



HAL
open science

Approche LMI pour l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Doha El Hellani

► **To cite this version:**

Doha El Hellani. Approche LMI pour l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini. Autre. Université de Picardie Jules Verne, 2018. Français. NNT: 2018AMIE0021. tel-03692867

HAL Id: tel-03692867

<https://theses.hal.science/tel-03692867>

Submitted on 10 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de Doctorat

*Mention : Sciences pour l'ingénieur
Spécialité : Automatique*

présentée à *l'Ecole Doctorale en Sciences Technologie et Santé (ED 585)*

de l'Université de Picardie Jules Verne

par

Doha EL HELLANI

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Picardie Jules Verne

*Approche LMI pour l'analyse et la synthèse de filtres H_∞
dans un domaine fréquentiel fini*

Soutenue le 18 janvier 2018, après avis des rapporteurs, devant le jury d'examen :

M. A. CHARARA , Professeur, UTC, Compiègne	Rapporteur
M. M. ZASADZINSKI , Professeur, UL, Lorraine	Rapporteur
M. M. OULADSINE , Professeur, AMU, Marseille	Examineur
M. M. M'SAAD , Professeur, ENSICAEN, Caen	Examineur
M. J. BOSCHE , Maître de Conférences HDR, UPJV, Amiens	Examineur
M. A. EL HAJJAJI , Professeur, UPJV, Amiens	Directeur
M. R. CESCHI , Professeur, F'SATI-CPUT, Afrique du Sud	Co-directeur



Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au laboratoire Modélisation, Information et Systèmes (MIS, UPJV, Amiens), dirigé par M. Gilles DEQUEN, plus particulièrement au sein de l'équipe Commande et Véhicules (COVE), dirigé par M. Ahmed EL HAJJAJI.

Je tiens tout d'abord à remercier M. Mustapha OULADSINE, M. Mohammed M'SAAD et M. Jérôme BOSCHE, qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Je remercie également M. Ali CHARARA et M. Michel ZASADZINSKI, pour avoir accepté de juger et d'enrichir ce travail en tant que rapporteurs.

je tiens à remercier vivement M. Ahmed EL HAJJAJI de m'avoir accueillie au sein de son équipe pour mon stage du Master de recherche et m'a offert la possibilité de poursuivre mes études de doctorat. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude en tant que directeur de ma thèse, pour sa disponibilité malgré ses nombreuses charges. Ses compétences et sa rigueur scientifiques, ainsi que ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté et appris.

Mes grands remerciements vont également à M. Roger CESCHI, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche. Ce fut un grand plaisir et un grand honneur pour moi de pouvoir travailler avec lui. je lui suis reconnaissante pour ses précieux conseils, son patience ainsi que pour la confiance qu'il m'a accordée.

je remercie tous les collègues du laboratoire, qui m'ont permis de travailler dans des conditions privilégiées.

Merci infiniment à mon père et ma mère. Cette victoire est le fruit de leur investissement désintéressé. Leurs amours me portent et me guident tous les jours. Merci pour avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Je tiens à remercier également mes sœurs et mon frère pour leurs encouragements permanents.

Enfin, je remercie particulièrement Ady pour son soutien et son aide permanente durant mes travaux de thèse.

Table des matières

Notations	7
Liste des publications	9
1 Introduction générale	11
2 État de l'art sur le filtrage des systèmes dynamiques	15
2.1 Introduction	16
2.2 Présentation des systèmes dynamiques	16
2.3 Stabilité des systèmes dynamiques : au sens de Lyapunov	18
2.3.1 Cas des systèmes à temps continu	18
2.3.2 Cas des systèmes à temps discret	19
2.4 Systèmes linéaires incertains à paramètres invariants dans le temps (LTI systems)	20
2.4.1 Représentation d'état d'un système incertain	20
2.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes polytopiques	21
2.5 Systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno (TS)	23
2.5.1 Représentation d'état du modèle TS	24
2.5.2 Stabilité au sens de Lyapunov	25
2.6 Systèmes à retard	27
2.6.1 Représentation d'état	27
2.6.2 Stabilité par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii	28
2.7 Systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication	29
2.8 Filtrage des systèmes dynamiques	31
2.8.1 Principe du filtrage	31
2.8.2 Caractérisation de l'erreur d'estimation	31
2.8.2.1 Cas des systèmes à temps continu	31
2.8.2.1.a. Norme H_2	31
2.8.2.1.b. Norme H_∞	32
2.8.2.1.c. Gain ℓ_2	32
2.8.2.2 Cas des systèmes à temps discret	32
2.8.2.2.a. Norme H_2	32
2.8.2.2.b. Norme H_∞	32
2.8.2.2.c. Gain ℓ_2	32
2.8.3 Du filtre de Kalman au filtre H_∞ : état de l'art	33
2.9 Filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	35
2.10 Inégalités matricielles linéaires	39
2.10.1 Rappels historiques	39
2.10.2 Définitions	40
2.10.3 Intérêts des LMI	41
2.10.3.1 Convexité	41

2.10.3.2	Regroupement des LMI	41
2.10.3.3	Algorithmes de calcul	42
2.10.4	Linéarisation et relaxation des LMI : outils mathématiques	42
2.10.4.1	lemme de Complément de Schur	42
2.10.4.2	Lemme de Finsler	42
2.10.4.3	Transformation de congruence	42
2.10.4.4	Lemme de projection	42
2.10.4.5	Lemme de la S-procédure généralisée	43
2.10.4.6	Lemme de séparation	43
2.10.4.7	Inégalité de Jensen	43
2.11	Conclusion	43
3	Analyse et synthèse de filtres H_∞ robustes pour les systèmes linéaires incertains	45
3.1	Introduction	46
3.2	Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains à temps discret	46
3.2.1	Formulation du problème	46
3.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	47
3.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	50
3.2.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	51
3.2.5	Exemple de simulation	54
3.3	Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains à temps continu	58
3.3.1	Formulation du problème	58
3.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	59
3.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	60
3.3.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	61
3.3.5	Exemples de simulation	62
3.3.5.1	Exemple 1	62
3.3.5.2	Exemple 2	66
3.4	Conclusion	69
4	Analyse et synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires flous de type Takagi-Sugeno	71
4.1	Introduction	72
4.2	Filtrage H_∞ des systèmes TS à temps discret	72
4.2.1	Formulation du problème	72
4.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	74
4.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	77
4.2.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	78
4.2.5	Exemple de simulation	80
4.3	Filtrage H_∞ des systèmes TS à retard	85
4.3.1	Formulation du problème	85
4.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	87
4.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	92
4.3.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	93
4.3.5	Exemple de simulation	96
4.4	Conclusion	97

5	Filtrage H_∞ des systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication	101
5.1	Introduction	102
5.2	Filtrage H_∞ des systèmes flous de type TS avec mesures quantifiées	102
5.2.1	Formulation du problème	102
5.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	104
5.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	108
5.2.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	110
5.2.5	Exemple de simulation	112
5.3	Filtrage H_∞ des systèmes linéaires à retard constant avec mesures quantifiées . .	116
5.3.1	Formulation du problème	116
5.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	117
5.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	122
5.3.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	124
5.3.5	Exemple de simulation	125
5.4	Filtrage H_∞ des systèmes linéaires avec mesures quantifiées et pertes de paquets	128
5.4.1	Formulation du problème	128
5.4.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	129
5.4.3	Étude de stabilité du système augmenté	133
5.4.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	135
5.4.5	Exemple de simulation	136
5.5	Conclusion	137
6	Conclusion générale et perceptives	141

Notations

Matrices et vecteurs

I_n	Matrice identité de dimension n
I	Matrice identité de dimension appropriée
0	Matrice nulle de dimension appropriée
$A > 0$ ($A < 0$)	Matrice A symétrique définie positive (resp. symétrique définie négative)
A^T	Transposée de la matrice A
A^*	Transposée conjuguée de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
$Tr(A)$	Trace de la matrice A
A_{\perp}	Matrice Y telle que $AY = 0$ et $[A^T \ Y]$ est de rang maximal
$diag\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$	Matrice bloc-diagonale d'éléments $A_i, i = 1, \dots, n$
$rang(A)$	Rang de la matrice A
$He\{A\}$	$He\{A\} = A + A^T$
$\sigma_{max}(A)$	Valeur singulière maximale de la matrice A
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \bullet & A_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole \bullet représente A_{21}

Normes

$\|\cdot\|$ Norme euclidienne d'un vecteur

Ensembles

$R^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimensions $n \times m$
$H^{n \times m}$	Ensemble des matrices hermitiennes de dimensions $n \times m$
R^n	Ensemble des vecteurs réels de dimensions n
R^+	Ensemble des nombres réels non négatifs
N	Ensemble des entiers naturels
$\ell_2 [0, \infty)$	Espace des signaux à amplitude finie
$E \{.\}$	Espérance mathématique
$P \{.\}$	Mesure de probabilité

Acronymes

LMI	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
TS	Takagi-Sugeno
PDC	Parallel Distributed Compensation
Lemme KYP	Lemme de Kalman-Yakubovich-Popov

Liste des publications

Revue internationale

1. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. H_∞ filter design for linear time-invariant systems with polytopic uncertainties in finite frequency domain. Optimal Control Applications and Methods, 2017, vol. 38, no 4, p. 520 – 540.
2. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. H_∞ filter design for nonlinear systems with quantised measurements in finite frequency domain. International Journal of Systems Science, 2017, vol. 48, no 5, p. 1048 – 1059.
3. EL HELLANI, Doha, EL HAJJAJI, Ahmed, et CESCHI, Roger. Finite Frequency H_∞ Filter Design for TS Fuzzy Systems : New Approach. Signal Processing, 2017.

Conférences internationales

1. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. H_∞ filter design for TS nonlinear discrete-time state-delayed systems in finite frequency domain. In : Control Applications (CCA), 2015 IEEE Conference on. IEEE, 2015. p. 353 – 358.
2. EL HELLANI, Doha, EL HAJJAJI, Ahmed, et CESCHI, Roger. H_∞ filter design for discrete time systems with time varying delay and quantized measurements. In : American Control Conference (ACC), 2017. IEEE, 2017. p. 5708 – 5713.
3. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. New approach to H_∞ filtering for uncertain discrete-time linear systems in finite frequency domain. In : American Control Conference (ACC), 2016. IEEE, 2016. p. 3638 – 3643.
4. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. H_∞ filtering for discrete time systems with intermittent measurements and finite frequency specifications. In : IEEE Conference on Decision and Control (CDC), 2017.

Conférences nationales

1. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. Filtrage H_∞ des systèmes non linéaires dans un domaine fréquentiel fini. 25èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA) , 2016.
2. EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. Filtrage H_∞ des systèmes non linéaires à retard dans un domaine fréquentiel fini. 26èmes Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA) , 2017.

En révision

EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. Quantized H_∞ filtering for state-delayed systems with finite frequency specifications. International journal of Adaptive Control and Signal Processing.

Chapitre 1

Introduction générale

Le diagnostic ou la surveillance d'un système dynamique suppose au préalable une connaissance de l'ensemble des grandeurs internes susceptibles de décrire le comportement dynamique du procédé (les états du système). Sur le plan pratique, cette connaissance est souvent difficile, voire impossible à satisfaire. Les variables directement mesurées par des capteurs ne couvrent généralement pas la totalité des états du système. D'une part, et en raison des contraintes économiques, il est souvent requis de s'affranchir de certains capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation et de maintenance. D'autre part, et pour des raisons technologiques, on ne dispose pas toujours de capteurs pour mesurer certaines grandeurs physiques. De plus, certaines variables d'état n'ont pas une signification physique et par conséquent leur mesure directe est impossible. Une solution couramment adoptée pour pallier le manque d'information sur les états internes d'un procédé consiste à utiliser un système dynamique auxiliaire permettant de reconstruire les variables non directement mesurables au moyen de celles disponibles et du modèle dynamique du procédé : c'est le rôle d'un estimateur d'état.

Le problème de filtrage se résume dans l'estimation des états ou d'une combinaison linéaire des états d'un système en utilisant les sorties mesurées, tout en minimisant l'influence des perturbations extérieures sur l'erreur d'estimation. D'une façon générale, la synthèse du filtre est formulé en spécifiant un critère de performance à optimiser. Le premier filtre, dédié à l'estimation de l'état des systèmes linéaires, a été développé par Kalman dans un cadre stochastique, [37]. Dans ce cas, le critère de minimisation souvent retenu est la variance de l'erreur d'estimation. Des extensions du filtre de Kalman ont été par la suite proposées pour de classes particulières de systèmes non linéaires, citons le filtre de Kalman étendu. Le filtre de Kalman a eu un impact considérable dans de nombreux problèmes pratiques et a été largement appliqué dans la poursuite des cibles, le contrôle de la navigation et la détection des défauts dans l'industrie nucléaire, etc. Cependant, cette technique est parfois difficile à appliquer à cause des contraintes imposées. En effet, le filtre de Kalman requiert que les bruits qui affectent le système soient des bruit blancs. En pratique, nous n'avons pas toujours à disposition toutes les propriétés statistiques des perturbations extérieures. Pour surmonter ces difficultés, une approche alternative, appelée filtrage H_∞ a été introduite. Cette technique de filtrage nécessite aucune connaissance sur les perturbations à part qu'elles soient à énergie bornée et elle procède par minimisation de l'effet des perturbations sur l'erreur d'estimation.

Il existe dans la littérature plusieurs approches pour résoudre le problème du filtrage H_∞ , telles que l'approche par l'équation de Riccati, l'approche de Lyapunov par LMI, et l'approche polynomiale. Les inégalités matricielles linéaires (LMI) ont un intérêt certain car elles sont applicables facilement. Leur résolution repose sur des méthodes d'optimisation convexe et elles bénéficient régulièrement de nombreuses avancées théoriques mais également de progrès techniques considérables. Durant les dernières années, l'optimisation convexe sous contraintes LMI a émergé comme un outil incontournable en automatique et de nombreux problèmes réputés

complexes sont maintenant résolus en l'espace de quelques secondes.

L'objectif du problème de filtrage H_∞ conventionnel consiste à concevoir un filtre stable tel que la norme H_∞ de la fonction de transfert entre les perturbations d'entrée et l'erreur d'estimation est délimitée par un niveau prédéfini sur toute la plage de fréquences. Cependant, dans de nombreux cas pratiques, les signaux de bruit résident dans des bandes restreintes de fréquences qui sont souvent connues au préalable. En effet, tout signal de bruit, sauf le bruit blanc, est généralement caractérisé par un intervalle de fréquences limité. Bien que les méthodes de filtrage H_∞ classiques peuvent encore être appliquées dans ces cas, elles entraînent inévitablement un conservatisme. Par conséquent, les techniques de filtrage prenant en compte les spécifications fréquentielles des bruits sont évidemment plus efficaces et moins restrictives. C'est précisément dans ce cadre que s'inscrivent les travaux menés au cours de la thèse. Pour résoudre ce problème, l'idée consiste dans un premier temps à tester toutes les fréquences appartenant au domaine fréquentiel du bruit pour vérifier une borne supérieure de la norme H_∞ . C'est un problème d'optimisation de dimensions infinies, avec une infinité de contraintes. Une manière de le faire, est d'utiliser le lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov qui établit une équivalence cruciale entre une infinité d'inégalités fréquentielles et un nombre fini d'inégalités matricielles faisant intervenir les matrices d'état du procédé considéré. La version classique du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov permet de vérifier qu'une propriété donnée est satisfaite sur toute la plage de fréquences. Plus récemment, une généralisation a été proposée par [32], qui permet de considérer un intervalle fréquentiel quelconque éventuellement borné. Dans le prolongement de ce résultat, le filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel limité a fait l'objet de quelques travaux dans la littérature, nous citons [21] pour les systèmes linéaires incertains, [28] pour les systèmes incertains à commutation, et [30] pour les systèmes non linéaires représenté par le modèle flou de type Takagi-Sugeno.

Motivations et contributions

Malgré l'avantage majeur évident que constitue le filtrage dans un domaine fréquentiel limité, peu de travaux ont été dédiés à ce sujet, et une large classes de systèmes n'a toujours pas été traité dans ce cadre. Il est donc intéressant d'explorer les intérêts offerts par la prise en compte des caractéristiques fréquentielles des perturbations extérieures pour concevoir des filtres moins conservatifs et plus performants.

Dans les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit, nous nous intéressons à la synthèse de filtres H_∞ , sur des bandes de fréquences restreintes et prédéfinies, pour différentes classes de systèmes dynamiques que nous citons ci-dessous :

1. **Les systèmes linéaires invariants dans le temps (ou LTI, Linear Time Invariant) avec des incertitudes paramétriques :** Bien que les modèles linéaires nominaux ont fut l'objet d'un grand nombre de travaux sur l'estimation d'état, ils ne sont pas suffisamment précis pour décrire complètement le comportement d'un système donné, ils ne sont que des approximations dans des situations de fonctionnement particulières. Dans le contexte des applications pratiques, il existe de nombreuses incertitudes affectant le système physique et donc son modèle. Par conséquent, le développement des approches de synthèse des filtres robustes qui tiennent compte des incertitudes est inévitable. Nous nous intéressons

essentiellement aux systèmes LTI avec des incertitudes paramétriques, en utilisant la modélisation sous la forme de polytopes. Cette représentation recouvre des cas pratiques importants et permet de se ramener à des résultats de synthèse de filtres de façon assez simple en utilisant les techniques du cas nominal.

2. **Les systèmes à retards** : Les systèmes à retards, appelés aussi systèmes héréditaires, constituent un des problèmes les plus difficiles rencontrés dans l'étude des systèmes dynamiques. Les modèles à retards sont naturellement présents dans les systèmes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information. Par ailleurs, beaucoup d'actionneurs et de capteurs engendrent des retards qui ne peuvent pas être ignorés. Le retard, s'il n'est pas pris en considération dès l'étape de synthèse du filtre, peut dégrader la qualité de l'estimation et même déstabiliser le filtre lors de son application sur le système réel.
3. **Les systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno** : La majorité des procédés physiques réels manifestent dans leur dynamique de nombreuses non linéarités et des phénomènes incompréhensibles. Ceci rend leur modélisation plus complexe et leur comportement plus difficile à caractériser linéairement dans une large plage de fonctionnement. Le modèle flou de type Takagi et Sugeno, permettant de représenter les systèmes non linéaires par une interconnexion de sous-modèles linéaires, a attiré l'attention des chercheurs et a donné lieu à des développements très riches. Ceci est dû au fait que, malheureusement, la théorie de la commande/filtrage non linéaire manque encore d'outils de synthèse suffisamment généraux. Les systèmes linéaires, en revanche, bénéficient d'un corps théorique beaucoup plus mûr.
4. **Les systèmes en réseaux sous contraintes de communication** : Dans de nombreuses applications, les différentes parties du système de commande, utilisé pour décrire et guider le comportement et le fonctionnement du système dynamique (les contrôleurs, les actionneurs, les capteurs, les estimateurs,...), sont séparés et communiquent leurs données (mesures/commandes) à travers un réseau de communication. Malgré les avantages considérables des systèmes commandés en réseau, l'introduction du réseau entre les capteurs et le filtre entraîne la nécessité de prendre en compte certaines contraintes de communication comme le retard de transmission, la perte de paquets, la quantification et les contraintes d'accès au réseau. Dans la littérature, il existe très peu de résultats sur le filtrage, sur des bandes restreintes de fréquence, pour les systèmes dynamiques sous contraintes de communication.

Les contributions de cette thèse portent sur le développement de nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ , dans des domaines fréquentiels limités, ayant pour but la réduction du conservatisme des approches existantes dans la littérature tout en garantissant que les méthodes proposées soient numériquement efficaces. Les conditions de stabilité et de synthèse de filtres H_∞ pour les différentes classes de systèmes dynamiques sont formulées en des problèmes d'optimisation convexe sous contrainte d'inégalités matricielles linéaires. Des exemples numériques et des comparaisons avec des résultats récents de la littérature sont également présentés afin de montrer l'avantage et l'intérêt des approches proposées.

Plan du manuscrit

Ce mémoire est organisé en 4 chapitres qui se présentent comme suit :

Le **chapitre 2** présente quelques notions mathématiques sur la représentation d'état et l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques. Une attention particulière est accordée aux systèmes

avec des incertitudes paramétriques de type polytopique, les systèmes non linéaires représentés par le modèle flou de type TS, les systèmes à retard et les systèmes sous contraintes de communication. Ensuite, un bref état de l'art sur les différentes techniques de filtrage est présenté avec les normes permettant de caractériser l'erreur d'estimation. La section suivante est dédiée à la technique de filtrage sur des intervalles de fréquences limités. La dernière section revient brièvement sur quelques rappels d'optimisation convexe utiles à la compréhension et à la formulation par LMI, ainsi que quelques outils mathématiques qui serviront de support aux chapitres suivants, tout en précisant les motivations pour l'utilisation des LMI.

Le **chapitre 3** est dédié à la présentation des résultats portant sur le filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes linéaires avec incertitudes polytopiques. Deux approches sont proposées pour la synthèse de ces filtres. La première traite le cas des systèmes à temps discret. La seconde est consacrée aux systèmes à temps continu. Les théorèmes développés dans ce chapitre s'appuient sur des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres incertains et sur le lemme de KYP généralisé. Des conditions suffisantes pour la synthèse de filtres H_∞ sont développées en termes de LMIs, pour garantir à la fois la convergence de l'erreur d'estimation et un niveau de performance H_∞ prédéfini. Les performances et les avantages des approches proposées, par comparaison avec des résultats récents de la littérature, sont illustrés par des exemples numériques.

Dans le **chapitre 4**, nous nous intéressons principalement au filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel prédéfini pour les systèmes non linéaires de type TS, avec et sans retard sur le vecteur d'état. Les approches proposées sont basées sur des fonctions de Lyapunov qui dépendent des règles floues et sur les interprétations temporelles du lemme de KYP généralisé. Pour les systèmes à retard, la technique de partitionnement des retards est exploitée afin d'améliorer le rejet des perturbations. Les conditions de stabilité et de synthèse de filtres H_∞ sont formulées en termes de LMI. Chaque section se finit avec des exemples numériques qui permettent d'illustrer les avantages des approches proposées et de comparer les performances de ces dernières avec d'autres résultats de la littérature.

Le **chapitre 5** est consacré à la présentation de différentes méthodes de conception de filtres H_∞ sous les contraintes de communication induites par la présence du réseau entre les capteurs et le filtre dans les systèmes commandés en réseau. L'effet de quantification des mesures, ainsi que la possibilité de perte de paquets lors de la transmission des mesures quantifiées entre les capteurs et le filtre, sont pris en compte dès l'étape de la synthèse du filtre. Les sorties des capteurs sont supposées être quantifiées par un quantificateur de type logarithmique avant d'être transmises au filtre. Ainsi, les signaux quantifiés sont exprimés dans la représentation d'état comme des incertitudes bornées en normes. Quant à la perte d'informations dans le réseau, elle est décrite par une variable stochastique vérifiant un processus de Bernoulli. Les conditions de stabilité et de synthèse de filtres H_∞ sont établies en termes de LMI qui dépendent du domaine fréquentiel choisi des perturbations. Des exemples de simulation sont présentés à la fin de chaque section pour illustrer les performances et les avantages des approches proposées.

Enfin, le dernier chapitre résume les différents résultats obtenus tout au long de cette thèse en mettant l'accent sur différentes suites possibles aux approches proposées.

Chapitre 2

État de l'art sur le filtrage des systèmes dynamiques

Sommaire

2.1	Introduction	12
2.2	Présentation des systèmes dynamiques	12
2.3	Stabilité des systèmes dynamiques : au sens de Lyapunov	14
2.4	Systèmes linéaires incertains à paramètres invariants dans le temps (LTI systems)	16
2.4.1	Représentation d'état	17
2.4.2	Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes polytopiques	18
2.5	Systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno (TS)	20
2.5.1	Représentation d'état	20
2.5.2	Stabilité au sens de Lyapunov	21
2.6	Systèmes à retard	23
2.6.1	Représentation d'état	24
2.6.2	Stabilité par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii	25
2.7	Systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication	25
2.8	Filtrage des systèmes dynamiques	27
2.8.1	Principe du filtrage	27
2.8.2	Caractérisation de l'erreur d'estimation	28
2.8.3	Du filtre de Kalman au filtre H_∞ : état de l'art	29
2.9	Filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	31
2.10	Inégalités matricielles linéaires	35
2.10.1	Rappels historiques	36
2.10.2	Définitions	36
2.10.3	Intérêts des LMIs	37
2.10.4	Linéarisation et relaxation des LMIs : outils mathématiques	38
2.11	Conclusion	40

2.1 Introduction

Ce chapitre introductif a pour objet de présenter les concepts qui seront utiles tout au long de ce mémoire, ainsi que quelques travaux de la littérature qui permettent de se positionner vis-à-vis des résultats dans le domaine du filtrage des systèmes dynamiques.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. D'abord, il débute par un rappel des notions mathématiques de base portant sur la représentation d'état et l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques. Après ces considérations générales, une attention particulière est accordée aux différents types de systèmes dynamiques tels que les systèmes linéaires incertains, les systèmes non linéaires flous de type Takagi-Sugeno, les systèmes à retard et les systèmes sous contraintes de communication. Ensuite, nous présentons un bref état de l'art sur les différentes techniques de filtrage. Les normes permettant de caractériser l'erreur d'estimation et le filtrage H_∞ sur des bandes de fréquences restreintes seront également abordés. Dans la dernière section, nous allons revenir brièvement sur quelques rappels d'optimisation convexe utiles à la compréhension et à la formulation par LMI. Nous présentons également quelques outils mathématiques qui serviront de support aux chapitres suivants, tout en précisant les motivations pour l'utilisation des LMIs.

2.2 Présentation des systèmes dynamiques

L'analyse ou la surveillance d'un système dynamique (étude de stabilité ou stabilisation, suivi de référence, rejet de perturbations...) nécessite au préalable une bonne connaissance de ses composants, répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés, son comportement au cours du temps, ainsi que ses interactions avec le monde extérieur à travers ses entrées et ses sorties. L'entrée peut être une commande ou une excitation appliquée au système et servant à contrôler l'évolution du système afin de produire une réponse désirée. L'entrée peut être également des perturbations extérieures qui sont en général imprévisibles, et qui sont dus à l'environnement, l'incertitude des mesures ou les imprécisions des capteurs. La sortie est la réponse réelle du système. La comparaison de la réponse obtenue à la réponse désirée permet de juger la qualité de la fonction accomplie par le système dynamique.

A) Classification des systèmes dynamiques :

1. **Systèmes mono-variable et multi-variable :** Un système mono-variable est un système ne possédant qu'une seule entrée et une sortie. Alors qu'un système multi-variable possède plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties.
2. **Systèmes continu et discret :** Nous distinguons les systèmes dynamiques à temps continu des systèmes dynamiques à temps discret. Pour un système continu, contrairement à un système discret, les paramètres le caractérisant délivrent une information à tout instant de façon continue, c'est à dire les fonctions d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant.
3. **Systèmes linéaire et non linéaire :** Soit $y(t) = f\{w(t)\}$ un système à temps continu qui possède $w(t) \in R^{n_w}$ comme entrée et dont la sortie est représentée par le vecteur $y(t) \in R^{n_y}$.

Un système est dit linéaire, par opposition à un système non linéaire, lorsque la fonction $f\{\cdot\}$ dépend linéairement de $w(t)$: la réponse due à l'application de deux entrées différentes est égale à la somme des deux réponses du système soumis à ces deux entrées appliquées séparément.

4. **Systèmes déterministe et stochastique :** Dans un système déterministe, une condition initiale donnée à l'instant présent correspondra à chaque instant ultérieur à un et un

seul état futur possible. En plus, dans le cas d'un système déterministe observable, nous pouvons prévoir son état à un instant futur connaissant son état à un état initial.

Alors qu'un système stochastique est sujet aux effets de hasard, même si nous avons son état à un instant initial, son état n'est pas prévisible à un instant futur.

B) Représentation d'un système dynamique par son modèle d'état :

La modélisation d'un système dynamique nous permet d'étudier son comportement actuel, afin de prévoir son évolution dans le futur et par suite le régler pour obtenir la sortie ou la réponse désirée. La modélisation offre une représentation mathématique basée sur les lois de la Physique qui décrivent les phénomènes subis par le système considéré (Mécanique, Électricité, Thermique, Magnétisme...).

Une représentation dans l'espace d'état remplace le modèle entrée-sortie par un système d'équations qui lie les entrées et les sorties d'un système dynamique quelconque tout en suivant de près certains paramètres essentiels, les variables d'état.

Notons que souvent, la solution du système d'équations décrivant un système dynamique est difficile et parfois impossible de trouver à cause des éléments non linéaires du phénomène physique étudié. Plusieurs techniques et hypothèses simplificatrices ont été développées afin de pouvoir décrire mathématiquement un système dynamique quelconque par des équations différentielles linéaires ordinaires. Les classes de systèmes dynamiques abordées dans ce mémoire sont celles des systèmes déterministes, représentés par un nombre fini d'équations différentielles du premier ordre couplées entre elles que nous écrivons :

1. Cas continu :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t) \\
 \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_x} &= f_{n_x}(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t) \\
 y_1 &= g_1(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t) \\
 y_2 &= g_2(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t) \\
 &\vdots \\
 y_{n_y} &= g_{n_y}(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. Cas discret :

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= f_1(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k) \\
 x_2(k+1) &= f_2(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k) \\
 &\vdots \\
 x_{n_x}(k+1) &= f_{n_x}(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k) \\
 y_1(k) &= g_1(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k) \\
 y_2(k) &= g_2(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k) \\
 &\vdots \\
 y_{n_y}(k) &= g_{n_y}(x_1, \dots, x_{n_x}, w_1, \dots, w_{n_w}, k)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

où les grandeurs x_1, x_2, \dots, x_{n_x} sont les états du système, les grandeurs w_1, w_2, \dots, w_{n_w} désignent les entrées (perturbations), les grandeurs y_1, y_2, \dots, y_{n_y} sont les signaux mesurés, et n_x, n_w, n_y

sont des entiers. Les fonctions f_1, f_2, \dots, f_{n_x} et g_1, g_2, \dots, g_{n_y} sont à valeurs réelles et peuvent être linéaires ou non linéaires selon la nature du système étudié.

2.3 Stabilité des systèmes dynamiques : au sens de Lyapunov

La notion de stabilité des systèmes dynamiques s'attache à leur comportement asymptotique, c'est à dire leur comportement lorsque le temps tend vers l'infini. L'idée consiste à certifier que l'évolution du système considéré reste proche de son point d'équilibre et y revient naturellement lorsqu'on s'en écarte d'un certain voisinage. L'analyse de stabilité est primordiale pour étudier le fonctionnement des systèmes mécaniques, électriques, physiques, etc.

Dans les travaux de ce mémoire, le système dont on souhaite estimer son état est supposé être stable. Cependant, il est indispensable de garantir la convergence de l'erreur d'estimation pour un fonctionnement sûr du filtre sur le système réel. Ceci est assuré par l'analyse de stabilité du système augmenté, dont l'état est composé de l'état du système étudié et de celui du filtre et la sortie représente l'erreur d'estimation. Nous nous intéressons notamment à la stabilité au sens de Lyapunov.

Alexandre Lyapunov est le premier à avoir formulé mathématiquement l'idée de stabilité à la fin du 19^e siècle [34]. Sa méthode permet d'étudier la stabilité d'un système dynamique quelconque sans avoir à résoudre explicitement les équations différentielles décrivant son évolution.

La stabilité simple d'un point d'équilibre implique que l'état du système se rapproche naturellement de son point d'équilibre lorsqu'on s'en éloigne. Le point d'équilibre est dit attractif si l'état du système converge vers son point d'équilibre au bout d'un certain temps. Le point d'équilibre est asymptotiquement stable s'il est à la fois stable et attractif.

Nous présentons ci-après des définitions et des théorèmes concernant la stabilité d'un système dynamique au sens de Lyapunov.

2.3.1 Cas des systèmes à temps continu

Nous désignons par x_0 la condition initiale $x(t_0)$, et par x_e le point d'équilibre du système (2.1).

Définition 1. *Stabilité du point d'équilibre*

x_e est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour le système (2.1) si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta > 0 \text{ tels que } \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, w) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

où $x(t, x_0, w)$ désigne la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système 2.1.

Si cette condition n'est pas satisfaite, le point d'équilibre x_e est instable.

Définition 2. *Attractivité du point d'équilibre*

x_e est un point d'équilibre attractif au sens de Lyapunov pour le système (2.1) si

$$\forall t_0 \geq 0, \quad \exists \delta > 0 \text{ tels que } \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, w) - x_e\| = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

x_e est un point d'équilibre attractif veut dire que x_e est un point vers lequel convergent les solutions $x(t)$ du système (2.1) si elles démarrent suffisamment près de x_e .

Lorsque δ tend vers $+\infty$, on dit que x_e est globalement attractif.

Définition 3. *Stabilité asymptotique du point d'équilibre*

Le point d'équilibre x_e est asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable pour le système (2.1) s'il est stable au sens de Lyapunov et attractif (resp. globalement attractif).

La stabilité asymptotique est la propriété qui est généralement recherchée en pratique.

Cette définition ne nous dit rien sur la vitesse avec laquelle la trajectoire $x(t)$ du système (2.1) converge vers son point d'équilibre x_e . C'est pourquoi, on introduit la notion suivante de stabilité exponentielle du point d'équilibre.

Définition 4. *Stabilité exponentielle du point d'équilibre*

Le point x_e est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système (2.1) si

$$\exists \beta > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \|x(t, x_0, w) - x_e\| \leq \alpha \|x_0 - x_e\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0$$

Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Par la suite, nous nous intéresserons à la stabilité autour de l'origine c-à-d quand $x_e = 0$. Les théorèmes suivants donnent des conditions suffisantes pour la stabilité du point d'équilibre $x_e = 0$.

Théorème 1. (*Théorème de Lyapunov pour la stabilité locale et la stabilité asymptotique*)

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est localement stable s'il existe une fonction $V(x, t)$ continue et différentiable et s'il existe un voisinage ν telles que :

1. $\forall x \in \nu, \quad V(x, t) > 0$
2. $\forall x \in \nu, \quad \dot{V}(x, t) = \frac{dV(x, t)}{dt} \leq 0$

Si $\dot{V}(x, t) < 0$, $V(x, t)$ est appelée fonction de Lyapunov au sens strict. Dans ce cas $x_e = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Théorème 2. (*Théorème de Lyapunov pour la stabilité exponentielle*)

L'origine est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système (2.1) s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x, t)$ continue et différentiable, un voisinage ν et des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et $v \geq 0$, telles que :

1. $\forall x \in \nu, \quad \alpha \|x\|^v \leq V(x, t) \leq \beta \|x\|^v$
2. $\forall x \in \nu, \quad \dot{V}(x, t) < -\gamma V(x, t)$.

2.3.2 Cas des systèmes à temps discret

Nous désignons par x_0 la condition initiale $x(t_0)$, et par x_e le point d'équilibre du système (2.2).

Tous les théorèmes et les définitions ci-dessus restent valables pour les systèmes à temps discret de la forme (2.2). Cependant, nous donnons dans la suite la définition concernant la stabilité exponentielle :

Définition 5. *Stabilité exponentielle du point d'équilibre*

Le point x_e est un point d'équilibre exponentiellement stable pour le système (2.2) si

$$\exists \alpha > 0, \exists \rho, \quad 0 < \rho < 1, \quad \|x(k, x_0, w) - x_e\| \leq \alpha \|x_0 - x_e\| \rho^{k-k_0}, \quad \forall k \geq k_0 \geq 0$$

2.4 Systèmes linéaires incertains à paramètres invariants dans le temps (LTI systems)

La représentation d'état est censée être une image parfaite de la réalité et représenter toutes les situations de fonctionnement du procédé réel considéré. Si cette hypothèse est vérifiée, alors les performances du filtre garanties sur le modèle nominal seront atteintes lors de l'application du filtre sur le système réel.

Malgré leur utilisation et leur présentation fréquentes dans la littérature, les modèles linéaires nominaux ne sont pas suffisamment précis pour décrire complètement le comportement d'un système donné, ils ne sont que des approximations dans des situations de fonctionnement particulières. En pratique, il existe de nombreuses incertitudes affectant le système physique et donc son modèle. Elles peuvent être dues à la variation de certains paramètres avec le temps ou les conditions de fonctionnement, à une connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres physiques, à la présence de certaines dynamiques et non linéarités qui ont été négligées dans la modélisation ou à des hypothèses simplificatrices faites lors de la modélisation. De plus, il ne faut pas oublier les perturbations externes imprévisibles qui peuvent venir brouiller le fonctionnement du système asservi. Dans certains cas, de petites incertitudes sur le modèle mathématique, utilisé lors de la synthèse du filtre, pourront dégrader de façon significative la performance du filtre sur le plan réel. Il est donc nécessaire de prendre en compte ces incertitudes de modélisation dès la synthèse du filtre.

De manière générale, les incertitudes du modèle ne sont pas parfaitement connues, mais on dispose souvent d'informations sur leurs caractéristiques statistiques ou leur amplitude maximale. C'est à partir de cette connaissance qu'on essaie de rapprocher le modèle du système réel le plus précisément possible. On définit ainsi la robustesse d'un filtre par l'insensibilité par rapport à une propriété, par exemple la stabilité et les performances, vis à vis des incertitudes du modèle.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la classe des systèmes linéaires incertains à paramètres invariants dans le temps (Linear Time Invariant-LTI systems). Cette modélisation, recouvrant des cas pratiques importants, a reçu beaucoup l'attention des chercheurs, car elle permet de se ramener à des résultats de synthèse du filtre de façon assez simple en utilisant les techniques du cas nominal.

Les incertitudes sont généralement regroupées en deux catégories : les incertitudes structurées et les incertitudes non structurées. Pour ces dernières, aucune information structurelle n'est disponible, la manière dont elles affectent le modèle est complètement inconnue. Les incertitudes structurées, quand à elles, ont été introduites après les incertitudes non structurées, et elles représentent des incertitudes dont on peut déterminer l'influence sur la structure du système étudié. Leur modélisation mathématique est alors plus précise, et le paramètre incertain est plus fidèlement représenté. Nous présentons ci-après les incertitudes polytopiques et les incertitudes bornées en norme.

2.4.1 Représentation d'état d'un système incertain

La représentation d'état d'un système linéaire incertain à paramètres invariants dans le temps est la suivante :

$$\begin{aligned}\delta[x(t)] &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)w(t), & A(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}, B(\sigma) \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + D(\sigma)w(t), & C(\sigma) \in R^{n_y \times n_x}, D(\sigma) \in R^{n_y \times n_w},\end{aligned}\tag{2.3}$$

où σ est le terme incertain. L'opérateur $\delta[x(t)]$ désigne la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps pour les systèmes à temps continu et l'opérateur de décalage (shift operator) pour les systèmes

à temps discret.

A) Incertitudes polytopiques

Les incertitudes polytopiques sont des incertitudes paramétriques. Elles ont été introduites dans les années 80 par [35]. Cette formulation permet de représenter un système linéaire incertain par un modèle qui dépend linéairement de paramètres incertains et dont les matrices appartiennent à un domaine de type polytopique. En d'autres termes, cette structure équivaut à une représentation multimodèle du système réel où chaque modèle correspond à des conditions de fonctionnement données, ce qui permet de couvrir une grande plage de fonctionnement du processus à étudier.

Dans ce cas, les matrices du modèle d'état sont données par :

$$(A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma)) \in \Gamma \quad (2.4)$$

$$\Gamma = \left\{ A(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i; B(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i B_i; C(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i C_i; D(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i D_i \right\} \quad (2.5)$$

$$\sigma_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1 \quad (2.6)$$

N étant le nombre de sommets du polyèdre Γ .

B) Incertitudes bornées en normes

Comme les incertitudes polytopiques, les incertitudes bornées en normes ont été introduites dans les années 80, voir [36]. Ce type d'incertitude est considéré moins structuré que l'incertitude polytopique, les matrices du modèle d'état sont données par :

$$A(\sigma) = A_0 + \Delta A = A_0 + E\Lambda(\sigma)F \quad (2.7)$$

Les matrices E et F sont des matrices constantes connues, définissant la structure de l'incertitude et la répartissant sur les éléments de la matrice $A(\sigma)$.

Le paramètre variant $\Lambda(\sigma)$ représente la matrice d'incertitudes, il vérifie la condition suivante :

$$\Lambda^T(\sigma)\Lambda(\sigma) \leq I \quad (2.8)$$

Dans ce travail, nous nous intéressons aux incertitudes structurées, notamment les incertitudes polytopiques. Nous détaillons ci-après l'analyse de stabilité au sens de Lyapunov des systèmes avec incertitudes paramétriques de type polytopique.

2.4.2 Stabilité au sens de Lyapunov des systèmes polytopiques

La stabilité est une propriété essentielle pour garantir le fonctionnement sûr d'un filtre. Ainsi, assurer la stabilité d'un filtre, même en présence d'incertitudes de modélisation du procédé réel considéré, est devenu un important champ d'étude de la théorie de l'estimation d'état. Dans ce contexte, le fonctionnement sûr du filtre sur le système réel passe par la garantie de la stabilité du filtre en utilisant le système incertain.

Dans le cadre de l'analyse de stabilité robuste, plusieurs approches peuvent être trouvées dans la littérature. Parmi celles-ci, cela vaut la peine de mettre en évidence les méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov. Ces dernières constituent une des approches les plus utilisées ces

dernières années pour l'étude de la stabilité de systèmes avec incertitudes.

La représentation du système (2.3) en boucle ouverte est donnée par :

$$\delta[x(t)] = A(\sigma)x(t) \quad (2.9)$$

Nous présentons dans la suite deux approches basées sur des fonctions de Lyapunov :

1. Approche par fonctions de Lyapunov indépendantes des paramètres (stabilité quadratique), [19] : Cette approche s'appuie sur une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad (2.10)$$

où P est une matrice définie positive et symétrique.

Notons que pour le point d'équilibre $x(0) = 0$, $V(x(0)) = 0$.

Théorème 3. *La fonction (2.10) est dite de Lyapunov et le système (2.9) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique positive P qui vérifie la condition suivante :*

$$\Delta V(t) < 0 \quad (2.11)$$

En considérant (2.9), l'inégalité (2.11) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= x^T(t+1)P x(t+1) - x^T(t)P x(t) \\ &= x^T(t)A^T(\sigma)PA(\sigma)x(t) - x^T(t)P x(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i A_i^T P \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i - P \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour un système à temps discret.

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= \dot{x}^T(t)P x(t) + x^T(t)P \dot{x}(t) \\ &= x^T(t)A^T(\sigma)P x(t) + x^T(t)P A(\sigma)x(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i (A_i^T P + P A_i) \right) x(t) < 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

pour un système à temps continu.

L'inégalité (2.12) (resp (2.13)) est vérifiée $\forall x(t) \neq 0$ si

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i \begin{bmatrix} -P & A_i^T P \\ P A_i & -P \end{bmatrix} < 0 \quad \left(\text{resp} \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i (A_i^T P + P A_i) < 0 \right) \quad (2.14)$$

Les fonctions d'appartenance σ_i vérifient les propriétés de somme convexe et notamment $\sigma_i > 0$. Par conséquent, (2.14) est vérifiée si tous les termes de la somme sont négatifs. Des conditions suffisantes de stabilité robuste du système (2.9) sont données par le théorème suivant :

Théorème 4. *Le système incertain décrit par (2.9) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive $P = P^T$, telles que les LMIs suivantes sont vérifiées pour tout $i : 1, \dots, N$:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -P & A_i^T P \\ P A_i & -P \end{bmatrix} < 0 & \quad \text{dans le cas discret} \\ A_i^T P + P A_i < 0 & \quad \text{dans le cas continu} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cette méthode implique l'existence d'une même fonction de Lyapunov, indépendantes des paramètres incertains, assurant la stabilité du système pour tout le domaine d'incertitudes.

Pour aller au delà du pessimisme de la stabilité quadratique, les fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres ont été largement étudiées à la fin des années 90.

2. Approche par fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres, [20], [74], [75], [76], [7], [8] : Cette approche s'appuie sur une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V(x(t), \sigma) = x(t)^T P(\sigma) x(t), \quad \text{avec} \quad P(\sigma) = \sum_{i=1}^N P_i \quad (2.16)$$

où P_i sont des matrices définies positives et symétriques.

En considérant la variation de $V(t)$, des conditions suffisantes de la stabilité robuste du système (2.3) sont données dans le théorème suivant :

Théorème 5. *Le système (2.9) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique positive $P(\sigma)$ qui vérifie :*

$$\begin{aligned} A(\sigma)^T P(\sigma) A(\sigma) - P(\sigma) &< 0 && \text{dans le cas discret} \\ A(\sigma)^T P(\sigma) + P(\sigma) A(\sigma) &< 0 && \text{dans le cas continu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Dans ce cas, la stabilité robuste est garantie par une fonction de Lyapunov construite à partir des matrices de Lyapunov qui sont des solutions faisables pour un ensemble de LMI décrites aux sommets du domaine des incertitudes. L'idée principale de cette approche est dans l'augmentation de l'ordre des LMI et dans l'inclusion de nouvelles variables matricielles, de façon à obtenir, avec ces degrés de liberté additionnels, des résultats moins conservatifs que ceux obtenus avec la stabilité quadratique.

Parmi les approches de l'étude de stabilité des systèmes incertains disponibles dans la littérature, dans ce mémoire sont considérés les méthodes basées sur des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres, dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps, à temps continu et à temps discret.

2.5 Systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno (TS)

Par nature, la majorité des procédés physiques réels manifestent dans leur dynamique de nombreuses non linéarités et des phénomènes incompréhensibles. Ceci rend leur modélisation plus complexe et leur comportement plus difficile à caractériser linéairement dans une large plage de fonctionnement.

En général, un modèle mathématique doit décrire le plus fidèlement possible les phénomènes et les interactions entre les différentes variables d'état du système considéré. D'autre part, la réussite d'un modèle dépend essentiellement de la facilité avec laquelle il pourra être interprété pour pouvoir comprendre et agir sur le comportement du procédé réel, en lui imposant une conduite selon certaines performances.

Contrairement au cas des systèmes linéaires pour lesquels on dispose d'un large choix de techniques permettant d'étudier et analyser leurs comportement, les systèmes non linéaires sont difficilement exploitables du point de vue mathématique. De plus, la simplicité du modèle est souvent assurée au prix de la précision avec laquelle il décrit les phénomènes réels.

A cet égard, un modèle optimal est un modèle qui réussit à équilibrer les deux aspects antagonistes : précision et simplicité.

Dans ce mémoire, nous avons opté pour l'approche floue multimodèle de type Takagi-Sugeno, voir [33]. Cette méthode, qui a donné lieu à des développements très riches, s'appuie sur des règles floues Si-Alors. Elle permet de représenter n'importe quel système non linéaire par une interconnexion de sous-modèles affines et linéaires, à travers des fonctions de pondération normalisées. Ces fonctions d'appartenance, appelées aussi fonctions d'activation, vérifient la propriété de somme convexe. Elles sont souvent non linéaires et variables dans le temps et déterminent la manière dont les sous-modèles contribuent au comportement global du système.

Le modèle de Takagi-Sugeno a attiré l'attention des chercheurs et a été largement utilisé en automatique, car il permet de représenter, de manière précise, tout système non linéaire quelque soit sa complexité par un ensemble de systèmes linéaires couplés entre eux par des fonctions d'appartenance. De plus, cette approche revêt l'avantage de favoriser l'extension de nombreux concepts théoriques de l'automatique linéaire au cas des systèmes non linéaires.

2.5.1 Représentation d'état du modèle TS

La i ème règle du modèle flou de type TS s'écrit :

Si $\zeta_1(k)$ est N_{i1} et ... et $\zeta_p(k)$ est N_{ip} , Alors

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= A_i x(t) + B_i w(t), & A_i &\in R^{n_x \times n_x}, B_i \in R^{n_x \times n_w} \\ y(t) &= C_i x(t) + D_i w(t), & C_i &\in R^{n_y \times n_x}, D_i \in R^{n_y \times n_w} \end{aligned} \quad (2.18)$$

où $i = 1, 2, \dots, \rho$.

ρ désigne le nombre de règles Si-Alors. (A_i, B_i, C_i, D_i) sont des matrices constantes connues. Les ensembles flous sont notés par N_{ij} et $\zeta(t) = [\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \dots \ \zeta_p(t)]$ représente le vecteur des variables de prémisse.

Les fonctions d'appartenance normalisées sont données par :

$$h_i(\zeta(t)) = \frac{\prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(t))}{\sum_{i=1}^{\rho} \prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(t))} \quad (2.19)$$

où $N_{ij}(\zeta_j(t))$ désigne le degré d'appartenance de $(\zeta_j(t))$ à N_{ij} , et :

$$h_i(\zeta(t)) \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \rho) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(t)) = 1. \quad (2.20)$$

Le modèle global après défuzzification par la méthode du centre de gravité du système (2.18) est donné par :

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= A(h)x(t) + B(h)w(t), & A(h) &\in R^{n_x \times n_x}, B(h) \in R^{n_x \times n_w} \\ y(t) &= C(h)x(t) + D(h)w(t), & C(h) &\in R^{n_y \times n_x}, D(h) \in R^{n_y \times n_w} \end{aligned} \quad (2.21)$$

où :

$$\begin{aligned} A(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(t))A_i, & B(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(t))B_i, \\ C(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(t))C_i, & D(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(t))D_i. \end{aligned}$$

2.5.2 Stabilité au sens de Lyapunov

La structure particulière du modèle de Takagi-Sugeno permet d'étendre certains concepts relatifs aux systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires, notamment l'analyse de la stabilité.

La stabilité de ce modèle a fait l'objet de nombreux développements. Parmi les travaux publiés, nous citons notamment les approches de Lyapunov concernant la stabilité quadratique et la stabilité non quadratique.

L'approche de stabilité quadratique de Lyapunov a été largement utilisée et appliquée, voir [1] et [2]. Néanmoins, cette approche implique des résultats qui peuvent se révéler très conservatifs et parfois infaisables. Comme dans le cas des systèmes incertains de type polytopique, la méthode quadratique de Lyapunov nécessite la recherche d'une matrice de Lyapunov définie positive commune à tous les sous modèles ou les modèles locaux. Dans [1], les auteurs ont montré que si le nombre de sous modèles est important, il est difficile de trouver une telle matrice. On peut noter que certains systèmes peuvent être stables alors qu'il n'existe pas de matrice symétrique définie positive commune entre tous les sous-modèles. La solution devient encore plus difficile si l'on ajoute des contraintes sur le placement des pôles.

D'autres approches, qui considèrent des fonctions de Lyapunov continues par morceaux (piecewise Lyapunov functions), ont été proposées dans [5]. Néanmoins, ce type de fonctions de Lyapunov ne tient pas compte de la structure d'interconnexion non linéaire entre les sous-modèles composant le système global.

Une approche alternative consiste à utiliser des fonctions candidates non quadratiques de Lyapunov, voir [3] et [4]. L'idée de cette approche consiste à chercher une matrice de Lyapunov pour chacun des sous modèles au lieu d'une seule matrice commune. La matrice de Lyapunov globale est basée sur la même structure d'interconnexion floue (fonctions d'appartenance) que le système. Ainsi, une compensation parallèle entre le système et la fonction de Lyapunov non quadratique, basée sur la même structure, facilite la recherche d'une solution aux problèmes LMI et conduit à une réduction du conservatisme.

Afin d'explicitier ces approches, nous détaillons dans la suite l'étude de stabilité du modèle TS via les deux méthodes : quadratique et non quadratique.

Soit le système de type TS à temps discret et en boucle ouverte, suivant :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) A_i x(k) \quad (2.22)$$

A) Stabilité quadratique

Considérons la fonction quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V(x(k)) = x^T(k) P x(k) \quad (2.23)$$

où P est une matrice définie positive et symétrique.

Notons que pour le point d'équilibre $x(0) = 0$, $V(x(0)) = 0$.

Théorème 6. *La fonction (2.23) est dite de Lyapunov et le système (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique positive P qui vérifie la condition suivante :*

$$\Delta V(k) < 0 \quad (2.24)$$

En considérant (2.22), l'inégalité (2.24) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= x^T(k+1) P x(k+1) - x^T(k) P x(k) \\ &= x^T(k) \left(\sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) A_i^T P \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) A_i - P \right) x(k) < 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'inégalité (2.25) est vérifiée $\forall x(k) \neq 0$ si

$$\sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) \begin{bmatrix} -P & A_i^T P \\ \bullet & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.26)$$

Les fonctions d'appartenance $h_i(\zeta(k))$ vérifient les propriétés de somme convexe et notamment $h_i(\zeta(k)) > 0$. Par conséquent, des conditions suffisantes pour (2.26) sont formulées en termes d'inégalités matricielles linéaires données par le théorème suivant :

Théorème 7. ([6]) *Le système non linéaire décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive $P = P^T$, telle que les LMIs suivantes sont vérifiées pour tout $i : 1, \dots, \rho$:*

$$\begin{bmatrix} -P & A_i^T P \\ \bullet & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

La stabilité asymptotique du système (2.22) nécessite donc que chaque matrice A_i soit asymptotiquement stable. La même matrice P doit satisfaire les ρ LMIs. La recherche d'une telle matrice constitue une source inévitable de conservatisme des solutions, en particulier quand le multimodèle comporte un grand nombre de sous-modèles.

B) Stabilité non quadratique

Un moyen de réduire le conservatisme de la solution précédente consiste à remplacer la fonction de Lyapunov quadratique par d'autres fonctions candidates de Lyapunov, en particulier par des fonctions dites non quadratiques. Il est possible de distinguer parmi ces fonctions, les fonctions dites polyquadratiques définies par :

$$V(x(k)) = x^T(k) P(\zeta(k)) x(k) \quad (2.28)$$

avec :

$$P(x(k)) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) P_i, \quad P_i = P_i^T > 0 \quad (2.29)$$

La fonction de Lyapunov non quadratique du système global est construite par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratiques relatives à chaque modèle local.

Les fonctions de Lyapunov polyquadratiques font partie de la famille des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. La recherche d'une matrice unique commune est alors remplacée par la recherche d'un ensemble de matrices. L'introduction de degrés de liberté supplémentaires induit une diminution du conservatisme de la solution. En effet, toutes les solutions considérant une matrice P unique sont contenues dans celles obtenues avec P_i , il suffit de fixer $P_i = P$ pour $i = 1, \dots, \rho$.

Ce type de fonction a été utilisé à l'origine dans l'analyse de la stabilité et de la stabilisation des systèmes incertains polytopiques et par extension dans l'analyse des multimodèles de T.S. [9].

Considérons la différence de (2.28) :

$$\Delta V(k) = x(k+1)^T P(\zeta(k+1)) x(k+1) - x^T(k) P(\zeta(k)) x(k) \quad (2.30)$$

En introduisant la dynamique du système représenté par (2.22) et compte tenu des expressions de $P(\zeta(k))$ et $P(\zeta(k+1))$ données dans (2.29) alors l'étude de la stabilité asymptotique du système (2.22) revient à résoudre le théorème suivant :

Théorème 8. *Le système non linéaire décrit par (2.22) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices définies positives $P_i = P_i^T$, telles que les LMIs suivantes sont vérifiées pour tout $i, j : 1, \dots, \rho$:*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i P_j \\ \bullet & -P_j \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

2.6 Systèmes à retard

La communauté de la recherche scientifique en automatique s'est toujours orientée vers des domaines pratiques, ce qui rend l'analyse de systèmes de plus en plus complexe et nécessite une spécialisation de plus en plus importante.

A cet égard, nous citons l'estimation de l'état des systèmes à retards, appelés aussi systèmes héréditaires, un problème qui devient de plus en plus un sujet de recherche en constante évolution. Ceci est principalement dû au fait que le retard peut perturber le fonctionnement du filtre de manière significative lors de son application sur le système réel.

Le retard correspond au temps qui s'écoule entre l'application d'une action sur un système et la réponse de ce dernier. Les modèles à retards sont naturellement présents dans les systèmes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information. Par ailleurs, beaucoup d'actionneurs et de capteurs engendrent des retards qui ne peuvent pas être ignorés. De multiples pistes ont déjà été explorées en profondeur à ce propos dans le but de rapprocher la représentation d'état suffisamment de la réalité physique.

2.6.1 Représentation d'état

Les systèmes dynamiques ordinaires peuvent être décrits par l'équation mathématique suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (2.32)$$

où l'évolution de leurs états x est déterminée à partir de la valeur de leurs variables à l'instant présent t .

Cependant, les systèmes dynamiques à retards ne peuvent pas être décrits par des équations différentielles ordinaires parce que la valeur de leurs états à l'instant présent dépend de la valeur des états passés sur un certain horizon temporel. Ils sont généralement représentés par des équations de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad \text{avec } \tau > 0 \quad (2.33)$$

d'où la dénomination systèmes "héréditaires". Dans ce cas, il est nécessaire d'initialiser une partie de l'histoire du système pour connaître son évolution.

Dans ce mémoire, nous considérons les systèmes à retard sur le vecteur d'état décrit par le modèle mathématique suivant :

$$\begin{aligned} \delta[x(t)] &= Ax(t) + A_\tau x(t - \tau) + Bw(t), & A, A_\tau &\in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w} \\ y(t) &= Cx(t) + C_\tau x(t - \tau) + Dw(t), & C, C_\tau &\in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w} \\ x(t_0 + \theta) &= \phi(\theta), \theta = -\tau, -\tau + 1, \dots, 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

où τ représente le retard positif et $\phi(\theta)$, supposé connu, désigne le vecteur des conditions initiales définies sur l'intervalle $[-\tau, 0]$.

Le retard, surtout lorsqu'il est en l'état, est généralement considéré parmi les principales sources

d'instabilité et de mauvaises performances du filtre lors de son application sur le système réel, c'est la raison pour laquelle il est indispensable de prendre en compte le retard dès l'étape de la synthèse du filtre.

Différents types de retard

Il est clair que l'étude des systèmes à retard dépend essentiellement du type de retard et de la disponibilité d'information concernant son évolution. On distingue en général quatre types de retard.

Retard constant

La notion de retard constant conduit tout simplement à définir celui-ci par un nombre réel positif $\tau \in R^+$.

Retard majoré

Cette seconde classe suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard τ :

$$0 \leq \tau \leq \tau_{max} \quad (2.35)$$

Retard borné

Ce type de retard est caractérisé par la contrainte suivante :

$$\tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max} \quad (2.36)$$

Retard inconnu

La détermination de la valeur exacte ou des bornes du retard est une tâche difficile dans certains cas pratiques. Dans ce cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps, il peut prendre toutes les valeurs dans R^+ .

Dans le cas des retards variant dans le temps, c-à-d $\tau = \tau(t)$, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée :

$$|\dot{\tau}(t)| \leq d, \quad \text{avec } d \in R^+ \quad (2.37)$$

2.6.2 Stabilité par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

Cette extension de la méthode de Lyapunov est due à Krasovskii [72] et consiste à rechercher des fonctionnelles définies positives qui décroissent le long des solutions du système. Nous définissons le vecteur x_t qui désigne la valeur de $x(t)$ sur l'intervalle $[t - \tau, t]$.

Théorème 9. *Soit le système à retard défini dans (2.34). Soit $u, v, w : R^+ \rightarrow R^+$ des fonctions continues non décroissantes, avec en plus $u(\theta)$ et $v(\theta)$ positives pour $\theta > 0$ et $u(0) = v(0) = 0$. S'il existe une fonction continue différentiable $V = V(t, x_t)$ telle que*

$$u(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq v(\sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|\phi(\theta)\|)$$

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(\|\phi(0)\|)$$

Alors le système 2.34 est uniformément stable. Si $w(\theta) > 0$ quand $\theta > 0$, alors le système 2.34 est uniformément asymptotiquement stable.

Interprétation : Le problème de stabilité uniforme ou asymptotique est réduit à la recherche d'une fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii qui satisfait aux conditions citées ci-dessus. La première condition signifie que la fonctionnelle est définie positive et possède une borne supérieure infinitésimale (existence de la fonction $v(\cdot)$, i.e. un comportement borné de la fonctionnelle $V(t, \phi)$ pour toute valeur de t et de ϕ). La deuxième condition, quant à elle, stipule simplement que la dérivée de la fonctionnelle $V(t, \phi)$ calculée le long des trajectoires de 2.34 doit être définie négative.

2.7 Systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication

Dans de nombreuses applications, les différentes parties du système de commande, utilisé pour décrire et guider le comportement et le fonctionnement du système dynamique (les contrôleurs, les actionneurs, les capteurs, les estimateurs,...), sont séparées et communiquent leurs données (mesures/commandes) à travers un réseau de communication. Cette architecture de commande offre, en effet, de nombreux avantages en comparaison avec l'architecture classique (câblage point à point). Le principal avantage est le fait que les différents éléments du système à commander peuvent être distribués dans l'espace. Ce qui permet de minimiser le coût de câblage et d'installation. Ceci donne par ailleurs la possibilité de rajouter des éléments, des actionneurs et des capteurs sans modifier considérablement la structure globale du système et par conséquent de réaliser des systèmes de plus grande envergure et plus complexes. Ces avantages, avec le développement des outils de communication, ont permis d'étendre le domaine d'utilisation des systèmes commandés en réseau à de nombreux secteurs tels que l'industrie automobile [53], les réseaux électriques [54], les systèmes de transport [55], la commande des drones [56], etc.

Malgré les avantages considérables des systèmes commandés en réseau, l'introduction du réseau entre les capteurs et le filtre entraîne la nécessité de prendre en compte certaines contraintes de communication qui n'existent pas dans le cas des systèmes classiques. Parmi ces contraintes, nous citons le retard de transmission, la perte de paquets, la quantification et les contraintes d'accès au réseau dues à la bande passante limitée et partagée par plusieurs nœuds et le fait qu'un seul nœud à la fois est autorisé à transmettre son paquet. Ces phénomènes peuvent détériorer la qualité de l'estimation ou même déstabiliser le filtre s'ils sont négligés.

Dans ce mémoire, nous ne nous intéressons pas à l'étude des systèmes de commande qui traitent la transmission de l'information dans les systèmes commandés en réseau. Mais nous étudions ces derniers de point de vue filtrage H_∞ sous contraintes de communication induites par la présence du réseau entre les capteurs et le filtre. Plus précisément, nous considérons une contrainte de bande passante limitée impliquant que les mesures délivrées par les capteurs doivent être quantifiées avant d'être transmises au filtre. En effet, les mesures issues des capteurs du système sont codées sous forme de bits de données et puisque la bande passante n'est pas parfaite et possède une capacité de réception d'information très limitée, il est nécessaire de coder les données avec un nombre de bits limité, ce qui entraîne une précision limitée des données transmises via le réseau et peut aboutir à une dégradation énorme de la qualité d'estimation si on néglige l'effet de quantification dans la synthèse du filtre.

Nous distinguons en général deux types de quantificateur : quantificateur uniforme et quantificateur logarithmique. Ce dernier est préféré en raison du fait qu'il requiert moins de bits par rapport au quantificateur uniforme.

Un quantificateur logarithmique est décrit par :

$$\aleph = \{ \pm \hat{\mu}_i, \hat{\mu}_i = \rho^i \hat{\mu}_0, i = 0; \pm 1; \pm 2, \dots \} \cup \{0\}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \hat{\mu}_0 > 0 \quad (2.38)$$

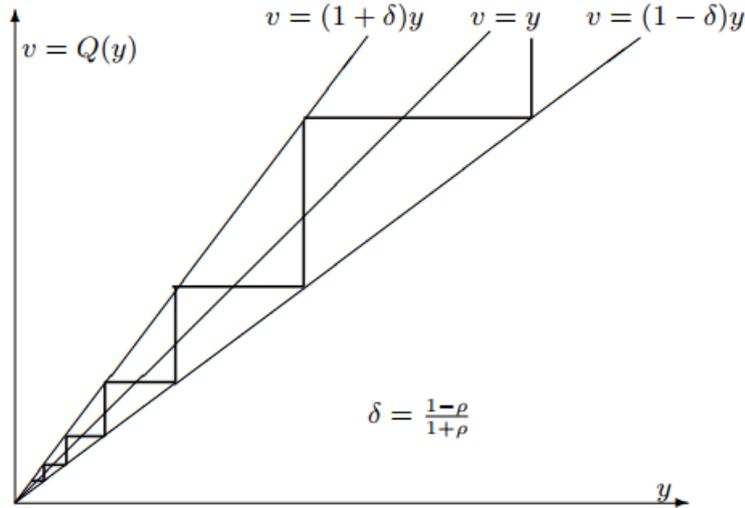


FIGURE 2.1 – Quantificateur logarithmique

où ρ désigne la densité de quantification.

Chaque niveau de quantification correspond à un segment tel que le quantificateur représente le segment entier par ce niveau de quantification. On note le quantificateur par $Q(\cdot)$.

Nous avons :

$$Q(y) = \begin{cases} \hat{\mu}_i, & \frac{1}{1+\delta}\hat{\mu}_i \leq y \leq \frac{1}{1-\delta}\hat{\mu}_i \\ 0, & y = 0 \\ -g_j(-y), & y < 0 \end{cases}$$

où $\delta = \frac{1-\rho}{1+\rho}$.

Une représentation graphique est donnée dans la figure 1.

Nous considérons également la contrainte de perte d'information due à la congestion et aux défauts du trafic d'information dans les réseaux de communication. En effet, les pertes de paquets sont inévitables en raison de l'imperfection des réseaux qui assurent la transmission des données. Un retard de transmission trop long peut être en plus considéré comme une perte d'information. Plusieurs modèles déterministes ou stochastiques du phénomène de perte de paquets ont été proposés dans la littérature. Nous nous limitons ici au modèle stochastique de Bernoulli car ce dernier sera exploité dans le reste de cette thèse.

Le modèle de perte dit de Bernoulli possède un état et un seul paramètre qui est la probabilité de perte p . Ainsi la perte de paquets est modélisée par un processus de Bernoulli $\varepsilon(k)$ qui peut prendre la valeur 1 ou 0 :

$$Pr\{\varepsilon(k) = 1\} = E\{\varepsilon(k)\} = p$$

$$Pr\{\varepsilon(k) = 0\} = 1 - p$$

où la valeur 0 correspond à une perte de paquet et 1 à la bonne réception du paquet.

L'analyse et la synthèse de filtres H_∞ des systèmes commandés en réseau en tenant compte des deux contraintes citées ci-dessus dès l'étape de synthèse du filtre seront présentées en détail dans le cinquième chapitre.

2.8 Filtrage des systèmes dynamiques

2.8.1 Principe du filtrage

Comme nous l'avons dit dans les sections précédentes, le comportement d'un système dynamique peut être entièrement représenté par des équations mathématiques décrivant l'évolution des variables internes. Une bonne information sur ces variables est capitale pour une bonne maîtrise du procédé réel. En effet, la connaissance des variables d'état est une exigence importante requise par les tâches de surveillance ou de diagnostic, pour la sûreté du fonctionnement du système industriel considéré.

Sur un plan pratique, la connaissance complète de l'ensemble des variables d'état d'un système dynamique est difficile. Il est clair qu'on ne peut pas utiliser le même nombre de capteurs que celui des variables requises pour caractériser le comportement du système. La mesure directe des variables d'états peut être soumise à des contraintes d'ordre technologique (indisponibilité du capteur nécessaire), technique (impossibilité d'accès), ou économique (prix élevé du capteur nécessaire).

En l'absence d'informations concernant l'évolution des variables d'état, il est difficile, voire impossible, de générer les symptômes de défaillance du procédé et de surveiller son comportement. Il est donc indispensable, à partir de la sortie mesurée, de reconstruire les autres variables non mesurables. Une solution permettant de contourner ce problème est d'utiliser un estimateur d'état, appelé filtre, qui consiste en un système dynamique auxiliaire dont les entrées sont les signaux mesurés du procédé, et les sorties sont supposées donner une estimation de l'état ou d'une combinaison linéaire des variables d'état non mesurées, tout en minimisant l'influence des perturbations sur l'erreur d'estimation. La relation entre les signaux à estimer et les signaux mesurés est donnée par un modèle du système. Le filtre qui va reconstruire les signaux à estimer à partir des signaux mesurés, souvent entachés par des bruits ou des perturbations, va donc être synthétisé sur la base du modèle mathématique du système.

2.8.2 Caractérisation de l'erreur d'estimation

La synthèse du filtre nécessite avant tout le choix d'une norme (souvent sur la relation perturbations/erreur d'estimation) permettant d'évaluer la performance du filtre et la distance au filtre optimal. Les normes essentielles qui interviennent en estimation d'état sont les normes H_2 et H_∞ présentées ci-après.

2.8.2.1 Cas des systèmes à temps continu

Considérons le système LTI décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), & A \in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t), & C \in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

Soit $T(s)$ la fonction de transfert entre $w(t)$ et $y(t)$.

2.8.2.1.a. Norme H_2

La norme H_2 du système (2.39), notée $\| \cdot \|_2$, s'exprime dans le cadre fréquentiel par :

$$\| T \|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace} (T^*(j\omega)T(j\omega)) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

2.8.2.1.b. Norme H_∞

La norme H_∞ du système (2.39), notée $\| \cdot \|_\infty$, s'exprime dans le cadre fréquentiel par :

$$\| T \|_\infty = \sup_{\omega \in R} \sigma_{max} T(j\omega) \quad (2.41)$$

où σ_{max} désigne la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert pour la pulsation optimale.

2.8.2.1.c. Gain ℓ_2

Le gain ℓ_2 du système (2.39) est donné par :

$$\| G \|_\infty = \sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\| y \|_2}{\| w \|_2}, \quad \| w \|_2 \neq 0 \quad (2.42)$$

2.8.2.2 Cas des systèmes à temps discret

Considérons le système LTI décrit par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), & A \in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k), & C \in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

Soit $T(z)$ la fonction de transfert entre $w(k)$ et $y(k)$.

2.8.2.2.a. Norme H_2

La norme H_2 du système (2.43), notée $\| \cdot \|_2$, s'exprime dans le cadre fréquentiel par :

$$\| T \|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{trace} (T^*(e^{j\theta})T(e^{j\theta})) d\omega \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

2.8.2.2.b. Norme H_∞

La norme H_∞ du système (2.43), notée $\| \cdot \|_\infty$, s'exprime dans le cadre fréquentiel par :

$$\| T \|_\infty = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} \sigma_{max} T(e^{j\theta}) \quad (2.45)$$

où σ_{max} désigne la plus grande valeur singulière de la matrice de transfert sur toute la bande de fréquence.

2.8.2.2.c. Gain ℓ_2

Le gain ℓ_2 du système (2.43) est donné par :

$$\| G \|_\infty = \sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\| y \|_2}{\| w \|_2}, \quad \| w \|_2 \neq 0 \quad (2.46)$$

Remarque 1. Dans le cas mono-variable, la norme H_2 correspond à l'énergie de la réponse impulsionnelle du système. Elle correspond également à la puissance de sortie lorsque le système est alimenté par une entrée de densité spectrale de puissance unitaire. En d'autres termes, si le signal d'entrée est un bruit blanc de variance unitaire, alors elle correspond à la variance de l'erreur d'estimation.

Remarque 2. La norme H_∞ mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $T(j\omega)$ dans le cas des systèmes à temps continu, et $T(e^{j\theta})$ dans le cas des systèmes à temps discret.

Remarque 3. La notion de gain ℓ_2 est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes. En effet, il sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système.

Pour un système stable, la norme H_∞ de la fonction de transfert est le gain ℓ_2 du système.

2.8.3 Du filtre de Kalman au filtre H_∞ : état de l'art

Le filtre de Kalman, introduit par Rudolph Emil Kalman en 1960 [37], a fait une évolution dans la théorie de l'estimation d'état et constitue l'une des pièces maîtresses dans ce domaine. Il est connu comme l'outil optimal pour les systèmes linéaires perturbés par des bruits d'état et de mesure additifs et blancs. Son efficacité ainsi que sa simplicité de mise en œuvre, fait de cet estimateur un outil incontournable dans de nombreux domaines pratiques tels que la poursuite de cible [38], la navigation inertielle [39], traitement d'images [40] et du signal [41], [73] etc.

Le filtre de Kalman vise à estimer l'état d'un système discret évoluant dans le temps à partir de son état précédent, des commandes appliquées et de mesures bruitées, tout en minimisant la norme H_2 de l'erreur d'estimation. Son fonctionnement commence par une étape de prédiction de l'estimation des paramètres et de l'erreur d'estimation en utilisant l'estimation précédente des paramètres et de l'erreur et en fonction de la modélisation du système. La deuxième étape constitue l'étape de correction ou de mise à jour de cette prédiction grâce aux nouvelles mesures.

Pour appliquer le filtre de Kalman classique, il faut avant tout modéliser linéairement et assez précisément le système pour lequel on veut estimer les paramètres. Cependant, cette hypothèse est difficilement applicable lors de l'implantation du filtre sur un système réel. Pour remédier à ces difficultés, de nombreuses variantes du filtre de Kalman prenant en compte les modèles non linéaires ont été développées, citons le filtre de Kalman étendu [42].

Le filtre de Kalman est donc une méthode d'estimation intéressante qui a été largement utilisée. Néanmoins, de nombreux éléments importants viennent dégrader les performances de ce filtre lors de son application sur le plan réel.

En premier lieu, cette technique d'estimation repose souvent sur une connaissance parfaite des différentes matrices intervenant dans la modélisation de l'évolution des paramètres internes du système étudié. Cependant, certains systèmes sont difficilement connus et l'accès à toutes les informations concernant leur modélisation est impossible. Dans ce cas, où la modélisation est trop approximative, le filtre de Kalman n'est pas assez performant et l'erreur des estimations ne convergera pas assez rapidement, elle restera grande et parfois elle diverge.

Un autre défaut du filtre de Kalman concerne les processus chargés des calculs lors de l'implantation du filtre sur le plan réel. En effet, l'accumulation de nombreuses erreurs de calcul dues à la limitation de ces processus peut mener à la divergence du filtre. En plus, de nouvelles matrices coûteuses rentrent en jeu avec l'application du filtre de Kalman étendu concernant les systèmes non linéaires. Ces matrices rendent le coût calculatoire plus important et limitent par suite l'utilisation de ce filtre.

Enfin, la synthèse du filtre de Kalman repose sur un certain nombre d'hypothèses restrictives concernant le bruit intervenant dans les équations. En effet, il permet de prendre en compte uniquement un modèle de bruit gaussien. Dans certains cas pratiques, un autre type de bruit est requis ou bien on ne dispose pas d'informations précises sur les propriétés statistiques des perturbations extérieures. L'application du filtre de Kalman dans ces cas peut aboutir à des estimations biaisées.

Pour surmonter toutes ces difficultés, une approche alternative, appelée filtre H_∞ , a été introduite.

Contrairement au filtre de Kalman, le filtre H_∞ nécessite aucune connaissance sur les perturbations à part qu'elles soient à énergie bornée. Le filtre de kalman vise à minimiser la norme H_2 de l'erreur d'estimation, alors que le filtre H_∞ vise à minimiser la norme H_∞ erreur d'estimation sur bruit. Cela revient à minimiser les effets des perturbations extérieures sur l'erreur d'estimation dans le pire des cas. En d'autres termes, on minimise la valeur maximale du spectre de l'erreur d'estimation des paramètres, quelles que soient les perturbations. De ce point de vu, l'estimation H_∞ est plus robuste et moins restrictive que le filtre de Kalman. Ceci la rend plus appropriée dans plusieurs applications.

Il existe dans la littérature plusieurs approches pour résoudre le problème du filtrage H_∞ , nous citons :

- (i) L'approche fondée sur la résolution d'une équation quadratique de type Riccati, voir [45].
- (ii) L'approche formulée par une inégalité matricielle linéaire (LMI) en utilisant le lemme borné réel ou une inégalité de type Lyapunov, voir [45] [44].
- (iii) L'approche polynomiale, voir [46].

Nous proposons dans ce travail d'étudier le filtrage H_∞ en utilisant la solution formulée en termes de LMI. L'intérêt des méthodes basées sur des LMI vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. De plus, comparées aux méthodes analytiques (comme les équations de Riccati par exemple), l'approche LMI présente une plus grande flexibilité lui permettant notamment d'aborder des problèmes plus complexes.

Depuis l'introduction de l'approche H_∞ dans les années quatre-vingt-dix, la synthèse des filtres H_∞ pour différents types de systèmes dynamiques n'a cessé de progresser.

Différents travaux sur le filtrage H_∞ robuste vis-à-vis des incertitudes peuvent être cités comme références. Dans ces travaux, deux catégories d'incertitudes peuvent être répertoriées. La première catégorie concerne les incertitudes dites non-structurées, voir [10] [11] [12]. Ces approches proposent de considérer un unique bloc incertain de paramètres variant dans le temps, ce qui pourra amener un pessimisme fort. La seconde catégorie est celle des incertitudes structurées, notamment l'incertitude polytopique. Dans ce cas, un filtre garantissant la performance désirée pour tous les modèles inclus dans le modèle incertain sera construit. La performance désirée sera atteinte lors de l'application du filtre sur le système réel si ce dernier est inclus dans le modèle incertain. Les premiers résultats du filtrage utilisant cette approche s'appuient sur des fonctions de Lyapunov indépendantes des paramètres, [13]. Ensuite, des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres ont été développées afin de réduire le conservatisme des résultats précédents, voir [14] [15] pour les systèmes incertains à temps continu, [15] [16] pour les systèmes incertains à temps discret, [17] [18] pour les systèmes incertains avec retard.

D'un autre côté, la reconstruction de l'état des systèmes représentés par un modèle non linéaire soulève un problème difficile à résoudre dans le cas général. En effet, à la différence des modèles LTI où une représentation unifiée peut être employée, les modèles non linéaires peuvent se présenter sous une multitude de structures faisant intervenir d'une façon différente les termes non linéaires. Cependant, la structure du multimodèle de type TS a été largement popularisée dans le domaine de l'estimation d'état des systèmes non linéaires. Comparée à d'autres représentations des systèmes non linéaires, cette structure introduit une certaine flexibilité dans l'étape de synthèse du filtre et permet d'exploiter les techniques utilisées dans le cas des systèmes linéaires. Plusieurs travaux sur le sujet peuvent être cités ([57], [58], [59] et [60] pour les systèmes TS présentant un retard variable sur le vecteur d'état, [61] pour les systèmes TS avec retards variables et incertitudes bornées en norme).

Concernant le filtrage des systèmes commandés en réseau, l'idée consiste à rendre l'erreur d'estimation le moins sensible possible aux contraintes de communication induites par l'introduction

du réseau entre les capteurs et le filtre et par l'imperfection des bandes passantes. Des exemples peuvent être trouvés dans [64] pour les systèmes non linéaires avec mesures quantifiées, [63] pour les systèmes non linéaires de type TS sujets à des retards aléatoires et des pertes de paquets, et [62] pour les systèmes linéaires incertains avec mesures quantifiées.

2.9 Filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Les premiers résultats d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ ont été développés dans tout le domaine fréquentiel. En d'autres termes, les chercheurs supposaient qu'on ne dispose d'aucune information sur le domaine fréquentiel des bruits extérieurs qui peuvent venir perturber le système. Les exigences croissantes en termes de performance nécessitent cependant d'élaborer des stratégies sans cesse moins pessimistes afin de remplir les objectifs imposés. Cette tendance a motivé les automaticiens plus tard à mettre au point de nouveaux outils capables de prendre en compte les caractéristiques fréquentielles des perturbations extérieures afin d'améliorer la performance du filtre.

En effet, dans de nombreux cas pratiques, il est possible de connaître la marge fréquentielle à laquelle appartient le bruit affectant le système. Dans de tels cas, il est inutile d'optimiser la norme H_∞ dans le domaine fréquentiel tout entier si le bruit appartient à une zone de fréquences restreinte car cela peut introduire un certain pessimisme et une dégradation de performance du filtre.

Dans ce contexte, il est clair que l'estimation dans un domaine fréquentiel fini est moins restrictive et permet de réduire le pessimisme des méthodes de filtrage développées dans tout le domaine fréquentiel. Dans un premier temps, la mise en œuvre des conditions de synthèse de filtre H_∞ , qui dépendent des bornes de l'intervalle fréquentiel du bruit, semble problématique. Toutefois, ceci est possible grâce à la version généralisée du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) qui a été développé dans les années 90, voir [47].

La formulation classique de ce lemme établit une équivalence entre un ensemble infini de contraintes fréquentielles d'un côté et une inégalité matricielle linéaire (LMI) faisant intervenir les matrices d'état du système considéré de l'autre. Ainsi, il est par exemple possible de vérifier qu'une fonction de transfert est positive réelle sur l'axe imaginaire tout entier en résolvant un problème d'optimisation convexe constitué d'une unique contrainte LMI. Ce cas particulier est connu sous le nom de lemme positif réel. De manière générale, le lemme KYP a joué un rôle important dans le développement de nombreuses techniques en automatique.

La version classique du lemme permet de vérifier qu'une propriété donnée est satisfaite sur tout le domaine fréquentiel, c-à-d $\forall \theta \in [0; 2\pi]$ dans le cas des systèmes à temps discret et $\forall \omega \in R$ dans le cas des systèmes à temps continu.

Plus récemment, une généralisation a été introduite par Iwasaki et Hara [48], qui permet de considérer un intervalle fréquentiel quelconque. Dans le prolongement de ce résultat, plusieurs travaux sur le filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini ont été développés. Citons [21] [26] et [27] pour les systèmes linéaires en présence d'incertitudes, [28] pour les systèmes incertains à commutation et [31] pour les systèmes linéaires avec un retard constant sur le vecteur d'état. Nous citons également [30] pour les systèmes non linéaires représentés par le modèle flou de type TS.

Malgré l'avantage majeur évident que constitue le filtrage dans un domaine fréquentiel limité, peu de travaux ont été dédiés à ce sujet, et une large classes de systèmes n'a toujours pas été traitée dans ce cadre.

Dans la suite, nous présentons le lemme KYP généralisé et ses interprétations temporelles qui seront à la base de nos travaux dans le reste de ce mémoire.

Cas des systèmes à temps continu

Soit le système à temps continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bw(t), & A \in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t), & C \in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

La fonction de transfert du système (2.47) est construite comme suit :

$$T(j\omega) = C(j\omega I_{n_x} - A)^{-1}B + D \quad (2.48)$$

Lemme 1. (KYP généralisé, [48])

Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$. Supposons que $\det(j\omega I_{n_x} - A) \neq 0$ ($\omega \in \Omega$). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1.

$$\begin{bmatrix} T(j\omega) \\ I_{n_w} \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.49)$$

2. Il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{n_x \times n_x}$ telles que $Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

où la matrice E est définie comme suit :

$$E = \begin{cases} \begin{bmatrix} -Q & P \\ P & \omega_b^2 Q \end{bmatrix}, & \text{pour } |\omega| \leq \omega_b \\ \begin{bmatrix} -Q & P + j\omega_c Q \\ P - j\omega_c Q & -\omega_1 \omega_2 Q \end{bmatrix}, & \omega_c = (\omega_1 + \omega_2)/2 \text{ pour } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ \begin{bmatrix} Q & P \\ P & -\omega_h^2 Q \end{bmatrix}, & \text{pour } |\omega| \geq \omega_h \end{cases}$$

L'ensemble Ω est défini dans le tableau ci-dessous :

	basse fréquence	moyennes fréquence	haute fréquence
Ω	$ \omega \leq \omega_b$	$\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$	$ \omega \geq \omega_h$

TABLE 2.1 – Les différents domaines fréquentiels - systèmes à temps continu

Lemme 2. Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$ et un scalaire $\gamma \in R^+$. Supposons que $\det(j\omega I_{n_x} - A) \neq 0$ ($\omega \in \Omega$). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1.

$$\sup \sigma_{\max} T(j\omega) < \gamma, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.50)$$

2. Il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{n_x \times n_x}$ telles que $Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.51)$$

Preuve :

La preuve résulte directement du lemme 1 en choisissant $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$.

Lemme 3. (Interprétations temporelles du lemme KYP généralisé, [49])

Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$ et un scalaire $\gamma \in R^+$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} T(j\omega) \\ I_{n_w} \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} T(j\omega) \\ I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad (2.52)$$

2. L'inégalité temporelle suivante est vérifiée $\forall w(t) \in \ell_2[0, \infty)$:

$$\int_0^{+\infty} y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{+\infty} w^T(t)w(t)dt \quad (2.53)$$

tels que, avec l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles :

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}(t)\dot{x}^T(t)dt \leq \omega_b^2 \int_0^{+\infty} x(t)x^T(t)dt \quad (2.54)$$

pour un domaine basses fréquences, $|\omega| \leq \omega_b$.

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}(t)\dot{x}^T(t)dt \geq \omega_h^2 \int_0^{+\infty} x(t)x^T(t)dt \quad (2.55)$$

pour un domaine hautes fréquences, $|\omega| \geq \omega_h$.

$$\int_0^{+\infty} (\omega_1 x(t) + j\dot{x}(t))(\omega_2 x(t) + j\dot{x}(t))^* dt \geq 0 \quad (2.56)$$

pour un domaine moyennes fréquences.

Cas des systèmes à temps discret

Soit le système à temps discret suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), & A \in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k), & C \in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

La fonction de transfert du système (2.57) est construite comme suit :

$$T(e^{j\theta}) = C(e^{j\theta}I_{n_x} - A)^{-1}B + D \quad (2.58)$$

Lemme 4. (KYP généralisé), [48])

Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$. Supposons que $\det(e^{j\theta}I_{n_x} - A) \neq 0$ ($\theta \in \Theta$). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1.

$$\begin{bmatrix} T(e^{j\theta}) \\ I_m \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} T(e^{j\theta}) \\ I_m \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (2.59)$$

2. Il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{n_x \times n_x}$ telles que $Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.60)$$

où la matrice E est définie somme suit :

$$E = \begin{cases} \begin{bmatrix} -P & Q \\ Q & P - 2 \cos \theta_b Q \end{bmatrix}, & \text{pour } |\theta| \leq \theta_b \\ \begin{bmatrix} -P & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P - 2 \cos \theta_w Q \end{bmatrix}, & \text{pour } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ \begin{bmatrix} -P & -Q \\ -Q & P + 2 \cos \theta_h Q \end{bmatrix}, & \text{pour } |\theta| \geq \theta_h \end{cases}$$

où : $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$
 $\theta_w = (\theta_2 - \theta_1)/2$

L'ensemble Θ est défini dans le tableau ci-dessous :

	basse fréquence	moyennes fréquence	haute fréquence
Θ	$ \theta \leq \theta_b$	$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$	$ \theta \geq \theta_h$

TABLE 2.2 – Différents domaines fréquentiels - systèmes à temps discret

Lemme 5. *Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$ et un scalaire $\gamma \in R^+$. Supposons que $\det(j\omega I_{n_x} - A) \neq 0$ ($\omega \in \Omega$). Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1.

$$\sup \sigma_{\max} T(e^{j\theta}) < \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (2.61)$$

2. Il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{n_x \times n_x}$ telles que $Q > 0$ et

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} A & B \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.62)$$

Preuve :

La preuve résulte directement du lemme 1 en choisissant $\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$.

Lemme 6. (Interprétations temporelles du lemme KYP généralisé, [49])

Étant donné des matrices $A \in R^{n_x \times n_x}$, $B \in R^{n_x \times n_w}$, $C \in R^{n_y \times n_x}$, $D \in R^{n_y \times n_w}$ et $\Pi \in R^{(2n_x+n_w) \times (2n_x+n_w)}$ et un scalaire $\gamma \in R^+$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. L'inégalité matricielle suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} T(e^{j\theta}) \\ I_{n_w} \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} T(e^{j\theta}) \\ I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.63)$$

dans le domaine fréquentiel $\forall \theta \in \Theta$

2. L'inégalité temporelle suivante est vérifiée $\forall w(k) \in \ell_2[0, \infty)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^T(k)y(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k) \quad (2.64)$$

telle que, avec l'hypothèse que les conditions initiales sont nulles :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_k)^T \leq (2 \sin \frac{\theta_b}{2})^2 \sum_{k=0}^{\infty} x_k x_k^T \quad (2.65)$$

pour un domaine basses fréquences.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)(x_{k+1} - x_k)^T \geq (2 \sin \frac{\theta_h}{2})^2 \sum_{k=0}^{\infty} x_k x_k^T \quad (2.66)$$

pour un domaine hautes fréquences.

$$e^{j\theta_\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - e^{j\theta_1} x_k)(x_{k+1} - e^{j\theta_2} x_k)^T \leq 0 \quad (2.67)$$

pour un domaine moyennes fréquences, avec : $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

2.10 Inégalités matricielles linéaires

L'histoire des inégalités matricielles linéaires (LMI) dans l'analyse des systèmes dynamiques remonte à plus d'un siècle. Une grande quantité de problèmes d'automatique, concernant les performances et la robustesse, sont généralement difficiles à résoudre de façon analytique. Les LMI sont souvent utilisées pour résoudre ces problèmes sous la forme d'une optimisation convexe.

2.10.1 Rappels historiques

La LMI la plus célèbre en automatique, a été introduite par Lyapunov en 1890. Il a montré que la stabilité d'un système dynamique dont la représentation est :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (2.68)$$

pourrait être prouvée si et seulement s'il existe une matrice définie positive $P = P^T$ telle que la LMI suivante est vérifiée :

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.69)$$

La théorie de Lyapunov a été depuis toujours au cœur de l'analyse des systèmes dynamiques. Au début du 20ème siècle, plusieurs scientifiques ont réussi à exploiter la théorie de Lyapunov pour fournir un cadre théorique pour de nombreux problèmes d'étude des systèmes dynamiques, y compris les non linéaires. A cette époque, les LMI qui résultaient étaient résolues analytiquement à la main. Bien entendu, cela a limité leur application aux systèmes d'ordre petit.

Les progrès technologiques et l'apparition de systèmes de plus en plus complexes ont motivé l'effort de recherche vers des méthodes d'analyse plus performantes et plus générales. Plus tard, en 1960, Yakubovich, Popov et Kalman, ont généralisé le résultat de stabilité proposé par Lyapunov. Ils ont développé des techniques graphiques pour résoudre les LMI concernant des problèmes plus compliqués que ceux considérés auparavant. Ces techniques sont basées sur

le lemme connu sous le nom de lemme de positivité réelle. Cela a abouti au célèbre critère de Popov, au critère de cercle, au critère de Tsypkin et à de nombreux autres critères.

Au début des années 1970, il a été montré que les LMI du lemme de positivité réelle peuvent être résolues non seulement par des méthodes graphiques mais aussi par l'intermédiaire d'une équation algébrique de Riccati.

Ainsi, en 1970, les chercheurs disposaient de plusieurs méthodes pour résoudre les LMI : méthodes analytiques directes pour les systèmes simples, méthodes graphiques pour les systèmes plus compliqués d'ordre supérieur, ou encore en résolvant les équations de Lyapunov ou de Riccati.

En 1971, les chercheurs ont essayé d'exploiter les LMI dans des algorithmes de calcul. Ainsi, ils ont pu constater que les LMI considérées dans les problèmes de contrôle peuvent être formulées sous la forme de problèmes d'optimisation convexe, susceptibles d'être associés à des algorithmes de calcul. Suite à cette observation, le problème de recherche d'une fonction de Lyapunov a été reformulé sous la forme d'un problème d'optimisation convexe en considérant des LMI. Ce problème fut alors résolu en utilisant des algorithmes ellipsoïdaux.

Depuis, grâce à la combinaison des possibilités mathématiques avec la puissance de calcul informatique, de nombreux travaux ont montré qu'un grand nombre de problèmes qui apparaissaient difficiles, voire impossible, à résoudre de manière analytique, pourraient se formuler et se résoudre par optimisation convexe impliquant des LMI.

2.10.2 Définitions

Définition 6. (*Ensemble convexe*)

Un ensemble $E \subseteq R^n$ est dit convexe si

$$\forall x, y \in E, \forall \varepsilon \in [0, 1] \Rightarrow \varepsilon x + (1 - \varepsilon)y \in E \quad (2.70)$$

En termes géométriques, cela revient à dire que le segment qui joint deux points appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble.

Définition 7. (*Fonction convexe*)

Une fonction $f : R^n \rightarrow R$ est dite convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in R^n, \forall \varepsilon \in [0, 1] f(\varepsilon x + (1 - \varepsilon)y) \leq \varepsilon f(x) + (1 - \varepsilon)f(y) \quad (2.71)$$

Lorsque l'inégalité est stricte, on parle de fonction strictement convexe.

Définition 8. (*Inégalité matricielle linéaire*)

On appelle une inégalité matricielle linéaire (notée LMI, *Linear Matrix Inequality* en anglais) le problème suivant :

Étant donné les matrices réelles, carrées et symétriques : $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 0, \dots, s$ telles que :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_s F_s = F_0 + \sum_{i=1}^s x_i F_i > 0 \quad (2.72)$$

Les scalaires $x_i \in R^s$ sont les variables de décision, on dit que $F(x) > 0$ est une LMI affine des éléments de x .

L'inégalité (2.72) implique que : $F(x)$ est une matrice définie positive, c'est-à-dire : $\forall u \in R^n$, $u \neq 0 : u^T F(x) u > 0$. Ce qui est équivalent à : la valeur propre la plus petite de $F(x)$ est strictement positive.

Remarque 4. Une LMI non stricte est une LMI telle que l'inégalité dans (2.72) est non stricte, $>$ est remplacée par \geq .

Remarque 5. Les inégalités matricielles $F(x) < 0$ et $F(x) < G(x)$ où F, G étant des fonctions affines, sont des cas particuliers de (2.72) puisqu'elles peuvent être reformulées sous la forme LMI :

$$-F(x) > 0 \quad (2.73)$$

$$G(x) - F(x) > 0 \quad (2.74)$$

L'objectif d'une LMI est de trouver le vecteur réel $x \in R^s$ satisfaisant l'inégalité (2.72). Ce choix de x est appelé problème de faisabilité.

2.10.3 Intérêts des LMI

L'approche d'inégalités matricielles linéaires est de plus en plus utilisée en automatique. Parmi les raisons de son succès, on peut citer :

2.10.3.1 Convexité

La convexité est une propriété géométrique importante. L'existence d'une solution à l'inégalité matricielle linéaire (2.72) définit un problème convexe car l'ensemble des solutions

$$S = \{x \in R^s / F(x) > 0\} \quad (2.75)$$

est convexe.

Preuve : On veut montrer que $x_1, x_2 \in S, \varepsilon \in [0, 1]$ implique

$$\varepsilon x_1 + (1 - \varepsilon)x_2 \in S \quad (2.76)$$

F étant affine, alors :

$$F(\varepsilon x_1 + (1 - \varepsilon)x_2) = \varepsilon F(x_1) + (1 - \varepsilon)F(x_2) > 0 \quad (2.77)$$

L'intérêt de la convexité provient du fait qu'un grand nombre de problèmes d'analyse de systèmes dynamiques peuvent se reformuler comme ce type de contrainte.

2.10.3.2 Regroupement des LMI

Parmi les propriétés remarquables des LMI, la possibilité de regrouper plusieurs LMI en une simple LMI bloc diagonale.

Soit $F(x) > 0$ et $G(x) > 0$ deux LMI, liées respectivement avec les deux ensembles convexes suivants : $S_F = \{x \in R^s / F(x) > 0\}$ et $S_G = \{x \in R^s / G(x) > 0\}$

Alors le système composé par $F(x) > 0$ et $G(x) > 0$ est lié avec l'intersection de S_F et S_G , définie par l'ensemble convexe suivant :

$$S_F \cap S_G = \left\{ x \in R^s / \begin{bmatrix} F(x) & 0 \\ 0 & G(x) \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (2.78)$$

L'intersection de deux ensembles convexes donne un ensemble convexe.

2.10.3.3 Algorithmes de calcul

Les méthodes de résolution numérique des LMIs sont efficaces (coût polynomial) et elles deviennent de plus en plus performantes (les méthodes des points intérieurs).

Sur le plan de la simulation, d'énormes progrès ont été réalisés en utilisant le développement toujours grandissant des logiciels tels que le LMITOOL et le SEDUMI (sous MATLAB).

2.10.4 Linéarisation et relaxation des LMI : outils mathématiques

Nous présentons dans la suite quelques lemmes qui permettent de linéariser les inégalités matricielles bilinéaires et d'introduire des variables de décision supplémentaires, produisant des problèmes LMI moins restrictifs.

2.10.4.1 lemme de Complément de Schur

Soit :

$$M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

avec $Q = Q^T$ et $R = R^T$. On a :

$$M \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R \geq 0 & \text{et } C_R = Q - SR^{-1}S^T \geq 0 \\ Q \geq 0 & \text{et } C_Q = R - S^TQ^{-1}S \geq 0 \end{cases} \quad (2.80)$$

où la matrice C_R (resp. C_Q) est appelée le complément de Schur de R (resp. Q) dans la matrice M définie en (2.79) [50].

2.10.4.2 Lemme de Finsler

L'utilisation de ce lemme dans notre travail, contribue à la linéarisation des conditions de synthèse du filtre et à l'introduction de variables supplémentaires permettant de réduire le conservatisme engendré par les conditions proposées au préalable, [51].

Soit $\Upsilon \in R^{n \times n}$ une matrice symétrique et une matrice $\Xi \in R^{m \times n}$ de rang strictement inférieur à n . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. $\Lambda^T \Upsilon \Lambda < 0, \quad \forall \Lambda \in R^n : \Xi \Lambda = 0.$
- ii. $\Xi_{\perp}^T \Upsilon \Xi_{\perp} < 0.$
- iii. $\exists \Delta \in R^{n \times m}$ tel que $\Upsilon + \Delta \Xi + \Xi^T \Delta^T < 0.$

2.10.4.3 Transformation de congruence

Soit U une matrice non singulière. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i. $F > 0.$
- ii. $U^T F U > 0.$

L'inégalité stricte $>$ peut être remplacée par une égalité $=$ ou une inégalité non-strictes \geq .

2.10.4.4 Lemme de projection

Soit $G \in R^{n \times n}$, $U \in R^{n \times p}$ et $V \in R^{n \times q}$. Soit U_{\perp} et V_{\perp} respectivement les compléments orthogonaux de U et V . Les trois propositions suivantes sont équivalentes, ([77], [78]) :

- i. $\exists X \in R^{p \times q}$ telle que $G + UXV^T + VX^T U^T > 0.$

- ii. $V_{\perp}^T G V_{\perp} > 0$ et $U_{\perp}^T G U_{\perp} > 0$.
- iii. $\exists \sigma \in R$ tel que $G - \sigma U U^T > 0$ et $G - \sigma V V^T > 0$.

2.10.4.5 Lemme de la S-procédure généralisée

Soit une matrice $P = P^* \geq 0 \in H^{n \times n}$ et un sous-ensemble $K \subset H^n$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes, [52]

- i. $\rho^* P \rho < 0, \forall \rho \in \Xi, \Xi = \{\rho \in C^n : \rho \neq 0, \rho^* M \rho \leq 0, \forall M \in K\}$.
- ii. Il existe $M \in K$, telle que $P < M$.

2.10.4.6 Lemme de séparation

Étant donné des matrices Υ_1, Υ_2 et Υ_3 , avec $\Upsilon_1^T = \Upsilon_1$, alors [79] :

$$\Upsilon_1 + \Upsilon_3 \kappa(k) \Upsilon_2 + \Upsilon_2^T \kappa^T(k) \Upsilon_3^T < 0 \quad (2.81)$$

est vérifié pour tout $\kappa^T(k) \kappa(k) \leq I$ si et seulement s'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\Upsilon_1 + \beta \Upsilon_3 \Upsilon_3^T + \beta^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2 < 0 \quad (2.82)$$

2.10.4.7 Inégalité de Jensen

Soit $G > 0$ une matrice symétrique constante et un entier $d > 0$, on a [65] :

$$- \sum_{i=k-d}^{k-1} \varpi^T(i) G \varpi(i) \leq -\frac{1}{d} \left(\sum_{i=k-d}^{k-1} \varpi^T(i) \right) G \left(\sum_{i=k-d}^{k-1} \varpi(i) \right) \quad (2.83)$$

Plusieurs relaxations peuvent être utilisées pour prouver l'efficacité des LMI et augmenter l'espace de solution. Néanmoins, l'introduction de variables additionnelles par ces relaxations fait croître la complexité du problème et le rend plus long à résoudre à cause de la puissance des ordinateurs actuels.

Donc un bon compromis entre conservatisme des LMIs et comptabilité avec la puissance des solveurs aboutit à une solution satisfaisante.

2.11 Conclusion

Dans ce chapitre, les concepts de base relatifs aux différentes classes de systèmes dynamiques ainsi que des conditions suffisantes de stabilité ont été présentés. Ces dernières se basent sur la théorie de Lyapunov. Nous avons ensuite présenté un bref état de l'art sur les techniques de filtrage, notamment le filtre de Kalman et le filtre H_{∞} . L'accent a également été mis sur le filtrage H_{∞} dans un domaine fréquentiel fini. Enfin, après avoir décrit le cadre théorique des LMI et motivé leur utilisation, nous avons présenté quelques outils mathématiques permettant de linéariser et relaxer les inégalités matricielles et qui serviront de support aux chapitres suivants.

Chapitre 3

Analyse et synthèse de filtres H_∞ robustes pour les systèmes linéaires incertains

Sommaire

3.1	Introduction	42
3.2	Filtrage H_∞ des systèmes incertains à temps discret	42
3.2.1	Formulation du problème	42
3.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	44
3.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	46
3.2.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	47
3.2.5	Exemple de simulation	50
3.3	Filtrage H_∞ des systèmes incertains à temps continu	54
3.3.1	Formulation du problème	54
3.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	55
3.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	58
3.3.4	Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	59
3.3.5	Exemples de simulation	61
3.4	Conclusion	68

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la présentation des résultats portant sur le filtrage H_∞ robuste dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes incertains, continus et discrets. Les incertitudes qui affectent le système sont supposées être sous la forme polytopique, avec N sommets connus, mais avec un vecteur paramétrique incertain invariant dans le temps : $\sigma(t) = \sigma \in R^N : \sum_{j=1}^N \sigma_j = 1, \sigma_j \geq 0, j = 1, \dots, N$. Ces systèmes sont décrits dans le chapitre 2.

Les sections 3.2 et 3.3 respectivement concernent le filtrage H_∞ robuste pour les systèmes polytopiques à temps discret et à temps continu respectivement. Dans les deux cas, des conditions suffisantes sont développées pour garantir à la fois la convergence de l'erreur d'estimation et les performances H_∞ , dans un domaine fréquentiel fini, non seulement vis-à-vis des perturbations extérieures, mais aussi des incertitudes paramétriques. Les théorèmes développés s'appuient sur des fonctions de Lyapunov polyquadratiques et sur le lemme de KYP généralisé. Grâce au lemme de Finsler, nous arrivons à formuler les conditions de synthèse de filtres en des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI, qui se révèlent moins restrictives par comparaison avec d'autres résultats récents de la littérature. La fin de chaque section est consacrée à des exemples de simulation illustrant les performances et les avantages des approches proposées.

3.2 Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains à temps discret

Cette section aborde la synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes linéaires à temps discret avec des incertitudes polytopiques.

3.2.1 Formulation du problème

Comme il a été mentionné dans le chapitre précédent, un système linéaire à temps discret avec des incertitudes paramétriques de type polytopique peut être décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(\sigma)x(k) + B(\sigma)w(k), & A(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}, B(\sigma) \in R^{n_x \times n_w} \\ y(k) &= C(\sigma)x(k) + D(\sigma)w(k), & C(\sigma) \in R^{n_y \times n_x}, D(\sigma) \in R^{n_y \times n_w} \\ z(k) &= H(\sigma)x(k), & H(\sigma) \in R^{n_z \times n_x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $x(k) \in R^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(k) \in R^{n_y}$ est le vecteur de mesures et $z(k) \in R^{n_z}$ désigne la sortie non mesurée à estimer. $w(k) \in R^{n_w}$ représente le vecteur de perturbations appartenant à $\ell_2[0, \infty)$ et à un domaine fréquentiel connu.

Les matrices du modèle d'état sont données par :

$$(A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma)) \in \Gamma \quad (3.2)$$

$$\Gamma = \left\{ A(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i; B(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i B_i; C(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i C_i; D(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i D_i \right\} \quad (3.3)$$

$$\sigma_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1 \quad (3.4)$$

N étant le nombre de sommets du polyèdre Γ .

Le filtre censé reconstruire le vecteur $z(k)$ a la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f(\sigma)x_f(k) + B_f(\sigma)y(k), & A_f(\sigma) &\in R^{n_x \times n_x}, B_f(\sigma) \in R^{n_x \times n_y} \\ z_f(k) &= C_f(\sigma)x_f(k) + D_f(\sigma)y(k), & C_f(\sigma) &\in R^{n_z \times n_x}, D_f(\sigma) \in R^{n_z \times n_y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $y(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie reconstruite et l'entrée du filtre, qui est également la sortie mesurée du système (3.1).

Les matrices $A_f(\sigma)$, $B_f(\sigma)$, $C_f(\sigma)$, et $D_f(\sigma)$ sont les paramètres du filtre à déterminer.

Pour un résultat moins conservatif, nous supposons que les matrices du filtre dépendent des paramètres incertains. Elles sont ainsi données par :

$$\begin{aligned} A_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i A_{fi} & B_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i B_{fi} \\ C_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i C_{fi} & D_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i D_{fi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considérons maintenant l'état augmenté $\hat{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ et l'erreur d'estimation $e(k) = z(k) - z_f(k)$. Le système d'état augmenté est alors déduit :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(\sigma)\hat{x}(k) + \hat{B}(\sigma)w(k) \\ e(k) &= \hat{C}(\sigma)\hat{x}(k) + \hat{D}(\sigma)w(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

où :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\sigma) &= \begin{pmatrix} A(\sigma) & 0 \\ B_f(\sigma)C(\sigma) & A_f(\sigma) \end{pmatrix}, & \hat{B}(\sigma) &= \begin{pmatrix} B(\sigma) \\ B_f(\sigma)D(\sigma) \end{pmatrix}, \\ \hat{C}(\sigma) &= (H(\sigma) - D_f(\sigma)C(\sigma) \quad -C_f(\sigma)), & \hat{D}(\sigma) &= -D_f(\sigma)D(\sigma). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Soit $T(e^{j\theta})$ la fonction de transfert du signal de bruit $w(k)$ vers l'erreur d'estimation $e(k)$.

Le problème lié au filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini du système (3.1) consiste à trouver un filtre de la forme (3.5) tel que :

- (a) Le gain ℓ_2 du système (3.7) est inférieur ou égal à γ , un scalaire positif prédéfini, dans le domaine fréquentiel fini du bruit $w(k)$ et avec des conditions initiales nulles ($\hat{x}(0) = 0$), c-à-d :

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \sigma_{max} T(e^{j\theta}) \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (3.9)$$

- (b) Le système à état augmenté décrit dans (3.7) est asymptotiquement stable en boucle ouverte ($w(k) = 0$),

Nous désignons par θ la fréquence du bruit $w(k)$, supposée appartenir à un intervalle Θ connu, voir le tableau 2.2, page 38.

3.2.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Nous supposons, dans un premier temps, que les paramètres du filtre sont connus. Nous proposons dans le théorème suivant des conditions suffisantes garantissant la condition (a).

Théorème 10. *Considérons le système (3.1) affecté par le bruit $w(k)$, supposé appartenir à un domaine fréquentiel fini et connu et le filtre décrit dans (3.5). Soit γ un scalaire positif donné. Alors le système d'état augmenté représenté par (3.7) possède une performance H_∞ inférieure*

ou égale à γ s'il existe des matrices $\vartheta_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\vartheta_2(\sigma) \in R^{n_z \times n_x}$, $\vartheta_i(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\vartheta_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_6(\sigma) \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z(\sigma)$, $X(\sigma)$, $P(\sigma) = P^T(\sigma)$, $Q(\sigma) = Q^T(\sigma) > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y(\sigma) \in R^{n_w \times 2n_x}$, telles que :

$$\Psi(\sigma) + He\{\Phi(\sigma)\} < 0 \quad (3.10)$$

où :

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} -\vartheta_1 & -\vartheta_2(\sigma) & 0 & \Phi_{14}(\sigma) & -\vartheta_1 C_f(\sigma) & -\vartheta_1 D_f(\sigma)D(\sigma) + \vartheta_2(\sigma)B(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_3(\sigma) & -\vartheta_4 & \Phi_{24}(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) & \vartheta_3(\sigma)B(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)D(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_5(\sigma) & -\vartheta_4 & \Phi_{34}(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) & \vartheta_5(\sigma)B(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)D(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_6(\sigma) & 0 & \vartheta_6(\sigma)A(\sigma) & 0 & \vartheta_6(\sigma)B(\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{14}(\sigma) = \vartheta_1(H(\sigma) - D_f(\sigma)C(\sigma)) + \vartheta_2(\sigma)A(\sigma)$$

$$\Phi_{24}(\sigma) = \vartheta_3(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma)$$

$$\Phi_{34}(\sigma) = \vartheta_5(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma)$$

La matrice $\Psi(\sigma)$ est donnée par :

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & Q(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & P(\sigma) - 2 \cos(\theta_b)Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine basses fréquences, $|\theta| \leq \theta_b$.

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & e^{j\theta_c}Q(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & P(\sigma) - 2 \cos(\theta_w)Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$,

$\theta_w = (\theta_2 - \theta_1)/2$ et $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$.

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & -Q(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & P(\sigma) + 2 \cos(\theta_h)Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine hautes fréquences, $|\theta| \geq \theta_h$.

Preuve : Nous supposons que le bruit $w(k)$ appartient à un domaine moyennes fréquences.

D'après le lemme 5 du chapitre 2 (page 38), la condition (a) est vérifiée pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ s'il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telles que $Q > 0$ et :

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & P - 2 \cos \theta_w Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

Nous supposons que les matrices P et Q dépendent des paramètres incertains, c-à-d :

$$P = P(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i P_i \quad \text{et} \quad Q = Q(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i Q_i \quad (3.12)$$

Nous multiplions (3.11) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q(\sigma)\hat{B}(\sigma) + \hat{C}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

où : $\varepsilon_{11} = P(\sigma) - 2 \cos \theta_w Q(\sigma) + e^{-j\theta_c} Q(\sigma) \hat{A}(\sigma) + e^{j\theta_c} \hat{A}^T(\sigma) Q(\sigma) + \hat{C}^T(\sigma) \hat{C}(\sigma)$.

A partir de (3.7), on a :

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii) avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q(\sigma)\hat{B}(\sigma) + \hat{C}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(\sigma) \end{bmatrix},$$

et $\Xi = \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & -I_{2n_x} \end{bmatrix}$.

L'inégalité (3.13) est satisfaite s'il existe des matrices $Z(\sigma), X(\sigma) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et $Y(\sigma) \in R^{n_w \times 2n_x}$ telle que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q(\sigma)\hat{B}(\sigma) + \hat{C}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(\sigma)\hat{D}(\sigma) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(\sigma) \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} Z(\sigma) \\ Y(\sigma) \\ X(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (3.15)$$

Nous réécrivons l'inégalité (3.15) comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) & 0 \\ \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix}^T \Psi(\sigma) \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) & 0 \\ \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

où :

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & e^{j\theta_c}Q(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & P(\sigma) - 2 \cos(\theta_w)Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & 0 \end{bmatrix}_{\perp} = \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) & 0 \\ \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

En appliquant le lemme de Finsler encore une deuxième fois (ii et iii), il vient que l'inégalité (3.16) admet une solution s'il existe une matrice $\vartheta(\sigma) \in R^{(6n_x+n_z+n_w) \times (n_z+2n_x)}$ telle que :

$$\Psi(\sigma) + He \left\{ \vartheta(\sigma) \begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (3.18)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\vartheta(\sigma)$:

$$\vartheta(\sigma) = \begin{bmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2(\sigma) & 0 \\ 0 & \vartheta_3(\sigma) & \vartheta_4 \\ 0 & \vartheta_5(\sigma) & \vartheta_4 \\ 0 & \vartheta_6(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Nous pouvons aisément déduire que l'expression (3.18) est équivalente à (3.10) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

En suivant la même démarche analytique que pour le domaine moyennes fréquences, nous pouvons démontrer l'inégalité (3.10) pour les domaines basses et hautes fréquences.

Ceci complète la démonstration.

Remarque 6. Notons que pour obtenir l'inégalité (3.10), nous avons appliqué le lemme de Finsler deux fois, de deux manières différentes. Ceci nous a permis de rajouter des variables de décision supplémentaires afin d'avoir plus de degrés de liberté dans les conditions.

3.2.3 Étude de stabilité du système augmenté

Le théorème ci-après garantit la contrainte (b). Les conditions présentées sont basées sur des fonctions de Lyapunov non quadratiques dépendantes de paramètres.

Théorème 11. *Considérons le système (3.1) et le filtre défini par l'équation (3.5). Le système à état augmenté (3.7) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_s(\sigma) = P_s^T(\sigma) > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $\vartheta_{s1}(\sigma), \vartheta_{s2}(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$ et $\vartheta_{s3}(\sigma) \in R^{2n_x \times n_x}$ telles que :*

$$\Psi_s(\sigma) + He\{\Phi_s(\sigma)\} < 0 \quad (3.20)$$

où :

$$\Psi_s(\sigma) = \begin{bmatrix} P_s(\sigma) & 0 \\ 0 & -P_s(\sigma) \end{bmatrix}$$

$$et \quad \Phi_s(\sigma) = \begin{bmatrix} -\vartheta_{s1}(\sigma) & 0 & \vartheta_{s1}(\sigma)A(\sigma) & 0 \\ -\vartheta_{s2}(\sigma) & -\vartheta_4 & \vartheta_{s2}(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) \\ -\vartheta_{s3}(\sigma) & 0 & \vartheta_{s3}(\sigma)A(\sigma) & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve : Pour $w(k) = 0$, le système (3.7) devient :

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(\sigma)\hat{x}(k) \quad (3.21)$$

Nous réécrivons l'expression (3.21) comme :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Considérons la fonction de Lyapunov non quadratique suivante :

$$V(x(k), \sigma) = \hat{x}^T(k)P_s(\sigma)\hat{x}(k) \quad (3.23)$$

En tenant compte de la variation de $V(x(k), \sigma)$ le long des trajectoires du système augmenté (3.7), nous en déduisons que ce dernier est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive et symétrique $P_s(\sigma) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_s(\sigma) & 0 \\ 0 & -P_s(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

Appliquant le lemme de Finsler (page 42) (i et iii), avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} P_s(\sigma) & 0 \\ 0 & -P_s(\sigma) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Xi = [-I_{2n_x} \quad \hat{A}(\sigma)].$$

On en déduit que l'inégalité (3.24) est faisable s'il existe une matrice $\vartheta_s(\sigma) \in R^{4n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} P_s(\sigma) & 0 \\ 0 & -P_s(\sigma) \end{bmatrix} + He\{\vartheta_s(\sigma) [-I_{2n_x} \quad \hat{A}(\sigma)]\} < 0 \quad (3.25)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\vartheta_s(\sigma)$:

$$\vartheta_s(\sigma) = \begin{bmatrix} \vartheta_{s1}(\sigma) & 0 \\ \vartheta_{s2}(\sigma) & \vartheta_4 \\ \vartheta_{s3}(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Il est immédiat que (3.25) est équivalente à (3.20).

Ceci achève la démonstration.

3.2.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Dans cette section, nous supposons que les paramètres du filtre (3.5) sont inconnus. Par conséquent, les conditions des théorèmes 10 et 11 sont non linéaires à cause des produits entre les matrices du filtre et les variables ϑ_1 et ϑ_4 .

Le théorème suivant présente des conditions suffisantes permettant de construire, dans un domaine fréquentiel prédéfini, le filtre optimal qui satisfait les deux contraintes (a) et (b).

Théorème 12. *Considérons le système (3.1), avec le bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini. Le filtre (3.5) stable et optimal, en termes de performance H_∞ vis-à-vis des perturbations et des incertitudes paramétriques, peut être obtenu si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (3.27) sous les contraintes LMI (3.28 - 3.33) pour des matrices $\vartheta_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\vartheta_{2i} \in R^{n_z \times n_x}$, $\vartheta_{ki} \in R^{n_x \times n_x}$, ($k = 3, 5$), $\vartheta_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_{6i} \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z_i, X_i, P_i = P_i^T, Q_i = Q_i^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y_i \in R^{n_w \times 2n_x}$, $P_{si} = P_{si}^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $\vartheta_{s1i}, \vartheta_{s2i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_{s3i} \in R^{2n_x \times n_x}$, $a_{fi} \in R^{n_x \times n_x}$, $b_{fi} \in R^{n_x \times n_w}$, $c_{fi} \in R^{n_z \times n_x}$, $d_{fi} \in R^{n_z \times n_w}$, $X_{ii} \in R^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$: $X_{ii} = X_{ii}^T$, $X_{ij} \in R_{i < j}^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$, $X_{sii} \in R^{4n_x \times 4n_x}$: $X_{sii} = X_{sii}^T$, $X_{sij} \in R_{i < j}^{4n_x \times 4n_x}$:*

$$\min_{Q_i, Z_i, X_i, Y_i, P_i, \vartheta_{ki}, (k=2,3,5,6), \vartheta_1, \vartheta_4, \vartheta_{ski}, (k=1,2,3), a_{fi}, b_{fi}, c_{fi}, d_{fi}, X_{ij}, X_{sij}} \gamma \quad (3.27)$$

$$\Psi_i + He\{\Phi_{ii}\} - X_{ii} < 0 \quad (3.28)$$

$$\Psi_i + \Psi_j + He\{\Phi_{ij}\} + He\{\Phi_{ji}\} - X_{ij} - X_{ij}^T < 0, \quad (i < j) \quad (3.29)$$

$$\Psi_{si} + He\{\Phi_{sii}\} - X_{sii} < 0 \quad (3.30)$$

$$\Psi_{si} + \Psi_{sj} + He\{\Phi_{sij}\} + He\{\Phi_{sji}\} - X_{sij} - X_{sij}^T < 0, \quad (i < j) \quad (3.31)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.32)$$

$$X_s = \begin{bmatrix} X_{s11} & \cdots & X_{s1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{sN1} & \cdots & X_{sNN} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.33)$$

$i, j \in \{1, \dots, N\}$

où :

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & Q_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & P_i - 2 \cos(\theta_b) Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine basses fréquences, $|\theta| \leq \theta_b$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & e^{j\theta_c} Q_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & P_i - 2 \cos(\theta_w) Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$,

$\theta_w = (\theta_2 - \theta_1)/2$ et $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & -Q_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & P_i + 2 \cos(\theta_h) Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine hautes fréquences, $|\theta| \geq \theta_h$.

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} -\vartheta_1 & -\vartheta_{2i} & 0 & \vartheta_1 H_i - d_{fi} C_j + \vartheta_{2i} A_j & -c_{fi} & -d_{fi} D_j + \vartheta_{2i} B_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{3i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{3i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \vartheta_{3i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{5i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{5i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \vartheta_{5i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{6i} & 0 & \vartheta_{6i} A_j & 0 & \vartheta_{6i} B_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{si} = \begin{bmatrix} P_{si} & 0 \\ 0 & -P_{si} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{sij} = \begin{bmatrix} -\vartheta_{s1i} & 0 & \vartheta_{s1i} A_j & 0 \\ -\vartheta_{s2i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{s2i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ -\vartheta_{s3i} & 0 & \vartheta_{s3i} A_j & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont obtenus à partir des équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i a_{fi}, & B_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i b_{fi}, \\ C_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i c_{fi}, & D_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i d_{fi} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Preuve : Nous supposons que les inégalités (3.28-3.33) sont satisfaites.

Nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \vartheta_k(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i \vartheta_{ki}, \quad (k = 2, 3, 5, 6), & X(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i X_i, & Z(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i Z_i, \\ Y(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i Y_i, & P(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i P_i, & Q(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i Q_i, \\ P_s(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i P_{si}, & A_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i a_{fi}, & B_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i b_{fi}, \\ C_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i c_{fi}, & \text{et } D_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} \sigma_i d_{fi}. \end{aligned}$$

Prenant en compte toutes les expressions ci-dessus, nous écrivons les équations des théorèmes (10) et (11) en fonctions de celles du théorème 12 comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma) + He \{ \Phi(\sigma) \} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j (\Psi_i + He \{ \Phi_{ij} \}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\Psi_i + He \{ \Phi_{ii} \}) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N \sigma_i \sigma_j \left(\frac{\Psi_i + He \{ \Phi_{ij} \} + \Psi_j + He \{ \Phi_{ji} \}}{2} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 X_{ii} + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N \sigma_i \sigma_j (X_{ij} + X_{ij}^T) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 I \\ \vdots \\ \sigma_N I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 I \\ \vdots \\ \sigma_N I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_s(\sigma) + He \{ \Phi_s(\sigma) \} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i \sigma_j (\Psi_{si} + He \{ \Phi_{sij} \}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 (\Psi_{si} + He \{ \Phi_{sii} \}) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N \sigma_i \sigma_j \left(\frac{\Psi_{si} + He \{ \Phi_{sij} \} + \Psi_{sj} + He \{ \Phi_{sji} \}}{2} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 X_{sii} + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j}^N \sigma_i \sigma_j (X_{sij} + X_{sij}^T) \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_1 I \\ \vdots \\ \sigma_N I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{s11} & \cdots & X_{s1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{sN1} & \cdots & X_{sNN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 I \\ \vdots \\ \sigma_N I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les conditions des théorèmes (10) et (11) sont satisfaites, et par suite le filtre obtenu vérifie les conditions (a) et (b).

Ceci complète la démonstration.

Remarque 7. Notons que si nous multiplions (3.28) et (3.29) à gauche et à droite par $[I_{n_z} \quad 0]$

et sa transposée, nous en déduisons que $I - \vartheta_1 - \vartheta_1^T < 0$, ce qui implique que la matrice ϑ_1 est définie positive et par conséquent inversible. Donc les matrices $C_f(\sigma)$ et $D_f(\sigma)$ existent.

D'une manière similaire, si nous multiplions (3.28) et (3.29) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} 0_{n_x \times (n_x + n_z)} & I_{n_z} & 0 \end{bmatrix}$ et sa transposée, nous en déduisons que $I - \vartheta_4 - \vartheta_4^T < 0$, ce qui implique que la matrice ϑ_4 est définie positive et par conséquent inversible. Donc les matrices $A_f(\sigma)$ et $B_f(\sigma)$ existent.

3.2.5 Exemple de simulation

Nous présentons dans cette section un exemple numérique afin de démontrer l'efficacité et les mérites de l'approche proposée. Nous comparons notre travail avec des résultats récents de la littérature.

Nous considérons le système à temps discret, largement utilisé dans la littérature ([21] [22] [23] [24]), suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1 + \mu \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) &= \begin{bmatrix} -100 & 10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w(k), \\ z(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k), \end{aligned} \tag{3.35}$$

où μ désigne le paramètre incertain avec : $|\mu| \leq 0.45$.

Il s'agit d'une incertitude structurée d'un bloc qui peut être décrit par un polytope à deux sommets.

En résolvant le problème d'optimisation du théorème (12) dans différents domaines fréquentiels, nous obtenons les paramètres suivant :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.9972, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0562 & 0.0185 \\ 0.0184 & 0.0061 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0117 & -0.0047 \\ -0.0035 & -0.0014 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.3792 \\ 0.1250 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.1880 & -0.0626 \end{bmatrix}, & d_{f1} &= -0.0083, \\ b_{f2} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1786 \\ 0.0568 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.2410 & -0.0798 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} -0.5046 & -0.2012 \\ 0.1962 & 0.0814 \end{bmatrix}, \\ d_{f2} &= -0.0076. \end{aligned}$$

$\forall \theta$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 1.3521$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1.0006, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0716 & 0.0135 \\ 0.0168 & 0.0033 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0475 & -0.0102 \\ -0.0102 & -0.0023 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.7919 \\ 0.1771 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.3429 & -0.0729 \end{bmatrix}, & d_{f1} &= -0.0065, \\ b_{f2} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.6981 \\ 0.1467 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.4490 & -0.0951 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0710 & -0.0167 \\ -0.0137 & -0.0033 \end{bmatrix}, \\ d_{f2} &= -0.0062. \end{aligned}$$

dans le domaine basses fréquences $|\theta| \leq \pi/6$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 1.1628$.

$$\varphi_1 = 1.0004, \quad \varphi_4 = \begin{bmatrix} 0.0358 & 0.0192 \\ 0.0166 & 0.0128 \end{bmatrix}, \quad a_{f1} = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0009 \\ 0.0076 & 0.0033 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
b_{f1} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.4009 \\ 0.1603 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= [-0.1221 \quad -0.1030], & d_{f1} &= -0.0088, \\
b_{f2} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.3122 \\ 0.0894 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= [-0.1604 \quad -0.0776], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0033 & 0.0078 \\ 0.0072 & 0.0088 \end{bmatrix}, \\
d_{f2} &= -0.0084.
\end{aligned}$$

dans le domaine moyennes fréquences $\pi/6 \leq |\theta| \leq \pi/4$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.5860$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 1.0007; , & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0086 & 0.0347 \\ 0.0334 & 0.1374 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.0039 & 0.0116 \\ 0.0158 & 0.0478 \end{bmatrix}, \\
b_{f1} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.2268 \\ 0.9147 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= [-0.0247 \quad -0.0985], & d_{f1} &= -0.0098, \\
b_{f2} &= 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1592 \\ 0.6487 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= [-0.0238 \quad -0.0984], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} 0.0085 & 0.0337 \\ 0.0341 & 0.1368 \end{bmatrix}, \\
d_{f2} &= -0.0098.
\end{aligned}$$

dans le domaine hautes fréquences $|\theta| \geq 5\pi/6$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.0098$.

Il est clair que le niveau de performance H_∞ atteint sur des bandes de fréquences restreintes, est meilleur que celui atteint dans tout le domaine fréquentiel, ce qui démontre l'avantage de prendre en compte les caractéristiques fréquentiels du bruit dans la synthèse du filtre.

Pour illustrer ceci, les figures (3.1 – 3.4) présentent les courbes de la valeur singulière maximale de la fonction de transfert du signal de bruit $w(t)$ vers l'erreur d'estimation $e(k)$ dans les différents domaines fréquentiels. Les zones grises représentent la gamme de fréquences concernées, et les lignes horizontales pointillées désignent les valeurs correspondantes de la performance $H_\infty (\gamma)$. Il est clair que le filtre robuste synthétisé garantit la performance atteinte pour tous les modèles contenus dans le modèle incertain.

Le tableau ci-dessous présente une comparaison des valeurs de niveau de performance H_∞ atteintes avec le filtre robuste synthétisé au moyen du théorème 12 et le théorème (2) proposé dans [21].

Θ	$ \theta \leq \pi/6$	$\pi/6 \leq \theta \leq \pi/4$	$ \theta \geq 5\pi/6$	$\forall \theta$
Théorème 12	1.1628	0.5860	0.0098	1.3528
Théorème 2 de [21]	1.1775	0.7487	1.0069	1.8199

TABLE 3.1 – Comparaison des niveaux de performance H_∞ obtenus dans différents domaines fréquentiels

Dans le tableau 3.2, nous comparons le niveau de performance H_∞ atteint au moyen du théorème (12) avec quelques résultats récents de la littérature qui traitent le problème du filtrage H_∞ robuste sur toute la plage de fréquence, c-à-d $\forall \theta$.

Méthode	Théorème 1 [24]	Corollaire 3 [23]	Théorème 4 [22]	théorème (12)
γ	1.5964	1.6629	1.6577	1.3528

TABLE 3.2 – Comparaison des niveaux de performance H_∞ obtenus pour toute valeur de θ

Il est clairement démontré que le théorème 12 donne des résultats moins conservatifs par comparaison aux approches proposées dans [21], [24], [23] et [22].

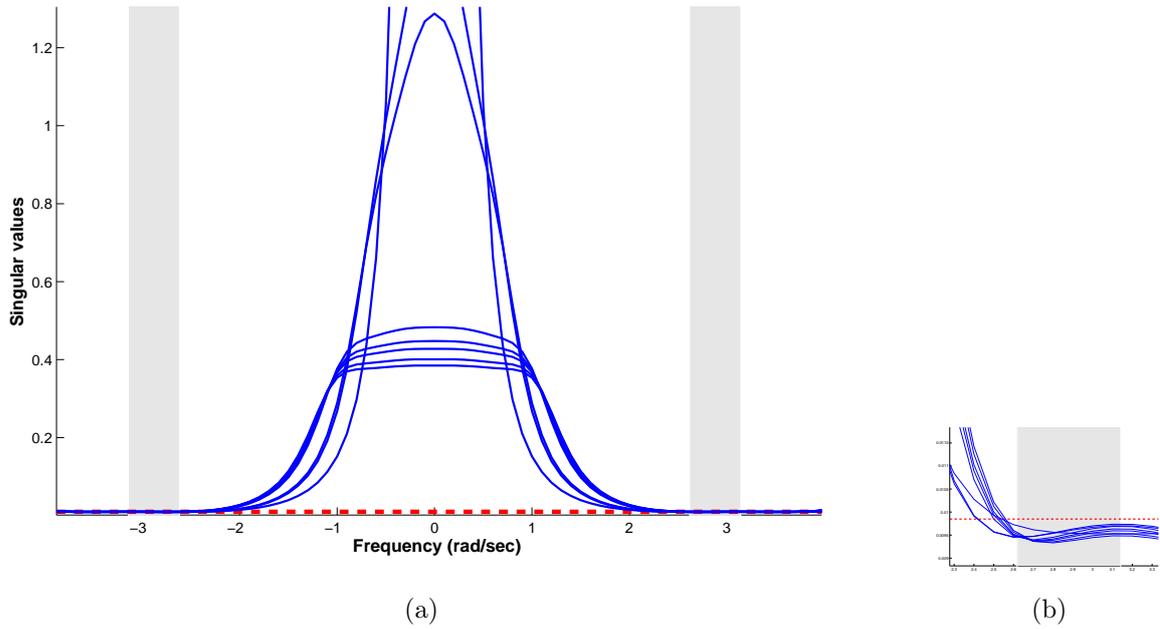


FIGURE 3.1 – (a)-(b) Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $|\theta| \geq 5\pi/6$

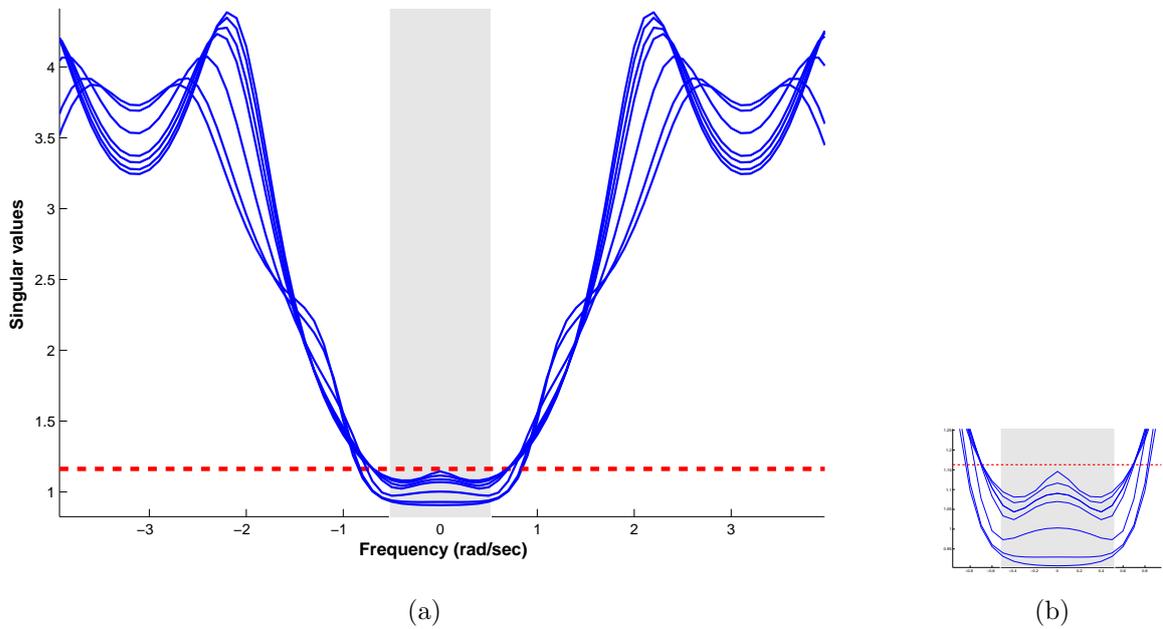


FIGURE 3.2 – (a)-(b) Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $|\theta| \leq \pi/6$.

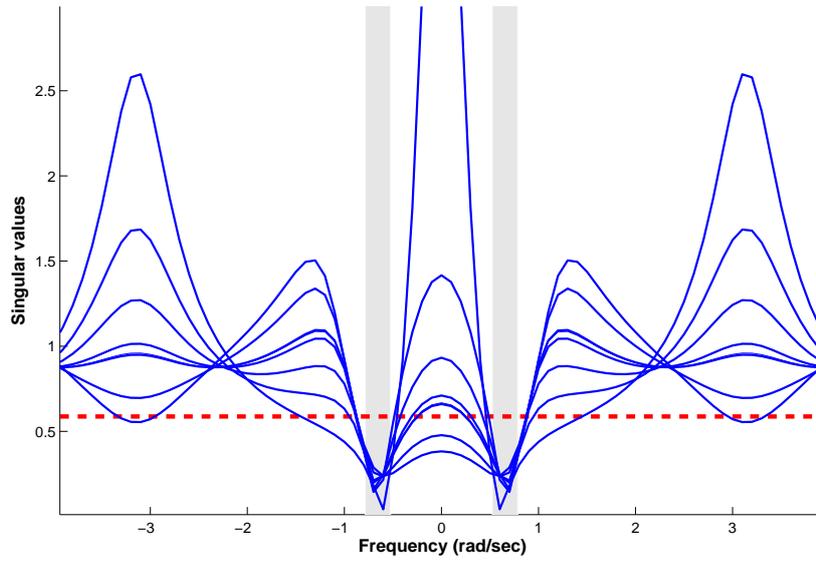


FIGURE 3.3 – Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l’erreur d’estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $\pi/6 \leq |\theta| \leq \pi/4$.

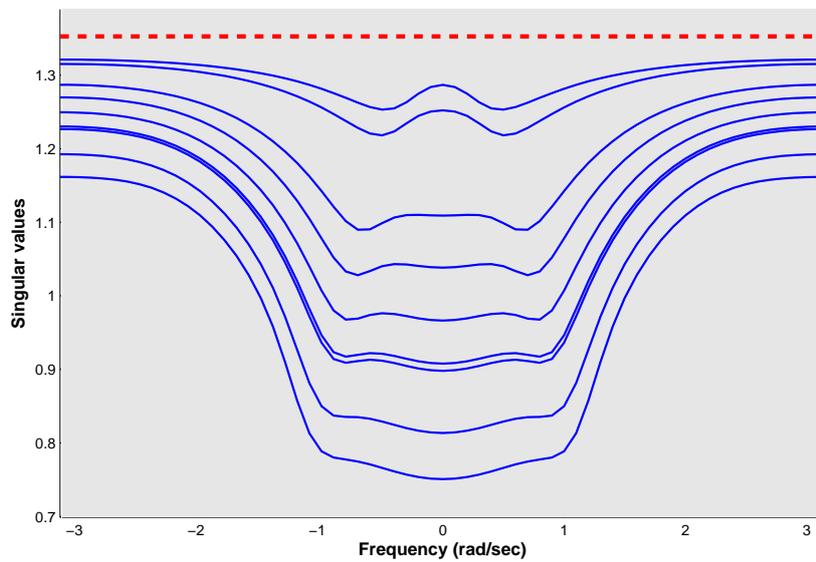


FIGURE 3.4 – Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l’erreur d’estimation, courbe en pointillé : γ ; pour toute valeur de θ

3.3 Filtrage H_∞ robuste des systèmes incertains à temps continu

Cette section aborde l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes linéaires à temps continu avec des incertitudes polytopiques.

3.3.1 Formulation du problème

Un système linéaire polytopique en temps continu est défini par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)w(t), & A(\sigma) &\in R^{n_x \times n_x}, B(\sigma) \in R^{n_x \times n_w} \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + D(\sigma)w(t), & C(\sigma) &\in R^{n_y \times n_x}, D(\sigma) \in R^{n_y \times n_w} \\ z(t) &= H(\sigma)x(t), & H(\sigma) &\in R^{n_z \times n_x} \end{aligned} \quad (3.36)$$

où $x(t)$ est le vecteur d'état, $y(t)$ est le vecteur de mesures et $z(t)$ est la sortie non mesurée à estimer. $w(t)$ désigne le vecteur des perturbations appartenant à $\ell_2[0, \infty)$ et à un domaine fréquentiel connu.

Rappelons que les matrices du modèle d'état sont données par :

$$(A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), D(\sigma)) \in \Gamma \quad (3.37)$$

$$\Gamma = \left\{ A(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i A_i; B(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i B_i; C(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i C_i; D(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sigma_i D_i \right\} \quad (3.38)$$

$$\sigma_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i = 1 \quad (3.39)$$

N étant le nombre de sommets du polyèdre Γ .

L'objectif est de construire un filtre qui possède la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= A_f(\sigma)x_f(t) + B_f(\sigma)y(t), & A_f(\sigma) &\in R^{n_x \times n_x}, B_f(\sigma) \in R^{n_x \times n_y} \\ z_f(t) &= C_f(\sigma)x_f(t) + D_f(\sigma)y(t), & C_f(\sigma) &\in R^{n_z \times n_x}, D_f(\sigma) \in R^{n_z \times n_y} \end{aligned} \quad (3.40)$$

où $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $y(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie supposée donner une estimation du vecteur $z(k)$ et l'entrée du filtre. Les matrices $A_f(\sigma)$, $B_f(\sigma)$, $C_f(\sigma)$, et $D_f(\sigma)$ sont données par :

$$\begin{aligned} A_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i A_{fi} & B_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i B_{fi} \\ C_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i C_{fi} & D_f(\sigma) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i D_{fi} \end{aligned} \quad (3.41)$$

A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} et D_{fi} sont à déterminer pour $i = (1, \dots, N)$.

A partir des équations (3.36) et (3.40), le système d'état augmenté peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(\sigma)\hat{x}(t) + \hat{B}(\sigma)w(t) \\ e(t) &= \hat{C}(\sigma)\hat{x}(t) + \hat{D}(\sigma)w(t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

où $e(t) = z(t) - z_f(t)$ représente l'erreur d'estimation, l'état augmenté $\hat{x}(t) = [x^T(t) \ x_f^T(t)]^T$ et :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\sigma) &= \begin{pmatrix} A(\sigma) & 0 \\ B_f(\sigma)C(\sigma) & A_f(\sigma) \end{pmatrix}, & \hat{B}(\sigma) &= \begin{pmatrix} B(\sigma) \\ B_f(\sigma)D(\sigma) \end{pmatrix}, \\ \hat{C}(\sigma) &= (H(\sigma) - D_f(\sigma)C(\sigma) \quad -C_f(\sigma)), & \hat{D}(\sigma) &= -D_f(\sigma)D(\sigma). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Soit $T_{we}(j\omega)$ la fonction de transfert du signal de bruit $w(t)$ vers l'erreur d'estimation $e(t)$.

Le problème du filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini du système (3.36) consiste à construire un filtre de la forme (3.40) tel que :

- (a) Le gain ℓ_2 du système (3.42) est inférieur ou égal à γ , un scalaire positif prédéfini, dans le domaine fréquentiel fini du bruit $w(t)$ et avec des conditions initiales nulles ($\hat{x}(0) = 0$), c-à-d :

$$\sup \sigma_{max} T_{we}(j\omega) \leq \gamma, \quad \forall \omega \in \Omega \quad (3.44)$$

- (b) Le système à état augmenté décrit dans (3.42) est asymptotiquement stable en boucle ouverte, c-à-d quand $w(t) = 0$.

Nous désignons par ω la fréquence du bruit $w(t)$, supposée appartenir à un intervalle Ω connu, voir le tableau 2.1, page 36.

3.3.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Comme dans la section précédente, nous supposons dans un premier temps que les paramètres du filtre sont connus. Nous développons dans le théorème suivant des conditions suffisantes garantissant (a).

Théorème 13. *Considérons le système (3.36) et le filtre décrit dans (3.40). Soit γ un scalaire positif donné. La performance H_∞ ldu système augmenté (3.42) est inférieure ou égale à γ s'il existe des matrices $\vartheta_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\vartheta_2(\sigma) \in R^{n_z \times n_x}$, $\vartheta_i(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\vartheta_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_6(\sigma) \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z(\sigma)$, $X(\sigma)$, $P(\sigma) = P^T(\sigma)$, $Q(\sigma) = Q^T(\sigma) > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y(\sigma) \in R^{n_w \times 2n_x}$ telles que :*

$$\Psi(\sigma) + He\{\Phi(\sigma)\} < 0 \quad (3.45)$$

où :

$$\Phi(\sigma) = \begin{bmatrix} -\vartheta_1 & -\vartheta_2(\sigma) & 0 & \Phi_{14}(\sigma) & -\vartheta_1 C_f(\sigma) & -\vartheta_1 D_f(\sigma)D(\sigma) + \vartheta_2(\sigma)B(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_3(\sigma) & -\vartheta_4 & \Phi_{24}(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) & \vartheta_3(\sigma)B(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)D(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_5(\sigma) & -\vartheta_4 & \Phi_{34}(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) & \vartheta_5(\sigma)B(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)D(\sigma) & 0 \\ 0 & -\vartheta_6(\sigma) & 0 & \vartheta_6(\sigma)A(\sigma) & 0 & \vartheta_6(\sigma)B(\sigma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_{14}(\sigma) = \vartheta_1(H(\sigma) - D_f(\sigma)C(\sigma)) + \vartheta_2(\sigma)A(\sigma)$$

$$\Phi_{24}(\sigma) = \vartheta_3(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma)$$

$$\Phi_{34}(\sigma) = \vartheta_5(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma)$$

La matrice $\Psi(\sigma)$ est donnée par :

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \omega_b^2 Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -Q(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine basses fréquences, $|\omega| \leq \omega_b$.

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P(\sigma) + j\omega_c Q(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & -\omega_1 \omega_2 Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -Q(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$,
 $\omega_c = (\omega_1 + \omega - 2) / 2$.

$$\Psi(\sigma) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P(\sigma) + Z^T(\sigma) & Y^T(\sigma) & X^T(\sigma) \\ \bullet & \bullet & -\omega_h^2 Q(\sigma) & 0 & -Z(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(\sigma) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & Q(\sigma) - X(\sigma) - X^T(\sigma) \end{bmatrix}$$

pour un domaine hautes fréquences, $|\omega| \geq \omega_h$.

Preuve : Nous supposons que le bruit $w(t)$ appartient à un domaine moyennes fréquences, c-à-d : $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$.

D'après le lemme 2 du chapitre 2, la condition (a) est vérifiée s'il existe des matrices symétriques $P, Q \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telles que $Q > 0$ et :

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & P + j\omega_c Q \\ P - j\omega_c Q & -\omega_1 \omega_2 Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(\sigma) & \hat{B}(\sigma) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}(\sigma) & \hat{D}(\sigma) \\ 0 & I_{n_w} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

Le reste est similaire à la démonstration du théorème 10 et est donc omis.

3.3.3 Étude de stabilité du système augmenté

Nous présentons ci-après des conditions LMIs suffisantes pour la vérification de la condition (b)

Théorème 14. *Considérons le système (3.36) et le filtre décrit dans (3.40). Alors le système à état augmenté (3.42) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_s(\sigma) = P_s^T(\sigma) > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $\vartheta_{s1}(\sigma)$, $\vartheta_{s2}(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$ et $\vartheta_{s3}(\sigma) \in R^{2n_x \times n_x}$ telles que :*

$$\Psi_s(\sigma) + He\{\Phi_s(\sigma)\} < 0 \quad (3.47)$$

$$\text{où : } \Psi_s(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & P_s(\sigma) \\ P_s(\sigma) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \Phi_s(\sigma) = \begin{bmatrix} -\vartheta_{s1}(\sigma) & 0 & \vartheta_{s1}(\sigma)A(\sigma) & 0 \\ -\vartheta_{s2}(\sigma) & -\vartheta_4 & \vartheta_{s2}(\sigma)A(\sigma) + \vartheta_4 B_f(\sigma)C(\sigma) & \vartheta_4 A_f(\sigma) \\ -\vartheta_{s3}(\sigma) & 0 & \vartheta_{s3}(\sigma)A(\sigma) & 0 \end{bmatrix}.$$

Preuve : Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t), \sigma) = \hat{x}^T(t) P_s(\sigma) \hat{x}(t) \quad (3.48)$$

En tenant compte de la variation de $V(x(t), \sigma)$ le long des trajectoires du système (3.42), nous en déduisons que ce dernier est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive $P_s(\sigma) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P_s(\sigma) \\ P_s(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.49)$$

Le reste de la preuve est similaire au raisonnement de la démonstration du théorème 11.

3.3.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Nous présentons dans le théorème suivant des conditions suffisantes permettant de construire, dans un domaine fréquentiel fini, le filtre optimal vérifiant les deux conditions (a) et (b).

Théorème 15. *Considérons le système (3.36), avec le bruit $w(t)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini. Le filtre (3.40) stable et optimal en termes d'atténuation H_∞ de bruit peut être obtenu par résolution du problème d'optimisation (3.50) sous les contraintes LMI (3.51 - 3.56) pour des matrices $\vartheta_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\vartheta_{2i} \in R^{n_z \times n_x}$, $\vartheta_{ki} \in R^{n_x \times n_x}$, ($k = 3, 5$), $\vartheta_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_{6i} \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z_i, X_i, P_i = P_i^T, Q_i = Q_i^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y_i \in R^{n_w \times 2n_x}$, $P_{si} = P_{si}^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $\vartheta_{s1i}, \vartheta_{s2i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\vartheta_{s3i} \in R^{2n_x \times n_x}$, $a_{fi} \in R^{n_x \times n_x}$, $b_{fi} \in R^{n_x \times n_w}$, $c_{fi} \in R^{n_z \times n_x}$, $d_{fi} \in R^{n_z \times n_w}$, $X_{ii} \in R^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$: $X_{ii} = X_{ii}^T$, $X_{ij} \in R_{i < j}^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$, $X_{sii} \in R^{4n_x \times 4n_x}$: $X_{sii} = X_{sii}^T$, $X_{sij} \in R_{i < j}^{4n_x \times 4n_x}$:*

$$\min_{Q_i, Z_i, X_i, Y_i, P_i, \varphi_{ki}, (k=2,3,5,6), \varphi_1, \varphi_4, \varphi_{ski}, (k=1,2,3), a_{fi}, b_{fi}, c_{fi}, d_{fi}, X_{ij}, X_{sij}} \gamma \quad (3.50)$$

$$\Psi_i + He\{\Phi_{ii}\} - X_{ii} < 0 \quad (3.51)$$

$$\Psi_i + \Psi_j + He\{\Phi_{ij}\} + He\{\Phi_{ji}\} - X_{ij} - X_{ij}^T < 0, \quad (i < j) \quad (3.52)$$

$$\Psi_{si} + He\{\Phi_{sii}\} - X_{sii} < 0 \quad (3.53)$$

$$\Psi_{si} + \Psi_{sj} + He\{\Phi_{sij}\} + He\{\Phi_{sji}\} - X_{sij} - X_{sij}^T < 0, \quad (i < j) \quad (3.54)$$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

$$X_s = \begin{bmatrix} X_{s11} & \cdots & X_{s1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{sN1} & \cdots & X_{sNN} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.56)$$

$i, j \in 1, \dots, N$.

où :

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & \omega_b^2 Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -Q_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine basses fréquences, $\omega \leq \omega_b$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P_i + j\omega_c Q_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & -\omega_1 \omega_2 Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -Q_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$,

$\omega_c = (\omega_1 + \omega_2) / 2$.

$$\Psi_i = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & P_i + Z_i^T & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & -\omega_h^2 Q_i & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & Q_i - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

pour un domaine hautes fréquences, $\omega \geq \omega_h$.

$$\Phi_{ij} = \begin{bmatrix} -\vartheta_1 & -\vartheta_{2i} & 0 & \vartheta_1 H_i - d_{fi} C_j + \vartheta_{2i} A_j & -c_{fi} & -d_{fi} D_j + \vartheta_{2i} B_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{3i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{3i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \vartheta_{3i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{5i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{5i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \vartheta_{5i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\vartheta_{6i} & 0 & \vartheta_{6i} A_j & 0 & \vartheta_{6i} B_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_{si} = \begin{bmatrix} P_{si} & 0 \\ 0 & -P_{si} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi_{sij} = \begin{bmatrix} -\vartheta_{s1i} & 0 & \vartheta_{s1i} A_j & 0 \\ -\vartheta_{s2i} & -\vartheta_4 & \vartheta_{s2i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ -\vartheta_{s3i} & 0 & \vartheta_{s3i} A_j & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont donnés par :

$$\begin{aligned} A_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i a_{fi}, & B_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i b_{fi}, \\ C_f(\sigma) &= \vartheta_4^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i c_{fi}, & D_f(\sigma) &= \vartheta_1^{-1} \sum_{i=1}^N \sigma_i d_{fi} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Preuve : La démonstration est similaire à celle du théorème 12 et est donc omise.

3.3.5 Exemples de simulation

Nous présentons dans cette section deux exemples numériques pour démontrer l'efficacité et les mérites de l'approche proposée. Une étude comparative avec des résultats récents de la littérature est également présentée.

3.3.5.1 Exemple 1

Nous considérons le système à temps continu suivant, [25] :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\alpha \\ 0.01 + 0.05\beta & 0.9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= [-100 + 10\beta \quad 100] x(t) + [0 \quad 1] w(t) \\ z(t) &= [1 \quad 0] x(t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

où β et α désignent les paramètres incertains et vérifient :

- (a) $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$, ou
- (b) $|\alpha| \leq 1$, $\alpha = \beta$, ou
- (c) $|\alpha| \leq 3$, $|\beta| \leq 1$, ou
- (d) $|\alpha| \leq 3$, $\alpha = \beta$.

Nous appliquons le théorème 15 pour $\forall \theta$ et pour différents ensembles d'incertitudes. Les valeurs du niveau de performance H_∞ obtenues par notre approche et par le théorème 3 proposé dans [25] sont regroupées dans le tableau 3.3.

	Théorème 3 [25]	Théorème 15
(a)	2.18	1.1402
(b)	2.17	1.1402
(c)	15.8	1.7321
(d)	14.24	3.1623

TABLE 3.3 – Comparaison de niveaux de performance H_∞ obtenu pour toute valeur de ω dans différents domaines d'incertitudes

Maintenant, nous considérons que les paramètres d'incertitude satisfont : $|\alpha| \leq 1$ et $\alpha = \beta$.

En appliquant le théorème (15), dans différentes gammes de fréquences, nous obtenons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0.9852;, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.1716 & 0.0908 \\ -0.0385 & 0.3162 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0001 & -0.0853 \end{bmatrix}, \\
b_{f1} &= 10^{-8} \begin{bmatrix} 0.4677 \\ 0.2423 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= 10^{-5} [-0.5368 \quad -0.0129], & d_{f1} &= -0.01, \\
b_{f2} &= 10^{-7} \begin{bmatrix} 0.2117 \\ 0.0437 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= 10^{-5} [-0.65780.0553], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0002 & -0.0823 \end{bmatrix}, \\
d_{f2} &= -0.0095.
\end{aligned}$$

sur toute la plage de fréquence, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 1.1511$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0.9902, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.1513 & 0.0965 \\ -0.0566 & 0.2970 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0001 & -0.0001 \\ -0.0001 & -0.0841 \end{bmatrix}, \\
b_{f1} &= 10^{-10} \begin{bmatrix} 0.2538 \\ 0.2206 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= 10^{-4} [-0.10400.0026], & d_{f1} &= -0.01, \\
b_{f2} &= 10^{-9} \begin{bmatrix} 0.1623 \\ 0.0364 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= 10^{-4} [-0.1095 \quad 0.0035], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0001 & 0.0001 \\ 0.0002 & -0.0780 \end{bmatrix}, \\
d_{f2} &= -0.0095.
\end{aligned}$$

dans le domaine basses fréquences $|\omega| \leq 20$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 1.1402$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0.7246, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0137 & 0.0271 \\ 0.0267 & 0.0540 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0136 & -0.0263 \\ -0.0263 & -0.0537 \end{bmatrix}, \\
b_{f1} &= 10^{-10} \begin{bmatrix} -0.3650 \\ -0.0462 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= [-0.0089 \quad -0.0069], & d_{f1} &= -0.0052, \\
b_{f2} &= 10^{-9} \begin{bmatrix} 0.0540 \\ 0.1773 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= [-0.0048 \quad -0.0044], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0140 & -0.0270 \\ -0.0270 & -0.0546 \end{bmatrix}, \\
d_{f2} &= -0.0045.
\end{aligned}$$

dans le domaine moyennes fréquences $10 \leq |\omega| \leq 30$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.0316$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 0.8711, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0217 & 0.0435 \\ 0.0434 & 0.0870 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0265 & -0.0528 \\ -0.0528 & -0.1059 \end{bmatrix}, \\
b_{f1} &= 10^{-9} \begin{bmatrix} -0.1012 \\ -0.1573 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= [-0.0481 \quad 0.0299], & d_{f1} &= -0.0059,
\end{aligned}$$

$$b_{f2} = 10^{-9} \begin{bmatrix} -0.2844 \\ -0.5054 \end{bmatrix}, \quad c_{f2} = [-0.02150.0200], \quad a_{f2} = \begin{bmatrix} -0.0274 & -0.0544 \\ -0.0544 & -0.1091 \end{bmatrix},$$

$$d_{f2} = -0.0052.$$

dans le domaine hautes fréquences $|\omega| \geq 50$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.0084$.

Les figures (3.5 – 3.8) présentent les courbes de la valeur singulière maximale de la fonction de transfert entre le signal de bruit $w(t)$ et l'erreur d'estimation $e(t)$ dans les différents domaines fréquentiels. Les zones grises représentent la gamme de fréquences concernée, et les lignes horizontales pointillées désignent les valeurs correspondantes de la performance $H_\infty (\gamma)$. Il est clair que les performances H_∞ désirées sont bien respectées dans les domaines fréquentiels choisis et pour les modèles contenus dans le modèle incertain.

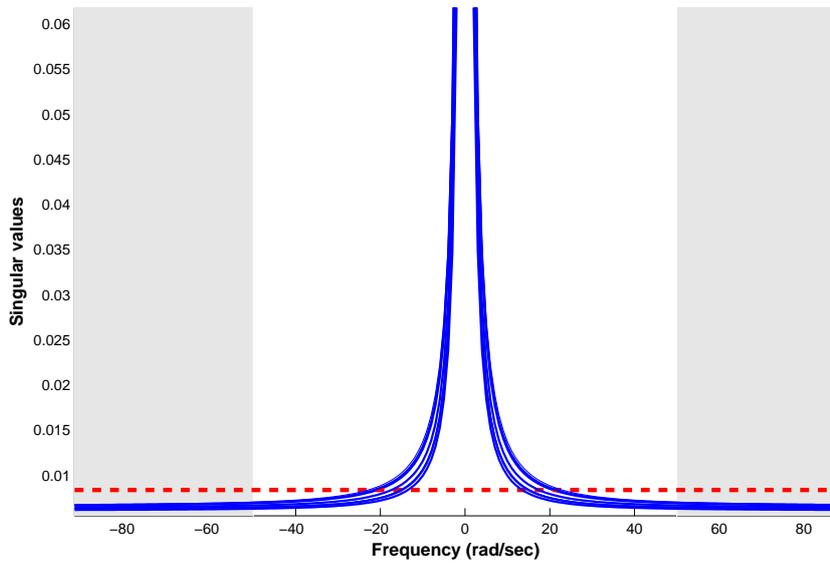


FIGURE 3.5 – Exemple 1. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $|\omega| \geq 50$

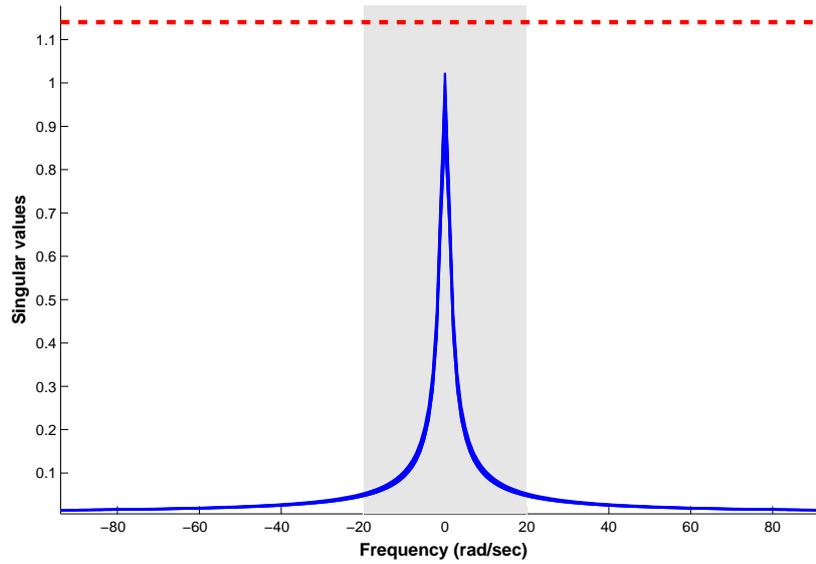


FIGURE 3.6 – Exemple 1. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $|\omega| \leq 20$

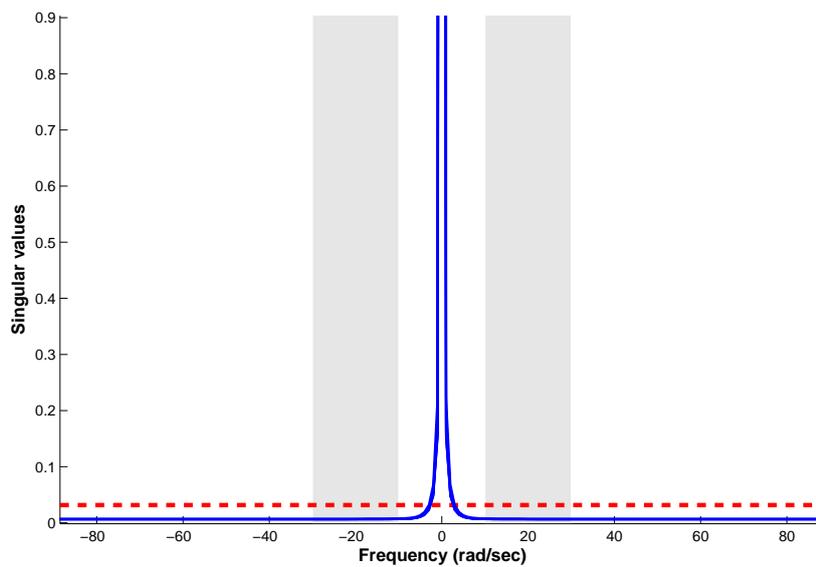


FIGURE 3.7 – Exemple 1. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $10 \leq |\omega| \leq 30$

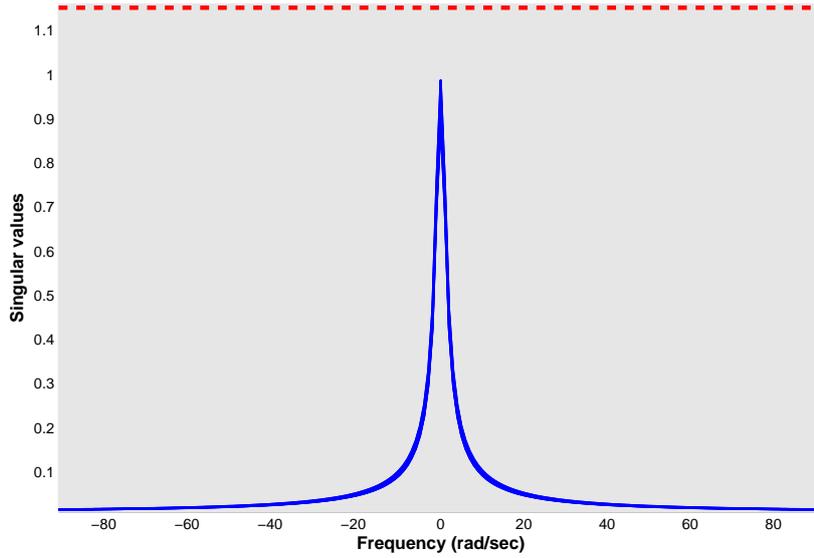


FIGURE 3.8 – Exemple 1. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l’erreur d’estimation, courbe en pointillé : γ ; pour toute valeur de ω

3.3.5.2 Exemple 2

Nous considérons le système incertain continu suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -0.6 & 4 + \alpha \\ -4 & -0.6 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -1.2 \end{bmatrix} x(t) + 1.3w(t) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

où α désigne le paramètre incertain et vérifie : $|\alpha| \leq 1$.

En appliquant le théorème (15), dans différents domaines fréquentiels, nous obtenons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.8858, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.0469 & 0.0696 \\ -0.0762 & 0.0426 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.2856 & 0.0073 \\ 0.0073 & -0.3665 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.2178 \\ -0.0146 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= 10^{-5} \begin{bmatrix} 0.0498 & 0.1949 \end{bmatrix}, & d_{f1} &= -0.0262, \\ b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0760 \\ -0.0117 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= 10^{-5} \begin{bmatrix} -0.0820 & 0.1895 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.2855 & 0.0302 \\ 0.0302 & -0.2204 \end{bmatrix}, \\ d_{f2} &= -0.0587. \end{aligned}$$

sur toute la plage de fréquence, avec un niveau de performance H_∞ : $\gamma = 1.2247$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.9425, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.3610 & 0.1610 \\ -0.1661 & 0.3534 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.6283 & -0.0163 \\ -0.0163 & -0.6537 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.1583 \\ -0.2721 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0229 & 0.0072 \end{bmatrix}, & d_{f1} &= -0.0853, \\ b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.1458 \\ -0.1834 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0147 & 0.0152 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.6108 & -0.0236 \\ -0.0236 & -0.5195 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$d_{f2} = -0.0323.$$

dans le domaine moyennes fréquences $20 \leq |\omega| \leq 60$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.9487$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0.6879, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.1279 & 0.0616 \\ -0.0656 & 0.1499 \end{bmatrix}, & a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.2980 & 0.1451 \\ 0.1451 & -0.2924 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0474 \\ -0.1158 \end{bmatrix}, & c_{f1} &= [-0.0018 \quad -0.0008], & d_{f1} &= -6.4105 \times 10^{-4}, \\ b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0474 \\ -0.1153 \end{bmatrix}, & c_{f2} &= [-0.0010 \quad 0.0019], & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.2408 & 0.0454 \\ 0.0454 & -0.2081 \end{bmatrix}, \\ d_{f2} &= -1.5381 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

dans le domaine hautes fréquences $|\omega| \geq 60$, avec un niveau de performance $H_\infty : \gamma = 0.0316$.

Connectant les filtres obtenus au système original, les figures (3.9 – 3.11) montrent l'évolution de la valeur singulière maximale de la fonction de transfert entre l'erreur d'estimation et les perturbations extérieures dans les différents domaines fréquentiels. Les zones grises représentent la gamme de fréquences concernée, et les lignes horizontales pointillées désignent les valeurs correspondantes de la performance $H_\infty \gamma$.

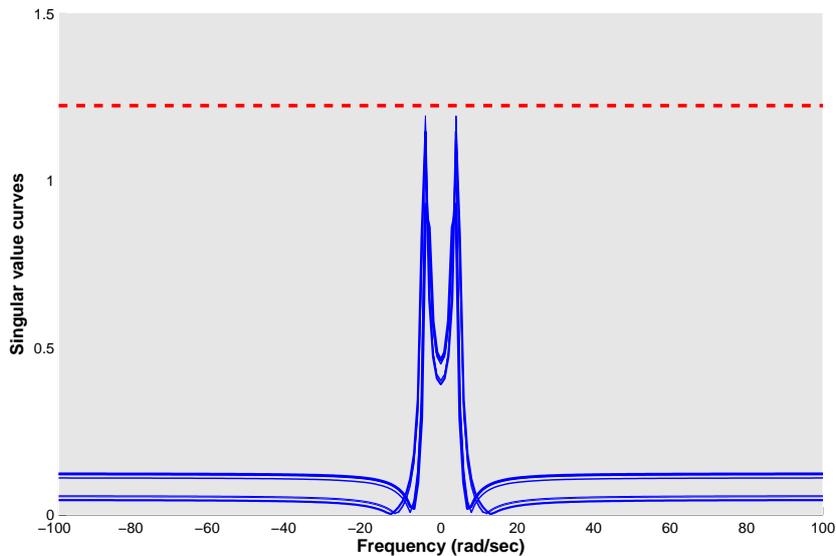


FIGURE 3.9 – Exemple 2. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l'erreur d'estimation, courbe en pointillé : γ ; pour toute valeur de ω

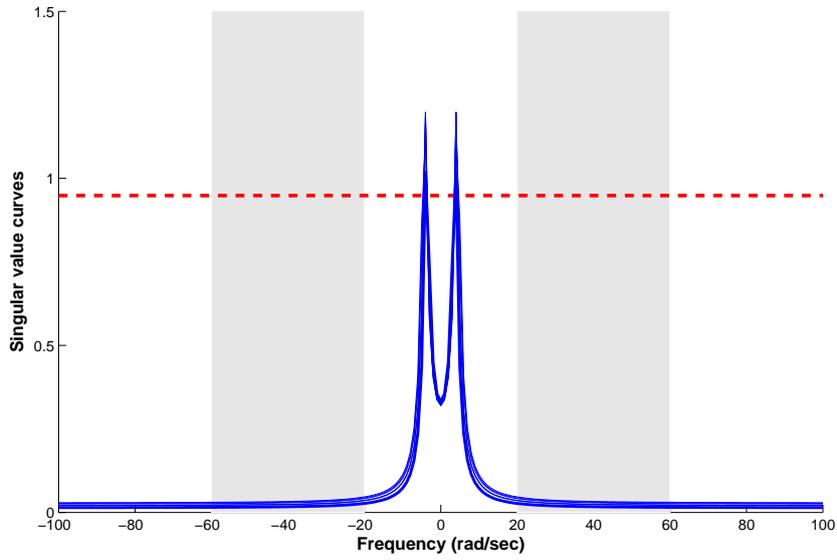


FIGURE 3.10 – Exemple 2. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l’erreur d’estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $20 \leq |\omega| \leq 60$

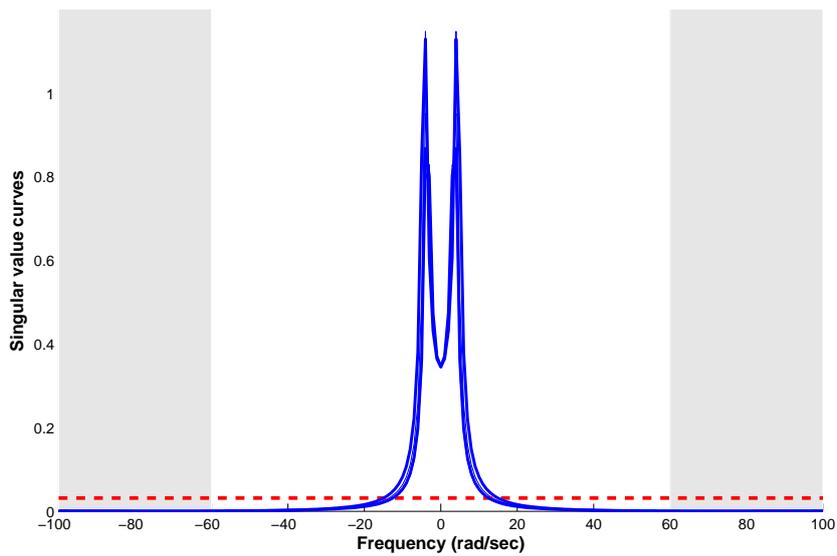


FIGURE 3.11 – Exemple 2. Courbes continues : la valeur singulière maximale du transfert entre le bruit et l’erreur d’estimation, courbe en pointillé : γ ; pour $|\omega| \geq 60$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes invariants dans le temps avec des incertitudes polytopiques. Nous nous sommes penchés sur l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes incertains aussi bien à temps discret que continu. Afin de permettre une meilleure souplesse dans la synthèse du filtre, des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres sont utilisées pour assurer la convergence de l'erreur d'estimation. Les approches proposées sont basées sur le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov généralisé et le lemme de Finsler. Ce dernier nous a permis de formuler les conditions de synthèse du filtre en termes de LMI et d'introduire des variables de décision supplémentaires pour une solution moins conservatrice avec plus de degrés de liberté. Des exemples de simulation sont présentés à la fin de chaque section pour démontrer les avantages des approches proposées par comparaison avec d'autres résultats récents de la littérature.

Chapitre 4

Analyse et synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires flous de type Takagi-Sugeno

Sommaire

4.1	Introduction	70
4.2	Filtrage H_∞ des systèmes TS à temps discret	70
4.2.1	Formulation du problème	70
4.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	72
4.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	75
4.2.4	Synthèse du filtre H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	76
4.2.5	Exemple de simulation	79
4.3	Extension au filtrage H_∞ des systèmes TS à retard	83
4.3.1	Formulation du problème	83
4.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	85
4.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	90
4.3.4	Synthèse du filtre H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	92
4.3.5	Exemple de simulation	94
4.4	Conclusion	97

4.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, les résultats qui portent sur l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires à temps discret décrits par le modèle flou de TS, avec et sans retard. Les interprétations temporelles du lemme KYP généralisé, ainsi que les lemmes S-procédure généralisée et de Finsler ont été exploités dans le développement des résultats proposés. Ainsi, les conditions de synthèse de filtres H_∞ sont formulées en termes de LMI en fonction du domaine fréquentiel fini des perturbations extérieures.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La section 4.2 est consacrée à la présentation d'une nouvelle approche de synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires de type TS à temps discret.

Une extension sera par la suite présentée dans la section 4.3. Il s'agit du filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes non linéaires avec retard constant.

A la fin de chaque section, un exemple d'illustration est donné pour valider les différents résultats théoriques proposés.

4.2 Filtrage H_∞ des systèmes TS à temps discret

4.2.1 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes non linéaires flous de type TS de la forme :

Règle i : Si $\zeta_1(k)$ est N_{i1} et ... et $\zeta_p(k)$ est N_{ip} , alors :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_i x(k) + B_i w(k), & A_i &\in R^{n_x \times n_x}, B_i \in R^{n_x \times n_w} \\ y(k) &= C_i x(k) + D_i w(k), & C_i &\in R^{n_y \times n_x}, D_i \in R^{n_y \times n_w} \\ z(k) &= H_i x(k), & H_i &\in R^{n_z \times n_x} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$i = 1, 2, \dots, \rho$, nous désignons $\varsigma = \{1, 2, \dots, \rho\}$.

où $x(k) \in R^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(k) \in R^{n_y}$ désigne la sortie mesurée, $z(k) \in R^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(k) \in R^{n_w}$ représente le bruit d'entrée appartenant à $\ell_2 [0, \infty)$ et à un domaine fréquentiel connu. $(A_i, B_i, C_i, D_i, H_i)$ sont des matrices constantes et connues. Les ensembles flous sont notés par N_{ij} , ρ est le nombre de règles Si-Alors et $\zeta(k) = [\zeta_1(k) \ \zeta_2(k) \ \dots \ \zeta_p(k)]$ représente le vecteur des variables de prémisse, supposées mesurables.

Les fonctions d'activation, notées par $h_i(\zeta(k))$, sont des fonctions non linéaires dépendantes du vecteur $\zeta(k)$.

$$h_i(\zeta(k)) = \frac{\prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(k))}{\sum_{i=1}^{\rho} \prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(k))}, \quad (i \in \varsigma) \quad (4.2)$$

où $N_{ij}(\zeta_j(k))$ désigne le degré d'appartenance de $\zeta_j(k)$ à l'ensemble flou N_{ij} .

Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe :

$$h_i(\zeta(k)) \geq 0, \quad (i \in \varsigma) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) = 1. \quad (4.3)$$

Dans le reste, h_i et h_i^+ désignent respectivement $h_i(\zeta(k))$ et $h_i(\zeta(k+1))$.

Le modèle global après défuzzification du système (4.1) est donné par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(h)x(k) + B(h)w(k), \\ y(k) &= C(h)x(k) + D(h)w(k), \\ z(k) &= H(h)x(k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

où :

$$A(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_i, \quad B(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i B_i, \quad C(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_i, \quad D(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i D_i,$$

et

$$H(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i H_i.$$

Nous supposons que le vecteur des variables de prémisse du filtre est le même que le système (4.4).

En utilisant la structure PDC (Parallel Distributed Compensation), le filtre de type TS d'ordre plein est décrit par les règles suivantes :

Règle i : Si $\zeta_1(k)$ est N_{i1} et ... et $\zeta_p(k)$ est N_{ip} , alors :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_{fi}x_f(k) + B_{fi}y(k), \quad A_{fi} \in R^{n_x \times n_x}, B_{fi} \in R^{n_x \times n_y} \\ z_f(k) &= C_{fi}x_f(k) + D_{fi}y(k), \quad C_{fi} \in R^{n_z \times n_x}, D_{fi} \in R^{n_z \times n_y} \end{aligned} \quad (4.5)$$

où $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $y(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie supposée donner une estimation du vecteur $z(k)$ et l'entrée du filtre. Les matrices A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} , et D_{fi} sont les paramètres du filtre à déterminer pour $i \in \varsigma$.

Après défuzzification par la méthode du centre de gravité, le modèle global du filtre est donné par :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f(h)x_f(k) + B_f(h)y(k), \\ z_f(k) &= C_f(h)x_f(k) + D_f(h)y(k) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où :

$$\begin{aligned} A_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_{fi}, & B_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i B_{fi}, \\ C_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_{fi}, & D_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i D_{fi}, \\ h_i(\zeta(k)) &\geq 0, \quad (i \in \varsigma) & \text{et} & \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) = 1. \end{aligned}$$

A partir des équations (4.4) et (4.6), le système d'état augmenté peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(h)\hat{x}(k) + \hat{B}(h)w(k) \\ e(k) &= \hat{C}(h)\hat{x}(k) + \hat{D}(h)w(k) \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $e(k) = z(k) - z_f(k)$ représente l'erreur d'estimation, $\hat{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ et :

$$\begin{aligned} \hat{A}(h) &= \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_f(h)C(h) & A_f(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fj}C_i & A_{fi} \end{bmatrix}, \\ \hat{B}(h) &= \begin{bmatrix} B(h) \\ B_f(h)D(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} B_i \\ B_{fj}D_i \end{bmatrix}, \\ \hat{C}(h) &= [H(h) - D_f(h)C(h) \quad -C_f(h)] = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j [H_i - D_{fj}C_i \quad -C_{fi}], \end{aligned}$$

$$\text{et } \hat{D}(h) = -D_f(h)D(h) = -\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j D_{fj} D_i.$$

Le problème du filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini du système (4.4) consiste à trouver un filtre de la forme (4.6) tel que :

- (a) Le gain ℓ_2 du système augmenté (4.7) est inférieur ou égal à γ , un scalaire positif prédéfini, dans le domaine fréquentiel fini du bruit $w(k)$ et avec des conditions initiales nulles ($\hat{x}(0) = 0$), c-à-d :

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (4.8)$$

- (b) Le système à état augmenté décrit dans (4.7) est asymptotiquement stable en boucle ouverte, c-à-d quand $w(k) = 0$

θ désigne la fréquence du bruit $w(k)$, son intervalle Θ est supposé connu, voir le tableau 2.2 page 38.

4.2.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Dans cette section, nous supposons que les paramètres du filtre sont connus. Nous développons dans le théorème suivant des conditions suffisantes pour vérifier la condition (a).

Théorème 16. *Considérons le système (4.4) avec le bruit $w(k)$, supposé appartenir à un domaine fréquentiel fini et connu et le filtre décrit dans (4.6). Soit γ un scalaire positif donné. Le système augmenté défini dans (4.7) possède un niveau de performance H_∞ inférieur ou égal à γ s'il existe des matrices $\Phi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\Phi_2(h) \in R^{n_z \times n_x}$, $\Phi_i(h) \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\Phi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_6(h) \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z(h)$, $X(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y(h) \in R^{n_w \times 2n_x}$, $P(h) = P^T(h)$, $Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telles que :*

$$\Sigma(h) + He\{\Upsilon(h)\} < 0 \quad (4.9)$$

où :

$$\Sigma(h) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \Sigma_{23} & Y^T(h) & X^T(h) \\ \bullet & \bullet & \Sigma_{33} & 0 & -Z(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(h^+) - X(h) - X^T(h) \end{bmatrix}$$

avec : $\Sigma_{23} = Q + Z^T(h)$
 $\Sigma_{33} = P(h) - 2 \cos(\theta_b)Q$
pour un domaine basses fréquences,

$\Sigma_{23} = e^{j\theta_c}Q + Z^T(h)$
 $\Sigma_{33} = P(h) - 2 \cos(\theta_w)Q$
pour un domaine moyennes fréquences,
 $\theta_w = (\theta_2 - \theta_1) / 2$ et $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2) / 2$.

$\Sigma_{23} = -Q + Z^T(h)$
 $\Sigma_{33} = P(h) + 2 \cos(\theta_h)Q$
pour un domaine hautes fréquences.

$$\Upsilon(h) = \begin{bmatrix} -\Phi_1 & -\Phi_2(h) & 0 & \left(\begin{array}{c} \Phi_1(H(h) - D_f(h)C(h)) \\ +\Phi_2(h)A(h) \end{array} \right) & -\Phi_1 C_f(h) & \left(\begin{array}{c} -\Phi_1 D_f(h)D(h) \\ +\Phi_2(h)B(h) \end{array} \right) & 0 \\ 0 & -\Phi_3(h) & -\Phi_4 & \Phi_3(h)A(h) + \Phi_4 B_f(h)C(h) & \Phi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{c} \Phi_3(h)B(h) \\ +\Phi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) & 0 \\ 0 & -\Phi_5(h) & -\Phi_4 & \Phi_5(h)A(h) + \Phi_4 B_f(h)C(h) & \Phi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{c} \Phi_5(h)B(h) \\ +\Phi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) & 0 \\ 0 & -\Phi_6(h) & 0 & \Phi_6(h)A(h) & 0 & \Phi_6(h)B(h) & 0 \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous supposons que le bruit $w(k)$ appartient à un domaine moyennes fréquences, c-à-d : $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

D'après le lemme 6 du chapitre 2, la condition (a) est vérifiée pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ si :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2[0, \infty) \quad (4.10)$$

et avec des conditions initiales nulles :

$$e^{j\theta\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \leq 0, \quad \theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2 \quad (4.11)$$

Notons que (4.10) est vérifiée si $(e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)) \leq 0$, que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{C}^T(h)\hat{C}(h) & \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) \\ \hat{D}^T(h)\hat{C}(h) & \hat{D}^T(h)\hat{D}(h) - \gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.12)$$

Maintenant, nous allons proposer une condition suffisante pour (4.11).

Nous définissons les matrices symétriques $P(h)$ et $Q \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et la matrice $N(h)$ telles que $Q > 0$ et :

$$N(h) = \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P(h) - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.13)$$

Nous multiplions (4.13) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T N(h) \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall N(h) \in \aleph(h) \quad (4.14)$$

où :

$\aleph(h) =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P(h) - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}, P(h) = P^T(h), Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x} \right\}$$

En faisant la somme de (4.14) de $k = 0$ jusqu'à ∞ et en supposant que (4.7) est asymptotiquement stable et que $\hat{x}(0) = 0$, il vient :

$$\text{trace} \left\{ -e^{j\theta\omega} Q \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \right\} \geq 0 \quad (4.15)$$

Comme $Q > 0$, donc nous pouvons déduire que si l'équation (4.14) est vérifiée, alors l'inégalité (4.11) l'est également.

A partir du lemme de la S-procédure généralisée (page 43), les inégalités (4.12) et (4.14) impliquent :

$$\begin{bmatrix} \hat{C}^T(h)\hat{C}(h) & \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) \\ \hat{D}^T(h)\hat{C}(h) & \begin{pmatrix} \hat{D}^T(h)\hat{D}(h) \\ -\gamma^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & \begin{pmatrix} P(h) - \\ 2 \cos(\theta_\omega)Q \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

En multipliant (4.16) par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ à gauche et sa transposée à droite, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\hat{B}(h) + \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.17)$$

où : $\varepsilon_{11} = P(h) - 2 \cos \theta_\omega Q + e^{-j\theta_c}Q\hat{A}(h) + e^{j\theta_c}\hat{A}^T(h)Q + \hat{C}^T(h)\hat{C}(h)$

A partir de (4.7), nous avons :

$$\begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.18)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii) avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\hat{B}(h) + \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \Xi = \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix}.$$

L'inégalité (4.17) est satisfaite s'il existe des matrices $Z(h), X(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et $Y(h) \in R^{n_w \times 2n_x}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\hat{B}(h) + \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \hat{D}^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} Z(h) \\ Y(h) \\ X(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.19)$$

que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix}^T \Sigma(h) \begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(h) & \hat{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & 0 \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

En appliquant le lemme de Finsler encore une deuxième fois (ii et iii), il vient que l'inégalité (4.20) est faisable s'il existe une matrice $\Phi(h) \in R^{(6n_x+n_z+n_w) \times (n_z+2n_x)}$ telle que :

$$\Sigma(h) + He \left\{ \Phi(h) \begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(h) & \hat{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{B}(h) & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.22)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\Phi(h)$:

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2(h) & 0 \\ 0 & \Phi_3(h) & \Phi_4 \\ 0 & \Phi_5(h) & \Phi_4 \\ 0 & \Phi_6(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Nous pouvons aisément déduire que l'expression (4.22) est équivalente à (4.9) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

En suivant la même démarche analytique que pour le domaine moyennes fréquences, nous pouvons démontrer l'inégalité (4.9) pour des domaines basses et hautes fréquences.

Ceci complète la démonstration.

4.2.3 Étude de stabilité du système augmenté

L'idée fondamentale de cette section consiste à établir une condition suffisante pour (b).

Théorème 17. *Considérons le système (4.4) et le filtre décrit dans (4.6). Alors le système augmenté représenté par (4.7) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $S(h) = S^T(h) > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $\Phi_{s1}(h)$, $\Phi_{s2}(h) \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{s3}(h) \in R^{2n_x \times n_x}$ telles que :*

$$\Sigma_s(h) + He \{ \Upsilon_s(h) \} < 0 \quad (4.24)$$

$$\text{où : } \Sigma_s(h) = \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Upsilon_s(h) = \begin{bmatrix} -\Phi_{s1}(h) & 0 & \Phi_{s1}(h)A(h) & 0 \\ -\Phi_{s2}(h) & -\Phi_4 & \Phi_{s2}(h)A(h) + \Phi_4 B_f(h)C(h) & \Phi_4 A_f(h) \\ -\Phi_{s3}(h) & 0 & \Phi_{s3}(h)A(h) & 0 \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous supposons que $w(k) = 0$, il nous reste :

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(h)\hat{x}(k) \quad (4.25)$$

Nous réécrivons (4.25) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

En utilisant la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(k) = \hat{x}^T(k)S(h)\hat{x}(k) \quad (4.27)$$

Nous déduisons que le système (4.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive et symétrique $S(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.28)$$

Appliquant le lemme de Finsler (page 42) (i et iii), avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Xi = [-I_{2n_x} \quad \hat{A}(h)].$$

On en déduit que l'inégalité (4.28) est faisable s'il existe une matrice $\Phi_s(h) \in R^{4n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} + He \{ \Phi_s(h) [-I_{2n_x} \quad \hat{A}(h)] \} < 0 \quad (4.29)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\Phi_s(h)$:

$$\Phi_s(h) = \begin{bmatrix} \Phi_{s1}(h) & 0 \\ \Phi_{s2}(h) & \Phi_4 \\ \Phi_{s3}(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Il est immédiat que (4.29) est équivalente à (4.24) .

4.2.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Nous supposons dans cette section que les paramètres du filtre (4.6) sont inconnus. Par conséquent, les conditions des théorèmes 16 et 17 sont non linéaires.

Le théorème suivant présente des conditions suffisantes permettant de construire, dans un domaine fréquentiel prédéfini, le filtre optimal qui satisfait les deux contraintes (a) et (b).

Théorème 18. *Considérons le système (4.4), avec le bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini. Le filtre (4.6) qui assure la stabilité du système augmenté décrit dans (4.7) tout en garantissant un niveau d'atténuation H_∞ du bruit optimal peut être obtenu par résolution du problème d'optimisation (4.31) sous les contraintes LMI (4.32 - 4.37) pour des matrices $\Phi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\Phi_{2i} \in R^{n_z \times n_x}$, $\Phi_{ki} \in R^{n_x \times n_x}$, ($k = 3, 5$), $\Phi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{6i} \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $Z_i, X_i, P_i = P_i^T$, $Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $Y_i \in R^{n_w \times 2n_x}$, $S_i = S_i^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, Φ_{s1i} , $\Phi_{s2i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{s3i} \in R^{2n_x \times n_x}$, $a_{fi} \in R^{n_x \times n_x}$, $b_{fi} \in R^{n_x \times n_y}$, $c_{fi} \in R^{n_z \times n_x}$, $d_{fi} \in R^{n_z \times n_y}$, $\Delta_{ii} \in R^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$: $\Delta_{ii} = \Delta_{ii}^T$, $\Delta_{ij} \in R_{i < j}^{(6n_x + n_z + n_w) \times (6n_x + n_z + n_w)}$, $\Delta_{sii} \in R^{4n_x \times 4n_x}$: $\Delta_{sii} = \Delta_{sii}^T$, $\Delta_{sij} \in R_{i < j}^{4n_x \times 4n_x}$ pour $i, j, r \in \varsigma$:*

$$\min_{Q, S_i, P_i, Z_i, Y_i, \Phi_{ki}, (k=2,3,5,6), \Phi_1, \Phi_4, \Phi_{ski}, (k=1,2,3), a_{fi}, b_{fi}, c_{fi}, d_{fi}, \Delta_{ijl}, \Delta_{sijl}} \gamma \quad (4.31)$$

$$\Sigma_{ir} + He\{\Upsilon_{ii}\} - \Delta_{iir} < 0 \quad (4.32)$$

$$\Sigma_{ir} + \Sigma_{jr} + He\{\Upsilon_{ij}\} + He\{\Upsilon_{ji}\} - \Delta_{ijr} - \Delta_{ijr}^T < 0, (i < j) \quad (4.33)$$

$$\Sigma_{sir} + He\{\Upsilon_{sii}\} - \Delta_{sirr} < 0 \quad (4.34)$$

$$\Sigma_{sir} + \Sigma_{sjr} + He\{\Upsilon_{sij}\} + He\{\Upsilon_{sji}\} - \Delta_{sijr} - \Delta_{sijr}^T < 0, (i < j) \quad (4.35)$$

$$\Delta_r = \begin{bmatrix} \Delta_{11r} & \cdots & \Delta_{1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{\rho 1r} & \cdots & \Delta_{\rho\rho r} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.36)$$

$$\Delta_{sr} = \begin{bmatrix} \Delta_{s11r} & \cdots & \Delta_{s1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{s\rho 1r} & \cdots & \Delta_{s\rho\rho r} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.37)$$

où :

$$\Sigma_{ir} = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \Sigma_{23i} & Y_i^T & X_i^T \\ \bullet & \bullet & \Sigma_{33i} & 0 & -Z_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -Y_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P_r - X_i - X_i^T \end{bmatrix}$$

avec : $\Sigma_{23} = Q + Z_i^T$
 $\Sigma_{33} = P_i - 2 \cos(\theta_b)Q$
pour un domaine basses fréquences,
 $\Sigma_{23} = e^{j\theta_c}Q + Z_i^T$
 $\Sigma_{33} = P_i - 2 \cos(\theta_\omega)Q$
pour un domaine moyennes fréquences,
 $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2) / 2$ et $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1) / 2$.

$\Sigma_{23} = -Q + Z_i^T$
 $\Sigma_{33} = P_i + 2 \cos(\theta_h)Q$
pour un domaine hautes fréquences.

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\Phi_1 & -\Phi_{2i} & 0 & \Phi_1 H_i - d_{fi} C_j + \Phi_{2i} A_j & -c_{fi} & -d_{fi} D_j + \Phi_{2i} B_j & 0 \\ 0 & -\Phi_{3i} & -\Phi_4 & \Phi_{3i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \Phi_{3i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\Phi_{5i} & -\Phi_4 & \Phi_{5i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} & \Phi_{5i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ 0 & -\Phi_{6i} & 0 & \Phi_{6i} A_j & 0 & \Phi_{6i} B_j & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{sij} = \begin{bmatrix} -\Phi_{s1i} & 0 & \Phi_{s1i} A_j & 0 \\ -\Phi_{s2i} & -\Phi_4 & \Phi_{s2i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ -\Phi_{s3i} & 0 & \Phi_{s3i} A_j & 0 \end{bmatrix}$$

et $\Sigma_{sir} = \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & -S_i \end{bmatrix}$.

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont solutions des équations suivantes :

$$A_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, \quad B_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi},$$

$$C_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi}, \quad D_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}.$$

Preuve : Nous supposons que les inégalités (4.32 - 4.37) sont satisfaites. Nous définissons les fonctions suivantes :

$$A_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, \quad B_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi}, \quad C_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi},$$

$$D_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}, \quad X(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i X_i, \quad Z(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i Z_i,$$

$$Y(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i Y_i, \quad P(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i P_i, \quad S(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i S_i,$$

$$\text{et } \Phi_k(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i \Phi_{ki}, \quad k = 2, 3, 5, 6$$

Prenant en compte toutes les expressions ci-dessus, nous écrivons les conditions des théorèmes 16 et 17 en fonction de celles du théorème 18 comme suit :

$$\Sigma(h) + He\{\Upsilon(h)\} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Sigma_{ir} + He\{\Upsilon_{ij}\}) \quad (4.38)$$

$$\Sigma_s(h) + He\{\Upsilon_s(h)\} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Sigma_{sir} + He\{\Upsilon_{sij}\}) \quad (4.39)$$

Notons que :

$$\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j (\Xi_{ij}) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i^2 (\Xi_i) + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} h_i h_j \left(\frac{\Xi_{ij} + \Xi_{ji}}{2} \right) \quad (4.40)$$

En utilisant l'équation (4.40) et les conditions du théorème 18, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Sigma_{ir} + He\{\Upsilon_{ij}\}) &= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i^2 h_r^+ (\Sigma_{ir} + He\{\Upsilon_{ii}\}) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ \left(\frac{\Sigma_{ir} + He\{\Upsilon_{ij}\} + \Sigma_{jr} + He\{\Upsilon_{ji}\}}{2} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i^2 h_r^+ \Delta_{iir} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Delta_{ijr} + \Delta_{ijr}^T) \\ &= \sum_{r=1}^{\rho} h_r^+ \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_{11r} & \cdots & \Delta_{1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{\rho 1r} & \cdots & \Delta_{\rho\rho r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Sigma_{sir} + He\{\Upsilon_{sij}\}) &= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i^2 h_r^+ (\Sigma_{sir} + He\{\Upsilon_{sii}\}) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ \left(\frac{\Sigma_{sir} + He\{\Upsilon_{sij}\} + \Sigma_{sjr} + He\{\Upsilon_{sji}\}}{2} \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i^2 h_r^+ \Delta_{s iir} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{r=1}^{\rho} h_i h_j h_r^+ (\Delta_{s ijr} + \Delta_{s ijr}^T) \\ &= \sum_{r=1}^{\rho} h_r^+ \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_{s 11r} & \cdots & \Delta_{s 1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{s \rho 1r} & \cdots & \Delta_{s \rho\rho r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Nous en déduisons que les conditions des théorèmes 16 et 17 sont satisfaites et par suite le filtre obtenu est stable et optimal en termes de performances H_{∞} vis-à-vis des perturbations extérieures.

Remarque 8. Notons que si nous multiplions (4.32) et (4.33) à gauche et à droite par $[I_{n_z} \ 0]$ et sa transposée, nous en déduisons que $I - \Phi_1 - \Phi_1^T < 0$.

D'une manière similaire, si nous multiplions (4.32) et (4.33) à gauche et à droite par $[0_{n_x \times (n_x + n_z)} \ I_{n_z} \ 0]$ et sa transposée, nous en déduisons que $I - \Phi_4 - \Phi_4^T < 0$, ce qui implique que les matrices Φ_1 et Φ_4 sont définies positives et par conséquent inversibles. Donc les matrices $A_f(\sigma)$, $B_f(\sigma)$, $C_f(\sigma)$ et $D_f(\sigma)$ existent et peuvent être calculées.

4.2.5 Exemple de simulation

Nous présentons dans cette partie un exemple de simulation pour illustrer le résultat proposé dans la section précédente.

Nous considérons le système non linéaire à temps discret suivant avec deux règles floues, [30] :

Règle 1 : Si $x_1(k)$ est $N_1(x_1(k))$, alors :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.998 & 1 \\ -0.02 & 0.98 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = [1 \ 0] x(k) + w(k)$$

$$z(k) = [0 \ 1] x(k)$$

Règle 2 : Si $x_1(k)$ est $N_2(x_1(k))$, alors :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.908 & 1 \\ -0.02 & 0.98 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.02 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = [1 \ 0] x(k) + w(k)$$

$$z(k) = [0 \ 1] x(k)$$

Les fonctions d'appartenance $N_1(x_1(k))$ et $N_2(x_1(k))$ sont données par :

$$N_1(x_1(k)) = \begin{cases} \frac{x_1(k)+3}{3}, & \text{pour } -3 \leq x_1(k) \leq 0 \\ 0, & \text{pour } x_1(k) < -3 \\ \frac{3-x_1(k)}{3}, & \text{pour } 0 \leq x_1(k) \leq 3 \\ 0, & \text{pour } x_1(k) > 3 \end{cases}$$

et $N_2(x_1(k)) = 1 - N_1(x_1(k))$.

En résolvant le théorème (18) dans différents domaines fréquentiels, nous obtenons les paramètres suivants :

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} 0.5623 & 0.2749 \\ -0.4810 & 13.8717 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = 1.0031,$$

$$a_{f1} = \begin{bmatrix} 0.5335 & 0.8050 \\ -1.0368 & 13.0253 \end{bmatrix}, \quad a_{f2} = \begin{bmatrix} 0.4896 & 0.7909 \\ -0.9919 & 13.0331 \end{bmatrix},$$

$$b_{f1} = \begin{bmatrix} -0.0165 \\ -0.2731 \end{bmatrix}, \quad b_{f2} = \begin{bmatrix} -0.0156 \\ -0.2892 \end{bmatrix},$$

$$c_{f1} = [0.0092 \ -1.0656], \quad c_{f2} = [-0.0055 \ -1.0735],$$

$$d_{f1} = 0.0083, \quad d_{f2} = -0.0097.$$

dans le domaine basses fréquences ($|\theta| \leq 0.1$), avec un indice de performance $H_\infty : \gamma = 0.0253$.

$$\Phi_4 = \begin{bmatrix} 0.3486 & 0.1152 \\ -0.7714 & 9.3703 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = 1.0175,$$

$$a_{f1} = \begin{bmatrix} 0.3174 & 0.4566 \\ -1.0393 & 8.4328 \end{bmatrix}, \quad a_{f2} = \begin{bmatrix} 0.2824 & 0.4390 \\ -1.0051 & 8.3751 \end{bmatrix},$$

$$b_{f1} = \begin{bmatrix} -0.0270 \\ -0.0864 \end{bmatrix}, \quad b_{f2} = \begin{bmatrix} -0.0328 \\ -0.1323 \end{bmatrix},$$

$$c_{f1} = [0.0902 \ -1.0028], \quad c_{f2} = [0.0418 \ -1.0298],$$

$$d_{f1} = 0.0862, \quad d_{f2} = 0.0385.$$

dans le domaine moyennes fréquences ($0.01 \leq |\theta| \leq 0.14$), avec un indice de performance $H_\infty : \gamma = 0.1304$.

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= \begin{bmatrix} 1.0560 & -0.9383 \\ 0.4206 & 27.4829 \end{bmatrix}, & \Phi_1 &= 1.0014, \\ a_{f1} &= \begin{bmatrix} 1.0533 & 0.1535 \\ -0.6409 & 27.2344 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} 0.9509 & 0.0682 \\ -0.8291 & 27.1864 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.0500 \\ -0.5172 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} 0.0535 \\ -0.5366 \end{bmatrix}, \\ c_{f1} &= [0.0043 \quad -1.0325], & c_{f2} &= [0.0199 \quad -1.0645], \\ d_{f1} &= -0.0033, & d_{f2} &= -0.0233. \end{aligned}$$

dans le domaine hautes fréquences ($|\theta| \geq 0.24$), avec un indice de performance $H_\infty : \gamma = 0.0686$.

$$\begin{aligned} \Phi_4 &= \begin{bmatrix} 0.1645 & -0.4571 \\ -0.5191 & 5.1894 \end{bmatrix}, & \Phi_1 &= 1.0205, \\ a_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.1436 & -0.2878 \\ -0.5422 & 4.5863 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} 0.1149 & -0.2897 \\ -0.6152 & 4.5740 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0297 \\ 0.0798 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0431 \\ -0.0403 \end{bmatrix}, \\ c_{f1} &= [0.1384 \quad -1.0051], & c_{f2} &= [0.0158 \quad -1.0182], \\ d_{f1} &= 0.1386, & d_{f2} &= 0.0152. \end{aligned}$$

sur toute la plage de fréquence, avec un indice de performance $H_\infty : \gamma = 0.2236$.

Une comparaison des valeurs du niveau de performance H_∞ atteintes au moyen du théorème 18 et les théorèmes 2 – 5 proposés dans [30], est donnée dans le tableau 4.1.

Θ	Théorème 18	Théorèmes 2 – 5 [30]
$ \theta \leq 0.1$	0.0253	0.1695
$ \theta \leq 0.8$	0.2145	infaisable
$0.01 \leq \theta \leq 0.14$	0.1304	0.3880
$0.5 \leq \theta \leq 1.5$	0.0032	infaisable
$ \theta \geq 0.24$	0.0686	0.0898
fréquence complète	0.2236	infaisable

TABLE 4.1 – Comparaison des gain ℓ_2 obtenus dans différents domaines fréquentiels.

Le tableau 4.1 montre que les performances en termes d'atténuation du bruit sont meilleures avec notre méthode dans les différents domaines fréquentiels. En plus les conditions de synthèse de filtre H_∞ proposées dans [30] ne sont pas faisables dans tous les domaines fréquentiels et cela confirme que notre résultat est moins conservatif.

Pour $|\theta| \leq 0.1$, les figures 1 et 2 montrent respectivement les évolutions des erreurs d'estimation et les performances H_∞ du système augmenté, en utilisant le théorème 18 et les conditions de synthèse de filtres H_∞ proposées dans [30]. Les courbes en pointillés désignent le résultat obtenu

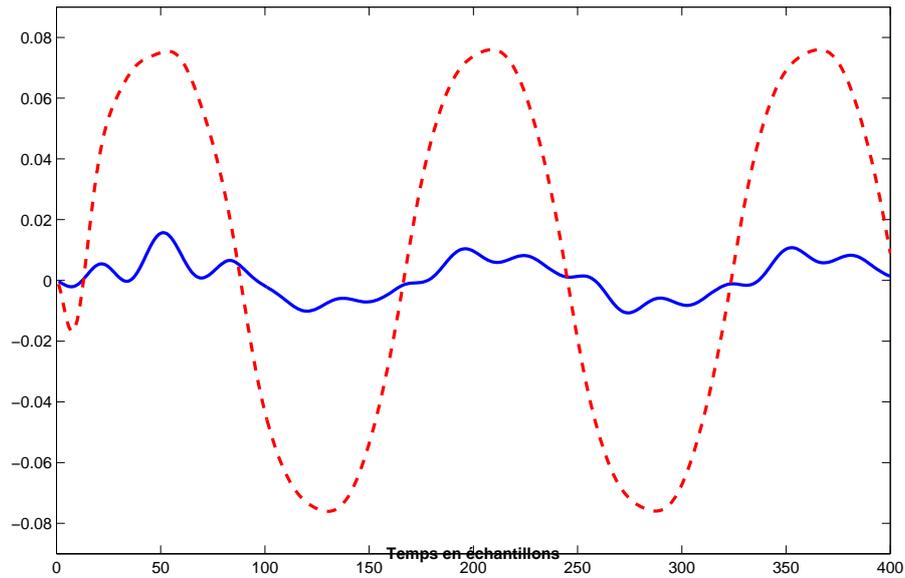


FIGURE 4.1 – L'erreur d'estimation $e(k)$ pour $|\theta| \leq 0.1$, $w(k) = \sin(0.04k)$. Courbe continue : théorème 18, courbe en pointillé : théorème 3 [30]

dans [30], et les courbes continues correspondent à notre résultat. Les figures 3 et 4 montrent les résultats obtenus dans le cas où $0.01 \leq |\theta| \leq 0.14$.

Les simulations sont faites avec $w(k) = \sin(0.04k)$ pour $|\theta| \leq 0.1$ et $w(k) = \sin(0.1k)$ pour $0.01 \leq |\theta| \leq 0.14$.

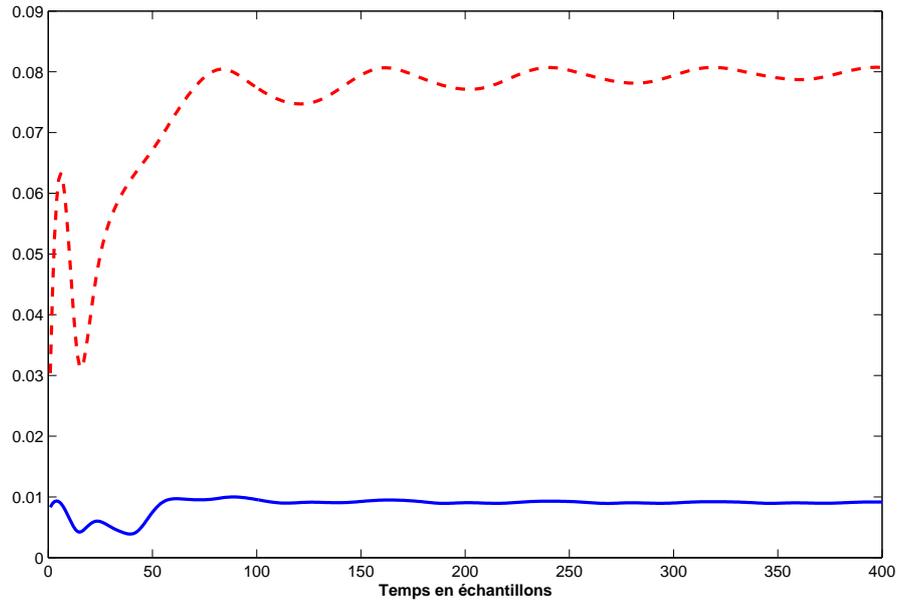


FIGURE 4.2 – Valeur de $\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$ pour $|\theta| \leq 0.1$, $w(k) = \sin(0.04k)$.
 Courbe continue : théorème 18, courbe en pointillé : théorème 3 [30]

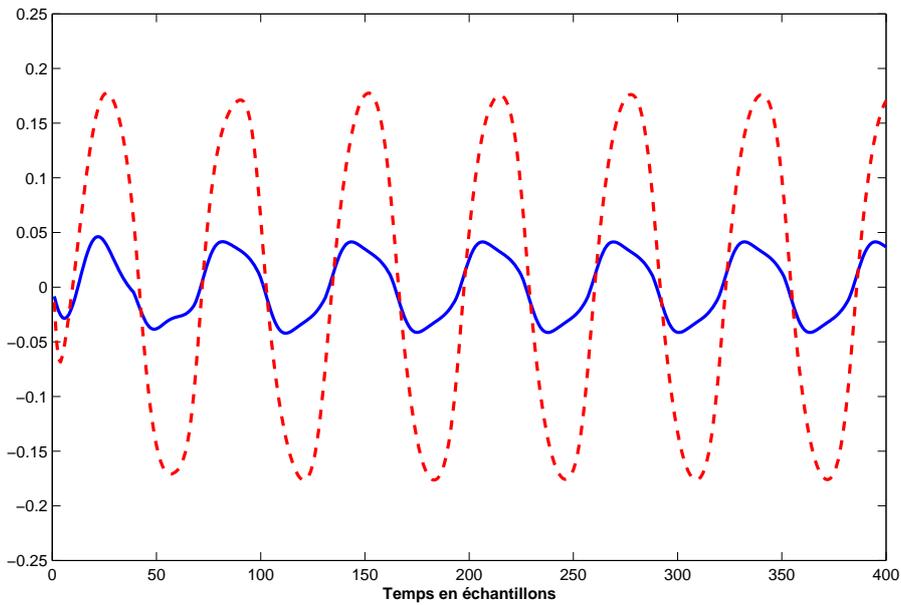


FIGURE 4.3 – L'erreur d'estimation $e(k)$ pour $0.01 \leq |\theta| \leq 0.14$, $w(k) = \sin(0.1k)$. Courbe continue : théorème 18, courbe en pointillé : théorème 4 [30]

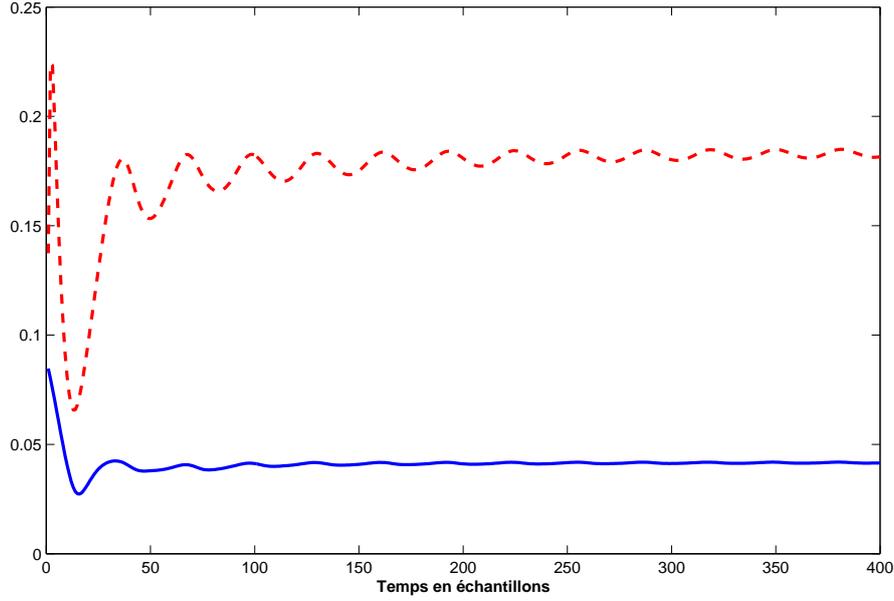


FIGURE 4.4 – Valeur de $\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$ pour $0.01 \leq |\theta| \leq 0.14$, $w(k) = \sin(0.1k)$. Courbe continue : théorème 18, courbe en pointillé : théorème 4 [30]

4.3 Filtrage H_{∞} des systèmes TS à retard

Dans cette section, notre attention s’est portée sur le filtrage H_{∞} , dans un domaine fréquentiel fini, pour une classe de systèmes non linéaires discrets de type TS où le vecteur d’état est affecté par un retard constant.

4.3.1 Formulation du problème

Considérons le système non linéaire, à temps discret et à retard constant sur l’état, représenté par le modèle TS suivant :

Règle i : Si $\zeta_1(k)$ est N_{i1} et ... et $\zeta_p(k)$ est N_{ip} , alors :

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= A_i x(k) + A_{di} x(k-\tau) + B_i w(k) \\
 y(k) &= C_i x(k) + C_{di} x(k-\tau) + D_i w(k) \\
 z(k) &= H_i x(k) + H_{di} x(k-\tau) + L_i w(k) \\
 x(k) &= \Psi(k), k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$i = 1, 2, \dots, \rho$, on désigne $\varsigma = \{1, 2, \dots, \rho\}$,

où $x(k) \in R^{n_x}$ est le vecteur d’état, $y(k) \in R^{n_y}$ désigne la sortie mesurée, $z(k) \in R^{n_z}$ est le signal à estimer, $w(k) \in R^{n_w}$ désigne les perturbations extérieures, supposées de type $\ell_2 [0, \infty)$ et appartenir à un domaine fréquentiel fini. $(A_i, A_{di}, B_i, C_i, C_{di}, D_i, H_i, H_{di}, L_i)$ sont des matrices constantes et connues. $\tau \in Z^+$ désigne le retard constant, et $\Psi(k)$ est le vecteur des conditions initiales. Les ensembles flous sont N_{ij} , ρ est le nombre de règles si-alors, et $\zeta(k) = [\zeta_1(k) \ \zeta_2(k) \ \dots \ \zeta_p(k)]$ est le vecteur des variables de prémisse, supposées mesurables.

Les fonctions d’activation, notées par $h_i(\zeta(k))$, sont définies en fonction du vecteur $\zeta(k)$ comme

suit :

$$h_i(\zeta(k)) = \frac{\prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(k))}{\sum_{i=1}^{\rho} \prod_{j=1}^p N_{ij}(\zeta_j(k))} \quad (4.42)$$

où $N_{ij}(\zeta_j(k))$ désigne le degré d'appartenance de $\zeta_j(k)$ à la valeur floue N_{ij} .

Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe :

$$h_i(\zeta(k)) \geq 0, \quad (i \in \varsigma) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\rho} h_i(\zeta(k)) = 1. \quad (4.43)$$

Dans la suite, h_i et h_i^+ désignent respectivement $h_i(\zeta(k))$ et $h_i(\zeta(k+1))$.

Après défuzzification par la méthode du centre de gravité, le modèle global du système (4.41) est donné par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(h)x(k) + A_d(h)x(k-\tau) + B(h)w(k), \\ y(k) &= C(h)x(k) + C_d(h)x(k-\tau) + D(h)w(k), \\ z(k) &= H(h)x(k) + H_d(h)x(k-\tau) + L(h)w(k). \end{aligned} \quad (4.44)$$

où :

$$\begin{aligned} A(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_i, & A_d(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_{di}, & B(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i B_i, \\ C(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_i, & C_d(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_{di}, & D(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i D_i, \\ H(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i H_i, & H_d(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i H_{di}, & \text{et } L(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i L_i. \end{aligned}$$

Nous supposons que le filtre possède le même vecteur des variables de prémisses que le système (4.44) et son modèle d'état est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f(h)x_f(k) + B_f(h)y(k), \\ z_f(k) &= C_f(h)x_f(k) + D_f(h)y(k) \end{aligned} \quad (4.45)$$

où :

$$\begin{aligned} A_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_{fi}, & B_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i B_{fi}, & C_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_{fi}, \\ \text{et } D_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i D_{fi}. \end{aligned}$$

En considérant l'état augmenté $\hat{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ et l'erreur d'estimation $e(k) = z(k) - z_f(k)$, nous obtenons le système d'état augmenté comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \hat{A}(h)\hat{x}(k) + \hat{A}_d(h)E\hat{x}(k-\tau) + \hat{B}(h)w(k) \\ e(k) &= \hat{C}(h)\hat{x}(k) + \hat{C}_d(h)E\hat{x}(k-\tau) + \hat{D}(h)w(k) \end{aligned} \quad (4.46)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}(h) &= \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_f(h)C(h) & A_f(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fj}C_i & A_{fi} \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_d(h) &= \begin{bmatrix} A_d(h) \\ B_f(h)C_d(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} A_{di} \\ B_{fj}C_{di} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{B}(h) &= \begin{bmatrix} B(h) \\ B_f(h)D(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} B_i \\ B_{fj}D_i \end{bmatrix}, \\ \hat{C}(h) &= [H(h) - D_f(h)C(h) \quad -C_f(h)] = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j [H_i - D_{fj}C_i \quad -C_{fi}], \\ \hat{C}_d(h) &= H_d(h) - D_f(h)C_d(h) = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j (H_{di} - D_{fj}C_{di}), \\ \hat{D}(h) &= -D_f(h)D(h) = -\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j D_{fj}D_i, \quad \text{et} \quad E = [I_{n_x} \quad 0_{n_x \times n_x}].\end{aligned}$$

Le but est de trouver un filtre de la forme (4.45) tel que :

- (a) Le gain ℓ_2 du système (4.46) est inférieur ou égal à γ , un scalaire positif prédéfini, dans le domaine fréquentiel fini du bruit $w(k)$ et avec des conditions initiales nulles ($\hat{x}(0) = 0$), c-à-d :

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (4.47)$$

- (b) Le système augmenté décrit dans (4.46) est asymptotiquement stable quand $w(k) = 0$.

Nous désignons par θ la fréquence du bruit $w(k)$, son intervalle Θ est supposé connu, voir le tableau 2.2, page 38.

4.3.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Dans cette section, nous supposons que les paramètres du filtre sont connus. Nous développons dans le théorème suivant des conditions suffisantes pour (a).

Théorème 19. *Considérons le système (4.4) avec le bruit $w(k)$, supposé appartenir à un domaine fréquentiel fini et connu et le filtre décrit dans (4.6). Soit γ un scalaire positif donné et (r, s) deux entiers positif tels que $\tau = sr$. Le système à état augmenté (4.7) possède un niveau de performance H_∞ inférieur ou égal à γ s'il existe des matrices $\Phi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\Phi_2(h) \in R^{n_z \times n_x}$, $\Phi_j(h) \in R^{n_x \times n_x}$, ($j = 3, 5$), $\Phi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_6(h) \in R^{((4+2s)n_x + n_w) \times n_x}$, $P(h) = P^T(h)$, $Q = Q^T > 0$, $F(h)$, $N(h)$, $G = G^T > 0$, $S(h) = S(h)^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $V(h) \in R^{n_w \times 2n_x}$, $M(h) \in R^{2s n_x \times 2n_x}$, $R_1 = R_1^T \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_2 \in R^{2n_x \times 2(s-1)n_x}$, $R_3 = R_3^T \in R^{2(s-1)n_x \times 2(s-1)n_x}$, telles que :*

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.48)$$

$$\Pi(h) + He \{ \Upsilon(h) \} < 0 \quad (4.49)$$

où :

$$\Pi(h) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \Pi_{23}(h) & M^T(h) & V^T(h) & N^T(h) \\ \bullet & \bullet & \Pi_{33}(h) & GE_3 + R_2 E_2 & 0 & -F(h) - r^2 G \\ \bullet & \bullet & \bullet & E_2^T R_3 E_2 - R - E_3^T G E_3 & 0 & -M(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I & -V(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} S(h^+) + r^2 G - P(h^+) \\ -N(h) - N(h)^T \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

avec : $\Pi_{23} = Q + F^T(h)$
 $\Pi_{33} = (r^2 - 1)G + R_1 - S(h) + P(h) - 2\cos(\theta_b)Q$

pour un domaine basses fréquences, $|\theta| \leq \theta_b$

$$\Pi_{23} = e^{j\theta_c}Q + F^T(h)$$

$$\Pi_{33} = (r^2 - 1)G + R_1 - S(h) + P(h) - 2\cos(\theta_\omega)Q$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$

$$\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2 \text{ et } \theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2.$$

$$\Pi_{23} = -Q + F^T(h)$$

$$\Pi_{33} = (r^2 - 1)G + R_1 - S(h) + P(h) + 2\cos(\theta_h)Q$$

pour un domaine hautes fréquences, $|\theta| \geq \theta_h$

$$\Upsilon(h) = \begin{bmatrix} -\Phi_1 & -\Phi_2(h) & 0 & \Phi_1 H(h) - d_f(h)C(h) + \Phi_2(h)A(h) & -c_f(h) \\ 0 & -\Phi_3(h) & -\Phi_4 & \Phi_3(h)A(h) + b_f(h)C(h) & a_f(h) \\ 0 & -\Phi_5(h) & -\Phi_4 & \Phi_5(h)A(h) + b_f(h)C(h) & a_f(h) \\ 0 & -\Phi_6(h) & 0 & \Phi_6(h)A(h) & \Phi_6(h)A_d(h)E_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\begin{array}{l} \Phi_1 H_d(h)E_1 - d_f(h)C_d(h)E_1 \\ + \Phi_2(h)A_d(h)E_1 \\ \Phi_3(h)A_d(h)E_1 + b_f(h)C_d(h)E_1 \\ \Phi_5(h)A_d(h)E_1 + b_f(h)C_d(h)E_1 \\ \Phi_6(h)B(h) \\ 0 \end{array} \right) & \Phi_1 L(h) - d_f(h)D(h) + \Phi_2(h)B(h) & 0 \\ & \Phi_3(h)B(h) + b_f(h)D(h) & 0 \\ & \Phi_5(h)B(h) + b_f(h)D(h) & 0 \\ & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times 2(s-1)n_x} & I_{n_x} & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} I_{2(s-1)n_x} & 0_{2(s-1)n_x \times 2n_x} \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} I_{2n_x} & 0_{2n_x \times 2(s-1)n_x} \end{bmatrix}.$$

Preuve : Nous supposons que le bruit appartient à un domaine moyennes fréquences, nous allons démontrer l'inégalité (4.49) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

D'après le lemme 6 du chapitre 2, la condition (a) est vérifiée pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ si :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2[0, \infty) \quad (4.50)$$

et, avec des conditions initiales nulles :

$$e^{j\theta_\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \leq 0 \quad (4.51)$$

En utilisant la technique de partitionnement du retard, nous définissons le vecteur suivant :

$$j(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}^T(k-r) \\ \vdots \\ \hat{x}^T(k-sr) \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

où r et s sont deux entiers positifs tels que $\tau = sr$.

Nous définissons également : $\Delta_x = \hat{x}(k+1) - \hat{x}(k)$.

Nous considérons la matrice de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(k) = \hat{x}^T(k)S(h)\hat{x}(k) + \sum_{i=k-r}^{k-1} j^T(i+r)Rj(i+r) + r \sum_{i=-r}^{-1} \sum_{i=k+i}^{k-1} \Delta_x^T(j)G\Delta_x(j) \quad (4.53)$$

où $S(h)$, R et G sont des matrices définies positives et symétriques de dimensions appropriées.

En calculant la variation de cette fonction le long des trajectoires du système augmenté (4.46), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= \hat{x}^T(k+1)S(h^+)\hat{x}^T(k+1) - \hat{x}^T(k)S(h)\hat{x}^T(k) + J^T(k+1)RJ(k+1) - J^T(k)RJ(k) \\ &\quad + r^2\kappa_x^T(k)G\kappa_x(k) - r \sum_{i=-r}^{-1} \kappa_x^T(k+i)G\kappa_x(k+i) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Notons que : $J(k+t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ E_2 J(k) \end{bmatrix}$

En utilisant l'inégalité de Jensen (page 43), $\Delta V(k)$ est majorée comme suit :

$$\Delta V(k) \leq \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

où : $\varpi = \begin{bmatrix} S(h^+) + r^2G & -r^2G & 0 \\ \bullet & R_1 + (r^2 - 1)G - S(h) & GE_3 + R_2E_2 \\ \bullet & \bullet & E_2^T R_3 E_2 - R - E_3^T G E_3 \end{bmatrix}$.

Nous définissons l'indice de performance H_∞ comme suit :

$$\mathfrak{S} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)) \quad (4.56)$$

Avec des conditions initiales nulles et $V_\infty > 0$, nous avons :

$$\mathfrak{S} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + \Delta V(k)) \quad (4.57)$$

Ainsi la contrainte (4.50) est respectée si :

$$(e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + \Delta V(k)) \leq 0 \quad (4.58)$$

Nous réécrivons l'inégalité ci-dessus sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \hat{C}^T(h) & 0 \\ E_1^T \hat{C}_d^T(h) & 0 \\ \hat{D}^T(h) & I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T(h) & 0 \\ E_1^T \hat{C}_d^T(h) & 0 \\ \hat{D}^T(h) & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Nous définissons ensuite les matrices $P(h) = P^T(h)$, $Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et U , telles que et :

$$U = \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & P(h) - 2\cos(\theta_w)Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.60)$$

avec : $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$ et $\theta_w = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

En multipliant à gauche et à droite (4.60) par $[\hat{x}^T(k) \ j^T(k) \ w^T(k)]$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T U \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \end{bmatrix} > 0, \quad \forall U \in \mathfrak{K} \quad (4.61)$$

où : $\mathfrak{K} =$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \hat{A}^T(h) & I_{2n_x} \\ E_1^T \hat{A}_d^T(h) & 0 \\ \hat{B}^T(h) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & \begin{pmatrix} P(h) \\ 2\cos(\theta_w)Q \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}^T(h) & I_{2n_x} \\ E_1^T \hat{A}_d^T(h) & 0 \\ \hat{B}^T(h) & 0 \end{bmatrix}^T, P(h) = P^T(h), Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x} \right\}$$

En faisant la somme de (4.61) de $k = 0$ jusqu'à ∞ , et en supposant que (4.46) est asymptotiquement stable et que $\hat{x}(0) = 0$, il vient :

$$\text{trace} \left\{ -e^{j\theta_w} Q \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \right\} \geq 0 \quad (4.62)$$

Comme $Q > 0$, donc on peut déduire que l'inégalité (4.51) est vérifiée.

A partir du lemme de la S-procédure généralisée (page 43), les inégalités (4.59) et (4.61) impliquent :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{C}^T(h) & 0 \\ E_1^T \hat{C}_d^T(h) & 0 \\ \hat{D}^T(h) & I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T(h) & 0 \\ E_1^T \hat{C}_d^T(h) & 0 \\ \hat{D}^T(h) & I_{n_w} \end{bmatrix}^T \\ & + \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \hat{A}^T(h) & I_{2n_x} \\ E_1^T \hat{A}_d^T(h) & 0 \\ \hat{B}^T(h) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P(h) - 2\cos(\theta_w)Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}^T(h) & I_{2n_x} \\ E_1^T \hat{A}_d^T(h) & 0 \\ \hat{B}^T(h) & 0 \end{bmatrix}^T < 0 \quad (4.63) \end{aligned}$$

En multipliant à gauche et à droite l'inégalité ci-dessus par $[\hat{x}^T(k) \ j^T(k) \ w^T(k)]$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \Sigma(h) \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (4.64)$$

avec :

$$\Sigma(h) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \hat{C}^T(h)\hat{D}(h) + e^{-j\theta_c}Q\hat{B}(h) & -r^2G \\ \bullet & \Sigma_{22} & E_1^T \hat{C}_d^T(h)\hat{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & \hat{D}(h)^T \hat{D}(h) - \gamma^2 I_{n_w} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & S(h^+) + r^2G - P(h^+) \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{11} = e^{-j\theta_c}Q\hat{A}(h) + e^{j\theta_c}\hat{A}^T(h)Q + R_1 + (r^2 - 1)G - S(h) + P(h) + \hat{C}^T(h)\hat{C}(h) - 2\cos(\theta_w)Q$$

$$\Sigma_{12} = \hat{C}^T(h)\hat{C}_d(h)E_1 + GE_3 + R_2E_2 + e^{-j\theta_c}Q\hat{A}_d(h)E_1$$

$$\Sigma_{22} = E_2^T R_3 E_2 - R - E_3^T G E_3 + E_1^T \hat{C}_d^T(h)\hat{C}_d(h)E_1.$$

A partir de (4.46), on a :

$$[\hat{A}(h) \quad \hat{A}_d(h)E_1 \quad \hat{B}(h) \quad -I_{2n_x}] \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.65)$$

En appliquant le lemme de Finsler (page 42) (i, iii), avec :

$$\Xi = [\hat{A}(h) \quad \hat{A}_d(h)E_1 \quad \hat{B}(h) \quad -I_{2n_x}], \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ j(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \Upsilon = \Sigma(h)$$

Il vient que (4.64) est équivalente à :

$$\Sigma(h) + He \left\{ \begin{bmatrix} F(h) \\ M(h) \\ V(h) \\ N(h) \end{bmatrix} [\hat{A}(h) \quad \hat{A}_d(h)E_1 \quad \hat{B}(h) \quad -I_{2n_x}] \right\} < 0 \quad (4.66)$$

où $F(h)$, $M(h)$, $V(h)$ et $N(h)$ sont des matrices variables de dimensions appropriées.

Nous réécrivons (4.66) comme :

$$\begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{C}_d(h)E_1 & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix}^T \Pi(h) \begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{C}_d(h)E_1 & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.67)$$

où $\Pi(h)$ est définie dans le théorème (21).

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(h) & \hat{C}_d(h)E_1 & \hat{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) & 0 \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} \hat{C}(h) & \hat{C}_d(h)E_1 & \hat{D}(h) & 0 \\ \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{2sn_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

En appliquant le lemme de Finsler encore une deuxième fois (ii et iii), il vient que l'inégalité (4.67) est faisable s'il existe une matrice $\Phi(h) \in R^{(6n_x+2rn_x+n_z+n_w) \times (n_z+2n_x)}$ telle que :

$$\Pi_m(h) + He \left\{ \Phi(h) \begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \hat{C}(h) & \hat{C}_d(h)E_1 & \hat{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 & \hat{B}(h) & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.69)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\Phi(h)$:

$$\Phi(h) = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2(h) & 0 \\ 0 & \Phi_3(h) & \Phi_4 \\ 0 & \Phi_5(h) & \Phi_4 \\ 0 & \Phi_6(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Ensuite nous pouvons facilement vérifier que (4.69) est équivalente à (4.49) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

En suivant la même démarche analytique que pour le domaine moyennes fréquences, nous pouvons démontrer l'inégalité (4.49) pour des domaines basses et hautes fréquences.

Ceci complète la démonstration.

4.3.3 Étude de stabilité du système augmenté

Nous proposons ci-après une conditions suffisante pour établir la condition (b).

Théorème 20. *Considérons le système (4.44) et le filtre décrit dans (4.45). Soit (r, s) deux entiers positif tels que $\tau = sr$. Alors le système augmenté représenté par (4.46) est asymptotiquement stable s'il existe $\Phi_{s1}(h), \Phi_{s2}(h) \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{s3}(h) \in R^{(2n_x + 2sn_x) \times n_x}$, des matrices définies positives $S_s(h) = S_s^T(h), G_s = G_s^T \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_s = R_s^T \in R^{2sn_x \times 2sn_x}$, telles que :*

$$\Pi_s(h) + He\{\Upsilon_s(h)\} < 0 \quad (4.71)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{s1} & R_{s2} \\ R_{s2}^T & R_{s3} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.72)$$

où :

$$\Upsilon_s(h) = \begin{bmatrix} -\Phi_{s1}(h) & -\Phi_4 & \Phi_{s1}(h)A(h) + \Phi_4 B_f(h)C(h) & \Phi_4 A_f(h) & \begin{pmatrix} \Phi_{s1}(h)A_d(h)E_1 \\ +\Phi_4 B_f(h)C_d(h)E_1 \end{pmatrix} & 0 \\ -\Phi_{s2}(h) & -\Phi_4 & \Phi_{s2}(h)A(h) + \Phi_4 B_f(h)C(h) & \Phi_4 A_f(h) & \begin{pmatrix} \Phi_{s2}(h)A_d(h)E_1 \\ +\Phi_4 B_f(h)C_d(h)E_1 \end{pmatrix} & 0 \\ -\Phi_{s3}(h) & 0 & \Phi_{s3}(h)A(h) & 0 & \Phi_{s3}(h)A_d(h)E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Pi_s(h) = \begin{bmatrix} S_s(h^+) + r^2 G_s & -r^2 G_s & 0 \\ \bullet & R_{s1} + (r^2 - 1)G_s - S_s(h) & G_s E_3 + R_{s2} E_2 \\ \bullet & \bullet & E_2^T R_{s3} E_2 - R_s - E_3^T G_s E_3 \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous supposons que $w(k) = 0$, il nous reste :

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}(h)\hat{x}(k) + \hat{A}_d(h)E\hat{x}(k-\tau) \quad (4.73)$$

que nous écrivons sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ \hat{x}(k-\tau) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.74)$$

Nous considérons la matrice de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_s(k) = \hat{x}^T(k)S_s(h)\hat{x}(k) + \sum_{i=k-r}^{k-1} j^T(i+r)R_s j(i+r) + r \sum_{i=-r}^{-1} \sum_{i=k+i}^{k-1} \Delta_x^T(j)G_s \Delta_x(j) \quad (4.75)$$

Comme il est démontré dans la section précédente, nous avons :

$$\Delta V_s(k) \leq \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix}^T \Pi_s(h) \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

où $\Pi_s(h)$ est définie dans le théorème (20) .

Ainsi le système (4.46) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $S_s(h), G_s \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_s \in R^{2sn_x \times 2sn_x}$ définies positives telles que :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix}^T \Pi_s(h) \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4.77)$$

Nous récrivons (4.74) comme suit :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.78)$$

En appliquant le lemme de Finsler (i, iii) , avec :

$$\Xi = \begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \\ j(k) \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \Upsilon = \Pi_s(h)$$

(4.77) est vérifiée s'il existe une matrice $\Phi_s(h) \in R^{(4n_x+2sn_x) \times 2n_x}$ telle que :

$$\Pi_s(h) + He \left\{ \Phi_s(h) \begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \hat{A}(h) & \hat{A}_d(h)E_1 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (4.79)$$

Nous considérons la structure suivante de $\Phi_s(h)$:

$$\Phi_s(h) = \begin{bmatrix} \Phi_{s1}(h) & 0 \\ \Phi_{s2}(h) & \Phi_4 \\ \Phi_{s3}(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Il est immédiat que (4.79) est équivalente à (4.71).

4.3.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Le théorème suivant présente des conditions suffisantes permettant de construire le filtre optimal , qui vérifie (a) et (b).

Théorème 21. *Considérons le système (4.44), avec le bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini et connu. Soit (r, s) deux entiers positif tels que $\tau = sr$. Il existe un filtre stable de la forme (4.45) tel que le niveau d'atténuation H_∞ du bruit est optimal si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (4.81) sous les contraintes LMI (4.82 - 4.89) pour des matrices $\Phi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\Phi_{2i} \in R^{n_z \times n_x}$, $\Phi_{ji} \in R^{n_x \times n_x}$, ($j = 3, 5$), $\Phi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{6i} \in R^{((4+2s)n_x+n_w) \times n_x}$, $\Phi_{s1i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\Phi_{s2i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s3i} \in R^{(2sn_x+2n_x) \times n_x}$, $P_i = P_i^T$, $Q = Q^T > 0$, F_i , N_i , $G = G^T > 0$, $G_s = G_s^T > 0$, $S_i = S_i^T > 0$, $S_{si} = S_{si}^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $V_i \in R^{n_w \times 2n_x}$, $M_i \in H^{2sn_x \times 2n_x}$, $R_1 = R_1^T$, $R_{s1} = R_{s1}^T \in R^{2n_x \times 2n_x}$, R_2 , $R_{s2} \in R^{2n_x \times 2(s-1)n_x}$, $R_3 = R_3^T$, $R_{s3} = R_{s3}^T \in R^{2(s-1)n_x \times 2(s-1)n_x}$, $a_{fi} \in R^{n_x \times n_x}$, $b_{fi} \in R^{n_x \times n_y}$, $c_{fi} \in R^{n_z \times n_x}$, $d_{fi} \in R^{n_z \times n_y}$, $\Delta_{ii} \in R^{(6n_x+2sn_x+n_z+n_w) \times (6n_x+2sn_x+n_z+n_w)}$: $\Delta_{ii} = \Delta_{ii}^T$, $\Delta_{ij} \in R_{i < j}^{(6n_x+2sn_x+n_z+n_w) \times (6n_x+2sn_x+n_z+n_w)}$, $\Delta_{sii} \in R^{4n_x+2sn_x \times 4n_x+2sn_x}$: $\Delta_{sii} = \Delta_{sii}^T$, $\Delta_{sij} \in R_{i < j}^{4n_x+2sn_x \times 4n_x+2sn_x}$:*

$$\min_{Q, S_i, S_{si}, P_i, F_i, N_i, G, G_s, V_i, M_i, R_k, R_{sk}, (k = 1, 2, 3), \varphi_1, \varphi_4, \varphi_{ki}, (k = 2, 3, 5, 6), \varphi_{ski}, (k = 1, 2, 3), a_{fi}, b_{fi}, c_{fi}, d_{fi}, \Delta_{ijl}, \Delta_{sijl}} \gamma \quad (4.81)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2^T & R_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (4.82)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{s1} & R_{s2} \\ R_{s2}^T & R_{s3} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.83)$$

$$\Pi_{ir} + He\{\Upsilon_{ii}\} - \Delta_{iir} < 0 \quad (4.84)$$

$$\Pi_{ir} + \Pi_{jr} + He\{\Upsilon_{ij}\} + He\{\Upsilon_{ji}\} - \Delta_{ijr} - \Delta_{ijr}^T < 0, (i < j) \quad (4.85)$$

$$\Pi_{sir} + He\{\Upsilon_{sii}\} - \Delta_{siir} < 0 \quad (4.86)$$

$$\Pi_{sir} + \Pi_{sjr} + He\{\Upsilon_{sij}\} + He\{\Upsilon_{sji}\} - \Delta_{sijr} - \Delta_{sijr}^T < 0, (i < j) \quad (4.87)$$

$$\Delta_r = \begin{bmatrix} \Delta_{11r} & \cdots & \Delta_{1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{\rho 1r} & \cdots & \Delta_{\rho\rho r} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.88)$$

$$\Delta_{sr} = \begin{bmatrix} \Delta_{s11r} & \cdots & \Delta_{s1\rho r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{s\rho 1r} & \cdots & \Delta_{s\rho\rho r} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.89)$$

pour $i, j, r \in \mathcal{S}$

où :

$$\Pi_{ir} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & \Pi_{23i} & M_i^T & V_i^T & N_i^T \\ \bullet & \bullet & \Pi_{33i} & GE_3 + R_2 E_2 & 0 & -F_i - r^2 G \\ \bullet & \bullet & \bullet & E_2^T R_3 E_2 - R - E_3^T G E_3 & 0 & -M_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I & -V_i \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_r + r^2 G - P_r - N_i - N_i^T \end{bmatrix}$$

avec : $\Pi_{23i} = Q + F_i^T$
 $\Pi_{33i} = (r^2 - 1)G + R_1 - S_i + P_i - 2\cos(\theta_b)Q$
pour un domaine de basses fréquences, $|\theta| \leq \theta_b$

$\Pi_{23i} = e^{j\theta_c}Q + F_i^T$
 $\Pi_{33i} = (r^2 - 1)G + R_1 - S_i + P_i - 2\cos(\theta_\omega)Q$
pour un domaine de moyennes fréquences, $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$
 $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$ et $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

$\Pi_{23i} = -Q + F_i^T$
 $\Pi_{33i} = (r^2 - 1)G + R_1 - S_i + P_i + 2\cos(\theta_h)Q$
pour un domaine de hautes fréquences, $|\theta| \geq \theta_h$.

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\Phi_1 & -\Phi_{2i} & 0 & \Phi_1 H_i - d_{fi} C_j + \Phi_{2i} A_j & -c_{fi} \\ 0 & -\Phi_{3i} & -\Phi_4 & \Phi_{3i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ 0 & -\Phi_{5i} & -\Phi_4 & \Phi_{5i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ 0 & -\Phi_{6i} & 0 & \Phi_{6i} A_j & \Phi_{6i} A_{dj} E_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c} \Phi_1 H_{di} E_1 - d_{fi} C_{dj} E_1 \\ + \Phi_{2i} A_{dj} E_1 \end{array} \right) & \Phi_1 L_i - d_{fi} D_j + \Phi_{2i} B_j & 0 \\ \Phi_{3i} A_{dj} E_1 + b_{fi} C_{dj} E_1 & \Phi_{3i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ \Phi_{5i} A_{dj} E_1 + b_{fi} C_{dj} E_1 & \Phi_{3i} B_j + b_{fi} D_j & 0 \\ \Phi_{6i} B_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \Upsilon_{sij} = & \left[\begin{array}{cccc} -\Phi_{s1i} & -\Phi_4 & \Phi_{s1i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ -\Phi_{s2i} & -\Phi_4 & \Phi_{s2i} A_j + b_{fi} C_j & a_{fi} \\ -\Phi_{s3i} & 0 & \Phi_{s3i} A_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \Phi_{s1i} A_{dj} E_1 \\ + b_{fi} C_{dj} E_1 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \Phi_{s2i} A_{dj} E_1 \\ + b_{fi} C_{dj} E_1 \end{array} \right) \\ \Phi_{s3i} A_{dj} E_1 \\ 0 \end{array} \right] \\ \Pi_{sir} = & \left[\begin{array}{ccc} S_{sr} + r^2 G_s & -r^2 G_s & 0 \\ \bullet & R_{s1} + (r^2 - 1) G_s - S_{si} & G_s E_3 + R_{s2} E_2 \\ \bullet & \bullet & E_2^T R_{s3} E_2 - R_s - E_3^T G_s E_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$E_1 = [0_{n_x \times 2(s-1)n_x} \quad I_{n_x} \quad 0_{n_x \times n_x}],$$

$$E_2 = [I_{2(s-1)n_x} \quad 0_{2(s-1)n_x \times 2n_x}],$$

$$E_3 = [I_{2n_x} \quad 0_{2n_x \times 2(s-1)n_x}].$$

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont solutions des équations suivantes :

$$\begin{aligned} A_f(h) &= \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, & B_f(h) &= \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi}, \\ C_f(h) &= \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi}, & D_f(h) &= \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}. \end{aligned}$$

Preuve : Nous supposons que les inégalités (4.82 - 4.89) sont vérifiées. Nous définissons les fonctions suivantes :

$$A_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, \quad B_f(h) = \Phi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi}, \quad C_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi},$$

$$D_f(h) = \Phi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}, \quad F(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i F_i, \quad M(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i M_i,$$

$$V(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i V_i, \quad N(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i N_i, \quad P(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i P_i,$$

$$S(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i S_i, \quad N(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i N_i, \quad S_s(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i S_{si},$$

$$\Phi_{sk}(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i \Phi_{ski}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{et} \quad \Phi_k(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i \Phi_{ki}, \quad k = 2, 3, 5, 6$$

Le reste est similaire à la démonstration du théorème 18 et est donc omis.

4.3.5 Exemple de simulation

Nous présentons dans cette partie un exemple de simulation pour illustrer le résultat proposé dans la section précédente.

Nous considérons le système à temps discret suivant avec deux règles floues et un retard constant $\tau = 8$:

Règle 1 : Si $x_1(k)$ est $N_1(x_1(k))$, alors :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ -0.2 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.05 & 0.3 \\ -0.1 & -0.3 \end{bmatrix} x(k-8) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= [0 \ 1] x(k) + [0 \ 0.5] x(k-8) + w(k) \\ z(k) &= [1 \ 0] x(k) \end{aligned}$$

Règle 2 : Si $x_1(k)$ est $N_2(x_1(k))$, alors :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & -0.2 \end{bmatrix} x(k-8) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \end{bmatrix} w(k) \\ y(k) &= [0 \ 1] x(k) + [0 \ 0.3] x(k) + w(k) \\ z(k) &= [1 \ 0] x(k) \end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance $N_1(x_2(k))$ et $N_2(x_2(k))$ sont données par :

$$N_1(x_2(k)) = \begin{cases} \frac{x_2(k)+3}{3}, & \text{pour } -3 \leq x_2(k) \leq 0 \\ 0, & \text{pour } x_2(k) < -3 \\ \frac{3-x_2(k)}{3}, & \text{pour } 0 \leq x_2(k) \leq 3 \\ 0, & \text{pour } x_2(k) > 3 \end{cases}$$

et $N_2(x_2(k)) = 1 - N_1(x_2(k))$.

Une comparaison des valeurs du niveau de performance H_∞ atteintes au moyen du théorème (21) dans différents domaines fréquentiels, avec et sans partitionnement de retard, est donnée dans le tableau 4.2.

Θ	$s = 1$ et $r = 8$	$s = 4$ et $r = 2$
$ \theta \leq \pi/15$	5.56	3
$\pi/6 \leq \theta \leq \pi/4$	1.22	1.1
$ \theta \geq \pi/3$	0.55	0.5
$\forall \theta$	6.7	5.5

TABLE 4.2 – Comparaison des gain ℓ_2 obtenus dans différents domaines fréquentiels avec et sans partitionnement de retard

Maintenant nous supposons que $\tau = 4$, $s = 1$ et $r = 4$. En résolvant les inégalités du théorème (21), nous obtenons les paramètres suivant :

$$\begin{aligned}\Phi_4 &= \begin{bmatrix} 0.4058 & 0.2180 \\ 0.0401 & 0.0936 \end{bmatrix}, & \Phi_1 &= 0.9647, \\ a_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.0141 & -0.0409 \\ -0.0600 & -0.0306 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} 0.1700 & 0.0541 \\ 0.0226 & 0.0141 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.1520 \\ -0.0682 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.1921 \\ -0.0652 \end{bmatrix}, \\ c_{f1} &= [-0.4000 \quad -0.1567], & c_{f2} &= [-0.3597 \quad -0.1371], \\ d_{f1} &= -0.2027, & d_{f2} &= -0.2371.\end{aligned}$$

dans le domaine hautes fréquences ($|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$), avec un indice de performance H_∞ égal à $\gamma = 0.5$.

$$\begin{aligned}\Phi_4 &= \begin{bmatrix} 3.2054 & 2.0199 \\ 1.6982 & 1.2241 \end{bmatrix}, & \Phi_1 &= 1.0010, \\ a_{f1} &= \begin{bmatrix} 1.1295 & 0.6048 \\ 0.4193 & 0.2395 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} 1.9182 & 1.0386 \\ 1.0051 & 0.5850 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -1.1002 \\ -0.6829 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} -1.3140 \\ -0.7831 \end{bmatrix}, \\ c_{f1} &= [-1.2547 \quad -0.7474], & c_{f2} &= [-1.0923 \quad -0.7602], \\ d_{f1} &= -0.5521, & d_{f2} &= -0.6791.\end{aligned}$$

pour toute valeur de θ , avec un indice de performance H_∞ égal à $\gamma = 2.8284$.

Connectant les filtres trouvés au système original, les figures 5 et 6 montrent respectivement les évolutions des erreurs d'estimation et les performances H_∞ du système augmenté pour $w(k) = \sin(1.6k)$, qui appartient au domaine ($|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$). Les courbes en pointillés correspondent aux paramètres du filtre trouvés $\forall \theta$ et les courbes continues correspondent à ceux calculés dans le domaine ($|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes non linéaires représentés par le modèle flou de type TS. Nous avons développé de nouveaux outils d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires avec et sans retards sur le vecteur d'état. La convergence de l'erreur d'estimation est assurée par le biais des fonctions de Lyapunov polyquadratiques et des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Les approches proposées s'appuient sur les interprétations temporelles de la version généralisée du lemme KYP. Par ailleurs, les conditions obtenues sont linéarisées au moyen du lemme de Finsler qui nous a permis d'introduire des variables de décision supplémentaires pour une solution moins conservatrice avec plus de degrés de liberté. Les conditions de synthèse de

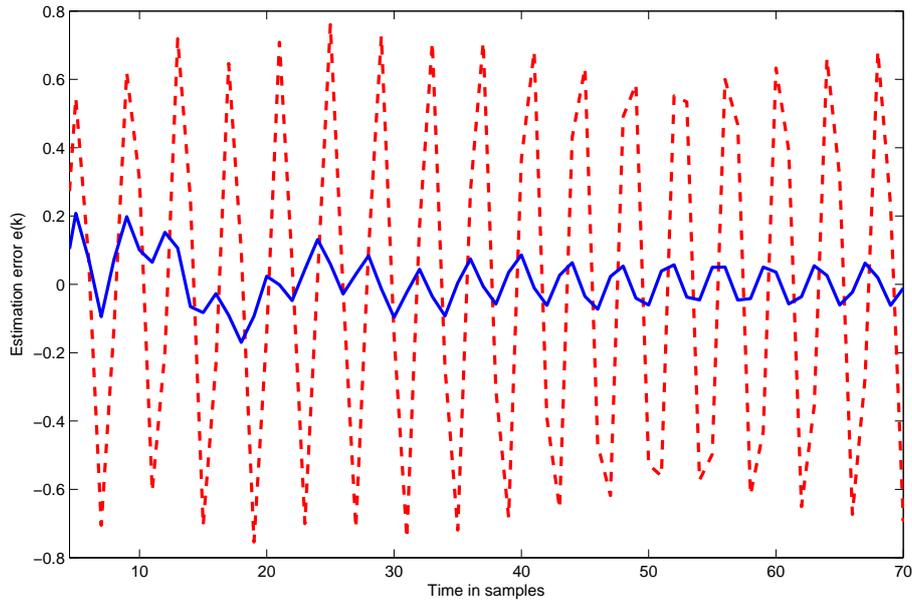


FIGURE 4.5 – L’erreur d’estimation $e(k)$ pour $w(k) = \sin(1.6k)$. Courbe continue : ($|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$), courbe en pointillé : $\forall \theta$.

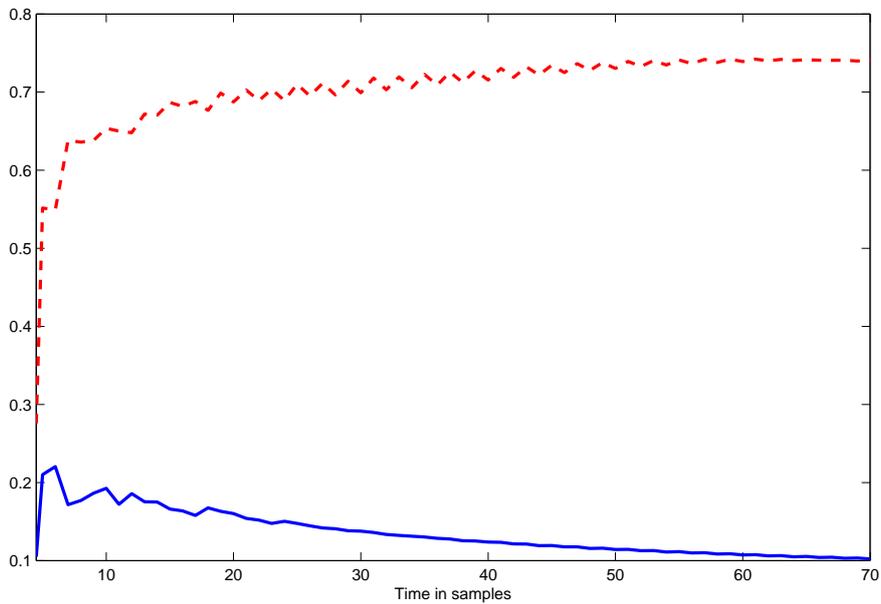


FIGURE 4.6 – Valeur de $\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$ pour $w(k) = \sin(1.6k)$. Courbe continue : ($|\theta| \geq \frac{\pi}{3}$), courbe en pointillé : $\forall \theta$.

filtres H_∞ , dans les différents domaines fréquentiels, sont formulées en des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI. Des exemples de simulation sont présentés à la fin de chaque section pour démontrer les avantages des approches proposées par comparaison avec d'autres résultats de la littérature.

Chapitre 5

Filtrage H_∞ des systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication

Sommaire

5.1	Introduction	100
5.2	Filtrage H_∞ des systèmes flous de type TS avec mesures quantifiées	100
5.2.1	Formulation du problème	100
5.2.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	103
5.2.3	Étude de stabilité du système augmenté	108
5.2.4	Synthèse du filtre H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	109
5.2.5	Exemple de simulation	111
5.3	Filtrage H_∞ des systèmes linéaires à retard constant avec mesures quantifiées	118
5.3.1	Formulation du problème	118
5.3.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	119
5.3.3	Étude de stabilité du système augmenté	125
5.3.4	Synthèse du filtre H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	126
5.3.5	Exemple de simulation	128
5.4	Filtrage H_∞ des systèmes linéaires avec mesures quantifiées et pertes de paquets	131
5.4.1	Formulation du problème	131
5.4.2	Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	133
5.4.3	Étude de stabilité du système augmenté	137
5.4.4	Synthèse du filtre H_∞ dans un domaine fréquentiel fini	139
5.4.5	Exemple de simulation	140
5.5	Conclusion	142

5.1 Introduction

Comme présenté dans le chapitre 2, l'introduction du réseau entre les capteurs et le filtre offre de nombreux avantages en comparaison avec l'architecture classique (câblage point à point). Cela entraîne cependant la nécessité de prendre en compte certaines contraintes de communication qui peuvent détériorer les performances ou même déstabiliser le filtre si elles sont négligées dans sa synthèse.

Ce chapitre est consacré au développement de différentes méthodes de conception de filtres H_∞ sous des contraintes de communication induites par la présence du réseau entre les capteurs et le filtre.

Malgré l'intérêt, grandissant, porté au problème de l'estimation d'état pour les systèmes dynamiques commandés en réseau, le filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour ces systèmes reste rarement abordé dans la littérature.

Dans la section 5.2, nous nous intéressons au filtrage H_∞ des systèmes non linéaires décrits par les modèles flous de type TS et dont les mesures sont quantifiées avant d'être transmises au filtre. Ensuite, la section 5.3 traite le même problème pour les systèmes linéaires à retard constant sur le vecteur d'état. Enfin dans la section 5.4, l'approche proposée concerne le filtrage H_∞ des systèmes linéaires et permet de prendre en compte, en plus de l'effet de quantification, la possibilité de perte de paquets lors de la transmission des mesures quantifiées entre les capteurs et le filtre. Dans les trois cas, les conditions de synthèse de filtres dans des domaines fréquentiels finis sont formulées comme des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI, garantissant à la fois la convergence de l'erreur d'estimation et les performances H_∞ vis-à-vis des perturbations extérieures. La fin de chaque section est consacrée à des exemples de simulation illustrant les performances et les avantages des approches proposées.

5.2 Filtrage H_∞ des systèmes flous de type TS avec mesures quantifiées

Dans cette section, nous nous intéressons aux systèmes non linéaires, représenté par des modèles flous de type TS, dont les mesures sont quantifiées par un quantificateur logarithmique avant d'être transmises au filtre.

5.2.1 Formulation du problème

Nous considérons un système non linéaire flou de type TS décrit par l'équation à temps discret 4.4.

La capacité limitée des réseaux de communication entre les capteurs et le filtre impose la quantification des valeurs mesurées $y(k)$, de manière à diminuer la dynamique des données à transmettre.

Nous supposons que la sortie $y(k)$ du système (4.4) est quantifiée par un quantificateur logarithmique avant d'être transmise au filtre.

Le quantificateur est noté par :

$$g(y(k)) = [g_1(y_1(k)) \quad g_2(y_2(k)) \quad \cdots \quad g_{n_y}(y_{n_y}(k))]^T \quad (5.1)$$

Il est décrit par :

$$\mathfrak{N}_j = \left\{ \pm \hat{\mu}_i^{(j)}, \hat{\mu}_i^{(j)} = \chi_j^i \hat{\mu}_0^{(j)}, i = 0; \pm 1; \pm 2, \dots \right\} \cup \{0\}, \quad 0 < \chi_j < 1, \quad \hat{\mu}_0^{(j)} > 0 \quad (5.2)$$

où χ_j , ($j = 1, 2, \dots, n_y$) désigne la densité de quantification.

On a :

$$g_j(y^j(k)) = \begin{cases} \hat{\mu}_i^{(j)}, & \frac{1}{1+\delta_j}\hat{\mu}_i^{(j)} \leq y^{(j)}(k) \leq \frac{1}{1-\delta_j}\hat{\mu}_i^{(j)} \\ 0, & y^{(j)}(k) = 0 \\ -g_j(-y_j(k)), & y^{(j)}(k) < 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

où $\delta_j = \frac{1-\chi_j}{1+\chi_j}$.

A partir des définitions ci-dessus, $g_j(y_j(k))$ peut s'exprimer comme suit :

$$g_j(y^j(k)) = (1 + \Delta^{(j)}(k))y^j(k) \quad \text{avec} \quad |\Delta^{(j)}(k)| \leq \delta_j \quad (5.4)$$

En définissant $\Delta(k) = \text{diag} \{ \Delta^{(1)}(k), \Delta^{(2)}(k), \dots, \Delta^{(n_y)}(k) \}$, nous écrivons les mesures quantifiées sous la forme suivante :

$$\tilde{y}(k) = g(y(k)) = (I + \Delta(k))y(k) \quad (5.5)$$

Nous cherchons à construire un filtre flou de type TS de la forme :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f(h)x_f(k) + B_f(h)\tilde{y}(k), \\ z_f(k) &= C_f(h)x_f(k) + D_f(h)\tilde{y}(k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

où :

$$\begin{aligned} A_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i A_{fi}, & B_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i B_{fi}, & C_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i C_{fi}, \\ \text{et} \quad D_f(h) &= \sum_{i=1}^{\rho} h_i D_{fi}. \end{aligned}$$

Rappelons que $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $\tilde{y}(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie reconstruite par le filtre et le vecteur des entrées. Les matrices A_{fi} , B_{fi} , C_{fi} , et D_{fi} sont les paramètres du filtre à déterminer pour $i \in \varsigma$.

A partir des équations (4.4) et (5.6), nous écrivons le système à état augmenté comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \tilde{A}(h)\hat{x}(k) + \tilde{B}(h)w(k) \\ e(k) &= \tilde{C}(h)\hat{x}(k) + \tilde{D}(h)w(k) \end{aligned} \quad (5.7)$$

où la sortie $e(k) = z(k) - z_f(k)$ désigne l'erreur d'estimation, $\hat{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ et :

$$\tilde{A}(h) = \hat{A}(h) + [0 \quad B_f^T(h)]^T \bar{\Delta}(k) [\delta C(h) \quad 0] = \hat{A}(h) + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j [0 \quad B_{fj}^T]^T \bar{\Delta}(k) [\delta C_i \quad 0],$$

$$\tilde{B}(h) = \hat{B}(h) + [0 \quad B_f^T(h)]^T \bar{\Delta}(k) \delta D(h) = \hat{B}(h) + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j [0 \quad B_{fj}^T]^T \bar{\Delta}(k) \delta D_i,$$

$$\tilde{C}(h) = \hat{C}(h) - D_f(h) \bar{\Delta}(k) [\delta C(h) \quad 0] = \hat{C}(h) - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j D_{fj} \bar{\Delta}(k) [\delta C_i \quad 0],$$

$$\tilde{D}(h) = \hat{D}(h) - D_f(h) \bar{\Delta}(k) \delta D(h) = \hat{D}(h) - \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j D_{fj} \bar{\Delta}(k) \delta D_i,$$

$$\bar{\Delta}(k) = \Delta(k) \delta^{-1},$$

$$\delta = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_y} \},$$

$$\hat{A}(h) = \begin{bmatrix} A(h) & 0 \\ B_f(h)C(h) & A_f(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_{fj}C_i & A_{fi} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}(h) = \begin{bmatrix} B(h) \\ B_f(h)D(h) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j \begin{bmatrix} B_i \\ B_{fj}D_i \end{bmatrix},$$

$$\hat{C}(h) = [H(h) - D_f(h)C(h) \quad -C_f(h)] = \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j [H_i - D_{fj}C_i \quad -C_{fi}],$$

$$\hat{D}(h) = -D_f(h)D(h) = -\sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} h_i h_j D_{fj}D_i.$$

Rappelons que le but est de construire un filtre de la forme (5.6) tel que :

(a) pour un réel $\gamma > 0$, la performance H_{∞} suivante :

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5.8)$$

est vérifiée.

(b) le système à état augmenté décrit dans (5.7) est asymptotiquement stable en boucle ouverte ($w(k) = 0$),

θ désigne la fréquence du bruit $w(k)$ et son intervalle Θ est supposé connu, voir le tableau 2.2, page 38.

5.2.2 Analyse de performance H_{∞} dans un domaine fréquentiel fini

Nous supposons, dans un premier temps, que les paramètres du filtre sont connus. Nous développons dans le théorème suivant des conditions suffisantes garantissant l'exigence (a).

Théorème 22. *Soient δ et β deux scalaires positifs donnés. Le filtre (5.6) pour un système non linéaire flou de type TS, décrit par (4.4), avec mesures quantifiées générant l'erreur d'estimation $e(k)$ permet une atténuation H_{∞} du transfert de $w(k)$ vers $e(k)$ bornée par un scalaire ($\gamma > 0$), s'il existe des matrices $\varphi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_2(h) \in R^{n_z \times n_x}$, $\varphi_i(h) \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\varphi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_6(h) \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $F(h)$, $G(h)$, $P(h) = P^T(h)$, $Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $M(h) \in R^{n_w \times 2n_x}$ telles que :*

$$\Sigma(h) + He\{\Upsilon(h)\} < 0 \quad (5.9)$$

où :

$$\Upsilon(h) = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2(h) & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_1(H(h) - D_f(h)C(h)) \\ +\varphi_2(h)A(h) \end{pmatrix} & -\varphi_1 C_f(h) & \begin{pmatrix} -\varphi_1 D_f(h)D(h) \\ +\varphi_2(h)B(h) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -\varphi_3(h) & -\varphi_4 & \begin{pmatrix} \varphi_3(h)A(h) \\ +\varphi_4 B_f(h)C(h) \end{pmatrix} & \varphi_4 A_f(h) & \begin{pmatrix} \varphi_3(h)B(h) \\ +\varphi_4 B_f(h)D(h) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -\varphi_5(h) & -\varphi_4 & \begin{pmatrix} \varphi_5(h)A(h) \\ +\varphi_4 B_f(h)C(h) \end{pmatrix} & \varphi_4 A_f(h) & \begin{pmatrix} \varphi_5(h)B(h) \\ +\varphi_4 B_f(h)D(h) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & -\varphi_6(h) & 0 & \varphi_6(h)A(h) & 0 & \varphi_6(h)B(h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma(h) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \varphi_1 D_f(h) & 0 \\ \bullet & 0 & \Sigma_{23}(h) & M^T(h) & G^T(h) & \begin{bmatrix} \beta \varphi_4 B_f(h) \\ \beta \varphi_4 B_f(h) \end{bmatrix} & 0 \\ \bullet & \bullet & \Sigma_{33}(h) & 0 & -F(h) & 0 & \begin{bmatrix} \delta C^T(h) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -M(h) & 0 & \delta D^T(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(h^+) - G(h) - G^T(h) & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

avec : $\Sigma_{23}(h) = Q + F^T(h)$
 $\Sigma_{33}(h) = P(h) - 2 \cos(\theta_b)Q$
pour un domaine de basses fréquences

$\Sigma_{23}(h) = e^{j\theta_c}Q + F^T(h)$
 $\Sigma_{33}(h) = P(h) - 2 \cos(\theta_\omega)Q$
pour un domaine de moyennes fréquences, $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$ et $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

$\Sigma_{23}(h) = -Q + F^T(h)$
 $\Sigma_{33}(h) = P(h) + 2 \cos(\theta_h)Q$
pour un domaine de hautes fréquences

Preuve : Nous supposons que le bruit $w(k)$ appartient à un domaine de moyennes fréquences, c-à-d : $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

D'après le lemme 6 du chapitre 2, la contrainte (a) est satisfaite pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ si les deux inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2[0, \infty) \quad (5.10)$$

et avec des conditions initiales nulles :

$$e^{j\theta_\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1}\hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2}\hat{x}_k)^T \leq 0 \quad (5.11)$$

Pour satisfaire la contrainte (5.10), il suffit de vérifier :

$$e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) \leq 0 \quad (5.12)$$

que nous écrivons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{C}^T(h)\tilde{C}(h) & \tilde{C}^T(h)\tilde{D}(h) \\ \tilde{D}^T(h)\tilde{C}(h) & \tilde{D}^T(h)\tilde{D}(h) - \gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.13)$$

Maintenant nous allons proposer une condition suffisante pour assurer (5.11).

Nous définissons les matrices symétriques $P(h)$ et $Q \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et la matrice $N(h)$ telles que $Q > 0$ et :

$$N(h) = \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & P(h) - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.14)$$

Nous multiplions (5.14) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T N(h) \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall N(h) \in \mathfrak{N}(h) \quad (5.15)$$

où :

$$\mathfrak{N}(h) = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & P(h) - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}, P(h) = P^T(h), Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x} \right\}$$

En faisant la somme de (5.15) de $k = 0$ jusqu'à ∞ et en supposant que (5.7) est asymptotiquement stable et que $\hat{x}(0) = 0$, nous obtenons :

$$\text{trace}\left\{-e^{j\theta\omega}Q \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1}\hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2}\hat{x}_k)^T\right\} \geq 0 \quad (5.16)$$

Comme $Q > 0$, donc nous pouvons déduire que si l'équation (5.15) est vérifiée, alors l'inégalité (5.11) l'est également.

En appliquant le lemme de la S-procédure généralisée (page 43) sur les inégalités (5.13) et (5.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{C}^T(h)\tilde{C}(h) & \tilde{C}^T(h)\tilde{D}(h) \\ \tilde{D}^T(h)\tilde{C}(h) & \tilde{D}^T(h)\tilde{D}(h) - \gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} -P(h^+) & e^{j\theta_c}Q \\ e^{-j\theta_c}Q & P(h) - 2\cos\theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ensuite, nous multiplions l'inégalité (5.17) par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ à gauche et sa transposée à droite, nous aurons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\tilde{B}(h) + \tilde{C}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \tilde{D}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.18)$$

où : $\varepsilon_{11} = P(h) - 2\cos\theta_\omega Q + e^{-j\theta_c}Q\tilde{A}(h) + e^{j\theta_c}\tilde{A}^T(h)Q + \tilde{C}^T(h)\tilde{C}(h)$

A partir de (5.7), nous avons :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.19)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii) avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\tilde{B}(h) + \tilde{C}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \tilde{D}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \Xi = \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix}.$$

Nous en déduisons que l'inégalité (5.18) est vérifiée s'il existe des matrices $F(h), G(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et $M(h) \in R^{n_w \times 2n_x}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & e^{-j\theta_c}Q\tilde{B}(h) + \tilde{C}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} + \tilde{D}^T(h)\tilde{D}(h) & 0 \\ \bullet & \bullet & -P(h^+) \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} F(h) \\ M(h) \\ G(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & -I_{2n_x} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.20)$$

Nous réécrivons l'inégalité (5.20) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 \\ \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix}^T \Pi(h) \begin{bmatrix} \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 \\ \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.21)$$

avec :

$$\Pi(h) = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & e^{j\theta_c}Q + F^T(h) & M^T(h) & G^T(h) \\ \bullet & \bullet & P(h) - 2\cos(\theta_w)Q & 0 & -F(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -M(h) \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P(h^+) - G(h) - G^T(h) \end{bmatrix}$$

Notons que :

$$\begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & 0 \end{bmatrix}_{\perp} = \begin{bmatrix} \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 \\ \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & 0 \\ I_{2n_x} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_w} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n_x} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Appliquant le lemme de Finsler encore une deuxième fois (ii et iii), ceci implique que l'inégalité (5.21) est faisable s'il existe une matrice $\varphi(h) \in R^{(6n_x+n_z+n_w) \times (n_z+2n_x)}$ telle que :

$$\Pi(h) + He \left\{ \varphi(h) \begin{bmatrix} -I_{n_z} & 0 & \tilde{C}(h) & \tilde{D}(h) & 0 \\ 0 & -I_{2n_x} & \tilde{A}(h) & \tilde{B}(h) & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.23)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\varphi(h)$:

$$\varphi(h) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2(h) & 0 \\ 0 & \varphi_3(h) & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_5(h) & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_6(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Ainsi nous réécrivons l'inégalité (5.23) comme suit :

$$\Pi(h) + He \{ \tilde{\varphi}(h) \} < 0 \quad (5.25)$$

où :

$$\tilde{\varphi}(h) = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2(h) & 0 & \left(\begin{array}{l} \varphi_1(H(h) - D_f(h)C(h)) - \\ \varphi_1 D_f(h)\bar{\Delta}\delta C(h) + \varphi_2(h)A(h) \end{array} \right) & -\varphi_1 C_f(h) & \tilde{\varphi}_{16}(h) & 0 \\ 0 & -\varphi_3(h) & -\varphi_4 & \left(\begin{array}{l} \varphi_3(h)A(h) + \varphi_4 B_f(h)C(h) + \\ \varphi_4 B_f(h)\bar{\Delta}\delta C(h) \end{array} \right) & \varphi_4 A_f(h) & \tilde{\varphi}_{26}(h) & 0 \\ 0 & -\varphi_5(h) & -\varphi_4 & \left(\begin{array}{l} \varphi_5(h)A(h) + \varphi_4 B_f(h)C(h) + \\ \varphi_4 B_f(h)\bar{\Delta}\delta C(h) \end{array} \right) & \varphi_4 A_f(h) & \tilde{\varphi}_{36}(h) & 0 \\ 0 & -\varphi_6(h) & 0 & \varphi_6(h)A(h) & 0 & \varphi_6(h)B(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

$$\tilde{\varphi}_{16}(h) = -\varphi_1(D_f(h)D(h) + D_f(h)\bar{\Delta}\delta D(h)) + \varphi_2(h)B(h)$$

$$\tilde{\varphi}_{26}(h) = \varphi_3(h)B(h) + \varphi_4(B_f(h)D(h) + B_f(h)\bar{\Delta}\delta D(h))$$

$$\tilde{\varphi}_{36}(h) = \varphi_5(h)B(h) + \varphi_4(B_f(h)D(h) + B_f(h)\bar{\Delta}\delta D(h))$$

Nous appliquons ensuite le lemme de séparation (page 43), avec $\bar{\Delta}(k) = \Delta(k)\delta^{-1}$, $\kappa(k) = \bar{\Delta}(k)$

et :

$$\Upsilon_1 = \Pi(h) + He \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} -\varphi_1 & -\varphi_2(h) & 0 & \Upsilon_{14}(h) & -\varphi_1 C_f(h) & \left(\begin{array}{l} -\varphi_1 D_f(h)D(h)+ \\ \varphi_2(h)B(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_3(h) & -\varphi_4 & \Upsilon_{24}(h) & \varphi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{l} \varphi_3(h)B(h)+ \\ \varphi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_5(h) & -\varphi_4 & \Upsilon_{34}(h) & \varphi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{l} \varphi_5(h)B(h)+ \\ \varphi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_6(h) & 0 & \varphi_6(h)A(h) & 0 & \varphi_6(h)B(h) \end{array} \right] \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$\Upsilon_2 = [0 \ 0 \ 0 \ \delta C(h) \ 0 \ \delta D(h) \ 0]$$

$$\Upsilon_3 = [-D_f(h)^T \varphi_1^T \ B_f(h)^T \varphi_4^T \ B_f(h)^T \varphi_4^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Nous en déduisons que (5.25) est vérifiée s'il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \Pi(h) + He & \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cccccc} -\varphi_1 & -\varphi_2(h) & 0 & \Upsilon_{14}(h) & -\varphi_1 C_f(h) & \left(\begin{array}{l} -\varphi_1 D_f(h)D(h)+ \\ \varphi_2(h)B(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_3(h) & -\varphi_4 & \Upsilon_{24}(h) & \varphi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{l} \varphi_3(h)B(h)+ \\ \varphi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_5(h) & -\varphi_4 & \Upsilon_{34}(h) & \varphi_4 A_f(h) & \left(\begin{array}{l} \varphi_5(h)B(h)+ \\ \varphi_4 B_f(h)D(h) \end{array} \right) \\ 0 & -\varphi_6(h) & 0 & \varphi_6(h)A(h) & 0 & \varphi_6(h)B(h) \end{array} \right] \\ 0 \end{array} \right\} \\ +\beta & \left[\begin{array}{cccccc} \varphi_1 D_f(h)D_f^T(h)\varphi_1^T & -\varphi_1 D_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & -\varphi_1 D_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & 0 \\ -\varphi_4 B_f(h)D_f^T(h)\varphi_1^T & \varphi_4 B_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & \varphi_4 B_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & 0 \\ -\varphi_4 B_f(h)D_f^T(h)\varphi_1^T & \varphi_4 B_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & \varphi_4 B_f(h)B_f^T(h)\varphi_4^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ +\beta^{-1} & \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 C^T(h)C(h) & 0\delta^2 C^T(h)D(h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^2 D^T(h)C(h) & 0\delta^2 D^T(h)D(h) & 0 & 0 \end{array} \right] < 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

En appliquant un complément de Schur sur les termes :

$$\begin{aligned} & -\beta\varphi_1 D_f(h)\varphi_4 B_f^T(h)\varphi_4^T, \quad \beta\varphi_1^T D_f^T(h)D_f(h)\varphi_1, \quad \beta\varphi_4^T B_f^T(h)B_f(h)\varphi_4, \\ & \beta^{-1}\delta^2 C^T(h)C(h), \quad \beta^{-1}\delta^2 C^T(h)D(h), \quad \beta^{-1}\delta^2 D^T(h)D(h) \end{aligned}$$

et leur transposé, l'équation (5.27) implique (5.9) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

La démonstration du théorème (22) pour les domaines basses ($|\theta| \leq \theta_b$) et hautes fréquences ($|\theta| \geq \theta_h$) est basée exactement sur les mêmes étapes que celles du domaine moyennes fréquences ($\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$). La différence réside dans les blocs $\Sigma_{23}(h)$ et $\Sigma_{33}(h)$ de la matrice $\Sigma(h)$.

Ceci complète la démonstration du théorème 22.

5.2.3 Étude de stabilité du système augmenté

Nous proposons ci-après une condition suffisante pour vérifier l'exigence (b).

Théorème 23. *Considérons le système (4.4) avec des mesures quantifiées et le filtre décrit dans (5.6). Soit β_s un scalaire positif donné. Le système à état augmenté représenté par (5.7) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive $S(h) = S^T(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$, des matrices $\varphi_{s1}(h), \varphi_{s2}(h) \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s3}(h) \in R^{2n_x \times n_x}$ telles que :*

$$\Sigma_s(h) + He\{\Upsilon_s(h)\} < 0 \quad (5.28)$$

où :

$$\Upsilon_s(h) = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1}(h) & 0 & \varphi_{s1}(h)A(h) & 0 & 0 \\ -\varphi_{s2}(h) & -\varphi_4 & \varphi_{s2}(h)A(h) + \varphi_4 B_f(h)C(h) & \varphi_4 A_f(h) & 0 \\ -\varphi_{s3}(h) & 0 & \varphi_{s3}(h)A(h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Sigma_s(h) = \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 & [0 \ \beta_s B_f^T(h) \varphi_4^T]^T & 0 \\ \bullet & -S(h) & 0 & [\delta C(h) \ 0]^T \\ \bullet & \bullet & -\beta_s I_s & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_s \end{bmatrix}$$

Preuve : Le système (5.7) en boucle ouverte :

$$\hat{x}(k+1) = \tilde{A}(h)\hat{x}(k) \quad (5.29)$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov polyquadratique suivante :

$$V(k) = \hat{x}^T(k)S(h)\hat{x}(k), \quad S(h) = S^T(h) > 0 \quad (5.30)$$

Compte tenu de la variation de $V(k)$ le long des trajectoires du système augmenté (5.7), nous déduisons que ce dernier est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive symétrique $S(h) \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telle que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.31)$$

L'équation (5.29) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n} & \tilde{A}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.32)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii), avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Xi = \begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \tilde{A}(h) \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, pour satisfaire l'inégalité (5.31), il suffit de trouver une matrice $\varphi_s(h) \in R^{4n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} S(h^+) & 0 \\ 0 & -S(h) \end{bmatrix} + He\left\{ \varphi_s(h) \begin{bmatrix} -I_{2n_x} & \tilde{A}(h) \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.33)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice $\varphi_s(h)$:

$$\varphi_s(h) = \begin{bmatrix} \varphi_{s1}(h) & 0 \\ \varphi_{s2}(h) & \varphi_4 \\ \varphi_{s3}(h) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Ensuite, nous pouvons aisément vérifier que (5.33) est équivalente à (5.28) en suivant les mêmes étapes de démonstration du théorème 22.

5.2.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Le théorème suivant donne une solution au calcul des paramètres du filtre optimal qui répond aux exigences (a) et (b).

Théorème 24. *Considérons le système (4.4) avec un bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini et connu. Soit δ , β et β_s des scalaires positifs donnés. Le filtre, de la forme (5.6), stable et optimal en termes de performance H_∞ vis-à-vis des perturbations extérieures peut être obtenu si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (5.35) sous les contraintes LMI (5.36 - 5.41) pour des matrices symétriques $P_i, Q > 0, S_i > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, des matrices $\varphi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_{2i} \in R^{n_z \times n_x}$, $\varphi_{ki} \in R^{n_x \times n_x}$, ($k = 3, 5$), $\varphi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{6i} \in R^{(4n_x + n_w) \times n_x}$, $F_i, G_i \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $M_i \in R^{n_w \times 2n_x}$, $\varphi_{s1i}, \varphi_{s2i} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s3i} \in R^{2n_x \times n_x}$, $a_{fi} \in R^{n_x \times n_x}$, $b_{fi} \in R^{n_x \times n_y}$, $c_{fi} \in R^{n_z \times n_x}$, $d_{fi} \in R^{n_z \times n_y}$, $\Omega_{iil} \in R^{(6n_x + 2n_y + n_z + n_w) \times (6n_x + 2n_y + n_z + n_w)}$: $\Omega_{iil} = \Omega_{iil}^T$, $\Omega_{ijl} \in R_{i < j}^{(6n_x + 2n_y + n_z + n_w) \times (6n_x + 2n_y + n_z + n_w)}$, $\Omega_{siil} \in R^{(4n_x + 2n_y) \times (4n_x + 2n_y)}$: $\Omega_{siil} = \Omega_{siil}^T$, $\Omega_{sijl} \in R_{i < j}^{(4n_x + 2n_y) \times (4n_x + 2n_y)}$:*

$$\min_{Q, S_i, P_i, \varphi_k, (k=1, \dots, 6), \varphi_{sk}, (k=1, 2, 3), a_{fi}, b_{fi}, c_{fi}, d_{fi}, \Omega_{ijl}, \Omega_{sijl}} \gamma \quad (5.35)$$

$$\Sigma_{il} + He\{\Upsilon_{ii}\} - \Omega_{iil} < 0 \quad (5.36)$$

$$\Sigma_{il} + \Sigma_{jl} + He\{\Upsilon_{ij}\} + He\{\Upsilon_{ji}\} - \Omega_{ijl} - \Omega_{ijl}^T < 0, \quad (i < j) \quad (5.37)$$

$$\Sigma_{sil} + He\{\Upsilon_{sii}\} - \Omega_{siil} < 0 \quad (5.38)$$

$$\Sigma_{sil} + \Sigma_{sjl} + He\{\Upsilon_{sij}\} + He\{\Upsilon_{sji}\} - \Omega_{sijl} - \Omega_{sijl}^T < 0, \quad (i < j) \quad (5.39)$$

$$\Omega_l = \begin{bmatrix} \Omega_{11l} & \cdots & \Omega_{1\rho l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{\rho 1l} & \cdots & \Omega_{\rho\rho l} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.40)$$

$$\Omega_{sl} = \begin{bmatrix} \Omega_{s11l} & \cdots & \Omega_{s1\rho l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{s\rho 1l} & \cdots & \Omega_{s\rho\rho l} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.41)$$

$i, j, l \in \mathcal{S}$

avec :

$$\Sigma_{il} = \begin{bmatrix} I_{n_z} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta d_{fi} & 0 \\ \bullet & 0 & \Sigma_{23i} & M_i^T & G_i^T & [\beta b_{fi}^T & \beta b_{fi}^T]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & \Sigma_{33i} & 0 & -F_i & 0 & [\delta C_i & 0]^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & -M_i & 0 & \delta D_i^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -P_i - G_i - G_i^T & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

où : $\Sigma_{23i} = Q + F_i^T$
 $\Sigma_{33i} = P_i - 2 \cos(\theta_b) Q$
 pour un domaine basses fréquences.

$$\begin{aligned}\Sigma_{23i} &= e^{j\theta_c}Q + F_i^T \\ \Sigma_{33i} &= P_i - 2\cos(\theta_\omega)Q \\ &\text{pour un domaine moyennes fréquences, } \theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{23i} &= -Q + F_i^T \\ \Sigma_{33i} &= P_i + 2\cos(\theta_h)Q \\ &\text{pour un domaine hautes fréquences.}\end{aligned}$$

$$\Upsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_{2i} & 0 & \varphi_1 H_i - d_{fi}C_j + \varphi_{2i}A_j & -c_{fi} & -d_{fi}D_j + \varphi_{2i}B_j & 0 \\ 0 & -\varphi_{3i} & -\varphi_4 & \varphi_{3i}A_j + b_{fi}C_j & a_{fi} & \varphi_{3i}B_j + b_{fi}D_j & 0 \\ 0 & -\varphi_{5i} & -\varphi_4 & \varphi_{5i}A_j + b_{fi}C_j & a_{fi} & \varphi_{3i}B_j + b_{fi}D_j & 0 \\ 0 & -\varphi_{6i} & 0 & \varphi_{6i}A_j & 0 & \varphi_{6i}B_j & 0 \\ 0 & -\varphi_{7i} & 0 & \varphi_{7i}A_j & 0 & \varphi_{7i}B_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{sil} = \begin{bmatrix} S_l & 0 & [0 \ \beta_s b_{fi}^T]^T & 0 \\ \bullet & -S_i & 0 & [\delta C_i \ 0]^T \\ \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Upsilon_{sij} = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1i} & 0 & \varphi_{s1i}A_j & 0 & 0 \\ -\varphi_{s2i} & -\varphi_4 & \varphi_{s2i}A_j + b_{fi}C_j & A_{fi} & 0 \\ -\varphi_{s3i} & 0 & \varphi_{s3i}A_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont calculés à partir des expressions suivantes :

$$\begin{aligned}A_f(h) &= \varphi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, & B_f(h) &= \varphi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi}, \\ C_f(h) &= \varphi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi}, & D_f(h) &= \varphi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}\end{aligned} \tag{5.42}$$

Preuve : Nous supposons que les inégalités (5.36 - 5.41) sont satisfaites. Nous définissons les matrices suivantes :

$$\varphi_k(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i \varphi_{ki}, \quad (k = 2, 3, 5, 6), \quad F(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i F_i, \quad M(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i M_i,$$

$$G(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i G_i, \quad P(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i P_i, \quad S(h) = \sum_{i=1}^{\rho} h_i S_i,$$

$$A_f(h) = \varphi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i a_{fi}, \quad B_f(h) = \varphi_4^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i b_{fi}, \quad C_f(h) = \varphi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i c_{fi},$$

$$\text{et } D_f(h) = \varphi_1^{-1} \sum_{i=1}^{\rho} h_i d_{fi}$$

Compte tenu de toutes les expressions ci-dessus, nous écrivons les équations des théorèmes 22 et 23 en fonction de celles du théorème 24 comme suit :

$$\begin{aligned}
\Sigma(h) + He\{\Upsilon(h)\} &= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ (\Sigma_{il} + He\{\Upsilon_{ij}\}) \\
&= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i^2 h_l^+ (\Sigma_{il} + He\{\Upsilon_{ii}\}) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ \left(\frac{\Sigma_{il} + He\{\Upsilon_{ij}\} + \Sigma_{jl} + He\{\Upsilon_{ji}\}}{2} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i^2 h_l^+ \Omega_{iil} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ (\Omega_{ijl} + \Omega_{ijl}^T) \\
&= \sum_{l=1}^{\rho} h_l^+ \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_{11l} & \cdots & \Omega_{1\rho l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{\rho 1l} & \cdots & \Omega_{\rho\rho l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_s(h) + He\{\Upsilon_s(h)\} &= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ (\Sigma_{sil} + He\{\Upsilon_{sij}\}) \\
&= \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i^2 h_l^+ (\Sigma_{sil} + He\{\Upsilon_{sii}\}) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ \left(\frac{\Sigma_{sil} + He\{\Upsilon_{sij}\} + \Sigma_{sjl} + He\{\Upsilon_{sji}\}}{2} \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i^2 h_l^+ \Omega_{s i i l} + \sum_{i=1}^{\rho} \sum_{i<j}^{\rho} \sum_{l=1}^{\rho} h_i h_j h_l^+ (\Omega_{s i j l} + \Omega_{s i j l}^T) \\
&= \sum_{l=1}^{\rho} h_l^+ \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega_{s 11} & \cdots & \Omega_{s 1\rho} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{s \rho 1} & \cdots & \Omega_{s \rho\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 I \\ \vdots \\ h_{\rho} I \end{bmatrix} < 0
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que si les conditions du théorème 24 sont vérifiées alors les conditions des théorèmes 22 et 23 le sont également et ceci complète la démonstration.

5.2.5 Exemple de simulation

Les avantages de l'approche proposée dans la section précédente sont démontrés ci-après par un exemple numérique.

Nous choisissons le système non linéaire de type TS suivant :

Règle 1 : Si $x_1(k)$ est $N_1(x_1(k))$, alors :

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \begin{bmatrix} -0.60 & 0.90 \\ -0.70 & 1.00 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.30 \\ 0.20 \end{bmatrix} w(k) \\
y(k) &= [1 \quad 0] x(k) + 0.20w(k) \\
z(k) &= [0 \quad 1] x(k)
\end{aligned}$$

Règle 2 : Si $x_1(k)$ est $N_2(x_1(k))$, alors :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} -1.20 & 1.00 \\ -1.30 & 1.10 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.20 \\ -0.10 \end{bmatrix} w(k) \\y(k) &= [1 \ 0] x(k) - 0.30w(k) \\z(k) &= [0 \ 1] x(k)\end{aligned}$$

Les fonctions d'appartenance $N_1(x_1(k))$ et $N_2(x_1(k))$ sont données par :

$$N_1(x_1(k)) = \begin{cases} \left| \frac{\sin(x_1(k))}{x_1(k)} \right|, & \text{if } x_1(k) \neq 0 \\ 1, & \text{if } x_1(k) = 0 \end{cases}$$

et $N_2(x_1(k)) = 1 - N_1(x_1(k))$.

En appliquant le théorème 24 dans différents domaines fréquentiels, le tableau ci-dessous montre l'influence du paramètre du quantificateur δ sur le niveau de rejet de perturbations γ .

Θ	$ \theta \leq \pi/15$	$\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$	$ \theta \geq \pi/3$	$\forall \theta$
$\delta = 0.1$	0.1732	0.4472	0.4243	0.5477
$\delta = 0.35$	0.6325	0.5916	0.9487	0.9487
$\delta = 0.6$	1.0488	0.8367	1.6125	1.6733
$\delta = 0.8$	1.3784	1.0954	2.1213	2.1213

TABLE 5.1 – Comparaison des niveaux de performance H_∞ obtenus dans différents domaines fréquentiels et pour différentes valeur de δ

Supposons maintenant que $\delta = 0.35$. Les paramètres obtenus par le théorème (24) sont les suivants :

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1.0208, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 0.7866 & -0.2693 \\ -0.3414 & 0.6363 \end{bmatrix}, \\a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0763 & 0.0382 \\ -0.1656 & 0.2037 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.1622 & 0.1493 \\ -0.1136 & 0.1098 \end{bmatrix}, \\b_{f1} &= \begin{bmatrix} 0.3811 \\ -0.3639 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.2405 \\ -0.2278 \end{bmatrix}, \\c_{f1} &= [0.3211 \ -0.5517], & c_{f2} &= [0.0457 \ -0.1190], \\d_{f1} &= 0.4670, & d_{f2} &= 0.9144.\end{aligned}$$

sur toute la plage de fréquences.

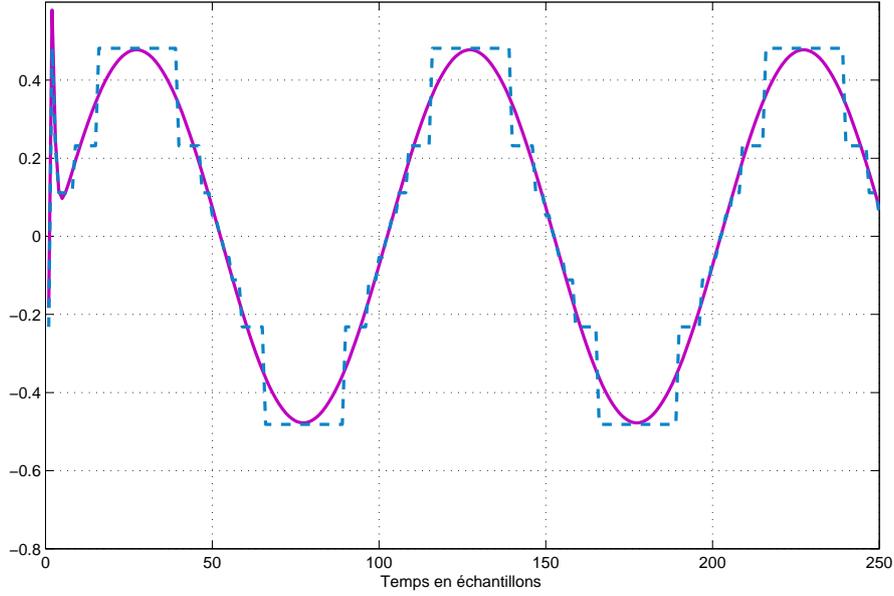


FIGURE 5.1 – Courbe continue : $y(k)$ / courbe en pointillé : $\tilde{y}(k)$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1.0770, & \varphi_4 &= \begin{bmatrix} 1.0511 & -0.0729 \\ -0.1010 & 0.7092 \end{bmatrix}, \\ a_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.0996 & 0.2159 \\ 0.0466 & 0.2659 \end{bmatrix}, & a_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.0830 & 0.2033 \\ 0.0416 & -0.1944 \end{bmatrix}, \\ b_{f1} &= \begin{bmatrix} -0.1883 \\ -0.6132 \end{bmatrix}, & b_{f2} &= \begin{bmatrix} -0.3149 \\ -0.2314 \end{bmatrix}, \\ c_{f1} &= [0.1089 \quad -0.3236], & c_{f2} &= [-0.0168 \quad 0.0272], \\ d_{f1} &= 1.3784, & d_{f2} &= 1.0493. \end{aligned}$$

dans le domaine basses fréquences ($|\theta| \leq \frac{\pi}{15}$).

Supposons que $w(k) = \sin(\frac{2\pi}{100}k)$, ce signal appartient au domaine basses fréquences ($|\theta| \leq \frac{\pi}{15}$).

Connectant les filtres obtenus au système original, nous pouvons voir dans la figure 1 la sortie mesurée $y(k)$ avant et après quantification, et le suivi de $z(k)$ dans les figures (2 – 3).

D'après les figures (2 – 3), il est clair que le filtre conçu en fonction du domaine fréquentiel fini du bruit donne une meilleure estimation en comparaison avec le filtre trouvé indépendamment du domaine fréquentiel Θ .

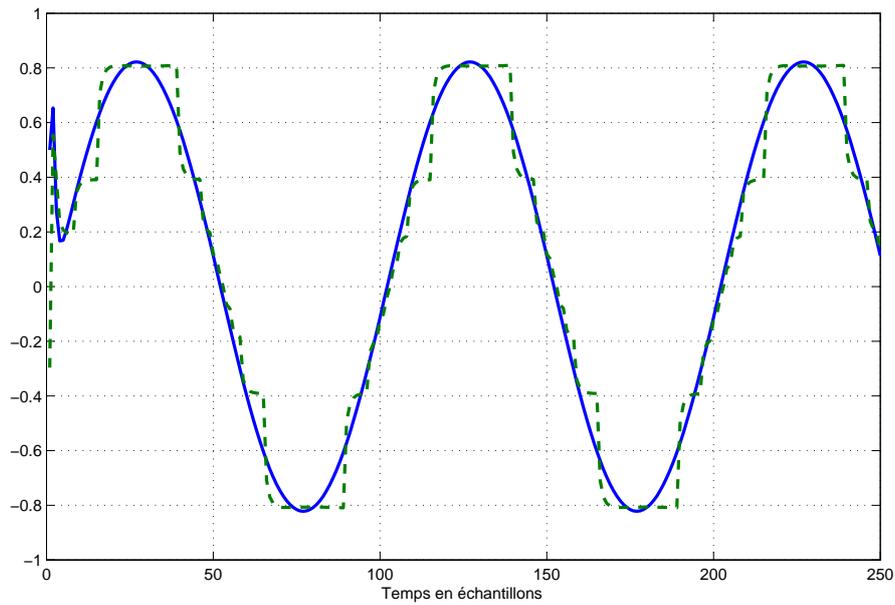


FIGURE 5.2 – Suivi de $z(k)$ pour $|\theta| \leq \frac{\pi}{15}$ et $w(k) = \sin(\frac{2\pi}{100}k)$: courbe en pointillé : $z_f(k)$ / courbe continue : $z(k)$

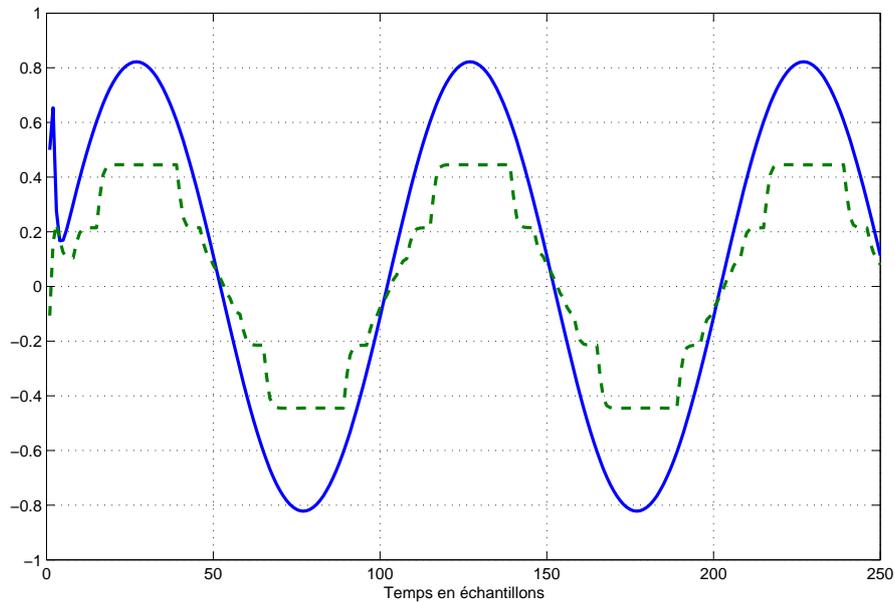


FIGURE 5.3 – Suivi de $z(k)$ pour toute valeur de θ et $w(k) = \sin(\frac{2\pi}{100}k)$: courbe en pointillé : $z_f(k)$ / courbe continue : $z(k)$

5.3 Filtrage H_∞ des systèmes linéaires à retard constant avec mesures quantifiées

Dans cette partie, nous développons une nouvelle approche LMI permettant de résoudre le problème de filtrage H_∞ , dans un domaine fréquentiel fini, pour les systèmes discrets à retard constant avec mesures quantifiées.

5.3.1 Formulation du problème

La représentation d'état du système à retard considéré dans cette section est donnée par :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-d) + Bw(k), \\ y(k) &= Cx(k) + C_d x(k-d) + Dw(k), \\ z(k) &= Hx(k), \end{aligned} \quad (5.43)$$

où $x(k) \in R^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(k) \in R^{n_y}$ désigne la sortie mesurée, $z(k) \in R^{n_z}$ est la sortie non mesurée à estimer, $w(k) \in R^{n_w}$ représente le bruit appartenant à $\ell_2[0, \infty)$ et à un domaine fréquentiel connu, d désigne le retard constant. $(A, A_d, B, C, D_d, D, H)$ sont des matrices constantes et connues.

La sortie $y(k)$ est supposée être quantifiée par un quantificateur logarithmique, noté $g(y(k))$, avant d'être transmise au filtre.

Comme dans la section précédente, nous écrivons la sortie quantifiée comme suit :

$$g(y(k)) = (I + \Delta(k))y(k) \quad (5.44)$$

où $\Delta(k) = \text{diag} \{ \Delta^{(1)}(k), \Delta^{(2)}(k), \dots, \Delta^{(n_y)}(k) \}$ et $|\Delta^{(j)}(k)| \leq \delta_j$

δ_j est une constante positive et fonction de la densité de quantification :

$$\delta_j = \frac{1 - \chi_j}{1 + \chi_j}, \quad 0 < \chi_j < 1 \quad (5.45)$$

pour $j = (1, 2, \dots, n_y)$.

Nous proposons un filtre de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f \tilde{y}(k), \\ z_f(k) &= C_f x_f(k) + D_f \tilde{y}(k), \\ \tilde{y}(k) &= g(y(k)) \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $\tilde{y}(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie reconstruite et l'entrée du filtre. Les matrices A_f , B_f , C_f , et D_f sont les paramètres du filtre à déterminer.

Le système à état augmenté est alors donné par :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \tilde{A} \hat{x}(k) + \tilde{A}_d E \hat{x}(k-d) + \tilde{B} w(k) \\ e(k) &= \tilde{C} \hat{x}(k) + \tilde{C}_d E \hat{x}(k-d) + \tilde{D} w(k) \end{aligned} \quad (5.47)$$

avec $e(k) = z(k) - z_f(k)$ représente l'erreur d'estimation, $\hat{x}(k) = [x^T(k) \quad x_f^T(k)]^T$ et :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_f C & A_f \end{bmatrix} + [0 \quad B_f^T]^T \bar{\Delta}(k) [\delta C \quad 0], \quad \tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_d \\ B_f C_d \end{bmatrix} + [0 \quad B_f^T]^T \bar{\Delta}(k) \delta C_d,$$

$$\tilde{C} = [-D_f C \quad -C_f] - D_f \bar{\Delta}(k) [\delta C \quad 0], \quad \tilde{C}_d = -D_f C_d - D_f \bar{\Delta}(k) \delta C_d,$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix} + [0 \quad B_f^T]^T \bar{\Delta}(k) \delta D, \quad \tilde{D} = -D_f D - D_f \bar{\Delta}(k) \delta D,$$

$$E = [I_{n_x} \quad 0_{n_x \times n_x}], \quad \bar{\Delta}(k) = \Delta(k) \delta^{-1}, \quad \text{et} \quad \delta = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_y} \}.$$

Le problème à résoudre est de trouver les paramètres du filtre (5.46) tels que :

(a) la performance H_∞ suivante est vérifiée pour un réel $\gamma > 0$:

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{\|e\|_2}{\|w\|_2} \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5.48)$$

(b) le système augmenté représenté par (5.47) est asymptotiquement stable quand $w(k) = 0$, θ désigne la fréquence du bruit $w(k)$, et son intervalle Θ est supposé connu, voir le tableau (2.2), page 38.

5.3.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Dans cette section, nous supposons que les paramètres du filtre sont connus. Nous développons dans le théorème suivant des conditions suffisantes garantissant (a).

Théorème 25. *Considérons le système (5.43) avec un bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini et connu. Soient (γ, β, δ) des scalaires positifs et (r, t) deux entiers positifs tels que $d = rt$. L'erreur d'estimation générée par le filtre (5.46) vérifie (5.48) s'il existe des matrices $\varphi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_2 \in R^{n_z \times n_x}$, $\varphi_i \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\varphi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_6 \in R^{((4+2r)n_x + n_w) \times n_x}$, $P = P^T$, $Q = Q^T > 0$, $F, N, G = G^T > 0$, $S = S^T > 0$, $\in R^{2n_x \times 2n_x}$, $V \in R^{n_w \times 2n_x}$, $M \in H^{2rn_x \times 2n_x}$, $R_{11} = R_{11}^T, \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_{12}, \in R^{2n_x \times 2(r-1)n_x}$, $R_{13} = R_{13}^T, \in R^{2(r-1)n_x \times 2(r-1)n_x}$ telles que :*

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{13} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.49)$$

$$\Pi + He\{\Upsilon\} < 0 \quad (5.50)$$

où :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_1(H - D_f C) + \varphi_2 A & -\varphi_1 C_f & \Upsilon_{16} & \Upsilon_{17} & 0 \\ 0 & -\varphi_3 & -\varphi_4 & \varphi_3 A + \varphi_4 B_f C & \varphi_4 A_f & \begin{pmatrix} \varphi_3 A_d E_1 \\ +\varphi_4 B_f C_d E_1 \end{pmatrix} & \varphi_3 B + \varphi_4 B_f D & 0 \\ 0 & -\varphi_5 & -\varphi_4 & \varphi_5 A + \varphi_4 B_f C & \varphi_4 A_f & \begin{pmatrix} \varphi_5 A_d E_1 \\ +\varphi_4 B_f C_d E_1 \end{pmatrix} & \varphi_5 B + \varphi_4 B_f D & 0 \\ 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_6 A & 0 & \varphi_6 A_d E_1 & \varphi_6 B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Upsilon_{16} = \varphi_1(H_d - D_f C_d)E_1 + \varphi_2 A_d E_1$$

$$\Upsilon_{17} = \varphi_1(L - D_f D) + \varphi_2 B$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta\varphi_1 D_f & 0 \\ \bullet & 0 & F^T & M^T & V^T & N^T & \begin{bmatrix} \beta\varphi_4 B_f \\ \beta\varphi_4 B_f \end{bmatrix} & 0 \\ \bullet & \bullet & \Pi_{33} & GE_3 + R_{12}E_2 & 0 & \Pi_{36} & 0 & \begin{bmatrix} \delta C^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{13} E_2 - R \\ -E_3^T G E_3 \end{pmatrix} & 0 & -M & 0 & \delta(C_d E_1)^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_m & -V & 0 & \delta D^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S + t^2 G - P - N - N^T & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 \\ \bullet & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

avec : $\Pi_{36} = -F - t^2 G + Q$
 $\Pi_{33} = P - 2 \cos(\theta_b) Q + R_{11} + (t^2 - 1) G - S$
pour un domaine de basses fréquences

$\Pi_{36} = -F - t^2 G + e^{-j\theta_c} Q$
 $\Pi_{33} = P - 2 \cos(\theta_w) Q + R_{11} + (t^2 - 1) G - S$
pour un domaine de moyennes fréquences, $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2) / 2$.

$\Pi_{36} = -F - t^2 G - Q$
 $\Pi_{33} = P + 2 \cos(\theta_h) Q + R_{11} + (t^2 - 1) G - S$
pour un domaine de hautes fréquences

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times 2(r-1)n_x} & I_{n_x} & 0_{n_x \times n_x} \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} I_{2(r-1)n_x} & 0_{2(r-1)n_x \times 2n_x} \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} I_{2n_x} & 0_{2n_x \times 2(r-1)n_x} \end{bmatrix}.$$

Preuve : Nous allons démontrer l'inégalité (5.50) dans le cas où $w(k)$ appartient à un domaine moyennes fréquences, c-à-d : $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

D'après le lemme 6 du chapitre 2, la contrainte (5.48) est vérifiée pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ si :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k) e(k) \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k) w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2[0, \infty) \quad (5.51)$$

et avec des conditions initiales nulles :

$$e^{j\theta\omega} \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \leq 0 \quad (5.52)$$

Nous définissons les vecteurs : $\kappa_x = \hat{x}(k+1) - \hat{x}(k)$, et $J = \text{col} \{ \hat{x}(k-t), \dots, \hat{x}(k-rt) \}$.

En appliquant la technique de partitionnement de retard, $d = rt$, ce qui donne r fractions, nous considérons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V(k) = \hat{x}^T(k) S \hat{x}(k) + \sum_{i=k-t}^{k-1} J^T(i+t) R J(i+t) + t \sum_{i=-t}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \kappa_x^T(j) G \kappa_x(j) \quad (5.53)$$

où S , R et G sont des matrices définies positives et symétriques de dimensions appropriées.

En suivant le même raisonnement que dans le théorème 19 (page 87), nous obtenons :

$$\Delta V(k) \leq \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\text{où : } \varpi = \begin{bmatrix} R_{11} + (t^2 - 1)G - S & GE_3 + R_{12}E_2 & -t^2G \\ \bullet & E_2^T R_{13}E_2 - R - E_3^T GE_3 & 0 \\ \bullet & \bullet & S + t^2G \end{bmatrix}$$

Nous définissons l'indice de performance H_∞ comme suit :

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k)) \quad (5.55)$$

Avec des conditions initiales nulles et $V_\infty > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} J &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + V_\infty - V_0) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + \Delta V(k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) + \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Compte tenu de l'inégalité (5.54) et des expressions de $e(k)$ et de $\hat{x}(k+1)$ dans (5.47), nous avons :

$$J \leq \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right. \\ \left. \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \end{bmatrix}$$

Ainsi l'inégalité (5.51) est vérifiée si l'inégalité suivante l'est également :

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Maintenant, nous définissons les matrices matrices P et $Q \in R^{2n_x \times 2n_x}$ et la matrice U telles que $Q > 0$ et :

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.58)$$

Nous multiplions (5.58) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T U \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall U \in \mathfrak{N} \quad (5.59)$$

où :

$$\mathfrak{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, P = P^T, Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x} \right\}$$

En faisant la somme de (5.59) de $k = 0$ jusqu'à ∞ , en supposant que (5.47) est asymptotiquement stable et que $\hat{x}(0) = 0$, il vient :

$$\text{trace} \left\{ -e^{j\theta_\omega} Q \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \right\} \geq 0 \quad (5.60)$$

Comme $Q > 0$, donc nous pouvons déduire que l'inégalité (5.52) est vérifiée à partir de (5.59).

Appliquons le lemme de la S-procédure généralisée (page 43) sur les inégalités (5.57) et (5.59), nous aurons :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix}^T \varpi \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & e^{j\theta_c} Q \\ e^{-j\theta_c} Q & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

En multipliant l'inégalité (5.61) par $[\hat{x}^T(k) \quad J(k)^T \quad w^T(k)]$ à gauche et sa transposée à droite, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & GE_3 + R_{12}E_2 + \tilde{C}^T C_d E_1 & \tilde{C}^T \tilde{D} & -t^2 G + e^{-j\theta_c} Q \\ \bullet & \varepsilon_{22} & E_1^T \tilde{C}_d^T \tilde{D} & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma^2 I + \tilde{D}^T \tilde{D} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -P + S + t^2 G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \text{où : } \quad \varepsilon_{11} &= P - 2 \cos \theta_\omega Q + \tilde{C}^T \tilde{C} + R_{11} + (t^2 - 1)G - S, \\ \varepsilon_{22} &= E_2^T R_{13} E_2 - R - E_3^T G E_3 + E_1^T \tilde{C}_d^T \tilde{C}_d E_1. \end{aligned}$$

A partir de (5.47), on a :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.63)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii) avec :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & GE_3 + R_{12}E_2 + \tilde{C}^T C_d E_1 & \tilde{C}^T \tilde{D} & -t^2 G + e^{-j\theta_c} Q \\ \bullet & \varepsilon_{22} & E_1^T \tilde{C}_d^T \tilde{D} & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma^2 I + \tilde{D}^T \tilde{D} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & -P + S + t^2 G \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ w(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \Xi = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & -I \end{bmatrix}.$$

Nous en déduisons que l'inégalité (5.62) est satisfaite s'il existe des matrices F, M, V et N de dimensions appropriées tels que l'inégalité suivante l'est également :

$$\Upsilon + He \left\{ \begin{bmatrix} F \\ M \\ V \\ N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & -I \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.64)$$

Nous réécrivons l'inégalité (5.64) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T \Sigma \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.65)$$

où :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & F^T & M^T & V^T & N^T \\ \bullet & \bullet & \left(\begin{array}{c} P - 2 \cos(\theta_w) Q + \\ R_{11} + (t^2 - 1) G - S \end{array} \right) & G E_3 + R_{12} E_2 & 0 & -F - t^2 G + e^{-j\theta_c} Q \\ \bullet & \bullet & \bullet & E_2^T R_{13} E_2 - R - E_3^T G E_3 & 0 & -M \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I & -V \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \left(\begin{array}{c} S + t^2 G - P \\ -N - N^T \end{array} \right) \end{bmatrix}$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} & 0 \\ 0 & -I & \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & 0 \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} & 0 \\ \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

En appliquant le lemme de Finsler encore une deuxième fois (ii et iii), il vient que l'inégalité (5.21) est faisable s'il existe une matrice $\varphi \in R^{(6n_x + n_z + n_w + 2rn_x) \times (n_z + 2n_x)}$ telle que :

$$\Sigma + He \left\{ \varphi \begin{bmatrix} -I & 0 & \tilde{C} & \tilde{C}_d E_1 & \tilde{D} & 0 \\ 0 & -I & \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & \tilde{B} & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.67)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice φ :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_3 & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_5 & \varphi_4 \\ 0 & \varphi_6 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Ainsi l'inégalité (5.67) devient :

$$\Sigma + He \{ \Gamma \} < 0 \quad (5.69)$$

où :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_1(H - D_f C - D_f \bar{\Delta} \delta C) + \varphi_2 A & -\varphi_1 C_f \\ 0 & -\varphi_3 & -\varphi_4 & \varphi_3 A + \varphi_4 (B_f C + B_f \bar{\Delta} \delta C) & \varphi_4 A_f \\ 0 & -\varphi_5 & -\varphi_4 & \varphi_5 A + \varphi_4 (B_f C + B_f \bar{\Delta} \delta C) & \varphi_4 A_f \\ 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_6 A & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(-D_f C_d - D_f \bar{\Delta} \delta C_d) E_1 + \varphi_2 A_d E_1 & \varphi_1(-D_f D - D_f \bar{\Delta} \delta D) + \varphi_2 B & 0 \\ \varphi_3 A_d E_1 + \varphi_4 (B_f C_d + \bar{\Delta} \delta C_d) E_1 & \varphi_3 B + \varphi_4 (B_f D + B_f \bar{\Delta} \delta D) & 0 \\ \varphi_5 A_d E_1 + \varphi_4 (B_f C_d + \bar{\Delta} \delta C_d) E_1 & \varphi_5 B + \varphi_4 (B_f D + B_f \bar{\Delta} \delta D) & 0 \\ \varphi_6 A_d E_1 & \varphi_6 B & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Appliquons le lemme de séparation (page 43), avec $\bar{\Delta}(k) = \Delta(k)\delta^{-1}$, $\kappa(k) = \bar{\Delta}(k)$ et :

$$\Upsilon_1 = \Sigma + He \left\{ \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_1(H - D_f C) + \varphi_2 A & -\varphi_1 C_f \\ 0 & -\varphi_3 & -\varphi_4 & \varphi_3 A + \varphi_4 B_f C & \varphi_4 A_f \\ 0 & -\varphi_5 & -\varphi_4 & \varphi_5 A + \varphi_4 B_f C & \varphi_4 A_f \\ 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_6 A & 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} -\varphi_1 D_f C_d E_1 + \varphi_2 A_d E_1 & -\varphi_1 D_f D + \varphi_2 B & 0 \\ \varphi_3 A_d E_1 + \varphi_4 B_f C_d E_1 & \varphi_3 B + \varphi_4 B_f D & 0 \\ \varphi_5 A_d E_1 + \varphi_4 B_f C_d E_1 & \varphi_5 B + \varphi_4 B_f D & 0 \\ \varphi_6 A_d E_1 & \varphi_6 B & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Upsilon_2 = [0 \ 0 \ 0 \ \delta C \ 0 \ \delta C_d E_1 \ \delta D \ 0]$$

$$\Upsilon_3 = [-D_f^T \varphi_1^T \ B_f^T \varphi_4^T \ B_f^T \varphi_4^T \ 0]^T$$

(5.69) est vérifiée s'il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que la suivante l'est :

$$\Upsilon_1 + \beta \Upsilon_3 \Upsilon_3^T + \beta^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2 < 0 \quad (5.71)$$

Finalement, en appliquant un complément de Schur sur les termes des matrices $\beta \Upsilon_3 \Upsilon_3^T$ et $\beta^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2$, l'équation (5.71) implique (5.50) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$, ce qui achève la preuve.

La démonstration du théorème (25) pour les domaines basses ($|\theta| \leq \theta_b$) et hautes fréquences ($|\theta| \geq \theta_h$) est basée exactement sur les mêmes étapes que celles du domaine moyennes fréquences ($\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$). La différence réside dans les blocs Π_{36} et Π_{33} de la matrice Π .

5.3.3 Étude de stabilité du système augmenté

L'idée fondamentale de cette section consiste à établir une condition suffisante garantissant la contrainte (b).

Théorème 26. *Considérons le système (5.43) et le filtre décrit dans (5.46). Étant donné (δ, β_s) deux scalaires positifs et (r, t) deux entiers positifs tels que : $d = rt$. Le système augmenté décrit par (5.47) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $\varphi_{s1} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s2} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s3} \in R^{(2rn_x + 2n_x) \times n_x}$, $F_s, N_s, G_s = G_s^T > 0$, $S_s = S_s^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $M_s \in H^{2rn_x \times 2n_x}$, $R_{s11} = R_{s11}^T \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_{s12} \in R^{2n_x \times 2(r-1)n_x}$, $R_{s13} = R_{s13}^T \in R^{2(r-1)n_x \times 2(r-1)n_x}$ telles que :*

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} \\ R_{s12}^T & R_{s13} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.72)$$

$$\Pi_s + He\{\Upsilon_s\} < 0 \quad (5.73)$$

où :

$$\Upsilon_s = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_4 & \varphi_{s1}A + \varphi_4B_fC & \varphi_4A_f & \varphi_{s1}A_dE_1 + \varphi_4B_fC_dE_1 & 0 \\ -\varphi_{s2} & -\varphi_4 & \varphi_{s2}A + \varphi_4B_fC & \varphi_4A_f & \varphi_{s2}A_dE_1 + \varphi_4B_fC_dE_1 & 0 \\ -\varphi_{s3} & 0 & \varphi_{s3}A & 0 & \varphi_{s3}A_dE_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_s = \begin{bmatrix} 0 & F_s^T & M_s^T & N_s^T & \begin{bmatrix} \beta_s\varphi_4B_f \\ \beta_s\varphi_4B_f \end{bmatrix} & 0 \\ \bullet & R_{s11} + (t^2 - 1)G_s - S_s & G_sE_3 + R_{s12}E_2 & -F_s - t^2G_s & 0 & [\delta C \ 0]^T \\ \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{s13} E_2 - R_s \\ -E_3^T G_s E_3 \end{pmatrix} & -M_s & 0 & \delta(C_d E_1)^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} S_s + t^2 G_s \\ -N_s - N_s^T \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous supposons que $w(k) = 0$, il nous reste :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} = 0 \quad (5.74)$$

Nous considérons la fonction de Lyapunov-Krasovskii suivante :

$$V_s(k) = \hat{x}^T(k) S_s \hat{x}(k) + \sum_{i=k-t}^{k-1} J^T(i+t) R_s J(i+t) + t \sum_{i=-t}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \kappa_x^T(j) G_s \kappa_x(j). \quad (5.75)$$

où S_s , R_s et G_s sont des matrices définies positives de dimensions appropriées.

En suivant le même raisonnement utilisé pour $V(k)$ dans la section précédente, nous pouvons prouver que la variation de $V_s(k)$ le long des trajectoires du système augmenté (5.47) est donnée par :

$$\Delta V_s(k) \leq \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{s11} + (t^2 - 1)G_s - S_s & G_s E_3 + R_{s12} E_2 & -t^2 G_s \\ \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{s13} E_2 - R_s \\ -E_3^T G_s E_3 \end{pmatrix} & 0 \\ \bullet & \bullet & S_s + t^2 G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Ainsi, le système augmenté représenté dans (5.47) est asymptotiquement stable si :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{s11} + (t^2 - 1)G_s - S_s & G_s E_3 + R_{s12} E_2 & -t^2 G_s \\ \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{s13} E_2 - R_s \\ -E_3^T G_s E_3 \end{pmatrix} & 0 \\ \bullet & \bullet & S_s + t^2 G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix} \leq 0 \quad (5.77)$$

Appliquons le lemme de Finsler (page 42) (i et iii), avec :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ J(k) \\ \hat{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{bmatrix} R_{s11} + (t^2 - 1)G_s - S_s & G_s E_3 + R_{s12} E_2 & -t^2 G_s \\ \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{s13} E_2 - R_s \\ -E_3^T G_s E_3 \end{pmatrix} & 0 \\ \bullet & \bullet & S_s + t^2 G_s \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \Xi = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & -I \end{bmatrix}.$$

On en déduit que l'inégalité (5.77) est faisable s'il existe des matrices F_s , M_s et N_s tels que :

$$\Psi + He \left\{ \begin{bmatrix} F_s \\ M_s \\ N_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{A}_d E_1 & -I \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.78)$$

Ensuite, nous pouvons aisément vérifier que (5.78) est équivalente à (5.73) en suivant les mêmes étapes de démonstration du théorème (25).

5.3.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Nous développons ci-après des conditions suffisantes pour construire le filtre stable optimal qui répond aux exigences (a) et (b).

Théorème 27. *Soit (δ, β, β_s) des scalaires positifs et (r, t) deux entiers positifs tels que $(d = rt)$. Considérons le système (5.43) Le filtre (5.46) stable qui garantit une performance H_∞ optimale du système (5.47) peut être obtenu si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (5.79) sous les contraintes LMI (5.80 - 5.83) pour des matrices symétriques définies positives $Q, G, G_s, S, S_s, R_{11}, R_{s11} \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $R_{13} = R_{13}^T$, $R_{s13} = R_{s13}^T \in R^{2(r-1)n_x \times 2(r-1)n_x}$, des matrices $\varphi_1 \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_2 \in R^{n_z \times n_x}$, $\varphi_i \in R^{n_x \times n_x}$, ($i = 3, 5$), $\varphi_4 \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_6 \in R^{((4+2r)n_x + n_w) \times n_x}$, $\varphi_{s1} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s2} \in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s3} \in R^{(2rn_x + 2n_x) \times n_x}$, $P = P^T$, $F, N, F_s, N_s, \in R^{2n_x \times 2n_x}$, $V \in R^{n_w \times 2n_x}$, $M, M_s \in H^{2rn_x \times 2n_x}$, $R_{12}, R_{s12} \in R^{2n_x \times 2(r-1)n_x}$, $a_f \in R^{n_x \times n_x}$, $b_f \in R^{n_x \times n_y}$, $c_f \in R^{n_z \times n_x}$, $d_f \in R^{n_z \times n_y}$:*

$$\min_{\substack{Q, G, G_s, S, S_s, P, F, F_s, N, N_s, M, M_s, V, R_{11}, R_{s11}, R_{12}, R_{s12}, \\ \varphi_k, (k = 1, \dots, 6), \varphi_{sk}, (k = 1, 2, 3), a_f, b_f, c_f, d_f}} \gamma \quad (5.79)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^T & R_{13} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.80)$$

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{s11} & R_{s12} \\ R_{s12}^T & R_{s13} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.81)$$

$$\tilde{\Pi} + He\{\tilde{\Upsilon}\} < 0 \quad (5.82)$$

$$\tilde{\Pi}_s + He\{\tilde{\Upsilon}_s\} < 0 \quad (5.83)$$

où :

$$\tilde{\Pi} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta d_f & 0 \\ \bullet & 0 & F^T & M^T & V^T & N^T & [\beta b_f^T & \beta b_f^T]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & \Pi_{33} & GE_3 + R_{12}E_2 & 0 & \Pi_{36} & 0 & [\delta C & 0]^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{13} E_2 - R \\ -E_3^T G E_3 \end{pmatrix} & 0 & -M & 0 & \delta (C_d E_1)^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_m & -V & 0 & \delta D^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} S + t^2 G - P \\ -N - N^T \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 \\ \bullet & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

avec : $\Pi_{36} = -F - t^2 G + Q$

$$\Pi_{33} = P - 2 \cos(\theta_b)Q + R_{11} + (t^2 - 1)G - S$$

pour un domaine basses fréquences

$$\Pi_{36} = -F - t^2G + e^{-j\theta_c}Q$$

$$\Pi_{33} = P - 2 \cos(\theta_w)Q + R_{11} + (t^2 - 1)G - S$$

pour un domaine moyennes fréquences, $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$ et $\theta_w = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

$$\Pi_{36} = -F - t^2G - Q$$

$$\Pi_{33} = P + 2 \cos(\theta_h)Q + R_{11} + (t^2 - 1)G - S$$

pour un domaine hautes fréquences

$$\tilde{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & 0 & \varphi_1 H - d_f C + \varphi_2 A & -c_f & -d_f C_d E_1 + \varphi_2 A_d E_1 & -d_f D + \varphi_2 B & 0 \\ 0 & -\varphi_3 & -\varphi_4 & \varphi_3 A + b_f C & a_f & \varphi_3 A_d E_1 + b_f C_d E_1 & \varphi_3 B + b_f D & 0 \\ 0 & -\varphi_5 & -\varphi_4 & \varphi_5 A + b_f C & a_f & \varphi_5 A_d E_1 + b_f C_d E_1 & \varphi_5 B + b_f D & 0 \\ 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_6 A & 0 & \varphi_6 A_d E_1 & \varphi_6 B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Pi}_s = \begin{bmatrix} 0 & F_s^T & M_s^T & N_s^T & \begin{bmatrix} \beta_s b_f \\ \beta_s b_f \end{bmatrix} & 0 \\ \bullet & R_{s11} + (t^2 - 1)G_s - S_s & G_s E_3 + R_{s12} E_2 & -F_s - t^2 G_s & 0 & [\delta C \ 0]^T \\ \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} E_2^T R_{s13} E_2 - R_s \\ -E_3^T G_s E_3 \end{pmatrix} & -M_s & 0 & \delta (C_d E_1)^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \begin{pmatrix} S_s + t^2 G_s \\ -N_s - N_s^T \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Upsilon}_s = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_4 & \varphi_{s1} A + b_f C & a_f & \varphi_{s1} A_d E_1 + b_f C_d E_1 & 0 \\ -\varphi_{s2} & -\varphi_4 & \varphi_{s2} A + b_f C & a_f & \varphi_{s2} A_d E_1 + b_f C_d E_1 & 0 \\ -\varphi_{s3} & 0 & \varphi_{s3} A & 0 & \varphi_{s3} A_d E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, les paramètres du filtre sont alors donnés par :

$$A_f = \varphi_4^{-1} a_f, \quad B_f = \varphi_4^{-1} b_f, \quad C_f = \varphi_1^{-1} c_f, \quad D_f = \varphi_1^{-1} d_f \quad (5.84)$$

Preuve : Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer les inégalités des théorèmes 25 et 26 avec les changements de variables suivants :

$$a_f = \varphi_4 A_f, \quad b_f = \varphi_4 B_f, \quad c_f = \varphi_1 C_f, \quad d_f = \varphi_1 D_f$$

5.3.5 Exemple de simulation

Nous choisissons le système linéaire à temps discret et à retard constant suivant :

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.2 & 0.03 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k-8) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k)$$

$$y(k) = [1 \ 0] x(k) + [0.5 \ 0] x(k-8) + w(k)$$

$$z(k) = [0 \ 1] x(k)$$

Le paramètre du quantificateur δ est supposé égal à 0.03 et les scalaires β et β_s sont choisis comme suit : $\beta = \beta_s = 0.01$.

Une comparaison des valeurs du niveau de performance H_∞ atteintes au moyen du théorème 27 dans différents domaines fréquentiels, avec et sans partitionnement de retard, pour deux valeurs différentes de δ est donnée dans les tableaux ci-dessous.

Θ	$ \theta \leq \pi/15$	$\pi/8 \leq \theta \leq \pi/4$	$ \theta \geq \pi/2$	$\forall \theta$
$r = 1/t = 8$	5.5678	3.1623	0.3873	6.4807
$r = 8/t = 1$	3.7417	2.915	0.36	5

TABLE 5.2 – Comparaison des valeurs de γ obtenues dans différents domaines fréquentiels avec et sans partitionnement de retard pour $\delta = 0.3$

Θ	$ \theta \leq \pi/15$	$\pi/8 \leq \theta \leq \pi/4$	$ \theta \geq \pi/2$	$\forall \theta$
$r = 1/t = 8$	6.7082	3	0.707	7.6811
$r = 8/t = 1$	4.69	3	0.6928	5.8310

TABLE 5.3 – Comparaison des valeurs de γ obtenues dans différents domaines fréquentiels avec et sans partitionnement de retard pour $\delta = 0.6$

Ci-dessous les paramètres de filtres obtenus au moyen du théorème 27 dans le domaine hautes fréquences et sur toute la plage de fréquences pour $r = 8$, $t = 1$ et $\delta = 0.3$:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.3708 & 0.1480 \\ -1.8481 & 0.6116 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0.0635 \\ -0.9443 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [1.1862 \quad -0.6754], \quad D_f = -0.1464.$$

dans le domaine hautes fréquences $|\theta| \geq \frac{\pi}{2}$.

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.4326 & -0.0250 \\ -0.2458 & 0.6489 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -0.3256 \\ -0.1968 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [1.4335 \quad -1.4995], \quad D_f = 0.9009.$$

pour toute valeur de θ .

Connectant les filtres obtenus au système original, les figures (5.4, 5.5) montrent l'erreur d'estimation et la valeur de $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) / \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}$ atteintes par les deux filtres pour $w(k) = \sin(1.6k)$.

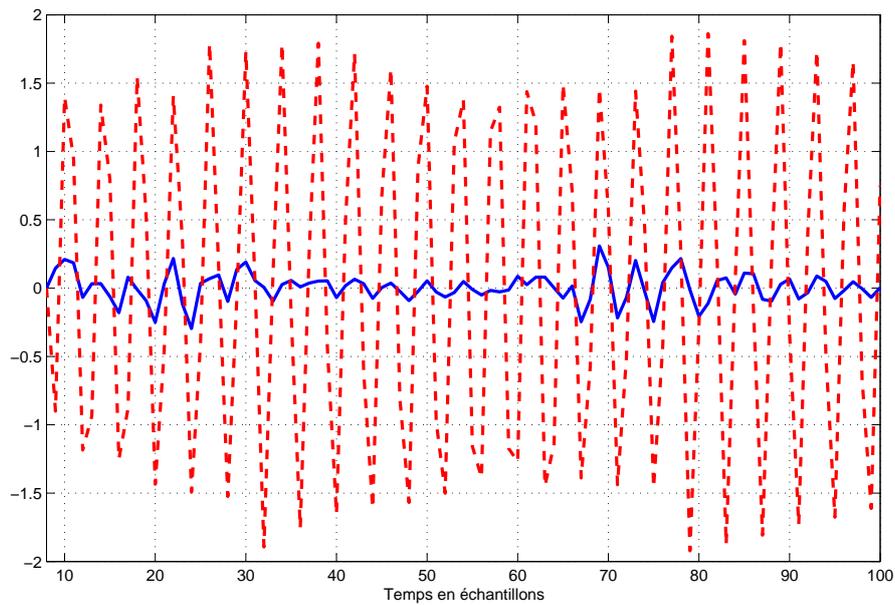


FIGURE 5.4 – L'erreur d'estimation $e(k)$ pour $w(k) = \sin(1.6k)$: courbe en pointillé : $\forall \theta$ / courbe continue : $|\theta| \geq \frac{\pi}{2}$

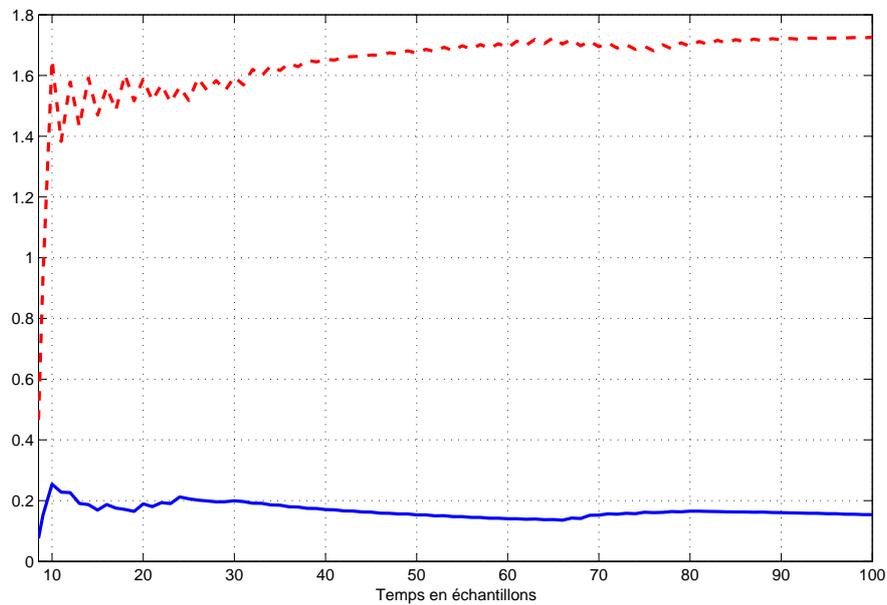


FIGURE 5.5 – Valeur de $\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$ pour $w(k) = \sin(1.6k)$: courbe en pointillé : $\forall \theta$ / courbe continue : $|\theta| \geq \frac{\pi}{2}$

5.4 Filtrage H_∞ des systèmes linéaires avec mesures quantifiées et pertes de paquets

Dans cette section, nous allons présenter une nouvelle approche de filtrage H_∞ , dans un domaine fréquentiel fini, pour les systèmes discrets avec mesures quantifiées soumis à des pertes de paquets.

5.4.1 Formulation du problème

Considérons un système linéaire à temps discret dont la représentation d'état est la suivante :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bw(k), & A \in R^{n_x \times n_x}, B \in R^{n_x \times n_w}, \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k), & C \in R^{n_y \times n_x}, D \in R^{n_y \times n_w}, \\ z(k) &= Hx(k), & H \in R^{n_z \times n_x}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Rappelons que $x(k) \in R^{n_x}$ est le vecteur d'état, $y(k) \in R^{n_y}$ désigne la sortie mesurée, $z(k) \in R^{n_z}$ est la sortie non mesurée à estimer, $w(k) \in R^{n_w}$ représente le bruit d'entrée appartenant à $\ell_2[0, \infty)$ et à un domaine fréquentiel connu. (A, B, C, D, H) sont des matrices constantes et connues.

La sortie $y(k)$ est supposée être quantifiée par un quantificateur logarithmique avant d'être transmise au filtre.

Comme dans les deux sections précédentes, nous écrivons la sortie quantifiée de la manière suivante :

$$y_q(k) = g(y(k)) = (I + \Delta(k))y(k) \quad (5.86)$$

où $\Delta(k) = \text{diag} \{ \Delta^{(1)}(k), \Delta^{(2)}(k), \dots, \Delta^{(n_y)}(k) \}$ et $|\Delta^{(j)}(k)| \leq \delta_j$

Le filtre proposé se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_f(k+1) &= A_f x_f(k) + B_f \tilde{y}(k), \\ z_f(k) &= C_f x_f(k) + D_f \tilde{y}(k), \end{aligned} \quad (5.87)$$

où $x_f(k)$, $z_f(k)$, et $\tilde{y}(k)$ désignent respectivement le vecteur d'état, la sortie supposée donner une estimation du vecteur $z(k)$ et l'entrée du filtre. Les matrices A_f , B_f , C_f , et D_f sont les paramètres du filtre à rechercher.

En raison de la non perfection des canaux de communication, l'entrée du filtre $\tilde{y}(k)$ peut être différente de sortie quantifiée du système notée $y_q(k)$, c-à-d les données peuvent être perdues lors de la transmission. Dans ce travail, la perte de paquets dans le canal de transmission est prise en compte comme suit :

$$\tilde{y}(k) = \varepsilon(k)y_q(k) \quad (5.88)$$

où $\varepsilon(k)$ est une variable stochastique satisfaisant la distribution de Bernoulli, utilisée pour caractériser l'effet de perte des données.

Lorsque les données sont perdues : $\varepsilon(k) = 0$, sinon $\varepsilon(k) = 1$.

$$Pr \{ \varepsilon(k) = 1 \} = E \{ \varepsilon(k) \} = \varepsilon \quad \text{et} \quad Pr \{ \varepsilon(k) = 0 \} = 1 - \varepsilon$$

A partir des équations (5.85) et (5.87), le système à état augmenté peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= (\hat{A} + \hat{A}_{\varepsilon_k})\hat{x}(k) + (\hat{B} + \hat{B}_{\varepsilon_k})w(k) \\ e(k) &= (\hat{C} + \hat{C}_{\varepsilon_k})\hat{x}(k) + (\hat{D} + \hat{D}_{\varepsilon_k})w(k) \end{aligned} \quad (5.89)$$

où $e(k) = z(k) - z_f(k)$ représente l'erreur d'estimation, $\hat{x}(k) = [x^T(k) \ x_f^T(k)]^T$ et :

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ \varepsilon B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & A_f \end{bmatrix}, & \hat{A}_{\varepsilon_k} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (\varepsilon(k) - \varepsilon)B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{bmatrix} B \\ \varepsilon B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D \end{bmatrix}, & \hat{B}_{\varepsilon_k} &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\varepsilon(k) - \varepsilon)B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D \end{bmatrix}, \\ \hat{C} &= [H - \varepsilon D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \quad -C_f], & \hat{C}_{\varepsilon_k} &= [-(\varepsilon(k) - \varepsilon)D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \quad 0], \\ \hat{D} &= -\varepsilon D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D, & \hat{D}_{\varepsilon_k} &= -(\varepsilon(k) - \varepsilon)D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D.\end{aligned}$$

$$\bar{\Delta}(k) = \Delta(k)\delta^{-1}, \quad \text{et} \quad \delta = \text{diag} \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_y} \}.$$

Notons que : $E \{ \varepsilon(k) - \varepsilon \} = 0$, et $E \{ (\varepsilon(k) - \varepsilon)(\varepsilon(k) - \varepsilon) \} = \varepsilon(1 - \varepsilon)$.

Le but est de trouver un filtre de la forme (5.87) tel que :

(a) pour un réel $\gamma > 0$:

$$\sup_{w \in \ell_2[0, \infty)} \frac{E \{ \| e \|_2 \}}{\| w \|_2} \leq \gamma, \quad \forall \theta \in \Theta \quad (5.90)$$

(b) le système augmenté représenté par (5.89) est asymptotiquement stable quand $w(k) = 0$, θ désigne la fréquence du bruit $w(k)$, son intervalle Θ est supposé connu, voir le tableau 2.2, page 38.

5.4.2 Analyse de performance H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Dans cette section, nous supposons que les paramètres du filtre sont connus. Des conditions suffisantes garantissant la contrainte (a) sont proposées par le théorème ci-après.

Théorème 28. *Considérons le système (5.85) avec un bruit $w(k)$ appartenant à un domaine fréquentiel fini et connu et le filtre décrit dans (5.87). Étant donnés des scalaires positifs γ , β , δ et ε . Le système augmenté représenté par (5.89) possède un niveau d'atténuation H_∞ de bruit inférieur ou égal à γ dans le domaine fréquentiel de $w(k)$ s'il existe des matrices φ_i , ($i = 1, \dots, 9$) $\in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{10}, \varphi_{11} \in R^{2n_x \times n_x}$, φ_j , ($j = 12, 13, 15, 16$) $\in R^{n_z \times n_x}$, $\varphi_{14} \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_{17}, \varphi_{18} \in R^{n_w \times n_x}$, $P = P^T$, $Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telles que :*

$$\Psi + He\{\Upsilon\} < 0 \quad (5.91)$$

où :

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \varphi_1 B + \varepsilon \varphi_2 B_f D & 0 \\ -\varphi_4 & -\varphi_2 & -\varphi_5 & -\varphi_2 & \begin{pmatrix} \varphi_4 A + \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f C \end{pmatrix} & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_4 B + \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f D \end{pmatrix} & 0 \\ -\varphi_6 & 0 & -\varphi_7 & 0 & \varphi_6 A & 0 & 0 & 0 & \varphi_6 B & 0 \\ -\varphi_8 & -\varphi_2 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_8 A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \varphi_8 B + \varepsilon \varphi_2 B_f D & 0 \\ -\varphi_{10} & 0 & -\varphi_{11} & 0 & \varphi_{10} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{10} B & 0 \\ -\varphi_{12} & 0 & -\varphi_{13} & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_{12} A + \varphi_{14} H - \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_{14} D_f C \end{pmatrix} & -\varphi_{14} C_f & -\varphi_{14} & -\varphi_{14} & \begin{pmatrix} \varphi_{12} B - \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_{14} D_f D \end{pmatrix} & 0 \\ -\varphi_{15} & 0 & -\varphi_{16} & 0 & \varphi_{15} A - \alpha \varphi_{14} D_f C & 0 & 0 & -\varphi_{14} & \varphi_{15} B - \alpha \varphi_{14} D_f D & 0 \\ -\varphi_{17} & 0 & -\varphi_{18} & 0 & \varphi_{17} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{17} B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -P & 0 & \Psi_{13} & 0 & 0 & 0 & [\beta\varepsilon B_f^T \varphi_2^T & \beta(\varepsilon + \alpha)B_f^T \varphi_2^T]^T & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & [0 & \beta\varepsilon B_f^T \varphi_2^T]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & [\delta C & 0]^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 & -\beta(\varepsilon + \alpha)\varphi_{14}D_f & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & -\beta\alpha\varphi_{14}D_f & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & 0 & \delta D^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 \\ \bullet & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

avec : $\Psi_{13} = Q$
 $\Psi_{33} = P - 2 \cos(\theta_b)Q$
pour un domaine basses fréquences

$\Psi_{13} = e^{j\theta_c}Q$
 $\Psi_{33} = P - 2 \cos(\theta_\omega)Q$
pour un domaine moyennes fréquences, $\theta_c = (\theta_1 + \theta_2)/2$, $\theta_\omega = (\theta_2 - \theta_1)/2$.

$\Psi_{13} = -Q$
 $\Psi_{33} = P + 2 \cos(\theta_h)Q$
pour un domaine hautes fréquences

Preuve : Nous supposons que le bruit $w(k)$ appartient à un domaine moyennes fréquences, nous allons démontrer l'inégalité (5.91) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

D'après le lemme 6 du chapitre 2, la contrainte ((a)) est vérifiée pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$ si :

$$E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k) \right\} \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k), \quad \forall w(k) \in \ell_2[0, \infty) \quad (5.92)$$

et avec des conditions initiales nulles :

$$e^{j\theta_\omega} E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \right\} \leq 0 \quad (5.93)$$

On note $\alpha = \sqrt{\varepsilon(1 - \varepsilon)}$.

L'inégalité (5.92) est vérifiée si $E \{ e^T(k)e(k) - \gamma^2 w^T(k)w(k) \} \leq 0$, qu'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix} < 0 \quad (5.94)$$

où : $\hat{C}_\alpha = [-\alpha D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \ 0]$, et $\hat{D}_\alpha = -\alpha D_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$.

Nous définissons ensuite les matrices symétriques $P, Q > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, les matrices $\hat{A}_\alpha, \hat{B}_\alpha$ et la matrice N tels que $Q > 0$ et :

$$\hat{A}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)D \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q \\ 0 & -P & 0 \\ e^{-j\theta_c}Q & 0 & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (5.95)$$

Nous multiplions (5.95) à gauche et à droite par $\begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T$ et sa transposée, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \hat{x}^T(k) \\ w^T(k) \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} \hat{x}^T(k) \\ w^T(k) \end{bmatrix}^T \geq 0, \quad \forall N \in \mathfrak{N} \quad (5.96)$$

où :

$$\mathfrak{N} = \left\{ \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q \\ 0 & -P & 0 \\ e^{-j\theta_c}Q & 0 & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}, P = P^T, Q = Q^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x} \right\}$$

En faisant la somme de (5.96) de $k = 0$ jusqu'à ∞ , en supposant que (5.89) est asymptotiquement stable et que $\hat{x}(0) = 0$, il vient :

$$\text{trace} \left\{ -e^{j\theta_\omega} Q E \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_1} \hat{x}_k)(\hat{x}_{k+1} - e^{j\theta_2} \hat{x}_k)^T \right\} \right\} \geq 0 \quad (5.97)$$

Comme $Q > 0$, donc nous pouvons déduire que (5.93) est vérifiée à partir de (5.96).

A partir du lemme de la S-procédure généralisée (page 43), les inégalités (5.94) et (5.96) impliquent :

$$\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q \\ 0 & -P & 0 \\ e^{-j\theta_c}Q & 0 & P - 2 \cos \theta_\omega Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I_{2n_x} & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (5.98)$$

Nous réécrivons l'inégalité (5.98) sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & P - 2 \cos(\theta_\omega)Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.99)$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & \hat{A} & 0 & 0 & \hat{B} \\ 0 & -I & \hat{A}_\alpha & 0 & 0 & \hat{B}_\alpha \\ 0 & 0 & \hat{C} & -I & 0 & \hat{D} \\ 0 & 0 & \hat{C}_\alpha & 0 & -I & \hat{D}_\alpha \end{bmatrix}_\perp = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{A}_\alpha & \hat{B}_\alpha \\ I & 0 \\ \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{C}_\alpha & \hat{D}_\alpha \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

En appliquant le lemme de Finsler (page 42) (ii et iii), il vient que l'inégalité (5.99) est faisable

s'il existe une matrice $\varphi \in R^{(6n_x+2n_z+n_w) \times (4n_x+2n_z)}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & P - 2\cos(\theta_\omega)Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} + He \left\{ \varphi \begin{bmatrix} -I & 0 & \hat{A} & 0 & 0 & \hat{B} \\ 0 & -I & \hat{A}_\alpha & 0 & 0 & \hat{B}_\alpha \\ 0 & 0 & \hat{C} & -I & 0 & \hat{D} \\ 0 & 0 & \hat{C}_\alpha & 0 & -I & \hat{D}_\alpha \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.101)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice φ :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_4 & \varphi_2 & \varphi_5 & \varphi_2 & 0 & 0 \\ \varphi_6 & 0 & \varphi_7 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_8 & \varphi_2 & \varphi_9 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{10} & 0 & \varphi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_{12} & 0 & \varphi_{13} & 0 & \varphi_{14} & \varphi_{14} \\ \varphi_{15} & 0 & \varphi_{16} & 0 & 0 & \varphi_{14} \\ \varphi_{17} & 0 & \varphi_{18} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.102)$$

Ainsi l'inégalité (5.101) devient :

$$\begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & P - 2\cos(\theta_\omega)Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} + He \{ \tilde{\varphi} \} < 0 \quad (5.103)$$

où :

$$\tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 A + \varepsilon \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \tilde{\varphi}_{19} \\ -\varphi_4 & -\varphi_2 & -\varphi_5 & -\varphi_2 & \tilde{\varphi}_{25} & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \tilde{\varphi}_{29} \\ -\varphi_6 & 0 & -\varphi_7 & 0 & \varphi_6 A & 0 & 0 & 0 & \varphi_6 B \\ -\varphi_8 & -\varphi_2 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_8 A + \varepsilon \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \tilde{\varphi}_{49} \\ -\varphi_{10} & 0 & -\varphi_{11} & 0 & \varphi_{10} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{10} B \\ -\varphi_{12} & 0 & -\varphi_{13} & 0 & \tilde{\varphi}_{65} & -\varphi_{14} C_f & -\varphi_{14} & -\varphi_{14} & \tilde{\varphi}_{69} \\ -\varphi_{15} & 0 & -\varphi_{16} & 0 & \varphi_{15} A - \alpha \varphi_{14} D_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)C & 0 & 0 & -\varphi_{14} & \tilde{\varphi}_{79} \\ -\varphi_{17} & 0 & -\varphi_{18} & 0 & \varphi_{17} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{17} B \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\varphi}_{19} = \varphi_1 B + \varepsilon \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$$

$$\tilde{\varphi}_{25} = \varphi_4 A + (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)C$$

$$\tilde{\varphi}_{29} = \varphi_4 B + (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$$

$$\tilde{\varphi}_{49} = \varphi_8 B + \varepsilon \varphi_2 B_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$$

$$\tilde{\varphi}_{65} = \varphi_{12} A + \varphi_{14} (H - (\varepsilon + \alpha) D_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)C)$$

$$\tilde{\varphi}_{69} = \varphi_{12} B - (\varepsilon + \alpha) \varphi_{14} D_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$$

$$\tilde{\varphi}_{79} = \varphi_{15} B - \alpha \varphi_{14} D_f (I + \bar{\Delta}(k)\delta)D$$

Appliquons maintenant le lemme de séparation (page 43), avec $\bar{\Delta}(k) = \Delta(k)\delta^{-1}$, $\kappa(k) = \bar{\Delta}(k)$ et :

$$\Upsilon_3 = [\varepsilon B_f^T \varphi_2^T \quad (\varepsilon + \alpha) B_f^T \varphi_2^T \quad 0 \quad \varepsilon B_f^T \varphi_2^T \quad 0 \quad -(\varepsilon + \alpha) D_f^T \varphi_{14}^T \quad -\alpha D_f^T \varphi_{14}^T]^T$$

$$\Upsilon_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \delta C \ 0 \ 0 \ \delta D]$$

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} -P & 0 & e^{j\theta_c}Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & P - 2 \cos(\theta_\omega)Q & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} \end{bmatrix} + He\{\Omega\}$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \varphi_1 B + \varepsilon \varphi_2 B_f D \\ -\varphi_4 & -\varphi_2 & -\varphi_5 & -\varphi_2 & \begin{pmatrix} \varphi_4 A + \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f C \end{pmatrix} & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_4 B + \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f D \end{pmatrix} \\ -\varphi_6 & 0 & -\varphi_7 & 0 & \varphi_6 A & 0 & 0 & 0 & \varphi_6 B \\ -\varphi_8 & -\varphi_2 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_8 A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 & 0 & \varphi_8 B + \varepsilon \varphi_2 B_f D \\ -\varphi_{10} & 0 & -\varphi_{11} & 0 & \varphi_{10} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{10} B \\ -\varphi_{12} & 0 & -\varphi_{13} & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_{12} A + \varphi_{14} H \\ -(\varepsilon + \alpha) \varphi_{14} D_f C \end{pmatrix} & -\varphi_{14} C_f & -\varphi_{14} & -\varphi_{14} & \begin{pmatrix} \varphi_{12} B - \\ (\varepsilon + \alpha) \varphi_{14} D_f D \end{pmatrix} \\ -\varphi_{15} & 0 & -\varphi_{16} & 0 & \varphi_{15} A - \alpha \varphi_{14} D_f C & 0 & 0 & -\varphi_{14} & \varphi_{15} B - \alpha \varphi_{14} D_f D \\ -\varphi_{17} & 0 & -\varphi_{18} & 0 & \varphi_{17} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{17} B \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons qu'il existe une solution à l'inégalité (5.103) s'il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que la suivante l'est :

$$\Upsilon_1 + \beta \Upsilon_3 \Upsilon_3^T + \beta^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2 < 0 \quad (5.104)$$

En appliquant un complément de Schur sur les termes des matrices $\beta \Upsilon_3 \Upsilon_3^T$ et $\beta^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2$, nous pourrons exprimer (5.104) sous la forme d'une LMI, ce qui est (5.91) pour $\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$.

La démonstration du théorème 28 pour les domaines basses ($|\theta| \leq \theta_b$) et hautes fréquences ($|\theta| \geq \theta_h$) est basée exactement sur les mêmes étapes que celles du domaine de moyennes fréquences ($\theta_1 \leq |\theta| \leq \theta_2$). La différence réside dans les blocs Ψ_{13} et Ψ_{33} de la matrice Ψ . Ceci complète la démonstration.

5.4.3 Étude de stabilité du système augmenté

Nous allons, dans cette section, étudier la stabilité du système augmenté(5.89), (b).

Théorème 29. *Considérons le système (5.85) et le filtre décrit dans (5.87). Soit ε , β_s et δ des scalaires positifs donnés. Alors la stabilité du système augmenté (5.89) est garantie s'il existe des matrices $S = S^T > 0 \in R^{2n_x \times 2n_x}$, φ_{sk} , ($k = 1, \dots, 6$) $\in R^{n_x \times n_x}$, φ_{s7} , $\varphi_{s8} \in R^{3n_x \times n_x}$ telles que :*

$$\Psi_s + He\{\Upsilon_s\} < 0 \quad (5.105)$$

où :

$$\Psi_s = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & [\beta_s \varepsilon B_f^T \varphi_2^T & \beta_s (\varepsilon + \alpha) B_f^T \varphi_2^T]^T & 0 \\ \bullet & S & 0 & [\beta_s \varepsilon B_f^T \varphi_2^T & 0]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & -S & 0 & \delta C^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \Upsilon_s = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_2 & -\varphi_{s2} & 0 & \varphi_{s1} A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 \\ -\varphi_{s3} & -\varphi_2 & -\varphi_{s4} & -\varphi_2 & \varphi_{s2} A + (\varepsilon + \alpha) \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 \\ -\varphi_{s5} & -\varphi_2 & -\varphi_{s6} & 0 & \varphi_{s5} A + \varepsilon \varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f & 0 \\ -\varphi_{s7} & 0 & -\varphi_{s8} & 0 & \varphi_{s7} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Preuve : Nous supposons que $w(k) = 0$, et nous considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(k) = \hat{x}^T(k)S\hat{x}(k) \quad (5.106)$$

Ainsi, la variation de $V(k)$ le long des trajectoires du système augmenté est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V_x &= E \{V_{k+1}/\hat{x}_k\} - V_k \\ &= E \left\{ \hat{x}^T(k)(\hat{A} + \hat{A}_{\varepsilon_k})^T S(\hat{A} + \hat{A}_{\varepsilon_k})\hat{x}(k) \right\} - \hat{x}^T(k)S\hat{x}(k) \\ &= \hat{x}^T(k) \left(\hat{A}^T S \hat{A} + \hat{A}_{\alpha}^T S \hat{A}_{\alpha} - S \right) \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Compte tenu de ΔV_x , nous déduisons que le système (5.89) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive et symétrique $S \in R^{2n_x \times 2n_x}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}_{\alpha} \\ I_{2n_x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}_{\alpha} \\ I_{2n_x} \end{bmatrix} < 0 \quad (5.108)$$

Remarquons que :

$$\begin{bmatrix} -I_{2n_x} & 0 & \hat{A} \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}_{\alpha} \end{bmatrix}_{\perp} = \begin{bmatrix} \hat{A} \\ \hat{A}_{\alpha} \\ I_{2n_x} \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

En utilisant le lemme de Finsler (page 42) (ii et iii), l'inégalité (5.108) peut être résolue si on trouve une matrice $\varphi_s \in R^{6n_x \times 2n_x}$ qui vérifie :

$$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} + He \left\{ \varphi_s \begin{bmatrix} -I_{2n_x} & 0 & \hat{A} \\ 0 & -I_{2n_x} & \hat{A}_{\alpha} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.110)$$

Nous considérons la structure suivante de la matrice φ_s :

$$\varphi_s = \begin{bmatrix} \varphi_{s1} & \varphi_2 & \varphi_{s2} & 0 \\ \varphi_{s3} & \varphi_2 & \varphi_{s4} & \varphi_2 \\ \varphi_{s5} & \varphi_2 & \varphi_{s6} & 0 \\ \varphi_{s7} & 0 & \varphi_{s8} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

L'inégalité (5.110) devient :

$$\begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_2 & -\varphi_{s2} & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_{s1}A + \\ \varepsilon\varphi_2 B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \end{pmatrix} & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s3} & -\varphi_2 & -\varphi_{s4} & -\varphi_2 & \begin{pmatrix} \varphi_{s2}A + (\varepsilon + \alpha) \\ \varphi_2 B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \end{pmatrix} & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s5} & -\varphi_2 & -\varphi_{s6} & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_{s5}A + \\ \varepsilon\varphi_2 B_f(I + \bar{\Delta}(k)\delta)C \end{pmatrix} & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s7} & 0 & -\varphi_{s8} & 0 & \varphi_{s7}A & 0 \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (5.112)$$

Appliquons le lemme de séparation (page 43), avec $\bar{\Delta}(k) = \Delta(k)\delta^{-1}$, $\kappa(k) = \bar{\Delta}(k)$ et :

$$\Upsilon_1 = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -S \end{bmatrix} + He \left\{ \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_2 & -\varphi_{s2} & 0 & \varphi_{s1}A + \varepsilon\varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s3} & -\varphi_2 & -\varphi_{s4} & -\varphi_2 & \varphi_{s2}A + (\varepsilon + \alpha)\varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s5} & -\varphi_2 & -\varphi_{s6} & 0 & \varphi_{s5}A + \varepsilon\varphi_2 B_f C & \varphi_2 A_f \\ -\varphi_{s7} & 0 & -\varphi_{s8} & 0 & \varphi_{s7}A & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Upsilon_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \delta C \ 0]$$

$$\Upsilon_3 = [\varepsilon B_f^T \varphi_2^T \quad (\varepsilon + \alpha) B_f^T \varphi_2^T \quad \varepsilon B_f^T \varphi_2^T \quad 0]^T$$

L'inégalité (5.112) est équivalente à :

$$\Upsilon_1 + \beta_s \Upsilon_3 \Upsilon_3^T + \beta_s^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2 < 0, \quad \beta_s > 0 \quad (5.113)$$

En appliquant un complément de Schur sur les termes des matrices $\beta_s \Upsilon_3 \Upsilon_3^T$ et $\beta_s^{-1} \Upsilon_2^T \Upsilon_2$, l'équation (5.113) implique (5.105), ce qui achève la preuve.

5.4.4 Synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini

Le calcul des paramètres du filtre (A_f, B_f, C_f, D_f) garantissant les deux contraintes ((a) et (b)) est détaillé dans le théorème suivant.

Théorème 30. *Soit $\beta, \beta_s, \varepsilon$ et δ des scalaires positifs donnés. Considérons un système linéaire à temps discret de la forme (5.85), avec mesures quantifiées et possibilité de perte de paquets. Le filtre (5.87) optimal qui répond aux deux exigences (a) et (b) peut être obtenu si l'on peut résoudre le problème d'optimisation (5.114) sous les contraintes LMI (5.115 - 5.116) pour des matrices symétriques définies $Q > 0, S > 0, P \in R^{2n_x \times 2n_x}$, des matrices $a_f \in R^{n_x \times n_x}$, $b_f \in R^{n_x \times n_y}$, $c_f \in R^{n_z \times n_x}$, $d_f \in R^{n_z \times n_y}$, φ_i , ($i = 1, \dots, 9$) $\in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{10}, \varphi_{11} \in R^{2n_x \times n_x}$, φ_j , ($j = 12, 13, 15, 16$) $\in R^{n_z \times n}$, $\varphi_{14} \in R^{n_z \times n_z}$, $\varphi_{17}, \varphi_{18} \in R^{n_w \times n_x}$, φ_{sk} , ($k = 1, \dots, 6$) $\in R^{n_x \times n_x}$, $\varphi_{s7}, \varphi_{s8} \in R^{3n_x \times n_x}$:*

$$\min_{Q, P, S, \varphi_k, (k=1, \dots, 18), \varphi_{sk}, (k=1, \dots, 8), a_f, b_f, c_f, d_f} \gamma \quad (5.114)$$

$$\bar{\Psi} + He\{\bar{\Upsilon}\} < 0 \quad (5.115)$$

$$\bar{\Psi}_s + He\{\bar{\Upsilon}_s\} < 0 \quad (5.116)$$

où :

$$\bar{\Psi}_s = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 & [\beta_s \varepsilon b_f^T & \beta_s (\varepsilon + \alpha) b_f^T]^T & 0 \\ \bullet & S & 0 & [\beta_s \varepsilon b_f^T & 0]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & -S & 0 & \delta C^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta_s I_{n_y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Upsilon}_s = \begin{bmatrix} -\varphi_{s1} & -\varphi_2 & -\varphi_{s2} & 0 & \varphi_{s1} A + \varepsilon b_f C & a_f & 0 \\ -\varphi_{s3} & -\varphi_2 & -\varphi_{s4} & -\varphi_2 & \varphi_{s2} A + (\varepsilon + \alpha) b_f C & a_f & 0 \\ -\varphi_{s5} & -\varphi_2 & -\varphi_{s6} & 0 & \varphi_{s5} A + \varepsilon b_f C & a_f & 0 \\ -\varphi_{s7} & 0 & -\varphi_{s8} & 0 & \varphi_{s7} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -\varphi_1 & -\varphi_2 & -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 A + \varepsilon b_f C & a_f & 0 & 0 & \varphi_1 B + \varepsilon b_f D & 0 \\ -\varphi_4 & -\varphi_2 & -\varphi_5 & -\varphi_2 & \begin{pmatrix} \varphi_4 A + \\ (\varepsilon + \alpha) b_f C \end{pmatrix} & a_f & 0 & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_4 B + \\ (\varepsilon + \alpha) b_f D \end{pmatrix} & 0 \\ -\varphi_6 & 0 & -\varphi_7 & 0 & \varphi_6 A & 0 & 0 & 0 & \varphi_6 B & 0 \\ -\varphi_8 & -\varphi_2 & -\varphi_9 & 0 & \varphi_8 A + \varepsilon b_f C & a_f & 0 & 0 & \varphi_8 B + \varepsilon b_f D & 0 \\ -\varphi_{10} & 0 & -\varphi_{11} & 0 & \varphi_{10} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{10} B & 0 \\ -\varphi_{12} & 0 & -\varphi_{13} & 0 & \begin{pmatrix} \varphi_{12} A + \varphi_{14} H - \\ (\varepsilon + \alpha) d_f C \end{pmatrix} & -\varphi_{14} C_f & -\varphi_{14} & -\varphi_{14} & \begin{pmatrix} \varphi_{12} B - \\ (\varepsilon + \alpha) d_f D \end{pmatrix} & 0 \\ -\varphi_{15} & 0 & -\varphi_{16} & 0 & \varphi_{15} A - \alpha d_f C & 0 & 0 & -\varphi_{14} & \varphi_{15} B - \alpha d_f D & 0 \\ -\varphi_{17} & 0 & -\varphi_{18} & 0 & \varphi_{17} A & 0 & 0 & 0 & \varphi_{17} B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Psi} = \begin{bmatrix} -P & 0 & \Psi_{13} & 0 & 0 & 0 & [\beta \varepsilon b_f^T & \beta(\varepsilon + \alpha) b_f^T]^T & 0 \\ \bullet & -P & 0 & 0 & 0 & 0 & [0 & \beta \varepsilon b_f^T]^T & 0 \\ \bullet & \bullet & \Psi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\delta C^T] \\ \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & 0 & -\beta(\varepsilon + \alpha) d_f & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & I_{n_z} & 0 & -\beta \alpha d_f & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\gamma^2 I_{n_w} & 0 & 0 & \delta D^T \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & -\beta I_{n_y} & 0 & 0 \\ \bullet & 0 & -\beta I_{n_y} \end{bmatrix}$$

Les paramètres du filtre sont alors donnés par :

$$A_f = \varphi_2^{-1} a_f, \quad B_f = \varphi_2^{-1} b_f, \quad C_f = \varphi_{14}^{-1} c_f, \quad D_f = \varphi_{14}^{-1} d_f \quad (5.117)$$

Preuve : Pour démontrer ce théorème, il suffit de considérer les inégalités des théorèmes (28) et (29) avec les changements de variables suivants :

$$a_f = \varphi_2 A_f, \quad b_f = \varphi_2 B_f, \quad c_f = \varphi_{14} C_f, \quad d_f = \varphi_{14} D_f.$$

5.4.5 Exemple de simulation

L'approche proposée dans la section précédente est illustrée par un exemple numérique.

Nous considérons le système de moteur d'avion F-404. En choisissant un période d'échantillonnage $T = 0.05s$, nous obtenons la matrice d'état A et la matrice de sortie mesurée C comme suit, [66] :

$$A = \begin{bmatrix} 0.9270 & 0 & 0.1214 \\ 0.0082 & 0.9800 & -0.0189 \\ 0.0155 & 0 & 0.8885 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

Les matrices B , D et H sont choisies comme suit :

$$B = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.1 \\ 0.12 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = [0.1 \quad 0.1 \quad -0.1] \quad (5.119)$$

Le paramètre du quantificateur δ est supposé égal à 0.1 et $\varepsilon = 0.7$.

Les indices de performances H_∞ obtenus, au moyen du théorème 30, dans les différents domaines fréquentiels sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Θ	$ \theta \leq \pi/15$	$\pi/6 \leq \theta \leq \pi/3$	$ \theta \geq \pi/4$	$\forall \theta$
γ	0.8367	0.0539	0.0436	0.8660

TABLE 5.4 – Niveaux d'atténuation H_∞ obtenus dans les différents domaines fréquentiels

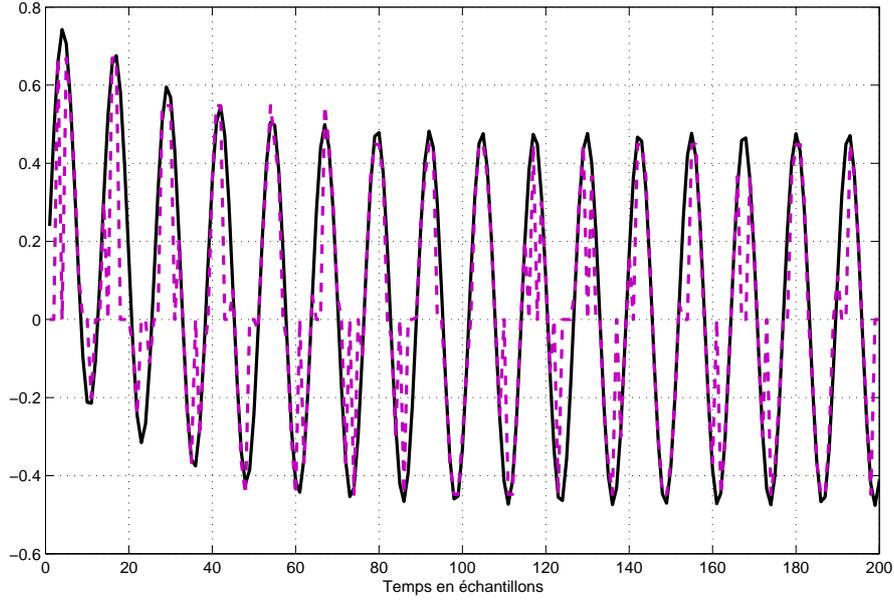


FIGURE 5.6 – Courbe en pointillé : $y_1(k)$ / courbe continue : $\tilde{y}_1(k)$

Les paramètres du filtre obtenus sont les suivants :

$$A_f = \begin{bmatrix} -0.1257 & 0.1543 & 0.1880 \\ 0.1251 & -0.1460 & 0.1360 \\ 0.1379 & 0.1304 & -0.1363 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -0.1545 & -0.5436 \\ -0.1710 & -0.3083 \\ -0.2805 & -0.3626 \end{bmatrix},$$

$$C_f = [-0.0086 \quad -0.0067 \quad -0.0063], \quad \text{et} \quad D_f = [-0.0222 \quad 0.1120]$$

pour $\pi/8 \leq |\theta| \leq \pi/4$.

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.1363 & -0.0354 & -0.1078 \\ -0.0920 & 0.1981 & -0.1857 \\ -0.0196 & -0.0779 & 0.1315 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 453.5377 & -684.1929 \\ -352.8652 & 42.0492 \\ 362.3053 & -332.0718 \end{bmatrix},$$

$$C_f = 10^{-5} [-0.3119 \quad -0.2775 \quad -0.4048], \quad \text{et} \quad D_f = [0.0483 \quad 0.1127],$$

pour toute valeur de θ .

Connectant les filtres obtenus au système original, les figures (5.6 – 5.7) montrent l'évolution de $y(k)$ et de $\tilde{y}(k)$. Les figures (5.8 – 5.9) montrent $z(k)$ et son estimé $z_f(k)$. La valeur de

$\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$ est représentée à la figure (5.10). Les simulations sont réalisées avec un signal de bruit qui appartient au domaine $\pi/8 \leq |\theta| \leq \pi/4$: $w(k) = \sin(0.5k)$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois approches d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication, telles que l'effet de quantification et la perte de paquets. Pour ce faire, les mesures sont supposées

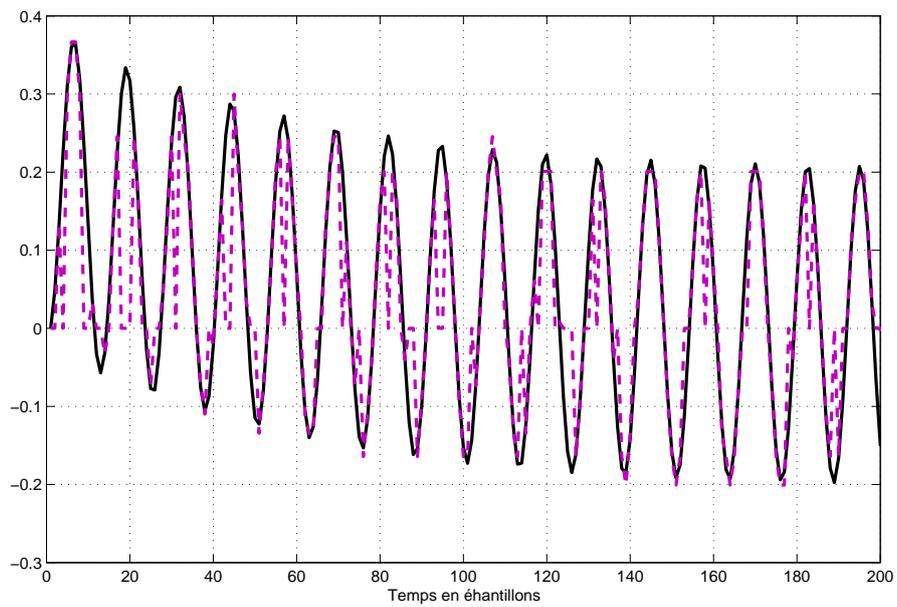


FIGURE 5.7 – Courbe en pointillé : $y_2(k)$ / courbe continue : $\tilde{y}_2(k)$

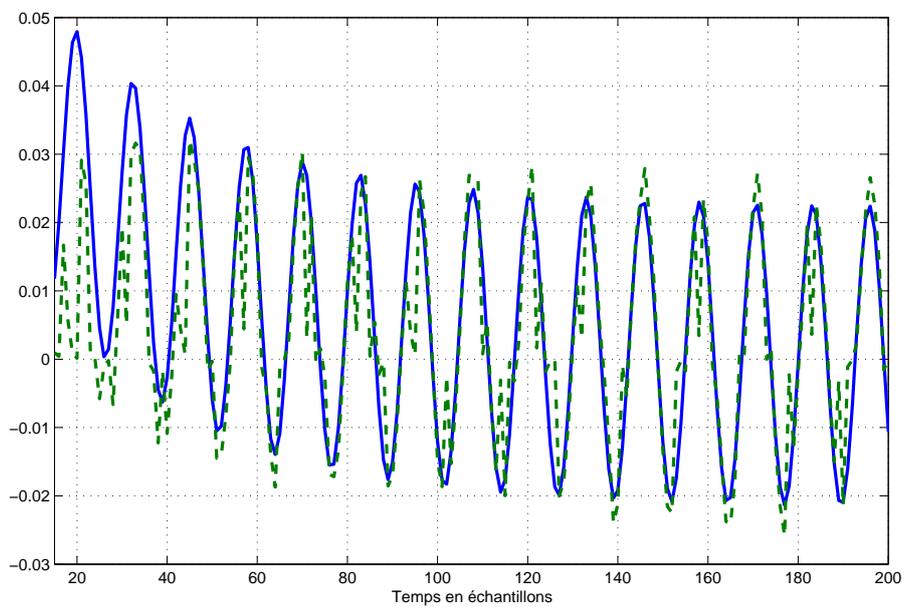


FIGURE 5.8 – Suivi de $z(k)$ pour $\pi/8 \leq |\theta| \leq \pi/4$: courbe en pointillé : $z_f(k)$ / courbe continue : $z(k)$

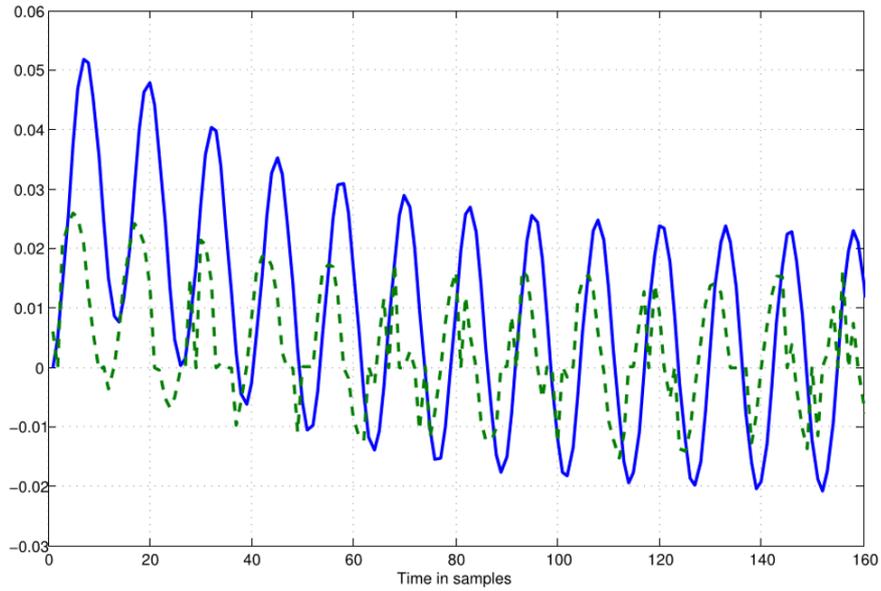


FIGURE 5.9 – Suivi de $z(k)$ pour toute valeur de θ : courbe en pointillé : $z_f(k)$ / courbe continue : $z(k)$

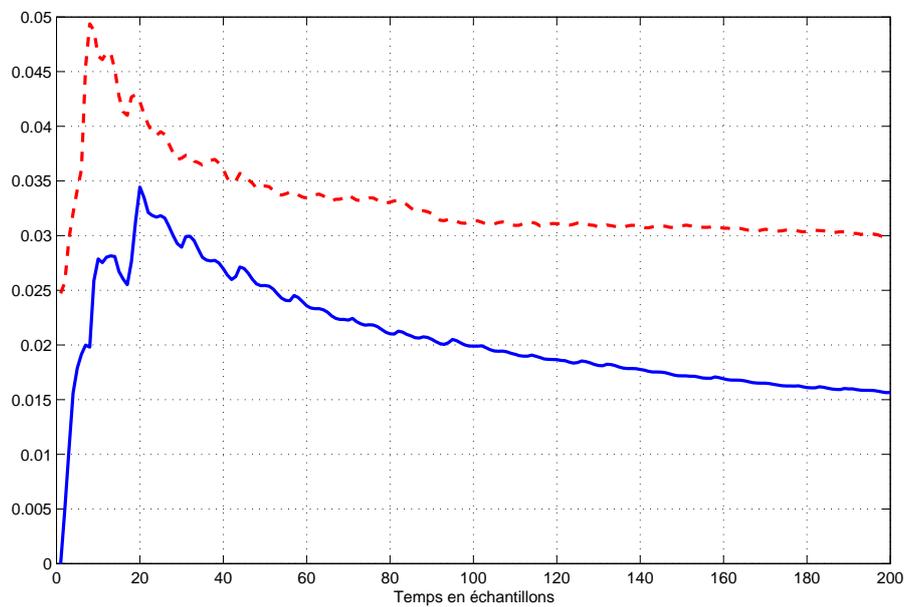


FIGURE 5.10 – Valeur de $\sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{\infty} e^T(k)e(k)}{\sum_{k=0}^{\infty} w^T(k)w(k)}}$: courbe en pointillé : $\forall \theta$ / courbe continue : $\pi/8 \leq |\theta| \leq \pi/4$

quantifiées par un quantificateur logarithmique avant d'être transmises au filtre, et la perte de paquet est représentée par une variable stochastique qui répond au processus de Bernoulli. Les sections 5.2 et 5.3 concernent respectivement les systèmes non linéaires de type TS et les systèmes linéaires à retard constant sur le vecteur d'état avec des mesures quantifiées. La dernière section est consacrée aux systèmes linéaires avec mesures quantifiées et pertes de paquets. Dans les trois cas, les conditions de synthèse de filtres H_∞ , dans les différents domaines fréquentiels, sont formulées comme des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes LMI. Des exemples de simulation sont présentés à la fin de chaque section pour démontrer l'intérêt des approches proposées .

Chapitre 6

Conclusion générale et perceptives

Durant ces travaux de recherche, nous avons réussi à proposer plusieurs nouvelles méthodes d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ , pour différentes classes de systèmes dynamiques, qui permettent d'améliorer les résultats disponibles dans la littérature. Une méthodologie bien connue pour résoudre le problème de l'estimation d'état d'un système dynamique consiste à concevoir un filtre ou un observateur sur tout le domaine fréquentiel, c-à-d indépendamment de l'intervalle fréquentiel du bruit. Nous nous sommes efforcés tout au long de notre travail de réduire le pessimisme des résultats apportés par la communauté scientifique sur ce sujet. Notamment, nous avons développé des techniques permettant d'optimiser la norme H_∞ de la fonction de transfert entre les perturbations extérieures et l'erreur d'estimation, sur des bandes de fréquences restreintes. C'est là justement que réside l'originalité de notre travail.

Les systèmes dynamiques considérés sont les systèmes non linéaires, les systèmes à retard, les systèmes avec incertitudes paramétriques et les systèmes commandés en réseau sous contraintes de communication.

Dans le contexte de la représentation d'état des systèmes considérés, les systèmes non linéaires ont tous été représentés par le modèle flou de type TS pour les nombreux avantages que présente ce modèle, notamment pour sa simplicité d'utilisation pour l'étude de la stabilité et la synthèse de filtres. Pour les systèmes incertains, les incertitudes paramétriques sont décrites par des matrices appartenant à un domaine de type polytopique. Cette structure, recouvrant des cas pratiques importants, équivaut à une représentation multimodèle et permet de se ramener à des résultats de synthèse de filtres de façon assez simple en utilisant les techniques du cas nominal.

Le lemme de KYP généralisé nous a permis de traduire la norme H_∞ du transfert entre le signal de perturbation $w(t)$ et l'erreur d'estimation $e(t)$ sous forme d'inégalités matricielles, dépendantes des bornes de l'intervalle fréquentiel du bruit et faisant intervenir les matrices d'état du système et du filtre. L'étude de stabilité des filtres proposés repose sur la théorie de Lyapunov (la théorie de Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes à retard). Par ailleurs, plusieurs outils mathématiques ont été exploités afin de linéariser les inégalités matricielles obtenus, notamment le lemme de la S-procédure généralisé, le lemme de séparation et le lemme de Finsler. Ce dernier nous a permis d'introduire des variables de décision supplémentaires et d'augmenter les degrés de liberté dans les solutions proposées. Ainsi, les conditions d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ , garantissant à la fois la convergence de l'erreur d'estimation et un niveau de rejet de perturbations prédéfini, sont formulées comme des problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI pour les différentes classes de systèmes dynamiques.

Les approches développées sont illustrées en simulation sous Matlab/Yalmip. Les résultats obtenus montrent l'efficacité des filtres proposés à fournir une bonne qualité de reconstitution de l'état avec un bon niveau de rejet de perturbations, en comparaison avec d'autres résultats récents de la littérature.

Nous présentons, dans le deuxième chapitre, quelques notions mathématiques sur la représentation d'état et l'analyse de stabilité des systèmes dynamiques, notamment les systèmes non linéaires, les systèmes avec incertitudes polytopiques, les systèmes à retard et les systèmes sous contraintes de communication. Afin de situer au mieux notre contribution par rapport aux travaux existants, un bref état de l'art sur les différentes techniques de filtrage est proposé. Une partie est aussi consacrée au filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini. Dans la dernière section du chapitre 2, nous rappelons les définitions et les outils mathématiques utiles à la compréhension de l'optimisation convexe sous contraintes LMI. Une attention particulière est portée sur les motivations pour l'utilisation des LMI.

Nos contributions sur l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ , dans un domaine fréquentiel fini, pour les systèmes incertains sont développées dans le troisième chapitre. Les deux cas, temps continu et temps discret, sont traités séparément. Les incertitudes considérées sont de type polytopique. La convergence de l'erreur d'estimation est assurée par des fonction de Lyapunov non quadratiques dépendantes des paramètres. L'apport des approches proposées en termes de performance H_∞ , par comparaison avec d'autres résultats récents de la littérature, est illustré par des exemples numériques.

Le chapitre 4 est consacré aux résultats portant sur l'analyse et la synthèse de filtres H_∞ pour les systèmes non linéaires avec et sans retard. Le modèle flou de type TS est utilisé pour sa simplicité d'utilisation et de mise en œuvre. Les approches proposées sont basées sur des fonctions de Lyapunov (Lyapunov-Krasovskii pour les systèmes à retard) qui dépendent des règles floues si-alors. Par ailleurs, la technique de partitionnement de retard est exploitée dans l'étude de stabilité des systèmes à retard. Un exemple numérique est donné dans chaque cas pour illustrer les performances des approches proposées.

Les dernières contributions de ce travail, présentées dans le chapitre 5, portent sur le filtrage H_∞ dans un domaine fréquentiel fini pour les systèmes commandés en réseau. L'effet de quantification des mesures, ainsi que la possibilité de perte de paquets lors de la transmission des mesures quantifiées entre les capteurs et le filtre, sont pris en compte dans la synthèse du filtre. Le quantificateur considéré est de type logarithmique et la perte d'information est décrite par une variable stochastique vérifiant le processus de Bernoulli. Les avantages des approches développées sont illustrés par des exemples numériques.

Perspectives

Suite aux travaux présentés dans ce mémoire, plusieurs points sont à approfondir et ouvrent la voie vers de nombreux axes de recherche :

- Nous signalons tout d'abord que tout le travail réalisé dans le cadre de cette thèse, sauf dans le cas des systèmes avec incertitudes polytopiques, est dans le domaine discret. La démarche effectuée pour développer les outils d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ à temps discret peut être directement appliquée pour développer des outils dans le même contexte, mais à temps continu.
- D'autre part, le filtrage des systèmes à retard est un problème ouvert en perpétuel évolution. Nous avons traité dans nos travaux des systèmes où les retards sont constants. Il serait intéressant d'étendre les différentes techniques développées pour aborder les systèmes à retard variable, afin de caractériser au mieux les différents types de dynamiques retardées.
- Pour les systèmes non linéaires, nous avons traité dans nos travaux la catégorie des systèmes de type TS où les variables de décision ou de prémisses sont connues (sortie du système). Cependant, l'autre catégorie de ces systèmes, où les variables de prémisses

ne sont pas mesurées, est très peu explorée dans le domaine de filtrage et nous semble intéressante à étudier. En effet, outre les avantages offerts par le modèle de type TS, le modèle à variables de décision non mesurables permet d'avoir une représentation d'un modèle non linéaire exprimé sous une forme générale et permet la possibilité de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires.

- Le chapitre 5, qui étudie les systèmes en réseau sous contraintes de communication, mérite une attention particulière parce qu'il traite de problèmes très peu abordés par la communauté scientifique dans le cas du filtrage à fréquence finie. Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent de prendre en compte l'effet de quantification et la perte d'information dans le réseau. Plusieurs pistes dans ce contexte restent à creuser et pourront faire l'objet de travaux futurs. Il existe en effet d'autres contraintes de communication, tels que le retard de transmission et les contraintes d'accès au réseau dues à la bande passante limitée et partagée par plusieurs nœuds et le fait qu'un seul nœud à la fois est autorisé à transmettre son paquet. Il serait donc souhaitable de parvenir à développer de nouvelles techniques permettant de prendre en compte simultanément toutes les contraintes de communication citées au dessus afin d'avoir un filtre plus robuste lors de son application sur le système réel.
- Un autre type de problème particulièrement intéressant qui semble avoir un grand potentiel en termes d'application est l'estimation de l'angle de dérive du véhicule. De nombreux travaux peuvent être rapportés dans la littérature sur ce sujet. Cependant, l'estimation de l'angle de dérive dans un domaine fréquentiel fini n'a jamais été abordée - ou très peu - par la communauté scientifique. D'autre part, notons que l'angle de braquage de la roue, qui constitue l'entrée du modèle de la dynamique latérale du véhicule, appartient à un domaine de basses fréquences. Ainsi, le filtre obtenu sur toute la plage de fréquence n'est pas forcément le filtre optimal. C'est la raison pour laquelle il serait intéressant d'exploiter les techniques développées dans ce travail pour construire un filtre permettant d'estimer l'angle de dérive en fonction du domaine fréquentiel de l'angle de braquage.

Bibliographie

- [1] TANAKA, Kazuo, NISHIMURA, Masataka, et WANG, Hua O. Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. In : American Control Conference, 1998. Proceedings of the 1998. IEEE, 1998. p. 3450-3454.
- [2] BLANCO, Yann, PERRUQUETTI, Wilfrid, et BORNE, Pierre. Stability and stabilization of nonlinear systems and Takagi-Sugeno's fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, 2001, vol. 7, no 3, p. 221-240.
- [3] GUERRA, T. M., VERMEIREN, L., et al. Conditions for non quadratic stabilization of discrete fuzzy models. In : 2001 IFAC Conference. 2001.
- [4] GUERRA, Thierry Marie et VERMEIREN, Laurent. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form. *Automatica*, 2004, vol. 40, no 5, p. 823-829.
- [5] JOHANSSON, Mikael, RANTZER, Anders, et ARZEN, K.-E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, vol. 7, no 6, p. 713-722.
- [6] TANAKA, Kazuo et SUGENO, Michio. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 1992, vol. 45, no 2, p. 135-156.
- [7] DE OLIVEIRA, Maurício C., BERNUSSOU, Jacques, et GEROMEL, José C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems and control letters*, 1999, vol. 37, no 4, p. 261-265.
- [8] DAAFOUZ, Jamal et BERNUSSOU, Jacques. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and control letters*, 2001, vol. 43, no 5, p. 355-359.
- [9] TANAKA, Kazuo, HORI, Tsuyoshi, et WANG, Hua O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 2003, vol. 11, no 4, p. 582-589.
- [10] FU, Minyue, DE SOUZA, Carlos E., et XIE, Lihua. H_∞ estimation for uncertain systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1992, vol. 2, no 2, p. 87-105.
- [11] DE SOUZA, Carlos E., SHAKED, Uri, et FU, Minyue. Robust H_∞ filtering for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals. *IEEE Transactions on Signal processing*, 1995, vol. 43, no 3, p. 709-719.
- [12] PETERSEN, Ian R. et MCFARLANE, Duncan C. Optimal guaranteed cost control and filtering for uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, vol. 39, no 9, p. 1971-1977.
- [13] PALHARES, R. M. et PERES, Pl LD. Robust H_∞ Filtering Design with Pole Placement Constraint via Linear Matrix Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, vol. 102, no 2, p. 239-261.

- [14] TUAN, Hoang Duong, APKARIAN, Pierre, et NGUYEN, Truong Q. Robust and reduced-order filtering : new LMI-based characterizations and methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, vol. 49, no 12, p. 2975-2984.
- [15] XIE, Lihua, LU, Lilei, ZHANG, David, et al. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, 2004, vol. 40, no 5, p. 873-880.
- [16] GEROMEL, José Claudio, DE OLIVEIRA, Maurício C., et BERNUSSOU, Jacques. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter dependent Lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, vol. 41, no 3, p. 700-711.
- [17] ZHANG, Wen-an, YU, Li, et JIANG, Xie fu. Delay-dependent generalized H_2 filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays. *Signal Processing*, 2007, vol. 87, no 4, p. 709-724.
- [18] BORGES, Renato Alves, MONTAGNER, Vinicius Foletto, OLIVEIRA, Ricardo CLF, et al. Parameter-dependent H_2 and H_∞ filter design for linear systems with arbitrarily time-varying parameters in polytopic domains. *Signal Processing*, 2008, vol. 88, no 7, p. 1801-1816.
- [19] BARMISH, B. Ross. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization theory and applications*, 1985, vol. 46, no 4, p. 399-408.
- [20] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., BACHELIER, O., et al. A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and control letters*, 2000, vol. 40, no 1, p. 21-30.
- [21] LEE, Dong Hwan. An improved finite frequency approach to robust H_∞ filter design for LTI systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2013, vol. 27, no 11, p. 944-956.
- [22] LACERDA, Márcio J., OLIVEIRA, Ricardo CLF, et PERES, Pedro LD. Robust H_2 and H_∞ design for uncertain linear systems via LMIs and polynomial matrices. *Signal Processing*, 2011, vol. 91, no 5, p. 1115-1122.
- [23] HAN, Kezhen et FENG, Jian. Improved scalar parameters approach to design robust H_∞ filter for uncertain discrete-time linear systems. *Signal Processing*, 2015, vol. 113, p. 113-123.
- [24] CHANG, Xiao-Heng, PARK, Ju H., et TANG, Ze. New approach to H_∞ filtering for discrete-time systems with polytopic uncertainties. *Signal Processing*, 2015, vol. 113, p. 147-158.
- [25] DUAN, Zhisheng, ZHANG, Jingxin, ZHANG, Cishen, et al. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 2006, vol. 42, no 11, p. 1919-1926.
- [26] WANG, Heng et YANG, Guang-Hong. A finite frequency approach to filter design for uncertain discrete-time systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2008, vol. 22, no 6, p. 533-550.
- [27] WANG, Heng et YANG, Guang-Hong. H_∞ filter design for uncertain discrete-time systems in finite frequency domain. In : *Control Applications, 2007. CCA 2007. IEEE International Conference on. IEEE, 2007. p. 1000-1005.*
- [28] DING, Dawei et YANG, Guanghong. Finite frequency H_∞ filtering for uncertain discrete-time switched linear systems. *Progress in natural science*, 2009, vol. 19, no 11, p. 1625-1633.

- [29] EL HELLANI, D., EL HAJJAJI, A., et CESCHI, R. H_∞ filter design for TS nonlinear discrete-time state-delayed systems in finite frequency domain. In : Control Applications (CCA), 2015 IEEE Conference on. IEEE, 2015. p. 353-358.
- [30] DING, Da-Wei et YANG, Guang-Hong. Fuzzy filter design for nonlinear systems in finite-frequency domain. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, vol. 18, no 5, p. 935-945.
- [31] GAO, Huijun et LI, Xianwei. H_∞ filtering for discrete-time state-delayed systems with finite frequency specifications. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, vol. 56, no 12, p. 2935-2941.
- [32] IWASAKI, Tetsuya et HARA, Shinji. Generalized KYP lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, vol. 50, no 1, p. 41-59.
- [33] TAKAGI, Tomohiro et SUGENO, Michio. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. IEEE transactions on systems, man, and cybernetics, 1985, no 1, p. 116-132.
- [34] LYAPUNOV, Aleksandr Mikhailovich. The general problem of the stability of motion. International Journal of Control, 1992, vol. 55, no 3, p. 531-534.
- [35] BERNUSSOU, J., PERES, P. L. D., et GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. Systems and Control Letters, 1989, vol. 13, no 1, p. 65-72.
- [36] PETERSEN, Ian R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. Systems and Control Letters, 1987, vol. 8, no 4, p. 351-357.
- [37] KALMAN, Rudolph Emil, et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. Journal of basic Engineering, 1960, vol. 82, no 1, p. 35-45.
- [38] BAR-SHALOM, Yaakov. Multitarget-multisensor tracking : advanced applications. Norwood, MA, Artech House, 1990, 391 p., 1990.
- [39] GREWAL, Mohinder S., WEILL, Lawrence R., et ANDREWS, Angus P. Global positioning systems, inertial navigation, and integration. John Wiley and Sons, 2007.
- [40] ZHANG, Zhengyou. Parameter estimation techniques : A tutorial with application to conic fitting. Image and vision Computing, 1997, vol. 15, no 1, p. 59-76.
- [41] ANDERSON, Brian DO et MOORE, John B. Optimal filtering. Englewood Cliffs, 1979, vol. 21, p. 22-95.
- [42] LJUNG, Lennart. Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1979, vol. 24, no 1, p. 36-50.
- [43] NAGPAL, Krishan M. et KHARGONEKAR, Pramod P. Filtering and smoothing in an H_∞ setting. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, vol. 36, no 2, p. 152-166.
- [44] LI, Huaizhong et FU, Minyue. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering. IEEE Transactions on Signal Processing, 1997, vol. 45, no 9, p. 2338-2350.
- [45] NAGPAL, Krishan M. et KHARGONEKAR, Pramod P. Filtering and smoothing in an H/\sup infinity/setting. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, vol. 36, no 2, p. 152-166.

- [46] DING, X., FRANK, P. M., et GUO, L. Robust observer design via factorization approach. In : Decision and Control, 1990., Proceedings of the 29th IEEE Conference on. IEEE, 1990. p. 3623-3628.
- [47] RANTZER, Anders. On the Kalman—Yakubovich—Popov lemma. Systems and Control Letters, 1996, vol. 28, no 1, p. 7-10.
- [48] IWASAKI, Tetsuya et HARA, Shinji. Generalized KYP lemma : Unified frequency domain inequalities with design applications. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, vol. 50, no 1, p. 41-59.
- [49] IWASAKI, Tetsuya, HARA, Shinji, et FRADKOV, Alexander L. Time domain interpretations of frequency domain inequalities on (semi) finite ranges. Systems and control letters, 2005, vol. 54, no 7, p. 681-691.
- [50] BOYD, Stephen, EL GHAOUI, Laurent, FERON, Eric, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. Society for industrial and applied mathematics, 1994.
- [51] DE OLIVEIRA, Maurício C. et SKELTON, Robert E. Stability tests for constrained linear systems. In : Perspectives in robust control. Springer, London, 2001. p. 241-257.
- [52] IWASAKI, Tetsuya, MEINSMA, Gjerrit, et FU, Minyue. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma. Mathematical Problems in Engineering, 2000, vol. 6, no 2-3, p. 305-320.
- [53] LAWRENZ, Wolfhard. CAN system engineering. From theory to practical applications, New York, 1997.
- [54] WANG, Shaobu, MENG, Xiangyu, et CHEN, Tongwen. Wide-area control of power systems through delayed network communication. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, vol. 20, no 2, p. 495-503.
- [55] SEILER, Pete et SENGUPTA, Raja. An H_∞ approach to networked control. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, vol. 50, no 3, p. 356-364.
- [56] DIOURI, Idriss, BERBRA, Cédric, GEORGES, J.-P., et al. Evaluation of a switched ethernet network for the control of a quadrotor. In : Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on. IEEE, 2008. p. 1112-1117.
- [57] ZHANG, Hui, SHI, Yang, et MEHR, Aryan Saadat. On H_∞ Filtering for Discrete-Time Takagi–Sugeno Fuzzy Systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, vol. 20, no 2, p. 396-401.
- [58] FENG, Gang, CHEN, Meng, SUN, Dong, et al. Approaches to robust filtering design of discrete time fuzzy dynamic systems. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2008, vol. 16, no 2, p. 331-340.
- [59] HUANG, Sheng-Juan, HE, Xi-Qin, et ZHANG, Ning-Ning. New Results on H_∞ Filter Design for Nonlinear Systems With Time Delay via T–S Fuzzy Models. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2011, vol. 19, no 1, p. 193-199.
- [60] SU, Xiaojie, SHI, Peng, WU, Ligang, et al. A novel approach to filter design for T–S fuzzy discrete-time systems with time-varying delay. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2012, vol. 20, no 6, p. 1114-1129.
- [61] ZHANG, Zhuo, ZHANG, Zexu, ZHANG, Hui, et al. Finite-Time H_∞ Filtering for T–S Fuzzy Discrete-Time Systems With Time-Varying Delay and Norm-Bounded Uncertainties. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, vol. 23, no 6, p. 2427-2434.

- [62] KARIMI, Hamid Reza. Robust H_∞ filter design for uncertain linear systems over network with network-induced delays and output quantization. *Modeling, Identification and Control*, 2009, vol. 30, no 1, p. 27.
- [63] YANG, Rongni, SHI, Peng, et LIU, Guo-Ping. Filtering for discrete-time networked nonlinear systems with mixed random delays and packet dropouts. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no 11, p. 2655-2660.
- [64] ZHOU, Shaosheng et GUAN, Yanpeng. H_∞ filter design for fuzzy systems with quantized measurements. *Neurocomputing*, 2015, vol. 166, p. 193-200.
- [65] ZHU, Xun-Lin et YANG, Guang-Hong. Jensen inequality approach to stability analysis of discrete-time systems with time-varying delay. In : *American Control Conference*, 2008. IEEE, 2008. p. 1644-1649.
- [66] WANG, Zidong, LIU, Yurong, et LIU, Xiaohui. H_∞ filtering for uncertain stochastic time-delay systems with sector-bounded nonlinearities. *Automatica*, 2008, vol. 44, no 5, p. 1268-1277.
- [67] BAFFET, G., CHARARA, A., LECHNER, D., et al. Experimental evaluation of observers for tire-road forces, sideslip angle and wheel cornering stiffness. *Vehicle System Dynamics*, 2008, vol. 46, no 6, p. 501-520
- [68] HSU, Yung-Hsiang Judy, LAWS, Shad M., et GERDES, J. Christian. Estimation of tire slip angle and friction limits using steering torque. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no 4, p. 896-907.
- [69] NAM, Kanghyun, OH, Sehoon, FUJIMOTO, Hiroshi, et al. Estimation of sideslip and roll angles of electric vehicles using lateral tire force sensors through RLS and Kalman filter approaches. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2013, vol. 60, no 3, p. 988-1000.
- [70] ZHANG, Hui, HUANG, Xiaoyu, WANG, Junmin, et al. Robust energy-to-peak sideslip angle estimation with applications to ground vehicles. *Mechatronics*, 2015, vol. 30, p. 338-347.
- [71] ZHANG, Hui, ZHANG, Guoguang, et WANG, Junmin. Sideslip Angle Estimation of an Electric Ground Vehicle via Finite-Frequency \mathcal{H}_∞ Approach. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2016, vol. 2, no 2, p. 200-209.
- [72] KRASOVSKII, Nicolai Nikolaevich. *Stability of motion*. Stanford University Press, 1963.
- [73] BERTEIN, Jean-Claude et CESCHI, Roger. *Discrete stochastic processes and optimal filtering*. John Wiley and Sons, 2013.
- [74] FERON, Eric, APKARIAN, Pierre, et GAHINET, Pascal. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, vol. 41, no 7, p. 1041-1046.
- [75] GEROMEL, José C, DE OLIVEIRA, Maurício C., et HSU, Liu. LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 1998, vol. 285, no 1-3, p. 69-80.
- [76] DE OLIVEIRA, Maurício C., BERNUSSOU, Jacques, et GEROMEL, José C. A new discrete-time robust stability condition. *Systems and control letters*, 1999, vol. 37, no 4, p. 261-265.
- [77] Gahinet, P., et Apkarian, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. *International journal of robust and nonlinear control*, 1994, vol. 4, no 4, p. 421-448.

- [78] Iwasaki, T., et Skelton, R. E. All controllers for the general H_∞ control problem : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 1994, 30(8), 1307-1317.
- [79] Xie, L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of control*, 1996, vol. 63, no 4, p. 741-750.

Résumé

Ce mémoire aborde la synthèse de filtres H_∞ sur des domaines fréquentiels finis pour différentes classes de systèmes dynamiques, tels que les systèmes linéaires avec incertitudes paramétriques, les systèmes à retard, les systèmes non linéaires de type Takagi-Sugeno (TS) et les systèmes sous contraintes de communication.

Les contributions portent sur le développement de nouveaux outils d'analyse et de synthèse de filtres H_∞ , qui sont moins restrictifs par rapport aux résultats existants dans la littérature et permettent de réduire le conservatisme de celles-ci tout en garantissant que les méthodes proposées soient numériquement efficaces.

Les conditions de stabilité et de synthèse de filtres pour les différentes classes de systèmes dynamiques sont formulées en des problèmes d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Des exemples numériques et des comparaisons avec des résultats récents de la littérature sont également présentés afin de montrer les avantages et l'intérêt des approches proposées.

Mots clés : Filtrage H_∞ , Fréquence finie, Systèmes incertains, Incertitudes polytopiques, Systèmes non linéaires, Modèle flou de Takagi-Sugeno, Systèmes à retard, Mesures quantifiées, Perte de paquets, Inégalités matricielles linéaires.

Abstract

This work is concerned with the H_∞ filtering problem in a finite frequency domain for different types of dynamic systems, such that uncertain systems, nonlinear systems via TS fuzzy model, time delay systems and systems with communication constraints.

The main contribution is the development of new H_∞ filter analysis and design approaches which reduce the conservatism of results found in the literature.

The filter stability and design problems, for different classes of dynamic systems, are formulated as optimization problems with Linear Matrix Inequality (LMI).

Simulation examples are presented to demonstrate the effectiveness and the less conservatism of the proposed approaches in comparison with other solutions that appear in the literature.

Keywords : H_∞ filtering, Finite frequency, Uncertain systems, Polytopic uncertainty, Non-linear systems, Takagi-Sugeno fuzzy model, Time delay systems, Quantized measurements, Intermittent measurements, LMI.