de Zariski (analytique) de celle-ci et que le quotient champêtre de cet ouvert par l'action de conjugaison par  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , que l'on appellera *champ de caractères admissibles*, est bien un ouvert du champ de Teichmüller.

Notons qu'une variété  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  est naturellement identifiée au fibré des repères de la variété hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , ce qui justifie pleinement le nom donné à cette thèse.

## Contributions

Fixons  $\Gamma$  un sous-groupe discret co-compact et sans torsion dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  ainsi que  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  des générateurs et  $R_1, \dots, R_m$  des relations. Notons  $\mathcal{R}(\Gamma)$  le sous-schéma de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^n$  défini par les équations induites par  $R_i = \mathrm{Id}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Un point de ce schéma correspond à une représentation  $\rho$  de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et celle-ci permet de définir une action de  $\Gamma$  sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  via

$$\Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \quad (\gamma, x) \mapsto \rho(\gamma)^{-1}x\gamma$$

Remarquons que si  $\rho = \rho_0$  où  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow \mathrm{Id}$  est la représentation triviale, on retrouve l'espace homogène  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

**Définition.** Lorsque cette action est libre et totalement discontinue, nous dirons que  $\rho$  est *admissible* et noterons  $\mathcal{M}_\rho$  la variété complexe compacte obtenue comme quotient de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par cette action.

Remarquons que  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  agit par conjugaison sur  $\mathcal{R}(\Gamma)$  en préservant (à biholomorphisme près) les structures complexes induites. Avec ces notations, le théorème d'E. GHYS s'énonce de la façon suivante

**Théorème** ([31, Théorème A]). *La famille tautologique au dessus de  $(\mathcal{R}(\Gamma), \rho_0)$  est complète et verselle.*

Notons  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  le sous-ensemble de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  correspondant aux représentations admissibles. Nous savons, par des travaux de F. GUÉRITAUD, O. GUICHARD, F. KASSEL et A. WIENHARD [41, Corollary 1.18.] que  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  est un sous-schéma ouvert de  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Nous montrons dans cette thèse, la généralisation du théorème 1 suivante :

**Théorème** (théorème 6.0.1). *Si  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  n'est pas partout non-réduite, alors il existe un ouvert de Zariski (analytique)  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$  pour lequel la famille tautologique au dessus de  $V$  est complète en tous points.*

La non-trivialité des  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbites des représentations non centrales (c'est-à-dire à image contenue dans le centre dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ) met en défaut le critère de versalité de cette famille. Celui-ci peut être retrouvé en considérant une tranche localement transverse aux  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbites :

**Corollaire** (théorème 6.4.1). *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Alors, tout espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $Z$  contenant  $\rho$  et localement transverse aux  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbites définit (en tant que germe, pointé en  $\rho$ ) l'espace de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$ .*

De plus, il est possible dans certains cas de donner une expression explicite des espaces de Kuranishi des variétés  $\mathcal{M}_\rho$ .

Nous donnons par ailleurs, le groupe des automorphismes  $C^\infty$ -difféomorphes à l'identité (correspondant au groupe d'isotropie d'un point dans le champ de Teichmüller) :

**Proposition** (théorème 5.4.5). *Pour  $\rho \in V$ , le groupe  $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho) \cap \mathrm{Diff}^0(\mathcal{M}_\rho)$  est isomorphe au centralisateur de  $\rho(\Gamma)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .*

Ce qui nous amènera à la généralisation suivante :

**Théorème** (théorème 7.1.4). *Le champ de caractères admissibles  $[V/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  est un sous-champ ouvert du champ de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .*

Finalement, par le théorème de rigidité de Mostow, nous avons de façon analogue :

**Théorème** (théorème 7.1.6). *Le champ quotient  $[V/((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{Aut}(\Gamma))/\Gamma)]$  est un sous-champ ouvert du champ de modules de Riemann de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .*



# REMERCIEMENTS

---

L'échéance de cette thèse arrive à son terme et avec elle s'accompagne le difficile exercice d'écriture des remerciements. Mes premières pensées s'adressent évidemment à mon directeur de thèse Laurent MEERSSEMAN pour m'avoir accompagné, non pas sur ces trois années de thèse, mais pendant tout mon parcours universitaire. Tu as su m'aider, me conseiller, m'écouter et m'orienter de la meilleure façon qui soit. Ton rôle dans mon développement, tant Mathématiques que personnel, est sans aucun doute d'une importance cruciale et je tiens à t'en remercier. Je tiens aussi à remercier très chaleureusement mon co-encadrant Marcel NICOLAU pour m'avoir accordé autant de discussions mathématiques que les quelques semaines passées à Barcelone le permettaient. Malgré un contexte particulier qui mit un frein à nos entrevues, je me dois de te remercier pour avoir été autant impliqué dans mon travail depuis le début de cette thèse jusqu'à la minutieuse relecture de cette thèse.

Je souhaite remercier très chaleureusement Nicolas THOLOZAN et Julien GRIVAUX pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Merci d'avoir fait preuve d'une grande indulgence quant aux changements de dernières minutes dans la thèse, de m'avoir soutenu et d'avoir largement contribué aux corrections de cette thèse. J'en profite aussi pour remercier Nicolas quant aux innombrables échanges Mathématiques, sa grande implication dans la recherche d'une preuve de l'égalité  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho) = h_{\mathcal{O}}^1(\rho)$ , ainsi que de sa visite à Angers dont je tire un important enseignement Mathématique.

Je remercie également Alessandra IOZZI et Jean-Jacques LOEB d'avoir accepté d'être membres du jury de cette thèse. En particulier, merci à Alessandra d'avoir tout fait pour pouvoir assister à cette soutenance en personne. Je remercie Jean-Jacques LOEB pour l'ensemble de nos échanges. Je garderai un excellent souvenir de la première introduction à l'analyse complexe, il y a de ça presque six années, jusqu'aux discussions plus avancées à la table d'un restaurant.

Je profite aussi de ces quelques lignes pour remercier l'ensemble des membres de l'équipe du LAREMA qui sont passés, au fil de ces années, d'enseignants à collègues, voire amis. Merci en particulier à Rodolphe pour avoir réussi à me redonner envie de jouer de la guitare. Merci pour le petit concert de l'été 2021, ce fut l'aboutissement de trois longues années de labeurs de Sweeping et autres méthodes bien trop difficiles pour nous. Je remercie également chaleureusement Daniel pour les discussions aussi nombreuses que diverses autour de la géométrie, de l'enseignement, parfois même de l'arboriculture ou de la pisciculture. Promis Daniel je tâcherai, dans la rédaction de cette thèse, de faire mentir la célèbre citation de H. POINCARÉ : « *la géométrie est l'art du raisonnement correct à partir de figures mal dessinées* » en troquant le griffonnage

par du TikZ. Merci Étienne pour la passion que tu transmets aux étudiants et dont je fus bénéficiaire. Merci aussi pour ta disponibilité et les nombreuses discussions Mathématiques. Merci à Mattia d’avoir été un modèle d’enseignement et exemplaire par sa gentillesse. Merci également à Alexandra, qui permet à ce laboratoire d’évoluer dans un cadre administratif français sereinement et qui, par des échanges toujours plus humains, nous octroie de vraies pauses. Merci à toutes celles et ceux que j’oublie ici. Je voudrai également profiter de ces quelques lignes pour remercier Jean-Baptiste pour les nombreuses discussions Mathématiques et son soutien. Sinan pour ses cours sur les espaces de modules formels et ses cours de chant principalement basés sur « *drunken sailor* » (en partenariat avec Ouriel). Thank you to Renata and Alex for all the exchanges on Russian, Italian, American, Austrian cultures as well as for the initiation to axe throwing.

Je tiens à remercier tous les doctorants et ex-doctorants de ce laboratoire, avec qui l’ambiance n’aurait jamais pu être aussi conviviale, amicale. Un grand merci d’abord aux ex-doctorants Johan et Clément pour avoir été d’abord de très bons enseignants puis de très bons mentors durant le stage de Master 2 jusqu’au début de cette thèse. Merci à Ann pour nous avoir quotidiennement enseigné une partie de l’encyclopédie OEIS ainsi que pour tous les exposés dont la qualité n’avait rien à envier à leur diversité. Merci aussi pour ces innombrables discussions dont je garde un souvenir impérissable tant elles m’ont offert un peu de l’ouverture d’esprit dont tu fais preuve. Évidemment, merci Ouriel d’avoir fait autant de blagues que possible, redoublant d’efforts chaque jour pour perfectionner l’intonation de « *la blague du mec qui a une banane dans l’oreille* ». D’ailleurs, je m’excuse de ne pas avoir réussi à entendre tes remerciements de thèse, j’avais une banane dans l’oreille... Merci à Antoine qui occupa le bureau i104 (bien plus qu’Ouriel ne l’aura jamais fait en sa qualité de doctorant) pour dessiner des diagrammes cartésiens ou des éventails de façon quotidienne, profitant de ces balades champêtres, pour m’expliquer le lexique parfois aride des champs. Merci également au ~~faiseur~~<sub>foncteur</sub> de blagues  $\overline{\text{David}} : \mathfrak{N}\mathfrak{L}\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{op} \rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{l}\mathfrak{a}\mathfrak{g}\mathfrak{u}\mathfrak{e}\mathfrak{s}$ , d’avoir partagé presque tout ses cours avec moi et me permettre de partir à Barcelone sereinement. Merci à Alexis et Marine, nos premiers co-bureau à Ouriel et moi pour avoir occupé les postes Nord-Sud de la table de bridge. Bravo à tous les deux pour avoir su garder le cap de la thèse au dépend des blagues fusantes dans la diagonale de ce bureau. Merci à Axel et Jérôme pour toutes les discussions souvent politisées autour d’une bière. Merci à Thomas d’avoir rejoint la Squash Team et de m’avoir relayé au bar pour qu’Ouriel ne s’y ennue pas trop pendant que je rédigeais cette thèse. Merci également à Maxime, François, Eunice et Rayan pour tous nos échanges autour d’un café/thé, même s’ils n’ont été que trop peu nombreux à cause de cette pandémie. Merci aux nouveaux arrivés Thibault, Aurore et Mohamed de m’avoir soutenu dès votre arrivée.

Je souhaite aussi remercier tous les gens qui m’ont toujours soutenu et encouragé. A commencer par mes parents qui m’ont apporté un soutien infaillible et toujours remonté le moral quand cela s’avérait nécessaire. Merci aussi à toute ma famille, merci à Martin, Maud, mon filleul Gogo, le petit dernier Léopol et le plus jeune d’entre tous Niclas (oui... tu es plus proche de la retraite que de l’école primaire, mais ce titre n’est pas du vol compte tenu des blagues faites : Théo courant, non ?). Merci à mes oncles et tantes dont l’encouragement fut sans faille. Grazie alla famiglia Tarricone per la grande ospitalità e il loro costante incoraggiamento.

Merci à tout mes amis, déjà pour être restés amis après tant de discussions Mathématiques que j’imagine incompréhensibles mais pour l’avoir fait avec le sourire! Merci à Daniel (tu as perdu), Cédric

(toi aussi), Soline (tu devines ?), Manon, Thomas, Richard, Gaëlle qui ont suivi mon évolution autant sur l'aspect Mathématiques que personnel. Merci à toute l'équipe de squashers du Lac de Maine qui ont subi mes débordements hebdomadaires sous forme de balles trop appuyées. Merci aussi à J-P et Clara d'avoir toujours cru en moi. Merci aussi à celles et ceux que j'oublie dans ces quelques pages.

Même si l'amour des Mathématiques m'a, du plus loin que je me souviens, toujours animé, je me dois de remercier une personne responsable de mon enthousiasme envers cette discipline : Jacques LUCAS. Cela fait maintenant 11 ans que je t'avais promis cette soutenance, la voici.

Outre le fait que cette thèse soit responsable de l'évolution de ma passion pour les Mathématiques et d'un développement personnel certain, elle fut surtout l'opportunité de rencontrer Sofia. Cela fait bientôt près de trois ans que j'avance, chaque jour avec plus d'enthousiasme, à tes côtés. Merci de m'avoir écouté parler de catégories fibrées en groupoïdes, de déformations et de variétés de façon quasi-quotidienne sans (presque) jamais montrer ton aversion pour ce langage. Merci de m'avoir infailliblement remonté le moral lorsque le temps me paraissait long et les efforts à fournir insurmontables. Cette thèse n'aurait probablement vu le jour sans ton soutien. Je t'aime !



*Per te, che hai cambiato la trama della mia vita*

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1  Aperçu historique . . . . .	3
2  Contenu du manuscrit . . . . .	7
2.1  Révision de la littérature . . . . .	7
2.2  Contributions . . . . .	8
<b>1 Théorie classique de la déformation</b>	<b>11</b>
1.1  Déformations de structures complexes . . . . .	11
1.1.1  Structures complexes . . . . .	11
1.1.2  Familles et déformations infinitésimales . . . . .	13
1.2  Versalité et théorème de Kuranishi . . . . .	14
1.2.1  Complétude et versalité . . . . .	15
1.2.2  Théorème de Kuranishi . . . . .	15
1.3  Application de Kodaira-Spencer . . . . .	17
1.3.1  En coordonnées locales . . . . .	17
1.3.2  Suite fondamentale . . . . .	18
1.3.3  Critère de complétude et de versalité . . . . .	18
1.4  Obstructions - Le point de vue d'Adrien DOUADY . . . . .	19
<b>2 Champs analytiques et groupoïdes</b>	<b>23</b>
2.1  Définitions et motivation . . . . .	23
2.2  Introduction aux catégories fibrées en groupoïdes et aux champs . . . . .	26
2.2.1  Topologie de Grothendieck . . . . .	26
2.2.2  Groupoïdes et catégories fibrées en groupoïdes . . . . .	27
2.2.3  Pré-champs et champs . . . . .	35
2.2.4  Champification . . . . .	39
2.3  Structures algébriques et analytiques sur les champs . . . . .	41
2.3.1  Champs algébriques et champs d'Artin . . . . .	41

2.3.2	Groupoïdes analytiques, champs analytiques . . . . .	42
2.4	Champ de Teichmüller . . . . .	44
2.4.1	Construction de l'atlas . . . . .	46
2.5	Espace de modules de Riemann . . . . .	47
	<i>Interlude</i>	<b>49</b>
<b>3</b>	<b>Structures géométriques et leurs déformations</b>	<b>51</b>
3.1	$(G, X)$ -Structures . . . . .	52
3.1.1	Holonomie et application développante . . . . .	54
3.1.2	Relation aux $G$ -fibrés principaux plats . . . . .	55
3.2	Déformations des structures géométriques . . . . .	57
3.2.1	Déformations infinitésimales de $G$ -fibrés . . . . .	57
3.2.2	Espace de déformation . . . . .	58
3.2.3	Complétude des $(G \times G, G)$ -structures . . . . .	59
3.3	Admissibilité des représentations . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Représentations, caractères et variétés associées</b>	<b>65</b>
4.1	Cohomologie des groupes . . . . .	65
4.1.1	Définition formelle . . . . .	65
4.1.2	Résolution projective et coordonnées homogènes . . . . .	67
4.1.3	Suite spectrale LHS et suite inflation-restriction . . . . .	68
4.1.4	Cup-produit . . . . .	69
4.1.5	Lien avec la cohomologie de Čech . . . . .	71
4.2	variété des représentations . . . . .	71
4.2.1	Construction de Weil et espaces tangents . . . . .	74
4.2.2	Déformations de représentations . . . . .	75
4.3	Variété de caractères . . . . .	77
4.3.1	Quotients géométriques et catégoriques . . . . .	78
4.3.2	Quotients affines . . . . .	79
4.3.3	Quotient de la variété des représentations . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Structures complexes des espaces homogènes de <math>SL_2(\mathbb{C})</math></b>	<b>85</b>
5.1	Variété hyperbolique de dimension 3 et son fibré de repères . . . . .	86
5.1.1	Théorèmes de rigidité . . . . .	88
5.2	$(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}))$ -structure des quotients . . . . .	89
5.3	Espaces de Kuranishi des espaces homogènes de $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	91
5.3.1	Premier nombre de Betti . . . . .	93
5.3.2	Difféomorphismes entre les variétés $\mathcal{M}_\rho$ . . . . .	94
5.4	Groupes d'automorphismes des variétés $\mathcal{M}_\rho$ . . . . .	96
5.4.1	Automorphismes des variétés $\mathcal{M}_\rho$ . . . . .	97
5.4.2	Composante connexe du groupe d'automorphismes . . . . .	98

5.4.3	Automorphismes $C^\infty$ -isotope à l'identité . . . . .	99
5.4.4	Groupe des difféotopies . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Espace de Kuranishi de <math>\mathcal{M}_\rho</math></b> . . . . .	<b>101</b>
6.1	Cohomologie des variétés $\mathcal{M}_\rho$ . . . . .	101
6.2	Obstructions supérieures . . . . .	105
6.3	Application de Kodaira-Spencer au dessus de $\mathcal{R}(\Gamma)$ . . . . .	107
6.4	Description des espaces de Kuranishi . . . . .	109
6.4.1	Cas général . . . . .	109
6.4.2	Section transverse dans le cas $b_1(\Gamma) = 1$ . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Champ de Teichmüller de <math>SL_2(\mathbb{C})/\Gamma</math></b> . . . . .	<b>113</b>
7.1	Champ des caractères . . . . .	113
7.1.1	Champ de Teichmüller de $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . . . . .	115
7.1.2	Champ de modules de Riemann de $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . . . . .	116
7.2	Champs versus théorie des invariants géométriques . . . . .	116
7.2.1	Point de vue algébrique . . . . .	118
7.3	Fonctorialité . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Exemples</b> . . . . .	<b>121</b>
8.1	Groupes de noeuds et chirurgie de Dehn . . . . .	122
8.1.1	Rappels sur la théorie de noeuds . . . . .	122
8.1.2	Remplissage de Dehn . . . . .	123
8.1.3	$(n, 1)$ -Chirurgie sur le noeud en huit ( $b_1 = 0$ ) . . . . .	124
8.1.4	Variété $m199(-4, 1)$ ( $b_1 = 1$ ) . . . . .	127
8.1.5	$((0, 1), (0, 1))$ -chirurgie sur le lien $9_4^2$ ( $b_1 = 2$ ) . . . . .	129
8.2	Représentations à image Zariski-denses . . . . .	132
	<b>Publication</b> . . . . .	<b>133</b>

# TABLE DES FIGURES

---

1	Diagramme de Venn . . . . .	10
2.1	Domaine fondamental dans $\mathbb{H}$ sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ . . . . .	25
2.2	Carquois d'un groupe et d'un groupoïde. . . . .	29
3.1	Deux $(G, X)$ -structures du tore. . . . .	54
3.2	Procédé géométrique de construction de l'application développante. . . . .	55
5.1	Schéma d'obtention de nouvelles structures complexes . . . . .	91
8.1	Redressement les lacets sur le tore . . . . .	123
8.2	Schéma de construction de sous-groupes $\Gamma$ discrets co-compacts. . . . .	124
8.3	Nœud en huit . . . . .	124
8.4	Lien $9_4^2$ . . . . .	130



# NOTATIONS

---

## Groupes et algèbres de Lie

$SL_n(\mathbb{K})$	le groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ déterminant 1
$SO_n(\mathbb{K})$	le groupe des matrices orthogonales $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ déterminant 1 ( $char(\mathbb{K}) \neq 2$ )
$SU(n)$	le groupe des matrices unitaires $n \times n$ à coefficients complexes de déterminant 1
$PG$	où $G$ est un groupe de Lie est le quotient de $G$ par son centre $Z(G)$
$Spin(n)$	le groupe Spinoriel, revêtement universel de $SO_n(\mathbb{R})$
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$	l'algèbre de Lie de $SL_2(\mathbb{C})$

## Notations générales

$\iota_g(X)$	conjugaison de $X$ par $g$
$L_g$ ( <i>resp.</i> $R_g$ )	la multiplication à gauche ( <i>resp.</i> à droite) par $g$
$St_G(H)$	stabilisateur de $H$ dans $G$
$\mathcal{O}(H)$	$G$ -orbite de $H$ , notée simplement $\mathcal{O}(H)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés
$Aut(M)$	groupe d'automorphismes complexes de $M$
$Aut^0(M)$	composante connexe du groupe d'automorphismes (complexes) de $M$
$\Gamma$	sera généralement un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{C})$
$\mathcal{R}(\Gamma)$	schéma des représentations de $\Gamma$ dans $SL_2(\mathbb{C})$
$\mathbb{H}^n$	l'espace hyperbolique de dimension $n$

## Catégories

$\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$	la catégorie/le site des espaces $\mathbb{C}$ -analytiques de dimension finie
$\mathfrak{Sch}$	la catégorie/le site des schémas
$\mathfrak{Top}$	la catégorie/le site des espaces topologiques



# INTRODUCTION

---

## 1 Aperçu historique

SI « LA MATHÉMATIQUE EST L'ART DE DONNER LE MÊME NOM À DES CHOSSES DIFFÉRENTES », la notion de problème de modules est certainement celle qui illustre le mieux le propos de Henri POINCARÉ, auteur de cette citation. L'origine des problèmes de modules remonte à RIEMANN, essayant de trouver le nombre de paramètres de l'espace des classes d'équivalences de variétés complexes compactes de dimension 1 et de genre  $g$ . L'étude de cet espace complexe  $\mathcal{M}_g$  a été largement intensifiée notamment par TEICHMÜLLER et plus récemment par GROTHENDIECK, DELIGNE ou encore MUMFORD dans un langage catégorique.

En géométrie analytique, un des problèmes de modules est celui qui consiste à trouver une structure analytique naturelle (en un certain sens, à préciser selon le contexte) sur l'espace des classes d'équivalences de structures complexes qu'une variété différentiable compacte (supposée orientable et de dimension paire) admette.

Les premiers travaux allant dans ce sens, sont ceux de TEICHMÜLLER (bien plus louables que ses convictions politiques) qui ont permis de donner une structure à l'espace des paramètres des classes d'équivalences (à difféomorphismes isotope à l'identité près) de structures complexes sur une variété complexe  $\Sigma$  de dimension 1 et de genre  $g \geq 2$ . Plus précisément, un théorème dû à TEICHMÜLLER, AHLFORS, BERS, FRICKE et GOLDMAN affirme que l'espace de Teichmüller de  $\Sigma$  noté  $\mathcal{T}(\Sigma)$  admet une structure de variété kählerienne de dimension  $6g - 6$ . De plus, le groupe des difféotopies de  $\Sigma$  agit proprement et de façon totalement discontinue en préservant la structure kählerienne qui descend donc au quotient : l'espace de modules de Riemann  $\mathcal{M}(\Sigma)$ . Notons que le célèbre théorème d'uniformisation de POINCARÉ donne une correspondance entre cet espace de Teichmüller  $\mathcal{T}(\Sigma)$  et l'espace des structures hyperboliques à isotopie près. Puisque qu'une telle classe de structures correspond à celle d'une représentation Fuschienne (à image injective et discrète) du groupe fondamental de la surface considérée dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , on peut voir  $\mathcal{T}(\Sigma)$  comme une composante de la variété de caractères  $\mathrm{Hom}(\pi(\Sigma), \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})) / \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ .

Depuis, des exemples en dimensions supérieures ont montré que l'espace de Teichmüller n'admet pas, en général, ni de structure de variété ni d'espace analytique (voir [74, §12] pour des exemples). Cela force donc à élargir la notion de structure analytique. Ce sont les travaux de Laurent MEERSEMAN [74]

qui permettent, sous une hypothèse assez peu restrictive, de munir l'espace de Teichmüller d'une variété  $X$  d'une structure de champ analytique (voir le [chapitre 2](#) pour les définitions). Plus rigoureusement, soit  $X$  est une variété différentiable compacte (orientable et de dimension paire) et  $V$  est un ouvert de l'espace  $\mathcal{I}(X)$  des structures presque complexes intégrables sur  $X$ . S'il existe un entier  $a$  tel que pour toute structure complexe  $J$  dans  $V$ , le groupe d'automorphisme de  $(X, J)$  soit de dimension inférieure à  $a$ , alors l'espace de Teichmüller de  $X$  admet une structure de champ analytique, au sens où il admet un atlas analytique : son groupoïde d'holonomie.

Même si la construction de ce groupoïde d'holonomie est faite dans l'article [\[74\]](#) il est, en général, difficile de donner explicitement un atlas plus agréable pour le champ de Teichmüller d'une variété  $X$  fixée. Celui des tores est maintenant bien connu (voir encore [\[74\]](#) ou [exemple des tores 2.G](#)) et un autre exemple est celui construit par Clément FROMENTEAU dans sa thèse pour les variétés de HOPF.

Historiquement, pour répondre au problème de modules des structures complexes, une première approche fut celle apportée par les outils développés par KODAIRA, SPENCER et KURANISHI dans un cadre local, celle des déformations de structures complexes au dessus du germe d'un point base (voir par exemple le célèbre livre de MORROW et KODAIRA [\[76\]](#) à ce sujet). En particulier, au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, KURANISHI [\[66\]](#) prouvait l'existence d'une famille complète et semi-universelle pour toute variété complexe compacte, dont la base, qui admet une structure d'espace analytique complexe, porte aujourd'hui son nom. Depuis, l'intérêt porté à cet espace analytique n'a cessé d'augmenter et de nombreux exemples d'espaces de Kuranishi ont été explicités.

Un contexte qui fournit d'autres exemples de variétés complexes compactes et qui est le sujet d'étude de cette thèse, est celui des quotients de groupes de Lie et il est donc naturel de s'intéresser aux espaces de Kuranishi de tels quotients. Par exemple, l'espace de Kuranishi d'un quotient d'un groupe de Lie complexe  $G$  résoluble de dimension 3 par un sous-groupe discret co-compact (dont on connaît la liste exhaustive) est connu grâce aux travaux de NAKAMURA [\[81\]](#). Depuis, l'étude de ces *solvmanifolds* a été largement développé et on sait aujourd'hui expliciter un large nombre d'espaces de Kuranishi de ces variétés (voir par exemple [\[54\]](#)). Mentionnons aussi que le cas analogue des *nilmanifolds*, obtenus comme quotients de groupes de Lie nilpotents, a lui aussi été traité en 2008 par ROLLENSKE dans [\[88\]](#).

Toujours dans le contexte de variétés holomorphiquement parallélisables (l'équivalence avec le cas des quotients de groupe de Lie est donnée par le théorème [\[101\]](#) de WANG), on peut aussi énoncer le résultat [\[86\]](#) de RAGHUNATHAN. Dans le cas d'un quotient d'un groupe de Lie complexe  $G$  semi-simple et sans facteur de rang 1 par un sous-groupe  $\Gamma$  discret co-compact, ce théorème affirme que le premier groupe de cohomologie de  $\Gamma$  à valeur dans le  $\Gamma$ -module  $\mathfrak{g}$  (l'algèbre de Lie de  $G$  munie de la représentation adjointe) est trivial. Ceci a pour conséquence que l'espace de Kuranishi de  $G/\Gamma$  est un point dont on déduit la rigidité de cette variété, c'est-à-dire toute structure complexe sur  $G/\Gamma$  suffisamment proche de la structure initiale est isomorphe à celle-ci. Remarquons qu'en particulier pour  $SL_n(\mathbb{C})$ , avec  $n \geq 3$ , ce résultat s'applique.

Il fallut attendre près de 30 ans pour que le cas de  $SL_2(\mathbb{C})$  soit traité [\[31\]](#) par Étienne GHYS (voir en particulier le [chapitre 5](#)). Cette réponse au cas laissé en suspens par RAGHUNATHAN s'appuie principalement sur la comparaison des variations de la structure complexe et celles d'une certaine structure géométrique, au sens de THURSTON [\[97\]](#).

Peu avant les années 1980, THURSTON conjectura, de manière analogue au cas de la dimension 2 via le théorème d'uniformisation, que les 3-variétés réelles compactes peuvent toutes être décomposées en sous-variétés admettant l'une des huit structures géométriques appelées géométries de THURSTON [97]. Cette conjecture fut démontrée par G. PERELMAN en 2003, travail qui lui vaudra en 2006, la plus haute distinction Mathématiques : la médaille Fields, qu'il refusera (il refusera 4 ans plus tard, le prix d'un million de Dollars offert par l'Institut de Mathématiques Clay pour avoir résolu au passage la conjecture de POINCARÉ). Le lecteur intéressé pourra consulter [84] pour un aperçu de la preuve. Ces structures géométriques sont construites selon un principe plus général et qui s'étend au delà du cadre de la dimension 3. L'idée est de considérer des géométries « modèles » qui sont construites de la façon suivante. On se donne une variété simplement connexe  $X$  sur laquelle un groupe de Lie  $G$  agit transitivement et dont les groupes d'isotropie sont compacts. On construit ensuite une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  en identifiant localement  $M$  à cet espace homogène  $X$  et en identifiant les changements de cartes avec des restrictions d'éléments de  $G$ . Signalons que cette construction de  $(G, X)$ -structures est particulière puisque dans le cas général les hypothèses sur les groupes d'isotropie et sur le caractère transitif de l'action ne seront pas requis. De façon générale, la théorie des groupes de Lie permet une compréhension fine de la géométrie de  $X$  et apporte ainsi un intérêt évident à ces structures géométriques.

S'appuyant sur les idées d'EHRESMANN, THURSTON exhibe une relation entre les  $(G, X)$ -structures d'une variété  $M$  et les  $G$ -représentations du groupe fondamental de  $M$  (via le *morphisme d'holonomie* de la  $(G, X)$ -structure). Le principe connu aujourd'hui sous le nom d'Ehresmann-Thurston affirme que localement, les déformations de l'holonomie correspondent aux déformations de cette  $(G, X)$ -structure. Plus formellement, l'application qui, à une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$ , associe son holonomie réalise un homéomorphisme local entre l'espace des  $(G, X)$ -structures et celui des  $G$ -représentations de  $\pi_1(M)$ . Depuis, les travaux sur les variétés de représentations ont connu un essor fulgurant autant par leur nombre que par leur diversité (voir la fin du chapitre 4 pour une courte bibliographie du domaine ou consulter l'article d'A. SIKORA [90, p. 19] pour en voir une très complète, à visée plutôt algébrique).

Dans le cas traité par E. GHYS, puisque  $SL_2(\mathbb{C})$  peut-être vu comme la complexification de la sphère de dimension 3, les quotients de la forme  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  (où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret co-compact et sans torsion) sont munis d'une  $(G, X)$ -structure naturelle, avec  $X = SL_2(\mathbb{C})$  et l'action de  $G = SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$  par translations à gauche et à droite correspond aux parallélismes de Clifford de la sphère  $S^3$ . L'holonomie de cette  $(G, X)$ -structure des quotients  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  correspond évidemment à la paire constituée de la représentation triviale à gauche et de l'inclusion de  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  à droite. Il résulte des considérations rappelées précédemment que les déformations infinitésimales de cette structure correspondent aux déformations de cette paire de morphismes.

Par ailleurs, la déformation de sous-groupes discrets co-compacts a été largement étudiée et un des résultats célèbres dans ce contexte est celui de la *rigidité de Mostow* qui affirme qu'un isomorphisme entre deux réseaux co-compacts  $\Gamma$  et  $\Lambda$  dans un groupe de Lie simple  $H$  non localement isomorphe à  $SL_2(\mathbb{R})$  provient d'une conjugaison interne de  $H$ . Une conséquence directe de ce résultat affirme que le morphisme d'inclusion d'un réseau  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  est *rigide* (notons que la rigidité locale était déjà connue par un théorème de CALABI-WEIL) et il s'ensuit que les déformations infinitésimales de la  $(G, X)$ -structure du

quotient  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  sont en bijection avec les classes de conjugaison des déformations infinitésimales de la représentation triviale  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow \mathrm{Id}$ .

Après avoir montré que les déformations de la  $(G, X)$ -structure de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  restent complètes [31, Lemme 2.1] (c'est à dire que les  $(G, X)$ -structures sont obtenues par quotient de  $X$  par l'holonomie) dans un voisinage de la représentation triviale, le résultat principal [31, Théorème A] de ce même article provient de la comparaison des déformations de la structure complexe de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  avec celles induites par les structures complexes induites par  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par passage au quotient. Plus rigoureusement, l'auteur montre que la famille tautologique au dessus de la  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -variété de représentation de  $\Gamma$  pointée en  $\rho_0$  est la famille de Kuranishi de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

Dans un contexte un peu différent, les travaux de KOBAYASHI (par exemple [59] et [60]), BENOIST [8] suivis, entre autre, de ceux de KASSEL [50] concernant les actions de réseaux sur des espaces homogènes réductifs ont permis de donner des critères de propriété de ces actions. En particulier, GUÉRITAUD et KASSEL [42] montre par exemple que cette condition de propriété est ouverte. Ceci a pour corollaire la généralisation du résultat [31, Lemme 2.1] sur la complétude locale dont on a précédemment esquissé les intérêts. Signalons aussi les travaux de Nicolas THOLOZAN [93] qui ont, en particulier, permis de montrer dans le contexte des  $(L \times L, L)$ -structures (où  $L$  est un groupe de Lie de rang réel 1), que le domaine des  $(L \times L, L)$ -structures complètes (sur une variété  $M$  de même dimension que  $L$ ) forme une union de composantes connexes de l'espace de déformation  $\mathrm{Def}_{(L \times L, L)}(M)$  définit comme espace des classes d'équivalences de paires d'application développante et d'holonomie par l'action de conjugaison et par l'action de  $\mathrm{Diff}^0(M)$ .

L'ensemble de ces résultats mènent donc naturellement à la question de la généralisation des résultats de GHYS. Plus particulièrement, soit  $\Gamma$  est un sous-groupe discret co-compact de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  dont on note  $\iota$  son inclusion et soit  $\rho$  une  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -représentation de  $\Gamma$  *admissible* au sens où  $(\rho, \iota) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$  est l'holonomie d'une  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure complète sur une variété, notée  $\mathcal{M}_\rho$ . Voici les deux questions qui motivent cette thèse et à laquelle elle tente de répondre :

**Question 1** (Généralisation du théorème A de [31]). Toute structure complexe sur  $\mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$  proche de celle de  $\mathcal{M}_\rho$  est-elle biholomorphe à celle sur  $\mathcal{M}_\eta$  pour une certaine représentation  $\eta$  proche de  $\rho$  ?

**Question 2** (Espace de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ ). Si la réponse à la question précédente est affirmative, peut-on « globaliser » le résultat précédent et obtenir l'espace de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  ?

Cette thèse répond positivement à la première question sur un ouvert de Zariski (analytique) de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  et de façon partielle à la deuxième en donnant un sous-champ ouvert du champ de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

Dès lors, nous pouvons formuler les deux conjectures suivantes :

### Conjectures.

- La variété des représentations admissibles est complète en tous points.
- Le quotient (champêtre) de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  par l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est une union de composantes connexes dans l'espace de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

## 2 Contenu du manuscrit

Afin de répondre à ces questions, il est nécessaire de revenir sur l'ensemble des concepts, définitions et résultats mathématiques évoqués dans l'introduction. Voici, en résumé, le plan abordé dans cette thèse pour arriver à cet objectif. Nous profiterons de ce plan pour énoncer les contributions de cette thèse.

### 2.1 Révision de la littérature

*Chapitre 1* Le premier chapitre sera consacré à une courte introduction à la théorie classique de KODAIRA et de SPENCER concernant les déformations infinitésimales de structures complexes. Nous énoncerons le célèbre théorème de KURANISHI. Nous rappellerons la construction de l'application de Kodaira-Spencer et comment celle-ci permet de contrôler la complétude ainsi que la versalité d'une déformation donnée dans le cas lisse. Ce chapitre se clôturera sur le point de vue « faisceutique » de DOUADY de cette théorie qui permettra, par la suite, d'étudier les obstructions à étendre une déformation à l'ordre 1 aux ordres supérieurs dans le cas qui nous intéresse.

*Chapitre 2* Comme mentionné plus haut dans cette introduction, le champ de Teichmüller d'une variété complexe compacte n'admet pas en général de structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique, il faut le considérer comme champ. Nous discuterons alors dans un second chapitre les notions de catégories fibrées en groupoïdes et de champs. Nous verrons que ce champ (analytique), sous des hypothèses de finitude de la dimension des groupes d'automorphismes des structures complexes, admet un atlas, ce qui munit ce champ d'une structure analytique. Le point de vue généraliste qui y est adopté n'a pas un objectif purement théorique mais bien pratique, puisqu'il nous permettra de travailler aussi bien avec des champs analytiques qu'avec des champs algébriques et ainsi de faire une comparaison des champs de caractères sur les sites  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{Sch}$ .

*Chapitre 3* Nous reviendrons dans ce chapitre sur les notions de  $(G, X)$ -structures et morphisme d'holonomie ainsi que sur l'étroite relation qui lie les déformations de ces objets géométriques via le principe d'Ehresmann-Thurston. Ce sera aussi l'occasion d'aborder le problème de complétude des  $(G, X)$ -structures et d'énoncer les récents résultats sur cette question, en particulier dans le contexte des  $(L \times L, L)$ -structures. Nous verrons aussi comment une  $(G, X)$ -structure complète sur  $M$  avec  $X$  une variété complexe et  $G$  un sous-groupe du groupe des biholomorphismes de  $X$  permet de définir une structure complexe sur  $M$ .

*Chapitre 4* Ceci nous amènera naturellement, dans un quatrième chapitre, à la notion de représentations du groupe fondamental dans un groupe de Lie  $G$  ainsi qu'à la déformation de ces représentations. Par ailleurs, la géométrie locale d'une variété de représentations  $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$  est naturellement reliée à l'étude de la cohomologie de ce groupe fondamental à coefficients dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  dont la représentation adjointe lui confère une structure de  $\pi_1(M)$ -module. Par exemple, il est bien connu que l'espace tangent de Zariski à cette variété de représentation est isomorphe (via la construction de WEYL) au groupe des 1-cocycles (morphisme croisés)  $Z^1(\pi_1(M), \mathfrak{g})$ . Nous profiterons donc de ce chapitre pour donner les quelques rappels de cohomologie des groupes qui nous serviront dans les chapitres suivants.

*Chapitre 5* Ce chapitre sera consacré à l'étude des déformations des structures complexes des espaces homogènes  
*Partie 1*

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  dans lequel nous reviendrons dans un premier temps sur les résultats de l'article de GHYS [31]. En particulier, nous énoncerons le théorème qui affirme la versalité de la famille tautologique au dessus de la variété de représentations pointée en  $\rho_0$ . Nous énoncerons brièvement la classification de ces déformations qui nous sera utile pour la suite.

## 2.2 Contributions

*Chapitre 5*  
*Partie 2* Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudierons plus en détail la géométrie de ces variétés et leur groupes d'automorphismes. En particulier, un groupe qui jouera un rôle important dans le chapitre 7 est le groupe d'isotropie d'un point dans l'espace de Teichmüller. De façon générale pour une variété  $M$ , ce groupe, noté  $\mathrm{Aut}^1(M)$  est le sous-groupe des automorphismes de  $M$  qui sont  $C^\infty$ -isotopes à l'identité (notons qu'il existe des exemples de variétés pour lesquelles  $\mathrm{Aut}^0 \neq \mathrm{Aut}^1$ ). Nous aurons donc besoin de la connaissance du groupe d'automorphismes de  $\mathcal{M}_\rho$  et en particulier de sa composante connexe de l'identité

**Proposition (théorème 5.4.4).** *Soit  $\rho$  une représentation admissible, alors la composante connexe de l'identité du groupe des automorphismes de  $\mathcal{M}_\rho$  est isomorphe à la composante connexe de l'identité du centralisateur  $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$  de  $\rho(\Gamma)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .*

Nous caractériserons ensuite le groupe  $\mathrm{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$

**Proposition (théorème 5.4.5).** *Soit  $\rho$  une représentation admissible, alors  $\mathrm{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$  est isomorphe au centralisateur de  $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$  de  $\rho(\Gamma)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .*

En particulier, pour des représentations dont le centralisateur (de l'image de  $\Gamma$ ) n'est pas connexe, on a  $\mathrm{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) \neq \mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho)$ .

Nous profiterons aussi de l'occasion pour montrer que les variétés  $\mathcal{M}_\rho$  sont toujours  $C^\infty$ -difféomorphes à  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)^{\mathrm{diff}}$  :

**Proposition (théorème 5.3.11).** *Pour toute représentation admissible  $\rho$ , la variété  $\mathcal{M}_\rho$  est  $C^\infty$  difféomorphe à  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)^{\mathrm{diff}}$ .*

Ainsi, lorsque nous nous intéresserons à l'espace de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , nous pourrons considérer toutes les composantes de la variété de représentations admissibles.

*Chapitre 6* Le sixième chapitre portera sur la généralisation de la complétude de la famille tautologique au dessus de la variété de représentations. Nous commencerons par donner quelques résultats sur la cohomologie des variétés construites par GHYS. En particulier, le résultat qui généralise [31, Théorème 4.1] est le suivant :

**Théorème (théorème 6.1.1).** *Soit  $\rho$  une représentation admissible. Notons  $\mathcal{F}_\rho$  le faisceau des germes de sections localement constantes du fibré plat  $T\mathcal{M}_\rho$  et  $\Theta_\rho$  le faisceau des germes de sections holomorphes de  $T\mathcal{M}_\rho$  alors, il existe un ouvert Zariski (analytique)  $V$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$  tel que pour tout  $\rho \in V$  le plongement de  $\mathcal{F}_\rho$  dans  $\Theta_\rho$  induit un isomorphisme*

$$H^1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \simeq H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

Ces groupes nous serviront d'outil de comparaison des déformations de la structure complexe et des déformations des  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structures de ces variétés et nous montrerons que, comme dans le cas traité par E. GHYS, cette comparaison mène à la conclusion de la complétude de la famille tautologique

**Théorème** (de complétude, [théorème 6.0.1](#)). *La déformation de la structure complexe d'une variété  $\mathcal{M}_\rho$  donnée par la famille tautologique au dessus de l'ouvert  $V$  de la variété de représentations correspondant à l'ensemble des représentations admissibles est complète.*

En particulier, ce résultat donnera une réponse affirmative à la [question 1](#).

Un corollaire intéressant est que l'on obtient ainsi tous les espaces de Kuranishi de ces variétés (qui permet des constructions plus ou moins explicites selon les cas) :

**Corollaire** ([théorème 6.4.1](#)). *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret co-compact dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\rho$  une représentation admissible. Alors, tout espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $Z$  contenant  $\rho$  et localement transverse<sup>1</sup> à la  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbite de  $\rho$ , définit (en tant que germe) l'espace de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$ .*

Enfin, nous terminerons ce chapitre par expliciter l'application de Kodaira-Spencer. En particulier, nous montrerons que

**Proposition** ([théorème 6.3.1](#)). *L'application de Kodaira-Spencer associée à la famille tautologique au dessus de  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$  pointée en  $\rho \in V$  est donnée par la composition d'applications :*

$$T_\rho^{Z_{ar}} \mathcal{R}(\Gamma)^a \simeq Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{p} H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

où  $p : Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  est la projection d'un cocycle sur sa classe de cohomologie.

*Chapitre 7* Nous verrons ensuite comment les résultats de ces deux chapitres peuvent être « globalisés » et énoncés dans un cadre champêtre. Il y sera démontré par exemple que le quotient de l'ouvert  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$  des représentations admissibles dans la variété de représentation par l'action de conjugaison de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , considéré comme champ, est en fait un ouvert du champ de Teichmüller. Nous répondrons ainsi à la [question 2](#) de manière partielle.

**Théorème** ([théorème 7.1.4](#)). *Le champ des caractères admissibles  $[V/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  est un sous-champ ouvert du champ de Teichmüller de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .*

De façon analogue, nous montrerons

**Théorème** ([théorème 7.1.6](#)). *Le champ quotient*

$$[V/((\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\Gamma)]$$

*est un sous-champ ouvert du champ de modules de Riemann de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .*

---

1. si  $\rho$  est un point singulier, on prend une variété transverse  $\tilde{Z}$  à l'orbite dans une désingularisation  $\pi : W \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  en  $\rho$  et on prend son image par  $\pi$ .

Nous conjecturons aussi dans ce cas que ce sous-champ est un sous-champ fermé du champ de modules de Riemann de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

Nous profiterons aussi de ce chapitre pour énoncer les intérêts de cette vision champêtre en opposition à la théorie classique des invariants géométriques.

*Chapitre 8* Nous concluons cette thèse avec quelques exemples d'applications. Les premiers exemples qui permettent des calculs plus ou moins explicites sont ceux donnés par les variétés obtenues comme chirurgie de Dehn sur des complémentaires de nœuds dans  $S^3$ .

La majeure partie des contributions énoncées ici ont permis la rédaction de l'article [48].

Nous l'avons vu, cette thèse s'inscrit à l'intersection de plusieurs domaines des Mathématiques et une façon de résumer les liens qu'elle partage avec ces domaines est donné dans le schéma suivant :

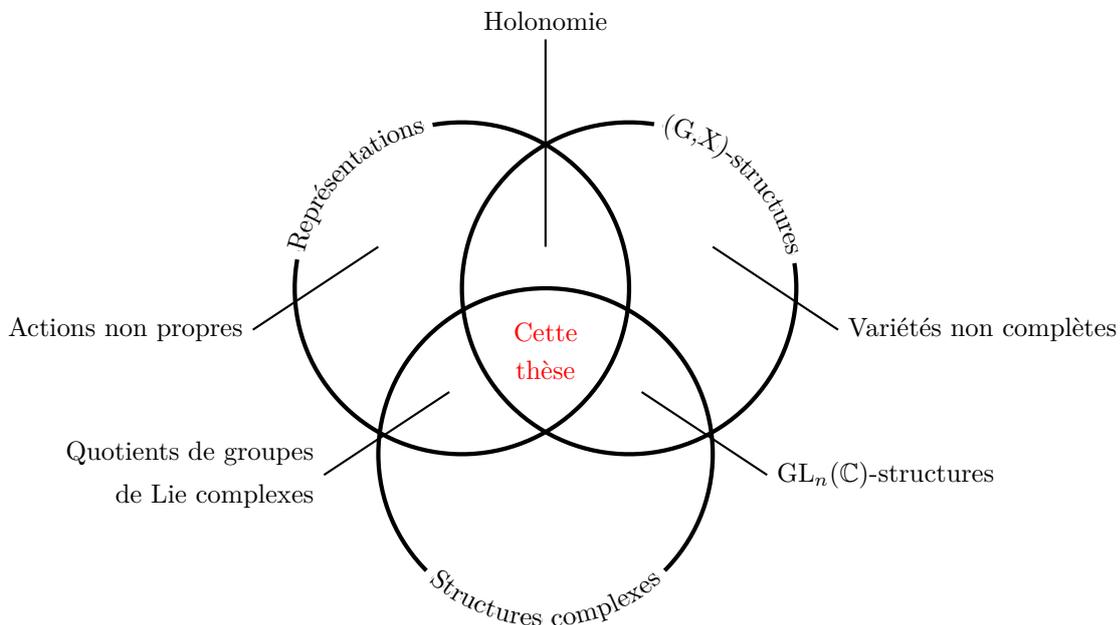


FIGURE 1 – Diagramme de Venn

# THÉORIE CLASSIQUE DE LA DÉFORMATION

POUR PERMETTRE UNE APPROCHE GLOBALE de la question des déformations de la structure complexe sur une variété complexe compacte, il est indispensable de revenir dans un premier temps sur l'approche classique (et historique) de KODAIRA, SPENCER et KURANISHI dans un cadre local. En effet, la construction du champ de Teichmüller d'une variété  $X$  présuppose la connaissance des espaces de Kuranishi pour chacune des variétés complexes  $(X^{diff}, J)$ , où  $J$  est une *structure presque complexe intégrable*. Nous reviendrons en particulier sur une des contributions des travaux de KODAIRA et SPENCER concernant l'application qui porte leur nom et qui fournit un critère de *complétude* et de *versalité* d'une famille de déformation sur une base lisse. Cependant, puisque les familles que nous aurons à considérer plus tard n'ont généralement pas de bases lisses, nous profiterons de ce chapitre pour revoir comment les ordres supérieurs de déformations permettent de contrôler ces deux critères en plus grande généralité. A cette occasion, nous adopterons le point de vue « faisceautique » de DOUADY qui nous sera utile dans la suite.

La principale référence utilisée pour ce qui suit est le livre *Complex manifolds* de MORROW et KODAIRA [76]. La dernière section est quant à elle, essentiellement tirée de [24]. Le lecteur pourra aussi trouver une littérature plus moderne par exemple dans [17].

## 1.1 Déformations de structures complexes

Nous commençons naturellement ces brefs rappels par les notions de structures presque complexes et d'intégrabilité de celles-ci ainsi que de leurs déformations infinitésimales.

### 1.1.1 Structures complexes

**Définition 1.1.1.** Soit  $X$  un espace topologique Hausdorff localement homéomorphe à un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Une *carte locale complexe* de  $X$  est la donnée d'un ouvert  $U$  et d'un homéomorphisme  $z : U \rightarrow V := z(U) \subset \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Deux cartes locales  $(U_\alpha, z_\alpha)$  et  $(U_\beta, z_\beta)$  sont dites *compatibles* si la fonction de

transition

$$f_{\beta,\alpha} := z_\beta \circ z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow z_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est holomorphe.

Un *atlas holomorphe* de  $X$  est une collection  $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  de cartes locales toutes deux à deux compatibles et telles que  $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ .

Un atlas holomorphe  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  est dit *maximal* si toute carte locale complexe  $(U, z)$  compatible avec toutes les cartes  $(U_\alpha, z_\alpha)$  est aussi dans  $\mathcal{U}$ .

**Définition 1.1.2.** Une *variété complexe*  $X$  de dimension  $n$  est un espace topologique Hausdorff à base dénombrable d'ouverts muni d'un atlas holomorphe maximal.

*Remarques.*

- Via l'isomorphisme  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$  et en oubliant le critère d'holomorphie, on obtient la variété différentiable sous-jacente que l'on notera  $X^{diff}$ .
- La donnée d'un atlas holomorphe  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  détermine (de façon unique) un atlas holomorphe maximal  $\mathcal{U}^{\max} := \{(U, z) \mid \text{carte locale complexe compatible avec } (U_\alpha, z_\alpha), \forall \alpha\}$ .

Les espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques feront partie du lexique courant de cette thèse et il est donc naturel de les définir ici.

**Définition 1.1.3.** Un *espace annelé* est la donnée d'une paire  $(X, \mathcal{O}_X)$  où  $X$  est un espace topologique et  $\mathcal{O}_X$  est un faisceau d'anneaux sur  $X$  appelé faisceau structural de  $X$ .

Un *espace localement annelé* est un espace annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  tel que les fibres  $\mathcal{O}_{X,x}$  soient des anneaux locaux (c'est-à-dire qu'elles possèdent un unique idéal maximal).

Un *morphisme entre espaces localement annelés*  $(X, \mathcal{O}_X)$  et  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  est une paire  $(f, \phi)$  où  $f : X \rightarrow Y$  est une application continue et  $\phi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$  est un morphisme de faisceaux compatible avec les anneaux locaux (c'est-à-dire que  $\phi$  envoie l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$  sur l'idéal maximal  $\mathcal{O}_{X,x}$ ).

**Définition 1.1.4.** Un  *$\mathbb{C}$ -espace modèle local* est un espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  où  $X$  est le lieu des zéros commun d'un ensemble fini de fonctions holomorphes  $f_i : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $\mathcal{O}_X$  est la restriction à  $X$  du faisceau  $\mathcal{O}_U/(f_1, \dots, f_m)$ .

Un *espace analytique complexe* (ou *espace  $\mathbb{C}$ -analytique*) est un espace localement annelé  $(X, \mathcal{O}_X)$  tel que pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $(U, \mathcal{O}_U)$  est isomorphe à un  $\mathbb{C}$ -espace modèle local.

Un *morphisme d'espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques* est un morphisme d'espaces localement annelés.

*Remarque.* La notion d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique généralise celle de variété complexe. En effet, une variété complexe peut être définie comme un espace  $\mathbb{C}$ -analytique qui est en chacun de ses points isomorphe à un domaine  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  et de faisceau structural donné par les fonctions holomorphes sur  $U$ .

Nous ne donnerons pas plus de détails sur la théorie de ces espaces. Le lecteur intéressé pourra consulter [40] ou bien [37].

**Définition 1.1.5.** Soit  $X$  une variété différentiable de dimension paire. Une *structure presque complexe* sur  $X$  est la donnée d'un endomorphisme  $J : TX \rightarrow TX$ , de classe  $C^\infty$  et vérifiant  $J^2 \equiv -\text{Id}$ .

La structure  $J$  est dite *intégrable* si

$$\left[ T_J^{1,0} X, T_J^{0,1} X \right] \subset T_J^{1,0} X$$

où  $T_J^{1,0} X$  (*resp.*  $T_J^{0,1} X$ ) est le sous-fibré du fibré tangent complexifié  $TX \otimes \mathbb{C}$  formé des vecteurs propres de  $J$  associés à la valeur propre  $i$  (*resp.*  $-i$ ).

L'intérêt de cette condition d'intégrabilité est pleinement justifiée par :

**Théorème 1.1.6** (NEWLANDER-NIREMBERG [82]). *Soit  $X$  une variété différentiable compacte et  $J$  une structure presque complexe sur  $X$ . Alors,  $J$  est intégrable si, et seulement si, il existe un atlas  $\{\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n\}$  de  $X$  compatible avec  $J$  au sens où*

$$\forall p \in U_j, \forall v \in T_p X, \quad d_p \phi_j(J(v)) = i \cdot d_p \phi_j(v)$$

Autrement dit, ce théorème affirme que la donnée d'une variété complexe  $X$  est équivalente à la donnée de (la variété différentiable sous-jacente)  $X^{diff}$  et d'une structure presque complexe intégrable.

Remarquons que la donnée d'une structure presque complexe est équivalente à la donnée du sous-fibré  $T_J^{0,1} X$ . En particulier, si  $J'$  est une structure presque complexe proche<sup>1</sup> de  $J$ , la projection  $\pi^{0,1} : TX \otimes \mathbb{C} \rightarrow T_J^{0,1} X$  réalise un isomorphisme entre  $T_J^{0,1} X$  et  $T_{J'}^{0,1} X$  et on obtient alors une application

$$T_J^{0,1} X \xrightarrow{(\pi^{0,1})^{-1}} T_{J'}^{0,1} X \xrightarrow{\pi^{1,0}} T_J^{1,0} X$$

que l'on peut facilement interpréter comme une  $(0,1)$ -forme à valeur dans  $T^{1,0} X$ . De façon réciproque, une telle forme  $\xi \in A^{0,1}(T^{1,0} X)$  définit un sous-fibré  $T_{J'}^{0,1} X$  de  $TX \otimes \mathbb{C}$  et par la remarque précédente, l'opérateur  $J'$ . De plus, la structure complexe  $J$  de départ est représentée par  $0 \in A^{0,1}(T^{1,0} X)$ .

### 1.1.2 Familles et déformations infinitésimales

Une manière agréable de regarder les variations infinitésimales d'une structure complexe est donnée par les familles :

**Définition 1.1.7.** Soit  $X$  une variété complexe compacte. Une *déformation lisse* (ou *famille*) de  $X$  est la donnée d'un morphisme lisse et propre  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  entre variétés complexes (ou plus généralement entre espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques) connexes  $\mathcal{X}$  et  $B$  et d'un point  $b \in B$  tel que la fibre  $\mathcal{X}_b$  au dessus de  $b$  soit biholomorphe à  $X$ . La donnée d'un tel biholomorphisme  $i : \pi^{-1}(b) \rightarrow X$  est appelé *marquage*.

La notion de marquage intervient principalement dans le rôle du groupe d'automorphisme de la fibre centrale. Ici, nous considérerons toujours des déformations marquées.

Pour justifier la pertinence de cette définition, rappelons le résultat suivant :

**Théorème 1.1.8** (Lemme d'EHRESMANN [28]). *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles. Une submersion surjective propre et lisse  $f : M \rightarrow N$  est une fibration localement triviale.*

1. proche au sens de la topologie de la convergence  $C^\infty$  : une suite d'opérateurs  $\{J_n\}$  tend vers zéro si elle converge vers zéro pour toute norme  $C^k$   $k \geq 0$  sur tout compact.

En particulier, ce résultat affirme qu’une déformation (lisse)  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  d’une variété complexe  $X$  est localement triviale (au sens différentiable). Autrement dit, pour un voisinage  $U$  du point base  $b \in B$  de la déformation, pour tout  $t$  dans  $U$ , les fibres  $\pi^{-1}(t)$  sont  $C^\infty$ -difféomorphes à la fibre centrale, c’est à dire à  $X^{diff}$ . Il n’existe cependant pas d’analogie complexe et on peut alors, dans certain cas, obtenir de nouvelles structures complexes sur  $X^{diff}$  sans modifier la structure différentiable.

Dans tout le [chapitre 2](#), nous nous appuyerons sur un exemple afin d’illustrer la nécessité des notions qui y seront abordées. Il est donc naturel de la faire intervenir ici déjà.

**Exemple des tores 1.A.** Rappelons qu’une courbe elliptique est définie comme le quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau  $\Gamma$  engendré par deux vecteurs (à coefficients complexes) et  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants  $\omega_1, \omega_2$ . Il est clair que  $\mathbb{C}^*$  agit sur  $\mathbb{C}$  par multiplication et que l’on peut toujours se ramener au cas où  $\omega_1 = 1$  et  $\omega_2 = \tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ . On considère alors l’action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C}$  engendrée par

$$z \mapsto z + 1 \quad \text{et} \quad z \mapsto z + \tau$$

et on note  $\mathbb{T}_\tau$  le quotient de  $\mathbb{C}$  par cette action. Cette construction donne, de manière assez évidente, une façon de trouver une famille au dessus de  $\mathbb{H}$ , il suffit de prendre le quotient de  $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$  par l’action engendrée par

$$(\tau, z) \mapsto (\tau, z + 1) \quad \text{et} \quad z \mapsto (\tau, z + \tau)$$

On note  $\mathcal{G}$  le groupe engendré par ces transformations.

Considérons l’application de projection  $p_1 : (\mathbb{H} \times \mathbb{C})/\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{H}$ . Il est clair que  $p_1^{-1}(\tau) = \mathbb{T}_\tau$  et on obtient ainsi une famille de  $\mathbb{T}_\tau$ . Le lemme d’Ehresmann affirme que cette fibration est localement triviale. Puisque  $\mathbb{H}$  est contractile, elle l’est donc globalement et on obtient

$$(\mathbb{H} \times \mathbb{C})/\mathcal{G} \simeq \mathbb{H} \times \underbrace{S^1 \times S^1}_{=(\mathbb{T}_\tau)^{diff}}$$

Il est important de noter ici que ce quotient  $(\mathbb{H} \times \mathbb{C})/\mathcal{G}$  est un produit pour la structure différentiable mais que les fibres  $\mathbb{T}_\tau$  ne sont pas localement biholomorphes.

## 1.2 Versalité et théorème de Kuranishi

On voudrait maintenant pouvoir comparer les déformations entre elles et trouver une déformation qui permette d’obtenir toutes les structures complexes suffisamment proches de la structure complexe initiale et qui soit minimale parmi les déformations ayant cette propriété. Commençons par donner la notion de morphismes entre déformations.

**Proposition 1.2.1.** *Soit  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation marquée pointée en  $b$  d’une variété complexe compactes et  $f : B' \rightarrow B$  un morphisme d’espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques avec  $f(b') = b$ . Le produit fibré  $\mathcal{X} \times_{f, B, \pi} B'$  admet une structure de déformation marquée de  $X$  sur  $B'$  pointée en  $b'$  appelée déformation pullback de  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  par  $f$  que l’on notera  $f^*\mathcal{X}$ .*

Cette proposition est essentiellement due à la stabilité des propriétés lisses et propres par changement

de bases.

**Définition 1.2.2.** Deux déformations marquées  $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow B$  et  $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow B$  pointées en  $b$  sur une même base sont dites *isomorphes* si il existe un biholomorphisme  $f : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$  tel que  $\pi_2 \circ f = \pi_1$  et tel que  $f$  préserve les marquages, c'est-à-dire  $f \circ i_1 = i_2$  où  $i_1$  et  $i_2$  sont respectivement les marquages des familles  $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow B$  et  $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow B$ .

**Définition 1.2.3.** Deux déformations marquées  $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow B_1$  et  $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow B_2$  pointées respectivement en  $b_1$  et  $b_2$  sont dites *biholomorphes* si il existe un biholomorphisme  $f : B_1 \rightarrow B_2$  tel que  $f$  préserve les points bases (c'est-à-dire  $f(b_1) = b_2$ ) et tel que  $f^*\mathcal{X}_2$  soit isomorphe à  $\mathcal{X}_1$ .

### 1.2.1 Complétude et versalité

Une question naturelle, à laquelle KURANISHI, KODAIRA et SPENCER ont répondu, est de savoir s'il existe une déformation universelle.

**Définition 1.2.4.** Soient  $X$  une variété complexe compacte et  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation marquée de  $X$  pointée en  $b$ . La déformation est dite

- *complète* si toute autre déformation  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$  marquée, pointée en  $s$ , est localement isomorphe en  $s$ , au pullback de  $\mathcal{X}$  par une application holomorphe  $f : S \rightarrow B$  qui respecte les points bases,
- *verselle* (resp. *universelle*) si, en plus d'être complète, la différentielle de  $f$  au point base est unique (resp.  $f$  est unique),

*Remarque.* On peut réécrire la définition de complétude de la façon suivante. La déformation  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  est complète si pour toute déformation  $p : \mathcal{M} \rightarrow S$  pointée en  $s$ , il existe des voisinages  $U \subset B$  et  $V \subset S$  des points bases et une application holomorphe  $f : V \rightarrow U$  qui préserve les points bases et telle que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}|_{p^{-1}(V)} & \xrightarrow{\cong} & f^*(\mathcal{X}|_{\pi^{-1}(U)}) & \longrightarrow & \mathcal{X}|_{\pi^{-1}(U)} \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & V & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

### 1.2.2 Théorème de Kuranishi

Soit  $X$  une variété complexe compacte et notons  $J$  sa structure complexe. Nous l'avons vu, l'ensemble des structures complexes proches de  $J$  s'identifie à un ouvert de 0 dans l'ensemble  $A^{0,1}(T^{1,0}X)$ . Prenons une métrique hermitienne  $h$  sur  $X$  et définissons l'opérateur  $\bar{\partial}$  sur l'espace  $A^{0,p}(T^{1,0}X)$  des  $(0,p)$ -formes à valeurs dans  $T^{1,0}X$ . Pour  $\phi \in A^{0,p}(T^{1,0}X)$  et  $\psi \in A^{0,p-1}(T^{1,0}X)$ , la condition

$$h(\phi, \bar{\partial}\psi) = h(\bar{\partial}^*\phi, \psi)$$

définit un opérateur adjoint à  $\bar{\partial}$  et ainsi un opérateur Laplacien

$$\square := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

Cet opérateur est un opérateur elliptique du second ordre et la théorie de Hodge permet une décomposition :

$$A^{0,q}(T^{1,0}X) = \mathcal{H}^{0,q}(T^{1,0}X) \oplus \square A^{0,q}(T^{1,0}X)$$

où  $\mathcal{H}^{0,q}(T^{1,0}X)$  est l'espace des  $(0, q)$ -formes harmoniques à valeurs dans  $T^{1,0}X$ .

On définit ensuite l'opérateur de Green  $G$  comme l'unique opérateur vérifiant

$$\psi = H\psi + \square G\psi, \quad \psi \in A^{0,q}(T^{1,0}X)$$

où  $H$  est la projection sur la partie harmonique.

Soit  $\eta_1, \dots, \eta_m$  une base de l'espace  $\mathcal{H}^{0,1}(T^{1,0}X)$  (qui est de dimension finie par compacité de  $X$ ) des  $(0, 1)$ -formes harmoniques. Soit  $\phi : \mathbb{C}^m \rightarrow A^{0,1}(T^{1,0}X)$  l'unique série qui satisfait

$$\phi(\underline{t}) = \sum_i \eta_i t_i + \frac{1}{2} \bar{\partial}^* G[\phi(\underline{t}), \phi(\underline{t})]$$

avec  $\underline{t} = (t_1, \dots, t_m)$  et  $[\cdot, \cdot]$  est le crochet de Lie sur les champs de vecteurs. KURANISHI montre que cette série converge sur un voisinage de 0. De plus,  $\phi(t)$  définit une structure presque complexe intégrable sur  $X$  si, et seulement si,  $H[\phi(t), \phi(t)] = 0$  où  $H$  est la projection sur l'espace des  $(0, 2)$ -formes harmoniques.

On pose ensuite  $K = \{t \in \mathbb{C}^m \simeq \mathcal{H}^{0,1}(T^{1,0}X) \mid H[\phi(t), \phi(t)] = 0\}$ . Et le germe, en 0, de cet espace  $\mathbb{C}$ -analytique paramètre les structures complexes sur  $X$ .

Finalement l'isomorphisme de DOLBEAULT  $\mathcal{H}^{0,1}(T^{1,0}X) \simeq H^1(X, \Theta)$  permet ensuite de réécrire le théorème de Kuranishi :

**Théorème 1.2.5** (KURANISHI, [65]). *Soit  $X$  une variété complexe compacte. Il existe une déformation (marquée)  $\pi : \mathcal{K} \rightarrow K$  de  $X$  qui est complète et verselle en 0. De plus, l'espace tangent de  $K$  à son point base est isomorphe à  $H^1(X, \Theta)$ , où  $\Theta$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X$ .*

L'espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $K$  est appelé l'espace de Kuranishi de  $X$ . Voir aussi la note d'Adrien DOUADY [25] sur le théorème de KURANISHI.

*Remarques.* De plus, les critères de complétude et de versalité de la famille de Kuranishi ont quelques corollaires [65] qu'il faut mentionner.

1. La versalité de la famille de Kuranishi implique l'unicité du germe analytique de  $K$  en 0,
2. la famille de Kuranishi n'est pas seulement complète en 0 mais en chacun de ses points (quitte à restreindre si besoin).

**Exemple des tores 1.B.** Dans l'exemple des tores 1.A, la famille construite est complète et verselle en tous points  $\tau \in \mathbb{H}$ .

*Remarque.* On connaît des exemples de variétés complexes compactes qui n'admettent pas de déformation universelle (voir par exemple le cas des surfaces de HIRZEBRUCH dans [16] ou le cas des surfaces de HOPF dans [62]). Il existe cependant des critères qui assure l'existence d'une telle déformation, le fait qu'une variété complexe compacte n'admette pas de champs de vecteurs holomorphes globaux en est un

exemple. Si l'on autorise seulement des déformations sur des bases réduites, on a même l'équivalence entre l'universalité de l'espace de Kuranishi et le fait que la fonction  $h^0(t) = \dim H^0(X_t, \Theta_t)$  soit constante où  $X_t = \pi^{-1}(t)$  et  $\Theta_t$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X_t$ . Voir [102] et [103] pour la démonstration et [72] pour une discussion détaillée.

## 1.3 Application de Kodaira-Spencer

Étant donné une déformation  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$ , une question naturelle est de savoir si celle-ci est complète et si elle est verselle. Ce sont KODAIRA et SPENCER qui répondront à cette question en donnant un critère de complétude et de versalité fournit par l'*application de Kodaira-Spencer*.

### 1.3.1 En coordonnées locales

Soit  $X$  une variété complexe compacte et  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation lisse de  $X$  pointée en  $b$  dont on note les fibres  $X_t := \pi^{-1}(t)$ . On suppose, pour alléger, que  $B = \mathbb{C}$  et  $b = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $B_\varepsilon := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$  un  $\varepsilon$ -voisinage de 0. Comme  $\pi$  est lisse, on peut trouver  $\{U_i \mid i \in I\}$  un recouvrement de  $\pi^{-1}(B_\varepsilon)$  avec un système de coordonnées  $(z_1^i, \dots, z_n^i, t)$  sur  $U_i$  tel que  $\pi(\underline{z}^i, t) = t$ . Où  $\underline{z}^i := (z_1^i, \dots, z_n^i)$ .

Comme on a supposé la déformation lisse,  $\mathcal{X}$  est une variété complexe et les coordonnées locales définies sur les  $U_i$  sont reliées par des fonctions de transitions holomorphes

$$z_\alpha^i = f_\alpha^{ij}(\underline{z}^j, t), \text{ sur } U_i \cap U_j$$

On veut maintenant écrire les changements de cartes holomorphes sur  $X_t$ . On pose  $U_i^t := X_t \cap U_i$  et

$$\theta_{ij}(t) := \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_\alpha^{ij}(\underline{z}^j, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_\alpha^i} \in \Gamma(U_i^t \cap U_j^t, \Theta_{X_t})$$

où  $\Theta_{X_t}$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X_t$ .

Et puisque

$$z_\alpha^i = f_\alpha^{ij}(\underline{z}^j, t) = f_\alpha^{ij} \left( f_1^{jk}(\underline{z}^k, t), \dots, f_n^{jk}(\underline{z}^k, t) \right) \text{ sur } U_i \cap U_j \cap U_k$$

en différentiant, on obtient que  $\theta_{ij}(t)$  est un cocycle de Čech de  $X_t$  à valeur dans  $\Theta_{X_t}$ .

**Définition 1.3.1.** On appelle *application de Kodaira-Spencer* l'application

$$\mathcal{KS} : H^0(X_b, T_b B) \rightarrow H^1(X_b, \Theta_{X_b}), \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \{\theta_{ij}(t)|_{t=0}\}$$

Plusieurs choix ont été fait dans la définition mais le lecteur pourra vérifier que  $\{\theta_{ij}(t)|_{t=0}\}$  ne dépend pas du choix de la carte locale (voir par exemple [76, Proposition 3.1]).

### 1.3.2 Suite fondamentale

Un fait qui nous sera utile par la suite est que l'application de Kodaira-Spencer est calculable via l'application connectante de la suite exacte longue associée à la suite exacte *fondamentale* d'une déformation. Il est donc important de revoir cette construction ici.

Soit  $X$  une variété complexe compacte et  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation de  $X$  pointée en  $b$ . L'application  $d\pi : T\mathcal{M}|_{X_b} \rightarrow T_bB$  induit la suite exacte de  $\mathcal{O}_{X_b}$ -modules suivante

$$0 \rightarrow \Theta_{X_b} \rightarrow \Psi|_{X_b} \xrightarrow{d\pi} T_bB \otimes \mathcal{O}_{X_b} \rightarrow 0$$

où

- $\Theta_{X_b}$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X_b$ ,
- $\Psi|_{X_b}$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $\mathcal{X}|_{X_b}$ ,
- $T_bB \otimes \mathcal{O}_{X_b}$  est identifié au faisceau défini par  $(T_bB \otimes \mathcal{O}_{X_b})(U) = T_bB \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_b}(U)$ .

On peut donc construire la suite exacte longue associée en cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(X_b, \Theta_{X_b}) \rightarrow H^0(X_b, \Psi|_{X_b}) \rightarrow H^0(X_b, T_bB \otimes \mathcal{O}_{X_b}) \rightarrow H^1(X_b, \Theta_{X_b}) \rightarrow \dots$$

Et comme on a supposé  $X \cong X_b$  compacte, le principe du maximum affirme que  $\mathcal{O}_{X_b}(X_b) = \mathbb{C}$  et l'application connectante de la suite exacte longue devient

$$\delta^* : H^0(X_b, T_bB) \simeq T_bB \rightarrow H^1(X_b, \Theta_{X_b})$$

**Proposition 1.3.2** (KODAIRA-SPENCER, [76]). *L'application connectante  $\delta^*$  est l'application de Kodaira-Spencer.*

### 1.3.3 Critère de complétude et de versalité

L'intérêt majeur de l'application de Kodaira-Spencer est qu'elle fournit un critère de complétude et de versalité :

**Théorème 1.3.3** (KODAIRA-SPENCER, [61]). *Soit  $X$  une variété complexe compacte et  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation marquée en  $b \in B$ , avec  $B$  une variété lisse. La surjectivité et la bijectivité de l'application de Kodaira-Spencer associée à cette déformation impliquent respectivement la complétude et la versalité de la déformation.*

Remarquons que, sous l'hypothèse d'une base lisse, ce théorème affirme qu'une déformation est complètement contrôlée par les déformations à l'ordre 1. Malheureusement, cette hypothèse est trop restrictive pour être appliquée de façon générale dans le cas qui nous intéressera dans cette thèse. Pour obtenir un critère de complétude et de versalité d'une déformation sur une base singulière, il est nécessaire de regarder les déformations à des ordres supérieurs. Pour ce faire, nous opterons pour le point de vue faisceautique de DOUADY qui aura l'avantage de s'adapter facilement à notre cas d'étude.

## 1.4 Obstructions - Le point de vue d'Adrien DOUADY

Avant d'énoncer le prochain résultat, rappelons la définition du cup-produit. Si  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont deux faisceaux sur  $X$ , alors on définit l'application de cup-produit sur un recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $X$  :

$$\smile : C^p(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}_1) \otimes C^q(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}_2) \rightarrow C^{p+q}(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$$

par

$$(\alpha \smile \beta)_{i_1, \dots, i_{p+q}} := \alpha_{i_1, \dots, i_p} \otimes \beta_{i_{p+1}, \dots, i_{p+q}}$$

et on obtient une application sur les groupes de cohomologie correspondants par passage à la limite inductive sur les recouvrements de  $X$ .

Si de plus on a un troisième faisceau  $\mathcal{F}_3$  et un morphisme  $F$  entre  $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$  et  $\mathcal{F}_3$  alors on peut composer le cup-produit et  $F$  pour obtenir une application

$$F \circ \smile : H^p(X, \mathcal{F}_1) \otimes H^q(X, \mathcal{F}_2) \rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F}_3)$$

En particulier, pour  $\Theta$  le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X$  et  $[\cdot, \cdot] : \Theta \otimes \Theta \rightarrow \Theta$ , on obtient l'application de *cup-crochet*, naturellement notée  $[\smile]$ .

Considérons une variété complexe compacte  $X$ . Une question essentielle est de savoir si, étant donné un élément  $a \in H^1(X, \Theta)$ , il existe une déformation  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  de  $X$  telle que  $a$  soit l'image d'un vecteur  $v \in T_b B$  par l'application de Kodaira-Spencer. Nous verrons, dans cette section, qu'il existe une série d'obstructions qui permettent d'affirmer en cas d'annulation, ce cas de figure.

Soit  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une déformation de  $X$  donnée par une famille où  $B$  est, pour simplifier, un voisinage ouvert de 0 de  $\mathbb{C}$  (le cas d'un espace  $C$ -analytique est décrit dans [24, p.4-10]). Pour tout  $U$  ouvert de  $X$ , considérons les biholomorphismes  $f : W \rightarrow W'$ , où  $W$  et  $W'$  sont des voisinages ouverts de  $U \times \{0\}$  dans  $X \times B$ , tels que ces biholomorphismes préservent les fibres (c'est à dire  $\pi \circ f(w) = \pi(w)$ ) et  $f|_{X_0} \equiv \text{Id}$ , où  $X_0 := \pi^{-1}(0)$ . Considérons alors  $\Xi(U)$  le quotient de l'ensemble de tels biholomorphismes  $f : W \rightarrow W'$  sous la relation d'équivalence  $\sim$  qui identifie deux tels biholomorphismes

$$f_1 : W_1 \rightarrow W'_1, \quad f_2 : W_2 \rightarrow W'_2$$

dès lors qu'il existe un ouvert  $V \subset W_1 \cap W_2$  contenant tous deux  $U \times \{0\}$  tel que  $f_1|_V = f_2|_V$ . Les groupes (pour la composition)  $\Lambda(U) := \Xi(U)/\sim$  forment un faisceau sur  $X$  que nous noterons naturellement  $\Lambda$ . Il est important de remarquer que  $\Lambda$  est un faisceau en groupes non-abéliens. L'intérêt de ce faisceau est décrit par DOUADY :

le groupe  $H^1(X, \Lambda)$  s'identifie à l'ensemble des germes de déformations de  $X$  au dessus de  $B \subset \mathbb{C}$ .

Soit  $U$  un ouvert de  $X$ . Le groupe non abélien  $\Lambda(U)$  est filtré : soit  $\Lambda_k(U)$  le groupe des biholomorphismes dans  $\Lambda(U)$  qui sont tangents à l'identité jusqu'à l'ordre  $k - 1$ . On a alors la filtration

$$\Lambda(U) = \Lambda(U)_1 \supset \Lambda(U)_2 \supset \dots$$

On obtient alors une filtration du faisceau  $\Lambda$ .

Il est montré dans [76] que les quotients successifs  $\Lambda_k/\Lambda_{k+1}$  sont isomorphes à  $\Theta$  le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $X$ , pour tout  $k \geq 1$ . Considérons la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \Lambda_k/\Lambda_{k+1} \simeq \Theta \rightarrow \Lambda/\Lambda_k \rightarrow \Lambda/\Lambda_{k-1} \rightarrow 0$$

et notons pour simplifier  $Q_k := \Lambda/\Lambda_{k+1}$ . Avec ces suites exactes, nous pouvons considérer la suite suivante extraite de la suite exacte longue associée en cohomologie

$$H^1(X, \Theta) \rightarrow H^1(X, Q_{k+1}) \rightarrow H^1(X, Q_k) \xrightarrow{\delta_k} H^2(X, \Theta)$$

Soit  $a_k \in H^1(X, Q_k)$  une déformation à l'ordre  $k$ . On appelle obstruction d'ordre  $k+1$  de  $a$  l'élément  $\delta_k a \in H^2(X, \Theta)$ . Si cette obstruction est représentée par la classe nulle, par exactitude, l'élément  $a$  est obtenu par l'image d'un élément  $a_{k+1}$  par l'application  $H^1(X, Q_{k+1}) \rightarrow H^1(X, Q_k)$ .

**Proposition 1.4.1.** *Pour un élément  $a \in H^1(X, Q_1) \simeq H^1(X, \Theta)$  l'obstruction à l'ordre 2 est donnée par la classe de  $[a \smile a] \in H^2(X, \Theta)$ .*

*Remarque.* Pour des exemples de familles verselles données par le cône quadratique défini par l'annulation du cup-crochet, le lecteur pourra consulter [35].

*Remarque.* Nous pouvons continuer les calculs pour trouver les obstructions supérieures et on obtient que l'obstruction à étendre une déformation à l'ordre 2 est donnée par le *triple produit de Massey* (voir [24]).

Notons que l'approche de DOUADY permet de construire des déformations formelles. La convergence de telles déformations formelles est assurée par un théorème d'ARTIN [4]. Puisque ce résultat sera utilisé par la suite, nous profitons de la fin de ce chapitre pour le rappeler.

**Théorème 1.4.2** (ARTIN, [4, Theorem 1.2]). *Soient  $m, n$  et  $N$  des entiers non nuls. Posons  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{y} := (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{C}^m$  et*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dots, f_N(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 0 \tag{1.1}$$

*un système d'équations analytiques (pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $f_i$  est une série convergente en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ ).*

*Supposons que  $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = (\hat{y}_1(\mathbf{x}), \dots, \hat{y}_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$  soit une solution formelle de (1.1), c'est-à-dire  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})) = 0$  et tel que les  $\hat{y}_i(\mathbf{x})$  soient des séries formelles sans termes constants. Alors, pour tout entier  $c$ , il existe des séries convergentes  $(y_1(\mathbf{x}), \dots, y_m(\mathbf{x})) =: \mathbf{y}(\mathbf{x})$  telles que*

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv \hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x}), \quad (\text{mod } \mathfrak{m}^c)$$

*où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ .*

Dans notre contexte, à partir de la déformation formelle construite par DOUADY (sous les hypothèses d'annulation des obstructions supérieures), le théorème d'ARTIN précédent permet d'affirmer l'existence d'une déformation convergente. En particulier, la caractérisation des obstructions (comme classes dans  $H^2(X, \Theta)$ ) donne le théorème suivant, initialement prouvé par KODAIRA, NIREMBERG et SPENCER.

**Théorème 1.4.3** ([76, Theorem 2.1]). *Si  $H^2(X, \Theta) = 0$  alors il existe une famille  $\mathcal{X} \rightarrow \Delta_\varepsilon$  complète et verselle, où  $\Delta_\varepsilon$  est une boule ouverte de  $\mathbb{C}^n$  de rayon  $\varepsilon > 0$  et  $n = \dim H^1(X, \Theta)$ .*



# CHAMPS ANALYTIQUES ET GROUPOÏDES

LE LANGAGE DES CHAMPS nous sera par la suite indispensable pour permettre l'étude globale des déformations de structures complexes des variétés  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Ce chapitre reprend donc les définitions et propriétés élémentaires de ces outils.

Si dans le précédent chapitre nous nous sommes intéressés aux déformations infinitésimales de structures complexes sur une variété complexe compacte  $X$ , la question qui apparaît naturellement est de savoir si l'on peut trouver un espace admettant une structure analytique (par exemple une structure de variété, d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique, etc.) paramétrant les différentes classes d'équivalence de structures complexes sur  $X^{\mathrm{diff}}$ , sous l'action du groupe  $\mathrm{Diff}^0(M)$  (*resp.* sous l'action du groupe  $\mathrm{Diff}^+(M)$  des difféomorphismes préservant l'orientation), c'est-à-dire l'espace de Teichmüller (*resp.* espace de modules de Riemann). En général pour une variété quelconque, cet espace n'admet pas de structure de variété complexe ni même de structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique. Nous verrons brièvement dans ce chapitre que l'obstruction à l'existence d'un tel espace est largement reliée à l'existence de groupes d'automorphismes non triviaux des structures complexes de  $X$ . Les champs analytiques, qui généralisent la notion d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique et celle d'orbifold, permettent (sous certaines hypothèses) de munir cet espace de Teichmüller d'une structure analytique.

Dans les premières sections de ce chapitre, nous n'allons pas spécifier le site sur lequel nous travaillons pour pouvoir appliquer ensuite les définitions dans les cadres analytiques et algébriques. L'intérêt de cette différentiation tardive nous permettra de travailler sur l'espace de Teichmüller, admettant une structure de champ analytique et parallèlement de considérer les champs quotients admettant une structure algébrique pour profiter de la vaste bibliographie issue de ce contexte. Notons aussi qu'introduire les champs algébriques nous permettra, plus tard, de pouvoir comparer le quotient GIT et le quotient champêtre de la variété des représentations (voir la [section 7.2](#)).

## 2.1 Définitions et motivation

Malgré la difficulté technique évoquée, nous nous efforcerons de rendre la lecture de ce chapitre plus agréable en agrémentant le texte d'un exemple simple sur lequel nous appliquerons quelques définitions et propriétés. Cet exemple sert en même temps de motivation à l'introduction de ce langage champêtre, sans lequel il n'admet pas de structure analytique.

Soit  $X$  une variété différentiable compacte de dimension paire, supposée connexe et orientable. On note  $\mathcal{I}(X)$  l'ensemble des structures presque complexes intégrables sur la variété  $X$ . Le groupe  $Diff(X)$  des  $C^\infty$ -difféomorphismes de  $X$  agit sur  $\mathcal{I}(X)$  via

$$Diff(M) \times \mathcal{I}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X), \quad (f, J) \rightarrow (df)^{-1} \circ J \circ df$$

On note  $Diff^0(X)$  (*resp.*  $Diff^+(X)$ ) le groupe des difféomorphismes de  $X$  isotopes à l'identité (*resp.* préservant l'orientation de  $X$ ).

**Définition 2.1.1.** On a évidemment  $Diff^0(X) \subset Diff^+(X)$  et on appelle *groupe des difféotopies de  $X$*  (souvent appelé *mapping class group*) de  $X$  le quotient  $Diff^+(X)/Diff^0(X)$  et on le notera  $\mathcal{MC}(X)$ .

Évidemment

**Définition 2.1.2.** L'espace de Teichmüller de  $X$ , noté  $\mathcal{T}(X)$ , est défini comme le quotient de  $\mathcal{I}(X)$  par l'action du sous-groupe  $Diff^0(X)$ .

L'espace de modules de Riemann de  $X$ , noté  $\mathcal{M}(X)$ , est défini comme le quotient de  $\mathcal{I}(X)$  par l'action du sous-groupe  $Diff^+(X)$ .

Remarquons que l'on a la relation  $\mathcal{M}(X) = \mathcal{T}(X)/\mathcal{MC}(X)$ .

La question principale évoquée est donc de munir ces espaces topologiques d'une structure analytique.

**Exemple des tores 2.C.** Dans le chapitre précédent nous avons décrit dans l'[exemple des tores 1.A](#) les déformations du tore de dimension 1. Il est bien connu que l'espace de Teichmüller du tore coïncide exactement avec  $\mathbb{H}$  et que la famille universelle est bien celle décrite dans cet exemple. Notons que l'espace de Teichmüller admet trivialement une structure de variété.

De plus, le groupe  $PSL_2(\mathbb{Z})$  agit sur  $\mathbb{H}$  via

$$PSL_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad \left( A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \mapsto A.\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

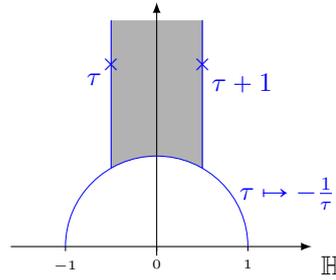
en préservant les structures complexes, c'est-à-dire que  $\mathbb{T}_\tau$  est biholomorphe à  $\mathbb{T}_{A.\tau}$ . De plus que  $PSL_2(\mathbb{Z})$  correspond au groupe des difféotopies du tore  $\mathcal{MC}(\mathbb{T})$ . On obtient de cette façon, l'espace de modules de Riemann  $\mathcal{M}(\mathbb{T}) = \mathbb{H}/PSL_2(\mathbb{Z})$ . Cet espace admet une structure d'orbifold et on a dans ce cas, répondu à la question en trouvant une structure analytique sur l'espace de modules de Riemann de  $\mathbb{T}$ . Pour une représentation de cet espace, on peut regarder l'action de  $PSL_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$  engendrée par les transformations

$$\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, \quad \tau \mapsto \tau + 1$$

On obtient alors le domaine fondamental décrit par la [figure 2.1](#).

Nous traitons maintenant le cas analogue des tores en dimension supérieure pour motiver l'intervention des champs.

**Exemple des tores 2.D.** De façon analogue à la dimension 1, on définit le tore  $\mathbb{T}^n$  de dimension  $n$  comme le quotient de  $C^n$  par un réseau  $2n$ -dimensionnel  $\Gamma$ . Un tel réseau est la donnée de  $2n$  vecteurs


 FIGURE 2.1 – Domaine fondamental dans  $\mathbb{H}$  sous l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ .

$\{\omega_1, \dots, \omega_{2n}\}$  (à coefficients complexes)  $\mathbb{R}$ -linéairement indépendants. Les changements de coordonnées de  $\mathbb{C}^n$  induisent une action du groupe  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  sur ces réseaux et on peut montrer de façon analogue à la dimension 1 que l'on peut toujours se ramener au cas

$$\omega_1 = e_1, \dots, \omega_n = e_n$$

où  $\{e_i\}$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Avec un peu de raisonnement sur les matrices (voir par exemple [61, §5.2] ou [76, p. 22-23]), on peut montrer que l'espace de Teichmüller est donné de façon analogue au cas de la dimension 1 par :

$$\mathcal{H}_n := \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(\Im Z) > 0\}$$

Et que la famille universelle est obtenue comme quotient de  $\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n$  par l'action engendrée par

$$(Z, z) \mapsto (Z, z + e_i) \quad \text{et} \quad (Z, z) \mapsto (Z, z + Z_i)$$

où  $Z_i$  est la  $i$ -ème ligne de  $Z$ . On note  $\mathcal{G}_n$  le groupe engendré par ces transformations.

Remarquons que si l'on change les  $2n$  vecteurs  $\{\omega_1, \dots, \omega_{2n}\}$  qui engendrent notre réseau par une autre base de  $\Gamma$ , on obtient deux tores biholomorphes. Autrement dit, on a une action de  $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$  sur  $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ . Cette action sur  $\mathcal{H}_n$  se réécrit de la façon suivante. Si  $A \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$ ,

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

et  $Z \in \mathcal{H}_n$  alors

$$A.Z = (PZ + Q)(RZ + S)^{-1}$$

Pour trouver l'espace de modules de Riemann, il faut donc faire le quotient de  $\mathcal{H}_n$  par  $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$  via cette action. Malheureusement, cette action est très loin de donner un quotient agréable. En fait, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, pour tous points  $T \in \mathcal{H}_n$ , les  $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z})$ -orbites sont denses dans  $\mathcal{H}_n$  (le lecteur intéressé pourra consulter [99, Theorem 3.11]).

Autrement dit, l'espace de modules de Riemann  $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$  n'est séparé en presque aucun de ses points et n'admet donc pas de structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique, ni même de structure orbifold. C'est ici que le langage champêtre intervient.

*Remarque.* Dans le cas des tores algébriques et plus généralement dans le cas des variétés abéliennes, la donnée d’une polarisation (ou polarisation principale) (c’est-à-dire la donnée d’un fibré ample sur une telle variété et donc d’un plongement dans un espace projectif) permet d’éviter les problèmes liés aux sauts de dimension des groupes d’automorphismes de ces variétés (voir fin de ce chapitre pour une explication du problème dans ce cas) et on peut alors dans ce cas construire l’espace de modules des variétés abéliennes polarisées sans faire appel au langage des champs. Le lecteur intéressé pourra consulter [11] pour plus de détails.

## 2.2 Introduction aux catégories fibrées en groupoïdes et aux champs

Les difficultés techniques des notions évoquées ici ont conduit l’écriture de ce chapitre à ne contenir (presque) aucune preuve. Le lecteur intéressé pourra consulter [92] ou [6] pour les détails/preuves de cette section.

### 2.2.1 Topologie de Grothendieck

On rappelle, pour des questions de notations, qu’une catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée d’une classe d’objet  $ob(\mathcal{C})$ , d’une classe de morphismes  $Hom_{\mathcal{C}}$  (telle que pour tout objet  $X \in ob(\mathcal{C})$  il existe l’identité  $Id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$ ), de deux applications  $dom$  et  $codom$  (qui donnent le domaine et codomaine d’un morphisme, c’est-à-dire  $f \in Hom_{\mathcal{C}}(dom(f), codom(f))$  avec  $dom(f)$  et  $codom(f)$  dans  $ob(\mathcal{C})$ ) et d’une application de composition des morphismes associative notée  $\circ$ .

Nous noterons généralement  $X \in ob(\mathcal{C})$  et  $f \in Hom_{\mathcal{C}}$  partout où cela sera nécessaire, la notation abusive  $X \in \mathcal{C}$  ou  $f \in \mathcal{C}$  sera utilisée lorsqu’il n’y aura pas d’ambiguïté. Nous pourrions aussi parfois écrire « soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  ».

**Définition 2.2.1.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Une *topologie de Grothendieck* sur  $\mathcal{C}$  est la donnée pour chaque objet  $U \in ob(\mathcal{C})$  d’une collection d’ensemble de flèches  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  dans  $Hom_{\mathcal{C}}$  appelée *recouvrement* de  $U$  telles que

- si  $f : V \rightarrow U$  est un isomorphisme, l’ensemble  $\{f\}$  est un recouvrement,
- si  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  est un recouvrement et  $g : V \rightarrow U$  une flèche quelconque alors, pour tout  $i \in I$ , les produits fibrés  $U_i \times_U V$  existent et  $\{p_i : U_i \times_U V \rightarrow V \mid i \in I\}$  est un recouvrement.
- si  $\{f_i : U_i \rightarrow U \mid i \in I\}$  est un recouvrement de  $U$  et si pour tout  $i \in I$  on a un recouvrement  $\{g_{i,j} : V_{i,j} \rightarrow U_i \mid j \in J_i\}$  de chaque  $U_i$  alors,  $\{f_i \circ g_{i,j} : V_{i,j} \rightarrow U \mid i \in I, j \in J_i\}$  est un recouvrement.

*Remarque.* La définition de topologie de Grothendieck donnée ici est plutôt la définition de pré-topologie de Grothendieck. Puisque une pré-topologie induit une topologie de Grothendieck nous éviterons les définitions superflues.

**Définition 2.2.2.** Un *site* est une catégorie  $\mathcal{C}$  munie d’une topologie de Grothendieck.

**Exemples 2.2.3.**

- La catégorie  $\mathfrak{Top}$  des espaces topologiques munie des familles d'immersions ouvertes (c'est-à-dire d'applications qui sont des homéomorphismes sur leurs images)  $U_i \rightarrow U$  avec  $\bigcup U_i \rightarrow U$  surjective pour chaque objet  $U \in ob(\mathfrak{Top})$  est un site.
- On verra aussi le site  $\mathfrak{Diff}$  des variétés différentiables et des applications lisses entre elles.
- Ou encore  $\mathfrak{Sch}$  la catégorie des schémas avec la topologie étale.
- L'exemple central de cette thèse est celui du site analytique  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  dont les objets sont les espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques et les morphismes sont les morphismes d'espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques (voir la [théorème 1.1.4](#)). Les familles de recouvrement sont les recouvrements pour la topologie standard (pas celle de Zariski).

### 2.2.2 Groupoïdes et catégories fibrées en groupoïdes

**Définition 2.2.4.** Un *groupoïde* est une petite catégorie (c'est-à-dire une catégories dont les classes d'objets et de morphismes sont des ensembles) dans laquelle tout morphisme est inversible.

**Lemme 2.2.5.** De façon équivalente, un groupoïde  $\mathbf{G}$  est la donnée de deux ensembles  $G_1$  (ensemble des flèches) et  $G_0$  (ensemble des objets) munit de cinq applications de structure  $(s, t, m, u, i)$  :

- les **applications source et cible**

$$s, t : G_1 \rightarrow G_0$$

qui associe à chaque flèche  $f \in G_1$  un objet source  $s(f) \in G_0$  et un objet cible  $t(f) \in G_0$ . On note plus simplement  $x \xrightarrow{f} y$  avec  $x = s(f)$  et  $y = t(f)$ ,

- l'**application de composition**

$$m : G_1 \times_{s, G_0, t} G_1 \rightarrow G_1$$

définie sur le produit fibré  $G_1 \times_{t, G_0, s} G_1 = \{(f, g) \in G_1 \times G_1 \mid t(f) = s(g)\}$  (noté  $G_1 \times_{G_0} G_1$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) qui associe au couple  $(f, g) \in G_2$  la composition  $m(f, g) = f \circ g \in G_1$ , notée parfois multiplicativement  $fg$ ,

- l'**application identité**

$$u : G_0 \rightarrow G_1$$

qui à tout objet  $x \in G_0$  associe l'application identité sur  $x$ ,  $x \xrightarrow{1_x} x \in G_1$ ,

- l'**application inverse**

$$i : G_1 \rightarrow G_0$$

qui à chaque flèche  $f \in G_1$  associe la flèche inverse  $t(f) \xrightarrow{f^{-1}} s(f)$ .

Ces applications doivent vérifier la commutativité des diagrammes :

- **d'identité**

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{u} & G_1 \\ & \searrow \text{Id}_{G_0} & \downarrow s \\ & & G_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{u} & G_1 \\ & \searrow \text{Id}_{G_0} & \downarrow t \\ & & G_0 \end{array}$$

- **de composition**

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 \times_{G_0} G_1 & \xrightarrow{m} & G_1 \\
 p_1 \downarrow & & \downarrow s \\
 G_1 & \xrightarrow{s} & G_0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G_1 \times_{G_0} G_1 & \xrightarrow{m} & G_1 \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow t \\
 G_1 & \xrightarrow{t} & G_0
 \end{array}$$

- *d'associativité de la composition*

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 \times_{G_0} G_1 \times_{G_0} G_1 & \xrightarrow{\text{Id}_{G_1} \times m} & G_1 \times_{G_0} G_1 \\
 m \times \text{Id}_{G_1} \downarrow & & \downarrow m \\
 G_1 \times_{G_0} G_1 & \xrightarrow{m} & G_1
 \end{array}$$

- *de composition par l'identité*

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{(u \circ s, \text{Id}_{G_1})} & G_1 \times_{G_0} G_1 \\
 \text{Id}_{G_1} \searrow & & \downarrow m \\
 & & G_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{(\text{Id}_{G_1}, u \circ t)} & G_1 \times_{G_0} G_1 \\
 \text{Id}_{G_1} \searrow & & \downarrow m \\
 & & G_1
 \end{array}$$

Un tel groupoïde sera noté

$$G_1 \times_{s,t} G_1 \xrightarrow{m} G_1 \xrightarrow[\overset{t}{s}]{} G_0 \xrightarrow{u} G_1 \xrightarrow{i} G_1$$

ou encore plus simplement  $G_1 \xrightarrow[\overset{s}{t}]{} G_0$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés sur les applications  $m, u$  et  $i$ .

**Exemple 2.2.6.** Il est intéressant dans une première lecture de penser à un groupoïde comme à une généralisation de la notion de groupe de la façon suivante.

Soit  $G$  un groupe dont on note  $\mu$  l'opération interne et  $e$  l'élément neutre. Considérons  $\mathbf{G}$  donné par  $G_1 = G$ ,  $G_0 = *$  et dont les flèches  $(m, u, i)$  sont définies par  $m = \mu$ ,  $u : * \mapsto e$  et  $i(g) = g^{-1}$  (les flèches  $s$  et  $t$  sont trivialement définies). Alors  $\mathbf{G}$  est un groupoïde.

L'intérêt de considérer les groupoïdes est que les groupes d'automorphismes dépendent du point auquel on se place (en comparaison avec le groupe vu comme groupoïde dans lequel il n'y a qu'un point). Les carquois (c'est-à-dire des graphes orientés) permettent d'illustrer cet apport de la notion de groupoïde par rapport à celle de groupe. Dans cette représentation, un groupe est un carquois avec un point  $*$  et un ensemble de flèche correspondant aux transformations données par  $G$ . De l'autre côté, un groupoïde peut avoir plusieurs objets  $x, y$  et  $z \in G_0$  et on les flèches sont celles encodées par  $G_1$ . On peut alors facilement se convaincre de la généralisation faite.

Plus tard, lorsque nous considérerons le groupoïde du champ de Teichmüller, nous verrons que le groupe d'automorphisme d'un point (c'est-à-dire de la paire  $(X, J)$  avec  $J$  une structure complexe sur  $X$  une variété différentiable) dans ce champ dépendra de ce point.

**Exemple 2.2.7.** Le groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  est le groupoïde  $\Pi_1(X)$  dont les objets sont les points de  $X$  et les flèches de  $x \in X$  à  $y \in X$  sont les classes d'homotopie  $[\gamma]$  de lacets  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ . C'est évidemment un groupoïde puisque tout morphisme  $\gamma$  est inversible simplement en posant  $\gamma^{-1} := \gamma \circ f$  où  $f(t) = 1 - t$ .

Remarquons que la définition de ce groupoïde est exempte du choix d'un point base dans  $X$ . Contrairement à la définition du groupe fondamental d'une variété qui ne peut se passer de cette donnée uniquement



FIGURE 2.2 – Carquois d'un groupe et d'un groupoïde.

lorsque  $X$  est connexe. De plus, le groupoïde fondamental contient la donnée des groupes fondamentaux de  $X$  en chacun de ses points. En effet, il est facile de se convaincre que l'on a :

$$\forall x \in X, \pi_1(X, x) \simeq \text{Aut}_{\Pi_1(X)}(x)$$

De plus, le théorème de Van-Kampen, démontré pour les groupes fondamentaux reste valable pour les groupoïdes fondamentaux.

*Remarque.* Un autre très bon exemple du gain obtenu en considérant les groupoïdes est très bien expliqué et détaillé dans [106]. Redonner cet exemple ici nous écarterait un peu trop de la route, mais nous pouvons tout de même en dire quelques mots. Si l'on considère le pavage du plan  $X := (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times 2\mathbb{Z})$ , son groupe de symétrie est relativement simple à expliciter. Il est composé des translations induites par le réseau  $\Gamma := \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$  et des involutions : réflexions par les lignes horizontales  $\mathbb{R} \times \{n\}$ , verticales  $\{m/2\} \times \mathbb{R}$  pour  $n$  et  $m$  entiers et les réflexions par les points du réseau  $\Gamma' := \frac{1}{2}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Cependant, les utilisations courantes de tels pavages sont toujours sur des parties bornées de ce pavage et lorsque l'on restreint le groupe de symétries à une telle partie, sa « taille » chute brusquement. Au contraire, en considérant le groupoïde des symétries de ce même pavage, les restrictions à des parties bornées contiennent encore toutes les symétries de cette partie. En d'autres termes, la restriction à un sous-espace  $B \subset X$  de l'action d'un groupe sur un espace  $X$  ne permet pas de rendre compte de toute l'action de  $G$  sur  $B$  dans  $X$ .

Pour continuer dans ce sens, on peut aussi se servir de l'exemple du groupoïde fondamental. Pour tout sous-espace  $A$  de  $X$ , on peut définir le groupoïde fondamental de  $A$  dans  $X$   $\Pi_1(X, A)$  comme la restriction de  $\Pi_1(X)$  aux éléments qui sont dans  $A$ . En suivant les définitions, on voit alors que les morphismes dans ce groupoïde sont les classes d'homotopie de lacets dans  $X$  ayant les deux extrémités dans  $A$ . Si l'on prend l'exemple de  $X := S^1 \times S^1$  et  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $x \in X$  suffisamment petit, on voit facilement que  $\pi_1(A) = \{0\}$  mais  $\Pi_1(X, \mathcal{U})$  contient encore toute l'information de  $\pi_1(X, x)$ .

**Exemple 2.2.8.** Un *groupoïde de translation* est le type de groupoïde qui nous intéressera majoritairement dans cette thèse, nous lui accordons une attention plus particulière. Une action  $\sigma$  d'un groupe  $(G, \cdot)$

sur un ensemble d'objets  $M$  (par exemple une  $G$ -variété) défini un groupoïde  $G \times M \xrightarrow[s]{t} M$  avec

$$s = p_2 : G \times M \rightarrow M, \quad s(g, m) = m, \quad t = \sigma : G \times M \rightarrow M, \quad t(g, m) = \sigma(g, m)$$

$$m : G \times M \times_{\sigma, M, p_2} G \times M \rightarrow G \times M, \quad m((g_1, m_1), (g_2, m_2)) = (g_2 \cdot g_1, m_1)$$

$$u : M \rightarrow G \times M, \quad u(m) = (e, m), \quad i : G \times M \rightarrow G \times M, \quad i(g, m) = (g^{-1}, m)$$

Vérifions sur cet exemple la commutativité des diagrammes

- d'identité :

$$\begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{u} & (e, m) \\ & \searrow \text{Id}_{G_0} & \downarrow p_2 \\ & & m \end{array} \quad \begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{u} & (e, m) \\ & \searrow \text{Id}_{G_0} & \downarrow \sigma \\ & & m \end{array}$$

- de composition :

Soient  $(m_1, g_1)$  et  $(m_2, g_2)$  dans  $G \times M$  tels que  $\sigma(g_1, m_1) = m_2$ . On a

$$\begin{array}{ccc} ((g_1, m_1), (g_2, m_2)) & \xrightarrow{m} & ((g_2 \cdot g_1), m_1) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ (g_1, m_1) & \xrightarrow{p_2} & m_1 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} ((g_1, m_1), (g_2, m_2)) & \xrightarrow{m} & (g_2 \cdot g_1, m_1) \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \sigma \\ (g_2, m_2) & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(g_2, m_2) = \sigma(g_2 \cdot g_1, m_1) \end{array}$$

- d'associativité de la composition :

Soient  $(m_1, g_1)$ ,  $(m_2, g_2)$  et  $(m_3, g_3)$  dans  $G \times M$  tels que  $\sigma(g_1, m_1) = m_2$  et  $\sigma(g_2, m_2) = m_3$ .

$$\begin{array}{ccc} ((g_1, m_1), (g_2, m_2), (g_3, m_3)) & \xrightarrow{\text{Id}_{G \times M} \times m} & ((g_1, m_1), (g_3 \cdot g_2, m_2)) \\ \text{Id}_{G_1} \times m \downarrow & & \downarrow m \\ ((g_1, m_1), (g_3 \cdot g_2, m_2)) & \xrightarrow{m} & (g_3 \cdot g_2 \cdot g_1, m_1) \end{array}$$

- de composition par l'identité :

$$\begin{array}{ccc} (g, m) & \xrightarrow{(u \circ p_2, \text{Id}_{G \times M})} & (u \circ s(g, m), (g, m)) = ((e, m), (g, m)) \\ & \searrow \text{Id}_{G_1} & \downarrow m \\ & & (g \cdot e, m) = (g, m) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} (g, m) & \xrightarrow{(\text{Id}_{G_1}, u \circ \sigma)} & ((g, m), u \circ \sigma(g, m)) = ((g, m), (e, \sigma(g, m))) \\ & \searrow \text{Id}_{G_1} & \downarrow m \\ & & (e \cdot g, m) = (g, m) \end{array}$$

Le groupoïde obtenu est appelé groupoïde de translation.

**Exemple des tores 2.E.** En reprenant le travail fait dans l'exemple du tore en dimension  $n$ , on définit le *groupoïde de Teichmüller* par

$$(\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n \xrightarrow[p_1]{p_1} \mathcal{H}_n$$

où  $\mathcal{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(\Im Z) > 0\}$  comme dans l'exemple des tores 2.D. Remarquons que l'image réciproque d'un point  $Z \in \mathcal{H}_n$  par  $p_1$  est le tore associé à  $Z$  identifié au groupe de translation de celui-ci. La flèche d'identité  $u : \mathcal{H}_n \rightarrow (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$  associe à une matrice  $Z \in \mathcal{H}_n$  la paire formée de  $Z$  et du morphisme identité du tore. Puisque  $s = p_1 = t$ , l'application inverse est simplement l'identité sur  $(\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$ . L'application de composition est induite par la composition de translations et est donc simplement donnée par l'addition.

De façon analogue on définit le *groupoïde de Riemann* comme le groupoïde induit par l'action de  $SL_{2n}(\mathbb{Z})$ , c'est-à-dire

$$SL_{2n}(\mathbb{Z}) \times (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n \xrightarrow[p_2]{p_2 \circ \sigma} \mathcal{H}_n$$

Les flèches  $s$  et  $t$  sont respectivement données par la projection  $p_2$  et par la composition de l'action de  $SL_{2n}(\mathbb{Z})$  par la projection  $p_2$ . L'application inverse est la même que pour le champ de Teichmüller concaténée avec la matrice identité dans  $SL_{2n}(\mathbb{Z})$  et l'application inverse est induite par l'inversion dans  $SL_{2n}(\mathbb{Z})$ . La composition est quant à elle définit de la façon suivante, si  $(A, Z, [a]_Z) \in SL_{2n}(\mathbb{Z}) \times (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$  et  $(B, A.Z, [b]_{A.Z}) \in SL_{2n}(\mathbb{Z}) \times (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$  de sorte que  $p_2 \circ \sigma((A, Z, [a]_Z)) = A.Z = p_2((B, A.Z, [b]_{A.Z}))$  alors

$$(B, [b]_{A.Z}, A.Z) \circ (A, [a]_Z, Z) = (BA, [a + b(RZ + S)]_Z, Z)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

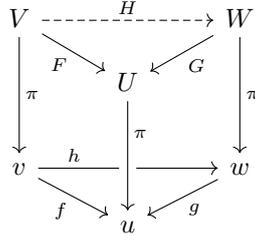
et  $[u]_Z$  désigne la classe d'équivalence du vecteur  $u \in \mathbb{C}^n$  par les transformations définies dans l'exemple des tores 2.D.

**Définition 2.2.9.** Un groupoïde  $G_1 \rightrightarrows G_0$  est un *groupoïde topologique* si  $G_0$  et  $G_1$  sont des espaces topologiques et dont les flèches  $s, t, m, u$  et  $i$  sont continues et  $s, t$  sont des applications ouvertes.

Nous définissons maintenant les catégories fibrées en groupoïdes pour pouvoir définir les champs.

**Définition 2.2.10.** Une *catégorie fibrée en groupoïdes* au dessus d'une catégorie  $\mathfrak{S}$  (abrégé  $\mathfrak{S}$ -CFG) est la donnée d'une catégorie  $\mathfrak{X}$  et d'un foncteur  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  satisfaisant :

- (*Existence de pullbacks*) Pour tout morphisme  $f : v \rightarrow u \in \mathfrak{S}$  et pour tout objet  $U \in \mathfrak{X}$  au dessus de  $u$ , c'est à dire  $\pi(U) = u$ , il existe  $V \in ob(\mathfrak{X})$  au dessus de  $v$  et  $F : V \rightarrow U$  tel que  $\pi(F) = f$ .
- (*Unicité à unique isomorphisme près*) Pour tout diagramme



avec  $f = \pi(F)$ ,  $g = \pi(G)$  et  $g \circ h = f$ , il existe un unique morphisme  $H : V \rightarrow W$  tel que  $\pi(H) = h$  tel que  $G \circ H = F$ .

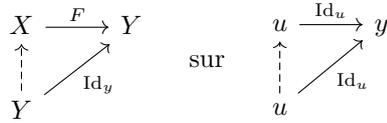
Pour la suite

*Remarque.* En remplaçant  $w$  par  $v$  et  $h$  par  $\text{Id}_v$  dans le diagramme précédent, on obtient l'unicité du pullback à unique isomorphisme près.

Voici le lemme qui justifie le nom de catégorie fibrée en groupoïdes.

**Lemme 2.2.11.** *Soit  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  une CFG. Pour tout objet  $u \in \mathfrak{S}$ , on note  $\mathfrak{X}(u)$  la sous-catégorie de  $\mathfrak{X}$  formée des objets  $\pi^{-1}(u)$  et des morphismes  $\pi^{-1}(\text{Id}_u : u \rightarrow u)$ , c'est à dire tout les morphismes  $F$  tels que  $\pi(F) = \text{Id}_u$ . Alors, pour tout  $u \in \mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{X}(u)$  est un groupoïde.*

*Démonstration.* Soit  $u \in \mathfrak{S}$  et  $F : X \rightarrow Y$  dans  $\mathfrak{X}(u)$ . Le foncteur  $\pi$  envoie le diagramme



Pour faire commuter le second diagramme, il faut nécessairement  $\text{Id}_u$  de sorte qu'il existe une unique flèche  $G : Y \rightarrow X$  de sorte que le diagramme de gauche commute. On obtient alors un inverse de  $F$ . On utilise l'associativité pour montrer que cet inverse est un inverse à droite et à gauche.  $\square$

**Définition 2.2.12.** Soit  $\mathfrak{S}$  un site et  $X$  un objet de  $\mathfrak{S}$ . On considère la catégorie  $\underline{X}$  dont les objets sont les morphismes  $f : Y \rightarrow X$  dans  $\mathfrak{S}$  et un morphisme entre deux objets  $f : Y \rightarrow X$  et  $f' : Y' \rightarrow X$  est un morphisme  $\phi$  (dans  $\mathfrak{S}$ ) tel que le diagramme



commute.

**Lemme 2.2.13.** *Soit  $\mathfrak{S}$  un site et  $X$  un objet de  $\mathfrak{S}$ . Le foncteur d'oubli*

$$\text{Oubli} : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{S}$$

(qui envoie  $f : Y \rightarrow X$  sur  $Y$  et le diagramme (2.1) sur  $\phi : Y \rightarrow Y'$ ) permet de munir  $\underline{X}$  d'une structure de  $\mathfrak{S}$ -CFG.

**Exemple 2.2.14.** Soit  $M$  une variété différentielle. On définit la catégorie  $\underline{M}$  dont les objets sont les applications lisses  $f : U \rightarrow M$  où  $U$  est un objet du site  $\mathfrak{D}iff$  et dont les morphismes entre  $f : U \rightarrow M$  et  $g : V \rightarrow M$  sont les applications  $\phi : U \rightarrow V$  telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow \phi & \nearrow g & \\ V & & \end{array}$$

soit commutatif. Le foncteur  $F : \underline{M} \rightarrow \mathfrak{D}iff$  qui à  $f : U \rightarrow M$  associe  $U$  et envoie le diagramme précédent sur l'application  $\phi : U \rightarrow V$  confère à  $\underline{M}$  une structure de  $\mathfrak{D}iff$ -catégorie fibrée en groupoïdes.

Une construction que nous utiliserons beaucoup par la suite est celle qui permet de construire une CFG à partir d'un groupoïde.

**Définition 2.2.15.** Soit  $\mathfrak{S}$  un site et

$$G_1 \times_{s,t} G_1 \xrightarrow{m} G_1 \xrightarrow{s} G_0 \xrightarrow{u} G_1 \xrightarrow{i} G_1$$

un groupoïde avec  $G_1, G_0 \in ob(\mathfrak{S})$  et des morphismes  $(s, t, m, u, i)$  des morphismes dans  $\mathfrak{S}$ . On définit la catégorie  $[G_1 \rightrightarrows G_0]^{CFG}$  de la façon suivante

- les objets au dessus de  $S \in \mathfrak{S}$  sont les morphismes  $f : S \rightarrow G_0$ ,
- un morphisme au dessus de  $\alpha : S \rightarrow S'$  entre  $f : S \rightarrow G_0$  et  $f' : S' \rightarrow G_0$  vérifiant  $f = f' \circ \alpha$  est la donnée de

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & G_1 \\ & \searrow f & \downarrow s \\ & & G_0 \\ & \swarrow \alpha & \downarrow t \\ S' & \xrightarrow{f'} & G_0 \end{array}$$

tel que les deux sous-diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & G_1 \\ & \searrow f & \downarrow s \\ & & G_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & G_1 \\ \searrow \alpha & & \downarrow t \\ S' & \xrightarrow{f'} & G_0 \end{array}$$

soient commutatifs.

Le morphisme identité de  $f : S \rightarrow G_0$  est le morphisme  $u \circ f : S \rightarrow G_1$ .

La composition se définit à l'aide de l'application  $m$  de la façon suivante. Si on considère une paire de morphismes composables, c'est à dire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & G_1 \\ \searrow \alpha & \searrow f & \downarrow s \\ S' & \xrightarrow{f'} & G_0 \\ \searrow \alpha' & \searrow \phi' & \downarrow t \\ S'' & \xrightarrow{f''} & G_0 \end{array}$$

tel que  $s \circ \phi = f$ ,  $s \circ \phi' = f'$ ,  $t \circ \phi = f' \circ \alpha$  et  $t \circ \phi' = f'' \circ \alpha'$  alors

$$t \circ \phi = f' \circ \alpha = s \circ \phi' \circ \alpha$$

et on peut donc composer  $\phi$  et  $\phi' \circ \alpha$  dans  $G_1$ . On pose alors  $\phi' \circ \phi := m(\phi, \phi' \circ \alpha)$ .

**Lemme 2.2.16.** *Le foncteur d'oubli*

$$\text{Oubli} : [G_1 \rightrightarrows G_0]^{CFG} \rightarrow \mathfrak{S}$$

(qui envoie  $f : S \rightarrow G_0$  sur  $S$  et  $\alpha$  sur lui même en oubliant la commutativité des diagrammes de la définition précédente) confère à  $[G_1 \rightrightarrows G_0]^{CFG}$  une structure de catégorie fibrée en groupoïdes.

**Définition 2.2.17.** Une 2-catégorie  $\mathfrak{C}$  est la donnée

- d'une classe d'objets  $ob(\mathfrak{C})$ ,
- pour chaque paire d'objets  $X, Y \in ob(\mathfrak{C})$  d'une catégorie  $\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$  dont les objets  $f : X \rightarrow Y$  seront appelés 1-morphismes et les morphismes  $\alpha : f \rightarrow g$  entre deux objets  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : X \rightarrow Y$  seront appelés les 2-morphismes et notés

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \Downarrow \alpha \\ \curvearrowleft \end{array} & Y \\ & g & \end{array}$$

et on appelle *composition verticale* la composition  $\beta \circ_v \alpha$  : de deux 2-morphismes  $\alpha : F \rightarrow F'$  et  $\beta : F' \rightarrow F''$ ,

- pour chaque triplet d'objets  $X, Y$  et  $Z \in ob(\mathfrak{C})$  d'un foncteur

$$(\circ, \circ_h) : \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Z)$$

et on appellera *composition*  $F \circ G$  l'image de  $F \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$  et  $G \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$  par ce foncteur et *composition horizontale*  $\beta \circ_h \alpha$  l'image de  $\alpha : F \rightarrow G$  et  $\beta : G \rightarrow H$  par ce foncteur.

Et ces données doivent satisfaire les propriétés suivantes :

- la classe  $ob(\mathfrak{C})$  muni des 1-morphismes et de leur composition forme une catégorie,
- la composition horizontale de 2-morphismes est associative,
- le 2-morphisme identité  $\text{Id}_{\text{Id}_X}$  est un neutre pour la composition horizontale.

**Définition 2.2.18.** Soit  $\mathfrak{S}$  un site. Un *morphisme*  $f$  entre deux catégories fibrées en groupoïdes  $\pi_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  et  $\pi_{\mathfrak{Y}} : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un foncteur  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  entre les catégories sous-jacentes tel que  $\pi_{\mathfrak{Y}} \circ F = \pi_{\mathfrak{X}}$ .

Étant donné deux morphismes de catégories fibrées en groupoïdes  $F, G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ , une *transformation naturelle entre deux morphismes de CFGs*  $\phi : F \Rightarrow G$  est une transformation naturelle  $\phi$  de  $F$  à  $G$  telle que la composition  $\pi_{\mathfrak{Y}} \circ \phi$  soit la transformation identité de  $\pi_{\mathfrak{X}}$ .

On note  $\text{HOM}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  la catégorie dont les objets sont les morphismes entre les CFGs  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  et dont les morphismes sont les transformations naturelles entre morphismes de CFGs.

**Exemple 2.2.19.** La catégorie  $\mathfrak{G}\text{roupoïdes}$  des groupoïdes est une 2-catégorie dont les objets sont les groupoïdes, les 1-morphismes sont les foncteurs entre groupoïdes et les 2-morphismes sont les transformations naturelles.

**Lemme 2.2.20.** *L'ensemble des catégories fibrées en groupoïdes au dessus d'un site  $\mathfrak{S}$  muni des morphismes et des 2-morphismes forme une 2-catégorie, notée  $\mathfrak{S}\mathfrak{t}\mathfrak{f}$ . De plus, pour toute paire de catégories fibrées en groupoïdes  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ , l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}\mathfrak{t}\mathfrak{f}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est un groupoïde.*

**Définition 2.2.21.** Soient  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  et  $\mathfrak{Z}$  trois  $\mathfrak{S}$ -catégories fibrées en groupoïdes. Soient  $f : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $g : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  deux morphismes de CFGs. Le produit fibré  $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}$  est la catégorie fibrée en groupoïdes dont

- les objets sont les triplets  $(Y, Z, \phi)$  où  $Y \in \text{ob}(\mathfrak{Y})$ ,  $Z \in \text{ob}(\mathfrak{Z})$  et  $\phi : f(Y) \rightarrow g(Z)$  est un isomorphisme au dessus de l'identité de  $\mathfrak{S}$ ,
- les morphismes entre  $(Y, Z, \phi)$  et  $(Y', Z', \phi')$  sont les couples de morphismes  $F : f(Y) \rightarrow f(Y')$  et  $G : g(Z) \rightarrow g(Z')$  au dessus du même morphisme dans  $\mathfrak{S}$  tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} f(Y) & \xrightarrow{F} & f(Y') \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ g(Z) & \xrightarrow{G} & g(Z') \end{array}$$

soit commutatif.

**Proposition 2.2.22.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux objets d'un site  $\mathfrak{S}$ . On a une équivalence entre les catégories  $\text{HOM}(\underline{X}, \underline{Y})$  et  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(X, Y)$ .*

Cette proposition est d'un intérêt fondamental pour ramener l'étude des morphismes entre CFGs à l'étude des morphismes entre objets classiques. En particulier, on peut parler de propriétés de morphismes entre CFGs en termes de propriétés sur les objets, sous certaines conditions.

**Définition 2.2.23.** Sur un site  $\mathfrak{S}$ , une propriété  $\mathbb{P}$  sur les morphismes de  $\mathfrak{S}$  est

- *préservée par changement de base* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  ayant la propriété  $\mathbb{P}$  et tout morphisme  $Y' \rightarrow Y$ , le morphisme  $Y' \times_Y X \rightarrow Y'$  à la propriété  $\mathbb{P}$ ,
- *locale* si pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  et pour tout recouvrement  $\{Y_i \rightarrow Y\}$  tel que les morphismes  $f_i : X \times_Y Y_i \rightarrow Y_i$  aient la propriété  $\mathbb{P}$  alors le morphisme  $f$  a la propriété  $\mathbb{P}$ .

**Proposition 2.2.24.** *Au dessus du site  $\mathfrak{S}\mathfrak{c}\mathfrak{h}$  (avec la topologie étale), les propriétés suivantes sont préservées par changement de base et sont locales : lisse, étale, séparé, quasi-séparé, propre, plat, localement de type fini. Au dessus du site  $\mathfrak{A}\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$  (avec la topologie usuelle), l'holomorphie est une propriété locale et préservée par changement de base.*

### 2.2.3 Pré-champs et champs

On va, dans un premier temps, donner une définition générale des pré-champs et des champs (essentiellement tirée de [100]), puis, on donnera une définition plus pratique en spécifiant un site géométrique  $(\mathfrak{A}\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{S}\mathfrak{c}\mathfrak{h}, \mathfrak{D}\mathfrak{i}\mathfrak{f}\mathfrak{f}, \dots)$  au dessus duquel on se placera. Le lecteur adepte de l'apprentissage inductif pourra consulter les définitions dans l'ordre inverse.

Commençons par donner une idée heuristique des pré-champs et des champs.

**Slogans.** Soit  $\mathfrak{S}$  un site et  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  une CFG.

- $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un pré-champ si on peut recoller les objets,
- $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un champ si on peut recoller les objets et les morphismes.

Voici une façon de formaliser ceci. Soient  $U \in \text{ob}(\mathfrak{S})$  et  $\{U_i \rightarrow U\}$  un recouvrement. Pour tout  $n$ -uplet d'indices  $i_1, \dots, i_n$ , on notera  $U_{i_1, \dots, i_n}$  le produit fibré  $U_{i_1} \times_U \dots \times_U U_{i_n}$ . On notera également  $pr_{j_1, \dots, j_k}$  la projection de  $U_{i_1, \dots, i_n}$  sur  $U_{j_1} \times_U \dots \times_U U_{j_k}$ .

**Définition 2.2.25.** Soient  $\mathfrak{S}$  un site,  $U \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ ,  $\{U_i \rightarrow U\}$  un recouvrement et  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  une CFG. Un objet avec une donnée de descente est la donnée d'une collection d'objets  $\xi_i \in \mathfrak{X}(U_i)$  et d'isomorphismes

$$\phi_{ij} : pr_1^* \xi_j \rightarrow pr_2^* \xi_i$$

dans  $\mathfrak{X}(U_{ij})$  qui satisfont la condition de cocycle

$$pr_{1,3}^* \phi_{ik} = pr_{1,2}^* \phi_{ij} \circ pr_{2,3}^* \phi_{jk} : pr_3^* \xi_k \rightarrow pr_1^* \xi_i$$

Un *morphisme* entre deux objets avec des données de descente  $(\xi_i, \phi_{ij})$  et  $(\eta_i, \psi_{ij})$  est la donnée d'une collection de morphismes  $\alpha_i : \xi_i \rightarrow \eta_i \in X(U_i)$  tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} pr_2^* \xi_j & \xrightarrow{pr_2^* \alpha_j} & pr_2^* \eta_j \\ \phi_{ij} \downarrow & & \downarrow \psi_{ij} \\ pr_1^* \xi_1 & \xrightarrow{pr_2^* \alpha_i} & pr_2^* \eta_i \end{array}$$

commutent.

On définit ainsi pour chaque objet  $U \in \mathfrak{S}$  et recouvrement  $\mathcal{U} := \{U_i \rightarrow U\}$  une catégorie, notée  $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , dont les objets sont les objets avec une donnée de descente  $(\xi_i, \phi_{ij})$  et les flèches sont les morphismes définis entre eux.

*Remarque.* Cette catégorie ne dépend pas du choix des produits fibrés  $U_{ij}$  et  $U_{ijk}$ , dans le sens où pour deux choix différents, les catégories obtenues sont équivalentes.

On va maintenant construire un foncteur  $F : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{U})$ . Pour tout  $\xi \in \mathfrak{X}(U)$ , on construit un objet avec une donnée de descente  $F(\xi)$  sur un recouvrement  $\mathcal{U} = \{f_i : U_i \rightarrow U\}$  de la façon suivante. Les objets  $\{\xi_i\}$  sont les pullbacks  $f_i^* \xi$  et les isomorphismes

$$\phi_{ij} : pr_2^* f_j^* \xi \rightarrow pr_1^* f_i^* \xi$$

sont les isomorphismes qui viennent du fait que  $pr_1^* f_i^* \xi$  et  $pr_2^* f_j^* \xi$  sont des pullbacks de  $\xi$  sur  $U_{ij}$ . De plus, si l'on a une flèche  $\alpha : \xi \rightarrow \eta$  dans  $\mathfrak{X}(U)$ , on obtient des flèches  $f_i^* \alpha : f_i^* \xi \rightarrow f_i^* \eta$  qui fournissent des flèches entre les objets avec donnée de descente définis à partir de  $\xi$  et de  $\eta$ .

*Remarque.* La définition est plus agréable si l'on a le diagramme suivant sous les yeux

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_{ijk} & \xrightarrow{pr_{2,3}} & U_{jk} \\
 & pr_{1,2} \swarrow & \downarrow pr_{1,3} & \searrow & \downarrow \\
 U_{ij} & \xrightarrow{\quad} & U_j & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & U_{ik} & \xrightarrow{\quad} & U_k \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 U_i & \xrightarrow{\quad} & U & & 
 \end{array}$$

**Définition 2.2.26.** Un objet avec une donnée de descente  $(\xi_i, \phi_{ij})$  dans  $\mathfrak{X}(\{U_i \rightarrow U\})$  est dit *effectif* s'il est isomorphe à l'image d'un objet de  $\mathfrak{X}(U)$  par  $F$ .

On dira plus souvent que la donnée de descente est effective.

Un objet avec une donnée de descente  $(\xi_i, \phi_{ij})$  dans  $\mathfrak{X}(\mathcal{U})$ , où  $\mathcal{U} = \{f_i : U_i \rightarrow U\}$ , est effective si il existe un objet  $\xi \in \mathfrak{X}(U)$  et des flèches  $\xi_i \rightarrow \xi$  au dessus de  $f_i : U_i \rightarrow U$  tels que pour tout  $i$  et tout  $j$ , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 pr_2^* \xi_j & \xrightarrow{\phi_{ij}} & pr_1^* \xi_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \xi_j & & \xi_i \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & \xi & 
 \end{array}$$

commutent.

On peut donc voir assez facilement qu'un pré-champ  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un champ si, et seulement si, tous les objets avec une donnée de descente sont effectifs.

Puisque l'on travaillera souvent à équivalence près de CFG (ou plutôt à Morita équivalence près de groupoïdes, voir la [théorème 2.3.8](#)), il reste à voir que cette définition est stable sous cette relation.

**Définition 2.2.27.** Soit  $\mathcal{S}$  un site. Une CFG  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un

- *pré-champ* si pour tout objet  $U \in ob(\mathfrak{S})$ , pour tout objets  $\xi$  et  $\eta \in \mathfrak{X}(U)$  et tout recouvrement  $\{U_i \rightarrow U\}$ , l'application

$$\text{Hom}_{\mathfrak{X}(U)}(\xi, \eta) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{X}(\mathcal{U})}(F(\xi), F(\eta))$$

est une bijection (autrement dit,  $F$  est un foncteur pleinement fidèle).

- *champ* si pour tout objet  $U \in ob(\mathfrak{S})$  et tout recouvrement  $\{U_i \rightarrow U\}$ , le foncteur  $F : \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{U})$  est une équivalence.

**Proposition 2.2.28** ([100, Proposition 4.12]). *Soient  $\mathcal{S}$  un site,  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  et  $\pi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  deux CFGs ainsi que  $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  une équivalence de CFGs. Alors, pour tout objet  $U \in ob(\mathfrak{S})$  et tout recouvrement  $\mathcal{U} = \{U_i \rightarrow U\}$ , on a un foncteur  $F_{\mathcal{U}} : \mathfrak{X}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{Y}(\mathcal{U})$  défini par*

$$F_{\mathcal{U}}((\xi_i, \phi_{ij})) = (F(\xi_i), F(\phi_{ij})), \quad F_{\mathcal{U}}(\alpha_i) = F(\alpha_i)$$

et on a que  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un pré-champ (resp. champ) si, et seulement si,  $\pi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{S}$  est un pré-champ (resp. champ).

Nous donnons maintenant une caractérisation équivalente des (pré)-champs sur les sites géométriques qui nous intéresseront par la suite.

Remarquons d'abord que sur les sites  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{Sch}$  ou  $\mathfrak{Diff}$ , les recouvrements  $\{f_i : U_i \hookrightarrow U\}$  sont des immersions ouvertes et on peut alors écrire  $U|_{U_i}$  pour désigner  $f_i^*U$ .

**Définition 2.2.29.** Soit  $\mathfrak{S} = \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{Sch}$  ou  $\mathfrak{Diff}$ . Un pré-champ est une  $\mathfrak{S}$ -CFG  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  satisfaisant pour tout  $U \in \text{ob}(\mathfrak{S})$  et tout recouvrement ouvert  $\{U_i\}$  de  $U$  :

- (Recollement de morphismes) soient deux objets  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  et une famille  $(\phi_i : X|_{U_i} \rightarrow Y|_{U_i})$  d'applications telle que  $\phi_i|_{U_i \cap U_j} = \phi_j|_{U_i \cap U_j}$ , il existe un unique morphisme  $\phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{X}(U)}(X, Y)$  telle que  $\phi|_{U_i} = \phi_i$  pour tout  $i$ .

Un champ (au dessus de  $\mathfrak{S}$ ) est un pré-champ satisfaisant :

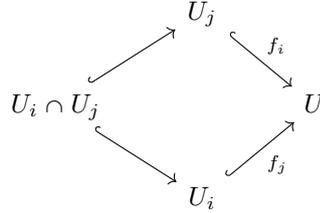
- (Recollement d'objets) Soient  $X_i \in \mathfrak{X}(U_i)$  pour tout  $i$  et  $\phi_{ij} : X_j|_{U_i \cap U_j} \rightarrow X_i|_{U_i \cap U_j}$  dans  $\mathfrak{X}(U_i \cap U_j)$  satisfaisant la condition de cocycle

$$\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$$

pour tout triplet  $(i, j, k)$ , alors il existe un unique objet  $X \in \mathfrak{X}(U)$  avec des isomorphismes  $\phi_i : X|_{U_i} \rightarrow X_i$  tels que  $\phi_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$ .

L'axiome de recollement des objets est appelée *donnée de descente* et lorsque celle-ci est vérifiée pour une CFG  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$ , on dit que la descente est effective.

*Remarque.* Notons que la notation  $X|_{U_{i_1 \dots i_n}}$  ne permet pas de différencier les inclusions



Mais, si l'on note  $f_{ijk,ij} : U_i \cap U_j \cap U_k \hookrightarrow U_i \cap U_j$  (resp.  $f_{ijk,i} : U_i \cap U_j \cap U_k \hookrightarrow U_i$ ), on a les transformations naturelles suivantes :

$$\Phi_{ijk,ij,i} : f_{ijk,ij}^* f_{ij,i}^* \rightarrow f_{ijk,i}^*$$

et on devrait alors écrire les conditions de cocycle en tenant compte de ces transformations (voir [43, Remark 1.2.1] pour un calcul complet).

**Exemple 2.2.30.** Soit  $G$  un groupe de Lie. On définit la catégorie  $BG$  dont les objets sont des  $G$ -fibrés principaux  $P \rightarrow U$  (dans le site  $\mathfrak{Diff}$ ) et dont les morphismes  $(P \rightarrow U) \rightarrow (P' \rightarrow V)$  sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{f} & P' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U & \longrightarrow & V
 \end{array}$$

tels que  $f$  soit  $G$ -équivariant. Le foncteur d'oubli

$$\pi : BG \rightarrow \mathfrak{D}\text{iff}, \quad (P \rightarrow U) \mapsto U$$

confère à  $BG$  une structure de champ que l'on appelle champ classifiant de  $G$ .

**Lemme 2.2.31.** *Soit  $X$  un objet d'un site  $\mathfrak{S}$ . Alors la CFG*

$$\text{Oubli} : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{S}$$

*est un champ.*

**Lemme 2.2.32.** *La CFG  $[G_1 \rightrightarrows G_0]^{CFG}$  associée à un groupoïde  $G_1 \rightrightarrows G_0$  est un pré-champ.*

**Lemme 2.2.33** (Lemme de YONEDA). *Soit  $\mathfrak{X}$  un champ au dessus d'un site  $\mathfrak{S}$  et  $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$ . Alors, le foncteur*

$$\text{HOM}(\underline{X}, \mathfrak{X}) \rightarrow \mathfrak{X}(X)$$

*est une équivalence de catégories.*

**Exemple 2.2.34.** On se place sur le site  $\mathfrak{D}\text{iff}$ . Soit  $G$  un groupe de Lie et  $M \in \text{ob}(\mathfrak{D}\text{iff})$ . Par le lemme de Yoneda, on a une bijection entre le groupoïde  $\text{HOM}(\underline{M}, BG)$  et le groupoïde  $BG(M)$  des  $G$ -fibrés principaux sur  $M$ .

**Théorème 2.2.35.** *Soient  $\mathfrak{S}$  un site et  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  et  $\mathfrak{Z}$  trois champs au dessus de  $\mathfrak{S}$ . Soient  $F : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $G : \mathfrak{Z} \rightarrow \mathfrak{X}$  deux morphismes entre ces champs. Le produit fibré  $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}$  existe et est défini pour tout  $X \in \text{ob}(\mathfrak{S})$  par*

$$\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Z}(X) = \{(f, g, \phi) \mid f : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{Y}, g : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{Z}, \phi : F \circ f \simeq G \circ g\}$$

## 2.2.4 Champification

Il arrive que la donnée de descente d'un pré-champ  $\mathfrak{X}$  ne soit pas effective, autrement dit  $\mathfrak{X}$  n'est pas un champ. Il existe une construction qui permet de *champifier* une CFG, c'est à dire de construire une autre CFG équivalente, à un 2-morphisme près, à la première et qui respecte les conditions d'un champ.

**Définition 2.2.36.** Soit  $\mathfrak{X}_0$  une catégorie fibrée en groupoïdes au dessus d'un site  $\mathfrak{S}$ . Une *champification* de  $\mathfrak{X}_0$  est un champ  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  avec un morphisme de CFG  $p : \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}$  tel que pour tout champ  $\mathfrak{Y}$ , le foncteur  $\text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{Y})$  induit par la pré-composition par  $p$  soit une équivalence de catégories.

**Théorème 2.2.37.** *Soit  $\mathfrak{X}_0$  une catégorie fibrée en groupoïdes au dessus d'un site  $\mathfrak{S}$  et soient  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{X}'$  deux champifications de  $\mathfrak{X}_0$  données par des morphismes  $F : \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}$  et  $G : \mathfrak{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}'$ . Alors il existe un isomorphisme (unique à un 2-isomorphisme près)  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}'$  et un 2-isomorphisme  $f \circ F \xrightarrow{\alpha} G$ .*

La construction du foncteur de champification est un peu lourde et la preuve peu instructive. L'idée de preuve est assez similaire à la faisceautisation d'un pré-faisceau. Étant donné un pré-champ  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$ , on construit une catégorie  $\mathfrak{X}'$  dont les objets sont les données de descente. Plus précisément, soit  $S \in \mathfrak{S}$ ,

on définit la catégorie  $\mathfrak{X}'$  dont les objets sont les couples  $(\mathcal{U}, R)$  où  $\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \rightarrow U\}$  est un recouvrement de  $U \in \text{ob}(\mathfrak{S})$  et  $R = (\{X_i\}, \{\phi_{ij}\})$  est une donnée de descente relative à  $\mathcal{U}$ . Si

$$(\mathcal{U}, R) = (\{\phi_i : U_i \rightarrow U\}, (\{X_i\}, \{\phi_{ij}\})) \text{ et } (\mathcal{V}, S) = (\{\psi_i : V_i \rightarrow V\}, (\{Y_i\}, \{\psi_{ij}\}))$$

sont deux tels objets, on définit les morphismes  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}'}((\mathcal{U}, R), (\mathcal{V}, S))$  entre eux comme l'ensemble des couples  $(f, \{\alpha_{ij}\})$  où  $f : U \rightarrow V$  et  $\alpha_{ij} : X_i|_{U_i \times_V V_j} \rightarrow Y_j$  telles que pour tout  $i, j, k, l$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_i|_W & \xrightarrow{\alpha_{ik}} & Y_k|_W \\ \phi_{ij} \downarrow & & \downarrow \psi_{kl} \\ X_j|_W & \xrightarrow{\alpha_{jl}} & Y_l|_W \end{array}$$

commute, où  $W := (U_i \times_U U_j) \times_V (V_k \times_V V_l)$ .

On montre ensuite que  $\mathfrak{X}'$  est bien un champ et que l'on a un isomorphisme naturel  $\mathfrak{X} \simeq \mathfrak{X}'$ .

Dans certains cas particuliers, par exemple au dessus du site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  ou  $\mathfrak{Sch}$ , le foncteur de champification peut être construit en termes de toseurs (voir la thèse [29] de C. FROMENTEAU pour le cas  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ ).

**Définition 2.2.38.** Si  $G_1 \rightrightarrows G_0$  est un groupoïde, on note  $[G_1 \rightrightarrows G_0]$  la champification de la CFG associée.

**Définition 2.2.39.** Soit  $\pi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  un champ. Un *atlas* de  $\mathfrak{X}$  est un groupoïde  $G_1 \rightrightarrows G_0$  tel que  $[G_1 \rightrightarrows G_0]$  soit équivalent à  $\mathfrak{X}$ .

**Exemples 2.2.40.**

- (*Champ classifiant d'un groupe de Lie*) Dans l'[théorème 2.2.30](#) le champ  $BG$  est équivalent au champ  $[G \times pt \rightrightarrows pt]$ .
- (*Champ quotient*) On se place au dessus du site  $\mathfrak{Diff}$  (voir [43, Exemple 2.5] pour le cas où le site est  $\mathfrak{Top}$ ). Soit  $G$  un groupe agissant sur une variété différentiable  $M$ . On définit le champ quotient  $[M/G] = [G \times M \rightrightarrows M]$  (confère [théorème 2.2.8](#)) dont les objets sont les  $G$ -fibrés principaux  $P \rightarrow U$ , avec  $U \in \text{ob}(\mathfrak{Diff})$  munis d'une application  $G$ -équivariante  $f : P \rightarrow M$  et dont les morphismes  $(P \rightarrow U, f) \rightarrow (P' \rightarrow V, f')$  sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & V \end{array}$$

tels que  $\alpha$  soit  $G$ -équivariante et vérifie  $f' \circ \alpha = f$ . De la même façon, le foncteur oublie

$$\pi : [M/G] \rightarrow \mathfrak{Diff}, \quad (P \rightarrow U, f) \mapsto U$$

confère à  $[M/G]$  une structure de champ.

**Exemple des tores 2.F.** Notons  $\mathcal{X}_n$  l'espace total de la famille universelle du tore, c'est-à-dire  $\mathcal{X}_n := (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$ . Le champ

$$[\mathcal{X}_n \rightrightarrows \mathcal{H}_n]$$

est la catégorie dont les objets sont les applications holomorphes  $f : S \rightarrow \mathcal{H}_n$  où  $S$  est un espace  $\mathbb{C}$ -analytique et les morphismes entre  $f : S \rightarrow \mathcal{H}_n$  et  $f' : S' \rightarrow \mathcal{H}_n$  sont les applications holomorphes  $\alpha : S' \rightarrow S$  telles qu'il existe  $\phi : S \rightarrow (\mathcal{H}_n \times \mathbb{C}^n)/\mathcal{G}_n$  vérifiant :

$$\begin{cases} p_1 \circ \phi = f \\ p_1 \circ \phi = f' \circ \alpha \end{cases}$$

En particulier, en utilisant les produits fibrés, on peut voir les objets de ce champ comme les familles de tores au dessus d'un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $S \in \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  :

$$\begin{array}{ccc} S \times_{f, \mathcal{H}_n, p_1} \mathcal{X}_n & \longrightarrow & \mathcal{X}_n \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ S & \xrightarrow{f} & \mathcal{H}_n \end{array}$$

et les morphismes comme les applications entre familles telles que la composition de pullback soit respectée, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X}_n & \longleftarrow & S \times_{f, \mathcal{H}_n, p_1} \mathcal{X}_n & \xlongequal{\quad} & S \times_{\alpha, S', p_1} (S' \times_{\mathcal{H}_n} \mathcal{X}_n) & \longrightarrow & S' \times_{f', \mathcal{H}_n, p_1} \mathcal{X}_n & \longrightarrow & \mathcal{X}_n \\ \downarrow p_1 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathcal{H}_n & \xleftarrow{f} & S & \xlongequal{\quad} & S & \xrightarrow{\alpha} & S' & \xrightarrow{f'} & \mathcal{H}_n \end{array}$$

*Remarques.*

- La propriété universelle de la famille  $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  implique que cette catégorie est équivalente à la catégorie formée de toutes les familles de  $\mathbb{T}_n$  et dont les morphismes sont les applications entre elles. C'est cette notion que les champs de Teichmüller et de modules de Riemann vont essayer de généraliser dans le cas où il n'existe pas de famille universelle par exemple.
- La remarque précédente reste valide si l'on change le site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  pour le site  $\mathfrak{Diff}$ .
- De la même façon, on peut construire le champ associé au groupoïde de Riemann

$$[\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{X}_n \rightrightarrows \mathcal{H}_n]$$

et obtenir les résultats analogues.

## 2.3 Structures algébriques et analytiques sur les champs

Nous allons maintenant spécifier les deux sites principaux sur lesquels nous allons travailler pour pouvoir munir les champs de structures analytiques/algébriques.

### 2.3.1 Champs algébriques et champs d'Artin

On se place maintenant sur le site  $\mathfrak{Sch}_{\acute{e}t}$  munit de la topologie étale (les résultats sont aussi valables pour la topologie  $fppf$ ). Rappelons que un recouvrement étale d'un schéma  $X$  est la donnée d'une famille de morphismes  $f_i : U_i \rightarrow X$  entre schémas tels que les  $f_i$  soient des morphismes étales (morphismes plats et non-ramifiés).

**Définition 2.3.1.** Soit  $S$  un schéma. Un *espace algébrique* au dessus de  $S$  est un faisceau d'ensembles  $\mathfrak{X} : (\mathfrak{Sch}/S)^{op} \rightarrow \mathit{Set}$  tel que

- il existe un schéma  $X \in \mathfrak{Sch}_{\text{ét}}$  et un morphisme  $\underline{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  surjectif et étale,
- la diagonale  $\Delta : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  est représentable.

Puisque les espaces algébriques ne sont pas des objets centraux dans cette thèse, nous laissons le lecteur se référer à [57] pour plus de détails sur ces espaces et les notions délicates qui leur sont reliées.

**Définition 2.3.2.** Soit  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  un morphisme entre catégories fibrées en groupoïdes au dessus du site  $\mathfrak{Sch}$ . Le morphisme  $f$  est dit *représentable* si pour tout objet  $X$  de  $\mathfrak{Sch}$  et pour tout morphisme entre catégorie fibrée en groupoïdes  $\phi : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  il existe un espace algébrique  $M$  tel que le produit fibré  $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \underline{X}$  soit équivalent à la catégorie  $\underline{M}$ .

**Définition 2.3.3.** Un champ  $\mathfrak{X}$  au dessus de  $\mathfrak{Sch}$  est un *champ d'Artin* si

- sa diagonale  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  est représentable, séparée et quasi-compacte,
- il existe un objet  $U$  de  $\mathfrak{Sch}$  et un morphisme surjectif et lisse  $\underline{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ .

**Exemples 2.3.4.**

- Un groupe algébrique lisse  $G$  agissant sur un schéma séparé  $X$ , alors  $[X/G]$  est un champ d'Artin.
- $BG$  avec  $G$  lisse est un champ d'Artin.

**Proposition 2.3.5.** Soit  $\mathfrak{X}$  un champ d'Artin. Alors  $\mathfrak{X}$  admet un atlas, c'est-à-dire qu'il existe des espaces algébriques  $R$  et  $U$  et des morphismes  $(s, t, m, u, i)$  de  $\mathfrak{Sch}$  avec  $s$  et  $t$  lisses tels que le groupoïde  $R \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} U$  soit un atlas de  $\mathfrak{X}$ .

## 2.3.2 Groupoïdes analytiques, champs analytiques

On se place désormais au dessus du site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  des espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques muni de la topologie usuelle des recouvrements par des ouverts analytiques.

**Définition 2.3.6.** Un *groupoïde analytique* est un groupoïde

$$X_1 \times_{s,t} X_1 \xrightarrow{m} X_1 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{s} \\ \xrightarrow[t]{} \end{smallmatrix} X_0 \xrightarrow{u} X_1 \xrightarrow{i} X_1$$

avec  $X_1$  et  $X_0$  des espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques séparés et dont les cinq applications  $s, t, m, u$  et  $i$  sont holomorphes et lisses.

**Définition 2.3.7.** Soient  $\mathbf{X} = X_1 \rightrightarrows X_0$  et  $\mathbf{Y} = Y_1 \rightrightarrows Y_0$  deux groupoïdes analytiques. Un *morphisme de groupoïdes analytiques* entre  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  est un couple d'applications holomorphes  $f : X_0 \rightarrow Y_0$  et  $F : Y_1 \rightarrow Y_1$  telles que les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & Y_1 \\ s_{\mathbf{X}} \downarrow & & \downarrow s_{\mathbf{Y}} \\ X_0 & \xrightarrow{f} & Y_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{F} & Y_1 \\ t_{\mathbf{X}} \downarrow & & \downarrow t_{\mathbf{Y}} \\ X_0 & \xrightarrow{f} & Y_0 \end{array}$$

commutent.

De plus, si  $f$  est surjective et si les diagrammes sont cartésiens alors  $(f, F)$  est appelé *morphisme de Morita*

**Définition 2.3.8.** Deux groupoïdes  $\mathbf{X} = X_1 \rightrightarrows X_0$  et  $\mathbf{Y} = Y_1 \rightrightarrows Y_0$  sont dits *Morita équivalents* si il existe un troisième groupoïde  $\mathbf{Z} = Z_1 \rightrightarrows Z_0$  muni de deux morphismes de Morita

$$\begin{cases} f_{\mathbf{X}} : Z_0 \rightarrow X_0 \\ F_{\mathbf{X}} : Z_1 \rightarrow X_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f_{\mathbf{Y}} : Z_0 \rightarrow Y_0 \\ F_{\mathbf{Y}} : Z_1 \rightarrow Y_1 \end{cases}$$

L'intérêt de cette équivalence est qu'elle passe en une équivalence entre les champs associés :

**Proposition 2.3.9.** *Si  $\mathbf{X} = X_1 \rightrightarrows X_0$  et  $\mathbf{Y} = Y_1 \rightrightarrows Y_0$  sont deux groupoïdes Morita équivalents alors, les champs  $[X_1 \rightrightarrows X_0]$  et  $[Y_1 \rightrightarrows Y_0]$  sont catégoriquement équivalents.*

**Définition 2.3.10.** Soit  $\mathfrak{X}$  un champ au dessus de  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ . On dit que  $\mathfrak{X}$  est un *champ analytique* s'il existe un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $X$  et un morphisme  $\phi : \underline{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  représentable, surjectif et lisse.

**Proposition 2.3.11.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un champ analytique. Alors, il existe un groupoïde analytique  $X_1 \rightrightarrows X_0$  tel que le champ associé soit équivalent à  $\mathfrak{X}$ .*

*Démonstration.* Par définition, il existe un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $X_0$  et un morphisme  $\phi : \underline{X}_0 \rightarrow \mathfrak{X}$  représentable, surjectif et lisse. Par représentabilité du morphisme, il existe un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $X_1$  tel que  $\underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \simeq \underline{X}_1$ . Notons  $p_i : \underline{X}_1 \simeq \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \rightarrow \underline{X}_0$ ,  $i = 1, 2$ , la projection sur le  $i$ -ème facteur.

On définit maintenant les flèches de la façon suivante

- On pose  $s : p_1(\text{Id}_{X_1})$  et  $t = p_2(\text{Id}_{X_1})$ .
- L'application  $u$  se définit simplement par

$$u : \underline{X}_0 \rightarrow \underline{X}_1, \quad f \mapsto (f, f, \text{Id}_{\phi(f)})$$

- En identifiant  $\underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0$  avec  $(\underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0) \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0$ , on a une équivalence naturelle de catégorie

$$\begin{aligned} (\underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0) \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 &\xrightarrow{\sim} \underline{X}_1 \times_{p_1, \underline{X}_0, p_2} \underline{X}_1, \\ ((f, g, \phi), h, \psi) &\longmapsto ((f, g, \phi), (g, h, \psi)) \end{aligned}$$

On définit alors  $m$  par

$$\begin{aligned} m : \underline{X}_1 \times_{p_1, \underline{X}_0, p_2} \underline{X}_1 \simeq \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 &\longrightarrow \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \simeq \underline{X}_1 \\ ((f, g, \phi), (g, h, \psi)) &\longmapsto (f, h, \psi \circ \phi) \end{aligned}$$

- Finalement, on définit l'application  $i$  par

$$\begin{aligned} i : \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \simeq \underline{X}_1 &\longrightarrow \underline{X}_0 \times_{\mathfrak{X}} \underline{X}_0 \simeq \underline{X}_1, \\ (f, g, \phi) &\longmapsto (g, f, \phi^{-1}) \end{aligned}$$

On vérifie ensuite que  $X_1 \rightrightarrows X_0$  définit bien un groupoïde dont le champ (analytique) associé est équivalent à  $\mathfrak{X}$ .  $\square$

On aura l'utilité des notions de sous-champs ouverts/fermés.

**Définition 2.3.12.** Soit  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  un champ analytique. Un sous-champ ouvert  $\mathfrak{X}'$  (*resp.* fermé) de  $\mathfrak{X}$  est une sous-catégorie strictement pleine<sup>1</sup> telle que  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  soit un champ analytique et telle que  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  soit une immersion ouverte (*resp.* fermée).

Ainsi que de la notion d'espace topologique sous-jacent à un champ analytique ou algébrique.

**Définition 2.3.13.** L'espace topologique associé à un groupoïde analytique  $X_1 \rightrightarrows X_0$  (*resp.* algébrique) est l'espace topologique obtenu comme quotient de  $X_0$  par la relation d'équivalence induite par  $X_1$ .

La notion de composante connexe d'un groupoïde fera donc référence à la composante connexe de l'espace topologique associé.

Évidemment, deux groupoïdes Morita équivalents ont des espaces topologiques associés sont homéomorphes.

## 2.4 Champ de Teichmüller

Revoyons un peu plus en détail la construction du champ de Teichmüller. Reprenons les notations du début du chapitre :  $X$  est une variété différentiable de dimension  $2n$ , connexe et orientée. On note  $\mathcal{I}(X)$  l'ensemble des structures complexes sur  $X$ . Si  $V$  est un ouvert de  $\mathcal{I}(X)$  on définit le champ de Teichmüller  $\mathcal{T}_V(X)$  de  $X$  restreint à  $V$  comme étant la catégorie dont

- les objets sont les déformations marquées de  $X$  au sens de la [théorème 1.1.7](#) du chapitre précédent telles que les structures complexes sur chacune des fibres soient encodées par un élément  $J \in V$ , on appellera ces déformations des *V-familles de X*. C'est à dire des morphismes lisses  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  entre des objets du site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  tels que les fibres soient des variétés complexes compactes toutes diffeomorphes à  $X^{diff}$ . On supposera de plus que  $\mathcal{X} \rightarrow B$ , avec  $\mathcal{X}$  et  $B$  vus comme espaces réels analytiques, est diffeomorphe (donné par le marquage) à un fibré de fibre  $X^{diff}$  et de groupe structural  $Diff^0(X)$ ,
- les morphismes sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où les isomorphismes  $f^* \mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$  induisent un  $Diff^0(X)$ -isomorphisme de la structure de fibré.

**Lemme 2.4.1.** Pour tout ouvert  $V \subset \mathcal{I}(X)$ , la catégorie  $\mathcal{T}_V(X)$  munie du foncteur d'oubli

$$Oubli : \mathcal{T}_V(X) \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$$

est une CFG.

*Démonstration.* On vérifie l'existence de pullbacks et leur unicité à unique isomorphisme près.

---

1. c'est-à-dire,  $\text{Hom}_{\mathfrak{X}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathfrak{X}}(X, Y)$  pour tout couple d'objets  $X, Y \in \text{ob}(\mathfrak{X}')$  et si un objet  $Y$  de  $\mathfrak{X}$  est isomorphe à un objet  $X$  dans  $\mathfrak{X}'$  alors  $Y \in \text{ob}(\mathfrak{X}')$

Soit  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow B$  une  $V$ -famille et  $f : B' \rightarrow B$  un morphisme entre espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques. On peut construire la famille pullback  $f^*\mathcal{X} \rightarrow B'$  et on obtient l'existence de pullbacks. L'unicité des pullbacks est essentiellement donné par la propriété universelle du produit fibré. Considérons trois  $V$ -familles  $\pi_i : \mathcal{X} \rightarrow B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ainsi que des applications  $f : B_2 \rightarrow B_1$ ,  $g : B_3 \rightarrow B_1$  et  $h : B_2 \rightarrow B_3$  qui vérifient

- $\mathcal{X}_2$  est biholomorphe à  $f^*\mathcal{X}_1$ ,
- $\mathcal{X}_3$  soit biholomorphe à  $g^*\mathcal{X}_1$ ,
- et  $f = g \circ h$ .

On résume la situation dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X}_2 & & & & \mathcal{X}_3 \\
 \downarrow \pi_2 & \searrow & & \swarrow & \downarrow \pi_3 \\
 & & \mathcal{X}_1 & & \\
 & & \downarrow \pi_1 & & \\
 B_2 & \xrightarrow{h} & & \xrightarrow{\quad} & B_3 \\
 \searrow f & & \downarrow & & \swarrow g \\
 & & B_1 & & 
 \end{array}$$

Par propriété du produit fibré, on a un biholomorphisme naturel entre  $h^*\mathcal{X}_3 \simeq h^*(g^*\mathcal{X}_1)$  et  $(g \circ h)^*\mathcal{X}_1$ . Par hypothèses, on a  $(g \circ h)^*\mathcal{X}_1 = f^*\mathcal{X}_1$  qui est biholomorphe à  $\mathcal{X}_2$ . Finalement on a donc un biholomorphisme entre  $h^*\mathcal{X}_3$  et  $\mathcal{X}_2$ . L'unicité de cette application est donné par la propriété universelle du produit fibré.  $\square$

**Proposition 2.4.2.** *Pour tout ouvert  $V \subset \mathcal{I}(X)$ , la catégorie  $\mathcal{T}_V(X)$  muni du foncteur d'oubli*

$$\text{Oubli} : \mathcal{T}_V(X) \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$$

*est un champ.*

*Démonstration.* On doit maintenant montrer que la CFG  $\text{Oubli} : \mathcal{T}_V(X) \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  vérifie le recollement des morphismes ainsi que la donnée de descente.

Soient  $\pi_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow B$  et  $\pi_2 : \mathcal{X}_2 \rightarrow B$  deux  $V$ -familles, un recouvrement  $\{U_i\}$  de  $B$  ainsi qu'une famille d'application  $\phi_i : \mathcal{X}_1|_{\pi_1^{-1}(U_i)} \rightarrow \mathcal{X}_2|_{\pi_2^{-1}(U_i)}$  telles que  $\phi_i$  et  $\phi_j$  soient égales sur l'intersection  $\pi_1^{-1}(U_i \cap U_j)$ . Cette famille d'application se recolle évidemment pour donner un biholomorphisme entre  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$ .

Soit  $\pi_i : \mathcal{X}_i \rightarrow U_i$  une collection de  $V$ -familles et un cocycle  $\phi_{ij}$  donnant des isomorphismes entre  $\pi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$  et  $\pi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ . On peut alors construire la  $V$ -famille  $\mathcal{X} \rightarrow S$  donnée par  $\mathcal{X} := (\bigsqcup_i \mathcal{X}_i) / \sim$  avec  $\sim$  la relation d'équivalence donnée par le cocycle  $\{f_{ij}\}$ . On conclut que la donnée de descente est effective et donc que  $\mathcal{T}_V(X) \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  est un champ comme annoncé.  $\square$

Comme nous l'avons vu dans l'exemple de l'espace de modules de Riemann des tores de dimensions  $n \geq 2$ , il existe des variétés pour lesquelles cet espace ou l'espace de Teichmüller n'admettent pas de structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique. Cependant, sous des hypothèses sur les groupes d'automorphismes des structures complexes de la variété étudiée, le champ de Teichmüller admet une structure de champ analytique. Autrement dit, il existe un groupoïde analytique  $G_1 \rightrightarrows G_0$ , avec  $G_0$  et  $G_1$  des espaces  $\mathbb{C}$ -analytiques (et dont les flèches sont des applications holomorphes) tel que le champ de Teichmüller soit équivalent au champ  $[G_1 \rightrightarrows G_0]$ . Plus précisément,

**Théorème 2.4.3** (MEERSSEMAN [74, Theorem 2.13]). *Soit  $X$  une variété différentiable orientée compacte de dimension paire et  $V$  un ouvert de  $\mathcal{I}(X)$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour toute structure complexe  $J \in V$ , la dimension du groupe d'automorphisme de la variété complexe  $(X, J)$  soit bornée par  $n$ . Alors, l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}_V(X)$  admet une structure de champ analytique.*

La structure de champ analytique (sous l'hypothèse du théorème précédent) du champ de Teichmüller est donnée dans [74] par la construction d'un atlas donné par le groupoïde d'holonomie généralisé. Même si nous ne reviendrons pas sur les détails de la construction de cet atlas, la sous-section qui suit reprend les principales idées.

### 2.4.1 Construction de l'atlas

La principale difficulté de la construction d'un atlas pour le champ de Teichmüller réside dans les sauts possibles de la fonction  $h^0(J) = \dim H^0((X, J), \Theta_J)$  où  $\Theta_J$  est le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $(X, J)$ . Le première étape de construction de cet atlas est de se placer dans le cas où cette fonction est constante en utilisant la notion d'homotopie entre déformations. Dans ce contexte, on construit un atlas en recollant les espaces de Kuranishi par les "bons morphismes". Dans le cas général, on stratifie  $\mathcal{I}(X)$  en sous-espaces sur lesquelles  $h^0(J)$  est constante et on recolle ces différentes strates en épaississant les strates de petite dimension afin d'obtenir des strates de même dimension que l'on recollera pour former un atlas du champ recherché.

On voit déjà assez clairement dans cette explication grossière l'intervention de l'hypothèse de l'existence d'une borne à la fonction  $h^0$  sur  $V$ .

Nous proposons maintenant de donner une idée de la construction du champ de Teichmüller  $\mathcal{T}_V(X)$  d'une variété  $X$  sous l'hypothèse que  $\text{Aut}^1(X, J) := \text{Aut}(X) \cap \text{Diff}^0(X)$  soient des groupes triviaux pour tout  $J \in V$ . Remarquons que cette condition implique immédiatement  $h^0(J) = 0$  pour tout  $J \in V$ . L'avantage de ce cadre tient au fait que dans ce cas l'action de  $\text{Diff}^0(x)$  sur  $V$  est libre et définit un feuilletage sur  $V$ . De plus, les espaces de Kuranishi fournissent des sections localement transverses à ce feuilletage.

Soit  $V$  un ouvert de  $\mathcal{I}(X)$ . Prenons  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un recouvrement de  $V$  par des ouverts  $U_\alpha$  tels que chaque  $U_\alpha$  soit analytiquement isomorphe à un produit  $K_\alpha \times H$ , où  $K_\alpha$  est l'espace de Kuranishi d'un point  $J_\alpha \in U_\alpha$  et  $H$  est un complémentaire de  $H^0((X, J_\alpha), \Theta_\alpha)$  (avec  $\Theta_\alpha := \Theta_{J_\alpha}$ ) dans  $A^{0,0}(T^{1,0}(X, J_\alpha))$  (voir [74] pour plus de détails). On définit alors le groupoïde de Teichmüller de  $X$  (restreint à  $V$ ) comme la catégorie dont les objets sont les points de  $\bigsqcup K_\alpha$  et les morphismes sont les compositions d'applications  $\phi_{\alpha,\beta} : K_\alpha \cap K_\beta \subset K_\alpha \rightarrow K_\beta \cap K_\alpha \subset K_\beta$  uniquement définies comme applications vérifiant la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap U_\beta & \xrightarrow{\text{Id}} & U_\alpha \cap U_\beta \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_\alpha \cap K_\beta \subset K_\alpha & \xrightarrow{\phi_{\alpha,\beta}} & K_\beta \cap K_\alpha \subset K_\beta \end{array}$$

L. MEERSSEMAN montre [74, Proposition 7.5] que ce groupoïde est analytique et même étale et définit un atlas du champ de Teichmüller  $\mathcal{T}_V(X)$ .

Passons maintenant au cas où la fonction  $h^0$  n'est pas constante sur  $V$ .

*Remarque.* Le problème de saut de la fonction  $h^0$  est du à l'apparition de fibres biholomorphes (plus précisément, si  $h^0$  est non-constante, on peut stratifier l'espace de Kuranishi par la fonction  $h^1$ . On obtient alors que la restriction de la famille de Kuranishi à une strate non-maximale est une famille localement triviale. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [72]) le long d'un espace  $\mathbb{C}$ -analytique de dimension strictement positive dans l'espace de Kuranishi et est la raison pour laquelle l'espace de Kuranishi n'est pas toujours une section localement transverse au feuilletage induit par l'action de  $Diff^0$  sur  $\mathcal{I}_0$ .

**Définition 2.4.4.** Soient  $J_1$  et  $J_2$  deux points dans  $\mathcal{I}(X)$ . Une homotopie entre  $J_1$  et  $J_2$  est la donnée d'un chemin lisse  $I$  dans  $\mathcal{I}(X)$  d'extrémités  $J_1$  et  $J_2$  sur lequel la fonction  $h^0$  est constante.

On peut montrer [74, Proposition 5.6] que pour chaque composante connexe de  $V$ , il n'y a qu'un nombre dénombrable de classes d'homotopie de structures complexes. Cette notion permet alors de construire un feuilletage de  $V$ . Il faudrait encore raffiner un peu ce feuilletage en découpant chaque feuille en sous-espaces sur lesquels le complémentaire  $H$  utilisé précédemment peut être le même pour chaque espace de Kuranishi des points de cette feuille. L'idée est ensuite de construire comme précédemment le groupoïde d'holonomie associé à chaque feuille et de recoller ensuite ces groupoïdes.

**Exemple des tores 2.G.** Le champ

$$[\mathcal{X}_n \rightrightarrows \mathcal{H}_n]$$

est le champ de Teichmüller du tore de dimension  $n$  (voir [74]).

On peut aussi montrer que le quotient géométrique de ce quotient est isomorphe au quotient  $SL_{2n}(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{C})$

## 2.5 Espace de modules de Riemann

De la même manière que l'on a construit le champ de Teichmüller, pour tout ouvert  $V \subset \mathcal{I}(X)$ , on peut construire le champ des modules de Riemann  $\mathcal{M}_V(X)$  d'une variété  $X$ . Comme précédemment, soit  $X$  est une variété différentiable de dimension  $2n$ , connexe et orientée. On définit le champ de modules de Riemann  $\mathcal{M}_V(X)$  de  $X$  restreint à  $V$  comme étant la catégorie dont

- les objets sont les  $V$ -familles de  $X$ .
- les morphismes entre  $V$ -familles sont les diagrammes cartésiens

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}' & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Lemme 2.5.1.** Pour tout ouvert  $V \subset \mathcal{I}(X)$ , la catégorie  $\mathcal{M}_V(X)$  muni du foncteur d'oubli

$$Oubli : \mathcal{M}_V(X) \rightarrow \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$$

est un champ.

**Théorème 2.5.2** (MEERSSEMAN [74, Theorem 2.14]). Soit  $X$  une variété compacte complexe et  $V \subset \mathcal{I}(X)$ . Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que pour toute structure complexe  $J \in V$ , la dimension du groupe

d'automorphisme de la variété complexe  $(X, J)$  associée soit bornée par  $n$ . Alors, l'espace de modules de Riemann  $\mathcal{M}(X)$  admet une structure de champ analytique.

*Remarque.* Pour un exemple où la dimension des groupes d'automorphismes n'est pas bornée, le lecteur pourra consulter le cas des surfaces de Hirzebruch [74, p. 908].

La construction de l'atlas est sensiblement la même que pour le champ analytique de Teichmüller.

**Exemple des tores 2.H.** Le champ

$$[\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{Z}) \times \mathcal{X}_n \rightrightarrows \mathcal{H}_n]$$

est le champ de modules de Riemann du tore de dimension  $n$  (voir [74]).

# INTERLUDE

---

LA COHÉSION entre les deux premiers chapitres et les deux prochains n'étant pas des plus apparentes, nous prenons le temps ici d'expliquer, comme cela à été brièvement fait dans l'introduction, pourquoi ce changement radical intervient.

L'objet de cette thèse est donc d'étudier les déformations de la structure complexe de la variété quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret co-compact sans torsion, et en particulier trouver un atlas pour le champ de Teichmüller (ou au moins pour un sous-champ de celui-ci) de ces variétés. Les travaux [31] de GHYS ont permis d'explicitier l'espace de Kuranishi de ces variétés et l'auteur montre que pour déformer la structure complexe il suffit de déformer une certaine  $(G, X)$ -structure. Plus précisément, il s'agit de la  $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}))$ -structure que'admettent ces quotients. Cette structure, ainsi que ces déformations, mérite que l'on s'y attarde, et c'est exactement ce que propose le chapitre suivant.

Nous verrons au cours de ce chapitre que le principe d'Ehresmann-Thurston donne une construction pratique des déformations de cette  $(G, X)$ -structure au moyen de la déformation du *morphisme d'holonomie*. Pour comprendre comment déformer ce morphisme, il est indispensable de s'intéresser à l'espace dans lequel il vit. Cet espace est appelé *variété de représentation* (de  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$ ) et est le sujet principal du [chapitre 4](#).

De plus, la détermination d'un groupoïde analytique du champ de Teichmüller présuppose, comme nous l'avons évoqué précédemment, la connaissance des espaces de Kuranishi de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  et des variétés obtenues par déformations de la structure complexe. Nous devons pour cela montrer que la famille de structures complexes obtenues par déformation de l'holonomie de cette  $(G, X)$ -structure est complète et cela nécessite que l'on regarde l'espace tangent à la variété de représentation qui s'identifie, par la construction de WEYL, au groupe  $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  des cocycles de  $\Gamma$  à valeur dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  (de  $\Gamma$ -module structure induite par  $\rho$ ). La variété des représentations n'étant pas lisse, nous aurons aussi besoin de regarder les obstructions aux ordres supérieurs et il nous faudra donc considérer le second groupe de cohomologie (de  $\Gamma$  dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ). Nous aurons aussi besoin d'outils d'algèbre cohomologique pour conclure à la complétude de cette famille et il est donc naturel de revenir sur cette théorie cohomologique dans le même chapitre que celui de la variété de représentation.



# STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES ET LEURS DÉFORMATIONS

DANS LE PROGRAMME ERLANGEN [56], F. KLEIN proposa que les géométries classiques soient définies par les propriétés d'un espace  $X$  invariant sous l'action transitive d'un groupe de Lie  $G$ . Motivé par ces travaux, la notion de  $(G, X)$ -structures fut pour la première fois introduite par Charles Ehresmann dans le texte « Sur les espaces localement homogènes » [27]. Même si cette terminologie de  $(G, X)$ -structure est cependant apparue plus tard dans les travaux de THURSTON, l'idée générale est la même. Si on se donne un objet géométrique  $M$  et un  $G$ -espace homogène  $X$ , la comparaison entre la géométrie locale de  $M$  et celle de  $X$  sous l'action d'un sous groupe de  $G$  permet d'obtenir beaucoup d'informations sur  $M$ . Plus précisément, une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  (de même dimension que  $X$ ) est la donnée d'un atlas sur  $M$  à valeurs dans  $X$  dont les changements de cartes sont des restrictions d'éléments de  $G$ . Dans ce contexte, si  $G$  agit sur  $X$  en préservant une structure géométrique, alors la donnée d'une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  fournit l'existence d'une structure géométrique sur  $M$  localement induite par celle sur  $X$ . Remarquons que si  $X$  est une variété complexe et que  $G$  est un sous-groupe des biholomorphismes de  $X$ , alors toute variété différentiable  $M$  munie d'une  $(G, X)$ -structure est automatiquement munie d'une structure complexe.

De façon équivalente, une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  est entièrement déterminée par la donnée d'une  $G$ -représentation hol du groupe fondamental de  $M$ , appelée *holonomie*, et d'une application dev qui réalise un difféomorphisme local entre le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  et  $X$  qui est de plus hol-équivariante, que l'on appelle *application développante*. Cette équivalence permet, dans bon nombre de cas, d'apporter des éléments de réponse aux deux questions suivantes :

- Si  $M$  est une variété et  $X$  un  $G$ -espace homogène, peut-on trouver un espace, noté  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ , dont chaque point correspond à la donnée d'une classe d'équivalence (pour la relation d'isotopie) de  $(G, X)$ -structures sur  $M$  ?
- Sous quelles hypothèses une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  permet-elle d'identifier  $M$  à un quotient de  $X$  par un sous-groupe de  $G$  ?

Une première réponse partielle à la première question est apportée par le principe d'Ehresmann-Thurston (voir la [théorème 3.2.1](#) ou [97]) qui affirme que si  $(\text{dev}, \text{hol})$  est une paire développante, c'est-

à-dire la donnée d'une application développante  $\text{dev}$  et d'un morphisme d'holonomie  $\text{hol}$ , alors tout morphisme  $\text{hol}'$  suffisamment proche de  $\text{hol}$  est aussi l'holonomie d'une autre  $(G, X)$ -structure. De plus, les deux  $(G, X)$ -structures sont isotopes si, et seulement si, ces deux morphismes sont conjugués par un élément de  $G$ . On remarque alors que l'étude de l'espace  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$  est largement relié, au moins localement, à celle de la variété de caractères  $\text{Hom}(\pi_1(M), G)/G$ .

L'application développante  $\text{dev}$ , correspondant à une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$ , donne de bons renseignements sur la deuxième question. En particulier, lorsque  $X$  est simplement connexe, si  $\text{dev}$  est un difféomorphisme (global) alors  $M$  est difféomorphe au quotient de  $X$  par l'image de son holonomie. Dans ce cas, cette  $(G, X)$ -structure est dite *complète*. Nous profiterons de ce chapitre pour énoncer les résultats de THOLOZAN concernant la complétude des  $(G \times G, G)$ -structures. Une question naturellement reliée à la notion de complétude de la  $(G, X)$ -structure d'une variété  $M$  est celle d'*admissibilité de l'holonomie*, c'est-à-dire la propriété de l'action du groupe d'holonomie sur  $X$ . En effet, si ce groupe agit librement et de façon totalement discontinue sur  $X$  alors on peut former le quotient et toujours sous l'hypothèse de simple connexité de  $X$ , on peut montrer que ce quotient s'identifie bien à  $M$ . En particulier, lorsque l'on cherche à savoir si un morphisme suffisamment proche de l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure complète est encore l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure complète, un critère d'admissibilité peut permettre de conclure. Pour aller dans ce sens, les contributions de GUÉRITAUD et KASSEL [50] et [42], qui font suite au critère de propriété de KOBAYASHI et BENOIST, nous permettront de justifier pleinement l'existence de cette thèse.

Signalons aussi que si  $X$  est une variété riemannienne  $G$ -homogène ( $G$  préserve la métrique riemannienne), le théorème de HOPF-RINOW assure que toutes les  $(G, X)$ -structures sur variétés compactes sont complètes (voir [94, Proposition 1.2]).

Dans ce chapitre, nous reviendrons donc dans un premier temps sur les concepts et définitions inhérents aux  $(G, X)$ -structures. Puis, nous aborderons la question de la déformation de l'holonomie, celle de complétude d'une telle structure géométrique et nous finirons par énoncer les résultats concernant les critères de propriété d'une action qui nous seront essentiels pour la suite.

### 3.1 $(G, X)$ -Structures

Les principales références sous-jacentes aux notions élémentaires qui suivront est [97] et [10].

Commençons par une observation qui donnera une idée de la généralisation souhaitée. Une variété est un espace topologique localement modelé sur  $\mathbb{R}^n$ . La définition de *localement modelé* dépend du contexte mais de façon général, elle correspond à la donnée d'un ensemble  $\mathcal{G}$  d'applications de recollement des cartes locales de  $\mathbb{R}^n$ . Pour que cette notion soit exploitable, il faut que cet ensemble  $\mathcal{G}$  soit constitué d'homéomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  et qu'il satisfasse quelques propriétés élémentaires :

- $\mathcal{G}$  doit être stable par restriction. Si  $g \in \mathcal{G}$  alors la restriction de  $g$  à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenu dans le domaine de définition de  $g$  doit être dans  $\mathcal{G}$ ,
- $\mathcal{G}$  doit être stable par passage à l'inverse. Si  $g$  est dans  $\mathcal{G}$ , alors il en est de même pour  $g^{-1}$ ,
- $\mathcal{G}$  doit être stable par composition. Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux éléments de  $\mathcal{G}$  tels que  $g_1 \circ g_2$  soit bien défini alors il doit appartenir à  $\mathcal{G}$ ,

- être dans  $\mathcal{G}$  est une propriété locale. Si  $U := \bigcup_A U_\alpha$  est un recouvrement d'un ouvert  $U$  et si  $g : U \rightarrow V$  est un homéomorphisme local tel que chacune de ses restrictions à  $U_\alpha$  soit dans  $\mathcal{G}$  pour tout  $\alpha \in A$  alors  $g$  est aussi dans  $\mathcal{G}$ .

Ces hypothèses munissent  $\mathcal{G}$  d'une structure de pseudo-groupe. Une variété possédant une telle structure est appelée une  $\mathcal{G}$ -variété.

### Exemples 3.1.1.

- Les variétés de classe  $C^r$  (*resp.*  $C^\infty$ ) sont de telles variétés pour  $\mathcal{G}$  défini comme le pseudo-groupe des  $C^r$ -difféomorphismes (*resp.*  $C^\infty$ -difféomorphismes) locaux de  $\mathbb{R}^n$ . Lorsque  $r \geq 1$ , on est ramené à la définition usuelle de *variété différentiable*.
- Si  $\mathcal{G}$  est un sous-groupe du groupe affine de  $\mathbb{R}^n$ , une  $\mathcal{G}$ -variété est généralement appelé variété affine.

On peut aussi chercher à généraliser l'espace sur lequel les cartes sont modelées et remplacer  $\mathbb{R}^n$  par un espace topologique  $X$ . Par exemple en remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{C}^n$  et en prenant  $\mathcal{G}$  comme sous-groupe de biholomorphismes locaux de  $\mathbb{C}^n$ , on retrouve la définition usuelle de variété complexe. C'est exactement cette généralisation que les  $(G, X)$ -structures permettent.

Dans le cas particulier d'un groupe  $G$  agissant sur une variété différentiable  $X$  (souvent supposée connexe), nous pouvons définir le pseudo-groupe des restrictions d'éléments de  $G$  agissant sur des ouverts de  $X$ .

**Définition 3.1.2.** Soient  $X$  une variété différentiable connexe et  $G$  un sous-groupe du groupe des difféomorphismes analytiques de  $X$ . On dit que  $G$  agit *analytiquement* si pour toute paire  $(g, h)$  d'éléments de  $G$  telle qu'il existe un ouvert non vide  $U$  de  $X$  avec  $g|_U = h|_U$  alors  $g = h$ .

**Définition 3.1.3.** Soient  $X$  une variété différentiable connexe et  $G$  un sous-groupe du groupe des difféomorphismes de  $X$  agissant analytiquement. Une  $(G, X)$ -structure sur un espace topologique  $M$  est la donnée d'un atlas  $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  avec  $\bigcup_A U_\alpha$  un recouvrement de  $M$  par des ouverts et  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow X$  des homéomorphismes sur leurs images et tel que les changements de cartes

$$\phi_{\alpha\beta} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

où l'on suppose  $U_\alpha \cap U_\beta$  connexe, soient des restrictions d'éléments de  $G$ .

Une variété  $M$  munie d'une  $(G, X)$ -structure sera appelée  $(G, X)$ -variété.

**Définition 3.1.4.** Soient  $M$  et  $M'$  deux  $(G, X)$ -variétés. Un  $(G, X)$ -morphisme  $f : M \rightarrow M'$  est un difféomorphisme local qui est donné dans les cartes de la  $(G, X)$ -structure par l'action d'un élément de  $G$ .

**Exemple 3.1.5.** En dimension 3, THURSTON conjectura que toute variété fermée de dimension 3 admette une décomposition en sous-variétés telle que chacune d'elles admette une  $(G, X)$ -structure parmi une liste des 8 structures géométriques riemanniennes maximales. Parmi ces 8 structures, on peut mentionner les suivantes :

- géométrie Euclidienne :  $X = \mathbb{R}^3$ ,  $G = O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ ,
- géométrie Sphérique :  $X = S^3$ ,  $G = O(4)$ ,

- géométrie Hyperbolique :  $X = \mathbb{H}^3$ ,  $G = \text{PO}(3, 1) \simeq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ,

Voir [34, p.8] pour la liste exhaustive et détaillée.

**Exemple des tores 3.I.** Si  $X = \mathbb{R}^2$  et  $G := \text{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$  le groupe de ses isométries, une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est une structure *Euclidienne*. Le tore de dimension 2 vu comme quotient de  $\mathbb{R}^2$  par  $\Gamma := \mathbb{Z}^2$  est un exemple de  $(\text{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ -structure. Remarquons que ce n'est pas la seule structure affine que le tore admette (voir par exemple [53, Exemple 1.1]).

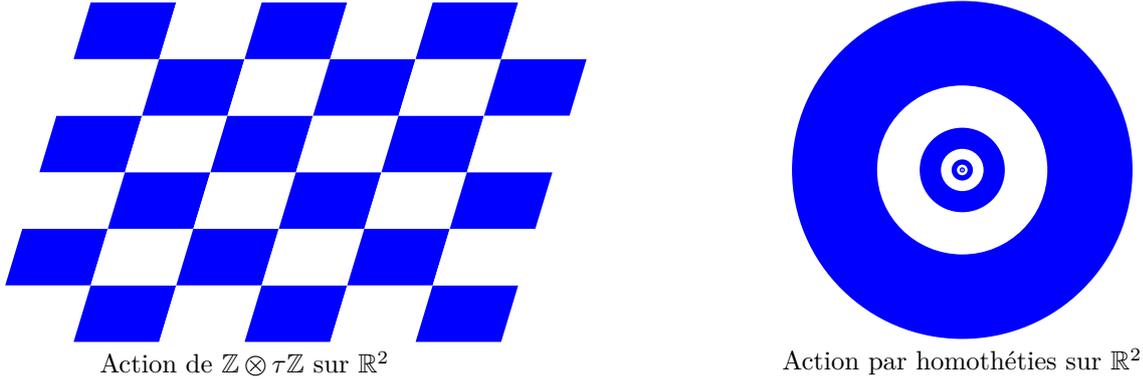


FIGURE 3.1 – Deux  $(G, X)$ -structures du tore.

### 3.1.1 Holonomie et application développante

Nous supposons maintenant que l'action de  $G$  sur  $X$  est transitive.

**Lemme 3.1.6.** *Soient  $M$  une  $(G, X)$ -variété connexe et  $\tilde{M}$  son revêtement universel. Alors il existe un couple  $(\text{dev}, \text{hol})$ , où  $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  est un difféomorphisme local donné, dans les cartes, par un élément de  $G$  et  $\text{hol} : \pi_1(M) \rightarrow G$  est un morphisme de groupes tel que :*

$$\text{dev}(\gamma.x) = \text{hol}(\gamma).\text{dev}(x), \quad \forall \gamma \in \pi_1(M), \forall x \in \tilde{M},$$

*De plus, si  $(\text{dev}, h)$  et  $(\text{dev}', h')$  sont deux tels couples, alors il existe  $g \in G$  tel que  $\text{dev}' = g \circ \text{dev}$  et  $\text{hol}' = \iota_g \circ \text{hol}$ , où  $\iota_g \circ \text{hol}(\gamma) := g \text{hol}(\gamma) g^{-1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\phi_1 : U_1 \subset M \rightarrow X$  une carte de la  $(G, X)$ -structure. Si  $\phi_2 : U_2 \rightarrow X$  est une autre carte de la  $(G, X)$ -structure telle que  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  est connexe alors, il existe un unique élément  $g \in G$  tel que  $g \circ \phi_2 = \phi_1$  sur  $U_1 \cap U_2$ . On peut alors étendre  $\phi_1$  en une application  $\phi : U_1 \cup U_2 \rightarrow X$  avec  $\phi = \phi_1$  sur  $U_1$  et  $\phi = g \circ \phi_2$  on  $U_2$ . On peut itérer ce procédé le long de n'importe quel chemin sur  $M$ .

Le prolongement analytique ne dépendant que de la classe d'homotopie du chemin, cette construction définit une application

$$\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$$

Cette application est un difféomorphisme local et satisfait la condition d'équivariance par transformations de deck :

$$\text{dev}(\gamma.x) = h(\gamma).\text{dev}(x), \quad \forall \gamma \in \pi_1(M)$$

avec  $h : \pi_1(M) \rightarrow G$  un morphisme.

Remarquons que si l'on change la première carte  $\phi_1$  par  $g \circ \phi_1$ , on définit une autre application développante  $g \circ \text{dev}$  et l'holonomie devient  $g \circ h \circ g^{-1}$ . On peut montrer qu'une paire  $(\text{dev}, h)$  détermine une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ .  $\square$

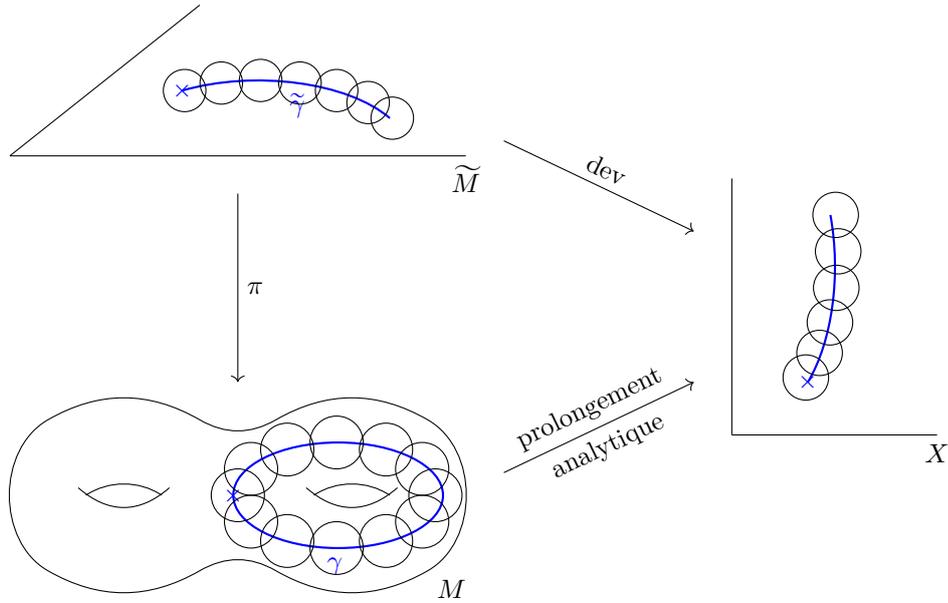


FIGURE 3.2 – Procédé géométrique de construction de l'application développante.

**Définition 3.1.7.** Dans le lemme précédent, l'application  $\text{dev}$  est appelée *application développante*,  $hol$  est le *morphisme d'holonomie* et la paire  $(\text{dev}, h)$  est dite *paire développante*.

### 3.1.2 Relation aux $G$ -fibrés principaux plats

Prenons une  $(G, X)$ -variété  $M$  muni d'un atlas  $\{U_\alpha \rightarrow X\}$  et notons  $g_{\alpha\beta}$  les éléments de  $G$  qui correspondent aux changements de cartes

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta$$

Nous pouvons, à partir de la donnée des  $g_{\alpha\beta}$ , construire un fibré  $P \rightarrow M$  de fibre  $X$  et de groupe structural  $G$  donné localement par les trivialisations

$$\pi_\alpha : P_\alpha := U_\alpha \times X \rightarrow U_\alpha$$

et dont les points  $(u, x)$  et  $(u, y)$ , avec  $u \in U_\alpha \cap U_\beta$  et  $x, y \in X$ , sont identifiés s'ils satisfont  $(u, y) = (u, g_{\alpha\beta}(x))$ .

De façon équivalente, si  $hol : \pi_1(M) \rightarrow G$  est l'holonomie de cette  $(G, X)$ -structure, le fibré  $P$  est

défini par  $P_{\text{hol}} := \widetilde{M} \times_{\text{hol}} X$  où  $\widetilde{M} \times_{\text{hol}} X$  est le quotient de  $\widetilde{M} \times X$  par l'action de  $\pi_1(M)$  donnée par

$$\pi_1(M) \times (\widetilde{M} \times X) \rightarrow \widetilde{M} \times X, \quad (\gamma, (u, x)) \mapsto (\gamma.u, \text{hol}(\gamma).x).$$

*Remarque.* La donnée d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  nous renseigne de

- l'existence d'un  $X$ -fibré plat,
- l'existence d'une section transverse au feuilletage horizontal.

Si  $Y$  est un autre espace topologique munit d'une action de  $G$  alors, à partir d'un tel fibré  $P \rightarrow M$  de fibre  $X$ , on peut construire un autre fibré  $P' \rightarrow M$  de fibre  $Y$  dont les cartes de trivialisations sont subordonnées à celle de  $P \rightarrow M$  et les fonctions de transitions sont données par

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \times Y \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times Y, \quad (u, y) \mapsto (u, g_{\alpha,\beta}.y)$$

Lorsque l'on considère  $Y = G$  muni de l'action de  $G$  sur lui-même par multiplication à gauche, on obtient alors un  $G$ -fibré principal au dessus de  $M$ .

De plus, cette construction ne dépend que de la donnée du cocycle  $\{g_{\alpha,\beta}\}$  et fournit donc une construction qui descend au niveau des classes d'isomorphismes de fibrés. On pourra donc se restreindre à l'étude des propriétés du  $G$ -fibré principal associé à la  $(G, X)$ -structure et tirer des informations sur le fibré construit initialement.

**Définition 3.1.8.** Soit  $M$  une variété. Une *structure plate* sur un  $G$ -fibré  $P \rightarrow M$  est une trivialisations de  $P$  dont les changements de cartes sont des éléments de  $G$ . Un fibré admettant une structure plate est dit *plat*.

Remarquons qu'un fibré défini par une représentation admet une structure plate provenant de la structure plate du produit  $\widetilde{M} \times X$  et l'action du groupe fondamental par transformations de deck préserve la platitude du fibré. La proposition suivante nous dit que cette construction est en fait une caractérisation des fibrés plats.

**Proposition 3.1.9.** Soit  $P$  un  $G$ -fibré principal sur une variété connexe  $M$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $P$  admet une structure plate,
- $P$  est défini par une représentation  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$ .

*Remarque.* Il existe une autre condition équivalente, l'existence d'une connexion plate sur  $P$ . Ce point de vue ne nous sera pas utile par la suite, il est tout de même important de le mentionner ici. Voir par exemple [58].

*Démonstration.* Nous avons déjà vu qu'à partir d'une représentation nous pouvons définir un fibré admettant une structure plate.

D'un autre côté, considérons la structure plate de  $P$  donnée par des trivialisations  $E|_{U_\alpha} = U_\alpha \times X$  avec  $U_\alpha \in \mathcal{U}$  un recouvrement d'ouverts de  $M$  et des fonctions de transitions  $g_{\alpha\beta} \in G$ . Prenons  $x_0 \in U \in \mathcal{U}$  et  $\pi_1(M, x_0) \ni \gamma : [0, 1] \rightarrow M$ . Considérons aussi une subdivision  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = 1$  de  $[0, 1]$

telle qu'il existe  $U_0, U_1, \dots, U_N \in \mathcal{U}$  avec  $U_0 = U_N = U$  et  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$  pour tout  $i = 0, \dots, N$ . En posant

$$\rho(\gamma) := \prod_{i=1}^N g_{i,i-1}(\gamma(t_i))$$

le lecteur vérifiera que l'on a bien défini une représentation. □

## 3.2 Déformations des structures géométriques

Voici un des principes sur lesquels repose cette thèse.

**Proposition 3.2.1** (Principe d'EHRESMANN-THURSTON, [97]). *Soit  $M$  une variété compacte équipée d'une  $(G, X)$ -structure et  $\text{hol}_0$  son holonomie. Si  $\text{hol}'$  est un morphisme suffisamment proche de  $\text{hol}$  alors il existe une structure proche de la structure initiale dont l'holonomie est  $\text{hol}'$ . De plus, deux  $(G, X)$ -structures proches de la structure initiale sont isomorphes par un difféomorphisme proche de l'identité si et seulement si leurs holonomies sont conjuguées par un petit élément de  $G$ .*

Ici, on dit que deux morphismes d'holonomie  $\text{hol}$  et  $\text{hol}'$  sont proches si les images d'une partie génératrice  $(\gamma, 1, \dots, \gamma_n)$  de  $\pi(M)$  par ces deux représentations sont proches dans  $G^n$ .

Ce résultat affirme qu'en déformant le morphisme holonomie d'une  $(G, X)$ -structure on peut obtenir de nouvelles structures. Il dit aussi localement qu'à isotopie près, une  $(G, X)$ -structure est complètement déterminée par son holonomie.

### 3.2.1 Déformations infinitésimales de $G$ -fibrés

La [théorème 3.1.9](#) nous offre la possibilité de regarder les déformations infinitésimales de l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure comme déformations infinitésimales de la structure plate du  $G$ -fibré principal plat  $P \rightarrow M$  associé à cette holonomie. Ceci nous servira plus tard dans la comparaison des déformations de structures complexes au déformations de représentations.

L'idée de ce qui va suivre est d'interpréter les classes d'équivalence de déformations infinitésimales de la structure plate d'un  $G$ -fibré principal plat en terme de cohomologie de Čech.

Fixons un  $G$ -fibré principal plat  $P \rightarrow M$  sur une variété  $M$ . Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement de  $M$  par des ouverts. La structure plate de  $P$  est équivalente à la donnée pour chaque paire d'ouverts  $(U_\alpha, U_\beta)$  d'un élément  $g_{\alpha\beta} \in G$ , qui sont les fonctions de transitions. Elles doivent donc satisfaire les conditions de recollement usuelles :

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = \text{Id} \tag{3.1}$$

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = \text{Id} \tag{3.2}$$

Considérons une application de changement de trivialisations, c'est à dire qui associe à chaque ouvert  $U_\alpha \in \mathcal{U}$  un élément  $h_\alpha \in G$ . Il est facile de remarquer que la structure plate sur  $P \rightarrow M$  donnée par les nouvelles fonctions de transitions  $g'_{\alpha\beta} = h_\alpha g_{\alpha\beta} h_\beta^{-1}$  est équivalente à la structure plate initiale.

Considérons une famille à un paramètre de fonctions de transitions  $g_{\alpha\beta}(t)$  définissant pour tout  $t$  une structure de fibré plat sur  $P \rightarrow M$  avec

$$\dot{g}_{\alpha\beta} := \left. \frac{dg_{\alpha\beta}(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathfrak{g}$$

Les conditions de recollement (3.1) et (3.2) impliquent les conditions (de cocycle) suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{g}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \circ \dot{g}_{\beta\alpha} \circ g_{\alpha\beta}^{-1} &= 0 \\ \dot{g}_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \circ \dot{g}_{\beta\gamma} \circ g_{\alpha\beta}^{-1} - \dot{g}_{\alpha\gamma} &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $U_\alpha \mapsto h_\alpha(t)$  avec  $h_\alpha(0) = \text{Id}$  une famille à un paramètre de changement de trivialisation et  $g_{\alpha\beta}(t) := h_\alpha(t) \circ g_{\alpha\beta} \circ h_\beta(t)^{-1}$  la famille (à un paramètre) de fonctions de transitions associée. La déformation infinitésimale associée à cette famille est

$$\dot{g}_{\alpha\beta} = \dot{h}_\alpha - g_{\alpha\beta} \circ \dot{h}_\beta \circ g_{\alpha\beta}^{-1}$$

où  $\dot{h}_\alpha := \left. \frac{dh_\alpha(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathfrak{g}$

Pour faire correspondre les classes d'équivalence de déformations de la structure plate de  $P \rightarrow M$  avec la cohomologie de Čech d'un certain faisceau, il nous faut définir ce « bon » faisceau. Pour la construction qui suit, le lecteur pourra consulter [22, Section 14].

Si  $P \rightarrow M$  est un  $G$ -fibré principal et  $F$  un espace vectoriel sur lequel  $G$  agit via  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(F)$ , on peut alors définir le  $G$ -fibré  $F_P$  associé à  $P \rightarrow M$  par  $F_P := P \times_\rho F = (P \times F)/G$  où on identifie  $(p \cdot g, \rho(g)^{-1} \cdot f)$  et  $(p, f)$  pour tout  $g \in G$ ,  $f \in F$  et tout  $p \in P$ . En particulier, on peut considérer  $\mathfrak{g}_P$  le fibré associé à  $P \rightarrow M$  via l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  où l'action de  $G$  sur son algèbre est la représentation adjointe  $\text{Ad}$ .

*Remarque.* Si  $G$  agit sur  $F$  par une représentation linéaire, le fibré associé est alors un fibré vectoriel.

**Théorème 3.2.2.** *Soit  $P \rightarrow M$  un  $G$ -fibré principal plat. On définit  $\mathcal{F}_\mathfrak{g}$  comme le faisceau des sections localement constantes du fibré associé  $\mathfrak{g}_P$ . Alors, l'espace des classes d'équivalence de déformations infinitésimales de la structure plate de  $P \rightarrow M$  est donné par le groupe de cohomologie  $H^1(M, \mathcal{F}_\mathfrak{g})$ .*

Nous ne démontrerons pas ce théorème, le lecteur intéressé trouvera les détails dans [55] ou [58].

### 3.2.2 Espace de déformation

Bien que ce ne soit pas logiquement nécessaire pour la suite, il est naturel de s'intéresser à l'espace global des déformations d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété donnée  $M$ . Nous en profiterons pour aborder les résultats récents de N. THOLOZAN sur cet espace de déformations des  $(G \times G, G)$ -structures.

Nous l'avons vu plus haut, la paire développante  $(\text{dev}, \text{hol})$  ne définit une  $(G, X)$ -structure qu'à l'action du groupe  $G$  près, où l'action de  $G$  est donnée par

$$g.(\text{dev}, \text{hol}) = (g \circ \text{dev}, \iota_g \circ \text{hol})$$

D'autre part, notons qu'un difféomorphisme  $\phi$  de  $M$  se relève en un difféomorphisme  $\tilde{\phi}$  de  $\tilde{M}$  qui est  $\pi_1(M)$ -équivariant pour un certain automorphisme  $\theta$  de  $\pi_1(M)$ . Si on se donne une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  donnée par une paire  $(\text{dev}, \text{hol})$ , alors le pull-back de cette structure le long de  $\phi$  correspond à la structure donnée par

$$\phi^*(\text{dev}, \text{hol}) := (\text{dev} \circ \tilde{\phi}, \text{hol} \circ \theta)$$

De plus, si ce difféomorphisme est isotope à l'identité alors l'automorphisme correspondant  $\theta$  est nécessairement le morphisme trivial.

On est donc amené à considérer l'espace de déformation suivant :

$$\text{Def}_{(G,X)}(M) = G \setminus \left\{ (\text{dev}, \text{hol}) \mid \text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X, \text{ hol-équivariante} \right\} / \text{Diff}^0(M)$$

Avec ces notations, on peut réécrire le principe d'Ehresmann-Thurston en disant que l'application

$$\text{Def}_{(G,X)}(M) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M), G)/G, \quad (\text{dev}, \text{hol}) \mapsto \text{hol}$$

est un homéomorphisme local.

### 3.2.3 Complétude des $(G \times G, G)$ -structures

Nous avons déjà mentionné dans l'introduction de ce chapitre l'importance de la notion de complétude d'une  $(G, X)$ -structure et il convient donc de revenir sur les définitions inhérentes aux concepts qui lui sont reliés.

**Définition 3.2.3.** Soit  $M$  une variété munie d'une  $(G, X)$ -structure donnée par la paire développante  $(\text{dev}, \text{hol})$ . Si  $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  est un revêtement alors, la  $(G, X)$ -structure est dite *complète*.

Dans le cas où  $X$  est simplement connexe,  $\text{dev}$  est un difféomorphisme et on peut facilement identifier  $M$  avec  $X/\text{hol}(\pi_1(M))$ , voir l'[exemple des tores 3.I](#).

Dans le lexique de [53], si l'action de  $\pi_1(M)$  (via  $\text{hol}$ ) sur l'image  $\mathcal{U} \subset X$  de  $\text{dev}$  est libre et totalement discontinue alors,  $M$  s'identifie au quotient  $\mathcal{U}/\text{hol}(\pi_1(M))$  (en tant que  $(G, X)$ -variétés) et la structure est dite *uniformisable* ou *Kleniënne*. Le cas complet correspond à la situation  $\mathcal{U} = X$ .

*Remarque.* Soit  $M$  une  $(G, X)$ -variété et  $\text{hol}$  son holonomie. Si  $X$  est muni d'une métrique riemannienne (holomorphe ou plus généralement, une structure géométrique au sens de Gromov [38])  $G$ -invariante, alors cette structure descend à  $M$ .

Un cas particulier de ces  $(G, X)$ -structures qui nous intéressera plus tard est le suivant. Soit  $M$  une variété compacte muni d'une  $(G \times G, G)$ -structure où  $G$  est un groupe de Lie semi-simple de rang 1, où le rang d'un groupe de Lie  $G$  est la dimension du tore maximal déployé de  $G$ . Pour un tel groupe  $G$ , on peut considérer l'espace homogène  $G = (G \times G)/\Delta_G$  où  $\Delta_G$  est la diagonale. Cet espace est naturellement muni  $(G \times G, G)$ -structure donnée par les isométries correspondantes aux translations à droite à gauche. Les quotients de ces espaces par un sous-groupe  $\Gamma \subset G \times G$  sont bien connus.

Une question naturelle est de savoir quel sous ensemble correspond aux structures complètes dans l'espace des déformations  $\text{Def}_{(G,X)}(M)$ .

**Théorème 3.2.4** (THOLOZAN [93, Théorème 3]). *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de rang 1 et  $M$  une variété compacte de même dimension que  $G$  alors le domaine des  $(G \times G, G)$ -structures complètes forme une union de composantes connexes dans  $\text{Def}_{(G \times G, G)}(M)$ .*

Pour plus de détails, voir [93, Theorem 3, p.1923].

Avec ce résultat, on sait donc que toute déformation d'une  $(G \times G, G)$ -structure complète sur une variété  $M$  restera complète. Avec le principe d'Ehresmann-Thurston, la question est donc maintenant de savoir comment se comporte l'action de l'holonomie sur  $X$  par déformation, c'est-à-dire reste-t-elle libre et totalement discontinue ? Lorsqu'un morphisme d'holonomie vérifiera ces deux conditions, on dira qu'il est *admissible*.

Il est donc naturel de s'intéresser à l'espace des morphismes  $\text{Hom}(\pi_1(M), G \times G)$  et de chercher un critère d'admissibilité à l'action correspondante.

### 3.3 Admissibilité des représentations

Les premiers résultats concernant la caractérisation des quotients de groupes de Lie remontent à [63] dans le contexte de quotients de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Les auteurs montrent que les quotients compacts de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  sont donnés par le quotient de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  par un réseau  $\Gamma$  agissant par

$$\Gamma \times \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \quad (\gamma, x) \mapsto \rho(\gamma)^{-1}x\gamma \quad (3.3)$$

où  $\rho$  est une  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -représentation de  $\Gamma$ .

Un peu plus tard, KOBAYASHI [59] généralise ce résultat aux quotients compacts de groupes de Lie de rang 1. Ce que KASSEL redémontre dans sa thèse [52] en utilisant d'autres outils (la projection de Cartan, voir ci-dessous).

Une question assez naturelle se pose alors : étant donné une  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ -représentation  $\rho$  d'un réseau de  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ , l'action correspondante (3.3) est-elle libre et totalement discontinue (autrement dit, le quotient est-il une variété compacte) ? Dans ce cas, on dira que  $\rho$  est *admissible*.

KULKARNI et RAYMOND conjecturent que seules les représentations à image dans un compact sont admissibles mais GOLDMAN [32, Proposition 5] montre que ce n'est pas le cas et exhibe des représentations suffisamment proches de la représentation triviale qui sont admissibles. Plus tard, GHYS montre le même résultat dans le cas qui nous intéresse dans cette thèse, celui de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  (ou  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ) (voir [31] ou voir le chapitre 5) et KOBAYASHI généralise au cas des groupes de Lie de rang 1.

Nous rappelons ici les résultats connus sur l'admissibilité de ces représentations.

Soient  $G$  un groupe de Lie semi-simple linéaire, connexe et non compact. Soient  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$  pour lequel on a la décomposition de Cartan :  $G = KA^+K$  où  $A^+$  est une chambre de Weyl d'un sous-groupe de Cartan  $A$  dans  $G$ . On définit alors *la projection de Cartan* par

$$\mu : G \rightarrow A^+$$

où  $\mu(g)$  est le seul de  $KgK \cap A^+$ .

Dans notre cas,  $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$  et on peut prendre

- $K = \mathrm{SU}(2)$ ,
- $A$  le groupe des matrices diagonales de déterminant 1,
- $A^+ = \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \geq 1\}$ ,

Remarquons aussi que dans ce cas, nous avons l'isomorphisme

$$A^+ \simeq \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mapsto \ln(a)$$

donné par un caractère additif.

La projection de Cartan  $\mu(g)$  composée avec cet isomorphisme est alors obtenue comme la moitié du logarithme de la plus grande valeur propre de  ${}^t \bar{g}g$ . De façon plus générale, pour tout groupe de Lie de rang 1, cet isomorphisme est vérifié et on notera dans la suite encore par  $\mu$  la composition de la projection de Cartan et de cet isomorphisme.

Un des premiers critères d'admissibilité remonte à KOBAYASHI [59] et BENOIST dans [8]. Ce critère s'énonce de la façon suivante

**Théorème 3.3.1** (BENOIST [8]). *Soient  $G$  un groupe de Lie semi-simple linéaire, connexe et non compact,  $H$  un sous-groupe connexe réductif de  $G$  et  $L$  un sous-groupe discret de  $G$ . Comme précédemment, notons  $\mu : G \rightarrow A^+$  la projection de Cartan de  $G$ . Alors,  $L$  agit proprement sur  $G/H$  si, et seulement si, pour tout compact  $C$  dans  $A$ , l'ensemble  $\mu(L) \cap (\mu(H) + C)$  est borné.*

Dans le cas  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ,  $H = \Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$  la diagonale de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $L = (\rho, i)(\Gamma)$ , avec  $i$  le plongement naturel d'un sous-groupe discret (supposé sans torsion)  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , agissant sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) / \Delta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}$  via  $x \mapsto g^{-1}xh$  avec  $(g, h) \in L$  on retrouve un critère d'admissibilité sur  $\rho$ .

Ce critère sera amélioré par les travaux de KASSEL [52] (voir aussi [60] et [63]).

**Théorème 3.3.2** (KASSEL, [51, Theorem 1.4]). *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple connexe de rang 1 et  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  sa projection de Cartan. Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $G \times G$ . Alors, l'action de  $\Gamma$  sur  $(G \times G) / \Delta_G$  est propre et totalement discontinue si, et seulement si, à permutation des facteurs près,  $\Gamma$  est un graphe de la forme*

$$\{(\rho(\gamma), \gamma), \gamma \in \Gamma_0\}$$

où  $\Gamma_0$  est un sous-groupe discret de  $G$  et  $\rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$  est tel qu'il existe  $\lambda < 1$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $\gamma \in \Gamma_0$ ,  $\mu(\rho(\gamma)) < \lambda\mu(\gamma) + C$  où  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}_+$  est la projection de Cartan de  $G$ .

On peut voir la condition d'admissibilité de la façon suivante :  $\rho$  est admissible si, et seulement si, l'ensemble  $(\mu \circ \rho, \mu)(\Gamma)$  est situé sous la diagonale de  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  et qu'il s'en éloigne à l'infini.

**Définition 3.3.3.** Si  $g$  est une isométrie d'un espace  $X$ , la longueur de translation associée à  $g$ , notée  $\lambda(g)$  est définie par

$$\lambda(g) := \inf_{x \in X} d(x, g.x)$$

**Définition 3.3.4.** Soit  $\rho : \Gamma \rightarrow G$  une représentation. On définit alors le *ratio des longueurs de translation* de  $\rho$  par

$$C'(\rho) := \sup_{\gamma \in \Gamma} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)}$$

Dans le cas où  $G$  a un rang égal à 1 (par exemple dans le cas  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ), on a un lien entre la fonction  $\lambda$  et la fonction  $\mu$ , établi dans [9] :

$$\lambda(\gamma) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \mu(\gamma^m)$$

et GUÉRITAUD-KASSEL montrent ensuite que la constante  $C'(\rho)$  est égale à la borne inférieure des réels  $C \geq 0$  tels que l'ensemble  $\{\mu(\rho(\gamma)) - C\mu(\gamma), \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{R}$  soit majoré.

A partir de maintenant, nous supposons que  $G$  est un groupe algébrique semi-simple connexe de rang 1 et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de type fini sans torsion de  $G$ .

Finalement, en faisant agir  $\Gamma$  sur un arbre simplicial KASSEL, relie cette constante avec une autre constante : la *constante minimale de Lipschitz*.

**Définition 3.3.5.** Soit  $\rho$  une représentation de  $\Gamma$  dans  $G$ . On dira qu'une application  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  est  $(i, \rho)$ -équivariante, où  $i : \Gamma \hookrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est l'inclusion naturelle, si

$$\forall \gamma \in \Gamma, f(\gamma.x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$$

**Définition 3.3.6.** Soit  $\rho$  une représentation de  $\Gamma$  dans  $G$ . On appelle *constante de Lipschitz minimale* associée à  $\rho$  la quantité

$$C(\rho) := \inf\{\mathrm{Lip}(f) \mid f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3, (i, \rho)\text{-équivariante}\}$$

où  $\mathrm{Lip}(f)$  est la constante de Lipschitz, c'est-à-dire que  $f$  vérifie  $d(f(x), f(y)) \leq \mathrm{Lip}(f) d(x, y)$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^3$  et que cette constante est la plus petite constante telle que cette inégalité est vérifiée.

Dans notre cas, cette constante est toujours finie (voir [42, Lemma 4.7]).

Dans le cas de  $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ , SALEIN [89] montre dans sa thèse que l'existence d'une application  $\rho$ -équivariante contractante (ce qui revient à dire  $C(\rho) < 1$ ) implique l'admissibilité de la représentation  $\rho$ . Ce résultat peut-être généralisé à d'autres groupes de Lie.

On a le résultat suivant

**Théorème 3.3.7** (KASSEL et GUÉRITAUD, [42, Theorem 1.8]). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\rho$  est admissible,
2.  $C(\rho) < 1$ ,
3.  $C'(\rho) < 1$ ,
4. il existe des constantes  $a < 1$  et  $C > 0$  telles que  $\mu(\rho(\gamma)) < a\mu(\gamma) + C$ .

*Remarques.*

- La deuxième condition permet de montrer plus facilement que cette condition est une condition ouverte (voir proposition suivante).
- La troisième condition permet de montrer que l'admissibilité ne dépend que du caractère de  $\rho$ .
- Le dernier critère présent dans ce théorème n'est pas le plus exploitable puisqu'il dépend du choix d'une projection de Cartan.

Ces conditions sont ouvertes (voir [42]) et on obtient alors :

**Proposition 3.3.8** ([41, Corollary 1.18]). *Le sous-ensemble formé des représentations admissibles de  $\Gamma$  dans  $G$  est un ouvert (pour la topologie standard) de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$ .*

L'implication  $C(\rho) < 1 \implies \rho$  admissible est un cas particulier du critère de propriété de Benoist, lorsque cette inégalité est vérifiée, on dira que  $\rho$  est uniformément dominée par l'inclusion  $i$  [89]. L'implication réciproque et l'équivalence  $C(\rho) < 1 \Leftrightarrow C'(\rho) < 1$  sont démontrées dans [52] dans le cas  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  et généralisées dans [42] au cas  $G = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  et  $\Gamma$  géométriquement fini.

De plus,

**Proposition 3.3.9** (KASSEL et GUÉRITAUD, [42, Proposition 1.5]). *L'application*

$$\text{Hom}(\Gamma, G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho \mapsto C(\rho)$$

*est continue.*

*Remarque.* Des exemples de représentations admissibles *exotiques* de réseaux hyperboliques en dimension 3 et 4 ont été construits par LAKELAND et LEININGER [67]. Ces constructions reposent sur l'existence de polyèdres hyperboliques dont les angles diédraux sont des angles droits.

Notons que les rappels précédents permettent d'entrevoir un lien entre l'ensemble des représentations dominées et l'espace de Teichmüller :

**Théorème 3.3.10** (DEROIN et THOLOZAN, [95] [21]). *Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une surface compacte  $\Sigma$  de genre supérieur à 2 et soit  $\rho$  une représentation non fuchsienne de  $\Gamma$  dans un groupe de Lie de rang 1. Alors le quotient de l'ensemble des représentations fuchiennes qui dominent  $\rho$  par  $G$ -conjugaison est non vide et homéomorphe à l'espace de Teichmüller de  $\Sigma$ .*



# REPRÉSENTATIONS, CARACTÈRES ET VARIÉTÉS ASSOCIÉES

NOUS AVONS PRÉCÉDEMMENT SOULIGNÉ LES RELATIONS qui existent entre les  $(G, X)$ -structures d'une variété  $M$  et l'ensemble des représentations de son groupe fondamental  $\pi_1(M)$  dans  $G$  (via l'holonomie). Afin d'appliquer le principe d'Ehresmann-Thurston et de déformer la  $(G, X)$ -structure au moyen de la déformation du morphisme d'holonomie, il est donc important de s'intéresser à la géométrie de l'espace des représentations. Nous verrons par exemple comment munir cet espace d'une structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique et d'une structure de schéma.

Cet espace, appelé variété des représentations, partage aussi une relation étroite avec la cohomologie du groupe  $\pi_1(M)$ . Un des exemples les plus connus de ces relations est donné par la construction de WEIL qui fournit un isomorphisme entre le groupe des cocycles de  $\pi_1(M)$  (à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  munie de la structure de  $\pi_1(M)$ -module induite par la représentation) et l'espace tangent (de Zariski) à la variété des représentations. Afin d'énoncer le principal résultat de cette thèse, il est donc essentiel dans un premier temps de revenir sur les définitions de base de la cohomologie des groupes. Puis, dans un second temps, nous reviendrons sur la géométrie de la variété des représentations et comme annoncé, sur les liens qu'elle partage avec cette cohomologie précédemment révisée.

Nous terminerons ce chapitre sur la notion de quotient catégorique et plus particulièrement celui de la variété des représentations par l'action de conjugaison. Ce dernier point nous permettra, dans le [chapitre 7](#), de comparer ces quotients affines aux quotients champs algébriques/analytiques et d'insister sur l'intérêt de ce langage.

## 4.1 Cohomologie des groupes

Un des ouvrages les plus complets sur le sujet est le livre de K. BROWN [13].

### 4.1.1 Définition formelle

Même si la définition formelle ne nous sera pas, en tant que telle, utile plus tard, nous avons besoin d'énoncer un résultat technique qui nécessite son apparition ici. Dans toute la suite,  $G$  désignera un

groupe, que l'on supposera multiplicatif.

**Définition 4.1.1.** Soit  $M$  un groupe abélien. Une *structure de  $G$ -module* sur  $M$  est la donnée d'un morphisme  $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(M)$  de  $G$  dans le groupe des automorphismes de  $M$ . Naturellement, un  $G$ -module est la donnée d'une paire  $(M, \sigma)$ .

Si il n'y a pas d'ambiguïtés, on notera simplement par  $g.m$  l'action  $\sigma(g).m$ .

Rappelons que le groupe abélien libre  $\mathbb{Z}[G]$  sur  $G$  est défini comme le groupe abélien libre dont une base est l'ensemble des éléments de  $G$ . Autrement dit, les éléments de  $\mathbb{Z}[G]$  sont les sommes finies

$$\sum_{g \in G} a_g g, \quad a_g \in \mathbb{N}$$

avec les  $a_g$  presque tous nuls. De plus, on peut étendre la multiplication dans  $G$  à une multiplication dans  $\mathbb{Z}[G]$ , conférant à ce dernier une structure d'anneau, de la façon suivante :

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \left( \sum_{g' \in G} b_{g'} g' \right) = \sum_{g, g' \in G} a_g b_{g'} g g' = \sum_{g \in G} c_g g$$

avec  $c_g = \sum_{hl=g} a_h b_l = \sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g}$ .

Une propriété importante de cette construction est la suivante

**Proposition 4.1.2.** Soit  $R$  un anneau. Une fonction  $f : G \rightarrow R$  telle que  $f(gg') = f(g)f(g')$  et  $f(1) = \text{Id}_R$  peut être étendue de façon unique à un morphisme d'anneaux  $F : \mathbb{Z}[G] \rightarrow R$  qui coïncide avec  $f$  sur l'injection naturelle  $G \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ .

Cette propriété universelle nous dit qu'un  $G$ -module peut être vu comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module et réciproquement.

On considère maintenant la catégorie  $\mathbb{Z}[G]\text{-mod}$  des  $\mathbb{Z}[G]$ -modules ainsi que le foncteur

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -) : \mathbb{Z}[G]\text{-mod} \rightarrow \mathcal{A}b, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$$

où  $\mathcal{A}b$  est la catégorie des groupes abéliens et  $\mathbb{Z}$  est le  $G$ -module trivial.

Il est bien connu que ce foncteur est exact à gauche mais ne l'est pas à droite. Et on va définir la cohomologie de  $G$  comme les foncteurs dérivés à droite  $R^i$  du foncteur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$ , c'est-à-dire les foncteurs  $\text{Ext}$ .

**Définition 4.1.3.** Soit  $G$  un groupe et  $M$  un  $G$ -module. La cohomologie de  $G$  à valeurs dans  $M$  est définie par

$$H^i(G, M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$$

Remarquons que le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$  est identifié au foncteur  $(-)^G$  des  $G$ -invariants. En effet, puisque  $\mathbb{Z}$  est un  $G$ -module trivial, un élément  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) = \{f : \mathbb{Z} \rightarrow M \mid f(g.a) = g.f(a)\}$  est entièrement déterminé par son image sur un générateur de  $\mathbb{Z}$ ,  $f(1) = m \in M$  qui doit alors être  $G$ -invariant. On obtient donc

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M) \simeq \{m \in M \mid g.m = m, g \in G\} = M^G$$

Finalement, on a que  $H^i(G, -) = R^i(-)^G$ .

Pour pouvoir travailler avec ces groupes de cohomologie, nous nous servons d'une caractérisation plus pratique, qui détermine ces groupes à partir d'un complexe.

### 4.1.2 Résolution projective et coordonnées homogènes

Pour ce faire, remarquons aussi que  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$  peut être obtenu soit en dérivant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$  et en l'appliquant à  $M$  soit en dérivant le foncteur  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(-, M)$  et en lui appliquant  $\mathbb{Z}$ . Ainsi, le groupe  $H^i(G, M)$  peut être obtenu à partir d'une *résolution injective* de  $M$  ou bien à partir d'une *résolution projective* de  $\mathbb{Z}$  (vu comme  $\mathbb{Z}[G]$ -module). La deuxième résolution possède évidemment le grand avantage de pouvoir être appliquée à tout  $G$ -module  $M$ . De plus, il existe une telle résolution canonique. La *résolution libre* de  $\mathbb{Z}[G]$  est la résolution

$$\dots \xrightarrow{\bar{\Delta}^{n+1}} \mathbb{Z}[G^n] \xrightarrow{\bar{\Delta}^n} \dots \xrightarrow{\bar{\Delta}^2} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\bar{\Delta}^1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où les applications  $\bar{\Delta}^n$  sont définies par les applications  $\Delta^n$  de  $G^n$  dans  $G^{n-1}$  de la façon suivante

$$(\Delta^n)(g_1, \dots, g_n) := g_1 \cdot (g_2, \dots, g_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n (g_1, \dots, g_{n-1})$$

et étendues à  $\bar{\Delta}^n : \mathbb{Z}[G^n] \rightarrow \mathbb{Z}[G^{n-1}]$  par la [théorème 4.1.2](#). Il est relativement facile de montrer que  $\bar{\Delta}^{n-1} \circ \bar{\Delta}^n = 0$ .

Cette même proposition permet de voir que le complexe  $(\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^\bullet], M), \bar{\Delta}^\bullet)$  est isomorphe au complexe  $(\text{Map}(G^\bullet, M), d^\bullet)$  où  $\text{Map}(G^p, M)$  est l'ensemble des applications de  $G^p$  dans  $M$  et la différentielle  $d^\bullet$  est induite par  $\bar{\Delta}^\bullet$  via

$$d^n : \text{Map}(G^n, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^n], M) \xrightarrow{\text{Hom}(\bar{\Delta}^n, M)} \text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G^{n-1}], M) \simeq \text{Map}(G^{n-1}, M)$$

Ce qui donne explicitement pour  $f : G^{n-1} \rightarrow M$  :

$$\begin{aligned} (d^n f)(g_1, \dots, g_n) &:= f(\Delta(g_1, \dots, g_n)) \\ &= g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

On note respectivement  $Z^n(G, M)$  et  $B^n(G, M)$  l'ensemble des  $n$ -cocycles et l'ensemble des  $n$ -cobords, respectivement définis par le noyau de  $\bar{d}^{n+1}$  et l'image de  $\bar{d}^n$ . On notera également dans la suite  $C^p(G, M) := \text{Map}(G^p, M)$ .

On a, par définition,

$$H^n(G, M) = Z^n(G, M) / B^n(G, M)$$

**Exemples 4.1.4** (Cohomologie en bas degrés).

- En degré 0 on a

$$H^0(G, M) = \ker(d^1 : G^0 \rightarrow M) = \{f \in M \mid 0 = d^1 f(g) = g \cdot f - f\} = M^G$$

comme annoncé précédemment.

- En degré 1 la condition de cocycle est la suivante

$$f \in Z^1(G, M) \Leftrightarrow 0 = (d^2 f)(g_1, g_2) = g_1 \cdot f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$$

On appelle les morphismes qui satisfont cette condition les *morphismes croisés*.

Notons que la résolution libre de  $\mathbb{Z}[G]$  et le lemme du serpent donnent conjointement la proposition suivante

**Proposition 4.1.5.** *Soient  $M_1, M_2$  et  $M_3$  trois  $G$ -modules. Si*

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

*est exacte alors, pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe une application  $\delta^n : H^n(G, M_3) \rightarrow H^{n+1}(G, M_1)$  telle que la suite*

$$0 \rightarrow H^0(G, M_1) \rightarrow H^1(G, M_2) \rightarrow H^0(G, M_3) \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M_1) \rightarrow H^1(G, M_2) \rightarrow H^1(G, M_3) \xrightarrow{\delta^1} \dots$$

*est exacte.*

### 4.1.3 Suite spectrale LHS et suite inflation-restriction

Soit  $G$  un groupe,  $H$  un sous-groupe normal de  $G$  et  $M$  un  $G$ -module. Considérons la suite exacte suivante

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 1$$

On peut facilement vérifier que prendre successivement les  $H$ -invariants puis les  $G/H$ -invariants de  $M$  revient à en prendre directement les  $G$ -invariants. La question est de savoir comment se comporte la composition des foncteurs dérivés  $R^i(-)^{G/H} \circ R^j(-)^H$  par rapport aux foncteurs dérivés  $R^{i+j}(-)^G$ . Nous allons voir que cette comparaison est expliquée par la suite spectrale de LINDON-HOCHSCHILD-SERRE, cas particulier de :

**Théorème 4.1.6** (Suite spectrale de GROTHENDIECK). *Soit  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  des catégories abéliennes<sup>1</sup>. On suppose qu'il existe deux foncteurs*

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{C}$$

*exactes à gauche. Supposons de plus que*

- $\mathcal{A}$  possède assez d'injectifs,
- $\mathcal{G}$  envoie les injectifs sur les injectifs

*alors il existe une suite spectrale dans le premier quadrant (c'est-à-dire  $E_2^{p,q} = 0$  pour tout  $p < 0$  ou  $q < 0$ )*

$$R^p \mathcal{F} \circ R^q \mathcal{G}(X) \implies R^{p+q}(\mathcal{F} \circ \mathcal{G})(X)$$

---

1. Grossièrement, ce sont des catégories dans lesquelles la collection de morphismes entre deux objets admettent une structure de groupe abélien et dans lesquelles les noyaux et conoyaux existent et sont essentiellement uniques

pour tout  $X \in \mathcal{A}$ .

En particulier, en appliquant ce théorème à la situation précédente

$$\mathbb{Z}[G]\text{-mod} \xrightarrow{(-)^H} \mathbb{Z}(G/H)\text{-mod} \xrightarrow{(-)^{G/H}} \mathcal{A}b$$

on obtient :

**Proposition 4.1.7** (Suite spectrale de LINDON-HOCHSCHILD-SERRE). *Si  $G$  est un groupe,  $H$  un sous-groupe normal de  $G$  et  $M$  un  $G$ -module. Alors, il existe une suite spectrale dans le premier quadrant*

$$H^p(G/H, H^q(H, M)) \implies H^{p+q}(G, M)$$

De plus, à partir d'une suite spectrale donnée, nous pouvons extraire *la suite des cinq-termes*. Plus précisément

**Proposition 4.1.8.** *Si*

$$E_2^{p,q} \implies H^n(X)$$

*est une suite spectrale dans le premier quadrant alors on a la suite exacte suivante :*

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(X) \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0} \rightarrow H^2(X). \quad (4.1)$$

*Démonstration.* Il suffit d'écrire la page  $E_2$  de cette suite spectrale et de remarquer que par hypothèse de convergence on a la filtration de  $H^1$  suivante

$$0 \rightarrow E_2^{0,1} \rightarrow H^1(X) \rightarrow (\ker E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{2,0}) \rightarrow 0.$$

ainsi que la suite

$$0 \rightarrow E_2^{2,0}/\text{Im}(E_2^{0,1}) \rightarrow H^2(X).$$

On obtient finalement la proposition en concaténant ces deux suites. □

En particulier, dans le contexte de la proposition précédente, on obtient :

**Corollaire 4.1.9.** *Si  $G$  est un groupe,  $H$  un sous-groupe normal de  $G$  et  $M$  un  $G$ -module. Alors, on a la suite exacte suivante, dite inflation-restriction*

$$0 \rightarrow H^1(G/H, M^H) \rightarrow H^1(G, M) \rightarrow H^1(H, M)^{G/H} \rightarrow H^2(G/H, M^H) \rightarrow H^2(G, M)$$

#### 4.1.4 Cup-produit

Soit  $G$  un groupe. On va maintenant définir l'application *cup-produit*.

**Théorème 4.1.10.** *Pour tout couple de  $G$ -modules  $A$  et  $B$ , il existe une, et une seule, famille d'applications bi-additive*

$$\smile : H^r(G, A) \times H^s(G, B) \rightarrow H^{r+s}(G, A \otimes B)$$

*qui satisfait les conditions suivantes :*

- elle est fonctorielle en  $A$  et  $B$ ,
- pour  $r = s = 0$ , le cup-produit est l'application induite par  $A^G \times B^G \rightarrow (A \otimes B)^G$ ,
- si  $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$  sont des suites exactes de  $G$ -modules, alors pour  $a'' \in H^r(G, A'')$  et  $b \in H^s(G, B)$  on a

$$(\delta a'') \smile b = \delta(a'' \smile b) \in H^{r+s+1}(G, A' \otimes B)$$

où  $\delta$  sont les morphismes de connexion,

- de la même façon, si  $0 \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow A \otimes B' \rightarrow A \otimes B \rightarrow A \otimes B'' \rightarrow 0$  sont des suites exactes de  $G$ -modules, alors pour  $a \in H^r(G, A)$  and  $b'' \in H^s(G, B'')$  :

$$\delta(a \smile b'') = (-1)^r a \smile (\delta b'') \in H^{r+s+1}(G, A \otimes B')$$

où  $\delta$  sont les morphismes de connexion,

La preuve de l'existence n'est pas très instructive d'autant que les coordonnées homogènes fournissent une expression agréable à cette famille d'applications :

$$\smile : C^p(G, M_1) \otimes C^q(G, M_2) \rightarrow C^{p+q}(G, M_1 \otimes M_2)$$

est définie par la formule suivante, pour  $u \in C^p(G, M_1)$  et  $v \in C^q(G, M_2)$ , on pose

$$u \smile v(g_1, \dots, g_{p+q}) := u(g_1, \dots, g_p) \otimes g_1 \cdots g_p \cdot v(g_{p+1}, \dots, g_{p+q})$$

Il est facile de vérifier qu'elle est compatible avec la différentielle, au sens où l'application descend au quotient

$$\smile : H^p(G, M_1) \otimes H^q(G, M_2) \rightarrow H^{p+q}(G, M_1 \otimes M_2)$$

et vérifie les propriétés du précédent théorème.

Si de plus on a une application bilinéaire  $b : M_1 \otimes M_2 \rightarrow M_3$  compatible avec l'action de  $G$  à valeurs dans un  $G$ -module  $M_3$ , on peut composer le cup-produit avec  $b$  :

$$b \circ \smile : H^p(G, M_1) \otimes H^q(G, M_2) \rightarrow H^{p+q}(G, M_3)$$

Dans le cas particulier qui nous intéressera, si  $\Gamma \subset G$  est un sous-groupe d'un groupe de Lie  $G$  et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie, alors la représentation adjointe  $\text{Ad}$  définit une structure de  $\Gamma$ -module sur  $\mathfrak{g}$  et le crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{g}$  permet de définir le *cup-crochet*  $[\smile] : C^p(\Gamma, \mathfrak{g}) \otimes C^q(\Gamma, \mathfrak{g}) \rightarrow C^{p+q}(\Gamma, \mathfrak{g})$  par

$$[u \smile v](\gamma_1, \dots, \gamma_{p+q}) := [u(g_1, \dots, g_p), g_1 \cdots g_p \cdot v(g_{p+1}, \dots, g_{p+q})]$$

On a par exemple pour  $p = q = 1$

$$[c \smile c'](\gamma_1, \gamma_2) = [c(\gamma_1), \text{Ad}_{\gamma_1} c'(\gamma_2)]$$

### 4.1.5 Lien avec la cohomologie de Čech

Un dernier fait dont nous aurons besoin en lien avec la cohomologie des groupes est sa correspondance avec la cohomologie de Čech dans certains cas. En particulier, dans le cas d'un quotient  $X/G$ , il est aisé de comparer la cohomologie de  $X$  avec celle de  $G$  comme en atteste la proposition suivante.

**Proposition 4.1.11** ([79, Appendix to §2, p.22]). *Soit  $Y = X/G$  avec  $G$  un groupe discret agissant librement et de façon totalement discontinue sur une variété différentielle  $X$  (munie de son faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ ). Alors, pour tout faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $Y$  il existe*

$$\phi_{\mathcal{F}}^p : H^p(G, H^0(X, \pi^* \mathcal{F})) \rightarrow \check{H}^p(Y, \mathcal{F})$$

où  $\pi : X \rightarrow Y$  est la projection.

De plus, l'application  $\phi_{\mathcal{F}}^p$  a les propriétés suivantes

1.  $\phi_{\mathcal{F}}$  est compatible avec le cup-produit,
2. si  $H^i(X, \pi^* \mathcal{F}) = \{0\}$ ,  $1 \leq i \leq k$  alors  $\phi_{\mathcal{F}}^i, 0 \leq i \leq k$  est un isomorphisme,
3. si

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \check{H}^0(X, \pi^* \mathcal{F}) \rightarrow \check{H}^0(X, \pi^* \mathcal{F}') \rightarrow \check{H}^0(X, \pi^* \mathcal{F}'') \rightarrow 0$$

sont exactes, alors on a un morphisme entre les suites exactes longues associées  $H^\bullet(G, -)$  et  $\check{H}^\bullet(Y, -)$ .

**Corollaire 4.1.12.** *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si  $X$  est une variété de Stein et  $\pi^* \mathcal{F}$  est cohérent alors,*

$$H^p(G, H^0(X, \pi^* \mathcal{F})) \simeq \check{H}^p(Y, \mathcal{F})$$

*Démonstration.* Cela découle du théorème B de Cartan [15] qui affirme que si  $X$  est une variété de Stein et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$  alors  $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ .  $\square$

*Remarque.* Le cas qui nous intéressera est celui des quotients  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . La proposition précédente s'applique et pour tout faisceau cohérent  $\mathcal{F}$  sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  on a

$$H^p(\Gamma, H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \mathcal{F})) \simeq \check{H}^p(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma, \mathcal{F})$$

## 4.2 variété des représentations

Passons maintenant à la construction des variétés de représentations, de caractères ainsi que des schémas associés.

Dans toute la suite, nous nous restreignons au cas du groupe de Lie  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  pour éviter d'alourdir les propositions avec des hypothèses sur  $G$ . Le lecteur intéressé pourra consulter [90] ou [70] pour plus de détails.

**Définition 4.2.1.** Soit  $\Gamma$  un groupe. On appelle *variété des représentations* de  $\Gamma$  l'ensemble  $\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$ . On le notera  $R(\Gamma)$ .

Le terme de variété dans la définition est justifiée par la proposition suivante :

**Proposition 4.2.2** (CULLER et SHALEN, [19]). *Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré. La variété des représentations de  $\Gamma$  admet une structure d'ensemble algébrique affine.*

*Démonstration.* Fixons une présentation  $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$  de  $\Gamma$ , avec  $n$  et  $m$  deux entiers (notons que  $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ). L'espace des  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -représentation de  $\Gamma$ , est naturellement identifié aux  $n$ -uplets de matrices de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  satisfaisant les relations  $R_i$  (le théorème de la base de Hilbert [46] nous permet de remplacer l'ensemble des équations données par les relations  $R_i$  par un ensemble fini d'équations). De plus, deux présentations différentes de  $\Gamma$  donnerons lieu à un isomorphisme entre les schémas correspondants.  $\square$

En remarquant que  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est aussi une variété complexe, cette même construction permet d'affirmer que  $\mathcal{R}(\Gamma)$  est aussi un espace  $\mathbb{C}$ -analytique. Plus précisément, autour d'un point de  $(g_1, \dots, g_n) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})^n$ ,  $R(\Gamma)$  est donné par les fonctions holomorphes obtenues par composition de  $(g_1, \dots, g_n) \mapsto R_i(g_1, \dots, g_n)$  avec les fonctions holomorphes définies dans un voisinage de  $\text{Id}$  dans  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  et s'annulant en ce point.

Afin d'étudier les représentations d'un groupe  $\Gamma$  dans  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , il est utile d'associer à un tel groupe une schéma algébrique affine, que l'on appellera aussi variété des représentations, tel que l'ensemble de ses points fermés corresponde à  $R(\Gamma)$ . Nous allons par la suite voir que ce schéma contient des informations plus subtiles que  $R(\Gamma)$ .

Puisque  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  est un groupe algébrique d'équation  $ad - bc - 1$ , son anneau de coordonnées est

$$\mathbb{C}[\text{SL}_2(\mathbb{C})] = \mathbb{C}[a, b, c, d]/(ad - bc - 1)$$

Et si  $\Gamma$  est un groupe de présentation finie, c'est-à-dire  $\Gamma = F_N/H$  où  $F_N$  est le groupe libre à  $N$  éléments et  $H$  un sous-groupe normal définissant les relations, on pose

$$\text{Rep}(\Gamma) := \mathbb{C}[\text{SL}_2(\mathbb{C})]^{\otimes N}/I_H$$

Où  $I_H$  est l'idéal définissant les relations données par  $H$ .

**Définition 4.2.3.** On appelle aussi *variété des représentations* le schéma affine  $\mathcal{R}(\Gamma) := \text{Spec}(\text{Rep}(\Gamma))$ .

Notons qu'une représentation  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}))$  permet de construire l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent sur  $(\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_N)) \subset \text{SL}_2(\mathbb{C})^N$  et donc un point fermé du schéma  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Et réciproquement, chaque point fermé de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  définit une représentation  $\rho : \Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ .

On obtient finalement une application

$$R(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$$

qui est l'application duale de

$$\text{Rep}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}[\text{SL}_2(\mathbb{C})]^{\otimes N}/\sqrt{I_H} = \mathbb{C}[\text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}))]$$

*Remarque.* KAPOVICH et MILLSON [75] ont montré qu'il n'y avait pas de restrictions locales de la géométrie à la variété des représentations d'un groupe fondamental de variété de dimension 3 (la géométrie de ces variétés suit la "loi de MURPHY"). Plus précisément, si  $X \subset \mathbb{C}^N$  est un schéma algébrique affine sur  $\mathbb{Q}$  et  $x \in X$  un point rationnel alors il existe

- un sous-schéma ouvert  $X' \subset X$  contenant  $x$ ,
- une 3-variété fermée  $M$ ,
- une représentation  $\rho \in \mathcal{R}(\pi_1(M))$ ,

tel qu'il existe un isomorphisme de germes analytiques

$$f : (\mathcal{R}(\pi_1(M)), \rho) \rightarrow (\mathbb{C}^{3k} \times X', 0 \times x)$$

Cela étant, nous ne savons pas si ce théorème est encore valide si l'on remplace  $M$  par une 3-variété fermée hyperbolique (confer [75, Question 8.2]).

En particulier, le schéma  $\mathcal{R}(\Gamma)$  peut-être non réduit (c'est-à-dire qu'il existe des éléments nilpotents non-nuls dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{R}(\Gamma), x}$  pour un certain  $x \in \mathcal{R}(\Gamma)$ ) et puisque les espaces de Kuranishi (confer le chapitre 1) peuvent être non réduits, nous devons bien considérer la variété des représentations non réduite et non sa réduction.

*Remarque.* Puisque ce schéma possède deux topologies, nous prendrons la convention de parler de topologie de Zariski en ajoutant le pré-fixe Zariski ou en précisant clairement lorsque cela sera nécessaire. On parlera dans ce cas de Zariski-ouverts, Zariski-dense, espace tangent de Zariski etc.

**Exemple 4.2.4.** Prenons  $\Gamma = \mathbb{Z}^r$  le groupe abélien libre à  $r$  générateurs  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ . Proche de la représentation triviale  $\rho_0 : \Gamma \mapsto \text{Id}$  (identifiée au point  $(\text{Id}, \dots, \text{Id}) \in \text{SL}_2(\mathbb{C})^r$ ), toute représentation est déterminée par un  $r$ -uplet d'exponentielles d'éléments de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  l'algèbre de Lie de  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  (l'algèbre des matrices de trace nulle). L'application exponentielle  $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^r \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})^r$  définit une carte locale en ce point et les relations de  $\Gamma$  (à savoir les relations de commutativité  $\gamma_i \gamma_j \gamma_i^{-1} \gamma_j^{-1} = 1$ ) définissent la variété des représentations comme le cône dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^r$  défini par

$$\{(X_1, \dots, X_r) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^r \mid [X_i, X_j] = 0, \forall 1 \leq i, j \leq r\}$$

Rappelons le fait bien connu suivant :

**Lemme 4.2.5.** *Le groupe fondamental d'une variété compacte est de présentation finie.*

*Idée de démonstration.* Toute variété différentielle compacte à le type d'homotopie d'un  $CW$ -complexe fini. Par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental d'un  $CW$ -complexe fini est de présentation finie.  $\square$

**Définition 4.2.6.** Soit  $M$  une variété différentiable. On appelle *variété des représentations* de  $M$  le schéma affine  $\mathcal{R}(\pi_1(M))$ .

Le résultat précédent affirme en particulier que la variété des représentations de  $M$  pour toute variété admet une structure d'espace  $\mathbb{C}$ -analytique.

### 4.2.1 Construction de Weil et espaces tangents

Pour le reste de cette section, fixons  $\Gamma$  un groupe finiment présenté et

$$\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \mid R_1, \dots, R_m \rangle$$

une présentation de  $\Gamma$ .

Nous rappelons maintenant la construction de l'espace tangent donnée par WEIL. Soit  $\rho_t$  un chemin (supposé de classe  $C^\infty$ ) de représentations émanant de  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . Posons

$$c(\gamma) := \left. \frac{d\rho_t(\gamma)}{dt} \right|_{t=0} \rho(\gamma)^{-1}$$

On a alors

$$\begin{aligned} c(\gamma\gamma') &= \left. \frac{d\rho_t(\gamma\gamma')}{dt} \right|_{t=0} \rho(\gamma\gamma')^{-1} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\rho_t(\gamma)\rho_t(\gamma')) \rho(\gamma')^{-1} \rho(\gamma)^{-1} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} (\rho_t(\gamma)\rho(\gamma)^{-1}) (\rho(\gamma)\rho_t(\gamma')\rho(\gamma')^{-1} \rho(\gamma)^{-1}) \right|_{t=0} \\ &= c(\gamma) + \text{Ad}_{\rho(\gamma)} c(\gamma'). \end{aligned}$$

On obtient alors  $c \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$

Réciproquement, si  $c \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ , on définit  $h_t(\gamma) = e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)$  et on a que

$$\begin{aligned} h_t(\gamma)h_t(\gamma') &= e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)e^{tc(\gamma')}\rho(\gamma') \\ &= e^{tc(\gamma)}\rho(\gamma)\rho(\gamma^{-1})\rho(\gamma)e^{tc(\gamma')}\rho(\gamma^{-1})\rho(\gamma)\rho(\gamma') \\ &= e^{tc(\gamma)}e^{t\rho(\gamma)c(\gamma')\rho(\gamma^{-1})}\rho(\gamma\gamma') \\ &= e^{tc(\gamma\gamma')}\rho(\gamma\gamma') + o(t) \\ &= h_t(\gamma\gamma') + o(t) \end{aligned}$$

Autrement dit,  $h_t$  est une représentation qui vérifie la condition pour être un morphisme à l'ordre 1. Cette construction nous amène au résultat suivant :

**Théorème 4.2.7** ([70, Proposition 2.2]). *L'application*

$$T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$$

*construite précédemment, est un isomorphisme et l'inclusion  $I \subset \sqrt{I}$  induit une injection*

$$T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma)_{red} \hookrightarrow Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$$

où  $\mathcal{R}(\Gamma)_{red}$  est la réduction du schéma affine  $\mathcal{R}(\Gamma)$  et  $I$  l'idéal définissant la variété  $\mathcal{R}(\Gamma)$ .

De plus, si  $\rho_t$  est donné par la conjugaison de  $\rho$  par un chemin de matrices  $A_t$  tel que  $A_0 = \text{Id}$  alors le cocycle formé est un cobord donné par  $\gamma \mapsto X - \text{Ad}_{\rho(\gamma)} X$  où  $X = \left. \frac{dA_t}{dt} \right|_{t=0}$ . Si on note  $\mathcal{O}_\rho$  l'orbite de  $\rho$  par conjugaison, l'inclusion  $T_\rho \mathcal{O}_\rho \hookrightarrow T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)$  correspond, via l'isomorphisme construit plus haut, à l'inclusion  $B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \hookrightarrow Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ .

*Remarque.* Pour un exemple où l'inclusion  $T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma)_{red} \hookrightarrow Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  être stricte le lecteur peut consulter [44, Exemple 2.18].

**Exemple 4.2.8.** Reprenons l'exemple précédent de  $\Gamma = \mathbb{Z}^r$ . L'espace tangent de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  au point de la représentation triviale n'est pas difficile à expliciter. En effet, la structure de  $\Gamma$ -module de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  donnée par  $\text{Ad}_{\rho_0}$  est triviale.

On a donc l'isomorphisme canonique suivant  $Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2^{\rho_0}) \simeq Z^1(\Gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . On a évidemment  $B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2^{\rho_0}) = 0$  et on en déduit

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2^{\rho_0}) = Z^1(\Gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \text{Hom}(F_r, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^r \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

## 4.2.2 Déformations de représentations

Nous voulons construire dans cette section des déformations infinitésimales de représentations. Cette section est essentiellement tirée de [45]

**Définition 4.2.9.** Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . Une *déformation formelle* de  $\rho$  est un morphisme

$$\rho_\infty : \Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C}[[t]])$$

tel que  $\rho_\infty|_{t=0} = \rho$ .

Il est bien connu qu'une telle déformation peut s'écrire sous la forme

$$\rho_\infty : \gamma \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^{\infty} t^i c_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

avec  $\{c_i\} \subset C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ .

Étant donné  $n$ -cochaines  $c_i \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ ,  $i = 1, \dots, n$  on note  $\rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  l'application

$$\rho^{\{c_1, \dots, c_n\}} : \Gamma \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C}[t]), \quad \gamma \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^n t^i c_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

**Définition 4.2.10.** Soient des cochaines  $c_i \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . On dit que  $\rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  vérifie la *condition d'homomorphie à l'ordre  $k$* ,  $k \leq n$  si

$$p_k \circ \rho^{\{c_1, \dots, c_n\}} \in \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}[t]/(t^{k+1})))$$

où  $p_k : \text{SL}_2(\mathbb{C}[t]) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C}[t]/(t^{k+1}))$  est l'application induite par la projection  $\mathbb{C}[t] \rightarrow \mathbb{C}[t]/(t^{k+1})$ .

Supposons que pour des cochaines  $c_i$ ,  $\rho_n := \rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  vérifie la condition d'homomorphie à l'ordre  $n$ . Nous voulons construire l'obstruction à éteisomorpndre cette application à l'ordre  $n + 1$ , c'est à dire l'obstruction à l'existence d'une cochaîne  $c_{n+1} \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  telle que  $\rho^{\{c_1, \dots, c_{n+1}\}}$  vérifie la condition d'homomorphie à l'ordre  $n + 1$ . Cette construction à été faite dans [45] en suivant les idées de DOUADY que nous reverrons dans leurs contexte original au chapitre suivant.

Une application  $\rho_n := \rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  qui vérifie la condition d'homomorphie à l'ordre  $k$ ,  $k \leq n$ , permet de définir une structure de  $\Gamma$ -module sur le groupe abélien  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t]/(t^{k+1}))$  via la représentation adjointe de  $p_k \circ \rho_n$ . Nous noterons  $\mathfrak{g}_k^{\rho_n}$  cette algèbre muni de cette structure.

**Lemme 4.2.11** ([45]). *Soient des cochaines  $c_i \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Pour tout  $1 \leq k \leq n$ , l'application  $\rho_n := \rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  vérifie la condition d'homomorphie à l'ordre  $k$  si, et seulement si,  $C_k^n := p_k \circ \frac{d\rho_n}{dt} \rho_n^{-1} \in C^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{k-1}^{\rho_n})$  vérifie la condition de cocycle.*

*Démonstration.* Supposons que  $\rho_n$  soit un morphisme à l'ordre  $k$ . Alors

$$\rho_n(\gamma\gamma') \equiv \rho_n(\gamma)\rho_n(\gamma') \pmod{t^{k+1}}$$

en appliquant  $\frac{d}{dt}$ , on a

$$\frac{d\rho_n}{dt}(\gamma\gamma') \equiv \frac{d\rho_n}{dt}(\gamma)\rho_n(\gamma') + \rho_n(\gamma)\frac{d\rho_n}{dt}(\gamma') \pmod{t^k}$$

Ce que l'on peut réécrire

$$\frac{d\rho_n}{dt}(\gamma\gamma')\rho_n(\gamma\gamma')^{-1} \equiv \frac{d\rho_n}{dt}(\gamma)\rho_n(\gamma)^{-1} + \text{Ad}_{\rho_n(\gamma)}\left(\frac{d\rho_n}{dt}(\gamma')\rho_n(\gamma')^{-1}\right) \pmod{t^k}$$

Et finalement, on a :

$$C_{k-1}^n(\gamma\gamma') = C_{k-1}^n(\gamma) + \text{Ad}_{p_{k-1} \circ \rho_n(\gamma)}(C_{k-1}^n(\gamma'))$$

D'un autre côté, si  $C_k^n$  est un cocycle, en faisant le calcul précédent dans l'autre sens, on voit que à l'ordre  $k$ , pour tout  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ ,  $\rho_n(\gamma)\rho_n(\gamma')$  et  $\rho_n(\gamma\gamma')$  diffère d'une constante  $C \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  mais cette différence est nulle pour  $\gamma = \gamma' = \text{Id}$ . On retrouve donc bien la condition d'homomorphie à l'ordre  $k$ .  $\square$

La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[t]/(t^n) \rightarrow \mathbb{C}[t]/(t^{n-1}) \rightarrow 0$$

induit la suite de  $\Gamma$ -module suivante :

$$0 \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho \rightarrow \mathfrak{g}_n^{\rho_n} \rightarrow \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_n} \rightarrow 0$$

On obtient la suite exacte suivante, tirée de la suite exacte longue associée en cohomologie :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_n^{\rho_n}) \xrightarrow{\widetilde{p}_{n-1}} H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_n}) \xrightarrow{\delta^n} H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \quad (4.2)$$

où  $\delta^n$  est l'application connectante décrite dans la [théorème 4.1.5](#).

Comme précédemment, considérons  $n$  cochaines  $c_i \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ ,  $i = 1, \dots, n$  et  $C_k^n := p_k \circ \frac{d\rho_n}{dt} \rho_n^{-1}$ . Supposons que  $\rho_n$  soit un morphisme jusqu'à l'ordre  $n$ , alors par le lemme précédent,  $C_n^n$  est un élément de  $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_n})$ . Par exactitude de la suite (4.2), si la classe représentée par  $\delta^n(C_n^n)$  est nulle, alors il existe un élément  $\widetilde{C_{n+1}^n}$  dans  $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_n^{\rho_n})$  tel que  $C_n^n = p_n \left( \widetilde{C_{n+1}^n} \right)$ . Ou, de façon équivalente, il existe une cochaîne  $c_{n+1}$  telle que  $\rho_{n+1} := \rho^{c_1, \dots, c_{n+1}}$  soit un morphisme à l'ordre  $n+1$ .

Nous pouvons résumer cette construction dans la proposition suivante

**Proposition 4.2.12** ([45]). *Soient des cochaines  $c_i \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ ,  $i = 1, \dots, n$  telles que  $\rho^{\{c_1, \dots, c_n\}}$  soit un morphisme à l'ordre  $n$  et soit  $C_n^n = p_n \circ \frac{d\rho_n}{dt} \rho_n^{-1}$ . Alors, il existe une cochaîne  $c_{n+1}$  telle que  $\rho^{\{c_1, \dots, c_{n+1}\}}$  soit un morphisme à l'ordre  $n+1$  si, et seulement si,  $\delta^n C_n^n = 0 \in H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ .*

**Exemple 4.2.13.** Si  $c_1$  est un cocycle et  $\rho^{c_1}$  l'application associée qui vérifie la condition de morphisme à l'ordre 1. Supposons que l'élément  $C_1^1 = p_1 \circ \frac{d\rho_1}{dt} \rho_1^{-1} = c_1$  soit envoyé sur 0 par  $\delta^1 : H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  alors il existe  $\widetilde{C_1^2} = c_1 + 2tc_2 \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_1^{\rho_1})$  avec  $c_2 \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ . Autrement dit,

$$c_1(\gamma\gamma') + 2tc_2(\gamma\gamma') = c_1(\gamma) + 2tc_2(\gamma) + \text{Ad}_{\rho^{c_1}(\gamma)}(c_1(\gamma') + 2tc_2(\gamma'))$$

En développant à l'ordre 1 l'exponentielle dans l'expression  $\rho^{c_1}(\gamma) = \exp(tc_1(\gamma))\rho(\gamma) = (\text{Id} + tc_1(\gamma))\rho(\gamma)$  et en regroupant les termes par degrés, on obtient la condition de cocycle de  $c_1$  en degré 0 et on obtient en degré 1 :

$$2c_2(\gamma) - 2c_2(\gamma\gamma') + \text{Ad}_{\rho(\gamma)}(2c_2(\gamma')) = \underbrace{-c_1(\gamma)\rho(\gamma)c_1(\gamma')\rho(\gamma)^{-1} + \rho(\gamma)c_1(\gamma')\rho(\gamma)^{-1}c_1(\gamma)}_{-[c_1 \smile c_1](\gamma, \gamma')}$$

On reconnaît alors  $dc_2(\gamma, \gamma') = -\frac{1}{2}[c_1 \smile c_1](\gamma, \gamma')$ .

On peut évidemment continuer les calculs aux ordres supérieurs avec la formule de Campbell-Hausdorff, voir par exemple [1].

## 4.3 Variété de caractères

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous allons construire dans cette thèse le *champ de caractères* (voir le chapitre 2 et le chapitre 7). Cette construction n'aurait pas d'intérêt si le bénéfice de la vision champêtre par rapport à la construction standard de la variété de caractères (issue de la théorie des invariants géométriques) n'était pas important. Nous avons donc besoin de justifier ce choix et de comparer les deux constructions. Cette section reprend les bases de la théorie des invariants géométriques et en particulier de la construction de la variété de caractères.

Avant de donner la construction de cette variété, nous revenons sur les définitions inhérentes à la théorie des invariants géométriques et donnons quelques exemples qui permettent de motiver cette théorie.

Le lecteur intéressé pourra consulter [80] ou [83].

### 4.3.1 Quotients géométriques et catégoriques

**Définition 4.3.1.** Soit  $X$  une variété algébrique muni d'une  $G$ -action, où  $G$  est un groupe algébrique. Un *quotient catégorique* de  $X$  par  $G$  est une paire  $(Y, \phi)$ , où  $Y$  est une variété et  $\phi : X \rightarrow Y$  est un morphisme  $G$ -invariant tel que pour tout autre morphisme  $G$ -invariant  $f : X \rightarrow Z$ , il existe un unique morphisme  $\psi : Y \rightarrow Z$  tel que  $f = \psi \circ \phi$ .

De plus, si  $\phi^{-1}(y)$  est une orbite pour tout  $y \in Y$ , on dit que  $(Y, \phi)$  est un *espace d'orbites*.

*Remarque.* Un quotient catégorique n'est défini qu'à isomorphisme près.

Voici un exemple qui peut servir de motivation à l'utilisation des champs (confer [chapitre 7](#)).

**Exemple 4.3.2.** Soit  $k$  un corps, que nous supposons de caractéristique 0. Considérons l'action de  $GL_n(k)$  sur  $M_n(k)$  par conjugaison. Nous affirmons que la paire  $(k^n, \chi)$  avec  $\chi : M_n(k) \rightarrow k^n$  donné par le polynôme caractéristique est un quotient catégorique.

Faisons-le pour  $n = 2, k = \mathbb{C}$ , les autres cas n'étant pas beaucoup plus difficiles. Soit

$$f : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow Z$$

un morphisme  $GL_2(\mathbb{C})$ -invariant. Puisqu'il est constant le long de chaque orbite, on peut considérer la forme de Jordan pour distinguer les orbites et on obtient trois types :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Mais les matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ont le même polynôme caractéristique. Si on considère

$$B_t := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & t^2 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

on obtient que  $f(B_t) = f(B_1)$  pour tout  $t \neq 0$  et donc inévitablement, aussi pour  $t = 0$ .

Considérons le morphisme  $p : \mathbb{C}^2 \ni v \rightarrow C_v \in M_2(\mathbb{C})$  qui associe à un vecteur  $v$  la matrice compagnon associée, on peut construire l'application

$$\psi : \mathbb{C}^2 \rightarrow Z, \quad v \mapsto f(C_v)$$

qui vérifie bien les propriétés d'un quotient catégorique.

*Remarque.* Le quotient catégorique  $(k^n, \chi)$  n'est pas un espace d'orbites. En effet, on a  $\chi(\text{Id}) = (-2, 1)$  et  $\chi^{-1}((-2, 1)) = \mathcal{O}_{\text{Id}} \cup \mathcal{O}_I$  où  $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Définition 4.3.3.** Soit  $X$  une  $G$ -variété, c'est à dire une variété muni d'une  $G$ -action. Un *bon quotient* de  $X$  par  $G$  est une paire  $(Y, \phi)$ , avec  $Y$  une variété et  $\phi : X \rightarrow Y$  un morphisme surjectif  $G$ -invariant tel

que

- si  $U$  est un ouvert de  $Y$ , alors

$$\phi^* \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(\phi^{-1}(U))$$

est un isomorphisme sur  $\mathcal{O}(\phi^{-1}(U))^G$ ,

- si  $W$  est fermé, alors  $\phi(W)$  est fermé,
- si  $W_1, W_2$  sont des fermés disjoints de  $X$  alors  $\phi(W_1) \cap \phi(W_2) = \emptyset$ .

où les fermés (*resp.* ouverts) sont des fermés (*resp.* ouverts) pour la topologie de Zariski.

De plus, si  $(Y, \phi)$  est un espace d'orbites, alors on dit que c'est un *quotient géométrique*.

*Remarque.* Les concepts de bons quotients (*resp.* quotients géométriques)  $(Y, \phi)$  sont locaux par rapport à  $Y$  dans le sens où

- si  $U$  est ouvert dans  $Y$  alors  $(U, \phi)$  est un bon quotient (*resp.* quotient géométrique) pour  $\phi^{-1}(U)$ ,
- si  $\{U_i\}$  est un recouvrement de  $Y$  par des ouverts tels que  $(U_i, \phi)$  est un bon quotient (*resp.* quotient géométrique) de  $\phi^{-1}(U_i)$ , alors  $(Y, \phi)$  est un bon quotient (*resp.* quotient géométrique) de  $X$ .

**Proposition 4.3.4.** *Un bon quotient est un quotient catégorique.*

**Exemple 4.3.5.** Pour la  $GL_2(\mathbb{C})$ -variété  $M_2(\mathbb{C})$ , le quotient catégorique n'est pas un bon quotient puisque  $\det$  n'est pas fermée. En effet, considérons le sous-espace des matrices  $M_t := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$ , il est clairement fermé puisque  $\|M_t\| = \begin{cases} |t| & \text{si } |t| \geq 1 \\ \frac{1}{|t^2|} & \text{si } |t| \leq 1 \end{cases}$ , mais  $\det(\{M_t \mid t \in \mathbb{C}^*\}) = ]0, +\infty[$ .

### 4.3.2 Quotients affines

Soit  $X$  est une  $G$ -variété affine. On aimerait avoir un quotient catégorique  $(Y, \phi)$  de  $X$  par  $G$  avec  $Y$  affine. Remarquons que pour un quotient catégorique  $(Y, \phi)$ , tout morphisme  $G$ -invariant  $f : X \rightarrow k$  se factorise via  $\phi$ . En termes algébriques, cela signifie que

$$\phi^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$$

est un isomorphisme sur les  $G$ -invariants  $\mathcal{O}(X)^G$ . Ainsi,  $Y$  est affine si, et seulement si,  $\mathcal{O}(X)^G$  est finiment engendrée. La question de savoir si  $\mathcal{O}(X)^G$  est finiment engendré dès lors que  $\mathcal{O}(X)$  l'est est une version du 14ème problème de Hilbert. un peu plus tard, NAGATA donna un contre-exemple et une condition suffisante sur  $G$  à ce problème.

**Définition 4.3.6.** Soit  $k$  un corps. Un groupe algébrique  $G$  est *géométriquement réductif* si étant donné une représentation rationnelle (c'est à dire une représentation  $G \rightarrow GL_n(k)$ ) de dimension finie  $V$  de  $G$  et un vecteur invariant  $v \in V$  il existe un polynôme homogène  $G$ ,  $f : V \rightarrow k$  tel que  $f(v) = 1$ .

**Proposition 4.3.7.** *Si  $\text{char}(k) = 0$ , alors*

- *tout groupe fini est géométriquement réductif,*

- $\mathrm{SL}_n(k)$ ,  $\mathrm{GL}_n(k)$  sont géométriquement réductifs.

**Définition 4.3.8.** Soit  $G$  un groupe algébrique et  $R$  une  $k$ -algèbre. Une *action rationnelle* de  $G$  sur  $R$  est une application  $R \times G \rightarrow R$  telle que

- $(gg').f = g'.(g.f)$  et  $e.f = f$ ,
- $f \rightarrow g.f$  est automorphisme de la  $k$ -algèbre  $R$ ,
- tout élément de  $R$  est contenu dans un sous-espace fini-dimensionnel  $G$ -invariant sur lequel  $G$  agit par une représentation rationnelle.

**Théorème 4.3.9.** NAGATA Soit  $G$  un groupe algébrique géométriquement réductif agissant via une représentation rationnelle sur une  $k$ -algèbre  $R$  finiment engendrée, alors  $R^G$  est aussi finiment engendrée.

Voir [83], par exemple, pour la preuve.

*Remarque.* En caractéristique 0, la notion usuelle de groupe réductif (c'est à dire, avec radical unipotent trivial) est équivalent à celle d'être géométriquement réductif. Comme nous restons dans ce contexte, nous enlevons le terme "géométriquement".

**Théorème 4.3.10.** Soit  $X$  une  $G$ -variété affine avec  $G$  un groupe réductif. Alors, il existe un bon quotient  $(Y, \phi)$  avec  $Y$  affine.

Par le théorème de NAGATA, nous savons que  $\mathcal{O}(X)^G$  est finiment engendré et il vient que  $\mathrm{Spm}(\mathcal{O}(X)^G)$  est une variété affine.

**Définition 4.3.11.** Soient  $X$  une  $G$ -variété affine et  $G$  un groupe réductif. On appelle *quotient GIT* de  $X$  par  $G$ , la variété  $\mathrm{Spec}(k[X]^G)$  et on la note  $X//G$ .

**Proposition 4.3.12.** Soit  $X$  une  $G$ -variété et  $(Y, \phi)$  un bon quotient. Alors,

- $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{O}_{x_1}} \cap \overline{\mathcal{O}_{x_2}} \neq \emptyset$ ,
- si la  $G$ -action sur  $X$  est fermée, c'est à dire que toutes les orbites sont fermées, alors  $(Y, \phi)$  est un quotient géométrique.

*Remarque.* Le lecteur familier de la théorie des invariants géométriques de MUMFORD notera que nous n'aurons pas besoin de la notion de stabilité (*resp.* semi-stabilité, instabilité) puisque dans la suite, nous travaillerons avec  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (un groupe semi-simple) agissant sur la variété des représentations (une variété affine) dont tous les points seront semi-stables.

### 4.3.3 Quotient de la variété des représentations

Appliquons les constructions des paragraphes précédents au cas de l'action par conjugaison sur la variété des représentations. Le [théorème 4.3.10](#) permet d'affirmer l'existence d'une variété algébrique affine qui est un bon quotient (munie de l'application naturellement associée à sa construction) pour l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{R}(\Gamma)$ .

Pour simplifier les notations, cette section se restreint au cas où le groupe réductif  $G$  de la section précédente est  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Le lecteur adaptera facilement les définitions/résultats dans un contexte plus

général. Voici quelques bonnes références au sujet introduit dans cette section : [90], [19], [70] ou encore [69].

Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré. On définit l'algèbre  $A(\Gamma)$  par

$$A(\Gamma) := \mathbb{C}[X_{i,j}^\gamma, \gamma \in \Gamma, i, j \in \{1, 2\}] / (\det X^\gamma - 1, X^\gamma X^\delta - X^{\gamma\delta}, \text{ avec } \gamma, \delta \in \Gamma)$$

où  $X^\gamma$  est la matrice  $(X_{i,j}^\gamma)_{i,j}$ . Notons que l'on a  $\text{Spec}(A(\Gamma)) = \mathcal{R}(\Gamma)$ .

On note traditionnellement  $\mathcal{X}(\Gamma)$  le quotient  $\mathcal{R}(\Gamma) // \text{SL}_2(\mathbb{C})$  défini par le spectre des  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -invariants de  $A(\Gamma)$ , c'est-à-dire  $\text{Spec}(A(\Gamma)^{\text{SL}_2(\mathbb{C})}) = \mathcal{R}(\Gamma) // \text{SL}_2(\mathbb{C})$ . On a alors le résultat suivant (voir [71] par exemple).

**Théorème 4.3.13.** *Les ensembles suivants sont en bijection :*

- les points fermés de  $\mathcal{X}(\Gamma)$ ,
- les  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbites fermées de  $\mathcal{R}(\Gamma)$ .

Justifions succinctement le nom de variété de caractères.

**Définition 4.3.14.** Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré. Un  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -caractère de  $\Gamma$  est la trace d'une  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ -représentation :

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} \text{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\text{Tr}} \mathbb{C}$$

On note  $\chi_\rho$  le caractère de  $\Gamma$  associé à la représentation  $\rho$  et  $\text{Ch}(\Gamma)$  l'ensemble des caractères de  $\Gamma$ .

Notons  $B(\Gamma)$  la sous-algèbre de  $A(\Gamma)$  engendrée par les fonctions linéaires

$$\Gamma \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma \mapsto \text{Tr}(X^\gamma)$$

**Proposition 4.3.15** ([69, Propositions 1 and 3]). *On a les isomorphismes suivants :*

$$B(\Gamma) \simeq A(\Gamma)^{\text{SL}_2(\mathbb{C})}$$

et

$$\text{Ch}(\Gamma) \simeq \text{Spec}(B(\Gamma))$$

où l'isomorphisme est induit par l'application qui envoie  $\chi_\rho$  sur  $\tau_\rho(\gamma) = \chi_\rho(\gamma)$ .

Dont on déduit immédiatement.

**Corollaire 4.3.16.** *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\text{Ch}(\Gamma) \simeq \mathcal{X}(\Gamma)$$

*Remarque.* Même si ce n'est pas logiquement nécessaire pour la suite, on peut introduire l'algèbre de Skein.

Considérons l'algèbre

$$S(\Gamma) := \mathbb{C}[X_\gamma, \gamma \in S] / (X_{\text{Id}} - 2, X_{\gamma\delta} + X_\gamma X_{\delta^{-1}} - X_\gamma X_\delta), \text{ avec } \gamma, \delta \in S)$$

où  $S$  est une partie (finie) génératrice de  $\Gamma$ . Il découle de la célèbre relation

$$\mathrm{Tr}(AB) + \mathrm{Tr}(AB^{-1}) = \mathrm{Tr}(A) \mathrm{Tr}(B), \quad \forall A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

un isomorphisme entre  $A(\Gamma)$  et  $S(\Gamma)$ .

**Exemple 4.3.17.** Reprenons l'exemple de  $\Gamma = \mathbb{Z}$ . Considérons  $G$  un groupe réductif,  $\mathbb{T}$  un tore maximal de  $G$  et  $W$  le groupe de Weyl de  $G$ . On a [91, Corollaire 6.4]

$$\mathbb{T}/W \rightarrow \mathcal{X}_G(\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Dans le cas de  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , on se retrouve dans une version légèrement adaptée de l'[théorème 4.3.2](#). À conjugaison près, un tore maximal de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est donné par

$$\mathbb{T} = \left\{ \left( \begin{array}{cc} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{array} \right) \mid z \in \mathbb{C}^* \right\}$$

et le groupe de Weyl  $W$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  de ce tore est donné par le quotient du normalisateur de  $\mathbb{T}$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par  $\mathbb{T}$ . On obtient après calcul que le groupe de Weyl est le sous-groupe (isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  obtenu comme quotient du groupe engendré par  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  par le centre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Le groupe de Weyl agit sur  $\mathbb{T}$  en permutant les valeurs sur la diagonale. On obtient finalement que

$$\mathbb{C}^* / \sim \simeq \mathcal{X}(\mathbb{Z})$$

où  $z \sim z^{-1}$ . L'isomorphisme est naturellement donné par  $z \rightarrow \tau_\rho$  avec  $\tau_\rho(1) = z + z^{-1}$ .

On rappelle qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est dit complètement réductible si pour tout groupe parabolique  $P \subset G$  contenant  $H$  il existe un groupe de Levi  $L \subset P$  contenant  $H$ . Lorsque  $G$  est un groupe réductif, on a [90, Proposition 8] que  $H$  est un sous groupe complètement réductif dans  $G$  si, et seulement si, sa clôture de Zariski est un sous-groupe linéaire réductif. On dira par la suite qu'une représentation est complètement réductible si son image est un sous-groupe complètement réductible de  $G$ .

Pour caractériser le lieu poly-stable, on peut utiliser le théorème suivant :

**Théorème 4.3.18** (SIKORA, [90, Theorem 30]). *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . Alors  $\mathcal{O}(\rho)$  est fermée si, et seulement si,  $\rho$  est complètement réductible.*

**Exemple 4.3.19.** Dans l'exemple précédent, puisque toutes les représentations sont abéliennes, toutes ont un stabilisateur de dimension au moins 1 et aucun point n'est stable au sens de [80]. Prenons l'exemple du groupe libre à deux éléments  $F_2$ . Il est connu, par un théorème de FRICKE (voir [90] par exemple), que la variété de caractères  $\mathcal{X}(F_2)$  est isomorphe à  $\mathbb{C}^3$  via l'application suivante :

$$(A, B) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(F_2, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) \mapsto (\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B), \mathrm{Tr}(AB)) \in \mathbb{C}^3$$

De manière plus générale, on peut montrer par exemple que  $\mathcal{X}(F_r)$  est une variété, où  $F_r$  est le groupe libre à  $r$  éléments.

Les variétés de représentations et de caractères ont été largement étudiées, en particulier, voici quelques références sur les propriétés algébriques de celles-ci. [69], [68], [70], [47], [36], [14], [90].

Ces variétés apparaissent, comme nous le verrons dans cette thèse (confer [chapitre 7](#)), dans de nombreux problèmes de modules de structures géométriques ainsi que dans des problèmes de modules de connections plates, ou des fibrés de Higgs. Le cas des structures hyperboliques sur les surfaces a notamment été traité, entre autre, dans [34], [35], [33], [49], [39].

Pour un aperçu plus complet de l'étendue des travaux dans d'autres domaines, voir [90, §11. Character varieties].

*Remarque.* A notre connaissance, le lien entre variété de caractères et sa version champêtre n'est pas encore bien documenté. On peut cependant citer [98] concernant les "*derived character varieties*".



# STRUCTURES COMPLEXES DES ESPACES HOMOGÈNES DE $SL_2(\mathbb{C})$

Nous abordons maintenant le principal sujet de cette thèse, celui des déformations de structures complexes des quotients compacts de  $SL_2(\mathbb{C})$  par des sous-groupes discrets. Nous l'avons mentionné dans l'introduction, ce sont les travaux de GHYS [31] qui ont, entre autre, permis d'expliciter les espaces de Kuranishi de ces quotients. Le principal objectif de ce chapitre est donc de revenir sur les résultats de cet article. En particulier, nous verrons comment l'auteur compare les déformations de la  $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}))$ -structure naturelle des quotients  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  en utilisant le principe d'Ehresmann-Thurston avec les déformations de la structure complexe de ce quotient. Nous reviendrons dans le même temps sur les théorèmes de rigidité de Weil et de Mostow qui caractérisent l'holonomie de la  $(G, X)$ -structure sur  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Nous profiterons de ce chapitre pour discuter du premier nombre de Betti de  $\Gamma$  qui permet de donner des renseignements sur la « complexité » de la variété des représentations.

Nous donnerons dans une deuxième partie les calculs de certains groupes d'automorphismes des variétés obtenues par déformation de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . En particulier, nous aurons besoin du calcul du groupe  $\text{Aut}^1(SL_2(\mathbb{C})/\Gamma)$  (défini dans le [chapitre 2](#)) correspondant au groupe d'isotropie dans le champ de Teichmüller.

Avant de revenir sur les résultats soulignés dans cette introduction et qui motivent cette thèse, nous donnons rapidement le lien entre ces quotients et les variétés hyperboliques de dimension 3. Cette relation a des intérêts multiples :

- elle nous renseigne sur la géométrie des quotients  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ ,
- elle justifie l'intérêt de ces travaux par l'abondance d'exemples grâce au théorème d'hyperbolisation de THURSTON [96],
- la cohomologie des quotients  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  est largement liée à celle de  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ .

Elle permet en outre de justifier pleinement le nom donné à cette thèse.

## 5.1 Variété hyperbolique de dimension 3 et son fibré de repères

On rappelle que  $\mathbb{H}^3$  est l'espace hyperbolique défini par

$$\mathbb{H}^3 := \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

muni de la métrique de Poincaré. Son bord  $\partial\mathbb{H}^3 = \{t = 0\} \cup \{\infty\}$  s'identifie à la sphère de Riemann  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . L'action du groupe  $PSL_2(\mathbb{C})$  sur la sphère de Riemann par transformations de Möbius s'étend continûment en une action sur  $\mathbb{H}^3$  de la façon suivante. Les *transformations normales* sont des cas particulier de transformations de Möbius et sont données par

$$m_1 : z \mapsto z + 1, \quad \text{et} \quad m_k : z \mapsto kz, \quad 1 \neq k \in \mathbb{C}$$

Toute transformation de Möbius est conjuguée à une transformation normale et on peut donc se restreindre à étendre ces dernières, ce que l'on fait en posant

$$f_1 : (z, t) \mapsto (m_1(z), t), \quad \text{et} \quad f_k : (z, t) \mapsto (m_k(z), |k|t)$$

De plus cette construction d'isométries de  $\mathbb{H}^3$  donne une bijection entre  $\text{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$  et  $PSL_2(\mathbb{C})$ . Pour obtenir le groupe  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  tout entier, il faut aussi considérer l'isométrie induite par l'isométrie  $z \mapsto \bar{z}$  du bord de  $\mathbb{H}^3$  qui renverse l'orientation.

Soit  $M$  une variété et  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Au dessus de chaque point  $x \in M$ , on note  $GL(E_x)$  l'ensemble des bases ordonnées de  $E_x := \pi^{-1}(x)$ . L'ensemble  $GL(E) := \bigsqcup_{x \in M} GL(E_x)$  est donc l'ensemble des couples  $(x, \mathcal{B})$  avec  $x \in M$  et  $\mathcal{B} \in GL(E_x)$  et est donc muni d'une projection naturelle

$$\pi' : GL(E) \rightarrow M, \quad (x, \mathcal{B}) \mapsto x$$

De plus, si  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  est une trivialisatoin locale de  $E$  alors,

$$\psi : \pi'^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow U \times GL_n(\mathbb{R}), \quad (x, \mathcal{B}) \mapsto (x, \phi(b_1), \dots, \phi(b_n))$$

où  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ , est une trivialisatoin de  $GL(E)$ . On remarque que pour tout  $x \in M$ ,  $GL_n(\mathbb{R})$  agit sur  $GL(E_x)$  par multiplication à gauche de façon libre et transitive. Ainsi,  $GL(E)$  est un  $GL_n(\mathbb{R})$ -fibré principal.

**Définition 5.1.1.** Soit  $M$  une variété et  $\pi : E \rightarrow M$  un fibré vectoriel de rang  $n$ . Le fibré  $GL(E) \rightarrow M$  est appelé *fibré des repères de  $E$* .

De la même façon, si  $E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel de rang fini muni d'une métrique, c'est-à-dire muni d'une application

$$k : E \times_M E \rightarrow M \times \mathbb{R}$$

tel que sa restriction en chaque fibre soit une application bilinéaire non-dégénérée, on pose  $O(E_x)$  l'ensemble des bases orthonormés pour  $k|_{\pi^{-1}(x)}$  et on peut définir  $\pi' : O(E) := \bigsqcup_{x \in M} O(E_x) \rightarrow M$  le fibré des

repères *orthonormés* de  $E$ . De la même façon, on peut que pour le fibré des repères, on peut trouver une trivialisatation de ce fibré.

Si de plus, le fibré  $E \rightarrow M$  est orienté, on peut encore considéré le fibré  $SO(E) := \bigsqcup_{x \in M} SO(E_x) \rightarrow M$ , où  $SO(E_x)$  est l'ensemble des bases orthonormées directes de  $E_x$ . On l'appelle le fibré des repères orthonormés directs de  $E$ .

Remarquons que les fibrés  $SO(E)$  et  $O(E)$  ne dépendent que (à isomorphisme près) de la signature  $(p, q)$  (avec  $p + q = \text{rk}(E)$ ) de la métrique  $k$ .

**Définition 5.1.2.** Soit  $M$  un variété riemannienne. On appelle *fibré des repères* (resp. *fibré des repères orthonormés de  $M$* ) le fibré  $GL(M)$  (resp.  $O(M)$ ) des repères de  $TM$  (resp. fibré des repères orthonormés de  $TM$  muni de la métrique riemannienne). Si de plus  $M$  est orientée, on appelle *fibré des repères orthonormés directs de  $M$*  le fibré  $SO(M)$  des repères orthonormés directs de  $TM$ .

Avec les rappels précédents, on voit que  $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq \text{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$  agit transitivement et simplement sur  $SO(\mathbb{H}^3)$ , on a donc  $SO(\mathbb{H}^3) \simeq PSL_2(\mathbb{C})$ . Soit  $V$  une variété hyperbolique fermée de dimension 3, c'est-à-dire revêtue par  $\mathbb{H}^3$ , on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 PSL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & PSL_2(\mathbb{C})/\pi_1(V) \\
 \downarrow & \searrow & & & \swarrow \\
 & & SO(\mathbb{H}^3) & \longrightarrow & SO(\mathbb{H}^3/\pi_1(V)) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbb{H}^3 & \longrightarrow & V \\
 \downarrow & \swarrow & & & \swarrow \\
 PSU(2) \backslash PSL_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & PSU(2) \backslash PSL_2(\mathbb{C})/\pi_1(V)
 \end{array}$$

D'où finalement,  $SO(V) \simeq PSL_2(\mathbb{C})/\pi_1(V)$ .

Par ailleurs, on a le résultat de THURSTON :

**Théorème 5.1.3** (THURSTON, [97]). *Soit  $M$  une variété hyperbolique fermée de dimension 3. Alors la représentation de  $\pi_1(M)$  dans  $PSL_2(\mathbb{C})$  peut être relevée à  $SL_2(\mathbb{C})$ .*

*Remarque.* L'ensemble des relevés de  $\Gamma$  à  $SL_2(\mathbb{C})$  est en bijection avec  $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{b_1(\Gamma)}$  et correspond aux classes d'équivalence de structures spinorielle sur  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  classifiée par  $H^1(\mathbb{H}^3/\Gamma)$  (puisque toute 3-variété est spin).

On dispose donc d'un isomorphisme  $l : \pi_1(M) \rightarrow \Gamma \subset SL_2(\mathbb{C})$  et on peut alors considérer la variété  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . La variété  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  est donc un double revêtement (revêtement spin) du fibré des repères orthonormés de la variété hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . Puisque cette variété est revêtue par  $\mathbb{H}^3$ , c'est en particulier un espace d'Eilenberg-Maclane  $K(\Gamma, 1)$  et la cohomologie à coefficients entiers de cette variété coïncide avec celle de  $\Gamma$  :

$$H^n(\mathbb{H}^3/\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq H^n(\Gamma, \mathbb{Z}), \quad n \geq 0$$

Par ailleurs, nous l'avons vu, puisque  $SL_2(\mathbb{C})$  est Stein, la cohomologie du quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  est reliée à celle de  $\Gamma$ , plus précisément :

**Proposition 5.1.4.** *Soit  $M$  une variété hyperbolique fermée de dimension 3 et  $\Gamma \subset PSL_2(\mathbb{C})$  une représentation de son groupe fondamental (correspondant à la structure hyperbolique). Alors, on a les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned} H^i(SL_2(\mathbb{C})/\Gamma) &\simeq H^i(\Gamma), \quad i = 0, 1, 2 \\ H^i(SL_2(\mathbb{C})/\Gamma) &\simeq H^{i-3}(\Gamma), \quad i = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $\tilde{\Gamma}$  un relevé de  $\Gamma$ . La variété  $SL_2(\mathbb{C})/\tilde{\Gamma}$  est homéomorphe à  $SU(2) \times \mathbb{H}^3/\Gamma$ . En particulier, la formule de Künneth nous donne

$$H^n(SL_2(\mathbb{C})/\tilde{\Gamma}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} H^p(\mathbb{H}^3/\Gamma) \otimes H^q(SU(2))$$

mais puisque  $SU(2)$  est la sphère de dimension 3,

$$H^q(SU(2)) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } q = 0, 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors le résultat annoncé. □

### 5.1.1 Théorèmes de rigidité

Dès que l'on se donne un groupe discret co-compact  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$  sans torsion, on peut reconstruire une variété hyperbolique fermée de dimension 3 via  $\mathbb{H}^3/p(\Gamma)$  (où  $p : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$  est la projection naturelle). De plus, cette correspondance entre sous-groupes discrets co-compacts sans torsion de  $PSL_2(\mathbb{C})$  et les 3-variétés hyperboliques fermées est essentiellement unique par la célèbre rigidité de Mostow :

**Théorème 5.1.5** (Rigidité de MOSTOW (forme algébrique), [78]). *Soient  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , deux sous-groupes discrets co-compacts de  $PSL_2(\mathbb{C})$  isomorphes. Alors, l'isomorphisme entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  s'étend en un automorphisme continu de  $PSL_2(\mathbb{C})$ .*

En particulier, le résultat s'applique lorsque  $G = SO(n, 1)$ ,  $n \geq 3$  et on obtient la formulation géométrique suivante :

**Théorème 5.1.6** (Rigidité de MOSTOW (forme géométrique), [78]). *Soient  $M$  et  $N$  deux variétés hyperboliques de dimension  $n \geq 3$ . Tout isomorphisme  $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$  provient d'une unique isométrie entre  $M$  et  $N$ .*

*Remarque.* Lorsque le quotient d'un groupe de Lie  $G$  par un sous-groupe discret  $\Gamma$  a une mesure de Haar finie, le groupe  $\Gamma$  est appelé un *réseau* de  $G$ . Le théorème de rigidité de Mostow à été généralisé au cas des réseaux irréductibles par G. PRASAD [85].

Dans le cas qui nous intéresse, puisque  $SL_2(\mathbb{C})$  n'a pas un centre trivial, on peut appliquer la rigidité de Mostow à  $SL_2(\mathbb{C})$  en projetant sur  $PSL_2(\mathbb{C})$  et en relevant ensuite.

**Lemme 5.1.7** (DIEUDONNÉ, [23]). *Les automorphismes extérieurs de  $PSL_2(\mathbb{C})$  sont, à conjugaison près, soit l'identité soit la conjugaison complexe.*

On obtient alors le corollaire suivant :

**Corollaire 5.1.8.** *Si  $\phi$  est un isomorphisme entre deux sous-groupes de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  discrets et co-compacts  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  alors il existe un morphisme de groupes  $\varepsilon : \Gamma_1 \rightarrow \pm\{\mathrm{Id}\}$  et un élément  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tel que  $\phi$  soit donné par*

$$\phi = \varepsilon.\iota_g : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, \quad \gamma \mapsto \varepsilon(\gamma)g\gamma g^{-1}$$

ou par

$$\phi = \varepsilon.\iota_g : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2, \quad \gamma \mapsto \varepsilon(\gamma)g\bar{\gamma}g^{-1}$$

où  $\bar{\gamma}$  désigne la conjugaison complexe de  $\gamma$ .

On peut aussi déduire la finitude du groupe des difféotopies. Notons  $N(\Gamma)$  le normalisateur de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire

$$N(\Gamma) := \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}$$

**Corollaire 5.1.9.** *Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une variété hyperbolique  $M$  de dimension 3 de volume fini. Le groupe des automorphismes extérieurs  $\mathrm{Out}(\Gamma) = N(\Gamma)/\Gamma$  de  $\Gamma$  est isomorphe au groupe des isométries de  $M$ .*

**Proposition 5.1.10** ([7, Theorem C.5.6]). *Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental d'une variété  $M$  hyperbolique connexe orientée et compacte, alors  $\mathrm{Out}(\Gamma)$  est un groupe fini.*

On a aussi le théorème de Mostow-Weil concernant la rigidité locale des représentations discrètes et fidèles.

**Théorème 5.1.11** (WEIL, [105]). *Soient  $G$  un groupe de Lie connexe semi-simple sans facteur compact et  $\Gamma \subset G$  un réseau uniforme, on note  $i : \Gamma \hookrightarrow G$  le plongement de  $\Gamma$  dans  $G$ . Si  $G$  n'est pas localement isomorphe à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ , alors le plongement  $i$  est rigide, au sens où tout morphisme suffisamment proche de  $i$  sera  $i$  lui-même. Plus précisément, on a  $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = 0$  (où la structure de  $\Gamma$ -module est donnée par  $\mathrm{Ad}_i$ ).*

Dans le contexte évoqué dans la sous-section précédente, on peut déduire que le relèvement de la représentation  $l$  de  $\pi_1(V)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est rigide.

*Remarque.* Le cas exceptionnel de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  provient des déformations des surfaces de Riemann hyperboliques. Notons que la condition de co-compacité joue un rôle très important. Dans le cas d'un réseau non co-compact de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , les résultats de THURSTON sur la chirurgie hyperbolique de Dehn utilisent la non-rigidité.

## 5.2 $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure des quotients

Soit  $M$  une variété complexe. Nous appellerons fibré tangent (*resp.* cotangent) holomorphe de  $M$  le fibré  $T^{1,0}M$  (*resp.*  $(T^{1,0}M)^*$ ) et nous le noterons plus simplement  $TM$  (*resp.*  $T^*M$ ) lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïtés. De la même façon le fibré tangent (*resp.* cotangent) anti-holomorphe de  $M$  est le fibré  $T^{0,1}M$  (*resp.*  $(T^{0,1}M)^*$ ).

**Définition 5.2.1.** Soit  $M$  une variété complexe. Une *métrique riemannienne holomorphe*  $g$  sur  $M$  est une section globale holomorphe du fibré  $S^2(T^*M)$  des 2-tenseurs symétriques de  $T^*M$  partout non-dégénérée.

Une métrique riemannienne holomorphe peut-être vue comme l’analogie complexe d’une métrique riemannienne et on peut définir des géodésiques, une connexion de Levi-Civita, un tenseur de courbure etc. Le lecteur pourra consulter les articles de BISWAS, DUMITRESCU ou ZEGHIB sur le sujet, par exemple [26], [12].

Fixons maintenant et pour le reste de ce chapitre un sous-groupe discret  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  co-compact, que l’on supposera sans torsion et notons  $\mathcal{M}$  le quotient  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

On sait d’après la [théorème 3.2.3](#) qu’une structure géométrique sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  invariante à droite descendra au quotient  $\mathcal{M}$ . Par ailleurs, ce quotient est holomorphiquement parallélisable, c’est-à-dire que son fibré tangent est isomorphe à  $\mathcal{M} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  où  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  est l’algèbre de Lie de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  considérée comme l’algèbre des champs de vecteurs invariants par translation à droite sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . On déduit alors qu’une forme quadratique sur  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  permettra de définir une métrique holomorphe. En particulier,  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  possède une forme quadratique bi-invariante : la *forme de Killing*  $K$ . Elle est définie par

$$K(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y)) = 4 \mathrm{Tr}(xy)$$

Cette forme est non-dégénérée (équivalent à la semi-simplicité de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  via le critère de Cartan) et elle permet donc de définir une métrique riemannienne holomorphe sur  $\mathcal{M}$ . La connexion de Levi-Civita, les géodésiques et le tenseur de courbure de cette métrique sont rappelés dans [31], rappelons quelques éléments ici qui nous seront utiles :

**Proposition 5.2.2** (GHYS, [31]). *Soient  $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . On note encore  $K$  la métrique riemannienne holomorphe sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  induite par la forme de Killing.*

- la courbure sectionnelle de  $K$  est constante et non nulle (sa valeur dépend du choix fait pour définir  $K$ ),
- les géodésiques passant par  $\mathrm{Id}$  sont les sous-groupes à un paramètre,
- l’action du groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par multiplication à gauche et à droite est isométrique.

*Remarque.* Notons que l’action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  n’est pas fidèle puisque l’élément  $(-\mathrm{Id}, -\mathrm{Id})$  agit trivialement. Il faudrait donc remplacer  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) / \pm (\mathrm{Id}, \mathrm{Id})$ .

L’intérêt de ces définitions et remarques tient à la proposition suivante :

**Proposition 5.2.3.** *Toute variété complexe de dimension 3 munie d’une métrique riemannienne holomorphe à courbure constante non nulle est localement isométrique à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  muni d’un multiple de la métrique de Killing. En particulier, une telle variété admet une  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure.*

Pour des détails sur ce résultats, voir par exemple [26].

En particulier, les variétés du type  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  sont naturellement munies d’une  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure complète donnée par les multiplications à gauche et à droite sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  dont l’holonomie est simplement donnée par

$$h : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \quad \gamma \mapsto (\mathrm{Id}, \gamma)$$

*Remarque.* Puisqu'il existe des 1-formes invariantes à droites non-fermées sur  $SL_2(\mathbb{C})$ , les variétés  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  ne sont pas des variétés kählériennes. On peut aussi remarquer qu'elles ne sont pas symplectique (voir [31]).

### 5.3 Espaces de Kuranishi des espaces homogènes de $SL_2(\mathbb{C})$

Nous nous intéressons maintenant aux déformations de la structure complexe de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Les rappels précédents peuvent être résumés dans le schéma suivant :

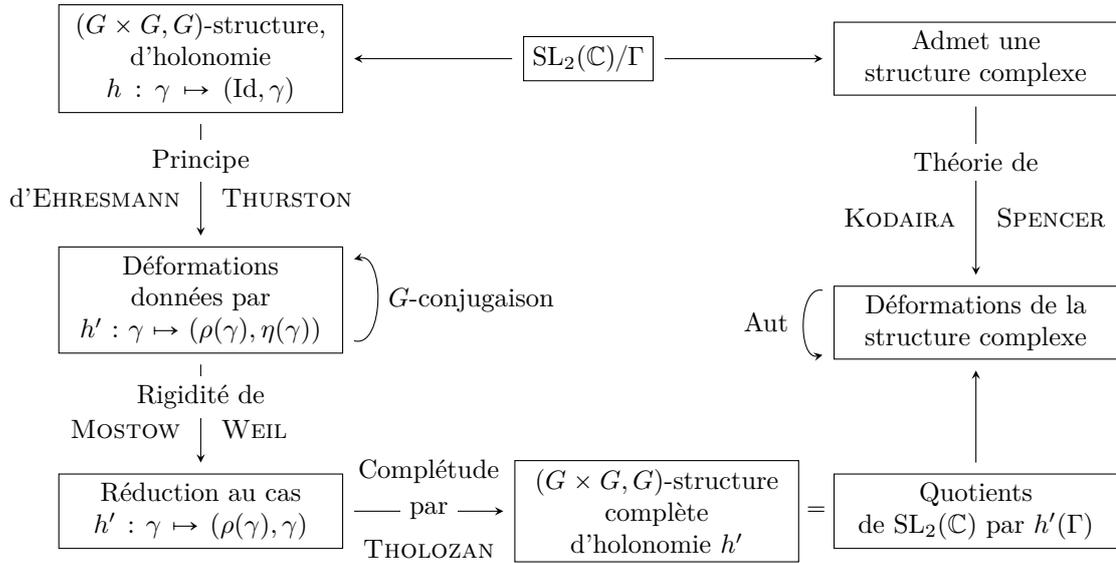


FIGURE 5.1 – Schéma d'obtention de nouvelles structures complexes

*Remarque.* L'action de  $\Gamma$  définie par l'holonomie

$$h' : \Gamma \rightarrow SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), \quad \gamma \mapsto (\rho(\gamma), \gamma)$$

est donnée par

$$\Gamma \times SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow SL_2(\mathbb{C}), \quad (\gamma, x) \mapsto \rho(\gamma)^{-1}x\gamma$$

Dans toute la suite, on notera  $\mathcal{M}_\rho$  ces quotients. Et comme précédemment, nous désignerons par  $\mathcal{R}(\Gamma)$  la  $SL_2(\mathbb{C})$ -variété des représentations de  $\Gamma$  et par  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  le sous-espace de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  formé des représentations admissibles.

A partir de là, GHYS montre que

- les déformations de structures complexes s'obtiennent toutes par ce principe [31, Théorème A],
- les orbites de la conjugaison par  $G$  sur la variété des représentations correspondent aux automorphismes des variétés correspondantes [31, Théorème B].

Et il obtient :

**Théorème 5.3.1** (GHYS, [31, Théorème A]). *L'espace de Kuranishi de  $\mathcal{M}$  est donné par le germe de la variété des représentations  $\mathcal{R}(\Gamma)$  pointée au morphisme trivial  $\rho_0$ .*

*Remarque.* Il faut bien considéré la variété de représentation et non pas la variété de caractères. En effet, certaines orbites de représentations non-triviales peuvent s'accumuler sur  $\rho_0$  et ne seront alors plus distinguer dans le quotient GIT (voir la [théorème 4.3.12](#)). Or, ces représentations donnent lieu à des variétés non-biholomorphes.

Le [théorème 5.3.1](#) n'aurait pas d'intérêt si il n'existait pas de représentations admissibles proches de la représentation triviale. Pour justifier de la pertinence de ce résultat, GHYS montra le lemme suivant :

**Lemme 5.3.2** (GHYS, [31, Lemme 2.1]). *Soit  $\rho$  une représentation suffisamment proche de la représentation triviale  $\rho_0 : \Gamma \rightarrow \mathrm{Id}$ , alors  $\rho$  est admissible et la variété  $\mathcal{M}_\rho$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathcal{M}$ .*

Nous l'avons vu dans le [chapitre 3](#), ce lemme à été largement généralisé, entre autre, par les travaux de KASSEL. Remarquons aussi que deux représentations conjuguées par un élément de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  sont simultanément admissibles ou non-admissibles.

Nous pouvons réécrire le [théorème 3.3.8](#) avec ces notations de la façon suivante :

**Corollaire 5.3.3** (KASSEL, [50]). *Le sous-espace  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  est ouvert dans  $\mathcal{R}(\Gamma)$ .*

Signalons aussi le résultat de GHYS concernant les tenseurs holomorphes sur  $\mathcal{M}_\rho$ . Pour cela, rappelons quelques faits.

On appelle *parallélisme* sur une variété  $M$  une trivialisaton globale du fibré tangent de  $M$ . La donnée d'un parallélisme sur une variété permet alors de définir uniquement une connexion plate du fibré tangent de cette variété. Les champs de vecteurs parallèles pour cette connexion correspondent aux champs de vecteurs dont les coordonnées (dans un champ de repères associé au parallélisme) sont constantes. Réciproquement, la donnée d'une connexion plate sur le fibré tangent d'une variété  $M$  et d'une base d'un espace tangent  $T_x M$  pour un certain  $x \in M$  définit un parallélisme. Dans le cas de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (plus généralement dans le cas d'un groupe de Lie), l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à droite (*resp.* à gauche) permet de définir une connexion plate  $\nabla^d$  (*resp.*  $\nabla^g$ ).

*Remarque.* La connexion de Levi-Civita de la métrique de Killing est la moyenne des connexions  $\nabla^d$  et  $\nabla^g$ .

Cette connexion est bi-invariante et descend donc au quotient  $\mathcal{M}_\rho$  et permet d'identifier le fibré tangent  $T\mathcal{M}_\rho$  de  $\mathcal{M}_\rho$  au fibré  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/\Gamma$  où l'action est donné par les transformations de deck, c'est-à-dire par :

$$\begin{aligned} \Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \\ (\gamma, (x, v)) &\longmapsto (\rho(\gamma)^{-1}x\gamma, \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)^{-1}}(v)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\text{(resp. } (\gamma, (x, v)) \longmapsto (\rho(\gamma)^{-1}x\gamma, \mathrm{Ad}_\gamma(v)) \text{)} \tag{5.2}$$

La connexion  $\nabla^d$  (*resp.*  $\nabla^g$ ) permet alors d'identifier le fibré tangent de  $\mathcal{M}_\rho$  au système local  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho$  (*resp.*  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_i$  où  $i : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est l'inclusion).

Soit  $\sigma : \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  une représentation linéaire. On considère le fibré associé à  $\sigma$ , que l'on note  $T^\sigma(\mathcal{M}_\rho)$ , obtenu comme quotient de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$  par l'action

$$\Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n, \quad (\gamma, (x, v)) \mapsto (\rho(\gamma)^{-1}x\gamma, (\sigma \circ \mathrm{Ad} \circ \rho(\gamma^{-1}))(v))$$

On appelle  $\sigma$ -tenseur holomorphe toute section holomorphe de  $T^\sigma(\mathcal{M}_\rho)$ .

**Théorème 5.3.4** (GHYS, Théorème 5.3 [31]). *Tout  $\sigma$ -tenseur holomorphe sur  $\mathcal{M}_\rho$  se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  en un tenseur invariant à droite par  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et à gauche par  $\rho(\Gamma)$ .*

*Remarque.* Dans le théorème précédent, on a même un peu mieux [lemme 5.1]Ghys : tout  $\sigma$ -tenseur holomorphe sur  $\mathcal{M}_\rho$  se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  en un tenseur invariant à gauche par la clôture de Zariski de  $\rho(\Gamma)$ .

En particulier, on voit que pour  $\sigma = \mathrm{Id}$ ,  $T^\sigma(\mathcal{M}_\rho) = T\mathcal{M}_\rho$  et les Id-tenseurs holomorphes sont donc les champs de vecteurs holomorphes.

**Proposition 5.3.5** (GHYS, Corollaire 5.4 [31]). *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , alors*

$$\check{H}^0(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho(\Gamma)}$$

où  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^H$  est le sous-espace des  $H$ -invariants de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  (pour l'action adjointe).

En particulier, si l'on note  $h^i(\rho) = \dim \check{H}^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$ , on a

**Corollaire 5.3.6** (GHYS, [31]). *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , alors*

- Si l'image de  $\rho$  est contenue dans le centre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , alors  $h^0(\rho) = 3$ ,
- si l'image de  $\rho$  est abélienne mais non contenue dans le centre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , alors  $h^0(\rho) = 1$ ,
- dans les autres cas,  $h^0(\rho) = 0$ .

### 5.3.1 Premier nombre de Betti

Remarquons que si la représentation triviale  $\rho_0$  est un point isolé de la variété des représentations, le théorème 5.3.1 affirme que la variété  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  est rigide au sens où toute déformation de sa structure complexe est localement triviale. Remarquons par ailleurs que la construction de WEIL (voir le théorème 4.2.7) implique que l'espace tangent à  $\mathcal{R}(\Gamma)$  au point  $\rho_0$  est isomorphe au groupe  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$  (la structure de  $\Gamma$ -module de  $\mathfrak{sl}_2^{\rho_0}$  est triviale). Le théorème des coefficients universels appliqué à ce groupe affirme que

$$\dim H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) = \dim H^1(\Gamma, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3 \dim H^1(\Gamma, \mathbb{C}) = 3b_1(\Gamma)$$

où  $b_1(\Gamma)$  est le premier nombre de Betti de  $\Gamma$  (le rang de l'abélianisé de  $\Gamma$ ). En particulier :

**Proposition 5.3.7** (GHYS [31]). *Si  $b_1(\Gamma) = 0$ , alors  $\rho_0$  est un point isolé et réduit de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  et  $\mathcal{M}_{\rho_0}$  est rigide.*

Par ailleurs, nous avons le résultat suivant :

**Proposition 5.3.8** (GHYS Théorème 6.3 [31]). *Si  $b_1(\Gamma) = 1$  alors toute représentation suffisamment proche de la représentation triviale est à image abélienne.*

On obtient alors le corollaire suivant :

**Corollaire 5.3.9.** *Si  $b_1(\Gamma) = 1$  alors la composante connexe (de Zariski) dans  $\mathcal{R}(\Gamma)$  de la représentation triviale est composée uniquement de représentations à images abéliennes.*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{R}(\Gamma)^0$  la composante connexe de  $\rho_0$ . La proposition précédente affirme qu’il existe un voisinage ouvert de  $\rho_0$  ne contenant que des représentations abéliennes (c’est-à-dire à images abéliennes). Or la condition d’être abélien pour une représentation s’exprime sur un système de générateurs de  $\Gamma$  et est une condition Zariski fermée.  $\square$

*Remarque.* Le cône quadratique tangent à  $\mathcal{R}(\Gamma)$  est déterminé par les zéros du cup-crochet

$$[\smile] : \check{H}^1(\mathcal{M}, \Theta) \times \check{H}^1(\mathcal{M}, \Theta) \rightarrow \check{H}^2(\mathcal{M}, \Theta)$$

et puisque  $H^1(\mathcal{M}, \Theta) \simeq H^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , cette forme s’écrit  $[c_1 \otimes X_1 \smile c_2 \otimes X_2] = c_1 \smile c_2 \otimes [X_1, X_2]$ . Comme il est remarqué dans [31], les tenseurs élémentaires  $c \otimes X$  sont isotropes pour cette forme quadratique et par conséquent le cône quadratique tangent ne dépend que de la structure de l’anneau de cohomologie rationnelle de la variété  $V \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$  qui est complètement décrit par sa forme d’intersection

$$H^1(V, \mathbb{Q}) \times H^1(V, \mathbb{Q}) \times H^1(V, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

c’est-à-dire, par une forme tri-linéaire alternée sur un espace de dimension  $b_1(\Gamma)$ .

Signalons aussi dans cette section que le cas  $b_1(\Gamma) = 0$  est particulier. En effet, le complémentaire de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  dans  $\mathcal{R}(\Gamma)$  contient l’ouvert défini par les représentations  $\rho$  tels que  $\text{Lip}(\rho) > 1$ , qui est non-vide dès que la variété de caractère est non-compacte. Puisque cette variété de caractère est une variété affine complexe, elle ne sera compacte que si c’est un ensemble fini. Donc, l’ouvert des représentations admissibles ne sera jamais ouvert pour la topologie de Zariski sauf lorsque la variété de caractère est un ensemble fini, ce qui correspond au cas  $b_1(\Gamma) = 0$ . Je remercie N. THOLOZAN pour m’avoir fait cette remarque.

Enfin, ce paragraphe justifie, au moins partiellement, la difficulté des calculs explicites dans les cas  $b_1(\Gamma) \geq 2$  et en particulier, il justifie le choix des exemples à la fin de cette thèse.

### 5.3.2 Difféomorphismes entre les variétés $\mathcal{M}_\rho$

Nous profitons des énoncés précédents pour donner une caractérisation des variétés  $\mathcal{M}_\rho$  qui nécessite l’utilisation d’une fonction  $(i, \rho)$ -équivariante :

**Proposition 5.3.10** (Proposition 7.2 [42]). *Pour tout  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , la variété  $\mathcal{M}_\rho^{\text{diff}}$  (la variété différentiable sous-jacente à  $\mathcal{M}_\rho$ ) est homéomorphe à un fibré sur  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  de fibre  $SU(2)$  et de groupe structural  $SU(2) \times SU(2)$ .*

Même s’il n’est pas utile de redonner la preuve ici, cela a l’avantage d’être instructif et d’exhiber le lien entre la géométrie de ces quotients et la constante minimale de Lipschitz.

*Démonstration.* Par le [théorème 3.3.7](#) on sait qu'il existe une application  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  qui soit  $k$ -Lipschitzienne et  $(i, \rho)$ -équivariante, avec  $k < 1$ . Pour tout  $p \in \mathbb{H}^3$ , posons

$$\mathcal{L}_p := \{g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid g.p = f(p)\}$$

Un élément  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  appartient à  $\mathcal{L}_p$  si, et seulement si,  $p$  est fixé par  $g^{-1} \circ f$ . Mais comme  $f$  vérifie  $\mathrm{Lip}(f) < 1$  il en va de même pour  $g^{-1} \circ f$ . Un tel point fixe existe et est donc unique et un élément  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  appartient donc à un unique  $\mathcal{L}_p$ . On considère l'application  $\Pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3$  qui à un élément  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  associe le point  $p$  tel que  $g \in \mathcal{L}_p$ . Cette application est continue et vérifie la condition d'équivariance induite par celle de  $f$  :

$$\rho(\gamma)\mathcal{L}_p\gamma^{-1} = \mathcal{L}_{\gamma.p}$$

et descend donc en une fibration de  $\mathcal{M}_\rho$  sur  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ .

On peut voir que les fibres de cette fibration sont de la forme  $g \mathrm{SU}(2) h$  avec  $g, h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . On peut donc canoniquement les identifier à  $\mathrm{SU}(2)$  modulo l'action du stabilisateur de  $\mathrm{SU}(2)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  (agissant par multiplication à gauche et à droite). On a donc bien  $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$  comme groupe structural.  $\square$

En adaptant cette preuve à notre contexte, nous obtenons alors :

**Corollaire 5.3.11.** *Pour toute représentation admissible  $\rho$ , la variété  $\mathcal{M}_\rho$  est  $C^\infty$  difféomorphe à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .*

*Démonstration.* On considère la variété  $\mathcal{N}_\rho$  défini par le quotient de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  sous l'action

$$\Gamma \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}), \quad (\gamma, x) \rightarrow p(\rho(\gamma)^{-1})xp(\gamma)$$

où  $p : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  est la projection naturelle. On sait par la proposition précédente, que ces variétés  $\mathcal{N}_\rho$  sont homéomorphes à des fibrés sur  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  de fibres  $\mathrm{PSU}(2) \simeq \mathbb{R}P^3$  et de groupe structural  $\mathrm{PSU}(2) \times \mathrm{PSU}(2) \simeq \mathrm{SO}(4)/\{\pm \mathrm{Id}\}$ . Par annulation de la seconde classe de Stiefel-Whitney du fibré  $\mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  (la variété  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  est compacte, fermée et orientée), on a alors un double revêtement  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathcal{N}_\rho$  qui induit une extension du fibré  $\mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  en un fibré  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  de fibre  $\widehat{\mathrm{PSU}}(2) = \mathrm{SU}(2)$  et de groupe structural  $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{Spin}(4)$ . Soit  $\{U_\alpha\}$  un recouvrement ouvert de  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  trivialisant le fibré  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  et  $c := \{c_{\alpha\beta}\}$

$$c_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{Spin}(4)$$

le cocycle définissant ce fibré.

Considérons  $\mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(4)}(\mathcal{M}_\rho)$  le fibré principal associé au fibré  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$ , c'est-à-dire le fibré d'espace total défini par quotient de

$$T := \bigsqcup_{\alpha} U_\alpha \times \mathrm{Spin}(4)$$

par la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x, c_{\alpha\beta}(x).y), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta, \quad y \in \mathrm{Spin}(4)$$

Puisque  $\pi_1(\mathrm{Spin}(4)) = \pi_2(\mathrm{Spin}(4)) = 0$ ,  $B\mathrm{Spin}(4)$  est 3-connexe. On sait par ailleurs [\[77, p.6\]](#) qu'une

application  $f : X \rightarrow Y$  d'un espace  $X$  de dimension  $n$  vers un espace  $Y$   $n$ -connexe est homotopiquement triviale. On en déduit donc

$$[\mathbb{H}^3/\Gamma, B \mathrm{Spin}(4)] = 0$$

où l'on note  $[X, Y]$  l'espace des classes d'homotopie de fonctions continues de  $X$  dans  $Y$ . On déduit que  $\mathrm{Ad}_{\mathrm{Spin}(4)}(\mathcal{M}_\rho)$  est un fibré trivial. Or, la construction du fibré principal associé est une construction qui descend aux classes d'équivalences de fibrés donc le fibré original  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  est lui aussi trivial. Finalement, on obtient que l'espace total  $\mathcal{M}_\rho$  est diffeomorphe à  $\mathbb{H}^3/\Gamma \times \mathrm{SU}(2) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .  $\square$

*Remarque.* En partant dans l'autre sens et en considérant des représentations  $(\rho', i') \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))^2$ , l'extension de la fibration  $\mathrm{PSU}(2) \rightarrow \mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  en une fibration de fibres  $\widehat{\mathrm{PSU}(2)} = \mathrm{SU}(2)$  est équivalente aux conditions suivantes (voir [5]) :

- $\pi_1(\mathrm{PSU}(2)) \rightarrow \pi_1(\mathcal{N}_\rho)$  est injectif,
- $\pi_1(\mathcal{N}_\rho) \rightarrow \pi_1(\mathbb{H}^3/\Gamma)$  admet un inverse.

Par construction, la première condition est vérifiée et la deuxième est équivalente à l'existence d'une application  $(\rho, i) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))^2$  qui relève  $(\rho', i')$ . Puisque  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une 3-variété hyperbolique, l'application  $i$ , que l'on suppose toujours injective à image discrète, ce relève toujours à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par le [théorème 5.1.3](#). On est donc ramené à la question de savoir si  $\rho'$  se relève, ou de façon équivalente si son cocycle associé  $c_{\rho'} \in H^2(\Gamma, \pi_1(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})))$  représente la classe triviale. Mais ce cocycle est la seconde classe de Stiefel-Whitney du fibré  $\mathcal{N}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  est toujours nulle et on conclut que fibré s'étend toujours.

## 5.4 Groupes d'automorphismes des variétés $\widehat{\mathcal{M}_\rho}$

La proposition suivante affirme que les biholomorphismes de  $\mathcal{M}_\rho$  n'apparaissent que dans les cas « triviaux » donnés par la conjugaison et les automorphismes de  $\Gamma$ .

**Proposition 5.4.1** (GHYS, [31]). *Soient  $\rho$  et  $\eta$  deux représentations admissibles. Alors  $\mathcal{M}_\rho$  et  $\mathcal{M}_\eta$  sont biholomorphes si, et seulement si, il existe  $g, h$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \{\pm \mathrm{Id}\})$  tels que  $\varepsilon \cdot \iota_h(\Gamma) = \Gamma$  et*

$$\varepsilon(\gamma) \cdot g\eta(\gamma)g^{-1} = \rho(\varepsilon(\gamma)h(\gamma)h^{-1}), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Sans redonner les détails présents dans [31], donnons la stratégie de la preuve. On relève le biholomorphisme entre  $\mathcal{M}_\rho$  et  $\mathcal{M}_\eta$  au revêtement  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  en un biholomorphisme  $\Phi$ . Quitte à composer  $\Psi$  par une conjugaison interne, la condition d'équivariance sur  $\Phi$  s'écrit alors :

$$\Psi(\rho(\gamma)^{-1}x\gamma) = \eta(\gamma)^{-1}\Psi(x)\gamma$$

L'auteur montre qu'une fonction qui vérifie cette condition d'équivariance pour cette  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -action (restreinte au groupe  $\tilde{\Gamma} := \{(\rho(\gamma), \eta(\gamma), \gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ) doit la satisfaire sur la clôture (de Zariski) de  $\tilde{\Gamma}$  et montre que cette clôture contient  $\{\mathrm{Id}\} \times \{\mathrm{Id}\} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Il en déduit alors que  $\Psi$  est une fonction qui commute aux translations à droite et est donc une translation à gauche ce qui conclut alors la preuve.

### 5.4.1 Automorphismes des variétés $\mathcal{M}_\rho$

Un ingrédient essentiel dans la suite est la compréhension des groupes d'automorphismes des variétés complexes  $\mathcal{M}_\rho$ .

Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$ . On notera dans la suite  $\tilde{\phi}$  le relevé de  $\phi$  au revêtement universel.

Nous commençons un corollaire de la [théorème 5.4.1](#) :

**Corollaire 5.4.2.** *Si  $\phi$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$ , alors il existe  $g$  et  $\delta$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tels que  $\tilde{\phi} = L_g \circ R_\delta$ .*

*Démonstration.* Pour la démonstration de ce lemme, on utilise un cas particulier du théorème B de [31]. Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$  et soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$ . Cet automorphisme se relève en un biholomorphisme  $\tilde{\phi}$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tel qu'il existe  $\theta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$  tel que

$$\tilde{\phi}(\gamma \bullet_\rho x) = \theta(\gamma) \bullet_\rho \tilde{\phi}(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Puisque  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  a un centre non trivial égal à  $\{\pm \mathrm{Id}\}$ , on applique le théorème de rigidité de Mostow (voir [théorème 5.1.5](#)) à  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  et on relève ensuite à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . On sait donc qu'il existe un élément  $\zeta$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \{\pm \mathrm{Id}\})$  tel que  $\theta = \varepsilon \cdot \iota_\zeta|_\Gamma$ .

Considérons une autre représentation  $\eta \in \mathcal{R}(\theta(\Gamma))$  telle que

$$\iota_\zeta \circ \rho(\gamma) = \varepsilon(\gamma) \cdot \eta \circ \theta(\gamma), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Il est facile de voir que  $\Theta$  descend en un biholomorphisme entre  $\mathcal{M}_\rho$  et  $\mathcal{M}_\eta$ , puisque :

$$\iota_\zeta(\gamma \bullet_\rho x) = \varepsilon(\gamma) \eta(\theta(\gamma^{-1})) \iota_\zeta(x) \iota_\zeta(\gamma) = \varepsilon(\gamma)^2 \theta(\gamma) \bullet_\eta \iota_\zeta(x) = \theta(\gamma) \bullet_\eta \iota_\zeta(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

Si on pose  $\psi = \tilde{\phi} \circ \iota_{\zeta^{-1}}$ , on a alors :

$$\psi(\gamma \bullet_\eta x) = \gamma \bullet_\rho \psi(x), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

E. GHYS a montré qu'un tel biholomorphisme est nécessairement donné par une translation à gauche par un élément  $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et les deux représentations  $\rho$  et  $\eta$  sont conjuguées par ce même élément  $h$ .

Lorsque  $\psi = L_h$  on obtient  $\tilde{\phi}(x) = \psi \circ \iota_\zeta(x) = h\zeta x \zeta^{-1}$ . La condition sur  $h$  et  $\zeta$  pour que  $\tilde{\phi}$  descende en un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  est donné par :

$$\rho(\varepsilon(\gamma) \cdot \iota_\zeta(\gamma)) = \varepsilon(\gamma) \cdot \iota_{h\zeta}(\rho(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \Gamma \tag{5.3}$$

□

Notons par  $G_\rho$  l'ensemble formé des paires  $(h, \zeta) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  pour lesquelles  $x \mapsto L_{h\zeta} \circ R_{\zeta^{-1}}(x)$  descend en un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$ , c'est-à-dire formé des paires  $(h, \zeta)$  qui satisfont (5.3) pour un certain  $\varepsilon \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \{\pm \mathrm{Id}\})$ .

**Corollaire 5.4.3.** Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$  alors

$$G_\rho \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_\rho), \quad (h, \zeta) \mapsto L_{h\zeta} \circ R_{\zeta^{-1}}$$

est un morphisme surjectif de noyau donné par les transformations de deck, c'est-à-dire de noyau isomorphe à  $\Gamma$ .

*Démonstration.* Le morphisme  $G_\rho \ni (h, \zeta) \mapsto \tilde{\phi} := L_{h\zeta} \circ R_{\zeta^{-1}} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_\rho)$  est surjectif par définition de  $G_\rho$  (et par caractérisation des automorphismes de  $\mathcal{M}_\rho$  dans le [théorème 5.4.2](#)). Puisque  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est simplement connexe,  $\tilde{\phi}$  descend en l'identité  $\mathrm{Id} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}_\rho)$  si, et seulement si,  $\tilde{\phi}$  est une transformation de deck, c'est-à-dire,  $\tilde{\phi}(x) = \gamma \bullet_\rho x$  pour un certain  $\gamma \in \Gamma$ , ou de manière équivalente  $(h, \zeta) = (\rho(\gamma)^{-1}\gamma, \gamma^{-1})$ .  $\square$

## 5.4.2 Composante connexe du groupe d'automorphismes

On va maintenant utiliser la caractérisation des relevés des automorphismes des variétés  $\mathcal{M}_\rho$  pour calculer la composante connexe de l'identité du groupe d'automorphismes. Grâce au lemme et au corollaire précédents, on déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 5.4.4.** Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , alors la composante connexe de l'identité  $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho)$  du groupe d'automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  est la composante connexe de l'identité du centralisateur  $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$  de  $\rho(\Gamma)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi$  un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  isotope à l'identité. Il est clair  $\phi$  se relève à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  en un biholomorphisme  $\tilde{\phi}$  qui ne permute pas les fibres, autrement dit,  $\tilde{\phi}$  est  $\Gamma$ -équivariant pour l'automorphisme identité de  $\Gamma$  :

$$\tilde{\phi}(\gamma \bullet_\rho x) = \gamma \bullet_\rho \tilde{\phi}(x)$$

En suivant la preuve du [théorème 5.4.2](#), cette condition implique que  $\tilde{\phi}$  est une translation à gauche par un élément  $h \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . De plus, puisque  $\Gamma$  est toujours supposé sans torsion,  $-\mathrm{Id} \notin \Gamma$  et la multiplication par  $-\mathrm{Id}$  n'est pas un automorphisme de  $\Gamma$ .

Finalement, la condition (5.3) appliqué à l'élément  $h$  nous dit que  $\tilde{\phi} = L_h$  descend en un automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  si, et seulement si,

$$\rho(\gamma) = \iota_h(\rho(\gamma)), \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

On conclut donc que  $h$  est dans le centralisateur de  $\rho(\Gamma)$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Le centralisateur n'étant pas toujours connexe (si  $\rho$  est non-abélien par exemple,  $C_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma)) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ ), il faut donc se restreindre à la composante connexe de l'identité.  $\square$

*Remarque.* Le centralisateur d'un tel groupe est facile à déterminer selon la nature de  $\rho$  :

- si  $\rho(\Gamma) \subset Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \{\pm \mathrm{Id}\}$  on a évidemment  $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ,
- si  $\rho(\Gamma)$  est abélien,  $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho)$  est isomorphe à la composante connexe de l'identité d'un sous-groupe à paramètre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ,
- sinon,  $\mathrm{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho) = \{\mathrm{Id}\}$

### 5.4.3 Automorphismes $C^\infty$ -isotope à l'identité

On note  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$  le groupe des automorphismes  $C^\infty$ -isotope à l'identité, c'est-à-dire  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) = \text{Aut}(\mathcal{M}_\rho) \cap \text{Diff}^0(\mathcal{M}_\rho)$ .

*Remarque.* Attention, pour une variété compacte complexe  $M$  quelconque, le groupe  $\text{Aut}^1(M)$  n'est pas toujours égal à  $\text{Aut}^0(M)$ . Il existe de tels exemples dans [73].

Ce groupe joue un rôle très important dans la construction de l'espace de Teichmüller (voir chapitre 7) puisque il définit le groupe d'isotropie des points de celui-ci.

**Proposition 5.4.5.** *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , alors  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) = C_{\text{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$ .*

*Démonstration.* En utilisant les résultats précédents, la proposition est équivalente à montrer que tout automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  induit par un élément  $g \in C_{\text{SL}_2(\mathbb{C})}(\rho(\Gamma))$  est bien  $C^\infty$ -isotope à l'identité.

Puisque les centralisateurs d'images de représentations sont tous connexes dans  $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$  (ils le sont dans  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  et donc dans  $\text{PGL}_2(\mathbb{C}) = \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ), il suffit de vérifier que l'automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  induit par  $-\text{Id}$  est  $C^\infty$ -isotope à l'identité.

Nous l'avons vu dans la [théorème 5.3.11](#), les variétés  $\mathcal{M}_\rho$  sont difféomorphes à des fibrés sur  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  de fibre  $S^3$ . Rappelons que la fibration [II] :  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma$  est induite par la fibration

$$\Pi : \text{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{H}^3, \quad g \mapsto p$$

où  $p \in \mathbb{H}^3$  est tel que  $g \in \mathcal{L}_p$  où

$$\mathcal{L}_p := \{g \in \text{SL}_2(\mathbb{C}) \mid g.p = f(p)\}$$

et  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  est une application  $k$ -Lipschitzienne  $(i, \rho)$ -équivariante, avec  $k < 1$ . Il est facile de voir que  $\Pi(-g) = \Pi(g)$  puisque  $-\text{Id}$  agit trivialement sur  $\mathbb{H}^3$ . L'automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$  induit par  $-\text{Id}$  induit donc un difféomorphisme des fibres  $S^3$  du fibré  $\mathcal{M}_\rho \rightarrow \mathbb{H}^3$  sans agir sur la base. Nous l'avons vu, les fibres de cette fibration sont de la forme  $g\text{SU}(2)h$  avec  $g$  et  $h \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  et puisque  $-\text{Id}$  est dans le centre, il commute à  $g$  et  $h$ . En identifiant les fibres à  $S^3$ , l'action de  $-\text{Id}$  correspond à l'action par antipodie sur chaque fibre  $S^3$  par antipodie. L'application  $x \mapsto -x$  dans  $S^3$  est homotope à l'identité. Il en résulte que l'automorphisme induit par  $-\text{Id}$  est homotope à l'identité.  $\square$

*Remarque.* Les variétés  $\mathcal{M}_\rho$  pour lesquelles l'image de  $\Gamma$  par  $\rho$  ont un centralisateur dans  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$  non connexe sont donc des exemples de variétés pour lesquelles  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) \neq \text{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho)$  (plus précisément  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)/\text{Aut}^0(\mathcal{M}_\rho) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Le lecteur intéressé pourra consulter [73] pour d'autres exemples.

### 5.4.4 Groupe des difféotopies

Un corollaire immédiat des calculs précédent permet de donner explicitement le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{M}_\rho)/\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$ .

**Corollaire 5.4.6.** *Le groupe  $\text{Aut}(\mathcal{M}_\rho)/\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$  est isomorphe au groupe  $\text{Aut}(\Gamma)/\Gamma$ . En particulier il est indépendant de  $\rho$ .*

*Démonstration.* Par définition et en utilisant le [théorème 5.4.1](#) et le [théorème 5.4.5](#), on obtient :

$$\text{Aut}(\mathcal{M}_\rho)/\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho) \simeq \{\varepsilon.\iota_\zeta \in \text{Aut}(\Gamma) \mid \zeta \in \text{SL}_2(\mathbb{C}), \varepsilon \in \text{Hom}(\Gamma, \{\pm \text{Id}\})\} / \sim$$

où  $\varepsilon.\iota_\zeta \sim \varepsilon.\iota_\zeta\gamma$ .

□

*Remarque.* Notons par ailleurs que ce [théorème 5.1.9](#) implique la finitude de ce groupe. En effet,  $\text{Aut}(\Gamma) \subset \text{Hom}(\Gamma, \{\pm \text{Id}\}) \times N(\Gamma)$  implique  $\# \text{Aut}(\Gamma) \leq 2^{b_1(\Gamma)} \times \#N(\Gamma) < +\infty$  par le [théorème 5.1.10](#).

*Remarque.* Il est probable que ce groupe soit en fait le groupe des difféotopies de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ .

# ESPACE DE KURANISHI DE $\mathcal{M}_\rho$

LE CALCUL DES ESPACES DE KURANISHI des variétés  $\mathcal{M}_\rho$  est, comme nous l'avons vu dans le chapitre concernant les champs, indispensable pour la construction d'un groupoïde analytique, atlas du champ de Teichmüller de ces variétés. Ce chapitre propose donc de les déterminer.

On sait, par Ehresmann-Thurston que pour toute représentation admissible  $\rho$ , la variété des représentations, pointée en  $\rho$ , permet de construire des déformations de la structure complexe de  $\mathcal{M}_\rho$ . Il est donc naturel de s'intéresser à la famille *tautologique* au dessus de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Ce chapitre propose de montrer le résultat central de cette thèse :

**Théorème 6.0.1** (de complétude). *Il existe un ouvert de Zariski (analytique)  $V$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  sur lequel la déformation de la variété  $\mathcal{M}_\rho$ , avec  $\rho \in V$ , donnée par la famille tautologique au dessus de  $V$  est complète.*

L'idée principale de la démonstration de la complétude de cette famille repose sur le même principe que celui utilisé par GHYS. Nous démontrons que le plongement du faisceau des germes de sections de  $T\mathcal{M}_\rho$  localement constantes dans le faisceau  $\Theta_\rho$  des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $\mathcal{M}_\rho$  induit une injection entre les premiers groupes de cohomologie et que ce plongement induit un isomorphisme en degré 1. Au niveau des points singuliers, la stratégie est de regarder les déformations aux ordres supérieurs et de montrer qu'un germe de déformation sur  $\mathbb{C}$  peut toujours se relever un germe de déformation sur la variété des représentations paramétré par  $\mathbb{C}$ .

## 6.1 Cohomologie des variétés $\mathcal{M}_\rho$

Soit  $\rho$  une représentation admissible. Le faisceau  $\Theta_\rho$  des germes de champs de vecteurs holomorphes sur  $\mathcal{M}_\rho$  s'identifie naturellement au faisceau des germes de sections holomorphes du fibré  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))/\Gamma$ .

D'après les rappels sur les  $G$ -fibrés principaux faits dans le [chapitre 3](#), ce fibré plat est donné par une représentation du groupe fondamental et on note aussi  $\mathcal{F}_\rho$  le faisceau des sections de  $T\mathcal{M}_\rho$  localement constantes. Notons que  $\mathcal{F}_\rho$  se plonge dans le faisceau  $\Theta_\rho$ .

Rappelons que le [théorème 3.2.2](#) affirme que le premier groupe de cohomologie de  $\mathcal{M}_\rho$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{F}_\rho$  correspond aux déformations infinitésimales de la  $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ -structure de  $\mathcal{M}_\rho$ .

**Proposition 6.1.1.** *On suppose qu'il existe au moins une représentation admissible  $\rho$  qui corresponde à un point réduit dans la composante connexe de  $\rho_0$  de la variété des représentations  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Alors, il existe un ouvert Zariski (analytique)  $V$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$  tel que pour tout  $\rho \in V$ , le plongement de  $\mathcal{F}_\rho$  dans  $\Theta_\rho$  induit les isomorphismes*

$$H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \simeq H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho), \quad i = 0 \text{ et } 1$$

ainsi qu'une injection

$$H^2(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \hookrightarrow H^2(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

Pour montrer ce résultat, nous allons expliciter les applications suivantes :

$$H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \simeq H^i(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \hookrightarrow H^i(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

où  $\mathcal{H}_\rho$  est le  $\Gamma$ -module des fonctions holomorphes globalement définies sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  à valeurs dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ . Ce groupe (pour l'addition) est muni de la structure de  $\Gamma$ -module induite par pré-composition par l'action de  $\Gamma$  via  $\bullet_\rho$  et post-composition par la représentation adjointe de  $\rho$ . C'est-à-dire :

$$\mathcal{H}_\rho \ni f \mapsto (\gamma.f : x \mapsto \mathrm{Ad}_{\rho(\gamma)^{-1}} f(\rho(\gamma^{-1})x\gamma))$$

Remarquons que l'espace  $\Gamma$ -invariants de  $\mathcal{H}_\rho$  s'identifie à l'espace des sections globales holomorphes du fibré tangent de  $\mathcal{M}_\rho$ . Rappelons que  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho$  désigne l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  munit de la structure de  $\Gamma$ -module donnée par  $\mathrm{Ad}_\rho$ .

Lorsque la structure de  $\Gamma$ -module ne nous sera pas utile, nous omettrons le  $\rho$  dans son écriture. Par exemple,  $\mathcal{H}$  fera référence au groupe des fonctions holomorphes globalement définies sur  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  à valeurs dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

Nous montrerons ensuite que l'injection est en fait un isomorphisme pour  $i = 0$  et  $i = 1$ .

**Lemme 6.1.2.** *Soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , alors*

$$H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \simeq H^i(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \hookrightarrow H^i(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

*Démonstration.* Le passage de la cohomologie de Čech à la cohomologie des groupes est donné par le [théorème 4.1.11](#) énoncée dans le [chapitre 4](#). Appliquons alors cette proposition au quotient  $\pi_\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_\rho$  et successivement aux faisceaux  $\mathcal{F}_\rho$  et  $\Theta_\rho$ . Comme le faisceau  $\mathcal{F}_\rho$  (*resp.*  $\Theta_\rho$ ) est obtenu comme faisceau de germes de sections localement constantes (*resp.* holomorphes) d'un fibré vectoriel, le pullback de ce faisceau par  $\pi_\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_\rho$  est simplement le faisceau des germes de sections localement constantes (*resp.* holomorphes) du pullback du fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & T\mathcal{M}_\rho \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi_\rho} & \mathcal{M}_\rho \end{array}$$

On conclut que l'ensemble des sections globalement constantes (*resp.* holomorphes) du fibré trivial  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est l'ensemble des fonctions constantes (*resp.* holomorphes) de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , ce que l'on dénote abusivement encore par  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  (*resp.*  $\mathcal{H}$ ).

Rappelons que le théorème *B* de Cartan affirme que pour une variété Stein  $X$  et n'importe quel faisceau cohérent  $\mathcal{F}$ , les groupes  $H^p(X, \mathcal{F})$  s'annulent pour  $p \geq 1$ .

Dans notre contexte,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est une variété Stein puisqu'elle est isomorphe à la variété affine  $ad - bc = 1$  dans  $\mathbb{C}[a, b, c, d]$  et le faisceau  $\Theta_\rho$  est cohérent. On se retrouve donc avec les isomorphismes suivants :

$$H^i(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho), \quad i \in \mathbb{N}$$

Le faisceau  $\mathcal{F}_\rho$  n'est pas cohérent mais en remarquant que  $\mathrm{SU}(2)$  est un rétracte par déformation de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , on obtient la suite d'isomorphismes suivant :

$$H^p(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \mathcal{F}_\rho) \simeq H^p(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \underline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}) \simeq H^p(\mathrm{SU}(2), \underline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})})$$

où  $\underline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}$  désigne le faisceau constant associé à  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

De plus, en utilisant le théorème des coefficients universel et l'identification  $\mathrm{SU}(2) \simeq S^3$ , on a

$$H^p(\mathrm{SU}(2), \underline{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})}) \simeq H^p(\mathrm{SU}(2), \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \simeq H^p(S^3, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

Dont on déduit l'annulation pour  $p = 1$  et  $p = 2$ . Ce qui donne finalement

$$H^i(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \simeq H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

Le plongement  $i$  de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathcal{H}_\rho$  est invariant par l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et donne lieu à la suite exacte de  $\Gamma$ -module suivante

$$0 \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho \rightarrow \mathcal{H}_\rho \rightarrow \mathcal{H}_\rho / \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

La fonction  $\psi : \mathcal{H}_\rho \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho$  définie par  $\psi(F) = \int_{\mathrm{SU}(2)} F|_{\mathrm{SU}(2)} d\mu$  où  $\mu$  est la mesure de Haar normalisée (c'est-à-dire  $\int_{\mathrm{SU}(2)} \mathrm{SU}(2) d\mu = 1$ ) vérifie pour tout  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ,  $\Psi \circ i(X) = \int_{\mathrm{SU}(2)} X d\mu = X$ . Cette application définit alors un scindage de la suite (6.1). On a alors que les applications

$$H^i(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^i(\Gamma, \mathcal{H}_\rho), \quad i = 0, 1 \text{ et } 2$$

sont injectives [104]. □

*Preuve de la [théorème 6.1.1](#).* Notons

$$\begin{aligned} h_\Theta^i : \mathcal{R}(\Gamma)^a &\rightarrow \mathbb{N}_+, & \rho &\mapsto \dim H^i(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \\ h_{\mathcal{F}}^i : \mathcal{R}(\Gamma)^a &\rightarrow \mathbb{N}_+, & \rho &\mapsto \dim H^i(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho) \end{aligned}$$

Puisque la variété des représentations pointée en  $\rho_0$  est l'espace de Kuranishi de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , la famille tautologique  $\mathfrak{X}^a \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$  est complète en tous points dans un voisinage  $V_0$  de  $\rho_0$ . Puisque la  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -conjugaison induit un isomorphisme entre les variétés  $\mathcal{M}_\rho$ , la famille tautologique de déformations de  $\mathcal{M}_\rho$

pour  $\rho \in V_0$  s'obtient comme pull-back de la famille tautologique restreinte à un sous-espace analytique de  $V_0$  contenant  $\rho$  et localement transverse à l'orbite (par  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -conjugaison) de  $\rho$ . Par le calcul de la dimension du groupe d'automorphismes (et donc de la dimension de l'orbite), ce sous espace à dimension  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho)$ . Remarquons que la famille semi-universelle, parmi les familles complètes, est caractérisée par le fait que la dimension de sa base est minimale en  $\rho$ . On obtient alors que pour tout  $\rho \in V_0$ ,  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho) \geq h_{\Theta}^1(\rho)$ .

Mais l'injection de  $H^1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{F}_\rho)$  dans  $H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$  (lemme 17) nous donne l'inégalité inverse et on déduit donc l'égalité  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho) = h_{\Theta}^1(\rho)$  pour tout  $\rho \in V_0$ .

On considère maintenant la famille tautologique au dessus de  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$ . On sait [20] que pour tout  $q \geq 0$ , la fonction

$$\rho \mapsto h_{\Theta}^q(\rho) - h_{\Theta}^{q-1}(\rho) + \cdots + (-1)^q h_{\Theta}^0(\rho)$$

est semi-continue supérieurement pour la topologie de Zariski analytique sur  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$ .

Par hypothèse,  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  possède au moins un point réduit, alors l'ensemble des points non réduits est un sous-espace analytique strict et  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  possède alors un ouvert de Zariski de points lisses (et donc réduits). Plaçons nous alors sur la partie lisse  $(\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0})^{\text{lisse}}$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$ . Sur cet ouvert de Zariski, la dimension de l'espace tangent est partout la même et la fonction

$$\rho \mapsto h_{\Theta}^1(\rho) - h_{\Theta}^0(\rho) - \dim T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)^a$$

est semi-continue supérieurement. D'autre part, puisque

$$\begin{aligned} h_{\mathcal{F}}^1(\rho) &= \dim H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \\ &= \dim Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) - \dim B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \\ &= \dim T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)^a - (3 - h_{\mathcal{F}}^0(\rho)) \end{aligned}$$

la fonction

$$\begin{aligned} \rho \mapsto h_{\Theta}^1(\rho) - h_{\Theta}^0(\rho) - (h_{\mathcal{F}}^1(\rho) + (3 - h_{\mathcal{F}}^0(\rho))) \\ = h_{\Theta}^1(\rho) - h_{\mathcal{F}}^1(\rho) - 3 + h_{\mathcal{F}}^0(\rho) - h_{\Theta}^0(\rho) \end{aligned}$$

est encore semi-continue supérieurement. De plus,  $h_{\mathcal{F}}^0(\rho) = h_{\Theta}^0(\rho)$  (par le calcul des champs de vecteurs sur  $\mathcal{M}_\rho$ ).

En particulier, sur  $(\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0})^{\text{lisse}}$  on a que

$$\phi : \mathcal{R}(\Gamma)^{a,0} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \rho \mapsto h_{\Theta}^1(\rho) - h_{\mathcal{F}}^1(\rho)$$

est une fonction semi-continue supérieurement et toujours positive puisque  $h_{\Theta}^1(\rho) \geq h_{\mathcal{F}}^1(\rho)$ . Or, d'après les arguments précédents, il existe un ouvert Euclidien  $V_0$  sur lequel on a  $\phi(\rho) = 0$ , on sait alors qu'il existe un ouvert de Zariski analytique  $V$  le contenant, sur lequel cette fonction s'annule partout.  $\square$

**Corollaire 6.1.3.** *Soit  $R$  une composante connexe de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Si  $R$  contient un point  $\rho$  pour lequel  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho) = h_{\Theta}^1(\rho)$  et si  $R$  n'est pas composée que de points non-réduits, alors il existe un ouvert de Zariski analytique de  $R$  sur lequel on a complétude de la famille tautologique.*

*Démonstration.* La preuve est la même que la preuve précédente en remplaçant  $\mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$  par  $R$  et en se basant au point  $\rho$ .  $\square$

## 6.2 Obstructions supérieures

On veut maintenant décrire les déformations de  $\mathcal{M}_\rho$  au dessus de  $(\mathbb{C}, 0)$  et montrer qu'elles se ramène toujours à des déformations au dessus de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Plus précisément,

**Théorème 6.2.1.** *Pour toute représentation admissible  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$  telle que  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho)$ , la variété de représentation est complète.*

Pour montrer cela, reprenons la construction faite dans le [chapitre 1](#).

Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{M}_\rho$ , on considère les biholomorphismes

$$f : W \rightarrow W'$$

où  $W, W' \subset \mathcal{M}_\rho \times \mathbb{C}$  sont des ouverts contenant  $U \times \{0\}$ . On considère l'ensemble formé de tels biholomorphismes qui préservent les fibres  $M \times \{p\}$  et tels que  $f|_{\mathcal{M}_\rho \times \{0\}} = \text{Id}$ . On définit le faisceau  $\Lambda^\rho$  sur les ouverts  $U$ ,  $\Lambda^\rho(U)$  comme l'ensemble de ces biholomorphismes que l'on identifie deux à deux s'ils coïncident sur un voisinage de  $U \times \{0\}$ . Nous l'avons vu, le groupe  $H^1(\mathcal{M}_\rho, \Lambda^\rho)$  s'identifie à l'ensemble des classes de germes de déformations de  $\mathcal{M}_\rho$  paramétrées par  $(\mathbb{C}, 0)$ .

En reprenant la filtration naturelle  $\{\Lambda_k^\rho\}_k$  du faisceau  $\Lambda$  et en posant  $Q_k^\rho = \Lambda^\rho / \Lambda_{k+1}^\rho$  on obtient la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \Theta_\rho \rightarrow Q_{n+1}^\rho \rightarrow Q_n^\rho \rightarrow 0 \quad (6.2)$$

*Preuve du théorème 6.0.1.* L'idée de la démonstration est la suivante. Soit  $X \rightarrow U \subset \mathbb{C}$  une déformation de  $\mathcal{M}_\rho$  au dessus d'un voisinage  $U$  de 0 dans  $\mathbb{C}$ . Supposons que jusqu'à l'ordre  $n$ , cette déformation soit équivalente à une déformation de  $\mathcal{M}_\rho$  induite par une déformation de la représentation  $\rho$  à l'ordre  $n$ . Autrement dit, on suppose qu'il existe des cochaines  $\{c_i\}_{i=1}^n$  telles que l'on ait le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim_n} & f^* \mathcal{M}_{\rho_n(t)} & \longrightarrow & \{\mathcal{M}_{\rho_n(t)}\} \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & U \subset \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \text{Hom}(\Gamma, \text{SL}_2(\mathbb{C}[t]/(t^{n+1}))) \\ & & t & \longmapsto & \rho_n(t) \end{array}$$

jusqu'à l'ordre  $n$ , où

$$\rho_n(t) := \rho^{c_1, \dots, c_n}(t) : \gamma \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^n c_i(\gamma) t^i \right) \rho(\gamma)$$

On va montrer que dans cette situation, on peut trouver une cochaîne  $c_{n+1}$  telle que le résultat puisse s'étendre à l'ordre  $n+1$  en considérant la déformation à l'ordre  $n+1$  induite par  $\rho_{n+1}(t) := \rho^{c_1, \dots, c_{n+1}}(t)$ .

Commençons par formaliser ceci. Si il existe de telles cochaines à l'ordre  $n$ , on peut alors équiper  $\mathfrak{g}_n := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[t]/(t^{n+1}))$  avec la structure de  $\Gamma$ -module donnée par  $\text{Ad}_{\rho_n}$ . On note  $\mathfrak{g}_n^{\rho_n}$  l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_n$  munie de cette structure.

En interprétant  $\mathcal{B}_n^\rho := H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* Q_n^\rho)$  comme un ensemble de  $n$ -jets, on obtient une injection de  $\Gamma$ -modules  $\mathfrak{g}_n^{\rho_n} \rightarrow \mathcal{B}_n^\rho$ . Ces applications induisent un morphisme entre suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho & \longrightarrow & \mathfrak{g}_n^{\rho_n} & \longrightarrow & \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_{n-1}} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_\rho & \longrightarrow & \mathcal{B}_n^\rho & \longrightarrow & \mathcal{B}_{n-1}^\rho \longrightarrow 0 \end{array}$$

On en déduit alors l'existence de morphismes entre les suites exactes longues associées et en particulier, on a :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_n^{\rho_n}) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_{n-1}}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 & & \downarrow i_3 & & \downarrow i_4 \\ H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathcal{B}_n^\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathcal{B}_{n-1}^\rho) & \longrightarrow & H^2(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \end{array}$$

De plus, puisque  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  est une variété de Stein et que  $\pi^* \Theta_\rho$  est cohérent, nous avons  $H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Theta_\rho) = 0$  (voir la preuve du [théorème 6.1.2](#) pour plus de détails), ainsi

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_\rho = H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Theta_\rho) \rightarrow \mathcal{B}_n^\rho \rightarrow \mathcal{B}_{n-1}^\rho \rightarrow 0$$

On sait donc, par la [théorème 4.1.11](#), que l'on a un morphisme entre les suites exactes longues associées en cohomologie qui donne lieu au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathcal{B}_n^\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathcal{B}_{n-1}^\rho) & \longrightarrow & H^2(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_n^\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_{n-1}^\rho) & \xrightarrow{\check{\delta}} & H^2(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \end{array}$$

En concaténant les deux diagrammes, on obtient finalement :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_n^{\rho_n}) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{n-1}^{\rho_{n-1}}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \\ \downarrow \tilde{i}_1 & & \downarrow \tilde{i}_2 & & \downarrow \tilde{i}_3 & & \downarrow \tilde{i}_4 \\ H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_n^\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_{n-1}^\rho) & \xrightarrow{\check{\delta}} & H^2(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \end{array}$$

Soit maintenant  $\theta \in H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$  l'image de l'application de Kodaira-Spencer appliqué à la famille  $X \rightarrow U$ . On sait par [\[24\]](#) qu'il existe une suite d'éléments  $\theta_k \in H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_k^\rho)$  qui sont contenus dans l'image réciproque de  $\theta$  dans  $H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_k^\rho)$  et tels que  $\check{\delta}(\theta_k) = 0$ . Et l'équivalence entre  $X \rightarrow U$  et la déformation induite par  $\rho_n(t)$  à l'ordre  $n$  se réécrit

$$\tilde{i}_2(C_k^n) = \theta_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

où  $C_k^n \in H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_k^{\rho_n})$  est défini comme au [chapitre 4](#) par  $C_k^n(\gamma) := p_k \frac{d}{dt} (\rho_n(\gamma)) \rho_n(\gamma^{-1})$  avec  $p_k : \mathfrak{g}_k^{\rho_n} \rightarrow \mathfrak{g}_k^{\rho_n}$  est la projection naturelle. Et pour que l'on puisse étendre ce résultat à l'ordre  $n+1$ , il nous faut montrer l'existence d'une cochaîne  $c_{n+1} \in C^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  telle que

$$\tilde{i}_2(C_k^{n+1}) = \theta_k, \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

L'existence d'une telle cochaîne  $c_{n+1}$  est assurée par le fait que  $\delta(C_n^n) = 0$  (puisque  $\check{\delta}(\theta_n) = 0$ ) et par le [théorème 4.2.11](#).

Une condition suffisante est donc que  $\tilde{i}_2$  soit surjectif pour tout  $n \geq 1$ . Établissons ce fait récursivement.

Initialisation : Pour  $n = 1$ , c'est la [théorème 6.1.1](#). En effet le diagramme précédent devient :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_1^{\rho_1}) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \\ \downarrow \tilde{i}_1 & & \downarrow \tilde{i}_2 & & \downarrow \tilde{i}_3 & & \downarrow \tilde{i}_4 \\ H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_1^\rho) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \end{array}$$

et cette proposition a déjà établi que  $\tilde{i}_1 = \tilde{i}_3$  sont des isomorphismes et  $\tilde{i}_4$  est injectif. Le lemme des quatre implique que  $\tilde{i}_2$  est surjectif.

Hérédité : Supposons que  $\tilde{i}_2 : H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_n^{\rho_n}) \rightarrow H^1(\mathcal{M}_\rho, Q_n^\rho)$  soit surjectif. On a toujours que  $\tilde{i}_1$  est un isomorphisme,  $\tilde{i}_4$  est injectif. On conclut donc encore par le lemme des quatre que  $\tilde{i}_3$  est surjectif.

On obtient alors une suite de cochaines  $\{c_i\}_{i=1}^\infty$  qui nous donne une déformation formelle de  $\rho$  :

$$\rho_\infty : \gamma \mapsto \exp \left( \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\gamma) t^i \right) \rho(\gamma)$$

L'existence d'une solution convergente est donnée de la façon suivante. Soit  $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n | R_1, \dots, R_m \rangle$  est une présentation de  $\Gamma$ , alors la variété des représentations  $\mathcal{R}(\Gamma)$  s'identifie avec les  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^n$  vérifiant  $R_i(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Id}$  pour  $i = 1, \dots, m$ . On dispose donc d'une description de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  par un système de d'équations polynomiales  $\mathbf{F}$  tel que

$$\mathcal{R}(\Gamma) \simeq V(\mathbf{F}) = \{ \mathbf{x} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})^n \subset \mathbb{C}^{4n} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$$

La solution formelle trouvée précédemment correspond donc à un élément  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^{4n}[[t]]$  telle que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = 0$ .

Par le [théorème 1.4.2](#) (théorème d'ARTIN sur la convergence de solutions formelles), on sait que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{C}^{4n}\{t\}$  telle que  $\hat{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(t) \pmod{t^N}$ .

On conclut que toute déformation de la structure complexe de  $\mathcal{M}_\rho$  paramétrée par  $(\mathbb{C}, 0)$  s'obtient par pullback sur la variété des représentations. Cela montre que la variété des représentations est complète en chaque point correspondant à une représentation admissible et a fortiori conclu la preuve du [théorème 6.0.1](#) (théorème de complétude).  $\square$

### 6.3 Application de Kodaira-Spencer au dessus de $\mathcal{R}(\Gamma)$

Par complétude de la famille tautologique au dessus de la variété des représentations, nous savons que l'application de Kodaira-Spencer associée à la famille tautologique au dessus de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  est surjective en chaque point. Cependant, dans cette section nous donnons une forme explicite de cette application et montrons le résultat suivant :

**Proposition 6.3.1.** *L'application de Kodaira-Spencer associée à la famille tautologique au dessus de  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^{a,0}$  pointée en  $\rho \in V$  est donnée par la composition d'applications :*

$$T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma)^a \simeq Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{p} H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \simeq H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$$

où  $p : Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  est la projection d'un cocycle sur sa classe de cohomologie.

*Démonstration.* Les rappels de la sous-section 1.3.2 affirment que l'application de Kodaira-Spencer est la première application connectante de la suite exacte longue obtenue à partir de la suite fondamentale associée à la déformation  $p_2 : \mathfrak{X}^a \rightarrow V$  où  $\mathfrak{X}$  est le quotient de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times V$  par l'action de  $\Gamma$  donnée par :

$$\Gamma \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times V \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times V, \quad (\gamma, x, \rho) \mapsto (\rho(\gamma)^{-1}x\gamma, \rho)$$

Reprenons les notations du chapitre 1 de la section concernant la suite fondamentale. L'annulation du groupe  $H^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi_\rho^* \Theta_\rho)$  implique l'existence d'un morphisme entre la suite exacte longue associée à la suite fondamentale :

$$0 \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{M}_\rho, \Psi|_{\mathcal{M}_\rho}) \rightarrow \check{H}^0(\mathcal{M}_\rho, T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)) \simeq T_\rho \mathcal{R}(\Gamma) \xrightarrow{\delta^*} \check{H}^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_{\mathcal{M}_\rho}) \rightarrow \dots$$

et la suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) & \longrightarrow & H^0(\Gamma, \check{H}^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Psi|_{\mathcal{M}_\rho})) & & \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & T_\rho \mathcal{R}(\Gamma) & \xrightarrow{\delta^*} & H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \longrightarrow \dots \end{array}$$

En particulier, l'application de Kodaira-Spencer se déduit (via l'isomorphisme entre cohomologie de  $\Gamma$  et cohomologie de Čech de  $\mathcal{M}_\rho$ ) de l'application connectante de cette deuxième suite exacte. Nous nous proposons alors d'explicitier cette application.

Soit  $c \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \simeq T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)$ . Soit  $(v, c) \in H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Psi|_{\mathcal{M}_\rho})$  (de sorte que  $\pi(v, c) = p_2(v, c) = c$ ), où  $v$  est une application holomorphe de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  dans  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

Écrivons d'abord l'action de  $\Gamma$  sur  $H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Psi|_{\mathcal{M}_\rho})$ . Pour tout élément  $\gamma \in \Gamma$ , posons

$$\begin{aligned} G_\gamma : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a &\rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a \\ (x, \rho) &\mapsto (\rho(\gamma^{-1})x\gamma, \rho) \end{aligned}$$

Prenons  $x_0 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\phi_{x_0} : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a$  un chemin passant par  $(x_0, \rho) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a$  donné par  $\phi(t) = (x(t), e^{tc}\rho)$  où  $e^{tc}\rho : \gamma \mapsto e^{tc(\gamma)+o(t^2)}\rho(\gamma)$  et tel que  $\frac{d}{dt} \phi(t)|_{t=0} = (v, c)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} (G_\gamma)_* \phi_{x_0}(0) &= \frac{d}{dt} G_\gamma \circ \phi_{x_0}(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left( e^{tc(\gamma)} \rho(\gamma)^{-1} x(t) \gamma, e^{tc}\rho \right) \Big|_{t=0} \\ &= (c(\gamma) + \rho(\gamma)^{-1} v \rho(\gamma), c) \end{aligned}$$

Alors, l'image de  $c$  par  $\delta^*$  est représentée par la classe de cohomologie de  $d^0(v, c)$ . On a donc  $\delta^*(v, c) = (G_\gamma)_*(v, c) - (v, c)$

$$\delta^*(v, c) : \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_\rho, \quad \gamma \mapsto c(\gamma) + \rho(\gamma)^{-1}v\rho(\gamma) - v$$

De plus, puisque  $\rho \in V$  on sait que  $H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ . Il existe donc un élément  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  tel que  $c(\gamma) + \rho(\gamma)^{-1}v\rho(\gamma) - v = c(\gamma) + \rho(\gamma)^{-1}X\rho(\gamma) - X$ . On a alors

$$[\delta^*(v, c)] = [c + c_X] = [c]$$

où  $c_X$  est le cobord associé à  $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire définit par  $c_X(\gamma) = \rho(\gamma)^{-1}X\rho(\gamma) - X$ .  $\square$

*Remarque.* Remarquons au passage que remplacer  $c$  par un cocycle lui étant cohomologue ne change pas l'image de l'application de Kodaira-Spencer. Autrement dit, un cocycle obtenu comme vecteur tangent à l'orbite de  $\rho$  est envoyé sur  $\mathcal{KS}(\rho) = 0 \in H^1(\mathcal{M}_\rho, \Theta_\rho)$ .

## 6.4 Description des espaces de Kuranishi

On aimerait pouvoir donner une description plus précise de la géométrie des espaces de Kuranishi des variétés  $\mathcal{M}_\rho$ . La principale obstruction à cette réalisation est l'existence de représentations dont l'orbite n'est pas fermée. De plus, l'existence de « sauts » de la fonction  $\rho \mapsto h^0(\rho)$  est clairement une difficulté supplémentaire. Dans cette section, nous donnons d'abord un corollaire immédiat au [théorème 6.0.1](#) dans le cas général puis nous esquivons les difficultés en supposant que le premier nombre de Betti de  $\Gamma$  est 1.

### 6.4.1 Cas général

**Corollaire 6.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret co-compact dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\rho \in V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Alors, tout espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $Z$  contenant  $\rho$  et localement transverse aux  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -orbites définit (en tant que germe) l'espace de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$ .*

*Remarque.* Si  $\rho$  est un point singulier, par le théorème d'HIRONAKA (voir [3]) il existe une désingularisation  $\pi : W \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  en  $\rho$  dont on sait que  $\pi$  est propre. On choisit alors une section transverse  $\tilde{Z}$  à  $\pi^{-1}(\mathcal{O}_\rho)$  dans  $W$  et on considère  $Z := \pi(\tilde{Z})$ .

La preuve découle immédiatement du [théorème 6.0.1](#) de complétude.

**Corollaire 6.4.2.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret co-compact dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$  une représentation irréductible. Alors, l'espace de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$  est donné par le germe de la variété de caractère  $\mathcal{X}(\Gamma)$  pointée en  $\rho$ .*

*Démonstration.* La variété de caractère restreinte aux caractères irréductibles est un espace d'orbites. Le théorème de complétude permet de conclure.  $\square$

### 6.4.2 Section transverse dans le cas $b_1(\Gamma) = 1$

Nous commençons par caractériser les représentations à images abéliennes afin de construire explicitement des sections localement transverses aux orbites et donc les espaces de Kuranishi correspondants.

Notons  $\mathcal{R}(\Gamma)^{ab}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  constitué des représentations abéliennes (c'est à dire dont l'image de  $\Gamma$  par une telle représentation est un sous-groupe abélien de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ).

On sait par la [théorème 5.3.9](#) que dans le cas où  $b_1(\Gamma) = 1$ ,  $\mathcal{R}(\Gamma)^{ab}$  et  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  coïncident sur la composante connexe de  $\rho_0$ .

Pour le reste de cette section, fixons un sous-groupe discret co-compact  $\Gamma$  de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  de premier nombre de Betti  $b_1(\Gamma) = 1 = \dim H_1(\mathcal{M}_\rho, \mathbb{Q}) = rk(\pi_1(\mathcal{M}_\rho)) = rk(\Gamma^{ab})$  ainsi qu'une présentation de son abélianisé :

$$\Gamma^{ab} = \langle \gamma_0, \dots, \gamma_n \mid \gamma_i^{d_i} = \mathrm{Id}, i = 1, \dots, n, [\gamma_i, \gamma_j] = \mathrm{Id}, i, j = 0, \dots, n \rangle \quad (6.3)$$

avec  $d_i \in \mathbb{N}^*$ .

On sait que toute représentation à image abélienne se factorise par  $\Gamma^{ab}$ , on obtient alors qu'une représentation  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^{ab}$  est déterminée par

$$\rho(\Gamma) = \langle \rho(\gamma_0), \dots, \rho(\gamma_n) \mid \mathrm{ord}(\rho(\gamma_i)) \mid d_i, i = 1, \dots, n, [\rho(\gamma_i), \rho(\gamma_j)] = \mathrm{Id}, i, j = 0, \dots, n \rangle$$

On pose  $k_i := \mathrm{ord}(\rho(\gamma_i))$ .

Remarquons que la surjection  $\Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$  donnée par l'abélianisation induit l'injection  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{R}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$ .

**Proposition 6.4.3.** *L'image de l'injection  $\phi : \mathcal{R}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$  correspond à  $\mathcal{R}(\Gamma)^0$ .*

*Démonstration.* Par le [théorème 5.3.9](#), on sait que sur la composante  $\mathcal{R}(\Gamma)^0$ , toutes les représentations sont à images abéliennes et sont déterminées par leurs images sur les  $\gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Commençons par remarquer que pour tout  $i = 1, \dots, n$  les fonctions

$$\mathrm{Tr}^i : \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \rho \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(\gamma_i))$$

sont continues et, par unipotence des  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , elles satisfont  $\mathrm{Tr}^i(\rho) = 2 \cos(\alpha)$  où  $\alpha$  est une racine primitive  $k_i$ -ième de l'unité. Elle sont donc à images discrètes et localement constantes. Sur la composante connexe  $\mathcal{R}(\Gamma)^0$ , une représentation  $\rho$  est donc entièrement déterminée par son image de  $\gamma_0$  et vérifie  $\rho(\gamma_i) = \mathrm{Id}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Autrement dit, l'injection  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \Gamma^{ab}$  induit un isomorphisme  $\mathcal{R}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^0 \subset \mathcal{R}(\Gamma)^{ab}$ . On est donc ramené à étudier  $\mathcal{R}(\mathbb{Z})$ .  $\square$

De plus, le critère de propreté de KASSEL permet, dans ce cas, des calculs explicites. Reprenons les notations de la [section 3.3](#).

**Proposition 6.4.4.** *Soient  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose  $\Lambda_x$  l'ouvert de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  défini par*

$$\Lambda_{\gamma_0} := \{X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \mid \lambda(X) < x\}$$

où  $\lambda(X)$  est la longueur de translation de  $X$ . Il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tel que l'image de  $\Lambda_\alpha$  par l'injection  $\phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{R}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)$  correspond à l'ouvert  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a \cap \mathcal{R}(\Gamma)^0$ .

*Démonstration.* La proposition précédente affirme que  $\phi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathcal{R}(\Gamma)^0$ . Soit  $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\rho$  est une représentation déterminée par  $\rho(\gamma_0) = X$  et  $\rho(\gamma_i) = \mathrm{Id}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , alors, par le critère

d'admissibilité de GUÉRITAUD-KASSEL,  $\rho$  est admissible si, et seulement si, le ratio des longueurs de translation  $C'(\rho) = \sup_{\gamma \in \Gamma} \frac{\lambda(\rho(\gamma))}{\lambda(\gamma)}$  soit strictement plus petit que 1. Puisque  $\lambda(\rho(\gamma))$  ne dépend que de  $\lambda(X)$ , on peut le choisir suffisamment petit pour que  $C'(\rho) < 1$ . On note alors  $\alpha$  le suprémum des nombres réels positifs qui vérifient  $l(X) < \alpha \implies C'(\rho) < 1$ .  $\square$

En utilisant la forme de Jordan de la matrice  $X$ , on obtient alors le corollaire suivant :

**Corollaire 6.4.5.** *Soit  $X \in \Lambda_{\gamma_0}$  et  $\rho := \phi(X)$ .*

- *Si  $X$  est conjuguée à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$  avec  $z \notin \{0, \pm 1\}$  et tel que  $\rho \in V$  alors, la famille de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$  est donnée par le germe de la famille*

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{M}_{\eta_\varepsilon} \mid \varepsilon \in \mathbb{D}\} \\ \downarrow \\ \mathbb{D} \end{array}$$

*pointée en 0, où  $\eta_\varepsilon = \phi \left( \begin{pmatrix} z + \varepsilon & 0 \\ 0 & (z + \varepsilon)^{-1} \end{pmatrix} \right)$ .*

- *Si  $X$  est conjuguée à une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$  et tel que  $\rho \in V$  alors, la famille de Kuranishi de  $\mathcal{M}_\rho$  est donnée par le germe de la famille*

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{M}_{\zeta_\delta} \mid \delta \in \mathbb{D}\} \\ \downarrow \\ \mathbb{D} \end{array}$$

*pointée en 0, où  $\zeta_\delta = \phi \left( \begin{pmatrix} \pm 1 + \delta & 1 \\ 0 & (\pm 1 + \delta)^{-1} \end{pmatrix} \right)$ .*

*Remarque.* Puisque les orbites des représentations  $\rho^\pm$  définies par  $\rho^\pm(\gamma_0) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$  ne sont pas fermées, la variété de caractères de  $\mathbb{Z}$  n'est pas partout un espace d'orbites. Cependant l'application

$$\phi : \mathcal{R}(\mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{C}^* / \sim, \quad \rho \mapsto \sigma(\rho(\gamma_0))$$

où  $\sigma(g)$  est une valeur propre de  $g$  et  $g \sim g^{-1}$ , est un espace d'orbites sur  $\phi^{-1}(\mathbb{C}^* \setminus \{\pm 1\})$ . Ce quotient catégorique est en fait équivalent à la variété de caractères :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}(\Gamma)^0 \simeq \mathcal{R}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{X}(\mathbb{Z}) \\ \phi \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbb{C}^* / \sim & & \end{array}$$

où  $f(g) = g + g^{-1}$  (voir l'[théorème 4.3.17](#)).

Reprenons la présentation (6.3) de  $\Gamma^{ab}$ . Soient  $i = 1, \dots, n$  et  $\alpha$  un diviseur de  $d_i$  et soit  $\rho_{j,\alpha}$  la représentation à image abélienne déterminée par

$$\rho_{j,\alpha}(\gamma_j) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2i\pi\alpha}{d_j}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{2i\pi\alpha}{d_j}} \end{pmatrix}$$

et  $\rho_{j,\alpha}(\gamma_i) = \text{Id}$ , pour tout  $i \neq j$ . Puisque cette représentation est à image compacte, elle est admissible et on sait qu'il existe un ouvert  $\mathcal{U}_{j,\alpha} \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$  qui contient  $\rho_{i,\alpha}$ .

# CHAMP DE TEICHMÜLLER DE $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$

NOUS ARRIVONS MAINTENANT à la construction de l'ouvert du champ de Teichmüller de la variété  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  correspondant à l'ouvert des représentations  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Dans le chapitre précédent, nous avons montré la complétude de la famille tautologique au dessus de cet ouvert  $V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$  puis montré que le groupe d'isotropie d'un point du champ de Teichmüller (c'est-à-dire le groupe  $\text{Aut}^1(\mathcal{M}_\rho)$ ) est donné par le centralisateur de  $\rho(\Gamma)$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$ . On va donc naturellement considérer le champ quotient de la variété des représentations par l'action de conjugaison par  $SL_2(\mathbb{C})$  et montrer qu'il s'agit bien d'un sous-champ du champ de Teichmüller. Les résultats de KASSEL énoncés dans le [chapitre 4](#) permettront d'affirmer que ce sous-champ, que l'on appellera naturellement champ des caractères admissibles, est ouvert dans le champ de Teichmüller.

Par ailleurs, nous proposons de souligner l'intérêt qu'apporte le point de vue champêtre en comparant ce champ des caractères avec la version plus classique du quotient GIT revue dans le [chapitre 4](#). Nous finirons ce chapitre par quelques résultats sur la functorialité de la construction de ce champ.

## 7.1 Champ des caractères

On se place au dessus du site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ . Comme précédemment, notons  $\mathfrak{X} := SL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)$ .

**Définition 7.1.1.** Le *groupoïde des caractères* est le groupoïde de translation

$$\mathfrak{X} \times_{p_2, \mathcal{R}(\Gamma), \iota} \mathfrak{X} \xrightarrow{m} \mathfrak{X} \xrightarrow[p_2]{\iota} \mathcal{R}(\Gamma) \xrightarrow{u} \mathfrak{X} \xrightarrow{i} \mathfrak{X}$$

où les cinq applications  $(p_2, \iota, m, u, i)$  sont définies de la façon suivante

- l'application source est la projection sur le deuxième facteur

$$p_2 : SL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma), \quad (X, \rho) \mapsto p_2(X, \rho) = \rho$$

- l'application cible est la  $SL_2(\mathbb{C})$ -conjugaison sur  $\mathcal{R}(\Gamma)$

$$\iota : SL_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma), \quad (X, \rho) \mapsto \iota_X \circ \rho$$

- l'application de composition est donnée par la multiplication de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$m : \mathfrak{X} \times_{s, \mathcal{R}(\Gamma), t} \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}, \quad ((X, \rho), (Y, \iota_X \circ \rho)) \mapsto (YX, \rho)$$

- l'application identité

$$u : \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathfrak{X}, \quad \rho \mapsto (\mathrm{Id}, \rho)$$

- et l'application inverse correspond à l'inversion dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

$$i : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma), \quad (X, \rho) \mapsto (X^{-1}, \rho)$$

*Remarque.* La commutativité des diagrammes du [théorème 2.2.5](#) à déjà été faite dans l'[théorème 2.2.8](#).

De la même façon, on définit le groupoïdes des caractères admissibles. Notons  $\mathfrak{X}^a$  le sous-espace de  $\mathfrak{X}$  donné par  $\mathfrak{X}^a := \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a$ .

**Définition 7.1.2.** Le *groupoïde des caractères admissibles* est le groupoïde de translation

$$\mathfrak{X}^a \times_{p_2, \mathcal{R}(\Gamma)^a, \iota} \mathfrak{X}^a \xrightarrow{m} \mathfrak{X}^a \xrightarrow[p_2]{\iota} \mathcal{R}(\Gamma)^a \xrightarrow{u} \mathfrak{X}^a \xrightarrow{i} \mathfrak{X}^a$$

où les cinq applications  $(p_2, \iota, m, u, i)$  sont les restrictions à  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  des flèches vues précédemment.

**Définition 7.1.3.** Le *champ des caractères* (*resp. caractères admissibles*) est la champification de la CFG associée au groupoïde des caractères (*resp. caractères admissibles*).

*Remarque.* Un pré-champ donné par un groupoïde de translation n'est en général pas un champ. Puisque nous voulons pouvoir recoller les  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -fibrés plus tard, il est naturel de champifier cette CFG.

En utilisant la définition dans le [théorème 2.2.40](#), on peut reformuler cette définition en disant que le champ des caractères (*resp. des caractères admissibles*) est le champ quotient

$$[\mathcal{R}(\Gamma)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})], \quad (\text{resp. } [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})])$$

Même si nous avons déjà détaillé les objets et morphismes d'un tel champ, il est utile de le revoir ici. Un objet du champ  $[\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  est la donnée d'un  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -fibré principal  $P \rightarrow U$  au dessus d'un espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $U$  et d'une application  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -équivariante  $f : P \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$ . Remarquons que l'on peut, à partir d'un tel objet, reconstruire une déformation de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Si  $U_\alpha$  est un ouvert de  $U$  et  $\Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$  est une trivialisations de  $P$ , alors l'application  $f \circ \Psi_\alpha : U_\alpha \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$  permet de définir une relation d'équivalence  $\sim_f$  sur  $U_\alpha \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  via

$$(u, x) \sim_f (u, y) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, y = (f \circ \Psi(u, x)(\gamma^{-1}))x\gamma$$

Le quotient  $U_\alpha \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\sim_f$  muni de la projection sur  $U$  admet une structure de famille. De plus, la  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -équivariance de  $f$  et de  $\Psi$  permettent de vérifier que les changements de cartes préservent les fibres à biholomorphismes près. On obtient de cette façon une famille sur  $U$  dont les fibres sont biholomorphes à  $\mathcal{M}_{f(p^{-1}(u))}$  pour tout  $u \in U$ .

Il est facile de vérifier que les morphismes entre ces familles correspondent aux biholomorphismes de familles.

### 7.1.1 Champ de Teichmüller de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$

Reprenons les notations du chapitre 2. Soit  $\mathcal{I}(\mathcal{M})$  l'ensemble des structures complexes sur  $\mathcal{M} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . On veut définir une application  $i : \mathcal{R}(\Gamma)^a \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{M})$  qui envoie une représentation sur la structure complexe de  $\mathcal{M}_\rho$ . L'application  $i$  se définit de la façon suivante. Soit  $\rho$  une représentation admissible et considérons le fibré des repères  $F(\mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}})$  de  $\mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$ , où  $\mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$  est la variété  $C^\infty$  sous-jacente à  $\mathcal{M}_\rho$ . Les points au dessus d'un point  $x \in \mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$  sont identifiés à des isomorphismes linéaires  $\mathbb{R}^6 \rightarrow T_x \mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$ . Notons que le fibré tangent  $T\mathcal{M}_\rho$  (voir (5.1)) admet une structure naturelle de sous-fibré de  $F(\mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}})$  par isomorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires  $\mathbb{C}^3 \rightarrow T_x \mathcal{M}_\rho^{\mathrm{diff}}$  et la réduction du groupe structural correspondante définit un opérateur  $J_\rho$  du fibré qui correspond exactement à la structure complexe de  $\mathcal{M}_\rho$ . On définit alors  $i$  par  $i : \rho \mapsto J_\rho$ .

**Théorème 7.1.4.** *Le champ  $[V/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  des caractères admissibles restreint à  $V$  est un sous-champ (ouvert) du champ de Teichmüller de  $\mathcal{M}$ .*

*Démonstration.* Le théorème 6.0.1 permet d'affirmer l'existence d'un ouvert  $V' \subset \mathcal{I}(\mathcal{M})$  de structures complexes  $\mathcal{M}_\rho$  données par des représentations  $\rho \in V$ . On sait donc que localement, toute déformation  $\mathcal{X} \rightarrow B$  dans le champ de Teichmüller  $\mathcal{T}_V(\mathcal{M})$  peut être vue comme un  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -fibré principal  $P \rightarrow B$  avec une application  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -équivariante  $p : P \rightarrow V \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$ , qui est un élément du champ des caractères.

Montrons maintenant que le champ des caractères admissibles est une sous-catégorie pleine du champ de Teichmüller. Localisons l'ouvert de Zariski  $V$ , c'est-à-dire remplaçons la par un recouvrement d'ouverts  $\bigsqcup_\alpha U_\alpha$  et prenons  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  deux tels ouverts qui s'intersectent non trivialement et tels que les familles tautologiques  $\pi : \mathfrak{X}_{U_\alpha} \rightarrow U_\alpha$  et  $\pi' : \mathfrak{X}_{U_\beta} \rightarrow U_\beta$  soient reliées par des morphismes  $f : U_\alpha \rightarrow U_\beta$  et  $F : \mathfrak{X}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathfrak{X}|_{U_\beta}$  dans le champ de Teichmüller.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_{U_\alpha} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{X}_{U_\beta} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ U_\alpha & \xrightarrow{f} & U_\beta \end{array}$$

Quitte à raffiner la localisation, on peut supposer  $U_\alpha$  et  $U_\beta$  suffisamment petits pour que les deux familles soient reliées (sur l'intersection  $U_\alpha \cap U_\beta$ ) par l'action d'un élément  $g \in \mathrm{Aut}^1(\mathcal{M})$  donc par un élément  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par la théorème 5.4.5. On obtient alors une application  $\tilde{F} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  telle que  $F(x) = \iota_{\tilde{F}(\pi(x))}(x)$ .

Cette application  $\tilde{F}$  satisfait  $p_2 \circ (\tilde{F}, \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$  et  $\iota \circ (\tilde{F}, \mathrm{Id}) = \iota_{\tilde{F}}$  où  $p_2$  et  $\iota$  sont les applications sources et cibles du groupoïde  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a \rightrightarrows \mathcal{R}(\Gamma)$ .  $\square$

On déduit alors facilement le corollaire suivant :

**Corollaire 7.1.5.** *Le groupoïde*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times V \begin{array}{c} \xrightarrow{\iota} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} V$$

*est un atlas de  $\mathcal{T}_V(\mathcal{M})$ .*

*Remarque.* On connaît des exemples explicites de groupes  $\Gamma$  (avec  $b(\Gamma) \geq 1$ ) pour lesquels la variété des représentations associée n'est pas séparée. Pour de tels  $\Gamma$ , il existe donc une suite de structures

complexes  $\{J_n\}$  convergente vers  $J_\infty$  telle que  $J_n$  et  $J_m$  sont biholomorphes pour tout  $n$  et  $m \in \mathbb{N}$  et  $((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)^{\mathrm{diff}}, J_\infty)$  n'est biholomorphe à aucune variété  $((\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma)^{\mathrm{diff}}, J_n)$  pour n'importe quel  $n < +\infty$ .

### 7.1.2 Champ de modules de Riemann de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$

Rappelons que la rigidité de Mostow permet de décrire les automorphismes de  $\Gamma$  : si  $\theta \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$  alors il existe une unique paire  $(\epsilon, \zeta) \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \{\pm \mathrm{Id}\}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , modulo le centre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , tel que  $\theta(\gamma) = \epsilon(\gamma)\zeta\gamma\zeta^{-1}$ .

**Théorème 7.1.6.** *Le sous-champ  $[V/((\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\Gamma)]$  est un sous-champ ouvert du champ de modules de Riemann de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ , où l'action est donnée par*

$$(\sigma, \iota) : \mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathcal{R}(\Gamma)^a \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a, \quad (\sigma, \iota)(\epsilon, \iota_\zeta, h, \rho) = \epsilon \cdot \iota_h \circ \rho \circ \epsilon \cdot \iota_\zeta$$

et se factorise en une action de  $(\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\Gamma$  sur  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  où  $\Gamma$  agit via  $\gamma(\epsilon, \iota_\zeta, g) = (\iota_\gamma \circ \epsilon \cdot \iota_\zeta, g\rho(\gamma)^{-1})$ .

*Démonstration.* La construction est similaire au champ de Teichmüller et le groupe d'isotropie d'un point  $\rho$  est bien isomorphe au groupe d'automorphisme de  $\mathcal{M}_\rho$ , que nous avons appelé  $G_\rho/\Gamma$ .

En utilisant la construction faite dans [74], on a que le groupoïde de Lie

$$(\mathrm{Aut}(\Gamma) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))/\Gamma \times V \underset{p_3}{\rightrightarrows}^{(\sigma, \iota)} V$$

est un atlas du champ de modules de Riemann. □

## 7.2 Champs versus théorie des invariants géométriques

Une question assez naturelle est de savoir ce que l'on a gagné à travailler avec le champ quotient plutôt qu'avec le quotient affine  $\pi : \mathcal{R}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma)//\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  construit au chapitre 3.

Une première différence entre la version champêtre et la version GIT est celle de l'espace tangent. Le lien entre l'espace tangent à la variété des caractères et le groupe  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$  n'est pas encore pleinement compris (voir par exemple [90, Question 56]). Cela est dû au simple fait que l'espace tangent d'un quotient n'est pas toujours le quotient des espaces tangents. Dans notre cas, on a pas toujours égalité entre  $T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)//\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $T_\rho \mathcal{R}(\Gamma)/T_\rho \mathcal{O}(\rho) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)/B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ . Au contraire, dans la version champ, on a :

**Corollaire 7.2.1.** *Le champ tangent au champ des caractères au point  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$  est isomorphe à  $H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)$ .*

*Démonstration.* Rappelons que le champ tangent à un groupoïde  $G \rightrightarrows G_0$  est le champ donné par le

groupoïde  $TG \rightrightarrows TG_0$ . On a alors

$$\begin{aligned} T_{\text{Id},\rho}[\mathcal{R}(\Gamma)/\text{SL}_2(\mathbb{C})] &= [\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \times Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \rightrightarrows Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)] \\ &= [Z^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)/B^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho)] \\ &= H^1(\Gamma, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})_\rho) \end{aligned}$$

□

Considérons le champ  $\mathcal{X}(\Gamma)$  (au dessus du site  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ ) associé à l'analytifié du schéma affine  $\mathcal{R}(\Gamma)/\text{SL}_2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire la catégorie fibrée en groupoïdes dont les objets sont les  $U \rightarrow \mathcal{X}(\Gamma)$  avec  $U$  un espace  $\mathbb{C}$ -analytique et les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{X}(\Gamma) & \end{array}$$

avec  $U$  et  $U'$  des objets de  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ .

Et regardons le foncteur

$$F : [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\text{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow \underline{\mathcal{X}(\Gamma)}$$

défini sur les objets par

$$F : \left( \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{R}(\Gamma)^a \\ p \downarrow & & \\ U & & \end{array} \right) \mapsto (U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma))$$

avec  $f \circ p = \pi \circ \tilde{f}$ . Et définit sur les morphismes par

$$F : \left( \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ U & \xrightarrow{\phi} & U' \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & U' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{X}(\Gamma) & \end{array} \right)$$

On sait par le [théorème 4.3.13](#) que les  $\mathbb{C}$ -points de  $\mathcal{R}(\Gamma)/\text{SL}_2(\mathbb{C})$  sont donnés par les caractères des représentations  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$  (c'est-à-dire la fonction  $\chi_\rho : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\chi_\rho(\gamma) = \text{Tr}(\rho(\gamma))$ ).

**Proposition 7.2.2.** *Soit  $\chi_\rho$  le caractère d'une représentation  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . La fibre de  $F$  au dessus de  $\chi_\rho$ , noté  $F^{-1}(\chi_\rho)$ , est catégoriquement équivalente au champ  $[\pi^{-1}(\chi_\rho)|_{\mathcal{R}(\Gamma)^a}/\text{SL}_2(\mathbb{C})]$ .*

*Remarque.* Le critère d'admissibilité de KASSEL s'exprime avec les longueurs de translation d'une représentation  $\rho$ , donc sur le caractère associé  $\chi_\rho$ . On a alors que si  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$  alors  $\pi^{-1}(\chi_\rho) \subset \mathcal{R}(\Gamma)^a$ . On peut donc dans la proposition (ainsi que dans la preuve) précédente retirer la restriction  $\pi^{-1}(\chi_\rho)|_{\mathcal{R}(\Gamma)^a}$  qui est triviale.

*Démonstration.* La fibre du foncteur  $F$  au dessus du point  $\chi_\rho$  est définie par le produit fibré

$$\{\chi_\rho\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\text{SL}_2(\mathbb{C})]$$

Considérons le foncteur

$$G : [\pi^{-1}(\chi_\rho)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow \{\chi_\rho\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$$

définit par  $G = (F, \mathrm{Id})$ , c'est-à-dire par

$$G \left( \begin{array}{c} P \xrightarrow{\tilde{f}} \pi^{-1}(\chi_\rho) \\ p \downarrow \\ U \end{array} \right) = \left( F \left( \begin{array}{c} P \xrightarrow{\tilde{f}} \pi^{-1}(\chi_\rho) \\ p \downarrow \\ U \end{array} \right), \begin{array}{c} P \xrightarrow{\tilde{f}} \pi^{-1}(\chi_\rho) \\ p \downarrow \\ U \end{array} \right)$$

Or

$$F \left( \begin{array}{c} P \xrightarrow{\tilde{f}} \pi^{-1}(\chi_\rho) \\ p \downarrow \\ U \end{array} \right) = U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)$$

avec  $f \circ p = \pi \circ \tilde{f}$ . Donc  $f \circ p(P) = f(U) = \chi_\rho$ .

Alors, ce foncteur vérifie  $G \circ P_2 = \mathrm{Id}$  et  $P_2 \circ G = \mathrm{Id}$  où  $P_2$  est le foncteur naturel qui projette  $\{\chi_\rho\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  sur le deuxième facteur.  $\square$

De manière plus générale, on a

**Proposition 7.2.3.** *Pour tout espace  $\mathbb{C}$ -analytique  $U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)$ , la fibre de  $F$  au dessus de  $U$  est équivalente à  $[\pi^{-1}(f(U))/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$ .*

*Démonstration.* La preuve est analogue à la preuve précédente. On a toujours

$$\{U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} [\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \simeq [(\{U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} \mathcal{R}(\Gamma)^a)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$$

et le produit fibré  $\{U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} \mathcal{R}(\Gamma)^a$  est évidemment isomorphe (comme espace  $\mathbb{C}$ -analytique) à  $\pi^{-1}(f(U))$ .  $\square$

*Remarque.* Les représentations dans  $\mathcal{R}(\Gamma)$  à orbites non-fermées sont, à conjugaison près, les représentations de  $\Gamma$  à image dans  $\mathrm{Aff}(\mathbb{C})$ .

### 7.2.1 Point de vue algébrique

Nous l'avons vu, le sous-ensemble  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  des représentations admissibles ne définit pas en général un ouvert de Zariski (sauf dans le cas élémentaire  $b_1(\Gamma) = 0$ ) et nous ne pouvons donc pas construire le champ quotient correspondant dans une catégorie algébrique. Nous pouvons cependant définir le champ quotient  $[\mathcal{R}(\Gamma)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$  de la même façon que précédemment mais au dessus du site  $\mathfrak{Sch}$ . Nous laissons le soin au lecteur d'adapter les définitions dans ce contexte.

Avec ces considérations, il est intéressant de savoir comment se comporte le foncteur

$$F : [\mathcal{R}(\Gamma)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow \underline{\mathcal{X}(\Gamma)}$$

entre champs au dessus du site  $\mathfrak{Sch}$ .

Nous avons évidemment le résultat analogue à la proposition précédente :

**Proposition 7.2.4.** *Pour tout schéma  $U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)$ , on a l'équivalence de catégorie*

$$\{U \xrightarrow{f} \mathcal{X}(\Gamma)\} \times_{\underline{\mathcal{X}(\Gamma)}} [\mathcal{R}(\Gamma)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \simeq [\pi^{-1}(f(U))/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$$

On rappelle qu'un espace de *module grossier* associé à un champ algébrique  $\mathfrak{X}$  est la donnée d'un schéma  $M$  et d'un morphisme  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow \underline{M}$  tel que pour tout corps algébriquement clos  $k$ , les classes d'isomorphismes d'objets de  $\mathfrak{X}(\mathrm{Spec}(k))$  sont en bijection avec  $\underline{M}(\mathrm{Spec}(k))$  et tel que cette solution soit universelle (tout autre morphisme de champs  $\mathfrak{X} \rightarrow \underline{N}$ , avec  $N$  un autre schéma, se factorise sur  $\phi$ ). On peut déduire des considérations du [chapitre 4](#) la proposition suivante :

**Proposition 7.2.5.** *Le foncteur*

$$F : [\mathcal{R}(\Gamma)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow \underline{\mathcal{X}(\Gamma)}$$

*est la projection sur l'espace de modules grossier.*

De plus, il est bien connu que le sous-ensemble des représentations irréductibles  $\mathcal{R}(\Gamma)^{irr}$  est un ouvert de Zariski dans  $\mathcal{R}(\Gamma)$  et le quotient GIT  $\mathcal{X}^{irr}(\Gamma)$  correspondant est un espace d'orbites. On a donc le résultat suivant :

**Proposition 7.2.6.** *La restriction du foncteur  $F$*

$$F : [\mathcal{R}(\Gamma)^{irr}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow \underline{\mathcal{X}^{irr}(\Gamma)}$$

*est un isomorphisme de champ.*

## 7.3 Functorialité

Étant donné un  $C^\infty$ -difféomorphisme entre deux variétés compactes  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  admettant toutes deux une structure complexe, il est une question assez naturelle de savoir comment sont « reliés » les espaces de Teichmüller  $\mathcal{T}(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{T}(\mathcal{N})$ . Dans le cas que nous avons considéré jusque-là, un exemple facile à construire est donné par les variétés  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  et  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma'$  où  $\Gamma'$  est un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma$ . L'intérêt de cette construction est justifiée par les résultats suivants :

**Proposition 7.3.1** (GHYS Théorème 5.7 [31]). *Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sous-groupes discrets co-compacts de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  et  $\rho_i \in \mathcal{R}(\Gamma_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Alors, toute application holomorphe surjective de  $\mathcal{M}_1$  vers  $\mathcal{M}_2$  est un revêtement, où  $\mathcal{M}_i$  correspond au quotient de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  par l'action de  $\Gamma_i$  via  $\rho_i$  pour  $i = 1, 2$ .*

De plus, il est bien connu que les classes d'isomorphismes de revêtements d'une variété  $X$  sont en bijection avec les classes d'équivalence (par conjugaison) de sous-groupes de  $\pi_1(X)$ . On peut même raffiner

ce résultat et résumer la situation par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \{\text{Revêtements de } X\} / \sim &\xleftarrow{1:1} \{\text{Sous-groupes de } \pi_1(X)\} / \simeq \\ \{\text{Revêtements finis d'ordre } n \text{ de } X\} / \sim &\xleftarrow{1:1} \{\text{Sous-groupes d'indice } n \text{ de } \pi_1(X)\} / \simeq \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Revêtements Galoisien finis} \\ \text{d'ordre } n \text{ de } X \end{array} \right\} / \sim &\xleftarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous-groupes normaux d'indice} \\ n \text{ dans } \pi_1(X) \end{array} \right\} / \simeq \end{aligned}$$

On a donc le résultat suivant

**Théorème 7.3.2.** *Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux sous-groupes discrets co-compacts de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Alors, toute application holomorphe surjective de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma_1$  vers  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma_2$  induit un foncteur  $\mathrm{Res}$  (resp.  $\mathrm{Res}^a$ ) les champs de caractères (resp. admissibles)*

$$[\mathrm{Res}] : [\mathcal{R}(\Gamma_2)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow [\mathcal{R}(\Gamma_1)/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$$

$$(\text{resp. } [\mathrm{Res}^a] : [\mathcal{R}(\Gamma_2)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})] \rightarrow [\mathcal{R}(\Gamma_1)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})])$$

*Démonstration.* Par la proposition précédente, une application holomorphe surjective entre ces deux variétés est un revêtement. Comme nous l'avons remarqué plus haut, les revêtements à isomorphismes près de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma_2$  sont en bijection avec les sous-groupes, à conjugaison près, de  $\Gamma_2$ . Il existe donc  $\Gamma'_1 < \Gamma_2$  tel que  $\Gamma'_1$  est isomorphe à  $\Gamma_1$ . Par rigidité de Mostow (en projetant sur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  puis en relevant à  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ), on sait qu'il existe  $\varepsilon : \Gamma_1 \rightarrow \{\pm \mathrm{Id}\}$  et  $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tels que  $\Gamma'_1 = \varepsilon.\iota_g(\Gamma_1)$ . L'inclusion de  $\Gamma'_1$  dans  $\Gamma_2$  induit un morphisme de restriction

$$\mathrm{Res} : \mathcal{R}(\Gamma_2) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma'_1)$$

Cette application commute évidemment à l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . De plus, l'isomorphisme que réalise  $\varepsilon.\iota_g$  entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma'_1$  induit un isomorphisme entre les variétés de représentations

$$\mathrm{Hom}(\varepsilon.\iota_g, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) : \mathcal{R}(\Gamma'_1) \rightarrow \mathcal{R}(\Gamma_1)$$

En composant cet isomorphisme et l'application de restriction, on obtient le résultat.

Pour le cas des variétés de représentations admissibles, il est facile de voir que la restriction d'une représentation admissible sera aussi une représentation admissible. En effet, une fonction  $f : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$  ( $j, \rho$ )-équivariante  $k$ -Lipschitzienne sera aussi ( $j|_{\Gamma'_1}, \rho|_{\Gamma'_1}$ )-équivariante avec la même constante de Lipschitz.

Réciproquement, si  $\rho|_{\Gamma'}$  est admissible alors  $\rho$  l'est aussi [42, lemme 4.4].  $\square$

*Remarque.* On aurait envie de faire la même construction pour l'espace de modules de Riemann, cependant l'application de restriction ne définit pas, a priori, un isomorphisme au niveau des groupes des difféotopies (s'ils sont bien égaux à  $\mathrm{Aut}(\Gamma)/\Gamma$ ).

# EXEMPLES

L'application des résultats présents dans cette thèse, sur des exemples concrets, est une tâche relativement ardue pour plusieurs raisons et il est important de comprendre ces difficultés pour que la construction faite dans la première partie de ce chapitre apparaisse naturellement. Pour donner explicitement des exemples qui mettent en lumière le gain de cette thèse par rapport aux travaux de [31] nous avons évidemment besoin de trouver un sous-groupe discret co-compact et sans torsion dans  $SL_2(\mathbb{C})$  ainsi qu'une présentation de celui-ci. Mais, plus la présentation est compliquée, moins le critère d'admissibilité sera évident. Puisque le premier nombre de Betti est, comme la [théorème 5.3.7](#) le suggère, un « indicateur » de la complexité de la géométrie de la variété des représentations, il est assez naturel de vouloir regarder des exemples avec des petits premiers nombres de Betti.

Une approche possible, qui permettra de construire des exemples correspondants à ces critères, est celle donnée par la chirurgie de Dehn sur des nœuds (ou des liens). En effet, si l'on considère un nœud hyperbolique  $k$ , l'extérieur  $M_k$  de ce nœud est une variété à bord (qui est un tore) dont l'intérieur admet une structure hyperbolique. La donnée de cette structure hyperbolique est équivalente à la donnée d'une représentation de son groupe fondamental  $PSL_2(\mathbb{C})$  mais puisque l'intérieur de cette variété n'est évidemment pas compacte, nous ne sommes toujours pas dans le cadre d'étude de cette thèse (l'image de cette représentation n'est pas co-compacte dans  $PSL_2(\mathbb{C})$ ). Une façon de palier ce problème est d'effectuer une chirurgie de Dehn, c'est-à-dire de recoller un tore sur le bord de cette variété  $M_k$ . Cette opération, comme nous le rappellerons dans le chapitre, ne dépend que de deux entiers  $(p, q)$  et par un théorème de THURSTON, la variété obtenue, notée  $M_k(p, q)$ , est hyperbolique sauf pour un nombre fini de couples  $(p, q)$ . De plus, à partir d'un nœud  $k$ , il n'est pas difficile d'obtenir une présentation du groupe fondamental de  $M_k$  et le théorème de Van-Kampen permet d'en obtenir une pour le groupe fondamental de  $M_k(p, q)$ .

En résumé, pour un nœud hyperbolique  $k$  et deux entiers  $(p, q)$  pris en dehors d'un ensemble fini de points de  $\mathbb{Z}^2$ , la variété  $M_k(p, q)$  est une variété hyperbolique complète de dimension 3 et son groupe fondamental, dont on peut trouver une présentation explicite, admet une représentation fidèle dans  $PSL_2(\mathbb{C})$  (qui se relève à  $SL_2(\mathbb{C})$  par un autre théorème de THURSTON) et on obtient ainsi des exemples. Et pour certains d'entre eux, le critère d'admissibilité est exploitable.

Une autre possibilité pour obtenir de tels exemples est d'utiliser la base de donnée de SnapPy<sup>1</sup> [18]. En particulier, ce logiciel permet d'obtenir une présentation du groupe fondamental d'une variété donnée.

1. SnapPy est un programme qui permet l'étude de la topologie et de la géométrie des variétés de dimension 3.

Nous traiterons trois exemples, ordonnés par premiers nombres de Betti croissants :

$b_1 = 0$  Reposant sur le principe expliqué plus haut et est donné par la  $(n, 1)$ -chirurgie (avec  $n \geq 5$ ) sur le nœud en huit.

$b_1 = 1$  Tiré de la banque de donnée de SnapPy.

$b_1 = 2$  Utilisant une généralisation de la construction précédente à partir d'un lien.

Nous concluons ce chapitre et cette thèse par une dernière remarque.

## 8.1 Groupes de noeuds et chirurgie de Dehn

Nous revenons dans un premier temps sur les définitions et théorèmes importants qui apparaissent notamment dans la construction d'exemples rapidement donnée dans l'introduction.

### 8.1.1 Rappels sur la théorie de nœuds

On rappelle qu'un nœud  $k$  est l'image d'un plongement différentiable du cercle  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$  ou dans  $S^3$ , la sphère de dimension 3 vue comme compactifié d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 8.1.1.** Soit  $k$  un nœud dans  $S^3$ . Le *groupe du nœud* associé à  $k$  est le groupe  $\Gamma_k := \pi_1(S^3 - k)$  et l'*extérieur du nœud* est la variété compacte de dimension 3,  $M_k := \overline{S^3 - V(k)}$  où  $V(k)$  est un voisinage tubulaire régulier de  $k$ .

De plus, à partir d'un « dessin » d'un nœud  $k$ , on peut trouver une présentation du groupe du nœud en utilisant sa présentation de Wirtinger. Nous ne revenons pas sur l'algorithme qui permet cette écriture, le lecteur intéressé pourra consulter [87].

**Définition 8.1.2.** On dit qu'un nœud  $k$  est *hyperbolique* si  $S^3 - k$  admet une structure hyperbolique (une métrique riemannienne complète de courbure sectionnelle constante négative).

Un résultat classique de [97] affirme qu'une variété est hyperbolique si, et seulement si, on peut trouver une représentation fidèle à image discrète de son groupe fondamental dans  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ . Dans notre contexte, un nœud est hyperbolique si l'intérieur de la variété  $M_k$  est hyperbolique et donc si l'on peut trouver une représentation fidèle et discrète du groupe fondamental de l'intérieur de  $M_k$ , qui sera alors un réseau non co-compact de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ .

Notons qu'il existe une interaction entre les groupes d'homologie et de cohomologie de  $M_k$  et ceux de  $\Gamma_k$ . En effet  $M_k = \Gamma_k \backslash \mathbb{H}^3$  est un espace classifiant pour  $\Gamma_k$  (puisque  $\mathbb{H}^3$  est contractile) et donc  $H(M_k) = H(\Gamma_k)$ . De plus, le nombre de Betti d'un tel groupe est toujours égal à 1.

Évidemment, ces variétés ont un bord (homéomorphe à un tore) et ne rentrent pas tel quel dans la théorie développée ici. On peut cependant appliquer le remplissage de Dehn à une telle variété pour obtenir une variété sans bord.

### 8.1.2 Remplissage de Dehn

Prenons donc une variété hyperbolique  $M_k$  de dimension 3 donnée par l'extérieur d'un nœud  $k$  (hyperbolique donc) et considérons un homéomorphisme

$$h : \partial D^2 \times S^1 \rightarrow \partial M_k$$

et considérons la variété  $M_k(h)$  obtenue par recollement du tore plein via  $h$  :

$$M_k \cup_h D^2 \times S^1 := M_k \sqcup D^2 \times S^1 / h(x) \sim x$$

**Définition 8.1.3.** Dans un tore plein  $D^2 \times S^1$ , on appelle *méridien* le lacet  $\partial D^2$  et on appelle *longitude* un lacet homologue à zéro dans  $S^3 - (D^2 \times S^1)$ .

Si on découpe  $\partial D^2 \times S^1$  le long du méridien et de la longitude, toute courbe fermée simple de  $\partial D^2 \times S^1$  peut être représentée par une droite de pente  $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  et cette courbe est homotope à  $pm + ql$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$  deux entiers premiers entre eux.

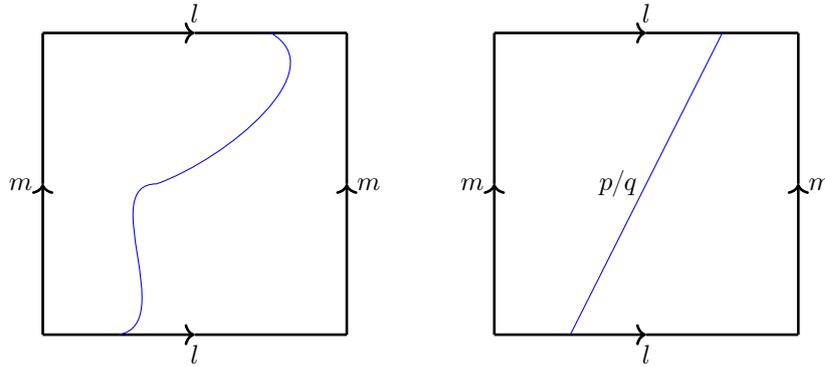


FIGURE 8.1 – Redressement des lacets sur le tore

**Lemme 8.1.4.** Dans la construction précédente, le type d'homéomorphisme de  $h$  est entièrement déterminé par la pente  $h(\partial D^2 \times \{*\})$ , ou de façon équivalente par la paire  $(p, q)$ .

**Définition 8.1.5.** Soit  $M$  une variété de dimension 3 dont le bord est un tore. On appelle  $(p, q)$ -remplissage de Dehn le recollement d'un tore plein sur le bord de  $M$  via un homéomorphisme de type  $(p, q)$ . On note  $M(p, q)$  la variété ainsi obtenue.

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 8.1.6** (Thurston). Soit  $k$  un nœud hyperbolique. Pour toute paire  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ , la variété  $M_k(p, q)$  est hyperbolique sauf pour un nombre fini de paires  $(p, q)$ .

Un grand intérêt de considérer les variétés fournies par ce procédé est qu'étant donnée une présentation du groupe associé au nœud  $k$ , le théorème de Van-Kampen permet de connaître une présentation du groupe fondamental de  $M_k(p, q)$  facilement.

Prenons par exemple, la présentation de Wirtinger d'un nœud  $k$  :

$$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_h \rangle$$

avec comme méridien  $m$  l'élément  $x_1$  et comme longitude  $l$  un mot en les  $x_i$ . Alors, le théorème de Van-Kampen affirme que

$$\pi_1(M_k(p, q)) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_h, m^p l^q \rangle$$

On peut résumer la construction rapidement expliquée dans l'introduction dans le schéma suivant

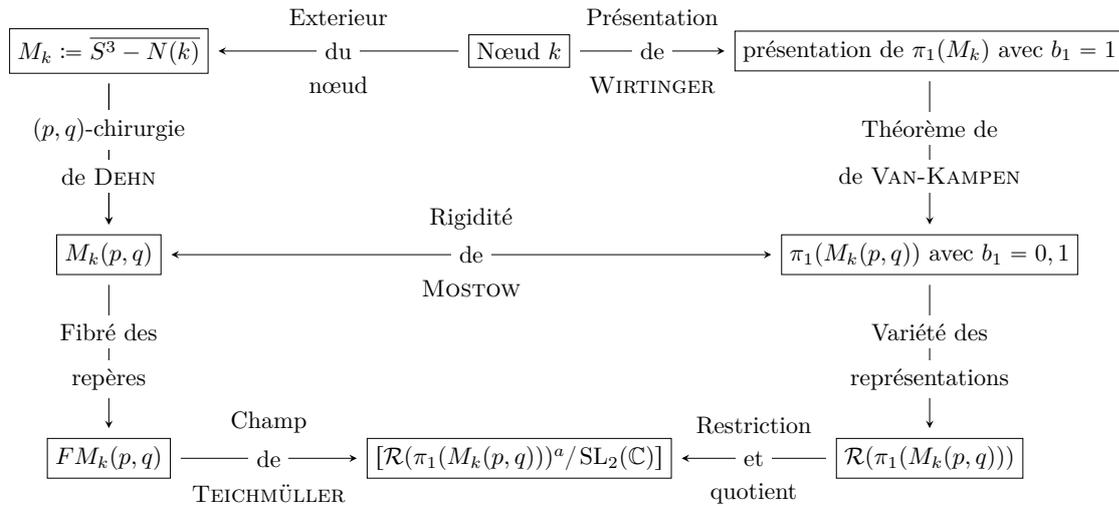


FIGURE 8.2 – Schéma de construction de sous-groupes  $\Gamma$  discrets co-compacts.

### 8.1.3 $(n, 1)$ -Chirurgie sur le nœud en huit ( $b_1 = 0$ )

Soit  $k$  le nœud en huit représenté en [figure 8.3](#).

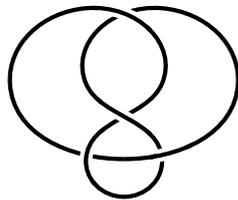


FIGURE 8.3 – Nœud en huit

Considérons la présentation de Wirtinger de  $M_{4_1}$  [87] :

$$\pi_1(M_{4_1}) = \langle a, b, c, d \mid da = cd \ (1), bc = ca \ (2), cb = bd \ (3), ba = ad \ (4) \rangle$$

et simplifions cette présentation en réécrivant les relations (3) et (4) en

$$\begin{aligned} b &= ada^{-1} \\ c &= bdb^{-1} \Leftrightarrow c = ada^{-1}dad^{-1}a^{-1} \end{aligned}$$

En remplaçant dans les relations (1) et (2), on remarque que ces relations donnent lieu une même relation

$$ada^{-1}dad^{-1}a^{-1}d = da$$

On obtient ainsi une présentation du groupe fondamental de  $M_{4_1}$  :

$$\pi_1(M_{4_1}) = \langle a, d \mid ada^{-1}dad^{-1}a^{-1}da^{-1}d^{-1} \rangle$$

dont on sait que le méridien est  $m = a$  et la longitude est  $l = a^{-1}b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}$ .

Puisque le noeud en huit est achiral<sup>2</sup> on sait que  $M_{4_1}(p, q) = M_{4_1}(-p, q)$ . Et puisque la chirurgie de Dehn ne dépend que de la fraction  $p/q$ , on a évidemment  $M_{4_1}(p, q) = M_{4_1}(-p, -q)$ , on peut donc se restreindre à  $p, q \geq 0$ .

**Théorème 8.1.7** (THURSTON, [97, Théorème 4.7]). *La variété  $M_{4_1}(p, q)$  est hyperbolique pour tout couple  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  différents de  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$  ou  $(4, 1)$ .*

Soit  $n$  un entier plus grand que 5. Avec les rappels précédents, on peut facilement trouver une présentation du groupe  $\pi_1(M_{4_1}(n, 1))$  :

$$\pi_1(M_{4_1}(n, 1)) = \langle a, d \mid ada^{-1}dad^{-1}a^{-1}da^{-1}d^{-1}, a^{n-1}b^{-1}aba^{-1}bab^{-1} \rangle$$

et l'on a

$$(\pi_1(M_{4_1}(n, 1)))^{ab} = \langle a, d \mid d = a, a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Dont on déduit  $b_1(\pi_1(M_{4_1}(n, 1))) = 0$ . Pour simplifier les calculs qui suivront, faisons un changement dans la présentation de  $\pi_1(M_{4_1})$  par  $d' := da^{-1}$  de sorte que

$$(\pi_1(M_{4_1}(n, 1)))^{ab} = \langle a, b \mid b, a^n \rangle \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Toutes les représentations abéliennes se factorisent sur  $(\pi_1(M_{4_1}(n, 1)))^{ab} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et on en déduit :

**Lemme 8.1.8.** *Si l'image de  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$  est un sous-groupe fini de  $SL_2(\mathbb{C})$ , alors il est admissible et  $h_{\mathcal{F}}^1(\rho) = h_{\Theta}^1(\rho)$ .*

*Démonstration.* L'admissibilité découle directement du théorème de KASSEL (théorème 18) puisque  $\rho$  à forcément une image contenue dans un compact.

Pour la dimension des groupes de cohomologie, il suffit de remarquer que la suite inflation restriction associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma_0 := \ker(\rho) \rightarrow \Gamma \rightarrow \rho(\Gamma) \rightarrow 0$$

---

2. c'est-à-dire superposable à son image dans un miroir

à valeur dans  $\mathcal{H}_\rho := H^0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \pi^* \Theta_\rho)$  est

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & H^1(\rho(\Gamma), \mathcal{H}_\rho^{\Gamma_0}) \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \\ & & \searrow \text{res} \curvearrowright \\ & & H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_\rho)^{\rho(\Gamma)} \longrightarrow H^2(\rho(\Gamma), \mathcal{H}_\rho^{\Gamma_0}) \end{array}$$

donne directement un isomorphisme entre les groupes

$$H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) \simeq H^1(\Gamma_0, \mathcal{H}_\rho)^{\rho(\Gamma)}$$

puisque la cohomologie d'un groupe fini est concentrée en degré 0.

De plus,  $\Gamma_0$  est un sous-groupe d'indice fini dans  $\Gamma$  et est donc encore un sous-groupe discret compact de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . Il s'ensuit que le plongement du  $\Gamma_0$ -module trivial  $\mathbb{C}$  dans  $\mathcal{H}_\rho$  induit un isomorphisme entre les premiers groupes de cohomologie (comme dans le cas traité par E. GHYS). On obtient alors le résultat.  $\square$

On obtient alors la proposition suivante :

**Proposition 8.1.9.** *Soit  $n \geq 5$ . Notons  $\Gamma_n$  une  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ -représentation fidèle et discrète de  $\pi_1(M_{4_1}(n, 1))$ . Alors,*

$$\#\pi_0(\mathcal{T}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma_n)) \geq n$$

*Démonstration.* Par les arguments évoqués précédemment, nous savons que les représentations  $\rho_m$  définies par

$$\rho_m(a) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi m/n} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi m/n} \end{pmatrix}, \quad \rho_m(b) = \mathrm{Id}$$

sont toutes admissibles. Et évidemment non conjuguées. Le résultat découle donc de l'annulation de la dimension du groupe  $H^1(\Gamma_n, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho_m})$ , correspondant à l'espace tangent du champ de caractères admissibles.

Puisque  $\rho_m$  est abélienne, la représentation laisse stable 3 sous-modules de  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  et le groupe  $Z^1(\Gamma_n, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho_m})$  se décompose alors en trois espaces

$$Z^1(\Gamma_n, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho_m}) \simeq Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m}) \oplus Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_-^{\rho_m}) \oplus Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C})$$

Le dernier élément de cette décomposition est facile à calculer puisque la structure de  $\Gamma_n$ -module de ces coefficients est triviale et on déduit  $Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{b_1(\Gamma_n)}$ , et il est donc de dimension nulle.

De plus,  $Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m}) \simeq Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_-^{\rho_m})$ , on restreint donc l'étude à  $Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m})$ . Les relations de  $\Gamma_n$  et les conditions de cocycle permettent de calculer explicitement les équations que doivent satisfaire les applications  $c : \Gamma_n \rightarrow \mathbb{C}_+^{\rho_m}$  pour définir des éléments de  $Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m})$ . Notons  $\omega := (e^{2i\pi m/n})^2$  et soit  $c \in C^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m})$ . Les conditions de cocycles s'écrivent

$$c(as) = c(a) + \omega c(s), \quad c(bs) = c(b) + c(s)$$

où  $s$  est un mot en  $a, a^{-1}, b$  et  $b^{-1}$ .

En utilisant ces conditions de cocycles, la première relation de  $\Gamma_n$  devient :

$$\begin{aligned}
 0 &= c(ab^3ab^{-1}a^{-2}b^{-1}) \\
 &= c(a) + \omega c(b^3ab^{-1}a^{-2}b^{-1}) \\
 &= c(a) + 3\omega c(b) + \omega c(ab^{-1}a^{-2}b^{-1}) \\
 &\vdots \\
 &= 2\omega c(a) + (-1 + 3\omega - \omega^2)c(b)
 \end{aligned}$$

Qui est non-triviale pour tout  $m \in \mathbb{N}$ . Et la deuxième relation est en fait triviale, puisque :

$$\begin{aligned}
 0 &= c(a^{n-1}b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}) \\
 &= c(a^{n-1}) + \omega^{n-1}c(b^{-1}aba^{-1}bab^{-1}) \\
 &= (1 + \omega + \dots + \omega^{n-2})c(a) + \omega^{n-1}c(b^{-1}) + \omega^{n-1}c(aba^{-1}bab^{-1}) \\
 &= (1 + \omega + \dots + \omega^{n-2})c(a) - \omega^{n-1}c(b) + \omega^{n-1}c(a) + \omega^n c(ba^{-1}bab^{-1}) \\
 &= (1 + \omega + \dots + \omega^{n-1})c(a) - \omega^{n-1}c(b) + c(ba^{-1}bab^{-1}) \\
 &= \underbrace{(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1})c(a)}_{=0} - \omega^{n-1}c(b) + c(b) + c(a^{-1}) + \omega^{-1}c(b) + \omega^{-1}c(a) + c(b^{-1}) \\
 &= \underbrace{\omega^{-1}c(b) - \omega^{n-1}c(b)}_{=0} + \underbrace{c(b) + c(b^{-1})}_{=0} + \underbrace{c(a^{-1}) + \omega^{-1}c(a)}_{=0}
 \end{aligned}$$

Puisqu'un cocycle  $c \in Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m})$  est défini par ses images  $c(a) \in \mathbb{C}$  et  $c(b) \in \mathbb{C}$  et doit respecter une condition linéaire, on conclut que

$$\dim Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m}) = 2 - 1 = 1$$

Finalement on a

$$\begin{aligned}
 \dim H^1(\Gamma_n, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho_m}) &= \dim Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}) + 2 \dim Z^1(\Gamma_n, \mathbb{C}_+^{\rho_m}) - \dim B^1(\Gamma_n, \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})^{\rho_m}) \\
 &= 2 \times 1 - (3 - h^0(\rho_m)) \\
 &= 2 - 3 + 1 = 0
 \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Pour conclure cet exemple, terminons par une observation qui montre l'apport de nos résultats. Le théorème principal de [31] nous permet d'affirmer que l'espace de Kuranishi de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma_n$  est un point. Ici nous montrons que l'espace de Teichmüller de cette variété admet au moins  $n$  composantes connexes.

#### 8.1.4 Variété $m199(-4, 1)$ ( $b_1 = 1$ )

Le choix, dans la base de données de SnapPy, de l'exemple qui suit est un peu arbitraire, cependant le coût de calcul d'une représentation fidèle et celui du critère d'admissibilité nous pousse vers le choix

d'une variété hyperbolique de dimension 3 admettant un groupe fondamental dont la présentation admet des relations les plus courtes possibles.

Parmi les variétés qui satisfont ces critères, nous proposons de traiter le cas de la variété  $m199(-4, 1)$  dont le groupe fondamental admet la présentation suivante

$$\pi_1(m199(-4, 1)) = \langle a, b \mid (a^3 b^{-1})^2 (a^2 b^2)^2 a^2 b^{-1}, b(a^{-1} b^3)^4 a^{-1} b a^{-2} b^{-2} a^{-2} \rangle$$

Afin de simplifier les notations, notons  $\Gamma := \pi_1(m199(-4, 1))$ .

Une représentation fidèle et discrète  $i$  de ce groupe dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , donnée par SnapPy, est approchée par

$$i(a) \approx \begin{pmatrix} 0 & 0,8 + 0,92i \\ -0,53 + 0,61i & 0,41 - 0,61i \end{pmatrix}, \quad i(b) \approx \begin{pmatrix} -0,01 + 2,35i & 0,29 - 2,57i \\ -1,39 + 1,6i & 1,71 - 2,02i \end{pmatrix}$$

Puisque  $b_1(\Gamma) = 1$ , on sait que  $\rho_0$  est un point lisse de  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  [31] et on a alors

**Proposition 8.1.10.** *Il existe un réel  $\alpha$  tel que l'on ait une application injective*

$$\phi : B_\alpha \cap V \hookrightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$$

où  $B_\alpha$  est la boule centrée en  $\mathrm{Id} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  déterminée par les matrices de rayon spectral strictement inférieur à  $\alpha$ .

*Démonstration.* Nous l'avons déjà vu, toute représentation de  $\Gamma$  qui se trouve dans la composante connexe de la représentation triviale est abélienne (puisque  $b_1(\Gamma) = 1$ ) et se factorise donc sur

$$\Gamma^{ab} = \langle a, b \mid a^2 b, [a, b] \rangle$$

Une représentation abélienne  $\rho$  est alors entièrement déterminée par son image sur  $a$ . De plus, l'admissibilité d'une telle représentation  $\rho$  s'exprime sur la longueur de translation de  $\rho$  et donc uniquement sur la matrice  $\rho(a)$ . Pour que  $\rho$  soit admissible, il suffit donc que cette longueur de translation soit strictement inférieur à celle de  $i(a)$ , que l'on note  $\alpha$ .

L'application  $\phi$  est alors obtenue de la façon suivante :

$$\phi : A \in B_\alpha \mapsto \rho_A \in \mathcal{R}(\Gamma)^a$$

avec  $\rho_A$  définie par

$$\rho_z(a) := A, \quad \rho_z(b) := A^{-2}$$

□

En combinant cette proposition avec le [théorème 6.4.5](#) on obtient alors

**Corollaire 8.1.11.** *Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $1 \leq |z| < 1.3$  tel que  $\rho_z \in V$  définit par*

$$\rho_z(a) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho_z(b) := \begin{pmatrix} z^{-2} & 0 \\ 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

alors, la famille de Kuranishi de  $\mathcal{M}_{\rho_z}$  est donnée par le germe de la famille

$$\begin{array}{c} \{\mathcal{M}_{\rho_{z+\varepsilon}} \mid \varepsilon \in \mathbb{D}\} \\ \downarrow \\ \mathbb{D} \end{array}$$

pointée en 0.

On laisse au lecteur le soin d'appliquer de la même manière le deuxième cas du [théorème 6.4.5](#).

En identifiant les représentations conjugués, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 8.1.12.** *Il existe un réel  $\alpha > 1,3$  tel que l'on ait une injection*

$$(B_\alpha \cap V)/\sim \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/i(\pi_1(m199(-4,1))))$$

où  $A \sim B$  si les deux matrices sont conjuguées.

### 8.1.5 $((0,1), (0,1))$ -chirurgie sur le lien $9_4^2$ ( $b_1 = 2$ )

Avant de continuer avec un troisième exemple, il nous sera utile de « classifier » les différentes représentations selon des critères utiles au calcul. Plutôt que de faire une liste de définitions puis de propositions, nous résumons cette classification dans un tableau. Voici d'abord quelques notations :

- $B \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  le sous-groupe de BOREL, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures,
- $P \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  le groupe des éléments paraboliques, c'est-à-dire les matrices triangulaires supérieures avec  $\pm 1$  sur la diagonale,
- $\mathrm{Diag} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  le groupe des matrices diagonales,
- $Z = \{\pm \mathrm{Id}\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  le centre de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Soit  $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  un sous-groupe discret co-compact et soit  $\rho \in \mathcal{R}(\Gamma)$ . A conjugaison près, on a :

Nom	Critère	Propriétés
<i>Irréductible</i>	$\rho(\Gamma) \not\subset B$	non-abélienne irréductible $h^0(\rho) = 0$ $\mathcal{O}(\rho)$ fermée
<i>non-abéliennes réductibles</i>	$\rho(\Gamma) \subset B$ $\rho(\Gamma) \not\subset P$	non-abélienne réductible $h^0(\rho) = 0$ $\mathcal{O}(\rho)$ non-fermée
<i>Parabolique</i>	$\rho(\Gamma) \subset P$ $\rho(\Gamma) \not\subset Z$	abélienne réductible $h^0(\rho) = 1$ $\mathcal{O}(\rho)$ non-fermée
<i>Diagonale</i>	$\rho(\Gamma) \subset \text{Diag}$ $\rho(\Gamma) \not\subset Z$	abélienne complètement réductible $h^0(\rho) = 1$ $\mathcal{O}(\rho)$ fermée
<i>Centrale</i>	$\rho(\Gamma) \subset Z$	triviale complètement réductible $h^0(\rho) = 3$ $\mathcal{O}(\rho)$ fermée

Le lien entre la complète réductibilité et la fermeture de l'orbite d'une représentation est fait dans [90, Theorem 30] et celui entre le critère abélien et la fonction  $h^0$  est le [théorème 5.3.6](#).

Considérons le lien  $9_4^2$  et faisons simultanément deux  $(0, 1)$ -chirurgies de Dehn sur chacun des nœuds.

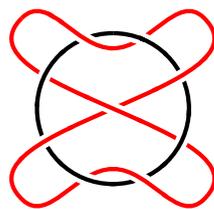


FIGURE 8.4 – Lien  $9_4^2$

La variété obtenue est une variété fermée orientable avec un premier nombre de Betti égal à 2. Elle a été découverte par DUNFIELD et a un volume de  $4.7135\dots$ , c'est aussi une variété qui fibre sur le cercle avec une surface de genre 2 comme fibre (voir [30]). Elle est répertoriée dans SnapPy sous le nom  $v1539(5, 1)$  mais nous nous contenterons du nom plus sobre de  $M$ .

Une présentation de son groupe fondamental est

$$\pi_1(M) = \langle a, b \mid (ab)^2 a(ab)^{-2} b^{-1} (ab)^2 a(ab)^{-2} b^3 (ba)^{-2}, a^4 (ab)^{-2} b^4 (ba)^{-2} \rangle$$

Pour les représentations non-abéliennes, nous nous servirons du lemme suivant :

**Lemme 8.1.13.** *Soit  $A$  et  $B$  deux matrices non commutantes dans  $SL_2(\mathbb{C})$ . Alors, à conjugaison près,*

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 0 \\ r & y^{-1} \end{pmatrix}$$

On commence par construire une représentation  $i$  fidèle et discrète de  $\pi_1(M)$ . Soit

$$i(a) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \quad i(b) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ r & y^{-1} \end{pmatrix}$$

Les calculs avec Sage affirment que la relation  $a^4(ab)^{-2} - babab^{-4} = 0$  donne, par exemple,

$$y = x \text{ et } r = -\frac{x^8 + 3x^4 + 1}{x^6 + x^2}$$

Avec ces considérations, la première relation nous donne  $x = \frac{1}{2}\sqrt{-i\sqrt{15} - 1}$ .

Posons  $\Gamma := i(\pi_1(M))$  et regardons maintenant les représentations de ce groupe, non injectives. On remarque que :

- Les calculs à effectuer pour montrer l'admissibilité d'autres représentations irréductibles sont en général difficiles,
- En revanche, pour les représentations non-abéliennes réductibles, en utilisant le lemme on peut supposer  $r = 0$  et les relations du groupe  $\pi_1(M)$  donne deux relations :

$$x^6(y^2 - 1) + x^4(y^2 - y^{-2}) + x^2(-y^6 + y^2) - y^4 + y^2 = 0$$

et

$$x^6(y^3 - y^2) + x^4(y^6 - y^4 + y^2 - 1) + x^2(-y^6 + y^4 + y^2 + 1) - y^4 + y^2 = 0$$

on obtient ensuite par le calcul 5 solutions à ce système dont on déduit 5 représentations non-abéliennes réductibles approximées par

$\rho(a)$	$\rho(b)$
$\begin{pmatrix} -0,31 \pm 0,82i & 1 \\ 0 & (-0,31 \pm 0,82i)^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0,53 \pm 0,77i & 0 \\ 0 & (0,53 \pm 0,77i)^{-1} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -0,18 \pm 0,75i & 1 \\ 0 & (-0,18 \pm 0,75i)^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0,54 \mp 0,69i & 0 \\ 0 & (-0,54 \mp 0,69i)^{-1} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1,09 - 0,77i & 1 \\ 0 & (1,09 - 0,77i)^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1,1 - 0,35i & 0 \\ 0 & (1,1 - 0,35i)^{-1} \end{pmatrix}$

là encore, le critère d'admissibilité n'est pas exploitable par le calcul dans ce cas.

- Remarquons que dans le cas de représentations abéliennes, les relations deviennent triviales et on obtient que l’ensemble des représentations abéliennes est isomorphe à l’espace des paires de matrices commutantes.

Évidemment, toutes les paires de matrices ne permettent pas de former une représentation admissible. On peut cependant se restreindre à un compact de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . On en déduit le corollaire suivant

**Corollaire 8.1.14.** *On a le plongement suivant*

$$\{(A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \mid [A, B] = \mathrm{Id}\} \cap V \hookrightarrow \mathcal{R}(\Gamma)^a$$

*Démonstration.* Pour chaque paire de matrices  $(A, B) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$  on définit une représentation par  $\rho(a) := A$ ,  $\rho(b) := B$  et le raisonnement précédent en assure l’admissibilité.  $\square$

## 8.2 Représentations à image Zariski-denses

Nous terminons cette thèse par une remarque.

En démontrant la *virtually Haken conjecture* en 2012, AGOL démontra le résultat suivant :

**Théorème 8.2.1** (Corollary 1.2 [2]). *Soit  $M$  une variété hyperbolique fermée de dimension 3. Alors, il existe un revêtement fini  $\widetilde{M} \rightarrow M$  tel que  $\widetilde{M}$  fibre au dessus du cercle. De plus,  $\pi_1(M)$  est LERF et large, c’est-à-dire qu’il existe un sous-groupe normal  $N \triangleleft G$  qui se surjecte sur un groupe libre non-abélien.*

Avec ce résultat, on peut construire des représentations admissibles à image Zariski-denses. On considère un sous-groupe discret co-compact  $\Gamma$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , par le lemme de SELBERG, quitte à prendre un sous-groupe d’indice fini, on peut le supposer sans torsion. On utilise le résultat précédent qui nous affirme l’existence d’un sous-groupe normal  $\Gamma_0$  d’indice fini dans  $\Gamma$  qui se surjecte sur  $\mathbb{F}_2$  le groupe libre à deux générateurs. Un théorème de KURANISHI [64, Theorem 7] assure que l’on peut trouver des éléments  $a$  et  $b$  dans un voisinage arbitrairement petit de  $\mathrm{Id}$  dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  tel que le groupe  $\langle a, b \rangle$  soit Zariski-dense dans  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ .

Cette construction fournit de nombreux exemples de représentations admissibles qui ont en particulier des images non-abéliennes (confer les exemples donnés par GHYS [31, p. 135-136]). Je remercie N. THOLOZAN pour m’avoir suggéré cette construction.

# PUBLICATION

---

Titre : "On the Teichmüller stack of  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$ ".

Résumé : Let  $\Gamma$  be a discrete torsion-free co-compact subgroup of  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ . E. GHYS has shown in [31] that the Kuranishi space of  $\mathcal{M} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\Gamma$  is given by the germ of the representation variety  $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$  at the trivial morphism and gave a description of the complex structures given by representations. In this note, we prove that for any *admissible* representation, i.e. which allows to construct compact complex manifold by this description, the representation variety (pointed at this representation), leads to a complete family (even at non-reduced singular points). Hence, we will consider the (*admissible*) *character stack*  $[\mathcal{R}(\Gamma)^a/\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})]$ , where  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  stands for the open subset formed by admissible representations with  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  acting by conjugation on it and show that this quotient stack is an open substack of the Teichmüller stack of  $\mathcal{M}$ .

Lien ArXiv : <https://arxiv.org/pdf/2102.12364.pdf>.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] L. B. ABDELGHANI, *Espace des représentations du groupe d'un noeud classique dans un groupe de lie*, Annales de l'Institut Fourier, 50 (2000), pp. 1297–1321.
- [2] I. AGOL, D. GROVES, AND J. MANNING, *The virtual Haken conjecture*, Documenta Mathematica, 18 (2013), pp. 1045–1087.
- [3] J. M. AROCA, H. HIRONAKA, AND J. L. VICENTE, *Complex analytic desingularization*, Springer, Tokyo, 2018.
- [4] M. ARTIN, *On the solutions of analytic equations*, Inventiones mathematicae, 5 (1968), pp. 277–291.
- [5] J. C. BECKER AND D. H. GOTTLIEB, *Coverings of fibrations*, Compositio Mathematica, 26 (1973), pp. 119–128.
- [6] K. BEHREND, B. CONRAD, D. EDIDIN, B. FANTECHI, W. FULTON, L. GÖTTSCHE, AND A. KRESCH, *Algebraic stacks*, Disponible à l'adresse [https://www.math.uzh.ch/index.php?id=ve\\_vo\\_det&key2=580&semId=13](https://www.math.uzh.ch/index.php?id=ve_vo_det&key2=580&semId=13), 2007.
- [7] R. BENEDETTI AND C. PETRONIO, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext (Berlin. Print), Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [8] Y. BENOIST, *Actions propres sur les espaces homogènes reductifs*, Annals of Mathematics, 144 (1996), pp. 315–347.
- [9] ———, *Propriétés asymptotiques des groupes linéaires*, Geometric & Functional Analysis GAFA, 7 (1997), pp. 1–47.
- [10] N. BERGERON AND T. GELANDER, *A note on local rigidity*, 2017.
- [11] C. BIRKENHAKE AND H. LANGE, *Complex abelian varieties*, vol. 302 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, second ed., 2004.
- [12] I. BISWAS AND S. DUMITRESCU, *Holomorphic Riemannian metric and fundamental group*, Bulletin de la société mathématique de France, 147 (2019), pp. 455–468.

- 
- [13] K. S. BROWN, *Cohomology of groups*, vol. 87 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.
- [14] G. BRUMFIEL AND H. HILDEN,  *$SL_2(\mathbb{C})$ -Representations of Finitely Presented Groups*, Contemporary mathematics - American Mathematical Society, American Mathematical Society, 1995.
- [15] H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, in Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1953, pp. 41–55.
- [16] F. CATANESE, *Moduli of algebraic surfaces*, in Theory of Moduli, E. Sernesi, ed., Berlin, Heidelberg, 1988, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–83.
- [17] ———, *A superficial working guide to deformations and moduli*, 2011.
- [18] M. CULLER, N. M. DUNFIELD, M. GOERNER, AND J. R. WEEKS, *Snappy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*.
- [19] M. CULLER AND P. B. SHALEN, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Annals of Mathematics, 117 (1983), pp. 109–146.
- [20] J.-P. DEMAILLY, *Propriétés de semi-continuité de la cohomologie et de la dimension de Kodaira-Iitaka*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 320 (1995), pp. 341–346.
- [21] B. DEROIN AND N. THOLOZAN, *Dominating surface group representations by Fuchsian ones*, International Mathematics Research Notices, 2016 (2015), pp. 4145–4166.
- [22] J. A. DIEUDONNÉ, *Éléments d'analyse. Tome III : Chapitres XVI et XVII*, Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXIII, Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1970.
- [23] ———, *La géométrie des groupes classiques*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971. Troisième édition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5.
- [24] A. DOUADY, *Obstruction primaire à la déformation*, Séminaire Henri Cartan, 13 (1960-1961).
- [25] ———, *Le problème des modules pour les variétés analytiques complexes*, in Séminaire Bourbaki : années 1964/65 1965/66, exposés 277–312, no. 9 in Séminaire Bourbaki, Société mathématique de France, 1966.
- [26] S. DUMITRESCU AND A. ZEGHIB, *Global rigidity of holomorphic Riemannian metrics on compact complex 3-manifolds*, 2007.
- [27] C. EHRESMANN, *Sur les espaces localement homogènes*, Enseign. Math. 35, (1936), pp. 317–333.
- [28] ———, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, in Séminaire Bourbaki, Vol. 1, Exp. No. 24, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. 153–168.
- [29] C. FROMENTEAU, *Sur le champ de Teichmüller des surfaces de Hopf*, PhD thesis, Université d'Angers, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Laurent Meersseman, Mathématiques Angers 2017.

- 
- [30] D. GABAI, R. MEYERHOFF, AND P. MILLEY, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, 2009.
- [31] E. GHYS, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $SL_2(\mathbb{C})$* , J. Reine Angew. Math., 468 (1995), pp. 113–138.
- [32] W. M. GOLDMAN, *Nonstandard Lorentz space forms*, Journal of Differential Geometry, 21 (1985), pp. 301 – 308.
- [33] W. M. GOLDMAN, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, in Geometry of group representations (Boulder, CO, 1987), vol. 74 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, pp. 169–198.
- [34] ———, *Locally homogeneous geometric manifolds*, in Proceedings of the 2010 International Congress of Mathematicians, 2010, pp. 717–744.
- [35] W. M. GOLDMAN AND J. J. MILLSON, *The deformation theory of representations of fundamental groups of compact kähler manifolds*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, 67 (1988), pp. 43–96.
- [36] F. GONZÁLEZ-ACUÑA AND J. M. MONTESINOS-AMILIBIA, *On the character variety of group representations in  $SL_2(\mathbb{C})$  and  $PSL_2(\mathbb{C})$* , Mathematische Zeitschrift, 214 (1993), pp. 627–652.
- [37] H. GRAUERT AND R. REMMERT, *Theory of Stein spaces*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2004. Translated from the German by Alan Huckleberry, Reprint of the 1979 translation.
- [38] M. GROMOV, *Lectures on the transformation groups : geometry and dynamics*, 1991.
- [39] O. GUICHARD AND A. WIENHARD, *Topological invariants of anosov representations*, journal of Topology, 3 (2010), pp. 578—642.
- [40] R. C. GUNNING AND H. ROSSI, *Analytic functions of several complex variables*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.
- [41] F. GUÉRITAUD, O. GUICHARD, F. KASSEL, AND A. WIENHARD, *Anosov representations and proper actions*, Geometry & Topology, 21 (2017), pp. 485—584.
- [42] F. GUÉRITAUD AND F. KASSEL, *Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds*, Geometry & Topology, 21 (2017), p. 693–840.
- [43] J. HEINLOTH, *Notes on differentiable stacks*, In : Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen : Seminars Winter Term 2004/2005, (2005).
- [44] M. HEUSENER,  *$SL_n(\mathbb{C})$ -representation spaces of knot groups*, 2016.
- [45] M. HEUSENER AND J. PORTI, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into  $PSL_2(\mathbb{C})$* , Algebraic & Geometric Topology, 5 (2005), pp. 965–997.
- [46] D. HILBERT, *Ueber die theorie der algebraischen formen*, Mathematische Annalen, 36 (1890), pp. 473–534.

- 
- [47] R. HOROWITZ, *Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 25 (1972).
- [48] T. JAMIN, *On the teichmüller stack of homogeneous spaces of  $SL_2(\mathbb{C})$* , 2021.
- [49] D. JOHNSON AND J. J. MILLSON, *Deformation Spaces Associated to Compact Hyperbolic Manifolds*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1987, pp. 48–106.
- [50] F. KASSEL, *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces*, Journal of Lie Theory, 18 (2008), pp. 961–978.
- [51] F. KASSEL, *Quotients compacts des groupes ultrametriques de rang un*, 2009.
- [52] F. KASSEL, *Quotients compacts d'espaces homogènes réels ou  $p$ -adiques*, PhD thesis, Université Paris-Sud XI - Orsay, 2009. Thèse de doctorat sous la direction d'Yves Benoist.
- [53] ———, *Geometric structures and representations of discrete groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018, 2018, pp. 1113–1150.
- [54] H. KASUYA, *Generalized deformations and holomorphic poisson cohomology of solvmanifolds*, Annals of Global Analysis and Geometry, 51 (2017), pp. 155–177.
- [55] I. KHAVKINE, *The calabi complex and killing sheaf cohomology*, journal of Geometry and Physics, 113 (2017), pp. 131—169.
- [56] F. KLEIN, *Vergleichende betrachtungen über neuere geometrische forschungen*, Mathematische Annalen, 43 (1872), pp. 63–100.
- [57] D. KNUTSON, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 203, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [58] S. KOBAYASHI, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*, Princeton University Press, 1987.
- [59] T. KOBAYASHI, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Mathematische Annalen, 285 (1989), pp. 249–263.
- [60] ———, *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups.*, journal of Lie Theory, 6 (1996), pp. 147–163.
- [61] K. KODAIRA, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao.
- [62] K. KODAIRA AND D. C. SPENCER, *On deformations of complex analytic structures, ii*, Annals of Mathematics, 67 (1958), pp. 403–466.
- [63] R. S. KULKARNI AND F. RAYMOND, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, Journal of Differential Geometry, 21 (1985), pp. 231 – 268.
- [64] M. KURANISHI, *On everywhere dense imbedding of free groups in lie groups*, Nagoya Mathematical journal, 2 (1951), pp. 63–71.

- 
- [65] ———, *On the locally complete families of complex analytic structures*, Ann. of Math. (2), 75 (1962), pp. 536–577.
- [66] ———, *New proof for the existence of locally complete families of complex structures*, in Proceedings of the Conference on Complex Analysis, A. Aeppli, E. Calabi, and H. Röhrl, eds., Berlin, Heidelberg, 1965, Springer Berlin Heidelberg, pp. 142–154.
- [67] G. S. LAKELAND AND C. J. LEININGER, *Strict contractions and exotic  $SO_0(d, 1)$  quotients*, journal of the London Mathematical Society, 96 (2017), pp. 642–662.
- [68] S. LAWTON, *Generators, relations and symmetries in pairs of unimodular matrices*, journal of Algebra, 313 (2007), p. 782–801.
- [69] S. LAWTON AND A. S. SIKORA, *Varieties of characters*, Algebras and Representation Theory, 20 (2017), pp. 1133–1141.
- [70] A. LUBOTZKY AND A. MAGID, *Varieties of Representations of Finitely Generated Groups*, American Mathematical Society : Memoirs of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, 1985.
- [71] J. MARCHÉ, *Character varieties in  $SL_2$  and kauffman skein algebras*, 2015.
- [72] L. MEERSSEMAN, *Foliated structure of the Kuranishi space and isomorphisms of deformation families of compact complex manifolds*, Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure, Ser. 4, 44 (2011), pp. 495–525.
- [73] ———, *A note on the automorphism group of a compact complex manifold*, L'Enseignement Mathématique, (2018).
- [74] ———, *The Teichmüller and Riemann moduli stacks*, Journal de l'école polytechnique — Mathématiques, 6 (2019), pp. 879–945.
- [75] J. MILLSON AND M. KAPOVICH, *On representation varieties of 3-manifold groups*, 2015.
- [76] J. MORROW AND K. KODAIRA, *Complex manifolds*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006. Reprint of the 1971 edition with errata.
- [77] R. E. MOSHER AND M. C. TANGORA, *Cohomology operations and applications in homotopy theory*, Harper & Row, Publishers, New York-London, 1968.
- [78] G. D. MOSTOW, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973. Annals of Mathematics Studies, No. 78.
- [79] D. MUMFORD, *Abelian varieties*, vol. 5 of Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; by Hindustan book Agency, New Delhi, 2008.

- 
- [80] D. MUMFORD, J. FOGARTY, AND F. KIRWAN, *Geometric Invariant Theory*, no. vol. 34 in *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, 3 Folge/A series of Modern Surveys in Mathematics series*, Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [81] I. NAKAMURA, *Complex parallelisable manifolds and their small deformations*, *Journal of Differential Geometry*, 10 (1975), pp. 85–112.
- [82] A. NEULANDER AND L. NIRENBERG, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, *Annals of Mathematics*, 65 (1957), pp. 391–404.
- [83] P. NEWSTEAD, *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces*, *Lectures on Mathematics and Physics*, Published for the TIFR (Tata Institute of Fundamental Research), 2012.
- [84] J. PORTI, *Geometrization of three manifolds and perelman’s proof*, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, 102 (2008), pp. 101–125.
- [85] G. PRASAD, *Strong rigidity of  $q$ -rank 1 lattices*, *Inventiones mathematicae*, 21 (1973), pp. 255–286.
- [86] M. S. RAGHUNATHAN, *Vanishing theorems for cohomology groups associated to discrete subgroups of semisimple lie groups*, *Osaka J. Math.*, 3 (1966), pp. 243–256.
- [87] D. ROLFSEN, *Knots and links*, *Mathematics Lecture series*, No. 7, Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif., 1976.
- [88] S. ROLLENSKE, *The kuranishi-space of complex parallelisable nilmanifolds*, *Journal of the European Mathematical Society*, 13 (2008), pp. 513—531.
- [89] F. SALEIN, *Varieties anti-de Sitter de dimension 3*, PhD thesis, École normale supérieure de Lyon, 1999. Thèse de doctorat dirigée par Abdelghani Zeghib.
- [90] A. S. SIKORA, *Character varieties*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364 (2012), pp. 5173–5208.
- [91] R. STEINBERG, *Regular elements of semi-simple algebraic groups*, *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 25 (1965), pp. 49–80.
- [92] THE STACKS PROJECT AUTHORS, *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [93] N. THOLOZAN, *Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques*, *Annales de l’Institut Fourier*, 65 (2015), pp. 1921–1952.
- [94] ———, *Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques*, *Annales de l’Institut Fourier*, 65 (2015), pp. 1921–1952.
- [95] ———, *Dominating surface group representations and deforming closed anti-de Sitter 3-manifolds*, *Geometry & Topology*, 21 (2017), pp. 193–214.
- [96] W. P. THURSTON, *On proof and progress in mathematics*, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 (1994), pp. 161–177.

- 
- [97] ———, *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, vol. 35 of Princeton Mathematical series, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [98] B. TOËN, *Derived algebraic geometry*, EMS Surv. Math. Sci., 1 (2014).
- [99] M. VERBITSKY, *Ergodic complex structures on hyperkähler manifolds*, Acta Mathematica, 215 (2015), pp. 161–182.
- [100] A. VISTOLI, *Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*, disponible sur arXiv, (2004).
- [101] H. WANG, *Complex parallelisable manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954), pp. 771–776.
- [102] J. WAVRIK, *Deforming cohomology classes*, Transactions of the American Mathematical Society, 181 (1973), pp. 341–350.
- [103] ———, *Obstructions to the existence of a space of moduli*, Princeton University Press, 2015, pp. 403–414.
- [104] C. A. WEIBEL, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1994.
- [105] A. WEIL, *On discrete subgroups of Lie groups. II*, Ann. of Math. (2), 75 (1962), pp. 578–602.
- [106] A. WEINSTEIN, *Groupoids : unifying internal and external symmetry. A tour through some examples*, in Groupoids in analysis, geometry, and physics (Boulder, CO, 1999), vol. 282 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, pp. 1–19.



**Titre :** Espace de Teichmüller du fibré des repères d'une 3-variété hyperbolique réelle.

**Mot clés :** Théorie des déformations, variétés de représentations et champs analytiques.

**Résumé :** Cette thèse a pour but de poursuivre et de généraliser, en utilisant le point de vue global offert par les champs, l'étude locale faite par GHYS concernant les déformations des structures complexes des espaces homogènes de  $SL_2(\mathbb{C})$ . Dans cet article, l'auteur montre que la déformation de l'holonomie de la  $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}))$ -structure complète d'un quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  (où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $SL_2(\mathbb{C})$ , co-compact et sans torsion) permet de construire une famille de structures complexes sur ce quotient. Plus précisément, il montre que le germe analytique de la variété de représentation  $\mathcal{R}(\Gamma)$  de  $\Gamma$  dans  $SL_2(\mathbb{C})$ , pointée au morphisme trivial, détermine l'espace de Kuranishi de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Nous montrons que par cette même construction, la famille tautologique au dessus d'un ouvert de Zariski  $V$  de  $\mathcal{R}(\Gamma)$  reste complète en chaque point correspondant une représentation *admissible*, c'est-à-dire qui correspond à l'holonomie d'une structure complète. Par ailleurs, les travaux de KASSEL sur l'admissibilité de ces représentations permettent d'affirmer que l'ensemble des représentations

admissibles  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  constitue un ouvert de  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Notons que  $SL_2(\mathbb{C})$  agit par conjugaison sur  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  en préservant les classes d'équivalence de structures complexes et, qu'en général, la non-trivialité des  $SL_2(\mathbb{C})$ -orbites met en défaut le critère de versalité de cette famille. Finalement, le calcul du groupe des automorphismes  $C^\infty$ -isotopes à l'identité, qui correspond au groupe d'isotropie d'une structure complexe dans l'espace de Teichmüller, permet d'affirmer que le champ quotient  $V/SL_2(\mathbb{C})$  est un sous-champ ouvert du champ de Teichmüller de  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . Pour terminer, remarquons que le fibré des repères d'une variété  $M$  compacte hyperbolique fermée de dimension 3 s'identifie naturellement au quotient de  $PSL_2(\mathbb{C})$  par une  $PSL_2(\mathbb{C})$ -représentation fidèle et discrète de  $\pi_1(M)$ . Par un résultat de THURSTON, cette représentation se relève toujours à  $SL_2(\mathbb{C})$  et on peut donc voir le quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\pi_1(M)$  comme un double revêtement du fibré des repères de  $M$ . Ceci justifie l'abondance de ces espaces ainsi que le nom donné à cette thèse.

**Title:** Teichmüller space of the frame bundle of a real hyperbolic 3-fold.

**Keywords:** Deformation theory, representation and analytic stacks.

**Abstract:** This thesis aims to pursue and generalize, by using the global point of view offered by the stacks, the local study made by GHYS concerning the deformations of complex structures of the homogeneous spaces of  $SL_2(\mathbb{C})$ . In this article, the author shows that the deformation of the holonomy of the complete  $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}), SL_2(\mathbb{C}))$ -structure of a quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$  (where  $\Gamma$  is a discrete subgroup of  $SL_2(\mathbb{C})$ , co-compact and torsion free) allows to build a family of complex structures on this quotient. More precisely, he shows that the analytic germ of the representation variety  $\mathcal{R}(\Gamma)$  of  $\Gamma$  in  $SL_2(\mathbb{C})$ , pointed at the trivial morphism, determines the Kuranishi space of  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . We show that by this same construction, the tautological family above a Zariski open subset  $V$  in  $\mathcal{R}(\Gamma)$  remains complete at each point corresponding to an *admissible* representation, i.e. which corresponds to the holonomy of a complete structure. Moreover, KASSEL's work on the admissibility of these representations allows us

to affirm that the set  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  of admissible representations is open in  $\mathcal{R}(\Gamma)$ . Note that  $SL_2(\mathbb{C})$  acts by conjugation on  $\mathcal{R}(\Gamma)^a$  preserving the equivalence classes of complex structures and, in general, the non-triviality of  $SL_2(\mathbb{C})$ -orbits implies the non-versality of this family. Finally, the computation of the group of automorphisms which are  $C^\infty$ -isotopic to the identity, which corresponds to the isotropy group of a complex structure in Teichmüller space, allows us to affirm that the quotient stack  $V/SL_2(\mathbb{C})$  is an open substack of the Teichmüller stack of  $SL_2(\mathbb{C})/\Gamma$ . To finish, let us notice that the frame bundle of a closed hyperbolic compact manifold  $M$  of dimension 3 is naturally identified with the quotient of  $PSL_2(\mathbb{C})$  by a faithful and discrete  $PSL_2(\mathbb{C})$ -representation of  $\pi_1(M)$ . By a result of THURSTON, this representation lifts to  $SL_2(\mathbb{C})$  and we can therefore see the quotient  $SL_2(\mathbb{C})/\pi_1(M)$  as a double covering of the bundle of reference frames of  $M$ . This justifies the abundance of these spaces as well as the name of this thesis.