



**HAL**  
open science

# Contributions aux schémas préservant des solutions stationnaires vitesse non nulle pour les équations shallow-water

Meissa M'Baye

► **To cite this version:**

Meissa M'Baye. Contributions aux schémas préservant des solutions stationnaires vitesse non nulle pour les équations shallow-water. Mathématiques [math]. Nantes Université, 2022. Français. NNT : . tel-03695882

**HAL Id: tel-03695882**

**<https://theses.hal.science/tel-03695882>**

Submitted on 15 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITE

ECOLE DOCTORALE N° 601

*Mathématiques et Sciences et Technologies*

*de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

**Meissa M'BAYE**

**Contributions aux schémas préservant des solutions stationnaires  
vitesse non nulle pour les équations shallow-water**

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 24/03/2022

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

## Rapporteurs avant soutenance :

Jean Marc HÉRARD Chercheur Sénior, EDF recherche et développement

Ousmane SEYDI Professeur, École polytechnique de Thiès

## Composition du Jury :

Président : François JAMES

Professeur, Université d'Orléans

Examineurs : Françoise FOUCHER

Maître de conférence, École centrale de Nantes

Victor MICHEL-DANDAC

Chargé de recherche, INRIA et IRMA université de Strasbourg

Wend Woaga Jean De Dieu ZABSONRE

Professeur, Université Nazi BONI

Dir. de thèse : Christophe BERTHON

Professeur, Nantes université

Co-dir. de thèse : Diaraf SECK

Professeur, université Cheikh Anta Diop de Dakar



# REMERCIEMENTS

---

Ces années de thèse furent pour moi une réelle expérience scientifique et humaine. Je souhaite remercier les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse Christophe BERTHON et Diaraf SECK. Merci à vous deux pour m'avoir si souvent orienté, rassuré, guidé, soutenu et supporté. Merci de m'avoir initié à la recherche. Merci Christophe BERTHON de m'avoir toujours rassuré avec votre fameuse phrase "*pas de stress*". Merci pour vos corrections et orientations très pertinentes. Merci d'avoir relu plusieurs fois mon manuscrit et de votre soutien infailible durant toutes ces années de thèse. Merci Diaraf SECK d'avoir toujours facilité mes conditions de recherche au Sénégal. Merci pour vos commentaires et corrections qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce travail et merci pour vos encouragements. Merci de m'avoir initié à la réglementation de la recherche au Sénégal.

Je remercie chaleureusement Jean Marc HÉRARD et Ousmane SEYDI d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Vos commentaires et suggestions m'ont permis d'enrichir la qualité du document.

Je tiens à remercier profondément les membres du jury : Fañçoise FOUCHER, Wend Woaga Jean De Dieu ZABSONRE, Victor MICHEL-DANSAC, et Fañçois JAMES.

Je tiens à remercier François JAMES d'avoir toujours été là pour moi afin de m'orienter et de m'aider à atteindre mes objectifs dans mes travaux de recherche. Merci de votre disponibilité. Je vais jamais oublier les moments passés avec vous durant mon stage M2 à Orléans.

Je remercie François FOUCHER, pour sa disponibilité, sa gentillesse et ses conseils. J'ai vraiment apprécié nos discussions et j'espère que nous aurons l'occasion de travailler ensemble.

Merci à Victor MICHEL-DANSAC, mon grand frère de thèse pour sa disponibilité à répondre rapidement à mes questions. Merci à Solène BULTEAU, ma grand sœur de thèse pour son ouverture et son sens du partage.

Je remercie tous les membres du laboratoire mathématique Jean Leray (LMJL) plus particulièrement la secrétariat. Un grand merci à Stéphanie de m'avoir toujours aider

---

dans mes procédures administratives, merci pour votre gentillesse et votre perspicacité. Merci à Brigitte d'avoir toujours facilité mes voyages de recherches. Je tiens à remercier mes professeurs de M2 MACS : Hélène MATHIS, Anaïs CRESTETTO, Marianne BESSEMOULIN-CHATARD, François JAUBERTEAU, Abdeljalil NACHAOUI.

Je remercie tous les membres du laboratoire NLAGA. Merci à El-Hadj Woury BAH par sa compagnie sans faille et ses conseils dans les moments difficiles avec sa fameuse citation "*Djabar mba khol yagui fékh!*". Merci à Abdou Aziz DIOP, Amadou SY, Abdou Karim SANÉ, Alpha DIALLO et Faramba BALDÉ. Merci à vous pour l'accueil et les bons moments passés ensemble. Merci à Madame BÂ, de la secrétariat de la faculté des sciences et techniques de l'université Dakar, pour sa disponibilité, sa gentillesse, de son aide dans les procédures administratives.

Je remercie chaleureusement mes amis et tuteurs Erwan et Assia de m'avoir accueilli et intégré dans votre famille. Je n'oublierai jamais les bons moments passés ensemble. Merci pour votre disponibilité et de m'avoir fait aimer la lecture.

Je remercie très sincèrement ma famille et mes amis de m'avoir soutenu durant toutes ces années de thèse. Merci particulièrement à mes parents Aminata GUEYE et Alioune M'BAYE sans lesquels rien ne serait possible. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à ma femme Safiétou N'DIAYE pour sa compagnie sincère, sa patience, sa générosité envers ma modeste personne, son sens de l'écoute durant les moments difficiles, ses conseils et son soutien sans limite. Merci à toi ma chère femme. Je remercie ma sœur Sokhna de m'avoir orienté vers les maths. Un grand merci à mes beaux parents pour leurs soutiens. Merci à Ousmane DIATTA et Alioune FALL pour leurs encouragements et aide dans tous les étapes de ces années de thèse. Merci à mes amis Thierno Moussa DIALLO, Ousseynou DIOUF, Adama Dionwar FAYE, Alioune N'DIAYE, mon petit frère Pape Abdou N'DIAYE.

Enfin, je remercie la région pays de la Loire (France) et le projet NLAGA (Université Cheikh Anta Diop, Sénégal) pour le financement de ce travail de recherche.

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Présentation du modèle de Saint-Venant</b>	<b>17</b>
1.1 Les états stationnaires . . . . .	18
1.2 Propriétés algébriques et problème de Riemann du système homogène .	19
1.2.1 Algèbre du système homogène . . . . .	19
1.2.6 Résolution du problème de Riemann . . . . .	22
1.3 Propriétés algébriques du champ LD pour le système non homogène . .	35
1.3.1 Inégalité d'entropie pour le système non homogène . . . . .	37
1.4 Schéma aux volumes finis . . . . .	39
1.4.1 Schéma de Godunov . . . . .	41
1.4.3 Schémas de type Godunov . . . . .	45
<b>2 Schéma de type Godunov capturant tous les états stationnaires à vitesse non nulle</b>	<b>51</b>
2.1 Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint Venant avec terme source . . . . .	53
2.2 Discrétisation du terme source . . . . .	57
2.3 Solveur de Riemann approché . . . . .	62
2.4 Principales propriétés du schéma . . . . .	69
2.5 Défaut du schéma numérique . . . . .	77
2.6 Résultats numériques . . . . .	79
2.6.1 Écoulement fluvial sous-critique sur une bosse parabolique . . .	80
2.6.2 Écoulement transcritique sans choc . . . . .	81
2.6.3 Perturbation d'un écoulement transcritique sans choc . . . . .	82
2.6.4 Écoulement transcritique avec choc . . . . .	84
2.6.5 Écoulement avec transition sèche/mouillée . . . . .	85
2.6.6 Défaut d'entropie . . . . .	91

<b>3</b>	<b>Approximation quadratique des relations de Bernoulli pour un schéma de type Godunov</b>	<b>95</b>
3.1	Motivation d'une nouvelle linéarisation . . . . .	96
3.2	Développement du solveur de Riemann . . . . .	99
3.2.1	Les états intermédiaires . . . . .	99
3.2.2	Discrétisation du terme source . . . . .	101
3.3	Propriétés du schéma numérique . . . . .	105
3.4	Résultats numériques . . . . .	111
3.4.1	Écoulement fluvial sous-critique sur une bosse parabolique . . .	111
3.4.2	Écoulement transcritique sans choc . . . . .	112
3.4.3	Écoulement transcritique avec choc . . . . .	113
3.4.4	Écoulement avec transition sèche/mouillée . . . . .	113
3.4.5	Comportement du schéma NFWB dans le cas test du défaut d'entropie . . . . .	118
<b>4</b>	<b>Extension à l'ordre 2 préservant les états d'équilibres pour le modèle de Saint-Venant</b>	<b>121</b>
4.1	Problématique des schémas du second ordre MUSCL well-balanced . . .	123
4.2	Nouvelle technique simple de reconstruction MUSCL préservant les solutions stationnaires . . . . .	127
4.3	Comparaison avec les schémas FWBC et NFWB . . . . .	132
<b>5</b>	<b>Une équation de lubrification pour un modèle simplifié de fluide rhéofluidifiant</b>	<b>137</b>
5.1	Le modèle mathématique . . . . .	138
5.1.1	Rhéologie . . . . .	140
5.1.2	Mises à l'échelle . . . . .	143
5.2	Équation de lubrification . . . . .	147
5.3	Illustrations numériques . . . . .	153
	<b>Conclusion</b>	<b>163</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>165</b>

# INTRODUCTION

---

L'étude des écoulements en milieu naturel est un enjeu de taille pour la société humaine puisque la majeure partie des humains vivent le long des fleuves ou des côtes. Les équations de *Saint Venant* modélisent les écoulements à surface libre, c'est-à-dire un régime tel que la surface de l'eau est en contact libre avec l'atmosphère et la pression atmosphérique. C'est un système dérivé des équations de Navier-Stokes en imposant que la longueur d'onde des phénomènes modélisés est beaucoup plus grande que la profondeur de l'eau et que la dimension verticale est beaucoup plus petite que la dimension horizontale. Ces équations de Saint-Venant sont utilisées dans la simulation de nombreux phénomènes naturels. Par exemple, dans la conception d'outils de simulation du risque d'inondation [5, 48], la simulation de *ruptures de barrage* [62, 51, 57], dans l'étude et la prévention de *tsunamis* [50, 4, 20], dans l'irrigation en eau des sols agricoles [54, 21], etc.

Le modèle de Saint-Venant a été introduit en 1871 par Adhémar Jean-Claude Barré [21]. Ce système d'équations aux dérivées partielles, avec terme source de topographie, est gouverné par

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) = -gh\partial_x Z, \end{cases} \quad (1)$$

où  $h(x, t)$  représente la hauteur de l'eau et  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  est la vitesse de l'eau. Il est important de noter que la hauteur  $h$  doit être positive ou nulle. Le coefficient  $g > 0$  désigne la constante de gravité. La fonction  $Z(x)$ , supposée régulière, représente la topographie. Enfin, le débit de l'eau est défini par  $q = hu$ .

L'objet de ce travail de thèse, est de développer des méthodes numériques pour approcher les solutions faibles du système (1). Afin d'assurer la pertinence de la simulation numérique, la méthode d'approximation développée doit préserver des propriétés physiques satisfaites par le système (1). Deux propriétés majeures doivent être vérifiées par les simulations. La première concerne la transition sèche/mouillée et l'approximation des zones sèches où la hauteur d'eau est nulle. Pour assurer la cohérence de la simulation de ces régions, il est essentiel de préserver une hauteur d'eau positive



ou nulle tout au long de la simulation. La seconde propriété est une conséquence du terme source de topographie. En effet, le terme  $-gh\partial_x Z$  implique l'existence de solutions stationnaires non triviales qui jouent un rôle fondamental dans le développement des méthodes numériques. Ces solutions particulières, qui ne dépendent pas du temps, sont régies par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_x(hu) &= 0, \\ \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) &= -gh\partial_x Z. \end{cases} \quad (2)$$

Après les travaux pionniers de A.Bermudez et M-E.Vazquez [7] et J-M.Greenberg et A-Y.LeRoux [36] (par exemple, voir aussi L.Gosse [31] ou S.Jin [40]), les solutions stationnaires définies par (2) doivent être capturées de manière précise (voire exacte) pour garantir la pertinence du schéma conçu.

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux travaux ont été consacrés à la dérivation de schémas numériques pour approcher les solutions faibles de (1) et capables de capturer avec précision les solutions stationnaires. En effet, d'après [7, 34, 36, 35], si les solutions d'équilibre ne sont pas correctement capturées, l'approximation peut introduire des erreurs numériques qui vont croître avec le temps. Puisque le système (2) s'avère non-linéaire, de nombreux travaux ne considèrent que le "lac au repos", défini par  $u = 0$  et  $h + z$  égale à une constante. Par exemple, dans E.Audusse, F.Bouchut, M-O.Bristeau, R.Klein et B.Perthame [2] (voir aussi [15]), un schéma dit de reconstruction hydrostatique a été développé. Par une technique de reconstruction aux interfaces complétée par une discrétisation adéquate du terme source, le schéma de reconstruction hydrostatique permet, de façon très simple, de préserver le lac au repos. De par sa simplicité, la reconstruction hydrostatique est couramment adoptée pour développer un schéma bien équilibré (ou well-balanced) (voir [11, 17, 19, 22] pour une liste non exhaustive de références). Plus récemment différents travaux ont été proposés sur la dérivation de schémas capturant des solutions stationnaires mouvantes (avec  $u \neq 0$ ). Par exemple, dans [31], le système non linéaire (2) est résolu à chaque interface pour obtenir un schéma préservant toutes les solutions stationnaires mouvantes ( $u \neq 0$ ) ou non mouvantes ( $u = 0$ ). Cette approche reste coûteuse et nécessite la résolution d'un système non linéaire sur chaque interface et à chaque itération en temps. Dans [18], une extension de la reconstruction hydrostatique est proposée afin de capturer, en plus du lac au repos, des solutions stationnaires en mouvement. Malheureusement, cette reconstruction hydrostatique généralisée ne préserve pas la positivité de la hauteur d'eau.

Afin de préserver toutes les solutions stationnaires définies par (2), Y.Xing [49, 66, 68] propose des extensions de la méthode de Galerkin discontinue. En effet, Y.Xing utilise astucieusement les degrés de liberté, habituellement considérés pour monter en ordre d'approximation, afin de préserver les solutions stationnaires avec  $u \neq 0$ . Plus récemment, dans [8], un schéma de type Godunov pour le système non homogène (1) est développé. Ce schéma est obtenu en dérivant un solveur de Riemann approché pour le système (1) permettant ainsi une prise en compte précise du terme source. Le schéma obtenu préserve alors la positivité de la hauteur d'eau et capture exactement toutes les solutions stationnaires. De plus, la stabilité faible entropique est établie pour cette méthode. Malheureusement, encore une fois, une équation fortement non linéaire doit être résolue à chaque interface. Sur le principe des schémas de type Godunov développés dans [8], des techniques de linéarisation ont été introduites sur chaque interface dans [46, 47]. Cette approche permet de s'affranchir des équations fortement non linéaires devant être résolues sur chaque interface tout en préservant la capture des solutions stationnaires et en préservant la positivité de la hauteur d'eau. Cette nouvelle approche permet de développer des méthodes numériques satisfaisant toutes les bonnes propriétés pour un coût de calcul très intéressant rendant cette méthode particulièrement attractive. Cependant, la discrétisation du terme source présente des incohérences qui doivent être résolues.

Dans ce travail, nous apportons une nouvelle contribution aux schémas de type Godunov préservant les solutions stationnaires à vitesse non nulle suivant les idées introduites dans [46, 47]. Ici, nous proposons de nouvelles familles de solveurs de Riemann approchés qui permettent de lever les inconsistances présentes dans certaines discrétisations proposées dans [46, 47]. Les schémas aux volumes finis, résultants de cette nouvelle famille de solveurs de Riemann approchés, préservent la positivité de la hauteur d'eau, capturent toutes les solutions stationnaires ( $u = 0$  ou  $u \neq 0$ ), et sont capables de traiter les transitions sèche/mouillée. De plus, des critères de stabilité (faibles) entropique peuvent être établis. Équipés de ces schémas du premier ordre nous proposons également des extensions d'ordre 2 de type MUSCL. Sans traitement spécifique, les reconstructions MUSCL ne permettent pas de préserver les solutions stationnaires. Plusieurs stratégies ont récemment été introduites [30, 41, 52], mais, encore une fois, elles nécessitent toutes la résolution de systèmes non linéaires sur chaque interface du maillage tout au long de la simulation. Le coût de calcul prohibitif de ces approches rend inefficente ces techniques de montée en ordre. Dans ce travail, nous proposons

une nouvelle procédure de reconstruction de type MUSCL qui préserve toutes les solutions stationnaires sans jamais résoudre aucun système non linéaire. Le faible coût de calcul de la reconstruction MUSCL, ici développée, rend particulièrement attractive la méthode que nous proposons.

## Plan du manuscrit

### Premier chapitre : Présentation du modèle de Saint-Venant

Dans ce chapitre, on rappelle quelques éléments d'analyse du modèle de Saint-venant (1). Dans un premier temps, nous faisons une brève présentation du système (1) et des solutions stationnaires qui en résultent. Ensuite, nous nous intéressons au système homogène, c'est-à-dire le modèle sans le terme source obtenu pour une topographie plate. Nous exhibons les propriétés algébriques du système homogène en établissant la stricte hyperbolicité pour tout  $h > 0$ . Nous montrons que le système est composé de deux champs caractéristiques vraiment non-linéaires. Il en résulte que la solution du problème de Riemann est constituée de trois états constants séparés par deux ondes qui sont soit *une onde de choc* soit *une onde de détente*. Afin de résoudre le problème de Riemann du système homogène, une étude des ondes de choc et de détente est proposée.

Dans un second temps, pour comprendre l'influence du terme source de topographie, nous écrivons l'algèbre associée au système non homogène. Le terme source de topographie engendre un nouveau champ caractéristique qui est stationnaire linéairement dégénéré. En conséquence, le terme source est responsable d'une onde de contact. L'étude des invariants de Riemann à la traversée de cette onde de contact permet de caractériser autrement les solutions stationnaires. Cette étude du modèle de Saint-Venant (1) est complétée par le développement de l'inégalité d'entropie qui présentera un intérêt pour la stabilité des méthodes numériques.

Dans ce chapitre, nous présentons également les schémas aux volumes finis pour tout système hyperbolique de lois de conservation. Nous commençons par introduire la discrétisation en espace et en temps. Puis, nous présentons l'évolution au cours du temps de la solution discrète. Les propriétés de *consistance* et de *robustesse* devant être satisfaites par le schéma aux volumes finis sont ensuite rappelées. Nous illustrons alors les schémas aux volumes finis avec le *schéma de Godunov* [28, 60], introduit en 1959, et

leurs extensions linéarisées, les *schémas de type Godunov* [37]. Le schéma de Godunov repose sur l'intégration de la solution exacte du problème de Riemann. Cette solution exacte est souvent difficile (voire impossible) à exhiber. En conséquence, afin de remédier à ce défaut, Hartex, Lax et van Leer [37] ont proposé, en 1983, les schémas de type Godunov qui peuvent être compris comme une linéarisation du schéma initial de Godunov. Ces méthodes, plus simples, reposent sur une approximation de la solution exacte du problème de Riemann. Les schémas numériques de type Godunov sont à la base des méthodes que nous développerons dans le cadre de ce travail pour l'approximation des solutions faibles du système (1).

## Deuxième chapitre : Schéma de type Godunov capturant tous les états stationnaires à vitesse non nulle

Le présent chapitre concerne la dérivation d'un schéma well-balanced pour approcher les solutions faibles du modèle de Saint-Venant avec terme source de topographie (1). Dans un premier temps, nous rappelons le principe des schémas de type Godunov pour le modèle Saint-Venant avec terme source de topographie. Ces schémas aux volumes finis sous forme conservative, reposent sur la caractérisation d'un solveur de Riemann approché. Ici, l'un des principaux attraits de la méthode développée réside dans une prise en compte judicieuse du terme source par le solveur de Riemann approché qui sera un atout majeur pour la dérivation de schémas préservant tous les états stationnaires.

Concernant l'approximation du terme source, la préservation des solutions stationnaires à vitesse non nulle impose une condition nécessaire qui doit être satisfaite par la discrétisation à adopter. Cette condition est indépendante du choix du solveur de Riemann approché. À la différence des discrétisations déjà établies dans [46, 47], nous obtenons ici une formulation toujours consistante. Toutefois, cette nouvelle discrétisation n'est pas toujours bien définie lors des changements de régimes entre les écoulements fluviaux et les écoulements torrentiels. Afin de contrôler ce cas particulier où le nombre de *Froude* est égal à un, nous proposons une correction qui permet de définir la discrétisation du terme source pour tout état physique admissible.

Une fois équipés d'une discrétisation du terme source, nous sommes en mesure de proposer une définition d'un solveur de Riemann approché. Ici, nous adoptons un solveur constitué de deux états intermédiaires séparés par une discontinuité stationnaire.

Afin de déterminer les deux états intermédiaires, suivant les travaux de Hartex, Lax et van Leer [37], nous imposons une condition de consistance intégrale qui assure la conservation naturelle du schéma aux volumes finis résultant. Malheureusement, une relation est manquante pour la détermination complète des états intermédiaires. Le choix de cette dernière relation doit permettre de préserver les solutions stationnaires à vitesse non nulle. Pour cela, nous devons adopter une relation mimant, en un sens à préciser, la préservation de l'équation de Bernoulli. Dans un souci de simplicité, pour ce premier schéma, nous adoptons une linéarisation de la relation de Bernoulli entre les états intermédiaires. Nous sommes alors en mesure de déterminer tous les états intermédiaires. De la même façon que pour le développement de la discrétisation du terme source, les états intermédiaires obtenus ne sont pas correctement définis pour un nombre de *Froude* égale à un. Là encore, nous adoptons une correction qui préserve les solutions stationnaires et qui corrige le défaut constaté au changement de régime. De plus, les états intermédiaires obtenus ne sont pas nécessairement admissibles et peuvent produire des hauteurs d'eau négatives. Afin de corriger ce dernier défaut, nous adoptons une technique de cutoff conservatif des hauteurs d'eau.

À présent, connaissant la discrétisation du terme source et le solveur Riemann approché, nous sommes en mesure de développer un schéma aux volumes finis de type Godunov qui préserve les solutions stationnaires et la positivité de la hauteur d'eau. Concernant ce premier schéma, nous établissons également qu'il peut capturer des chocs stationnaires non entropiques. Cependant, les résultats numériques mettent en avant une instabilité de ces solutions non admissibles qui ne sont, dans la pratique, jamais capturées au profit de la solution entropique naturelle.

Dans la dernière section de ce chapitre, nous proposons plusieurs expériences numériques illustrant la pertinence du schéma conçu. Une comparaison systématique avec la méthode bien connue de reconstruction hydrostatique [2], appliquée au schéma (HLL) [37], et le schéma Fully well-balanced proposé dans [46, 47], est réalisée pour toutes les simulations. Nous avons commencé par montrer le comportement du schéma pour la capture des solutions stationnaires à travers le cas des écoulements sous-critiques et transcritiques. Nous avons vérifié la robustesse avec le cas d'une solution stationnaire perturbée où nous avons observé un très bon comportement de notre schéma. Ensuite, nous montrons à travers différents cas tests, la capacité du schéma à localiser et traiter correctement les transitions de zones sèches/mouillées. Pour finir, nous illustrons le comportement numérique de notre schéma pour une donnée initiale discontinue vé-

rifiant la relation de Bernoulli. Cette discontinuité initiale n'est pas admissible car elle viole le critère d'inégalité d'entropie. La solution naturelle est une solution du problème de Riemann constituée d'une détente et d'un choc. A priori, le schéma que nous avons développé préserve cette solution stationnaire non admissible. Toutefois, les erreurs d'arrondis numériques engendrées par la simulation déstabilisent cette solution non admissible et le schéma produit la solution entropique attendue.

### Troisième chapitre : Approximation quadratique des relations de Bernoulli pour un schéma de type Godunov

Dans ce chapitre nous nous intéressons à une amélioration du schéma de type Godunov afin d'éviter la capture des solutions stationnaires non entropiques. En effet, la capture des chocs stationnaires non entropiques semble être une conséquence du caractère mal posé de la linéarisation pour un nombre de *Froude* égal à un. De plus, les corrections apportées pour forcer un caractère bien posé de la discrétisation à *Froude* égal à un sont insuffisantes pour empêcher la capture des solutions non entropiques.

Nous proposons ici une extension du schéma de type Godunov corrigeant ce défaut. Pour cela, nous adoptons une nouvelle linéarisation, qui repose sur une formulation quadratique, de la relation de Bernoulli. Cette nouvelle linéarisation permet de mimer plus précisément le comportement exact des solutions stationnaires. Le choix de cette nouvelle formulation quadratique, nous permet de définir, sans correction additionnelle, une discrétisation toujours bien définie quelque soit le nombre de *Froude*. De plus, une propriété remarquable de cette formulation quadratique nous permet de proposer une nouvelle discrétisation du terme source qui se trouve alors, elle aussi, toujours bien définie. Il en résulte une discrétisation du terme source et une définition du solveur de Riemann approché qui préservent toutes les solutions stationnaires qui ne contiennent pas de zones de transition dans un voisinage de *Froude* égal à un.

Nous établissons que le schéma aux volumes finis de type Godunov résultant des développements précédents, vérifie les propriétés attendues. En particulier, nous montrons que ce schéma préserve la positivité de la hauteur d'eau, qu'il capture toutes les solutions stationnaires pour un *Froude* différent de un et une inégalité d'entropie définie relativement à perturbation en  $\mathcal{O}(\Delta x)$ . De plus, à la différence du schéma présenté dans le chapitre précédent, nous montrons que ce nouveau schéma ne peut pas préserver les discontinuités stationnaires non entropiques. La réalisation des cas tests présentés dans

le chapitre précédent et la comparaison des deux schémas obtenus met en avant l'intérêt de cette nouvelle méthode.

## **Quatrième chapitre : Extension à l'ordre 2 préservant les états d'équilibre pour le modèle de Saint-Venant**

Dans les deux chapitres précédents, nous avons développé des schémas numériques de premier ordre préservant toutes les solutions stationnaires des équations de Saint-Venant avec terme source de topographie. Ici, nous proposons une extension du second ordre en espace qui doit également préserver les solutions stationnaires. Il faut noter qu'il existe de nombreuses stratégies pour obtenir un meilleur ordre d'approximation. Parmi toutes les stratégies existantes, les schémas de type MUSCL (voir par exemple [60, 64, 42]) sont particulièrement attractifs par leur simplicité de mise en œuvre. Toutefois, la stratégie MUSCL soulève une difficulté majeure pour les systèmes non homogènes avec terme source. En effet, les solutions stationnaires doivent être préservées par la méthode de reconstruction. Même si pour des solutions stationnaires linéaires cette contrainte de préservation est aisément satisfaite, dès que les solutions stationnaires deviennent non linéaires, le développement de reconstruction MUSCL préservant de tels équilibres est un véritable défi. Dans [30, 41, 52], des techniques de montée en ordre préservant les solutions stationnaires sont proposées. Malheureusement ces approches nécessitent la résolution de systèmes non linéaires sur chaque interface. Il en résulte des méthodes particulièrement coûteuses dont l'intérêt peut être discutable en fonction du système approché. L'objectif de ce chapitre est de proposer une nouvelle stratégie MUSCL qui préserve les solutions stationnaires sans jamais résoudre de système non linéaire, donc pour un coût de calcul faible.

Dans un premier temps, nous présentons la dérivation des schémas de type MUSCL et nous montrons les difficultés inhérentes à la préservation des solutions stationnaires non linéaires. Nous mettons en évidence le fait que les stratégies usuelles nécessitent la résolution de systèmes non linéaires sur chaque interface. Forts de cette constatation, nous dérivons une technique de correction applicable à toute reconstruction MUSCL et qui préserve l'ordre d'approximation. Cette correction consiste en une simple multiplication de l'approximation de la pente par un coefficient astucieusement choisi. En fait, ce coefficient n'est rien d'autre qu'une approximation de 1 avec un ordre d'approximation choisi mais qui s'annule lorsque les états reconstruits sont à l'équilibre.

Nous montrons que le schéma du second ordre en espace ainsi proposé préserve les solutions stationnaires. De plus, nous établissons sa robustesse. Plusieurs simulations numériques permettent d'illustrer la pertinence de la correction que nous avons ici développée.

## **Cinquième chapitre : Une équation de lubrification pour un modèle simplifié de fluide rhéofluidifiant**

Ce dernier chapitre concerne une étude réalisée durant le CEMRACS 2019 dédié aux fluides géophysiques et aux écoulements gravitaires. Nous abordons un sujet qui n'est pas dans la thématique générale de la thèse, tout en restant proche des domaines d'application. Il s'agit d'un modèle de lubrification pour une classe de fluides non newtoniens.

L'équation de lubrification dérive du système de Navier-Stokes incompressible, lorsque la couche de fluide étudiée est mince, et que les effets visqueux équilibrent les forces de pression. On a alors affaire à un écoulement de Stokes. Ce modèle a été introduit par Reynolds [53] en 1886, pour étudier de minces films d'huile, d'où le nom d'équation de lubrification.

Dans ce travail, nous nous intéressons à des fluides non newtoniens, pour lesquels la viscosité n'est plus constante. Elle dépend ici du tenseur de déformation du fluide, avec l'idée que, plus la déformation est petite, plus la viscosité est grande. Ce type de fluides se rencontre dans plusieurs applications en ingénierie, biologie, géophysique... Plus particulièrement, les fluides viscoplastiques ou pseudoplastiques sont impliqués en géophysique par exemple pour les coulées de boue ou certains modèles de croûte terrestre.

Le modèle simple étudié ici, introduit par K-F.Liu et C-C.Mei [44], consiste à fixer un seuil séparant les "petites" déformations des "grandes", et à attribuer une viscosité constante de part et d'autre du seuil. Lorsque la viscosité liée aux petites déformations tend vers  $+\infty$ , on retrouve un fluide de type Bingham. On parlera dans la suite improprement de modèle à deux viscosités.

Le plan du chapitre est le suivant. Nous commençons par rappeler le contexte mathématique initial, qui sont les équations incompressibles de Navier-Stokes avec un domaine dépendant du temps, puisque nous considérons un problème à frontière libre. Nous définissons ensuite la rhéologie utilisée, c'est-à-dire que nous donnons une for-



mulation précise à la notion de modèle à deux viscosités. Par la suite, nous établissons en détail toutes les mises à l'échelle impliquées, couche mince et équilibre entre pression et effets visqueux. L'étape finale consiste à intégrer les équations obtenues dans la direction verticale, ce qui nous permet d'obtenir l'équation de lubrification proprement dite, qui est une équation de diffusion fortement non linéaire. Nous proposons pour conclure quelques expériences numériques basées sur un schéma aux volumes finis, afin d'illustrer le comportement du modèle sous différentes conditions.

## Valorisation des travaux de thèse

Ce travail a donné lieu aux articles [12, 13]. L'article [13] a été publié dans IJFV (International Journal on Finite Volumes). D'autre part, L'article [12] est actuellement en révision mineur à SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics). J'ai participé au CEMRACS 2019 (Centre d'Été Mathématique de Recherche Avancée en Calcul Scientifique), durant lequel j'ai réalisé en groupe un projet qui a abouti à la publication d'un proceeding [23].

Par ailleurs, durant ces années de thèse, j'ai pu faire des présentations de mes travaux de thèse :

- Séminaire des doctorants de Nantes, université de Nantes,
- Séminaire Landau, université de Rennes,
- Séminaire LMDAN (Laboratoire mathématiques de la décision et d'analyse numérique), université Cheikh Anta Diop de Dakar,
- Séminaire du projet NLAGA (Non Linear Analysis, Geometry and Applications), université Cheikh Anta Diop de Dakar,
- École EGRIN 2021, France,
- Séminaire AfriMaths, Dakar.

# PRÉSENTATION DU MODÈLE DE SAINT-VENANT

Ce chapitre est consacré à la présentation du modèle de Saint-Venant. Ce système d'équations aux dérivées partielles a été introduit par Adhémar Jean-Claude Barré de Saint-Venant en 1871 [21]. Ce système et ses variantes sont utilisés dans la simulation de nombreux phénomènes naturels, par exemple : inondation, tsunami, rupture de barrage, irrigation de terres agricoles, etc ....

En une dimension d'espace, le modèle est gouverné par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) = -gh\partial_x Z, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $h(x, t) \geq 0$  et  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  représentent respectivement la hauteur et la vitesse de l'eau. Ici,  $g > 0$  désigne la constante de gravité et  $Z(x)$  est la fonction représentant la topographie. On suppose que cette fonction est régulière. De plus, le débit de l'eau est donné par  $q = hu$ . La figure 1.1, illustre les différentes variables du modèle.

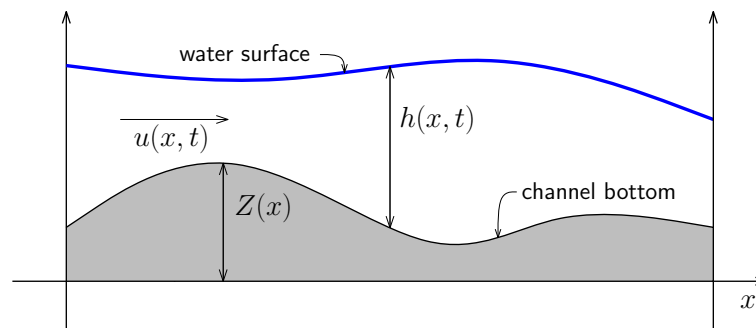


FIGURE 1.1 – Illustration des variables du système de Saint-Venant avec terme source de topographie. Par hypothèse, la vitesse est la même sur toute la colonne d'eau.

Pour plus de simplicité dans les notations, nous introduisons

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(W, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x Z \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

où  $W$ ,  $F$  et  $S$  représentent respectivement le vecteur des inconnues, le flux physique et le terme source.

Ainsi, on peut réécrire le système sous la forme suivante :

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = S(W, Z), \quad (1.3)$$

où  $W$  appartient à l'ensemble des états admissibles  $\Omega$  défini par

$$\Omega = \{W = (h, q)^t \in \mathbb{R}^2; h \geq 0, q \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

On peut remarquer que l'espace de phase contient également des zones sèches définies par  $h = 0$ . De telles régions nécessitent une attention particulière qui sera traitée de façon spécifique puisque le système n'a, à priori, plus de sens. Par convention, nous supposons que si  $h = 0$  alors le débit  $q$  est également nul.

Après cette brève présentation du modèle de Saint-Venant, nous allons détailler des solutions stationnaires du système (1.1).

## 1.1 Les états stationnaires

En raison de leur importance lors de la mise en place de méthodes numériques d'approximation, dans cette section, nous présentons les solutions stationnaires satisfaites par le modèle (1.1). Ces solutions sont indépendantes du temps et sont alors régies par le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) = -gh\partial_x Z. \end{cases} \quad (1.4)$$

Après un calcul direct, le système peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_x\left(\frac{u^2}{2} + g(h + Z)\right) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent, pour toutes constantes données  $(Q, B) \in \mathbb{R}^2$ , les solutions stationnaires sont caractérisées par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} hu = Q, \\ \frac{u^2}{2} + g(h + Z) = B. \end{cases} \quad (1.5)$$

Par souci de simplicité dans les développements à venir, on définit

$$\mathcal{B}(W, Z) = \frac{u^2}{2} + g(h + Z). \quad (1.6)$$

On remarque que la seconde identité de (1.5) est en fait le *principe de Bernoulli* [65].

Dans le cas où  $u = 0$ , on retrouve un équilibre particulier appelé le *lac au repos* (voir par exemple [2]) caractérisé par :

$$\begin{cases} u = 0, \\ h + Z = cte. \end{cases} \quad (1.7)$$

Dans la suite, nous verrons que le lac au repos, défini par (1.7), ainsi que les solutions stationnaires à vitesse non nulle définies par (1.5), joueront un rôle prépondérant dans le développement de schémas numériques.

## 1.2 Propriétés algébriques et problème de Riemann du système homogène

Cette section est consacrée à mettre en évidence certaines propriétés algébriques des équations de Saint-Venant homogènes en une dimension d'espace et à présenter la résolution du problème de Riemann.

### 1.2.1 Algèbre du système homogène

Nous allons étudier les propriétés du système homogène de Saint-Venant. Nous montrons l'hyperbolicité du système et nous étudions ses champs caractéristiques ainsi

que les invariants de Riemann associés. On considère le système homogène défini par

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + g\frac{h^2}{2}\right) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

et nous supposons que  $h > 0$ . Puisque que la nature du système (hyperbolicité, invariant de Riemann, etc....) est indépendante d'un changement de variable, nous adoptons les variables primitives  $U = (h, u)^t$ . L'ensemble des états admissibles pour les variables primitives est défini par

$$\Omega_U = \{U = (h, u)^t \in \mathbb{R}^2; h > 0, u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Pour une solution régulière, le système peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t h + u\partial_x h + h\partial_x u = 0, \\ \partial_t u + u\partial_x u + g\partial_x h = 0. \end{cases}$$

Ainsi on écrit le système sous la forme quasi-linéaire

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0, \quad (1.9)$$

où  $A(U)$  est définie par

$$A(U) = \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

**Lemme 1.2.2.** *Le système (1.8) est strictement hyperbolique.*

*Démonstration.* On rappelle que le système (1.8) est strictement hyperbolique si la matrice  $A(U)$  définie par (1.10) admet des valeurs propres réelles distinctes. Un calcul direct nous donne les deux valeurs propres suivantes :

$$\lambda^+(U) = u + \sqrt{gh} \quad \text{et} \quad \lambda^-(U) = u - \sqrt{gh}, \quad (1.11)$$

où le terme  $\sqrt{gh}$  est en fait la vitesse du son. Comme  $h > 0$ , on a  $\lambda^+(U), \lambda^-(U) \in \mathbb{R}$  avec  $\lambda^+(U) > \lambda^-(U)$ . Ainsi, comme les valeurs propres sont réelles et distinctes et il en résulte que le système de Saint-Venant est strictement hyperbolique. Le lemme est ainsi démontré.  $\square$

Maintenant, nous allons étudier la nature des champs caractéristiques.

**Définition 1.2.3.** *Un champ caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda(U)$  est dit vraiment non linéaire (VNL) si et seulement si*

$$\nabla_U \lambda(U) \cdot R(U) \neq 0 \text{ pour tout } U \in \Omega_U,$$

où  $R(U)$  est un vecteur propre associé à  $\lambda(U)$  et  $\Omega_U$  est l'espace de phase pour la variable  $U$ .

**Définition 1.2.4.** *Un champ caractéristique associé à la valeur propre  $\lambda(U)$  est dit linéairement dégénéré (LD) si et seulement si*

$$\nabla_U \lambda(U) \cdot R(U) = 0 \text{ pour tout } U \in \Omega_U$$

où  $R(U)$  est un vecteur propre associé à  $\lambda(U)$  et  $\Omega_U$  est l'espace de phase pour la variable  $U$ .

Suivant la nature des champs, des ondes de nature différente (choc, détente, contact) peuvent apparaître. À partir des deux définitions précédentes, nous voyons que pour étudier la nature des champs caractéristiques, il faut calculer les vecteurs propres  $R^+(U)$  et  $R^-(U)$  de  $A(U)$ .

Les vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda^\pm(U)$  sont donnés par

$$R^\pm(U) = \begin{pmatrix} \pm h \\ \sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

Avec  $h > 0$ , on a

$$\nabla_U \lambda^\pm(U) \cdot R^\pm(U) = \frac{3}{2} \sqrt{gh} \neq 0,$$

de sorte que les deux champs sont VNL.

Avant de conclure cette étude des propriétés du système homogène de Saint-Venant, nous allons calculer les *invariants de Riemann*.

**Définition 1.2.5.** *Une fonction  $U \mapsto \Phi(U)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est un invariant de Riemann associé au  $j^{\text{ième}}$  champ si et seulement si*

$$\nabla_U \Phi(U) \cdot R_j(U) = 0. \tag{1.12}$$

Dans notre contexte, l'équation (1.12) peut être reformulée [16] sous la forme sui-

vante :

$$\frac{dh}{R_1^-(U)} = \frac{du}{R_2^-(U)} \quad \text{et} \quad \frac{dh}{R_1^+(U)} = \frac{du}{R_2^+(U)}$$

où  $R_1^\pm(U)$  et  $R_2^\pm(U)$  sont les deux composantes des vecteurs propres  $R^\pm(U)$ , avec  $h$  et  $u$  les deux composantes du vecteur  $U$ . Ainsi on a

$$\frac{dh}{\pm h} = \frac{du}{\sqrt{gh}},$$

d'où

$$du \pm 2\sqrt{g} \frac{dh}{2\sqrt{h}} = 0,$$

pour en déduire

$$d(u \pm 2\sqrt{gh}) = 0.$$

Par conséquent, on obtient les invariants de Riemann associés aux valeurs propres  $\lambda^-(U)$  et  $\lambda^+(U)$  :

$$\Phi^-(U) = u + 2\sqrt{gh} \quad \text{et} \quad \Phi^+(U) = u - 2\sqrt{gh}. \quad (1.13)$$

Équipés de cette algèbre pour le système homogène (1.8), nous allons nous intéresser à la résolution du problème de Riemann.

## 1.2.6 Résolution du problème de Riemann

Nous considérons à présent le problème de Riemann. Il s'agit d'un problème de Cauchy défini par

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, t = 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.14)$$

où  $F$  et  $W$  sont définies par (1.2). La donnée initiale est définie par deux états constants  $W_L$  et  $W_R$  dans  $\Omega$  séparés par une discontinuité en  $x = 0$ . Par souci de simplicité dans les notations nous posons  $h_L u_L = q_L$  et  $h_R u_R = q_R$ .

Les deux champs caractéristiques de ce système étant vraiment non linéaire (VNL), la solution du problème de Riemann (1.14) sera constituée de trois états constants (respectivement  $W_L$  puis  $W^*$  puis  $W_R$ ) séparés par deux ondes qui seront soit une onde de choc soit une onde de détente. Afin de résoudre le problème de Riemann, il nous faut donc déterminer l'état intermédiaire  $W^*$  ainsi que la nature de chacune des ondes.

Dans un premier temps, nous allons étudier indépendamment chacune des ondes.

### Étude des ondes de détente

L'onde de détente connecte deux états constants par une fonction continue. À la traversée de cette onde, les invariants de Riemann sont constants. D'après Godlewski Raviart [28], nous avons le résultat suivant :

**Lemme 1.2.7.** *Une 1-onde du problème de Riemann (1.14) connectant  $W_L$  à  $W^*$  est une onde de raréfaction si les invariants de Riemann sont constants à travers l'onde et si les valeurs propres sont ordonnées, comme suit :*

$$\begin{cases} \lambda^-(W_L) \leq \lambda^-(W^*), \\ \Phi^-(W_L) = \Phi^-(W^*). \end{cases} \quad (1.15)$$

De façon similaire, une 2-onde connectant  $W^*$  à  $W_R$  est une onde de raréfaction si

$$\begin{cases} \lambda^+(W^*) \leq \lambda^+(W_R), \\ \Phi^+(W^*) = \Phi^+(W_R), \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\lambda^\pm$  et  $\Phi^\pm$  sont données respectivement en (1.11) et (1.13).

Maintenant à partir du lemme 1.2.7, nous allons construire les ondes de détente. Pour cela, étant donné  $W_L = (h_L, q_L)^t$  un état constant, les états  $W^* = (h^*, q^*)^t$  qui peuvent être reliés à  $W_L$  par une onde de détente vont être déterminés.

Commençons par une onde de 1-détente définie par (1.15). En conséquence du lemme 1.2.7 et de l'égalité (1.15) assurant la continuité des invariants de Riemann, on a la relation suivante :

$$u^* + 2\sqrt{gh^*} = u_L + 2\sqrt{gh_L}.$$

En déterminant  $u^*$  en fonction de  $h^*$ , on obtient

$$u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}). \quad (1.17)$$

Toujours, d'après le lemme 1.2.7 et la relation (1.15) assurant l'ordonnement des valeurs propres, nous avons :

$$u^* \geq u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_L}).$$



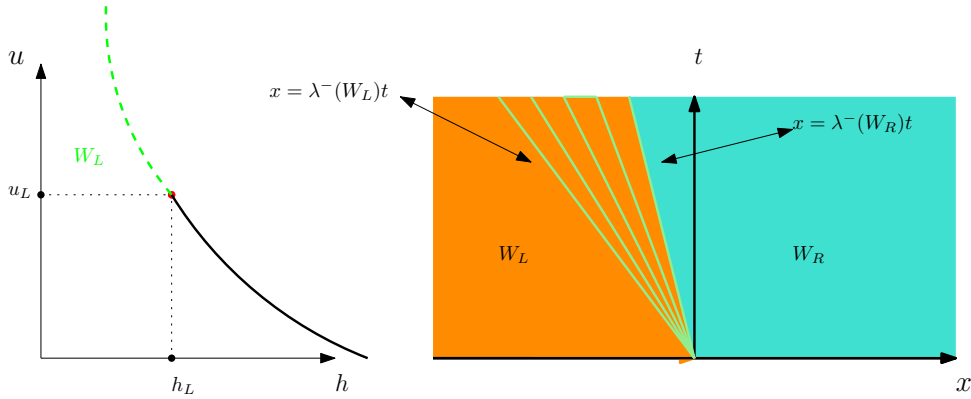


FIGURE 1.2 – Illustration d’une 1-détente. À gauche on représente les états  $u^*$  et  $h^*$  qui peuvent être connectés par une onde 1-détente et qui sont définis par la relation (1.17). Sur la figure de droite, on présente la caractérisation en fonction de  $x$  et de  $t$  de la solution de 1-détente relativement à la définition (1.18).

Avec la définition de  $u^*$  donnée par (1.17), on obtient

$$u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}) \geq u_L + \sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_L}),$$

ce qui implique  $\sqrt{h_L} \geq \sqrt{h^*}$ , d’où  $h_L \geq h^*$  et donc, d’après (1.17),  $u^* \geq u_L$ . En conclusion, les états  $W^*$  connectés à  $W_L$  par une 1-détente sont caractérisés par

$$\begin{cases} u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \\ u^* \geq u_L, \\ h^* \leq h_L. \end{cases} \quad (1.18)$$

Si  $W^*$  est défini suivant (1.18), la solution  $W(x, t)$  qui connecte  $W_L$  à  $W^*$  est une 1-détente. Puisque cette solution est auto-similaire et vérifie donc  $W(x, t) = \bar{W}(x/t)$ , il en résulte que la solution 1-détente est nécessairement de la forme suivante :

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \lambda^-(W_L)t, \\ \bar{W}(x/t) & \text{si } \lambda^-(W_L)t < x < \lambda^-(W^*)t, \\ W^* & \text{si } x > \lambda^-(W^*)t, \end{cases} \quad (1.19)$$

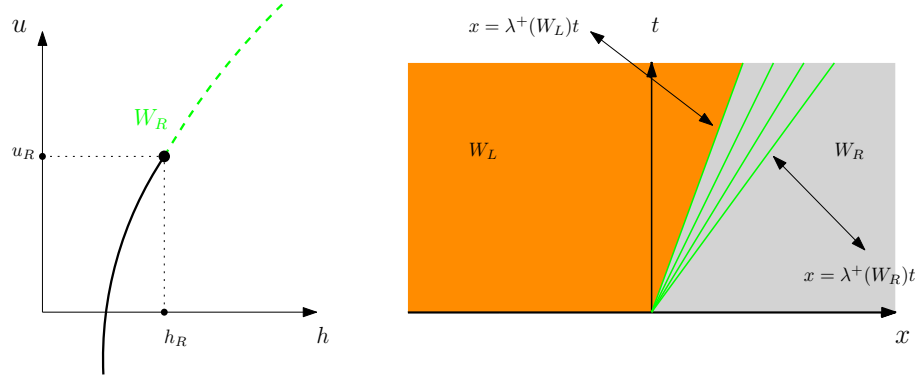


FIGURE 1.3 – Illustration d’une 2-détente. À gauche on représente les états  $u^*$  et  $h^*$  qui peuvent être connectés par une onde 2-détente. Sur la figure de droite, on présente la caractérisation en fonction de  $x$  et de  $t$  de la solution de 2-détente relativement à la définition (1.21).

où  $\bar{W}(x/t)$  est définie par

$$\begin{cases} \bar{u}(x/t) + 2\sqrt{g\bar{h}(x/t)} = u_L + 2\sqrt{gh_L}, \\ \frac{x}{t} = \bar{u}(x/t) - \sqrt{g\bar{h}(x/t)}. \end{cases}$$

La résolution du système précédent conduit à la définition suivante de l’état  $\bar{W}$  :

$$\begin{cases} \bar{u}(x/t) = \frac{1}{3} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t} \right), \\ \bar{h}(x/t) = \frac{1}{9g} \left( u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t} \right)^2. \end{cases} \quad (1.20)$$

En procédant de façon similaire, les états  $W^*$  pouvant se connecter à  $W_R$  par une 2-détente sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} u^* = u_R - 2\sqrt{g}(\sqrt{h_R} - \sqrt{h^*}), \\ u^* \leq u_R, \\ h^* \leq h_R. \end{cases} \quad (1.21)$$

Si  $W^*$  vérifie la relation (1.21), la solution  $W(x, t)$  est uniquement constituée d’une

2-détente donnée par

$$W(x, t) = \begin{cases} W^* & \text{si } x < \lambda^+(W^*)t, \\ \bar{W}(x/t) & \text{si } \lambda^+(W^*)t < x < \lambda^+(W_R)t, \\ W_R & \text{si } x > \lambda^+(W_R)t, \end{cases} \quad (1.22)$$

où la fonction  $\bar{W}(x/t)$  est définie par

$$\begin{cases} \bar{u}(x/t) = \frac{1}{3} \left( u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t} \right), \\ \bar{h}(x/t) = \frac{1}{9g} \left( -\frac{x}{t} + u_R - 2\sqrt{gh_R} \right)^2. \end{cases} \quad (1.23)$$

### Étude des ondes de choc

Concernant les ondes de choc, deux états constants connectés par une discontinuité se propageant à une vitesse  $\sigma$ , sont gouvernés par les relations de Rankine-Hugoniot [28, 60]. Cette condition de saut est définie par

$$\sigma \times (W_R - W_L) = F(W_R) - F(W_L), \quad (1.24)$$

où  $\sigma$  est la vitesse de discontinuité. Par conséquent dans le cadre du système homogène (1.8), l'égalité (1.24) peut être reformulée de façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma[h] = [q], \\ \sigma[q] = \left[ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right], \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $[X] = X_R - X_L$  représente le saut de la quantité  $X$  à travers la discontinuité. Par ailleurs, les relations de Rankine-Hugoniot n'assurent pas l'unicité de la solution du problème de Riemann, c'est pourquoi il faut considérer une condition d'entropie dite condition de Lax [28].

**Définition 1.2.8** (Condition d'entropie de Lax). *Nous dirons qu'une discontinuité satisfait la condition d'entropie de Lax s'il existe un indice  $k \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que l'on ait*

$$\begin{aligned} \lambda_k(W_R) &< \sigma < \lambda_{k+1}(W_R), \\ \lambda_{k-1}(W_L) &< \sigma < \lambda_k(W_L), \end{aligned}$$

si le champ  $k$  est VNL.

Enfin, dans le lemme suivant, nous énonçons des conditions suffisantes pour que la 1-onde ou 2-onde soit une onde de choc satisfaisant le critère de Lax.

**Lemme 1.2.9.** *Une 1-onde du problème de Riemann (1.14) connectant  $W_L$  à  $W^*$  est une onde de choc entropique avec une vitesse de discontinuité  $\sigma$  si la condition de Lax et les relations de Rankine-Hugoniot sont satisfaites :*

$$\begin{cases} \lambda^-(W^*) < \sigma < \lambda^-(W_L), \\ \sigma(W^* - W_L) = F(W^*) - F(W_L). \end{cases} \quad (1.26)$$

De façon similaire, une 2-onde est une onde de choc entropique connectant  $W^*$  à  $W_R$  si

$$\begin{cases} \lambda^+(W_R) < \sigma < \lambda^+(W^*), \\ \sigma(W_R - W^*) = F(W_R) - F(W^*). \end{cases} \quad (1.27)$$

Maintenant, nous allons construire les ondes de choc. Dans un premier temps, on se donne  $W_L$  et on cherche les états  $W^*$  qui peuvent être connectés à  $W_L$  par un choc de vitesse  $\sigma$ . L'état  $W^*$  est donc caractérisé par les relations de Rankine-Hugoniot (1.25). On remarque que la première équation dans (1.25) nous donne

$$-\sigma(h^* - h_L) + (h^*u^* - h_Lu_L) = 0,$$

on en déduit

$$M = h^*(u^* - \sigma) = h_L(u_L - \sigma), \quad (1.28)$$

où  $M$  désigne le débit à travers l'onde de choc. On peut alors remarquer que

$$\frac{M}{h^*} = u^* - \sigma \quad \text{et} \quad \frac{M}{h_L} = u_L - \sigma, \quad (1.29)$$

pour en déduire la relation suivante :

$$\frac{M}{h_L} - \frac{M}{h^*} = u_L - u^*,$$

d'où

$$M = \frac{u_L - u^*}{1/h_L - 1/h^*}. \quad (1.30)$$

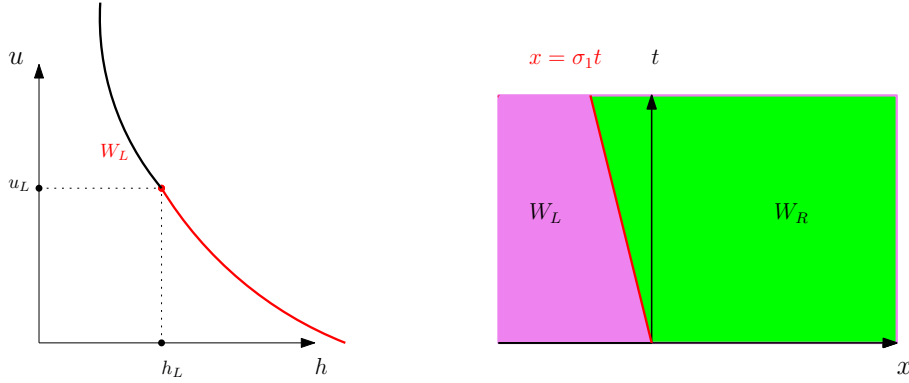


FIGURE 1.4 – Illustration d’une 1-onde de choc. À gauche on représente les états  $u^*$  et  $h^*$  qui peuvent être connectés par une onde de 1-choc. Sur la figure de droite, on présente la caractérisation en fonction de  $x$  et de  $t$  de la solution de 1-choc.

De plus avec la seconde relation de (1.25), on obtient

$$u^* h^* (u^* - \sigma) + \frac{1}{2} g h^{*2} = u_L h_L (u_L - \sigma) + \frac{1}{2} g h_L^2,$$

Puisque  $M$  vérifie la relation (1.28), alors il en résulte

$$u^* M + \frac{1}{2} g h^{*2} = u_L M + \frac{1}{2} g h_L^2,$$

ce qui implique

$$M = \frac{g}{2} \times \frac{h_L^2 - h^{*2}}{u^* - u_L}. \quad (1.31)$$

Avec les deux égalités (1.30) et (1.31), on en déduit

$$(u^* - u_L)^2 = -\frac{1}{2} g (h_L^2 - h^{*2}) \left( \frac{1}{h_L} - \frac{1}{h^*} \right). \quad (1.32)$$

Notons que cette égalité est toujours bien définie car  $-\frac{1}{2} g (h_L^2 - h^{*2}) \left( \frac{1}{h_L} - \frac{1}{h^*} \right) = \frac{1}{2 h_L h^*} g (h^* + h_L) (h^* - h_L)^2 > 0$  dans  $\Omega$ . En fait on ne peut pas directement en déduire  $u^*$  car on ne connaît pas le signe de  $u^* - u_L$ . Suivant le signe de ce dernier on aura un 1-choc ou un 2-choc.

Afin de déterminer le signe de  $u^* - u_L$ , nous allons considérer le critère de Lax donné par (1.26), qui nous donne

$$\sigma < u_L - \sqrt{g h_L} \quad \text{et} \quad \sigma > u^* - \sqrt{g h^*},$$

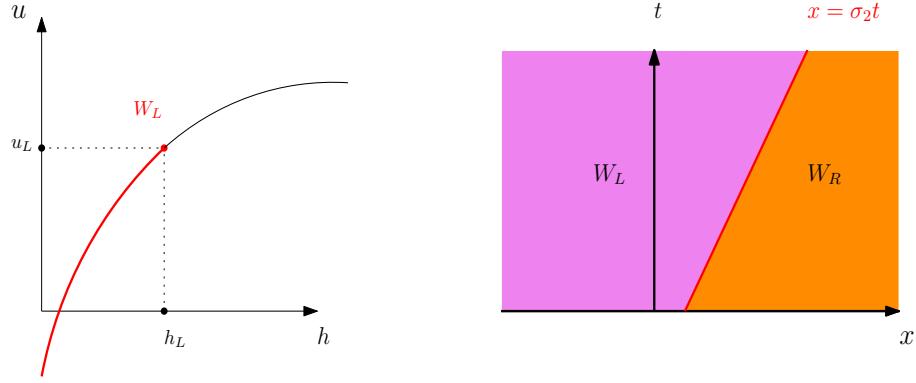


FIGURE 1.5 – Illustration d’une 2-onde de choc. À gauche on représente les états  $u^*$  et  $h^*$  qui peuvent être connectés par une onde de 2-choc. Sur la figure de droite, on présente la caractérisation en fonction de  $x$  et de  $t$  de la solution de 2-choc.

ce qui implique

$$\sigma - u_L < -\sqrt{gh_L} \quad \text{et} \quad \sigma - u^* > -\sqrt{gh^*}.$$

En utilisant (1.29), il en résulte

$$M > h_L \sqrt{gh_L} \quad \text{et} \quad M < h^* \sqrt{gh^*}, \quad (1.33)$$

pour en déduire

$$h_L \sqrt{h_L} < \frac{M}{\sqrt{g}} < h^* \sqrt{h^*}.$$

Il en résulte donc  $h_L < h^*$ . De plus, avec (1.33) on obtient  $\sqrt{gh_L} < \frac{M}{h_L}$  et ainsi  $M > 0$ . Or avec (1.31), on a  $\frac{h_L^2 - h^{*2}}{u^{*2} - u_L^2} > 0$  et de plus  $h_L^2 - h^{*2} < 0$  car  $h_L < h^*$ , on en déduit que  $u^* < u_L$ . En conséquence on a  $u^* - u_L < 0$  et en résolvant l’équation (1.32), on obtient

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_L}{h^* h_L}}, \\ u^* \leq u_L, \\ h^* \geq h_L. \end{cases} \quad (1.34)$$

De façon analogue, pour l’onde 2-choc, on considère le critère de Lax (1.27) pour obtenir

$$h_R \sqrt{h_R} < -\frac{M}{\sqrt{g}} < h^* \sqrt{h^*},$$

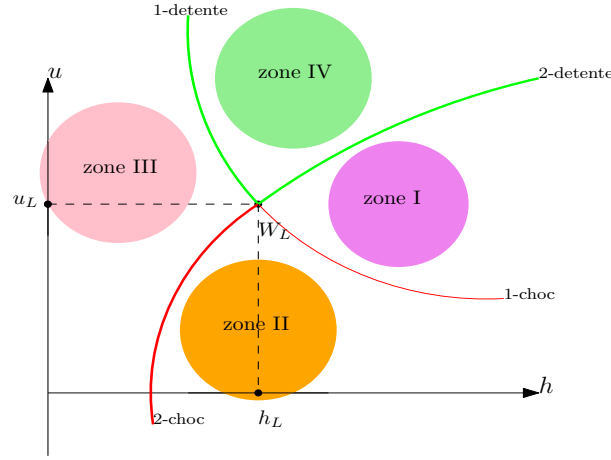


FIGURE 1.6 – Présentation des différents cas pour le problème de Riemann.

ce qui implique  $h^* > h_R$ . Ici, avec (1.27), on a  $-M > h_R \sqrt{gh_R} > 0$  ce qui impose  $M < 0$  et par conséquent, il en résulte que  $u^* > u_R$ . On en déduit  $u^* - u_R > 0$ , ce qui nous donne la caractérisation suivante d'une onde de 2-choc en résolvant (1.32) :

$$\begin{cases} u^* = u_R + (h^* - h_R) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_R}{h^* h_R}}, \\ u^* \geq u_R, \\ h^* \geq h_R. \end{cases} \quad (1.35)$$

Connaissant la caractérisation des ondes constituant la solution du problème de Riemann, nous sommes à présent en mesure de donner la solution du problème (1.14) pour tous états  $W_L$  et  $W_R$  dans  $\Omega$ . La solution dépend de la position de  $W_R$  relativement à  $W_L$  comme illustré dans la Figure 1.6.

**Cas 1-choc et 2-détente :** Il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone I. Dans le 1-choc,  $W^*$  vérifie

$$u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g}{2} \frac{h^* + h_L}{h^* h_L}},$$

avec  $h^* > h_L$  et  $u^* < u_L$ . Dans la 2-détente,  $W^*$  vérifie

$$u_R = u^* - 2\sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_R}),$$

avec  $h^* < h_R$  et  $u^* < u_R$ . D'où l'équation scalaire  $2 \times 2$  non linéaire défini comme

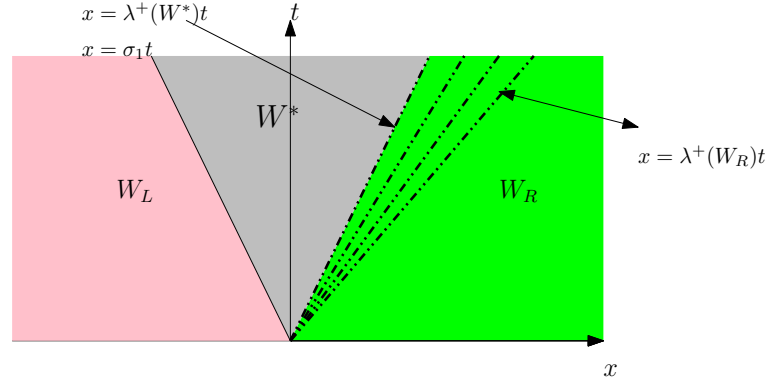


FIGURE 1.7 – Illustration pour le cas d’une solution constituée d’un 1-choc et d’une 2-détente.

suit :

$$\begin{cases} u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g h^* + h_L}{2 h^* h_L}}, \\ u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g h^* + h_L}{2 h^* h_L}} = u_R + 2\sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_R}). \end{cases} \quad (1.36)$$

Ce système doit être résolu pour déterminer  $W^*$ . Ainsi la solution faible entropique est donnée par

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x/t < \sigma_1, \\ W^* & \text{si } \sigma_1 < x/t < \lambda^+(W^*), \\ W_{2-det} & \text{si } \lambda^+(W^*) < x/t < \lambda^+(W_R), \\ W_R & \text{si } x/t > \lambda^+(W_R), \end{cases} \quad (1.37)$$

avec

$$\sigma_1 = \frac{[hu]}{[h]} = \frac{-u_L h_L + u^* h^*}{h^* - h} = \frac{-u_L(h_L - h^*) + h^*(u^* - u_L)}{h^* - h_L} = u_L - h^* \sqrt{\frac{g(h_L + h^*)}{2h_L h^*}},$$

et

$$W_{2-det} = \left( \frac{\frac{1}{9g}(-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2}{\frac{1}{3}(u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t})} \right).$$

La figure 1.7 illustre la représentation de la solution dans le plan de phase.

**Cas 1-choc et 2-choc :** Il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone II. Dans



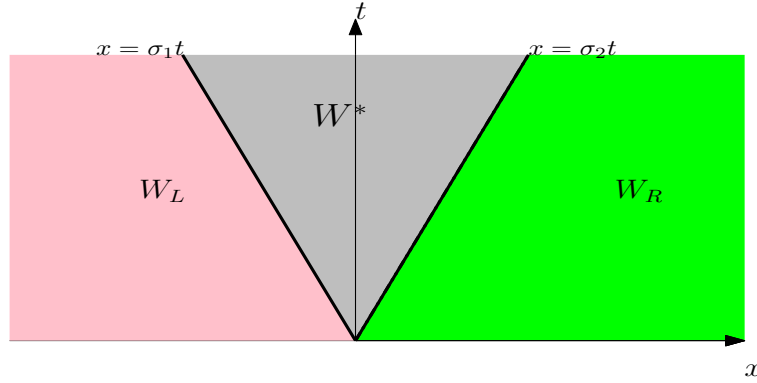


FIGURE 1.8 – Illustration pour le cas d’une solution constituée d’un 1-choc et 2-choc.

l’onde 1-choc,  $W^*$  vérifie

$$u^* = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g h^* + h_L}{2 h^* h_L}}, \quad (1.38)$$

avec et dans l’onde 2-choc,  $W^*$  vérifie

$$u_R = u^* + (h_R - h^*) \sqrt{\frac{g h_R + h^*}{2 h_R h^*}}, \quad (1.39)$$

de sorte que  $W^*$  est solution du système non linéaire constitué des deux équations (1.38)-(1.39). La hauteur  $h^*$  vérifie  $u_R - (h_R - h^*) \sqrt{\frac{g h_R + h^*}{2 h_R h^*}} = u_L + (h_L - h^*) \sqrt{\frac{g h^* + h_L}{2 h^* h_L}}$  avec  $h^* > h_L$  et  $h^* > h_R$ . La solution faible entropique est alors donnée par

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x/t < \sigma_1, \\ W^* & \text{si } \sigma_1 < x/t < \sigma_2, \\ W_R & \text{si } x/t > \sigma_2, \end{cases} \quad (1.40)$$

où, considérant la relation de Rankine-Hugoniot (1.25), les vitesses de propagation des chocs  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont données par

$$\sigma_1 = u_L - h^* \sqrt{\frac{g(h_L + h^*)}{2h_L h^*}},$$

et

$$\sigma_2 = \frac{h_R u_R - h^* u^*}{h_R - h^*} = \frac{(h_R - h^*) u^* + h_R (u_R - u^*)}{h_R - h^*} = u^* + h_R \sqrt{\frac{g(h^* + h_R)}{2h_R h^*}}.$$

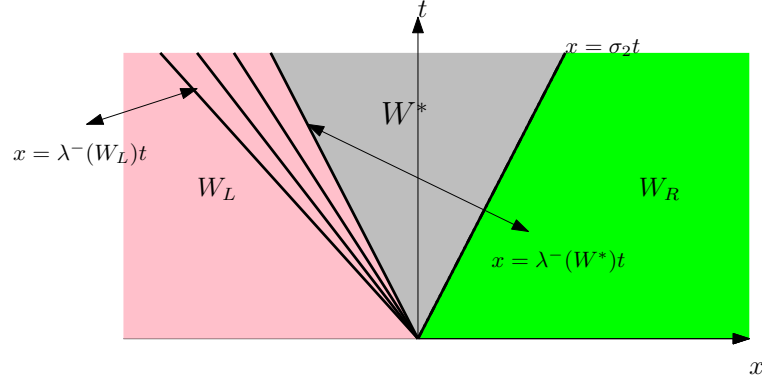


FIGURE 1.9 – Illustration pour le cas d’une solution constituée d’un 1-détente et 2-choc.

La figure 1.8 représente la solution dans le plan de phase.

**Cas 1-détente et 2-choc :** Il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone III. Dans l’onde 1-détente,  $W^*$  vérifie alors

$$u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \quad (1.41)$$

et dans l’onde 2-choc,  $W^*$  vérifie

$$u_R = u^* + (h_R - h^*)\sqrt{\frac{g}{2} \frac{h_R + h^*}{h_R h^*}}. \quad (1.42)$$

L’état  $W^*$  est solution du système non linéaire défini par (1.41)-(1.42). La solution faible entropique est alors définie par

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x/t < \lambda^-(W_L), \\ W_{1-det} & \text{si } \lambda^-(W_L) < x/t < \lambda^-(W^*), \\ W^* & \text{si } \lambda^-(W^*) < x/t < \sigma_2, \\ W_R & \text{si } x/t > \sigma_2, \end{cases} \quad (1.43)$$

avec

$$W_{1-det} = \left( \frac{\frac{1}{9g}(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2}{\frac{1}{3}(u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t})} \right) \quad \text{et} \quad \sigma_2 = u^* + h_R \sqrt{\frac{g(h^* + h_R)}{2h_R h^*}}.$$

La hauteur  $h^*$  est solution de  $u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}) = u_R + (h^* - h_R)\sqrt{\frac{g(h^* + h_R)}{2h_R h^*}}$ . La figure 1.9 illustre la solution du problème de Riemann (1.14) dans le plan  $(x, t)$

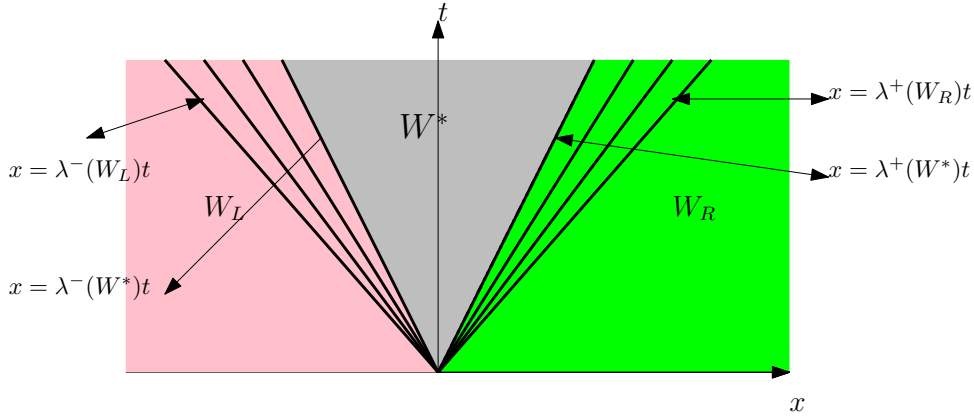


FIGURE 1.10 – Illustration pour le cas d’une solution constituée d’un 1-détente et d’une 2-détente.

lorsque la solution est constituée d’une détente suivie d’un choc.

**Cas 1-détente et 2-détente :** Il correspond au cas où  $W_R$  appartient à la zone IV. Dans l’onde 1-détente,  $W^*$  vérifie

$$u^* = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}), \quad (1.44)$$

et dans l’onde 2-détente,  $W^*$  vérifie

$$u_R = u^* - 2\sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_R}). \quad (1.45)$$

En combinant les égalités (1.44)-(1.45), on obtient

$$u^* = u_R + 2\sqrt{g}(\sqrt{h^*} - \sqrt{h_R}) = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h^*}),$$

par conséquent

$$4\sqrt{gh^*} = u_L - u_R + 2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})$$

Alors la solution  $W^*$  existe si et seulement  $u_R - u_L < 2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R})$ . Globalement, on montre que la solution du problème de Riemann existe si et seulement

$$u_R - u_L < 2(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}),$$

et ainsi la solution faible entropique est gouvernée par

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x/t < \lambda^-(W_L), \\ W_{1-det} & \text{si } \lambda^-(W_L) < x/t < \lambda^-(W^*), \\ W^* & \text{si } \lambda^-(W^*) < x/t < \lambda^+(W^*), \\ W_{2-det} & \text{si } \lambda^+(W^*) < x/t < \lambda^+(W_R), \\ W_R & \text{si } x/t > \lambda^+(W_R), \end{cases} \quad (1.46)$$

avec

$$W_{1-det} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9g}(u_L + 2\sqrt{gh_L} - \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3}(u_L + 2\sqrt{gh_L} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad W_{2-det} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9g}(-u_R + 2\sqrt{gh_R} + \frac{x}{t})^2 \\ \frac{1}{3}(u_R - 2\sqrt{gh_R} + 2\frac{x}{t}) \end{pmatrix}.$$

La figure 1.10 représente la solution dans le plan de phase  $(x, t)$ .

### 1.3 Propriétés algébriques du champ LD pour le système non homogène

Dans cette section, nous allons étudier brièvement l'algèbre relative au terme source de topographie du système de Saint-Venant (1.1). Tout d'abord, on rappelle que la fonction de topographie  $Z$  ne dépend que de la variable d'espace  $x$ . Ainsi, on peut rajouter l'équation triviale  $\partial_t Z(x) = 0$  dans le système (1.1) qui permet de voir l'équation shallow water comme un système d'évolution non linéaire de variable  $V = (h, hu, Z)^t$  sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + gh^2/2) + gh\partial_x Z = 0, \\ \partial_t Z = 0. \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, nous introduisons la forme condensée suivante :

$$\partial_t V + \partial_x F_z(V) + B(V)\partial_x V = 0,$$

où nous avons posé :

$$V = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_z(V) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B(V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & gh \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $\Omega_z$  l'espace des états admissibles défini par :

$$\Omega_z := \{V = (h, hu, Z)^t \in \mathbb{R}^3; h \geq 0, u \in \mathbb{R} \text{ et } Z \in \mathbb{R}\}.$$

Le système peut être réécrit sous sa forme quasi-linéaire donnée par

$$\partial_t V + A(V)\partial_x V = 0,$$

où

$$A(V) = \nabla_V F_z(V) + B(V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & gh \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En calculant les valeurs propres de la matrice A, on obtient :

$$\lambda_1 = u - \sqrt{gh}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{gh}, \quad \lambda_0 = 0.$$

On remarque immédiatement que  $\lambda_0$  est associé à un champ stationnaire linéairement dégénéré (LD). À la différence du système homogène (1.8), le nouveau champ résulte de la prise en compte du terme source de topographie. Afin de comprendre le comportement de la solution à la traversée de ce champ LD, il est naturel d'exhiber les invariants de Riemann. Un calcul rapide nous donne le vecteur propre associé à cette valeur propre stationnaire

$$R_0(V) = \begin{pmatrix} gh \\ 0 \\ u^2 - gh \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient les invariants de Riemann suivants :

$$\varphi_0^{(1)} = hu \quad \text{et} \quad \varphi_0^{(2)} = \mathcal{B}(W, Z) = \frac{u^2}{2} + g(h + Z), \quad (1.47)$$

où  $\mathcal{B}$  est défini par (1.6). On rappelle qu'à la traversée de l'onde de contact, gouvernée par un champ LD, les invariants de Riemann restent constants. On remarque donc immédiatement la correspondance entre la continuité des invariants de Riemann dans l'onde de contact stationnaire et la définition des solutions stationnaires définies par (1.5). Cette remarque trouvera tout son intérêt lors de la dérivation des solveurs Riemann approchés intégrant le terme source.

### 1.3.1 Inégalité d'entropie pour le système non homogène

Afin d'exclure les solutions non physiques, le système est doté d'une inégalité d'entropie.

**Définition 1.3.2.** Une solution faible du système de Saint-Venant (1.1) est une fonction  $W \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  telle que pour tout  $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ , l'égalité suivante est vérifiée :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} (W \partial_t \varphi + F(W) \partial_x \varphi + S(W, Z) \varphi) dt dx = - \int_{\mathbb{R}} W_0(x) \varphi(x, 0) dx,$$

où  $W_0(x) = W(x, t = 0)$ .

**Lemme 1.3.3.** Une solution faible du système de Saint-Venant satisfait l'inégalité d'entropie suivante :

$$\partial_t \eta(W) + \partial_x G(W) \leq -ghu \partial_x Z, \quad (1.48)$$

où  $\eta$  est la fonction d'entropie et  $G$  est le flux entropique définis par

$$\eta(W) = h \frac{u^2}{2} + g \frac{h^2}{2} \quad \text{et} \quad G(W) = \left( \frac{u^2}{2} + gh \right) hu. \quad (1.49)$$

De façon équivalente, on a

$$\partial_t \tilde{\eta}(W, Z) + \partial_x \tilde{G}(W, Z) \leq 0. \quad (1.50)$$

avec

$$\tilde{\eta}(W) = \eta(W, Z) + ghZ \quad \text{et} \quad \tilde{G}(W, Z) = G(W) + ghZ. \quad (1.51)$$

*Démonstration.* Dans un premier temps, on suppose que les solutions  $W$  sont assez régulières afin que toutes les opérations sur les dérivées soient licites.

Considérant l'équation de conservation de  $h$  du système (1.1), on a

$$\partial_t h + u \partial_x h + h \partial_x u = 0.$$

On multiplie cette égalité par  $gh$  pour obtenir une première relation donnée par

$$\partial_t(g\frac{h^2}{2}) + g(hu\partial_x h + h^2\partial_x u) = 0,$$

d'où

$$\partial_t(g\frac{h^2}{2}) + g\left(u\partial_x\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}\partial_x u + \frac{h^2}{2}\partial_x u\right) = 0.$$

Par conséquent, on obtient

$$\partial_t(g\frac{h^2}{2}) + \partial_x(g\frac{h^2}{2}u) + \frac{g}{2}h^2\partial_x u = 0. \quad (1.52)$$

Considérant la seconde équation du système (1.1) qui gouverne la quantité de mouvement, on a

$$\partial_t u + u\partial_x u + \frac{1}{h}\partial_x(g\frac{h^2}{2}) = -g\partial_x Z.$$

On multiplie cette relation par  $u$ , pour obtenir

$$\partial_t(\frac{u^2}{2}) + u\partial_x(\frac{u^2}{2}) + \frac{u}{h}\partial_x(g\frac{h^2}{2}) = -gu\partial_x Z.$$

Cette dernière égalité est multipliée par  $h$  puis combinée avec l'équation  $\frac{u^2}{2}(\partial_t h + \partial_x hu) = 0$ , pour obtenir l'égalité suivante :

$$\partial_t(h\frac{u^2}{2}) + \partial_x(h\frac{u^2}{2}u) + u\partial_x(g\frac{h^2}{2}) = -ghu\partial_x Z. \quad (1.53)$$

En faisant la somme des égalités (1.52) et (1.53), il en résulte

$$\partial_t\left(h\frac{u^2}{2} + g\frac{h^2}{2}\right) + \partial_x\left(h\frac{u^2}{2} + gh^2\right)u = -ghu\partial_x Z. \quad (1.54)$$

L'inégalité d'entropie (1.48) est alors obtenue pour les solutions faibles par application de la définition 3.1 page 37 dans Godlewski Raviart [28].

Par rapport à la formulation conservative (1.50), on sait que  $Z$  est une fonction régulière qui ne dépend pas du temps et par conséquent, en multipliant par  $gZ$  l'équation de conservation de  $h$ , donnée par (1.1), il en résulte pour les solutions faibles

$$\partial_t(ghZ) + gZ\partial_x(hu) = 0. \quad (1.55)$$

Ainsi la somme des égalités (1.54) et (1.55), donne

$$\partial_t \left( h \frac{u^2}{2} + g \frac{h^2}{2} \right) + \partial_t(ghZ) + \partial_x \left( h \frac{u^2}{2} + gh^2 \right) u + \partial_x(ghuZ) = 0. \quad (1.56)$$

Cette relation peut se reformuler sous la forme suivante :

$$\partial_t \tilde{\eta}(W, Z) + \partial_x \tilde{G}(W, Z) = 0.$$

En considérant les solutions faibles, on en déduit alors une inégalité d'entropie sous forme totalement conservative donnée par (1.50). Ce qui achève la preuve du lemme.  $\square$

## 1.4 Schéma aux volumes finis

L'objectif des schémas aux volumes finis est de chercher à approcher les solutions faibles pour le problème

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, t = 0) = W_0(x) \text{ avec } W_0(x) \in \Omega. \end{cases} \quad (1.57)$$

Dans cette thèse, nous adoptons cette méthode qui est plus adaptée au caractère hyperbolique du système de Saint-Venant. Nous allons brièvement présenter les schémas aux volumes finis dans un cadre général puis nous rappellerons les bases du schéma de Godunov [61, 37] et des schémas de type Godunov [61, 28].

Ici, on considère le modèle de Saint-Venant homogène sous sa forme (1.57). Le cas avec terme source sera traité dans le prochain chapitre. La première étape de la méthode aux volumes finis est de faire une discrétisation de l'espace. Elle consiste à découper l'espace en cellules comme illustré dans la figure 1.11. On considère un maillage uniforme défini par la suite des points  $(x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$  où

$$x_{i+1/2} = x_{i-1/2} + \Delta x,$$

avec  $\Delta x$  le pas en espace supposé constant. Ainsi on a les cellules  $c_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  centrées en  $x_i$ . De la même manière, on définit la suite  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $t^0 = 0$  et  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  où  $\Delta t$  est le pas de temps qui sera restreint par une condition CFL.



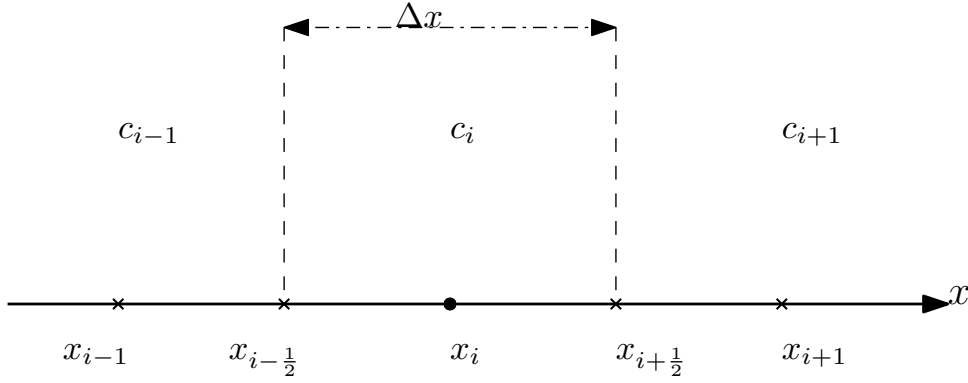


FIGURE 1.11 – Discrétisation de l'espace en une dimension.

On note  $W_i^n$  l'approximation de la solution  $W(x, t^n)$  à la date  $t^n$ . En fait, cette valeur correspond à l'approximation de la moyenne de la solution exacte  $W(x, t^n)$  sur la cellule  $c_i$ , de la façon suivante :

$$W_i^n \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t^n) dx. \quad (1.58)$$

On initialise cette approximation en faisant la moyenne de la condition initiale sur chaque cellule, donnée pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  par :

$$W_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_0(x) dx. \quad (1.59)$$

Un schéma aux volumes finis est obtenu en faisant une intégration du système (1.57) sur  $c_i \times [t^n, t^{n+1})$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t W(x, t) + \partial_x F(W(x, t))) dx dt = 0.$$

Par conséquent on a :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (W(x, t^{n+1}) - W(x, t^n)) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+1/2}, t)) - F(W(x_{i-1/2}, t)) dt = 0$$

En utilisant (1.58) et en choisissant l'approximation des flux, appelée flux numérique :

$$F_\Delta(W_i^n, W_{i+1}^n) \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+1/2}, t)) dt,$$

on obtient le schéma aux volumes finis du première ordre, donné par :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_\Delta(W_i^n, W_{i+1}^n) - F_\Delta(W_{i-1}^n, W_i^n)), \quad (1.60)$$

où le flux numérique  $F_\Delta$  définit une approximation des flux physiques aux interfaces. L'expression explicite de cette fonction flux numérique sera définie dans les sections 1.4.1 et 1.4.3 détaillant le schéma de Godunov et les schémas de type Godunov respectivement.

Le schéma doit satisfaire d'autres propriétés qui sont : la *consistance* et la *robustesse*. Un schéma est dit *consistant* du premier ordre si la fonction flux numérique vérifie la relation suivante :

$$\forall W \in \Omega, \quad F_\Delta(W, W) = F(W). \quad (1.61)$$

Enfin, un schéma est *robuste* si

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad W_i^n \in \Omega, \text{ alors } W_i^{n+1} \in \Omega. \quad (1.62)$$

C'est une propriété qui garantit l'admissibilité physique des états mis à jour à la date  $t^{n+1}$ .

### 1.4.1 Schéma de Godunov

Dans cette section, nous allons présenter le schéma de Godunov [28, 60].

A la date  $t^n$ , on suppose connue une approximation de la solution constante par morceau  $W_\Delta(x, t^n) = W_i^n$  si  $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ . On va maintenant faire évoluer cette approximation jusqu'à la date  $t^n + \Delta t$ . Pour cela, nous allons résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, t^n) = W_\Delta(x, t^n). \end{cases} \quad (1.63)$$

Localement, sur chaque interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , on est donc amené à considérer un problème de Riemann qui s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = 0, \\ W(x, t = t^n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x < 0, \\ W_{i+1}^n & \text{si } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.64)$$

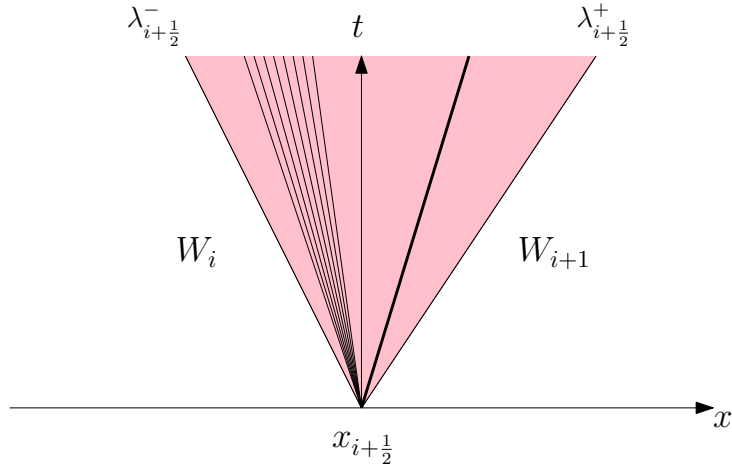


FIGURE 1.12 – Cône de dépendance de la solution du problème de Riemann  $W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x-x_{i+\frac{1}{2}}}{t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right)$ .

On note  $W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right)$  la solution exacte du problème de Riemann définie par (1.64). Le cône de dépendance de cette solution est donné dans la figure 1.12. Ainsi pour  $\Delta t$  assez petit, la solution du problème (1.63) est donnée par

$$W_{\Delta}(x, t^n + t) = W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right) \quad \text{où } t \in (0, \Delta t) \text{ et } x \in (x_i, x_{i+1}). \quad (1.65)$$

En notant  $(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{\pm})_{i \in \mathbb{Z}}$  les vitesses d'ondes les plus rapides et les plus lentes issues de la solution exacte du problème Riemann (1.64) à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Par construction des solutions du problème de Riemann toutes ces vitesses d'ondes sont bornés quelque soit  $i \in \mathbb{Z}$ . On impose la condition CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) définie par

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( |\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{-}|, |\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{+}| \right) \leq \frac{1}{2}, \quad (1.66)$$

il en résulte que  $W_{\Delta}(x, t^n + \Delta t)$  est une juxtaposition sans interaction de problèmes de Riemann positionnés à chaque interface (voir la figure 1.13). On constate que sur chaque cellule  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  la solution  $W_{\Delta}(x, t^n + \Delta t)$ , donnée par (1.65), n'est pas constante sur  $(x_i, x_{i+1})$ . Elle est constituée d'états constants séparés par des ondes de choc et des ondes de détente. On projette cette solution sur les fonctions constantes par morceau

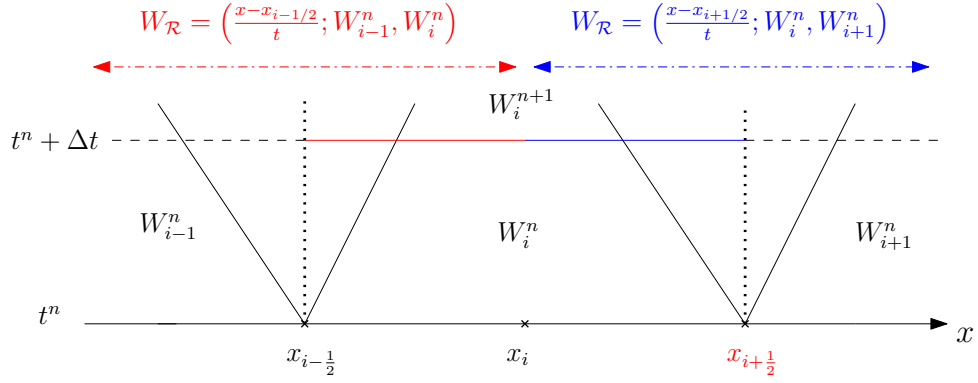


FIGURE 1.13 – Juxtaposition de solutions exactes du problème Riemann.

au sens  $L^2$ . Pour cela, on définit l'approximation à la date  $t^n + \Delta t$ , de la façon suivante :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W_{\Delta}(x, t^n + \Delta t) dx. \quad (1.67)$$

Par ailleurs, il est possible de reformuler le schéma sous la forme conservative à trois points (1.60).

**Lemme 1.4.2.** À  $\Delta t > 0$ , on considère  $W_{\mathcal{R}}$  la solution du problème de Riemann (1.64). Alors, sous la condition CFL (1.66), on a

$$\frac{1}{\Delta x/2} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta t}; W_{i-1}, W_i \right) dx = W_i - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} (F(W_i) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}, W_i))), \quad (1.68)$$

et

$$\frac{1}{\Delta x/2} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx = W_i - \frac{\Delta t}{-\Delta x/2} (F(W_i) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i, W_{i+1}))). \quad (1.69)$$

*Démonstration.* Puisque  $W_{\mathcal{R}}$  est la solution du problème de Riemann alors cette fonction vérifie  $\partial_t W_{\mathcal{R}} + \partial_x F(W_{\mathcal{R}}) = 0$ . Si on intègre cette équation sur le pavé  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_i] \times [0, \Delta t]$ , on obtient

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} \int_0^{\Delta t} \left( \partial_t W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{t}; W_{i-1}, W_i \right) + \partial_x F \left( W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{t}; W_{i-1}, W_i \right) \right) \right) dx dt = 0.$$

Il en résulte alors

$$\int_0^{\frac{\Delta x}{2}} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}, W_i \right) dx - \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} W(x, t = 0) dx + \int_0^{\Delta t} F \left( W_{\mathcal{R}} \left( \frac{\Delta x/2}{t}; W_{i-1}, W_i \right) \right) dt - \int_0^{\Delta t} F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}, W_i)) dt = 0.$$

Comme  $x > 0$ , alors on a  $W(x, t = 0) = W_i$ . Sous la condition CFL (1.66), nous avons  $F(W_{\mathcal{R}}(\frac{\Delta x/2}{t}; W_{i-1}, W_i)) = F(W_i)$ . De plus  $F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}, W_i))$  est constante en  $t$ , donc

$$\frac{1}{\Delta x/2} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}, W_i \right) dx = W_i - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} (F(W_i) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}, W_i))).$$

De façon similaire, en intégrant le problème (1.64) sur le pavé  $[x_i, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [0, \Delta t]$ , il en résulte alors

$$\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx - \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 W(x, t = 0) dx + \int_0^{\Delta t} F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i, W_{i+1})) dt - \int_0^{\Delta t} F \left( W_{\mathcal{R}} \left( \frac{-\Delta x/2}{t}; W_i, W_{i+1} \right) \right) dt = 0.$$

Puisque  $x < 0$ , on a  $W(x, t = 0) = W_i$ , de plus, sous la condition CFL (1.66), on obtient  $F(W_{\mathcal{R}}(\frac{-\Delta x/2}{t}; W_i, W_{i+1})) = F(W_i)$ , d'où

$$\frac{1}{\Delta x/2} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx = W_i - \frac{\Delta t}{-\Delta x/2} (F(W_i) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i, W_{i+1}))).$$

Ainsi la démonstration est complète. □

Le schéma de Godunov (1.67) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx.$$

En faisant un changement de variable  $x \rightarrow x - x_{i+\frac{1}{2}}$ , on obtient

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2}} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2}}^0 W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx.$$

Par conséquent, les relations (1.68) et (1.69) du lemme 1.4.2 nous donnent

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} (F(W_i^n)) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}^n, W_i^n)) \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left( W_i^n - \frac{\Delta t}{-\Delta x/2} (F(W_i^n)) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i^n, W_{i+1}^n)) \right), \\ &= W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i^n, W_{i+1}^n)) - F(W_{\mathcal{R}}(0; W_{i-1}^n, W_i^n)) \right), \end{aligned}$$

qui se reformule sous la forme conservative (1.60) avec un flux numérique donné par

$$F_{\Delta}(W_i^n, W_{i+1}^n) = F(W_{\mathcal{R}}(0; W_i^n, W_{i+1}^n)). \quad (1.70)$$

On remarque que le schéma de Godunov est consistant puisque  $W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; W, W\right) = W$  de sorte  $F_{\Delta}(W, W) = F(W)$ . Ceci achève cette brève présentation du schéma de Godunov.

### 1.4.3 Schémas de type Godunov

Le schéma de Godunov nécessite de calculer la solution exacte du problème de Riemann. Cette solution est souvent difficile à exhiber. En 1983, Harten, Lax et van Leer [37], proposent d'utiliser une approximation de la solution du problème de Riemann en lieu et place de la solution exacte pour alors construire une nouvelle classe de méthodes numériques. En effet, Harten, Lax et van Leer [37] ont remarqué que la consistance du schéma peut être obtenue en considérant la projection sur les constantes au sens  $L^2$  de la solution exacte du problème de Riemann. Fort de cette constatation, ils proposent de substituer à la solution exacte  $W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; W_i, W_{i+1}\right)$  une approximation  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{t}; W_i, W_{i+1}\right)$  vérifiant la relation de *consistance intégrale* suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1}\right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1}\right) dx. \quad (1.71)$$

Dans la condition de consistance précédente, il est possible de reformuler la moyenne de la solution exacte du problème de Riemann de façon explicite. Afin de fixer les idées,

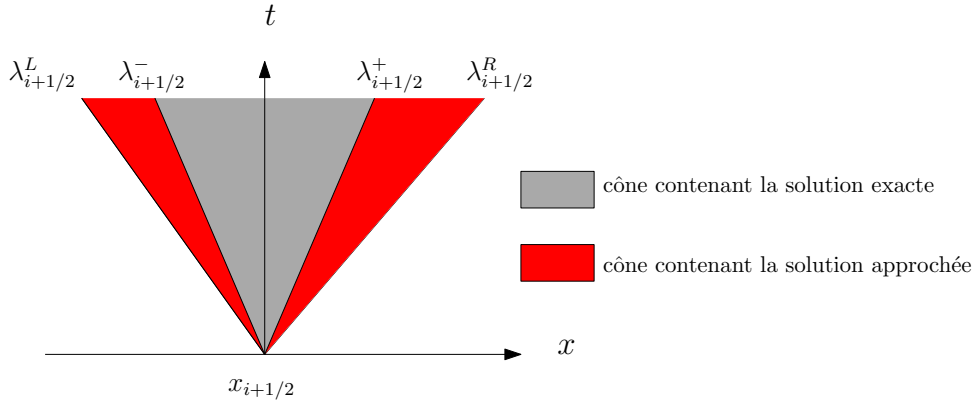


FIGURE 1.14 – Cônes de dépendance pour les solutions exactes et approchées du problème de Riemann.

le solveur de Riemann approché sera pris sous la forme suivante :

$$\widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) = \begin{cases} W_i & \text{si } x < \lambda_{i+1/2}^L \Delta t, \\ \bar{W} \left( \frac{x}{\Delta t} \right) & \text{si } \lambda_{i+1/2}^L \Delta t < x < \lambda_{i+1/2}^R \Delta t, \\ W_{i+1} & \text{si } x > \lambda_{i+1/2}^R \Delta t, \end{cases} \quad (1.72)$$

où  $\lambda_{i+1/2}^L$  et  $\lambda_{i+1/2}^R$  sont des vitesses caractéristiques qui seront définies ultérieurement. Cependant, il est important de noter que le cône de dépendance du solveur approché défini par  $\lambda_{i+1/2}^L$  et  $\lambda_{i+1/2}^R$  doit contenir le cône de dépendance de la solution exacte défini par  $\lambda_{i+1/2}^-$  et  $\lambda_{i+1/2}^+$  (voir figure 1.14).

**Lemme 1.4.4.** Soit  $W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right)$  la solution exacte du problème de Riemann (1.64), alors

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx = \frac{1}{2} (W_i + W_{i+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_{i+1}) - F(W_i)), \quad (1.73)$$

sous la condition CFL définie par

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_{i+1/2}^L|, |\lambda_{i+1/2}^R|) \leq \frac{1}{2}. \quad (1.74)$$

En conséquence de ce résultat, notons dès à présent que, d'après (1.73), la condition

de consistance intégrale (1.71) devient

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx = \frac{1}{2} (W_i + W_{i+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_{i+1}) - F(W_i)). \quad (1.75)$$

*Démonstration.* En intégrant le problème de Riemann (1.64) sur l'intervalle  $[-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}] \times [0, \Delta t)$ , on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx &= \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W(x, 0) dx - \int_0^{\Delta t} F(W_{\mathcal{R}} \left( \frac{\Delta x}{2t}; W_i, W_{i+1} \right)) dt \\ &+ \int_0^{\Delta t} F(W_{\mathcal{R}} \left( -\frac{\Delta x}{2t}; W_i, W_{i+1} \right)) dt. \end{aligned} \quad (1.76)$$

En utilisant la définition de la condition initiale du problème de Riemann (1.64) on a :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W(x, 0) dx = \frac{\Delta x}{2} (W_i + W_{i+1}). \quad (1.77)$$

La condition de type CFL (1.74) assure que pour  $t \in (0, \Delta t]$  (voir la figure 1.13), on a

$$W_{\mathcal{R}} \left( -\frac{\Delta x}{2t}; W_i, W_{i+1} \right) = W_i \quad \text{et} \quad W_{\mathcal{R}} \left( \frac{\Delta x}{2t}; W_i, W_{i+1} \right) = W_{i+1}. \quad (1.78)$$

En introduisant (1.77) et (1.78) dans l'égalité (1.76), on obtient très facilement

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx = \frac{1}{2} (W_i + W_{i+1}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F(W_{i+1}) - F(W_i)).$$

La preuve est ainsi achevée. □

Connaissant un solveur de Riemann approché vérifiant la condition de consistance intégrale (1.71), on peut construire un schéma conservatif consistant à trois points. À la date  $t^n$  on suppose connue une approximation de la solution constante par morceaux  $\widetilde{W}_{\Delta}(x, t^n) = W_i^n$  si  $x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ . On introduit alors une approximation de la solution à la date  $t^n + \Delta t$ , donnée par

$$\widetilde{W}_{\Delta}(x, t^n + \Delta t) = \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) \quad \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad (1.79)$$

où  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}}$  vérifie la condition de consistance (1.75). Notons que sous la condition CFL (1.74), la solution approchée  $\widetilde{W}_{\Delta}$  est en fait une juxtaposition sans interaction des sol-



veurs de Riemann approchés posés sur chaque interface. À la date  $t^n + \Delta t$ , on considère la projection au sens  $L^2$  de  $\widetilde{W}_\Delta$  sur les fonctions constantes par morceaux pour définir la mise à jour de la façon suivante :

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \widetilde{W}_\Delta(x, t^n + \Delta t) dx.$$

À présent, nous allons montrer que ce schéma de type Gudonov peut être réécrit sous forme conservative et consistante (1.60). En effet,

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \widetilde{W}_\Delta(x, t^n + \Delta t) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \widetilde{W}_\Delta(x, t^n + \Delta t) dx,$$

alors avec la définition (1.79), on obtient

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx. \\ W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+1/2}} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx. \end{aligned} \tag{1.80}$$

La condition de consistance intégrale (1.75) nous permet de réécrire l'approximation précédente de façon suivante :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{\Delta x}{2\Delta t} (W_i^n - W_{i+1}^n) + (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n \right) dx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \widetilde{W}_\mathcal{R} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx \right). \end{aligned}$$

On en déduit la forme conservative suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_\Delta(W_i, W_{i+1}) - F_\Delta(W_{i-1}, W_i)),$$

où la fonction flux numérique trouve l'expression suivante :

$$F_{\Delta}(W_i, W_{i+1}) = F(W_{i+1}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} W_{i+1}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n \right) dx.$$

Notons que nous avons un schéma sous forme conservative et consistante si  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W, W \right) = W$  puisque on obtient alors  $F_{\Delta}(W, W) = F(W)$ .



# SCHÉMA DE TYPE GODUNOV CAPTURANT TOUS LES ÉTATS STATIONNAIRES À VITESSE NON NULLE

---

Au cours des deux dernières décennies, de nombreux travaux ont été consacrés à la dérivation de schémas numériques pour approcher les solutions faibles de (1.1) et qui soient capables de capturer avec précision les solutions stationnaires. En effet, après [7, 34, 36], si les solutions d'équilibres ne sont pas correctement capturées, l'approximation peut introduire des erreurs numériques qui croissent avec le temps (voir la Figure 2.1 pour un exemple). Il est donc essentiel de proposer des méthodes numériques approchant de façon très précise (voire exacte) les solutions stationnaires. Les schémas capables de capturer les solutions stationnaires sont dit *well-balanced*. On rappelle que les solutions de (1.1), indépendantes du temps, sont gouvernées par

$$\begin{cases} hu = Q, \\ \frac{u^2}{2} + g(h + z) = B, \end{cases} \quad (2.1)$$

de plus si  $u = 0$  et  $h + z = \text{cste}$ , on obtient la solution du lac au repos. Puisque (2.1) est non linéaire, de nombreuses méthodes numériques ne considèrent que le lac au repos. À titre d'exemple, le lecteur est renvoyé à la reconstruction hydrostatique introduite par [2] (voir aussi [15]). Par sa simplicité, cette technique a été adoptée dans de nombreuses situations et la préservation du lac au repos est désormais très courante dans la dérivation des schémas d'approximations (voir [11, 17, 19, 22] pour une liste non

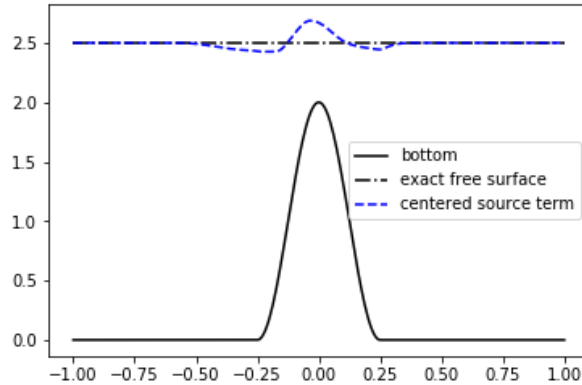


FIGURE 2.1 – Approximation numérique du lac au repos obtenu par un schéma HLL du première ordre [37] complétée par une discrétisation centrée du terme source.

exhaustive de références). Puisque (2.1) peut être reformulée de la manière suivante :

$$\begin{cases} hu = Q, \\ h^3 + \frac{(gz - B)}{g}h^2 + \frac{1}{2g}Q^2 = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

on remarque que la hauteur d'eau  $h$  est solution d'un polynôme de degré trois. D'un point de vue numérique, il est alors clair que la dérivation d'un schéma numérique capable de capturer toutes les solutions stationnaires est un véritable défi. Dans [31], le système non linéaire (2.1) est résolu à chaque interface pour obtenir un schéma well-balanced capable de capturer exactement toutes les solutions stationnaires avec un écoulement mouvant ( $u \neq 0$ ) ou un écoulement non mouvant ( $u = 0$ ). Ensuite, dans [18], les auteurs ont proposé une extension appropriée de la reconstruction hydrostatique afin de traiter des solutions stationnaires en mouvement. Malheureusement, cette reconstruction hydrostatique généralisée ne préserve pas la hauteur d'eau non négative. Dans plusieurs travaux de Y.Xing [49, 66, 68] (voir aussi [55, 56]) des extensions pertinentes de la méthode de Galerkin discontinue d'ordre élevé ont été proposées pour préserver toutes les solutions stationnaires de (2.1).

Plus récemment, dans [8], le terme source a été introduit dans le solveur de Riemann approché conduisant ainsi à la dérivation d'un schéma de type Godunov pouvant capturer tous les états d'équilibres. De plus, le schéma ainsi obtenu préserve la positivité de la hauteur d'eau et vérifie une inégalité d'entropie discrète. Malheureusement, encore une fois, une équation fortement non linéaire doit être résolue à chaque interface.

Dans ce chapitre, nous allons proposer une extension du schéma introduit dans [46, 47], où une linéarisation pertinente du schéma de type Godunov a été proposée pour obtenir un schéma well-balanced pour toutes les solutions stationnaires et qui, en plus, préserve la positivité de la hauteur d'eau. Dès à présent, il est important de souligner que le principe de linéarisation adopté permet de capturer toutes les solutions stationnaires sans jamais résoudre l'équation non linéaire (2.1). Une telle propriété rend la méthode numérique particulièrement attractive.

Pour atteindre cet objectif, dans un premier temps, nous rappelons le principe des schémas de type Godunov pour le modèle Saint-Venant avec terme source de topographie. Suivant [8, 46, 47], nous adoptons ici une définition du solveur de Riemann approché qui, dans un sens à préciser, prend en compte le terme source. Le choix de la discrétisation du terme source, introduite dans le solveur de Riemann approché, est alors crucial et nécessite une attention particulière. Connaissant le terme source discret, le solveur de Riemann approché peut alors être obtenu. Nous montrerons que ce solveur vérifie les propriétés attendues de consistance, de positivité et de préservation de tous les états d'équilibres. Cependant, ce solveur présente un défaut majeur puisque, a priori, il peut aussi capturer des chocs non entropiques. La réalisation de nombreuses expériences numériques mettra en évidence le caractère instable des chocs non entropiques et assurera ainsi la pertinence de la méthode numérique pour toutes données initiales.

## 2.1 Schéma de type Godunov pour le modèle de Saint Venant avec terme source

La particularité de ce schéma, comme nous l'avons déjà évoqué dans le chapitre précédent, réside dans l'utilisation de la solution approchée du problème de Riemann. Nous avons présenté dans la section 1.4.3, le schéma de type Godunov pour le système homogène. Dans cette section, nous allons étendre les schémas de type Godunov afin de prendre en compte le terme source de topographie.

Nous adoptons la discrétisation de l'espace et du temps introduite dans la section 1.4. On suppose qu'au temps  $t^n$ , une approximation constante par morceaux de la solution de (1.1) est connue et définie de la façon suivante :

$$W_{\Delta}(x, t^n) = W_i^n \quad \text{si } x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}).$$

Nous recherchons une approximation de la solution au temps  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ . Pour approcher la solution du système (1.1), d'après [15, 20, 28], la mise à jour  $W_i^{n+1}$  est donnée par

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_{\Delta}(x, t^n + \Delta t) dx, \quad (2.3)$$

où  $W_{\Delta}(x, t^n + t)$  représente la juxtaposition sans interaction des solveurs de Riemann approchés définis sur chaque cellule  $(x_i, x_{i+1})$  par

$$W_{\Delta}(x, t^n + t) = \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) \quad \text{si } (x, t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0, \Delta t).$$

Ici,  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right)$  désigne l'approximation de la solution du problème de Riemann suivant :

$$\begin{cases} \partial_t W + \partial_x F(W) = S(W, Z), \\ (W(x, t = 0), Z(x)) = \begin{cases} (W_L, Z_L) & \text{if } x < 0, \\ (W_R, Z_R) & \text{if } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $W, F(W)$  et  $S(W, Z)$  sont respectivement données par

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(W, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \partial_x Z \end{pmatrix}.$$

D'après [37] (voir aussi l'égalité (1.71)), le solveur de Riemann approché doit satisfaire la condition de consistance intégrale suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx, \quad (2.5)$$

où  $W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right)$  n'est rien d'autre que la solution exacte du problème de Riemann (2.4). Toutefois, en raison du terme source, le lemme 1.4.4 ne peut plus être appliqué ici et la moyenne de la solution exacte du problème de Riemann n'est, à priori, plus accessible. En effet, tant que  $\Delta t$  est suffisamment petit pour que

$$W_{\mathcal{R}} \left( \frac{-\Delta x/2}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) = W_L \quad \text{et} \quad W_{\mathcal{R}} \left( \frac{\Delta x/2}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) = W_R,$$

l'intégration de (2.4) sur le domaine  $(-\Delta x/2, \Delta x/2) \times (0, \Delta t)$ , nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} W_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx &= \frac{1}{2}(W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(W_R) - F(W_L)) \\ &- \frac{g}{\Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} (h\partial_x Z)_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{t}, W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

En raison de l'intégrale du terme source, la moyenne attendue de la solution exacte de Riemann n'est pas connue de façon exacte. En conséquence, nous suggérons d'introduire  $\bar{S}_{LR}$  pour approcher cette intégrale (par exemple, voir [26, 25]). Par conséquent, nous imposons que le solveur de Riemann approché satisfait, au lieu de (2.5), la condition de consistance approchée suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx &= \\ \frac{1}{2}(W_L + W_R) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(W_R) - F(W_L)) + \Delta t \bar{S}_{LR}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où  $\bar{S}_{LR} = \bar{S}_{LR}(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  doit être définie selon une discrétisation consistante de  $(0, -gh\partial_x Z)^T$ . La condition de consistance (2.7), satisfaite par le solveur de Riemann approché  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right)$ , permet de reformuler la mise à jour  $W_i^{n+1}$  comme un schéma volumes finis usuel. En effet, de (2.3), on obtient facilement

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i \right) dx + \\ &\frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx. \end{aligned}$$

À l'interface  $x_{i+1/2}$ , nous adoptons le changement de variable, donné par  $x \rightarrow x - x_{i+1/2}$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx &= \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx & \\ \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+1}} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx &= \\ \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx. & \end{aligned}$$



Par souci de simplicité dans les notations, nous définissons

$$I_{i+1/2}^- = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx, \quad (2.8)$$

$$I_{i+1/2}^+ = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx, \quad (2.9)$$

de sorte que l'état mis à jour  $W_i^{n+1}$  se réécrit immédiatement comme suit :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= I_{i-1/2}^+ + I_{i+1/2}^-, \\ &= \frac{1}{2} \left( I_{i-1/2}^- + I_{i-1/2}^+ \right) + \frac{1}{2} \left( I_{i+1/2}^- + I_{i+1/2}^+ \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( I_{i-1/2}^+ - I_{i-1/2}^- \right) + \frac{1}{2} \left( I_{i+1/2}^- - I_{i+1/2}^+ \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Comme, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2} \left( I_{i+1/2}^- + I_{i+1/2}^+ \right) = \frac{1}{2\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx, \quad (2.11)$$

et

$$\frac{1}{2} \left( I_{i-1/2}^- + I_{i-1/2}^+ \right) = \frac{1}{2\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i \right) dx, \quad (2.12)$$

en utilisant (2.7) et les égalités (2.11)-(2.12), on obtient

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{\Delta}(W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}) - F_{\Delta}(W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i) \right) \\ &\quad + \frac{\Delta t}{2} \left( \bar{S}_{i+1/2} + \bar{S}_{i-1/2} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec la fonction flux numérique définie par

$$F_{\Delta}(W_L, W_R, Z_L, Z_R) = \frac{1}{2} (F(W_R) + F(W_L)) - \frac{\Delta x}{4\Delta t} (W_R - W_L) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} (I_{LR}^+ - I_{LR}^-), \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} I_{LR}^+ &= \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx, \\ I_{LR}^- &= \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \widetilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx. \end{aligned}$$

Concernant la discrétisation du terme source, avec des notations claires, nous avons

posé

$$\bar{S}_{i+1/2} := \bar{S}_{LR}(W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}).$$

En conséquence le schéma (2.13) sera totalement déterminé une fois le solveur de Riemann  $\tilde{W}_{\mathcal{R}}$  et l'approximation du terme source  $\bar{S}_{LR}$  choisis. La caractérisation de ces fonctions est l'objet des sections suivantes.

## 2.2 Discrétisation du terme source

La construction de l'approximation locale du terme source  $\bar{S}_{LR}(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  doit permettre au schéma (2.13) de préserver les solutions stationnaires. Il est important de remarquer que cette fonction  $\bar{S}_{LR}(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  est une approximation locale sur chaque interface du terme source. Il est donc nécessaire de définir les solutions stationnaires interface par interface. En accord avec les solutions stationnaires (2.1), nous introduisons la définition de la stationnarité locale de la façon suivante.

**Définition 2.2.1.** *Une solution est localement stationnaire si pour tous états  $W_L$  et  $W_R$ , on a*

$$h_L u_L = h_R u_R, \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(W_L, Z_L) = \mathcal{B}(W_R, Z_R), \quad (2.15)$$

où  $\mathcal{B}(W, Z)$  est la fonction de Bernoulli donnée par (1.6).

Notons, dès à présent, que cette définition peut inclure des discontinuités stationnaires non entropiques. Ce défaut d'entropie dans la stationnarité locale sera mis en évidence dans la section 2.5 où nous présenterons quelques conséquences tant théoriques que numériques.

À présent, si  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie l'équilibre local (2.15),  $\bar{S}_{LR}$  doit être fixé de telle sorte que  $\tilde{W}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  reste stationnaire; à savoir

$$\tilde{W}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t, W_L, W_R, Z_L, Z_R) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

La relation de stationnarité (2.16) nous permet de proposer une discrétisation du terme source. Soulignons que la condition de consistance intégrale (2.7), pour une solution stationnaire sous la forme (2.16), se réécrit comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR} = F(W_R) - F(W_L).$$

En conséquence, dès que  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie (2.15), le terme source approché  $\bar{S}_{LR} = (\bar{S}_{LR}^h, \bar{S}_{LR}^q)^T$ , doit vérifier

$$\begin{aligned} \Delta x \bar{S}_{LR}^h &= 0, \\ \Delta x \bar{S}_{LR}^q &= (h_R u_R^2 + g \frac{h_R^2}{2}) - (h_L u_L^2 + g \frac{h_L^2}{2}). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Puisque l'équation d'évolution de la hauteur d'eau ne contient pas de terme source, nous imposons  $\bar{S}_{LR}^h = 0$  pour tout  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$ . À présent, nous allons considérer  $\bar{S}_{LR}^q$  pour proposer une définition consistante avec le terme source de la topographie  $-gh\partial_x Z$  et telle que (2.17) est vérifié dès que  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  définit une solution stationnaire locale (2.15). Pour résoudre un tel problème, nous énonçons maintenant une condition qui doit être satisfaite par  $\bar{S}_{LR}^q$ .

**Lemme 2.2.2.** *Soit*

$$\bar{F}_r^2 = \frac{q_0^2 \bar{h}}{gh_L^2 h_R^2}, \quad \text{où } \bar{h} = \frac{1}{2}(h_L + h_R) \text{ et } q_0 = h_L u_L = h_R u_R, \quad (2.18)$$

une approximation du nombre de Froude. Dès que  $\bar{F}_r \neq 1$  et que  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie (2.15), l'identité (2.17) se réécrit comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h}(Z_R - Z_L) + \frac{q_0^2}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_R - h_L)(Z_R - Z_L)^2}{(1 - \bar{F}_r^2)^2}. \quad (2.19)$$

On remarque que (2.19) donne immédiatement une définition consistante de  $\bar{S}_{LR}^q$ . En effet, pour une fonction de topographie assez régulière et en fixant  $Z_L = Z(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $Z_R = Z(x + \frac{\Delta x}{2})$ , nous avons immédiatement

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x} = \partial_x Z \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(Z_R - Z_L)^2}{\Delta x} = 0,$$

pour s'assurer que  $\bar{S}_{LR}^q$  est consistant avec  $-gh\partial_x Z$ . Dès à présent notons que, cette définition de  $\bar{S}_{LR}^q$  doit être améliorée afin de traiter  $\bar{F}_r = 1$ . Mais avant cela, établissons le lemme 2.2.2 précédent.

*Démonstration.* Avec  $q_0^2 = h_L u_L = h_R u_R$ , la relation (2.17) est facilement réécrite comme suit

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = q_0 \left( \frac{1}{h_R} - \frac{1}{h_L} \right) + g\bar{h}(h_R - h_L),$$

pour obtenir

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = \left( g\bar{h} - \frac{q_0^2}{h_L h_R} \right) (h_R - h_L). \quad (2.20)$$

Puisque  $\mathcal{B}(W_L, Z_L) = \mathcal{B}(W_R, Z_R)$  avec  $\mathcal{B}(W, Z)$  donné par (1.6), alors on a

$$\frac{q_0^2}{2h_L^2} + g(h_L + Z_L) = \frac{q_0^2}{2h_R^2} + g(h_R + Z_R),$$

d'où

$$(h_R - h_L) + (Z_R - Z_L) = \frac{q_0^2}{2g} \times \frac{h_R^2 - h_L^2}{h_L^2 h_R^2}.$$

On introduit  $\bar{F}_r$ , définie par (2.18), pour écrire cette dernière relation de la façon suivante :

$$h_R - h_L = -\frac{Z_R - Z_L}{1 - \bar{F}_r^2}. \quad (2.21)$$

Ensuite, nous introduisons le saut de hauteur d'eau (2.21) dans (2.20), pour avoir

$$\Delta x \bar{S}_{LR} = -g\bar{h} \times \frac{\left(1 - \frac{q_0^2}{gh_L h_R h}\right)}{\left(1 - \bar{F}_r^2\right)} \times (Z_R - Z_L), \quad (2.22)$$

qui se réécrit comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR} = -g\bar{h}(Z_R - Z_L) - \frac{q_0^2}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_L - h_R)^2}{1 - \bar{F}_r^2} (Z_R - Z_L). \quad (2.23)$$

L'identité attendue (2.19) est obtenue en substituant le saut de hauteur d'eau (2.21) dans (2.23). La preuve est alors complète.  $\square$

Afin de proposer une correction appropriée de (2.19) pour obtenir une discrétisation bien définie du terme source, nous allons étudier le comportement de cette relation (2.19) dans la limite de  $\bar{F}_r$  vers 1.

**Lemme 2.2.3.** *Considérons  $(W_L, W_R, Z_R, Z_L)$  qui vérifie (2.15) de telle sorte que  $\bar{S}_{LR}^q$  est donné par (2.19). Alors on a*

$$\lim_{\bar{F}_r \rightarrow 1} \bar{S}_{LR}^q = \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

*Démonstration.* Comme  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  satisfait la condition d'équilibre local (2.15),

alors la relation (2.21) est vérifiée et nous reformulons facilement (2.19) comme suit :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = g\bar{h}(h_R - h_L)(1 - \bar{F}_r^2) + \frac{g\bar{F}_r^2}{4\bar{h}}(h_R - h_L)^3,$$

pour obtenir immédiatement la limite suivante :

$$\lim_{\bar{F}_r^2 \rightarrow 1} \bar{S}_{LR}^q = \frac{g}{4\bar{h}} \frac{(h_R - h_L)^3}{\Delta x}. \quad (2.24)$$

Dans un premier temps, dès que la hauteur d'eau est une solution régulière, nous avons  $h_R - h_L = \mathcal{O}(\Delta x)$  et la preuve est alors terminée. Montrons ensuite que, quand  $\bar{F}_r$  tend vers 1, nécessairement l'approximation de la hauteur d'eau est régulière et alors  $h_R - h_L = \mathcal{O}(\Delta x)$ . En effet, supposons que  $W_L$  et  $W_R$  soient reliés par une solution de choc stationnaire. Avec la relation de Rankine-Hugoniot (voir [58]), puisque la vitesse de choc est égale à 0, on a

$$\begin{aligned} q_L &= q_R = q_0, \\ \left( \frac{q_R^2}{h_R} + g \frac{h_R^2}{2} \right) - \left( \frac{q_L^2}{h_L} + g \frac{h_L^2}{2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

alors on obtient

$$(h_R - h_L)g\bar{h} \left( 1 - \frac{q_0^2}{g\bar{h}h_L h_R} \right) = 0, \quad (2.25)$$

où  $\bar{h}$  est définie par (2.18). Avec  $h_L \neq h_R$ , à partir de (2.25) nous avons  $1 - \frac{q_0^2}{g\bar{h}h_L h_R} = 0$ , ce qui donne  $\frac{q_0^2}{g\bar{h}h_L h_R} = 1$ . Dans la limite de  $\bar{F}_r$  à 1, avec  $\bar{F}_r$  donné par (2.18), on a

$$\frac{q_0^2}{g\bar{h}h_L h_R} = \frac{q_0^2 \bar{h}}{g h_L^2 h_R^2},$$

pour obtenir  $h_L = h_R$  en contradiction avec  $h_L \neq h_R$ . Par conséquent, dans la limite de  $\bar{F}_r$  vers 1, on a toujours  $h_R - h_L = \mathcal{O}(\Delta x)$ . La preuve est alors complète.  $\square$

En fait, le résultat ci-dessus indique que la discrétisation (2.19) est bien définie pour toutes les valeurs de  $\bar{F}_r$  tant que la condition d'équilibre local (2.15) est satisfaite. Par conséquent, (2.19) doit être amélioré afin d'être bien défini pour toutes les valeurs de  $\bar{F}_r$  avec des états gauches et droits ne vérifiant pas l'état d'équilibre local (2.15). Nous suggérons maintenant une amélioration afin d'obtenir une formule bien définie pour

toutes les valeurs de  $\bar{F}_r$ . Nous proposons la discrétisation suivante du terme source :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h}(Z_R - Z_L) + \frac{\bar{q}^2}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_R - h_L)(Z_R - Z_L)^2}{(1 - \bar{F}_r^2)^2 + \varepsilon_{LR}\Delta x^k}, \quad (2.26)$$

où  $k > 0$  est un paramètre à fixer et

$$\bar{q}^2 = h_L h_R |u_L u_R|, \quad \varepsilon_{LR} = \sqrt{|\mathcal{B}(W_R, Z_R) - \mathcal{B}(W_L, Z_L)| + |q_R - q_L|}. \quad (2.27)$$

On note que  $\varepsilon_{LR} = 0$  si et seulement si  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie la condition stationnaire locale dans (2.15). En conséquence, la discrétisation suggérée (2.26) satisfait la condition nécessaire (2.19) pour une solution stationnaire locale. De plus, la discrétisation (2.26) est bien définie pour toutes les valeurs de  $\bar{F}_r$ . En effet, tant que l'équilibre local, donné par (2.15), est satisfait, en utilisant le lemme 2.2.3, la discrétisation du terme source est bien définie comme attendu. De plus, pour les états non stationnaires, comme  $(1 - \bar{F}_r^2)^2 + \varepsilon_{LR}\Delta x^k \neq 0$ , encore une fois (2.26) est bien défini pour toutes les valeurs de  $\bar{F}_r$ . Bien sûr, cette correction  $\varepsilon_{LR}\Delta x^k$ , préserve la consistance du terme source puisque  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_{LR}\Delta x^k = 0$ . De plus, d'après l'argument de continuité donné au lemme 2.2.3, on impose  $\bar{S}_{LR}^q = 0$  si on a simultanément  $\bar{F}_r = 1$  et  $\varepsilon_{LR} = 0$ . Maintenant, concernant la valeur de  $k > 0$ , soulignons un comportement spécifique de  $\bar{S}_{LR}^q$  avec  $\bar{F}_r = 1$  mais loin de l'équilibre local. En effet, en imposant  $\bar{F}_r = 1$ , on a

$$\bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h} \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x} + \frac{\bar{q}^2}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_R - h_L)(Z_R - Z_L)^2}{\varepsilon_{LR}} \Delta x^{-1-k}.$$

Puisque la fonction de topographie est régulière, nous avons localement  $Z_L = Z(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $Z_R = Z(x + \frac{\Delta x}{2})$ , de sorte que  $Z_R - Z_L = \mathcal{O}(\Delta x)$ , d'où

$$\bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h} \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x} + \frac{(h_R - h_L)}{\varepsilon_{LR}} \mathcal{O}(\Delta x^{1-k}).$$

De plus, nous avons  $\varepsilon_{LR} = \mathcal{O}(\Delta x^{1/2})$  dès que la solution est suffisamment régulière. On en déduit alors

$$\bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h} \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^{\frac{3}{2}-k}).$$

Par conséquent, on fixe  $k < \frac{3}{2}$ .

Ainsi dans cette section, nous avons construit une discrétisation consistante et bien

définie du terme source (2.26). Maintenant, il reste à fixer le solveur de Riemann approché pour compléter notre schéma (2.13).

## 2.3 Solveur de Riemann approché

Pour achever la caractérisation du schéma numérique (2.13), nous devons maintenant définir de façon appropriée le solveur de Riemann  $\widetilde{W}_{\mathcal{R}}(x/t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  en accord avec la condition de consistance (2.7) où l'approximation du terme source  $\bar{S}_{LR} = (0, \bar{S}_{LR}^q)^T$  est à présent définie par (2.26). Ici, nous adoptons un solveur de Riemann approché composé de deux états intermédiaires constants,  $W_L^*$  et  $W_R^*$ , comme suit

$$\widetilde{W}_{\mathcal{R}}(x/t; W_L, W_R, Z_L, Z_R) = \begin{cases} W_L & \text{si } \frac{x}{t} < \lambda_L, \\ W_L^* & \text{si } \lambda_L < \frac{x}{t} < 0, \\ W_R^* & \text{si } 0 < \frac{x}{t} < \lambda_R, \\ W_R & \text{si } \frac{x}{t} > \lambda_R, \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $\lambda_L < 0$  et  $\lambda_R > 0$  désignent les vitesses d'ondes. La forme de notre solveur Riemann approché est illustrée dans la Figure 2.2.

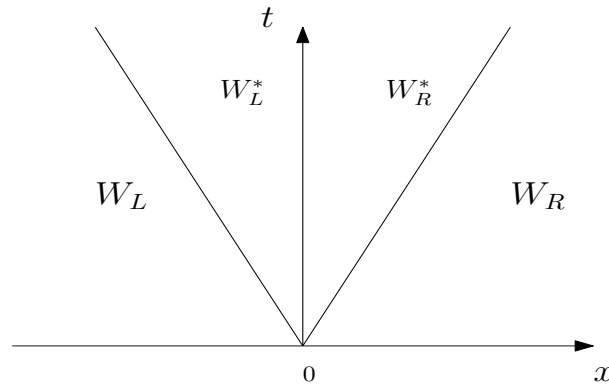


FIGURE 2.2 – Représentation du solveur de Riemann approché (2.28).

Afin d'éviter des problèmes d'instabilités (voir [37, 61]), nous imposons un cône de dépendance du solveur de Riemann approché suffisamment large. En conséquence les vitesses caractéristiques  $\lambda_L$  et  $\lambda_R$  sont fixées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_L &\leq \min(-|u_L| - \sqrt{gh_L}, -|u_R| - \sqrt{gh_R}), \\ \lambda_R &\geq \max(|u_L| + \sqrt{gh_L}, |u_R| + \sqrt{gh_R}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

de sorte que le cône défini par  $\lambda_L \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_R$  contient le cône de dépendance de la solution exacte du problème de Riemann (2.4). Par ailleurs, en utilisant la définition (2.28), l'intégrale sur  $(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2})$  du solveur de Riemann approché se réécrit comme suit :

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_R \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx = \left( \lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) W_L + (0 - \lambda_L \Delta t) W_L^* \\ + (\lambda_R \Delta t - 0) W_R^* + \left( \frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) W_R.$$

Ainsi, on obtient la moyenne suivante :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \widetilde{W}_R \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) dx = \frac{W_L + W_R}{2} - \lambda_R \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_R - W_R^*) \\ + \lambda_L \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_L - W_L^*). \quad (2.30)$$

En considérant (2.30), la condition de consistance intégrale (2.7) devient

$$\lambda_L (h_L^* - h_L) + \lambda_R (h_R - h_R^*) = q_R - q_L, \quad (2.31)$$

$$\lambda_L (q_L^* - q_L) + \lambda_R (q_R - q_R^*) = \\ \left( h_R u_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 \right) - \left( h_L u_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 \right) + \Delta x \bar{S}_{LR}^q. \quad (2.32)$$

Par souci de simplicité dans les notations, nous introduisons

$$h^{HLL} = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{q_R - q_L}{\lambda_R - \lambda_L}, \quad (2.33)$$

$$q^{HLL} = \frac{\lambda_R q_R - \lambda_L q_L}{\lambda_R - \lambda_L} \\ - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L} \left( \left( h_R u_R^2 + \frac{1}{2} g h_R^2 \right) - \left( h_L u_L^2 + \frac{1}{2} g h_L^2 \right) \right). \quad (2.34)$$

En fait, cette notation vient de l'état intermédiaire d'un solveur de Riemann approché proposé par Harten, Lax and van Leer (voir [37]). Ainsi, les deux relations (2.31) et (2.32) peuvent être reformulées de la façon suivantes :

$$\lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}, \quad (2.35)$$

$$\lambda_R q_R^* - \lambda_L q_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) q^{HLL} + \Delta x \bar{S}_{LR}^q. \quad (2.36)$$



Soulignons que la détermination de  $\widetilde{W}_R$  est complète dès que les deux états intermédiaires,  $(h_L^*, q_L^*)$  et  $(h_R^*, q_R^*)$ , sont fixés. Par conséquent, nous avons quatre inconnues à déterminer mais nous ne disposons, pour le moment, que des deux équations (2.35) et (2.36). Afin de fermer ce système, nous allons choisir deux équations complémentaires construites sur les invariants de Riemann de l'onde stationnaire du système non homogène (1.47). En conséquence, dans la première relation nous imposons la continuité du débit à la traversée de l'onde stationnaire du solveur approché (2.28). Ainsi, nous avons

$$q_L^* = q_R^* = q^*. \quad (2.37)$$

Il résulte alors de (2.36) que le débit intermédiaire est donné par

$$q^* = q^{HLL} + \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{(\lambda_R - \lambda_L)}. \quad (2.38)$$

Maintenant, concernant l'évaluation des hauteurs d'eau intermédiaires,  $h_L^*$  et  $h_R^*$ , l'équation (2.35) doit être complétée par une relation supplémentaire de sorte que la paire  $(h_L^*, h_R^*)$  soit solution d'un système  $(2 \times 2)$ . Notre objectif est de proposer une équation supplémentaire pertinente telle que  $h_L^* = h_L$  et  $h_R^* = h_R$  est l'unique solution dès que  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie (2.15). Par exemple, dans [8], la deuxième équation est donnée par

$$\mathcal{B}(W_L^*, Z_L) = \mathcal{B}(W_R^*, Z_R), \quad (2.39)$$

qui correspond à la continuité de l'invariant de Riemann (1.47). Mais un tel choix implique de fortes non-linéarités. Après [46, 47], ce système non linéaire peut être remplacé par un système linéarisé qui conserve toutes les propriétés requises. Dans [46, 47], les auteurs proposent une linéarisation de l'équation de (2.17) en utilisant (2.39) pour obtenir l'égalité suivante :

$$\left( -\frac{\bar{q}^2}{h_L h_R} + \frac{g}{2}(h_L + h_R) \right) (h_R^* - h_L^*) = \Delta x \bar{S}_{LR}^q. \quad (2.40)$$

Par conséquent, on a la relation supplémentaire suivante :

$$h_R^* - h_L^* = \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}}, \quad (2.41)$$

où

$$\alpha_{LR} = g\bar{h} - \frac{\bar{q}^2}{h_L h_R}, \quad (2.42)$$

avec  $\bar{q}^2$  définie par (2.27). Le système linéaire  $(2 \times 2)$  constitué de (2.35) et (2.41) n'admet pas de solution unique dès que  $\bar{q}^2 = g\bar{h}h_L h_R$ . En conséquence, nous suggérons l'amélioration suivante :

$$h_R^* - h_L^* = \frac{\alpha_{LR} \Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k}. \quad (2.43)$$

À la différence principale avec (2.41), nous remarquons que (2.43) est bien défini. En effet, si  $\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k = 0$ , forcément nous avons  $\alpha_{LR} = 0$  et  $\varepsilon_{LR} = 0$ . Mais  $\varepsilon_{LR} = 0$  si et seulement si (2.15) est vérifié. De plus, d'après (2.20), et toujours sous la condition (2.15), nous avons  $\Delta x \bar{S}_{LR}^q = \alpha_{LR}(h_R - h_L)$ , et par conséquent, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon_{LR} \rightarrow 0} \frac{\alpha_{LR} \Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k} = h_R - h_L. \quad (2.44)$$

Pour conclure,  $h_L^*$  et  $h_R^*$  sont donnés comme solution du système linéaire  $(2 \times 2)$  gouverné par (2.35) et (2.43). La solution est directement donnée par

$$h_L^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_R \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}, \quad (2.45)$$

$$h_R^* = h^{HLL} - \frac{\lambda_L \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}. \quad (2.46)$$

Cependant, cette détermination des hauteurs d'eau intermédiaires n'assure pas la positivité requise de  $h_L^*$  and  $h_R^*$ . En suivant un principe de cutoff conservatif introduit dans [9] (voir aussi [46, 47]), nous proposons de corriger les hauteurs intermédiaires  $h_L^*$  et  $h_R^*$  de la façon suivante :

$$h_L^* = \min \left( \max \left( h^{HLL} - \frac{\lambda_R \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}, \sigma \right), \left( 1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \sigma \right) \quad (2.47)$$

$$h_R^* = \min \left( \max \left( h^{HLL} - \frac{\lambda_L \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)}, \sigma \right), \left( 1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \sigma \right) \quad (2.48)$$

où  $\sigma = \min(h_L, h_R, h^{HLL})$ . Maintenant, nous montrons que  $h_L^* > 0$  et  $h_R^* > 0$ . En effet, nous remarquons que  $h^{HLL} > 0$  tant que la hauteur d'eau exacte de la solution de Riemann  $h_{\mathcal{R}}$  reste positive. De plus, par définition de  $\sigma$ , on a  $\sigma - h^{HLL} \leq 0$ . Puisque  $\lambda_L < 0 < \lambda_R$  alors on obtient

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \sigma &= h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} (\sigma - h^{HLL}) > 0, \\ \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R}\right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \sigma &= h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} (\sigma - h^{HLL}) > 0. \end{aligned}$$

En conséquence, on obtient immédiatement  $h_L^* > 0$  and  $h_R^* > 0$ .

Il est important de souligner que la mise en place du cutoff (2.47) et (2.48) préserve la relation de consistance intégrale (2.35). Effet, pour établir (2.35), par souci de simplicité dans les notations, nous posons

$$\Sigma_{LR} = \frac{\lambda_L \lambda_R \Delta x \bar{S}_{LR}^q \alpha_{LR}}{(\lambda_R - \lambda_L)(\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k)},$$

pour avoir

$$\begin{aligned} \lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* &= \min \left( \max \left( \lambda_R h^{HLL} + \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} + \lambda_L \sigma \right) \\ &\quad + \min \left( \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} - \lambda_R \sigma \right). \end{aligned}$$

La quantité ci-dessus est facilement évaluée en comparant  $\Sigma_{LR}$ ,  $\lambda_R(\sigma - h^{HLL})$  et  $\lambda_L(\sigma - h^{HLL})$ . En effet, supposons d'abord

$$\lambda_L(h^{HLL} - \sigma) < \Sigma_{LR} < \lambda_R(h^{HLL} - \sigma). \quad (2.49)$$

Alors, nous obtenons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right) &= \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \\ \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right) &= -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}. \end{aligned}$$

De plus, on remarque aisément que l'hypothèse (2.49) implique

$$\begin{aligned}\lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR} &\leq (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} + \lambda_L \sigma, \\ -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR} &\leq (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} - \lambda_R \sigma,\end{aligned}$$

d'où

$$\min \left( \max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} + \lambda_L \sigma \right) = \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR},$$

$$\min \left( \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} - \lambda_R \sigma \right) = -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR},$$

pour en déduire la relation de conservation (2.35).

Maintenant, supposons

$$\lambda_L(h^{HLL} - \sigma) < \lambda_R(h^{HLL} - \sigma) < \Sigma_{LR}, \quad (2.50)$$

on obtient

$$\max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right) = \lambda_R \sigma,$$

$$\max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right) = -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}.$$

De plus, d'après (2.50), à partir d'une évaluation directe, on a

$$\begin{aligned}\lambda_R \sigma &\leq (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} + \lambda_L \sigma, \\ -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR} &\geq (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} - \lambda_R \sigma.\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\min \left( \max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} + \lambda_L \sigma \right) = \lambda_R \sigma,$$

$$\min \left( \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} - \lambda_R \sigma \right) = (\lambda_R - \lambda_L)h^{HLL} - \lambda_R \sigma,$$

pour en déduire la relation attendue (2.35).

Concernant la dernière condition donnée par

$$\Sigma_{LR} < \lambda_L(h^{HLL} - \sigma) < \lambda_R(h^{HLL} - \sigma), \quad (2.51)$$

ici , nous avons

$$\begin{aligned}\max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right) &= \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \\ \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right) &= -\lambda_L \sigma.\end{aligned}$$

En utilisant (2.51), on obtient directement

$$\begin{aligned}-\lambda_L \sigma &\leq (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} - \lambda_R \sigma, \\ (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} + \lambda_L \sigma &\leq -\Sigma_{LR} + \lambda_R h^{HLL}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\min \left( \max \left( \lambda_R h^{HLL} - \Sigma_{LR}, \lambda_R \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} + \lambda_L \sigma \right) &= (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} + \lambda_L \sigma \\ \min \left( \max \left( -\lambda_L h^{HLL} + \Sigma_{LR}, -\lambda_L \sigma \right), (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL} - \lambda_R \sigma \right) &= -\lambda_L \sigma\end{aligned}$$

pour trouver la relation de conservation (2.35) attendue.

La définition du solveur de Riemann approché (2.28) est maintenant terminée. Pour conclure cette section, nous établissons que le solveur de Riemann approché préserve les états stationnaires.

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $W_L$  et  $W_R$  appartenant à  $\Omega$ . Considérons le solveur de Riemann approché sous la forme (2.28) où les états intermédiaires sont donnés par (2.38), (2.47) et (2.48). Si  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  satisfait la condition locale d'état d'équilibre (2.15) avec  $\bar{F}_r \neq 1$ , alors le solveur de Riemann approché reste au repos, c'est à dire*

$$\tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

*Démonstration.* Sous la condition d'équilibre local (2.15), le terme source de topographie, donné par (2.26), se reformule de la façon suivante :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g \bar{h} (Z_R - Z_L) - \frac{q^2}{4h_L^2 h_R^2} \times \frac{(h_L - h_R)(Z_R - Z_L)^2}{(1 - \bar{F}_r^2)^2},$$

où  $q = q_L = q_R$ . Tant que  $\bar{F}_r \neq 1$ , en utilisant le lemme 2.2.2,  $\bar{S}_{LR}^q$  est maintenant donné par (2.17). Ainsi, à partir de l'égalité (2.38), des calculs directs nous donnent  $q^* = q$ , de

sorte que le débit est stationnaire. Concernant la hauteur d'eau intermédiaire, puisque la condition stationnaire locale (2.15) est vérifiée, nous avons l'égalité suivante :

$$h^{HLL} - \frac{\lambda_{L,R}}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta x \bar{S}_{LR}^q \frac{\alpha_{LR}}{\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k} = h^{HLL} - \frac{\lambda_{L,R}}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{\alpha_{LR}}$$

où  $\alpha_{LR}$  est donnée par (2.42) et par souci de simplicité dans les notations, nous avons défini  $\lambda_{L,R} = \lambda_L$  ou  $\lambda_R$ . Avec  $\alpha_{LR} \neq 0$ , puisque la relation (2.20) est vérifiée, on obtient directement

$$h^{HLL} - \frac{\lambda_{L,R}}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta x \bar{S}_{LR}^q \frac{\alpha_{LR}}{\alpha_{LR}^2 + \varepsilon_{LR} \Delta x^k} = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{\lambda_{L,R}}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{(h_R - h_L) \alpha_{LR}}{\alpha_{LR}} = h_{L,R}.$$

Alors d'après (2.47) et (2.48), on obtient  $h_L^* = h_L$  et  $h_R^* = h_R$ , et la preuve est ainsi achevée.  $\square$

Équipé du solveur de Riemann approché (2.28), où les états intermédiaires sont donnés par (2.38), (2.47) et (2.48), complété par la discrétisation du terme source (2.26), alors le schéma (2.13) est entièrement déterminé.

## 2.4 Principales propriétés du schéma

Nous énonçons les principales propriétés satisfaites par le schéma (2.13).

**Théorème 2.4.1.** *Supposons la restriction de type CFL suivante :*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_{i+1/2}^L|, |\lambda_{i+1/2}^R|) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.53)$$

Le schéma (2.13)-(2.38)-(2.47)-(2.48)-(2.26) est consistant avec (1.1). Soit  $W_i^n$  appartenant à  $\Omega$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . L'état mise à jour  $W_i^{n+1}$ , donné par le schéma (2.13)-(2.38)-(2.47)-(2.48)-(2.26), satisfait les propriétés suivantes :

1. *Préservation de la positivité :  $h_i^{n+1} \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,*
2. *Préservation de tous les états d'équilibres :  $W_i^{n+1} = W_i^n$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  tant que  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie*

$$q_i^n = Q \quad \text{et} \quad \frac{(q_i^n)^2}{2(h_i^n)^2} + g(h_i^n + Z_i) = B \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad (2.54)$$

pour des constantes  $Q$  et  $B$  données.

3. Une inégalité d'entropie incomplète sous la forme :

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + \frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{\Delta x} \leq -\bar{S}_i^\eta + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (2.55)$$

est satisfaite tant que

$$h_{i+1/2}^{HLL} - \frac{\lambda_{i+1/2}^L \Delta x \bar{S}_{i+1/2}^q \alpha_{i+1/2}}{(\alpha_{i+1/2}^2 + \varepsilon_{i+1/2} \Delta x^k) (\lambda_{i+1/2}^R - \lambda_{i+1/2}^L)} > 0 \quad \text{et} \quad (2.56)$$

$$h_{i+1/2}^{HLL} - \frac{\lambda_{i+1/2}^R \Delta x \bar{S}_{i+1/2}^q \alpha_{i+1/2}}{(\alpha_{i+1/2}^2 + \varepsilon_{i+1/2} \Delta x^k) (\lambda_{i+1/2}^R - \lambda_{i+1/2}^L)} > 0,$$

où nous avons posé

$$G_{i+1/2} = \frac{1}{2}(G(W_{i+1}^n) + G(W_i^n)) - \frac{\Delta x}{4\Delta t}(\eta(W_{i+1}^n) - \eta(W_i^n)) + \frac{\Delta x}{2\Delta t}(I_{i+1/2}^{\eta^+} - I_{i-1/2}^{\eta^-}), \quad (2.57)$$

avec

$$I_{i+1/2}^{\eta^+} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1})) dx, \quad (2.58)$$

$$I_{i+1/2}^{\eta^-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1})) dx, \quad (2.59)$$

et

$$\bar{S}_i^\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{h_{i-1}^n + h_i^n}{2} \frac{q_{i-1/2}^{HLL}}{h_{i-1/2}^{HLL}} \left( \frac{Z_i - Z_{i-1}}{\Delta x} \right) + \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} \frac{q_{i+1/2}^{HLL}}{h_{i+1/2}^{HLL}} \left( \frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta x} \right) \right). \quad (2.60)$$

Avant d'établir le résultat ci-dessus, commentons l'inégalité d'entropie discrète (2.55). En effet, il est intéressant de noter que le résidu, donné par  $\mathcal{O}(\Delta x)$ , est régi par la régularité de la fonction topographique  $Z$  et ne dépend jamais des inconnues (éventuellement discontinues).

De plus, soulignons que l'hypothèse (2.56) utilisée pour obtenir l'inégalité d'entropie discrète (2.55), impose que les hauteurs d'eau intermédiaires soient données par (2.45) et (2.46) de sorte que les corrections (2.47) et (2.48) restent inactives. En d'autres termes, nous présentons ici des inégalités d'entropie discrètes loin des zones sèches et des transitions sèches/mouillées.

À présent, pour établir le résultat ci-dessus, nous avons besoin du lemme technique

suisant où nous énonçons le comportement de l'entropie à chaque interface.

**Lemme 2.4.2.** Soient  $W_L$  et  $W_R$  dans  $\Omega$  tels que  $h_L^*$  et  $h_R^*$ , définies par (2.47) et (2.48), coïncident avec (2.45) et (2.46). Soient  $\eta$  et  $G$  donnés par (1.49) et  $Z$  une fonction régulière pour définir  $Z_L = Z(x - \Delta x/2)$  et  $Z_R = Z(x + \Delta x/2)$ . Supposons une restriction de type CFL sous la forme

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_L|, |\lambda_R|) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.61)$$

Le solveur de Riemann approché (2.28) avec les états intermédiaires donnés par (2.38), (2.47) et (2.48) vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta(\widetilde{W}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)) dx &\leq \frac{1}{2}(\eta(W_L) + \eta(W_R)) \\ &- \frac{\Delta t}{\Delta x}(G(W_R) - G(W_L)) - \Delta t \bar{S}_{LR}^\eta + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned} \quad (2.62)$$

où

$$\bar{S}_{LR}^\eta(\Delta x, W_L, W_R, Z_L, Z_R) = \frac{g \bar{h} q^{HLL}}{h^{HLL}} \times \frac{Z_R - Z_L}{\Delta x}, \quad (2.63)$$

avec  $W^{HLL} = (h^{HLL}, q^{HLL})$  où  $h^{HLL}$  et  $q^{HLL}$  sont respectivement définies par (2.33) et (2.34).

*Démonstration.* Pour un solveur de Riemann approché donné par (2.28), sous la condition de type CFL (2.61), nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta(\widetilde{W}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)) dx &= \left( \frac{1}{2} + \lambda_L \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \eta(W_L) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*)) + \left( \frac{1}{2} - \lambda_R \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \eta(W_R). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Or on a

$$\eta(W_L^*) = \frac{(q^*)^2}{2h_L^*} + g \frac{(h_L^*)^2}{2} \quad \text{et} \quad \eta(W_R^*) = \frac{(q^*)^2}{2h_R^*} + g \frac{(h_R^*)^2}{2},$$

où  $q^*$  et  $h_{L,R}^*$  sont donnés par (2.38), (2.45) et (2.46). Puisque la fonction de topographie est régulière, alors  $Z_R - Z_L = \mathcal{O}(\Delta x)$ . Par conséquent, en supposant dans un premier



temps que  $\alpha_{LR} \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} q^* &= q^{HLL} - \frac{g\bar{h}}{\lambda_R - \lambda_L}(Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ h_R^* &= h^{HLL} - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{g\bar{h}}{\alpha_{LR}}(Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ h_L^* &= h^{HLL} - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \frac{g\bar{h}}{\alpha_{LR}}(Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (q^*)^2 &= q^{HLL^2} - 2q^{HLL} \frac{g\bar{h}(Z_R - Z_L)}{\lambda_R - \lambda_L} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \frac{1}{h_L^*} &= \frac{1}{h^{HLL}} + \frac{1}{h^{HLL^2}} \frac{g\bar{h}(Z_R - Z_L)}{\alpha_{LR}} \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ (h_L^*)^2 &= h^{HLL^2} - 2h^{HLL} \frac{g\bar{h}(Z_R - Z_L)}{\alpha_{LR}} \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \\ \frac{1}{h_R^*} &= \frac{1}{h^{HLL}} + \frac{1}{h^{HLL^2}} \frac{g\bar{h}(Z_R - Z_L)}{\alpha_{LR}} \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ (h_R^*)^2 &= h^{HLL^2} - 2h^{HLL} \frac{g\bar{h}(Z_R - Z_L)}{\alpha_{LR}} \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned}$$

En utilisant les relations ci-dessus et en effectuant des calculs directs, on obtient les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_R \frac{(q^*)^2}{h_R^*} - \lambda_L \frac{(q^*)^2}{h_L^*} &= (\lambda_R - \lambda_L) \frac{q^{HLL^2}}{h^{HLL}} - 2 \frac{q^{HLL}}{h^{HLL}} g\bar{h}(Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \lambda_R (h_R^*)^2 - \lambda_L (h_L^*)^2 &= (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Nous en déduisons immédiatement

$$\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*) = (\lambda_R - \lambda_L) \left( \frac{1}{2} \frac{q^{HLL^2}}{h^{HLL}} + \frac{g}{2} h^{HLL^2} \right) - g\bar{h} \frac{q^{HLL}}{h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

et ainsi, il en résulte l'estimation suivante :

$$\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*) = (\lambda_R - \lambda_L) \eta(W^{HLL}) - g \frac{\bar{h} q^{HLL}}{h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.65)$$

De plus, d'après [37], nous avons

$$\eta(W^{HLL}) \leq \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \eta(W_R) - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \eta(W_L) - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L} (G(W_R) - G(W_L)). \quad (2.66)$$

En effet, en considérant  $W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{t}; W_L, W_R \right)$  la solution exacte du problème Riemann du système homogène (1.8), l'état intermédiaire du solveur de Riemann HLL (voir la figure 2.3) vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} W^{HLL} &= \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} W^{HLL} dx, \\ &= \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R \right) dx. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \eta(W^{HLL}) &= \eta \left( \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} W^{HLL} dx \right), \\ &= \eta \left( \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R \right) dx \right). \end{aligned}$$

De plus comme  $\eta$  est convexe, de l'inégalité de Jensen (voir [28]), il découle l'inégalité suivante :

$$\eta(W^{HLL}) \leq \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} \eta \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R \right) \right) dx.$$

Par ailleurs, puisque  $W_{\mathcal{R}}^{Homo}$  est la solution exacte du problème homogène alors elle vérifie la relation suivante :

$$\int_0^{\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} \partial_t \eta \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{t}; W_L, W_R \right) \right) + \partial_x G \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{t}; W_L, W_R \right) \right) dx dt \leq 0,$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} &\int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} \eta \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R \right) \right) dx - \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} \eta \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} (t=0; W_L, W_R) \right) dx \\ &+ \int_0^{\Delta t} G \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{\lambda_R \Delta t}{t}; W_L, W_R \right) \right) dx - \int_0^{\Delta t} G \left( W_{\mathcal{R}}^{Homo} \left( \frac{\lambda_L \Delta t}{t}; W_L, W_R \right) \right) dx \leq 0. \end{aligned}$$

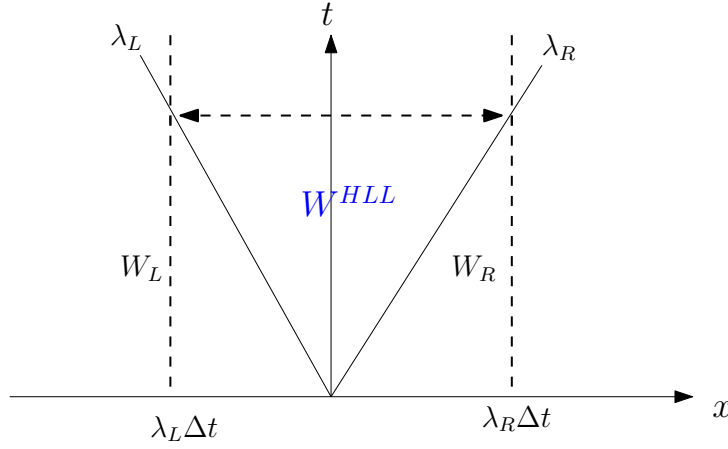


FIGURE 2.3 – Structure du solveur de Riemann approché de HLL.

Il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)\Delta t} \int_{\lambda_L \Delta t}^{\lambda_R \Delta t} \eta \left( W_R^{Homo} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R \right) \right) &\leq \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)} (\lambda_R \eta(W_R) - \lambda_L \eta(W_L)) \\ &\quad - \frac{1}{(\lambda_R - \lambda_L)} (G(W_R) - G(W_L)). \end{aligned} \quad (2.68)$$

En conséquence, de l'inégalité (2.68), on déduit immédiatement l'estimation (2.66).

Il suffit alors de combiner (2.65) et (2.66), pour obtenir

$$\begin{aligned} \lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*) &\leq \lambda_R \eta(W_R) - \lambda_L \eta(W_L) - (G(W_R) - G(W_L)) \\ &\quad - g \frac{\bar{h}q^{HLL}}{h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (2.69)$$

L'inégalité attendue (2.62) vient de la combinaison de (2.64) avec l'estimation ci-dessus. Pour achever la preuve, notons que, si  $\alpha_{LR} = 0$  alors  $h_L^* = h_R^* = h^{HLL}$ . L'estimation (2.65) devient immédiate. La démonstration est ainsi terminée.  $\square$

Équipés du résultat ci-dessus, nous sommes en mesure d'établir le théorème 2.4.1.

*Démonstration.* Tout d'abord, nous établissons la consistance du schéma (2.13). Dans un premier temps, nous remarquons que sous la condition de type CFL (2.53), il n'y a aucune interaction dans la juxtaposition des solveurs de Riemann approchés.

Afin d'établir la consistance de la méthode numérique (2.13), nous montrons la consistance du flux numérique et du terme source. Concernant le flux numérique, nous

avons

$$F_{\Delta}(W, W, Z_L, Z_R) = F(W) + \frac{\Delta x}{2\Delta t}(I_{LR}^+ - I_{LR}^-)|_{W_R=W_L=W},$$

où  $I_{LR}^+$  and  $I_{LR}^-$  sont définis par (2.8) et (2.9). Puisque le solveur de Riemann approché est sous la forme (2.28), alors on a

$$\Delta x I_{LR}^+ = (\lambda_R \Delta t - 0) W_R^* + \left( \frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) W_R,$$

et

$$\Delta x I_{LR}^- = \left( \lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) W_L + (0 - \lambda_L \Delta t) W_L^*,$$

de sorte que le flux numérique devient

$$F_{\Delta}(W, W, Z_L, Z_R) = F(W) + \frac{1}{2\Delta t} \left( (\lambda_R \Delta t - 0) W_R^* + \left( \frac{\Delta x}{2} - \lambda_R \Delta t \right) W_R - \left( \lambda_L \Delta t + \frac{\Delta x}{2} \right) W_L - (0 - \lambda_L \Delta t) W_L^* \right).$$

Il en résulte

$$F_{\Delta}(W, W, Z_L, Z_R) = F(W) + \frac{\lambda_R}{2}(W_R^* - W) + \frac{\lambda_L}{2}(W_L^* - W).$$

En utilisant la définition des états intermédiaires, avec  $W_L = W_R = W \in \Omega$ , en imposant à  $\Delta x$  d'être suffisamment petit, on obtient

$$\begin{aligned} q^* &= q - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L} gh(Z_R - Z_L), \\ h_L^* &= h - \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} gh(Z_R - Z_L) \frac{gh - q^2/h^2}{(gh - q^2/h^2)^2 + \Delta x^k \sqrt{|Z_R - Z_L|}}, \\ h_R^* &= h - \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} gh(Z_R - Z_L) \frac{gh - q^2/h^2}{(gh - q^2/h^2)^2 + \Delta x^k \sqrt{|Z_R - Z_L|}}, \end{aligned}$$

pour obtenir immédiatement la consistance attendue du flux numérique comme suit :

$$\lim_{Z_L, Z_R \rightarrow Z} F_{\Delta}(W, W, Z_L, Z_R) = F(W).$$

Concernant la consistance du terme source discret, donné par (2.26), dès que  $W_L =$

$W_R = W$  on a

$$\bar{S}_{LR}^q(W, W, Z_L, Z_R) = -gh \frac{(Z_R - Z_L)}{\Delta x}.$$

Avec une fonction de topographie régulière, en considérant  $Z_L = Z(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $Z_R = Z(x + \frac{\Delta x}{2})$  ainsi on obtient alors

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{S}_{LR}^q(W, W, Z_L, Z_R) = -gh \partial_x Z,$$

de sorte que le schéma (2.13) est consistant.

Maintenant, nous montrons la positivité de  $h_i^{n+1}$ . D'après (2.3), puisque la hauteur d'eau intermédiaire, définie par (2.47)-(2.48), est positive, alors

$$h_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta^2/2} \tilde{h}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}, W_i \right) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta^2/2}^0 \tilde{h}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i, W_{i+1} \right) dx,$$

n'est rien d'autre que l'intégrale de grandeurs positives. Par conséquent, on a  $h_i^{n+1} \geq 0$ .

Concernant la propriété de préservation des états d'équilibre, puisque  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie (2.54), à chaque interface la condition de stationnarité (2.15) est satisfaite. En conséquence du lemme 2.3.1, toutes les solutions de Riemann approchées restent stationnaires de sorte que nous obtenons

$$\tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x_{i+1/2} < 0, \\ W_{i+1}^n & \text{si } x_{i+1/2} > 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Alors, nous avons la séquence d'égalités suivante :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) dx, \\ &= W_i^n. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, nous établissons l'inégalité d'entropie (2.55). Puisque la fonction d'entropie  $\eta$  est convexe, l'inégalité de Jensen (voir [28]), donne

$$\begin{aligned} \eta(W_i^{n+1}) &\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i \right)) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right)) dx. \end{aligned}$$

En considérant les égalités (2.58) et (2.59), on obtient

$$\begin{aligned} \eta(W_i^{n+1}) &\leq \frac{1}{2}(I_{i-1/2}^{\eta^-} + I_{i-1/2}^{\eta^+}) + \frac{1}{2}(I_{i-1/2}^{\eta^+} - I_{i-1/2}^{\eta^-}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(I_{i+1/2}^{\eta^-} + I_{i+1/2}^{\eta^+}) - \frac{1}{2}(I_{i+1/2}^{\eta^+} - I_{i+1/2}^{\eta^-}). \end{aligned} \quad (2.71)$$

De plus, la condition (2.56) implique que les hauteurs d'eau intermédiaires, données par (2.45) et (2.46), sont nécessairement positives. Il en résulte que les corrections imposées par les cutoffs sur la hauteur d'eau (2.47) et (2.48) ne sont pas actives et le lemme 2.4.2 peut être appliqué. En conséquence, de (2.62), on déduit

$$\begin{aligned} I_{i+1/2}^{\eta^-} + I_{i+1/2}^{\eta^+} &\leq \frac{1}{2}(\eta(W_i^n) + \eta(W_{i+1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(G(W_{i+1}^n) - G(W_i^n)) \\ &\quad - \Delta t \bar{S}_{i+\frac{1}{2}}^\eta + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{O}(\Delta x^2), \end{aligned}$$

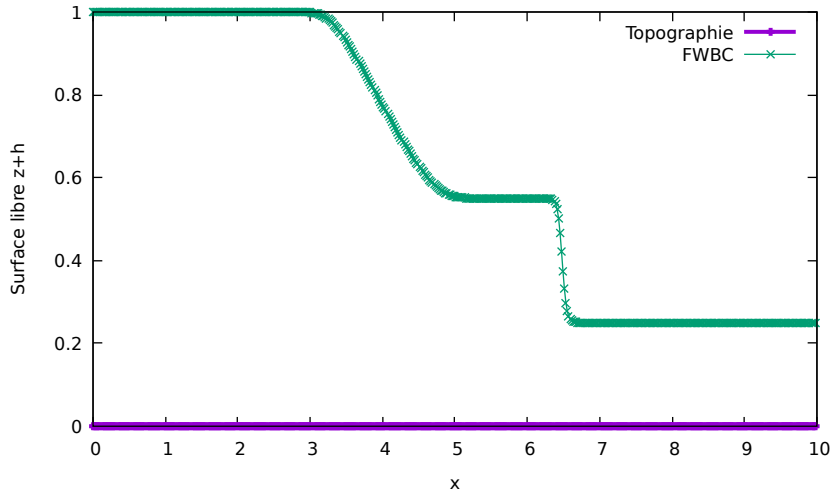
où nous avons posé  $\bar{S}_{i+1/2}^\eta = \bar{S}_{LR}^\eta(\Delta x, W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1})$  donnée par (3.49). Maintenant, en introduisant l'estimation ci-dessus dans (2.71), après un calcul direct, nous obtenons l'inégalité d'entropie discrète attendue (2.55). La preuve du théorème 2.4.1 est alors achevée.  $\square$

En conclusion, dans cette section, nous avons pu dériver une discrétisation consistante du terme source et construit un solveur de Riemann approché de telle sorte que le schéma ainsi obtenu nous donne des propriétés numériques intéressantes. Toutefois, le schéma souffre d'un défaut majeur car il peut également capturer des chocs stationnaires non entropiques comme nous le montrons dans la section suivante.

## 2.5 Défaut du schéma numérique

Dans des situations très spécifiques, il est possible de montrer que le schéma capture des solutions stationnaires qui ne sont pas entropiques. En effet, rappelons que la définition 2.2.1 de la stationnarité locale ne vérifie pas le critère d'entropie. Par contre, il est important de souligner que ces solutions très spécifiques auront un caractère instable lors de la mise en œuvre numérique et ne seront jamais capturées par le schéma. Des résultats de simulations illustreront ce propos.

À présent, nous présentons un exemple de solution stationnaire non entropique a priori capturée par le schéma. Dans un premier temps, nous considérons la donnée ini-


 FIGURE 2.4 – Surface libre l’eau pour une rupture de barrage avec  $t = 0.5$  et  $N = 500$ .

tiale d’un problème de Riemann où les états gauches et les états droits sont caractérisés par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{u_L^2}{2} + gh_L = \frac{u_R^2}{2} + gh_R = B, \\ q_L = q_R = Q. \end{cases} \quad (2.72)$$

Pour  $Z$  égale à une constante, cette donnée initiale coïncide avec une solution stationnaire locale donnée par (2.15). Cependant, la solution associée à cette donnée initiale n’est pas une discontinuité stationnaire mais une rupture de barrage standard composée d’une 1-détente et d’un 2-choc.

Le schéma (2.13) que nous avons proposé, puisque  $Z$  est égale à une constante, coïncide avec le schéma HLL usuel. En conséquence, l’approximation de la solution est exactement donnée par une approximation usuelle du schéma HLL (voir la figure 2.4). Dans ce cas, nous obtenons la solution attendue.

À présent, nous allons considérer une donnée initiale similaire, mais en introduisant une petite perturbation dans la topographie notée  $Z^\delta$  afin de plus avoir  $Z$  constante. En conséquence de cette perturbation, la discrétisation du terme source est maintenant active localement autour de  $Z^\delta$ . Cette perturbation est prise sur une seule maille de taille  $\Delta x$ . Sur cette maille contenant la perturbation, nous construisons un état noté  $W^\delta$

tel que

$$\begin{cases} \mathcal{B}(W^\delta, Z^\delta) = B, \\ q^\delta = Q. \end{cases} \quad (2.73)$$

On note que la nouvelle donnée initiale avec une topographie perturbée vérifie la condition de stationnarité (2.15) sur chaque maille. En conséquence, la donnée initiale vérifie la condition (2.54) du théorème 2.4.1. Il en résulte que la solution reste stationnaire en tout temps. Ce n'est malheureusement pas la solution attendue puisque  $Z^\delta$  est une petite perturbation de la topographie et que la solution entropique est en fait constituée d'une 1-détente et d'un 2-choc modulo la perturbation  $Z^\delta$ .

Toutefois, dans les applications numériques (voir section 2.6.6), cette approximation stationnaire semble instable et le schéma ne capture pas la donnée initiale stationnaire mais une solution faible avec une perturbation du même ordre que celle obtenue par d'autres schémas.

## 2.6 Résultats numériques

Dans cette section, nous effectuons plusieurs expériences numériques pour illustrer le comportement du schéma présenté ici que nous appellerons Fully well-balanced corrected scheme (FWBC). Une comparaison systématique avec la méthode bien connue de reconstruction hydrostatique (HR) [2], appliquée au schéma (HLL) [37], et le schéma Fully well-balanced (FWB) proposé dans [46, 47], est réalisé pour toutes les simulations. Concernant le schéma (FWB), un paramètre noté  $C$  doit être fixé. Dans la présente étude, toutes les simulations numériques présentées sont effectuées en considérant  $C \in [1, 2.5]$  en fonction des simulations réalisées. Nous soulignons que de petites oscillations apparaissent avec  $C \geq 5$  tandis que les solutions approchées explosent avec  $C \geq 10$ .

Tant que la solution exacte est connue, le comportement des solutions approchées obtenues est présenté en évaluant les erreurs  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$ . De telles erreurs sont données



par

$$\|W^n - W^{ex}(\cdot, t^n)\|_{L^1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |W_i^n - W^{ex}(x_i, t^n)| \Delta x, \quad (2.74)$$

$$\|W^n - W^{ex}(\cdot, t^n)\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{i \in \mathbb{Z}} (W_i^n - W^{ex}(x_i, t^n))^2 \Delta x}, \quad (2.75)$$

$$\|W^n - W^{ex}(\cdot, t^n)\|_{L^\infty} = \max_{i \in \mathbb{Z}} |W_i^n - W^{ex}(x_i, t^n)|, \quad (2.76)$$

où  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  est défini par le schéma numérique adopté tandis que  $W^{ex}(x, t)$  désigne la solution exacte.

### 2.6.1 Écoulement fluvial sous-critique sur une bosse parabolique

Ce test est utilisé pour illustrer la capacité du schéma à capturer des états d'équilibre. Le domaine est  $[0, 25]$  et la fonction de topographie est définie par  $Z(x) = (0, 0.2 - 0.05(x-10)^2)_+$  où  $x_+ = \max(0, x)$ . Les conditions initiales sont  $q_0 = 4.42m^2/s$  et  $h_0 = 2m$ . Pour la condition limite à gauche du domaine en  $x = 0$ , la hauteur d'eau satisfait une condition de Neumann homogène et le débit est égal à  $q_0 = 4.42m^2/s$ . De même pour condition limite à droite en  $x = 25$ , la hauteur d'eau est égale à  $h_0 = 2m$  et le débit suit une condition aux limites de Neumann homogène.

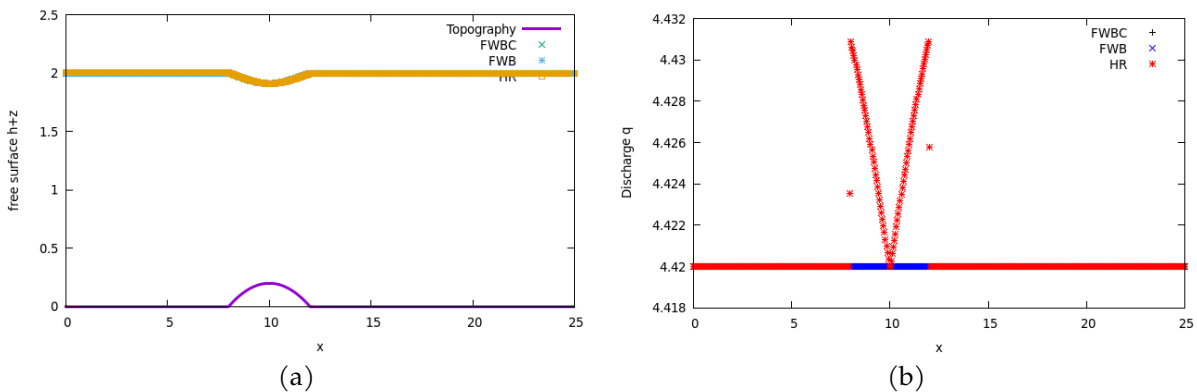


FIGURE 2.5 – Surface libre (2.5a) et débit (2.5b) pour la simulation d'un écoulement sous-critique.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma HR	1.32e-02	1.36e-02	1.59e-02	2.89e-03	2.89e-03	2.89e-02
schéma FWB	1.15e-13	1.20e-13	1.51e-13	6.63e-14	6.99e-14	8.26e-14
schéma FWBC	1.10e-13	1.17e-13	1.44e-13	6.57e-14	6.84e-14	8.21e-14

TABLE 2.1 – Erreur de l’approximation de la surface libre et du débit pour l’expérience d’écoulement sous-critique.

Le domaine est ici discrétisé avec 1000 cellules. A l’instant  $t = 100$ , les solutions approchées sont présentées dans la figure 2.5. Dans le tableau 2.1, nous présentons les erreurs numériques. Notons que la solution approchée donnée par le schéma (FWBC) est en très bon accord avec la solution exacte. En effet le schéma (FWBC) préserve exactement de telles solutions stationnaires.

## 2.6.2 Écoulement transcritique sans choc

On considère un domaine de calcul donné par  $[0, 25]$  et la topographie définie par  $Z(x) = (0, 0.2 - 0.05(x - 10)^2)_+$ . Nous considérons les données initiales données par  $q_0 = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $h_0 = 0.66 \text{ m}$ . Pour la condition limite à gauche du domaine en  $x = 0$ , la hauteur d’eau satisfait une condition de Neumann homogène et le débit est égal à  $q_0 = 1.53 \text{ m}^2/\text{s}$ . Pour la condition limite à droite du domaine en  $x = 25$ , la hauteur d’eau est égale à  $h_0 = 0.66 \text{ m}$  si le *Froude* est plus petit que 1 et vérifie une condition Neumann sinon. Le débit suit une condition aux limites de Neumann homogène. Les simulations numériques obtenues sont présentées sur la figure 2.6 au temps  $t = 100\text{s}$  avec 1000 mailles.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma HR	4.79e-02	6.07e-02	8.12e-02	8.28e-04	3.30e-03	1.82e-02
schéma FWB	1.67e-14	2.13e-14	4.26e-14	1.47e-14	1.58e-14	2.04e-14
schéma FWBC	1.27e-14	1.67e-14	3.14e-14	1.27e-14	1.48e-14	1.98e-14

TABLE 2.2 – Erreur de l’approximation du surface libre et du débit pour l’écoulement transcritique sans choc.

Une fois de plus, le schéma (FWBC) donne un très bon comportement comparé à la solution exacte dans le régime stationnaire car ses régimes sont exactement capturés.

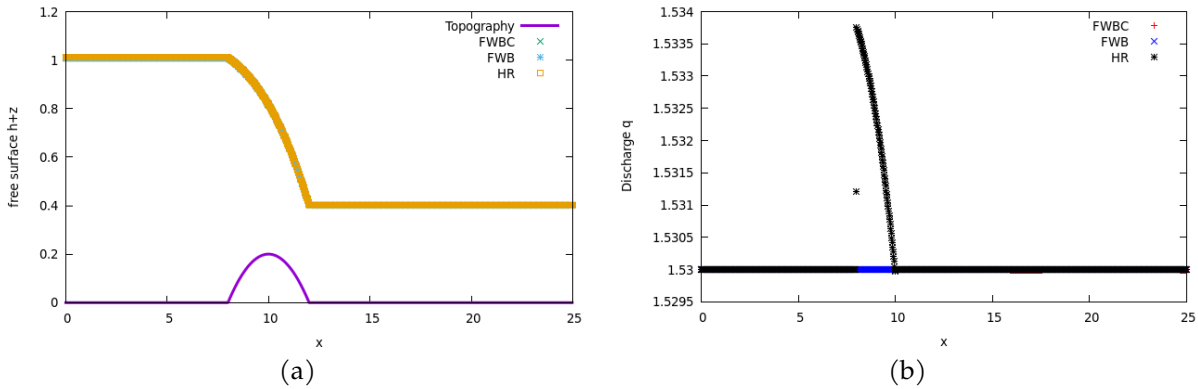


FIGURE 2.6 – Surface libre (2.6a) et débit (2.6b) pour la simulation d’un écoulement transcritique sans choc.

Le très bon comportement de la solution numérique est mis en évidence par le tableau 2.2 où les erreurs numériques sont données.

### 2.6.3 Perturbation d’un écoulement transcritique sans choc

Dans cette simulation numérique, nous testons le comportement du schéma (FWBC) pour capturer une solution stationnaire perturbée. Ici, les données initiales sont données par  $h(x, 0) = h_0(x) + h_\delta(x)$  et  $q(x, 0) = q_0(x) + q_\delta(x)$  où  $(h_0, q_0)$  représente la solution stationnaire d’un écoulement transcritique sans choc selon l’expérience numérique présentée à la section 2.6.2 et  $(h_\delta, q_\delta)$  donnée par

$$h_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 10 < x < 11, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{and} \quad q_\delta(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 13 < x < 16, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces données initiales sont affichées à la figure 2.7.

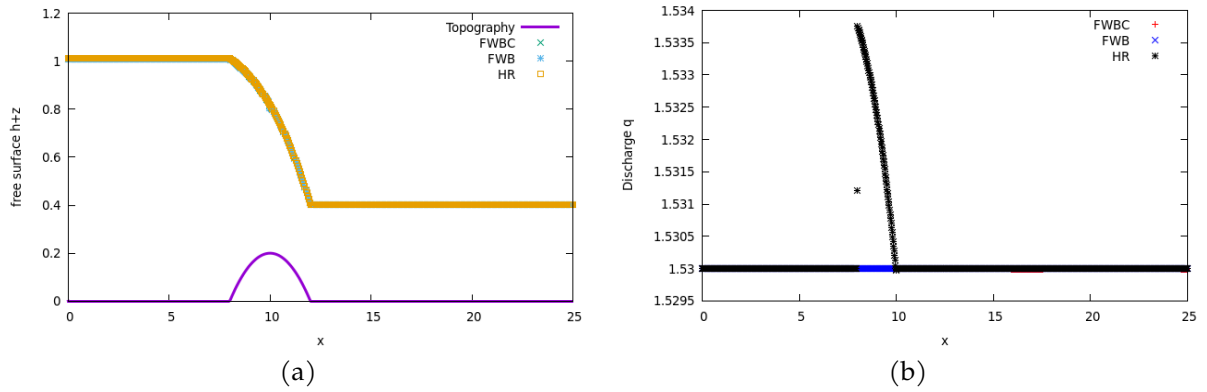


FIGURE 2.8 – Surface libre (2.8a) et débit (2.8b) pour l'écoulement transcritique perturbé sans choc.

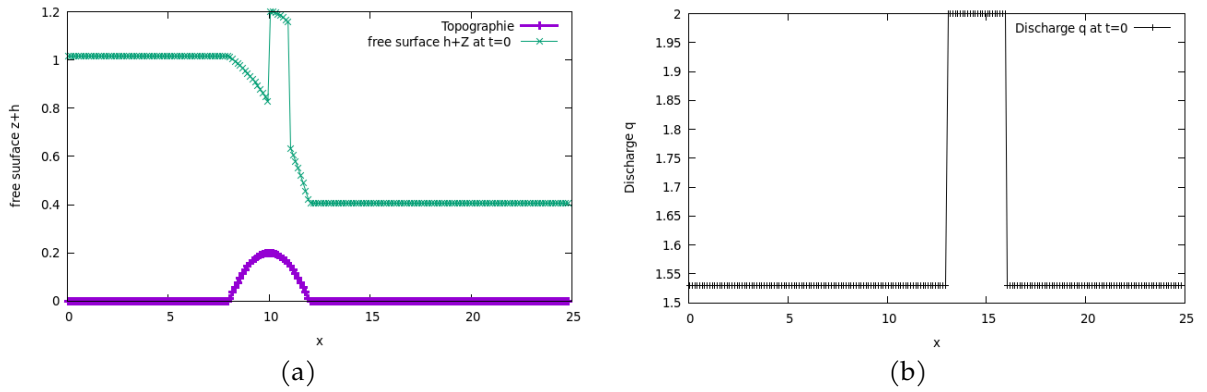


FIGURE 2.7 – Surface libre (2.7a) et débit (2.7b) initiale pour l'écoulement transcritique sans choc perturbé.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma HR	4.89e-02	6.17e-02	8.22e-02	8.38e-04	3.43e-03	1.98e-02
schéma FWB	2.79e-14	2.85e-14	4.20e-14	1.62e-14	1.85e-14	2.18e-14
schéma FWBC	2.77e-14	2.87e-14	4.14e-14	1.58e-14	1.75e-14	2.08e-14

TABLE 2.3 – Erreurs de la surface libre et du débit pour l'écoulement transcritique perturbé sans choc.

Au vu des erreurs présentées dans la table 2.3, il est clair que la perturbation est évacuée par l'écoulement. En conséquence, pour un temps suffisamment long, les trois schémas capturent une solution stationnaire. Les erreurs de la table 2.3 mettent en évidence

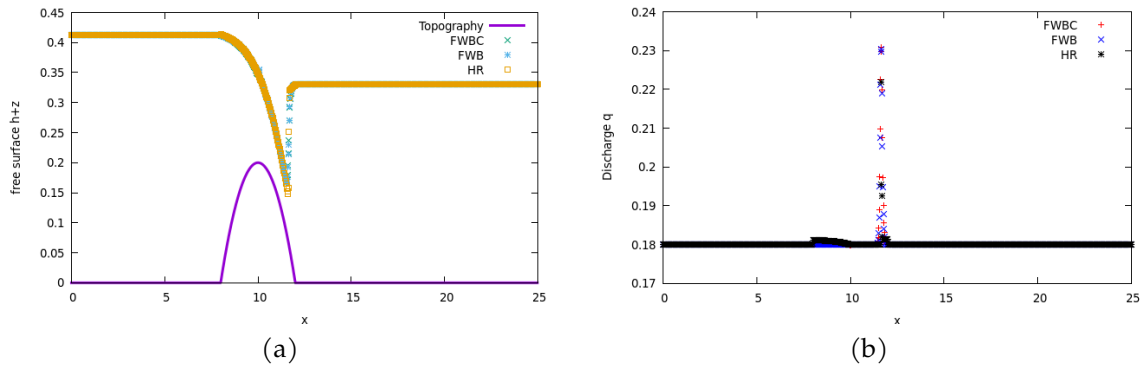


FIGURE 2.9 – Surface libre (2.9a) et débit (2.9b) pour la simulation d’un écoulement transcritique avec choc.

que les schémas (FWB) et (FWBC) capturent exactement cette solution stationnaire. Conformément aux erreurs présentées dans les tables 2.2–2.3, les résultats de simulation illustrés sur les figures 2.6 et 2.8 sont extrêmement proches.

## 2.6.4 Écoulement transcritique avec choc

Dans cette simulation, nous montrons le comportement d’une approximation de saut hydraulique. Le domaine du calcul est  $[0, 25]$  et la topographie fixée par  $Z(x) = (0, 0.2 - 0.05(x - 10)^2)_+$ . Les données initiales sont données par  $q_0 = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$  et  $h_0 = 0.33 \text{ m}$ . Pour la condition limite à gauche, la hauteur d’eau satisfait une condition de Neumann homogène et le débit est égal à  $q_0 = 0.18 \text{ m}^2/\text{s}$ . De même pour la condition limite à droite, la hauteur d’eau est égale à  $h_0 = 0.33 \text{ m}$  et le débit suit une condition aux limites de Neumann homogène.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma HR	3.54e-04	4.03e-03	4.55e-02	3.54e-04	4.53e-03	5.40e-02
schéma FWB	4.93e-04	5.33e-03	5.95e-02	2.94e-04	3.35e-03	5.39e-02
schéma FWBC	3.25e-04	3.93e-03	4.02e-02	1.85e-04	2.33e-03	2.47e-02

TABLE 2.4 – Erreur d’approximation de la surface libre et du débit pour l’expérience d’un écoulement transcritique avec choc.

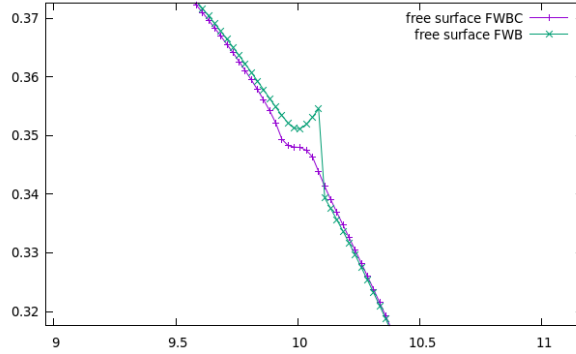


FIGURE 2.10 – Zoom de la perturbation parasite de la hauteur d'eau produite par la quantité mal posée  $\mathcal{P} = g \frac{h_i^n + h_{i+1}^n}{2} - \frac{(q_i^n)^2 + (q_{i+1}^n)^2}{2h_i^n h_{i+1}^n}$  par rapport à la correction apportée.

Les simulations numériques obtenues au temps  $t = 100s$  avec les schémas (FWB), (FWBC) et (HR) sont présentées dans la figure 2.9. De plus, dans la figure 2.10, nous présentons un défaut dans le comportement du schéma (FWB) (voir [46, 47]) au voisinage du nombre de *Froude* égale à 1. La correction apportée dans le schéma (FWBC) permet d'améliorer ce défaut. Ce bon comportement du schéma (FWBC) est mis en évidence dans la table 2.4 présentant l'évaluation des erreurs.

### 2.6.5 Écoulement avec transition sèche/mouillée

D'après [46, 47], nous imposons une vitesse nulle dès que la hauteur d'eau disparaît. De plus, nous imposons  $\frac{u}{h} = 0$  quand la limite de  $h$  tend vers zéro. En conséquence, dans une interface de transition sèche/mouillée, avec  $h_L = 0$  ou  $h_R = 0$ , on obtient

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g\bar{h}(Z_R - Z_L) \quad \text{et} \quad \alpha_{LR} = g\bar{h}, \quad (2.77)$$

de sorte que les propriétés de consistance et de positivité, énoncées au théorème 2.4.1, restent préservées.

#### Rupture de barrage sur fond sec

Cette expérience numérique illustre la capacité du schéma à localiser et traiter correctement la transition sèche/mouillée. Le domaine est  $[0, 10]$  avec une topographie plate. Les données initiales sont constituées d'un débit égale à zéro dans tout le do-

maine tandis que la hauteur d'eau est définie par

$$h(x, 0) = \begin{cases} 0.005 & \text{si } 0 < x < 5, \\ 0 & \text{si } 5 < x < 10. \end{cases}$$

Nous adoptons des conditions aux limites de Neumann homogènes.

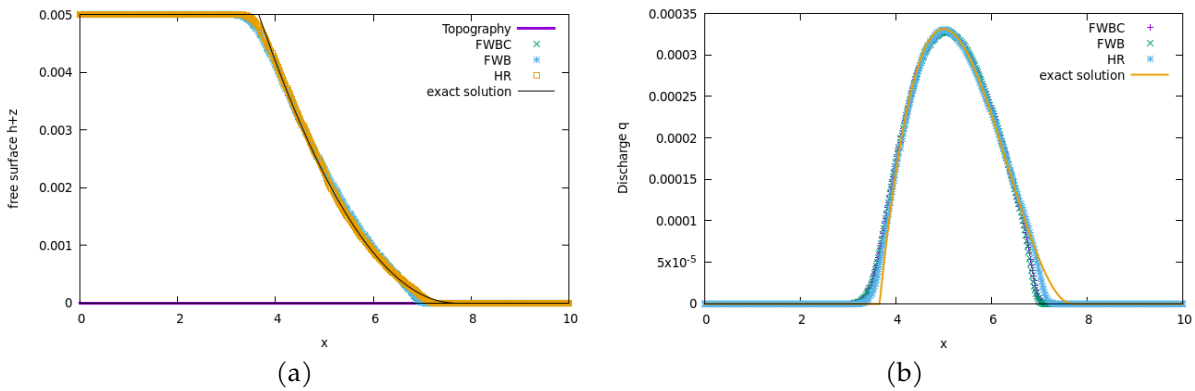


FIGURE 2.11 – Surface libre (2.11a) et débit (2.11b) pour un rupture de barrage sur fond sec.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma HR	7.06e-5	5.20e-5	1.33e-4	1.33e-5	1.15e-5	2.92e-5
schéma FWB	1.50e-4	9.54e-5	1.92e-4	2.62e-5	2.11e-5	4.17e-5
schéma FWBC	1.51e-4	9.54e-5	1.92e-4	2.62e-5	2.11e-5	4.18e-5

TABLE 2.5 – Erreur de la surface libre et du débit pour une rupture de barrage sur fond sec.

Le domaine est ici discrétisé avec 500 cellules et la solution approchée obtenue au temps  $t = 6s$  est affichée Figure 2.11.

### Rupture de barrage sur fond sec en escalier

Cette simulation numérique est destinée à illustrer la pertinence du schéma pour approcher une solution dont la fonction topographique est discontinue. Ici, le domaine

est  $[-10, 10]$  et la topographie est constituée de trois marches définie par :

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0.1 & \text{si } 0 < x < 3, \\ 0.4 & \text{si } 3 < x < 5, \\ 0.7 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Le débit initial est nul dans tout le domaine et la hauteur d'eau initiale est définie par

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

Nous considérons des conditions aux limites de Neumann homogènes.

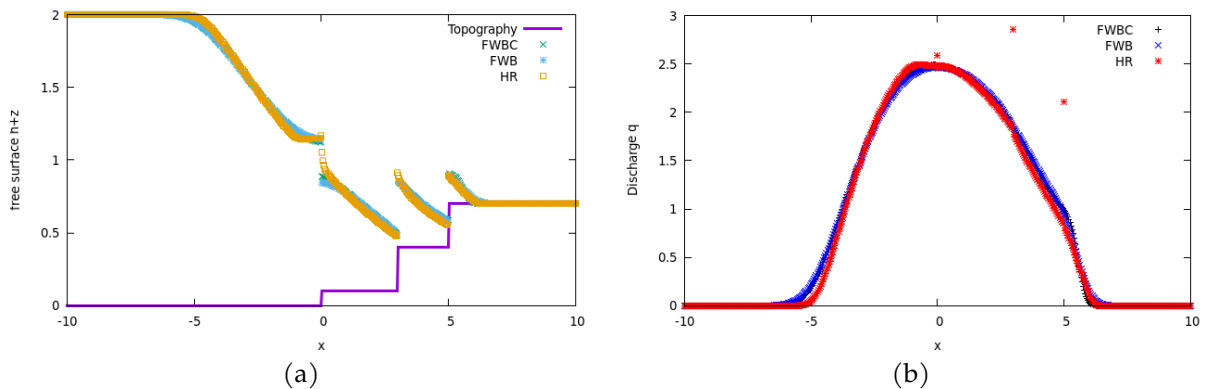


FIGURE 2.12 – Surface libre (2.12a) et débit (2.12b) pour un rupture de barrage sur fond sec en escalier.

La solution approchée de la surface libre et du débit est affichée à la figure 2.12. Nous remarquons les bons comportements du schéma (FWB) et du schéma (FWBC) tandis que le débit du schéma (HR) présente des valeurs parasites situées aux discontinuités de la fonction topographique. Sur la figure 2.13, nous affichons le comportement du pas de temps  $\Delta t$  tout au long de la simulation. On remarque que le schéma (FWBC) ne modifie pas drastiquement le comportement de  $\Delta t$ .



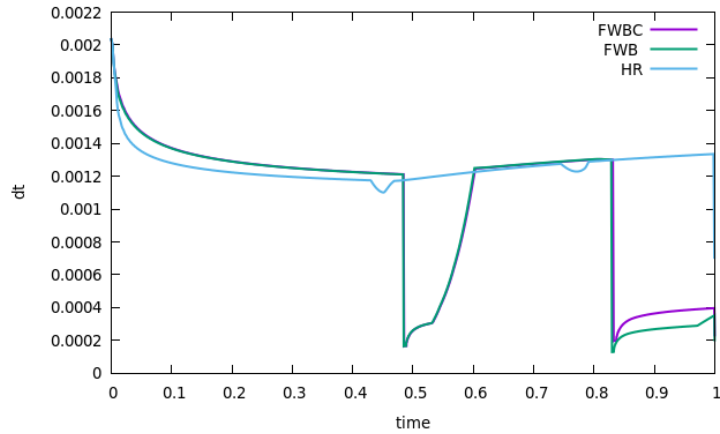


FIGURE 2.13 – Evolution du pas de temps  $\Delta t$  en fonction du temps lors de la simulation du cas test de rupture de barrage sur une marche.

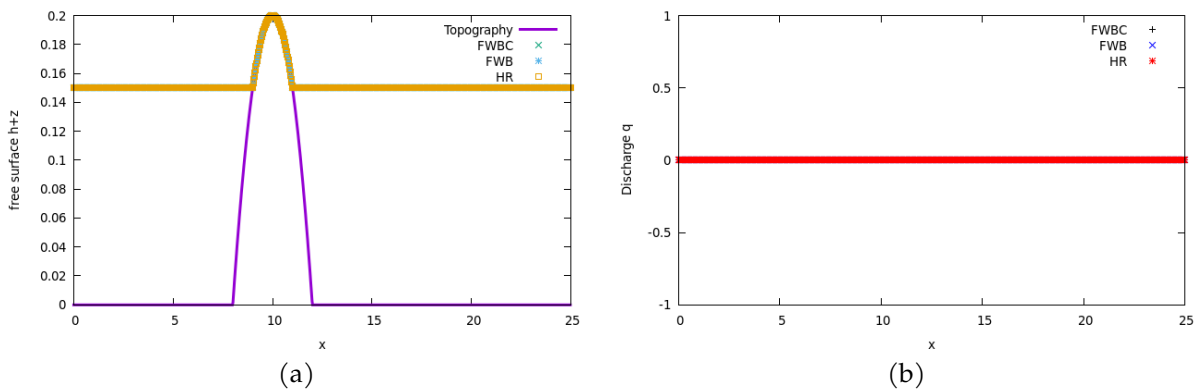


FIGURE 2.14 – Surface libre (2.14a) et débit (2.14b) pour la simulation d'un lac au repos avec un fond émergé.

### Lac au repos avec un fond émergé

Dans le domaine de calcul  $[0, 25]$ , le fond est défini par  $Z(x) = (0, 0.2 - 0.05(x-10)^2)_+$ . Pour la hauteur d'eau initiale, nous adoptons  $h(x, t = 0) = (0.15 - Z(x))_+$  pour que cette simulation contienne un fond émergé. Concernant le débit initial, nous imposons une vitesse nulle dans tout le domaine. Nous considérons les conditions aux limites homogènes de Neumann.

	$h + z$			$q$		
	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$
schéma HR	2.78e-19	2.78e-18	2.78e-17	2.60e-17	2.89e-17	4.58e-17
schéma FWB	3.11e-17	5.01e-17	8.33e-17	2.72e-17	3.69e-17	1.02e-16
schéma FWBC	2.11e-19	2.81e-18	3.33e-18	2.75e-19	3.01e-18	3.82e-18

TABLE 2.6 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour un lac au repos avec un fond émergé.

Dans la figure 2.14, nous affichons la solution approchée avec 500 mailles au temps  $t = 100s$ . Selon les erreurs présentées dans le tableau 2.6, la solution est exactement capturée.

### Cas de test Thacker

Le domaine de calcul est  $[0, L]$  et la topographie est définie par

$$Z(x) = h_0 \left( \frac{1}{a^2} \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 - 1 \right),$$

où  $h_0$ ,  $a$  et  $L$  sont des paramètres à fixer. La solution exacte est une oscillation de la surface libre entre les points

$$x_1(t) = -\frac{b}{w} \cos(wt) - a + \frac{L}{2} \quad \text{et} \quad x_2(t) = -\frac{b}{w} \cos(wt) + a + \frac{L}{2},$$

où  $w = \sqrt{2gh_0}/a$ ,  $b = w/2$  et la période  $T = 2\pi/w$ . Les conditions initiales sont données par  $q(x, 0) = 0$  et

$$h(x, 0) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left( \left( x - \frac{L}{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{2gh_0}} \right)^2 - a^2 & \text{si } x_1(0) < x < x_2(0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La hauteur d'eau exacte est donnée par

$$h(x, t) = \begin{cases} -\frac{h_0}{a^2} \left( \left( x - \frac{L}{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{2gh_0}} \cos(wt) \right)^2 - a^2 & \text{si } x_1(t) < x < x_2(t), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

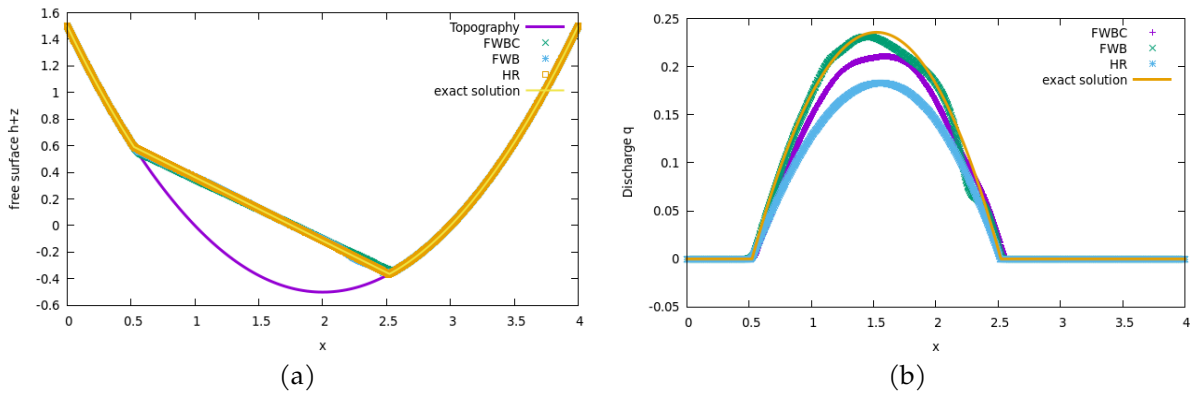


FIGURE 2.15 – Surface libre exacte et approchée (2.15a) et débit exacte et approché (2.15b) pour le cas de test Thacker.

tandis que la vitesse exacte est

$$u(x, t) = \begin{cases} b \sin(\omega t) & \text{si } x_1(t) < x < x_2(t), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Concernant les paramètres, on fixe  $a = 1$ ,  $L = 4m$  et  $h_0 = 1/2$ . Sur la figure 2.14, la solution approchée est affichée au temps  $t = 100s$  avec 1000 mailles.

schéma FWBC			
$q$			
cells	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
1600	3.74e-2	2.76e-2	2.64e-2
2000	2.66e-2	1.97e-2	1.94e-2
4000	1.15e-2	8.56e-3	9.51e-3

TABLE 2.7 – Erreurs de débit pour le cas de test Thacker pour différentes tailles de mailles en utilisant le schéma FWBC.

schéma FWB			
$q$			
cells	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
1600	1.24e-2	1.31e-2	3.30e-2
2000	1.10e-2	1.16e-2	2.99e-2
4000	7.98e-3	7.88e-3	2.19e-2

TABLE 2.8 – Erreurs de débit pour le cas de test Thacker pour différentes tailles de mailles utilisant le schéma FWB.

cells	schéma HR		
	$q$		
	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$
1600	7.29e-2	5.59e-2	5.36e-2
2000	5.83e-2	4.47e-2	4.48e-2
4000	2.91e-2	2.23e-2	2.13e-2

TABLE 2.9 – Erreurs de débit pour le cas de test Thacker pour différentes tailles de mailles utilisant le schéma HR.

Concernant la hauteur d'eau représentée sur la figure 2.15a, nous obtenons une bonne approximation de la transition sèche/mouillée. Cependant, l'approximation du débit n'est pas aussi bonne que prévue, tout comme la reconstruction hydrostatique. Dans les tableaux 2.7, 2.8 et 2.9 nous présentons les erreurs obtenues pour  $q$ . Nous remarquons que le schéma (FWBC) donne une meilleure approximation que le schéma de reconstruction hydrostatique.

### 2.6.6 Défaut d'entropie

Dans cette expérience numérique, nous proposons d'illustrer le comportement numérique du schéma (FWBC) pour une donnée initiale vérifiant la condition de stationnarité (2.15) en présence d'une perturbation sur la topographie. Cette donnée initiale a été exposée dans la section 2.5 où il est montré que le schéma peut capturer une solution stationnaire non entropique. Pour cela, nous considérons le domaine  $[0, 10]$  avec une topographie constante. Nous introduisons une perturbation de la topographie  $Z^\delta = 0.01$  localisée sur la maille contenant la position  $x = 5$ . La hauteur d'eau et le débit initial sont alors définis comme suit

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 5, \\ 0.25187664747525237484 & \text{si } x = 5, \\ 0.25 & \text{si } 5 < x < 10, \end{cases} \quad \text{et } q(x, 0) = 1 \text{ pour } x \in [0, 10]. \quad (2.78)$$

En conséquence nous remarquons que  $\mathcal{B}(W, Z) = 10.5$  en tout  $x \in [0, 10]$ , de sorte que la condition de stationnarité locale (2.15) est toujours vérifiée.

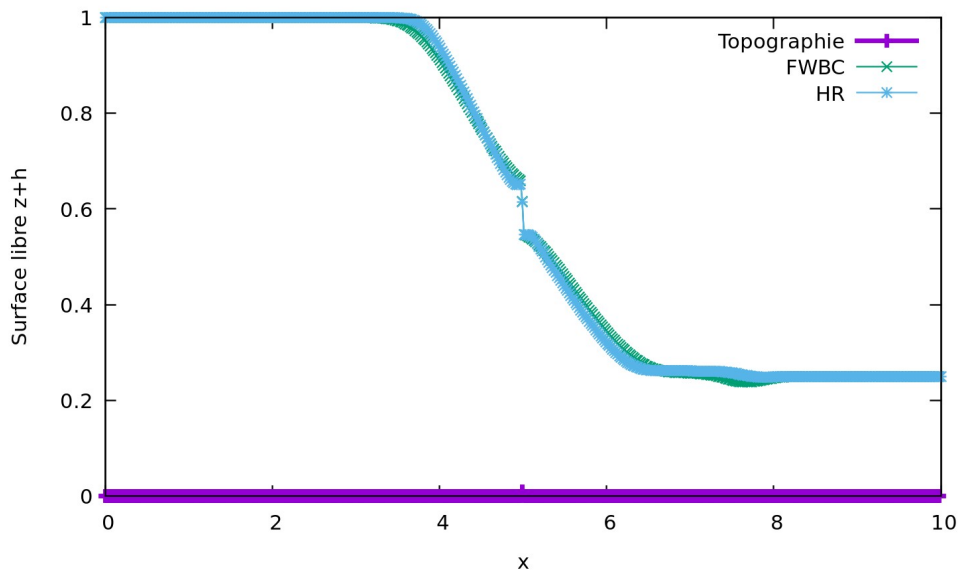


FIGURE 2.16 – Approximation de la surface libre d’une solution discontinue stationnaire.

La solution obtenue est présentée dans la figure 2.16. On remarque que cette solution approchée n’est pas stationnaire mais coïncide relativement bien avec la solution obtenue par le schéma de reconstruction hydrostatique (HR). À ce niveau, nous supposons que cette approximation stationnaire n’est pas stable pour le schéma (FWBC). En effet, nous montrons dans la figure 2.17 le comportement de la solution au cours des premières itérations. Les erreurs initiales de l’ordre  $10^{-16}$  augmentent rapidement et déstationnarisent la solution. Si bien qu’après une trentaine d’itérations, l’approximation se retrouve loin de la solution stationnaire non entropique et le schéma approche la solution instationnaire attendue. Nous remarquons que le schéma ici développé (FWBC) et la reconstruction hydrostatique (HR) présentent ce qui semble être un choc non entropique de petite amplitude à l’intérieur de la détente .

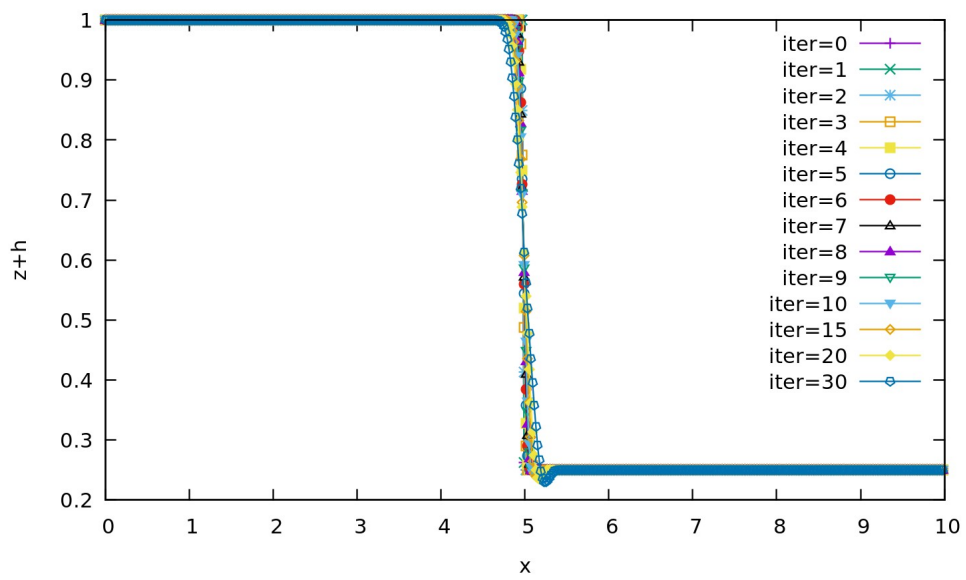


FIGURE 2.17 – Premières itérations pour une donnée stationnaire non entropique.



# APPROXIMATION QUADRATIQUE DES RELATIONS DE BERNOULLI POUR UN SCHÉMA DE TYPE GODUNOV

---

Dans ce chapitre, nous allons proposer une extension des schémas de type Godunov capturant tous les états stationnaires à vitesse non nulle afin de corriger le défaut constaté sur des solutions discontinues stationnaires non entropiques. En effet, le schéma développé dans le chapitre 2 repose sur une linéarisation de la relation de Bernoulli (2.15). Cette linéarisation, qui nous le rappelons, est donnée de la façon suivante :

$$\left( -\frac{\bar{q}^2}{h_L h_R} + \frac{g}{2}(h_L + h_R) \right) (h_R^* - h_L^*) = \Delta x \bar{S}_{LR}^q, \quad (3.1)$$

est en fait mal posée dès que

$$-\frac{\bar{q}^2}{h_L h_R} + \frac{g}{2}(h_L + h_R) = 0. \quad (3.2)$$

À ce niveau, nous supposons que la capture des chocs stationnaires non entropiques est une conséquence directe du caractère mal posé de la relation linéaire (3.1). De plus, la discrétisation du terme source  $\bar{S}_{LR}^q$  donnée par (2.19) est également mal posée pour  $\bar{F}_r = 1$ , où  $\bar{F}_r$  est une approximation du nombre de *Froude* donnée par (2.18). Il est clair qu'à travers les relations (2.26) pour la discrétisation du terme source et (2.43) pour la linéarisation de la relation de Bernoulli, nous avons proposé des corrections afin d'assurer que tous les paramètres du schéma soient bien posés. Ces corrections semblent insuffisantes pour éviter la capture de solutions non entropiques telles que celles présentées dans la section 2.5.

Dans ce chapitre, nous allons proposer une nouvelle "linéarisation" des relations



de Bernoulli. En choisissant une approximation quadratique et non plus linéaire, nous allons obtenir un schéma de type Godunov qui préserve tous les états d'équilibres à l'exclusion d'un petit voisinage autour du nombre de Froude égale à 1. Nous verrons que ce voisinage est totalement déterminé et bien contrôlé. Le schéma qui résultera de cette nouvelle linéarisation de la relation de Bernoulli sera toujours bien défini et ne présentera plus les défauts du schéma présenté dans le chapitre précédent.

### 3.1 Motivation d'une nouvelle linéarisation

Fort des constatations faites concernant la linéarisation (3.1) et son caractère éventuellement mal posé, à présent notre objectif est de comprendre comment linéariser la relation de Bernoulli. Dans ce sens, avant d'envisager toute linéarisation, la détermination des hauteurs d'eau intermédiaires  $h_L^*$  et  $h_R^*$  devrait être donnée comme solution du système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_R h_R^* - \lambda_L h_L^* = (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}, \\ \mathcal{B}(W_L^*, Z_L) = \mathcal{B}(W_R^*, Z_R), \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\mathcal{B}$  est donnée par (1.6) et  $h^{HLL}$  définie par (2.33). À ce niveau, afin de simplifier notre propos, nous allons supposer  $\lambda_R = \lambda = -\lambda_L$ . Il en résulte que le système (3.3) se reformule comme suit :

$$\begin{cases} h_R^* + h_L^* = 2h^{HLL}, \\ (h_R^* - h_L^*) \left( 1 - \frac{\bar{q}^2 (h_R^* + h_L^*) / 2}{gh_L^{*2} h_R^{*2}} \right) = -\Delta Z, \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\bar{q}^2$  est définie par (2.27). De la première équation du système (3.4), on peut écrire  $h_L^*$  en fonction de  $h_R^*$  pour ainsi obtenir

$$h_L^* = 2h^{HLL} - h_R^*. \quad (3.5)$$

En introduisant (3.5) dans la deuxième relation de (3.4), on en déduit que  $h_R^*$  est une des zéro de la fonction non linéaire donnée par

$$f(y) = (2y - 2h^{HLL}) \left( 1 - \frac{\bar{q}^2 h^{HLL}}{gy^2 (2h^{HLL} - y)^2} \right) + \Delta Z. \quad (3.6)$$

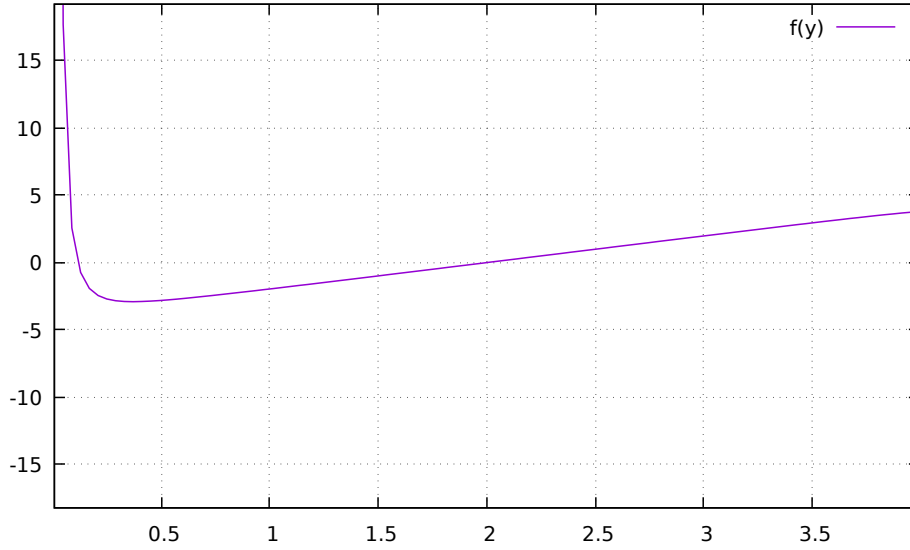


FIGURE 3.1 – Comportement de la fonction  $f(y)$  pour les données suivantes :  $g = 10$ ,  $Z_L = 1.5$ ,  $Z_R = 2$ ,  $h_L = 2$ ,  $h_R = 2.5$ ,  $q_L = 1$  et  $q_R = 1$ .

Pour  $y > 0$ , nous observons que la fonction  $f$  admet deux racines positives (voir la figure 3.1) de façon assez similaire à une parabole. Afin de mimer ce comportement de  $f$ , nous allons proposer une approximation quadratique en substituant la seconde relation de (3.4) par

$$(h_R^* - h_L^*) \left( 1 - \bar{F}_r^2 + a(h_L^* - h_L) - a(h_R^* - h_R) \right) = -\Delta Z, \quad (3.7)$$

où  $\bar{F}_r^2$  est définie par (2.18). La quantité  $-\bar{F}_r^2 + a(h_L^* - h_L) - a(h_R^* - h_R)$  est formellement obtenue en linéarisant  $-\frac{\bar{q}^2(h_R^* + h_L^*)/2}{gh_R^{*2}h_R^{*2}}$  pour  $(h_L^*, h_R^*)$  dans un voisinage de  $(h_L, h_R)$ . En toute rigueur, nous devrions considérer la quantité  $-\bar{F}_r^2 + a(h_L^* - h_L) - b(h_R^* - h_R)$ . Cependant le choix de deux quantités distinctes  $a$  et  $b$  conduit à des calculs lourds et qui ne présentent pas de gain numérique. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour une linéarisation de la forme (3.7) où les coefficients gouvernant les quantités du premier ordre  $h_L^* - h_L$  et  $h_R^* - h_R$  ont été pris égaux. En conséquence les hauteurs d'eau intermédiaires  $h_L^*$  et  $h_R^*$  seront choisies comme solutions du système

$$\begin{cases} h_R^* + h_L^* = 2h^{HLL}, \\ (h_R^* - h_L^*) \left( 1 - \bar{F}_r^2 + a(h_L^* - h_L) - a(h_R^* - h_R) \right) = -\Delta Z. \end{cases} \quad (3.8)$$

Bien entendu, avec ce choix d'une approximation par une fonction quadratique, le système (3.8) admet naturellement deux solutions. De plus, nous constatons que pour  $\Delta Z = 0$

$$h_L^* = h_R^* = h^{HLL}, \quad (3.9)$$

est une solution naturelle. En conséquence, nous choisirons les solutions de (3.8) qui coïncident avec (3.9) dans la limite de  $\Delta Z$  qui tend vers 0.

À présent concernant la résolution du système (3.8), il admet deux solutions données par

$$h_L^\pm = h^{HLL} - \delta^\pm \quad \text{et} \quad h_R^\pm = h^{HLL} + \delta^\pm, \quad (3.10)$$

avec

$$\delta^\pm = \left( \frac{h_R - h_L}{4} + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{4a} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{h_R - h_L}{4} + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{4a} \right)^2 + \frac{\Delta Z}{4a}}. \quad (3.11)$$

Afin d'assurer  $\delta^\pm$  réel, nous suggérons de fixer

$$a = \begin{cases} \beta \operatorname{sgn}(\Delta Z) & \text{si } \Delta Z \neq 0, \\ \beta & \text{si } \Delta Z = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $\beta > 0$ . Comme souligné précédemment, parmi ces deux solutions, nous devons choisir celle qui coïncide avec  $h^{HLL}$  lorsque  $\Delta Z = 0$ . Dès que  $\Delta Z = 0$ , nous avons

$$\delta^\pm = \left( \frac{h_R - h_L}{4} + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{4a} \right) \pm \left| \frac{h_R - h_L}{4} + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{4a} \right|.$$

En conséquence nous observons que

$$\begin{cases} \delta^- = 0 & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq 0, \\ \delta^+ = 0 & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous introduisons alors

$$\delta = \begin{cases} \delta^- & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq 0, \\ \delta^+ & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

de sorte que  $\delta = 0$  dès que  $\Delta Z = 0$ . On en déduit alors

$$h_L^* = h^{HLL} - \delta \quad \text{et} \quad h_R^* = h^{HLL} + \delta, \quad (3.15)$$

qui est bien solution du système quadratique (3.8) et qui vérifie (3.9) lorsque  $\Delta Z = 0$ . Il en résulte que  $h_L^*$  et  $h_R^*$  sont des hauteurs d'eau perturbées au voisinage de  $h^{HLL}$  où la perturbation est en  $\delta = \mathcal{O}(\Delta Z)$ .

On remarque que le choix de cette formulation quadratique permet d'exhiber des hauteurs d'eau intermédiaires qui sont toujours bien définies. Fort de cette constatation, nous allons à présent proposer une extension du solveur de Riemann approché pour tous  $\lambda_L < \lambda_R$  que nous complétons par une définition adéquate du terme source discret.

## 3.2 Développement du solveur de Riemann

Équipée de la nouvelle linéarisation (3.7) des relations de Bernoulli, nous allons à présent procéder à la dérivation du nouveau solveur de Riemann approché. Ce solveur reste sous la forme (2.28) et nécessite donc la détermination de deux états intermédiaires  $W_L^*$  et  $W_R^*$ .

### 3.2.1 Les états intermédiaires

Afin d'évaluer les états intermédiaires  $W_L^*$  et  $W_R^*$ , nous allons adopter la condition de consistance intégrale approchée (2.7). Ces relations doivent être complétées par deux égalités. Nous suggérons encore une fois d'imposer la continuité du débit à la traversée de l'onde stationnaire de sorte que  $q_L^* = q_R^* = q^*$ . En conséquence, nous en déduisons immédiatement la définition du débit intermédiaire donnée par

$$q^* = q^{HLL} + \frac{\Delta x \bar{S}_{LR}^q}{(\lambda_R - \lambda_L)}, \quad (3.16)$$

où  $\bar{S}_{LR}^q$  est une discrétisation du terme source qui sera formulée ultérieurement. Concernant les hauteurs d'eau intermédiaires  $h_L^*$  et  $h_R^*$ , en complément de la condition de consistance intégrale (2.7) et en accord avec le principe énoncé dans la section 3.1, nous

adoptons le système quadratique suivant :

$$\begin{cases} -\lambda_L h_L^* + \lambda_R h_R^* = (\lambda_R - \lambda_L) h^{HLL}, \\ (h_R^* - h_L^*) \left(1 - \bar{F}_r^2 + a(h_L^* - h_L) - a(h_R^* - h_R)\right) = -\Delta Z. \end{cases} \quad (3.17)$$

Nous remarquons qu'il s'agit ici d'une extension du système (3.8), pour des vitesses d'ondes  $\lambda_L$  et  $\lambda_R$  non symétriques. Encore une fois, ces vitesses vérifient la condition (2.29) qui impose que le cône de dépendance exact est entièrement inclus dans le cône de dépendance de la solution approchée de Riemann.

Comme précisé dans la section 3.1, le système (3.17) admet deux solutions définies par

$$\begin{cases} h_L^\pm = h^{HLL} + \lambda_R \delta^\pm, \\ h_R^\pm = h^{HLL} + \lambda_L \delta^\pm, \end{cases} \quad (3.18)$$

avec le terme  $\delta^\pm$  donné par

$$\delta^\pm = -\frac{\theta_{LR}}{2a} \left(1 - \bar{F}_r^2 + a(h_R - h_L)\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\theta_{LR}}{2a} \left(1 - \bar{F}_r^2 + a(h_R - h_L)\right)\right)^2 + \frac{\theta_{LR}^2}{a} \Delta Z}, \quad (3.19)$$

où  $\theta_{LR} = \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L}$ . Il suffit alors de fixer

$$a = \begin{cases} \beta \operatorname{sgn}(\Delta Z) & \text{si } \Delta Z \neq 0, \\ \beta & \text{si } \Delta Z = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

avec  $\beta > 0$  pour obtenir la solution suivante :

$$h_L^* = h^{HLL} + \lambda_R \delta \quad \text{et} \quad h_R^* = h^{HLL} + \lambda_L \delta, \quad (3.21)$$

où

$$\delta = \begin{cases} \delta^- & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq 0, \\ \delta^+ & \text{si } h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous remarquons que si  $\Delta Z = 0$  alors  $\delta = 0$  et par conséquent  $h_L^* = h_R^* = h^{HLL}$ .

Pour garantir la positivité des hauteurs intermédiaires, nous allons recourir à la même technique introduite dans [8] (voir (2.47)-(2.48) ou encore [9, 46, 47]). Par conséquent,

nous proposons

$$h_L^* = \min \left( \max \left( h^{HLL} + \lambda_R \delta, \sigma \right), \left( 1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \sigma \right), \quad (3.23)$$

$$h_R^* = \min \left( \max \left( h^{HLL} + \lambda_L \delta, \sigma \right), \left( 1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h^{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \sigma \right), \quad (3.24)$$

où  $\sigma = \min(h_L, h_R, h^{HLL})$ . Il en résulte immédiatement  $h_L^* > 0$  et  $h_R^* > 0$ . La définition des hauteurs d'eau intermédiaires ainsi complétée est bien définie pour tous  $W_L$  et  $W_R$  appartenant à  $\Omega$ .

### 3.2.2 Discrétisation du terme source

Cette section est consacrée à la dérivation d'une discrétisation consistante du terme source  $\bar{S}_{LR} = (0, \bar{S}_{LR}^q)$ . Il convient de noter que la définition de la discrétisation du terme source est cruciale pour que le schéma puisse capturer exactement des états stationnaires mouvant relativement à (2.15). La discrétisation que nous allons proposer repose sur le lemme suivant (voir [8]).

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifiant la condition d'équilibre locale (2.15). L'identité (2.17) se réécrit comme suit :*

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g \frac{h_L h_R}{\bar{h}} (Z_R - Z_L) + \frac{g}{4\bar{h}} (h_R - h_L)^3, \quad (3.25)$$

avec  $\bar{h} = \frac{h_L + h_R}{2}$ .

*Démonstration.* On rappelle que si  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifie la condition stationnaire (2.15), alors la relation de consistance intégrale (2.7) se réécrit

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = (h_R u_R^2 + g \frac{h_R^2}{2}) - (h_L u_L^2 + g \frac{h_L^2}{2}). \quad (3.26)$$

On peut reformuler cette égalité sous la forme suivante :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = \frac{(h_R u_R)^2}{h_R} - \frac{(h_L u_L)^2}{h_L} + \frac{g}{2} (h_R + h_L) (h_R - h_L).$$

Avec  $q = h_L u_L = h_R u_R$ , on a alors

$$\begin{aligned}\Delta x \bar{S}_{LR}^q &= q^2 \left( \frac{1}{h_R} - \frac{1}{h_L} \right) + \frac{g}{2} (h_R + h_L) (h_R - h_L), \\ &= -\frac{q^2}{h_L h_R} (h_R - h_L) + \frac{g}{2} (h_R + h_L) (h_R - h_L), \\ &= \frac{g}{2} (h_R^2 - h_L^2) - \frac{q^2 (h_R^2 - h_L^2)}{h_L h_R (h_L + h_R)}.\end{aligned}$$

De plus, sous la condition d'équilibre (2.15), nous avons  $\mathcal{B}(W_L, Z_L) = \mathcal{B}(W_R, Z_R)$  avec  $\mathcal{B}(W, Z)$  donnée par (1.6). Il en résulte

$$\frac{q^2 (h_R^2 - h_L^2)}{h_L h_R} = 2g h_L h_R (Z_R - Z_L + h_R - h_L),$$

pour en déduire

$$\begin{aligned}\Delta x \bar{S}_{LR}^q &= \frac{g}{2} (h_R^2 - h_L^2) - 2g \frac{h_L h_R}{h_L + h_R} (Z_R - Z_L + h_R - h_L), \\ &= -2g \frac{h_L h_R}{h_L + h_R} (Z_R - Z_L) + \frac{g}{2} (h_R^2 - h_L^2) - 2g \frac{h_L h_R}{h_L + h_R} (h_R - h_L).\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g \frac{h_L h_R}{h} (Z_R - Z_L) + \frac{g}{4h} (h_R - h_L)^3.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Équipé de (3.25), lorsque la relation d'équilibre local (2.15) est satisfaite, le terme cubique peut être ré-exprimé à l'aide des perturbations  $\delta^\pm$  données par (3.19). En effet, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 3.2.4.** *Soit  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  vérifiant la condition de stationnarité locale (2.15). L'égalité (3.25) se réécrit sous la forme suivante :*

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g \frac{h_L h_R}{h} (Z_R - Z_L) - \frac{g \tilde{\delta}^3}{4h\theta^3}, \quad (3.27)$$

où  $\tilde{\delta}$  est définie par

$$\tilde{\delta} = \begin{cases} \delta^+ & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \geq 0, \\ \delta^- & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \leq 0, \end{cases} \quad (3.28)$$

avec  $\delta^\pm$  données par (3.19) et  $\theta = \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L}$ .

Dès à présent, il est essentiel de souligner que  $\tilde{\delta}$  est une perturbation contrôlée par  $\delta^\pm$  mais qui se différencie de  $\delta$  par la condition de signe. Cette différenciation entre  $\delta$  et  $\tilde{\delta}$  sera essentielle dans le contrôle des solutions stationnaires au voisinage de Froude égale à un. De plus, nous remarquons que (3.27) impose immédiatement la consistance de  $\bar{S}_{LR}^q$  avec  $-gh\partial_x Z$ . En effet, pour une fonction de topographie assez régulière et en fixant  $Z_L = Z(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $Z_R = Z(x + \frac{\Delta x}{2})$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ h_R - h_L \rightarrow 0}} \tilde{\delta} &= \begin{cases} \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ h_R - h_L \rightarrow 0}} \delta^+ & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq 0, \\ \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ h_R - h_L \rightarrow 0}} \delta^- & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq 0, \end{cases} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ h_R - h_L \rightarrow 0}} \delta, \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

pour en déduire la consistance attendue de  $\bar{S}_{LR}^q$  avec  $-gh\partial_x Z$ .

À présent, établissons le lemme 3.2.4.

*Démonstration.* Lorsque  $W_L$  et  $W_R$  vérifient l'équilibre stationnaire local (2.15), la relation (2.21) est également satisfaite et nous assure que  $(h_R - h_L)(1 - \bar{F}_r^2) = -\Delta Z$  et par conséquent  $\delta^\pm$  définie par (3.19) vérifie

$$\delta^\pm = -\frac{\theta_{LR}}{2a} (1 - \bar{F}_r^2 + a(h_R - h_L)) \pm \sqrt{\left(\frac{\theta_{LR}}{2a} (1 - \bar{F}_r^2 - a(h_R - h_L))\right)^2}.$$

Ainsi, on obtient

$$h_R - h_L = \begin{cases} -\frac{\delta^+}{\theta_{LR}} & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \geq 0, \\ -\frac{\delta^-}{\theta_{LR}} & \text{si } \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \leq 0. \end{cases} \quad (3.30)$$



En remplaçant cette expression en  $(h_R - h_L)$  dans (3.25), on retrouve la relation (3.27) ce qui complète la preuve.  $\square$

Pour conclure cette section, nous établissons la stationnarité du solveur de Riemann approché hors des zones de transition  $\bar{F}_r^2 = 1$ .

**Lemme 3.2.5.** *Soit  $W_L$  et  $W_R$  appartenant à  $\Omega$ . Considérons le solveur de Riemann approché sous la forme (2.28) où les états intermédiaires sont donnés par (3.16), (3.23) et (3.24) complétés par la discrétisation du terme source  $\bar{S}_{LR}^q$  donnée par (3.27). Si  $(W_L, W_R, Z_L, Z_R)$  satisfait la condition locale d'état à l'équilibre (2.15) et vérifie*

$$\frac{|1 - \bar{F}_r^2|}{a} \geq |h_R - h_L|, \quad (3.31)$$

alors le solveur de Riemann approché reste au repos, c'est à dire

$$\bar{W}_R \left( \frac{x}{\Delta t}; W_L, W_R, Z_L, Z_R \right) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Notons dès à présent que la condition (3.31) ne permet pas de capturer les états stationnaires qui vérifient

$$\frac{|1 - \bar{F}_r^2|}{a} < |h_R - h_L|. \quad (3.33)$$

Il en résulte que, pour des solutions régulières telles que  $h_L = h(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $h_R = h(x + \frac{\Delta x}{2})$ , le solveur que nous proposons ne permet pas la capture des solutions stationnaires dans un voisinage de  $\bar{F}_r^2 = 1$ . De plus, le schéma ne pourra pas capturer des solutions discontinues avec un changement de régime de  $\bar{F}_r^2 < 1$  à  $\bar{F}_r^2 > 1$ . Formellement, cette exclusion permet de corriger le défaut d'entropie souligné dans le chapitre précédent puisque les chocs stationnaires non entropiques, présentés dans la section 2.5, ne pourront plus être capturés. Il en résulte que la méthode préserve toutes les solutions stationnaires sans transition de régime. Toutefois, nous verrons à travers les simulations numériques que les zones de changement de régime pour des solutions stationnaires resteront capturées avec une précision de l'ordre de l'erreur machine à  $10^{-16}$  près.

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous remarquons que l'équilibre stationnaire local (2.15) nous permet d'appliquer les lemmes 3.2.3 et 3.2.4. Il en résulte que le terme source de topographie  $\bar{S}_{LR}^q$  vérifie la relation (2.17).

À présent, concernant le débit intermédiaire  $q^*$ , défini par (3.16), la relation (2.17) nous assure l'égalité  $q^* = q_L = q_R$ .

Il reste à montrer que la hauteur d'eau est stationnaire. Pour cela nous devons montrer que  $h_L^* = h_L$  et  $h_R^* = h_R$ . À l'équilibre, puisque l'égalité (2.21) est vérifiée, alors  $(h_R - h_L)(1 - \bar{F}_r^2) = -\Delta Z$ . En conséquence, l'égalité (3.30) nous permet d'écrire

$$\delta^+ = -(h_R - h_L)\theta_{LR} \quad \text{si} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \geq 0, \quad (3.34)$$

et

$$\delta^- = -(h_R - h_L)\theta_{LR} \quad \text{si} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \leq 0. \quad (3.35)$$

Il en résulte que la perturbation  $\delta$  définie par (3.22) devient

$$\delta = \begin{cases} -(h_R - h_L)\theta_{LR} & \text{si} \quad h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \geq 0, \\ -(h_R - h_L)\theta_{LR} & \text{si} \quad h_R - h_L + \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \leq 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Avec  $h_L^*$  et  $h_R^*$  donnés par (3.21), nous avons  $h_R^* = h_R$  et  $h_L^* = h_L$  si

$$\frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} + (h_R - h_L) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \leq 0,$$

ou si

$$\frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} + (h_R - h_L) \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} - (h_R - h_L) \geq 0.$$

Le solveur de Riemann approché est donc stationnaire sous la contrainte

$$\frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \geq |h_R - h_L| \quad \text{ou} \quad \frac{1 - \bar{F}_r^2}{a} \leq -|h_R - h_L|.$$

La démonstration est alors complète. □

### 3.3 Propriétés du schéma numérique

Dans cette section, nous allons présenter des propriétés du schéma (2.13) où le solveur de Riemann est constitué des états intermédiaires donnés par (3.16), (3.23), (3.24) et de la discrétisation du terme source (3.27).

**Théorème 3.3.1.** *Supposons la restriction de type CFL suivante :*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda_{i+1/2}^L|, |\lambda_{i+1/2}^R|) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.37)$$

Le schéma (2.13)-(3.16)-(3.23)-(3.24)-(3.27) est consistant avec le système (1.1). Soit  $W_i^n$  appartenant à  $\Omega$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ . L'état mis à jour  $W_i^{n+1}$  donné par le schéma (2.13)-(3.16)-(3.23)-(3.24)-(3.27), satisfait les propriétés suivantes :

1. Préservation de la positivité :  $h_i^{n+1} \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,
2. Préservation des états d'équilibres :  $W_i^{n+1} = W_i^n$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  tant que  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie

$$q_i^n = Q \quad \text{et} \quad \frac{(q_i^n)^2}{2(h_i^n)^2} + g(h_i^n + Z_i) = B \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad (3.38)$$

pour des constantes  $Q, B$  données et

$$\frac{|1 - \bar{F}_{r_{i+1/2}}^2|}{a} \geq |h_{i+1} - h_i|, \quad (3.39)$$

où  $\bar{F}_{r_{i+1/2}}^2 = \frac{(q_{i+1}^2 + q_i^2)(h_{i+1} + h_i)}{4gh_i^2 h_{i+1}^2}$ ,  $a = \beta \operatorname{sgn}(Z_{i+1} - Z_i)$  et avec  $\beta$  une constante positive.

3. Une inégalité d'entropie incomplète sous la forme :

$$\frac{\eta_i^{n+1} - \eta_i^n}{\Delta t} + \frac{G_{i+1/2} - G_{i-1/2}}{\Delta x} \leq -\bar{S}_i^\eta + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (3.40)$$

est satisfaite tant que

$$h_{i+1/2}^{HLL} + \lambda_{i+1/2}^L \delta > 0 \quad \text{et} \quad h_{i+1/2}^{HLL} + \lambda_{i+1/2}^R \delta > 0, \quad (3.41)$$

où on a posé

$$G_{i+1/2} = \frac{1}{2}(G(W_{i+1}^n) + G(W_i^n)) + \frac{\Delta x}{4\Delta t}(\eta(W_{i+1}^n) - \eta(W_i^n)) + \frac{\Delta x}{2\Delta t}(I_{i+1/2}^{\eta^+} - I_{i-1/2}^{\eta^-}), \quad (3.42)$$

avec

$$I_{i+1/2}^{\eta^+} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \eta \left( \tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) \right) dx, \quad (3.43)$$

$$I_{i+1/2}^{\eta^-} = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \eta \left( \tilde{W}_{\mathcal{R}} \left( \frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1} \right) \right) dx, \quad (3.44)$$

et

$$\bar{S}_i^\eta = \frac{1}{2} \left( \frac{2h_{i-1}^n h_i^n}{h_{i-1}^n + h_i^n} \frac{q_{i-1/2}^{HLL}}{h_{i-1/2}^{HLL}} \left( \frac{Z_i - Z_{i-1}}{\Delta x} \right) + \frac{2h_i^n h_{i+1}^n}{h_i^n + h_{i+1}^n} \frac{q_{i+1/2}^{HLL}}{h_{i+1/2}^{HLL}} \left( \frac{Z_{i+1} - Z_i}{\Delta x} \right) \right). \quad (3.45)$$

*Démonstration.* Nous allons d'abord montrer la consistance du schéma (2.13)-(3.16)-(3.23)-(3.24)-(3.27). Dans cet objectif, nous montrons la consistance du flux numérique (2.14) relativement au nouveau solveur de Riemann approché ainsi que la consistance du terme source.

Concernant le terme source, donné par (3.27), avec une fonction de topographie régulière, on fixe  $Z_L = Z(x - \frac{\Delta x}{2})$  et  $Z_R = Z(x + \frac{\Delta x}{2})$ . Ainsi dès que  $W_L = W_R = W$ , puisque  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \delta = 0$ , avec  $\delta$  donnée par (3.22), on obtient immédiatement

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{S}_{LR}^q(W, W, Z_L, Z_R) = -gh\partial_x Z.$$

D'après la définition du flux numérique, avec la condition  $W_L = W_R = W \in \Omega$ , nous avons directement

$$F_\Delta(W, W, Z_L, Z_R) = F(W) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} (I_{LR}^+ - I_{LR}^-)|_{W_R=W_L=W},$$

où  $I_{LR}^+$  et  $I_{LR}^-$  sont définis par (2.9) et (2.8). Puisque le solveur de Riemann, défini par (2.28), est composé de deux états intermédiaires, l'égalité suivante est obtenue :

$$F_\Delta(W, W, Z_L, Z_R) = F(W) + \frac{\lambda_R}{2} (W_R^* - W) + \frac{\lambda_L}{2} (W_L^* - W).$$

De plus, par définition des états intermédiaires (3.16)-(3.23)-(3.24), nous avons les limites suivantes :

$$\lim_{Z_L, Z_R \rightarrow Z} h_L^*, h_R^*|_{W_R=W_L=W} = h^{HLL}|_{W_R=W_L=W} = h,$$

et

$$\lim_{Z_L, Z_R \rightarrow Z} q^*|_{W_R=W_L=W} = q^{HLL}|_{W_R=W_L=W} = q.$$

Ainsi, il en résulte

$$\lim_{Z_L, Z_R \rightarrow Z} F_\Delta(W, W, Z_L, Z_R) = F(W),$$

impliquant la consistance du flux numérique. Par conséquent, le schéma est bien consis-

tant avec le système (1.1).

Concernant la préservation de la positivité de la hauteur d'eau, puisque les hauteurs d'eau intermédiaires sont toutes positives, il en résulte que  $h_i^{n+1}$ , définie par (2.3), n'est rien d'autre que l'intégrale de grandeur positives. En conséquence nous avons  $h_i^{n+1} \geq 0$ .

À présent, nous montrons la préservation des états stationnaires dès que  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifie (3.38) et (3.39). Puisque sur chaque interface la condition d'équilibre local (2.15) est satisfaite ainsi que la condition de régularité (3.39), le lemme 3.2.5 impose que tous les solveurs de Riemann approchés restent stationnaires. En conséquence, on obtient

$$\widetilde{W}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}\right) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x_{i+1/2} < 0, \\ W_{i+1}^n & \text{si } x_{i+1/2} > 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

La relation (2.3) nous permet alors d'écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} \widetilde{W}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \widetilde{W}_{\mathcal{R}}\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}\right) dx, \\ &= W_i^n. \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration, nous devons établir l'inégalité d'entropie (3.40). Dans ce but, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3.2.** Soient  $W_L$  et  $W_R$  appartenant à  $\Omega$  tels que  $h_L^*$  et  $h_R^*$ , définies par (3.23) et (3.24), coïncident avec (3.21). Soit  $\eta$  et  $G$  donnés par (1.49). Supposons une restriction de type CFL sous la forme

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max(|\lambda_L|, |\lambda_R|) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.47)$$

Si  $Z$  est une fonction régulière permettant de définir  $Z_L = Z(x - \Delta x/2)$  et  $Z_R = Z(x + \Delta x/2)$  alors le solveur de Riemann approché (2.28) avec les états intermédiaires donnés par (3.16),(3.21) vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta(\widetilde{W}_{\mathcal{R}}(x/\Delta t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)) dx &\leq \frac{1}{2}(\eta(W_L) + \eta(W_R)) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x}(G(W_R) - G(W_L)) - \Delta t \bar{S}_{LR}^\eta + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{O}(\Delta x), \end{aligned} \quad (3.48)$$

où

$$\bar{S}_{LR}^\eta(\Delta x, W_L, W_R, Z_L, Z_R) = g \frac{q^{HLL}}{h^{HLL}} \times \frac{h_L h_R}{\bar{h}} \times \frac{Z_R - Z_L}{\Delta x}. \quad (3.49)$$

*Démonstration.* Considérant le solveur de Riemann approché donné par (2.28), (3.16), (3.23) et (3.24) et sous la contrainte de type CFL (3.37), nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \eta(\widetilde{W}_R(x/\Delta t; W_L, W_R, Z_L, Z_R)) dx &= \left( \frac{1}{2} + \lambda_L \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \eta(W_L) \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*)) + \left( \frac{1}{2} - \lambda_R \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \eta(W_R). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Par ailleurs, on a

$$\eta(W_L^*) = \frac{(q^*)^2}{2h_L^*} + g \frac{(h_L^*)^2}{2} \quad \text{et} \quad \eta(W_R^*) = \frac{(q^*)^2}{2h_R^*} + g \frac{(h_R^*)^2}{2},$$

où  $q^*$  et  $h_{L,R}^*$  sont donnés par (3.16), (3.21). De plus, avec la régularité de la fonction de topographie, on a  $Z_R - Z_L = \mathcal{O}(\Delta x)$  et  $\delta = \mathcal{O}(\Delta Z) = \mathcal{O}(\Delta x)$ . Par conséquent, il en résulte

$$\begin{aligned} q^* &= q^{HLL} - \frac{gh_L h_R}{(\lambda_R - \lambda_L)\bar{h}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x), \\ h_R^* &= h^{HLL} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ h_L^* &= h^{HLL} + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} q^{*2} &= q^{HLL^2} - \frac{2gh_L h_R q^{HLL}}{(\lambda_R - \lambda_L)\bar{h}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x), \\ h_R^{*2} &= h^{HLL^2} + \mathcal{O}(\Delta x), \\ h_L^{*2} &= h^{HLL^2} + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Alors d'une part, nous avons

$$\lambda_R \frac{h_R^{*2}}{2} - \lambda_L \frac{h_L^{*2}}{2} = (\lambda_R - \lambda_L) g \frac{h^{HLL^2}}{2} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\frac{q^{*2}}{2h_R^*} &= \frac{q^{HLL^2}}{2h^{HLL}} - \frac{gh_L h_R q^{HLL}}{(\lambda_R - \lambda_L) \bar{h} h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ \frac{q^{*2}}{2h_L^*} &= \frac{q^{HLL^2}}{2h^{HLL}} - \frac{gh_L h_R q^{HLL}}{(\lambda_R - \lambda_L) \bar{h} h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x^2).\end{aligned}$$

Ainsi, il en résulte immédiatement l'égalité suivante :

$$\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*) = (\lambda_R - \lambda_L) \eta(W^{HLL}) - g \frac{h_L h_R q^{HLL}}{\bar{h} h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (3.51)$$

De plus, en utilisant l'inégalité (2.66), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\lambda_R \eta(W_R^*) - \lambda_L \eta(W_L^*) &\leq \lambda_R \eta(W_R) - \lambda_L \eta(W_L) - (G(W_R) - G(W_L)) \\ &\quad - g \frac{h_L h_R q^{HLL}}{\bar{h} h^{HLL}} (Z_R - Z_L) + \mathcal{O}(\Delta x).\end{aligned} \quad (3.52)$$

L'inégalité attendue (3.48) vient de la combinaison de (3.50) avec l'estimation ci-dessus.

La preuve est alors réalisée.  $\square$

Muni du résultat précédent, nous sommes à présent en mesure d'achever la preuve du théorème 3.3.1. En effet, puisque que la fonction d'entropie  $\eta$  est convexe, l'inégalité de Jensen (voir [28]), nous donne

$$\begin{aligned}\eta(W_i^{n+1}) &\leq \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n, Z_{i-1}, Z_i)) dx \\ &\quad + \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \eta(\tilde{W}_{\mathcal{R}}(\frac{x}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1})) dx.\end{aligned}$$

Les relations (3.43) et (3.44), nous permettent de reformuler l'inégalité précédente de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\eta(W_i^{n+1}) &\leq \frac{1}{2}(I_{i-1/2}^{\eta^-} + I_{i-1/2}^{\eta^+}) + \frac{1}{2}(I_{i-1/2}^{\eta^+} - I_{i-1/2}^{\eta^-}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(I_{i+1/2}^{\eta^-} + I_{i+1/2}^{\eta^+}) - \frac{1}{2}(I_{i+1/2}^{\eta^+} - I_{i+1/2}^{\eta^-}).\end{aligned} \quad (3.53)$$

Sous les conditions (3.41), les hauteurs d'eau intermédiaires, données par (3.21), sont nécessairement positives. En conséquence, le lemme 3.3.2 peut être appliqué. Ainsi, de

(3.48), on déduit

$$\begin{aligned} I_{i+1/2}^{\eta^-} + I_{i+1/2}^{\eta^+} &\leq \frac{1}{2}(\eta(W_i^n) + \eta(W_{i+1}^n)) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(G(W_{i+1}^n) - G(W_i^n)) \\ &\quad - \Delta t \bar{S}_{i+\frac{1}{2}}^\eta + \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathcal{O}(\Delta x), \end{aligned}$$

où nous avons posé  $\bar{S}_{i+1/2}^\eta = \bar{S}_{LR}^\eta(\Delta x, W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1})$  donnée (3.49). Par conséquent, en introduisant l'estimation ci-dessus dans (3.53), nous obtenons l'inégalité d'entropie discrète attendue (3.40).  $\square$

## 3.4 Résultats numériques

Dans cette section, nous allons proposer des simulations numériques obtenues avec le schéma de type Godunov pour une approximation quadratique de la relation de Bernoulli (NFWB). À travers différents cas test, les schémas (FWBC) et (NFWB) sont comparés. Tous les calculs d'erreurs sont obtenus en utilisant la définition (2.74). Le schéma (NFWB) est défini relativement à une constante  $\beta$ . Cette constante contrôle le voisinage de *Froude* égale à 1 pour lequel les solutions stationnaires ne sont pas capturées. Dans la section 3.4.3, dédiée à la simulation d'un écoulement transcritique avec choc, nous avons fixé  $\beta = 2.5$ . Dans la section (3.4.4), concernant le cas test du Thacker,  $\beta = 10.5$ . Pour tous les autres cas tests nous avons imposé  $\beta = 1.5$ .

### 3.4.1 Écoulement fluvial sous-critique sur une bosse parabolique

On considère la configuration définie dans la section 2.6.1. Dans la figure 3.2, on observe un comportement similaire entre les deux schémas (FWBC) et (NFWB). Les deux schémas capturent exactement la solution stationnaire comme le montre la table 3.1.

	$h + z$			$q$		
	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$
schéma FWBC	1.10e-13	1.17e-13	1.44e-13	6.57e-14	6.84e-14	8.21e-14
schéma NFWB	1.08e-13	1.15e-13	1.42e-13	6.38e-14	6.65e-14	8.01e-14

TABLE 3.1 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour l'expérience d'écoulement sous-critique pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100s$ .



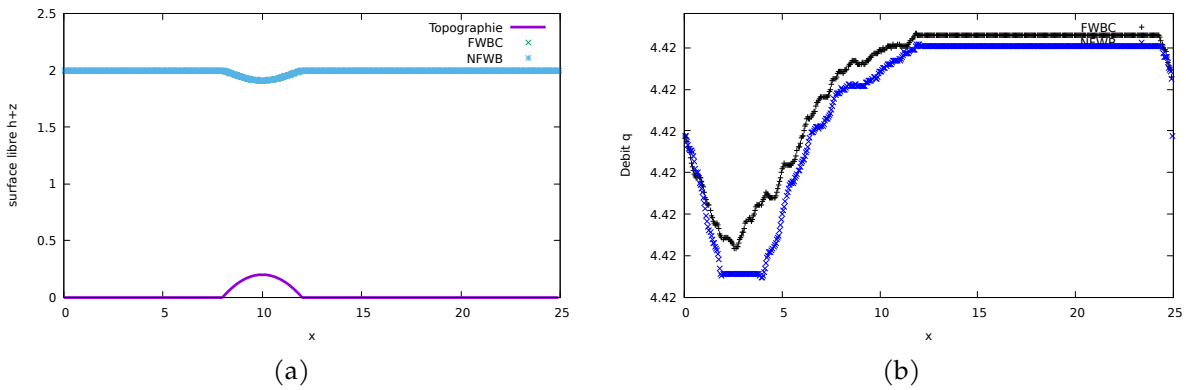


FIGURE 3.2 – Surface libre (3.2a) et débit (3.2b) pour la simulation d’un écoulement sous-critique pour  $N = 500$  cellules et  $t = 100s$ .

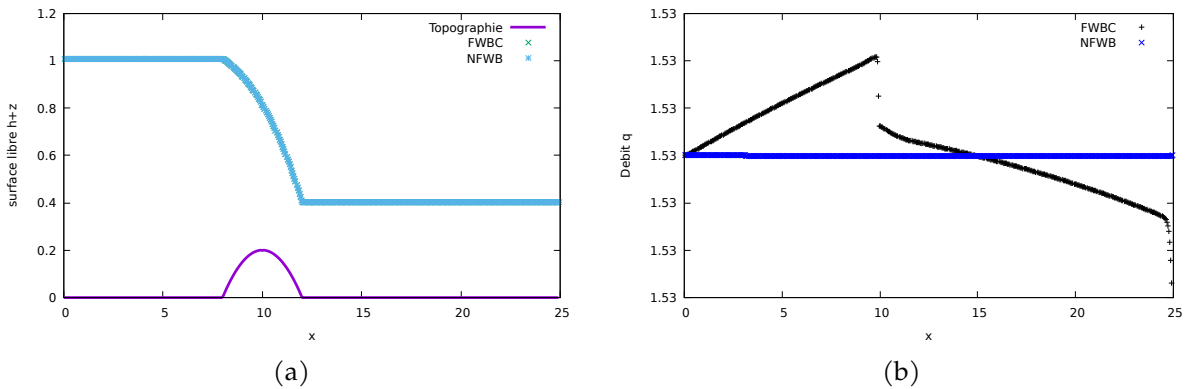


FIGURE 3.3 – Surface libre (3.3a) et débit (3.3b) pour la simulation d’un écoulement transcritique sans choc pour  $N = 500$  cellules et  $t = 100s$ .

### 3.4.2 Écoulement transcritique sans choc

Considérant les conditions définies dans la section 2.6.2, les résultats d’approximations obtenus par les deux schémas (FWBC) et (NFWB) sont présentés dans la figure 3.3. Les erreurs d’approximation obtenues dans la simulation de cette solution stationnaires sont données dans la table 3.2. Il est clair que les deux schémas se comportent de façon similaire et capturent exactement la solution stationnaire. Les écarts dans l’approximation du débit, présentée dans la figure 3.3b, ne sont pas significatifs en raison du facteur d’échelle de l’ordre de  $10^{-14}$ . Il en résulte que les deux schémas ont le même comportement dans ce cas test.

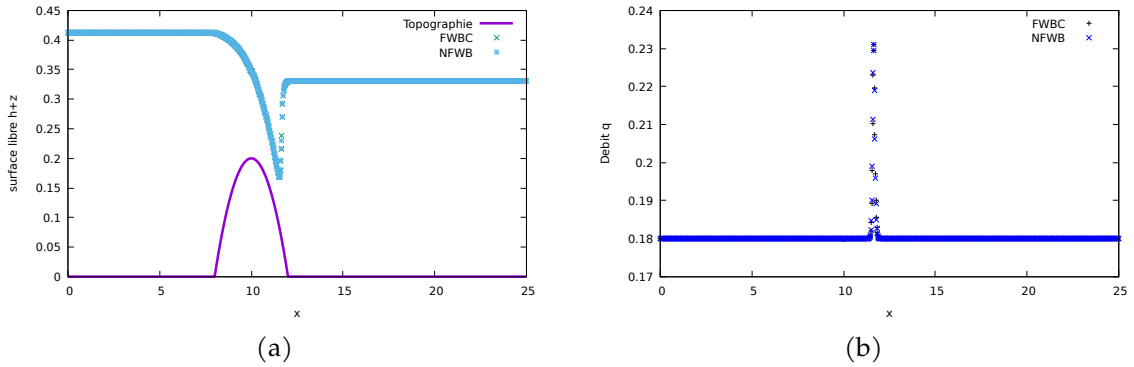


FIGURE 3.4 – Surface libre (3.4a) et débit (3.4b) pour la simulation d'un écoulement transcritique avec choc pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100$ .

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma FWBC	1.27e-14	1.67e-14	3.14e-14	1.27e-14	1.48e-14	1.98e-14
schéma NFWB	1.07e-14	1.32e-14	3.05e-14	0.96e-14	1.03e-14	1.54e-14

TABLE 3.2 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour l'écoulement transcritique sans choc pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100s$ .

### 3.4.3 Écoulement transcritique avec choc

Nous adoptons la configuration établie dans la section 2.6.4. Les simulations numériques sont présentées dans la figure 3.4 et les erreurs dans la table 3.3. Encore une fois on constate que les deux schémas admettent un comportement très comparable.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma FWBC	3.25e-04	3.93e-03	4.02e-02	1.85e-04	2.33e-03	2.47e-02
schéma NFWB	3.23e-04	3.90e-03	4.0e-02	1.82e-04	2.31e-03	2.44e-02

TABLE 3.3 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour l'expérience d'un écoulement transcritique avec choc pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100$ .

### 3.4.4 Écoulement avec transition sèche/mouillée

Afin de gérer la transition sèche/mouillée (voir chapitre 1 ou également [46, 47]), nous supposons que  $u = 0$  dès que  $h = 0$ . De plus, nous imposons que  $\frac{u}{h} = 0$  quand  $h$

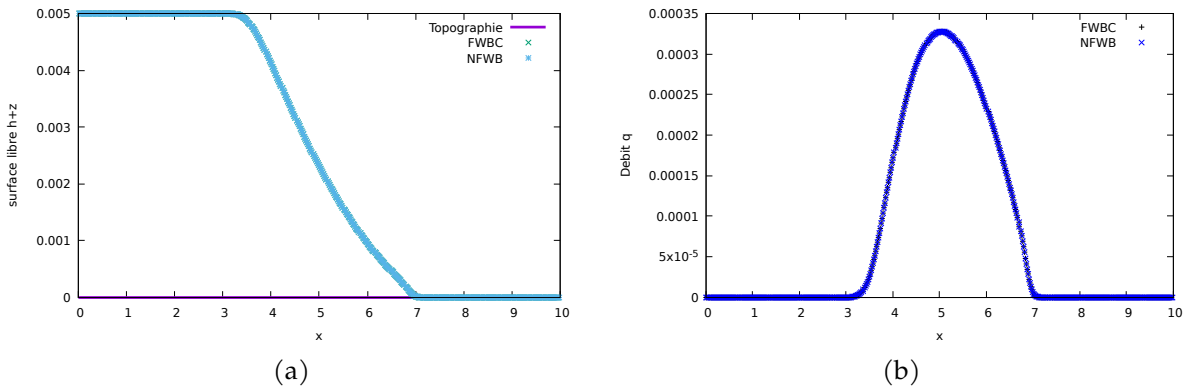


FIGURE 3.5 – Surface libre (3.5a) et débit (3.5b) pour un rupture de barrage sur fond sec pour  $N = 500$  cellules et  $t = 6s$ .

tend vers zéro. Il en résulte alors pour une interface de transition sèche/mouillée, avec  $h_L = 0$  ou  $h_R = 0$ , que le terme source se reformule sous la forme suivante :

$$\Delta x \bar{S}_{LR}^q = -g \frac{h_L h_R}{\bar{h}} (Z_R - Z_L), \quad (3.54)$$

de sorte que, comme énoncées au théorème 3.3.1, les propriétés de consistance et de positivité restent préservées.

### Rupture de barrage sur fond sec

Cette expérience est présentée afin d’analyser le comportement du schéma (NFWB) pour localiser et traiter correctement la transition sèche/mouillée. Dans cette simulation nous effectuons également une comparaison avec les résultats obtenus par le schéma (FWBC). Dans la figure 3.5, nous observons un bon comportement du schéma de type Godunov pour une approximation quadratique de la relation de Bernoulli (NFWB). En effet, comme présenté dans la table 3.4, le comportement des deux schémas sont similaires.

	$h + z$			$q$		
	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$	$L_{error}^1$	$L_{error}^2$	$L_{error}^\infty$
schéma FWBC	1.51e-4	9.54e-5	1.92e-4	2.62e-5	2.11e-5	4.18e-5
schéma NFWB	1.53e-4	9.57e-5	1.97e-4	2.72e-5	2.23e-5	4.29e-5

TABLE 3.4 – Erreur l’approximation de la surface libre et du débit pour un rupture de barrage sur fond sec pour  $N = 500$  cellules et  $t = 6s$ .

### Rupture de barrage sur fond sec en escalier

Cette expérience numérique est utilisée pour observer le comportement du schéma (NFWB) en présence d'une topographie discontinue en escalier. On considère le domaine  $[-10, 10]$  et une fonction de topographie définie par

$$Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 0.1 & \text{si } 0 < x < 3, \\ 0.4 & \text{si } 3 < x < 5, \\ 0.7 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Le débit initial est nul dans tout le domaine et concernant la hauteur d'eau initiale, on

a

$$h(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x. \end{cases}$$

De plus, nous considérons des conditions aux limites de Neumann homogènes.

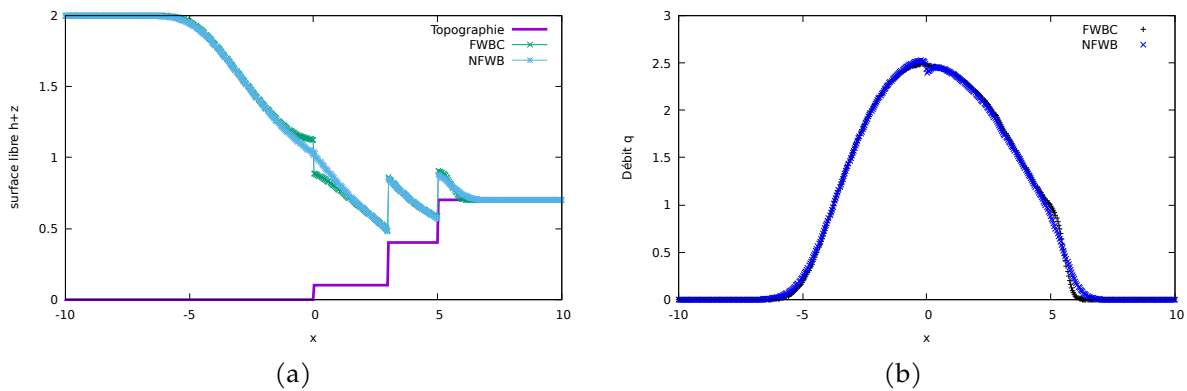


FIGURE 3.6 – Surface libre (3.6a) et débit (3.6b) pour un rupture de barrage sur fond sec en escalier.

La figure 3.6 présente l'approximation de la surface libre de l'eau et du débit pour les schémas (FWBC) et (NFWB). On observe un très bon comportement de la solution avec le nouveau schéma (NFWB). Dans la figure 3.7, nous présentons l'évolution du pas de temps au cours du temps. Nous constatons que le pas de temps est sensiblement similaire pour les deux schémas.

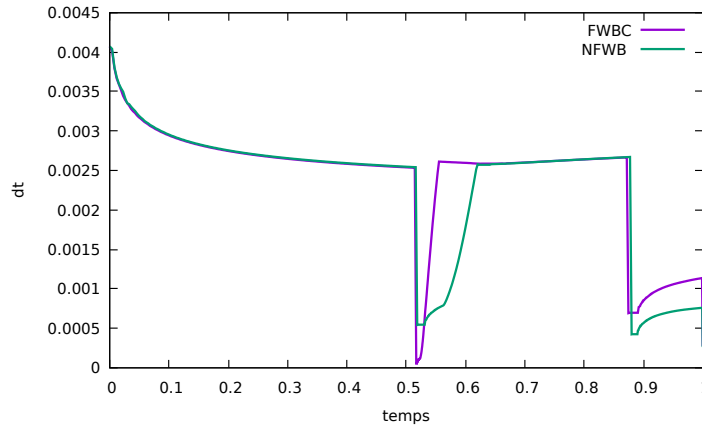


FIGURE 3.7 – Evolution du pas de temps  $\Delta t$  en fonction du temps lors de la simulation du cas test de rupture de barrage sur une marche.

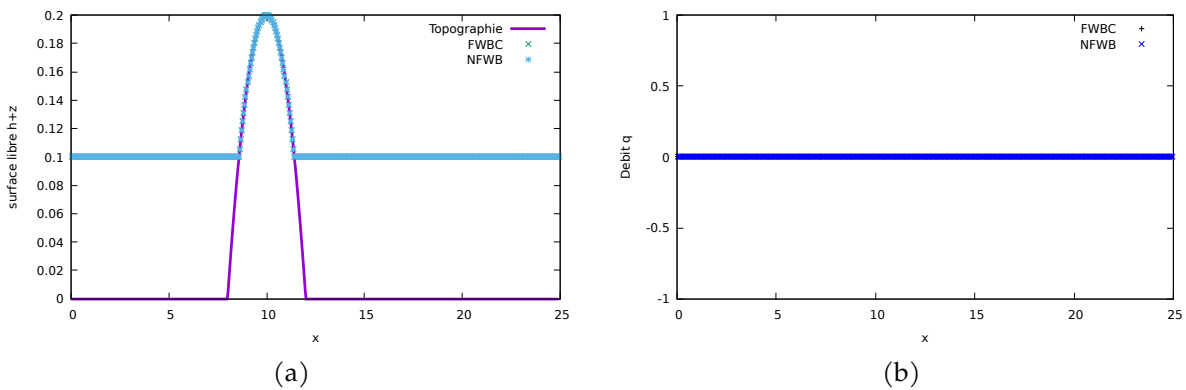


FIGURE 3.8 – Surface libre (3.8a) et débit (3.8b) pour la simulation d'un lac au repos avec un fond émergé pour  $N = 500$  cellules et  $t = 100s$ .

### Lac au repos avec un fond émergé

Nous adoptons la topographie, la condition initiale et les conditions aux bords définies dans la section 2.6.5. On constate immédiatement avec la figure 3.8 et la table d'erreur 3.5 que la solution exacte du lac au repos est bien capturée.

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
schéma FWBC	2.11e-19	2.81e-18	3.33e-18	2.75e-19	3.01e-18	3.82e-18
schéma NFVB	2.01e-19	2.73e-18	3.21e-18	2.67e-19	2.99e-18	3.62e-18

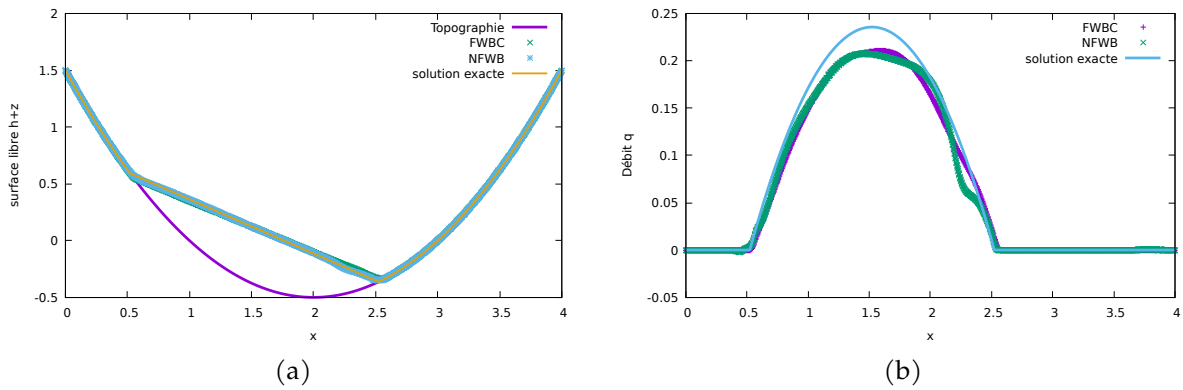


FIGURE 3.9 – Surface libre exacte et approchée (3.9a) et débit exact et approché (3.9b) pour le cas de test Thacker.

TABLE 3.5 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour un lac au repos avec un fond émergé pour  $N = 500$  cellules et  $t = 100s$ .

### Cas du test Thacker

On adopte la même configuration proposée dans la section 2.6.5. Dans la figure 3.9, on présente l'approximation de la solution de la hauteur d'eau et du débit par rapport à la solution exacte.

	schéma FWBC		
	$q$		
cells	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
1600	3.74e-2	2.76e-2	2.64e-2
2000	2.66e-2	1.97e-2	1.94e-2
4000	1.15e-2	8.56e-3	9.51e-3

TABLE 3.6 – Erreurs de débit pour le cas du test Thacker pour différentes tailles de mailles en utilisant le schéma FWBC.

	schéma NFWB		
	$q$		
cells	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
1600	3.87e-2	2.83e-2	3.83e-2
2000	2.86e-2	2.23e-2	3.43e-2
4000	1.19e-2	1.07e-2	2.61e-3

TABLE 3.7 – Erreurs de débit pour le cas du test Thacker pour différentes tailles de mailles en utilisant le schéma NFWB.

Dans les tables 3.6-3.7, nous présentons l'évaluation des erreurs. On note que les deux schémas (FWBC) et (NFWB) ont un comportement tout à fait similaire.

### 3.4.5 Comportement du schéma NFWB dans le cas test du défaut d'entropie

Dans la section 2.6.6, nous avons proposé une expérience numérique pour illustrer le défaut d'entropie du schéma (FWBC). Nous avons observé, a priori, un choc non entropique de petite amplitude à l'intérieur de la détente. Ce mauvais comportement avait également été constaté avec le schéma de reconstruction hydrostatique. La réalisation de ce cas test avec la méthode numérique (NFWB) met en évidence le bon comportement de la méthode puisque aucun choc stationnaire n'est capturé tant que l'inégalité (3.33) est vérifiée. Puisque le paramètre  $\beta$  contrôle la capture des états stationnaires pour un nombre de Froude dans un voisinage de 1, pour une perturbation  $Z^\delta$  assez petite, le schéma (NFWB) ne pourra pas capturer de discontinuité stationnaire non entropique.

Le cas test proposé dans la section 2.6.6 permet d'illustrer notre propos. En effet, pour les conditions initiales sur la hauteur d'eau et le débit données par (2.78) par et une petite perturbation de la topographie  $Z^\delta = 0.01$  localisée sur la maille contenant  $x = 5$ , nous observons dans la figure 3.10 que le schéma (NFWB) a un excellent comportement. En particulier aucun défaut d'entropie n'est constaté.

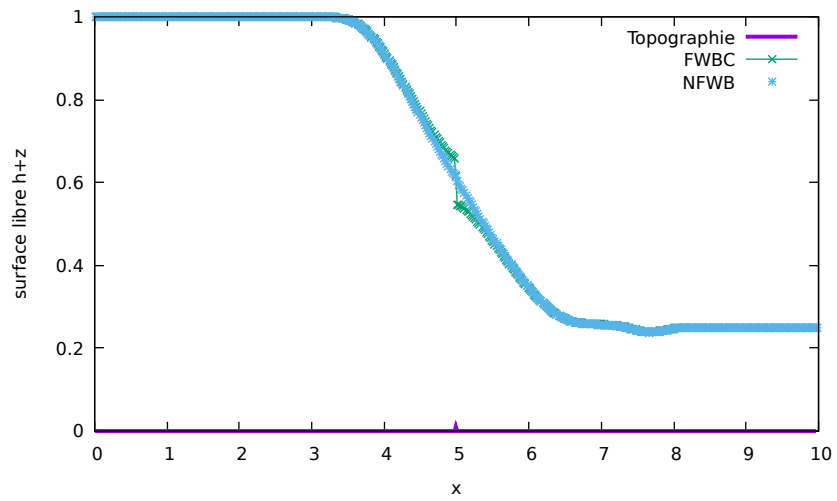


FIGURE 3.10 – Approximation de la surface libre d’une solution discontinue stationnaire.





# EXTENSION À L'ORDRE 2 PRÉSERVANT LES ÉTATS D'ÉQUILIBRES POUR LE MODÈLE DE SAINT-VENANT

---

Les schémas aux volumes finis présentés dans les chapitres 2 et 3 sont du premier ordre d'approximation. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des extensions d'ordre 2 en espace. Il existe de nombreuses stratégies pour obtenir de meilleurs ordres d'approximation. À titre d'exemple, on peut citer les schémas ENO/WENO (voir [49, 67]) ou encore des schémas de type Galerkin discontinu très usités actuellement (voir [43, 66] pour une liste non exhaustive). Il faut également citer les schémas de type MUSCL (par exemple voir [60, 64, 42]) qui présentent une alternative particulièrement attractive par leur simplicité de mise en œuvre. En effet, cette procédure de montée en ordre nécessite seulement le développement d'une technique de reconstruction de la solution. Cependant, le choix de la reconstruction peut devenir délicat et de nombreux auteurs ont proposé diverses stratégies aussi bien pour des équations scalaires que pour des systèmes (voir [60, 64, 42]). L'approche MUSCL soulève toutefois quelques difficultés pour des systèmes non homogènes avec terme source lorsque des solutions stationnaires doivent être préservées. En effet, le choix de la reconstruction doit également préserver les solutions stationnaires. Dans le cas de solutions stationnaires linéaires, cette contrainte de préservation est aisément satisfaite. Cependant, dès que les solutions stationnaires deviennent non linéaires, proposer des reconstructions capturant des solutions d'équilibres peut devenir un défi difficile à relever. Plusieurs tentatives ont récemment été proposées [30, 41, 52], mais celles-ci sont en général particulièrement coûteuses, nécessitant la résolution de systèmes non linéaires sur chaque interface. C'est dans ce contexte que nous proposons ici une alternative de type MUSCL adaptée pour la capture des solutions stationnaires non linéaires avec un coût de calcul très réduit.

On rappelle que les solutions stationnaires du système (1.1) qui nous intéressent dans ce travail sont gouvernées par

$$\begin{cases} \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_x\left(\frac{u^2}{2} + g(h + Z)\right) = 0, \end{cases}$$

où  $Z(x)$  est une fonction régulière donnée. Afin de simplifier les notations, nous introduisons  $\mathcal{H}(W, Z)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{H}(W, Z) = \begin{pmatrix} hu \\ \frac{u^2}{2} + g(h + Z) \end{pmatrix},$$

de sorte que les solutions stationnaires qui nous motivent ici sont gouvernées par

$$\partial_x \mathcal{H}(W, Z) = 0. \quad (4.1)$$

Dans ce chapitre, nous présentons une stratégie très simple pour forcer toute procédure de reconstruction de type MUSCL à préserver les solutions stationnaires. La méthode que nous allons proposer repose uniquement sur l'évaluation de l'application  $\mathcal{H}(W, Z)$ . Notre approche est donc particulièrement attractive puisqu'elle ne nécessite nullement l'inversion de l'application  $\mathcal{H}(W, Z)$  comme c'est le cas pour les méthodes récemment proposées [30, 41, 52].

Afin de motiver et de présenter la reconstruction MUSCL que nous allons développer, le présent chapitre est organisé comme suit. Dans un premier temps, nous rappelons les grands principes de la dérivation des schémas de type MUSCL pour un système hyperbolique non homogène de la forme (1.3). Nous montrerons également les enjeux relatifs à l'obtention d'un schéma du second ordre capturant des états stationnaires non linéaires. En particulier nous mettrons en évidence que les stratégies de reconstructions usuelles nécessitent d'inverser la fonction  $\mathcal{H}$  sans avoir l'assurance de l'existence de cet inverse. Afin de lever de telles ambiguïtés, dans la section 4.2, nous introduisons une stratégie de reconstruction qui garantit la préservation des solutions stationnaires. Cette stratégie repose sur une évaluation extrêmement simple et peu coûteuse. Pour conclure ce chapitre, la section 4.3 est consacrée à plusieurs expériences numériques pour illustrer la pertinence de l'amélioration de la reconstruction du second ordre que nous proposons ici.

## 4.1 Problématique des schémas du second ordre MUSCL well-balanced

Dans un premier temps, on rappelle la discrétisation de l'espace et du temps. L'espace est discrétisé en introduisant une suite de cellules  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ , pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , de taille constante  $\Delta x$ . On note  $x_i = (x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}})/2$  le centre de chaque cellule. On pose  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  où  $\Delta t$  désigne le pas de temps qui sera restreint suivant une condition CFL.

Considérant un schéma aux volumes finis du premier ordre pour (1.1), notre objectif est, ici, de proposer une extension usuelle du second ordre MUSCL. Dans ce sens, nous adoptons le schéma aux volumes finis du premier ordre donné par (2.13) qui, nous le rappelons, s'écrit sous la forme

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{2} (S_{i-\frac{1}{2}}^n + S_{i+\frac{1}{2}}^n) \quad (4.2)$$

où

$$F_{i+\frac{1}{2}}^n = F_\Delta(W_i^n, W_{i+1}^n) \quad \text{et} \quad S_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{S}_{LR}(W_i^n, W_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}),$$

avec  $F_\Delta$  et  $\bar{S}_{LR}$  respectivement consistants avec la fonction flux et le terme source (1.2). Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que ce schéma garde invariant l'espace des états physiquement admissibles  $\Omega$  sous une contrainte CFL de la forme

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} (|\lambda(W_i, W_{i+1})|) \leq \frac{1}{2}. \quad (4.3)$$

Soulignons dès à présent que les extensions du second ordre MUSCL s'appliquent aux schémas volumes finis indépendamment de la définition du flux numérique  $F_\Delta$  et de l'approximation du terme source  $\bar{S}_{LR}$ . En conséquence nous allons proposer une stratégie qui s'appliquera, en particulier, aux schémas développés dans les chapitres 2 et 3 mais qui pourrait être appliquée à toute autre méthode.

Ici, le flux numérique et la discrétisation du terme source sont choisis de sorte à préserver les états stationnaires définis par (4.1). En conséquence, si pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a

$$\mathcal{H}(W_i^n, Z_i) = \mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}). \quad (4.4)$$

alors  $W_i^{n+1} = W_i^n$ . Bien entendu, cette propriété de préservation des solutions station-

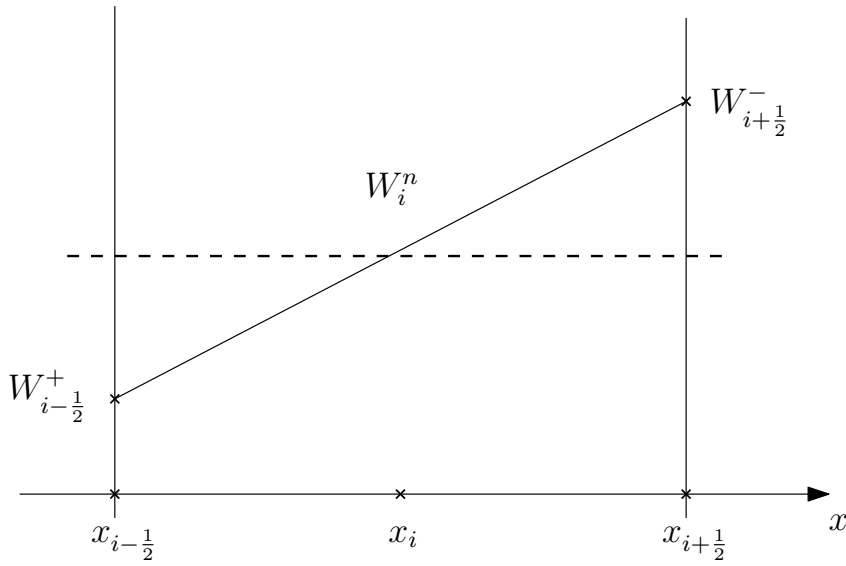


FIGURE 4.1 – Procédure de reconstruction sur la cellule  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$ . Ici, par exemple ici l'état constant  $W_i^n$  (ligne pointillée) est reconstruit en une fonction linéaire (ligne continue).

naires non linéaires est au cœur des schémas développés dans les chapitres 2 et 3. À présent, nous développons une stratégie d'extension au second ordre de type MUSCL (voir [60, 64, 10]). Cette stratégie repose sur une technique de reconstruction de la solution aux interfaces  $x_{i+\frac{1}{2}}$  pour  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ . En d'autres termes, sur chaque cellule  $(x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$  la solution approchée  $W_i^n$  doit être étendue par une fonction polynomiale afin de définir les états aux interfaces  $W_{i-\frac{1}{2}}^+$  et  $W_{i+\frac{1}{2}}^-$  (voir la figure 4.1). Considérant une interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  les états reconstruits à gauche et à droite, noté  $W_{i+\frac{1}{2}}^\pm$ , doivent vérifier la consistance à l'ordre 2 de la façon suivante :

$$W_{i+\frac{1}{2}}^- = W(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad W_{i+\frac{1}{2}}^+ = W(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2), \quad (4.5)$$

où  $W(x, t^n)$  est une fonction régulière telle que

$$W_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t^n) dx. \quad (4.6)$$

Muni de cette reconstruction du second ordre  $(W_{i+\frac{1}{2}}^\pm)_{i \in \mathbb{Z}}$  à chaque interface  $(x_{i+1/2})_{i \in \mathbb{Z}}$ , on peut alors aisément proposer une extension du schéma du premier ordre (4.2) pour

obtenir un schéma du second ordre en espace de la façon suivante :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^\pm - F_{i-\frac{1}{2}}^\pm \right) + \Delta t S_i^\pm, \quad (4.7)$$

où nous avons fixé  $F_{i+\frac{1}{2}}^\pm = F_\Delta(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+)$ . Concernant la discrétisation du terme source,  $S_i^\pm$  est une approximation du second ordre de la moyenne  $S(W, Z)$ , telle que

$$S_i^\pm = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} S(W(x, t^n), Z(x)) dx + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (4.8)$$

À ce niveau, l'extension la plus simple qui puisse être proposée repose sur l'utilisation de la quadrature du point milieu de sorte que

$$S_i^\pm = S \left( \frac{1}{2} \left( W_{i-\frac{1}{2}}^+ + W_{i+\frac{1}{2}}^- \right), Z_i \right). \quad (4.9)$$

Il est clair que le schéma MUSCL (4.7) sera totalement déterminé dès que l'ensemble des états reconstruits  $(W_{i+\frac{1}{2}}^\pm)_{i \in \mathbb{Z}}$  auront trouvé une définition.

À présent, nous allons montrer que les stratégies de reconstructions usuelles ne sont pas adaptées à la capture des solutions stationnaires non linéaires. En effet, à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ , supposons les états reconstruits donnés par

$$\begin{aligned} W_{i+\frac{1}{2}}^- &= W_i^n + \frac{1}{2} \mathcal{L}(W_i^n - W_{i-1}^n, W_{i+1}^n - W_i^n), \\ W_{i+\frac{1}{2}}^+ &= W_{i+1}^n - \frac{1}{2} \mathcal{L}(W_{i+1}^n - W_i^n, W_{i+2}^n - W_{i+1}^n), \end{aligned} \quad (4.10)$$

où  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une fonction Lipschitz-continue qui vérifie

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w, w) &= w \quad \text{pour tout } w \in \mathbb{R}^2, \\ \exists M > 0 \text{ telle que } \|\mathcal{L}(w, v)\| &\leq M \max(\|w\|, \|v\|), \quad \forall w, v \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Nous rappelons qu'une large littérature est consacrée à la définition de cette application  $\mathcal{L}$  (par exemple, voir [60, 64, 10, 42]).

La reconstruction (4.10) ne permet pas de préserver les solutions stationnaires qui nécessiterait de vérifier

$$W_{i+\frac{1}{2}}^- = W_i^n \quad \text{et} \quad W_{i+\frac{1}{2}}^+ = W_{i+1}^n \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad (4.11)$$

dès que  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  satisfait la condition stationnarité locale (4.4). Cette condition peut éventuellement être restaurée dans le cas où l'application  $\mathcal{H}$  est linéaire en  $W$ . En conséquence, une attention particulière doit être portée sur la définition de  $\mathcal{L}$  pour préserver les états stationnaires.

Récemment, plusieurs travaux (par exemple, voir [2, 30]) proposent de privilégier une reconstruction sur  $\mathcal{H}(W, Z)$  plutôt que sur  $W$ . Cette reconstruction s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{i+\frac{1}{2}}^- &= \mathcal{H}(W_i^n, Z_i) \\ &+ \frac{1}{2} \mathcal{L} \left( \mathcal{H}(W_i^n, Z_i) - \mathcal{H}(W_{i-1}^n, Z_{i-1}), \mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}) - \mathcal{H}(W_i^n, Z_i) \right), \\ \mathcal{H}_{i+\frac{1}{2}}^+ &= \mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}) \\ &- \frac{1}{2} \mathcal{L} \left( \mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}) - \mathcal{H}(W_i^n, Z_i), \mathcal{H}(W_{i+2}^n, Z_{i+2}) - \mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

Les états reconstruits  $W_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$  sont alors les solutions du système non linéaires suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(W_{i+\frac{1}{2}}^-, Z_{i+\frac{1}{2}}) = \mathcal{H}_{i+\frac{1}{2}}^-, \\ \mathcal{H}(W_{i+\frac{1}{2}}^+, Z_{i+\frac{1}{2}}) = \mathcal{H}_{i+\frac{1}{2}}^+, \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $Z_{i+\frac{1}{2}}$  est la topographie à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ . Lorsque le système (4.12) est inversible on remarque immédiatement que la préservation des solutions stationnaires (4.11) est satisfaite par une telle reconstruction. Cependant, une telle procédure est très coûteuse puisqu'elle nécessite d'inverser un système non linéaire lorsque ce système est inversible. Notons dès à présent que la forme cubique de la relation de Bernoulli n'assure pas, en général, l'existence d'une unique solution pour (4.12).

Toutefois, nous pouvons noter que le système (4.12) peut se reformuler comme un système linéaire dans certaines situations particulières. Par exemple, c'est le cas du lac au repos pour le modèle de Saint-Venant. Ce cas très simple n'est pas considéré dans ce travail puisque nous considérons des solutions stationnaires gouvernées par les relations de Bernoulli. En conséquence nous allons proposer une nouvelle stratégie de reconstruction pour laquelle nous n'aurons pas besoin de résoudre de système non linéaire tel que (4.12).

## 4.2 Nouvelle technique simple de reconstruction MUSCL préservant les solutions stationnaires

Il s'agit à présent de dériver une technique de reconstruction capable de préserver les états stationnaires sans avoir recours à une inversion de  $\mathcal{H}$ . Pour cela, notre stratégie repose sur une amélioration de la reconstruction usuelle (4.10) comme suit :

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^- &= W_i^n + \frac{1}{2}\theta_{i+\frac{1}{2}}^n \mathcal{L}(W_i^n - W_{i-1}^n, W_{i+1}^n - W_i^n), \\ \widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^+ &= W_{i+1}^n - \frac{1}{2}\theta_{i+\frac{1}{2}}^n \mathcal{L}(W_{i+1}^n - W_i^n, W_{i+2}^n - W_{i+1}^n),\end{aligned}\quad (4.13)$$

où la correction  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$  doit vérifier un comportement asymptotique de la forme

$$\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 1 + \mathcal{O}(\Delta x^k), \quad (4.14)$$

avec  $k \geq 2$  afin de préserver l'ordre de précision. L'idée de cette correction est d'imposer  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$  dès que le couple  $(W_i^n, W_{i+1}^n)$  vérifie la relation de stationnarité locale (4.4). Nous proposons alors une correction formulée de la façon suivante :

$$\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^n}{\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta x^k}, \quad (4.15)$$

avec

$$\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^n = \|\mathcal{H}(W_{i+1}^n, Z_{i+1}) - \mathcal{H}(W_i^n, Z_i)\|. \quad (4.16)$$

Dès à présent, il convient de noter que  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$  si et seulement si le couple  $(W_i^n, W_{i+1}^n)$  définit un état stationnaire local (4.4) à l'interface  $x_{i+\frac{1}{2}}$ .

Concernant la discrétisation du terme source, nous adoptons la définition suivante :

$$\widetilde{S}_i^\pm = \frac{1}{2} \left( (1 - \theta_{i-\frac{1}{2}}^n) S_{i-\frac{1}{2}}^n + (1 - \theta_{i+\frac{1}{2}}^n) S_{i+\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{2} (\theta_{i-\frac{1}{2}}^n + \theta_{i+\frac{1}{2}}^n) S_i^\pm, \quad (4.17)$$

où  $S_i^\pm$  est donné par (4.9) et  $S_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  provient de la discrétisation du premier ordre (4.2). Au moins formellement, puisque  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$  vérifie le comportement asymptotique (4.14), nous remarquons que

$$\widetilde{S}_i^\pm = S_i^\pm + \mathcal{O}(\Delta x^k),$$

avec  $k \geq 2$ , ce qui assure la consistance d'ordre 2 de la discrétisation du terme source.



En conséquence, le schéma MUSCL de second ordre s'écrit maintenant comme suit :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+\frac{1}{2}}^\pm - F_{i-\frac{1}{2}}^\pm \right) + \Delta t \tilde{S}_i^\pm, \quad (4.18)$$

où

$$F_{i+\frac{1}{2}}^\pm = F_\Delta(\tilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^-, \tilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^+). \quad (4.19)$$

Avant d'établir les principales propriétés satisfaites par le schéma MUSCL du second ordre (4.18) – (4.19) avec les états reconstruits (4.13) et la discrétisation du terme source (4.17), rappelons la définition de l'ordre de précision qui est adoptée ici (par exemple, voir [15]).

**Définition 4.2.1.** Pour une solution régulière  $W(x, t)$  de (1.1), considérons

$$W_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t^n) dx. \quad (4.20)$$

Le schéma (4.18)-(4.19) est dit d'ordre  $\tau$  en temps et  $\delta$  en espace si, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a

$$W_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} W(x, t^n + \Delta t) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \Delta t \mathcal{S}_i, \quad (4.21)$$

où  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(\Delta t^\tau) + \mathcal{O}(\Delta x^\delta)$  et  $\mathcal{S}_i = \mathcal{O}(\Delta t^\tau) + \mathcal{O}(\Delta x^\delta)$ .

À présent, nous établissons que le schéma (4.18)-(4.19) avec la reconstruction corrigée (4.13) est un schéma du second ordre en espace qui préserve les solutions stationnaires.

**Théorème 4.2.2.** Le schéma (4.18)-(4.19), avec des états reconstruits donnés par (4.13) et une discrétisation du terme source donnée par (4.17), satisfait les propriétés suivantes :

1. La reconstruction est robuste : si la reconstruction non corrigée (4.10) préserve  $\Omega$ , alors  $\Omega$  reste invariant par la reconstruction améliorée (4.13).
2. Pour une solution approchée instationnaire, le schéma est du second ordre en espace et du premier ordre en temps.
3. Le schéma est well-balanced : Si  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  définit un état stationnaire vérifiant (4.4) sur chaque interface, alors  $W_i^{n+1} = W_i^n$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous établissons la robustesse des états  $\tilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^\pm$  définis par la reconstruction améliorée (4.13). Nous remarquons que de chaque côté de

l'interface  $x_{i+1/2}$ , les états reconstruits trouvent la forme d'une combinaison convexe de la façon suivante :

$$\widetilde{W}_{i+1/2}^- = (1 - \theta_{i+1/2}^n)W_i^n + \theta_{i+1/2}^n W_{i+1/2}^- \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{i+1/2}^+ = (1 - \theta_{i+1/2}^n)W_{i+1}^n + \theta_{i+1/2}^n W_{i+1/2}^+,$$

où  $\theta_{i+1/2}^n$ , défini par (4.15), appartient à  $[0, 1]$  et avec  $W_{i+1/2}^\pm$  donnés par la reconstruction non corrigée (4.10). Puisque les états  $W_i^n$ ,  $W_{i+1}^n$  et  $W_{i+1/2}^\pm$  appartiennent à  $\Omega$ , avec  $\Omega$  convexe, on en déduit immédiatement que les  $\widetilde{W}_{i+1/2}^\pm$  sont dans  $\Omega$ . La propriété 1 est ainsi établie.

Concernant l'ordre de précision, nous considérons  $W(x, t)$  une solution régulière de (1.1) et nous posons  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  définie par (4.20). Par intégration de (1.3) sur  $(x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (t^n, t^n + \Delta t)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t^n + \Delta t) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t^n) dx \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(W(x_{i+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} F(W(x_{i-1/2}, t)) dt \right) \quad (4.22) \\ & = \Delta t \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S(W(x, t), x) dx dt. \end{aligned}$$

La combinaison des relations (4.22) et (4.18) nous permet d'obtenir la relation (4.21) où nous avons défini

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2} &= F_{i+1/2}^\pm - \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(W(x_{i+1/2}, t^n + t)) dt, \\ \mathcal{S}_i &= \widetilde{S}_i^\pm - \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_0^{\Delta t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} S(W(x, t^n + t), x) dx dt, \end{aligned}$$

avec  $F_{i+1/2}^\pm$  et  $\widetilde{S}_i^\pm$  respectivement donnés par (4.19) et (4.17). Dans un premier temps nous étudions le résidu de la fonction flux  $\mathcal{F}_{i+1/2}$ . Pour des solutions non stationnaires  $\varepsilon_{i+1/2}^n$  ne s'annule pas. En conséquence, par définition de  $\theta_{i+1/2}^n$  donnée par (4.15), on a  $\theta_{i+1/2}^n = 1 + \mathcal{O}(\Delta x^k)$ . Il en résulte alors

$$\widetilde{W}_{i+1/2}^- = W_{i+1/2}^- + \mathcal{O}(\Delta x^k) \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{i+1/2}^+ = W_{i+1/2}^+ + \mathcal{O}(\Delta x^k),$$

où  $W_{i+1/2}^\pm$  sont donnés par (4.10) avec  $k \geq 2$ . Puisque que la reconstruction polynomiale

adoptée vérifie le comportement asymptotique (4.5) on en déduit

$$\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^- = W(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^+ = W(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

En supposant une fonction de flux numérique continue Lipschitz telle que la condition de consistance  $F_\Delta(W, W) = F(W)$  est vérifiée, nous avons

$$F_{i+\frac{1}{2}}^\pm = F(W(x_{i+\frac{1}{2}}, t^n)) + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

et il en résulte  $\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

Dans un second temps, nous étudions la précision de la discrétisation du terme source. Nous rappelons encore une fois que  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 1 + \mathcal{O}(\Delta x^k)$  avec  $k \geq 2$ . Par définition du terme source reconstruit (4.17), on a

$$\widetilde{S}_i^\pm = S_i^\pm + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$

De plus, la condition de consistance (4.8) donne immédiatement  $\mathcal{S}_i = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t)$ . En appliquant la définition 4.2.1, nous en déduisons que le schéma est du premier ordre en temps et du second ordre en espace.

Pour achever la preuve du théorème, il nous reste à établir la préservation des états stationnaires. Soit  $(W_i^n)_{i \in \mathbb{Z}}$  vérifiant la condition d'équilibre local (4.4), on obtient immédiatement  $\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ . En conséquence, nous avons  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n = 0$ , ce qui implique

$$\widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^- = W_i^n \quad \text{et} \quad \widetilde{W}_{i+\frac{1}{2}}^+ = W_{i+1}^n,$$

tandis que  $\widetilde{S}_i^\pm = \frac{1}{2}(S_{i-\frac{1}{2}}^n + S_{i+\frac{1}{2}}^n)$ . En d'autres termes, la correction  $\theta_{i+\frac{1}{2}}^n$  inhibe la reconstruction pour les états stationnaires. Il en résulte que le schéma du second ordre (4.18)-(4.19) coïncide exactement avec le schéma du premier ordre (4.2) qui, par définition, préserve les solutions stationnaires. En conséquence nous en déduisons  $W_i^{n+1} = W_i^n$  pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ . La preuve du théorème est ainsi achevée.  $\square$

Ce résultat peut être complété par un résultat de positivité dans le cas du système (1.1) qui motive ce travail.

**Lemme 4.2.3.** *Soit  $h_i^{01,n+1}$  la hauteur d'eau mise à jour par le schéma du premier ordre (4.2). De même, on note  $h_i^{02,n+1}$  la mise à jour par le schéma MUSCL du second ordre (4.18)-(4.19) avec une reconstruction corrigée (4.13). Supposons  $h_i^n \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  et supposons que le*

schéma du premier ordre (4.2) préserve la positivité de sorte que  $h_i^{o1,n+1} \geq 0$  sous une condition CFL donnée par (4.3). Alors  $h_i^{o2,n+1} \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  sous la condition CFL

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( |\lambda(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+)|, |\lambda(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i-\frac{1}{2}}^-)| \right) \leq \frac{1}{4}. \quad (4.23)$$

*Démonstration.* Avec des notations claires, la mise à jour de la hauteur d'eau par le schéma du second ordre (4.18)-(4.19) s'écrit

$$h_i^{o2,n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{\Delta}^h(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^-, W_{i-\frac{1}{2}}^+) \right). \quad (4.24)$$

Dans un premier temps, nous remarquons que

$$\begin{aligned} h_i^{o2,n+1} = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} & \left( F_{\Delta}^h(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) \right. \\ & \left. + F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^-, W_{i-\frac{1}{2}}^+) \right). \end{aligned}$$

Dans un second temps, par définition de la reconstruction (4.13), nous avons

$$h_i^n = \frac{1}{2} \left( h_{i-\frac{1}{2}}^+ + h_{i+\frac{1}{2}}^- \right).$$

Il en résulte alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} h_i^{o2,n+1} = \frac{1}{2} & \left( h_{i-\frac{1}{2}}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} \left( F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^-, W_{i-\frac{1}{2}}^+) \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( h_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} \left( F_{\Delta}^h(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) \right) \right). \end{aligned}$$

Nous constatons alors que  $h_i^{o2,n+1}$  n'est rien d'autre qu'une combinaison convexe entre deux mises à jour du premier ordre sur un maillage de taille  $\frac{\Delta x}{2}$ . En conséquence de la positivité du schéma du premier ordre et puisque la reconstruction corrigée assure  $h_{i+\frac{1}{2}}^{\pm} \geq 0$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ , nous avons immédiatement

$$\begin{aligned} h_{i-\frac{1}{2}}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} & \left( F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^-, W_{i-\frac{1}{2}}^+) \right) \geq 0, \\ h_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{\Delta t}{\Delta x/2} & \left( F_{\Delta}^h(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+) - F_{\Delta}^h(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

sous la condition CFL (4.3), qui s'écrit, ici, de la façon suivante :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x/2} \max_{i \in \mathbb{Z}} \left( |\lambda(W_{i+\frac{1}{2}}^-, W_{i+\frac{1}{2}}^+)|, |\lambda(W_{i-\frac{1}{2}}^+, W_{i+\frac{1}{2}}^-)| \right) \leq \frac{1}{2}.$$

On en déduit alors  $h_i^{o2,n+1} \geq 0$  sous la condition CFL (4.23) et la preuve est ainsi complète.  $\square$

### 4.3 Comparaison avec les schémas FWBC et NFWB

À travers plusieurs simulations numériques, nous allons illustrer la pertinence de la procédure décrite dans ce chapitre. Les schémas du second ordre avec correction well-balanced (4.13)-(4.18)-(4.19) sont ici appliqués aux schémas FWBC et NFWB développés dans les chapitres 2 et 3. Ces extensions du second ordre avec correction well-balanced seront notées  $\theta$ -FWBC et  $\theta$ -NFWB. Tous les développements proposés reposent sur une discrétisation du premier ordre en temps. Dans un souci de cohérence des ordres d'approximations, nous adoptons une stratégie standard de montée en ordre en temps qui repose sur le méthode Runge-Kutta SSPRK2 [32, 33]. Cette technique de montée en ordre en temps préserve, par un principe de combinaison convexe, de façon immédiate l'ensemble des propriétés établies sur les schémas qui nous intéressent ici.

Afin d'évaluer numériquement l'ordre de précision, nous adoptons une solution régulière de (1.1) instationnaire et dont nous connaissons la forme analytique. Ces solutions exactes sont données par

$$h(x, t) = \frac{1}{Cx + C_h} \text{ et } q(x, t) = \frac{1}{Ct + C_q}, \quad (4.25)$$

où  $C, C_h, C_q \in \mathbb{R}$  sont des constantes telles que  $Cx + C_h \neq 0$  et  $Ct + C_q \neq 0$ . La fonction de topographie est définie par

$$Z(x) = H - h(x, t), \quad (4.26)$$

avec  $H \in \mathbb{R}$  une constante.

L'instationnarité de cette solution exacte est ici essentielle. En effet, l'utilisation de solution stationnaire, comme il est d'usage [11, 17, 49, 55, 56], ne permet pas ici d'évaluer les ordres d'approximations puisque les schémas, que nous évaluons, sont exacts

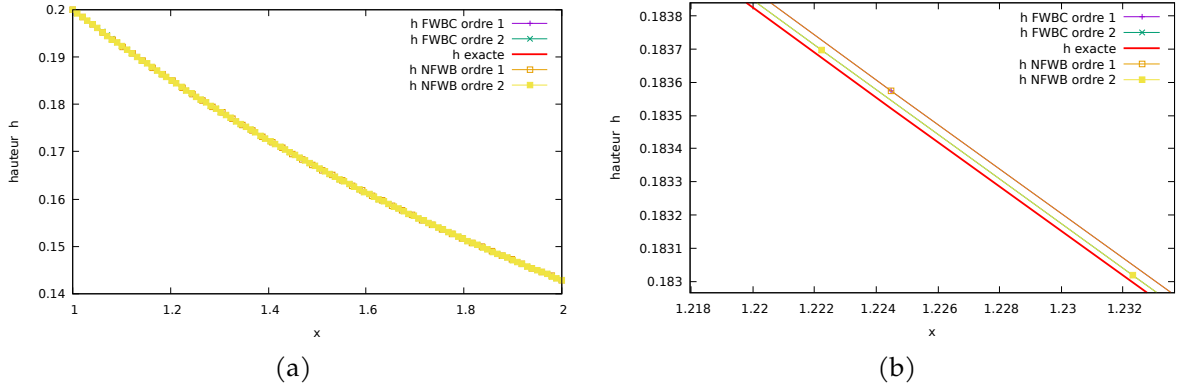


FIGURE 4.2 – 4.2a : Approximation de la hauteur d’eau pour les schémas d’ordre 1 FWBC, NFWB et leurs extensions  $\theta$ -FWBC et  $\theta$ -NFWB par rapport à la solution exacte pour  $N=50$ . 4.2b : Zoom sur les hauteurs d’eau approchées.

pour de telles solutions. En conséquence nous avons l’obligation de considérer des solutions exactes instationnaires.

À présent, équipés de cette solution régulière exacte, nous sommes en mesure d’évaluer les erreurs  $E_{\Delta x}$  au sens  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  données par (2.74)-(2.75)-(2.76). Considérant deux maillages successifs  $\Delta x$  et  $\Delta x'$  l’évaluation numérique de l’ordre de précision noté  $p$  est alors définie par

$$p = -\frac{\ln(E_{\Delta x}) - \ln(E_{\Delta x'})}{\ln(\Delta x) - \ln(\Delta x')}. \quad (4.27)$$

Dans la figure 4.2, nous présentons le comportement de l’approximation de la hauteur d’eau pour les schémas d’ordre 1 et 2 avec les constantes de la solution exacte (4.25) données par  $C_h = 3$ ,  $C_q = 1$ ,  $C = 2$ , et  $H = 2$  et sur l’intervalle  $[1, 2]$ . Le zoom présenté dans la figure 4.2b met en avant l’intérêt des extensions du second ordre  $\theta$ -FWBC et  $\theta$ -NFWB. Cette amélioration est confirmée par l’approximation du débit présentée sur la Figure 4.3.

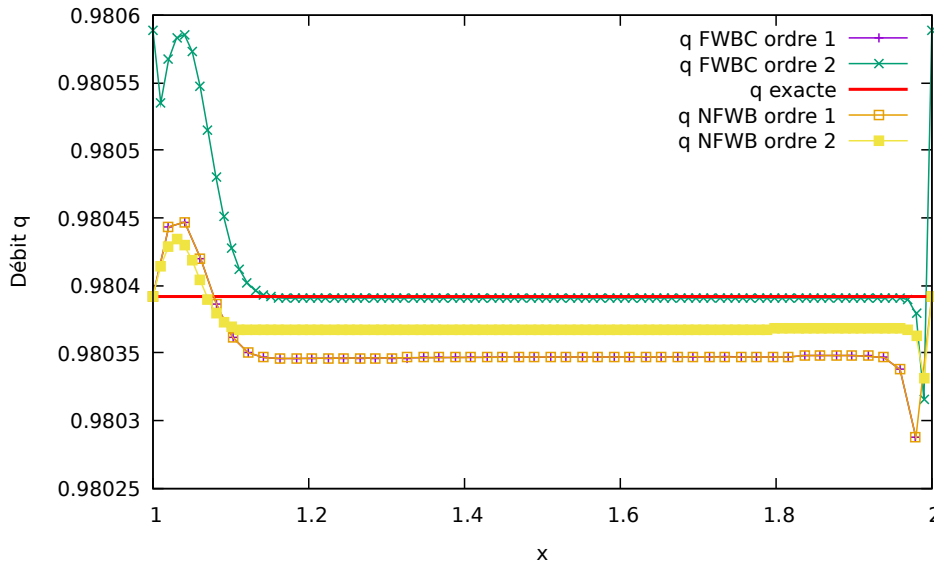


FIGURE 4.3 – Approximation du débit pour les différents schémas FWBC, NFWB,  $\theta$ -FWBC et  $\theta$ -NFWB pour  $N=50$ .

		$\theta$ -FWBC scheme				
		$q$				
cells		$L_{error}^1$		$L_{error}^2$		$L_{error}^\infty$
200		7.53e-02	–	5.00e-02	–	6.36e-02
400		1.83e-02	2.02	1.28e-02	1.95	1.84e-02
800		4.50e-03	2.02	3.25e-03	1.97	4.97e-03
1600		1.12e-03	2.00	8.18e-04	1.98	1.29e-03
3200		2.79e-04	2.00	2.04e-04	2.00	3.28e-04

TABLE 4.1 – Erreur d'approximation du débit et ordre de précision du schéma  $\theta$ -FWBC.

		$\theta$ -FWBC scheme				
		$h$				
cells		$L_{error}^1$		$L_{error}^2$		$L_{error}^\infty$
200		1.98e-02	–	1.09e-02	–	1.41e-02
400		5.25e-03	1.90	2.89e-03	1.90	3.96e-03
800		1.36e-03	1.93	7.44e-04	1.95	1.06e-03
1600		3.50e-04	1.95	1.89e-04	1.97	2.74e-04
3200		9.03e-05	1.95	4.79e-05	1.98	6.99e-05

TABLE 4.2 – Erreur d’approximation de la hauteur d’eau et ordre de précision du schéma  $\theta$ -FWBC.

	$\theta$ -NFWB scheme					
	$q$					
cells	$L_{error}^1$		$L_{error}^2$		$L_{error}^\infty$	
200	5.33e-02	–	3.57e-02	–	4.12e-02	–
400	1.38e-02	1.94	9.19e-03	1.94	1.14e-02	1.84
800	3.49e-03	1.97	2.33e-03	1.97	3.06e-03	1.89
1600	8.79e-04	1.98	5.84e-04	1.98	7.92e-04	1.94
3200	2.19e-04	1.99	1.46e-04	1.99	2.01e-04	1.97

TABLE 4.3 – Erreur d’approximation du débit et ordre de précision du schéma  $\theta$ -NFWB.

	$\theta$ -NFWB scheme					
	$h$					
cells	$L_{error}^1$		$L_{error}^2$		$L_{error}^\infty$	
200	7.23e-03	–	4.85e-03	–	7.71e-03	–
400	1.90e-03	1.91	1.30e-03	1.88	2.29e-03	1.74
800	4.88e-04	1.95	3.36e-04	1.94	6.27e-04	1.86
1600	1.24e-04	1.97	8.56e-05	1.97	1.64e-04	1.92
3200	3.13e-05	1.98	2.15e-05	1.98	4.22e-05	1.96

TABLE 4.4 – Erreur d’approximation de la hauteur d’eau et ordre de précision du schéma  $\theta$ -NFWB.

Dans les tables 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4, nous présentons les ordres numériques obtenus qui sont conformes à ce qui est attendu.

Le comportement numérique des schémas MUSCL du second ordre avec correction well-balanced est complété par des simulations sur des solutions stationnaires. Nous adoptons ici les solutions stationnaires usuelles du lac au repos, l’écoulement subcritique et de l’écoulement transcritique sans choc détaillés dans les sections 2.6.1, 2.6.2 et 2.6.5. Nous rappelons que les schémas FWBC et NFWB capturent exactement les solutions stationnaires en accord avec les résultats présentés dans les tables 4.5, 4.6 et 4.7. Les erreurs d’approximations présentées dans les tables 4.5, 4.6 et 4.7 pour les schémas  $\theta$ -FWBC et  $\theta$ -NFWB illustrent la capture exacte des ses solutions stationnaires.



	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
FWBC scheme	2.11e-19	2.81e-18	3.33e-18	2.75e-19	3.01e-18	3.82e-18
NFWB scheme	2.01e-19	2.73e-18	3.21e-18	2.67e-19	2.99e-18	3.62e-18
$\theta$ -FWBC scheme	1.74e-19	1.83e-19	2.27e-18	1.35e-19	1.81e-19	1.92e-19
$\theta$ -NFWB scheme	1.39e-19	1.71e-19	2.01e-18	1.15e-19	1.55e-19	3.82e-19

TABLE 4.5 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour le lac au repos avec un fond émergé pour  $N = 500$  cellules et  $t = 100s$ .

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
FWBC scheme	1.10e-13	1.17e-13	1.44e-13	6.57e-14	6.84e-14	8.21e-14
NFWB scheme	1.08e-13	1.15e-13	1.42e-13	6.38e-14	6.65e-14	8.01e-14
$\theta$ -FWBC scheme	9.12e-14	1.07e-13	1.35e-13	5.52e-14	5.75e-14	8.10e-14
$\theta$ -NFWB scheme	8.97e-14	1.02e-13	1.30e-13	5.41e-14	5.69e-14	8.02e-14

TABLE 4.6 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit l'expérience d'écoulement sous-critique pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100s$ .

	$h + z$			$q$		
	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$	$L^1_{error}$	$L^2_{error}$	$L^\infty_{error}$
FWBC-scheme	1.27e-14	1.67e-14	3.14e-14	1.27e-14	1.48e-14	1.98e-14
NFWB-scheme	1.07e-14	1.32e-14	3.05e-14	0.96e-14	1.03e-14	1.54e-14
$\theta$ -FWBC scheme	1.91e-14	2.20e-14	3.92e-14	2.21e-14	2.49e-14	3.42e-14
$\theta$ -NFWB scheme	1.03e-14	1.29e-14	3.0e-14	0.95e-14	1.01e-14	1.48e-14

TABLE 4.7 – Erreur de l'approximation de la surface libre et du débit pour l'écoulement transcritique sans choc pour  $N = 1000$  cellules et  $t = 100s$ .

# UNE ÉQUATION DE LUBRIFICATION POUR UN MODÈLE SIMPLIFIÉ DE FLUIDE RHÉOFLUIDIFIANT

---

L'équation de lubrification est une simplification assez classique du système incompressible de Navier-Stokes. Elle est obtenue pour des couches minces de fluide, lorsque les effets visqueux équilibrent la force de pression. Cela se produit par exemple pour les couches minces d'huile, d'où le nom de l'équation. L'étude de cette approximation remonte à Reynolds en 1886 [53]. Plusieurs mises à l'échelle sont impliquées pour obtenir ce modèle. Tout d'abord, le rapport  $\delta$  d'aspect entre l'épaisseur du film et la longueur caractéristique du substrat doit être faible. Simultanément, l'échelle de temps doit être d'ordre  $1/\delta$ . C'est ce qu'on appelle le régime des grandes ondes, et il est classiquement utilisé dans l'approximation des eaux peu profondes. L'équation de lubrification nécessite une autre hypothèse d'équilibre entre les effets visqueux et les effets de pression, ce qui revient à négliger tous les effets cinématiques. Cet écoulement simplifié est connu sous le nom d'écoulement de Stokes. L'équation de lubrification elle-même est alors obtenue par intégration sur l'épaisseur du fluide.

Nous nous intéressons ici au modèle de lubrification pour une classe de fluides non newtoniens. Plusieurs fluides sont connus pour s'écarter de la rhéologie newtonienne habituelle, où le tenseur des contraintes déviatoriques est une fonction linéaire du tenseur des vitesses de déformation, définissant ainsi la viscosité dynamique du fluide. L'équation de lubrification pour les fluides newtoniens a été étudiée par exemple par H-E.Huppert [38]. Les fluides non newtoniens se retrouvent dans plusieurs applications en ingénierie, biologie, géophysique... En particulier, les fluides viscoplastiques ou pseudoplastiques sont impliqués dans divers problèmes géologiques, par exemple les coulées de lave, les coulées de boue et les avalanches. Nous renvoyons à [1] pour une revue sur le sujet. Un modèle largement utilisé est le modèle plastique dit de Bingham.

Ce modèle fait intervenir une limite d'élasticité, à savoir un seuil sur la vitesse de déformation : pour des valeurs de la vitesse de déformation supérieures à ce seuil, le fluide se comporte comme un fluide visqueux, pour des valeurs inférieures, il ressemble à un solide. On peut l'imaginer comme un fluide à viscosité infinie. Nous renvoyons aux articles de K-F.Liu et C-C.Mei [45] et de N-J.Balmforth, R-V.Craster, A-C.Rust, et R.Sassi [3] pour l'étude de ces fluides dans l'approximation de la lubrification. Les deux articles contiennent également une bibliographie complète. K-F.Liu et C-C.Mei ont également introduit dans [44] un modèle de Bingham perturbé, qui est en fait un modèle à deux viscosités, avec une viscosité élevée pour les petites déformations. Lorsque cette viscosité tend vers  $+\infty$ , le modèle de Bingham est retrouvé, donnant ainsi une interprétation de mécanique des fluides de ce comportement solide.

C'est précisément le modèle à deux viscosités que nous étudions ici. Nous décrivons d'abord le modèle mathématique que nous utilisons, à savoir les équations incompressibles de Navier-Sokes dans un domaine dépendant du temps, puisque nous considérons un problème à frontière libre. En particulier, nous expliquons en détail toutes les mises à l'échelle impliquées. Ensuite, nous nous tournons vers l'équation de lubrification elle-même, qui est une équation unidimensionnelle, obtenue en faisant la moyenne des précédentes le long de l'épaisseur. Enfin, nous fournissons quelques illustrations numériques basées sur un schéma de volumes finis.

## 5.1 Le modèle mathématique

Dans cette section, nous mettons en place le modèle. Le point de départ est le système incompressible de Navier-Stokes. Nous nous limitons dans cet article au cas bidimensionnel, visant ainsi une équation de lubrification unidimensionnelle. Des calculs similaires peuvent être effectués en dimension trois d'espace. Le domaine que nous considérons est  $\Omega_t$  défini par  $f_b(x) < z < \phi(t, x)$ , pour  $t > 0$  et  $x \in (-\infty, +\infty)$ , où  $f_b$  est une topographie donnée, et  $\phi$  est une surface libre. Les notations que nous utilisons sont rassemblées dans la Figure 5.1. Les équations incompressibles de Navier-Stokes

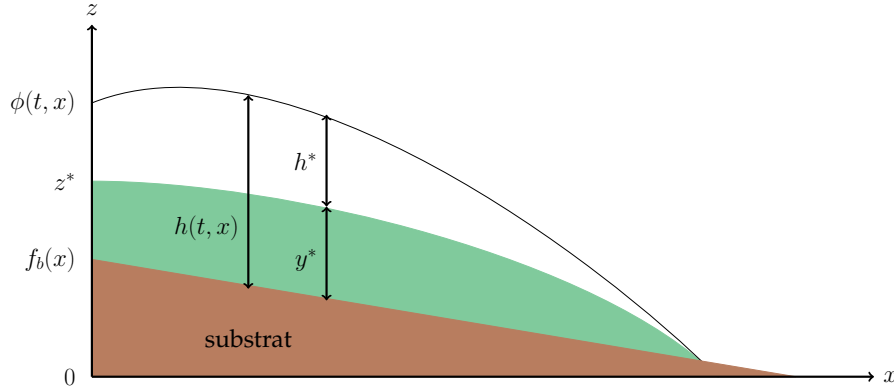


FIGURE 5.1 – Notations pour les deux viscosités fluides :  $\phi$  est la surface libre ;  $f_b$  est la topographie du substrat ;  $z^*$  est l'ordonnée qui sépare les "petites déformations" (zone blanche) des "grandes déformations" (zone verte), voir la section 3 ci-dessous. Nous introduisons les épaisseurs  $h = \phi - f_b$ ,  $h^* = \phi - z^*$ ,  $y^* = h - h^*$ .

sont les suivantes

$$\partial_x u + \partial_z v = 0, \quad (5.1)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_z u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\rho} (\partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz}), \quad (5.2)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_z v = -g - \frac{1}{\rho} \partial_z p + \frac{1}{\rho} (\partial_x \tau_{zx} + \partial_z \tau_{zz}), \quad (5.3)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $U = (u, v)$  est le champ de vitesse, et le tenseur de contrainte  $\sigma$  s'écrit comme la somme d'un tenseur de contrainte volumétrique, impliquant la pression  $p$ , et d'un tenseur de contrainte déviatorique  $\tau$  :

$$\sigma = -p \mathbb{I}_2 + \tau, \quad \tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zz} \end{pmatrix}.$$

La densité  $\rho$  est supposée constante ici, et le tenseur  $\sigma$  sera défini dans la Section 5.1.1 ci-dessous.

Les conditions aux limites sont :

$z = \phi$  : interface fluide-atmosphère. Nous avons la continuité du tenseur des contraintes à la surface libre, ainsi qu'une condition limite cinématique. Comme l'atmosphère peut être considérée comme un fluide idéal, le tenseur des contraintes peut être considéré

comme égal à zéro au-dessus de  $\phi$ . On obtient donc

$$\sigma \cdot n|_{\phi} = (-p\mathbb{I}_2 + \tau) \cdot n|_{\phi} = 0, \quad \partial_t \phi + u_{\phi} \partial_x \phi = v_{\phi}. \quad (5.4)$$

$z = f_b$  : interface entre le fluide et le substrat, qui est fixe. Il s'agit d'une interface matérielle, sur laquelle nous avons la condition limite de non-glissement

$$u|_{f_b} = u_b, \quad v|_{f_b} = v_b. \quad (5.5)$$

Ici,  $(u_b, v_b)$  est la vitesse dite basale. Souvent, en mécanique des fluides, la vitesse de basale est nulle, mais pour les applications géophysiques, elle peut en fait être la force motrice, et donc dépendre de  $(t, x)$ .

### 5.1.1 Rhéologie

Pour un fluide, le tenseur des contraintes déviatoriques  $\tau$  est généralement une fonction du tenseur des taux de déformation

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla U^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\partial_x u & \partial_x v + \partial_z u \\ \partial_x v + \partial_z u & 2\partial_z v \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Un fluide Newtonien est caractérisé par une relation linéaire, définissant la viscosité du fluide, qui est supposée ici être isotrope et constante. Nous introduisons donc le coefficient de viscosité dynamique  $\mu$ , et définissons le tenseur des contraintes Newtoniennes par

$$\tau_N = 2\mu\dot{\epsilon} = 2\rho\nu\dot{\epsilon},$$

où  $\nu = \mu/\rho$  est la viscosité cinématique.

Les fluides qui ne suivent pas ce type de loi constitutive sont non-Newtoniens. Dans le cas général, le principe d'invariance matérielle implique que le tenseur des contraintes ne dépend que des invariants de similitude du tenseur des taux de déformation, en particulier les coefficients de son polynôme caractéristique. En dimension 2, il n'y a que deux coefficients de ce type  $\dot{\epsilon}_I$  et  $\dot{\epsilon}_{II}$ . A savoir  $\dot{\epsilon}_I$  est la trace de la matrice et  $\dot{\epsilon}_{II}$  son déterminant. Pour un fluide incompressible, la trace est nulle, et de plus nous avons

$$\dot{\epsilon}_{II} = \dot{\epsilon}_{xx}\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{zx}\dot{\epsilon}_{xz} = \partial_x u \partial_z v - \frac{1}{4}(\partial_x v + \partial_z u)^2 = -\left((\partial_x u)^2 + \frac{1}{4}(\partial_x v + \partial_z u)^2\right).$$

Ceci permet de définir le taux de déformation  $\dot{\gamma}$  comme étant

$$\dot{\gamma} = 2\sqrt{-\dot{\epsilon}_{II}} = 2\sqrt{(\partial_x u)^2 + \frac{1}{4}(\partial_x v + \partial_z u)^2}. \quad (5.7)$$

De manière similaire, nous pouvons vérifier que la norme de Frobenius de  $\dot{\epsilon}$ , c'est-à-dire  $\|\dot{\epsilon}\|^2 = \sum_{i,j} (\epsilon_{ij})^2$ , satisfait à

$$\|\dot{\epsilon}\|^2 = \dot{\gamma}^2/2. \quad (5.8)$$

Une illustration très sommaire des comportements possibles des fluides non newtoniens est donnée à la Figure 5.2. Dans ce travail, nous nous intéresserons surtout au cas dit pseudo-plastique, représenté sur la courbe rouge de la Figure 5.2, pour lequel des preuves expérimentales peuvent être fournies, voir [14]. Ce type de modèles est également utilisé en géophysique, voir [6, 59, 69]. Nous souhaitons donner un modèle

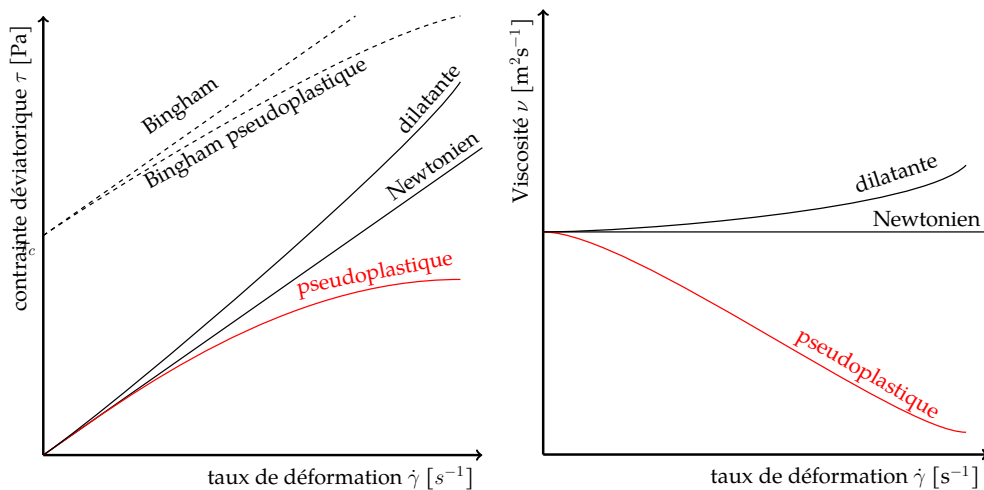


FIGURE 5.2 – Comportement qualitatif de divers types de fluides. A gauche : contrainte déviatorique par rapport au taux de déformation– A droite : viscosité apparente en fonction du taux de déformation. Les fluides de type Bingham peuvent être considérés comme bénéficiant d'une viscosité apparente infinie en dessous du seuil  $\tau_c$ .

simplifié pour ce fluide pseudo-plastique, qui permette de traiter des calculs explicites. La principale caractéristique de ce type de fluides est une viscosité non linéaire, qui diminue avec le taux de déformation. En imitant le modèle de Bingham, qui est basé sur un seuil sur la contrainte de cisaillement, nous considérons un modèle avec un seuil sur le taux de déformation : la viscosité est égale à une certaine valeur  $\mu_B$  pour les petites déformations, c'est-à-dire  $\dot{\gamma} < \gamma_c$ , où  $\gamma_c > 0$  est une constante donnée, et à une autre

valeur  $\mu$  pour les grandes déformations,  $\dot{\gamma} > \gamma_c$ . De tels modèles ont été introduits par K-F.Liu et C-C.Mei [44], et le cas limite  $\nu_B \rightarrow \infty$ , qui conduit à un fluide de Bingham, est étudié dans [45] et [3]. Remarquons qu'en utilisant (5.8) le seuil  $\gamma_c$  sur  $\dot{\gamma}$  peut être remplacé par un seuil  $\gamma'_c = \gamma_c/\sqrt{2}$  sur  $\|\dot{\epsilon}\|$ .

Une formulation multidimensionnelle pour ces fluides pseudo-plastiques simplifiés est donc

$$\tau_{PP} = \begin{cases} 2\rho\nu_B\dot{\epsilon} & \text{si } \|\dot{\epsilon}\| \leq \gamma'_c \\ 2\rho\nu\dot{\epsilon} + 2\rho(\nu_B - \nu)\gamma'_c \frac{\dot{\epsilon}}{\|\dot{\epsilon}\|} & \text{si } \|\dot{\epsilon}\| > \gamma'_c \end{cases} \quad (5.9)$$

où nous avons introduit les viscosités cinématiques  $\nu$  et  $\nu_B$ .

Un cas limite particulier est  $\nu_B \rightarrow \infty$ , ce qui conduit à un fluide de type Bingham. Pour visualiser cela, il est commode de définir les quantités suivantes (voir la figure 5.3 ci-dessous pour une illustration en 1 dimension)

$$\tau_c = \nu_B\gamma'_c, \quad \tau_* = (\nu_B - \nu)\gamma'_c = (1 - \nu/\nu_B)\tau_c, \quad (5.10)$$

de sorte que la définition (5.9) peut être réécrite

$$\tau_{PP} = \begin{cases} 2\rho\nu_B\dot{\epsilon} & \text{if } \|\dot{\epsilon}\| \leq \tau_c/\nu_B \\ 2\rho\nu\dot{\epsilon} + 2\rho(1 - \nu/\nu_B)\tau_c \frac{\dot{\epsilon}}{\|\dot{\epsilon}\|} & \text{if } \|\dot{\epsilon}\| > \tau_c/\nu_B \end{cases} \quad (5.11)$$

Il est clair sur cette formulation que la limite pertinente est  $\nu_B \rightarrow +\infty$ , ainsi que  $\gamma'_c \rightarrow 0$ , en gardant  $\nu_B\gamma'_c = \tau_c$ . Ce faisant, nous retrouvons le tenseur de contraintes classique de Bingham, avec le seuil  $\tau_c$  :

$$\tau_{\text{Bing}} = \begin{cases} \text{tout } \tau \text{ t.q. } \|\tau\| \leq \tau_c & \text{si } \dot{\epsilon} = 0 \\ 2\rho\nu\dot{\epsilon} + 2\rho\tau_c \frac{\dot{\epsilon}}{\|\dot{\epsilon}\|} & \text{si } \|\dot{\epsilon}\| > 0 \end{cases}$$

Enfin, notons que dans le contexte pseudo-plastique (ou rhéofluidifiant), nous considérons  $0 < \nu < \nu_B$ , mais des calculs similaires peuvent être effectués dans tous les cas.

Il est pratique pour les mises à l'échelle ci-dessous de réécrire l'expression (5.11) en

utilisant une viscosité cinématique équivalente  $\nu_{eq}$ , qui satisfait  $\nu \leq \nu_{eq} \leq \nu_B$  :

$$\tau_{PP} = 2\rho\nu_{eq}\dot{\epsilon}, \quad \text{où } \nu_{eq} = \begin{cases} \nu_B & \text{si } \|\dot{\epsilon}\| \leq \gamma'_c \\ \nu + (1 - \nu/\nu_B) \frac{\tau_c}{\|\dot{\epsilon}\|} & \text{si } \|\dot{\epsilon}\| > \gamma'_c \end{cases}. \quad (5.12)$$

### 5.1.2 Mises à l'échelle

Nous introduisons maintenant les lois d'échelle, à savoir la couche mince, ou plus précisément l'approximation des ondes longues, et le mouvement lent, afin d'obtenir finalement le modèle de lubrification. Ce type de mise à l'échelle est déjà présent, par exemple dans [3] dans le contexte d'un fluide visco-plastique. Nous proposons donc la famille d'échelles suivante : nous introduisons un premier ensemble d'échelles caractéristiques, à savoir les dimensions  $\ell_0$  et  $h_0$ , les vitesses caractéristiques  $u_0$  et  $v_0$ , et un temps caractéristique  $t_0$ . Les quantités  $\ell_0$  et  $u_0$  correspondent à la direction horizontale,  $h_0$  et  $v_0$  à la direction verticale. Le rapport d'aspect  $\delta = h_0/\ell_0$  sera un paramètre important, supposé petit dans le cas de la couche mince. Les variables adimensionnelles sont alors définies par

$$\begin{aligned} x &= \ell_0 \bar{x}, & z &= h_0 \bar{z}, & t &= t_0 \bar{t} \\ u &= u_0 \bar{u}, & v &= v_0 \bar{v}. \end{aligned}$$

Tout d'abord, nous réécrivons l'équation d'incompressibilité (5.1) dans les variables rééchelonnées. Nous obtenons

$$\frac{u_0}{\ell_0} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \frac{v_0}{h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{v} = 0,$$

et suivant le principe de moindre dégénérescence [**dyke1964perturbation**], ceci implique  $u_0/\ell_0 = v_0/h_0$ , ou de manière équivalente  $\ell_0/h_0 = u_0/v_0$ . Ainsi  $v_0/u_0 = \delta$ , de sorte que dans l'approximation de la couche mince  $v_0$  est également petit par rapport à  $u_0$ .

Nous nous tournons maintenant vers la partie cinématique de l'équation. En utilisant  $u_0/\ell_0 = v_0/h_0$ , nous obtenons facilement

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_z u = \frac{u_0}{t_0} \partial_{\bar{t}} \bar{u} + \frac{u_0 v_0}{h_0} \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \frac{u_0 v_0}{h_0} \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{u}.$$



Une fois encore, nous appliquons le principe de moindre dégénérescence et obtenons  $t_0 = \ell_0/u_0 = h_0/v_0$ , ou, comme prévu,  $u_0 = \ell_0/t_0$  et  $v_0 = h_0/t_0$ . Nous procédons de la même manière pour l'équation de la quantité de mouvement en  $v$  et obtenons finalement

$$\partial_t u + u \partial_x u + v \partial_z u = \frac{u_0 v_0}{h_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{u}) = \delta \frac{u_0^2}{h_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{u}), \quad (5.13)$$

$$\partial_t v + u \partial_x v + v \partial_z v = \frac{u_0 v_0}{\ell_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{v}) = \delta^2 \frac{u_0^2}{h_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{v}), \quad (5.14)$$

où nous avons mis l'accent sur le facteur d'aspect  $\delta = h_0/\ell_0 = v_0/u_0$ .

En suivant N-J.Balmforth, R-V.Craster, A-C.Rust, et R.Sassi [3], nous redimensionnons la pression et le tenseur des contraintes par

$$p = \rho g h_0 \bar{p}, \quad \tau = \rho \nu \frac{u_0}{h_0} \bar{\tau}. \quad (5.15)$$

Nous pouvons maintenant écrire la version redimensionnée des équations de quantité de mouvement de Navier-Stokes (5.2) et (5.3) :

$$\delta \frac{u_0^2}{h_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{u}) = -\delta g \partial_{\bar{x}} \bar{p} + \nu \frac{u_0}{h_0^2} (\delta \partial_{\bar{x}} \bar{\tau}_{xx} + \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}_{xz}), \quad (5.16)$$

$$\delta^2 \frac{u_0^2}{h_0} (\partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{v}) = -g \partial_{\bar{z}} \bar{p} - g + \nu \frac{u_0}{h_0^2} (\delta \partial_{\bar{x}} \bar{\tau}_{xz} + \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}_{zz}). \quad (5.17)$$

À ce stade, nous introduisons deux quantités classiques sans dimension, à savoir les nombres de Froude et de Reynolds, définis à partir de la vitesse *horizontale* caractéristique  $u_0$ , de l'extension *verticale*  $h_0$ , et de la viscosité pour les *grandes déformations*  $\nu$  :

$$\frac{1}{Fr^2} = \frac{g h_0}{u_0^2}, \quad \frac{1}{Re} = \frac{\nu}{u_0 h_0}. \quad (5.18)$$

Nous divisons les deux équations précédentes par  $u_0^2/h_0$ , et en remarquant que  $\tau = \rho Re u_0^2 \bar{\tau}$ , nous obtenons

$$\delta (\partial_{\bar{t}} \bar{u} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{u} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{u}) = -\frac{\delta}{Fr^2} \partial_{\bar{x}} \bar{p} + \frac{1}{\delta Re} (\delta \partial_{\bar{x}} \bar{\tau}_{xx} + \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}_{xz}), \quad (5.19)$$

$$\delta^2 (\partial_{\bar{t}} \bar{v} + \bar{u} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \bar{v} \partial_{\bar{z}} \bar{v}) = -\frac{1}{Fr^2} \partial_{\bar{z}} \bar{p} - \frac{1}{Fr^2} + \frac{1}{Re} (\delta \partial_{\bar{x}} \bar{\tau}_{xz} + \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}_{zz}). \quad (5.20)$$

L'idée est maintenant d'envoyer  $\delta$  à zéro, mettant ainsi en œuvre l'hypothèse de la

couche mince, mais dans un régime où le nombre de Reynolds  $Re$  est maintenu d'ordre 1, ainsi qu'un équilibre entre la viscosité et les forces de gravité. Par conséquent, nous fixons

$$Fr^2 = \delta Re, \quad Re = O(1). \quad (5.21)$$

Cela donne facilement

$$u_0 = \frac{gh_0^3}{\ell_0 \nu} = \delta \frac{gh_0^2}{\nu}, \quad (5.22)$$

qui est l'échelle proposée dans [3]. Elle introduit une autre vitesse caractéristique, à savoir  $u'_0 = (gh_0^2)/\nu$ . Cette dernière égalité montre qu'il s'agit bien d'une mise à l'échelle du mouvement lent, nous répondons donc à l'exigence initiale.

En insérant (5.21) dans les équations (5.19) et (5.20), et en ne gardant que les termes dominants d'ordre  $\delta^{-1}$ , on obtient d'abord l'équation de Stokes sans dimension

$$-\partial_{\bar{x}} \bar{p} + \partial_{\bar{z}} \bar{\tau}_{xz} = 0, \quad (5.23)$$

puis la relation hydrostatique sans dimension pour la pression

$$\partial_{\bar{z}} \bar{p} = -1. \quad (5.24)$$

Maintenant, nous calculons  $\bar{\tau}$  à partir de (5.12). Nous commençons par réécrire  $\dot{\epsilon}$  en variables rééchelonnées

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{u_0}{\ell_0} \partial_{\bar{x}} \bar{u} & \frac{v_0}{\ell_0} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \frac{u_0}{h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{u} \\ \frac{v_0}{\ell_0} \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \frac{u_0}{h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{u} & 2\frac{v_0}{h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{v} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \frac{u_0}{h_0} \begin{pmatrix} 2\delta \partial_{\bar{x}} \bar{u} & \delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_{\bar{z}} \bar{u} \\ \delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_{\bar{z}} \bar{u} & 2\delta \partial_{\bar{z}} \bar{v} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Nous en déduisons facilement

$$\bar{\tau} = \frac{1}{2} \frac{\nu_{eq}}{\nu} \begin{pmatrix} 2\delta \partial_{\bar{x}} \bar{u} & \delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_{\bar{z}} \bar{u} \\ \delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_{\bar{z}} \bar{u} & 2\delta \partial_{\bar{z}} \bar{v} \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\nu_{eq}}{\nu} \begin{pmatrix} 0 & \partial_{\bar{z}} \bar{u} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Nous définissons une viscosité équivalente sans dimension par  $\bar{\nu}_{eq} = \nu_{eq}/\nu$ , et réécrivons l'équation (5.23)

$$\partial_{\bar{z}} (\bar{\nu}_{eq} \partial_{\bar{z}} \bar{u}) = \partial_{\bar{x}} \bar{p}. \quad (5.27)$$

Nous nous tournons maintenant vers l'expression de  $\bar{\nu}_{eq}$ . Nous remarquons d'abord

que, en utilisant (5.25)

$$\|\dot{\epsilon}\| = \frac{u_0}{h_0} \sqrt{2} \sqrt{\delta^2 (\partial_{\bar{x}} \bar{u})^2 + \frac{1}{4} (\delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_{\bar{z}} \bar{u})^2} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{u_0}{h_0} |\partial_{\bar{z}} \bar{u}|. \quad (5.28)$$

Ainsi, la condition  $\|\dot{\epsilon}\| > \gamma'_c$  nous amène à définir un seuil sans dimension  $\bar{\gamma}_c = (\sqrt{2} h_0 / u_0) \gamma'_c = (h_0 / u_0) \gamma_{c'}$  de sorte que la condition  $\|\dot{\epsilon}\| > \gamma'_c$  devient  $|\partial_{\bar{z}} \bar{u}| > \bar{\gamma}_c$ . On a alors

$$\bar{\nu}_{eq} = \frac{\nu_{eq}}{\nu} = \begin{cases} \frac{\nu_B}{\nu} & \text{si } |\partial_{\bar{z}} \bar{u}| \leq \bar{\gamma}_c \\ 1 + (1 - \nu / \nu_B) \frac{\tau_c h_0 \sqrt{2}}{\nu u_0 |\partial_{\bar{z}} \bar{u}|} & \text{si } |\partial_{\bar{z}} \bar{u}| > \bar{\gamma}_c \end{cases} \quad (5.29)$$

Nous introduisons une viscosité sans dimension  $\bar{\nu}_B$  et une limite d'élasticité sans dimension  $B$  en définissant

$$\bar{\nu}_B = \frac{\nu_B}{\nu} \geq 1, \quad B = \frac{\sqrt{2} \tau_c h_0}{\nu u_0}, \quad (5.30)$$

de sorte que le tenseur de contrainte déviatorique sans dimension devient (voir Figure 5.3)

$$\bar{\tau}_{xz} = \begin{cases} \bar{\nu}_B \partial_{\bar{z}} \bar{u} & \text{si } |\partial_{\bar{z}} \bar{u}| \leq \bar{\gamma}_c \\ \partial_{\bar{z}} \bar{u} + (1 - 1/\bar{\nu}_B) B \operatorname{sgn}(\partial_{\bar{z}} \bar{u}) & \text{si } |\partial_{\bar{z}} \bar{u}| > \bar{\gamma}_c \end{cases} \quad (5.31)$$

Il s'agit du modèle proposé par Liu et Mei dans [44].

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous remarquons que les conditions aux limites sans glissement et cinématiques restent inchangées par la mise à l'échelle. En revanche, la continuité du tenseur des contraintes à travers la surface libre  $\phi$  est grandement simplifiée. En rappelant que  $\phi = h_0 \bar{\phi}$ , on obtient en effet

$$\sigma \cdot n = \begin{pmatrix} -p \partial_x \phi + \tau_{xx} \partial_x \phi - \tau_{xz} \\ p + \tau_{xz} \partial_x \phi - \tau_{zz} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} -\delta \bar{p} g h_0 \partial_{\bar{x}} \bar{\phi} + \delta \nu \frac{u_0}{h_0} \bar{\tau}_{xx} \partial_{\bar{x}} \bar{\phi} - \nu \frac{u_0}{h_0} \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{p} g h_0 + \delta \nu \frac{u_0}{h_0} \bar{\tau}_{xz} \partial_{\bar{x}} \bar{\phi} - \nu \frac{u_0}{h_0} \bar{\tau}_{zz} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, en utilisant (5.26), nous obtenons

$$\sigma \cdot n = \rho \begin{pmatrix} \delta \left( (\delta \nu_{eq} \frac{u_0}{h_0} \partial_{\bar{x}} \bar{u} - g h_0 \bar{p}) \partial_{\bar{x}} \bar{\phi} - \delta \nu_{eq} \frac{u_0}{2 h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{v} \right) - \nu_{eq} \frac{u_0}{2 h_0} \partial_{\bar{z}} \bar{u} \\ \delta \nu_{eq} \frac{u_0}{2 h_0} (\delta^2 \partial_{\bar{x}} \bar{v} + (\partial_{\bar{z}} \bar{u}) \partial_{\bar{x}} \bar{\phi} - \partial_{\bar{z}} \bar{v}) - g h_0 \bar{p} \end{pmatrix}.$$

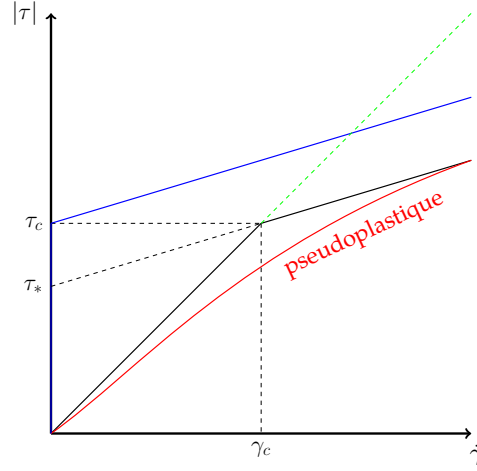


FIGURE 5.3 – Modèle simplifié de rhéofluidication. Nous considérons une approximation linéaire par morceaux (en noir) de la loi pseudoplastique "théorique" (en rouge). Les paramètres  $\tau_*$  and  $\tau_c$  sont définis par (5.10). La courbe bleue correspond à la limite de Bingham :  $\nu_B \rightarrow +\infty$ ,  $\gamma_c \rightarrow 0$  avec  $\gamma_c \nu_B = \tau_c$ . La ligne pointillée verte est la limite newtonienne pure  $\nu_B \rightarrow \nu$ .

En laissant  $\delta$  tend vers zéro, on obtient donc

$$\bar{p}|_{\bar{\phi}} = 0, \quad \partial_z \bar{u}|_{\bar{\phi}} = 0, \quad (5.32)$$

En d'autres termes, on récupère séparément la continuité de la pression et la continuité de  $\partial_z u$ .

## 5.2 Équation de lubrification

L'équation dite de lubrification est obtenue en intégrant les équations (5.1) le long de la direction verticale. Les hypothèses d'ondes longues et de mouvement lent impliquent que nous obtenons une seule équation non linéaire sur la profondeur  $\phi$ . Des calculs similaires ont été effectués par K-F.Liu et C-C.Mei [44], pour un modèle à deux viscosités, afin de justifier le cas de Bingham, qui correspond à  $\nu_B \rightarrow \infty$  dans notre contexte. Pour les fluides de Bingham, nous nous référons à K-F.Liu et C-C.Mei [45], et plus récemment à N-J.Balmforth, R-V.Craster, A-C.Rust, et R.Sassi [3]. L'équation finale est obtenue par trois étapes que nous présentons en détail maintenant.

Nous rappelons les équations que nous avons obtenues dans la section précédente,

en omettant les barres pour plus de clarté. Nous avons d'abord la relation hydrostatique

$$\partial_z p = -1, \quad f_b \leq z \leq \phi. \quad (5.33)$$

Ensuite, l'équation de Stokes sans dimension (5.23)

$$\partial_z(\tau_{xz}) = \partial_x p, \quad f_b \leq z \leq \phi, \quad (5.34)$$

où  $\tau_{xz}$  est le tenseur de contrainte déviatorique sans dimension défini par (5.31).

Ces équations sont couplées avec les conditions aux limites suivantes (dans ces relations,  $t$  et  $x$  sont des paramètres cachés) :

— sur la surface libre  $z = \phi$

$$p(\phi) = 0, \quad \partial_z u(\phi) = 0, \quad (5.35)$$

— sur  $z = f_b$

$$u(f_b) = u_b, \quad v(f_b) = v_b. \quad (5.36)$$

En ce qui concerne d'abord la pression, en utilisant la condition aux limites sur la surface libre, nous obtenons l'approximation hydrostatique habituelle

$$p(z) = \phi - z, \quad f_b \leq z \leq \phi. \quad (5.37)$$

L'équation moyenne que nous recherchons est obtenue en intégrant en  $z$  l'équation d'incompressibilité, ou conservation de la masse,

$$\partial_x u + \partial_z v = 0.$$

Ceci est tout à fait classique, voir par exemple [3] dans le même contexte de mouvement lent, ou [39] pour l'approximation des eaux peu profondes. On obtient

$$v(t, x, \phi) = v(t, x, f_b) - \int_{f_b}^{\phi} \partial_x u(z) dz \quad (5.38)$$

$$= v(t, x, f_b) - \partial_x \left( \int_{f_b}^{\phi} u(z) dz \right) + u(t, x, \phi) \partial_x \phi - u(t, x, f_b) \partial_x f_b. \quad (5.39)$$

La condition limite cinématique sur  $z = \phi$  conduit à  $v(t, x, \phi) - u(t, x, \phi) \partial_x \phi = \partial_t \phi = \partial_t h$  dans la première équation. Pour  $z = f_b$ , nous utilisons la condition limite sans glisse-

ment (5.36), pour obtenir l'équation moyennée suivante.

$$\partial_t h + \partial_x \left( \int_{f_b}^{\phi} u(z) dz \right) = v_b. \quad (5.40)$$

Le flux  $\int_{f_b}^{\phi} u(z) dz$  peut être calculé explicitement en fonction de  $\phi$ , en intégrant deux fois l'équation (5.34).

La première étape du calcul du flux consiste à obtenir le profil vertical de vitesse. La structure générale de ce profil est la suivante. Nous avons  $\tau_{xz} = F(\partial_z u)$ , où  $F$  est une fonction continue, univoque et croissante, avec  $F(0) = 0$ , voir (5.31) et la Figure 5.3. De ((5.34) et (5.37), nous sommes amenés à résoudre  $\partial_z(F(\partial_z u)) = \partial_x \phi$ . Puisque  $F(\partial_z u) = 0$  pour  $z = \phi$  (ou de manière équivalente  $\partial_z u = 0$ ), on obtient  $F(\partial_z u) = \partial_x \phi(z - \phi)$ , de sorte que  $F(\partial_z u)$  est monotone (croissant si  $\partial_x \phi \geq 0$ , décroissant sinon). Comme  $F$  est croissant,  $\partial_z u$  est également monotone, en particulier, puisque  $\partial_z u = 0$  pour  $z = \phi$ , son signe reste constant. Par conséquent,  $|\partial_z u|$  est décroissant en  $z$  (augmente avec la profondeur).

Le seuil de la formule (5.31) finit par diviser le fluide en deux couches. Soit  $z^*$  défini par  $|\partial_z u(z^*)| = \gamma_c$ . Sous réserve que  $z^* \in ]f_b, \phi[$  (voir ci-dessous pour les formules précises), on a une région de "petite déformation", c'est-à-dire  $|\partial_z u(z)| < \gamma_c$ , pour  $z \in ]z^*, \phi[$ , car  $|\partial_z u|$  est décroissante de 0 pour une profondeur croissante. De même pour  $z \in ]f_b, z^*[$  on a  $|\partial_z u(z)| > \gamma_c$ , de sorte que finalement, d'après (5.31), la vitesse est régie par le système d'équations

$$\begin{aligned} \nu_B \partial_{zz} u &= \partial_x \phi, & z^* \leq z \leq \phi, \\ \partial_{zz} u &= \partial_x \phi, & f_b \leq z \leq z^*, \end{aligned}$$

où pour la deuxième équation nous avons utilisé que  $\partial_z u$  a un signe constant. Ces équations sont complétées par les conditions aux limites

$$\partial_z u = 0, \quad z = \phi; \quad u = 0, \quad z = f_b.$$

Remarquons que la courbe  $z = z^*$  n'est pas une interface physique, pourtant nous avons la continuité du tenseur des contraintes, ou de manière équivalente ici la continuité de  $\partial_z u$ .

Maintenant les calculs sont assez faciles. On intègre une fois la première équation

entre  $\phi$  et  $z^*$ , pour obtenir

$$\partial_z u = \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi (z - \phi).$$

Cela conduit à

$$\dot{\gamma} = |\partial_z u| = \frac{1}{\nu_B} |\partial_x \phi| (\phi - z),$$

de sorte que la valeur de  $z^*$  et l'épaisseur  $h^*$  de cette couche sont données par

$$z^* = \max \left( \phi - \frac{B}{|\partial_x \phi|}, f_b \right), \quad h^* = \phi - z^* = \min \left( \frac{B}{|\partial_x \phi|}, h \right). \quad (5.41)$$

Ces définitions assurent que  $z^* \geq f_b$  et  $h^* \leq h$ , et sont valables pour  $\partial_x \phi = 0$  avec la convention  $B/0 = \infty$ . Remarquons que  $z^*$  peut être égal à  $f_b$  pour des pentes faibles (petit  $\partial_x \phi$ ), ou de petites profondeurs (petit  $h$ ). Inversement,  $z^* \rightarrow \phi$  lorsque  $|\partial_x \phi|$  tend vers  $\infty$ .

En intégrant à nouveau entre  $z^*$  et  $\phi$ , on obtient le profil de vitesse pour  $\phi \geq z \geq z^*$  :

$$u(z) = \frac{1}{2\nu_B} \partial_x \phi (\phi - z)^2 + K,$$

où la constante  $K$  sera déterminée ultérieurement. Remarquons, pour une utilisation ultérieure, que par construction

$$\partial_z u(z^*) = \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi (z^* - \phi) = \gamma_c. \quad (5.42)$$

Nous nous tournons maintenant vers la couche inférieure,  $z^* \geq z \geq f_b$ . Le fluide a ici une viscosité sans dimension de 1, et nous utilisons les conditions aux limites (5.42) pour  $z = z^*$ , et l'absence de glissement (5.36) à  $z = f_b$ . On obtient d'abord, en utilisant (5.42),

$$\partial_z u = \partial_x \phi (z - z^*) - \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi h^*,$$

ensuite, en intégrant une fois de plus entre  $f_b$  et  $z^*$ ,

$$u = \frac{1}{2} \partial_x \phi (z^* - z)^2 - \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi h^* z + L,$$

où  $L$  est calculé en utilisant (5.36), ce qui conduit à

$$L = u_b - \frac{1}{2} \partial_x \phi (z^* - f_b)^2 + \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi h^* f_b,$$

de sorte que

$$u = \frac{1}{2} \partial_x \phi \left( (z^* - z)^2 - (z^* - f_b)^2 \right) - \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi h^* (z - f_b) + u_b. \quad (5.43)$$

Enfin, nous utilisons la continuité de la vitesse à  $z = z^*$  pour obtenir la constante  $K$  :

$$\frac{1}{2\nu_B} \partial_x \phi (\phi - z^*)^2 + K = -\frac{1}{2} \partial_x \phi (z^* - f_b)^2 - \frac{1}{\nu_B} \partial_x \phi h^* (z^* - f_b) + u_b.$$

Le profil de vitesse est donc donné par

$$u(z) = \begin{cases} \frac{\partial_x \phi}{2} \left( (z^* - z)^2 - (z^* - f_b)^2 \right) - \frac{\partial_x \phi}{\nu_B} h^* (z - f_b) + u_b, & f_b \leq z \leq z^* \\ \frac{\partial_x \phi}{2\nu_B} \left( (\phi - z)^2 - (\phi - z^*)^2 \right) - \frac{\partial_x \phi}{2} (z^* - f_b)^2 \\ \quad - \frac{\partial_x \phi}{\nu_B} h^* (z^* - f_b) + u_b, & z^* \leq z \leq \phi \end{cases} \quad (5.44)$$

Remarquons que pour  $\nu_B = 1$ , des calculs faciles montrent que le profil est le même dans les deux couches, à savoir  $u = \frac{\partial_x \phi}{2} (z - f_b)(z - f_b - 2h) + u_b$ , ce qui est comme prévu le profil parabolique habituel pour un fluide newtonien.

D'autre part, en laissant  $\nu_B \rightarrow +\infty$ , et  $\gamma_c \rightarrow 0$ , en gardant  $\nu_B \gamma_c = \tau_c$ , on retrouve formellement la vitesse du fluide de Bingham, comme dans Balmforth [2] :

$$u(z) = \begin{cases} -\frac{\partial_x \phi}{2} \left( (y^*)^2 - (y^* - (z - f_b))^2 \right) + u_b, & f_b \leq z \leq z^* \\ -\frac{\partial_x \phi}{2} (y^*)^2 + u_b, & z^* \leq z \leq \phi \end{cases}$$

où nous avons fixé  $y^* = z^* - f_b = h - h^*$ .

Il est maintenant facile d'obtenir le flux dans (5.40), puisque

$$\int_{f_b}^{\phi} u(z) dz = \int_{f_b}^{z^*} u(z) dz + \int_{z^*}^{\phi} u(z) dz.$$



Nous avons d'une part

$$\int_{f_b}^{z^*} u(z) dz = -\frac{\partial_x \phi}{3} (y^*)^3 - \frac{\partial_x \phi}{2\nu_B} h^* (y^*)^2 + u_b y^*,$$

d'autre part

$$\int_{z^*}^{\phi} u_T(z) dz = -\frac{\partial_x \phi}{3\nu_B} (h^*)^3 - \frac{\partial_x \phi}{2} (y^*)^2 h^* - \frac{\partial_x \phi}{\nu_B} y^* (h^*)^2 + u_b h^*.$$

Par conséquent, le flux que nous recherchons est donné par

$$\int_{f_b}^{\phi} u(z) dz = -\frac{\partial_x \phi}{3} \left( (y^*)^3 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\nu_B} + 1 \right) (y^*)^2 h^* + \frac{3}{\nu_B} y^* (h^*)^2 + \frac{1}{\nu_B} (h^*)^3 \right) + u_b h. \quad (5.45)$$

Il est encore une fois facile de vérifier sur cette formule que nous retrouvons le flux cubique habituel  $-\frac{\partial_x \phi}{3} h^3$  pour le fluide newtonien  $\nu_B = 1$ . Par contre le cas limite  $\nu_B \rightarrow \infty$  redonne la formule de Balmforth

$$\int_{f_b}^{\phi} u(z) dz = -\frac{\partial_x \phi}{6} (y^*)^2 (y^* - 3h).$$

L'insertion de (5.45) dans l'équation de conservation (5.40) conduit à l'équation d'advection-diffusion suivante :

$$\partial_t h + \partial_x (u_b h) = v_b + \partial_x (D(h, \partial_x h) \partial_x (h + f_b)), \quad (5.46)$$

où

$$D(h, \partial_x h) = \frac{1}{3} \left( (y^*)^3 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\nu_B} + 1 \right) (y^*)^2 h^* + \frac{3}{\nu_B} y^* (h^*)^2 + \frac{1}{\nu_B} (h^*)^3 \right) \quad (5.47)$$

et nous rappelons les définitions de  $h^*$  de (5.41), et de  $y^*$

$$h^* = \min \left( \frac{B}{|\partial_x \phi|}, h \right), \quad y^* = h - h^* = z^* - f_b. \quad (5.48)$$

Remarquons que  $0 < D(h, \partial_x h) \leq h^3 / (3\nu_B)$ .

### 5.3 Illustrations numériques

Nous nous tournons maintenant vers des exemples numériques pour illustrer le comportement du fluide à deux viscosités. Il ne s'agit pas ici de donner un schéma spécifique précis, qui est une perspective intéressante puisque le terme de diffusion peut dégénérer, mais qui dépasse le cadre de ce travail. Nous appliquons simplement ici une stratégie simple de volumes finis. Le domaine spatial infini est remplacé par un domaine de calcul fini  $[a, b]$ . Puisque nous ne voulons pas faire face à des conditions aux limites ici, nous imposons simplement un flux libre sur les frontières, ce qui est compatible avec les exemples que nous choisissons. Les pas de temps et d'espace positifs  $\Delta t$  et  $\Delta x$  étant donnés, nous introduisons les notations usuelles  $t^n = n\Delta t$ ,  $n \geq 0$ , et  $x_j = j\Delta x$ ,  $0 \leq j \leq J$ , où  $J = (b - a)/\Delta x$ . On cherche une approximation de la profondeur  $h$  sous la forme

$$h_j^{n+1} = h_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}(G_{j+1/2}^n - G_{j-1/2}^n),$$

où  $F_{j+1/2}^n$  est le flux d'advection numérique, et  $G_{j+1/2}^n$  le flux de diffusion numérique, tous deux calculés à l'interface  $x_{j+1/2}$ . Dans ce qui suit, nous désignons par  $u_j^n$  la vitesse basale discrétisée, et  $f_j$  la topographie discrète, qui sont toutes deux des fonctions données.

Le flux d'advection est simplement un flux ascendant

$$F_{j+1/2}^n = \begin{cases} h_j^n (u_j^n + u_{j+1}^n)/2 & \text{if } u_j^n + u_{j+1}^n \geq 0 \\ h_{j+1}^n (u_j^n + u_{j+1}^n)/2 & \text{if } u_j^n + u_{j+1}^n \leq 0 \end{cases}$$

Pour le flux diffusif, nous écrivons  $G_{j+1/2}^n = D_{j+1/2}^n K_{j+1/2}^n$ , où  $K_{j+1/2}^n$  est la valeur approximative de la pente  $\partial_x \phi$

$$K_{j+1/2}^n = \frac{h_{j+1}^n - h_j^n}{\Delta x} + \frac{f_{j+1} - f_j}{\Delta x},$$

et  $D_{j+1/2}^n$  est une discrétisation de (5.47). Pour l'obtenir, nous devons calculer  $h^*$  et  $y^*$  à l'interface. En fonction de (5.48), nous mettons

$$(h^*)_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{B}{|K_{j+1/2}^n|} & \text{if } B < \frac{h_{j+1}^n + h_j^n}{2} |K_{j+1/2}^n| \\ \frac{h_{j+1}^n + h_j^n}{2} & \text{if not} \end{cases}$$

et  $(y^*)_{j+1/2}^n = (h_{j+1}^n + h_j^n)/2 - ((h^*)_{j+1/2}^n)$ , de sorte que  $D_{j+1/2}^n$  est donné par

$$D_{j+1/2}^n = \frac{1}{3} \left( ((y^*)_{j+1/2}^n)^3 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\nu_B} + 1 \right) ((y^*)_{j+1/2}^n)^2 (h^*)_{j+1/2}^n \right. \\ \left. + \frac{3}{\nu_B} (y^*)_{j+1/2}^n ((h^*)_{j+1/2}^n)^2 + ((h^*)_{j+1/2}^n)^3 \right),$$

Le pas de temps  $\Delta t$  est en fait mis à jour à chaque pas de temps en utilisant la condition CFL

$$\frac{\Delta t^n}{\Delta x^2} = \frac{\sigma}{2D^n}, \quad \text{with } D^n = \max_j D_{j+1/2}^n, \quad \text{where } \sigma < 1.$$

Les simulations suivantes ont été réalisées avec  $J = 200$  cellules dans l'intervalle  $[-1, 1]$ , ainsi qu'avec  $\sigma = 0.9$ . Toutes les figures sont rassemblées à la fin de ce chapitre.

La première série de simulations concerne l'effondrement d'une pile de forme carrée sur un fond plat horizontal :  $h^0(x) = 1$  pour  $x \in ]-1/3, 1/3[$ , 0 ailleurs, avec une vitesse basale nulle ( $u_b = v_b = 0$ ). Nous proposons d'abord une comparaison entre le modèle à deux viscosités et les modèles à haute viscosité et à faible viscosité. La viscosité de petite déformation est  $\nu_B = 100$  (rappelons que  $\nu = 1$ ), et la limite d'élasticité est de 0.1 dans la Figure 5.4, et 0.5 dans la Figure 5.5. Ces figures sont complétées par la Figure 5.6 où nous affichons pour quatre valeurs de la limite d'élasticité  $B$  un timelapse de l'évolution à la fois de l'épaisseur totale du fluide  $h$  (lignes pleines) et de l'épaisseur de la couche de basse vitesse (lignes pointillées).

Pour  $B = 0.1$ , le fluide se comporte clairement de la même manière que le fluide de faible viscosité au début, puis il finit par ralentir, lorsque la couche de faible viscosité tend à disparaître, voir Figure 5.6, en haut à gauche. Avec une contrainte d'écoulement  $B = 0.5$ , le modèle à deux viscosités reste entre les deux autres, comme prévu, plus rapidement que le modèle à haute viscosité, plus lent que le modèle à faible viscosité, voir Figure 5.5. Cependant, on peut vérifier que le front se déplace à peine entre  $t = 10$  et  $t = 50$ , indiquant que le fluide tend à se comporter comme le fluide à grande vitesse. Ceci est rendu plus explicite dans la Figure 5.6, en haut à droite, où pour  $t = 10$  et  $t = 50$  la couche de faible viscosité est très petite. En général, l'épaisseur  $y^*$  diminue avec le temps, plus rapidement lorsque  $B$  est plus grand. Elle est à peine observable pour  $t = 50$  lorsque  $B = 2.5$ , indiquant que le fluide est presque entièrement entraîné par la forte viscosité.

En utilisant les mêmes données initiales, nous vérifions la convergence du modèle à deux viscosités vers le fluide de Bingham lorsque  $\nu_B$  passe à  $\infty$ . Nous prenons une limite élastique  $B = 1.25$ , et  $\nu_B = 10, 100, 1000$ . Comme prévu, le comportement se rapproche du fluide de Bingham, mais il s'en écarte pour des temps plus importants, voir la figure 5.7.

Nous nous tournons maintenant vers un contexte différent, plus proche de la situation en géophysique. Ici, l'écoulement n'est plus purement dû à la gravité, il est en fait entraîné par une vitesse basale non nulle. L'idée ici est que notre fluide pseudo-plastique est un modèle très grossier d'une lithosphère planétaire, sous laquelle se trouve le manteau. La vitesse basale est la trace supérieure des courants de convection dans le manteau, qui sont supposés être les principaux moteurs de la tectonique des plaques. L'épaisseur initiale est constante égale à 1, et nous utilisons deux vitesses basales  $U_b(x) = (u_b(x), 0)$ , où

$$u_b(x) = -\sin(2\pi x)/10 \cdot \mathbb{I}_{]-0.5, 0.5[}(x), \quad u_b(x) = \sin(2\pi x)/10 \cdot \mathbb{I}_{]-0.5, 0.5[}(x). \quad (5.49)$$

Ces vitesses correspondent grossièrement respectivement au mouvement vertical d'une bulle de magma, qui génère des perturbations locales de la vitesse. La première correspond à un certain soulèvement de la bulle, avec une vitesse négative à gauche et positive à droite. Elle génère une sorte de vallée entourée de montagnes, voir Figure 5.8. A l'inverse, la descente d'une bulle inverse les vitesses, et produit une montagne entourée de vallées, Figure 5.9. Nous remarquons dans les deux cas que le modèle de petite vitesse a très peu d'influence sur l'évolution temporelle, et que le modèle à deux viscosités conduit à des angles plutôt prononcés dans l'épaisseur.

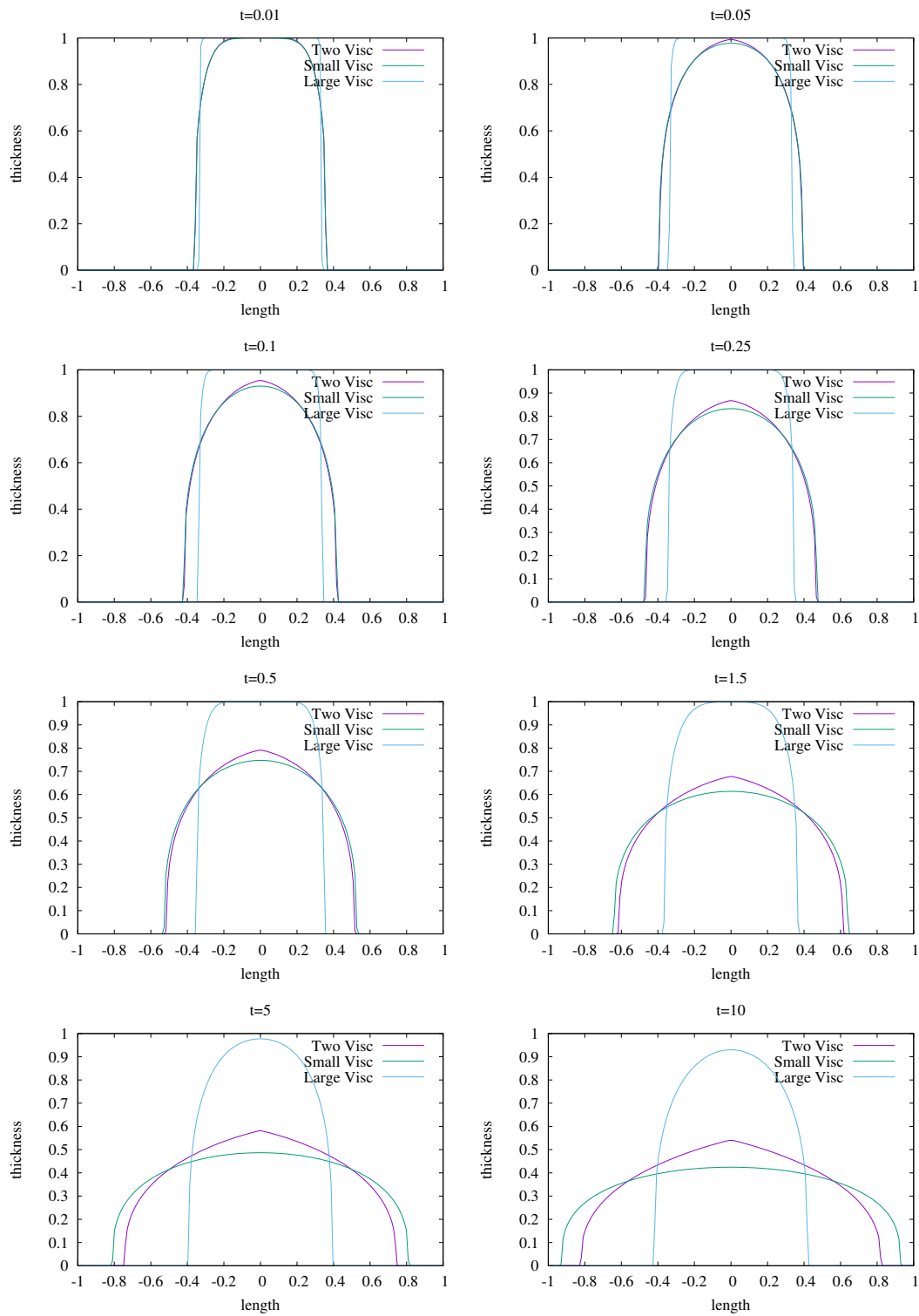


FIGURE 5.4 – Comparaison entre les trois modèles, évolution en fonction du temps. Avec les valeurs  $B = 0.1, \nu_B = 100$

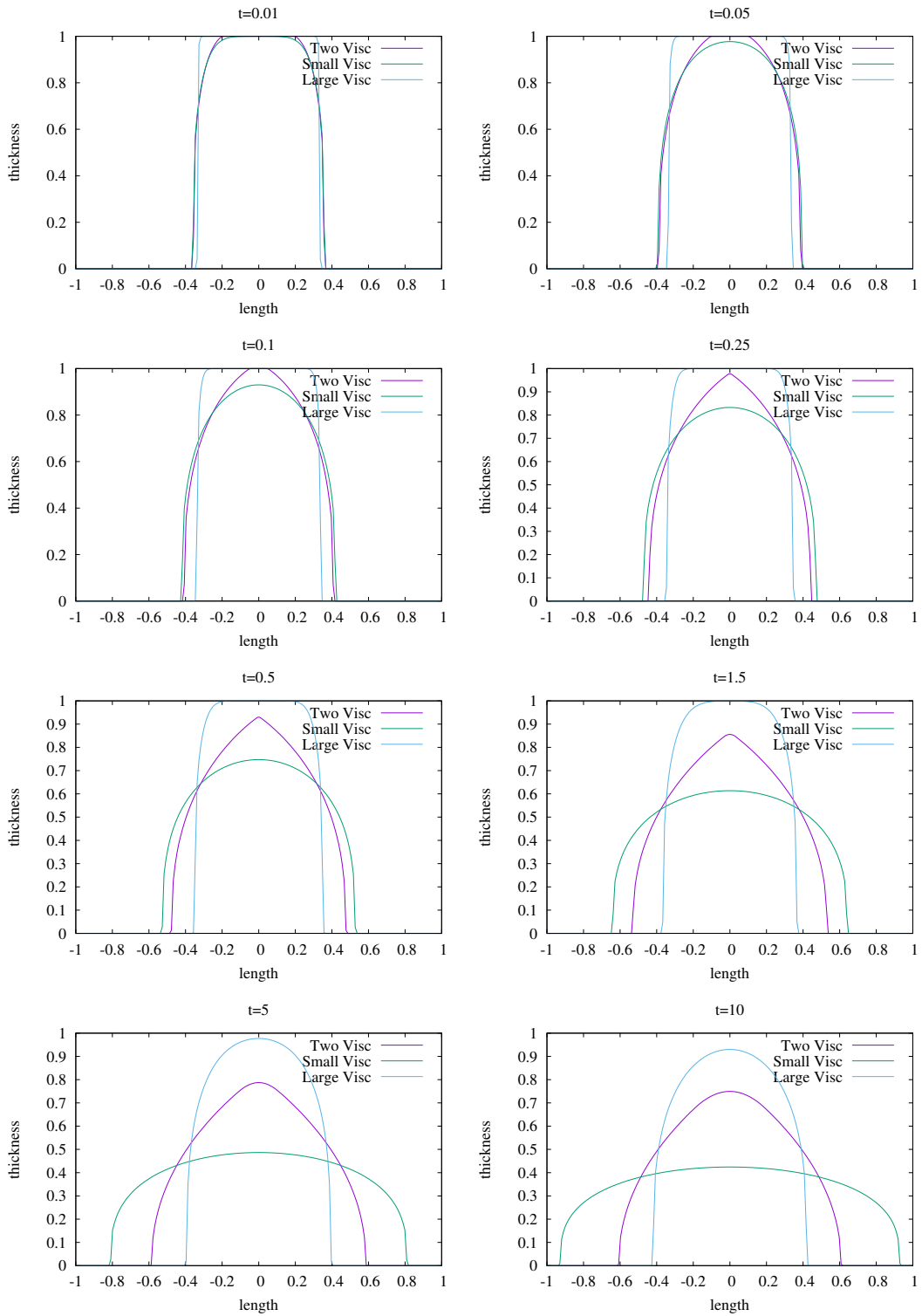


FIGURE 5.5 – Comparaison entre les trois modèles, évolution en fonction du temps. Avec les valeurs  $B = 0.5$ ,  $\nu_B = 100$

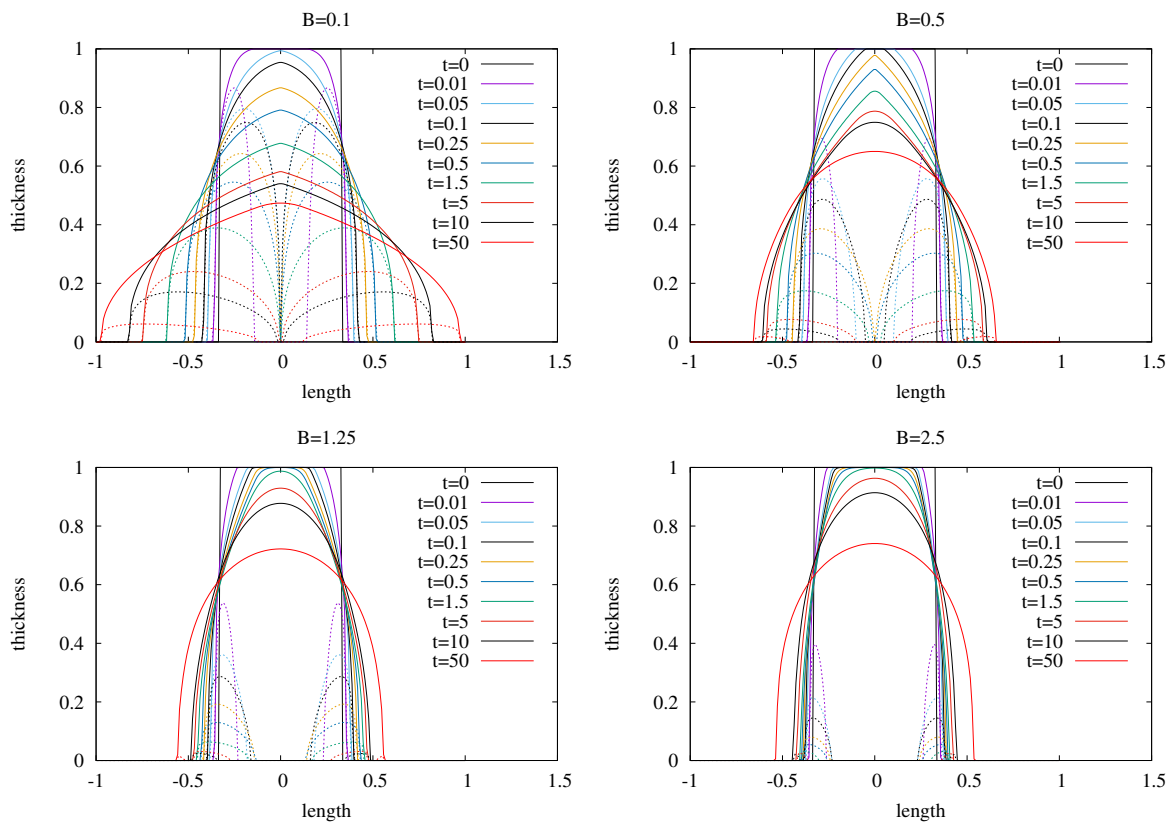


FIGURE 5.6 – Influence de la limite d'élasticité  $B$ .  $\nu_B = 100$ . Code couleur en images - lignes pleines : épaisseur totale  $h$ , lignes en pointillé : petite épaisseur de zone de viscosité  $y^*$ .

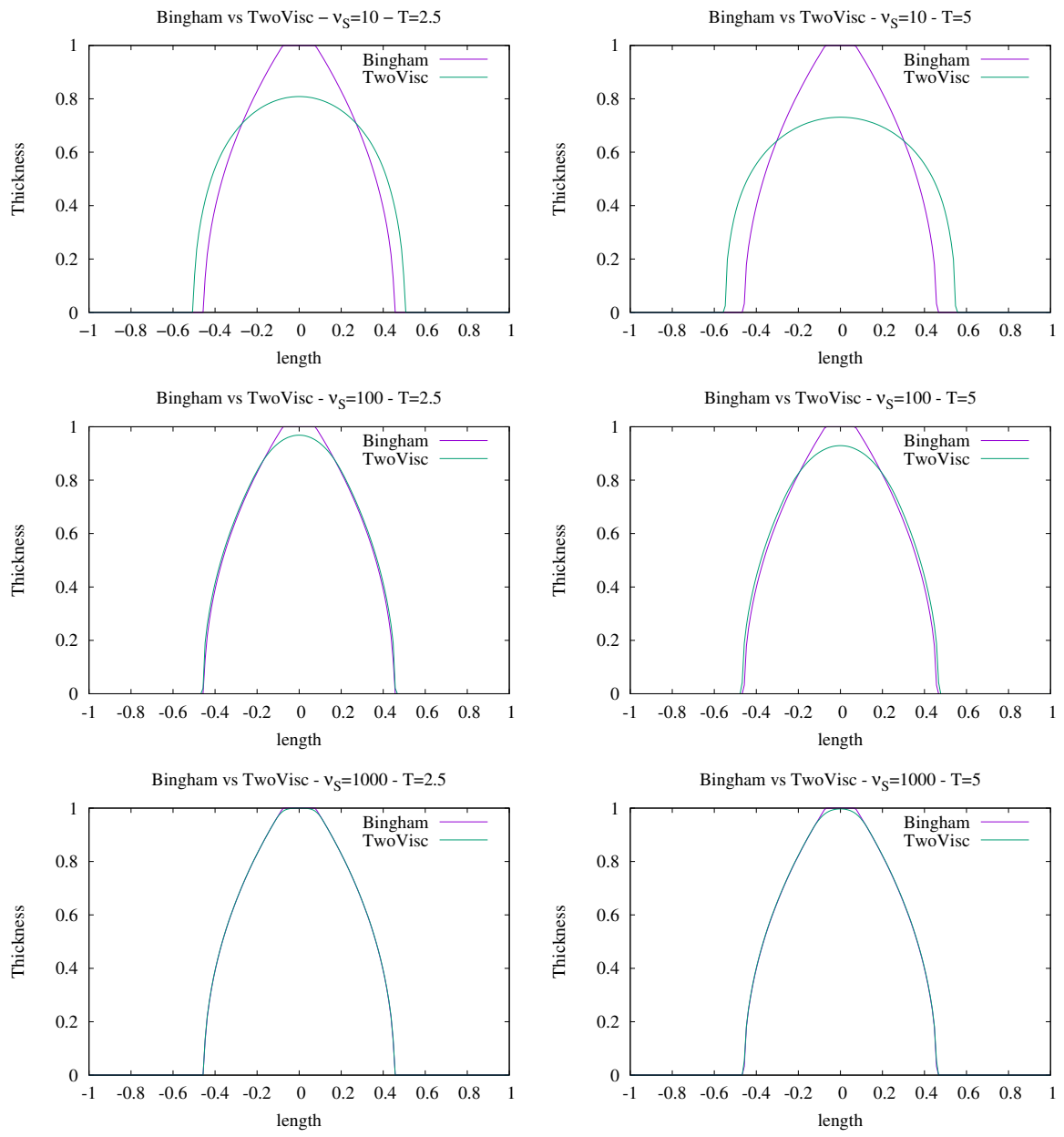


FIGURE 5.7 – Convergence vers le modèle Bingham. Avec  $B = 1.25$ . Du haut jusqu'en bas :  $\nu_B = 10, 100, 1000$ .



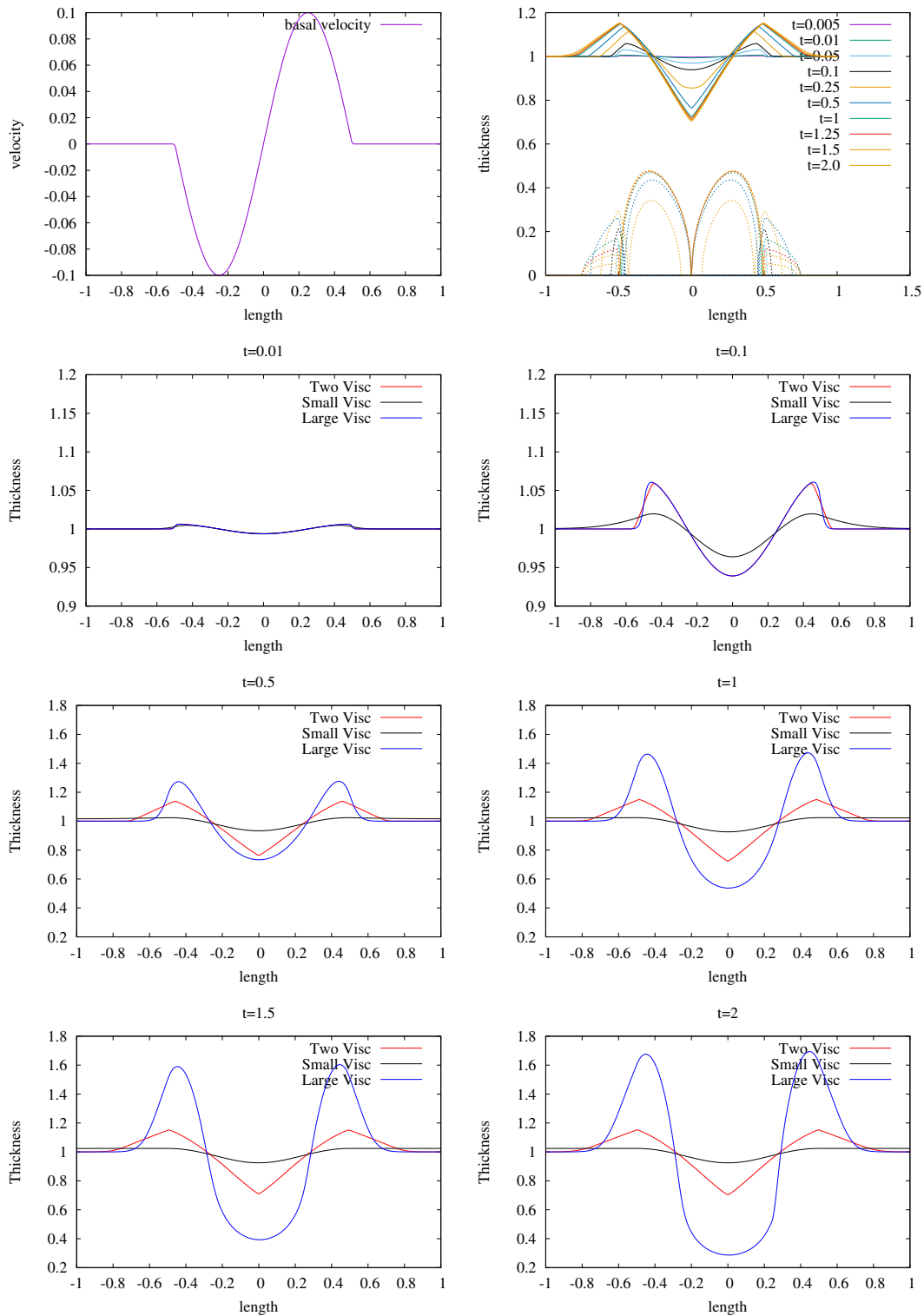


FIGURE 5.8 – Portée d’une bulle de magma - Limite d’élasticité  $B = 1.25 - \nu_B = 100$ - En haut à gauche : vitesse basale - En haut à droite : Timelapse de l’épaisseur  $h$  et de la couche à faible viscosité  $y^*$ . Les 6 photos suivantes : évolution temporelle des trois modèles

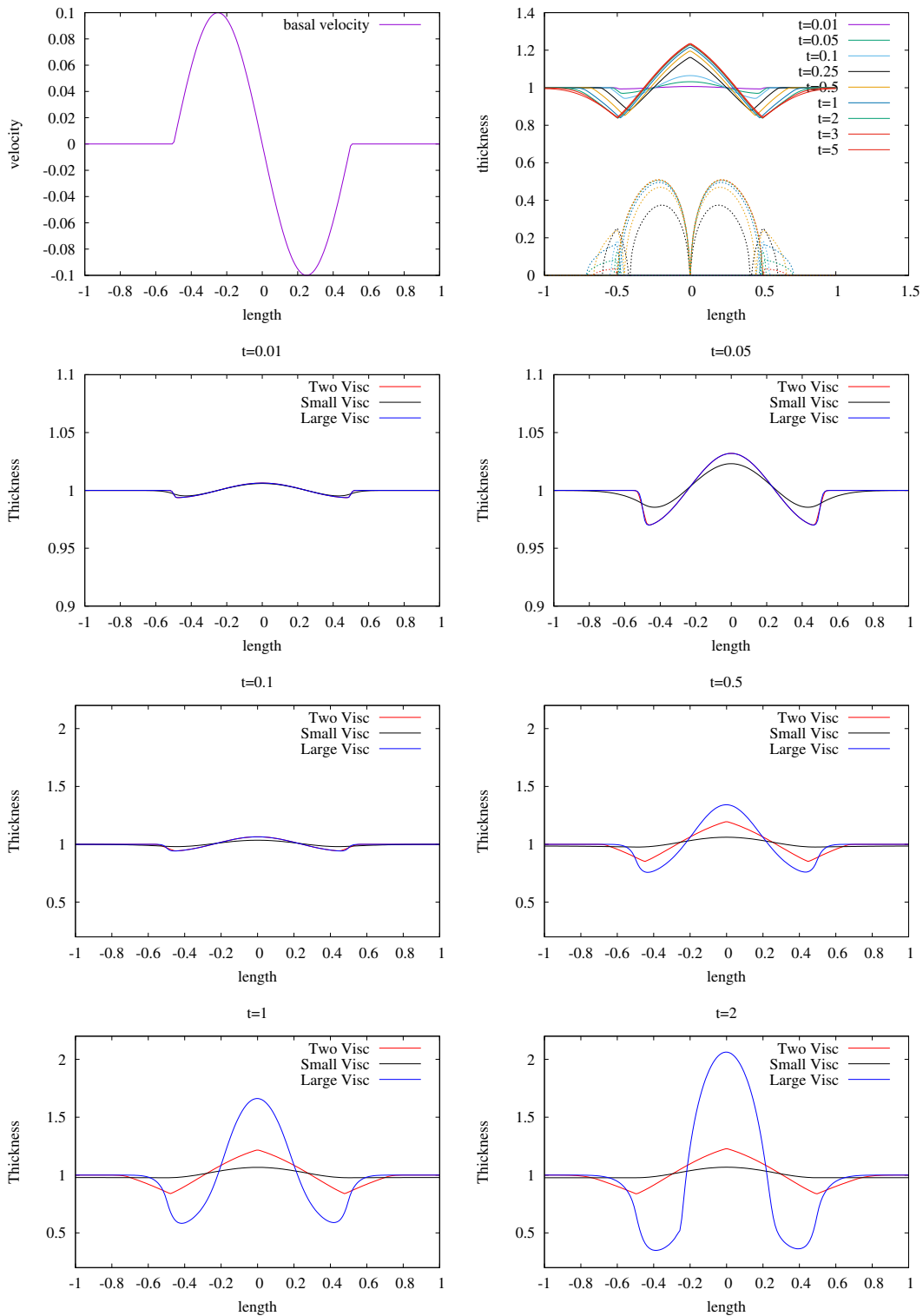


FIGURE 5.9 – Descente d’une bulle de magma - Limite d’élasticité  $B = 1.25 - \nu_B = 100$ - En haut à gauche : vitesse basale - En haut à droite : Timelapse de l’épaisseur  $h$  et de la couche à faible viscosité  $y^*$ . Les 6 photos suivantes : évolution temporelle des trois modèles



# CONCLUSION

---

Dans ce travail de thèse, nous avons construit des méthodes numériques pour l'approximation des solutions faibles du système de Saint Venant avec terme source de topographie (1).

Nous avons fait en premier lieu, la présentation et l'étude de l'algèbre du système avec une résolution complète du problème de Riemann pour le système homogène. Nous avons mis en exergue l'effet de la présence du terme source de topographie où nous avons l'existence d'un champ caractéristique stationnaire. Nous avons montré que le comportement des invariants de Riemann au niveau de l'onde stationnaire coïncide avec celui des solutions stationnaires.

Ensuite, nous avons construit un premier schéma de type Godunov présentant de très bonnes propriétés. En effet, nous avons un schéma consistant avec le modèle de Saint Venant, capturant toutes les solutions stationnaires à vitesse non nulle ou pas et préservant la positivité de la hauteur d'eau. Par contre, le schéma présente un défaut car il capture en plus des solutions stationnaires non entropiques. Nous avons présenté différentes expériences numériques pour illustrer la pertinence du schéma.

Nous avons ensuite corrigé le défaut d'entropie du premier schéma en dérivant une deuxième méthode numérique aux volumes finis de type Godunov robuste par rapport à la préservation de la positivité de la hauteur d'eau. Ce nouveau schéma est aussi consistant avec le système de Saint Venant et capture toutes les solutions stationnaires sans changement de régime même si nous avons montré numériquement que le schéma se comporte bien au niveau des ces zones avec des erreurs de l'ordre de  $10^{-16}$  près. Contrairement au premier schéma, le nouveau schéma caractérisé par un paramètre de contrôle ne capture pas les solutions stationnaires non entropiques. À travers différentes expériences numériques, nous avons montré le très bon comportement de ce nouveau schéma dans l'approximation des solutions du modèle de Saint Venant (1).

Ensuite, nous avons fait une extension de l'ordre de précision du schéma par une montée au second ordre. La stratégie de monter en ordre que nous avons développée est très simple comparée aux méthodes récemment proposées qui sont très coûteuses et c'est ce qui la rend très attractive. Nous avons dérivé une extension du second ordre pré-

---

servant les solutions stationnaires et robuste. Des expériences numériques sont utilisées pour confirmer nos propos par rapport à la préservation de ces solutions stationnaires.

Ce travail dégage plusieurs perspectives. Parmi celles-ci, on peut citer, en premier lieu, une extension 2D des méthodes numériques développées ici et qui pourrait être appliquée à des cas de données réelles. On peut également étendre le schéma numérique avec un terme de frottement du sol. Il serait intéressant de faire un couplage avec un modèle d'infiltration de l'eau dans le sol afin d'être plus complet. Enfin, il serait intéressant de faire l'étude de l'entropie du schéma du second ordre appliqué au modèle de Saint Venant.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Christophe ANCEY, « Plasticity and geophysical flows : a review », in : *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 142.1-3 (2007), p. 4-35.
- [2] Emmanuel AUDUSSE et al., « A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows », in : *SIAM Journal on Scientific Computing* 25.6 (2004), p. 2050-2065.
- [3] Neil J BALMFORTH et al., « Viscoplastic flow over an inclined surface », in : *Journal of non-newtonian fluid mechanics* 139.1-2 (2006), p. 103-127.
- [4] MA BAPTISTA et al., « Potential inundation of Lisbon downtown by a 1755-like tsunami », in : *Natural Hazards and Earth System Sciences* 11.12 (2011), p. 3319-3326.
- [5] Malika BENSLIMANE, « Conception d'un outil de simulation du risque d'inondation », thèse de doct., Université de Béjaia-Abderrahmane Mira, URL : <https://www.pnst.cerist.dz/detail.php?id=887073>.
- [6] D BERCOVICI, P TACKLEY et Y RICARD, « 7.07-the generation of plate tectonics from mantle dynamics », in : *Treatise on Geophysics. Elsevier, Oxford* (2015), p. 271-318.
- [7] Alfredo BERMUDEZ et Ma Elena VAZQUEZ, « Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms », in : *Computers & Fluids* 23.8 (1994), p. 1049-1071.
- [8] Christophe BERTHON et Christophe CHALONS, « A fully well-balanced, positive and entropy-satisfying Godunov-type method for the shallow-water equations », in : *Mathematics of Computation* 85.299 (2016), p. 1281-1307.
- [9] Christophe BERTHON, Anaïs CRESTETTO et Françoise FOUCHER, « A well-balanced finite volume scheme for a mixed hyperbolic/parabolic system to model chemotaxis », in : *Journal of Scientific Computing* 67.2 (2016), p. 618-643.
- [10] Christophe BERTHON et Vivien DESVEAUX, « An entropy preserving MOOD scheme for the Euler equations », in : *International Journal on Finite Volumes* (2014), p. 1-39, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01115334/>.

- 
- [11] Christophe BERTHON et Fabien MARCHE, « A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : a class of relaxation schemes », in : *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.5 (2008), p. 2587-2612.
- [12] Christophe BERTHON et al., « A very easy high-order well-balanced reconstruction for hyperbolic systems with source terms », in : (2021).
- [13] Christophe BERTHON et al., « A well-defined moving steady states capturing Godunov-type scheme for Shallow-water model », in : *International Journal on Finite Volumes* (2021), URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03192954/>.
- [14] David V BOGER, « Demonstration of upper and lower Newtonian fluid behaviour in a pseudoplastic fluid », in : *Nature* 265.5590 (1977), p. 126-128.
- [15] François BOUCHUT, *Nonlinear stability of finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws : And Well-Balanced schemes for sources*, Springer Science & Business Media, 2004.
- [16] Henri CARTAN, « Cours de calcul différentiel », in : (1977).
- [17] Manuel CASTRO, José GALLARDO et Carlos PARÉS, « High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow-water systems », in : *Mathematics of computation* 75.255 (2006), p. 1103-1134.
- [18] Manuel J CASTRO, Alberto PARDO MILANÉS et Carlos PARÉS, « Well-balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique », in : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 17.12 (2007), p. 2055-2113.
- [19] Guoxian CHEN et Sebastian NOELLE, « A new hydrostatic reconstruction scheme based on subcell reconstructions », in : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 55.2 (2017), p. 758-784.
- [20] Stéphane CLAIN et al., « The Tagus 1969 tsunami simulation with a finite volume solver and the hydrostatic reconstruction technique », in : (2015).
- [21] Olivier DELESTRE, « Simulation du ruissellement d'eau de pluie sur des surfaces agricoles », thèse de doct., Université d'Orléans ; Université d'Orléans, 2010, URL : <https://hal.inrae.fr/tel-02823545>.
- [22] Olivier DELESTRE et al., « A limitation of the hydrostatic reconstruction technique for Shallow Water equations », in : *Comptes Rendus Mathématique* 350.13-14 (2012), p. 677-681.

- 
- [23] James FRANCOIS et al., « A lubrication equation for a simplified model of shear-thinning fluid », in : *ESAIM. Proceedings and Surveys* 70 (2021), p. 147, URL : <https://www.proquest.com/openview/9e49a204b2ae6d23f3f854505dfbb425/1?pq-origsite=gscholar&cbl=1796391>.
- [24] José M GALLARDO, Carlos PARÉS et Manuel CASTRO, « On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas », in : *Journal of Computational Physics* 227.1 (2007), p. 574-601.
- [25] Gérard GALLICE, « Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in Lagrangian or Eulerian coordinates », in : *Numerische Mathematik* 94.4 (2003), p. 673-713.
- [26] Gérard GALLICE, « Schémas de type Godunov entropiques et positifs pour la dynamique des gaz et la magnétohydrodynamique lagrangiennes », in : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 332.11 (2001), p. 1037-1040.
- [27] Thierry GALLOUËT, Jean-Marc HÉRARD et Nicolas SEGUIN, « Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography », in : *Computers & Fluids* 32.4 (2003), p. 479-513.
- [28] Edwige GODLEWSKI et Pierre-Arnaud RAVIART, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, t. 118, Springer Science & Business Media, 2013.
- [29] Sergei GODUNOV et I BOHACHEVSKY, « Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics », in : *Matematičeskij sbornik* 47.3 (1959), p. 271-306.
- [30] Irene GÓMEZ-BUENO, Manuel J CASTRO et Carlos PARÉS, « High-order well-balanced methods for systems of balance laws : a control-based approach », in : *Applied Mathematics and Computation* 394 (2021), p. 125820.
- [31] L Gosse, « A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms », in : *Computers & Mathematics with Applications* 39.9-10 (2000), p. 135-159.
- [32] Sigal GOTTLIEB et Chi-Wang SHU, « Total variation diminishing Runge-Kutta schemes », in : *Mathematics of computation* 67.221 (1998), p. 73-85.
- [33] Sigal GOTTLIEB, Chi-Wang SHU et Eitan TADMOR, « Strong stability-preserving high-order time discretization methods », in : *SIAM review* 43.1 (2001), p. 89-112.



- 
- [34] N GOUTAL et F MAUREL, « Dam-break wave simulation », in : *Proceedings of the First CADAM workshop*, 1998.
- [35] JM GREENBERG et al., « Analysis and approximation of conservation laws with source terms », in : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 34.5 (1997), p. 1980-2007.
- [36] Joshua M GREENBERG et Alain-Yves LEROUX, « A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations », in : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 33.1 (1996), p. 1-16.
- [37] Amiram HARTEN, Peter D LAX et Bram van LEER, « On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws », in : *SIAM review* 25.1 (1983), p. 35-61.
- [38] Herbert E HUPPERT, « The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface », in : *Journal of Fluid Mechanics* 121 (1982), p. 43-58.
- [39] François JAMES et al., « Towards a new friction model for shallow water equations through an interactive viscous layer », in : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 53.1 (2019), p. 269-299.
- [40] Shi JIN, « A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms », in : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 35.4 (2001), p. 631-645.
- [41] Christian KLINGENBERG, Alexander KURGANOV et Markus ZENK, « Moving-water equilibria preserving HLL-type schemes for the shallow water equations », in : *preprint* 4 (2019).
- [42] Randall J LEVEQUE et al., *Finite volume methods for hyperbolic problems*, t. 31, Cambridge university press, 2002.
- [43] Gang LI et Yulong XING, « Well-balanced discontinuous Galerkin methods with hydrostatic reconstruction for the Euler equations with gravitation », in : *Journal of Computational Physics* 352 (2018), p. 445-462.
- [44] KF LIU et CC MEI, « Approximate equations for the slow spreading of a thin sheet of Bingham plastic fluid », in : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 2.1 (1990), p. 30-36.
- [45] Ko Fei LIU et Chiang C MEI, « Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane », in : *Journal of fluid mechanics* 207 (1989), p. 505-529.

- 
- [46] Victor MICHEL-DANSAC et al., « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography », in : *Computers & Mathematics with Applications* 72.3 (2016), p. 568-593.
- [47] Victor MICHEL-DANSAC et al., « A well-balanced scheme for the shallow-water equations with topography or Manning friction », in : *Journal of Computational Physics* 335 (2017), p. 115-154.
- [48] Emilie MIGNOT et al., « Estimation des risques d'inondation dans une zone urbanisée. Définition d'une approche adaptée », in : *1ères Journées Doctorales en Hydrologie Urbaine, INSA, Lyon, 2004*, 2004, p. 7.
- [49] Sebastian NOELLE, Yulong XING et Chi-Wang SHU, « High-order well-balanced finite volume WENO schemes for shallow water equation with moving water », in : *Journal of Computational Physics* 226.1 (2007), p. 29-58.
- [50] Rachid OMIRA et al., « Tsunami vulnerability assessment of Casablanca-Morocco using numerical modelling and GIS tools », in : *Natural hazards* 54.1 (2010), p. 75-95.
- [51] André PAQUIER, « Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage », thèse de doct., Doctorat Analyse numérique, Université Jean Monnet Saint-Etienne, 1995, URL : <https://hal.inrae.fr/tel-02582031>.
- [52] Ernesto PIMENTEL GARCIA et al., « Numerical analysis of some nonlinear hyperbolic systems of Partial Differential Equations arising from Fluid Mechanics », in : (2021).
- [53] Osborne REYNOLDS, « IV. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil », in : *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 177 (1886), p. 157-234.
- [54] Marie ROUSSEAU, « Modélisation des écoulements à surface libre : étude du ruissellement des eaux de pluie », in : *Master2, Université de Nantes* (2008).
- [55] Giovanni RUSSO et Alexander KHE, « High Order Well-Balanced Finite Volume Schemes for Systems of Balance Laws », in : (2008).
- [56] Giovanni Russo et Alexander KHE, « High order well-balanced schemes based on numerical reconstruction of the equilibrium variables », in : *Waves and Stability in Continuous Media*, World Scientific, 2010, p. 230-241.

- 
- [57] FERHAT SAID, « Modélisation et simulation de l'onde de rupture d'un barrage avec les équations à deux dimensions de Saint Venant par le logiciel COMSOL », thèse de doct., UNIVERSITE DE M'SILA FACULTE DE TECHNOLOGIE, 2014, URL : <http://dspace.univ-msila.dz:8080/xmlui/handle/123456789/3754>.
- [58] Denis SERRE, *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.
- [59] Paul J TACKLEY, « Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent, three-dimensional mantle convection simulations », in : *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* 1.8 (2000).
- [60] Eleuterio F TORO, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [61] Eleuterio F TORO, Michael SPRUCE et William SPEARES, « Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver », in : *Shock waves* 4.1 (1994), p. 25-34.
- [62] Alessandro VALIANI, Valerio CALEFFI et Andrea ZANNI, « Case study : Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method », in : *Journal of Hydraulic Engineering* 128.5 (2002), p. 460-472.
- [63] Milton VAN DYKE, « Perturbation methods in fluid mechanics/Annotated edition », in : *NASA STI/Recon Technical Report A 75* (1975), p. 46926.
- [64] Bram VAN LEER, « Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method », in : *Journal of computational Physics* 32.1 (1979), p. 101-136.
- [65] Pieter WESSELING, *Principles of computational fluid dynamics*, t. 29, Springer Science & Business Media, 2009.
- [66] Yulong XING, « Exactly well-balanced discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations with moving water equilibrium », in : *Journal of Computational Physics* 257 (2014), p. 536-553.
- [67] Yulong XING et Chi-Wang SHU, « High order well-balanced WENO scheme for the gas dynamics equations under gravitational fields », in : *Journal of Scientific Computing* 54.2 (2013), p. 645-662.
- [68] Yulong XING, Chi-Wang SHU et Sebastian NOELLE, « On the advantage of well-balanced schemes for moving-water equilibria of the shallow water equations », in : *Journal of scientific computing* 48.1 (2011), p. 339-349.

- 
- [69] Shijie ZHONG, Michael GURNIS et Louis MORESI, « Role of faults, nonlinear rheology, and viscosity structure in generating plates from instantaneous mantle flow models », in : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 103.B7 (1998), p. 15255-15268.





---

**Titre :** Contributions aux schémas préservant des solutions stationnaires à vitesse non nulle pour les équations shallow-water.

**Mots clés :** Schéma aux volumes finis, système hyperbolique, équations de Saint-Venant, schémas de type Godunov, schémas équilibrés, solutions stationnaires

**Résumé :** Le but de ce travail est de construire une nouvelle classe de schémas de type Godunov préservant toutes les solutions stationnaires du système de Saint-Venant avec terme source de topographie. Dans un premier temps, nous rappelons des éléments sur les propriétés et l'algèbre du modèle étudié. Ensuite, nous dérivons deux schémas de type Godunov. Le premier schéma préserve la positivité de la hauteur d'eau, capture toutes les solutions stationnaires et traite les transitions entre zones mouillées et zones sèches. Cependant, ce schéma capture également des chocs stationnaires non entropiques. Le deuxième

schéma développé permet de corriger le défaut d'entropie. Ce schéma préserve la positivité de la hauteur d'eau et capture toutes les solutions stationnaires sans transition de régime entre écoulement fluvial et écoulement torrentiel. De plus, ce second schéma ne capture pas les chocs stationnaires non entropiques. Des critères de stabilité faible entropique ont été établis pour les deux schémas. Enfin, nous proposons une extension du second ordre de type MUSCL qui préserve tous les états stationnaires et des expériences numériques sont présentées afin de confirmer nos propos.

---

**Title :** Contributions to schemes preserving steady states solutions at non-zero speed for shallow-water

**Keywords :** Finite volume method, hyperbolic system, shallow-water equations, Godunov-type schemes, well-balanced schemes, steady states solutions

**Abstract :** The aims of this thesis is to derive a new class of numerical methods of Godunov type scheme preserving all steady states solutions of shallow-water equation with topographie source term. First, we recall some elements on the properties and the algebra of the studied model. Then, we derive two new Godunov type schemes. The first numerical scheme preserves the positivity of the water height, captures all the steady states solutions and correctly processes the transitions between wet areas and dry areas. However, this scheme additionally captures non-entropic stationary shocks. The second methods derived is a correction of the first sche-

-me with respect to its entropy defect. This new scheme captures, in addition top preserving the positive water height, all steady states solutions without regime transition but does not capture non-entropic stationary shock. In addition, low entropy stability criteria were established for the tow new schemes. Several numerical simulations were carried out in order to illustrate the relevance of its two new numerical methods. Finally, we propose a second order extension of the MUSCL type which preserves all the stationary states and numerical experiments are presented in order to confirm our remarks.