



HAL
open science

Estimation embarquée du mouvement sans informations d'infrastructure : application à un drone autonome

Jérémy Barra

► **To cite this version:**

Jérémy Barra. Estimation embarquée du mouvement sans informations d'infrastructure : application à un drone autonome. Autre. Université de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022LYSEC002 . tel-03697119

HAL Id: tel-03697119

<https://theses.hal.science/tel-03697119>

Submitted on 16 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
CENTRALE LYON

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Spécialité : **Automatique**

préparée au laboratoire AMPERE et au Commissariat à l'Énergie
Atomique et aux Énergies alternatives (CEA)

dans le cadre de l'École Doctorale (ED160)
Électronique, Électrotechnique, Automatique (EEA)

Soutenue le 18/01/2022, par :

Jérémy Barra

Estimation embarquée du mouvement sans informations d'infrastructure : application à un drone autonome

Devant le jury composé de :

HENRY David, Professeur, Université de Bordeaux
ZASADZINSKI Michel, Professeur, Université de Lorraine
LAROCHE Édouard, Professeur, Université de Strasbourg
MAKAROV Maria, Maître de Conférences, CentraleSupélec

Président du jury
Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice

LESECQ Suzanne, Ingénieur Chercheur HDR, CEA
SCORLETTI Gérard, Professeur, École Centrale de Lyon
BLANCO Éric, Maître de Conférences, École Centrale de Lyon
ZARUDNIEV Mykhailo, Ingénieur Chercheur, CEA

Co-directeur de thèse
Directeur de thèse
Encadrant
Encadrant

Remerciements

Ces travaux de recherche ont été réalisés au CEA de Grenoble au sein de la direction de la recherche technologique, en collaboration avec le laboratoire Ampère de l'École Centrale de Lyon (ECL). Ils ont été effectués sous la direction de Gérard Scorletti (ECL) ainsi que de Suzanne Lesecq (CEA), et ont été encadrés par Mykhailo Zarudniev (CEA) et Éric Blanco (ECL). De nombreuses personnes ont contribué au bon déroulement de cette thèse plus ou moins directement, je prends le temps de les citer ici.

Je tiens avant tout à remercier les différents membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ces travaux et de participer à la soutenance, même si celle-ci s'effectuait à distance. Pour avoir pris le temps de lire mon manuscrit et de m'avoir fait de nombreux retours constructifs, je remercie David Henry, président du jury ; Michel Zasadzinski et Édouard Laroche, rapporteurs et Maria Makarov, examinatrice. Ces remarques et commentaires m'ont permis de prendre du recul sur mes résultats et m'ont beaucoup aidé à améliorer la qualité du présent document.

Ensuite, un grand merci à mes directeurs et encadrants de thèse pour leur aide et leur soutien tout au long de ces 3 années. Merci à Gérard pour sa pédagogie et sa bienveillance, en particulier pour avoir pris le temps de m'expliquer de multiples concepts de l'automatique pendant de nombreuses heures, en dépit d'un emploi du temps souvent chargé. Ayant pour objectif d'acquérir le plus de connaissances possible en automatique durant ma thèse, je ne pouvais pas rêver mieux que d'un encadrement comme celui-là. Merci également à Éric pour le suivi rapproché de mon travail et sa participation à toutes les réunions avec Gérard, nous permettant ainsi de synthétiser ce qui avait été dit au cours de 2 heures de discussions. Merci notamment pour les différentes relectures et conseils donnés au cours de la thèse, destinés à améliorer la qualité des différents documents que j'ai pu rédiger et à développer mes talents d'orateur (ce qui n'était pas une mince affaire !). Merci Suzanne, pour ton accueil au CEA, pour la confiance que tu m'as accordée en stage puis en thèse, pour ton énergie sans limite et ta capacité à faire avancer les choses scientifiquement et administrativement, et pour m'avoir poussé à publier, breveter, communiquer, postuler. De plus, merci pour ta contribution à animer les discussions de la cafet' du laboratoire avant que la journée ne commence ou à l'heure du goûter, des moments fort sympathiques qui me resteront en mémoire. Merci à toi Micha pour ton accompagnement lors de la thèse, que ce soit pour réaliser des campagnes d'expérimentations, pour répondre à mes nombreuses questions techniques ou administratives posées par le biais d'email/Skype/SMS/téléphone/visites impromptues à ton bureau, et parfois plusieurs de ces moyens à la fois, ou pour discuter autour d'une bière ou d'un bon repas.

Enfin, je suis très reconnaissant envers Suzanne et Micha de m'avoir embarqué dans cette aventure qu'est la thèse et d'avoir tout fait pour que ce sujet soit financé au niveau du CEA, je ne regrette pas d'avoir signé ! Je remercie également Mohamed Benallouch, enseignant en automatique, d'avoir œuvré en amont, auprès de l'administration de l'ECAM Lyon où j'effectuais mes études d'ingénieur, pour me donner la possibilité d'effectuer en parallèle un master de recherche en génie des systèmes automatisés, ce qui a été la première étape de mon parcours dans le monde de l'automatique.

Puis, il y a tous ceux qui ont contribué à cette thèse d'une manière plus indirecte, en m'apportant joie et réconfort tout au long de mon parcours.

Je remercie d'abord les différents membres de mes laboratoires d'accueil, le laboratoire Ampère à Lyon et le LIIM (feu LIALP) à Grenoble. Me lever les matins pour aller au

LIIM/LIALP fut un réel plaisir, certes, pour voir le soleil se lever sur les montagnes, mais aussi et surtout pour les personnes qui composent le laboratoire, ou l'ont composé, soit Suzanne, Micha, Diego, Tiana, Aurélien, Marielle, Carolynn, Thierry, David, Nils, Romain, Marion, Quentin, Olivier A. (merci pour les relectures !), Olivier D., Thierry, Pascal, Fred, Lara et bien d'autres, notamment les Lialpins présents à mon arrivée en stage en 2018, qui m'ont tout de suite expliqué les traditions du labo et m'ont permis de me sentir à l'aise. Les moments passés à la salle cafet' ou au H1 ont été pour moi de véritables bouffées d'air frais, qui m'ont donné la force d'avancer tout au long de ma thèse. Merci à toutes les personnes rencontrées dans ce laboratoire pour leur bonne humeur, leurs récits passionnants d'expédition en montagne, les discussions enrichissantes et pour tous les gâteaux. Après plus de 3 ans passés ici, certains seront même devenus de vrais amis que j'aurai le plaisir de revoir par la suite. Merci notamment à mon co-bureau Quentin ayant effectué sa thèse en parallèle de la mienne, pour son humour qui a égayé mes journées de travail, ainsi que pour avoir su m'expliquer les tenants et aboutissants de l'intelligence artificielle (que d'aucuns qualifient de "vraie science") et des arts martiaux historiques européens, bonne continuation et j'espère avoir le plaisir de te recroiser.

Même si plus court que prévu, mon séjour dans le laboratoire Ampère à Lyon, durant lequel j'ai été baigné dans un univers de chercheurs en automatique, aura également été riche en rencontres et en enseignements. J'ai réellement apprécié les moments partagés avec les différents permanents ou doctorants (notamment Gérard, Éric, Anton, Julien, Xavier, Christian, Laurent, Giacomo, Arthur, Jorge, Fabricio, Eva, Alexandre, Hussein), qui m'ont permis de découvrir le monde de la recherche académique et de l'enseignement, d'étendre ma culture en automatique, ainsi que d'améliorer mon niveau en mots-croisés lors des pauses.

Merci également à tous ceux qui ont contribué aux divertissements hors laboratoire, sur des skis, un vélo ou une piste de danse. Notamment, merci à mes fidèles compagnons d'aventures Quentin et Ninon, pour ces moments souvent sportifs et parfois festifs ; aux habitués de la Bobine du mardi soir Baptiste, David, Farah, Aurélie ; à mes différents colocs Adrien, Antoine, Lucie et Nicolas qui ne manquent jamais de motivation lorsqu'il s'agit de partir en mission en montagne sur un coup de tête (un petit couloir Lucie ?) ou de se lancer dans une discussion profonde sur l'avenir de l'humanité ; une mention particulière à Adrien pour les 3 ans passés en sa compagnie perché dans les nuages avenue Général Champon, ce qui m'a amené la stabilité nécessaire pour me consacrer pleinement à ma thèse (entre autres !) ; et merci à tous les autres qui cumulent nombre de qualités et qu'il fait bon de voir régulièrement pour se ressourcer, dont Vivien, Léo, Pierre, Romain, Julien, toute la bande des surfers riders du 69 (vous êtes plus de 20..!) et Claire.

Finalement, merci à ma famille, à ma sœur Morgane, Emiliano et le petit Leonardo pour leur participation à la soutenance à 1000km de là, ainsi qu'à mes parents, pour leur soutien inconditionnel et l'éducation qu'il m'ont donnée. Merci à eux de m'avoir toujours incité à être curieux et à repousser mes limites, ils m'ont notamment encouragé lorsque j'ai décidé à la fin de mes études d'ingénieur d'effectuer un léger virage en direction de la recherche, je me réjouis de les avoir écoutés.

Résumé

Estimation embarquée du mouvement sans informations d'infrastructure : application à un drone autonome

La conception d'agents mobiles capables de naviguer de manière autonome vise à leur permettre de se déplacer en direction d'un objectif en évitant les collisions avec des obstacles et ce, sans informations préalables sur leur environnement. Les agents mobiles concernés sont de petits systèmes embarqués limités en ressources (énergie, calcul, mémoire), comme le micro-drone utilisé dans cette thèse.

Dans ce cadre, l'estimation en temps-réel de la trajectoire de l'agent, c'est-à-dire de sa position, de sa vitesse et de son orientation par rapport à son environnement, est indispensable, et doit être réalisée avec peu de ressources. Dans certains cas, le mouvement peut être estimé à partir de signaux provenant d'une infrastructure préinstallée dans l'environnement comme le GPS. Cependant, de tels signaux sont parfois indisponibles, comme lors de la navigation à l'intérieur de bâtiments inconnus. Le mouvement de l'agent doit alors être estimé à partir d'informations disponibles localement au niveau de son microcontrôleur. Celles-ci peuvent provenir d'un modèle de la dynamique de l'agent, ainsi que de capteurs embarqués qui fournissent des mesures bruitées et partielles du mouvement.

Une première approche consisterait à embarquer sur l'agent de multiples capteurs et à appliquer des algorithmes de traitements poussés pour essayer de mitiger leurs erreurs de mesure. Toutefois, cette approche n'est pas judicieuse dans le cas d'un agent particulièrement limité en ressources, comme le micro-drone considéré dans cette thèse. Ainsi on propose une autre approche, qui consiste à tirer profit du fait que le drone soit asservi, pour estimer au mieux son mouvement, tout en limitant le nombre de capteurs à embarquer ainsi que le coût de calcul de la solution.

Pour cela, on propose tout d'abord de synthétiser un estimateur basé sur un modèle du drone asservi. On adopte alors une approche séquentielle de synthèse de correcteur et d'estimateur. On conçoit d'abord correcteur linéaire étant donné le modèle dynamique linéarisé du drone, par des méthodes d'automatique fréquentielle classiques et avancées (commande H_∞). On développe une méthode d'analyse non-linéaire afin d'évaluer le domaine d'attraction obtenu par ce correcteur sur le modèle non-linéaire du drone. Puis, on choisit un ensemble minimal de capteurs du mouvement du drone et on modélise leurs mesures. Enfin, à partir du modèle du drone asservi par le correcteur préalablement choisi et des mesures de capteurs, on synthétise un estimateur basé sur le modèle en boucle fermée du drone. Par rapport à un estimateur basé sur le modèle en boucle ouverte, on montre que notre approche permet de profiter du fait que la dynamique du drone asservi soit simplifiée pour obtenir un estimateur performant ayant un ordre de complexité faible.

Dans un second temps, on propose de rassembler la synthèse de correcteur et d'estimateur en une seule étape de synthèse conjointe pour former un bloc appelé correcteur/estimateur, qui, à partir des signaux présents sur le microcontrôleur, produit en sortie la commande du drone et l'estimée de son mouvement. Pour cela, on forme un problème d'optimisation H_2/H_∞ qui permet de synthétiser un correcteur/estimateur dont la performance d'estimation est maximale et qui garantit le respect du cahier des charges en terme d'asservissement. Par rapport à l'approche séquentielle de synthèse d'un correcteur puis d'un estimateur basé sur le modèle de la boucle fermée, l'approche de synthèse conjointe permet de systématiquement réduire l'ordre de complexité de l'ensemble correcteur/estimateur. De plus, lorsque les contraintes sur l'asservissement sont suffisamment faibles, l'approche de synthèse conjointe

permet de régler l'asservissement de façon à augmenter la performance d'estimation par rapport à l'approche séquentielle. En effet, on montre en simulation que l'on peut atteindre une erreur quadratique moyenne d'estimation jusqu'à 25% plus faible.

Mots-clés : Micro-drone, commande H_∞ , optimisation convexe, modélisation de capteurs, radar FMCW, estimation H_2 , synthèse mixte H_2/H_∞ , analyse non-linéaire

Abstract

Infrastructure-free onboard motion estimation : application to an autonomous drone

The design of mobile agents capable of autonomous navigation aims to allow them to move towards a goal while avoiding collisions with obstacles, without any prior information about their environment. The mobile agents targeted are small embedded systems limited in resources (energy, computation, memory), such as the micro-drone (UAV) used in this thesis.

In this context, it is crucial to estimate the agent's trajectory, i.e. its position, velocity and orientation with respect to its environment, and this must be done with few resources. In some cases, it is possible to estimate the motion from infrastructure signals such as GPS. However, such signals are sometimes unavailable, as when navigating inside unknown buildings. Then, the agent's motion must be estimated from information available locally on its microcontroller. This information can come from a model of the agent's dynamics, as well as from embedded sensors that provide noisy and partial measurements of the motion.

A first approach would be to embed multiple sensors on the agent and to apply advanced processing algorithms to mitigate their measurement errors. However, this approach is not appropriate for a particularly resource-constrained agent, such as the micro-drone considered in this thesis. Thus, we propose another approach, which consists in taking advantage of the fact that the UAV is controlled in closed-loop to estimate its motion as well as possible, while limiting the number of sensors to be embedded as well as the computing cost of the solution.

We first design a linear controller given the linearized dynamic model of the UAV, by classical and advanced control design methods (H_∞ control). We develop a non-linear analysis method to evaluate the attraction domain of this controller on the non-linear model of the UAV. Then, we choose a minimal set of motion sensors and we model their measurements. Finally, from the controller previously chosen and the sensors model, we synthesize an estimator based on the closed-loop model of the UAV. Compared to an estimator based on the open-loop model, we show that our approach takes advantage of the fact that the dynamics of the UAV in closed-loop are simplified to obtain an estimator with good performance and a low complexity order.

In a second step, we propose to gather the synthesis of the controller and the estimator in a single joint synthesis of a block called corrector/estimator, which, from the signals present on the microcontroller, outputs the drone command and the estimate of its motion. For this, we form a H_2/H_∞ optimization problem that allows us to synthesize a controller/estimator for which the estimation performance is maximum and the respect of the control design specifications is guaranteed. Compared to the sequential approach of synthesizing a controller and then an estimator based on the closed-loop model, the joint synthesis allows to systematically reduce the order of complexity of the controller/estimator. Moreover, when the control design specifications are sufficiently low, the joint synthesis allows to tune the controller in order to increase the estimation performance compared to the sequential approach. Indeed, we show in simulation that we can diminish the mean square estimation error up to 25%.

Keywords : Micro-drone, H_∞ control, convex optimization, sensors modeling, FMCW radar, H_2 estimation, H_2/H_∞ mixed synthesis

Table des matières

1	Introduction générale	16
1.1	Problématique	19
1.1.1	Positionnement vis-à-vis de la littérature	19
1.1.2	Démarche	21
1.2	Plan détaillé	23
1.3	Contributions	25
1.4	Liste des publications	26
2	Modélisation et asservissement du drone	27
2.1	Présentation de la plateforme expérimentale	27
2.1.1	Micro-drone <i>Crazyflie</i>	27
2.1.2	Système de capture de mouvement <i>Vicon</i>	28
2.2	Modèle du drone non-asservi	29
2.2.1	Modèle dynamique	29
2.2.2	Analyse du modèle dynamique	36
2.3	Asservissement du drone	41
2.3.1	Cahier des charges	42
2.3.2	Synthèse d'une loi de commande P/PI	44
2.3.3	Synthèse d'une loi de commande H_∞	53
2.4	Estimation du domaine d'attraction des correcteurs d'attitude	61
2.4.1	État de l'art	63
2.4.2	Objectifs de l'analyse	64
2.4.3	Théorèmes généraux de stabilité	66
2.4.4	Application au modèle du drone en boucle fermée	70
2.4.5	Application aux correcteurs du <i>Crazyflie</i>	73
2.5	Modèle de la boucle fermée	74
2.6	Conclusion	78
3	Mesures de capteurs embarqués	80
3.1	Navigation inertielle	81
3.1.1	Principes de la navigation inertielle	81
3.1.2	Erreurs de mesure	84
3.1.3	Modèle de l'IMU MPU-6500	86
3.2	Autres sources d'informations	92
3.2.1	Dans la littérature	92
3.2.2	Estimation de vitesse à partir de mesures IMU	98
3.2.3	Estimation de vitesse à partir de mesures radar	100
3.3	Conclusion	113

4 Synthèse d'estimateur pour un système en boucle fermée : application au drone	115
4.1 Présentation du problème	116
4.1.1 Problématique générale	117
4.1.2 Problématique appliquée au drone	119
4.1.3 Structure du modèle	120
4.2 Estimateur hors boucle d'asservissement	121
4.2.1 Estimateurs de la littérature sur les drones	122
4.2.2 Comparaison des estimateurs à partir de données expérimentales	127
4.2.3 Conclusion	131
4.3 Synthèse conjointe correcteur/estimateur	131
4.3.1 Présentation du problème	132
4.3.2 Application au contrôle et à l'estimation de la dynamique du drone	139
4.4 Conclusion	150
5 Conclusion et perspectives	152
5.1 Conclusion	152
5.2 Perspectives	154
5.2.1 Technologie SigmaFusion TM	154
5.2.2 Synthèse conjointe correcteur/estimateur	155
5.2.3 Méthode d'estimation du domaine d'attraction des correcteurs	155
5.2.4 Radar FMCW	156
A Annexes	157
A.1 Caractéristiques du micro-drone <i>Crazyflie</i>	157
A.2 Identification des paramètres du modèle dynamique	157
A.3 Chaîne de commande	159
A.4 Système bouclé par un gain h	161
A.5 Produit de Redheffer et représentation linéaire fractionnaire (LFT)	162
A.6 Forme LFT de $A(\Delta(x))$	163
A.6.1 Forme LFT de $S(\eta)^{-1}$	163
A.6.2 Forme LFT de $A(\Delta(x))$	165
A.7 Relation entre matrice Doppler, h et θ_0	165
A.8 Principe de mesure d'un radar FMCW	166
A.9 Algorithmes en temps discret	170
A.9.1 Filtre de Kalman linéaire	170
A.9.2 Filtre de Kalman étendu	170
A.10 Table des valeurs	170

Table des figures

1.1	Les principaux blocs de la navigation autonome	17
1.2	Contexte applicatif de la thèse	18
1.3	Incertitude sur la position qui augmente en fonction du temps lors du <i>dead-reckoning</i>	19
2.1	Contrôle du micro-drone <i>Crazyflie</i>	28
2.2	Vol du drone <i>Crazyflie</i> dans l'enceinte du système <i>Vicon</i>	29
2.3	Repères de référence pour la modélisation dynamique	30
2.4	Sens de rotation des moteurs $M_{i=\{1,2,3,4\}}$	32
2.5	Efforts appliqués sur le drone en vol	34
2.6	Asservissement d'origine du <i>Crazyflie</i>	35
2.7	Comparaison entre un vol simulé et un vol mesuré par le système <i>Vicon</i>	36
2.8	Pôles du système pour $h = 0$	39
2.9	Illustration de l'effet des couplages en vol	39
2.10	Structure en cascade lorsque $h = 0$ et rebouclage lorsque $h \neq 0$	40
2.11	Tracé du lieu d'Evans où les flèches indiquent le sens $ h $ croissant	41
2.12	Instabilité avec les correcteurs d'origine du <i>Crazyflie</i> pour $h = 25mm$	44
2.13	Schéma d'un système en rebouclage unitaire	45
2.14	Asservissement de l'angle de roulis $\delta\phi$	47
2.15	Boucle interne des vitesses angulaires (à gauche : boucle ouverte, à droite : fonction de sensibilité)	48
2.16	Boucle externe des angles (à gauche : boucle ouverte, à droite : fonction de sensibilité)	49
2.17	Suivi d'un échelon puis rejet d'une perturbation en échelon	49
2.18	Correcteurs <i>PID</i> et <i>P/PI</i> appliqués au modèle non-linéaire	50
2.19	Asservissement de l'angles de roulis $\delta\phi$ avec bouclages en fonction de h	51
2.20	$G_{\omega,h}(p)$ pour $h \in [-25, 25] mm$ (à gauche : Bode, à droite : Nyquist)	51
2.21	$G_{\phi,h}(p)$ pour $h \in [-25, 25] mm$ (à gauche : Bode, à droite : Nyquist)	52
2.22	Stabilité avec les nouveaux correcteurs <i>P/PI</i> pour $h = 25mm$	52
2.23	Problème sous forme standard	54
2.24	Transformation de la structure cascade en un problème standard	55
2.25	Pondérations utilisées pour la synthèse de correcteur	56
2.26	Pondération sur la fonction de sensibilité $S_{\phi,PPI}$	56
2.27	Correcteur H_∞ obtenu sans pondération $W_u(p)^{-1}$	57
2.28	Correcteur H_∞ obtenu lors de l'ajout de $W_u(p)^{-1}$	58
2.29	Réponse temporelle du correcteur H_∞ comparé au correcteur <i>P/PI</i>	59
2.30	Correcteurs <i>PID</i> , <i>P/PI</i> et H_∞ appliqués au modèle non-linéaire	60
2.31	Bode du correcteur H_∞ initial $K_{n=8}(p)$ et du correcteur réduit $K_{r=2}(p)$	62
2.32	Asservissement de $\delta\phi$ par les correcteurs $K_{n=8}(p)$ et $K_{r=2}(p)$	63

2.33	Représentation linéaire fractionnaire associée à (2.57)	67
2.34	Projection de l'ellipsoïde \mathcal{E}_p sur le plan (ϕ, θ)	73
2.35	Modèle BO en boucle ouverte, BF avec l'asservissement de l'attitude	75
2.36	Spectre normalisé de la vitesse v_y du drone en vol (échelle log sur l'axe des ordonnées)	76
2.37	Bode du modèle linéaire de la boucle fermée avec les correcteurs <i>PID</i> d'origine	77
2.38	Réponse temporelle de la boucle fermée avec les correcteurs <i>PID</i> d'origine	77
2.39	Vitesse v_y prédite et erreur absolue par rapport à la référence	78
3.1	Schéma d'un accéléromètre : statique à gauche, en chute libre à droite	82
3.2	Schéma d'un INS, d'après [Gro13]	83
3.3	Procédure de base d'un INS	83
3.4	Segments de pentes caractéristiques dans le tracé de l'écart-type d'Allan, d'après [IEE98]	88
3.5	Enregistrement des mesures IMU lorsque le drone est en vol stationnaire	89
3.6	Écart-type d'Allan des signaux des 3 axes de l'accéléromètre lors de l'expérience A	90
3.7	Axe z de l'accéléromètre seul lors de l'expérience A	91
3.8	Modélisation du terme RW (à gauche) et BI (à droite) pour l'expérience A pour l'axe z	91
3.9	Modèle total de l'axe z de l'IMU pour l'expérience A	92
3.10	Écart-type d'Allan des signaux des 3 axes de l'accéléromètre lors de l'expérience B	93
3.11	Système de navigation avancé	93
3.12	Ajustement d'un modèle affine sur les mesures $\tilde{a}_{acc,y}$ par la méthode des moindres carrés	99
3.13	Signaux de l'accéléromètre et signaux issus de la vitesse de référence <i>Vicon</i>	100
3.14	Vitesse relative $v \cos \theta$ entre un radar fixe et un obstacle en mouvement	101
3.15	Illustration d'un signal émis par un radar FMCW	101
3.16	Configuration du radar et spectre Doppler correspondant	102
3.17	Matrice $M(\Delta\nu, R)$ issue d'un radar type FMCW	103
3.18	Vue de dessus du champ de vision du radar	104
3.19	Radar MIMO avec 1 antenne d'émission et 2 antennes de réception	106
3.20	<i>Beamforming</i> avec un seul radar MIMO avec une orientation fixe	107
3.21	Simulateur du Laboratoire d'Architectures Intégrées Radio-fréquences du CEA	108
3.22	Configuration des radars sur le drone et faisceaux orientés virtuellement	108
3.23	Matrices $M_{90^\circ-\tilde{\theta}_{IMU}-\theta_0}(\Delta\nu, R)$ et $M_{-\tilde{\theta}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$ issues du radar 1	109
3.24	Mesure simulée du radar lors d'un vol réel du <i>Crazyflie</i>	110
3.25	Dispositif expérimental radar+IMU	110
3.26	Expérience A : vitesse constante	112
3.27	Expérience B : vitesse qui change à 15m	113
3.28	Expérience C : hauteur qui change à 15m	114
4.1	Estimateur basé sur un modèle de la boucle ouverte (BO)	115
4.2	Estimateur basé sur un modèle de la boucle fermée (BF)	116
4.3	Structure conjointe de correcteur/estimateur	116
4.4	Cheminements possibles pour la synthèse de correcteur K et d'estimateur E	119
4.5	Signaux échangés par le microcontrôleur (μC) du drone	119
4.6	Structure du modèle dynamique du drone asservi en attitude	121

4.7	Problème d'estimation sous forme standard	122
4.8	Estimation \hat{v} sur le test 2 du tableau 4.2	130
4.9	Estimation \hat{b}_{acc} sur le test 2 du tableau 4.2	131
4.10	Problème standard de synthèse d'un estimateur de type Kalman	134
4.11	Forme standard du problème H_2/H_∞	134
4.12	Problème de synthèse conjointe de K/E	137
4.13	Approche de synthèse séquentielle à gauche, synthèse mixte à droite	138
4.14	Approche séquentielle : synthèse du correcteur K	141
4.15	Fonctions de transfert du système bouclé lors de la synthèse sans pondération $W_u(p)$	142
4.16	Correcteur K synthétisé par la méthode H_∞ en fonction de $W_u(p)$	143
4.17	Approche séquentielle : synthèse de l'estimateur E	144
4.18	Estimateur E synthétisé en fonction de la pondération sur la commande du correcteur $W_u(p)$	145
4.19	Approche mixte : synthèse conjointe du correcteur H_∞ et de l'estimateur H_2	146
4.20	Correcteur K , estimateur E (SEQ) et correcteur/estimateur K/E (MIX) syn- thétisés avec la pondération $W_{u,1}(p)$	147
4.21	Simulation de l'asservissement de l'angle $\delta\phi$ (synthèse avec $W_{u,1}(p)$)	148
4.22	Valeurs RMS des erreurs d'estimation de la vitesse et du biais en fonction de $W_u(p)$	148
4.23	Correcteur et estimateur SEQ et MIX , avec la pondération $W_{u,1}(p)$ et les filtres F	150
A.1	Dimensions utilisées dans le modèle	158
A.2	Identification des coefficients la fonction $\beta(U(t))$	159
A.3	Bloc "Modèle drone" de la figure 2.6	160
A.4	Le système équivalent aux équations A.7 et A.8	161
A.5	Représentations linéaires fractionnaires	162
A.6	Illustration de R_{min} et R_{max}	166
A.7	Signaux principaux d'un radar FMCW	167
A.8	Obtention de la matrice Doppler $M(\Delta\nu, R)$ via 2 FFTs successives	169
A.9	Phase de prédiction et de correction en fonction des indices	171

Liste des tableaux

2.1	Paramètres du modèle (2.8)	35
3.1	Comparaison de technologies de capteurs extéroceptifs	97
3.2	Distance finale lors de l'expérience type A	112
4.1	Estimateurs utilisés pour la comparaison	129
4.2	Erreurs RMS des différents estimateurs	130
4.3	γ_{H_∞} obtenu lors de la synthèse du correcteur H_∞	143
4.4	γ_{H_2} obtenu lors de la synthèse de l'estimateur H_2	144
4.5	γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenus par l'approche mixte (MIX) et par l'approche séquentielle (SEQ)	145
4.6	γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenus lors de la synthèse <i>MIX</i> et <i>SEQ</i> avec les filtres F	149
A.1	Paramètres du modèle (2.8)	157
A.2	Valeurs numériques du mémoire	172

Notations

Acronymes

- PID : proportionnel intégral dérivé ;
- LMI : inégalité matricielle linéaire ;
- IMU : centrale inertielle ;
- INS : système de navigation inertielle ;
- BF : boucle fermée, BO : boucle ouverte ;
- RW : marche aléatoire, BI : instabilité de biais, BW : bande-passante ;
- CW (radar) : radar à ondes continues, FMCW (radar) : radar à ondes continues modulées en fréquence ;
- FFT : transformation de Fourier rapide ;
- MIMO : multiples entrées multiples sorties ;
- RMS : racine carré de la moyenne des carrés ;
- KF : filtre de Kalman linéaire ;
- EKF : filtre de Kalman étendu ;
- PF : filtre particulaire ;
- FLOP : nombre d'opérations en virgule flottante par seconde.

Symboles

- $\mathcal{R}_i = [\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i]$: repère inertielle fixe par rapport au laboratoire ;
- $\mathcal{R}_b = [\vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b]$: repère *body* lié aux axes du drone ;
- $\eta = [\phi, \theta, \psi]^\top$: attitude (dans l'ordre *roll, pitch, yaw*) ;
- $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\top$: vitesse angulaire dans le repère \mathcal{R}_b ;
- $v = [v_x, v_y, v_z]^\top$: vitesse linéaire dans le repère \mathcal{R}_b ;
- R_{ib} : matrice de rotation du repère \mathcal{R}_i au repère \mathcal{R}_b ;
- $c_i = \cos(i)$, $s_i = \sin(i)$, $t_i = \tan(i)$;
- $D = \mathbf{diag}(D_x, D_y, D_z)$ (resp. D_T) : gains de la chaîne de commande linéarisée des consignes vers les couples (resp. la poussée) ;
- T : poussée selon l'axe \vec{z}_b , $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top$: couples ;
- μ_{xy} (resp. μ_z) : coefficient de traînée aérodynamique latéral (resp. vertical) ;
- h : distance centre de gravité/point d'application des efforts aérodynamiques ;
- $\mathbf{diag}(\xi)$: matrice diagonale dont les termes diagonaux valent ξ ;
- g : gravité, m : masse, $J = \mathbf{diag}(J_x, J_y, J_z)$: matrice d'inertie ;
- T_c : consigne de poussée, $\eta_c = [\phi_c, \theta_c, \psi_c]^\top$: consignes d'angles ;
- ν : fréquence (Hz) ;
- j : nombre complexe, $2\pi\nu$: pulsation en radians par seconde (rad/s) ;
- p : variable de Laplace ;
- $L(p)$: fonction de transfert en boucle ouverte, $S(p)$: fonction de sensibilité ;
- $T_{i \rightarrow o}(p)$: fonction de transfert entre un signal d'entrée i et de sortie o ;
- $F(p)$: filtre passe-bas numérique ;

- \star : produit de Redheffer ;
- $W(p)$: pondération ;
- I_n : matrice identité de taille n , 0_n : matrice nulle de taille n ;
- fonction de classe \mathcal{C}^1 : fonction continue et dérivable une fois ;
- \tilde{m} : grandeur m mesurée, \hat{m} : grandeur m estimée ;
- $\sigma^2(\tau)$: variance d'Allan sur un intervalle de temps τ .

Chapitre 1

Introduction générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de la conception de dispositifs d'aide à la navigation d'agents mobiles autonomes comme des véhicules, des robots ou des personnes, dans un environnement inconnu. De tels dispositifs doivent permettre à un agent de naviguer de manière autonome, c'est-à-dire de progresser vers son objectif, tout en évitant de rentrer en collision avec des obstacles, et ce, sans nécessiter d'informations préalables sur son environnement.

Parmi les applications visées par ce type de dispositifs, on retrouve les véhicules autonomes destinés au transport de personnes et de marchandises, qui devraient être capables de circuler en ville sans intervention humaine à l'horizon 2040 [NTG⁺18]. Ceux-ci présentent plusieurs intérêts : ils devraient rendre les routes plus sûres (plus de 90% des accidents proviendraient d'erreurs humaines [Smi13]), de diminuer les embouteillages ou encore de favoriser le déploiement de modes de transport partagés afin de réduire le nombre de véhicules en circulation. Les robots mobiles sont aussi concernés par les systèmes d'aide à la navigation autonome, qui peuvent leur permettre d'accomplir sans intervention extérieure des tâches dans des environnements difficiles d'accès pour des humains, comme la recherche de victimes dans des décombres [Mur14] ou l'exploration spatiale [Yos09]. Enfin, les dispositifs d'aide à la navigation peuvent aussi être utilisés pour le guidage de personnes, comme par exemple dans le cas de la navigation de malvoyants [LFB⁺17] ou de pompiers dans des bâtiments enfumés [FG10]. Toutes ces applications sont dites embarquées, ce qui implique que les ressources énergétiques et calculatoires de l'agent sont limitées. Le dispositif d'aide à la navigation doit donc être efficace (énergie, calculs) et avoir un encombrement (taille, poids) minimal.

Le dispositif d'aide à la navigation autonome doit pouvoir ordonner le mouvement de l'agent suivant une trajectoire dépourvue d'obstacles, étant donné la connaissance de son environnement proche et de son mouvement actuel. Cela nécessite plusieurs fonctionnalités telles que la planification de trajectoires, la perception de l'environnement ou encore le contrôle de l'agent, représentées sur la figure 1.1. Certaines fonctions comme la planification de trajectoires et la perception de l'environnement sont réparties dans une boucle de contrôle dite "haut niveau", associée à la génération d'une trajectoire sûre pour permettre à l'agent d'atteindre son objectif sans entrer en collision avec des obstacles. À l'intérieur de celle-ci, on trouve une boucle dite "bas niveau", associée au contrôle physique du mouvement de l'agent.

Pour fonctionner, le système de navigation autonome repose notamment sur l'estimation de la trajectoire réelle de l'agent, c'est-à-dire de sa position, de sa vitesse et de son orientation par rapport à son environnement. Dans certains cas, on peut obtenir ces informations grâce à des signaux provenant d'une infrastructure, comme le système de positionnement par satellite

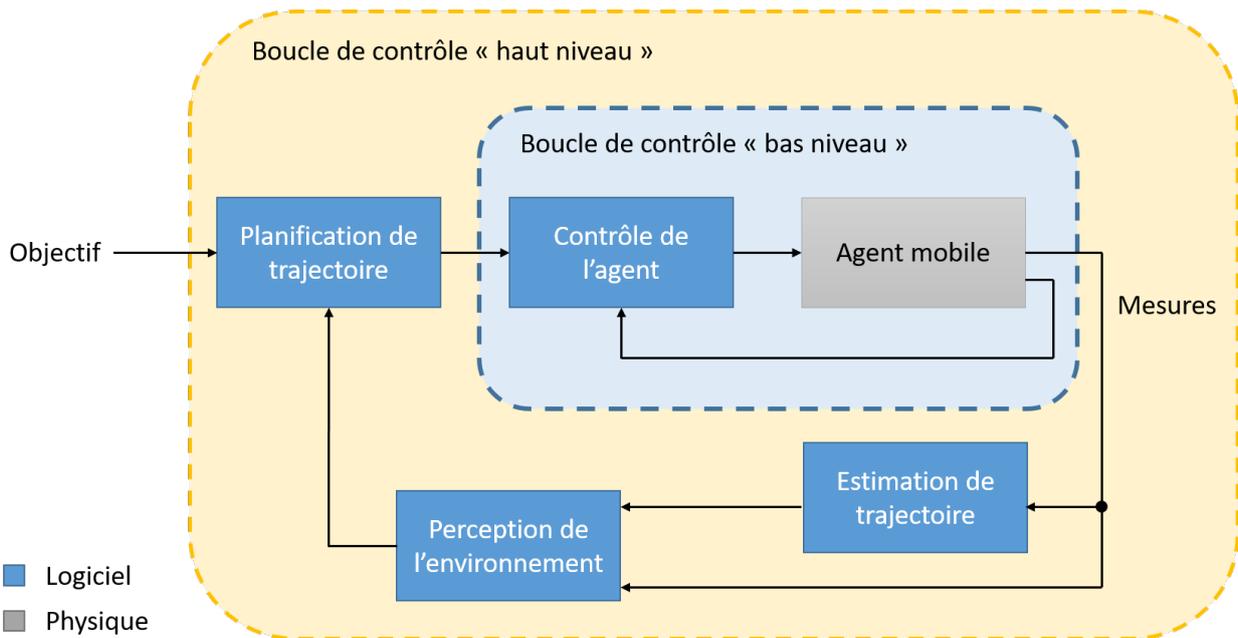


FIGURE 1.1 – Les principaux blocs de la navigation autonome

américain GPS (*Global Positioning System*) ou les systèmes de positionnement par bornes UWB (*Ultra Wideband*) [Gro13]. Cependant, ces systèmes nécessitent d'être pré-installés dans l'environnement de l'agent, ils ne peuvent donc pas être utilisés dans un contexte d'exploration en environnement inconnu. De plus, même dans les applications de la vie courante telles que la navigation à l'intérieur de bâtiments ou en ville, leurs signaux peuvent se trouver obstrués [GYT01, Lac04]. Lorsque ces signaux d'infrastructure ne sont pas accessibles, il s'agit alors d'avoir une solution pour reconstituer l'état de l'agent seulement à partir des informations qu'il perçoit localement. Même lorsque ces signaux de l'infrastructure sont en théorie accessibles, il est commun de chercher à avoir une solution qui permette, au moins temporairement, d'estimer le mouvement de l'agent de manière indépendante. En effet, cela peut permettre de rendre le système autonome plus robuste en cas de défaut de signaux de l'infrastructure [SKHS16, PVL⁺09], ou même d'économiser de l'énergie comme dans [OGM⁺15], où le GPS est utilisé ponctuellement pour recalibrer l'estimation du mouvement, obtenu le reste du temps à partir d'informations locales issues de capteurs embarqués basse consommation.

L'objectif de la thèse est de fournir une solution d'estimation du mouvement qui soit indépendante d'informations de l'infrastructure, et qui soit embarquable sur de petits systèmes embarqués. D'un point de vue pratique, le démonstrateur sur lequel se base la thèse est le micro-drone *Crazyflie* commercialisé par la marque *Bitcraze*, dont les principales caractéristiques sont données dans l'annexe A.1. Le micro-drone *Crazyflie*, visible sur la figure 1.2a, est un quadricoptère¹ léger (29g) et de petite taille (7cm de rotor à rotor). Celui-ci représente le type de contraintes qui caractérisent les petits systèmes embarqués, comme la faible capacité à embarquer des charges encombrantes et des ressources de calcul et de mémoire limitées au niveau du microcontrôleur. Une des applications où l'utilisation d'un micro-drone tel que le *Crazyflie* fait particulièrement sens, est la cartographie en trois dimensions d'espaces difficiles ou dangereux d'accès pour les humains, notamment afin de préparer

1. Un quadricoptère (ou quadrirotor) est un engin volant dont la portance est assurée par ses 4 rotors.

des phases d'interventions humaines. Dans la littérature, des drones sont par exemple utilisés pour explorer visuellement et cartographier des bâtiments présentant des risques radioactifs [BVB17], détecter des défauts dans les réseaux électriques sous-terrains [RCMKAIM⁺21] ou encore rechercher des fuites dans les réseaux de gaz [TFP⁺19]. Dans cette thèse, on visera donc ce cadre applicatif d'inspection d'espaces confinés tels que des canalisations, comme schématisé sur la figure 1.2b. Cela permet de représenter des conditions dans lesquelles l'agent doit être capable d'effectuer sa mission même en cas d'absence prolongée de signaux d'infrastructure.

Dans cette thèse, on étudiera seulement le bloc physique de l'agent et les blocs logiciels de contrôle et d'estimation de trajectoire représentés sur la figure 1.1. En effet, on considère que dans un premier temps, les fonctionnalités de planification de trajectoires et de perception de l'environnement peuvent être assurées par un opérateur qui pilote le drone à distance. Cependant, on doit prendre en compte les contraintes que ces fonctionnalités impliquent sur les blocs de contrôle et d'estimation de trajectoire. Cela permet de préparer l'intégration de ces fonctionnalités dans un second temps. L'application de navigation autonome dans une canalisation implique que le drone puisse suivre des trajectoires et détecter les obstacles qui l'entourent dans un environnement contraint spatialement, potentiellement dans le noir et le brouillard, et qu'il peut être soumis à des perturbations telles que le vent créé par ses propres hélices. Les pré-requis à considérer tout au long de la thèse seront donc :

- **Vol suivant des trajectoires non-agressives.** Cela implique des vitesses de déplacement de l'ordre de $1m.s^{-1}$ et des angles de roulis et de tangage inférieurs à 30° . Cela permet au drone d'évoluer au sein de la canalisation lentement, afin de laisser le temps à l'opérateur ou au système de navigation autonome de réagir lorsqu'un obstacle survient.
- **Capteurs pouvant fonctionner dans le noir et le brouillard.**
- **Stabilité du drone vis-à-vis de perturbations non-mesurées et non-modélisées (p.ex. vent).**
- **Coûts en matière de calcul, de mémoire, et d'embarquabilité des blocs de contrôle et d'estimation les plus faibles possibles.** Cela permet de dégager de l'espace, virtuel sur le microcontrôleur, et physique sur le drone, pour intégrer potentiellement d'autres capteurs et des algorithmes liés à la planification de trajectoire et la perception de l'environnement.

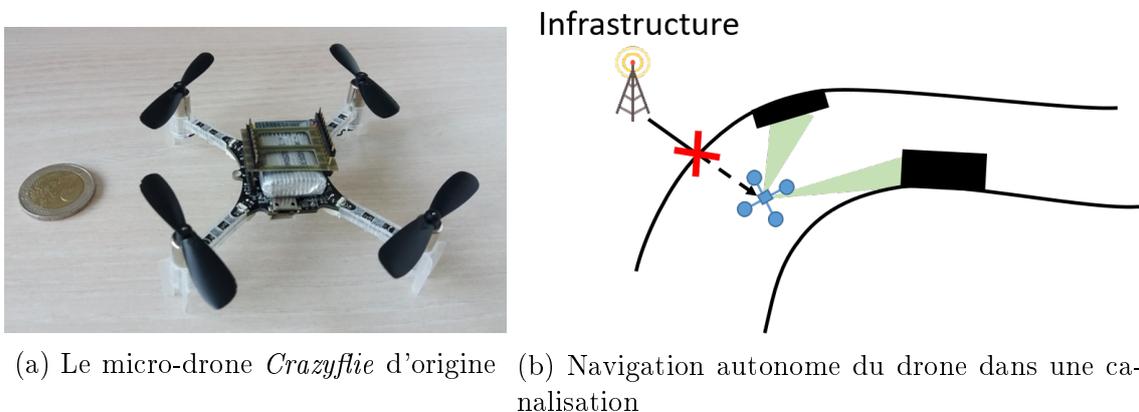


FIGURE 1.2 – Contexte applicatif de la thèse

1.1 Problématique

Lorsque l’environnement est inconnu et que les signaux d’infrastructure ne sont pas disponibles, l’estimation de la trajectoire doit se faire exclusivement à partir d’informations disponibles localement au niveau de l’agent. Ces informations peuvent provenir de deux sources différentes : un modèle du mouvement et des mesures de capteurs embarqués. Dans ces conditions, la position de l’agent n’est pas directement accessible à partir de ces informations disponibles localement. Elle doit alors être obtenue en appliquant le principe de navigation à l’estime (*dead-reckoning*), qui consiste, étant donné une position initiale, à intégrer numériquement les signaux de vitesse et d’orientation pour reconstruire le chemin parcouru [Gro13]. Le problème de cette technique, est qu’elle est sujette à l’accumulation d’erreurs liée à l’intégration numérique de signaux eux-mêmes entachés d’erreurs, comme représenté sur la figure 1.3. Afin de limiter l’accumulation d’erreurs et donc la dérive de l’estimation de position, il sera nécessaire d’estimer au mieux la vitesse et l’orientation de l’agent. Étant donné que cela devra être réalisé par le microcontrôleur du drone, le coût d’implémentation (calculs, mémoire) de la solution devra être faible.

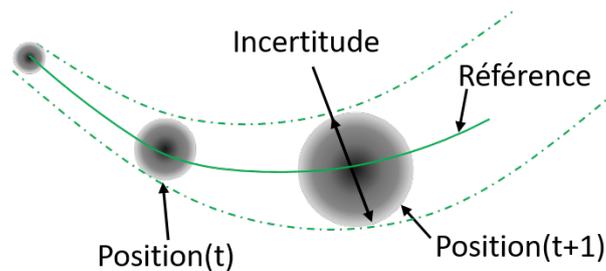


FIGURE 1.3 – Incertitude sur la position qui augmente en fonction du temps lors du *dead-reckoning*

Dans ce travail de thèse, le sujet de l’estimation de l’orientation ne sera pas abordé. En effet, le micro-drone *Crazyflie* embarque d’origine une procédure d’estimation de son orientation. Celle-ci se base sur un filtre complémentaire proposé par Madgwick [Mad10, MHV11] que l’on considère suffisamment précis pour notre application (erreur quadratique moyenne inférieure à 0.8° en statique et à 1.7° en dynamique). On se concentrera donc sur l’estimation de la vitesse du drone sans signaux d’infrastructure.

1.1.1 Positionnement vis-à-vis de la littérature

Pour répondre à ce problème d’estimation du mouvement sans signaux d’infrastructure, les travaux de la littérature portent principalement sur les capteurs et les algorithmes pour fusionner leurs données [Gro13, MHW⁺19, BVN16]. Au niveau des capteurs, l’objectif est de concevoir et d’intégrer sur l’agent de nouveaux capteurs plus performants en matière d’efficacité énergétique et de précision [SRFM16, MCW⁺17, ACP17]. Les algorithmes de fusion de données sont également au cœur de la problématique de navigation sans signaux d’infrastructure. En effet, chaque capteur ne produit qu’une mesure partielle du mouvement du système qui, de plus, est entachée d’erreurs (bruits, biais). Il est alors commun d’obtenir une

estimation complète du mouvement en fusionnant les données issues de multiples capteurs [LYS02]. Dans ce cas, l'objectif est de développer des algorithmes peu coûteux en calculs et qui produisent une estimation la plus précise possible [SMMK14, LX17]. Dans ces travaux issus de la littérature, la partie "estimation de la trajectoire" est considérée indépendamment des autres blocs du système de navigation de la figure 1.1, et notamment du bloc de contrôle. Cependant, étant donné que le mouvement que l'on souhaite estimer est régi par la stratégie de contrôle de l'agent, il semblerait plus judicieux de considérer son influence dans la stratégie d'estimation. C'est pourquoi, même si les approches de la littérature permettent d'apporter une solution partielle au problème, on va aborder dans cette thèse le problème du point de vue de l'interaction entre le bloc de contrôle et celui d'estimation. En effet, on va chercher à apporter une réponse à la question suivante :

"Étant donné un agent mobile asservi tel que le micro-drone Crazyflie équipé d'un ensemble limité de capteurs, comment exploiter l'interaction entre le bloc de contrôle et d'estimation, pour que son mouvement soit estimé avec précision et un coût de calcul faible ?"

L'approche qui consiste à prendre en compte l'influence du bloc de contrôle lors de la conception de celui d'estimation semble faire sens pour les raisons explicitées ci-après.

Comme dit précédemment, l'estimateur peut avoir accès à deux sources d'informations pour estimer la trajectoire de l'agent : des mesures de capteurs et un modèle du mouvement. La structure du système de navigation autonome représenté sur la figure 1.1 est telle, que l'on peut se demander quel système modéliser pour décrire le mouvement de l'agent. En effet, une première approche pourrait consister à modéliser la dynamique de l'agent sans son correcteur, autrement dit, à modéliser sa dynamique "en boucle ouverte", puis à synthétiser un estimateur à partir de ce modèle. Cependant, on peut noter que les méthodes classiques en automatique de synthèse d'un estimateur (resp. d'un correcteur), comme celle d'un filtre de Kalman [Kal60], impliquent que l'ordre de complexité de l'estimateur (resp. du correcteur) obtenu soit au moins égal à l'ordre du modèle du système. Or, le comportement d'un système en boucle ouverte est potentiellement plus complexe que celui de ce même système "en boucle fermée". En effet, il est par exemple bien connu que l'utilisation d'une boucle de rétroaction négative pour commander un système peut réduire les effets non-linéaires de son comportement en boucle ouverte [Bla34]. Étant donné que l'on cherche à minimiser le coût calcul de la solution, il serait donc plus intéressant de synthétiser un estimateur à partir du modèle de l'agent en boucle fermée, qui pourrait être d'ordre plus faible que celui en boucle ouverte. On remarque toutefois que l'ordre du modèle en boucle fermée que l'on obtiendrait en regroupant les équations liées au correcteur et au modèle en boucle ouverte, risquerait d'être plus élevé que l'ordre du modèle en boucle ouverte. Il serait alors nécessaire d'appliquer une méthode de réduction de l'ordre du modèle pour obtenir un modèle en boucle fermée de complexité réduite. L'estimateur synthétisé à partir de ce modèle en boucle fermée d'ordre réduit pourrait donc avoir une complexité plus faible que celle de l'estimateur obtenu à partir du modèle en boucle ouverte. Cela permettrait finalement de limiter le coût d'implémentation de l'estimateur, ce qui est un des objectifs principaux de la thèse.

S'il fait sens de prendre en compte le correcteur dans le modèle du mouvement utilisé par l'estimateur, alors on pourrait potentiellement étendre cette idée en mettant en commun la fonction de correcteur et d'estimateur pour obtenir une structure mixte de correcteur/estimateur. La première raison à cela serait de réduire potentiellement le coût d'implémentation de l'ensemble. En effet, d'un point de vue théorique d'abord, cela permettrait de ne prendre en compte le modèle du système qu'une seule fois lors de la synthèse conjointe du correc-

teur/estimateur, contre deux fois lorsque l'on réalise d'abord la synthèse du correcteur puis celle de l'estimateur. Dans le premier cas, l'ordre de complexité de l'ensemble correcteur/estimateur vaudrait alors au moins une fois l'ordre du modèle, alors que dans le second cas, il vaudrait au moins deux fois l'ordre du modèle. L'argument de la réduction du coût d'implémentation est également valable au niveau du logiciel, étant donné que l'approche conjointe permettrait de mettre en commun un certain nombre d'entités, comme les signaux d'entrée, la définition de variables et de fonctions associées à l'asservissement et à l'estimation. En plus du gain en complexité, l'approche conjointe pourrait aussi permettre un gain en performance d'estimation, en réglant le correcteur de manière à maximiser la performance de l'estimateur. En effet, lors de la synthèse du correcteur/estimateur et dans le cas où les contraintes fixées par le cahier des charges sur l'asservissement ne sont pas trop fortes, le correcteur devient un degré de liberté sur lequel influencer, par rapport à l'approche où l'estimateur est synthétisé pour le système asservi par un correcteur fixé à l'avance. On devrait donc pouvoir formuler un problème d'optimisation afin de concevoir un ensemble correcteur/estimateur qui vise à maximiser la performance d'estimation, tout en satisfaisant le cahier des charges du point de vue de l'asservissement.

1.1.2 Démarche

Pour répondre à la problématique, on va se placer dans le cadre des méthodes regroupées sous le terme de commande robuste, qui permettent de formuler de manière unique les problèmes de synthèse de correcteurs et d'estimateurs [ZCDG96, Bay12]. Cela les rend attractives, étant donné que notre objectif final est de réaliser la synthèse conjointe d'un correcteur/estimateur. On présente ci-dessous les sous-questions que soulève la problématique et la démarche que l'on va mettre en place pour y répondre.

Modélisation et commande Comme expliqué précédemment, le problème de l'estimation du mouvement du drone conduit à se poser la question de sa modélisation et de sa commande. Sa modélisation physique mène à un modèle non-linéaire, dont les paramètres seront calibrés expérimentalement avec le drone *Crazyflie*. Cependant, on dispose en automatique de méthodes destinées aux systèmes linéaires pour la synthèse de correcteurs et d'estimateurs qui sont efficaces et systématiques. Une modélisation linéaire du drone serait alors préférable, afin de réutiliser ces méthodes pour faciliter ensuite la mise en place d'une démarche de synthèse conjointe d'un correcteur/estimateur. Un modèle linéarisé du drone autour d'un point de fonctionnement prenant en compte les conditions de fonctionnement du drone sera alors utilisé pour la synthèse de correcteur, tout en évaluant l'impact de ce choix vis-à-vis du modèle non-linéaire du drone.

D'origine, le drone *Crazyflie* est commandé par un correcteur de type PID, ce qui lui permet d'obtenir des performances raisonnables. Cependant, dans la mesure où l'objectif est de coupler la synthèse du correcteur et de l'estimateur, il est nécessaire de proposer une méthode de synthèse de correcteur issue de la commande robuste. Pour cela, on va procéder en deux étapes. La première consistera à développer une méthode de réglage simple d'une structure de correcteur de complexité limitée afin d'assurer des performances raisonnables, par application des approches d'automatique fréquentielle classique, ce qui est original dans le contexte de la commande des drones. Cela permettra dans une seconde étape, de concevoir un correcteur avec une méthode d'automatique fréquentielle avancée qu'est la synthèse H_∞ , afin de disposer d'une méthode de synthèse menant à un correcteur performant sur le drone et faisant partie des méthodes de synthèse de la commande robuste. Ensuite, nous proposerons

une méthode d'analyse permettant de valider sur le modèle non-linéaire du drone l'usage d'un correcteur linéaire développé à partir d'un modèle linéarisé. Cette méthode est basée sur la recherche d'une fonction de Lyapunov à partir de techniques développées pour les systèmes non-linéaires qui peuvent se réécrire sous forme linéaire fractionnelle [EGS96], en proposant une variante adaptée au cas du drone.

Capteurs embarqués Pour obtenir une estimation de qualité du mouvement, se pose également la question du choix de capteurs à embarquer sur le drone. Ceux-ci doivent idéalement fournir des mesures précises de sa vitesse en trois dimensions, dans des conditions expérimentales liées à la navigation à l'intérieur de canalisations, tout en étant facilement embarquables sur un micro-drone comme le *Crazyflie*. De tels capteurs prêts-à-l'emploi n'existent pas dans le commerce, et il est donc nécessaire d'étudier et d'adapter les solutions existantes à cette application.

Nous réaliserons une étude de l'état-de-l'art des capteurs utilisés dans le contexte de la navigation sans signaux d'infrastructure des drones. Cela permettra de mettre en évidence le fait que des capteurs pertinents pour cette application seraient une centrale inertielle et un radar. Si la centrale inertielle est couramment utilisée dans ce contexte, elle nécessitera cependant d'être caractérisée en termes d'erreurs afin d'adapter son modèle de mesure aux conditions expérimentales liées au drone en vol. En ce qui concerne l'usage d'un radar, celui-ci est généralement fait dans le contexte de la détection d'obstacles et non pas celui de la mesure de vitesse. Cependant, étant donné que le radar permet de déterminer le mouvement d'obstacles par rapport à lui-même, il devrait également être possible, à partir de ses mesures, de déterminer son propre mouvement par rapport à un environnement fixe. On développera donc un algorithme de traitement de ses mesures pour le rendre utilisable en tant que capteur de vitesse, et cet usage sera validé en simulation sur le drone puis expérimentalement, dans des conditions représentatives du mouvement du drone.

Modélisation et estimation Afin de construire un estimateur performant du mouvement du drone asservi, se posera la question du choix de la méthode d'estimation, sachant que dans l'objectif d'intégrer la synthèse de l'estimateur avec celle du correcteur, les deux méthodes devront pouvoir être couplées. Une étude de l'état-de-l'art montrera l'intérêt porté dans la littérature sur les drones aux méthodes d'estimation basées sur le filtre de Kalman. Compte tenu du fait que la synthèse d'un estimateur comme le filtre de Kalman est réalisée à partir d'un modèle du drone, la question de la modélisation se posera de nouveau.

Notre objectif de thèse revient à choisir une méthode ayant le meilleur compromis entre qualité de l'estimation du mouvement et coût d'implémentation. Le modèle non-linéaire du drone devrait représenter un comportement dynamique au plus proche de son comportement réel, ce qui permettrait, lors de la synthèse d'un estimateur à partir de ce modèle, d'obtenir une estimation de qualité. Cependant, un tel estimateur serait potentiellement plus complexe qu'un estimateur basé sur ce même modèle linéarisé en un point de fonctionnement. De plus, une méthode de synthèse d'estimateur basée sur un modèle non-linéaire ne serait pas souhaitable, étant donné le choix expliqué précédemment d'adopter une approche linéaire pour la synthèse de correcteur. Enfin, ces modèles sont représentatifs du comportement en boucle ouverte du drone, or celui-ci est asservi en boucle fermée. Une hypothèse émise plus tôt était que, étant donné que le drone est asservi, il serait possible de représenter son comportement dynamique par un modèle dont l'ordre serait réduit par rapport au modèle en boucle ouverte.

On voudra donc évaluer l'approche qui mène au meilleur compromis entre qualité de

l'estimation et coût d'implémentation pour notre cadre applicatif. Pour cela, on comparera la performance et le coût de calcul des estimateurs synthétisés à partir des différents modèles cités précédemment, et ce, à partir de données expérimentales issues du drone en vol. Notamment, on cherchera à voir s'il existe un réel gain en performance d'estimation avec un estimateur basé sur le modèle non-linéaire du drone, ou si un estimateur de plus faible complexité comme le filtre de Kalman basé sur un modèle linéarisé est suffisant.

Synthèse conjointe correcteur/estimateur La comparaison précédente mènera ensuite à considérer l'idée de regrouper la synthèse de l'estimateur du mouvement du drone asservi avec la synthèse du correcteur. Cela pose d'abord des problématiques pratiques liées à l'implémentation logicielle du correcteur et de l'estimateur en une seule entité de correcteur/estimateur, telles que la capacité à mettre en commun les signaux associés au correcteur et à l'estimateur, auxquelles on apportera une réponse. Cette mise en commun de la synthèse de correcteur et d'estimateur implique également de pouvoir formuler mathématiquement le problème de synthèse conjointe.

Étant donné que la synthèse d'un filtre de Kalman linéaire peut se ramener à un problème de commande H_2 , et le fait qu'un correcteur H_∞ satisfaisant ait été obtenu pour asservir le drone, on considérera alors naturellement l'idée de réaliser la synthèse conjointe du correcteur/estimateur en résolvant un critère H_2/H_∞ . Pour rendre une telle synthèse possible, on devra alors reformuler de manière homogène le critère H_∞ précédemment utilisé pour la synthèse de correcteur et le critère H_2 utilisé pour l'estimateur. Finalement, on réalisera la comparaison entre cette approche de synthèse conjointe avec celle d'une approche séquentielle où on synthétise un correcteur puis un estimateur, dans le but d'évaluer le gain potentiel en qualité d'estimation et en coût calcul.

1.2 Plan détaillé

Ce document de thèse est découpé en trois principaux chapitres dont le plan est détaillé ci-dessous.²

1.2.0.1 Chapitre 2

Ce chapitre traite de la dynamique du drone : l'objectif est de la modéliser, d'étudier ses caractéristiques puis de la contrôler. Il suit la trame présentée ci-dessous.

Modèle du drone non-asservi On commence par obtenir un modèle non-linéaire du drone à partir du principe fondamental de la dynamique, dont les paramètres sont identifiés à partir de données expérimentales du drone *Crazyflie* en vol. On étudie ce modèle non-linéaire à partir de ses linéarisations en différents points d'équilibre. On met notamment en évidence le fait que le comportement du drone est hautement dépendant d'un terme lié aux effets de traînée aérodynamique, qui peuvent être importants en fonction de la forme des capteurs que l'on intègre sur le drone pour l'estimation et la détection d'obstacles. On montre alors que, dans certains cas où ces effets sont importants, le correcteur *PID* implémenté d'origine n'est pas capable de stabiliser le drone.

2. On note que le chapitre 2 et le chapitre 3 peuvent se lire de manière quasiment indépendante, mais que la lecture du chapitre 4 requiert d'avoir lu les deux précédents.

Asservissement du drone On propose de régler de nouveau le correcteur d'origine, d'une part pour améliorer la performance et la stabilité du système asservi, et d'autre part, car cette étape nous permet d'amorcer la discussion sur le contrôle du drone qui sera au cœur de l'approche de synthèse conjointe de correcteur et d'estimateur. On obtient alors un correcteur P/PI , plus performant que celui d'origine (temps de réponse plus faible, stabilité vis-à-vis des effets aérodynamiques) et avec un ordre (et donc un coût calcul) plus faible. Puis, on montre que l'on peut obtenir un correcteur aux caractéristiques similaires par la méthode de synthèse H_∞ . L'intérêt est que le critère d'optimisation construit pour cette synthèse de correcteur H_∞ pourra être réutilisé par la suite, lors de la synthèse conjointe de correcteur et d'estimateur.

Estimation du domaine d'attraction des correcteurs d'attitude Dans cette thèse, les correcteurs sont linéaires et sont conçus à partir du modèle linéarisé du drone en un point d'équilibre. Cependant, les conditions de vol liées à la navigation autonome peuvent nécessiter de s'écarter du point de linéarisation. Dans le but d'avoir une navigation autonome sûre, on développe une méthode d'analyse des correcteurs linéaires, pour garantir qu'ils restent capables de stabiliser le drone représenté par son modèle non-linéaire, même loin du point de linéarisation. Pour cela, on estime leur domaine d'attraction étant donné le modèle non-linéaire du drone. Cela est réalisé en construisant un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMI) qui est résolu numériquement afin de vérifier que le domaine de vol est bien compris dans le domaine d'attraction des correcteurs.

Modèle de la boucle fermée Enfin, on donne le modèle du drone asservi qui prend en compte le correcteur PID d'origine. Ce modèle étant d'ordre important, on montre que son ordre peut être diminué via une méthode de réduction d'ordre de modèle. Il sera par la suite utilisé au début du chapitre 4, pour montrer l'intérêt de considérer l'effet du correcteur dans le modèle dynamique du drone lors de la phase d'estimation.

1.2.0.2 Chapitre 3

Ce chapitre traite des capteurs utilisés pour estimer la vitesse du drone. L'objectif est de choisir un ensemble de base de capteurs à bas coût d'intégration et d'obtenir un modèle de mesure qui sera utilisé dans la phase d'estimation.

Navigation inertielle On présente les principes de la navigation à l'estime. Les capteurs habituellement utilisés pour ce type de navigation sont des capteurs inertiels, à savoir des accéléromètres et des gyroscopes. Comme ceux-ci constituent la base d'un système de navigation sans signaux d'infrastructure, on veut avoir un modèle précis de leur mesures. Pour cela, on utilise la méthode de la variance d'Allan pour identifier un modèle des capteurs inertiels embarqués sur le drone *Crazyflie* à partir de mesures expérimentales.

Autres sources d'informations La navigation à l'estime en se basant seulement sur des capteurs inertiels, comme ceux intégrés sur le *Crazyflie*, implique une dérive rapide de l'erreur d'estimation d'état. Pour contrer cette dérive, on peut fusionner les mesures des capteurs inertiels avec d'autres sources d'informations. On étudie les travaux de la littérature à ce sujet, et on en déduit l'intérêt de coupler les capteurs inertiels à un radar pour estimer la vitesse du drone. Tout d'abord, on montre que dans le cas spécifique d'un drone de type quadricoptère comme le *Crazyflie*, les capteurs inertiels peuvent être assimilés à des capteurs

qui mesurent directement sa vitesse de translation. Ensuite, on montre qu'un radar de type FMCW (Frequency Modulated Continuous Wave), habituellement utilisé pour détecter des obstacles, peut aussi servir de capteur de vitesse. Pour cela, on présente un algorithme d'estimation de la vitesse du drone par rapport au sol développé au cours de la thèse. Cet algorithme est finalement validé, tout d'abord en simulation, puis expérimentalement, grâce à un radar FMCW $77GHz$ de la marque *Infineon*.

1.2.0.3 Chapitre 4

Ce dernier chapitre traite de l'estimation de la vitesse du drone asservi. L'objectif est d'aboutir à une estimation de la vitesse qui soit la meilleure possible, étant donné le modèle du drone donné du chapitre 2 et les mesures des capteurs présentés dans le chapitre 3. Ce chapitre est découpé en deux parties.

Estimateur hors boucle d'asservissement On présente les structures d'estimateurs de base de la littérature sur les drones. Souvent, les travaux de la littérature sont basés sur le filtre de Kalman, synthétisé à partir d'un modèle du drone "en boucle ouverte", c'est-à-dire sans prendre en compte son correcteur. On compare ces approches de la littérature à celle où l'on synthétise un gain optimal de Kalman à partir du modèle "en boucle fermée", prenant en compte le correcteur, qui est donné à la fin du chapitre 2. On compare la performance d'estimation des estimateurs obtenus via ces deux approches à partir de données expérimentales du *Crazyflie* en vol. On montre que l'approche basée sur un modèle du drone en boucle fermée permet d'atteindre une erreur d'estimation de la vitesse plus faible par rapport aux autres approches de la littérature, basées sur un modèle du drone en boucle ouverte.

Synthèse conjointe correcteur/estimateur La synthèse d'un gain optimal de Kalman peut être formulée de manière équivalente sous la forme d'un problème de synthèse de commande H_2 . On combine cette synthèse H_2 d'un estimateur avec la synthèse H_∞ d'un correcteur du chapitre 2, pour obtenir un problème de synthèse par optimisation avec un critère mixte H_2/H_∞ . L'objectif de ce critère mixte est de formaliser la recherche d'un correcteur/estimateur, qui garantisse une performance d'estimation maximale, tout en satisfaisant le cahier des charges donné sur l'asservissement dans le chapitre 2.

On compare l'approche de synthèse avec un critère mixte H_2/H_∞ à l'approche plus classique de synthèse séquentielle d'un correcteur H_∞ , puis d'un estimateur H_2 . Pour cela on évalue la performance des deux approches en simulation. On montre lors de ces simulations que l'approche de synthèse conjointe permet un gain en précision d'estimation qui dépend du niveau de contraintes imposé par le cahier des charges sur l'asservissement. On montre également que l'approche de synthèse conjointe permet dans tous les cas un gain en complexité de l'ensemble correcteur/estimateur par rapport à l'approche séquentielle.

1.3 Contributions

- On peut distinguer trois contributions principales, chacune étant associée à un chapitre :
- La méthode d'estimation du domaine d'attraction de correcteurs linéaires pour le contrôle de l'orientation du drone représenté par un modèle non-linéaire. Celle-ci consiste à formaliser la recherche du domaine d'attraction sous la forme d'un problème

- d’optimisation convexe sous contraintes d’inégalités matricielles linéaires (LMI), qui peut être résolu numériquement par ordinateur ;
- L’algorithme d’estimation de la vitesse de translation et de la hauteur à partir des mesures d’un radar FMCW à entrées et sorties multiples (MIMO). Celui-ci permet d’estimer ces grandeurs avec précision et un coût de calcul faible afin d’être embarqué sur un microcontrôleur ;
 - La synthèse conjointe d’un correcteur et d’un estimateur avec un critère mixte H_2/H_∞ . Celle-ci permet de synthétiser simultanément une entité qui, à partir des signaux présents sur le microcontrôleur, permet de contrôler le mouvement du drone et de l’estimer. La synthèse est réalisée par optimisation à partir d’un critère H_2/H_∞ qui permet de rechercher un correcteur/estimateur qui minimise l’erreur d’estimation tout en satisfaisant le cahier des charges sur l’asservissement du drone.

1.4 Liste des publications

Articles de conférences avec comité de lecture

- J. Barra, S. Lesecq, M. Zarudniev, O. Debicki, N. Mareau, and L. Ouvry. Localization system in GPS-denied environments using radar and IMU measurements: Application to a smart white cane. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, pages 1201–1206, 2019
- J. Barra, G. Scorletti, S. Lesecq, M. Zarudniev, and E. Blanco. Attraction domain estimation of linear controllers for the attitude control of VTOL vehicles: P/PI control of a quadrotor. In *2020 European Control Conference (ECC)*, pages 1644–1649, 2020

Brevet international (FR, EU, US)

- J. Barra, O. Debicki, S. Lesecq, N. Mareau, L. Ouvry, and M. Zarudniev. Method and system for measuring the velocity of a carrier with respect to the ground. *Commissariat à l’Energie Atomique et aux Energies Alternatives*, U.S. Patent US20200200891A1, 2020

Chapitre 2

Modélisation et asservissement du drone

Dans le contexte de la navigation autonome sans signaux d'infrastructure, on cherche à estimer au mieux le mouvement d'un agent mobile asservi comme le drone considéré dans cette thèse, en exploitant les informations disponibles localement au niveau de son microcontrôleur. Parmi les informations disponibles, on peut chercher à obtenir un modèle pour prédire le mouvement que va réaliser le drone lorsqu'il va être actionné. Comme celui-ci est un système qui est asservi, son mouvement est régi en partie par les paramètres dynamiques liés à sa structure (comme sa masse par exemple), mais aussi par le correcteur qui est employé pour le contrôler. On va donc tout d'abord étudier le système asservi de départ qu'est le drone *Crazyflie* d'origine issu du commerce. Cela passe par obtenir un modèle de la dynamique du drone lorsqu'il est non-asservi, autrement dit, son modèle "en boucle ouverte". Puis on étudiera la structure de commande d'origine du *Crazyflie*, et on cherchera à voir si celle-ci est satisfaisante vis-à-vis de son modèle dynamique et des objectifs en matière de navigation autonome que l'on s'est fixés dans l'introduction de la thèse. Notamment, on voudra s'assurer que cette structure de commande permet de garantir la stabilité du drone sur le domaine de vol prédéfini (trajectoires non-agressives), tout en ayant un coût d'implémentation réduit. Ensuite, étant donné le modèle du drone "en boucle ouverte" et son correcteur, on cherchera à obtenir un modèle du drone lorsqu'il est asservi, soit son modèle "en boucle fermée".

2.1 Présentation de la plateforme expérimentale

On présente tout d'abord rapidement la plateforme expérimentale sur laquelle se base la thèse. Il s'agit du micro-drone¹ *Crazyflie* commercialisé par le marque *Bitcraze*. Ensuite, on introduit le système de capture de mouvement *Vicon*, qui a été utilisé lors de campagnes d'expérimentations en début de thèse afin d'obtenir des données de référence du mouvement du drone.

2.1.1 Micro-drone *Crazyflie*

Le micro-drone *Crazyflie* constitue un projet "open-source", son logiciel embarqué et les données techniques liées à la plateforme sont donc complètement accessibles². Le *Crazyflie* est un quadricoptère, ce qui signifie qu'il présente 4 rotors lui permettant de décoller et

1. Même s'il n'existe pas une terminologie universelle concernant les catégories de drones, on peut définir les micro-drones comme ayant une masse inférieure à 100g [Fre12].

2. <https://www.bitcraze.io/documentation/start/>

d’atterrir verticalement. Il est de petite taille (7cm entre ses rotors) et léger (29g). Ses moteurs permettent de transporter une masse maximale de l’ordre de 50g, avec un impact important sur la durée de vol déjà limitée d’origine (10min). Le microcontrôleur embarqué est un STM32F405 ARM Cortex-M4, avec 192Ko de mémoire RAM (utilisée lors des calculs), et 1Mo de mémoire flash (utilisée pour stocker les programmes). Celui-ci contient le logiciel du *Crazyflie*, qui est programmé en C++ et entièrement modifiable. Les capacités de ce micro-drone sont donc particulièrement limitées lorsqu’il s’agit d’embarquer des capteurs et des programmes pour traiter leurs données. Cela motive d’autant plus le positionnement de la thèse, qui vise à étudier la problématique de l’estimation du mouvement du point de vue de l’interaction entre les blocs de contrôle et d’estimation, présents dans tous les cas sur le drone, plutôt que de l’intégration de nouveaux capteurs.

Le schéma d’introduction de la figure 1.1 montrait les principaux blocs de la navigation autonome dans un cas général. Dans cette thèse, la configuration que l’on va plutôt considérer est celle de la figure 2.1. Elle ne contient pas les blocs de perception de l’environnement et de planification de trajectoire, qui sont remplacés par un opérateur. Celui-ci peut agir sur le mouvement du drone en envoyant des signaux de consigne de poussée et d’attitude par signal radio (avec un ordinateur ou une radiocommande). En retour, il est possible de recevoir des signaux du drone par radio également, comme les mesures de ses capteurs ou la valeur des variables issues de son logiciel embarqué.

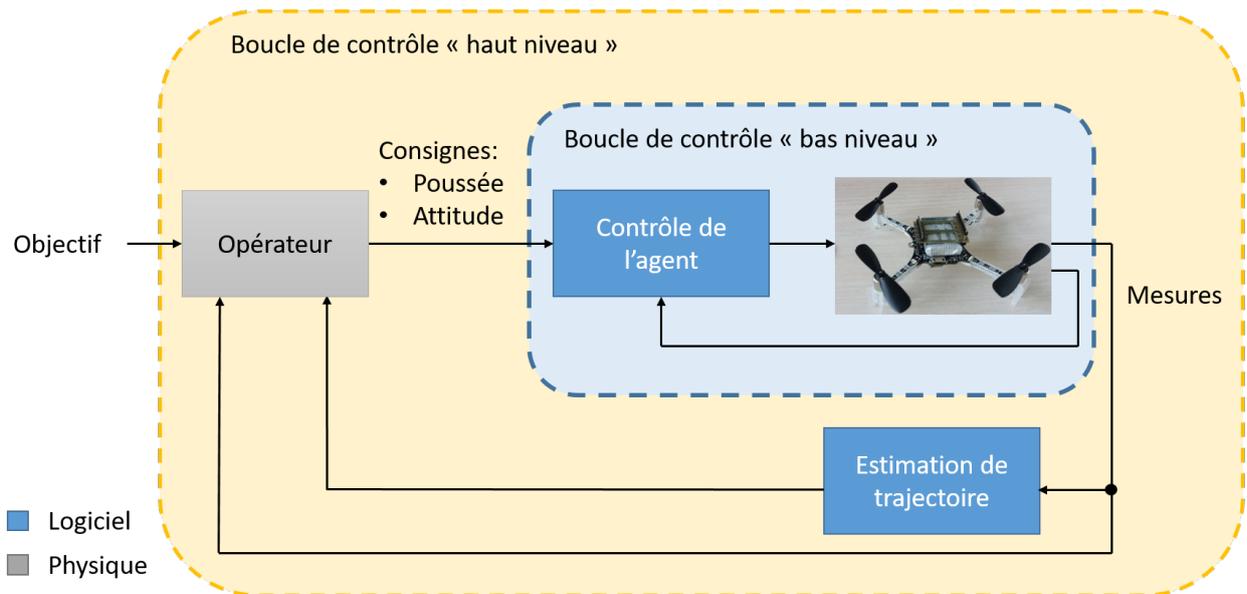


FIGURE 2.1 – Contrôle du micro-drone *Crazyflie*

2.1.2 Système de capture de mouvement *Vicon*

Cette thèse a été réalisée au sein du Commissariat à l’Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA), en collaboration avec le laboratoire Ampère de l’École Centrale de Lyon. Lorsque cela a été possible, les résultats de cette thèse ont été validés expérimentalement. En particulier, des expériences ont été menées au sein de la plateforme Clinatex du CEA-Leti qui possède un système de capture de mouvement de la marque *Vicon*³ constitué de 8 caméras infrarouges et capable de localiser un objet avec une précision millimétrique. Ces expériences

3. <https://www.vicon.com/>

réalisées en début de thèse consistaient à effectuer plusieurs vols avec le drone *Crazyflie* dans l'enceinte du système de capture de mouvement, suivant des trajectoires de type aller-retour et vol libre (translations et rotations dans les 3 dimensions), comme sur la figure 2.2. Lors de ces expériences, on enregistre la position et l'orientation du drone au cours du temps grâce au système *Vicon*. Simultanément, on enregistre les signaux suivants présents au niveau du microcontrôleur : consignes de poussée et d'orientation, mesures des capteurs embarqués (accélération, vitesse angulaire et orientation), signaux de commande envoyés aux moteurs. On fera plusieurs fois référence au cours du document à ces expériences, qui ont notamment permis d'identifier des paramètres et de valider le modèle dynamique du drone, ou encore de simuler *a posteriori* le bloc d'estimation d'état à partir des données enregistrées au préalable.



FIGURE 2.2 – Vol du drone *Crazyflie* dans l'enceinte du système *Vicon*

2.2 Modèle du drone non-asservi

Une première étape dans la conception d'un système asservi est d'étudier son comportement sans correcteur. Cette analyse doit permettre d'obtenir des informations sur le comportement des grandeurs à asservir, qui seront exploitées par la suite afin de concevoir un correcteur ou un estimateur adaptés au système et à ses conditions de fonctionnement. On présente ci-dessous le modèle du drone non-asservi, qui nous servira de base pour la suite des développements de cette thèse, puis on étudie ses caractéristiques dynamiques.

2.2.1 Modèle dynamique

Notre sujet d'étude, le drone de type quadricoptère, est un engin plutôt bien présent dans la littérature [SSAF⁺19, KM17, DP15]. En effet, on observe un intérêt fort des chercheurs durant les dernières années pour cette plateforme compacte qui peut servir de sujet d'étude pour illustrer diverses thématiques de recherche en contrôle. Malgré cela, il n'existe pas de réel consensus sur un modèle standard du drone [ABLCGS⁺17]. Cela est peut-être dû au fait que les drones peuvent exister sous des formes diverses et variées [Fre12], et que, si certains aspects de la dynamique comme ceux qui relèvent de l'inertie sont plutôt bien décrits par des modèles mathématiques, d'autres, comme les effets aérodynamiques sont plus difficiles à mesurer et à représenter. Ceci implique de faire des choix de modélisation, afin d'obtenir un modèle qui corresponde à nos besoins, à savoir, décrire le comportement du drone lors d'un

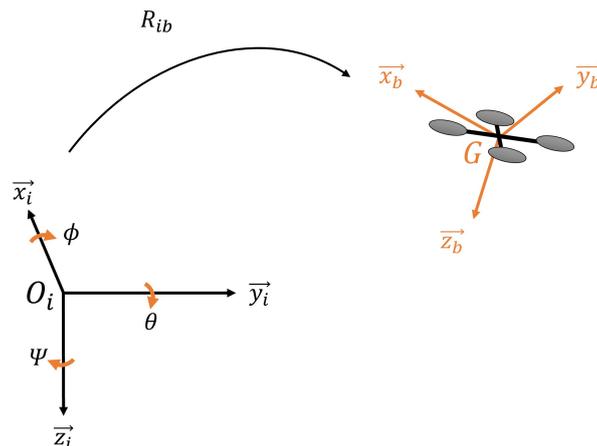


FIGURE 2.3 – Repères de référence pour la modélisation dynamique

vol non-agressif⁴ en vue de l'asservir.

2.2.1.1 Repères

On définit 2 repères, représentés sur la figure 2.3, qui vont servir à décrire le mouvement du drone :

- $\mathcal{R}_i = (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$: repère inertiel fixe par rapport au laboratoire, dont l'axe \vec{z}_i est aligné avec la direction de la gravité ;
- $\mathcal{R}_b = (G, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$: repère attaché au corps (*body*) du drone, centré sur son centre de gravité G et aligné avec ses 3 principaux axes de rotation.

2.2.1.2 Choix de modélisation

Comme dit précédemment, il n'existe pas de modèle standard du drone et des choix ont dû être effectués pour mettre en équations le mouvement du drone. On en propose ci-dessous une justification.

Représentation de l'attitude L'orientation du repère \mathcal{R}_b attaché au corps du quadricoptère va changer au cours du temps par rapport au repère inertiel fixe \mathcal{R}_i . On appelle cette orientation l'attitude, et elle est notée η . Pour la représenter, plusieurs formalismes existent [CSM11], dont les principaux sont les suivants :

- **Angles de Tait-Bryan/Euler** [MKC12, CLD05] : ils sont constitués d'un ensemble de trois angles appelés *roll*/roulis ϕ , *pitch*/tangage θ , *yaw*/lacet ψ , voir figure 2.3. Ils traduisent la rotation de \mathcal{R}_b par rapport à \mathcal{R}_i autour des axes x_i , y_i et z_i respectivement. L'orientation du quadricoptère par rapport au repère de référence \mathcal{R}_i est donc représentée par le vecteur $\eta = [\phi, \theta, \psi]^\top$;
- **Quaternions** [LWZ15, TM06] : l'idée est de représenter l'orientation sous la forme d'une rotation unique d'un angle α autour d'un axe représenté par le vecteur unitaire $\vec{v} = [v_x, v_y, v_z]^\top$. L'attitude est alors donnée par le quaternion $\eta = [q_w, q_x, q_y, q_z]^\top = [\cos(\alpha/2), v_x \sin(\alpha/2), v_y \sin(\alpha/2), v_z \sin(\alpha/2)]^\top$. On note que le quaternion est un nombre

4. Pour rappel, un vol est dit non-agressif lorsque les angles d'assiette du drone restent inférieurs à 30°, voir le chapitre d'introduction.

unitaire⁵, il faut donc appliquer une opération de normalisation dans le cas où il est obtenu par calcul numérique, afin de s’assurer qu’il est bien de norme unitaire.

Les angles de Tait-Bryan/Euler ont l’avantage de représenter les rotations de manière naturelle. Cependant, ils sont parfois décriés dans la littérature à cause du phénomène appelé blocage de cardan (*Gimbal Lock*) qui intervient lorsque les angles d’assiette du drone sont proches de 90° [Gre17]. Dans cette situation, deux des trois axes de rotation se retrouvent alignés et on perd donc théoriquement un degré de liberté pour représenter les changements d’attitude. Les quaternions, qui ne sont pas soumis au phénomène de blocage de cardan, ont été introduits afin de pallier à ce problème. Ils sont, de plus, souvent utilisés dans les systèmes embarqués, car les opérations entre quaternions sont en général moins chères en calculs que celles sur les angles d’Euler. Cependant, le quaternion représente une rotation physique en 3 dimensions à l’aide d’un nombre à 4 dimensions. Il introduit donc une représentation d’état non-minimale ainsi qu’une relation algébrique (liée à la normalisation) entre les différents paramètres qui le composent, rendant l’analyse du modèle plus difficile. Les quaternions représentent de plus les rotations de manière moins intuitive que les angles d’Euler. Comme notre objectif est d’analyser les caractéristiques du modèle du drone lors d’un vol non-agressif où les angles restent éloignés de 90° et du risque de blocage de cardan, on choisit d’utiliser les angles d’Euler dans le reste de ce document. La matrice de rotation du repère inertiel \mathcal{R}_i vers le repère *body* \mathcal{R}_b est notée R_{ib} . Elle correspond à 3 rotations successives autour des axes x_i , y_i et z_i et vaut :

$$R_{ib}(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\psi c_\theta & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\phi c_\psi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\phi s_\psi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où $c_i = \cos(i)$, $s_i = \sin(i)$ et $t_i = \tan(i)$ avec $i = \{\phi, \theta, \psi\}$. Enfin, le lien entre les vitesses angulaires $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\top$ définies dans le repère \mathcal{R}_b et l’évolution des angles d’attitude $\eta = [\phi, \theta, \psi]^\top$ est donné par la relation suivante [Gre17, ZLWL14] :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Chaîne de commande Pour pouvoir modéliser le mouvement du drone, on a besoin de connaître la relation qui existe entre le signal électrique en sortie du microcontrôleur que l’on note $U_{i=\{1,2,3,4\}}$ et la force de poussée de chaque moteur M_i , qui dépend de sa vitesse de rotation Ω_i . Habituellement, on modélise un moteur électrique via l’équation mécanique de Newton et électrique de Kirchoff [Gre17]. Cependant, il a été montré expérimentalement pour le *Crazyflie* que l’on peut, en première approximation, modéliser la vitesse de rotation Ω comme une fonction affine du signal électrique U [Fö15]. De plus, comme on se place dans un cas de vol non-agressif du quadricoptère, on peut considérer la dynamique des moteurs suffisamment rapide par rapport à celle des autres variables dynamiques pour être négligée et donc l’hypothèse de [Fö15] valide. Afin de ne pas complexifier la lecture du modèle du drone et de limiter le nombre de paramètres à identifier, on a donc choisi de modéliser le lien entre le signal U et la vitesse de rotation Ω comme une fonction affine $\Omega = \beta(U)$ identique pour chaque moteur, dont on présente la méthode d’identification dans l’annexe A.2. La rotation de l’hélice d’un moteur génère une force de poussée que l’on peut considérer

5. Soit de norme euclidienne égale à 1.

proportionnelle au carré de sa vitesse de rotation Ω avec un coefficient de proportionnalité k [Ban17, MKC12], que l'on mesure expérimentalement comme présenté dans l'annexe A.2. Les poussées individuelles des 4 moteurs s'additionnent pour créer au centre de gravité du drone une force de poussée totale T_p définie dans \mathcal{R}_b telle que :

$$T_p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \sum_i \Omega_i(t)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -T(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Soit la configuration des moteurs du drones représentée sur la figure 2.4. Les poussées individuelles de chaque moteur $M_{i=\{1,2,3,4\}}$ permettent de générer des couples τ pour induire des rotations du drone⁶, tels que :

$$\tau(t) = \begin{bmatrix} kL(-\Omega_1(t)^2 - \Omega_2(t)^2 + \Omega_3(t)^2 + \Omega_4(t)^2)/\sqrt{2} \\ kL(-\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2 + \Omega_3(t)^2 - \Omega_4(t)^2)/\sqrt{2} \\ b(-\Omega_1(t)^2 + \Omega_2(t)^2 - \Omega_3(t)^2 + \Omega_4(t)^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x(t) \\ \tau_y(t) \\ \tau_z(t) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

où L est la longueur des bras du quadricoptère, voir figure 2.4, et b est un coefficient constant de couple autour de l'axe vertical discuté dans l'annexe A.2.

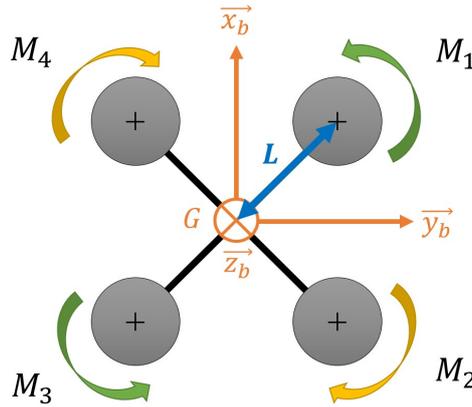


FIGURE 2.4 – Sens de rotation des moteurs $M_{i=\{1,2,3,4\}}$

Aérodynamique Les forces qui s'appliquent sur le quadricoptère en vol sont le poids P , la poussée T_p et les effets aérodynamiques que l'on regroupe dans F (voir figure 2.5). Ces derniers sont la combinaison de différents effets qui peuvent influencer sur les efforts générés sur le drone et donc son mouvement, comme par exemple la modification de la poussée due à la présence de vent ou encore les effets de traînée dus aux frottement fluides [ZZY18, Bou07]. Ici, on choisit de ne modéliser que les effets de traînée aérodynamique, qui sont prépondérants lorsque le drone vole en intérieur. Ceux-ci génèrent une force de friction s'opposant au déplacement du quadricoptère dans l'air, proportionnelle au carré de sa vitesse par rapport à l'air [Bou07, BM12]. Ces effets sont souvent considérés comme négligeables dans la littérature vis-à-vis du poids et de la poussée, notamment dans certaines applications où le drone vole à de faibles vitesses [ABLCGS⁺17, LL11]. Cependant, les négliger revient à modéliser un système où il n'y aurait pas de friction, et donc pas de dissipation d'énergie. Si

6. Par exemple, pour créer un couple τ_x et donc une rotation autour de l'axe \vec{x}_b , la vitesse des moteurs 1 et 2 est diminuée par rapport à celle des moteurs 3 et 4.

ce modèle peut être suffisant lorsqu'il s'agit de régler grossièrement des correcteurs, il n'est pas satisfaisant dans le cas où l'on cherche d'abord à obtenir un modèle qui retranscrive suffisamment la réalité afin d'étudier et de simuler fidèlement le comportement du drone.

On adopte dans ce document la même représentation des effets aérodynamiques que celle donnée dans [LMBM14, AKDM13], soit une force de traînée F qui s'oppose au mouvement, proportionnelle par un coefficient μ_{xy} (resp. μ_z) à la vitesse de déplacement latérale (resp. verticale) du quadricoptère. Il est montré dans ces travaux qu'une telle représentation est intéressante vis-à-vis de l'estimation d'état⁷. Elle permet en effet d'obtenir une estimation de la vitesse linéaire du drone à partir de mesures d'accélération fournies par les capteurs inertiels, ce qui sera expliqué plus en détail dans le prochain chapitre sur les mesures de capteurs. On considère dans ce document que la force F s'applique à une distance h du centre de gravité selon l'axe \vec{z}_b , ce qui a pour effet de générer un couple autour du centre de gravité. On a choisi de faire cette hypothèse en vue de l'intégration sur le drone de capteurs utilisés pour l'estimation d'état qui pourraient avoir une influence non-négligeable sur son comportement aérodynamique.

2.2.1.3 Équations de la dynamique

On obtient le modèle du drone en appliquant le principe fondamental de la dynamique. Il consiste à faire le bilan des forces et des couples qui agissent sur l'objet et à les mettre en relation avec les accélérations linéaires et angulaires qu'il subit. On donne le modèle dynamique du quadricoptère dans le repère \mathcal{R}_b car la plupart des efforts et des mesures de capteurs sont effectuées dans ce repère.

Hypothèses Le modèle du quadricoptère est donné sous certaines hypothèses simplificatrices :

- la structure du quadricoptère est indéformable ;
- la masse du quadricoptère est constante ;
- la structure du quadricoptère est symétrique par rapport aux axes \vec{x}_b et \vec{y}_b ;
- l'origine G du repère \mathcal{R}_b et le centre de gravité du quadricoptère coïncident.

Forces et couples On liste ci-dessous les forces qui s'appliquent sur le drone en vol, définies dans \mathcal{R}_b :

- la force de poussée T_p , voir équation (2.3) ;
- le poids P :

$$P(t) = R_{ib}(\eta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

où R_{ib} est la matrice de rotation donnée en (2.1), m la masse du quadricoptère et $g = 9.81m.s^{-2}$ est l'accélération gravitationnelle ;

- la force de traînée aérodynamique F :

$$F(t) = \begin{bmatrix} -\mu_{xy}v_x(t) \\ -\mu_{xy}v_y(t) \\ -\mu_zv_z(t) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

⁷ La friction suivant l'axe z est souvent négligée dans l'état de l'art comme [LMBM14, AKDM13]. Cependant, la prendre en compte a également un intérêt du point de vue estimation d'état, qui sera expliqué dans le chapitre 3.

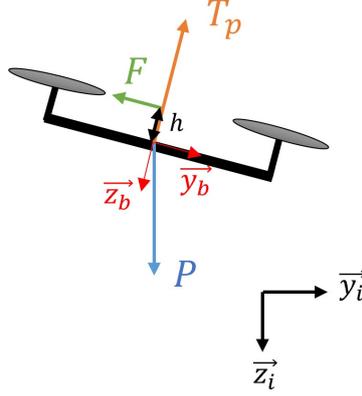


FIGURE 2.5 – Efforts appliqués sur le drone en vol

où μ_{xy} et μ_z sont les coefficients constants de trainée aérodynamique et $v = [v_x, v_y, v_z]^\top$ représente la vitesse linéaire du quadricoptère.

Les couples qui s'appliquent sur le drone en vol sont les suivants :

- les couples générés par les rotors, voir équation (2.4) ;
- les couples générés autour du centre de gravité par la force de trainée aérodynamique :

$$M_a(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\mu_{xy}v_x(t) \\ -\mu_{xy}v_y(t) \\ -\mu_zv_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\mu_{xy}v_y(t) \\ -h\mu_{xy}v_x(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

où \wedge représente le produit vectoriel et h la distance entre le centre de gravité du quadricoptère et le point d'application des efforts de trainée aérodynamique.

2.2.1.4 Modèle non-linéaire

On définit le vecteur d'état X contenant les vitesses angulaires $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^\top$, l'attitude $\eta = [\phi, \theta, \psi]^\top$ et les vitesses linéaires $v = [v_x, v_y, v_z]^\top$ du quadricoptère tel que $X = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, \phi, \theta, \psi, v_x, v_y, v_z]^\top$. Les entrées du modèle dynamique sont la poussée et les couples générés par les moteurs notés $\xi = [T, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique [ZLWL14], on obtient le modèle non-linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\omega}_x = \frac{1}{J_x}[\tau_x + h\mu_{xy}v_y - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z] \\ \dot{\omega}_y = \frac{1}{J_y}[\tau_y - h\mu_{xy}v_x - (J_x - J_z)\omega_x\omega_z] \\ \dot{\omega}_z = \frac{1}{J_z}[\tau_z - (J_y - J_x)\omega_x\omega_y] \\ \dot{\phi} = \omega_x + s_\phi t_\theta \omega_y + c_\phi t_\theta \omega_z \\ \dot{\theta} = c_\phi \omega_y - s_\phi \omega_z \\ \dot{\psi} = \frac{s_\phi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\phi}{c_\theta} \omega_z \\ \dot{v}_x = -gs_\theta - \frac{\mu_{xy}}{m}v_x - v_z\omega_y + v_y\omega_z \\ \dot{v}_y = gc_\theta s_\phi - \frac{\mu_{xy}}{m}v_y - v_x\omega_z + v_z\omega_x \\ \dot{v}_z = -\frac{T}{m} + gc_\phi c_\theta - \frac{\mu_z}{m}v_z - v_y\omega_x + v_x\omega_y \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où J est la matrice d'inertie du quadricoptère telle que :

$$J = \mathbf{diag}(J_x, J_y, J_z) = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.2.1.5 Validation modèle

On veut ensuite être en mesure de valider ce modèle avant de poursuivre toute analyse. Pour cela, il convient tout d'abord d'en identifier les différents paramètres, qui sont regroupés dans la table 2.1. Cette démarche est présentée dans l'annexe A.2. Ensuite, on veut comparer les sorties prédites par le modèle à celles que l'on mesure effectivement lorsque le drone est soumis à des efforts extérieurs. Pour ce faire, nous avons besoin d'actionner le drone et de mesurer son mouvement. Pour valider le modèle, on utilisera donc la structure d'asservissement d'origine du *Crazyflie*, présentée brièvement ci-dessous.

Géométrie	L
Inertie	m, g, J
Rotors	$\beta(U), k, b$
Aérodynamique	μ_{xy}, μ_z, h

TABLE 2.1 – Paramètres du modèle (2.8)

L'asservissement d'origine du *Crazyflie* est représenté schématiquement sur la figure 2.6. Le quadricoptère *Crazyflie* est commandé par l'utilisateur via les consignes suivantes : la poussée T_c et les angles d'attitude $\eta_c = (\phi_c, \theta_c, \psi_c)$. La consigne T_c est donnée en boucle ouverte au quadricoptère et n'est donc pas asservie. Seule l'attitude du drone est asservie afin de répondre à la consigne η_c par l'intermédiaire de 2 boucles d'asservissement imbriquées. Une boucle interne contrôle les vitesses angulaires ω du quadricoptère avec un correcteur K_ω et la boucle externe contrôle les angles d'attitude η avec un correcteur K_η . La sortie du correcteur interne est notée $u = [u_x, u_y, u_z]^T$. Les correcteurs d'origine sont de type PID et seront présentés dans la section 2.3. Le microcontrôleur embarqué distribue ensuite les signaux T_c et u aux moteurs, afin de générer la force de poussée T_p et les couples τ rassemblés dans le vecteur $\xi = [T, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ de la manière détaillée en annexe A.3.

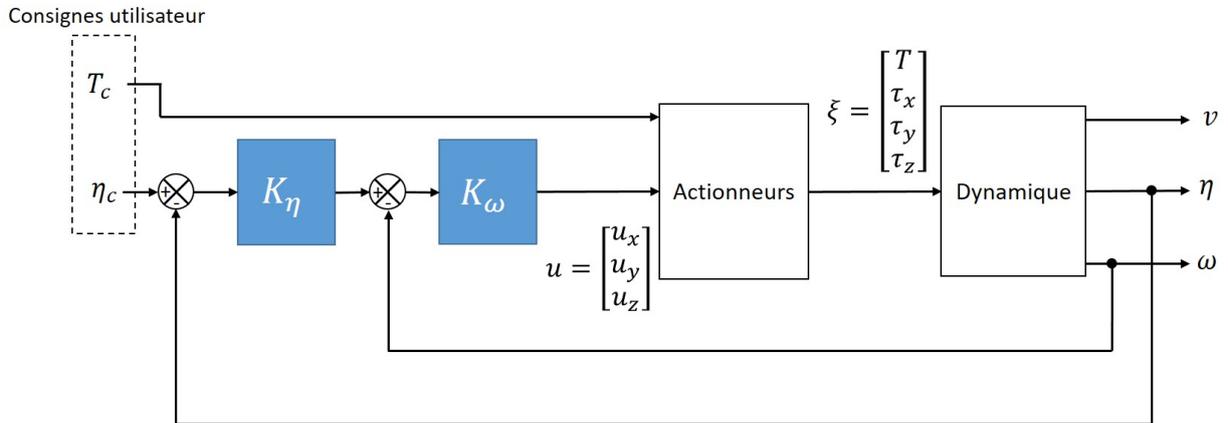


FIGURE 2.6 – Asservissement d'origine du *Crazyflie*

Expériences Un simulateur complet du fonctionnement du *Crazyflie* d'origine a été réalisé, comprenant le modèle dynamique (2.8) et les 2 boucles d'asservissement imbriquées comme représenté sur la figure 2.6. Afin de confronter le simulateur et notamment le modèle (2.8) à la réalité, on a réalisé une campagne de tests visant à recueillir des mesures expérimentales issues du système de capture de mouvement *Vicon* lors du vol du quadricoptère. Pour cela, on enregistre les consignes données par l'utilisateur au *Crazyflie* et on mesure via le système *Vicon* la vitesse et la position linéaire ainsi que l'attitude du drone sur plusieurs vols. Ces consignes sont ensuite fournies en entrée du simulateur afin de reproduire en simulation le mouvement du drone.

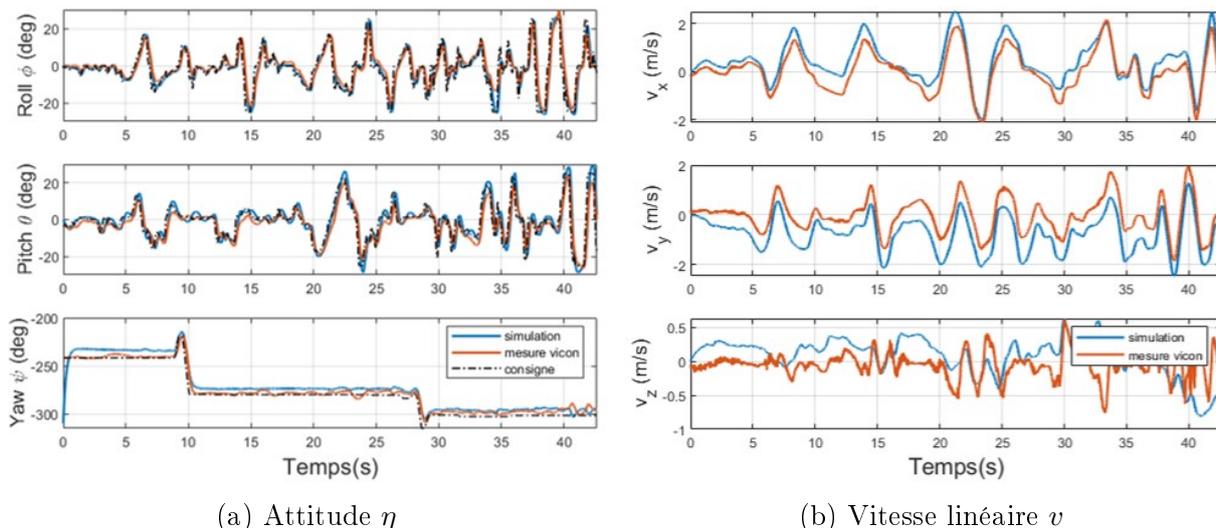


FIGURE 2.7 – Comparaison entre un vol simulé et un vol mesuré par le système *Vicon*

On présente sur la figure 2.7 les sorties simulées du modèle par rapport aux mesures réelles du système *Vicon* lors d'un vol du quadricoptère. On observe sur la figure 2.7a que l'évolution des angles d'attitude est bien simulée et reste similaire à l'attitude réelle mesurée par le système *Vicon* tout au long du vol. On remarque sur la figure 2.7b un écart plus important entre les vitesses linéaires simulées et celles mesurées. Cela est dû au fait que les vitesses linéaires ne sont pas asservies, contrairement aux angles d'attitude. Ceux-ci restent proches des consignes d'angles aussi bien lors de l'expérience réelle que lors de celle simulée, car la boucle fermée permet de réduire l'influence d'un défaut de modélisation. Au contraire, les vitesses linéaires évoluent librement et l'écart qui se crée entre les vitesses simulées et les vitesses réelles dépend de la qualité du modèle. Comme certains phénomènes ont été simplifiés ou négligés (moteurs, aérodynamique), le modèle ne retranscrit pas toutes les dynamiques associées aux vitesses d'où un écart visible. Néanmoins, cette démarche montre que le modèle dynamique choisi est valide et qu'il est capable de prédire, au moins à court-terme, le comportement dynamique du drone.

2.2.2 Analyse du modèle dynamique

Le modèle non-linéaire (2.8) obtenu dans la partie précédente présente des couplages entre ses différents axes et une structure proche d'un système en cascade dont les vitesses angulaires, l'attitude et les vitesses linéaires constituent des sous-systèmes en série. On va montrer dans cette partie par l'analyse du modèle que le comportement dynamique du drone dépend également fortement du paramètre noté h , qui caractérise la distance entre le point

d'application de la force de traînée aérodynamique F et le centre de gravité. En cas de modification de la géométrie du drone et notamment lors de l'ajout de capteurs utilisés pour l'estimation d'état et la détection d'obstacles, cette distance peut varier et être difficile à mesurer. Il paraît alors intéressant d'étudier les caractéristiques de ce modèle, en particulier en fonction de la valeur du paramètre h , afin d'en déduire une stratégie de commande et d'estimation qui soit adaptée.

2.2.2.1 Linéarisation du modèle

L'intérêt du modèle non-linéaire est de décrire un comportement dynamique au plus proche du comportement réel. Cependant, son analyse peut-être rendue complexe à cause des non-linéarités, alors que celle des systèmes linéaires est plus systématique et bénéficie de nombreuses techniques développées historiquement en automatique. L'approche généralement adoptée pour l'analyse est alors de linéariser le modèle non-linéaire en un point d'équilibre proche du point de fonctionnement visé par l'application qu'il convient de définir.

Points d'équilibre Soit un modèle non-linéaire $\dot{x} = f(x, \xi)$ où x est le vecteur d'état et ξ l'entrée de commande du système. On dit que le système admet un point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{\xi})$ si $f(\bar{x}, \bar{\xi}) = 0$. Tout d'abord, considérons le sous-système correspondant à l'évolution des angles d'attitude. En un point d'équilibre, on a :

$$\begin{cases} 0 &= \bar{\omega}_x + s_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} \bar{\omega}_y + c_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} \bar{\omega}_z \\ 0 &= c_{\bar{\phi}} \bar{\omega}_y - s_{\bar{\phi}} \bar{\omega}_z \\ 0 &= \frac{s_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} \bar{\omega}_y + \frac{c_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} \bar{\omega}_z \end{cases} \quad (2.10)$$

On obtient des deux dernières équations que $\bar{\omega}_y = t_{\bar{\phi}} \bar{\omega}_z$ et $\bar{\omega}_z (s_{\bar{\phi}} t_{\bar{\phi}} + c_{\bar{\phi}}) = 0$. Comme $s_{\bar{\phi}} t_{\bar{\phi}} + c_{\bar{\phi}} = \frac{1}{c_{\bar{\phi}}}$, à l'équilibre on a $\bar{\omega}_z = \bar{\omega}_y = 0$ et finalement avec la première équation $\bar{\omega}_x = 0$. En tout point d'équilibre, les vitesses angulaires sont donc nulles, ce qui implique des vitesses linéaires et des angles constants. Un point d'équilibre quelconque vaut alors :

$$\bar{x} = \begin{cases} \bar{\omega}_x &= 0 = \frac{1}{J_x} (\bar{\tau}_x + h \mu_{xy} \bar{v}_y) \\ \bar{\omega}_y &= 0 = \frac{1}{J_y} (\bar{\tau}_y - h \mu_{xy} \bar{v}_x) \\ \bar{\omega}_z &= 0 = \frac{1}{J_z} \bar{\tau}_z \\ \bar{\phi} &= \phi_0 \\ \bar{\theta} &= \theta_0 \\ \bar{\psi} &= \psi_0 \\ \bar{v}_x &= v_{x0} = \frac{-mg}{\mu_{xy}} s_{\bar{\theta}} \\ \bar{v}_y &= v_{y0} = \frac{mg}{\mu_{xy}} c_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}} \\ \bar{v}_z &= v_{z0} = \frac{m}{\mu_z} \left(-\frac{\bar{T}}{m} + g c_{\bar{\phi}} c_{\bar{\theta}} \right) \end{cases} \quad (2.11)$$

La commande $\bar{\xi}$ qui maintient le système à l'équilibre dépend de la valeur de h . Si $h = 0$, on a $\bar{\tau}_x = \bar{\tau}_y = \bar{\tau}_z = 0$ et $\bar{T} = m g c_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} - \mu_z v_{z0}$. Si $h \neq 0$, alors les rotors doivent créer un couple qui s'oppose à celui créé par les efforts aérodynamiques autour du centre de gravité du quadricoptère. Dans ce cas, on a $\bar{\tau}_x = -m g h c_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}}$, $\bar{\tau}_y = -m g h s_{\bar{\theta}}$, $\bar{\tau}_z = 0$ et $\bar{T} = m g c_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} - \mu_z v_{z0}$.

Modèle linéaire Dans le cas du vol d'un drone suivant des trajectoires non-agressives, le point d'équilibre généralement utilisé est le point $\bar{x} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ noté $\bar{x} = 0$,

ce qui correspond à un vol stationnaire avec des angles d'attitude à 0 et $h = 0$ (appelé *hover point* dans la littérature [HBF⁺08]). Dans notre cas, afin de mener une étude générale, on préfère tout d'abord présenter le modèle linéarisé en un point d'équilibre quelconque $\bar{x} = [0, 0, 0, \bar{\phi}, \bar{\theta}, \bar{\psi}, \bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z]^T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{\omega}_x = \frac{\delta\tau_x}{J_x} + \frac{h\mu_{xy}}{J_x} \delta v_y \\ \delta\dot{\omega}_y = \frac{\delta\tau_y}{J_y} - \frac{h\mu_{xy}}{J_y} \delta v_x \\ \delta\dot{\omega}_z = \frac{\delta\tau_z}{J_z} \\ \\ \delta\dot{\phi} = \delta\omega_x + s_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} \delta\omega_y + c_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} \delta\omega_z \\ \delta\dot{\theta} = c_{\bar{\phi}} \delta\omega_y - s_{\bar{\phi}} \delta\omega_z \\ \delta\dot{\psi} = \frac{s_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} \delta\omega_y + \frac{c_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} \delta\omega_z \\ \\ \delta\dot{v}_x = -gc_{\bar{\theta}} \delta\theta - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_x - \bar{v}_z \delta\omega_y + \bar{v}_y \delta\omega_z \\ \delta\dot{v}_y = -gs_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}} \delta\theta + gc_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} \delta\phi - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_y - \bar{v}_x \delta\omega_z + \bar{v}_z \delta\omega_x \\ \delta\dot{v}_z = -\frac{\delta T}{m} - gc_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}} \delta\phi - gs_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} \delta\theta - \frac{\mu_z}{m} \delta v_z - \bar{v}_y \delta\omega_x + \bar{v}_x \delta\omega_y \end{array} \right. \quad (2.12)$$

2.2.2.2 Stabilité

On peut réécrire le modèle (2.12) sous la forme $\delta\dot{x} = A\delta x + B\delta\xi$:

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\omega}_x \\ \delta\dot{\omega}_y \\ \delta\dot{\omega}_z \\ \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\psi} \\ \delta\dot{v}_x \\ \delta\dot{v}_y \\ \delta\dot{v}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h\mu_{xy}}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h\mu_{xy}}{J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} & c_{\bar{\phi}} t_{\bar{\theta}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\phi}} & -s_{\bar{\phi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} & \frac{c_{\bar{\phi}}}{c_{\bar{\theta}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{v}_z & \bar{v}_y & 0 & -gc_{\bar{\theta}} & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 & 0 \\ \bar{v}_z & 0 & -\bar{v}_x & gc_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} & -gs_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}} & 0 & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 \\ -\bar{v}_y & \bar{v}_x & 0 & -gc_{\bar{\theta}} s_{\bar{\phi}} & -gs_{\bar{\theta}} c_{\bar{\phi}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_z}{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \\ \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_B \begin{bmatrix} \delta T \\ \delta\tau_x \\ \delta\tau_y \\ \delta\tau_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Pour $h = 0$ Dans la littérature sur les quadricoptères, lorsque les effets de trainée aérodynamique sont pris en compte, on retrouve généralement le modèle (2.12) donné pour $h = 0$ [LMBM14]. Cela correspond à une force de trainée F qui s'applique directement au centre de gravité et ne génère donc aucun couple autour de ce point. Dans ce cas, on obtient un système en cascade représenté sur la figure 2.10 pour $h = 0$, ce qui se retrouve dans la forme triangulaire de la matrice A de l'équation (2.13) pour $h = 0$. Ce type de structure a un intérêt particulier d'un point de vue commande car elle permet d'appliquer une stratégie de conception itérative de correcteurs en cascade qui sera présentée dans la partie suivante sur l'asservissement. Lorsque l'on étudie les valeurs propres de la matrice A pour $h = 0$, on obtient 3 pôles réels négatifs et 6 autres pôles situés à l'origine en 0, voir figure 2.8. Les 3 premiers pôles correspondent aux dynamiques stables des vitesses linéaires δv_x , δv_y et δv_z (ceux de δv_x et δv_y sont identiques), et les autres pôles correspondent à un comportement intégrateur.

Le modèle linéaire (2.12) a une structure plus simple que le modèle non-linéaire d'origine (2.8). Il reste néanmoins un problème important qui est le couplage entre les différents axes. Afin d'illustrer ce phénomène, plaçons-nous par exemple dans la configuration représentée sur

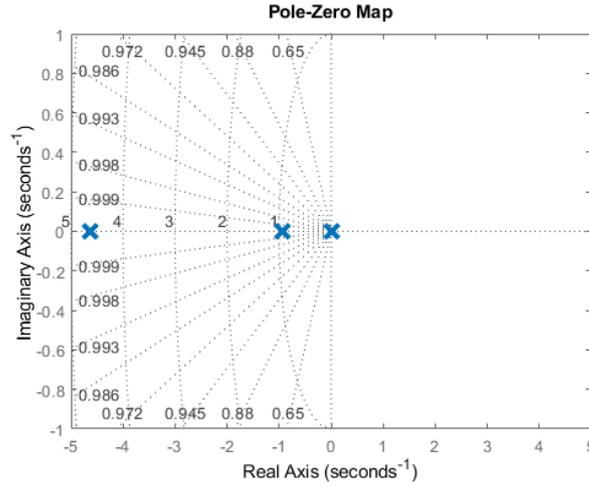


FIGURE 2.8 – Pôles du système pour $h = 0$

la figure 2.9. Le drone est en un point d'équilibre $\bar{x}_c = [0, 0, 0, \phi_c, 0, 0, 0, v_{y,c}, 0]^T$ qui traduit le cas où le drone vole avec une vitesse linéaire constante selon l'axe \vec{y}_b due à un angle de roulis constant ϕ_c et des vitesses angulaires nulles. Si l'on applique maintenant un couple $\delta\tau_z$ autour de l'axe \vec{z}_b , cela donnera une vitesse angulaire $\delta\omega_z$. Cette vitesse angulaire va agir sur le sous-système des angles d'attitude. Cela aura évidemment pour effet de modifier l'angle de lacet $\delta\psi$ autour de l'axe \vec{z}_b , mais à cause des couplages, cela induira également un changement sur l'angle d'inclinaison $\delta\phi$. Ce phénomène peut être la cause d'instabilités du système bouclé et compliquer la phase de conception des correcteurs.

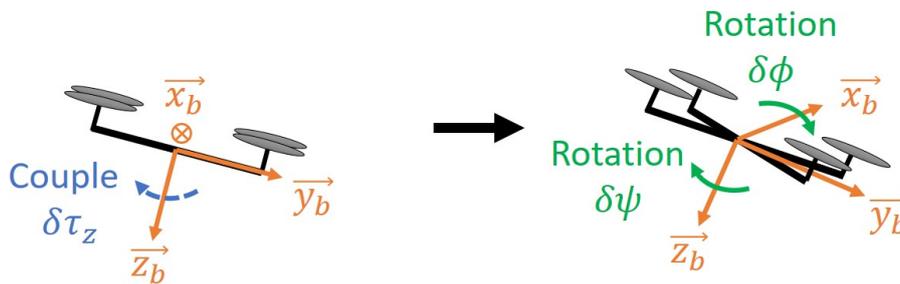


FIGURE 2.9 – Illustration de l'effet des couplages en vol

Au point d'équilibre $\bar{x} = 0$, on a un découplage entre les différents axes du drone ce qui permet la conception de correcteurs axe par axe. Cela a pour effet de simplifier grandement

le modèle qui devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{\omega}_x = \frac{\delta\tau_x}{J_x} \\ \delta\dot{\omega}_y = \frac{\delta\tau_y}{J_y} \\ \delta\dot{\omega}_z = \frac{\delta\tau_z}{J_z} \\ \\ \delta\dot{\phi} = \delta\omega_x \\ \delta\dot{\theta} = \delta\omega_y \\ \delta\dot{\psi} = \delta\omega_z \\ \\ \delta\dot{v}_x = -g\delta\theta - \frac{\mu_{xy}}{m}\delta v_x \\ \delta\dot{v}_y = g\delta\phi - \frac{\mu_{xy}}{m}\delta v_y \\ \delta\dot{v}_z = -\frac{\delta T}{m} - \frac{\mu_z}{m}\delta v_z \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Dans ce cas, la conception d'une loi de commande peut être réalisée pour chaque axe de manière dissociée comme dans [BNS04].

Pour $h \neq 0$ Cela correspond au cas où une force de trainée s'applique à une distance non-nulle du centre de gravité. Dans certaines études [BMNM16, BMSP09], on considère que cette force s'applique principalement au niveau des hélices. Cependant, lors de l'intégration de capteurs sur le drone pour l'estimation d'état, il se peut que la force s'applique à une distance h différente qui soit difficile à mesurer. Dans ce cas, on n'a plus exactement une structure de système en cascade puisqu'il y a maintenant un rebouclage de la vitesse linéaire vers la vitesse angulaire effectué via le gain h , comme représenté sur la figure 2.10 pour $h \neq 0$.

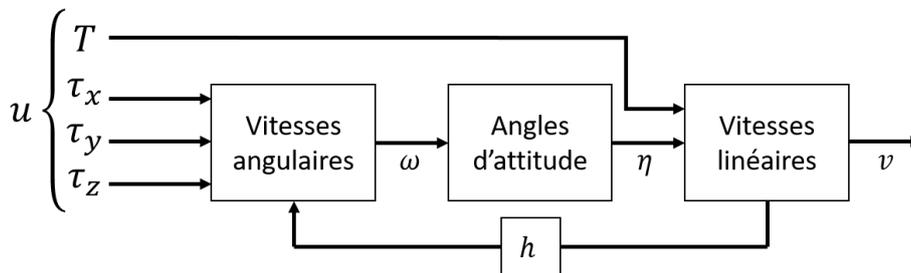


FIGURE 2.10 – Structure en cascade lorsque $h = 0$ et rebouclage lorsque $h \neq 0$

Ce rebouclage induit différents types d'instabilités en fonction du signe de h qu'il convient d'étudier de manière plus approfondie. Pour cela, on effectue une transformation décrite en annexe A.4 qui représente le modèle sous la forme d'un système bouclé contenant un gain h sur la chaîne de retour. Cette transformation nous permet de tracer le lieu d'Evans qui donne la position des pôles du système en fonction de la valeur de h , voir la figure 2.11. On a cette fois un système instable mais dont le type d'instabilité diffère selon le signe de h :

- pour $h < 0$, la force de trainée s'applique au-dessus du centre de gravité, et on a des oscillations d'amplitude croissante ;
- pour $h > 0$, la force de trainée s'applique sous le centre de gravité, et le système diverge de manière exponentielle.

On retrouve ce type de résultats dans [BMSP09, PMC10, PY15]. Dans ces travaux, l'objectif est de concevoir mécaniquement un drone en exploitant les propriétés dynamiques induites par le paramètre h . Dans notre cas, on préfère plutôt assurer la robustesse en matière de stabilité de notre système vis-à-vis de h variant dans une plage donnée $[-h_c; h_c]$.

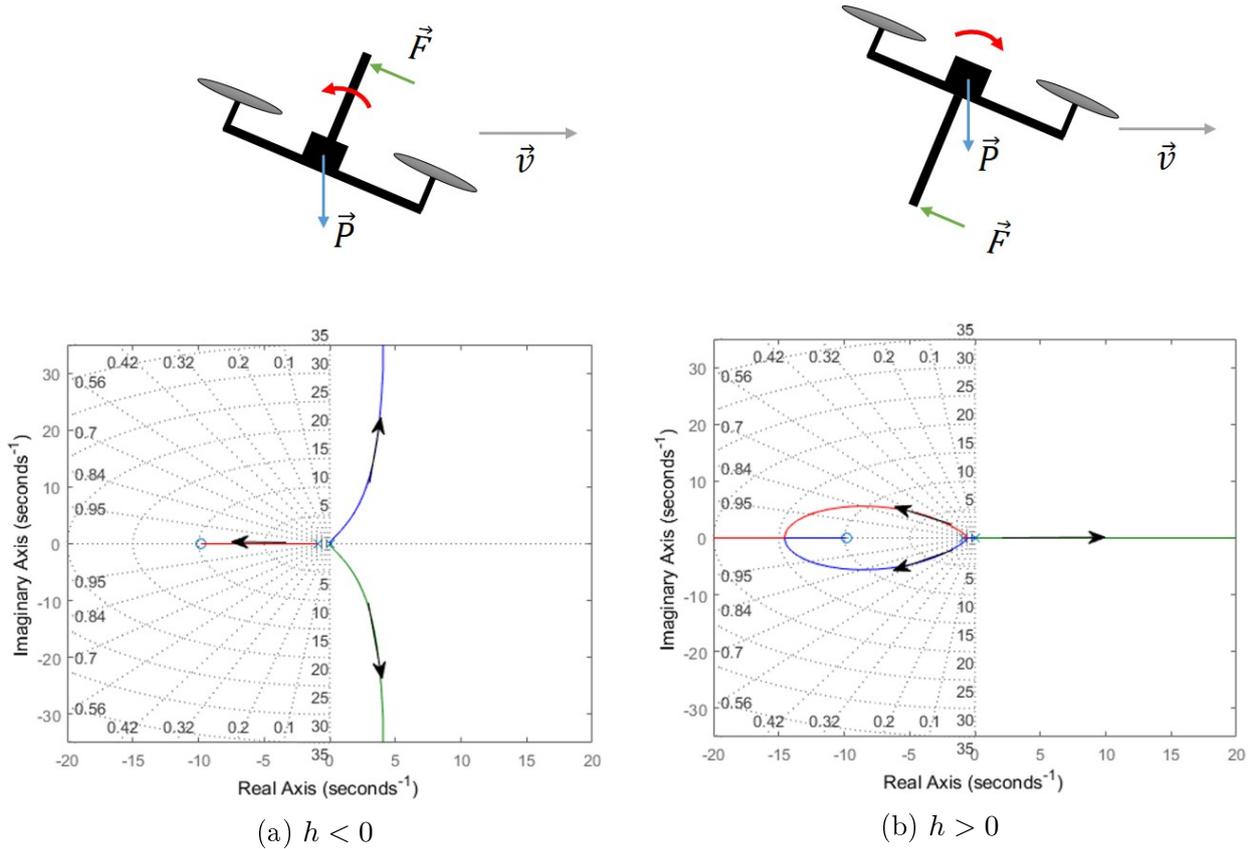


FIGURE 2.11 – Tracé du lieu d’Evans où les flèches indiquent le sens $|h|$ croissant

Cette démarche est présentée dans la section suivante qui traite de l’asservissement du quadricoptère.

2.3 Asservissement du drone

Comme on l’a vu dans la section précédente, le modèle du quadricoptère contient des dynamiques instables et des incertitudes, notamment sur la modélisation des effets aérodynamiques. De plus, dans un contexte de navigation autonome, on va vouloir faire suivre des trajectoires au drone avec le minimum d’actions de la part d’un opérateur. Il est alors nécessaire d’asservir le quadricoptère, au moins pour garantir sa stabilité, et potentiellement pour atteindre des objectifs en matière d’asservissement qu’il convient de spécifier. Dans le cadre de la thèse, on veut estimer la dynamique du drone, or celle-ci est conditionnée par le correcteur qui est choisi. Il est donc nécessaire de s’intéresser à la structure d’asservissement dans un premier temps. On va tout d’abord étudier la structure d’origine mise en place sur le *Crazyflie*. Puis, on essaiera de l’améliorer, en vue de répondre aux objectifs suivants :

- Pouvoir modifier les capteurs embarqués et donc la forme du drone sans compromettre sa stabilité ;
- Exploiter le lien entre correcteur et estimateur, afin de faire la synthèse d’un correcteur qui facilite l’estimation du mouvement du drone ;
- Intégrer la problématique de synthèse de correcteur à celle de l’estimateur, afin de concevoir un bloc qui réponde de manière conjointe à des objectifs d’asservissement et d’estimation.

2.3.1 Cahier des charges

Le contrôle du drone vise en premier lieu à asservir son attitude η , dont la dynamique est instable comme on l'a vu dans la partie précédente. On trouve aussi dans la littérature des travaux sur l'asservissement de la position du drone dans l'espace [MKC12, EN18]. Dans ce cas, la structure de commande est généralement constituée de différentes boucles imbriquées qui sont typiques du contrôle d'un système en cascade comme celui représenté sur la figure 2.10 pour $h = 0$. La boucle interne est la plus rapide et permet de contrôler l'attitude, et la boucle externe d'asservir la position. Dans cette thèse, on ne s'intéressera qu'à la partie commande de l'attitude, dont une version est implémentée d'origine sur le *Crazyflie*.

La finalité des travaux de cette partie n'est pas seulement de réaliser un asservissement performant de l'attitude du drone, mais c'est aussi de mettre en place une démarche qui permette ensuite d'aboutir à la synthèse conjointe du correcteur d'attitude et de l'estimateur de vitesse linéaire. Le cahier des charges sur l'asservissement est donc modérément strict car il n'y a pas nécessité d'obtenir une performance très élevée dans le cadre de la navigation autonome comme défini en introduction de la thèse, soit le vol à des angles d'attitude modérés (max. 30°). On désire cependant obtenir un asservissement de l'attitude qui réponde au cahier des charges suivant :

1. Stabilité face aux incertitudes du modèle et pour des angles modérés (max. 30°) ;
2. Suivi de signaux de consignes sous forme d'échelons ;
3. Temps de réponse à 95% de l'ordre de $0.1s$ ($0.5s$ d'origine) ;
4. Énergie de commande la plus limitée possible ;
5. Embarquabilité importante, autrement dit, ordre du correcteur le plus faible possible.

2.3.1.1 État de l'art

Littérature On trouve dans la littérature de nombreux travaux concernant l'asservissement du drone, dont les dynamiques complexes ainsi que les incertitudes sur le modèle et les mesures de capteurs représentent un réel challenge [HHMS13, SAY18]. Pour répondre à ce problème, on trouve dans la littérature différentes approches qui se classent en deux catégories : les techniques de contrôle linéaire et celles de contrôle non-linéaire.

La première catégorie de techniques de contrôle vise à développer un correcteur pour le modèle du drone linéarisé. Généralement, le point de linéarisation est celui correspondant au vol stationnaire du drone lorsque ses angles d'attitude sont nuls, noté $\bar{x} = 0$ dans la partie 2.2.2.1. Il présente en effet l'intérêt d'éliminer les couplages du modèle, qui devient alors une simple mise en série d'intégrateurs pour la partie attitude, voir équation (2.14). Le réglage du correcteur s'effectue alors par placement de pôles ou par optimisation, voir par exemple [BNS04, GLSC08] et [EF16]. L'intérêt de ces approches est de pouvoir bénéficier de garanties systématiques de performance pour l'asservissement du système linéarisé. Cependant, l'inconvénient est que ces garanties ne sont valables qu'au voisinage du point de linéarisation. Or, on a vu dans la section précédente que le modèle (2.14) linéarisé en $\bar{x} = 0$ n'est qu'une version très simplifiée du modèle non-linéaire initial (2.8), sensé représenter la dynamique du drone de manière plus réaliste. Ces techniques ne permettent donc pas de garantir *a priori* le bon fonctionnement du drone sur toute sa plage de fonctionnement, et il est alors nécessaire, après avoir synthétisé un correcteur, de réaliser des simulations ou des test expérimentaux qui valident l'approche. Les techniques de contrôle non-linéaire au contraire, permettent de prendre en compte les non-linéarités du modèle lors de la conception du correcteur. Elles peuvent permettre de synthétiser des correcteurs qui stabilisent *a priori* le système sur une

large plage de fonctionnement [LAM18, LLM10] et même de considérer des non-linéarités supplémentaires dans le modèle, telles que des saturations sur les entrées de commande par exemple [GCMH⁺11]. Cependant, la démonstration de la stabilité du système asservi dans ce cas n'est pas systématique et peut constituer un réel problème d'analyse. De plus, ces méthodes peuvent parfois aboutir à des structures de correcteurs complexes, non satisfaisantes lorsque les ressources de calcul sont très limitées, et difficiles à régler [HHMS13].

Notre cahier des charges ne requiert pas d'avoir un asservissement pour des trajectoires agressives ou des angles d'attitude importants, là où les non-linéarités et les couplages du modèle du drone sont importants. Par contre, on veut concevoir un engin capable de naviguer de manière autonome avec des garanties de fonctionnement, notamment en cas de perturbations externes (p.ex. vent) ou d'incertitudes sur le modèle. On veut donc synthétiser des correcteurs qui nous permettent de garantir un certain degré de robustesse, et qui soient facilement embarquables sur un microcontrôleur. De plus, on veut d'abord repartir de la structure de commande d'origine du *Crazyflie* constituée de correcteurs linéaires *PID* afin de l'améliorer. C'est pour ces raisons qu'on a choisi dans ce document d'utiliser des techniques de contrôle linéaire.

Par la suite, on présentera dans la partie 2.3.2 une méthode de réglage de correcteurs *P/PI*, issus des correcteurs *PID* d'origine, qui garantit des marges de stabilité suffisantes tout en ayant un temps de réponse du système et un ordre de correcteur plus faible. Ensuite, on montrera dans la partie 2.3.3, que l'on peut obtenir un correcteur H_∞ aux performances similaires que celles du *P/PI* dont la synthèse peut être formulée comme un problème d'optimisation. Cela nous permettra d'amorcer la discussion sur une synthèse conjointe d'un estimateur et d'un correcteur.

Correcteurs d'origine La structure de commande du *Crazyflie* est constituée de deux boucles d'asservissement imbriquées, une boucle interne pour contrôler les vitesses angulaires et une boucle externe pour contrôler les angles, cela pour chaque axe de manière découplée. Dans chaque boucle d'asservissement et pour chaque axe, on trouve un correcteur *PID* de la forme⁸ :

$$K_{PID}(p) = k_{p,PID} + \frac{k_{i,PID}}{p} + \frac{k_{d,PID}p}{T_f p + 1} \quad (2.15)$$

où p est la variable de Laplace et les valeurs des paramètres des correcteurs sont données dans l'annexe A.10 avec l'indice ω pour les gains du correcteur de la boucle interne et η pour les gains du correcteur de la boucle externe.

On peut s'interroger sur la validité et l'intérêt du choix d'une telle structure de commande pour contrôler le *Crazyflie* d'origine. Cela se justifie par l'étude du modèle du drone linéarisé en $\bar{x} = 0$ et pour $h = 0$ donné en (2.14). Dans ce modèle-là, les dynamiques des vitesses angulaires et des angles sont constituées d'intégrateurs en série, où chaque axe est découplé. Dans ce cas, la structure constituée de deux correcteurs en cascade où les axes sont commandés de manière découplée a un intérêt du point de vue de la mise au point de

8. Notons que les correcteurs sont discrétisés à $500Hz$ dans le *Crazyflie*. Cependant, la gamme de fréquences sur laquelle on veut asservir le système est de l'ordre de $15Hz$ pour la boucle interne qui est la plus rapide. Le gain du système étant très faible à la fréquence de $500Hz$ ($-110dB$ pour la boucle interne), on peut considérer ici que l'influence de la discrétisation est négligeable du point de vue de l'asservissement, et on fera donc l'hypothèse que les correcteurs sont en temps continu.

l'asservissement. En effet, elle permet de mettre au point des correcteurs ayant une structure simple, pour lesquels le système à commander est équivalent à un intégrateur.

Limites des correcteurs d'origine Expérimentalement, le vol du *Crazyflie* semble correct avec ses correcteurs d'origine, même si sous certaines combinaisons de trajectoires agressives on peut observer des instabilités. Néanmoins, dans le cadre défini par la thèse, on veut concevoir un système capable de naviguer de manière autonome à vitesse modérée dans son environnement. Cela se traduit pour le drone par un vol suivant des trajectoires simples et des angles d'attitude modérés, donc les trajectoires agressives ne sont pas un problème. Cependant, cela implique aussi d'intégrer des capteurs sur le drone afin qu'il perçoive son environnement et les obstacles, et donc de modifier le paramètre h du modèle, c'est-à-dire l'endroit où les forces aérodynamiques se concentrent. On trace sur la figure 2.12 la réponse en simulation du système à des échelons simultanés à $0.1s$ sur l'angle de roulis ϕ et de lacet ψ de 30° , pour $h = 25mm$ (hauteur du *Crazyflie* = $30mm$) et pour une vitesse initiale $v_z = 1.5m.s^{-1}$. On observe que le système est instable, rendant impossible l'intégration sur le drone de capteurs ayant une hauteur importante, comme un radar et son antenne par exemple.

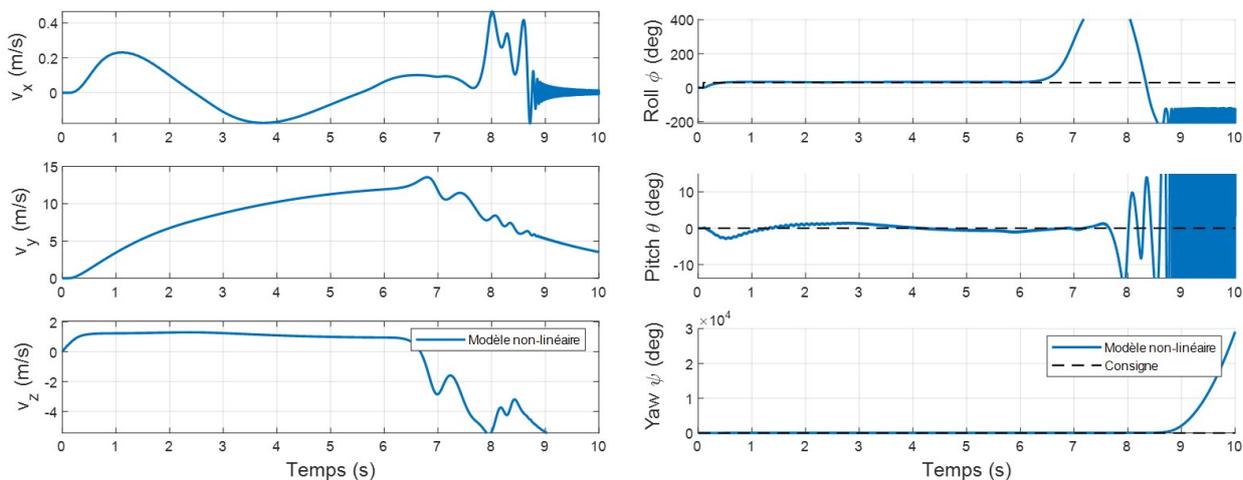


FIGURE 2.12 – Instabilité avec les correcteurs d'origine du *Crazyflie* pour $h = 25mm$

On met donc en place dans la partie suivante, un nouveau réglage des correcteurs du *Crazyflie*, afin d'obtenir une meilleure réponse du système asservi.

2.3.2 Synthèse d'une loi de commande P/PI

On va ici régler les nouveaux correcteurs à base de méthodes d'automatique fréquentielle classiques. Pour cela, on va concevoir pas-à-pas les correcteurs à partir des fonctions de transfert en boucle ouverte du système. On commence tout d'abord par définir ce que signifient les spécifications du cahier des charges données en 2.3.1 en termes de contraintes sur les fonctions de transfert en boucle ouverte.

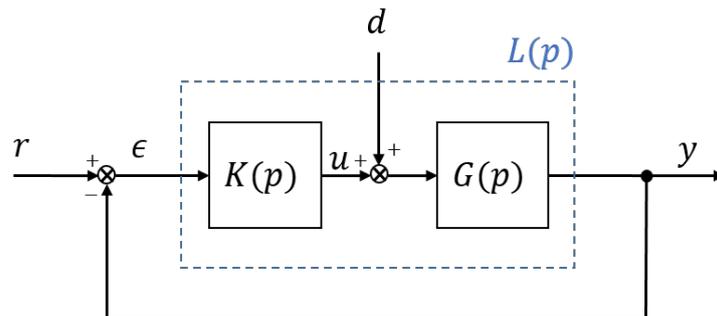


FIGURE 2.13 – Schéma d'un système en rebouclage unitaire

2.3.2.1 Spécifications sur la boucle ouverte [SF09]

Soit le système en rebouclage unitaire représenté sur la figure 2.13. La fonction de transfert en boucle ouverte est notée $L(p) = K(p)G(p)$, où $G(p)$ est le système à asservir et $K(p)$ le correcteur.

Stabilité La spécification 1 du cahier des charges concerne la stabilité du système asservi face à des incertitudes de modélisation et pour des angles modérés. Du critère de Nyquist, découlent les notions classiques de marges de stabilité liées à la robustesse d'un système $L(p)$ en rebouclage unitaire⁹ :

- marge de gain ΔG ;
- marge de phase $\Delta\Phi$;
- marge de module ΔM .

Pour répondre à la spécification 1 du cahier des charges, en plus de la stabilité dans les boucles internes et externes, on s'assurera d'avoir des marges de valeurs usuelles $\Delta G > 10dB$, $\Delta\Phi > 45^\circ$, $\Delta M > -6dB$, associées à la réponse d'un système du 2^e ordre avec un coefficient d'amortissement de 0.5.

Suivi de référence Les spécifications 2 et 3 du cahier des charges concernent la capacité du système à suivre des signaux de référence sous forme d'échelon avec une certaine rapidité. Le suivi des signaux de référence de l'asservissement est caractérisé par un régime transitoire et un régime permanent. On peut caractériser le régime transitoire par sa rapidité, ce qui se traduit par une condition sur la pulsation de coupure $2\pi\nu_c^S$ de la fonction de sensibilité S , telle que $|S(j2\pi\nu_c^S)| = 0dB$. On peut donner comme critère la règle qui lie, pour un système du 2^e ordre, le temps de réponse t_s en secondes avec la pulsation $2\pi\nu_c^S$ en radians par secondes : $t_s \approx 3/(2\pi\nu_c^S)$. Cela permettra d'obtenir un ordre de grandeur des pulsations de coupure à obtenir dans chaque boucle d'asservissement. Lors du réglage de correcteur à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte $L(j2\pi\nu)$, on peut considérer en première approche que $2\pi\nu_c^S \approx 2\pi\nu_c^L$, où $2\pi\nu_c^L$ est telle que $|L(j2\pi\nu_c^L)| = 0dB$.

Le régime permanent se caractérise par une erreur statique qui sera nulle en l'absence de perturbation et pour un signal de référence en forme d'échelon si la fonction de transfert $T_{r \rightarrow \epsilon}(p)$ entre le signal de référence r et l'erreur $\epsilon = r - y$ possède au moins un zéro en zéro,

9. On les définit pour les systèmes qui nous intéressent comme suit :

- $\Delta G = \frac{1}{|L(j2\pi\nu_{180^\circ})|}$ où $2\pi\nu_{180^\circ}$ est la pulsation telle que la phase $\arg(L(j2\pi\nu_{180^\circ}))$ vaut -180° ;
- $\Delta\Phi = \arg(L(j2\pi\nu_c^L)) + 180^\circ$ où $2\pi\nu_c^L$ est la pulsation telle que $|L(j2\pi\nu_c^L)| = 0dB$;
- $\Delta M = \frac{1}{\|S(p)\|_\infty}$ où $S(p) = \frac{1}{1+L(p)}$ est la fonction de sensibilité et $\|\cdot\|_\infty$ la norme H_∞ .

c'est-à-dire que le correcteur ou le système à commander contient au moins un intégrateur. Or c'est déjà le cas, car la dynamique des vitesses angulaires et celles des angles sont toutes deux constituées d'intégrateurs, on aura donc en théorie une erreur statique nulle. En pratique, on peut considérer l'effet qu'aurait une perturbation (p.ex. une rafale de vent) notée d en entrée du système à asservir sur l'erreur statique en sortie, ici celle sur les angles. Dans ce cas, c'est la fonction $T_{d \rightarrow \epsilon}(p)$ qui doit avoir au moins un zéro en zéro, c'est-à-dire que le correcteur contient un intégrateur ou le système à asservir un dérivateur. Comme le système ne contient pas de dérivateur, on ajoutera un intégrateur sur le correcteur de la boucle externe afin de faire tendre l'erreur statique sur les angles vers 0 en régime permanent, même en cas de perturbation.

Pour répondre aux spécifications 2 et 3 du cahier des charges, on donne donc les critères suivants. On veut que le temps de réponse pour l'asservissement des angles soit de l'ordre de 0.1s. De plus, on va vouloir régler la boucle sur les vitesses angulaires de manière à ce qu'elle soit ≈ 5 fois plus rapide. Cela permettra de "désensibiliser" la boucle externe aux perturbations sur les vitesses angulaires, c'est-à-dire que vu du correcteur de la boucle externe, la boucle interne apparaît comme un gain constant. Enfin, on veut une erreur statique nulle sur les angles même en cas de perturbation. Cela se traduit de la manière suivante :

- Dans la boucle externe, $2\pi\nu_c^{S_\phi} \geq 20rad/s$;
- Dans la boucle interne, $2\pi\nu_c^{S_\omega} \geq 100rad/s$;
- Un intégrateur dans le correcteur de la boucle externe.

Limitation énergie de commande Pour répondre à la spécification 4 et avoir une énergie de commande réduite, on doit limiter le gain de la fonction de transfert $T_{r \rightarrow u}(p) = K(p)S(p)$ où $K(p)$ est le correcteur, u le signal en sortie du correcteur et $S(p)$ la fonction de sensibilité. À basses fréquences, $T_{r \rightarrow u}(p)$ dépend majoritairement du gain du système et est quasiment indépendante du correcteur. Il n'est donc pas possible d'agir sur celui-ci pour limiter l'énergie de commande [SF09]. À hautes fréquences par contre, il est possible de modifier le gain de $T_{r \rightarrow u}(p)$ en modifiant celui du correcteur, par exemple en rajoutant dans sa structure un filtre passe-bas. Cependant, cela rend la procédure de réglage plus complexe et augmente l'ordre du correcteur. De plus, sur le drone *Crazyflie*, des filtres passe-bas d'ordre 2 et de fréquence de coupure 80Hz sont déjà implémentés dans les chaînes de retour des boucles internes et externes d'asservissement. On peut donc considérer ici que la réduction du gain de $T_{r \rightarrow u}(p)$ sera réalisée par l'intermédiaire de ces filtres, indépendamment du correcteur.

Complexité d'implémentation Enfin, la spécification 5 est validée *a priori* par le fait que l'on ait choisi d'utiliser des correcteurs type *PID* qui sont des correcteurs à gain fixe avec un ordre faible et donc facilement implémentables sur le microcontrôleur. On verra de plus qu'il est possible d'obtenir des nouveaux correcteurs *P/PI* à la structure similaire que celle des *PID* d'origine mais à l'ordre plus faible.

2.3.2.2 Réglage des correcteurs

On effectue le réglage des correcteurs d'attitude pour le modèle linéarisé au point de vol stationnaire $\bar{x} = 0$ et pour $h = 0$, le cas $h \neq 0$ étant discuté par la suite. La partie du modèle

linéaire liée à l'attitude est :

$$\begin{cases} \delta\dot{\omega}_x = \frac{\delta\tau_x}{J_x} \\ \delta\dot{\omega}_y = \frac{\delta\tau_y}{J_y} \\ \delta\dot{\omega}_z = \frac{\delta\tau_z}{J_z} \\ \delta\dot{\phi} = \delta\omega_x \\ \delta\dot{\theta} = \delta\omega_y \\ \delta\dot{\psi} = \delta\omega_z \end{cases} \quad (2.16)$$

Les couples $\tau = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^\top$ sont liés aux signaux en sortie du correcteur interne $u = [u_x, u_y, u_z]^\top$ par la relation :

$$\begin{bmatrix} \delta\tau_x \\ \delta\tau_y \\ \delta\tau_z \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

où D est le gain lié à la linéarisation de la chaine de commande, voir l'annexe A.3.

On présente en détail ici la démarche de réglage de l'asservissement de l'angle de roulis $\delta\phi$, c'est-à-dire la rotation autour de l'axe \vec{x}_b . Une démarche similaire est appliquée pour le réglage de l'asservissement des autres axes découplés d'après le modèle (2.16). On notera $K_{\omega, PPI}$ (resp. $K_{\omega, PID}$) et $K_{\phi, PPI}$ (resp. $K_{\phi, PID}$) les nouveaux correcteurs P/PI (resp. les correcteurs PID d'origine). La structure d'asservissement en cascade de $\delta\phi$ correspondant au modèle (2.16) est représentée sur la figure 2.14. Sur cette figure, apparaît le gain D_x correspondant à la linéarisation de la chaine de commande, voir annexe A.3, ainsi que le filtre passe-bas $F(p)$ d'ordre 2 et de pulsation de coupure $80Hz$ qui est implémenté dans le *Crazyflie* pour filtrer les mesures de capteurs. Le filtre $F(p)$ analogique équivalent est donné par la fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{2.5 \times 10^5}{p^2 + 711p + 2.5 \times 10^5} \quad (2.18)$$

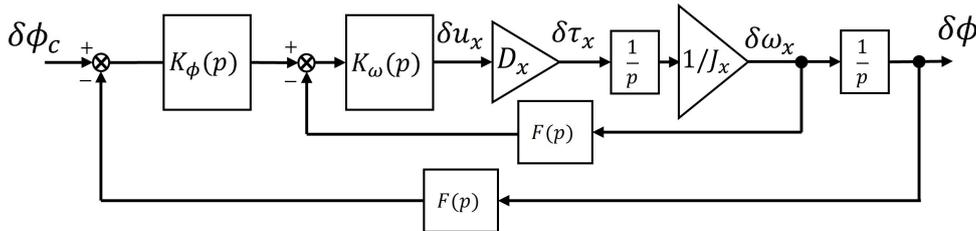


FIGURE 2.14 – Asservissement de l'angle de roulis $\delta\phi$

Pour le correcteur de la boucle interne K_{ω} , le système à commander avec un rebouclage unitaire correspond à la fonction de transfert stable suivante :

$$G_{\omega}(p) = \frac{D_x}{J_x} \frac{1}{p} F(p) \quad (2.19)$$

Le réglage de la boucle interne a pour objectif de la rendre ≈ 5 fois plus rapide que la boucle externe. Pour cela, on choisit un correcteur proportionnel $K_{\omega, PPI} = 350$ qui permet d'avoir une pulsation de coupure de la fonction de sensibilité de $2\pi\nu_c^{S_{\omega}} = 100rad/s$. Ce correcteur permet de garantir des marges de stabilité conformes au cahier des charges : $\Delta G = 15dB$, $\Delta\Phi = 68^\circ$, $\Delta M = -2.9dB$. Par rapport au correcteur d'origine $K_{\omega, PID}(p) = 250 + \frac{500}{p} + 2.5p$,

le correcteur $K_{\omega, PPI}$ a un ordre plus faible et permet un temps de réponse plus rapide (0.01s contre 0.05s). Les marges de stabilité avec le nouveau correcteur sont plus faibles qu'avec celui d'origine ($\Delta G \rightarrow \infty$, $\Delta\Phi = 117^\circ$, $\Delta M = -1.8dB$), néanmoins elles respectent le cahier des charges donc le choix effectué reste valide. La figure 2.15 montre le tracé de la boucle ouverte $K_{\omega}(p)G_{\omega}(p)$ et la fonction de sensibilité $S_{\omega}(p) = (1 + K_{\omega}(p)G_{\omega}(p))^{-1}$ avec le correcteur d'origine et le nouveau réglage.

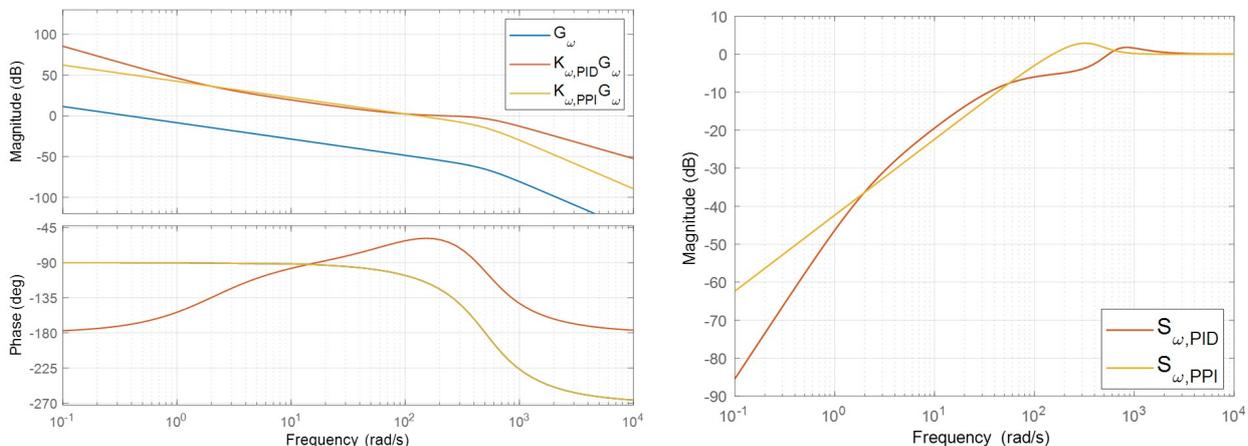


FIGURE 2.15 – Boucle interne des vitesses angulaires (à gauche : boucle ouverte, à droite : fonction de sensibilité)

Comme la boucle interne a été réglée pour être très rapide par rapport à la dynamique de la boucle externe, le système à commander pour le correcteur externe K_{ϕ} est équivalent à un intégrateur dans la plage de fréquence non modifiée par le filtre (moins de 80Hz, soit 500rad/s). Comme dit précédemment, on veut avoir un intégrateur dans le correcteur afin de rejeter des perturbations éventuelles (comme par exemple une rafale de vent). On choisit donc un correcteur proportionnel intégral $K_{\phi, PPI} = 32 + \frac{10}{p}$. Celui-ci donne une pulsation de coupure de la fonction de sensibilité de $2\pi\nu_c^{S_{\phi}} = 26rad/s$, et des marges de stabilité $\Delta G = 19dB$, $\Delta\Phi = 75^\circ$, $\Delta M = -1.7dB$. Par rapport au correcteur d'origine $K_{\phi, PID}(p) = 6 + \frac{3}{p}$, l'ordre est le même et les marges de stabilité plus faibles ($\Delta G = 45dB$, $\Delta\Phi = 82^\circ$, $\Delta M = -0.3dB$ d'origine), voir la figure 2.16 pour une comparaison de la boucle ouverte et de la fonction de sensibilité. Cependant, ici aussi, le cahier des charges est respecté, et le temps de réponse à 95% est plus faible avec le nouveau réglage (de l'ordre de 0.1s contre 0.5s). Ce dernier point peut être observé sur la figure 2.17, sur laquelle on compare la réponse du modèle linéaire asservi par les correcteurs PID et P/PI .

Passage aux 3 axes La méthode de réglage doit ensuite être appliquée sur les 2 autres axes afin d'obtenir les correcteurs complets de l'attitude du drone. Comme on fait l'hypothèse que le *Crazyflie* est symétrique sur les axes \vec{x}_b et \vec{y}_b , il n'y a en réalité que la boucle de l'asservissement de l'angle de lacet ψ à régler. Avec une méthode de réglage similaire à la précédente, on obtient finalement les correcteurs complets K_{ω} et K_{η} tels que :

$$K_{\omega} = k_{p_{\omega}, PPI} = \mathbf{diag}(350, 350, 50), \quad K_{\eta} = k_{p_{\eta}, PPI} + \frac{k_{i_{\eta}, PPI}}{p} = \mathbf{diag}(32, 32, 32) + \mathbf{diag}\left(\frac{10}{p}, \frac{10}{p}, \frac{10}{p}\right) \quad (2.20)$$

où K_{ω} représente le correcteur de la boucle interne et K_{η} celui de la boucle externe.

On trace sur la figure 2.18 la réponse temporelle du système non-linéaire en 3 dimensions, asservi par les correcteurs d'origine PID et par les nouveaux correcteurs P/PI . On peut voir

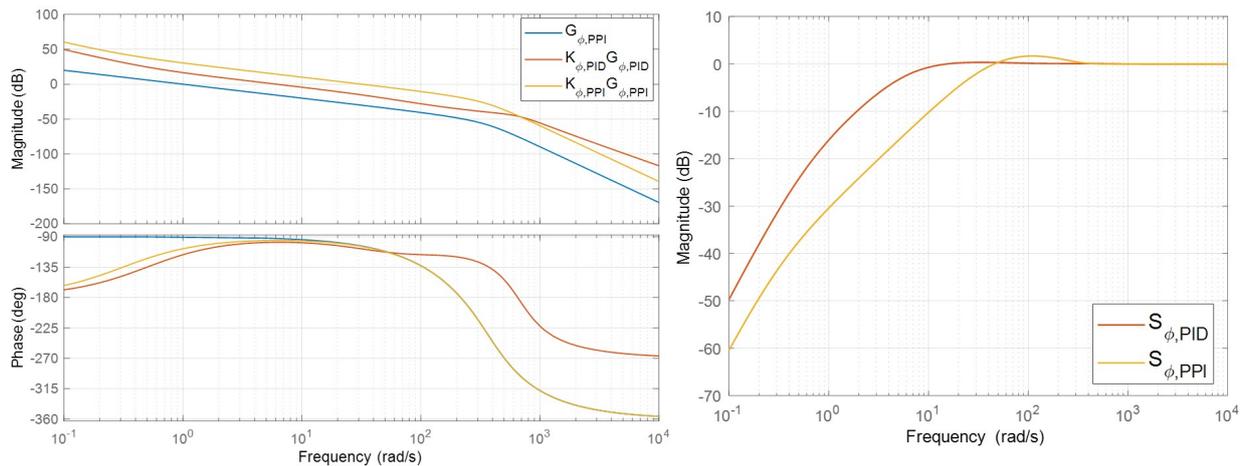


FIGURE 2.16 – Boucle externe des angles (à gauche : boucle ouverte, à droite : fonction de sensibilité)

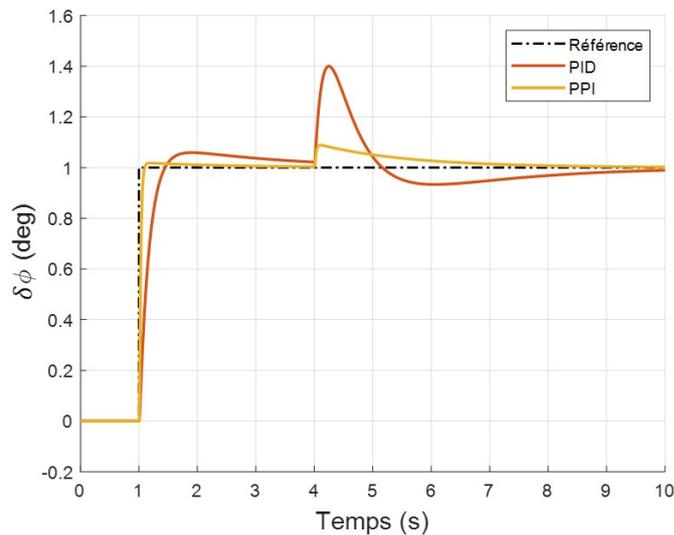
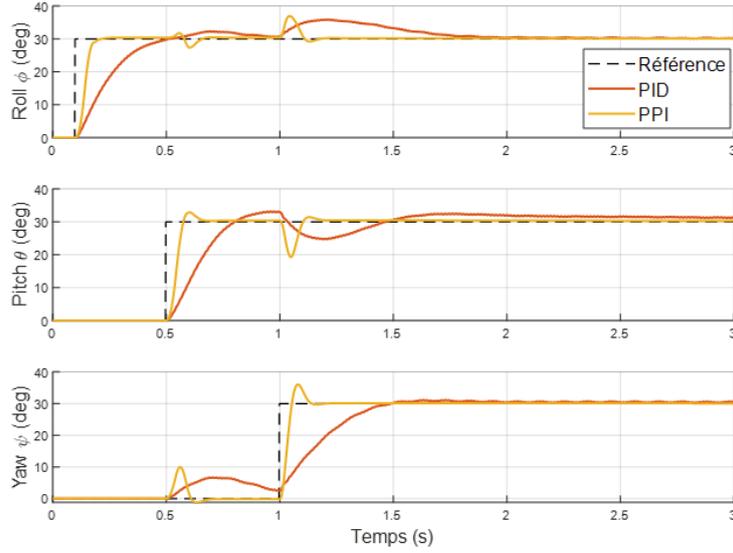


FIGURE 2.17 – Suivi d'un échelon puis rejet d'une perturbation en échelon

que les deux systèmes sont stables, mais le temps de réponse avec les nouveaux correcteurs P/PI est plus faible. On peut aussi noter l'influence des couplages entre les axes, dus au fait que l'on applique ici les correcteurs au modèle non-linéaire (2.8). Ceux-ci ont été négligés lors du réglage des correcteurs sur le modèle linéaire. On ne peut donc pas, à ce stade, garantir qu'ils ne causeront pas d'instabilités. La stabilité du système non-linéaire sera cependant étudiée dans la section 2.4.

Cas $h \neq 0$ Ce cas a été traité indirectement via la procédure de réglage précédente. On a expliqué dans la section sur le modèle dynamique du drone, que le paramètre h avait une forte influence sur sa dynamique. De plus, la figure 2.12 montrait que les correcteurs d'origine n'étaient pas capables de stabiliser le drone dans certaines conditions avec $h \neq 0$, même pour des consignes d'angles inférieures à 30° . Comme le paramètre h effectue un rebouclage des vitesses linéaires sur les vitesses angulaires, son effet est en fait localisé à basses fréquences. Or, il a été montré que la stabilisation d'un système instable impose une condition sur la bande passante minimale en fonction de la distance à l'origine du ou des pôles


 FIGURE 2.18 – Correcteurs PID et P/PI appliqués au modèle non-linéaire

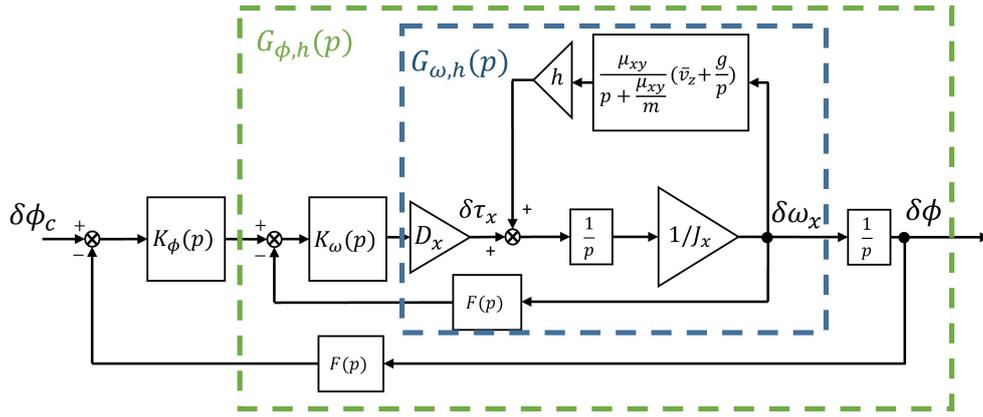
instables d'un système [SP07, Mid91]. Comme l'effet de h est localisé en basses fréquences, la condition sur la bande passante minimale est facilement respectée par le correcteur P/PI qui a été précédemment réglé. Pour le montrer, on donne le modèle du drone linéarisé au point $\bar{x}_{v_z0} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{v}_z]^T$ avec $\bar{v}_z = 1.5m.s^{-1}$ qui correspondait aux conditions initiales de la figure 2.12 où le système asservi par les correcteurs PID d'origine était instable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{\omega}_x = \frac{\delta\tau_x}{J_x} + \frac{h\mu_{xy}}{J_x} \delta v_y \\ \delta\dot{\omega}_y = \frac{\delta\tau_y}{J_y} - \frac{h\mu_{xy}}{J_y} \delta v_x \\ \delta\dot{\omega}_z = \frac{\delta\tau_z}{J_z} \\ \\ \delta\dot{\phi} = \delta\omega_x \\ \delta\dot{\theta} = \delta\omega_y \\ \delta\dot{\psi} = \delta\omega_z \\ \\ \delta\dot{v}_x = -g\delta\theta - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_x - \bar{v}_z \delta\omega_y \\ \delta\dot{v}_y = g\delta\phi - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_y + \bar{v}_z \delta\omega_x \\ \delta\dot{v}_z = -\frac{\delta T}{m} - \frac{\mu_z}{m} \delta v_z \end{array} \right. \quad (2.21)$$

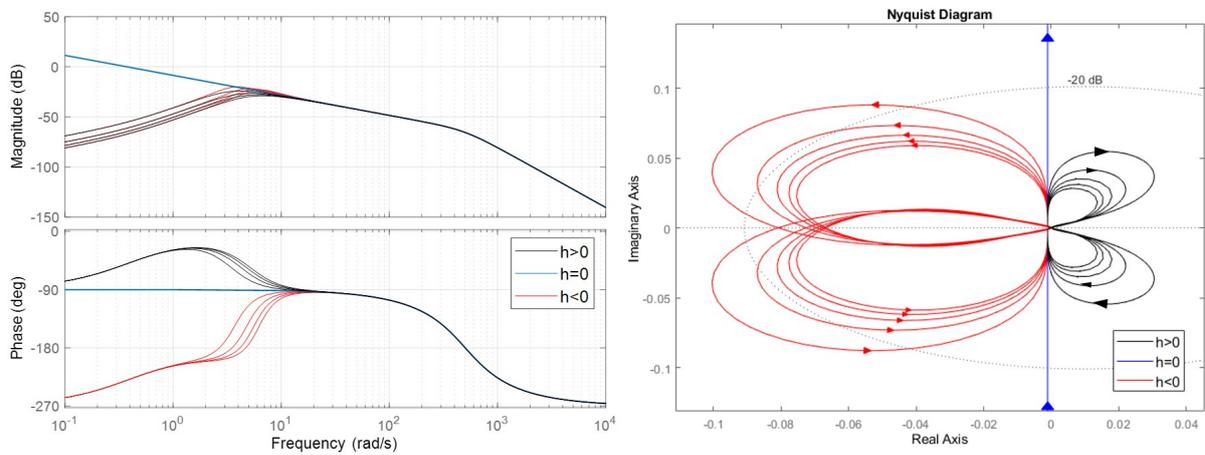
On représente sur la figure 2.19 la structure d'asservissement de l'angle de roulis déjà étudiée auparavant, cette fois avec les bouclages en fonction de h . Si on transforme le schéma bloc pour obtenir un retour unitaire, la fonction de transfert à commander pour le correcteur K_ω devient :

$$G_{\omega,h}(p) = \frac{D_x}{J_x} \frac{pF(p)}{p^2 - h \frac{\mu_{xy}}{J_x} \frac{p\bar{v}_z + g}{p + \frac{\mu_{xy}}{m}}} \quad (2.22)$$

On trace sur la figure 2.20 le diagramme de Bode et de Nyquist de $G_{\omega,h}(p)$, pour différentes valeurs de $h \in [-25, 25] mm$. Sur le tracé de Bode à gauche, on peut voir que l'effet de h est localisé pour des fréquences inférieures à $20rad/s$. Pour $h \neq 0$, le système (2.22) est instable. Il contient un pôle instable pour $h > 0$ et deux pôles instables pour $h < 0$. D'après le diagramme de Nyquist sur la figure 2.20 à droite, on peut voir qu'un gain proportionnel,


 FIGURE 2.19 – Asservissement de l’angles de roulis $\delta\phi$ avec bouclages en fonction de h

comme celui que l’on a choisi pour le correcteur interne K_ω , peut permettre de stabiliser le système pour $h < 0$ mais pas pour $h > 0$. En effet, pour $h > 0$, peu importe la valeur du gain, le diagramme n’entourera pas le point $(-1, 0)$ et le critère de Nyquist ne sera donc pas respecté. Dans ce cas, l’intérêt de la boucle interne n’est que d’accélérer la réponse du système, ce qui est fait avec un gain proportionnel important, et on va voir que la stabilité est assurée par le correcteur de la boucle externe. Pour $h < 0$, le diagramme de Nyquist intersecte deux fois l’axe des abscisses, le pire cas correspond à $h = -25\text{mm}$ où l’intersection se fait au point $(-0.07, 0)$. Pour satisfaire le critère de stabilité de Nyquist, il faut donc que le gain proportionnel du correcteur soit supérieur à $\frac{1}{0.07} = 14.3$, ce qui est lié à la condition de bande passante minimale du correcteur énoncée plus tôt. Cette condition est largement respectée, car le gain proportionnel de K_ω a précédemment été choisi à 350.


 FIGURE 2.20 – $G_{\omega,h}(p)$ pour $h \in [-25, 25] \text{ mm}$ (à gauche : Bode, à droite : Nyquist)

Sur la figure 2.21, on trace maintenant la fonction de transfert $G_{\phi,h}(p)$. Celle-ci correspond au système à asservir, vu par le correcteur K_ϕ , et vaut :

$$G_{\phi,h}(p) = \frac{K_\omega G_{\omega,h}(p)}{p(1 + K_\omega G_{\omega,h}(p))} \quad (2.23)$$

Pour $h < 0$ le système est désormais stable grâce au correcteur K_ω qui a été choisi, et pour $h > 0$, le système $G_{\phi,h}(p)$ contient toujours un pôle instable. Or, on observe cette fois à droite de 2.21, que le diagramme de Nyquist peut respecter le critère de stabilité de Nyquist

et entourer le point $(-1, 0)$ si on applique un gain proportionnel avec une valeur assez élevée. Le pire cas correspond à $h = 25\text{mm}$, pour lequel le diagramme de Nyquist intersecte l'axe des abscisses en $(-0.24, 0)$, nécessitant ainsi un gain supérieur à $\frac{1}{0.24} = 4.2$ pour assurer la stabilité du système. Le correcteur K_η réglé précédemment satisfait largement cette condition avec un gain proportionnel de 32, le système sera donc stable même dans le pire cas où $h = 25\text{mm}$. De plus, on voit sur le diagramme de Bode à gauche de la figure 2.21 que l'effet intégrateur du système en basses fréquences disparaît pour $h \neq 0$. Cela justifie l'intérêt d'avoir ajouté un gain intégrateur dans notre correcteur P/PI , ce qui permet d'assurer une erreur statique nulle pour $h \in [-25, 25] \text{ mm}$.

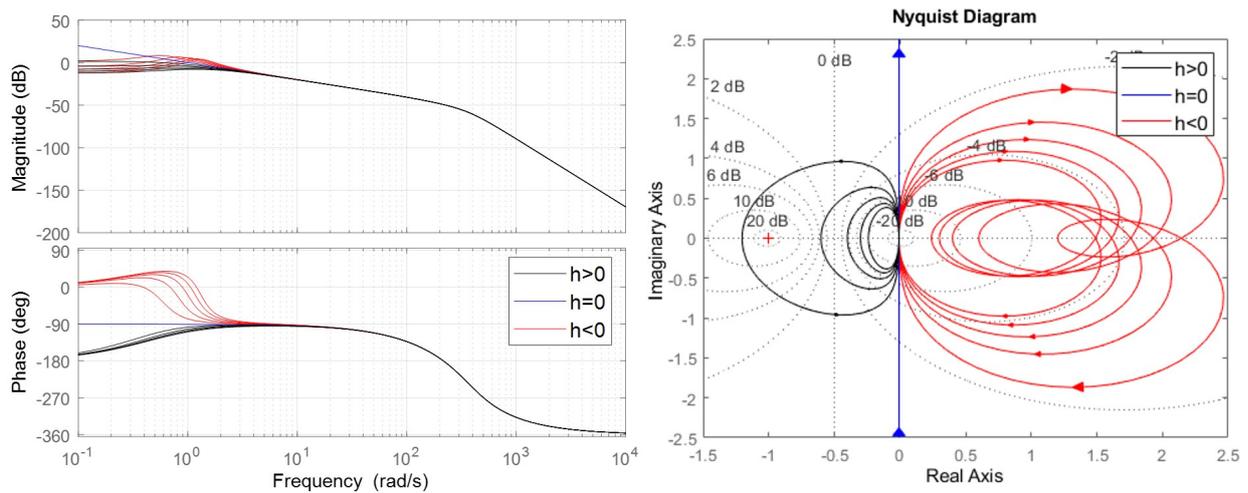


FIGURE 2.21 – $G_{\phi,h}(p)$ pour $h \in [-25, 25] \text{ mm}$ (à gauche : Bode, à droite : Nyquist)

On peut donc conclure que le cas $h \neq 0$ a été pris en compte indirectement lors du réglage des nouveaux correcteurs P/PI , et qu'ils devraient assurer la stabilité du système et une erreur statique nulle pour $h \in [-25, 25] \text{ mm}$. Pour finir, on trace sur la figure 2.22 la réponse du système non-linéaire avec les correcteurs P/PI dans les mêmes conditions que la figure 2.12 ($h = 25\text{mm}$, $v_z = 1.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$). On observe que cette fois-ci, le système est bien stable, contrairement au cas où les correcteurs PID d'origine étaient utilisés.

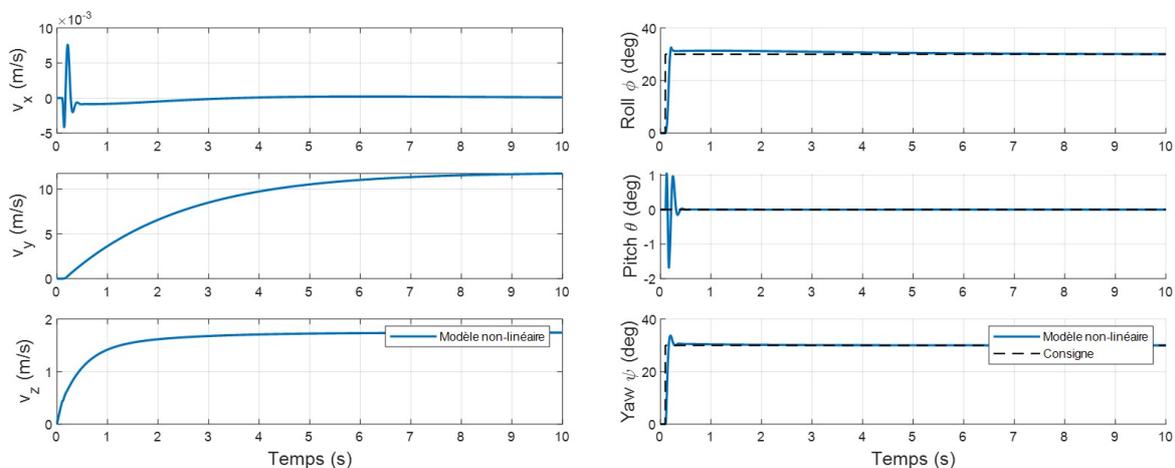


FIGURE 2.22 – Stabilité avec les nouveaux correcteurs P/PI pour $h = 25\text{mm}$

2.3.3 Synthèse d'une loi de commande H_∞

On a vu dans la partie précédente la démarche pour régler des correcteurs P/PI qui se basait sur des méthodes d'automatique fréquentielle classique. Cette approche nous a permis d'obtenir des correcteurs facilement implémentables et plus performants que ceux d'origine. Cependant, le principal inconvénient de cette approche est qu'elle n'est pas systématique. En effet, elle oblige à fixer une structure de correcteur, puis à en déterminer les paramètres, tels que les contraintes du cahier des charges traduites en gabarits sur les fonctions de transfert en boucle ouverte soient toutes respectées. Cette démarche limite grandement le choix de la structure de correcteur et la possibilité d'intégrer la synthèse d'un estimateur à celle du correcteur, à cause de la complexité du choix manuel de chacun des paramètres.

La synthèse de correcteur H_∞ permet de s'affranchir de ces limites, en effectuant par optimisation la synthèse d'un correcteur sans en avoir fixé la structure a priori. On montre ainsi que l'on peut automatiser la synthèse pour obtenir un correcteur aux performances similaires à celles du correcteur P/PI . L'inconvénient de cette approche est qu'elle peut mener à un correcteur d'ordre plus élevé que nécessaire, et donc une implémentation sur microcontrôleur plus complexe qu'avec le P/PI . Il est cependant possible d'en réduire l'ordre par des méthodes de réduction de modèle que l'on présentera dans la partie 2.3.3.3, pour aboutir à un correcteur d'une complexité plus faible.

Afin de ne pas alourdir l'explication, on présentera tout d'abord le problème de synthèse de correcteur pour l'asservissement de l'angle de roulis ϕ , puis on verra ensuite comment l'étendre aux 3 axes.

2.3.3.1 Problème standard

Les problèmes de conception de systèmes en boucle fermée comme celui de la synthèse de correcteurs P/PI pour l'attitude du drone de la partie 2.3.2 peuvent se ramener à un problème d'optimisation. Pour cela, on transforme le problème initial sous la forme d'un problème appelé problème standard [SP07], représenté sur la figure 2.23. Sur cette figure, le système P correspond à la représentation d'état (minimale) suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

où :

- u : signaux de commande ;
- w : signaux exogènes (p.ex. perturbations, références) ;
- y : signaux d'entrée du correcteur (p.ex. mesures) ;
- z : signaux commandés de façon à satisfaire le cahier des charges.

Le correcteur, noté K , est tel que $u(p) = K(p)y(p)$. Le système P vaut :

$$P(p) = \left[\begin{array}{c|c} P_{zw}(p) & P_{zu}(p) \\ \hline P_{yw}(p) & P_{yu}(p) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} D_{zw} & D_{zu} \\ D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_z \\ C_y \end{bmatrix} (pI - A)^{-1} \begin{bmatrix} B_w & B_u \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Le système P bouclé avec le correcteur K est noté $P \star K$. Le symbole \star correspond au produit de Redheffer associé dans cette partie à une représentation linéaire fractionnaire (LFT) inférieure, voir l'annexe A.5.

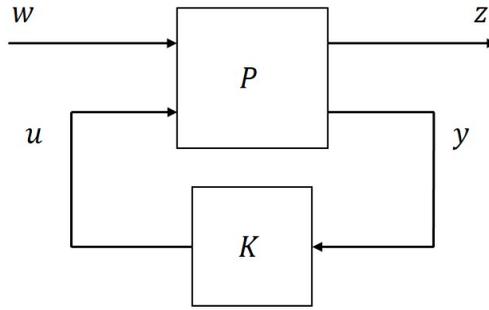


FIGURE 2.23 – Problème sous forme standard

Le problème H_∞ est le suivant¹⁰ :

$$\begin{aligned} & \underset{K}{\text{minimiser}} && \|P \star K\|_\infty \\ & \text{sous contrainte que} && P \star K \text{ est stable de façon interne} \end{aligned} \quad (2.26)$$

où $\|P \star K\|_\infty$ représente la norme H_∞ de $P \star K$. En pratique et notamment pour des raisons numériques, la méthode consiste à trouver, étant donné un scalaire $\gamma_{H_\infty} > 0$, un correcteur K tel que $\|P \star K\|_\infty < \gamma_{H_\infty}$. Il existe deux manières de résoudre ce problème qui sont la résolution d'une série d'équations de Riccati [SP07] et l'optimisation sous contraintes inégalités matricielles linéaires (LMI) [BGFB94]. Les deux approches ne seront pas plus développées ici, mais elles bénéficient de nombreuses années de recherche qui ont abouti à des algorithmes efficaces disponibles par exemple sous le logiciel commercial *Matlab* dans la *Robust Control Toolbox*.

Dans la partie 2.3.2, on a réglé deux correcteurs en cascade K_ω et K_η représentés en haut sur la figure 2.24, tels que la loi de commande qui en découle vaut :

$$u = K_\omega(K_\eta(\delta\phi_c - \delta\tilde{\phi}) - \delta\tilde{\omega}_x) = K_\omega K_\eta \epsilon - K_\omega \delta\tilde{\omega}_x \quad (2.27)$$

Le correcteur sur deux entrées équivalent aux correcteurs P/PI est donc :

$$K_{PPI} = [K_\omega K_\eta \quad -K_\omega] \quad (2.28)$$

Le problème de synthèse H_∞ sous forme standard revient alors à chercher un correcteur noté K sur la figure 2.24 en bas, qui possède deux entrées $\epsilon = \delta\phi_c - \delta\tilde{\phi}$ et $\delta\tilde{\omega}_x$ et une sortie u .

2.3.3.2 Spécifications sur la boucle fermée [SF09]

Le cahier des charges présenté en début de section donne des contraintes sur la boucle fermée du système. Contrairement au réglage des correcteurs P/PI de la section 2.3.2 qui nécessitait de traduire ces contraintes en contraintes sur les fonctions de transfert du système en boucle ouverte, la synthèse H_∞ permet de prendre directement en compte le cahier des charges. Ces contraintes correspondent à des gabarits dans le domaine fréquentiel, définis à partir de pondérations, qui permettent de modéliser les fonctions de transfert en boucle fermée. Soit $T_{i \rightarrow o}(p)$ la fonction de transfert entre un signal d'entrée i et de sortie o d'un

¹⁰. Un système est dit stable de façon interne si toutes les fonctions de transfert du système en boucle fermée produisent des sorties bornées à partir d'entrées d'amplitude bornée.

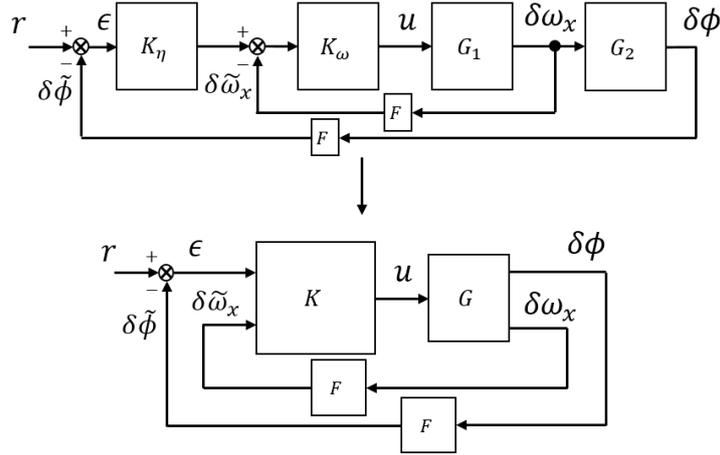


FIGURE 2.24 – Transformation de la structure cascade en un problème standard

système en boucle fermée $G(p)$. Pour modéliser la fonction de transfert $T_{i \rightarrow o}(p)$, on introduira des pondérations $W_i(p)$ et $W_o(p)$ en entrée et sortie du système¹¹, telles que [SF09] :

$$|T_{i \rightarrow o}(j2\pi\nu)| \leq \frac{1}{|W_o(j2\pi\nu)W_i(j2\pi\nu)|} \quad (2.29)$$

où $|W_o(p)W_i(p)|^{-1}$ est ce qu'on appelle un gabarit sur le module de la fonction de transfert $T_{i \rightarrow o}(p)$.

On représente sur la figure 2.25 le système $G(p)$ à asservir ainsi que les pondérations sur les signaux d'entrée et de sortie. Le système P du problème standard H_∞ correspond alors au système $G(p)$ augmenté des différentes pondérations. On considère que le comportement du drone asservi avec les correcteurs P/PI était satisfaisant. On veut désormais montrer qu'on peut retrouver le même comportement avec un correcteur obtenu par synthèse H_∞ . Pour cela, on donne ci-dessous les choix de pondérations qui s'appuient sur les correcteurs P/PI réglés précédemment.

Stabilité - Suivi de référence D'après le cahier des charges, on veut que l'asservissement de l'angle de roulis permette de suivre des consignes sous forme d'échelon, avec un temps de réponse de l'ordre de $0.1s$. Pour cela, il faut que $T_{r \rightarrow \epsilon}(p)$ qui correspond ici à la fonction de sensibilité de la boucle externe contienne au moins un zéro en zéro. Il faut donc que la fonction de transfert ait une pente de $+20dB/décades$ à basses fréquences. Le temps de réponse est lié à la fréquence de coupure $2\pi\nu_c^S$ de la fonction de sensibilité. Lors du réglage des correcteurs P/PI , on avait pour la boucle externe $2\pi\nu_c^S = 26rad/s$. De plus, on veut que le système asservi ait une certaine robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le modèle, que l'on caractérise par sa marge de module. Avec les correcteurs P/PI , on avait pour la boucle externe $\Delta M = -1.7dB$. Le gabarit sur $|T_{r \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)|$ qui vaut $|W_r(j2\pi\nu)W_\epsilon(j2\pi\nu)|^{-1}$ est donc choisi pour avoir la forme d'un passe-haut avec une pente de $+20dB/décades$, une pulsation de coupure à $-3dB$ de $26rad/s$ et une borne à hautes fréquences de l'ordre de $1.9dB$. On superpose sur la figure 2.26 les modules de la fonction de sensibilité $S_{\phi, P/PI}$ correspondant aux correcteurs P/PI précédemment obtenus et le gabarit $|W_r(j2\pi\nu)W_\epsilon(j2\pi\nu)|^{-1}$ définit

11. Le fait de dissocier $W_i(p)$ et $W_o(p)$ permet par la suite de différencier la pondération sur une fonction de transfert du système qui aurait en commun avec $T_{i \rightarrow o}(p)$ la même entrée i (resp. sortie o) mais pas la même sortie o (resp. entrée i).

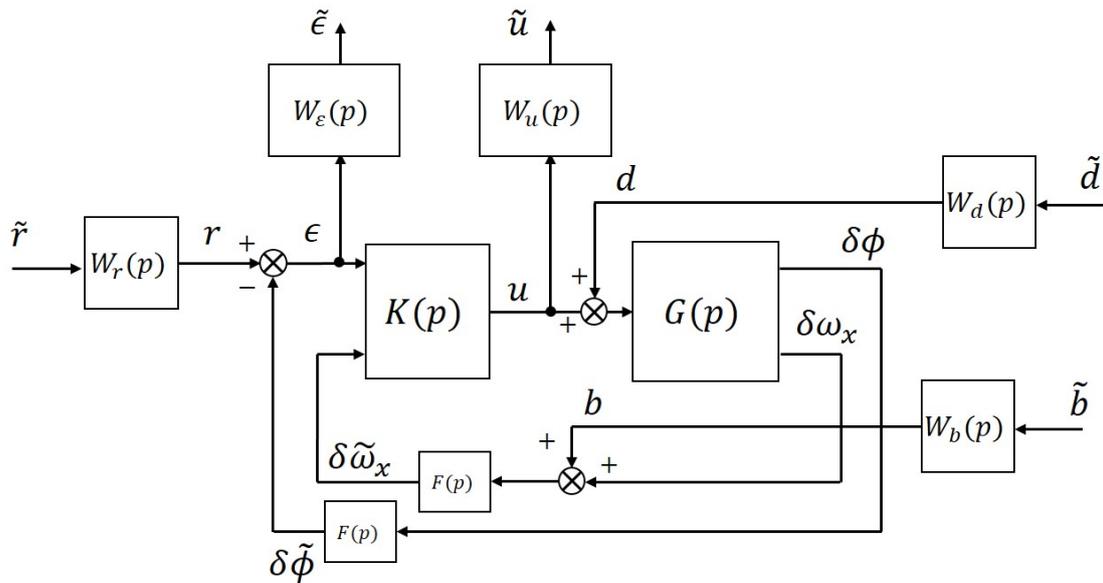
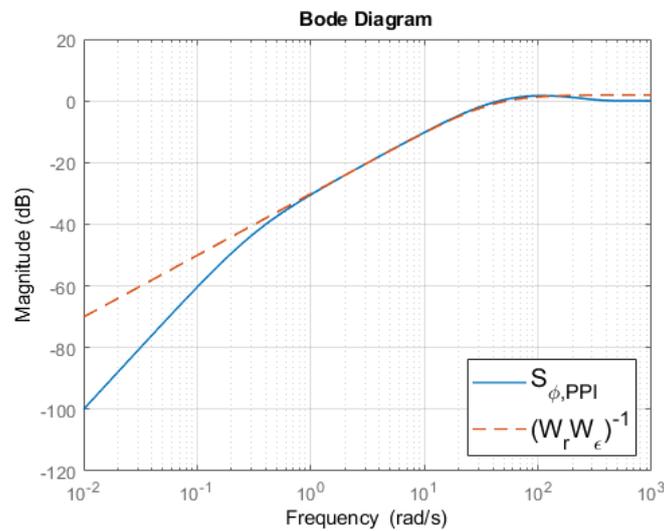


FIGURE 2.25 – Pondérations utilisées pour la synthèse de correcteur

par :

$$(W_r(p)W_\epsilon(p))^{-1} = \frac{1.25(p + 0.001)}{p + 40} \quad (2.30)$$


 FIGURE 2.26 – Pondération sur la fonction de sensibilité $S_{\phi,PPI}$

On considère également que des perturbations sous forme d'échelon peuvent intervenir dans la boucle. Sur la figure 2.25, elles sont notées d au niveau de l'actionneur et b au niveau de la mesure de vitesse angulaire. Pour les rejeter, il faut que $|T_{d \rightarrow \epsilon}(p)|$ et $|T_{b \rightarrow \epsilon}(p)|$ aient une pente de $+20dB/décades$ à basses fréquences. La pondération de sortie $W_\epsilon(p)$ permet de contraindre de manière commune les fonctions de transfert liées aux 3 entrées r , b , d . On choisit alors de donner la forme de passe-haut à la pondération de sortie $W_\epsilon(p)^{-1}$, tandis que les pondérations d'entrée $W_r(p)$, $W_b(p)$ et $W_d(p)$ sont ajustées pour que le correcteur H_∞

correspondre au P/PI équivalent (2.28). Finalement, on obtient :

$$W_\epsilon(p) = \frac{0.16(p + 40)}{p + 0.001}, \quad W_r = 5, \quad W_b = 1, \quad W_d = 10 \quad (2.31)$$

Avec ces choix de pondérations, on obtient le correcteur H_∞ représenté sur la figure 2.27 et superposé au correcteur P/PI équivalent (2.28) de la partie précédente. Les deux correcteurs ont bien un comportement similaire sur la plage de fréquences $[10^{-2}, 10^4]rad/s$ présentée ici. Cependant, on observe pour l'entrée $\delta\omega_x$ qu'une avance de phase apparaît autour de $400rad/s$, ce qui entraîne l'augmentation du gain du correcteur pour cette entrée à hautes fréquences. Cela n'a pas lieu d'être, puisque le système ne fonctionne pas à ces fréquences élevées, et cela entraîne une amplification du bruit de mesure qui n'est pas désirable. On traite ce problème en limitant la commande en hautes pulsations ci-dessous.

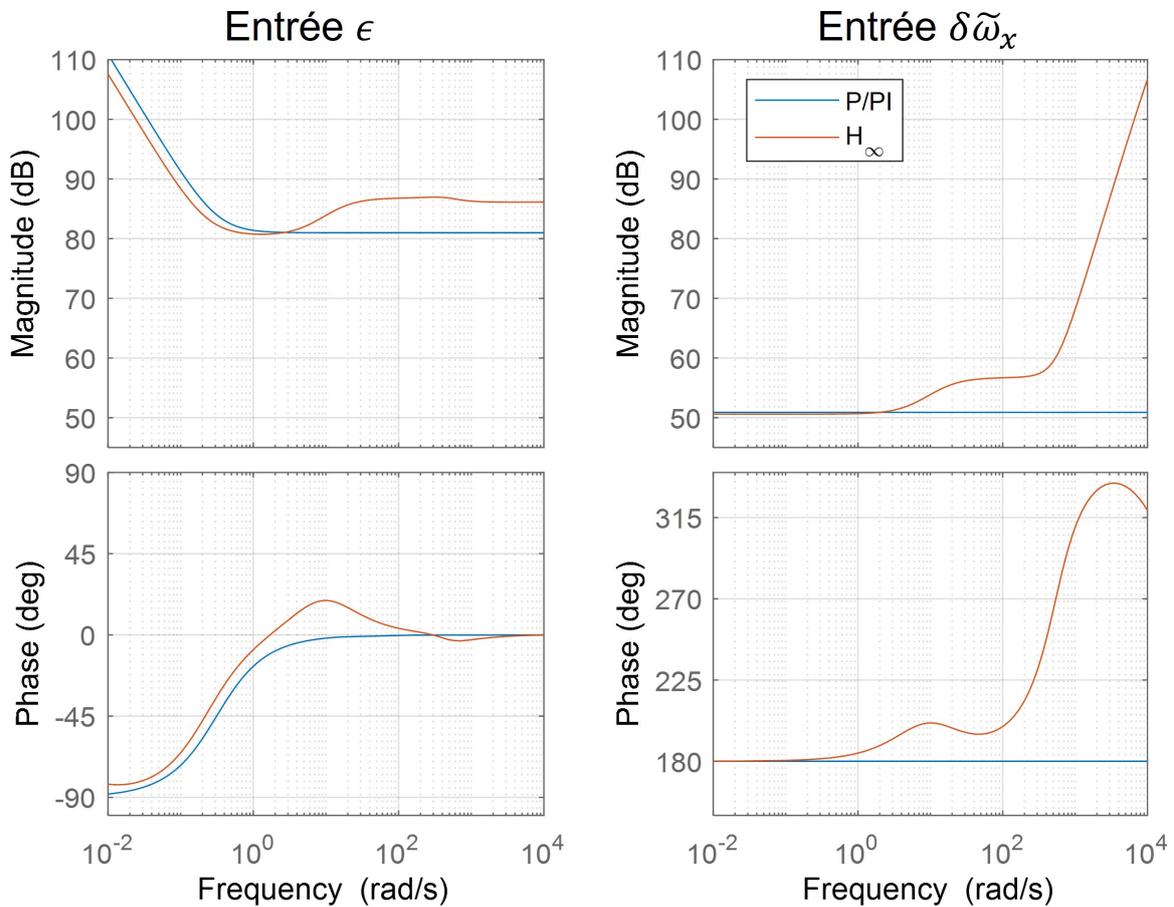


FIGURE 2.27 – Correcteur H_∞ obtenu sans pondération $W_u(p)^{-1}$

Limitation énergie de commande Pour la synthèse H_∞ , la structure du correcteur n'est plus fixée *a priori* comme lors du réglage des correcteurs P/PI , mais elle est choisie par l'algorithme d'optimisation. On peut alors spécifier une condition afin de limiter le gain du correcteur aux hautes fréquences et donc l'énergie de commande. C'est ce qui est fait ici avec la pondération de sortie $W_u(p)$, qui permet d'agir sur les fonctions de transfert entre les différentes entrées et la sortie u . On choisit de donner à $W_u(p)^{-1}$ une forme de filtre

passe-bas, de fréquence de coupure 400rad/s :

$$W_u(p) = \frac{2.5 \times 10^{-8}(p + 400)}{1 \times 10^{-5} \times p + 1} \quad (2.32)$$

La réponse fréquentielle du correcteur obtenu avec cette pondération supplémentaire est représentée sur la figure 2.28. Cette fois-ci, on peut observer que le gain du correcteur est bien limité en hautes pulsations. Avec ce correcteur, on obtient la réponse temporelle représentée sur la figure 2.29. Elle est bien similaire à celle du correcteur P/PI au niveau des variables asservies $\delta\omega_x$ et $\delta\phi$. On peut cependant remarquer que le pic de commande à 0.1s est moins marqué pour la commande H_∞ , ce qui découle de l'utilisation de la pondération $W_u(p)^{-1}$ pour limiter l'énergie de commande.

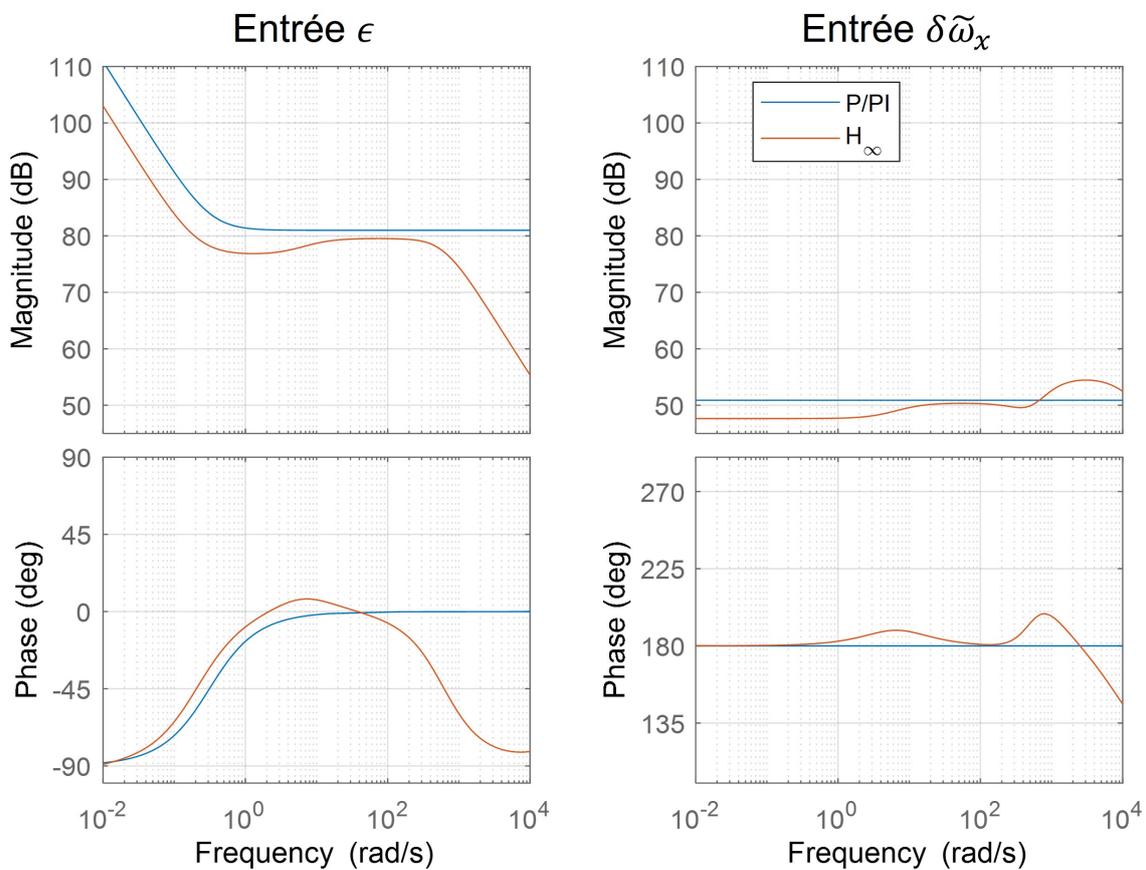
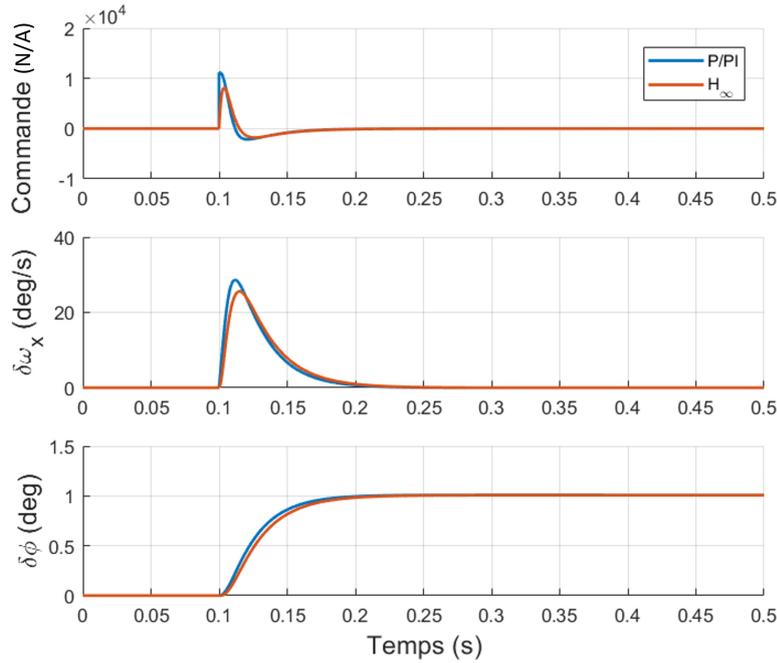


FIGURE 2.28 – Correcteur H_∞ obtenu lors de l'ajout de $W_u(p)^{-1}$

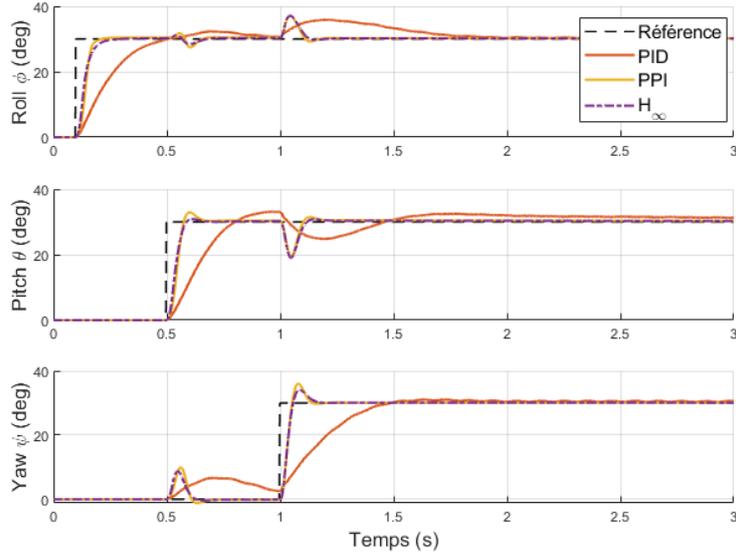
Passage aux 3 axes La synthèse de correcteur par optimisation que l'on vient de présenter s'étend aux 3 dimensions en ajoutant dans le problème de synthèse les entrées, sorties et pondérations associées. Le cahier des charges ne stipule pas de règle spécifique pour les autres axes donc on peut utiliser les mêmes pondérations que dans le cas 1 axe. On obtient alors 3 correcteurs indépendants qui vérifient les spécifications du cahier des charges sur chaque axe. Ceux-ci sont appliqués au contrôle du modèle non-linéaire du drone sur la figure 2.30. La réponse temporelle issue des correcteurs H_∞ est bien similaire à celle obtenue avec les correcteurs P/PI sur tous les axes.


 FIGURE 2.29 – Réponse temporelle du correcteur H_∞ comparé au correcteur P/PI

Complexité d'implémentation L'ordre du correcteur obtenu lors de la synthèse H_∞ est égal à l'ordre du système à commander, additionné à l'ordre des différentes pondérations. Le seul moyen de limiter *a priori* l'ordre du correcteur est donc de choisir des pondérations avec un ordre limité; c'est ce qui a été fait en choisissant des fonctions de transfert type passe-bas ou passe-haut d'ordre 1. Néanmoins, l'ordre du correcteur synthétisé restera élevé par rapport à celui obtenu via des méthodes d'automatique fréquentielle classique. Ici, l'ordre du correcteur H_∞ obtenu après la synthèse pour 1 axe était de 8 (contre 1 pour le P/PI), ce qui est conséquent pour une implémentation sur microcontrôleur. En réalité, un correcteur aux performances similaires et à l'ordre plus faible pourrait être obtenu en ne gardant que les dynamiques prépondérantes. C'est ce qui est présenté dans la partie suivante sur la réduction de modèle.

2.3.3.3 Réduction de modèle

Les méthodes de réduction de modèle visent à approximer une fonction de transfert $H(p)$ d'ordre n par une fonction de transfert réduite $H_r(p)$ d'ordre $r < n$. Si $H(p)$ est un correcteur, on veut que le système asservi par $H_r(p)$ respecte le cahier des charges qui est satisfait par le système asservi par $H(p)$. Si $H(p)$ est le modèle d'un système à commander, on veut que $H_r(p)$ permette de mettre au point un correcteur qui fonctionne correctement avec le système d'ordre complet. La fonction $H_r(p)$ doit donc rester relativement proche de $H(p)$ dans son comportement dynamique. Cela peut se mesurer, pour $H(p)$ et $H_r(p)$ stables, par la norme $\|H(p) - H_r(p)\|_\infty$ que l'on veut rendre faible, ce qui permet de borner l'écart pour toute fréquence dans \mathbb{R} . Différentes méthodes existent, comme la méthode de la troncature équilibrée [SP07]. Elle consiste à éliminer les sous-espaces peu observables ou commandables d'un système mis sous la forme d'une représentation d'état équilibrée. On explique ci-dessous à quoi correspond la représentation d'état équilibrée d'un système, puis en quoi consiste la méthode de la troncature.


 FIGURE 2.30 – Correcteurs PID , P/PI et H_∞ appliqués au modèle non-linéaire

Représentation d'état équilibrée Soit une représentation d'état d'une fonction de transfert stable $G(p)$ d'ordre n :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

On appelle grammien de commandabilité la matrice P , solution de l'équation suivante :

$$AP + PA^\top + BB^\top = 0 \quad (2.34)$$

De manière analogue, on appelle grammien d'observabilité la matrice Q telle que :

$$A^\top Q + QA + C^\top C = 0 \quad (2.35)$$

Il existe un changement de variable $x = T\tilde{x}$, tel que les grammien d'observabilité et de commandabilité sont égaux dans la nouvelle base, c'est-à-dire :

$$\tilde{P} = \tilde{Q} = \mathbf{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (2.36)$$

ce qui donne pour la représentation d'état équilibrée de $H(p)$:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= T^{-1}AT\tilde{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) &= CT\tilde{x}(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.37)$$

Les valeurs $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ sont appelées valeurs singulières de Hankel. Celles-ci mesurent de manière conjointe la commandabilité et l'observabilité du système, où σ_n correspond à la composante du vecteur d'état qui est à la fois la moins observable et la moins commandable.

Troncature équilibrée On veut maintenant obtenir un modèle réduit d'ordre $r < n$ de $G(p)$ mis sous la forme d'une représentation d'état équilibrée. On partitionne le vecteur d'état noté x en x_1 et x_2 , où x_2 contient les $n - r$ composantes du vecteur d'état correspondant

aux $n - r$ plus petites valeurs singulières de Hankel que l'on veut éliminer. La représentation d'état devient :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [C_1 \quad C_2] x(t) + Du(t) \end{cases} \quad (2.38)$$

Au lieu d'éliminer simplement x_2 dans la représentation d'état (2.38), on applique la méthode appelée *residualization* dans [SP07]. Elle consiste à corriger le gain statique du modèle réduit pour qu'il coïncide avec celui du modèle initial. Pour A_{22} inversible, on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1(t) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u(t) \\ y(t) = (C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1(t) + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u(t) \end{cases} \quad (2.39)$$

On obtient alors un modèle $H_r(p)$ d'ordre $r < n$.

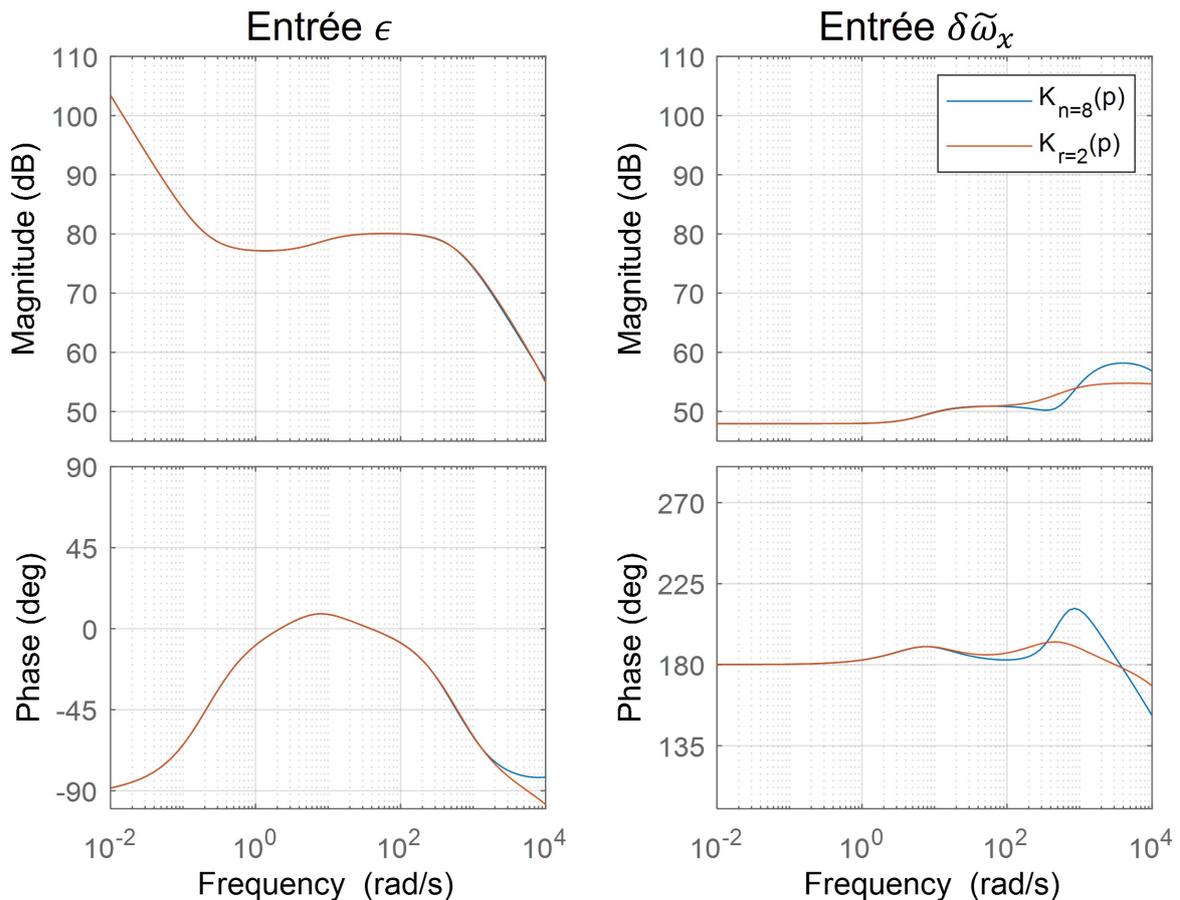
Réduction de l'ordre du correcteur H_∞ On veut maintenant réduire l'ordre du correcteur H_∞ obtenu dans la partie 2.3.3. Son ordre est $n = 8$, ce qui est conséquent pour une implémentation sur microcontrôleur. Or, certaines dynamiques ne semblent pas participer de manière critique au bon fonctionnement du système. En effet, le correcteur H_∞ que l'on a synthétisé a une dynamique similaire à celle du correcteur P/PI (ordre 1) de la partie 2.3.2 à laquelle on a ajouté un passe-bas (ordre 1) à hautes fréquences. On peut donc faire l'hypothèse qu'un modèle à l'ordre $r = 2$ suffirait à approximer le modèle complet du correcteur H_∞ d'ordre $n = 8$. On applique donc la méthode de réduction de modèle présentée précédemment afin d'obtenir un correcteur réduit noté $K_{r=2}(p)$ du correcteur H_∞ initial noté $K_{n=8}(p)$. On donne sur la figure 2.31 le diagramme de Bode associé au correcteur initial et au correcteur réduit, et sur la figure 2.32 la réponse temporelle à un échelon du modèle linéarisé en 0 de l'attitude du drone asservie par le correcteur initial et le correcteur réduit.

On voit sur les figures 2.31 et 2.32 que le correcteur réduit $K_{r=2}(p)$ est représentatif du correcteur initial $K_{n=8}(p)$. Dans le domaine fréquentiel, il traduit bien l'effet intégrateur à basses fréquences et passe-bas à partir de 400rad/s , voir figure 2.31. Dans le domaine temporel, l'asservissement avec le correcteur réduit a un comportement similaire à celui que l'on obtient avec le correcteur initial, voir figure 2.32. On peut donc considérer que le correcteur H_∞ initial d'ordre 8 peut être réduit à l'ordre 2, ce qui lui permet d'être plus facilement implémentable sur un microcontrôleur.

2.4 Estimation du domaine d'attraction des correcteurs d'attitude

Dans la section précédente, on a synthétisé des correcteurs P/PI et H_∞ en se basant sur le modèle du drone linéarisé au point de vol stationnaire. On peut se poser la question de la validité de cette approche basée sur une linéarisation du modèle pour contrôler le drone, étant donné son comportement intrinsèquement non-linéaire.

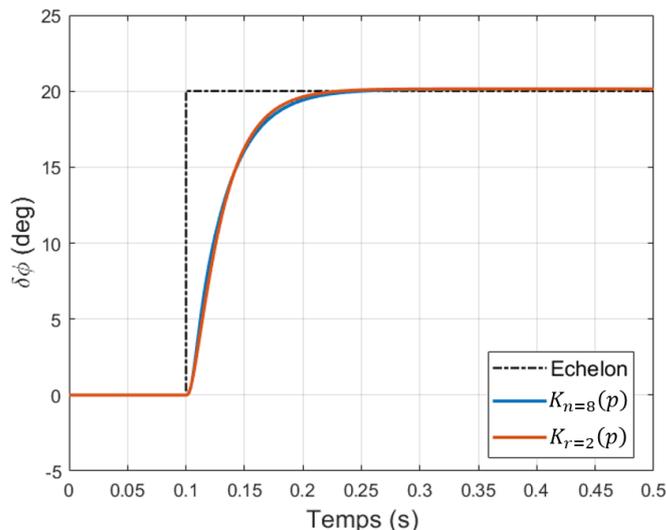
Dans la littérature sur les drones, deux types d'approches sont proposées pour en effectuer la commande. La première consiste à considérer que les non-linéarités et les couplages du modèle dynamique du drone sont en réalité trop importants pour être négligés, même avec des angles d'attitude faibles. Dans ce cas, il faudra utiliser des stratégies de contrôle non-linéaire pour l'asservissement du drone. Dans la seconde approche, on considère que


 FIGURE 2.31 – Bode du correcteur H_∞ initial $K_{n=8}(p)$ et du correcteur réduit $K_{r=2}(p)$

pour des trajectoires de vol non-agressif le modèle linéarisé à des angles d'attitude nuls est suffisamment représentatif de la dynamique du drone dans sa plage de fonctionnement. Dans ce cas, les stratégies de contrôle linéaire comme celles que l'on a appliquées précédemment sont suffisantes pour asservir le drone.

On observe sur la figure 2.30 que le système reste stable, même loin du point de linéarisation, et donc des angles d'attitude nuls. On peut cependant s'interroger sur la distance admissible au point de linéarisation pour garder le quadricoptère stable, autrement dit sur le domaine d'attraction des correcteurs préalablement conçus pour le modèle linéarisé en un point. Une démonstration formelle de ce comportement serait d'autant plus intéressante que l'on veut concevoir un système qui soit sûr, afin de pouvoir évoluer dans son environnement de manière autonome. Il est donc important d'obtenir au préalable des garanties théoriques de son bon fonctionnement sur toute la durée de sa mission autonome.

On va développer ici une méthode afin de valider le bon fonctionnement de correcteurs, préalablement conçus en se basant sur un modèle du système linéaire, lorsqu'ils sont appliqués sur le système non-linéaire. On présentera tout d'abord une méthode d'analyse de la stabilité pour une classe générique de systèmes non-linéaires. Puis, on montrera que le modèle non-linéaire du drone asservi par des correcteurs linéaires, et plus particulièrement par les correcteurs type P/PI de la partie 2.3.2, appartient à cette classe de systèmes. On en déduira finalement le domaine d'attraction des correcteurs P/PI lorsqu'ils sont appliqués au contrôle du modèle non-linéaire du drone.

FIGURE 2.32 – Asservissement de $\delta\phi$ par les correcteurs $K_{n=8}(p)$ et $K_{r=2}(p)$

2.4.1 État de l'art

L'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée repose généralement sur la théorie de Lyapunov [GTV85]. Typiquement, on va rechercher une fonction candidate de Lyapunov, étant donné le modèle du système et sa loi de commande, qui permette de conclure sur la stabilité de la boucle fermée [Kha02]. Pour cela, on doit d'abord fixer la structure de la fonction de Lyapunov, puis en déduire ses paramètres analytiquement à partir du modèle du système en boucle fermée. Cette démarche peut cependant s'avérer complexe dans certains cas, et nécessiter l'ajout de termes simplificateurs dans la loi de commande afin d'aboutir à une solution comme par exemple dans [GLL13, LLM10]. Ces travaux traitent de la synthèse de lois de commande type *PID* pour le modèle non-linéaire de l'attitude du quadricoptère. Comme celui-ci contient des couplages, notamment entre vitesses angulaires, on ajoute des termes dans la loi de commande qui permettent de les annuler. Cela permet ensuite d'établir une démonstration de la stabilité du système non-linéaire sur un large domaine d'attraction via la recherche d'une fonction de Lyapunov adaptée. Ici, on veut conserver la loi de commande *P/PI* initialement synthétisée dans la section 2.3.2 sans avoir à la modifier. Dans ce cas, il est difficile d'obtenir analytiquement une fonction de Lyapunov afin d'estimer le domaine d'attraction du système non-linéaire. Plutôt que de rechercher analytiquement une fonction de Lyapunov *ad hoc* pour notre système, notre approche va être de fixer la structure de la fonction candidate de Lyapunov à une forme quadratique, et d'en rechercher les paramètres par optimisation. Nous allons voir que cela peut être mis sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires (LMI), qui est soluble numériquement [BGFB94]. Par rapport à l'approche classique, cette approche basée sur les LMI permet d'étudier la stabilité d'une classe de systèmes non-linéaires donnée de manière plus systématique et pourrait, à terme, être couplée avec une démarche de synthèse de correcteurs linéaires assistée par ordinateur.

2.4.2 Objectifs de l'analyse

2.4.2.1 Modèle non-linéaire de l'attitude

On rappelle ci-dessous le modèle non-linéaire de l'attitude du drone issu du modèle complet (2.8). Afin de simplifier l'analyse, on considère que $h = 0$ et on néglige le filtre dans la chaîne de retour des capteurs :

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x &= \frac{1}{J_x} [\tau_x - (J_z - J_y)\omega_y\omega_z] \\ \dot{\omega}_y &= \frac{1}{J_y} [\tau_y - (J_x - J_z)\omega_x\omega_z] \\ \dot{\omega}_z &= \frac{1}{J_z} [\tau_z - (J_y - J_x)\omega_x\omega_y] \\ \dot{\phi} &= \omega_x + s_\phi t_\theta \omega_y + c_\phi t_\theta \omega_z \\ \dot{\theta} &= c_\phi \omega_y - s_\phi \omega_z \\ \dot{\psi} &= \frac{s_\phi}{c_\theta} \omega_y + \frac{c_\phi}{c_\theta} \omega_z \end{cases} \quad (2.40)$$

Ce modèle peut s'écrire :

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = -\hat{\omega}J\omega + Du \\ \dot{\eta} = S(\eta)^{-1}\omega \end{cases} \quad (2.41)$$

où $\tau = Du$, avec D qui est le gain de lié à l'actionneur donné dans l'annexe A.3, u est la loi de commande et :

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad S(\eta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

2.4.2.2 Forme compacte

Le modèle de l'attitude du drone peut être décomposé en deux parties : une partie $A(\Delta(x))$ qui varie en fonction d'une matrice $\Delta(x)$ à définir dépendant du vecteur d'état x et une partie antisymétrique que l'on note $A_{sk}(x)$. On montre ci-dessous que l'on peut écrire le modèle du drone sous la forme compacte suivante :

$$\dot{x} = (A(\Delta(x)) + A_{sk}(x))x \quad (2.43)$$

où

- $A(\Delta(x)) = \Delta(x) \star M$ où $\Delta(x)$ est une matrice diagonale par blocs ;
- M est une matrice partitionnée $M = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & M_{12} \\ \hline M_{21} & M_{22} \end{array} \right]$;
- Le symbole \star correspond au produit de Redheffer, voir l'annexe A.5 ;
- $A_{sk}(x)$ est une matrice anti-symétrique telle que $A_{sk}(x) = \sum_{i=1}^n x_i A_{sk,i}$ avec $A_{sk,i} = -A_{sk,i}^\top$.

On considère maintenant que le drone est contrôlé par une loi de commande linéaire telle que la loi P/PI issue de la partie 2.3.2¹². Elle s'écrit, pour un signal de consigne nul, $u = -k_{p\omega}\omega - k_{p\omega}k_{p\eta}\eta - k_{p\omega}k_{i\eta}x_{int}$ où $\dot{x}_{int} = \eta$. Considérons le changement de variable $z = J\omega = [z_x, z_y, z_z]^\top$ et le vecteur d'état $x = [z^\top, \eta^\top, x_{int}^\top]^\top = [z_x, z_y, z_z, \phi, \theta, \psi, \int \phi dt, \int \theta dt, \int \psi dt]^\top$, le

12. Notons que l'étude qui suit pourrait être réalisée pour toute autre loi de commande linéaire.

modèle du drone (2.41) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\eta} \\ \dot{x}_{int} \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -Dk_{p_\omega} J^{-1} & -Dk_{p_\omega} k_{p_\eta} & -Dk_{p_\omega} k_{i_\eta} \\ S(\eta)^{-1} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}}_{A(\Delta(x))} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\hat{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{sk}(x)} \right) \begin{bmatrix} z \\ \eta \\ x_{int} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

La matrice $A(\Delta(x))$ peut s'écrire sous la forme LFT $A(\Delta(x)) = \Delta(x) \star M$ où la matrice M est détaillée dans l'annexe A.6 et $\Delta(x)$ est la matrice diagonale par blocs suivante :

$$\Delta(x) = \mathbf{diag}(\Delta_\phi, \Delta_\phi, \Delta_\theta) \quad (2.45)$$

où :

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} c_i - 1 & s_i \\ -s_i & c_i - 1 \end{bmatrix}, \quad i = \{\phi, \theta\}. \quad (2.46)$$

On veut désormais étudier la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (2.43) et plus particulièrement du drone en boucle fermée représenté par (2.44). Pour cela, il nous faut définir des notions de base de l'étude de la stabilité d'un système au sens de Lyapunov, issues de [Kha02] et [Vid93].

2.4.2.3 Stabilité au sens de Lyapunov [Kha02, Vid93]

Soit le système autonome suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (2.47)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $f(0) = 0$. Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (2.47) est appelé origine du système. Notre but est de caractériser l'origine du système en termes de stabilité. Ici, notre analyse vise à prouver la stabilité exponentielle de l'origine, définie ci-dessous.

Stabilité exponentielle

Définition 1. Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (2.47) est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes positives c , k et λ telles que :

$$\|x(t)\| \leq k \|x(t_0)\| e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\| < c, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.48)$$

et il est dit globalement exponentiellement stable si l'équation (2.48) est satisfaite $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Théorème de Lyapunov Soit l'ensemble \mathcal{B}_r tel que, pour $r > 0$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\| < r\} \subset \mathcal{B}_r \quad (2.49)$$

Afin de prouver que l'origine du système est exponentiellement stable, on se base sur la théorie de Lyapunov. Celle-ci consiste à rechercher une fonction candidate de Lyapunov notée V qui vérifie le théorème suivant.

Théorème 1. Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 telle que :

$$k_1 \|x(t)\|^a \leq V(x(t)) \leq k_2 \|x(t)\|^a, \quad \forall x(t) \in \mathcal{B}_r \quad (2.50)$$

$$\dot{V}(x(t)) \leq -k_3 \|x(t)\|^a, \quad \forall x(t) \in \mathcal{B}_r \quad (2.51)$$

où $x(t)$ est solution de 2.47 et avec a , k_1 , k_2 et k_3 des constantes positives. Alors, l'origine du système (2.47) est exponentiellement stable.

Si de plus, (2.50) et (2.51) sont vérifiées $\forall x \in \mathbb{R}^n$ alors l'origine du système est globalement exponentiellement stable.

Domaine d'attraction La stabilité globale d'un système est une propriété forte qui peut être difficile à établir. Dans le cas où on n'a que la stabilité locale d'un système, on peut vouloir estimer l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles cette propriété est valide. Pour cela on définit la notion de domaine d'attraction comme suit.

Définition 2. Soit $x(t)$ la solution de l'équation (2.47) ayant comme condition initiale $x(t_0) = x_0$. Alors le domaine d'attraction \mathcal{D}_a de l'origine $\bar{x} = 0$ du système est tel que :

$$\mathcal{D}_a = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \text{ pour } x(t_0) = x_0\} \quad (2.52)$$

Dans le cas du drone pour lequel on a conçu une loi de commande linéaire à partir du modèle linéarisé en $\bar{x} = 0$, la propriété de stabilité globale semble difficile à établir. Cependant, cette propriété n'est pas indispensable, car le domaine de fonctionnement du drone correspond à un vol non-agressif pour lequel les angles d'attitude ne dépassent pas 30° . On veut néanmoins pouvoir s'assurer que les correcteurs synthétisés stabilisent bien le drone sur toute cette plage de fonctionnement. On s'appuiera donc sur la notion de stabilité locale et sur une estimation du domaine d'attraction autour du point d'équilibre. Pour cela, on définit l'ensemble Ω_γ tel que :

$$\Omega_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } V(x) \leq \gamma\} \quad (2.53)$$

où V vérifie les conditions (2.50) et (2.51) du théorème 1 de stabilité exponentielle locale et γ est tel que $\Omega_\gamma \subset \mathcal{B}_r$. L'ensemble Ω_γ est ce qu'on appelle un ensemble invariant du système (2.47), c'est-à-dire que pour toute condition initiale $x(t_0) \in \Omega_\gamma$, la trajectoire du système reste dans Ω_γ . Comme on a également V qui vérifie les conditions (2.50) et (2.51), cela implique que $\forall x(t_0) \in \Omega_\gamma$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, voir [EGS96, BGF94] pour des arguments similaires. L'invariant $\Omega_\gamma \subset \mathcal{B}_r$ est donc inclus dans le domaine d'attraction \mathcal{D}_a . Pour obtenir une estimation du domaine d'attraction \mathcal{D}_a , on recherche le plus grand γ tel que $\Omega_\gamma \subset \mathcal{B}_r$. De plus, on recherche le plus grand ensemble \mathcal{B}_r tel que le théorème 1 de stabilité exponentielle locale soit vérifié. Cela permet de démontrer la stabilité du drone sur la plus large plage de fonctionnement possible, qui doit comprendre des angles au moins égaux à 30° pour respecter la condition du cahier des charges de vol non-agressif.

2.4.3 Théorèmes généraux de stabilité

On considère tout d'abord le cas du système sous forme compacte (2.43) la stabilité du point d'équilibre $\bar{x} = 0$. Le théorème qui suit donne les conditions pour lesquelles le point $\bar{x} = 0$ est globalement exponentiellement stable.

Théorème 2. Pour le système (2.43), s'il existe des matrices $P = P^\top > 0$ et $W = W^\top$ telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix}^\top W \begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.55)$$

$$A_{sk,i}^\top P + PA_{sk,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.56)$$

alors l'origine $\bar{x} = 0$ du système (2.43) est globalement exponentiellement stable, avec $V(x) = x^\top Px$.

Démonstration. Considérons l'équation $y = A(\Delta(x))x = (\Delta(x) \star M)x$, associée à la représentation linéaire fractionnaire (LFT) supérieure de la figure 2.33 et correspondant aux équations suivantes :

$$p = \Delta(x)q \quad (2.57a)$$

$$\begin{cases} q = M_{11}p + M_{12}x \\ y = M_{21}p + M_{22}x \end{cases} \quad (2.57b)$$

où p et q sont des signaux internes du système.

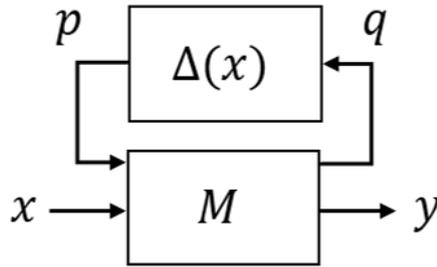


FIGURE 2.33 – Représentation linéaire fractionnaire associée à (2.57)

À partir de l'équation (2.55), et étant donné des matrices $P = P^\top > 0$ et $W = W^\top$ satisfaisant le théorème 2, on peut écrire la forme quadratique suivante :

$$\begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ x \end{bmatrix} < 0 \quad (2.58)$$

ce qui, d'après l'équation (2.57b), donne :

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}^\top W \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + y^\top Px + x^\top Py < 0 \quad (2.59)$$

On rajoute de chaque côté le signal q dans l'équation (2.54) :

$$q^\top \begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix}^\top W \begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix} q \geq 0 \quad (2.60)$$

ce qui, d'après la définition des signaux p et q de l'équation (2.57a) donne :

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}^\top W \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.61)$$

et donc, d'après l'équation (2.59) :

$$y^\top Px + x^\top Py < 0 \quad (2.62)$$

De l'équation (2.56) concernant la matrice antisymétrique A_{sk} , on a (voir [FSB99] pour un argument similaire) :

$$\sum_{i=1}^n x_i^\top A_{sk,i}^\top P + PA_{sk,i} x_i = 0 \Leftrightarrow A_{sk}(x)^\top P + PA_{sk}(x) = 0, \quad \forall x_i \in \mathcal{R}^n \quad (2.63)$$

donc :

$$x^\top (A_{sk}(x)^\top P + PA_{sk}(x)) x = 0 \quad (2.64)$$

Enfin, on rappelle que le système complet (2.43) vaut $\dot{x} = (A(\Delta(x)) + A_{sk}(x))x$. De la somme des équations (2.62) et (2.64), et en rappelant que $y = A(\Delta(x))x$, on obtient :

$$\dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x} < 0 \quad (2.65)$$

Soit une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^\top Px > 0$, $x \neq 0$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ solution de (2.43). La fonction V est telle que :

$$\lambda_{\min}(P)x^\top x \leq x^\top Px \leq \lambda_{\max}(P)x^\top x \quad (2.66)$$

où $\lambda_{\min}(P)$ (resp. $\lambda_{\max}(P)$) est la valeur propre minimale (resp. maximale) de P . La fonction V satisfait donc la condition (2.50) du théorème (1) de stabilité exponentielle avec $a = 2$. De plus, d'après (2.65), on a $\dot{V}(x) < 0$, $x \neq 0$ donc $\exists k_3 > 0$ tel que la condition (2.51) est aussi validée. Les conditions du théorème 1 de stabilité exponentielle sont donc réunies, et on en conclut finalement que l'origine du système 2.43 est globalement exponentiellement stable. \blacksquare

Comme précédemment, on peut chercher à établir la stabilité locale du système plutôt que globale. Pour cela, on définit $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n\}$ et un ensemble borné B_r tel que :

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_i\| \leq r_i, i \in \mathcal{I}\} \quad (2.67)$$

où x_i désigne la i -ième composante du vecteur d'état. On peut alors énoncer le théorème suivant qui établit la stabilité exponentielle locale du point d'équilibre $\bar{x} = 0$ du système (2.43).

Théorème 3. *Pour le système (2.43), s'il existe des matrices $P = P^\top > 0$ et $W = W^\top$ telles que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix}^\top W \begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall x \in B_r \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & P \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ I & 0 \\ M_{21} & M_{22} \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.69)$$

$$A_{sk,i}^\top P + PA_{sk,i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.70)$$

alors l'origine $\bar{x} = 0$ du système (2.43) est localement exponentiellement stable, avec $V(x) = x^\top Px$.

Démonstration. La preuve du théorème 3 s'appuie sur les mêmes arguments que celle du théorème 2 dans le cas global, sauf qu'ici, $x \in B_r \subset \mathbb{R}^n$ d'où la propriété locale de stabilité exponentielle du point $\bar{x} = 0$. ■

Dans le cas de la stabilité exponentielle locale, on cherche à connaître le domaine d'attraction \mathcal{D}_a du système. Comme expliqué dans l'introduction de cette partie, on estime ce domaine d'attraction avec un ensemble invariant $\Omega_\gamma \subset \mathcal{B}_r$ issu de la définition (2.53). Ici, étant donné que l'on optimise sur la variable P une fonction de Lyapunov quadratique $V(x) = x^\top P x$, on peut fixer $\gamma = 1$ sans perte de généralité¹³. L'ensemble invariant $\Omega_{\gamma=1}$ correspond alors à un ellipsoïde centré en 0 [EGS96], tel que :

$$\Omega_{\gamma=1} = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x^\top P x \leq 1\}. \quad (2.71)$$

On énonce alors le théorème suivant, qui permet d'assurer que l'ensemble $\Omega_{\gamma=1} \subset \mathcal{B}_r$ et qu'il constitue une estimation du domaine d'attraction du point exponentiellement stable $\bar{x} = 0$.

Théorème 4. *S'il existe des matrices $P = P^\top > 0$ et $W \in \mathcal{W}$ satisfaisant (2.68)-(2.70) et telles que :*

$$\begin{bmatrix} r_i^2 & e_i \\ e_i^\top & P \end{bmatrix} \geq 0, \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.72)$$

où e_i est un vecteur de dimension n dont le i -ième élément vaut 1 et les autres 0 et r_i est défini à l'équation (2.67). Alors $\bar{x} = 0$ est localement exponentiellement stable et l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ est inclus dans le domaine d'attraction \mathcal{D}_a .

Démonstration. D'après (2.67), $x \in \mathcal{B}_r$ si $\|x_i\| \leq r_i$, c'est-à-dire si :

$$x^\top \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{e_i^\top} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{e_i} x \leq r_i^2. \quad (2.73)$$

Pour $x \in \mathcal{B}_r$, s'il existe P et W satisfaisant les équations (2.68)-(2.70) du théorème 3 de stabilité locale, alors $\forall x(t_0) \in \Omega_{\gamma=1}$, on a x qui est compris dans l'invariant $\Omega_{\gamma=1}$ tel que :

$$x^\top P x \leq 1. \quad (2.74)$$

Par application de la S-procédure [BGFB94], pour que (2.73) et (2.74) soient vérifiées simultanément, une condition suffisante est que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \mathcal{I}, \exists \tau_i \in \mathbb{R}_+ \quad x^\top e_i^\top e_i x - r_i^2 \leq \tau_i (x^\top P x - 1) \quad (2.75)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} e_i^\top e_i - \tau_i P & 0 \\ 0 & \tau_i - r_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0, \forall i \in \mathcal{I}. \quad (2.76)$$

13. En effet, la solution du théorème 3 forme un cône vis-à-vis de P et W , ce qui veut dire que si P et W sont solution, alors αP et αW aussi, $\forall \alpha \in \mathcal{R}_+$.

On a donc $e_i^\top e_i - \tau_i P \leq 0$, soit d'après le lemme de Schur [Sco14] :

$$\begin{bmatrix} \tau_i & e_i \\ e_i^\top & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.77)$$

De plus, on a $0 < \tau_i \leq r_i^2$, et donc :

$$\begin{bmatrix} r_i^2 & e_i \\ e_i^\top & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.78)$$

Donc (2.78) est une condition suffisante pour que l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1} \in \mathcal{B}_r$, et celui-ci étant un ensemble invariant, il est également inclus dans le domaine d'attraction \mathcal{D}_a . ■

Afin d'approximer au mieux l'ensemble \mathcal{D}_a , on recherche le plus grand ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ contenu dans le plus grand ensemble \mathcal{B}_r . La démarche adoptée est de fixer manuellement les bornes r_i de l'ensemble \mathcal{B}_r puis de maximiser la taille de l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1} \subset \mathcal{B}_r$ via un algorithme d'optimisation. Cette dernière étape peut être réalisée en maximisant la trace de P^{-1} , qui correspond à la somme des carrés des longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ [BGFB94]. On cherche à résoudre ce problème numériquement de manière efficace. Pour cela, on le met sous la forme d'un problème d'optimisation convexe de type LMI (*Linear Matrix Inequalities*) que l'on peut résoudre efficacement lorsque le nombre de LMI est fini [BGFB94, Sco14]. On le transforme ainsi en un problème de minimisation d'une fonction de coût linéaire sous contraintes LMI. La fonction de coût linéaire est la trace de P et les contraintes LMI permettent d'assurer la stabilité exponentielle locale de l'origine du système et le fait que $\Omega_{\gamma=1} \subset \mathcal{B}_r$:

$$\begin{array}{ll} \underset{P, W}{\text{minimiser}} & \text{Trace}(P) \\ \text{sous contraintes} & (2.68), (2.69), (2.70), (2.72) \end{array} \quad (2.79)$$

On cherche ensuite à maximiser le domaine $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{D}_a$. Pour cela, on augmente les bornes de \mathcal{B}_r jusqu'à obtenir le plus grand ensemble tel que les conditions LMI sont encore respectées.

En l'état, le problème d'optimisation (2.79) n'est cependant pas solvable numériquement, car il nécessite de résoudre une infinité de LMI à cause de l'équation (2.68) liée au terme $\Delta(x)$. Cependant, on montre par la suite que dans le cas particulier du drone, on peut exploiter la structure du terme $\Delta(x)$ afin de mettre le problème d'optimisation sous la forme d'un nombre fini de LMI à résoudre, et donc solvable numériquement.

2.4.4 Application au modèle du drone en boucle fermée

2.4.4.1 D'un nombre infini à un nombre fini de LMI

On considère le terme $\Delta(x)$ sous sa forme spécifique au drone définie en (2.45). On introduit tout d'abord un nouvel ensemble borné B_r tel que :

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{I} = \{4, 5\} \mid \|x_4\| \leq \phi_{max}, \|x_5\| \leq \theta_{max}\} \quad (2.80)$$

où x_i désigne la i -ième composante du vecteur d'état x . On peut alors définir un ensemble affine de matrices W qui vérifie l'inégalité sur $\Delta(x)$ (2.68) $\forall x \in B_r$. Cet ensemble de matrices W est noté \mathcal{W} et est donné dans le lemme suivant.

Lemme 1. *Pour la structure particulière de $\Delta(x)$ donnée en (2.45) et pour $\theta \in [-\theta_{max}, \theta_{max}]$ (resp. ϕ), l'inégalité (2.68) se vérifie pour toute matrice $W \in \mathcal{W}$ telle que :*

$$\mathcal{W} = \left\{ \exists U = U^\top, S = S^\top > 0, w \in \mathbb{R} \text{ et } t \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que} \right. \\ \left. W = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_\phi S \otimes I_2 & 0 & U \otimes I_2 & 0 \\ 0 & \alpha_\theta t I_2 & 0 & w I_2 \\ \hline U \otimes I_2 & 0 & (U - S) \otimes I_2 & 0 \\ 0 & w I_2 & 0 & (w - t) I_2 \end{array} \right] \right\} \quad (2.81)$$

où \otimes est le produit de Kronecker, $U = U^\top$, $S = S^\top > 0$, $w \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha_i = 2(1 - c_{i_{max}})$, $i = (\phi, \theta)$, $i_{max} = (\phi_{max}, \theta_{max})$.

Démonstration. Tout d'abord, on peut noter que le produit $\Delta_i^\top \Delta_i$ est borné :

$$\Delta_i^\top \Delta_i = \begin{bmatrix} 2(1 - c_i) & 0 \\ 0 & 2(1 - c_i) \end{bmatrix} \leq \alpha_i I_2 \quad (2.82)$$

où $\alpha_i = 2(1 - c_{i_{max}})$, $i = (\phi, \theta)$, $i_{max} = \{\phi_{max}, \theta_{max}\}$. Considérons la matrice diagonale par blocs $\tilde{\Delta}_\phi = \mathbf{diag}(\Delta_\phi, \Delta_\phi)$. Pour $S = S^\top$, on a $S \otimes I_2$ qui commute avec $\tilde{\Delta}_\phi$. On utilise l'équation (2.82) et cette propriété de commutation pour écrire l'inégalité suivante, valable pour une matrice $S = S^\top > 0$:

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{\Delta}_\phi \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \alpha_\phi S \otimes I_2 & 0 \\ 0 & -S \otimes I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{\Delta}_\phi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.83)$$

De plus, le bloc Δ_i satisfait :

$$\Delta_i + \Delta_i^\top + \Delta_i^\top \Delta_i = 0 \quad (2.84)$$

Enfin, étant donné une matrice $U = U^\top$, en combinant la propriété de commutation entre $U \otimes I_2$ et $\tilde{\Delta}_\phi$ avec les équations (2.83) et (2.84), on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} I \\ \tilde{\Delta}_\phi \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \alpha_\phi S \otimes I_2 & U \otimes I_2 \\ U \otimes I_2 & (U - S) \otimes I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{\Delta}_\phi \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.85)$$

En suivant la même méthode, on peut étendre la démonstration à la matrice complète $\Delta(x)$ en introduisant les scalaires supplémentaires $t \in \mathbb{R}_+$ et $w \in \mathbb{R}$ associés au bloc Δ_θ et tels que :

$$\begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix}^\top \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_\phi S \otimes I_2 & 0 & U \otimes I_2 & 0 \\ 0 & \alpha_\theta t I_2 & 0 & w I_2 \\ \hline U \otimes I_2 & 0 & (U - S) \otimes I_2 & 0 \\ 0 & w I_2 & 0 & (w - t) I_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} I \\ \Delta(x) \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.86)$$

ce qui nous donne la matrice W du lemme 1. ■

Désormais, on peut rechercher par optimisation une matrice $W \in \mathcal{W}$ dont la structure est décrite par le lemme 1, ce qui assure que l'inégalité (2.68) est vérifiée $\forall x \in B_r$.

2.4.4.2 Contrainte égalité (2.70)

Pour que le problème (2.79) puisse être résolu numériquement par un algorithme de résolution de LMI classique comme ceux que l'on trouve dans la *Matlab Robust Control Toolbox*, on doit également éliminer la contrainte égalité (2.70). On réalise cela en paramétrisant les variables de décision de la matrice P en accord avec (2.70). Pour rappel, dans le modèle d'attitude du drone 2.44, on avait $A_{sk}(x) = \mathbf{diag}(-\hat{\omega}, 0_3, 0_3)$. On peut l'écrire sous la forme $A_{sk}(x) = \sum_{i=1}^n x_i A_{sk,i}$, $A_{sk,i} = -A_{sk,i}^\top$:

$$\begin{aligned}
 A_{sk}(x) = & \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \cdots & 0 \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & & \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix} = z_x J_x^{-1} \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}}^{A_{sk,1}} \\
 & + z_y J_y^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}}_{A_{sk,2}} + z_z J_z^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{bmatrix}}_{A_{sk,3}} \quad (2.87)
 \end{aligned}$$

L'équation (2.70) donne les conditions suivantes sur les variables de décision $P_{i,j}$ de la matrice symétrique P :

$$P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,3} \quad \text{et} \quad P_{1,2} = P_{1,3} = P_{2,3} = 0 \quad (2.88)$$

Par conséquent, on définit les variables de décision de la matrice P pour $(i,j) = 1, 2, 3$ comme suit, :

$$P_{1:3,1:3} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

On note que l'on aurait aussi pu réaliser cette opération numériquement en utilisant une méthode itérative telle que la méthode de Gauss-Seidel [GVL13].

2.4.4.3 Problème d'optimisation final

Finalement, afin de prouver la stabilité exponentielle locale du point $\bar{x} = 0$ et d'estimer son domaine d'attraction, on peut réécrire le problème d'optimisation (2.79) sous la forme suivante qui est solvable numériquement :

$$\begin{aligned}
 \min_{P, W \in \mathcal{W}} \quad & \text{Trace}(P) \\
 \text{sous contraintes} \quad & \text{eq.}(2.69), \text{ eq.}(2.72), \text{ eq.}(2.89)
 \end{aligned} \quad (2.90)$$

où :

- L'inégalité (2.69) est issue du théorème 3 de stabilité locale exponentielle de $\bar{x} = 0$;
- L'inégalité (2.72) assure que l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ est inclus dans le domaine d'attraction \mathcal{D}_a ;

- L'égalité (2.89), assure que la contrainte d'égalité (2.70) est bien respectée par la matrice P ;
- La condition $W \in \mathcal{W}$, assure que l'inégalité sur $\Delta(x)$ (2.68) est vérifiée $\forall x \in B_r$.

Et enfin, comme expliqué précédemment, minimiser la trace de P revient à maximiser la taille de l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ comprise dans le plus grand ensemble $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{D}_a$ afin d'approximer au mieux le domaine d'attraction \mathcal{D}_a .

2.4.5 Application aux correcteurs du *Crazyflie*

Les résultats précédents sont désormais appliqués afin d'estimer le domaine d'attraction des correcteurs P/PI de la partie 2.3.2. Le problème d'optimisation (2.90) est résolu numériquement en utilisant la *Matlab Robust Control Toolbox*. Il permet de calculer des matrices $P = P^\top > 0$ et $W \in \mathcal{W}$ qui prouvent la stabilité exponentielle du système pour l'ensemble de conditions initiales $\Omega_{\gamma=1}$ contenu dans le plus grand ensemble B_r défini par les bornes ϕ_{max} et θ_{max} sur les angles ϕ et θ . On maximise manuellement ces bornes et le maximum obtenu est $\phi_{max} = \theta_{max} = 38^\circ$. On trace la figure 2.34 qui représente l'ensemble borné B_r et la projection de l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$ sur le plan (ϕ, θ) . Plusieurs trajectoires du système non-linéaire asservi par les correcteurs P/PI sont également projetées sur ce plan (lignes rouges). Comme expliqué précédemment, pour toutes conditions initiales prises dans l'ellipsoïde $\Omega_{\gamma=1}$, les trajectoires du système non-linéaire restent dans $\Omega_{\gamma=1}$ et tendent vers l'origine, comme on peut le voir sur la figure 2.34.

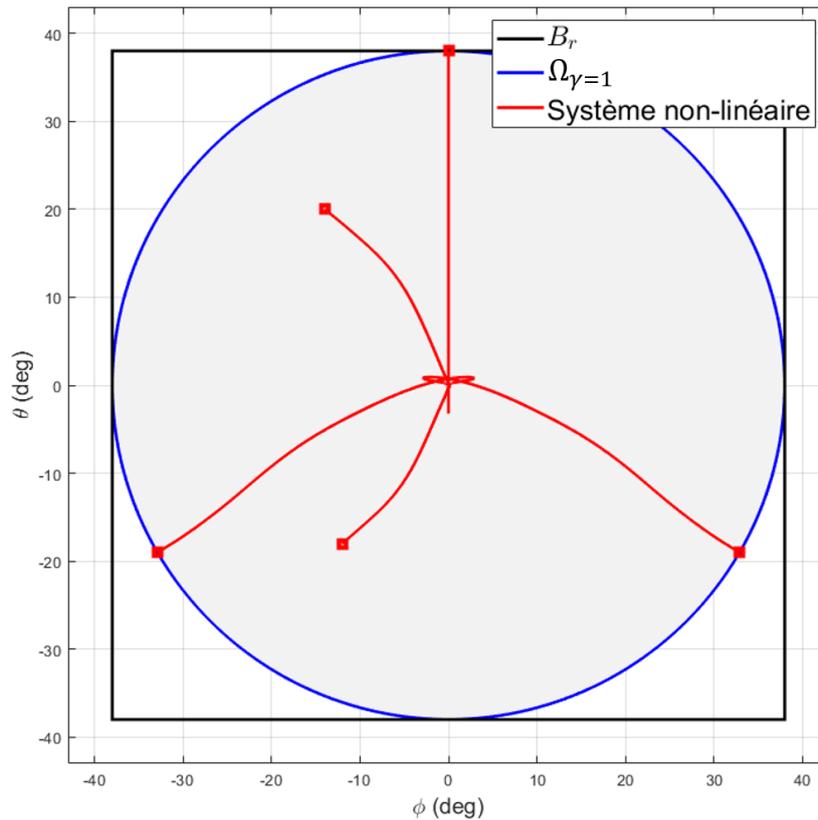


FIGURE 2.34 – Projection de l'ellipsoïde \mathcal{E}_p sur le plan (ϕ, θ)

Ce résultat nous permet de valider l'approche adoptée dans les sections précédentes, soit la synthèse de correcteurs linéaires basée sur le modèle linéarisé aux angles d'attitude

nuls, ensuite appliqués au contrôle du système non-linéaire de l'attitude du drone. On a prouvé d'un point de vue théorique ce qu'on observait expérimentalement, à savoir que ces correcteurs permettent en effet de stabiliser le drone, même loin du point de linéarisation. Ici, on a montré que les angles maximums pour lesquels on obtenait une solution du problème d'optimisation étaient de 38° , ce qui est satisfaisant pour notre application de vol autonome en suivant des trajectoires non-agressives.

Même si la recherche du domaine d'attraction d'un système non-linéaire n'est pas un sujet nouveau dans la littérature [DK71, EGS96], les travaux présentés précédemment appliqués dans le cas du contrôle d'attitude du drone constituent, à notre connaissance, une contribution vis-à-vis de l'état de l'art. L'obstacle rencontré ici était que la formulation initiale du problème d'optimisation menait à un nombre infini de LMI à résoudre. La contribution principale a alors été de proposer une nouvelle formulation, et plus particulièrement un ensemble de matrices \mathcal{W} , qui permette de se ramener à un problème de dimension finie donc solvable numériquement. Ces travaux pourraient être étendus pour être couplés avec une synthèse de correcteurs, voir par exemple [EGS96], ou pour prendre en compte dans le modèle la dynamique du mouvement de translation du drone, et notamment le rebouclage des vitesses linéaires vers les vitesses angulaires via le paramètre h discuté précédemment.

2.5 Modèle de la boucle fermée

Dans ce chapitre, on a présenté un modèle du drone en boucle ouverte puis on a étudié l'asservissement de l'attitude du drone. Par la suite, on va vouloir estimer son mouvement et notamment ses vitesses linéaires de déplacement. Cette estimation va être réalisée à partir de mesures issues des capteurs et d'un modèle de la vitesse du drone.

Le modèle dynamique du drone en boucle ouverte développé dans la section 2.2 permet de décrire le mouvement du drone lorsqu'il est soumis à une force quelconque de poussée T ou à des couples τ . Comme aucune hypothèse n'est faite sur les signaux d'entrée du modèle, la dynamique du système est donc régie uniquement par les paramètres structurels du drone (p.ex. inertie). Cependant, on a vu que le drone est au minimum contrôlé en attitude, ce qui fait que son mouvement est donc en réalité aussi régi par les correcteurs d'attitude employés. Plutôt que de chercher à estimer la dynamique du drone à partir de son modèle "en boucle ouverte" (modèle BO), il paraît alors plus intéressant d'utiliser un modèle qui prenne en compte l'influence des correcteurs dans la dynamique du drone¹⁴ et qui représente donc son comportement en "boucle fermée" (modèle BF), voir figure 2.35. De plus, on peut noter que les entrées du modèle en boucle ouverte ne sont pas accessibles directement au niveau du microcontrôleur et requièrent donc d'être mesurées ou d'être prédites via un modèle, contrairement aux entrées du modèle en boucle fermée qui sont directement les signaux de consigne. L'inconvénient d'utiliser le modèle de la boucle fermée est que si l'on combine les équations du modèle dynamique avec celles de l'asservissement de l'attitude, on risque d'obtenir un modèle d'ordre important, ce qui ne correspond pas à nos objectifs de limiter le coût calcul de la solution. On propose donc dans cette partie de réduire l'ordre du modèle de la boucle fermée avec la méthode de réduction de modèle présentée en 2.3.3.3. Cela permet d'obtenir un modèle d'une complexité faible, tout en restant représentatif du comportement global du drone asservi.

14. On ne prendra pas en compte les effets du paramètre h dans la suite de cette partie car on fait l'hypothèse qu'ils ont été éliminés lors de l'asservissement de l'attitude.

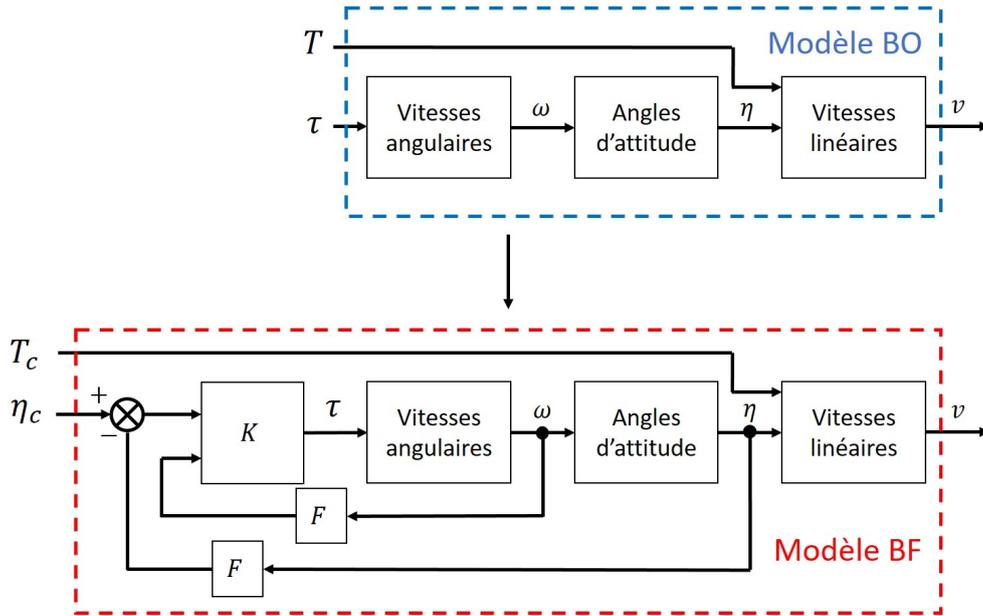


FIGURE 2.35 – Modèle BO en boucle ouverte, BF avec l'asservissement de l'attitude

Signaux d'intérêt Les signaux de sortie du modèle qui nous intéressent ici sont les vitesses linéaires du drone par rapport à son environnement et exprimées dans le repère body \mathcal{R}_b . On représente sur la figure 2.36 le contenu fréquentiel de la vitesse linéaire v_y du drone mesurée par le système de capture de mouvement *Vicon* lors d'un vol quelconque. On peut voir que la plupart des dynamiques se situent à des fréquences basses, inférieures à 10Hz , ce qui est également vrai sur les autres axes. On voudra donc obtenir un modèle de la boucle fermée particulièrement précis à basses fréquences.

Modèle 1 axe Le modèle dynamique du drone, pour $h = 0$ et $\bar{v}_z = 0$, décrivant la translation selon \vec{y}_b est le suivant :

$$\begin{cases} \delta\dot{\omega}_x &= \delta\tau_x \\ \delta\dot{\phi} &= \delta\omega_x \\ \delta\dot{v}_y &= g\delta\phi - \frac{\mu_{xy}}{m}\delta v_y \end{cases} \quad (2.91)$$

où $\delta\tau_x(t) = F\frac{D_x}{J_x}K_\omega(K_\eta(\delta\phi_c - \delta\phi) - \delta\omega_x)$, voir la partie sur la commande *PID* 2.3.2.

On veut obtenir un modèle de la boucle fermée que l'on utilisera plus tard dans le chapitre 4 sur l'estimation de vitesse. Ici, on va identifier le modèle de la boucle fermée du *Crazyflie* équipé de ses correcteurs *PID* d'origine. En effet, pour simuler les estimateurs dans le chapitre 4, on utilisera les expériences de début de thèse réalisées avec le système de capture de mouvement *Vicon*, durant lesquelles le *Crazyflie* était équipé de ses correcteurs *PID* d'origine. On cherche donc à avoir un modèle de la boucle fermée cohérent avec ces expériences.

Réduction de l'ordre du modèle 1 axe de la boucle fermée Le modèle de la translation sur l'axe \vec{y}_b du drone qui découle de l'équation (2.91) où les correcteurs sont les correcteurs *PID* d'origine est d'ordre $n = 8$. Cela représente un ordre conséquent si on considère une implémentation en représentation d'état sur un microcontrôleur, d'autant plus que l'on devra aussi implémenter le modèle des deux autres axes de translation du drone. Cependant,

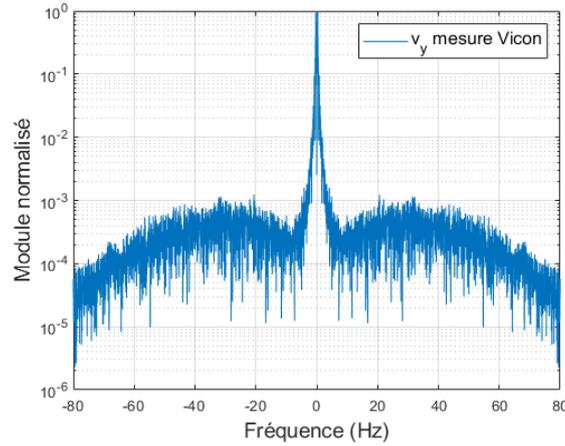


FIGURE 2.36 – Spectre normalisé de la vitesse v_y du drone en vol (échelle log sur l’axe des ordonnées)

on peut faire l’hypothèse que le comportement du drone asservi pourrait s’approcher d’un système d’ordre 1 ou 2. En effet, dans un cas idéal, la partie attitude, qui est en boucle fermée, a une dynamique rapide par rapport à celle de la translation, et elle peut être assimilée à un gain. Ensuite, il ne reste plus que l’intégrateur lié à la dynamique de vitesse linéaire, ce qui donnerait finalement un modèle complet d’ordre 1. Pour vérifier ces hypothèses, on va comparer le modèle initial noté $G_{v_y}^{n=8}(p)$ à des modèles d’ordre réduits $r = 1$ et $r = 2$, notés $G_{v_y}^{r=1}(p)$ et $G_{v_y}^{r=2}(p)$. Pour cela on applique la méthode de réduction de modèle de la partie 2.3.3.3 au modèle de la boucle fermée d’ordre initial $n = 8$ et on obtient :

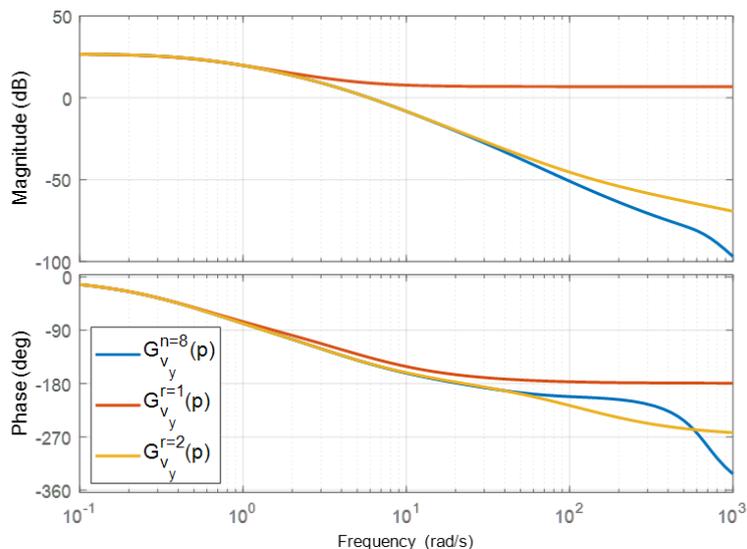
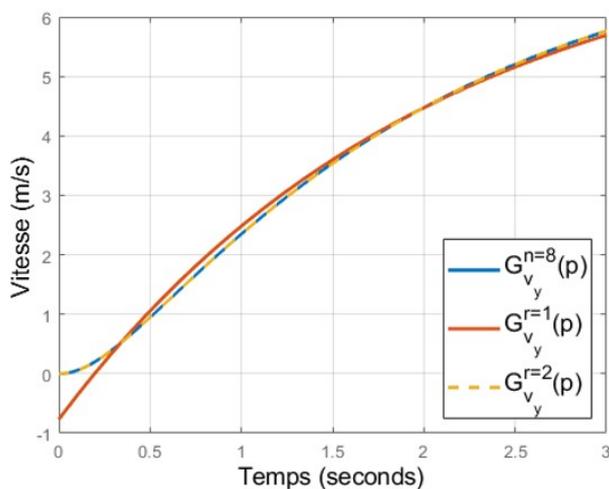
$$G_{v_y}^{r=1}(p) = \frac{-2.2(p - 4.86)}{p + 0.49} \quad (2.92)$$

et

$$G_{v_y}^{r=2}(p) = \frac{-0.34(p - 121.7)}{(p + 3.65)(p + 0.51)}. \quad (2.93)$$

On montre sur la figure 2.37 la réponse fréquentielle du modèle initial $G_{v_y}^{n=8}(p)$ et celle des modèles obtenus après réduction $G_{v_y}^{r=1}(p)$ et $G_{v_y}^{r=2}(p)$. On peut voir que le modèle réduit à l’ordre 2 est représentatif du modèle initial sur une plus large plage de fréquences que le modèle réduit à l’ordre 1. Cependant, comme dit précédemment, le modèle de la translation doit surtout être précis à basses fréquences donc on ne peut pas à ce stade conclure sur quel modèle utiliser. La figure 2.38 présente la réponse temporelle du système à un échelon de consigne de 20° . On ne perçoit pas d’écart entre le modèle d’ordre complet $n = 8$ et le modèle réduit à l’ordre $r = 2$. Le modèle réduit à l’ordre $r = 1$ contient un zéro dans le plan complexe droit qui induit sur la réponse temporelle un saut à $t = 0s$ qui n’est pas présent sur le modèle complet à l’ordre 8, cependant le reste de la dynamique entre $1m.s^{-1}$ et $6m.s^{-1}$ est bien similaire. On note que l’on ne compare pas le gain des modèles en régime stationnaire, celui-ci n’étant jamais maintenu durablement lors du vol du drone dans un environnement contraint tel qu’une canalisation.

Le modèle réduit à l’ordre $r = 2$ est donc clairement meilleur que celui à l’ordre $r = 1$ pour prédire le comportement du modèle initial à l’ordre $n = 8$. Cependant, dans le but de minimiser la complexité de l’estimateur pour répondre aux objectifs de la thèse, il serait préférable d’utiliser le modèle à l’ordre 1.


 FIGURE 2.37 – Bode du modèle linéaire de la boucle fermée avec les correcteurs PID d'origine

 FIGURE 2.38 – Réponse temporelle de la boucle fermée avec les correcteurs PID d'origine

Pour évaluer la perte réelle d'information induite par le choix du modèle $G_{v_y}^{r=1}(p)$ par rapport au modèle $G_{v_y}^{r=2}(p)$, on compare leur capacité à prédire le mouvement du drone à partir de données expérimentales. Pour cela, on utilise les expériences réalisées en début de thèse avec le système de capture de mouvement *Vicon*, où l'on a enregistré les consignes d'angles d'attitude fournies au drone ainsi que son mouvement réel. Afin de simuler *a posteriori* le vol du drone, on utilise ces signaux de consignes comme signaux d'entrée des modèles de la boucle fermée discutés précédemment, c'est-à-dire le modèle initial d'ordre $n = 8$ et les deux modèles à l'ordre réduit $r = 1$ et $r = 2$. On trace sur la figure 2.39 la mesure de référence de la vitesse du drone issue du système *Vicon*, ainsi que les signaux de vitesse prédits par les modèles pour un vol de drone sur une trajectoire de type aller-retour. On observe sur la partie supérieure de la figure 2.39 que le modèle d'ordre réduit $r = 2$ a un comportement plus proche de celui du modèle d'ordre complet $n = 8$ que le modèle d'ordre réduit $r = 1$. Cependant, l'objectif est de prédire correctement le mouvement du drone, et on peut voir sur la partie inférieure de la figure que le niveau d'erreur par rapport à la référence mesurée par le système *Vicon* est du même ordre de grandeur pour les deux modèles réduits. On répète cette démarche pour les données expérimentales issues de plusieurs vols de drone et

on observe à chaque fois que le modèle réduit à l'ordre $r = 1$ a une précision similaire à celle des modèles d'ordre $n = 8$ et $r = 2$. Par la suite, on choisit donc d'utiliser le modèle réduit à l'ordre 1 que l'on notera simplement $G_{v_y}(p)$, car il permet de prédire le mouvement du drone avec une précision acceptable par rapport au modèle initial, et avec une complexité moindre.

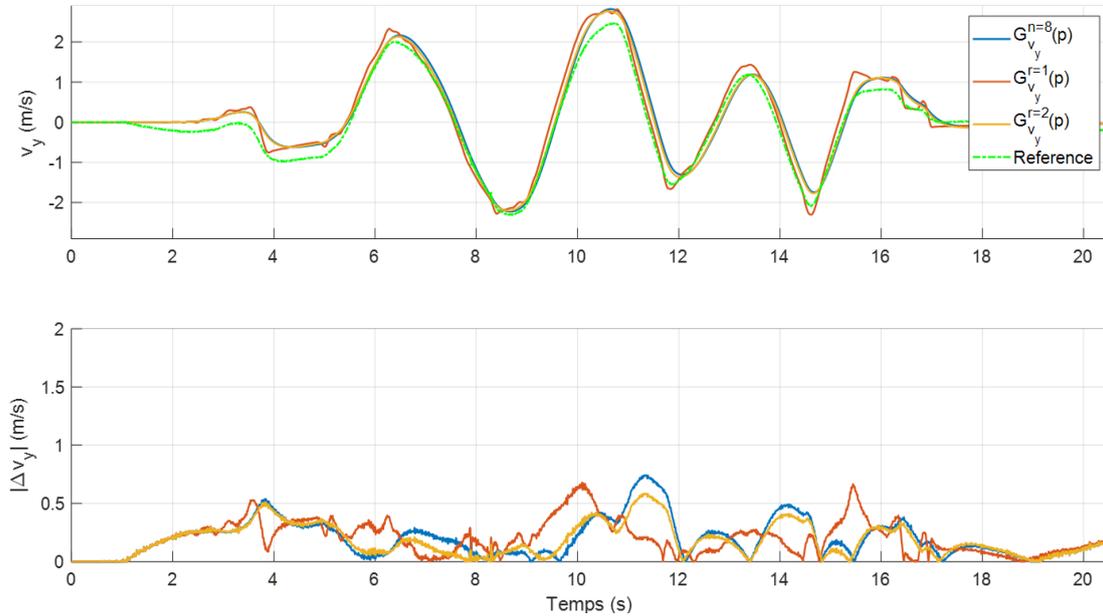


FIGURE 2.39 – Vitesse v_y prédite et erreur absolue par rapport à la référence

Modèle pour les 3 axes Finalement, on donne ci-dessous le modèle complet de la boucle fermée qui sera utilisé lors de la phase d'estimation. On note que la translation selon l'axe \vec{z}_b n'est pas asservie ici, et que son modèle est déjà d'ordre 1 donc il n'y a pas de réduction à faire. Enfin, le drone étant symétrique, le modèle de translation selon l'axe \vec{x}_b est le même que celui selon \vec{y}_b au signe près.

$$G_{v_x}(p) = \frac{2.2(p - 4.86)}{p + 0.49} \quad (2.94a)$$

$$G_{v_y}(p) = \frac{-2.2(p - 4.86)}{p + 0.49} \quad (2.94b)$$

$$G_{v_z}(p) = \frac{-34.5}{p + 2.9} \quad (2.94c)$$

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié la modélisation et l'asservissement du drone. On a commencé par établir dans la section 2.2 un modèle non-linéaire du drone, qui a été validé à partir de données expérimentales. On a ensuite linéarisé ce modèle au point d'équilibre correspondant au vol stationnaire. Cela nous a permis d'étudier les caractéristiques dynamiques du drone autour de son point de fonctionnement, notamment de voir l'influence de paramètres aérodynamiques sur sa stabilité.

Le drone étant instable par nature, il doit être asservi, au moins pour assurer sa stabilité. Les correcteurs d'origine du micro-drone *Crazyflie* de type *PID* avaient une robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le modèle du drone et des performances limitées. Dans la sous-section 2.3.2, on a alors proposé un nouveau réglage des correcteurs d'origine à partir de méthodes d'automatique fréquentielle classiques afin d'obtenir des correcteurs plus performants et robustes à des incertitudes sur le modèle et des perturbations extérieures. L'inconvénient de cette approche est qu'elle oblige à choisir *a priori* la structure du correcteur, ce qui rend la démarche de réglage non systématique, et qu'elle limite la possibilité de traiter des cas complexes. On a alors présenté dans la sous-section 2.3.3 la synthèse de correcteurs par la méthode H_∞ qui permet une approche plus systématique du problème de synthèse de correcteurs. Elle nous a permis d'obtenir des correcteurs aux performances similaires à ceux de la sous-section 2.3.2, sans en avoir fixé la structure *a priori*. Cette méthode de synthèse systématique nous permettra par la suite d'intégrer la problématique de synthèse d'estimateur à celle des correcteurs.

Enfin, les méthodes de synthèse de correcteurs précédemment citées reposent sur l'hypothèse que le comportement du drone peut être représenté par le modèle linéarisé autour du point de vol stationnaire, correspondant à des angles d'attitude nuls. Or, le cahier des charges de la thèse nécessite que le drone vole avec des angles d'attitude pouvant aller jusqu'à 30° . On a donc construit, dans la section 2.4, une méthode d'analyse qui permet d'estimer le domaine d'attraction des correcteurs linéaires de l'attitude du drone représenté par son modèle non-linéaire. Cette méthode d'analyse constitue une contribution vis-à-vis de l'état de l'art, et pourrait être étendue pour intégrer le modèle non-linéaire complet du drone comprenant ses dynamiques de translation, ou la synthèse de correcteurs pour une plage de fonctionnement donnée.

Les développements de ce premier chapitre constituent une base de travail pour la suite de la thèse. En effet, la modélisation du drone et la synthèse de correcteur seront de nouveau utilisées par la suite afin de construire un estimateur du mouvement du drone qui soit le plus performant possible tout en ayant un coût d'implémentation limité.

Chapitre 3

Mesures de capteurs embarqués

Comme dit précédemment, l'estimation du mouvement sans signaux d'infrastructure nécessite d'exploiter au mieux les informations disponibles localement au niveau du microcontrôleur. Dans le chapitre précédent, on a étudié la modélisation du mouvement du drone asservi, ce qui constitue une première source d'informations. Dans ce chapitre, on va s'intéresser à une deuxième source importante d'informations, qui correspond aux mesures du mouvement issues de capteurs.

Dans un contexte de navigation sans signaux d'infrastructure, les seules mesures disponibles proviennent de capteurs embarqués sur le drone. Malheureusement, il n'existe pas de capteur disponible dans le commerce et embarquable sur un micro-drone qui donne directement une mesure de la position ou de la vitesse du drone dans les 3 dimensions. De plus, la navigation autonome requiert d'intégrer des capteurs afin de détecter les obstacles, cette fonction n'étant pas forcément remplie par les mêmes capteurs que ceux utilisés pour mesurer le mouvement. La démarche adoptée habituellement est alors d'embarquer différents types de capteurs, qui mesurent une ou plusieurs composantes du mouvement et détectent la présence d'obstacles. Dans cette thèse, on se concentre sur l'estimation du mouvement et la détection d'obstacles n'est pas abordée. En effet, on considère en première approche qu'elle peut être réalisée par l'opérateur qui pilote le drone. Cependant, on gardera à l'esprit que le choix de capteurs à embarquer doit se faire en prenant en compte, si possible, cette fonctionnalité supplémentaire.

On peut embarquer sur le drone deux types de capteurs, des capteurs proprioceptifs et extéroceptifs. Les premiers mesurent des grandeurs internes du drone. Ce sont principalement des capteurs inertiels qui mesurent ses accélérations linéaires et ses vitesses angulaires. Les seconds fournissent des informations sur l'environnement extérieur du drone. Ce sont principalement des caméras, des sonars, des lidars ou des radars. Les capteurs inertiels constituent généralement la base d'un système de navigation que l'on appelle système de navigation inertiel [TW04]. Ils ont l'avantage de fournir des mesures qui sont disponibles à hautes fréquences (plusieurs centaines de Hertz) et ce, peu importe l'environnement du drone (p.ex. luminosité). Cependant, leurs mesures sont entachées d'erreurs, comme du bruit et des biais qui évoluent dans le temps. L'intégration numérique de ces mesures pour se ramener à la vitesse ou la position implique une dérive croissante de l'erreur associée à ces grandeurs au cours du temps. On peut alors coupler les mesures de capteurs inertiels avec des mesures de capteurs extéroceptifs pour recalibrer l'estimation du mouvement dans certaines directions, alignées avec le champ de vision de ces derniers. Cependant, les mesures de capteurs extéroceptifs sont souvent générées à plus basses fréquences que les mesures inertielles et dans

des conditions de fonctionnement bien précises (p.ex. luminosité, surface réfléchissante) qui ne sont pas toujours réunies tout au long de la mission. L'utilisation d'un ensemble varié de capteurs permet alors de pallier aux limites éventuelles de chacun, et d'assurer une certaine sûreté de fonctionnement en cas de mise en défaut d'un des capteurs.

On commencera dans ce chapitre par présenter les principes de la navigation inertielle, les capteurs sur lesquels elle repose ainsi que la caractérisation de leurs erreurs de mesure. Ensuite, on expliquera comment corriger les erreurs introduites par les mesures inertielles, notamment en les fusionnant avec des mesures provenant d'autres capteurs. Enfin, on présentera une contribution qui consiste en un algorithme de traitement de données de capteur radar FMCW (*Frequency Modulated Continuous Wave*), qui permet d'en faire un capteur de vitesse en 3 dimensions, en plus de sa fonction plus classique de détection d'obstacles.

3.1 Navigation inertielle

Un système de navigation désigne un ensemble constitué de capteurs et d'unités de calcul, destiné à être embarqué sur un agent mobile afin de déterminer son mouvement de translation et de rotation par rapport à un repère fixe. Ici, on se concentre sur les systèmes de navigation inertiels (*Inertial Navigation Systems*, **INS**), qui exploitent des mesures issues de gyroscopes et d'accéléromètres.

3.1.1 Principes de la navigation inertielle

3.1.1.1 Mesures

Les deux capteurs qui constituent la base de la navigation inertielle, le gyroscope et l'accéléromètre, sont généralement regroupés dans une unité qu'on appelle centrale inertielle (*Inertial Measurement Unit*, **IMU**). Ici, les capteurs sont tri-axes et effectuent leurs mesures dans le repère de l'IMU qui correspond au repère lié aux axes du drone, précédemment noté \mathcal{R}_b . Le gyroscope sert à mesurer la vitesse angulaire du drone, c'est-à-dire sa vitesse de rotation autour des axes du repère \mathcal{R}_b , notée ω . La mesure de l'accéléromètre nécessite une explication plus poussée qui est donnée ci-dessous.

Accéléromètre Ce type de capteur fonctionne comme un système masse-ressort [LMBM14]. Pour expliquer son principe, on considère seulement l'axe de mesure \vec{z}_b d'un accéléromètre représenté schématiquement sur la figure 3.1. La grandeur mesurée par l'accéléromètre est appelée force spécifique, c'est la force exercée par le ressort sur la masse. En pratique, le signal mesuré par l'accéléromètre est converti en $m.s^{-2}$ ce qui correspond à l'accélération spécifique \tilde{a}_{acc} que subit la masse m . En négligeant la force de Coriolis qui est faible par rapport aux autres efforts en jeu, la mesure \tilde{a}_{acc} de l'accéléromètre vaut :

$$\tilde{a}_{acc} = \frac{1}{m}(T - P) \quad (3.1)$$

où $P = mg$ est le poids et $T = ma$ est la force exercée sur le corps de l'accéléromètre par une accélération linéaire a , indépendante de g .

L'accéléromètre de la figure 3.1 est représenté dans deux situations différentes. On peut en déduire de l'équation (3.1) la mesure \tilde{a}_{acc} renvoyée par l'accéléromètre en fonction de la situation :

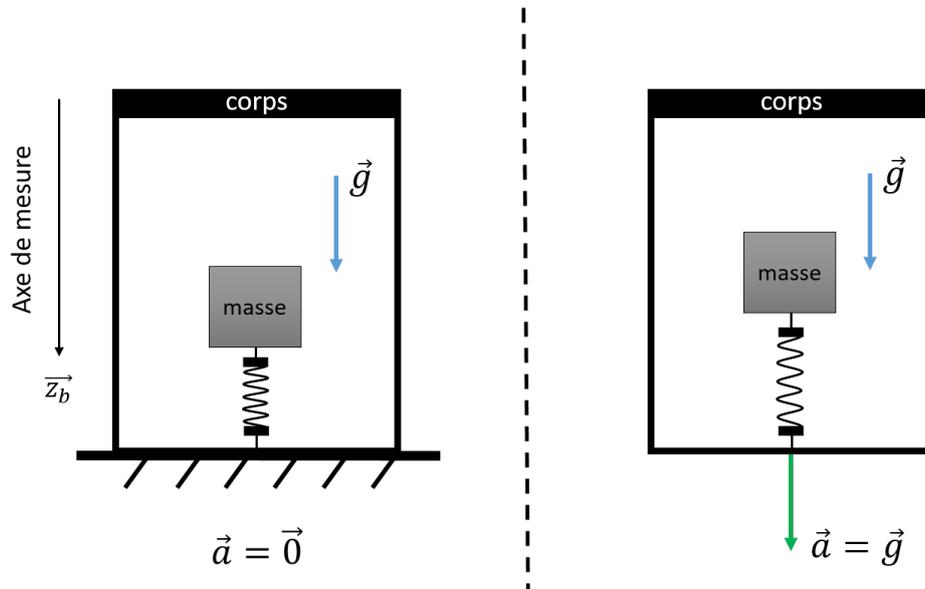


FIGURE 3.1 – Schéma d'un accéléromètre : statique à gauche, en chute libre à droite

- Lorsque l'accéléromètre et donc le drone sont au repos¹ (p.ex. drone en vol stationnaire), on a $a = 0$ et l'accéléromètre mesure seulement le poids. Sur la figure 3.1 à gauche, l'accéléromètre renvoie donc $\tilde{a}_{acc} = -9.81 m.s^{-2}$.
- Lorsque l'accéléromètre est en chute libre comme à droite sur la figure 3.1, il donne $\tilde{a}_{acc} = 0 m.s^{-2}$. En effet, dans ce cas, l'accélération du corps de l'accéléromètre est la même que celle de la masse et vaut g .

L'accélération qui nous intéresse dans le cas de l'INS, est l'accélération linéaire du drone, notée \dot{v} . Pour la connaître, il faudra compenser la force due à la gravité dans le signal fourni par l'accéléromètre. La relation qui lie l'accélération linéaire du drone \dot{v} et l'accélération spécifique \tilde{a}_{acc} en trois dimensions dans le repère \mathcal{R}_b est :

$$\dot{v} = \tilde{a}_{acc} + R_{ib}(\eta)g_z \quad (3.2)$$

où η est l'attitude du drone, $R_{ib}(\eta)$ la matrice de rotation du repère inertiel \mathcal{R}_i vers le repère de l'IMU \mathcal{R}_b donnée en (2.1) et $g_z = [0, 0, g]^T$.

3.1.1.2 Navigation

Un système de navigation inertiel (INS) basique est représenté sur la figure 3.2. La navigation inertielle applique le principe de navigation à l'estime, appelé *dead-reckoning* en anglais. Un microcontrôleur (μC) calcule la position, la vitesse et l'attitude de l'agent mobile à partir de conditions initiales données et de l'accumulation des mesures inertielles entre l'instant initial et l'instant actuel.

Pour un INS basique, la procédure embarquée dans le microcontrôleur, représentée sur la figure 3.3, est donnée ci-dessous :

1. Intégrer la mesure de vitesse angulaire du gyroscope $\omega \rightarrow$ attitude η ;
2. Compenser l'effet de la gravité dans la mesure de l'accéléromètre \tilde{a}_{acc} en éliminant les composantes du vecteur gravité selon les axes de \mathcal{R}_b grâce à l'attitude η , voir équation (3.2) \rightarrow accélération linéaire \dot{v} ;

1. Autrement dit, à l'équilibre des forces.

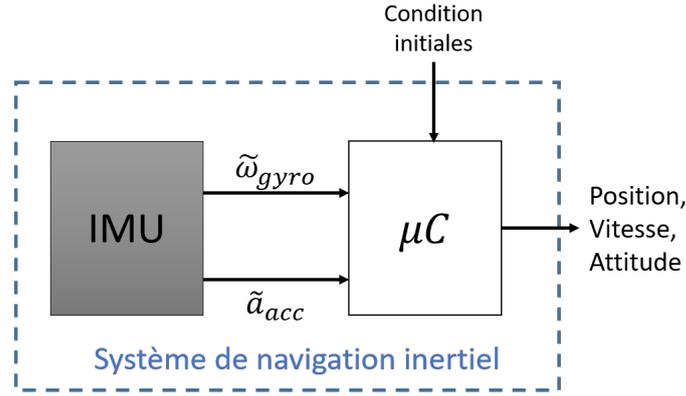


FIGURE 3.2 – Schéma d'un INS, d'après [Gro13]

3. Intégrer l'accélération linéaire $\dot{v} \rightarrow$ vitesse v ;
4. Intégrer la vitesse $v \rightarrow$ position p .

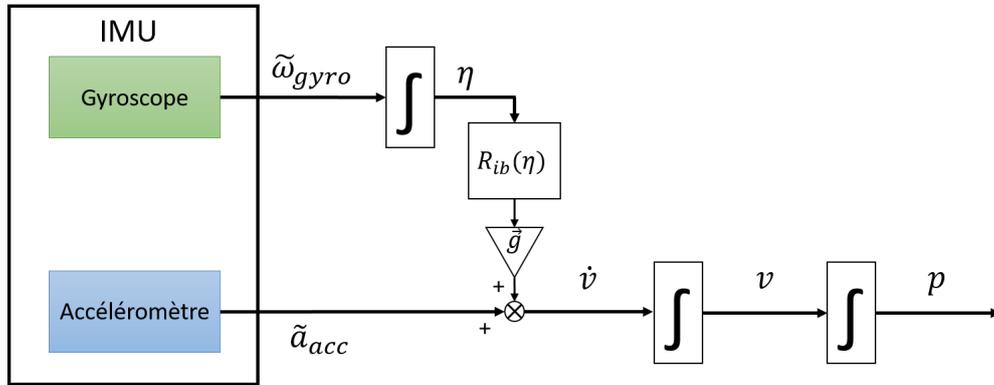


FIGURE 3.3 – Procédure de base d'un INS

On peut en déduire deux idées principales :

- Les angles d'attitude jouent un rôle majeur dans la précision de l'INS car ils sont utilisés pour compenser l'effet de la gravité dans les mesures de l'accéléromètre. Par exemple, une erreur sur l'angle de roulis ϕ ou d'inclinaison θ de 5.9° induira une erreur sur l'estimation de l'accélération linéaire de $1m.s^{-2}$ horizontalement et $0.05m.s^{-2}$ verticalement [Mar16]. En pratique, un observateur est généralement utilisé pour estimer l'attitude de manière plus précise que par simple intégration numérique des mesures. C'est le cas pour le drone *Crazyflie*, qui embarque un filtre complémentaire, initialement proposé par Madgwick [MHV11, Mad10]. Dans la phase de prédiction du filtre, les mesures du gyroscope sont intégrées pour obtenir l'attitude. Ensuite, on utilise les mesures de l'accéléromètre pour corriger cette prédiction, lorsque celui-ci n'est soumis à aucune autre accélération que celle de la gravité (c'est le cas lorsque le drone est en vol stationnaire, voir figure 3.1 à gauche). En effet, dans ce cas, l'accéléromètre permet d'estimer l'attitude en déterminant l'orientation de \mathcal{R}_b par rapport au vecteur gravité dont les composantes se répartissent sur ses axes de mesure. L'algorithme implémenté dans le *Crazyflie* fournit une estimation de l'attitude améliorée par rapport à la procédure basique et comme expliqué en introduction on n'abordera pas ce problème dans nos travaux.

- La mesure des gyroscopes est intégrée 3 fois et celle de l'accéléromètre 2 fois. Un biais constant dans les mesures du gyroscope (resp. de l'accéléromètre) induira donc une dérive de l'erreur de position proportionnelle à t^3 (resp. t^2) où t est le temps en secondes [TW04]. Il est donc nécessaire de limiter au maximum les erreurs de mesure des capteurs avant l'intégration numérique (calibration, filtrage).

3.1.2 Erreurs de mesure

Les mesures issues des capteurs inertiels sont entachées d'erreurs dont les sources peuvent être nombreuses [Gro13]. Les IMU sont généralement classés en *grade*, en fonction du niveau de ces erreurs. Le grade de performance le plus élevé est le "*marine grade*". Les IMU *marine grade* sont typiquement embarqués dans des sous-marins ou des navires militaires et leur permettent de naviguer pendant plusieurs heures sans signaux provenant de l'extérieur, avec une dérive de l'ordre du *km/jour* d'après [Gro13]. Ce niveau de précision est obtenu en calibrant individuellement chaque IMU, et en intégrant dans l'algorithme d'estimation de position un modèle de mesure précis. À l'opposé, la catégorie correspondant aux IMU les moins performants se nomme "*consumer/automotive grade*". Ces IMU sont destinés au marchés de masse de type smartphones, automobile (airbags) et sont vendus sans calibration individuelle. La navigation avec ce type d'IMU est difficile sans ajout d'informations provenant d'autres capteurs, à cause d'une dérive rapide (de l'ordre du *km/min* au repos [Mar16]). Pour les IMU de type *consumer grade*, le modèle de mesure ne retient que les erreurs principales.

L'IMU embarqué sur le *Crazyflie* est un MPU-6500 de la marque *Invensense* [Inv20] et est de type *consumer grade*. Pour ce grade d'IMU, on peut utiliser le modèle de mesure suivant [Gro13, TW04, Mar16] :

$$\tilde{m}(t) = A_m(t)m(t) + e(t) + b(T) + N(\tilde{a}_{acc}, \tilde{\omega}, T, t) \quad (3.3)$$

où :

- $\tilde{m}(t)$ est la mesure de la grandeur donnée par le capteur ;
- $m(t)$ est la valeur exacte de la grandeur à mesurer (ω pour le gyroscope, a_{acc} pour l'accéléromètre) ;
- T est la température, $A_m(t)$, $b(T)$ et $N(\tilde{a}_{acc}, \tilde{\omega}, T, t)$ sont ce qu'on appelle des termes d'erreurs déterministes, voir le paragraphe 3.1.2.1 ;
- $e(t)$ est un terme d'erreur stochastique, voir le paragraphe 3.1.2.2.

On présente maintenant les deux catégories d'erreurs, à savoir, les erreurs déterministes et les erreurs stochastiques.

3.1.2.1 Erreurs déterministes

Les erreurs déterministes sont des erreurs présentes dans les mesures de l'IMU dont le comportement peut être prédit, notamment à partir des mesures précédentes. Elles sont fixes ou varient lentement au cours du temps. Elles peuvent provenir, par exemple, des changements de température de fonctionnement au sein de l'IMU. On les classe en fonction de leur relation à la valeur de sortie de l'IMU en termes d'ordre :

- Une erreur d'**ordre 0** ne dépend pas de la valeur de la grandeur à mesurer. Elle est notée $b(T)$ et varie lentement en fonction de la température T . Sa valeur est donnée dans la documentation du MPU-6500 [Inv20] sous les termes "*ZRO*" pour le gyroscope

et "Zero-G" pour l'accéléromètre. Par exemple, pour l'axe z de l'accéléromètre, on a $b = \pm 0.6 m.s^{-2}$ et il varie de $\pm 0.01 m.s^{-2}/^{\circ}C$.

- L'erreur d'**ordre 1** est modélisée par le terme A_m dans (3.3). En théorie, on devrait avoir $A_m = I_3$. Mais en pratique, on a des couplages et des sensibilités différentes sur les axes de mesure. Lorsque l'IMU n'est pas calibré, ils causent une erreur proportionnelle à la valeur de la grandeur à mesurer. Ils sont donnés dans la documentation du MPU-6500 sous la forme d'une erreur sur le facteur de conversion de la sortie (*sensitivity scale factor*, $\pm 3\%$ pour l'accéléromètre) et un terme de couplage entre les axes des capteurs (*cross-axis sensitivity*, $\pm 2\%$ pour l'accéléromètre).
- Même si la mesure est proche d'une forme affine en fonction de la grandeur m à mesurer, il reste des termes d'ordres supérieurs non modélisés, par exemple à cause de vibrations des capteurs lorsqu'ils sont soumis à des accélérations ou des vitesses angulaires. Les termes d'**ordre supérieur à 1** sont encapsulés dans un seul et même terme, appelé non-linéarité dans la documentation, et noté N dans le modèle (3.3). Par exemple pour l'accéléromètre du MPU-6500, la sortie est linéaire à $\pm 0.5\%$.

Les termes d'erreurs déterministes présentés ci-dessus correspondent à ceux que l'on peut trouver dans la documentation du MPU-6500 [Inv20]. À cela s'ajoutent d'autres erreurs non-spécifiées dans la documentation mais qui ont une influence non-négligeable, comme par exemple le biais à l'allumage qui apparait en fonction des conditions thermiques, physiques, mécaniques, et électriques de l'IMU [TW04]. Ces erreurs déterministes peuvent être en partie compensées à l'aide d'une procédure de calibration. En pratique sur le *Crazyflie*, il y a une phase de calibration des 3 axes du gyroscope avant le décollage : la moyenne des mesures est calculée sur 512 échantillons, ce qui donne les biais à l'allumage du gyroscope et permet ensuite de les compenser dans les mesures. Cependant, une calibration plus poussée, notamment pour calibrer les 3 axes de l'accéléromètre, nécessite d'appliquer une procédure plus complexe [EDP08, TW04, BBG⁺09] et n'est valable que dans les conditions (p.ex. de température) dans lesquelles elle a été réalisée. Notons cependant que lorsque l'IMU est combiné avec d'autres capteurs dans un système de navigation, ces biais peuvent être modélisés et estimés au cours du temps, ce qui permet de compenser leur dérive [NNE07].

Dans le cas présent, on fait l'hypothèse que le biais $b(T)$ est constant car la température varie peu sur la durée d'un vol de drone de moins de $10min$ dans un environnement clos. De plus, suppose que $A_m = I_3$ et $N = 0$, ce qui constitue une hypothèse courante de la littérature dans le cas d'IMU de type *consumer grade* [Mar16].

3.1.2.2 Erreurs stochastiques

Les erreurs stochastiques sont regroupées dans le terme $e(t)$ du modèle (3.3). Contrairement aux erreurs déterministes, elles ne peuvent pas être prédites et il faudra mettre en place un mécanisme de filtrage pour minimiser leur influence. Ces erreurs sont une combinaison de multiples phénomènes [TW04] comme le bruit électronique, le bruit de quantification ou des phénomènes physiques aléatoires (p.ex. impact des molécules de gaz sur la masse de l'accéléromètre [Kem11]). Dans les documentations d'IMU, ces erreurs aléatoires sont généralement regroupées en un seul terme : la densité spectrale d'amplitude du bruit, qui est la racine carrée de la densité spectrale de puissance. Par exemple, la documentation de l'accéléromètre de l'IMU MPU-6500 donne une valeur de $3 \times 10^{-3} m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$ pour chaque axe.

Il est nécessaire de connaître de manière précise le niveau de bruit et les différents effets stochastiques qui interviennent dans la mesure afin de les filtrer correctement. Néanmoins, on peut douter de la validité d'un seul coefficient caractérisant un bruit blanc pour décrire

l'ensemble des erreurs stochastiques générées par différents phénomènes physiques et électroniques. De plus, la documentation stipule que le constructeur vérifie que l'IMU en sortie d'usine ne dépasse pas le seuil donné dans la documentation. Cependant, les conditions de ce test sont certainement différentes de celles dans lesquelles va évoluer l'IMU que l'on utilise, à savoir soumis aux vibrations d'un drone en vol.

On peut cependant obtenir une modélisation plus fine de ces erreurs stochastiques en utilisant des méthodes d'identification de modèles linéaires [NSEN04, NKEES09, QFF⁺12]. Celles-ci reposent sur la notion de filtre générateur. Pour un bruit blanc en entrée, on recherche les coefficients du filtre tels que sa sortie ait la même densité spectrale de puissance que celle du signal stochastique à modéliser. L'avantage de cette approche est qu'elle permet d'obtenir un modèle correct rapidement, l'inconvénient, est que le modèle obtenu est de type "boîte noire" et on ne sait pas à quoi correspondent ses coefficients. Une autre approche consiste à étudier la variance d'Allan du signal stochastique [ESHN08, Col15, QFF⁺12]. Dans ce cas, il est possible de discriminer chaque processus stochastique afin de le modéliser, au prix d'un effort analytique plus important.

3.1.3 Modèle de l'IMU MPU-6500

Comme on vient de le voir, il existe différentes sources d'erreurs pouvant influencer la mesure des capteurs inertiels. La documentation technique d'un IMU *consumer grade* donne une caractérisation simplifiée des capteurs, obtenue dans un environnement contrôlé. Cependant, les conditions expérimentales particulières dans lesquelles va évoluer l'IMU embarqué sur le drone sont bien différentes de son environnement de test initial. Il est donc nécessaire de vérifier ces spécifications et de les adapter pour qu'elles soient représentatives des conditions d'utilisation de l'IMU sur le *Crazyflie*.

On va identifier un modèle de mesure pour l'accéléromètre uniquement. Ce choix est justifié par le fait que c'est le seul capteur de l'IMU que l'on utilise lors de l'estimation du mouvement du drone. En effet, le gyroscope est seulement utilisé pour estimer les angles d'attitude du *Crazyflie* via une fonction d'estimation qui embarque déjà un modèle du capteur, et l'on considère ici que sa modification ne fait pas partie des objectifs de thèse. Le modèle de mesure considéré est :

$$\tilde{m}(t) = m(t) + e(t) \tag{3.4}$$

où $e(t)$ représente les erreurs stochastiques. Comme on n'a pas, *a priori*, de connaissance sur le modèle stochastique à adopter (ordre, coefficients), on choisit d'analyser le comportement de l'accéléromètre avec la méthode de la variance d'Allan. On présente le principe de la méthode ci-dessous.

3.1.3.1 Variance d'Allan

La méthode de la variance d'Allan est une méthode graphique d'analyse du comportement stochastique d'un signal. Initialement introduite afin d'étudier la stabilité des signaux d'horloges atomiques [All87]. Cette méthode permet d'étudier tout type de signaux à une dimension. La variance d'Allan est notée $\sigma^2(\tau)$, et elle revient à étudier la variance d'un signal en fonction d'une fenêtre de temps d'une durée τ .

Définition de la variance d’Allan [All87, ESHN08] Soit un signal continu $y(t)$ stationnaire et ergodique. La moyenne $\bar{y}_\tau(t)$ à l’instant t du signal $y(t)$ sur une période τ vaut :

$$\bar{y}_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} y(t') dt' \quad (3.5)$$

La variance d’Allan $\sigma^2(\tau)$ correspond à l’espérance mathématique des écarts entre les moyennes du signal sur des intervalles d’observation consécutifs de durée τ :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_\tau(t + \tau) - \bar{y}_\tau(t))^2 \rangle \quad (3.6)$$

où $\langle . \rangle$ est tel que :

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt \quad (3.7)$$

Méthode de la variance d’Allan Cette méthode permet d’isoler et de caractériser les bruits qui impactent le signal dans différentes gammes de fréquences. Pour ce faire, on enregistre un jeu de données issues du capteur en prenant soin de maintenir des conditions expérimentales identiques (p.ex. température, vibrations) tout au long de l’expérience. La durée d’enregistrement doit être assez longue (plusieurs minutes/heures/jours) en fonction du capteur à caractériser. Ici, la durée d’une mission avec le drone telle que définie par le cadre de la thèse est relativement courte (de l’ordre de $10min$). Il n’est donc pas nécessaire de caractériser les erreurs stochastiques pouvant intervenir sur le long terme (plusieurs heures). On caractérise l’IMU MPU-6500 en faisant des enregistrements de l’ordre de 30 minutes. Ceux-ci sont réalisés dans une pièce régulée en température et les composants électroniques situés sur le drone autour de l’IMU ne dégagent pas significativement de chaleur. On considère donc la température interne des composants constante tout au long de l’expérience.

À partir des données enregistrées, on estime tout d’abord le biais d’allumage (et le biais dû à la gravité pour l’axe z de l’accéléromètre) que l’on soustrait des mesures afin d’obtenir un signal centré sur 0. Ensuite, on calcule la variance d’Allan du signal avec la formule (3.6) et ce, pour plusieurs durées d’observation τ . Habituellement, on représente graphiquement en coordonnées log-log l’écart-type d’Allan $\sigma(\tau)$ en fonction de τ [All87]. De ce tracé, on déduit chaque type de bruit et on identifie ses caractéristiques. En effet, $\sigma(\tau)$ fait apparaître plusieurs segments de pente différente en fonction de τ , qui correspondent aux différents types de bruits qui impactent le signal, voir la figure 3.4.

Modèle stochastique d’un IMU *consumer-grade* Pour un IMU *consumer-grade* et à court-terme (moins de $10min$), les principaux types de bruits qui impactent la mesure sont un bruit blanc gaussien, qui induit une marche aléatoire sur la vitesse (*velocity random walk*, que l’on note RW), et un terme d’instabilité de biais (*bias instability*, noté BI) [ESHN08]. Ceux-ci apparaissent sur le tracé de l’écart-type d’Allan $\sigma(\tau)$ sous la forme de segments de pentes $-\frac{1}{2}$ et 0 respectivement, voir figure 3.4.

Le terme de marche aléatoire sur la vitesse est associé à l’intégration d’un bruit blanc gaussien n_{RW} qui se trouve sur la mesure de l’accéléromètre. Sa densité spectrale d’amplitude RW se mesure en $m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$ sur le tracé de l’écart-type d’Allan lorsque $\tau = 1s$, et elle se compare à la densité spectrale d’amplitude du bruit donnée par la documentation du capteur, voir le paragraphe sur les erreurs stochastiques. Ce terme se nomme *velocity*

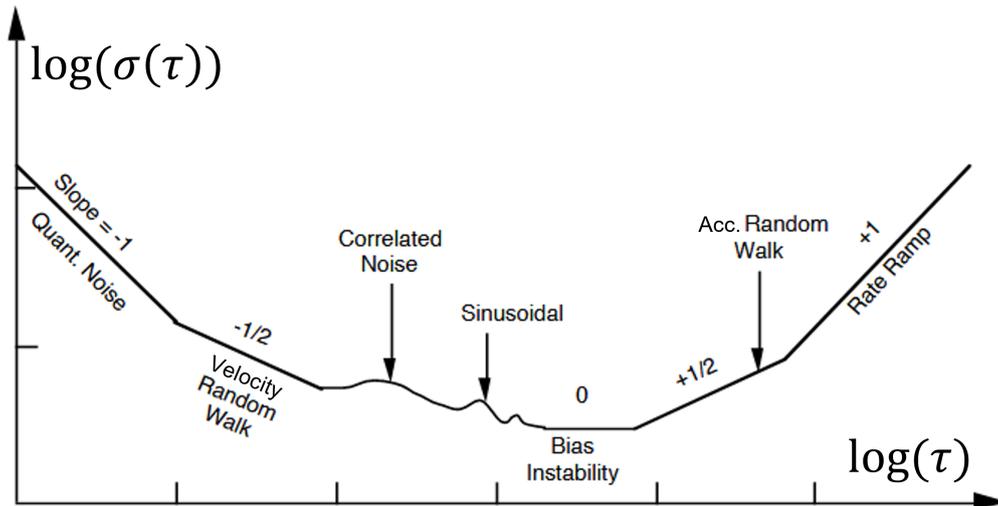


FIGURE 3.4 – Segments de pentes caractéristiques dans le tracé de l'écart-type d'Allan, d'après [IEE98]

random walk car on a l'équivalence entre l'unité $m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$ et $m.s^{-1}/\sqrt{s}$. Il permet donc lorsqu'on lit les spécifications de l'accéléromètre, de directement de quantifier la dérive sur la vitesse que l'on obtiendra si on intègre numériquement ses mesures bruitées. Par exemple, si on a un accéléromètre pour lequel $RW = 0.003m.s^{-2}/\sqrt{Hz} = 0.003m.s^{-1}/\sqrt{s}$ et qu'on intègre sa mesure bruitée d'accélération pendant $T = 100s$, le terme de *velocity random walk* implique que la vitesse obtenue aura une dérive par rapport à sa vraie valeur de l'ordre de $0.003 \times \sqrt{100} = 0.03m.s^{-1}$. De manière alternative, on peut aussi comparer la puissance σ_{RW}^2 du bruit en ramenant la valeur précédente à la bande passante du capteur notée BW , soit $\sigma_{RW}^2 = (RW\sqrt{BW})^2$.

Le terme d'instabilité de biais est noté BI et correspond à la variation du biais du capteur de manière stochastique. On peut représenter ce phénomène par un procédé de Gauss-Markov du 1er ordre [NSEN04, ESHN08], avec l'équation suivante :

$$\dot{b}_{BI}(t) = -\frac{1}{\tau_{BI}}b_{BI}(t) + n_{BI}(t) \quad (3.8)$$

où :

- τ_{BI} est le temps d'observation auquel le tracé de l'écart-type d'Allan coïncide avec un segment horizontal ;
- n_{BI} est un bruit blanc gaussien de puissance $\sigma_{BI}^2 = \frac{2BI^2}{\tau_{BI}BW}$, où BI est la valeur mesurée sur le tracé de l'écart-type d'Allan en τ_{BI} telle que $BI = \frac{\sigma(\tau_{BI})}{0.664}$ et BW est la bande passante du capteur.

Malheureusement, cette métrique d'instabilité de biais n'est pas toujours donnée dans les documentations d'IMU et la documentation technique de l'IMU MPU-6500 ne donne pas cette valeur de référence.

3.1.3.2 Modèle des erreurs stochastiques de l'IMU MPU-6500 sur le drone

On applique désormais la méthode de la variance d'Allan afin d'identifier le terme $e(t)$ correspondant aux erreurs de mesure stochastiques dans le modèle simplifié (3.4) de l'IMU. Comme on est dans des conditions expérimentales statiques et que le biais initial b a été



FIGURE 3.5 – Enregistrement des mesures IMU lorsque le drone est en vol stationnaire

corrigé, on considère que l'on n'observe que les erreurs stochastiques $e(t)$ dans les mesures. On présente maintenant les résultats de deux expériences correspondant à des enregistrements de plusieurs minutes échantillonnés à $t_0 = 0.01s$. La première expérience est certainement similaire aux conditions de caractérisation de l'IMU en sortie d'usine : le drone et donc son IMU embarqué sont immobiles. Pour la seconde expérience, on veut recréer les conditions réelles de fonctionnement de l'IMU embarqué sur le drone en matière de vibrations lorsque les hélices sont en rotation. Étant donné que le drone n'est asservi qu'en attitude mais pas en translation, on le suspend à l'aide de cordelettes pour s'assurer qu'il ne translate pas, puis on actionne ses moteurs afin de créer une poussée qui contre le poids du drone pour le maintenir en vol stationnaire, voir figure 3.5. L'hypothèse de conditions expérimentales statiques est moins valide dans ce cas, à cause des faibles mouvements du drone. Néanmoins, d'autres expériences avec les hélices en rotation mais où le drone est posé au sol ont été réalisées, et elles mènent aux mêmes conclusions qu'avec le drone suspendu.

Expérience A : IMU immobile On trace sur la figure 3.6 l'écart-type d'Allan pour les signaux des 3 axes de mesure de l'accéléromètre lors d'un enregistrement où il est maintenu immobile.

Conformément à la théorie, on observe un segment de pente $-\frac{1}{2}$ pour $\tau < 5s$ correspondant au terme de marche aléatoire et un segment horizontal pour $\tau > 5s$ associé au terme d'instabilité de biais. On trace en pointillés sur la figure 3.7 des droites correspondant aux termes de marche aléatoire (pente de $-\frac{1}{2}$) et d'instabilité de biais (droite horizontale) pour l'axe z de l'accéléromètre.

En $\tau = 1s$, on lit la valeur du terme de marche aléatoire pour cet axe : $RW = 2 \times 10^{-3} m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$. La documentation donnait une densité spectrale de bruit de $3 \times 10^{-3} m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$. On en conclut que dans ces conditions expérimentales (IMU immobile), la documentation correspond bien aux propriétés de l'IMU, voire qu'elle est un peu pessimiste. On modélise le terme RW comme un bruit blanc de puissance $\sigma_{RW}^2 = (RW\sqrt{BW})^2$. Comme les mesures de l'accéléromètre sont échantillonnées à $100Hz$ ici, on considère que la bande passante vaut la fréquence d'échantillonnage, soit $BW = 100Hz$, et donc $\sigma_{RW}^2 =$

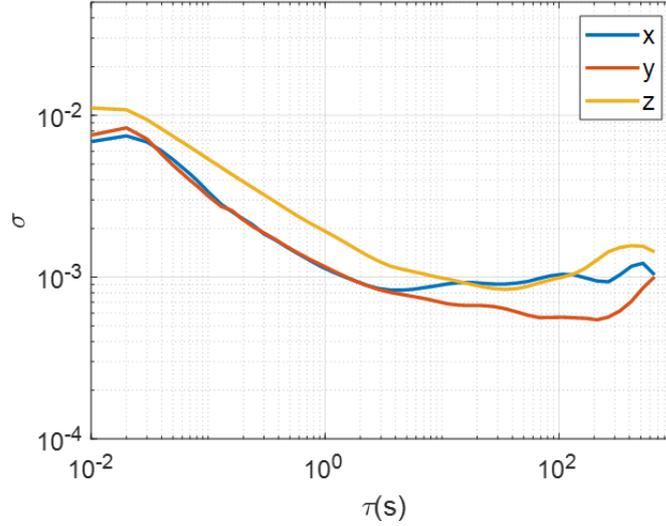


FIGURE 3.6 – Écart-type d’Allan des signaux des 3 axes de l’accéléromètre lors de l’expérience A

$4 \times 10^{-4}(m.s^{-2})^2$. On montre sur la figure 3.8 à gauche l’écart-type d’Allan du modèle de bruit blanc superposé aux données expérimentales de l’accéléromètre. On constate que la première partie de la courbe, de pente $-\frac{1}{2}$, est bien modélisée. En effet, la pente du modèle et sa valeur à $\tau = 1s$ coïncident bien avec les données expérimentales.

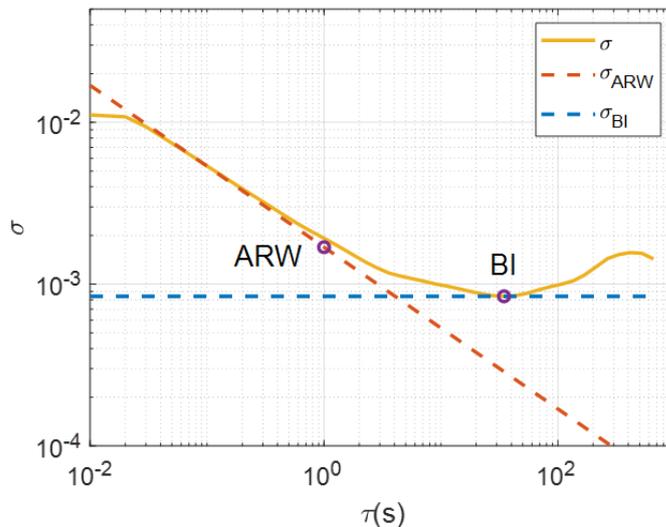
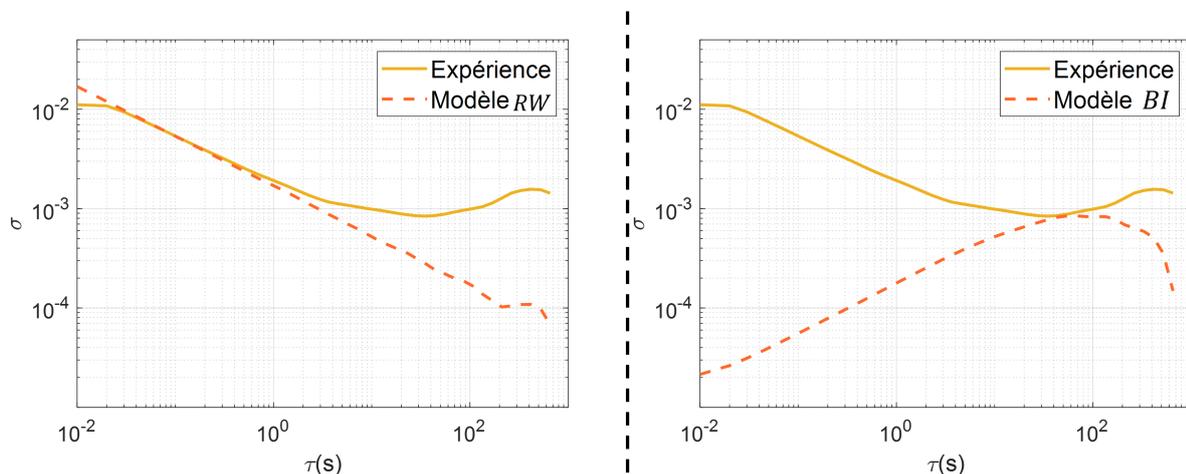
Pour modéliser l’instabilité de biais (BI), on mesure sur la figure 3.7 $\tau_{BI} = 36s$ et $BI = 1.3 \times 10^{-3}m.s^{-2}$. On modélise ce terme d’erreur avec un procédé de Gauss-Markov du premier ordre dont l’équation est donnée en (3.8). On obtient :

$$\dot{b}_{BI}(t) = -0.03b_{BI}(t) + n_{BI}(t) \tag{3.9}$$

où n_{BI} est un bruit blanc de puissance $\sigma_{BI}^2 = 9 \times 10^{-6}(m.s^{-2})^2$.

On représente sur la figure 3.8 à droite, le modèle du terme d’instabilité de biais superposé aux données expérimentales issues de l’axe z du capteur. On constate que pour $\tau < 10s$, le modèle diffère des données expérimentales. En effet, il faut ensuite ajouter au biais $b_{BI}(t)$ le bruit blanc $n_{RW}(t)$ présenté précédemment pour obtenir le modèle complet. On obtient de cette manière un modèle de l’erreur stochastique tel que $e(t) = b_{BI}(t) + n_{RW}(t)$ où b_{BI} est issu de l’équation (3.9) et n_{RW} est un bruit blanc de puissance $\sigma_{RW}^2 = 4 \times 10^{-4}(m.s^{-2})^2$. Le modèle total obtenu est présenté sur la figure 3.9. On observe qu’il coïncide bien avec les données expérimentales sur la quasi-totalité de la période d’observation, permettant ainsi d’obtenir un modèle de mesure représentatif sur l’intervalle de fréquences $[10^{-2}Hz, 100Hz]$, ce qui correspond bien aux fréquences d’intérêt pour notre application.

Expérience B : IMU soumis aux vibrations du drone en vol On réitère la même démarche de modélisation que précédemment, mais cette fois, le drone est en vol stationnaire comme sur la figure 3.5. Le tracé de l’écart-type d’Allan est présenté sur la figure 3.10. On observe que les courbes ont été décalées vers le haut par rapport à la figure 3.6, ce qui correspond à un niveau de bruit plus important. Pour les axes x et y , on a $RW = 1 \times 10^{-2}m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$, et pour l’axe z on a $RW = 5 \times 10^{-3}m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$. Ces valeurs sont respectivement environ 3 et 2 fois plus grandes que la valeur de spécification de bruit de la documentation constructeur ($3 \times 10^{-3}m.s^{-2}/\sqrt{Hz}$ pour les 3 axes).


 FIGURE 3.7 – Axe z de l'accéléromètre seul lors de l'expérience A

 FIGURE 3.8 – Modélisation du terme RW (à gauche) et BI (à droite) pour l'expérience A pour l'axe z

Il semble donc judicieux de modéliser l'IMU pour ce cas de figure, qui est plus proche de la réalité, plutôt que lorsqu'il est immobile. On applique la même démarche de modélisation que précédemment et on obtient un modèle des erreurs stochastiques de mesure des trois axes de l'accéléromètre sous la forme $e_i(t) = b_{BI,i}(t) + n_{RW,i}(t)$, $i = x, y, z$ où $n_{RW,i}$ sont des bruits blancs de puissance :

$$\sigma_{RW,x}^2 = \sigma_{RW,y}^2 = 1 \times 10^{-2} (m \cdot s^{-2})^2, \quad \sigma_{RW,z}^2 = 3 \times 10^{-3} (m \cdot s^{-2})^2 \quad (3.10)$$

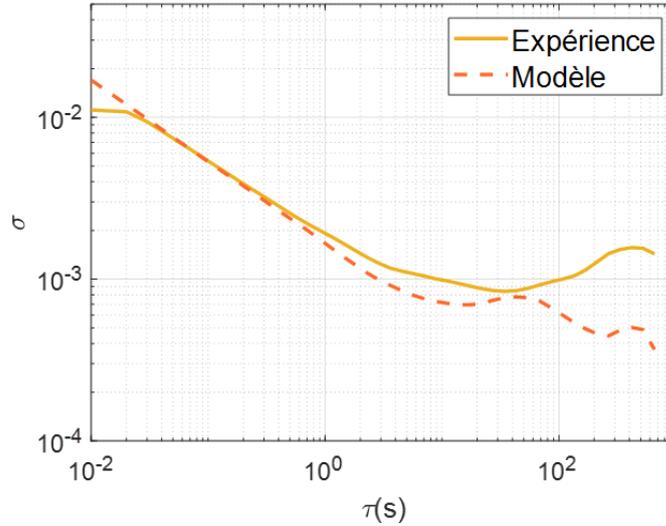
et la dynamique du biais est donnée par :

$$\dot{b}_{BI,x}(t) = -0.003b_{BI,x}(t) + n_{BI,x}(t) \quad (3.11a)$$

$$\dot{b}_{BI,y}(t) = -0.003b_{BI,y}(t) + n_{BI,y}(t) \quad (3.11b)$$

$$\dot{b}_{BI,z}(t) = -0.01b_{BI,z}(t) + n_{BI,z}(t) \quad (3.11c)$$

où $n_{BI,i}$, $i = x, y, z$ sont des bruits blancs de puissance $\sigma_{BI,x}^2 = \sigma_{BI,y}^2 = 4 \times 10^{-6} (m \cdot s^{-2})^2$ et


 FIGURE 3.9 – Modèle total de l’axe z de l’IMU pour l’expérience A

$$\sigma_{BI,z}^2 = 9 \times 10^{-6} (m.s^{-2})^2.$$

Finalement, le modèle de mesure de l’accéléromètre pour la suite du mémoire sera :

$$\tilde{a}_{acc,i}(t) = a_{acc,i}(t) + b_{BI,i}(t) + n_{RW,i}(t), \quad i = x, y, z \quad (3.12)$$

où $a_{acc,i}$ est l’accélération subie par l’IMU, $b_{BI,i}$ est la dynamique des biais donnée par l’équation (3.11) et $n_{RW,i}$ sont des bruits blancs dont la puissance est donnée en (3.10).

3.2 Autres sources d’informations

On a présenté dans la section précédente les principes de la navigation inertielle. Lorsque seuls les capteurs inertiels sont utilisés, l’erreur d’estimation de la vitesse augmente rapidement, car elle découle de l’intégration de signaux bruités et biaisés d’accélération. Pour contrer cette dérive, on peut coupler cette solution basique avec d’autres sources d’informations que l’on présente ci-dessous.

3.2.1 Dans la littérature

On peut classer les techniques qui permettent d’améliorer l’estimation du mouvement en trois catégories. La première repose sur l’utilisation d’un modèle du mouvement spécifique à l’agent qui embarque la centrale inertielle, la seconde, sur la fusion des données de la centrale inertielle avec celles provenant d’autres capteurs, et la dernière, sur l’utilisation de cartes de l’environnement. Un système de navigation avancé est l’extension d’un système de navigation inertielle tel que présenté dans la section précédente, auquel on a ajouté ces trois sources d’informations, comme représenté sur la figure 3.11.

Modélisation du mouvement On considère un système de navigation inertielle, qui embarque une procédure d’estimation de l’attitude $\hat{\eta}$ comme sur le drone *Crazyfly*. Celui-ci

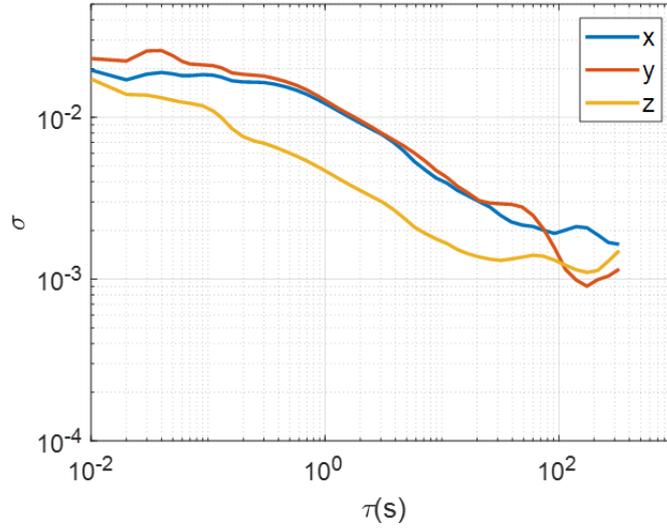


FIGURE 3.10 – Écart-type d'Allan des signaux des 3 axes de l'accéléromètre lors de l'expérience B

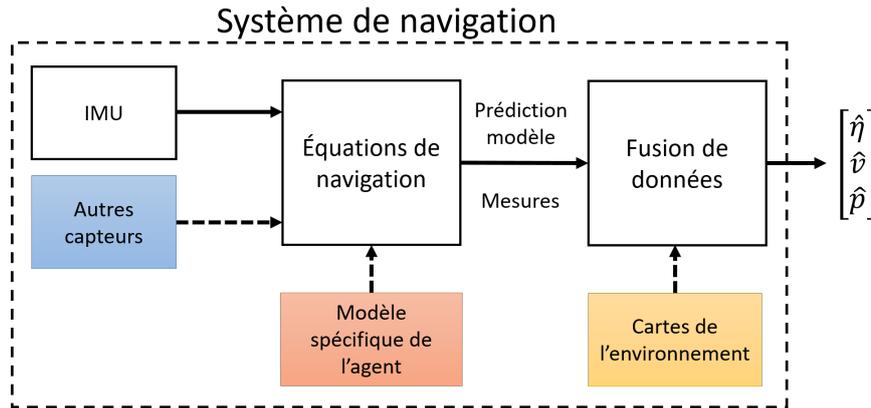


FIGURE 3.11 – Système de navigation avancé

permet d'obtenir une estimation de la vitesse, notée \hat{v} , à partir des données inertielles en intégrant l'équation (3.2) :

$$\hat{v}(t) = \int_0^t \hat{v} dt = \int_0^t (\tilde{a}_{acc}(t) + R_{ib}(\hat{\eta}(t))g_z) dt \quad (3.13)$$

où $\tilde{a}_{acc}(t)$ est l'accélération mesurée par l'accéléromètre à l'instant t et $\hat{\eta}(t)$ sont les angles d'attitude estimés par la centrale inertielle.

La procédure d'intégration de l'équation (3.13) entraîne une dérive croissante de l'erreur d'estimation de v , à cause de l'accumulation des erreurs comprises dans la mesure $\tilde{a}_{acc}(t)$ et l'estimation $\hat{\eta}(t)$. L'équation (3.13) est générique, c'est-à-dire qu'elle peut être utilisée pour décrire le mouvement de tout agent mobile embarquant la centrale inertielle et soumis à la gravité. Cependant, lorsque les conditions dans lesquelles va évoluer la centrale inertielle sont connues, il est plus judicieux d'utiliser un modèle spécifique de l'agent mobile qui embarque l'IMU, afin d'ajouter de l'information sur le mouvement à estimer.

Modèle spécifique de l’agent Une première approche consiste à introduire dans le modèle des contraintes algébriques, aussi appelées contraintes non-holonomes [ZC03], qui permettent de limiter grossièrement la dérive de l’erreur d’estimation. Cela peut être réalisé via l’introduction de pseudo-mesures dans le vecteur de mesures [TS90, BS04, NNE07, Gro13]. On retrouve ce type d’approche dans [DSNW99, NNE07], où l’objectif est d’estimer la vitesse d’une voiture. Les auteurs font l’hypothèse que le mouvement du véhicule est seulement dirigé selon l’axe orienté vers l’avant de la voiture. Ils modélisent alors les vitesses selon les autres axes orthogonaux comme des bruits blancs. Un filtre de Kalman [Kal60] est ensuite utilisé pour fusionner une prédiction de la vitesse obtenue via l’équation (3.13) avec les pseudo-mesures de vitesses nulles à tout instant. On peut également utiliser une pseudo-mesure de vitesse nulle périodiquement, dans certaines applications où l’on peut détecter que l’agent est immobile [Gro13]. Cette technique est notamment utilisée pour la navigation de piétons [LJW14], car on peut faire l’hypothèse que leur pied devient immobile à chaque pas. Lorsqu’on détecte un pas, par exemple avec un seuil sur les mesures de la centrale inertielle, on peut alors introduire une pseudo-mesure de vitesse nulle. Dans le cas du drone, le mouvement est non-contraint et peut être dirigé dans les 3 directions donc on ne peut pas utiliser l’approche basée sur la modélisation d’une vitesse nulle selon certains axes. En guise de perspective, on pourrait néanmoins considérer intégrer un mécanisme de recalage de l’estimation de vitesse basé sur une mesure périodique de vitesse nulle. En effet, si la mission le permet, on pourrait donner l’ordre au drone de se poser périodiquement. Cela permettrait de réinitialiser la vitesse estimée à zéro à ce moment là, à la manière de [GYT01].

Une approche plus sophistiquée consiste à remplacer le modèle générique (3.13) par un modèle dynamique spécifique à l’agent mobile sur lequel est montée la centrale inertielle [TW04]. Le modèle peut être utilisé pour donner une prédiction de la vitesse lorsque le véhicule est soumis à des signaux de commandes connus. Ensuite, cette prédiction de vitesse peut être corrigée par la mesure de la centrale inertielle [KM91]. Il est aussi possible de combiner la vitesse prédite par le modèle dynamique spécifique à l’agent à celle obtenue via le modèle générique (3.13) [BS04, CGTH13]. L’inconvénient est que cela augmente la taille du vecteur d’état et donc le coût calculatoire de la solution d’estimation. De plus, le bénéfice apporté par le modèle générique (3.13) dépend grandement de la précision de la mesure de la centrale inertielle, qui est faible dans le cas du drone en vol. Plutôt que de coupler les deux modèles et d’augmenter la complexité de la solution, on préférera dans la thèse utiliser un seul modèle dynamique, correspondant spécifiquement à celui du drone en vol.

Le cas particulier du drone Il a été récemment montré dans la littérature qu’il y a un intérêt particulier à considérer le modèle dynamique spécifique au drone dans un contexte d’estimation du mouvement. En effet, dans le cas particulier du drone volant, les capteurs de l’IMU peuvent être utilisés pour mesurer directement la vitesse v . Cela permet de s’affranchir de la dérive induite par l’intégration numérique de l’accélération. Cette approche a été initialement utilisée dans [MS10] puis dans [LMBM14, AKDM13, BHA⁺18] et elle découle du principe de fonctionnement d’un accéléromètre donné dans la partie 3.1.1.1. En effet, considérons l’équation (3.2) qui lie la mesure idéale (sans termes d’erreurs) de l’accéléromètre \tilde{a}_{acc} à l’accélération linéaire \dot{v} et à l’attitude η du drone. Elle peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\tilde{a}_{acc} = \dot{v} - R_{ib}(\eta)g_z \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{a}_{acc,x} \\ \tilde{a}_{acc,y} \\ \tilde{a}_{acc,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x + g s_\theta \\ \dot{v}_y - g c_\theta s_\phi \\ \dot{v}_z - g c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

En négligeant les termes de Coriolis² dans le modèle de la vitesse de translation du drone issu de (2.8), on a :

$$\begin{cases} \dot{v}_x &= -gs_\theta - \frac{\mu_{xy}}{m}v_x \\ \dot{v}_y &= gc_\theta s_\phi - \frac{\mu_{xy}}{m}v_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{T}{m} + gc_\phi c_\theta - \frac{\mu_z}{m}v_z \end{cases} \quad (3.15)$$

En insérant (3.15) dans (3.14), on constate que la mesure de l'accéléromètre est proportionnelle à la vitesse de déplacement du drone, via les termes de trainée aérodynamique μ_{xy} et μ_z :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{acc,x} \\ \tilde{a}_{acc,y} \\ \tilde{a}_{acc,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_{xy}}{m}v_x \\ -\frac{\mu_{xy}}{m}v_y \\ -\frac{T}{m} - \frac{\mu_z}{m}v_z \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Notons cependant que dans la littérature, par exemple [AKDM13, LMBM14], l'étude porte seulement sur les translations latérales et la mesure sur l'axe z n'est pas utilisée pour obtenir d'informations sur v_z . En effet, ces références s'appuient notamment sur les études menées sur l'aérodynamique des quadricoptères dans [BM12, BMSP09]. Dans ces travaux, une justification du terme de trainée aérodynamique μ_{xy} n'est donnée que pour le plan (\vec{x}_b, \vec{y}_b) du drone. Les auteurs de ces études supposent que dans des conditions proches du vol stationnaire (*near hover point*), les vitesses de déplacement sont faibles, donc la trainée due aux frottements de l'air sur la structure du drone est négligeable. Par contre, il existe des effets de trainée dus à la vitesse relative importante entre les hélices en rotation et le vent apparent, autrement dit le vent ambiant qui s'additionne au vent dû au déplacement du drone par rapport à son environnement. Ces interactions induisent une force de trainée proportionnelle à la vitesse via un coefficient μ_{xy} qui s'oppose à la translation horizontale du drone. Les effets aérodynamiques qui interviennent sur l'axe vertical z sont au contraire considérés négligeables et le terme μ_z est généralement omis, car on ne retrouve pas les mêmes effets de trainée dus aux interactions entre les hélices, et la trainée due aux frottements de l'air sur la structure est également négligée. Dans la littérature, lorsque la vitesse v_z est recherchée, elle est obtenue en fusionnant les signaux de l'accéléromètre avec d'autres informations, comme les mesures issues d'un baromètre dans [BHA⁺18] ou l'estimation de la puissance des moteurs issue des variateurs de vitesse dans [AABM14]. Dans notre étude, on a choisi d'intégrer ce terme μ_z dans le modèle, puisqu'on verra expérimentalement qu'il permet d'obtenir une mesure de v_z , moyennant un modèle de la force de poussée T qui a déjà été donné dans le chapitre 2.

Notre solution se rapproche de [AABM14], où les auteurs utilisent la mesure de la puissance fournie aux moteurs via les variateurs de vitesse, puis en déduisent via un modèle dynamique la vitesse de déplacement du drone suivant l'axe \vec{z}_b . Cependant, contrairement à [AABM14], notre approche ne nécessite pas de capteur supplémentaire. En effet, on utilise seulement le signal de commande de poussée fourni au microcontrôleur et le modèle de poussée pour en déduire la vitesse de déplacement du drone. L'identification des paramètres aérodynamiques μ_{xy} et μ_z est présentée dans la section 3.2.2.

Fusion avec d'autres capteurs Une autre manière de réduire l'erreur d'estimation du mouvement est de fusionner les informations issues de la centrale inertielle avec celles provenant d'autres capteurs. Le choix des capteurs à embarquer sur le drone nécessite de trouver un compromis entre l'amélioration de l'estimation et l'embarquabilité de la solution. En effet,

2. Les vitesses linéaires et angulaires et donc leur produit sont faibles dans un contexte de vol autonome suivant des trajectoires non-agressives.

l'intégration de capteurs sur le drone consomme forcément des ressources supplémentaires, tant en puissance de calcul que en puissance électrique, ce qui impacte directement l'autonomie et la durée maximale de la mission. En guise d'ordre de grandeur, la charge utile maximale conseillée pour le *Crazyflie* est de 15g. On donne ci-dessous une introduction aux capteurs principalement utilisés dans la littérature puis on expliquera le choix qui a été fait dans cette thèse.

Le premier type de capteurs qui peuvent être utilisés sont les capteurs de pression, comme les baromètres ou des sondes Pitot [Gro13]. Ils fournissent des informations de vitesse ou d'altitude en comparant une mesure locale de la pression de l'air à une référence. Dans le cas des baromètres, c'est la valeur de pression de l'air ambiant qui est comparée à la valeur de la pression atmosphérique au niveau de la mer, pour en déduire une mesure de l'altitude du capteur. Pour ce qui est des sondes Pitot, c'est la pression d'un flux entrant d'air, typiquement la pression à l'avant d'un avion, qui est comparée à la pression ambiante pour en déduire une mesure de la vitesse du véhicule relativement à l'air. L'intérêt de ces capteurs est limité pour le drone, notamment pour des vols à basse vitesse et possiblement en intérieur. En effet, les variations d'altitude et de vitesse seront minimales par rapport aux résolutions typiques d'un baromètre MEMS ($1m$ [Bos15]) et d'une sonde de Pitot ($1m.s^{-1}$ [Mea13]).

Pour la navigation des micro-drones, les chercheurs se tournent plutôt vers les caméras, radars, sonars, ou lidars [BHA⁺18]. On peut classer ces capteurs en deux catégories, les capteurs passifs et les capteurs actifs.

Les capteurs passifs fonctionnent uniquement en tant que récepteurs. Ce sont typiquement les caméras monoculaires qui perçoivent la lumière réfléchi par l'environnement pour construire une image. Les caméras ont l'intérêt d'être disponibles dans le commerce à bas coût et avec un faible encombrement, comme les caméras de smartphones par exemple. Les images issues des caméras sont riches en informations, et peuvent permettre d'estimer la vitesse de déplacement du drone en comparant des images consécutives du flux vidéo. Même si des caméras ont déjà été couplées avec succès avec des centrales inertielles [DESC14, GBSG15], celles-ci comportent des nombreux désavantages. Le premier, est que la mesure de vitesse à partir des images nécessite de connaître le facteur d'échelle pour convertir le déplacement d'un point dans les images en mesure de déplacement dans le monde réel. Cela nécessite alors d'ajouter un capteur de distance, de connaître la taille d'un objet dans l'image, ou alors d'utiliser une deuxième caméra afin d'appliquer le principe de stéréo-vision [MCW⁺17, Vet11]. De plus, les images des caméras ne sont exploitables que dans un environnement éclairé avec une luminosité stable, et présentant suffisamment de contours détectables dans le champ de vision. Cela empêche de les utiliser dans une canalisation ou dans un environnement avec de la poussière par exemple. Enfin, une des principales limites des caméras est le coût calcul et mémoire nécessaire pour transmettre un flux vidéo et en extraire des informations. Cela limite la fréquence d'échantillonnage maximale que l'on peut atteindre avec des capacités de calcul réduites. Dans la littérature, les images sont souvent transmises à un ordinateur au sol qui effectue les calculs, ou alors elles sont traitées sur le drone mais avec des unités de calcul embarquées dédiées [GBSG15, BHA⁺18]. Cependant, de tels circuits électroniques embarquables sur un micro-drone comme le *Crazyflie* constituent encore un sujet de recherche et n'existent pas dans le commerce [ZSC⁺17, PLC⁺19].

Les capteurs actifs envoient un signal en direction de leur environnement et captent l'écho réfléchi. Ce signal peut être une onde sonore (sonars [PDCP16]), ou électromagnétique (lidars [OFR⁺16], radars [SRM15]). Le signal est reçu avec un décalage dans le temps appelé Time

Of Flight (TOF), qui dépend de la célérité connue de l’onde émise et de la distance qu’elle doit parcourir avant de rencontrer un obstacle. Celui-ci permet de mesurer la distance aux obstacles contenus dans le champ de vision. Dans certains cas, il est également possible de mesurer le décalage en fréquence de l’onde reçue, dû à l’effet Doppler. Cela permet de mesurer la vitesse des obstacles ou même la vitesse du drone lorsque l’environnement est immobile [Gro13]. Chacune de ces technologies de capteurs présente des avantages et des inconvénients [OSCD20]. L’avantage des lidars est leur grande précision (de l’ordre de 2.5cm [Gar16]) et une fréquence de rafraîchissement de la mesure plutôt élevée (de l’ordre de 100Hz [Gar16]). Mais leur inconvénient est qu’ils émettent un faisceau de lumière proche du spectre visible, et sont donc perturbés par les mêmes phénomènes que les caméras (variations de lumière ambiante, poussière, brouillard). Les sonars sont des capteurs compacts qui émettent une onde sonore et ne sont donc pas perturbés par les phénomènes lumineux. Cependant, ils ont une portée et une précision faible dans l’air, à cause de la dissipation rapide de l’onde sonore et de la variation de sa vitesse de propagation en fonction notamment des conditions atmosphériques [PDCP16]. Enfin, les radars se basent sur les ondes radio qui permettent, comme pour les sonars, de s’affranchir des problèmes liés à la visibilité dans l’environnement. Par rapport aux ondes sonores, les ondes radio permettent également une fréquence de rafraîchissement de la mesure plus élevée, car celle-ci dépend notamment de la vitesse de propagation de l’onde qui vaut $c = 3 \times 10^8 \text{m.s}^{-1}$ dans le cas du radar contre $v_{\text{son}} = 3.4 \times 10^2 \text{m.s}^{-1}$ pour le sonar. On aura typiquement des valeurs de fréquence d’échantillonnage de l’ordre de 10Hz pour le sonar (p.ex. [Max15]) et 100kHz pour le radar (p.ex. [SRFM16]). L’inconvénient des radars est que leur taille et leur consommation les rendent généralement difficiles à embarquer. Certaines avancées ont néanmoins été réalisées dernièrement à ce sujet et embarquer un radar sur un micro-drone semble désormais possible [SRFM16].

On compare dans le tableau 3.1 les différentes technologies de capteurs actifs et passifs. Les critères de comparaison sont choisis en ayant comme objectif le vol autonome du micro-drone dans des infrastructures comme des canalisations. Les informations sur l’environnement du drone doivent être obtenues avec un coût matériel et logiciel faible, dans un environnement sombre et parfois dans le brouillard. Afin de respecter le critère de Shannon-Nyquist, elles doivent être obtenues à une fréquence d’échantillonnage $\nu_s > 2\nu_{\text{max,drone}}$ où $\nu_{\text{max,drone}} = 10\text{Hz}$ est la fréquence maximale correspondant aux dynamiques de translation du drone. Les critères utilisés dans le tableau 3.1 sont donc les suivants :

- Distance : possibilité de déterminer une distance ;
- Vitesse : possibilité déterminer une vitesse ;
- Nyctalope : capacité à fonctionner sans source de lumière externe ;
- Fog proof : capacité à fonctionner dans le brouillard ;
- Fréquence échantillonnage : capacité à fournir une mesure à $\nu_s > 20\text{Hz}$.

TABLE 3.1 – Comparaison de technologies de capteurs extéroceptifs

Technologie	Distance	Vitesse	Nyctalope	Fog-proof	Fréquence
Caméra monoculaire	×	×	×	×	N/A ³
Lidar	✓	✓	✓	×	✓
Sonar	✓	✓	✓	✓	×
Radar	✓	✓	✓	✓	✓

Les technologies radar et sonar sont les plus intéressantes pour répondre à notre problématique, car elles permettent d’obtenir des informations de distance et de vitesse, même dans les conditions environnementales difficiles comme lors du vol dans une canalisation. On préférera néanmoins le radar au sonar, dont la fréquence d’échantillonnage plus importante permet de respecter le critère de Shannon-Nyquist pour l’application considérée ici. La principale limitation des radars est leur embarquabilité. Cependant, il existe depuis peu dans le commerce des radars intégrés sur des puces électroniques et hautement embarquables, avec une consommation électrique de l’ordre de $1W$ et un faible encombrement [Tex21, Sil21]. On considère donc par la suite que l’on intégrera un radar sur le drone en complément de la centrale inertielle.

Cartes de l’environnement Finalement, la dernière catégorie de techniques pouvant être utilisées pour améliorer l’estimation du mouvement est la fusion des informations provenant du dispositif de navigation avec celles issues de cartes de l’environnement. Cela est par exemple pratiqué dans les logiciels de navigation automobile, où l’on va chercher à recalculer numériquement la position estimée du véhicule sur l’axe routier le plus proche [QON07]. Ce type de technique, appelée *map-matching*, est cependant hors de propos dans un contexte de navigation en environnement inconnu comme dans cette thèse, car cela nécessite d’avoir des connaissances *a priori* sur l’environnement. Une autre approche en vogue dans le domaine de la voiture autonome est le SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*) [DWB06, BDW06]. Cela consiste à construire une carte de l’environnement au fur et à mesure que le robot avance et à le localiser dans le même temps. Cela repose sur la fusion des informations de plusieurs capteurs, généralement des caméras et des lidars, avec une complexité de calcul importante. Il s’agit en effet d’estimer la position de multiples points d’intérêts dans l’environnement et de mettre à jour leur position avec celle du robot au cours du temps. Ce processus est donc plutôt destiné à des agents mobiles avec beaucoup de ressources en calcul, ou à des applications où les calculs peuvent être faits de manière décentralisée sur un ordinateur fixe [LGB⁺17]. Les techniques à bases de cartes de l’environnement ne sont donc *a priori* pas applicables dans le contexte que l’on considère dans cette thèse.

Conclusion On a décrit différentes techniques de l’état de l’art utilisées pour limiter la dérive de l’estimation du mouvement dans un système de navigation à base de centrale inertielle. On a notamment abordé la question du choix de capteurs à utiliser dans le contexte de la navigation du drone. On a expliqué le principe de mesure de la vitesse de translation à partir des mesures de l’accéléromètre dans le cas particulier du drone et on a justifié l’intérêt d’embarquer un radar sur le drone. Ci-dessous, on identifie tout d’abord les paramètres du modèle dynamique du drone qui seront utilisés pour mesurer sa vitesse via l’IMU. Ensuite, on présente une contribution par rapport à l’état de l’art qui repose sur le développement d’un nouvel algorithme de mesure de vitesse à partir de mesures radar.

3.2.2 Estimation de vitesse à partir de mesures IMU

D’après la section précédente et notamment l’équation (3.16), l’IMU peut être utilisé pour mesurer la vitesse de translation du drone. Il nous faut maintenant identifier les paramètres du modèle μ_{xy} et μ_z qui permettent de relier dans cette équation la mesure de l’accéléromètre à la vitesse du drone.

3. Non-applicable : varie en fonction de l’unité de calcul et du logiciel de traitement d’image implémenté.

Pour identifier μ_{xy} , on trace sur la figure 3.12 les mesures réelles d'accéléromètre $\tilde{a}_{acc,y}$ en fonction de la vitesse de référence $-v_y$ mesurée par le système de capture de mouvement Vicon lors d'une expérience réalisée en début de thèse, voir le début du chapitre 2. On ajuste sur ces données une fonction affine par la méthode des moindres carrés. On obtient le modèle $\tilde{a}_{acc,y}(t) = -0.4v_y(t) - 0.08$, ce qui donne d'après (3.16) une valeur de $\mu_{xy} = 0.4 \times m = 0.01kg.s^{-1}$. Le drone étant symétrique, on peut considérer que l'on obtiendrait la même valeur si l'on reproduisait cette démarche sur l'axe \vec{x}_b .

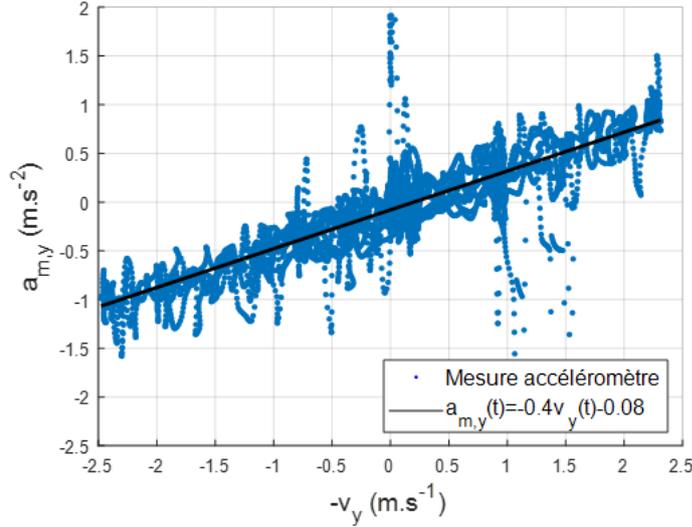


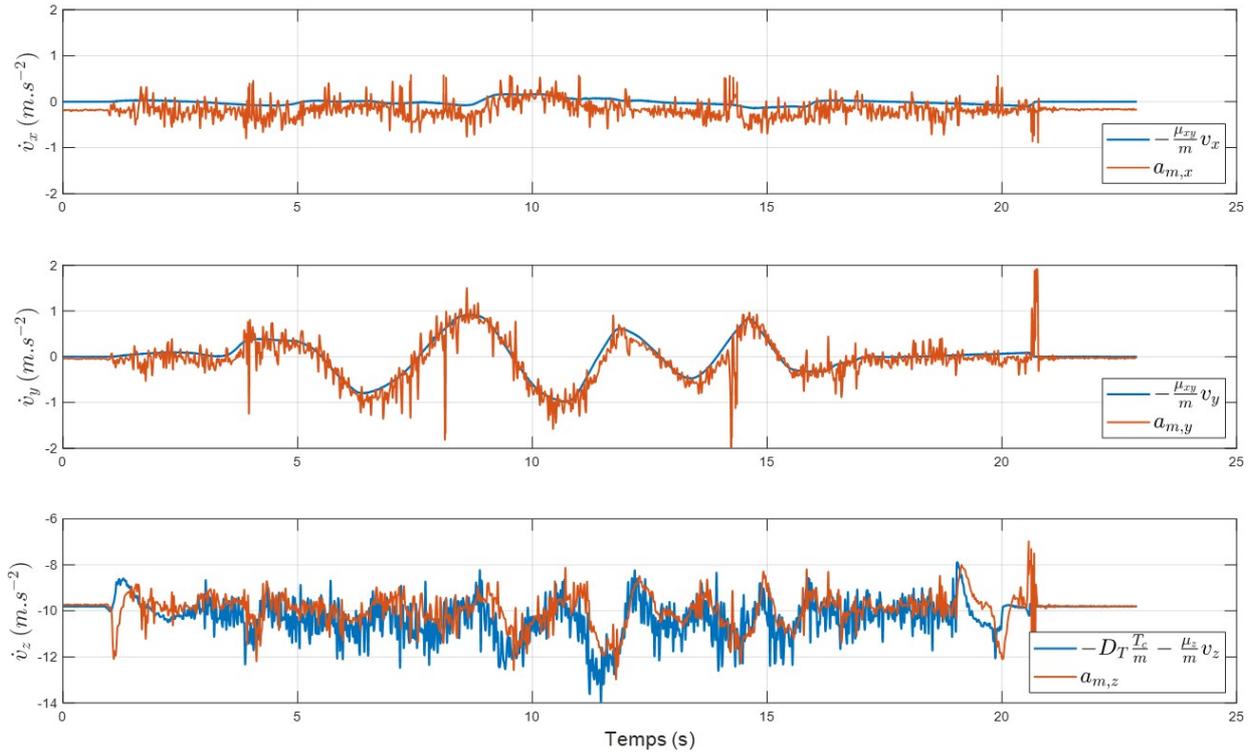
FIGURE 3.12 – Ajustement d'un modèle affine sur les mesures $\tilde{a}_{acc,y}$ par la méthode des moindres carrés

Pour identifier la valeur μ_z de l'axe \vec{z}_b , il faut connaître la poussée T générée par les rotors du drone. Pour cela, on a enregistré lors des expériences en vol du *Crazyflie* le signal de commande T_c envoyé par l'utilisateur. D'après la section 2.2 du chapitre 2, lorsqu'on est proche des conditions de vol stationnaire, on a $T = D_T T_c$ où D_T est le gain de la chaîne de commande donnée en annexe A.3. La différence par rapport au paragraphe précédent est qu'on identifie cette fois un modèle affine pour $\tilde{a}_{acc,z} + D_T \frac{T_c}{m}$ en fonction de $-v_z$. On obtient :

$$\tilde{a}_{acc,z}(t) + D_T \frac{T_c(t)}{m} = -1.51v_z(t) - 0.89 \quad (3.17)$$

ce qui correspond à une valeur $\mu_z = 0.05kg.s^{-1}$.

On trace sur la figure 3.13 les mesures \tilde{a}_{acc} de l'accéléromètre (en rouge) et les signaux de référence (en bleu) calculés à partir de la mesure de vitesse v du système de capture de mouvement Vicon et des coefficients μ_{xy} et μ_z obtenus précédemment. On observe que les mesures d'accéléromètre et de référence suivent bien la même dynamique, même si les signaux bruts de l'accéléromètre sont clairement bruités et biaisés. Pour l'axe \vec{z}_b , le signal de référence est également bruité, ce qui est dû à l'introduction du signal bruité de commande T_c envoyé par l'utilisateur. Néanmoins, cette figure permet de valider l'approche de la mesure de la vitesse du drone à partir des mesures d'accéléromètre, et ce, même sur l'axe \vec{z}_b habituellement négligé dans la littérature.


 FIGURE 3.13 – Signaux de l'accéléromètre et signaux issus de la vitesse de référence *Vicon*

3.2.3 Estimation de vitesse à partir de mesures radar

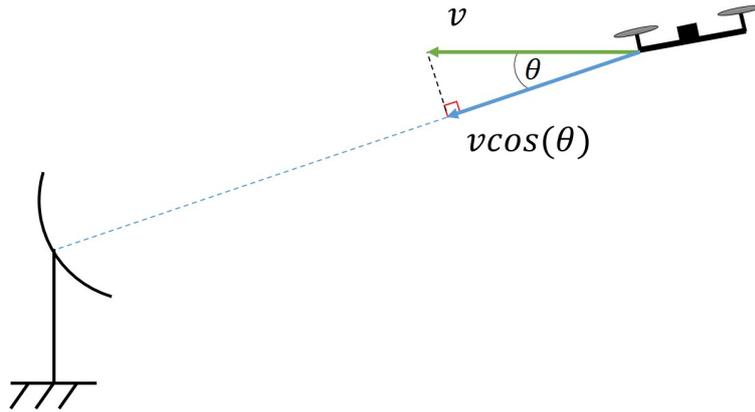
Pour les raisons citées précédemment, on a choisi d'intégrer un radar dans la liste de capteurs à embarquer sur le drone pour assurer sa navigation autonome. Ce capteur peut avoir deux fonctions : la détection d'obstacles et la mesure de vitesse du drone.

La première est sa fonction originelle qui date des années 1900, et elle est toujours très utilisée dans des domaines variés comme le maritime, l'aéronautique ou encore l'automobile [BAM⁺04]. Elle se base sur la mesure de la durée τ d'un trajet aller-retour d'une onde émise par un radar et un obstacle qui la réfléchit. Comme la vitesse de l'onde est connue, on peut en déduire la distance à l'obstacle avec la formule :

$$R = \frac{c\tau}{2} \quad (3.18)$$

où $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ est la célérité d'une onde électromagnétique, τ est la durée du trajet aller-retour de l'onde et R la distance à l'obstacle.

La fonction de mesure de vitesse fût développée dans les années 1950, lorsque le GPS n'existait pas encore mais que l'on désirait permettre aux avions de voler sur de longues distances [Fri93]. On cherchait alors à obtenir un système de mesure de vitesse de l'avion précis, en complément des capteurs de vitesse de l'air (sondes Pitot) dont la mesure était facilement faussée en présence de vent [Fri93]. Des systèmes de mesure de vitesse à base d'écho radar ont alors été développés avec succès et équipent désormais de nombreux types de véhicules [FH85, KF97, LDGAG09]. La mesure de vitesse se base sur l'effet Doppler. Celui-ci donne une relation entre la fréquence ν_0 d'une onde émise par un radar et la fréquence ν de l'onde réfléchi par un obstacle en mouvement en fonction de leur vitesse relative $v \cos(\theta)$,


 FIGURE 3.14 – Vitesse relative $v \cos \theta$ entre un radar fixe et un obstacle en mouvement

voir figure 3.14 [Ber57] :

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{2v \cos(\theta)}{c} \nu_0 \quad (3.19)$$

où $\Delta\nu$ est appelé décalage Doppler.

Les radars les plus utilisés de nos jours sont les radars à ondes continues (CW, *Continuous Wave*), et à ondes continues modulées en fréquences (FMCW, *Frequency Modulated Continuous Wave*). Les radars CW émettent de façon continue une onde de fréquence connue ν_0 et permettent de mesurer la fréquence ν du signal réfléchi par les obstacles. Ils sont alors typiquement adaptés à la fonction de mesure de vitesse, mais ne permettent pas de mesurer la distance aux obstacles. Pour cela, il existe les radars FMCW, qui émettent un signal dont la fréquence varie périodiquement par rapport à la fréquence ν_0 appelée fréquence porteuse, voir figure 3.15. Ils permettent alors de mesurer le temps de parcours aller-retour de l'onde τ liée à la distance aux obstacles, en plus du décalage Doppler $\Delta\nu$. Les radars FMCW nécessitent un bloc de modulation de fréquence qui n'existe pas sur les radars CW, ce qui fait que pour un capteur de même taille, poids et puissance, le radar FMCW sera plus cher. Le radar CW est donc préféré pour des applications où l'objectif est seulement la mesure de vitesse [LDGAG09, FH85, KSB92].

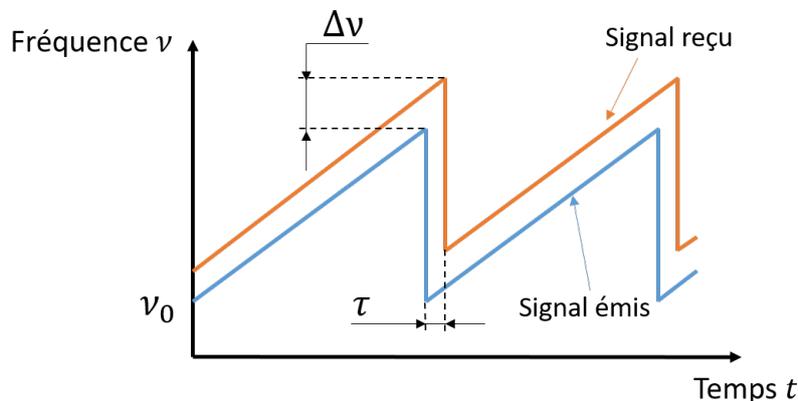


FIGURE 3.15 – Illustration d'un signal émis par un radar FMCW

Dans un contexte de navigation autonome comme c'est le cas ici, il est probable que l'on désire combiner les deux fonctions, soit la détection d'obstacle (non-abordée dans cette thèse) et la mesure de vitesse. De plus, les contraintes d'embarquabilité sur un micro-drone

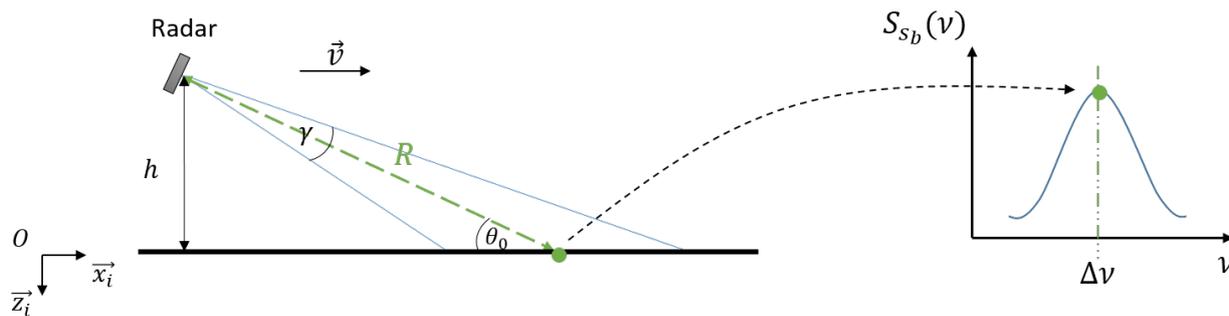


FIGURE 3.16 – Configuration du radar et spectre Doppler correspondant

comme le *Crazyflie* sont telles qu'il serait préférable de n'utiliser qu'un seul capteur pour assurer les deux fonctions. On propose donc ici d'utiliser un radar FMCW pour cela. Désormais, il existe en effet dans le commerce des radars FMCW à ondes millimétriques (fréquence porteuse de l'ordre du GHz) comme [Tex21] qui sont embarquables sur un micro-drone et dont le champ de vision large pourrait permettre de combiner ces deux fonctions.

Dans la suite de cette section, on va développer un algorithme qui permet de mesurer la vitesse du drone et sa hauteur par rapport au sol à partir des mesures d'un radar FMCW. Par rapport aux approches de l'état de l'art qui se basent sur des radars CW dits Doppler permettant seulement de détecter la vitesse, la contribution ici est d'exploiter les propriétés des radars FMCW qui permettent à la fois d'obtenir des mesures de distance et de vitesse. Cela permet une utilisation polyvalente d'un seul et même radar, pour mesurer plusieurs grandeurs liées au mouvement du drone, ainsi que pour détecter des obstacles (fonctionnalité non abordée dans cette thèse).

3.2.3.1 Problématique

Soit un radar fixé sur le drone, placé à une hauteur h en translation horizontale avec une vitesse v par rapport au sol supposé plan et horizontal, et dont la ligne de visée intersecte le sol situé à une distance R avec un angle θ_0 , comme représenté sur la figure 3.16. Le radar émet une onde de fréquence porteuse ν_0 qui est réfléchi par les aspérités aléatoires du sol. Le signal reçu par le radar a une fréquence ν liée à la vitesse v par l'équation (3.19). Le signal reçu est ensuite démodulé pour former un nouveau signal appelé signal de battement, noté s_b , dont la fréquence porteuse correspond au décalage Doppler $\Delta\nu = \nu - \nu_0$, voir l'explication en annexe A.8. L'objectif d'un algorithme de mesure de vitesse par rapport au sol est de déterminer correctement la fréquence $\Delta\nu$ à partir du signal s_b . Cela peut être fait en calculant la densité spectrale de puissance $S_{s_b}(\nu)$ du signal s_b et en détectant son maximum sensé être situé en $\Delta\nu$. Le problème est que cette densité spectrale de puissance $S_{s_b}(\nu)$ ne contient pas seulement un pic à $\Delta\nu$, mais est étalée en fréquences. Cela est dû au bruit contenu dans le signal $s_b(t)$ et à l'angle d'ouverture de l'antenne, que l'on note γ , voir la figure 3.16.

Les travaux de la littérature sur l'estimation de vitesse à partir de mesures radar se concentrent sur l'utilisation de radars CW, qui émettent de façon continue une onde à une fréquence donnée et captent le signal réfléchi par l'environnement. Contrairement aux radars FMCW, les radars CW ne permettent pas d'obtenir une mesure de distance. Pour estimer la vitesse à partir des mesures de radar CW, les travaux de la littérature se décomposent en deux types d'approches. La première, consiste à essayer de déterminer $\Delta\nu$ sous l'hypothèse que $S_{s_b}(\nu)$ suit une distribution Gaussienne d'espérance $\Delta\nu$ et que la puissance va donc

être maximale à cette fréquence [Dyb13, Ber57, SHD⁺17]. Cependant, comme le signal est bruité, extraire directement la fréquence $\Delta\nu$ du spectre peut s'avérer peu précis [Dyb13]. La deuxième approche consiste à comparer $S_{s_b}(\nu)$ à plusieurs densités spectrales de puissance pré-calculées en fonction de l'ouverture de l'antenne γ et pour plusieurs vitesses v , afin de rechercher la meilleure corrélation [KSB92, Ega82]. Cette méthode donne de meilleurs résultats que la précédente vis-à-vis de la précision sur la vitesse, mais son coût calcul est supérieur [SHD⁺17].

Notre approche est liée aux travaux de [KSB92] dans le sens où on exploite l'ouverture de l'antenne γ pour calculer la vitesse. Cependant, notre algorithme ne se base pas sur le calcul de l'intercorrélacion entre $S_{s_b}(\nu)$ et plusieurs spectres théoriques qui coûte cher en calculs. Il se base sur le calcul de la moyenne de plusieurs mesures redondantes de v effectuées simultanément. En effet, le champ de vision du radar peut être découpé virtuellement en un ensemble de rayons issus du radar et qui intersectent le sol. Pour un radar FMCW, on peut considérer que pour chacun de ces rayons dont les longueurs sont différentes, une mesure de vitesse est effectuée. On peut alors obtenir l'estimation finale de la vitesse du drone en prenant la moyenne de ces mesures, ce qui permet de lisser les erreurs liées au bruit de mesure.

3.2.3.2 Algorithme de mesure de vitesse

Comme dit précédemment, l'onde émise par le radar FMCW est contenue dans un faisceau d'angle d'ouverture noté γ . On peut découper ce faisceau en N rayons $R_{i=\{1,\dots,N\}}$ qui intersectent le sol avec un angle $\theta_{R_i} \in [\theta_0 - \frac{\gamma}{2}, \theta_0 + \frac{\gamma}{2}]$. À partir de la formule de l'effet Doppler (3.19), on peut exprimer le décalage Doppler $\Delta\nu_{R_i}$ perçu selon chaque rayon R_i :

$$\Delta\nu_{R_i} = \frac{2v \cos(\theta_{R_i})}{c} \nu_0 \quad (3.20)$$

Les radars FMCW permettent d'obtenir la valeur de décalage Doppler $\Delta\nu$ en fonction de la distance radiale R entre le radar et un obstacle, ici le sol. Ces informations sont classées dans une matrice $M(\Delta\nu, R)$, que l'on appelle matrice Doppler et que l'on représente sur la figure 3.17. Celle-ci donne en ordonnée le décalage Doppler du signal reçu, en abscisse la distance radiale et sur la troisième composante (en couleur) la puissance. Elle est généralement calculée avec un circuit électronique dédié sur les radars, et on explique le principe de son obtention dans l'annexe A.8. Notre algorithme de mesure de vitesse par rapport au sol se base sur l'équation (3.20). Grâce à celle-ci, on peut obtenir N fois une mesure de la vitesse v en relevant N valeurs de $\Delta\nu_{R_i}$ associées à N distances R_i , et donc aussi à N angles θ_{R_i} .

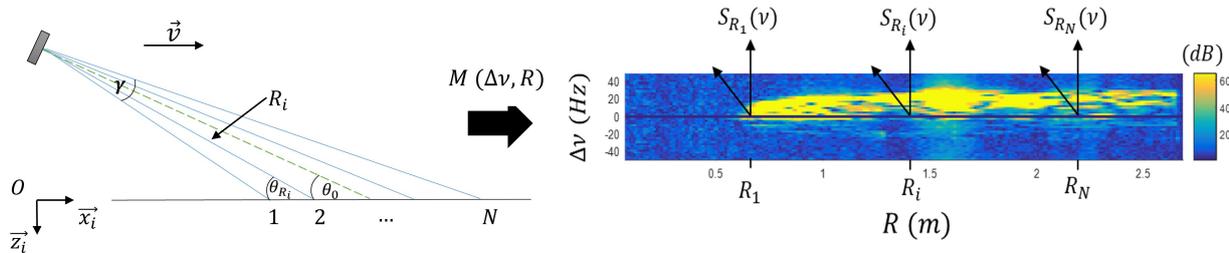


FIGURE 3.17 – Matrice $M(\Delta\nu, R)$ issue d'un radar type FMCW

La matrice $M(\Delta\nu, R)$ de la figure 3.17 correspond typiquement à ce qui est retourné par un radar FMCW orienté vers le sol et en translation comme représenté à gauche. On peut

remarquer l'étalement du spectre en fréquence, ce qui fait que l'on n'obtient pas une valeur unique $\Delta\nu_{R_i}$ pour un rayon R_i . Cet étalement est dû à l'angle d'ouverture γ lorsqu'on se place dans le plan du sol $(O, \vec{x}_i, \vec{y}_i)$ comme sur la figure 3.18. En effet, on observe sur cette figure que le vecteur vitesse \vec{v} se projette selon plusieurs directions pour une même distance R_i . La norme du vecteur vitesse projeté au point noté A sur la figure 3.18 sera maximale et correspondra à la valeur donnée par l'équation (3.20), tandis que la norme de la vitesse projetée au point B sera plus faible. La valeur $\Delta\nu_{R_i}$ qui nous intéresse sera alors celle située au point A , c'est-à-dire celle située sur le contour supérieur du spectre à la distance R_i , noté $S_{R_i}(\nu)$. On détectera cette valeur en calculant la dérivée de $S_{R_i}(\nu)$ par rapport à ν et en prenant l'indice où elle est maximale, ce qui constitue une technique basique de détection de contour, suffisante ici [Dav75].

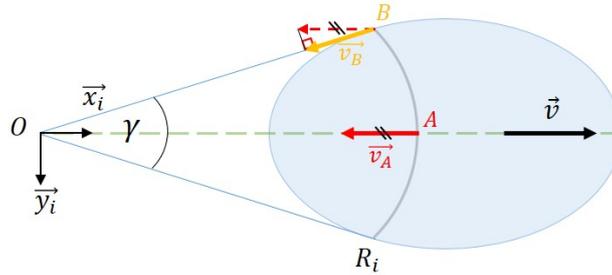


FIGURE 3.18 – Vue de dessus du champ de vision du radar

L'algorithme d'estimation de la vitesse horizontale du radar par rapport au sol est donné ci-dessous :

Algorithme 1 Estimation de la vitesse horizontale par rapport au sol

- 1: **pour** $i \in \{1, \dots, N\}$ **faire**
 - 2: $\theta_{R_i} = \theta_0 + \frac{2i-N}{2N}\gamma$ ▷ Calcul de l'angle entre le sol et le rayon i
 - 3: $R_i = \frac{h}{\sin(\theta_{R_i})}$ ▷ Calcul de la distance associée
 - 4: $\Delta\nu_{R_i} = \arg \max_{\nu} \left(\frac{dS_{R_i}(\nu)}{d\nu} \right)$ ▷ Détection du contour du spectre
 - 5: $v_{R_i} = \frac{c\Delta\nu_{R_i}}{2\nu_0 \cos(\theta_{R_i})}$ ▷ Calcul de la vitesse associée
 - 6: **fin pour**
 - 7: $v = \text{moyenne}(v_{R_i})$ pour $i \in \{1, \dots, N\}$ ▷ Estimation finale de vitesse
-

Dans l'algorithme 1, on considère que les paramètres géométriques suivants sont connus :

- **l'angle de visée du radar** θ_0 : On peut considérer que l'hypothèse d'un angle θ_0 connu est valide. En effet, on connaît l'angle avec lequel le radar est fixé sur le drone par construction, et l'angle d'inclinaison du drone est donné par sa centrale inertielle. Sous l'hypothèse d'un sol horizontal, l'angle de visée θ_0 est donc la somme de ces deux angles. Notons que l'angle θ_0 aurait aussi pu être déterminé approximativement à partir de la matrice Doppler, voir l'annexe A.7.
- **la hauteur par rapport au sol** h : Dans certaines situations, on peut utiliser un capteur de distance pour mesurer la hauteur h , ou alors elle est fixée *a priori* (radar embarqué sur une voiture ou un train). Dans le cas du drone, la hauteur varie et on veut limiter le nombre de capteurs. Cependant, on peut exploiter les signaux du radar FMCW pour la mesurer. Pour cela, on distingue deux types de radars FMCW : les radars SISO (Single Input Single Output) avec une seule antenne d'émission/réception et les radars MIMO (Multiple Inputs Multiple Outputs) avec plusieurs antennes

d'émission/réception. Dans la section suivante, on va considérer l'utilisation de radars MIMO. Leur intérêt va être de pouvoir appliquer un déphasage sur les signaux reçus pour changer virtuellement la direction de la ligne de visée, ce qui n'est pas possible avec un radar SISO. On pourra alors créer virtuellement une matrice Doppler qui correspond au faisceau radar orienté à la verticale par rapport au sol pour mesurer la hauteur, et une matrice Doppler qui correspond au faisceau oblique pour mesurer la vitesse comme précédemment. Lorsqu'on n'a accès qu'à une seule matrice Doppler, comme c'est le cas pour les radars *SISO*, on peut tout de même déterminer approximativement la hauteur h avec les relations données en annexe A.7.

On a présenté ci-dessus le principe de la mesure de vitesse lorsque le radar se déplace suivant une seule composante, connaissant la hauteur h . L'algorithme 1 permettait alors de mesurer la vitesse de déplacement du radar par rapport au sol selon la composante horizontale \vec{x}_i . Afin de s'affranchir de cette hypothèse sur la connaissance de h , on étend le travail précédent en s'appuyant sur la notion de radar FMCW MIMO. En effet, on montre par la suite qu'il est possible de mesurer avec un même radar FMCW MIMO des grandeurs associées au mouvement en deux dimensions, telles que la hauteur h ainsi que la vitesse horizontale selon \vec{x}_i et verticale selon \vec{z}_i . Cette contribution sera appuyée par des résultats en simulations dans la section 3.2.3.4 et des expériences dans le monde réel dans la section 3.2.3.5.

3.2.3.3 Mesure de vitesse et de hauteur en 2D

Radars MIMO Les radars MIMO que l'on considère ici sont dits monostatiques, c'est-à-dire que la distance d qui sépare les différentes antennes est bien plus faible que la distance R entre le radar et le sol : $d \ll R$. On explique tout d'abord le principe de *beamforming*, qui va nous permettre de mesurer simultanément la hauteur, la vitesse de translation verticale et horizontale du drone avec un seul et même radar.

Formation numérique de faisceaux (*digital beamforming*) On représente un radar MIMO⁴ avec une antenne d'émission (TX) et deux antennes de réception (RX1 et RX2) sur la figure 3.19. L'onde émise par l'antenne TX va être réfléchiée par le sol et retournée aux antennes RX avec un angle d'incidence θ . À cause de la distance d entre les antennes RX, le signal reçu par l'antenne RX2 doit parcourir une distance supplémentaire $d \sin(\theta)$ par rapport celui reçu sur l'antenne RX1. Cela implique un déphasage ϕ_d entre les signaux reçus :

$$\phi_d(\theta) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta) \quad (3.21)$$

Pour un radar MIMO à N_{TX} antennes d'émission et N_{RX} antennes de réception disposées en ligne, on a $n = N_{TX} \times N_{RX}$ canaux virtuels, où le déphasage entre les signaux reçus sur chaque canal vaut $[\phi_d(\theta), 2\phi_d(\theta), \dots, n\phi_d(\theta)]$. On appelle phaseur, le nombre complexe $p_k(\theta)$ tel que [Gue14] :

$$p_k(\theta) = e^{j(k-1)\frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta)}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.22)$$

On peut alors virtuellement orienter la ligne de visée du radar afin d'obtenir le signal $s_\theta(t)$ obtenu selon un angle d'incidence θ donné. Pour ce faire, on somme les signaux $s_k(t)$ de

4. On note que dans le cas particulier où le radar a 1 TX et 2 RX, il est proprement dit SIMO (*Single Input Multiple Outputs*).

chaque canal en les corrigeant de leur déphasage respectif :

$$s_\theta(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t) p_k(\theta) = \sum_{k=1}^n s_k(t) e^{j(k-1) \frac{2\pi}{\lambda} d \sin(\theta)} \quad (3.23)$$

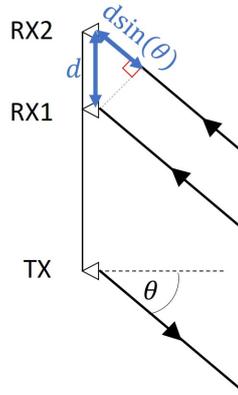


FIGURE 3.19 – Radar MIMO avec 1 antenne d’émission et 2 antennes de réception

On applique ce principe par la suite pour mesurer simultanément la hauteur et la vitesse du drone selon les axes \vec{x}_i et \vec{z}_i , à partir des signaux reçus sur chaque canal d’un même radar.

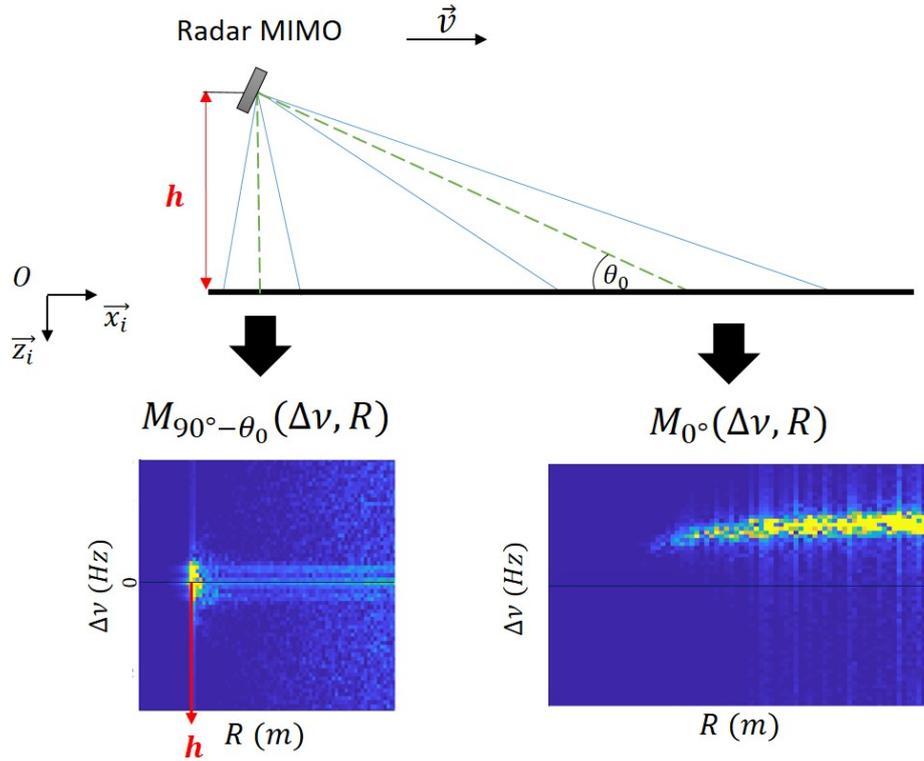
Mesure simultanée de hauteur et de vitesse À chaque instant t , un radar MIMO produit n matrices Doppler $M_{k=1,\dots,n}(\Delta\nu, R)$ qui correspondent aux signaux notés $s_{k=1,\dots,n}(t)$ dans l’équation (3.23). À partir de ces n matrices, on peut appliquer la formule de déphasage (3.23) pour obtenir une seule matrice $M_\theta(\Delta\nu, R)$, qui représente la mesure du radar réalisée virtuellement selon un angle de visée θ . Notre approche consiste à orienter virtuellement le faisceau du radar comme sur la figure 3.20. On obtient ainsi la matrice $M_{0^\circ}(\Delta\nu, R)$ qui correspond à un déphasage de 0° c’est-à-dire à un angle θ_0 entre la ligne de visée du radar et le sol, et la matrice $M_{90^\circ-\theta_0}(\Delta\nu, R)$ qui revient à orienter le faisceau à la verticale.

La matrice $M_{0^\circ}(\Delta\nu, R)$ est utilisée pour mesurer la vitesse selon \vec{x}_i , avec l’algorithme de mesure de vitesse 1 présenté précédemment. La mesure de la hauteur h quant à elle, consiste à parcourir l’axe des abscisses de la matrice $M_{90^\circ-\theta_0}(\Delta\nu, R)$ pour $\Delta\nu = 0\text{Hz}$. On sélectionne l’indice i_h où la puissance est maximale, ce qui correspond à la hauteur h , voir figure 3.20. Ensuite, pour mesurer la vitesse selon \vec{z}_i , on détecte le contour du spectre sur l’axe vertical $S_{R_{i_h}}(\nu)$ pour obtenir le décalage Doppler $\Delta\nu_{i_h}$. Enfin, on obtient la vitesse via la formule (3.19) avec $\theta = 0$:

$$v_{z,i} = \frac{c}{2\nu_0} \Delta\nu_{R_{i_h}} \quad (3.24)$$

3.2.3.4 Simulations

Simulateur radar Pour faire une première validation de notre approche, on simule les mesures qu’aurait effectué un radar s’il avait été présent sur le drone au moment des expériences de début de thèse avec le système Vicon. Pour cela, on utilise un simulateur qui a été développé au CEA dans le Laboratoire d’Architectures Intégrées Radio-fréquences (LAIR), dont les principaux blocs sont représentés sur la figure 3.21. Ce simulateur complet du fonctionnement d’un radar a déjà été éprouvé et est utilisé au LAIR afin de concevoir des


 FIGURE 3.20 – *Beamforming* avec un seul radar MIMO avec une orientation fixe

nouveaux radars et algorithmes de traitement de signal [AZMP20]. Les deux blocs en vert sur la figure 3.21 mettent en équations le fonctionnement interne du radar et l'interaction des ondes émises avec l'environnement externe. Pour l'initialiser, on a besoin de spécifier les caractéristiques du radar que l'on veut créer, telles que sa bande passante, la fréquence porteuse ν_0 ou encore le nombre d'antennes. Le simulateur fait l'hypothèse que le radar est fixe et que c'est son environnement qui est en mouvement. Celui-ci est décrit par des points en mouvement réfléchissant les ondes radar et appelés réflecteurs. La sortie du simulateur est constituée des matrices Doppler issues de chaque canal du radar, que l'on utilise ensuite pour effectuer nos traitements algorithmiques.

Simulation d'un radar embarqué sur le drone On considère l'utilisation de deux radars sur le drone, comme représenté sur la figure 3.22. Le radar 1 sert à mesurer simultanément la vitesse selon les axes \vec{x}_i et \vec{z}_i ainsi que la hauteur h en appliquant le principe de *beamforming*. Le radar 2 est utilisé pour mesurer la vitesse selon \vec{y}_i .

On fournit en entrée du simulateur les spécifications ($\nu_0 = 77GHz$, $B = 4GHz$, $2TX$, $4RX$) choisies pour correspondre au radar [Inf21] qui sera utilisé par la suite lors des expériences réelles. On génère des points réflecteurs qui se déplacent par rapport aux radars 1 et 2, leur mouvement étant défini comme étant l'opposé de la vitesse et de l'attitude du *Crazyflie* enregistrés par le système de capture de mouvement Vicon lors des tests en vol de début de thèse. Le simulateur génère à une fréquence de $500Hz$ les 8 matrices Doppler qui correspondent aux 8 canaux de chaque radar. On note $\tilde{\eta}_{IMU} = [\tilde{\phi}_{IMU}, \tilde{\theta}_{IMU}, \tilde{\psi}_{IMU}]^T$ l'attitude du drone estimée par l'IMU lors des tests Vicon. Le radar 1 est fixé sur le drone avec un angle $\theta_0 = 30^\circ$ par rapport au sol, et le radar 2 un angle $\phi_0 = 30^\circ$.

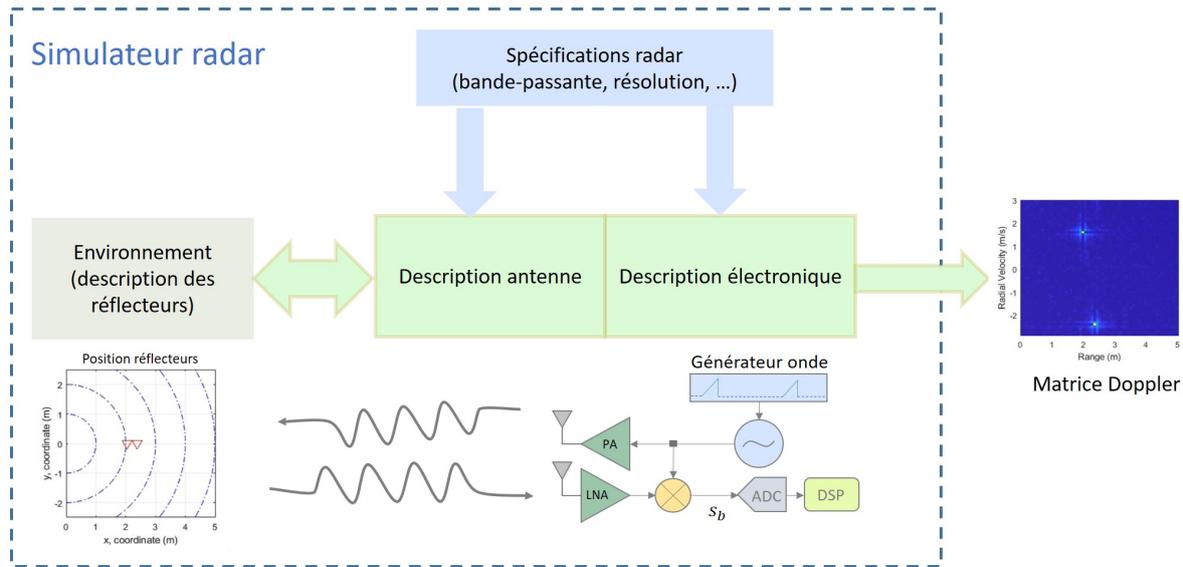


FIGURE 3.21 – Simulateur du Laboratoire d’Architectures Intégrées Radio-fréquences du CEA

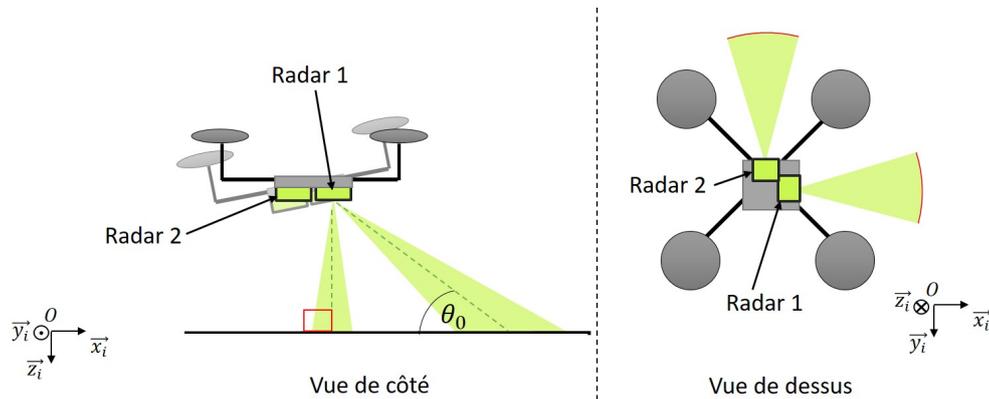


FIGURE 3.22 – Configuration des radars sur le drone et faisceaux orientés virtuellement

À partir du champ de vision du radar 1, on veut obtenir deux faisceaux, un qui est orienté verticalement avec un angle de 90° par rapport au sol pour la mesure de mouvement selon \vec{z}_i et un faisceau oblique, avec un angle de $\theta_0 = 30^\circ$, pour la mesure de mouvement selon \vec{x}_i , voir figure 3.22. Pour maintenir ces faisceaux dans leur position angulaire par rapport au sol, il faut compenser l’attitude du drone $\tilde{\eta}_{IMU}$ qui varie au cours du temps. On calcule donc à partir des mesures du radar 1 à chaque instant les matrices $M_{90^\circ - \tilde{\theta}_{IMU} - \theta_0}(\Delta\nu, R)$ et $M_{-\tilde{\theta}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$, où la première correspond au faisceau vertical et la seconde au faisceau oblique. De la même manière, on calcule à partir des 8 matrices Doppler du radar 2 la matrice $M_{-\tilde{\phi}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$ qui sera utilisée pour la mesure de vitesse selon \vec{y}_i .

On présente sur la figure 3.23 les matrices $M_{90^\circ - \tilde{\theta}_{IMU} - \theta_0}(\Delta\nu, R)$ et $M_{-\tilde{\theta}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$ issues du radar 1 à un instant quelconque du vol du *Crazyflie*. La matrice $M_{90^\circ - \tilde{\theta}_{IMU} - \theta_0}(\Delta\nu, R)$ est utilisée pour calculer la hauteur h et la vitesse v_{z_i} à partir de l’indice i_h et de la formule (3.24) comme expliqué plus haut. À partir de la valeur de h et de la matrice $M_{-\tilde{\theta}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$, l’algorithme de mesure de vitesse 1 permet d’extraire la mesure de vitesse selon \vec{x}_i . Les ronds rouges sur la figure 3.23 représentent le contour du spectre, soit la valeur $\Delta\nu_{R_i}$ détectée pour chaque rayon R_i . Le nombre de rayons R_i à considérer est configuré à $N = 20$, ce qui est

largement suffisant compte tenu de la résolution en distance du radar et de la distance R maximum de la matrice Doppler fixée à $4m$. En effet, pour la valeur de h qui vaut $1.2m$ ici, certains rayons issus du champ de vision ne sont pas attribués car ils correspondent à des distances R qui dépassent la distance maximum. Un mécanisme d'exclusion des mesures associées à ces rayons non-attribués est prévu en complément de l'algorithme 1 afin de ne pas biaiser l'estimation finale de vitesse.

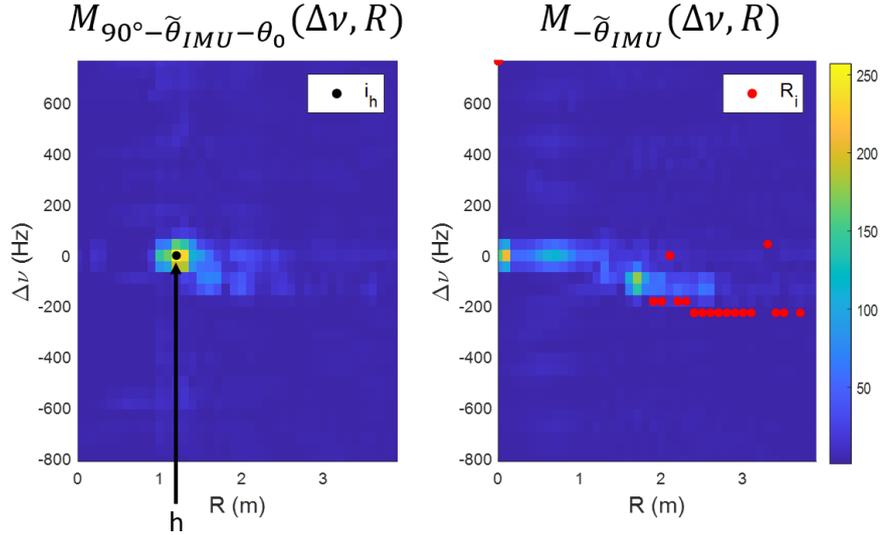
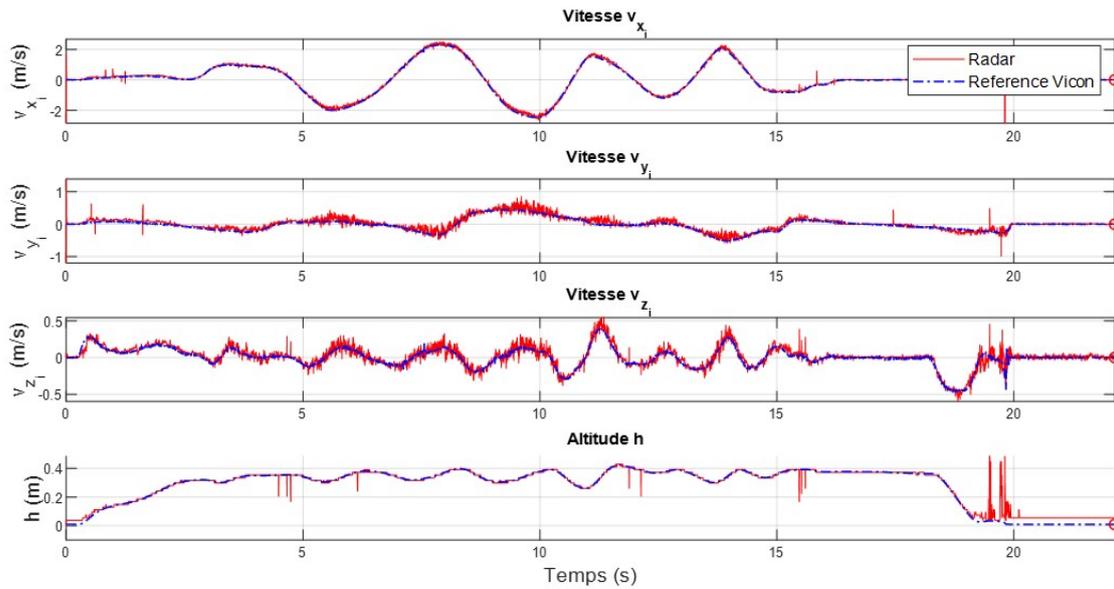


FIGURE 3.23 – Matrices $M_{90^\circ - \tilde{\theta}_{IMU} - \theta_0}(\Delta\nu, R)$ et $M_{-\tilde{\theta}_{IMU}}(\Delta\nu, R)$ issues du radar 1

On présente sur la figure 3.24 la vitesse estimée à partir des mesures du radar obtenues en injectant les données d'un vol réel du *Crazyflie* dans le simulateur. On peut voir que la vitesse et l'altitude issues du radar coïncident bien avec le signal de référence qui provient du système de capture de mouvement Vicon. La mesure du radar contient parfois des valeurs aberrantes, comme lorsqu'on est proche de 0s sur la mesure de vitesse suivant l'axe \vec{y}_i . Celles-ci interviennent lorsque la détection du contour du spectre est mise en défaut, à cause d'un rapport signal sur bruit trop faible dans la matrice Doppler. Néanmoins, le fait d'utiliser plusieurs rayons R_i et de faire la moyenne des vitesses obtenues selon ces différents rayons permet le reste du temps d'annuler cet effet. Le principal intérêt de la mesure de vitesse obtenue avec le radar est qu'elle n'est pas sujette à une dérive due à l'accumulation d'erreurs, et elle permet notamment de bien détecter les phases où la vitesse est nulle. C'est un gros avantage par rapport à la vitesse qui pourrait être obtenue par intégration d'un capteur d'accélération, qui serait soumise, elle, à une dérive croissante dans le temps.

3.2.3.5 Expériences

On réalise maintenant des expériences pour valider l'algorithme de mesure de vitesse et de hauteur en conditions réelles avec un vrai radar. Pour des raisons techniques, on ne valide ici que l'algorithme de mesure de vitesse horizontale et de mesure de la hauteur h . L'intégration d'un radar sur le *Crazyflie* n'a pas été possible lors de la thèse pour des raisons de temps et de technique. En effet, alimenter et interfacer un radar avec le *Crazyflie* aurait nécessité des compétences en électronique qui dépassent le cadre de la thèse. Cependant, on a pu avoir accès lors de la thèse à un radar de la marque Infineon, destiné à des applications


 FIGURE 3.24 – Mesure simulée du radar lors d'un vol réel du *Crazyflie*

dans le domaine automobile [Inf21]. Celui-ci est un radar FMCW de fréquence porteuse $77GHz$, doté de 2 antennes TX et 4 antennes RX. On interface le radar avec un ordinateur par l'intermédiaire d'un environnement de débogage afin d'enregistrer les matrices Doppler issues des 8 canaux afin d'effectuer par la suite l'estimation de vitesse et de hauteur hors-ligne. Pour connaître l'angle entre la ligne de visée du radar et le sol, on connecte un IMU Bosch BNO055 à une carte Arduino dont les axes sont alignés avec la ligne de visée du radar. Cela permettra d'avoir une estimation des angles d'attitude du radar au cours du temps. Les données de l'IMU et du radar sont enregistrées sur l'ordinateur à une fréquence avoisinant les $10Hz$, ce qui est le maximum que l'on puisse obtenir en transférant les données radar via l'environnement de débogage non prévu à cet effet. Les capteurs sont montrés sur la partie droite de la figure 3.25.



FIGURE 3.25 – Dispositif expérimental radar+IMU

Lors des expériences, une personne marche avec le radar devant elle, en maintenant le radar dans une position stable. Le principe est de marcher en suivant une ligne droite marquée au sol de $30m$. On enregistre les données des capteurs ainsi que le parcours via un GPS de smartphone avec l'application *Android GeoTracker*, en horodatant toutes les

données. Les mesures IMU et radar sont enregistrées au même moment sur l'ordinateur et sont donc synchronisées, tandis que les données GPS sont enregistrées sur le smartphone et sont désynchronisées par rapport aux données des capteurs. Il sera possible de comparer les données des capteurs aux données GPS en les recalant approximativement grâce à l'horodatage. Cependant, on ne pourra les comparer que visuellement à cause de cette incertitude temporelle et du fait que les points GPS sont enregistrés par le smartphone de manière très sporadique dans le temps.

On met en place 3 types d'expériences pour valider la mesure de vitesse et de hauteur avec le radar. En plus de la validation visuelle avec les mesures du GPS, la vitesse de déplacement horizontale obtenue avec le radar est intégrée pour comparer la distance obtenue à la fin de l'expérience à la distance théorique de $30m$. La hauteur peut être comparée à la mesure approximative de la hauteur à laquelle la personne maintient le radar. On fera, de plus, des expériences où la vitesse ou la hauteur changent lorsque la personne a parcouru $15m$, afin d'appuyer les résultats.

- **Expérience A** Vitesse \approx constante, $h \approx 1.2m$;
- **Expérience B** Vitesse lente sur $15m$ puis plus rapide sur $15m$, $h \approx 1.2m$; ;
- **Expérience C** Vitesse \approx constante, $h \approx 1.8m$ sur $15m$ puis $h \approx 1.2m$ sur $15m$.

On observe les résultats des expériences A,B et C respectivement sur les figures 3.26, 3.27 et 3.28 :

- Pour ce qui est de la vitesse, le seuil auquel se stabilisent les mesures autour de $20s$ sur la figure 3.26 semble coïncider avec celui des mesures GPS. On peut noter sur la figure 3.27 le changement d'allure qui est bien retranscrit lorsqu'on atteint les $15m$. Sur la figure 3.28, on note que la mesure de vitesse est plus bruitée lorsque $h \approx 1.8m$ que lorsque $h \approx 1.2m$. La raison à cela est qu'une partie du champ de vision du radar n'est pas exploitée. En effet, pour des raisons de rapidité de communication, on transmet les matrices Doppler du radar à l'ordinateur pour des distances radiales jusqu'à $4m$ au maximum. Or, lorsque le radar est maintenu à $h = 2m$ et pour un angle θ_0 de 30° , on a $R = 2/\sin(\pi/6) = 4m$. La moitié du champ de vision correspondant à $\theta_{R_i} \in [\theta_0, \theta_0 + \frac{\pi}{2}]$ n'est donc pas utilisée par l'algorithme, ce qui cause du bruit sur l'estimation finale de vitesse.
- Du point de vue de la distance parcourue, celle que l'on obtient en intégrant la mesure de vitesse du radar semble bien correspondre à la distance théorique de $30m$, pour tout type d'expérience. Pour vérifier cela, on a réalisé 10 expériences de type A. On rassemble les valeurs de distance finale obtenues sur ces 10 expériences dans la table 3.2. Les valeurs que l'on obtient sont proches des $30m$ attendus, avec en moyenne une distance de $29.61m$ et un écart-type de $1.01m$, soit une incertitude de $3cm$ pour $1m$ parcouru. Si l'on considère de plus le fait qu'il existe une incertitude du fait du dispositif expérimental au niveau de l'emplacement de départ et d'arrivée, on peut conclure que la mesure de vitesse via le radar semble précise.
- Du point de vue de la hauteur, on peut voir sur les figures 3.26 et 3.27 que l'on obtient approximativement $1.2m$, ce qui était la hauteur à laquelle on a essayé de maintenir le radar en marchant. Sur la figure 3.28, la différence de hauteur est bien marquée et on retrouve bien le premier seuil à $1.8m$ puis le deuxième à $1.2m$.

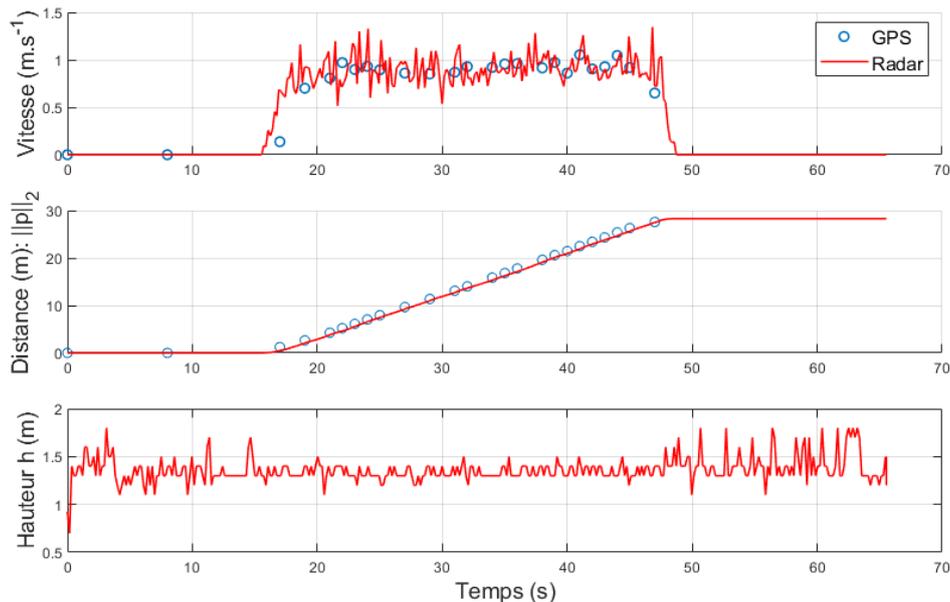


FIGURE 3.26 – Expérience A : vitesse constante

Test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Moyenne \bar{m} (m)	Écart-type σ (m)
Distance finale (m)	31.92	30.46	29.36	28.64	29.30	29.59	28.76	30.07	29.62	28.29	$\bar{m} = 29.61$	$\sigma = 1.01$

TABLE 3.2 – Distance finale lors de l’expérience type A

3.2.3.6 Conclusion sur les mesures radar

On a présenté dans cette sous-section une méthode qui se base sur les mesures d’un radar FMCW MIMO pour en déduire simultanément des informations de vitesse et de hauteur par rapport au sol. Ici, on a considéré des radars MIMO dont les antennes sont arrangées en ligne, ce qui permet d’appliquer le principe de *beamforming* dans un plan $2D$. Lorsque ce plan comprend la direction verticale et horizontale du drone comme sur la figure 3.22, cela permet de mesurer avec le même radar la hauteur, la vitesse selon l’axe vertical et la vitesse selon l’axe horizontal. Cette approche a été d’abord testée en simulation, puis validée expérimentalement, ce qui a permis de confirmer la précision des mesures de vitesse et de hauteur.

Enfin, on a présenté ici des résultats de simulation et expérimentaux avec le radar Infineon $77GHz$ auquel on avait accès pendant la thèse. Sur ce radar, les antennes sont disposées en ligne tel que présenté en 3.2.3.3 dans le paragraphe sur le *beamforming* en $2D$. D’autres radars FMCW MIMO tels que [Tex21] ont des antennes disposées sur un plan, ce qui rend possible l’extension du principe du *beamforming* $2D$ en $3D$ [Bal16]. Potentiellement, on pourrait alors balayer virtuellement le faisceau du radar pour effectuer des mesures selon les trois composantes du mouvement du drone. On pourrait alors obtenir avec un seul radar les mêmes informations qu’avec les deux radars embarqués sur le drone de la figure 3.22.

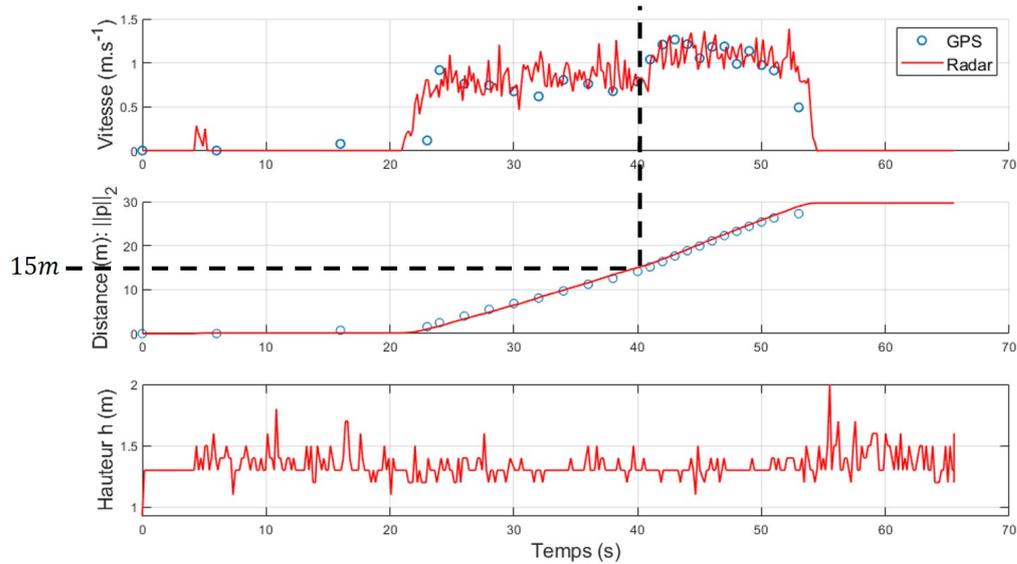


FIGURE 3.27 – Expérience B : vitesse qui change à 15m

3.3 Conclusion

On a listé dans ce chapitre les différentes sources d'informations qui sont disponibles au niveau du drone pour estimer au mieux son mouvement. Celles-ci peuvent être issues d'un modèle du mouvement, de capteurs embarqués ou de cartes de l'environnement. Le chapitre précédent détaillait la modélisation et la commande du drone ; ici on s'est intéressé aux capteurs que l'on peut embarquer sur le drone. On propose dans cette thèse de coupler des mesures radar à celles issues de la centrale inertielle du drone pour estimer sa vitesse de translation. On a alors montré que les mesures de l'accéléromètre embarqué sur le drone permettaient de mesurer directement sa vitesse linéaire. Ensuite, on a développé un algorithme de traitement des mesures d'un radar FMCW MIMO, qui permet de mesurer sa vitesse de déplacement horizontale et verticale, ainsi que sa hauteur par rapport au sol. Les différentes mesures de capteurs présentées dans ce chapitre seront utilisées dans le prochain chapitre lors de la phase d'estimation de la vitesse du drone.

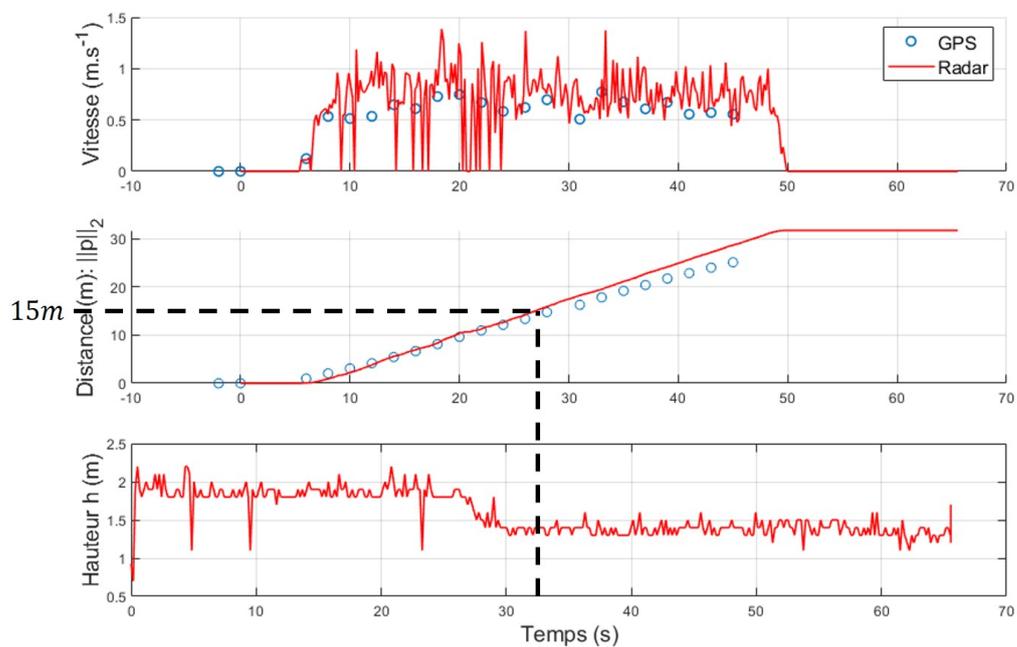


FIGURE 3.28 – Expérience C : hauteur qui change à 15m

Chapitre 4

Synthèse d'estimateur pour un système en boucle fermée : application au drone

Dans ce chapitre, on va utiliser les informations disponibles localement au niveau de l'agent pour estimer son mouvement. Dans le cas du drone que l'on considère ici, ces informations proviennent d'un modèle du mouvement issu du chapitre 2, et des signaux disponibles au niveau du microcontrôleur, comme les mesures de capteurs embarqués inertiels et radar étudiés dans le chapitre 3. Le mouvement du drone est décrit par des grandeurs d'attitude, de vitesse linéaire et de position. L'estimation de l'attitude est déjà réalisée sur le microcontrôleur du *Crazyflie* et n'est pas abordée dans cette thèse. Les grandeurs que l'on veut donc obtenir ici sont la vitesse et la position du drone. Dans le contexte de navigation sans signaux d'infrastructure, la position n'est pas accessible à partir des mesures et du modèle. On applique alors le principe de navigation à l'estime (*dead-reckoning*), qui consiste à calculer la position via l'intégration numérique des signaux de vitesse et d'attitude du drone. Cette intégration implique une dérive de la position estimée par rapport à la position réelle, à cause de l'accumulation d'erreurs au cours du temps. L'objectif de ce chapitre est de construire un estimateur de vitesse le plus performant possible, afin de limiter l'accumulation d'erreurs lors de l'intégration et donc la dérive de position. Par ailleurs, afin de rendre la solution embarquable sur un microcontrôleur comme celui du drone, cet estimateur devra avoir un coût de calcul aussi faible que possible.

Dans un premier temps, on étudie les structures habituelles d'estimateurs de la littérature sur les drones. Celles-ci reposent notamment sur des estimateurs de type "filtre de Kalman", synthétisés à partir d'un modèle du drone en boucle ouverte (BO), c'est-à-dire sans prendre en compte le correcteur qui asservit son attitude, voir la figure 4.1.

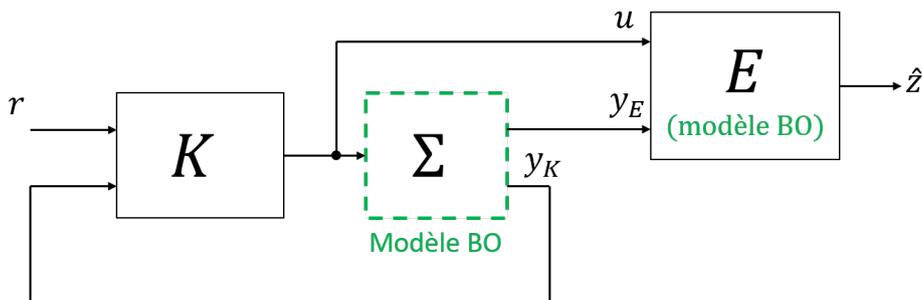


FIGURE 4.1 – Estimateur basé sur un modèle de la boucle ouverte (BO)

Cependant, étant donné que la dynamique du drone est régie par son correcteur, il paraît plus intéressant de prendre en compte son effet dans le modèle de synthèse de l’estimateur. On propose donc ici de synthétiser l’estimateur à partir d’un modèle de la boucle fermée du drone (BF), voir la figure 4.2. Dans ce cas-là, la dynamique associée au rebouclage avec le correcteur est directement prise en compte dans le modèle de synthèse. On cherchera alors à comparer l’approche de synthèse d’estimateur basée sur le modèle BO et celle basée sur le modèle BF, en termes de performance d’estimation et de complexité d’implémentation.

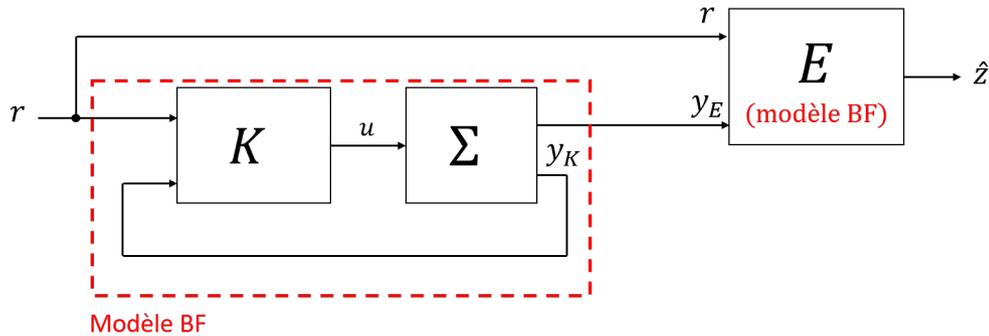


FIGURE 4.2 – Estimateur basé sur un modèle de la boucle fermée (BF)

Dans ces deux approches, dites séquentielles, le correcteur est fixé au préalable et on cherche à construire un estimateur le plus performant possible étant donné le drone asservi par ce correcteur. Dans un second temps, on peut se demander si l’estimateur pourrait bénéficier d’un réglage particulier du correcteur qui influe sur son modèle de synthèse. En effet, le cahier des charges sur l’asservissement du drone étant faiblement contraint, cela laisse des libertés au niveau du réglage de correcteur. On propose donc d’exploiter ces degrés de liberté pour effectuer une synthèse conjointe d’un correcteur/estimateur, comme représenté sur la figure 4.3, afin de maximiser la performance d’estimation tout en remplissant les objectifs en matière d’asservissement fixés par le cahier des charges. On comparera cette approche de synthèse conjointe à celle de synthèse séquentielle de la section précédente, notamment en termes de coût d’implémentation et de performance d’estimation, et ce, en fonction du niveau de contraintes fixé par le cahier des charges sur l’asservissement.

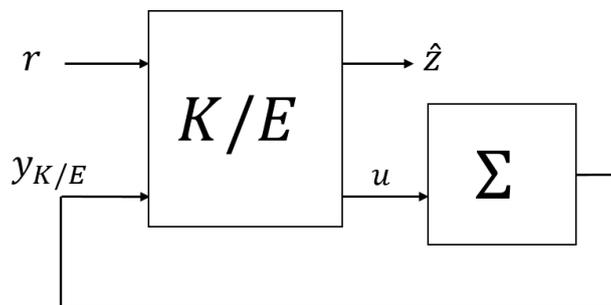


FIGURE 4.3 – Structure conjointe de correcteur/estimateur

4.1 Présentation du problème

Notre objectif est de synthétiser un estimateur de la vitesse de translation du drone qui soit le plus performant et le moins coûteux en calculs possible. Dans le chapitre 2, on a montré

que le drone était un système instable et donc nécessairement contrôlé, au moins en attitude, afin de lui permettre de voler correctement. La question que l’on se pose dans ce chapitre est de savoir quel impact peut avoir le correcteur sur la performance de l’estimateur. Pour cela, on va tout d’abord chercher à voir si l’estimateur peut bénéficier de la prise en compte du correcteur dans son modèle de synthèse, puis on s’interrogera sur comment synthétiser un correcteur qui maximise la performance de l’estimateur.

4.1.1 Problématique générale

On aborde tout d’abord la problématique d’un point de vue général puis on la reliera plus spécifiquement à l’application drone dans la prochaine sous-section.

4.1.1.1 Modèle de synthèse d’estimateur

Le drone avec son correcteur d’attitude et son estimateur de vitesse peut être représenté sous la forme des systèmes des figures 4.1 et 4.2, en fonction du modèle utilisé pour synthétiser l’estimateur. Il correspond à un système noté Σ , dont une partie de l’état est asservie par un correcteur K , et dont une partie de l’état doit être estimée par un estimateur E placé en dehors de la boucle d’asservissement.

L’objectif ici est de synthétiser un estimateur E le plus performant possible. La synthèse s’effectuant à partir d’un modèle du système, la question est de savoir quel système modéliser.

Modèle du système en boucle ouverte (BO). Une première solution consiste à synthétiser l’estimateur à partir d’un modèle du système en boucle ouverte, c’est-à-dire sans prendre en compte le correcteur. Dans le cas du drone, le modèle dynamique initialement obtenu est non-linéaire, et représente le comportement dynamique du drone non-asservi qui est instable. Ce modèle est sensé représenter un comportement au plus proche de la dynamique réelle du drone sur un large domaine de vol, lorsqu’il est soumis à des signaux d’entrée (force de poussée, couples) quelconques. Cependant, on peut se demander si l’effort de synthétiser un estimateur à partir d’un modèle non-linéaire, de plus instable, est nécessaire, sachant que dans le cas du drone considéré dans cette thèse, le domaine de vol va toujours se situer proche d’un point de fonctionnement correspondant au vol stationnaire.

Dans ce cas, il peut être plus judicieux d’utiliser le modèle linéarisé autour du point de fonctionnement du drone correspondant au vol stationnaire. La dynamique représentée par le modèle est toujours instable, mais celui-ci permet d’utiliser des méthodes de synthèse d’estimateurs pour les systèmes linéaires, qui requièrent un effort d’analyse moins important que celles pour les systèmes non-linéaires.

Modèle du système en boucle fermée (BF). Les modèles de la boucle ouverte représentent la dynamique du drone non-asservi, pour des signaux d’entrée quelconques. Cependant, comme ce système est instable par nature, il doit être asservi au moins pour lui permettre de voler de façon stable. Le correcteur permet alors de stabiliser le système et de lui imposer une dynamique particulière, notamment, il peut avoir un effet linéarisant sur le comportement initialement non-linéaire [Bla34]. La dynamique du système asservi devrait donc être moins complexe qu’en boucle ouverte, et elle devrait pouvoir être représentée par un modèle linéaire d’ordre moins important que le modèle en boucle ouverte. Cela permettrait d’avoir un estimateur plus simple et donc moins coûteux en calcul pour le microcontrôleur.

Dans un premier temps, il s’agira donc de comparer la performance et le coût de calcul des estimateurs que l’on peut synthétiser à partir de ces différents modèles BO et BF. Si l’estimateur synthétisé à partir d’un modèle de la boucle fermée BF présente un intérêt en matière de performance d’estimation et d’ordre de complexité, alors on peut aussi se demander s’il serait possible de régler le correcteur de telle manière à améliorer la performance de l’estimateur.

4.1.1.2 Synthèse conjointe

La question de la synthèse conjointe d’un correcteur et d’un estimateur fait sens, notamment parce que le cahier des charges sur l’asservissement du drone est peu contraint, ce qui laisse une certaine liberté au niveau du choix de la dynamique imposée par le correcteur. On peut alors imaginer synthétiser un correcteur qui permette d’optimiser la performance de l’estimateur, tout en respectant le cahier des charges en matière d’asservissement. De plus, d’un point de vue pratique, le correcteur et l’estimateur du drone sont tous les deux programmés sur le même microcontrôleur, qui a accès à tous les signaux de référence, de commande et de mesure, échantillonnés à la même fréquence. On pourrait alors chercher à synthétiser une seule et même entité de correcteur/estimateur, chargée de commander le drone et d’estimer sa vitesse à partir des mêmes signaux d’entrée. Potentiellement, par rapport à une approche dite séquentielle, où le correcteur et l’estimateur sont synthétisés successivement, l’approche de synthèse conjointe permettrait donc une meilleure estimation de la vitesse, tout en ayant une certaine mise en commun des calculs qui permettrait de réduire le coût d’implémentation de la solution. En effet, on peut par exemple noter que dans le cas de la synthèse conjointe, l’ordre de complexité de l’ensemble correcteur/estimateur ne dépend qu’une seule fois de la complexité du modèle du système, contre deux fois lors de la synthèse séquentielle.

On résume sur la figure 4.4 les différents cheminements possibles pour réaliser la synthèse d’un correcteur K et d’un estimateur E à partir du système Σ :

- Bleu ($\Sigma \rightarrow K \rightarrow E$) : On appelle ce cheminement synthèse séquentielle de correcteur et d’estimateur. On synthétise tout d’abord un correcteur K pour imposer une dynamique fixée par le cahier des charges, puis on synthétise un estimateur à partir du modèle du système BO ou BF. C’est la démarche qui sera adoptée dans la section 4.2, où l’estimateur sera synthétisé pour le drone asservi par son correcteur PID d’origine.
- Orange ($\Sigma \rightarrow K + E$) : Cela correspond à la synthèse conjointe d’un correcteur K et d’un estimateur E . En plus des intérêts potentiels discutés plus haut, cela permet de supprimer une étape de conception en réalisant en une fois la synthèse du correcteur et de l’estimateur. C’est la démarche qui sera développée dans la section 4.3, et comparée à l’approche de synthèse séquentielle.
- Vert ($\Sigma \rightarrow E \rightarrow K$) : On synthétise d’abord un estimateur E pour le système Σ , représenté obligatoirement par son modèle BO. Ensuite, on synthétise un correcteur K , ce qui modifiera potentiellement la performance d’estimation. Cette approche ne fait pas sens dans notre cas car elle limite les possibilités pour la synthèse de l’estimateur, or c’est le cœur du problème considéré ici.

Par la suite, on comparera donc les approches de synthèse séquentielle et conjointe (cheminements bleu et orange), afin de voir laquelle permet de répondre au mieux à nos objectifs, à savoir obtenir la meilleure estimation possible de la vitesse du drone tout en ayant un coût d’implémentation de la solution faible.

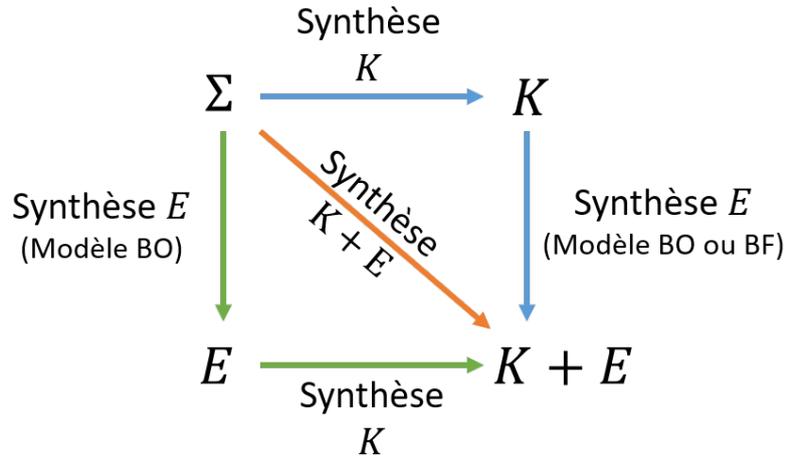


FIGURE 4.4 – Cheminements possibles pour la synthèse de correcteur K et d'estimateur E

4.1.2 Problématique appliquée au drone

4.1.2.1 Signaux présents sur le microcontrôleur

Comme dit précédemment, tous les signaux du drone sont accessibles sur le même microcontrôleur embarqué noté μC sur le schéma 4.5. On résume ci-dessous les différents signaux échangés au niveau du microcontrôleur.

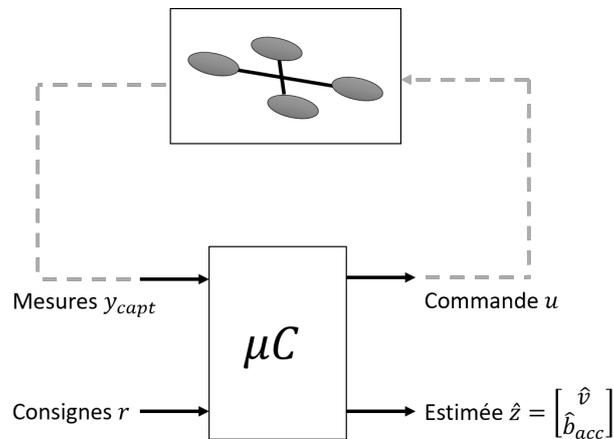


FIGURE 4.5 – Signaux échangés par le microcontrôleur (μC) du drone

Signaux d'entrée du microcontrôleur

Consignes r Les signaux de consigne sont regroupés dans un vecteur noté r , qui est constitué des angles de consigne $\eta_c = [\phi_c, \theta_c, \psi_c]^T$ et de la poussée de consigne T_c , tel que $r = [\eta_c^T, T_c]^T$.

Mesures y_{capt} Le vecteur y_{capt} correspond aux mesures accessibles par le microcontrôleur, issues des capteurs embarqués du drone : l'IMU et le radar. L'IMU contient un accéléromètre et un gyroscope qui mesurent respectivement l'accélération \tilde{a}_{acc} et la vitesse

angulaire $\tilde{\omega}_{gyro}$, et dont les mesures sont combinées au sein de l'IMU pour fournir une estimation de l'attitude $\tilde{\eta}_{IMU}$. Les mesures du radar notées \tilde{v}_{rdr} permettent d'accéder à la vitesse linéaire v du drone par le biais de l'algorithme de mesure de vitesse présenté dans la section 3.2.3 du chapitre 3. Le lien entre ces différentes mesures et les grandeurs dynamiques du modèle du drone est :

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_{IMU}(t) &= F[\eta + w_{IMU}](t) \\ \tilde{\omega}_{gyro}(t) &= F[\omega + w_{gyro}](t) \\ \tilde{a}_{acc}(t) &= F[-\frac{\mu_M}{m}v + b_{acc} + w_{acc}](t) \\ \tilde{v}_{rdr}(t) &= v(t) + w_{rdr}(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mu_M = \mathbf{diag}(\mu_{xy}, \mu_{xy}, \mu_z)$; la valeur de la puissance des bruits blancs w_{IMU} , w_{gyro} , w_{acc} , w_{rdr} est donnée dans l'annexe A.10; le modèle de la dynamique du biais de l'accéléromètre b_{acc} a été donnée en (3.11) page 91 et $F[.]$ est l'opérateur correspondant au filtre passe-bas de fréquence de coupure $80Hz$ ($500rad/s$) implémenté dans le logiciel du *Crazyfly*, dont la fonction de transfert a été donnée en (2.18) page 47. Dans la suite de ce chapitre portant sur l'estimation, à part quand cela est spécifié, le filtre F est négligé. En effet, les dynamiques des vitesses de translation que l'on cherche à estimer ici sont de l'ordre de $10Hz$ ($63rad/s$) et l'effet du filtre est donc négligeable à ces fréquences-là.

Signaux de sortie du microcontrôleur

Commande u Le signal de commande u qui est issu du correcteur a été étudié dans le chapitre 2. On réabordera la problématique de la commande du drone dans la section 4.3, étant donné que l'on cherchera à synthétiser de manière conjointe le correcteur et l'estimateur.

Estimée \hat{z} Le vecteur \hat{z} contient les grandeurs dynamiques à estimer, à savoir la vitesse de translation du drone v ainsi que le biais de l'accéléromètre b_{acc} , tel que $\hat{z} = [\hat{v}^\top, \hat{b}_{acc}^\top]^\top$. L'objectif dans ce chapitre est de fournir la meilleure estimation possible de z à partir des différents signaux disponibles au niveau du microcontrôleur.

4.1.3 Structure du modèle

Comme présenté dans le chapitre 2, le modèle dynamique du drone se décompose principalement en trois sous-systèmes en cascade, associés aux vitesses angulaires, angles d'attitude et vitesses linéaires comme représenté sur la figure 4.6. Le modèle non-linéaire correspondant aux trois sous-systèmes en boucle ouverte a été donné à l'équation (2.8) page 34, et sa version linéarisée au point d'équilibre de vol stationnaire en (2.14) page 40. Le modèle de poussée correspond à l'équation (A.5) page 160. Enfin, le modèle de la dynamique du biais b_{acc} de l'accéléromètre a été donné en (3.11) page 91.

On verra par la suite que dans la littérature sur les drones, lorsque le modèle de la boucle ouverte (BO) est considéré, il correspond généralement au sous-système des angles d'attitude et des vitesses linéaires, noté "Modèle BO 1" sur la figure 4.6. Cela permet d'utiliser comme signaux d'entrée du modèle les signaux de mesure $\tilde{\omega}_{gyro}$ du gyroscope intégré dans l'IMU embarqué sur le drone. De manière alternative, le modèle BO peut comprendre seulement le sous-système des vitesses linéaires, voir "Modèle BO 2" sur la figure 4.6. Dans ce cas, les signaux d'entrée du modèle sont les angles d'attitude du drone dont l'IMU produit une estimée notée $\tilde{\eta}_{IMU}$. Enfin, par la suite, lorsque le modèle de la boucle fermée (BF) est

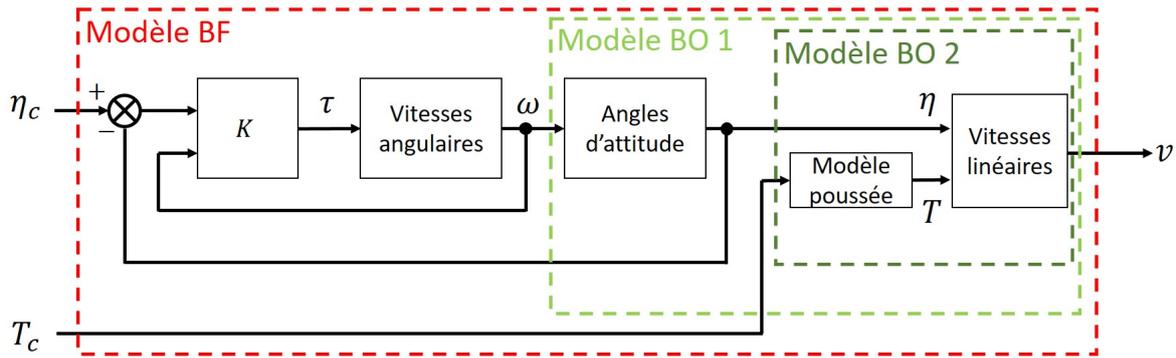


FIGURE 4.6 – Structure du modèle dynamique du drone asservi en attitude

considéré, il correspond à l'équation (2.94) page 78 et il comprend alors le rebouclage induit par le correcteur *PID* d'origine sur le *Crazyflie*, voir "Modèle BF" sur la figure 4.6.

4.2 Estimateur hors boucle d'asservissement

La vitesse du drone va être estimée à l'aide d'un estimateur, dont le rôle est de reconstruire les signaux à estimer à partir des signaux mesurés et d'un modèle du système. Cet estimateur devra de plus pouvoir facilement être implémenté sur le microcontrôleur du drone, et donc avoir un faible coût de calcul. Dans cette section, on considère un estimateur situé en dehors de la boucle d'asservissement, comme représenté sur les figures 4.1 et 4.2.

Il existe deux types de structures d'estimateurs, la structure de filtre et celle d'observateur [Bay12]. La structure de filtre correspond à une matrice de fonctions de transfert sans structure particulière qui admet en entrée des signaux mesurés du système et produit en sortie les signaux estimés [Gel74]. Cela est par exemple le cas des structures des filtres de Wiener [Wie64] ou des filtres H_∞ [ST92]. Contrairement à la structure de filtre, celle d'observateur a une structure particulière car elle contient un modèle de la dynamique du système¹. Dans le cadre de signaux d'entrée déterministes, cela correspond typiquement à un observateur de Luenberger [Lue64] et dans le cadre stochastique, à un observateur de type Kalman [Kal60]. Dans la littérature, les algorithmes de navigation d'agents mobiles comme ceux pour le drone reposent principalement sur des estimateurs à la structure d'observateur type Kalman [MHW⁺19] que l'on appelle généralement, par abus de langage, "filtre de Kalman".

Dans cette section, on commence par présenter les approches adoptées dans la littérature pour estimer la vitesse du drone. On verra qu'elles se basent principalement sur le filtre de Kalman synthétisé à partir d'un modèle de la boucle ouverte du drone. On compare ensuite ces approches à celle que l'on propose, à savoir utiliser un gain fixe de Kalman synthétisé à partir d'un modèle de la boucle fermée du drone. La comparaison sera réalisée vis-à-vis du coût de calcul puis de la performance d'estimation. Pour cela, on utilisera les estimateurs présentés dans cette section pour reconstruire la vitesse du drone à partir de signaux réels, obtenus lors d'expériences réalisées en début de thèse dans l'enceinte d'un système de capture de mouvement Vicon.

1. Il est important de noter que les méthodes de synthèse de filtres nécessitent que le modèle du système soit stable, contrairement à celles de synthèse d'observateurs [Bay12]. Dans notre cas, le modèle de la translation du drone asservi est stable, donc on peut aussi bien utiliser la structure filtre que celle d'observateur.

4.2.1 Estimateurs de la littérature sur les drones

Un problème d’estimation standard consiste à estimer le vecteur z du système Σ représenté sur la figure 4.7, lorsqu’il est soumis à un vecteur d’entrées exogènes w . Le principe de l’estimateur E est de donner une estimation de z notée \hat{z} , étant donné un vecteur d’entrée contenant des signaux de mesure y_E . L’objectif de l’estimateur est alors de minimiser l’erreur d’estimation $e = z - \hat{z}$.

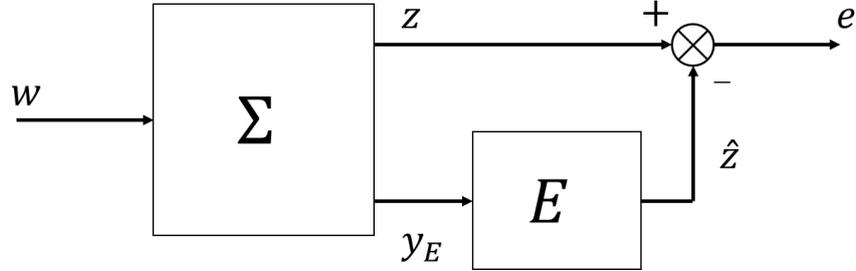


FIGURE 4.7 – Problème d’estimation sous forme standard

Comme les signaux de commande et de mesure sont entachés de bruits, ils deviennent des signaux stochastiques qui sont caractérisés par une distribution de probabilité. Dans ce cas, on cherche à estimer la distribution de probabilité de z , sachant les signaux d’entrée y_E . Dans le cas où le modèle probabiliste associé aux signaux est quelconque, le calcul de la distribution de probabilité de z peut être d’une complexité exponentielle [TBF05]. Il existe cependant un cas où le calcul d’une solution est efficace, c’est-à-dire en temps polynomial, c’est lorsque les modèles probabilistes correspondent à des distributions de type gaussiennes. Dans ce cas, la distribution de probabilité de z peut être représentée seulement par son premier et deuxième moment, c’est-à-dire sa moyenne et sa covariance. Le filtre de Kalman est énoncé dans l’hypothèse d’une distribution gaussienne, et permet alors de calculer une solution optimale, dans le sens où elle minimise la variance de l’erreur d’estimation $e = z - \hat{z}$ notée $E\{(z - \hat{z})^\top(z - \hat{z})\}$ où $E\{.\}$ est l’opérateur espérance [Sim06, Bay12].

4.2.1.1 Filtre de Kalman (KF)

Équations du filtre de Kalman Soit un système linéaire de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + w(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + v(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

où $x(t)$ est l’état du système à l’instant t , w est appelé bruit d’état et v bruit de mesure. Le filtre de Kalman repose sur l’hypothèse que w et v sont des bruits blancs gaussiens tels que $w(t) \sim \mathcal{N}(0, Q(t))$ et $v(t) \sim \mathcal{N}(0, R(t))$. Dans le cas où $z = x$ (on cherche à estimer l’état entier) et $y_E = y$, les équations du filtre de Kalman sont [Sim06] :

$$K(t) = P(t)C(t)^\top R(t)^{-1} \quad (4.3a)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t)}_{\text{prédiction}} + \underbrace{K(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t))}_{\text{correction}} \quad (4.3b)$$

$$\dot{P}(t) = -P(t)C(t)^\top R(t)^{-1}C(t)P(t) + A(t)P(t) + P(t)A(t)^\top + Q(t) \quad (4.3c)$$

L’équation (4.3b) qui permet de calculer l’estimée \hat{x} peut être scindée en deux parties : la partie de gauche que l’on appelle phase de prédiction, qui consiste à prédire l’état à partir

du modèle du système (4.2), et la partie de droite appelée phase de correction, qui permet de corriger cette prédiction à partir des informations contenues dans les mesures y et du gain de Kalman K .

Gain fixe de Kalman (K) Lorsque le système (4.2) est linéaire temps invariant (LTI), c'est-à-dire lorsque A , B , C , Q et R sont indépendantes du temps, alors le gain du filtre de Kalman tend vers une valeur indépendante du temps qui vaut :

$$K = PC^{\top}R^{-1} \quad (4.4)$$

où P est la solution de l'équation de Riccati suivante :

$$AP + PA^{\top} + Q - PC^{\top}R^{-1}CP = 0 \quad (4.5)$$

et alors l'équation (4.3b) devient :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (4.6)$$

Dans le cas LTI, il n'y a donc plus nécessité de connaître la valeur des différentes matrices à chaque instant et de résoudre l'équation de Riccati (4.3c) en ligne. Cela diminue grandement le coût en calculs du filtre et le rend plus facilement embarquable sur un microcontrôleur.

Implémentation Les équations du filtre de Kalman (4.3) sont données en temps continu. Cependant, l'implémentation du filtre sur un microcontrôleur est réalisée en temps discret. Pour cela, le modèle dynamique (4.2) est discrétisé et le gain de Kalman est mis à jour à l'aide d'un algorithme qui calcule à chaque pas de temps sa nouvelle valeur. Cet algorithme a une structure qui se découpe en deux étapes : une étape de prédiction et une étape de correction. La première, sert à prédire l'état x et sa covariance associée à partir du modèle du système, connaissant l'état à l'instant précédent et la commande appliquée au système à l'instant présent. La phase de correction sert ensuite à mettre à jour cette prédiction, étant donné le vecteur de mesures et le gain de Kalman calculé à cet instant. Cet algorithme est donné dans l'annexe A.9.

Dans la littérature sur les drones On trouve l'approche basée sur un modèle linéarisé du drone en boucle ouverte et un gain de Kalman fixe (K) dans [LMBM14], où on estime la vitesse latérale et longitudinale d'un drone seulement à partir des mesures d'un IMU. Le modèle utilisé dans cette approche est LTI, et prend en entrée les vitesses angulaires $\delta\tilde{\omega}_{gyro}$ mesurées par le gyroscope :

$$\begin{cases} \delta\dot{\phi} &= \delta\tilde{\omega}_{gyro,x} \\ \delta\dot{\theta} &= \delta\tilde{\omega}_{gyro,y} \\ \delta\dot{v}_x &= -g\delta\theta - \frac{\mu_{xy}}{m}\delta v_x \\ \delta\dot{v}_y &= g\delta\phi - \frac{\mu_{xy}}{m}\delta v_y \end{cases} \quad (4.7)$$

ce qui correspond au modèle linéarisé au point d'équilibre $\bar{x} = 0$ donné précédemment à l'équation (2.14) du chapitre 2, et représenté en tant que "Modèle BO 1" sur la figure 4.6. Ici, la loi de commande du drone n'est pas prise en compte explicitement car l'entrée du modèle est la mesure du gyroscope $\delta\tilde{\omega}_{gyro}$, c'est donc ce qu'on appelle un modèle de la boucle ouverte (BO). Dans cette approche, la phase de correction du filtre est effectuée à partir des mesures de l'accéléromètre qui sont proportionnelles à la vitesse δv du drone, voir équation 3.16 du chapitre 3. Dans [LMBM14], le gain fixe de Kalman permet alors d'estimer l'état complet qui vaut $\delta x = [\delta\phi, \delta\theta, \delta v_x, \delta v_y]^{\top}$.

4.2.1.2 Filtre de Kalman étendu (EKF)

Le filtre de Kalman tel que présenté précédemment se limite aux systèmes linéaires, or le modèle du drone initialement obtenu est non-linéaire. Cela peut alors présenter un intérêt de considérer le modèle non-linéaire plutôt que le modèle linéarisé, car c'est celui qui est sensé être le plus proche du comportement réel du drone. Le filtre de Kalman étendu a été développé pour permettre d'estimer l'état dans le cas de systèmes non-linéaires, tels que :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), w(t), t) \\ y(t) = h(x(t), v(t), t) \end{cases} \quad (4.8)$$

où $f(\cdot)$ et $h(\cdot)$ sont des fonctions non-linéaires. L'algorithme suit la même trame que celui du filtre de Kalman linéaire, sauf qu'ici l'état et la mesure sont prédits via les fonctions non-linéaires du modèle (4.8). Pour le calcul de la matrice de covariance, le modèle non-linéaire est linéarisé autour de l'état estimé le plus récent à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre [AM12]². Les équations associées au filtre de Kalman étendu sont [Sim06] :

$$K(t) = P(t)H(t)^\top R(t)^{-1} \quad (4.9a)$$

$$\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), u(t), 0, t) + K(t)(y(t) - h(\hat{x}(t), 0, t)) \quad (4.9b)$$

$$\dot{P}(t) = -P(t)H(t)^\top R(t)^{-1}H(t)P(t) + F(t)P(t) + P(t)F(t)^\top + Q(t) \quad (4.9c)$$

où $F(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}(t), u(t), t}$ et $H(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}(t), t}$. Par rapport au filtre de Kalman temps variant, le filtre de Kalman étendu nécessite une étape supplémentaire qui consiste à linéariser les fonctions non-linéaires f et h à chaque instant. Son coût calculatoire sera donc supérieur à celui du filtre de Kalman linéaire. De la même manière que précédemment, l'algorithme du filtre de Kalman étendu est implémenté en temps discret, comme décrit dans l'annexe A.9.

Dans la littérature sur les drones L'utilisation d'un filtre de Kalman étendu pour la navigation est fréquente car elle permet d'utiliser directement le modèle non-linéaire (2.8) du drone, sensé décrire un comportement dynamique au plus proche du comportement réel. On retrouve ce type d'approche dans [LMBM14, AKDM13, DJW⁺18]. Dans [LMBM14] et [AKDM13], le modèle dynamique est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\phi} &= \tilde{\omega}_{gyro,x} + s_\phi t_\theta \tilde{\omega}_{gyro,y} + c_\phi t_\theta \tilde{\omega}_{gyro,z} \\ \dot{\theta} &= c_\phi \tilde{\omega}_{gyro,y} - s_\phi \tilde{\omega}_{gyro,z} \\ \dot{v}_x &= -gs_\theta - \frac{\mu_{xy}}{m} v_x \\ \dot{v}_y &= gs_\theta c_\theta - \frac{\mu_{xy}}{m} v_y \end{cases} \quad (4.10)$$

où les entrées du modèle sont les vitesses angulaires $\tilde{\omega}_{gyro}$ mesurées par le gyroscope et le vecteur de mesure est constitué des mesures de l'accéléromètre, ce qui correspond au "Modèle BO 1" de la figure 4.6, de manière similaire à l'approche linéaire présentée dans le paragraphe sur le filtre de Kalman linéaire. Dans [DJW⁺18], le drone intègre des capteurs supplémentaires par rapport à [LMBM14] et [AKDM13], comme un sonar pour mesurer la hauteur du drone et une caméra pour mesurer la vitesse linéaire à partir du flux optique. Dans [DJW⁺18], les entrées du modèle sont donc les mesures du gyroscope ainsi que celles de l'accéléromètre pour prédire le changement de hauteur, et la phase de correction du filtre est

2. Il faut noter que le filtre de Kalman étendu n'admet pas de preuve de convergence globale à cause des linéarisations successives en différents points de fonctionnement.

effectuée à partir du vecteur des mesures des autres capteurs (caméra flux optique, sonar). Toutes ces approches précédemment citées sont basées sur un modèle du drone en boucle ouverte, étant donné que la loi de commande n’est pas prise en compte dans le modèle.

4.2.1.3 Filtre particulaire (PF)

Un autre type d’approche que l’on trouve dans la littérature est celle basée sur les filtres particulaires, aussi appelés méthodes de Monte-Carlo séquentielles. L’intérêt de ces techniques est de s’affranchir complètement des hypothèses sur les distributions faites dans les filtres de Kalman. Cela peut mener à un meilleur résultat que le filtre de Kalman dans le cas où les distributions de probabilités ne sont pas strictement gaussiennes. Le principal inconvénient de ces techniques est qu’elles ont un coût de calcul important et sont donc difficilement implémentables sur un microcontrôleur. Le principe des filtres particulaires est d’approximer la densité de probabilité à partir de la répartition d’un grand nombre de particules de taille n dans l’espace d’état, qui représentent chacune une valeur possible de l’état. Les principales étapes de l’algorithme d’un filtre particulaire sont [Gro13, TBF05] :

- Générer aléatoirement les particules autour de l’état prédit avec la fonction $f(.)$ du modèle (4.8) ;
- Calculer la mesure prédite pour chaque particule avec la fonction $h(.)$ du modèle (4.8) ;
- Calculer le poids associé à chaque particule comme l’écart entre la mesure prédite et la mesure réelle ;
- Sélectionner les particules ayant le poids le plus élevé et en déduire l’état comme une moyenne pondérée.

Il existe plusieurs versions de filtres particulaires qui varient au niveau de l’étape de sélection des particules au poids le plus élevé, appelée rééchantillonnage (*resampling*) voir [AMGC02]. Par la suite, on utilisera la version appelée filtre particulaire *bootstrap* qui est généralement préférée dans la littérature pour son efficacité et sa simplicité d’implémentation [AMGC02]. L’idée est de faire plusieurs tirages avec remise des particules dont la probabilité d’apparition est donnée par leur poids. Statistiquement, les particules ayant le poids le plus élevé ont donc plus de chance d’être sélectionnées plusieurs fois, ce qui permet d’éliminer les particules de poids faible sans avoir recours à une méthode de sélection déterministe [GSS93, Can07].

Dans la littérature sur les drones On retrouve ce type d’approche dans [Rig12, MCL14]. Dans [MCL14] notamment, l’état du drone est estimé à partir de son modèle non-linéaire en boucle ouverte ("Modèle BO 1"), d’un capteur GPS pour mesurer la position, d’un capteur de vitesse type flux optique et d’un IMU. Les approches [Rig12, MCL14] ne sont validées qu’en simulation, une implémentation sur un microcontrôleur serait en effet difficile à cause du coût calcul de la solution. En guise d’ordre de grandeur, dans [Rig12], 1600 particules de la taille $n = 4$ du vecteur d’état sont utilisées pour l’estimation. Dans les conditions de simulation de [Rig12], la durée de simulation avec le filtre particulaire (PF) est plus de 6 fois supérieure que celle avec un filtre de Kalman étendu (EKF), mais l’erreur d’estimation est de l’ordre de 10 fois plus faible avec le PF comparé à l’EKF.

4.2.1.4 Complexité d’implémentation

Un de nos objectifs est d’obtenir un estimateur au coût de calcul faible afin de pouvoir l’intégrer facilement dans un microcontrôleur. Il existe plusieurs manières de quantifier le

coût calcul : nombres de lignes pour réaliser une opération, nombre de multiplications et accumulations, nombre d’opérations sur des nombres à virgule (*FLoating-point OPerations*, FLOP). Le filtre de Kalman ou ses variantes, consiste à faire des calculs ou des inversions matricielles à base de nombres à virgules. Ici, l’indicateur FLOP est donc le plus adapté [VAGF17].

Soit $T(n)$, le nombre d’opérations FLOP dans un algorithme où n est la taille du vecteur d’état. On dit que cet algorithme est de complexité $\mathcal{O}(l(n))$ lorsqu’il existe une constante c_0 telle que $T(n) < c_0 l(n)$ pour tout $n > 0$ [Gil06]. Par exemple, si le nombre FLOP d’un algorithme vaut $T(n) = 2n + 3$, on dira que l’algorithme a une complexité $\mathcal{O}(2n)$. En négligeant les opérations d’affectation des variables, on considère que le produit de deux matrices de tailles respectives $n_1 \times n_2$ et $n_2 \times n_3$ est de complexité $\mathcal{O}(n_1 \times n_2 \times n_3)$.

On réalise ici une comparaison grossière du coût de calcul des différents algorithmes issus du filtre de Kalman, dans leur version en temps discret donnée en annexe A.9. Pour cela, on compare seulement la complexité de leur phase de prédiction de l’état $\hat{x}(k+1|k)$ à partir du modèle qui permet d’illustrer la problématique du coût calcul. Soit n la taille du vecteur d’état x , m celle du vecteur de mesures y et p celle du vecteur de commande u . On fait l’hypothèse que $n \geq m$ et $n \geq p$, et que $\mathcal{O}(f(x(k), u(k), 0, k)) \approx \mathcal{O}(A(k)x(k) + B(k)u(k))$, c’est-à-dire que la complexité de prédire l’état via le modèle non-linéaire (4.8) est du même ordre de grandeur qu’avec le modèle linéaire (4.2).

Filtre de Kalman linéaire (KF), non-linéaire (EKF) La phase de prédiction de l’état consiste à faire deux produits de matrices et une addition. On a alors $T_{KF,EKF} = n^2 + np + 1$, soit une complexité de $\mathcal{O}_{KF,EKF}(n^2)$.

Gain optimal de Kalman (K) Avec le critère de comparaison choisi ici, l’intérêt d’utiliser un gain fixe plutôt que l’algorithme du filtre de Kalman à chaque itération n’apparaît pas et on a, de la même manière que précédemment, une complexité $\mathcal{O}_K(n^2)$.

Filtre particulière (PF) Pour les filtres à base de particules, la phase de prédiction de l’état nécessite de répéter l’opération de prédiction N fois, où N est le nombre de particules. On a donc une complexité de $\mathcal{O}_{PF}(N \times n^2)$. Le nombre de particules N n’a pas de valeur prédéfinie mais doit être choisi suffisamment grand pour représenter correctement la distribution de probabilité de l’état. Par exemple, on a $N = 50$ dans [AMGC02] et $N = 1600$ dans [Rig12]. La complexité du filtre particulière sera donc la plus élevée des algorithmes présentés précédemment.

Ici, on a comparé la complexité des algorithmes lors de leur phase de prédiction de l’état. Néanmoins, d’autres opérations peuvent être plus coûteuses en calculs, comme l’inversion de la matrice S_k dans le cas d’un filtre de Kalman linéaire ou étendu qui est de l’ordre $\mathcal{O}(n^3)$ [VAGF17]. Le filtre de Kalman étendu est également plus lourd en calcul que le filtre de Kalman linéaire puisqu’il nécessite deux opérations supplémentaires pour linéariser le modèle non-linéaire. L’estimation de l’état avec un gain fixe (K) comme dans l’équation (4.6) sera donc en réalité bien moins coûteuse en calculs qu’avec l’algorithme complet du filtre de Kalman linéaire (KF) ou étendu (EKF), puisqu’elle ne nécessite pas d’opérations d’inversion de matrice ou de linéarisation. On peut donc établir un classement en matière de complexité des différentes approches de la littérature : $\mathcal{O}_K \leq \mathcal{O}_{KF} \leq \mathcal{O}_{EKF} \leq \mathcal{O}_{PF}$. On

voit également dans cette partie l’intérêt d’avoir une taille n de vecteur d’état la plus faible possible pour limiter le coût calcul pour un algorithme donné. C’est la raison pour laquelle on a réduit l’ordre du modèle de la boucle fermée dans le chapitre 2, qui sera utilisé par la suite dans l’estimation de l’état du drone.

4.2.1.5 Conclusion sur les approches de la littérature

Les approches de la littérature se basent sur l’utilisation d’un modèle de la boucle ouverte du drone, c’est-à-dire un modèle qui ne prend pas en compte le correcteur qui commande l’entrée du système. Les entrées du modèle qui sont utilisées pour prédire l’état proviennent dans ce cas des mesures de l’IMU. Le modèle dynamique utilisé pour prédire l’état est le plus souvent le modèle non-linéaire (2.8), ce qui implique un intérêt pour les estimateurs de type filtre de Kalman étendu. Les approches de la littérature présentent deux inconvénients :

- Elles se basent sur le modèle de la boucle ouverte. Elle ne prennent pas directement en compte le fait que le drone soit asservi et donc que sa dynamique soit régie par le correcteur ;
- Le modèle le plus fréquemment utilisé est le modèle non-linéaire, or le coût calcul des estimateurs à base de modèle non-linéaire est plus élevé que lorsqu’un modèle linéaire est utilisé, d’autant plus lorsque celui-ci est temps-invariant et que l’on peut utiliser un estimateur à gain fixe.

Pour pallier à ces inconvénients, on propose donc d’opter pour un estimateur à gain fixe à base du modèle linéaire de la boucle fermée issu du chapitre 2. On compare ses performances par rapport aux approches de la littérature basées sur un modèle de la boucle ouverte dans la sous-section suivante.

4.2.2 Comparaison des estimateurs à partir de données expérimentales

Les différents estimateurs que l’on compare dans cette partie sont résumés dans la table 4.1 page 129. Le modèle BO considéré ici contient seulement le sous-système associé aux vitesses linéaires, ce qui correspond au "modèle BO 2" de la figure 4.6, le modèle BF contient tout le système asservi, voir figure 4.6. Pour rendre la comparaison possible, on utilise un nombre maximal de signaux en commun en entrée des différents estimateurs. Pour cela, on considère que tous les estimateurs ont en entrée le même vecteur de mesures qui vaut $y = [\tilde{a}_{acc}^T, \tilde{v}_{rdr}^T]^T$. Les vecteurs de signaux d’entrée des modèles BO et BF ont en commun la consigne de poussée T_c . Ils contiennent aussi les angles de consigne ϕ_c et θ_c dans le cas du modèle BF, et les angles estimés par l’IMU $\tilde{\phi}_{IMU}$ et $\tilde{\theta}_{IMU}$ dans le cas du modèle BO.

Les signaux de mesures de capteurs et ceux utilisés en entrées des modèles sont tous issus des expériences réalisées en début de thèse où le vol du drone a été enregistré par le système de capture de mouvement Vicon. Seule la mesure du radar \tilde{v}_{rdr} a été obtenue par simulation. En effet, on a simulé les mesures qu’aurait effectué un radar *FMCW* embarqué sur le drone lors de ces expériences, et on a appliqué l’algorithme de mesure de vitesse dans la section 3.2.3 du chapitre 3 pour obtenir \tilde{v}_{rdr} .

4.2.2.1 Modèles dynamiques

Les estimateurs que l’on compare ici se basent sur le modèle de la boucle ouverte (Modèle BO 2) pour les approches de la littérature et sur le modèle de la boucle fermée (Modèle BF)

pour l'approche que l'on propose.

Le modèle BO 2 est issu du modèle non-linéaire (2.8) du chapitre 2 où la force de Coriolis est négligée³ et pour lequel on fait l'hypothèse que la poussée vaut $T = D_T T_c$ où T_c est la consigne de poussée et D_T est le gain fixe donné dans l'annexe A.3 :

$$\text{Modèle BO (non-linéaire)} : \begin{cases} \dot{v}_x &= -g s_{\tilde{\theta}_{IMU}} - \frac{\mu_{xy}}{m} v_x \\ \dot{v}_y &= g c_{\tilde{\theta}_{IMU}} s_{\tilde{\phi}_{IMU}} - \frac{\mu_{xy}}{m} v_y \\ \dot{v}_z &= -\frac{D_T T_c}{m} + g c_{\tilde{\phi}_{IMU}} c_{\tilde{\theta}_{IMU}} - \frac{\mu_z}{m} v_z \end{cases} \quad (4.11)$$

Le vecteur des signaux d'entrée correspondant au modèle BO est $u_{BO} = [\tilde{\phi}_{IMU}, \tilde{\theta}_{IMU}, T_c]^\top$ où $\tilde{\phi}_{IMU}$ et $\tilde{\theta}_{IMU}$ sont les angles de roulis et d'inclinaison estimés par l'IMU. La matrice de covariance associée aux entrées de ce modèle est :

$$Q_{BO,NL} = \mathbf{diag}(\sigma_{BO,NL,x}^2, \sigma_{BO,NL,y}^2, \sigma_{BO,NL,z}^2) \quad (4.12)$$

où les valeurs des puissances $\sigma_{BO,x}^2$, $\sigma_{BO,y}^2$ et $\sigma_{BO,z}^2$ sont choisies en fonction de la puissance des bruits des entrées u_{BO} puis ajustées pour traduire le niveau de confiance donné au modèle. Leur valeur est donnée dans l'annexe A.10. Par la suite, lorsque le modèle BO linéaire est utilisé, c'est le modèle (4.11) linéarisé en 0 (angles d'attitude nuls), soit :

$$\text{Modèle BO (linéaire)} : \begin{cases} \delta \dot{v}_x &= -g \delta \tilde{\theta}_{IMU} - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_x \\ \delta \dot{v}_y &= g \delta \tilde{\phi}_{IMU} - \frac{\mu_{xy}}{m} \delta v_y \\ \delta \dot{v}_z &= -\frac{D_T T_c}{m} - \frac{\mu_z}{m} \delta v_z \end{cases} \quad (4.13)$$

où le vecteur des signaux d'entrée u_{BO} est le même que pour le modèle non-linéaire. La matrice de covariance associée à ces entrées est :

$$Q_{BO,L} = \mathbf{diag}(\sigma_{BO,L,x}^2, \sigma_{BO,L,y}^2, \sigma_{BO,L,z}^2) \quad (4.14)$$

de la même manière que précédemment, les puissances sont ajustées pour traduire le niveau de confiance dans le modèle et leur valeur est donnée dans l'annexe A.10.

Le modèle de la boucle fermée (BF) quant à lui est donné par l'équation (2.94) du chapitre 2. Il correspond au modèle du drone linéarisé en 0 lorsque celui-ci est asservi par les correcteurs *PID* d'origine. Comme expliqué dans cette section, lorsque l'on combine les équations correspondant au correcteur et au modèle du drone, l'ordre du modèle *BF* obtenu est important ($n = 8$). On a donc appliqué dans cette section une méthode de réduction de modèle, pour se ramener à un modèle d'ordre $n = 1$, soit le même ordre que le modèle linéaire 4.13. Le vecteur des signaux d'entrée correspondant vaut alors $u_{BF} = [\phi_c, \theta_c, T_c]^\top$. La matrice de covariance associée aux entrées du modèle BF est :

$$Q_{BF} = \mathbf{diag}(\sigma_{BF,x}^2, \sigma_{BF,y}^2, \sigma_{BF,z}^2) \quad (4.15)$$

voir annexe A.10 pour les valeurs de puissances des bruits.

3. Car le produit des vitesses linéaires et angulaires est faible dans le cas du drone.

4.2.2.2 Modèle de mesures

Le vecteur de mesures $y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$ contient les mesures réelles de l'accéléromètre \tilde{a}_{acc} réalisées lors du vol du drone et les mesures de vitesse \tilde{v}_{rdr} obtenues par simulation puis application de l'algorithme de mesure de vitesse de la section 3.2.3 du chapitre 3. Comme expliqué précédemment, chacune de ces mesures est impactée par un bruit blanc et la mesure de l'accéléromètre contient en plus un biais, noté b_{acc} . Le vecteur de mesures $y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$ est lié au vecteur d'état à estimer $x = [v^\top, b_{acc}^\top]^\top$ par :

$$y = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{acc} \\ \tilde{v}_{rdr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{diag}\left(-\frac{\mu_{xy}}{m}, -\frac{\mu_{xy}}{m}, -\frac{\mu_z}{m}\right) & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ b_{acc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{acc} \\ w_{rdr} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

où la dynamique du biais b_{acc} est donnée par l'équation 3.11. La matrice de covariance associée aux mesures vaut :

$$R = \mathbf{diag}(\sigma_{acc,x}^2, \sigma_{acc,y}^2, \sigma_{acc,z}^2, \sigma_{rdr,x}^2, \sigma_{rdr,y}^2, \sigma_{rdr,z}^2) \quad (4.17)$$

où la puissance des bruits blancs est donnée dans l'annexe A.10.

4.2.2.3 Comparaison des résultats

On compare notre approche, notée K_{BF} , basée sur un gain fixe et le modèle de la boucle fermée, à celles de la littérature, notées (voir table 4.1) :

- K_{BO} : Gain fixe et le modèle BO linéarisé en 0 ;
- EKF_{BO} : Filtre de Kalman étendu et modèle BO non-linéaire ;
- PF_{BO} : Filtre particulière ($N = 150$ particules) et modèle BO non-linéaire.

Estimateur	K_{BF}	K_{BO}	EKF_{BO}	PF_{BO}
Modèle dynamique	Modèle BF linéaire (2.94) + biais (3.11)	Modèle BO linéaire (4.13) + biais (3.11)	Modèle BO non-linéaire (4.11) + biais (3.11)	Modèle BO non-linéaire (4.11) + biais (3.11)
Vecteur commandes	$u_{BF} = [\phi_c, \theta_c, T_c]^\top$	$u_{BO} = [\tilde{\phi}_{IMU}, \tilde{\theta}_{IMU}, T_c]^\top$	$u_{BO} = [\tilde{\phi}_{IMU}, \tilde{\theta}_{IMU}, T_c]^\top$	$u_{BO} = [\tilde{\phi}_{IMU}, \tilde{\theta}_{IMU}, T_c]^\top$
Vecteur mesures	$y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$	$y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$	$y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$	$y = [\tilde{a}_{acc}^\top, \tilde{v}_{rdr}^\top]^\top$

TABLE 4.1 – Estimateurs utilisés pour la comparaison

On présente les résultats obtenus à partir des données enregistrées lors de 4 expériences réalisées dans l'enceinte du système de capture de mouvement Vicon. Les expériences correspondent au vol du drone sur des trajectoires de type "aller-retour" d'une durée de l'ordre de 20s. Pour chaque expérience, on utilise les données enregistrées lors de ces vols pour estimer la vitesse du drone et le biais de l'accéléromètre avec les différents estimateurs. La vitesse estimée à partir des données de l'expérience 2 est présentée sur la figure 4.8 et le biais estimé sur la figure 4.9. On note que pour le biais, la référence n'est pas directement mesurée par le système de capture de mouvement Vicon mais est déduite de la vitesse de référence. En effet, on a $b_{acc} = \tilde{a}_{acc} + \frac{\mu_M}{m}v$ où v est la vitesse de référence mesurée par le système Vicon et b_{acc} le biais de référence.

Visuellement, les résultats obtenus sont similaires entre les différents estimateurs. On calcule à partir des valeurs estimées et des valeurs de référence mesurées par le système de capture Vicon, les erreurs quadratiques moyennes (RMS) suivantes :

$$e_{v,RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (v(k) - \hat{v}(k))^2}, \quad e_{b,RMS} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (b_{acc}(k) - \hat{b}_{acc}(k))^2} \quad (4.18)$$

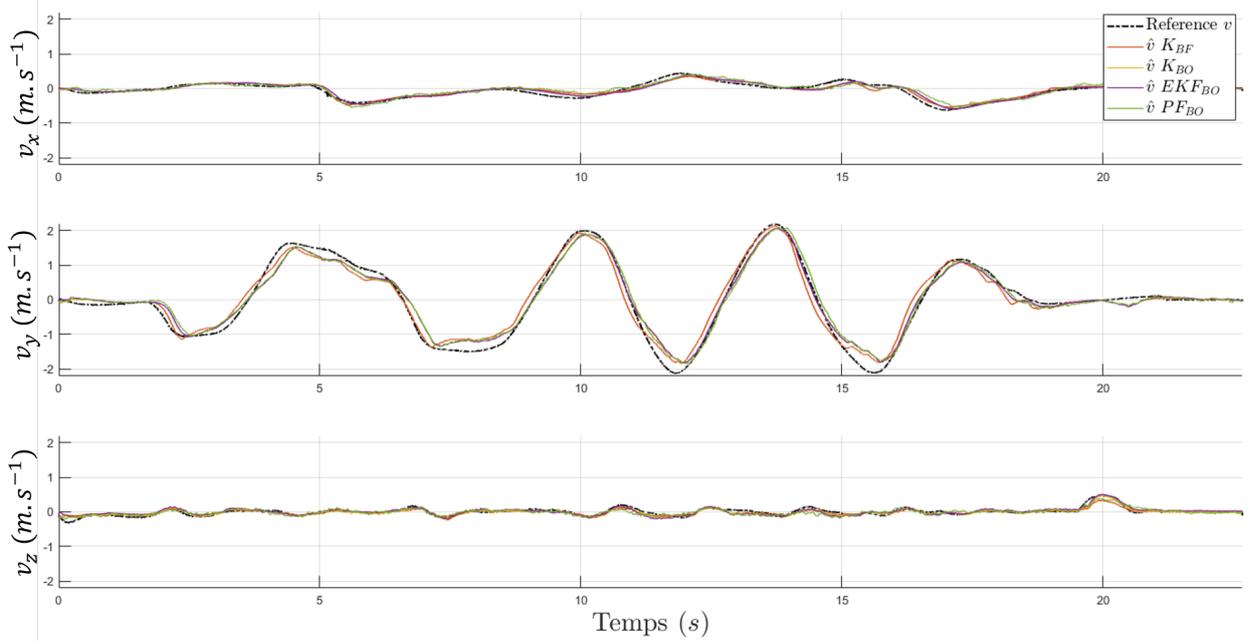


FIGURE 4.8 – Estimation \hat{v} sur le test 2 du tableau 4.2

On note ces erreurs pour chacune des expériences dans le tableau 4.2. On peut déduire de ces résultats que :

- En moyenne, l’erreur RMS en vitesse la plus faible est atteinte avec l’estimateur K_{BF} , alors que l’erreur la plus faible sur le biais est atteinte avec PF_{BO} .
- Les niveaux d’erreurs avec les approches K_{BO} et EKF_{BO} sont similaires, et sont supérieurs à ceux obtenus avec l’estimateur K_{BF} .
- Les niveaux d’erreurs entre K_{BF} et PF_{BO} sont similaires. Or le filtre particulaire est sensé donner un meilleur résultat dans le cas où les bruits ne sont pas gaussiens. L’hypothèse que les bruits qui impactent le système sont gaussiens semble donc valide.
- Enfin, on enregistre via le logiciel *Matlab* le temps écoulé à chaque itération pour chacun des tests. Il vaut en moyenne : $K_{BF} : 8.6 \times 10^{-5}s$, $K_{BO} : 4.8 \times 10^{-5}s$, $EKF_{BO} : 2.1 \times 10^{-4}s$, $PF_{BO} : 1.4 \times 10^{-3}s$. Même si cela ne constitue pas une analyse rigoureuse du coût calcul de chaque solution, cela permet d’avoir un ordre de grandeur de l’écart qu’il existe entre les différents estimateurs. On retrouve bien le classement $\mathcal{O}_K \leq \mathcal{O}_{EKF} \leq \mathcal{O}_{PF}$ de la sous-section 4.2.1.4 portant sur la complexité des algorithmes.

	Test 1		Test 2		Test 3		Test 4		Moyenne	
	$e_{v,RMS}$	$e_{b,RMS}$								
K_{BF}	0.001	0.009	0.066	0.085	0.032	0.031	0.065	0.067	0.041	0.048
K_{BO}	0.026	0.030	0.076	0.095	0.047	0.044	0.086	0.087	0.059	0.064
EKF_{BO}	0.033	0.035	0.091	0.110	0.039	0.036	0.089	0.090	0.063	0.068
PF_{BO}	0.006	0.009	0.069	0.055	0.037	0.041	0.064	0.066	0.044	0.038

TABLE 4.2 – Erreurs RMS des différents estimateurs

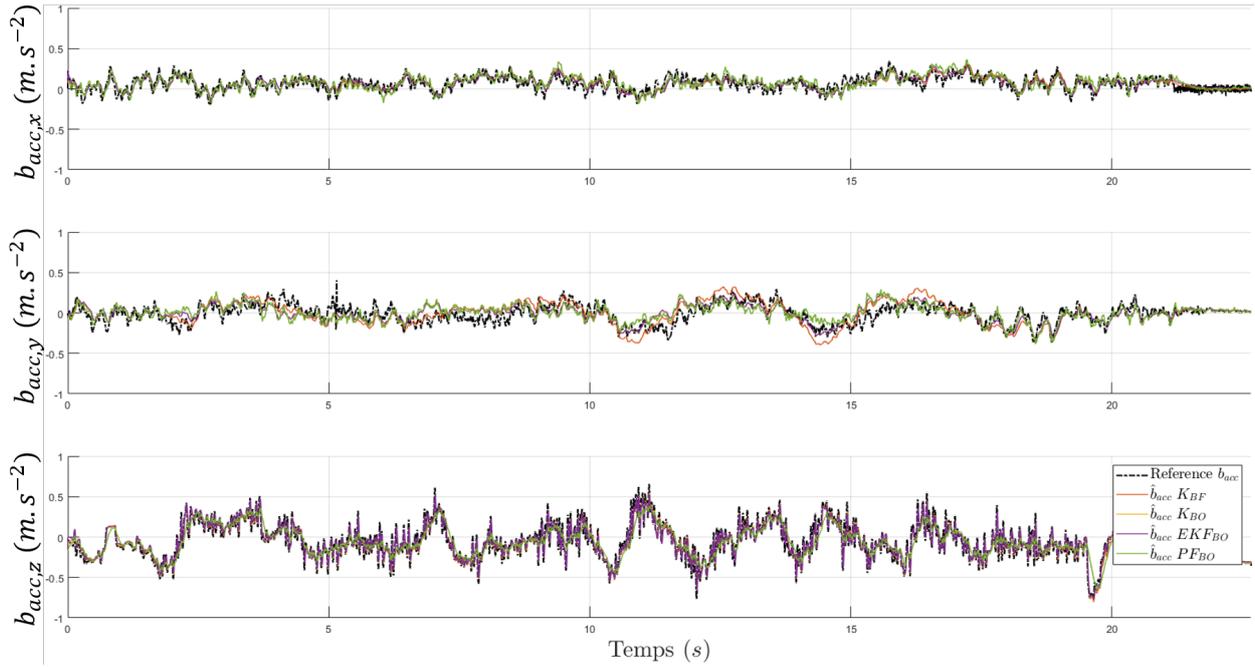


FIGURE 4.9 – Estimation \hat{b}_{acc} sur le test 2 du tableau 4.2

4.2.3 Conclusion

Le fait de prendre en compte le modèle de la boucle fermée lors de la phase d’estimation semble avoir un intérêt pour la précision de l’estimateur. En effet, l’estimateur K_{BF} basé sur le modèle de la boucle fermée a produit en moyenne un niveau d’erreur plus faible que les approches K_{BO} et EKF_{BO} également basées sur le filtre de Kalman mais avec un modèle de la boucle ouverte du drone. Le niveau d’erreur obtenu via l’estimateur K_{BF} est, de plus, similaire à celui obtenu via le filtre particulière PF_{BO} , ce qui montre que le résultat est proche de l’optimal que l’on puisse obtenir lorsque l’hypothèse de la distribution gaussienne des bruits impactant le système n’est pas vérifiée. Enfin, dans cette section, le modèle de la boucle fermée utilisé était le modèle réduit de la section 2.5 du chapitre 2, basé sur le modèle du drone asservi par les correcteurs PID d’origine. Le modèle BF avait alors le même ordre que les modèles BO couramment utilisés dans la littérature, ce qui permettait de comparer le coût de calcul des différentes solutions. On a vu que les approches basées sur un gain fixe de Kalman avaient un coût calcul très inférieur à celui d’un filtre particulière, tout en ayant un niveau de performance au moins égal.

Dans cette section, le correcteur était fixé en amont et on devait obtenir la meilleure estimation possible étant donné ce correcteur. Dans la section suivante, on va cette fois réaliser de manière conjointe la synthèse du correcteur et de l’estimateur dans le but d’obtenir la meilleure estimation possible tout en limitant le coût calcul de la solution.

4.3 Synthèse conjointe correcteur/estimateur

Dans la section précédente, on a montré que le fait de synthétiser un estimateur à partir d’un modèle du drone en boucle fermée présentait un intérêt pour la performance d’estimation. L’estimateur synthétisé à partir de ce modèle était un gain optimal de Kalman, qui

permet de minimiser la variance de l’erreur d’estimation pour un système LTI soumis à des bruits blancs gaussiens.

Dans cette thèse, le cahier des charges sur l’asservissement est peu contraint, ce qui laisse une certaine liberté au niveau du choix de correcteur. Dans ce cadre, on peut se demander s’il serait possible de régler le correcteur de manière à améliorer la performance de l’estimateur. Dans cette nouvelle section, on va donc considérer de manière conjointe la synthèse du correcteur et de l’estimateur. Ainsi, le correcteur devient un paramètre supplémentaire sur lequel influencer par rapport à l’approche de la section précédente, où le correcteur était fixé *a priori*. Notre objectif va alors être de synthétiser un correcteur qui maximise la performance de l’estimateur, tout en respectant le cahier des charges en matière d’asservissement.

Désormais, on doit résoudre le problème de la synthèse conjointe d’un tel ensemble correcteur/estimateur. Pour cela, on va chercher à traduire ce problème de manière mathématique à partir des développements déjà réalisés dans cette thèse. Dans le chapitre 2, on a vu comment synthétiser un correcteur linéaire qui respecte un cahier des charges donné, avec la méthode de synthèse H_∞ . Dans la section précédente, on a montré que l’on pouvait synthétiser un estimateur de type gain de Kalman qui présente de bonnes performances par rapport à d’autres estimateurs de la littérature, tout en se basant sur un modèle linéaire. On verra au début de cette nouvelle section que l’on peut assimiler cette synthèse d’estimateur à un problème de synthèse de commande H_2 . On cherchera alors à réutiliser ces travaux pour assimiler la synthèse de l’ensemble correcteur/estimateur à une synthèse de commande avec un critère mixte H_2/H_∞ , où la norme H_∞ est utilisée pour traduire le respect du cahier des charges en matière d’asservissement et la norme H_2 est utilisée pour quantifier la performance d’estimation.

La nouveauté de notre approche par rapport à ce qui est disponible dans la littérature réside dans l’emploi de la synthèse mixte H_2/H_∞ pour remplir à la fois des objectifs d’estimation et de contrôle. En effet, on trouve des exemples où l’approche H_2/H_∞ est utilisée en ayant exclusivement des objectifs de contrôle ou alors d’estimation [ANR09, SGC97, KRB96]. Cependant, ici, notre objectif est de réaliser de manière conjointe la synthèse du correcteur avec des objectifs spécifiés sous la forme d’un critère H_∞ et de l’estimateur avec des objectifs spécifiés sous la forme d’un critère H_2 .

Dans cette section, on va comparer l’approche de synthèse conjointe à celle de synthèse séquentielle, où l’on réalise tout d’abord la synthèse d’un correcteur H_∞ , puis celle d’un estimateur H_2 basée sur le modèle du drone en boucle fermée avec ce correcteur H_∞ . Notamment, on va chercher à voir si les degrés de liberté laissés par le cahier des charges en matière d’asservissement peuvent être exploités pour améliorer la performance de l’estimation dans le cas de la synthèse conjointe H_2/H_∞ , et si cette approche permet également de répondre à la problématique de coût de calcul qui doit être faible pour embarquer la solution sur le microcontrôleur du drone.

4.3.1 Présentation du problème

4.3.1.1 Lien entre filtre de Kalman et commande H_2

La synthèse d’un filtre de Kalman comme réalisé dans la section 4.2 peut se formuler comme un cas particulier d’un problème de synthèse de commande H_2 . L’intérêt de relier la synthèse d’un filtre de Kalman à la synthèse de commande H_2 est que cette dernière permet une description plus générique des problèmes d’estimation que l’on peut mettre sous la forme de problèmes d’optimisation. Cela nous permettra par la suite d’imbriquer

le problème de synthèse d'un estimateur avec celui de la synthèse d'un correcteur H_∞ , en mettant l'ensemble sous la forme d'un problème d'optimisation avec un critère mixte H_2/H_∞ .

Soit un système P bouclé avec un correcteur K , tel que représenté sous la forme standard sur la figure 2.23 du chapitre 2 page 54. Le problème de synthèse de commande H_2 consiste à rechercher un correcteur K tel que [ZCDG96] :

$$\begin{aligned} & \underset{K}{\text{minimiser}} && \|P \star K\|_2 \\ & \text{sous contrainte que} && P \star K \text{ est stable de façon interne.} \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'expression $P \star K$ traduit la relation entre les entrées exogènes w et les sorties commandées z du système :

$$z = (P \star K)w \tag{4.20}$$

Soit $H = P \star K$, la synthèse H_2 permet de minimiser $\|H\|_2$ et donc $\|H\|_2^2$ qui vaut :

$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}[H^*(j2\pi\nu)H(j2\pi\nu)]d\nu \tag{4.21}$$

où $H^*(j2\pi\nu)$ représente le transposé conjugué de $H(j2\pi\nu)$. Sous l'hypothèse que les entrées exogènes w sont des bruits blancs gaussiens, leur densité spectrale de puissance est constante et vaut 1. On a alors [SP07] :

$$\|H\|_2^2 = E\{z(t)^\top z(t)\} \tag{4.22}$$

En minimisant la norme H_2 de $P \star K$, on minimise donc aussi la variance de z lorsque w sont des bruits blancs gaussiens. Si on définit z comme étant le vecteur des erreurs d'estimation tel que $z = e = x - \hat{x}$, alors K est équivalent au filtre de Kalman dans le sens où il minimise la variance des erreurs d'estimation lorsque le système est soumis à des bruits blancs gaussiens en entrée.

Le problème standard de synthèse d'un estimateur type filtre de Kalman est représenté sur la figure 4.10. Le système P correspond au système P du problème H_2 (4.19) pour lequel on synthétise un estimateur E (noté K dans l'équation (4.19)) lorsqu'il est soumis à des entrées exogènes w qui sont des bruits blancs gaussiens. Le système P contient le modèle du système noté G , ainsi que des pondérations W associées aux bruits d'entrée. Ces pondérations W ont alors un rôle de "filtre générateur", car elles permettent de modéliser les signaux d'entrée exogènes du système. En effet, elles sont telles que [Bay12, SF09] :

$$S_w(j2\pi\nu) = W^*(j2\pi\nu)W(j2\pi\nu) \tag{4.23}$$

où $S_w(j2\pi\nu)$ représente la densité spectrale de puissance du signal w . Ici, étant donné que l'on se place sous l'hypothèse que les signaux exogènes w sont des bruits blancs gaussiens qui ont des densités spectrales de puissance constantes données par leur matrice de covariance, les pondérations W sont des constantes qui correspondent aux matrices $Q^{\frac{1}{2}}$ et $R^{\frac{1}{2}}$.

Le problème de synthèse d'un estimateur de type gain de Kalman revient donc à résoudre un problème de synthèse de commande basé sur la norme H_2 pondérée.

4.3.1.2 Synthèse H_2/H_∞ appliquée à la synthèse d'un correcteur/estimateur

On vise dans cette section à rassembler la synthèse de correcteur et d'estimateur en une seule étape de synthèse conjointe d'un correcteur/estimateur. Étant donné que l'on a précédemment synthétisé un correcteur puis un estimateur en résolvant successivement des

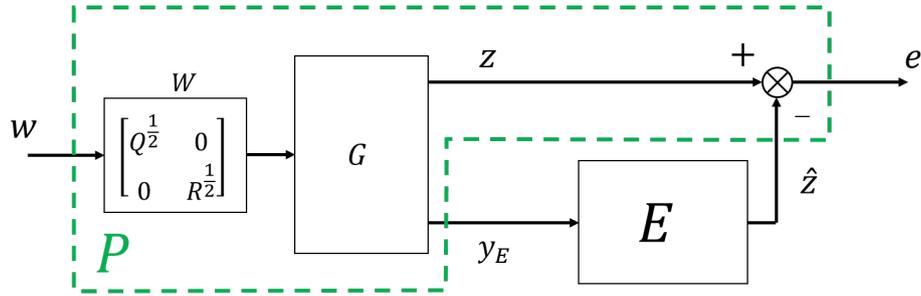


FIGURE 4.10 – Problème standard de synthèse d’un estimateur de type Kalman

problèmes de synthèse de commande H_∞ puis H_2 , on pourrait naturellement chercher à représenter le problème de synthèse conjointe d’un correcteur/estimateur comme un problème de synthèse de commande H_2/H_∞ . On explique tout d’abord ci-après en quoi consiste un problème de synthèse de commande H_2/H_∞ , puis comment on peut utiliser les outils de résolution existants de ce type de problème pour effectuer la synthèse conjointe d’un correcteur/estimateur.

Problème standard H_2/H_∞ Soit le système P , bouclé avec un correcteur K comme représenté sur la figure 4.11, ayant la représentation d’état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_\infty w_\infty(t) + B_2 w_2(t) + Bu(t) \\ z_\infty(t) &= C_\infty x(t) + D_{\infty\infty} w_\infty(t) + D_{\infty 2} w_2(t) + D_{\infty u} u(t) \\ z_2(t) &= C_2 x(t) + D_{2\infty} w_\infty(t) + D_{22} w_2(t) + D_{2u} u(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{y\infty} w_\infty(t) + D_{y2} w_2(t) + D_{yu} u(t) \end{cases} \quad (4.24)$$

où :

- u sont les signaux de commande ;
- w_2 sont les signaux exogènes liés aux spécifications H_2 ;
- w_∞ sont les signaux exogènes liés aux spécifications H_∞ ;
- y sont les signaux d’entrée du correcteur (p.ex. mesures) ;
- z_∞ sont les signaux commandés de façon à satisfaire les spécifications H_∞ ;
- z_2 sont les signaux commandés de façon à satisfaire les spécifications H_2 .

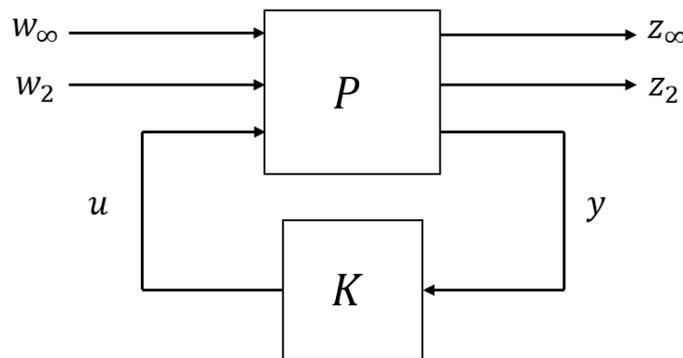


FIGURE 4.11 – Forme standard du problème H_2/H_∞

Pour le système P de la figure 4.11, et pour un niveau de performance H_∞ donné γ_{H_∞} ,

le problème de synthèse de commande H_2/H_∞ consiste à rechercher K tel que [Arz04] :

$$\begin{aligned} & \underset{K}{\text{minimiser}} && \|T_{w_2 \rightarrow z_2}(K)\|_2 \\ & \text{sous contrainte que} && \|T_{w_\infty \rightarrow z_\infty}(K)\|_\infty \leq \gamma_{H_\infty}, \quad P \star K \text{ est stable de façon interne} \end{aligned} \quad (4.25)$$

où $T_{w_2 \rightarrow z_2}$ représente la fonction de transfert entre w_2 et z_2 et $T_{w_\infty \rightarrow z_\infty}$ représente la fonction de transfert entre w_∞ et z_∞ .

Par la suite, on va chercher à comparer l’approche de synthèse mixte H_2/H_∞ d’un correcteur/estimateur à l’approche séquentielle de synthèse d’un correcteur H_∞ puis d’un estimateur H_2 . Pour permettre de conclure sur l’intérêt de chaque approche, on doit obtenir des résultats qui soient indépendants de la méthode de résolution des problèmes de synthèse. Si les problèmes de synthèse H_∞ et H_2 bénéficient d’outils bien établis et basés sur des conditions nécessaires et suffisantes de résolution, le problème de synthèse multi-objectif H_2/H_∞ reste difficile à résoudre [Arz04].

Il existe dans la littérature deux approches principales pour sa résolution. La première approche se base sur la paramétrisation de Youla [YJB76], et consiste à rechercher une fonction de transfert associée au correcteur qui satisfait les critères du problème H_2/H_∞ [WR95]. L’inconvénient de cette approche est qu’elle ne contraint pas l’ordre du correcteur/estimateur qui peut potentiellement être arbitrairement élevé [Meg94], ce qui la rend peu attractive dans un contexte où on essaye de limiter le coût calcul de la solution à implémenter sur le microcontrôleur du drone. La seconde approche se base sur une formulation sous forme de représentation d’état du problème. L’inconvénient est que cela mène à un problème d’optimisation non-convexe, ce qui l’empêche, en l’état, d’être résolu efficacement. Il existe toutefois des méthodes de résolution, comme celle issue de [Sch95] basée sur une reformulation de ce problème sous une forme LMI convexe ou celle issue de [ADGH11] basée sur des techniques d’optimisation non-convexe. La première, repose sur une relaxation convexe du problème de synthèse originalement non-convexe, ce qui implique un certain conservatisme de la solution par rapport à l’approche de [ADGH11] basée sur la résolution du problème non-convexe. Cette dernière est néanmoins plus difficile à utiliser, notamment car elle nécessite de fixer la structure du correcteur recherché et d’être initialisée par un correcteur stabilisant.

Les résultats présentés dans ce mémoire seront issus de l’algorithme utilisant une formulation LMI du problème issu de [Sch95] disponible dans la *Robust Control Toolbox* du logiciel *Matlab*⁴. Dans celui-ci, le problème H_2/H_∞ considéré correspond au problème (4.25) dans lequel $w_\infty = w_2 = w$. Cela nécessite alors de pouvoir décrire de manière homogène les signaux d’entrée exogènes associés au problème H_2 et au problème H_∞ , comme expliqué ci-après.

Application à la synthèse conjointe d’un correcteur/estimateur Notre objectif est de regrouper le correcteur et l’estimateur en une seule entité appelée correcteur/estimateur, notée K/E . D’un point de vue pratique tout d’abord, on a besoin de pouvoir regrouper les programmes informatiques associés au correcteur et à l’estimateur. C’est possible, car étant donné que les deux entités sont programmées sur le même microcontrôleur, on peut regrouper leurs fonctions. Dans un deuxième temps, on a besoin que le correcteur/estimateur puisse avoir accès aux signaux associés aussi bien au correcteur que ceux associés à l’estimateur. C’est également possible, car on a dit précédemment que le microcontrôleur avait accès à tous les signaux échantillonnés à la même fréquence. Enfin, d’un point de vue théorique, on

4. On note que l’approche non-convexe [ADGH11] a également été testée, mais elle ne fournissait pas d’amélioration notable du résultat dans le cas particulier considéré ici.

a besoin de pouvoir regrouper les éléments de la synthèse de correcteur H_∞ avec ceux de la synthèse d’estimateur H_2 , pour qu’ils puissent s’intégrer dans un même cadre donné par le problème de synthèse H_2/H_∞ présenté précédemment. Pour cela, on a besoin d’avoir une formulation homogène aux deux problèmes H_∞ et H_2 , ce qui rejoint le point lié à l’algorithme de résolution du problème H_2/H_∞ que l’on utilise, dans lequel on doit décrire de la même façon les signaux d’entrée exogènes associés au problème H_2 et au problème H_∞ . Dans les deux cas H_2 ou H_∞ , on a augmenté le modèle du système à commander ou estimer avec des pondérations, cependant elles n’avaient pas la même signification. On en donne ci-dessous une définition unique.

Pondérations Dans la partie 4.3.1.1, on a montré que la synthèse d’un filtre de Kalman était équivalente à la synthèse de commande H_2 , où le système considéré pour la synthèse était soumis à des signaux d’entrée exogènes w sous la forme de bruits blancs gaussiens. Le système contenait alors le modèle du système à commander augmenté de pondérations qui permettaient de décrire la densité spectrale de puissance des bruits d’entrée. Les pondérations avaient alors un rôle de filtre générateur car elles permettaient de modéliser les signaux s’entrée. Lors de la synthèse du correcteur H_∞ du chapitre 2, les pondérations n’étaient pas directement liées à la modélisation des signaux, car elles servaient à modéliser certaines fonctions de transfert du système en boucle fermée. Cela était réalisé en définissant des pondérations $W_i(j2\pi\nu)$ et $W_o(j2\pi\nu)$ associées à des signaux d’entrée i et de sortie o , telles que $|W_o(j2\pi\nu)W_i(j2\pi\nu)|^{-1}$ représente un gabarit dans le domaine fréquentiel sur le module de la fonction de transfert $T_{i \rightarrow o}(j2\pi\nu)$ du système bouclé.

Ici, afin d’avoir une description homogène des pondérations, on va les redéfinir pour qu’elles permettent toutes de modéliser les signaux d’entrée et de sortie du système. En effet, comme expliqué précédemment, on peut donner une interprétation des pondérations qui est qu’elles permettent de caractériser la densité spectrale de puissance des signaux d’entrée et de sortie [SF09]. Soit un signal d’entrée i du système bouclé, on peut définir l’ensemble \mathcal{I}_S auquel il appartient grâce à une borne sur son module :

$$\mathcal{I}_S = \{i \text{ tel que } S_i(j2\pi\nu) \leq |W_i(j2\pi\nu)|^2\} \quad (4.26)$$

où $W_i(j2\pi\nu)$ est ce qu’on appelle une pondération d’entrée et $S_i(j2\pi\nu)$ est la densité spectrale de puissance du signal i à la fréquence ν . Pour un signal de sortie o , on peut définir l’ensemble \mathcal{O}_S des signaux de sortie auquel il appartient par :

$$\mathcal{O}_S = \left\{ o \text{ tel que } S_o(j2\pi\nu) \leq \frac{1}{|W_o(j2\pi\nu)|^2} \right\} \quad (4.27)$$

où $W_o(j2\pi\nu)$ est ce qu’on appelle une pondération de sortie et $S_o(j2\pi\nu)$ est la densité spectrale de puissance du signal o . Ainsi, on peut donner une interprétation de l’expression $|T_{i \rightarrow o}(j2\pi\nu)| \leq |W_o(j2\pi\nu)W_i(j2\pi\nu)|^{-1}$ issue du chapitre 2 qui traduit l’usage d’un gabarit sur une fonction de transfert du système en boucle fermée : pour obtenir que l’ensemble des signaux de sortie du système en boucle fermée soit compris dans \mathcal{O}_S lorsque l’ensemble de signaux d’entrée vaut \mathcal{I}_S , le système bouclé avec son correcteur devra respecter $|T_{i \rightarrow o}(j2\pi\nu)| \leq |W_o(j2\pi\nu)W_i(j2\pi\nu)|^{-1}$, voir [SF09] pour des arguments similaires.

Synthèse de K/E avec un critère H_2/H_∞ Le problème de synthèse avec un critère H_2/H_∞ appliqué à la synthèse d’un correcteur/estimateur est le suivant. Soit P un système bouclé avec un correcteur/estimateur K/E comme représenté sur la figure 4.12. Le problème

de synthèse conjointe consiste à rechercher K/E , tel que le système bouclé $P \star (K/E)$ ait les propriétés suivantes :

- Stabilité : $P \star (K/E)$ est stable de façon interne ;
- Performance d’estimation optimale : minimisation de $\|T_{w \rightarrow z_2}(K/E)\|_2$;
- Respect du cahier des charges en matière d’asservissement : $\|T_{w \rightarrow z_\infty}(K/E)\|_\infty \leq \gamma_{H_\infty}$. Ici, on fixe γ_{H_∞} à 1, ce qui traduit la valeur γ_∞ maximale pour laquelle le système bouclé respecte les gabarits.

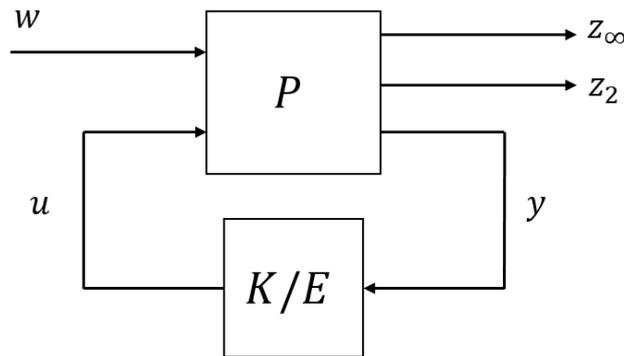


FIGURE 4.12 – Problème de synthèse conjointe de K/E

Le problème d’optimisation avec un critère H_2/H_∞ correspondant consiste alors à rechercher K/E , tel que :

$$\begin{aligned}
 & \underset{K/E}{\text{minimiser}} && \|T_{w \rightarrow z_2}(K/E)\|_2 \\
 & \text{sous contrainte que} && \|T_{w \rightarrow z_\infty}(K/E)\|_\infty \leq 1, \quad P \star (K/E) \text{ est stable de façon interne.}
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

4.3.1.3 Comparaison préalable des approches de synthèse séquentielle et conjointe

Avant même de comparer la performance d’estimation et d’asservissement des approches de synthèse séquentielle et conjointe, on peut tout d’abord établir des éléments de comparaison qui seront toujours vérifiés.

On représente schématiquement sur la figure 4.13 l’approche de synthèse séquentielle à gauche, notée *SEQ*, et celle de synthèse conjointe avec un critère mixte H_2/H_∞ , notée *MIX*, à droite. Lors de la synthèse séquentielle, on commence par synthétiser un correcteur H_∞ noté K dont la sortie u permet de commander le système P_K , qui représente le modèle G du système augmenté de pondérations liées au cahier des charges. Ce système bouclé $P_K \star K$ devient ensuite le système P_E pour lequel on synthétise un estimateur E dont la sortie \hat{z} permet de satisfaire un critère H_2 . Lors de la synthèse avec un critère mixte H_2/H_∞ , on n’a qu’un seul système $P_{K/E}$ qui contient le modèle du système G augmenté des pondérations pour la commande et pour l’estimation. Dans ce cas, la synthèse H_2/H_∞ permet d’obtenir directement un bloc K/E dont les sorties sont simultanément la commande u et le vecteur estimé \hat{z} .

De ces démarches de synthèse, on peut en déduire deux avantages *a priori* de l’approche conjointe par rapport à l’approche séquentielle.

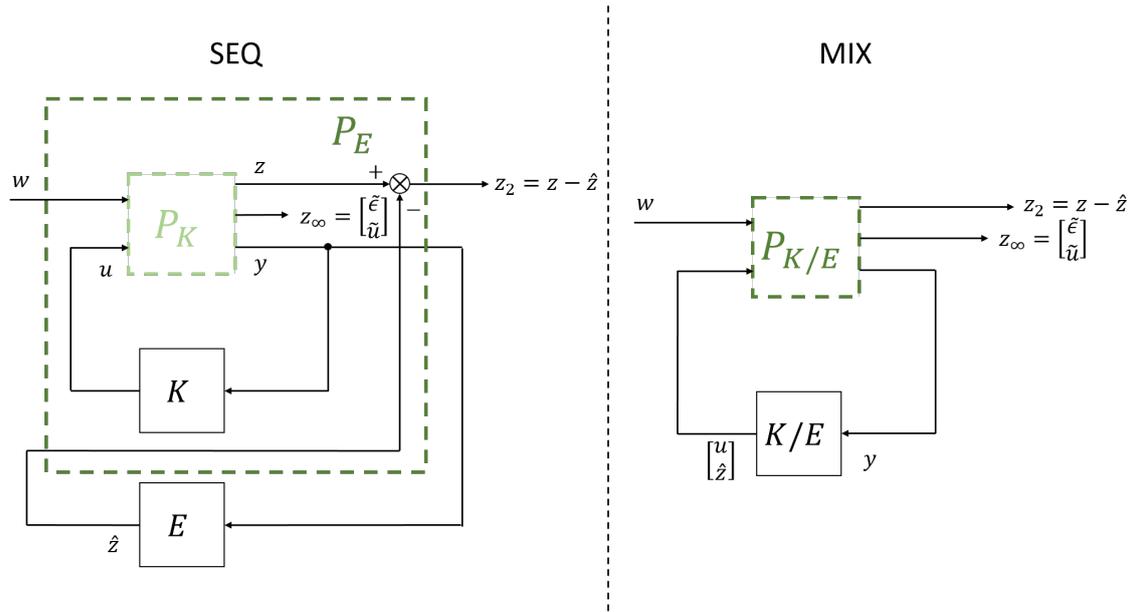


FIGURE 4.13 – Approche de synthèse séquentielle à gauche, synthèse mixte à droite

Réduction de la complexité d'implémentation On compare ci-dessous l'ordre de complexité du correcteur et de l'estimateur obtenus par l'approche séquentielle à l'ordre de complexité de l'ensemble correcteur/estimateur obtenu par l'approche de synthèse conjointe.

Synthèse séquentielle Soit un correcteur K obtenu par la méthode H_∞ pour commander le drone dont le modèle noté G contient la dynamique d'attitude, de vitesse linéaire et du biais de l'accéléromètre. Le correcteur obtenu a un ordre n_K , qui vaut l'ordre du système à commander n_G plus l'ordre des pondérations $n_{pond,K}$ associées au problème d'asservissement. L'ordre du correcteur sera donc :

$$n_{K,SEQ} = n_G + n_{pond,K}. \quad (4.29)$$

L'estimateur H_2 est synthétisé à partir du modèle G asservi par le correcteur K synthétisé auparavant. La synthèse de l'estimateur H_2 est réalisée en augmentant le système à estimer avec des pondérations liées à l'estimation qui sont d'ordre $n_{pond,E}$. L'ordre de l'estimateur n_E vaudra alors :

$$n_{E,SEQ} = n_{K,SEQ} + n_G + n_{pond,E} = 2n_G + n_{pond,K} + n_{pond,E}. \quad (4.30)$$

Avec l'approche séquentielle, on devra donc programmer dans le microcontrôleur du drone deux blocs distincts, un correcteur K d'ordre $n_{K,SEQ}$ et un estimateur E d'ordre $n_{E,SEQ}$.

Synthèse conjointe Avec l'approche conjointe, on a un seul bloc associé en même temps à l'asservissement et à l'estimation des états de G . Les pondérations associées sont communes pour l'asservissement et l'estimation et sont d'ordre $n_{pond,K/E} \leq n_{pond,K} + n_{pond,E}$ ⁵. L'ordre du correcteur/estimateur noté $n_{K/E,MIX}$ vaut alors :

$$n_{K/E,MIX} = n_G + n_{pond,K/E}. \quad (4.31)$$

5. Par exemple, les pondérations associées aux signaux d'entrée de consignes seront les mêmes pour le problème d'asservissement et celui d'estimation, l'approche conjointe permet donc de les prendre en compte une seule fois dans le problème de synthèse, contre deux fois pour l'approche séquentielle.

Avec l’approche conjointe, on ne devra donc implémenter qu’un seul bloc K/E d’ordre $n_{K/E,MIX}$ dans le microcontrôleur. Celui-ci sera inférieur à la somme $n_{K,SEQ} + n_{E,SEQ}$ des ordres du correcteur et de l’estimateur obtenus par l’approche séquentielle. L’approche conjointe permet donc de réduire le coût d’implémentation de la solution sur microcontrôleur par rapport à l’approche séquentielle.

Réduction du nombre d’étapes de conception L’approche conjointe permet de synthétiser un ensemble correcteur/estimateur en une seule étape contre deux étapes pour l’approche séquentielle. Cela peut notamment présenter un intérêt en pratique lorsqu’il s’agit de choisir les pondérations pour régler le correcteur/estimateur, ce qui nécessite généralement plusieurs itérations avant d’arriver à un résultat satisfaisant. Cependant, ce point reste à nuancer, puisqu’il paraît plus pratique de scinder le problème en deux en effectuant d’abord la synthèse séquentielle pour régler séparément le correcteur puis l’estimateur, et ensuite de réaliser la synthèse conjointe du correcteur/estimateur pour gagner en ordre de complexité et potentiellement en performance d’estimation.

4.3.2 Application au contrôle et à l’estimation de la dynamique du drone

On a présenté dans la sous-section précédente l’approche de synthèse conjointe du correcteur/estimateur et ses intérêts *a priori* par rapport à l’approche de synthèse séquentielle. On souhaite savoir si l’approche conjointe peut permettre d’obtenir une meilleure performance d’estimation que l’approche de synthèse séquentielle. Notamment, on veut voir si l’approche conjointe peut permettre de bénéficier d’un cahier des charges peu contraint en matière d’asservissement pour améliorer la performance de l’estimation par rapport à l’approche séquentielle. Pour cela, on applique par la suite les démarches de synthèse séquentielle et conjointe au modèle du drone et on compare les résultats obtenus.

4.3.2.1 Modèle du système

On présente tout d’abord le modèle du drone considéré dans cette section.

Dynamique Comme dans le chapitre 2, on se place dans le cas d’un problème sur 1 axe, où l’on cherche à contrôler l’angle ϕ et estimer la vitesse de translation correspondante qui est v_y . L’extension au cas des 3 axes ne sera pas traitée ici mais serait réalisable comme dans le chapitre 2, en rajoutant dans le problème les autres axes que l’on considère découplés ici, étant donné que le modèle du drone est celui linéarisé au point d’équilibre de vol stationnaire.

Le modèle dynamique du système est noté G . Il contient la dynamique décrite par le modèle du drone linéarisé au point d’équilibre de vol stationnaire, issu de l’équation (2.14) du chapitre 2, seulement pour un axe. Il contient également la dynamique du biais b_{acc} de l’accéléromètre sur l’axe \vec{y}_b qui est de type $\dot{b}_{acc} = -\alpha b_{acc} + w_{b_{acc}}$, avec $\alpha = 0.003$, voir équation (3.11) du chapitre 3. Pour simplifier les notations, le symbole δ utilisé pour définir les signaux du modèle linéarisé est omis dans cette section. Le modèle dynamique G est tel que :

$$G : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\omega}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{b}_{acc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega_x \\ v_y \\ b_{acc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{D_x}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w_{bacc} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{IMU} \\ \tilde{\omega}_{gyro,x} \\ \tilde{a}_{acc} \\ \tilde{v}_{rdr} \\ b_{acc,y} \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \omega_x \\ v_y \\ b_{acc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{IMU} \\ w_{gyro} \\ w_{acc} \\ w_{rdr} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.32)$$

Signaux de mesures y On considère que l’estimateur, le correcteur et le correcteur/estimateur ont tous accès au même vecteur y de mesures. Cette hypothèse est valide car les mesures, issues de l’IMU et du radar, ont toutes la même fréquence d’échantillonnage et sont donc toutes accessibles au même moment par le microcontrôleur. Le vecteur y vaut alors :

$$y = \begin{bmatrix} \epsilon = \phi_c - \tilde{\phi}_{IMU} \\ \tilde{\phi}_{IMU} \\ \tilde{\omega}_{gyro,x} \\ \tilde{a}_{acc} \\ \tilde{v}_{rdr} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Comme expliqué dans la section 4.1, les mesures issues de l’IMU ($\tilde{\phi}_{IMU}$, $\tilde{\omega}_{gyro,x}$ et \tilde{a}_{acc}) sont filtrées par un filtre passe-bas numérique qui est négligé pour le moment lors de la synthèse. On les prendra en compte dans la sous-section 4.3.2.5 et on verra qu’ils induisent des contraintes fortes sur la bande passante du correcteur et de l’estimateur synthétisés.

4.3.2.2 Synthèse séquentielle : correcteur puis estimateur

On introduit tout d’abord la démarche de synthèse séquentielle qui servira de base pour la synthèse conjointe.

Correcteur H_∞ On présente la synthèse d’un correcteur H_∞ basée sur la méthode de synthèse présentée dans le chapitre 2. Le correcteur n’avait alors accès qu’à un vecteur de mesures réduit, qui valait $y_{reduit} = [\epsilon, \tilde{\omega}_x]^\top$. Désormais, on considère que le correcteur a accès au vecteur de mesures complet (4.33)⁶. Ces nouvelles mesures ainsi que la nouvelle définition des pondérations donnée en 4.3.1.2 impliquent de modifier le schéma de synthèse par rapport au chapitre 2 et de modifier les pondérations.

Le schéma de synthèse comprenant le système P_K augmenté des pondérations W utilisées pour la synthèse de correcteur est donné sur la figure 4.14.

6. On note que l’on passe d’une structure de correcteur à un degré de liberté (accès seulement à l’écart entre la référence et la mesure de la grandeur asservie noté ϵ) à celle d’un correcteur à deux degrés de liberté (accès à la référence et à la mesure, de manière indépendante). Ce type de structure peut permettre au système d’effectuer un meilleur suivi de trajectoire qu’avec un correcteur à un degré de liberté. En effet, elle permet de dissocier la partie du correcteur associée au suivi de trajectoire de celle associée au rejet de perturbation [SP07].

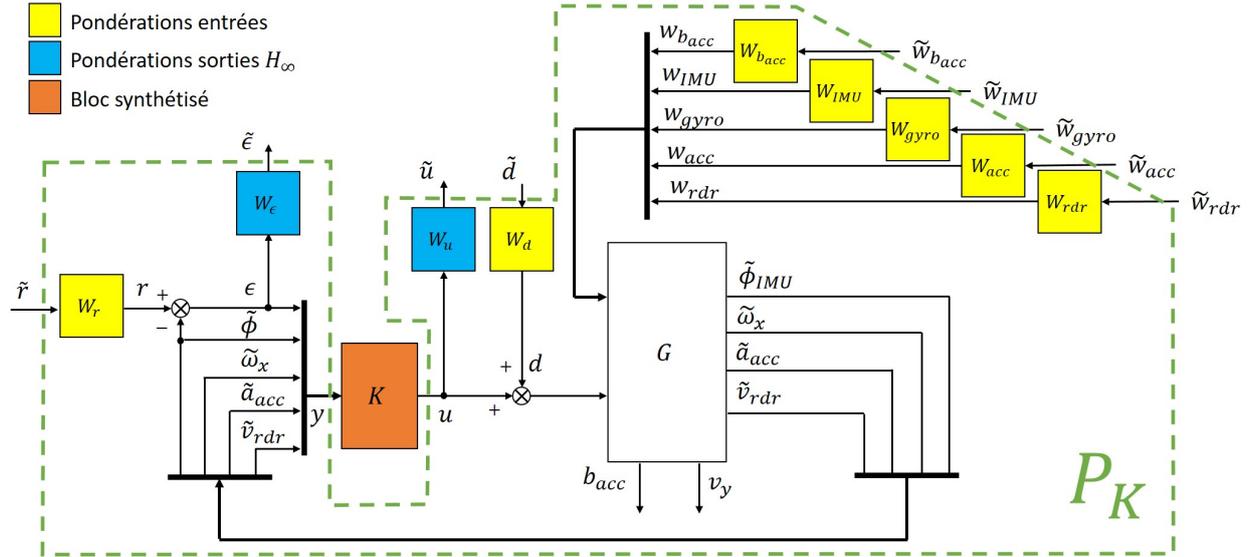


FIGURE 4.14 – Approche séquentielle : synthèse du correcteur K

Choix des pondérations Dans le schéma 4.14 on a deux types de signaux d'entrée : des bruits blancs (p.ex. bruit de mesure w_{acc}) et des échelons (référence r , perturbation d). Les bruits blancs ont un spectre fréquentiel constant, dont le niveau d'amplitude est donné par l'écart-type du bruit. On aura donc :

$$W_{b_{acc}} = \sigma_{b_{acc}} , W_{IMU} = \sigma_{IMU} , W_{gyro} = \sigma_{gyro} , W_{acc} = \sigma_{acc} , W_{rdr} = \sigma_{rdr} \quad (4.34)$$

où la valeur de la puissance des bruits est donnée dans la table de valeurs de l'annexe A.10. D'après le cahier des charges sur l'asservissement du drone de la sous-section 2.3.1, le drone est soumis à des signaux de référence et à des perturbations au niveau de l'actionneur sous forme d'échelon. Cela se traduit par un spectre fréquentiel de pente de $+20dB/décade$. On désire ici obtenir un comportement du système bouclé vis-à-vis du suivi de référence et du rejet de perturbation similaire à ce qui avait été fait dans le chapitre 2. Pour cela, on traduit les gabarits du chapitre 2 sur $T_{r \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ et $T_{d \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ en pondérations qui décrivent séparément les signaux d'entrée et de sortie. Les pondérations d'entrée $W_r(j2\pi\nu)$ et $W_d(j2\pi\nu)$ ont alors une pente de $+20dB/décade$, traduisant un signal sous forme d'échelon.

$$W_r(p) = \frac{0.06p + 60}{p + 1} , W_d(p) = \frac{0.31p + 310}{p + 1} , W_\epsilon = 1 \quad (4.35)$$

On note que les pulsations de coupure des gabarits sur $T_{r \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ et $T_{d \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ obtenues à partir des pondérations (4.35) sont légèrement supérieures à celles des gabarits du chapitre 2. Par exemple, on avait donné au gabarit sur $T_{r \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ une pulsation de coupure de $26rad/s$ dans le chapitre 2. Désormais, on a un correcteur à deux degrés de liberté qui permet d'avoir un temps de réponse plus court qu'auparavant, et on a donc choisi ici arbitrairement une pulsation de coupure de $40rad/s$.

On réalise tout d'abord la synthèse du correcteur H_∞ sans contraindre la commande, c'est-à-dire sans la pondération $W_u(j2\pi\nu)$. On trace sur la figure 4.15 les fonctions de transfert du système bouclé avec le correcteur synthétisé par la méthode H_∞ . On peut tout d'abord observer que tous les gabarits sont largement respectés, ce qui se traduit par un γ_{H_∞} obtenu lors de la synthèse⁷ qui vaut $\gamma_{H_\infty} = 0.08$. On observe de plus que la pulsation de coupure de

7. Pour rappel, le problème H_∞ résolu en pratique consiste à minimiser la norme $\|P \star K\|_\infty$ telle que $\|P \star K\|_\infty < \gamma_{H_\infty}$.

la fonction de transfert $T_{r \rightarrow \epsilon}(j2\pi\nu)$ est plus importante que nécessaire vis-à-vis du gabarit. En effet, elle vaut 600rad/s , ce qui est 15 fois plus élevé que la pulsation de coupure spécifiée par le gabarit (40rad/s). On a donc ici un problème de synthèse faiblement contraint au niveau du correcteur, ce qui permettra avec l’approche de synthèse conjointe d’influer sur son réglage pour obtenir l’erreur d’estimation la plus faible possible.

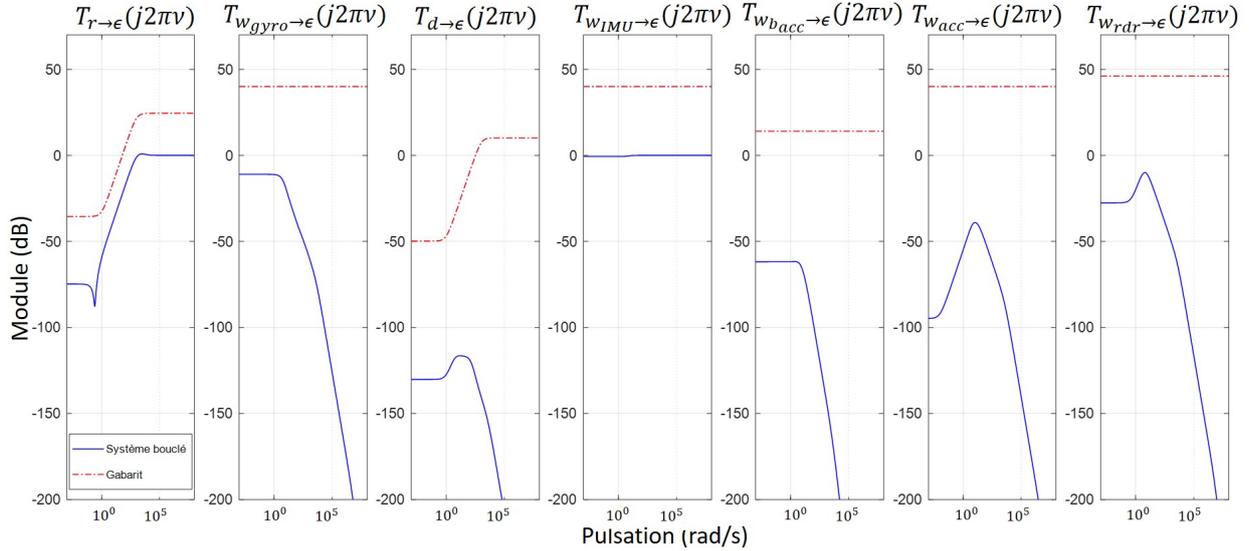


FIGURE 4.15 – Fonctions de transfert du système bouclé lors de la synthèse sans pondération $W_u(p)$

Limitation de bande passante avec $W_u(p)$ Par la suite, on va comparer l’approche séquentielle de synthèse à l’approche de synthèse conjointe en montrant l’influence de la contrainte sur la bande passante du correcteur sur le résultat. Pour cela, on se place dans 4 situations différentes où la contrainte sur la bande passante du correcteur varie, ce qui est réglé via la pondération $W_u(j2\pi\nu)$:

- Sans $W_u(j2\pi\nu)$: la commande issue du correcteur n’est pas contrainte ;
- $W_u(j2\pi\nu) = W_{u,1}(j2\pi\nu)$ (resp. $W_{u,2}(j2\pi\nu)$, $W_{u,3}(j2\pi\nu)$) telle que le gabarit sur $T_{r \rightarrow u}(j2\pi\nu)$, c’est-à-dire $|W_r(j2\pi\nu)W_u(j2\pi\nu)|^{-1}$, soit un filtre passe-bas de pulsation de coupure $1 \times 10^5\text{rad/s}$ (resp. $1 \times 10^3\text{rad/s}$, $1 \times 10^2\text{rad/s}$). On donne ci-dessous l’expression de ces pondérations :

$$W_{u,1}(p) = \frac{10^{-9}(p+1)(10^{-5}p+1)}{(10^{-7}p+1)(10^{-3}p+1)} \quad (4.36a)$$

$$W_{u,2}(p) = \frac{10^{-9}(p+1)(10^{-3}p+1)}{(10^{-7}p+1)(10^{-3}p+1)} \quad (4.36b)$$

$$W_{u,3}(p) = \frac{10^{-9}(p+1)(10^{-2}p+1)}{(10^{-7}p+1)(10^{-3}p+1)}. \quad (4.36c)$$

On trace sur la figure 4.16 les correcteurs K synthétisés avec les différentes pondérations $W_{u,1}(p)$, $W_{u,2}(p)$, $W_{u,3}(p)$. On observe que sans $W_u(p)$ le correcteur a une bande passante élevée alors que lorsque $W_u(p)$ évolue vers une pondération plus contrainte, la bande passante du correcteur diminue pour respecter le gabarit sur $T_{r \rightarrow u}(p)$. La norme H_∞ des systèmes

bouclés obtenue lors de la synthèse notée γ_{H_∞} est donnée dans la table 4.3. On voit logiquement que plus la pondération sur la commande contraint le problème, plus la norme H_∞ est élevée.

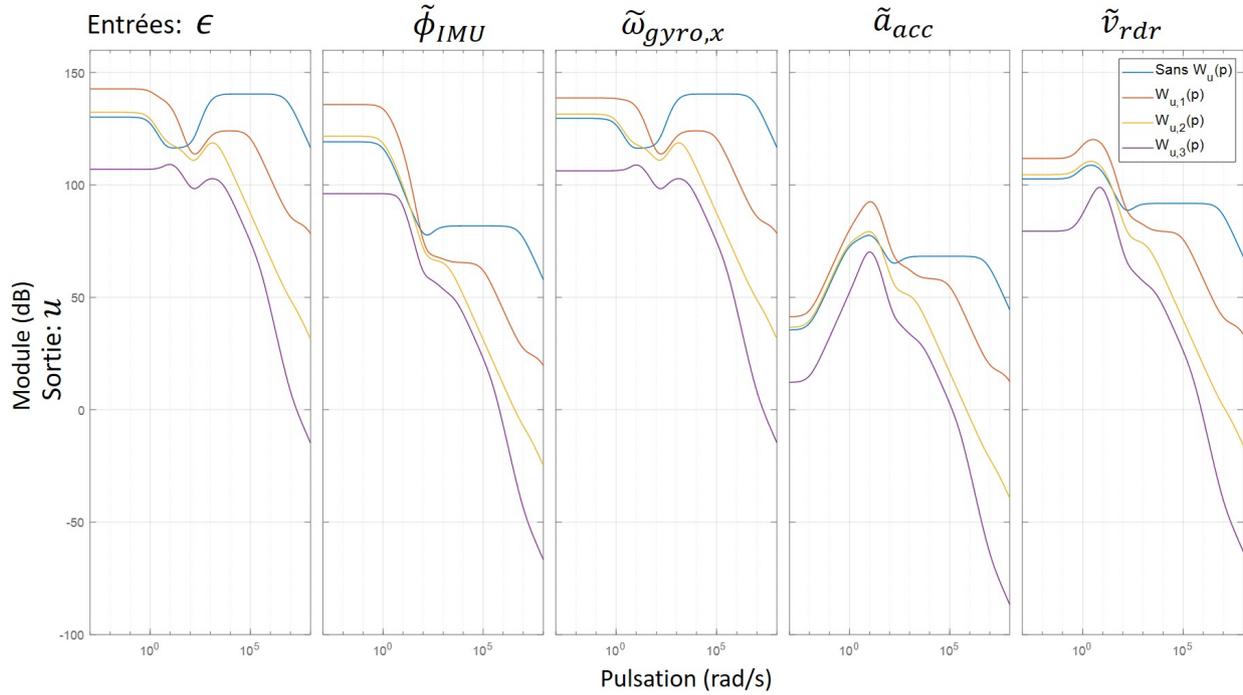


FIGURE 4.16 – Correcteur K synthétisé par la méthode H_∞ en fonction de $W_u(p)$

TABLE 4.3 – γ_{H_∞} obtenu lors de la synthèse du correcteur H_∞

	Sans $W_u(p)$	$W_{u,1}(p)$	$W_{u,2}(p)$	$W_{u,3}(p)$
γ_{H_∞}	0.08	0.13	0.16	0.37

Les correcteurs H_∞ ainsi synthétisés vont par la suite être utilisés lors de la synthèse d’estimateurs H_2 basés sur le modèle du système en boucle fermé.

Estimateur H_2 Dans cette sous-section, on va synthétiser un estimateur de la vitesse de translation v_y du drone et du biais sur l’accéléromètre b_{acc} . Comme expliqué précédemment, la synthèse de cet estimateur va se baser sur un modèle de la boucle fermée du drone, c’est-à-dire en prenant en compte le correcteur H_∞ synthétisé dans la sous-section précédente.

Le schéma utilisé pour la synthèse de l’estimateur est donné sur la figure 4.17. L’estimateur E prend en entrée le vecteur de mesures complet y (4.33) et a deux sorties : \hat{b}_{acc} et \hat{v}_y . Ces deux sorties sont comparées aux vraies valeurs b_{acc} et v_y issues du système pour construire les erreurs d’estimation pondérées $\tilde{e}_b = W_{e_b}(b_{acc} - \hat{b}_{acc})$ et $\tilde{e}_v = W_{e_v}(v_y - \hat{v}_y)$. Les pondérations de sortie W_{e_b} et W_{e_v} sont choisies pour refléter le niveau d’erreur d’estimation pour chacune des grandeurs. Elles ont été choisies à partir de simulations réalisées dans un premier temps avec ces deux pondérations fixées à 1. On les définit ensuite telles que :

$$W_{e_b} = 10, W_{e_v} = 100 \quad (4.37)$$

Les pondérations sur les signaux d’entrée restent quant à elles les mêmes que dans la sous-section précédente.

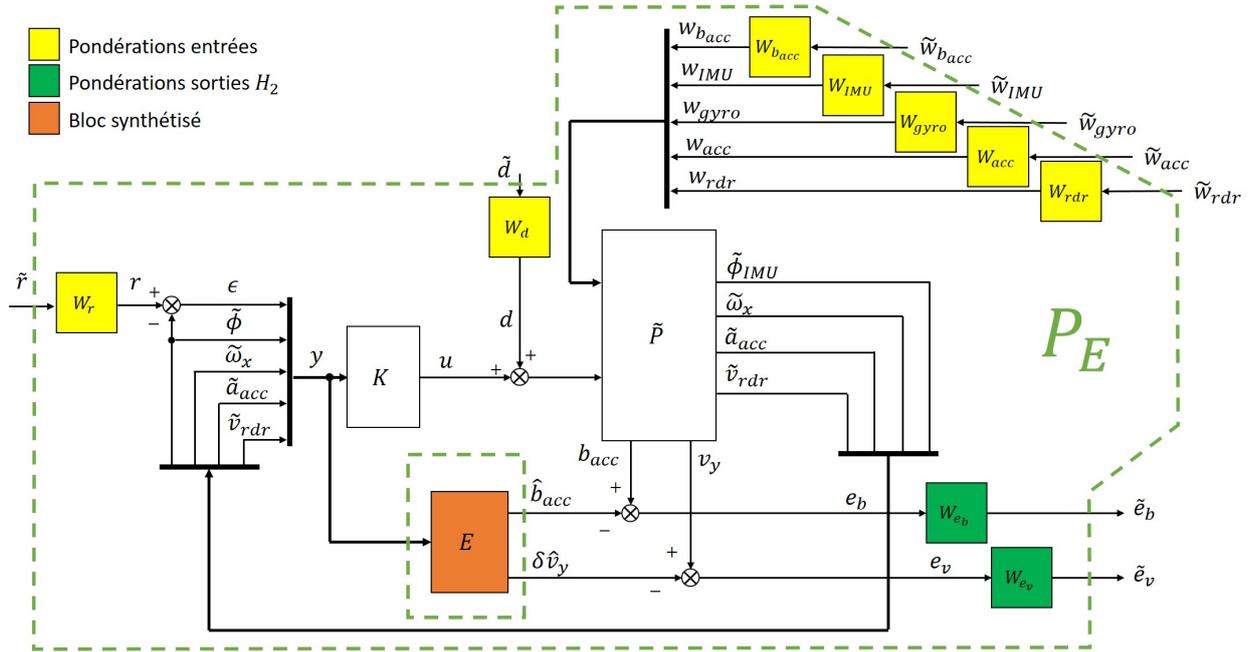


FIGURE 4.17 – Approche séquentielle : synthèse de l’estimateur E

On synthétise un estimateur E pour le système bouclé avec chaque correcteur K obtenu dans la sous-section précédente, c’est-à-dire en fonction de la pondération sur la commande $W_u(p)$. Les différents estimateurs obtenus sont représentés sur la figure 4.18. On observe, en toute logique, que pour le système bouclé avec le correcteur K ayant la plus grande bande passante (sans $W_u(p)$), l’estimateur synthétisé a aussi une bande passante plus élevée que dans les autres cas où $W_u(p)$ est utilisée. On note dans la table 4.4 la norme H_2 du système bouclé $P \star E$, notée γ_{H_2} , obtenue pour chaque estimateur E synthétisé. On peut noter que la valeur de γ_{H_2} la plus faible vaut $\gamma_{H_2} = 1.3614$ et est obtenue pour la pondération $W_{u,3}(p)$ qui est la plus contraignante.

TABLE 4.4 – γ_{H_2} obtenu lors de la synthèse de l’estimateur H_2

	Sans $W_u(p)$	$W_{u,1}(p)$	$W_{u,2}(p)$	$W_{u,3}(p)$
γ_{H_2}	1.3875	1.5735	1.4293	1.3614

Une des raisons pour lesquelles la norme H_2 est la plus faible dans le cas où $W_u(p)$ est la plus contraignante semble être liée à la bande passante du correcteur. En effet, si le correcteur a une bande passante élevée, alors la dynamique du système bouclé va s’étendre sur une large plage de fréquences, que l’estimateur doit pouvoir prendre en compte en ayant à son tour une bande passante élevée. La valeur γ_{H_2} représente la norme H_2 de l’erreur d’estimation lorsque le système bouclé est soumis à un bruit blanc unitaire en entrée. Étant donné qu’un bruit blanc a un spectre fréquentiel uniforme, si la bande passante de l’estimateur est plus élevée, alors on aura plus de bruit non-filtré en sortie de l’estimateur, et donc une norme H_2 plus élevée. On va vérifier cette hypothèse par la suite en analysant les résultats de la synthèse par l’approche mixte H_2/H_∞ .

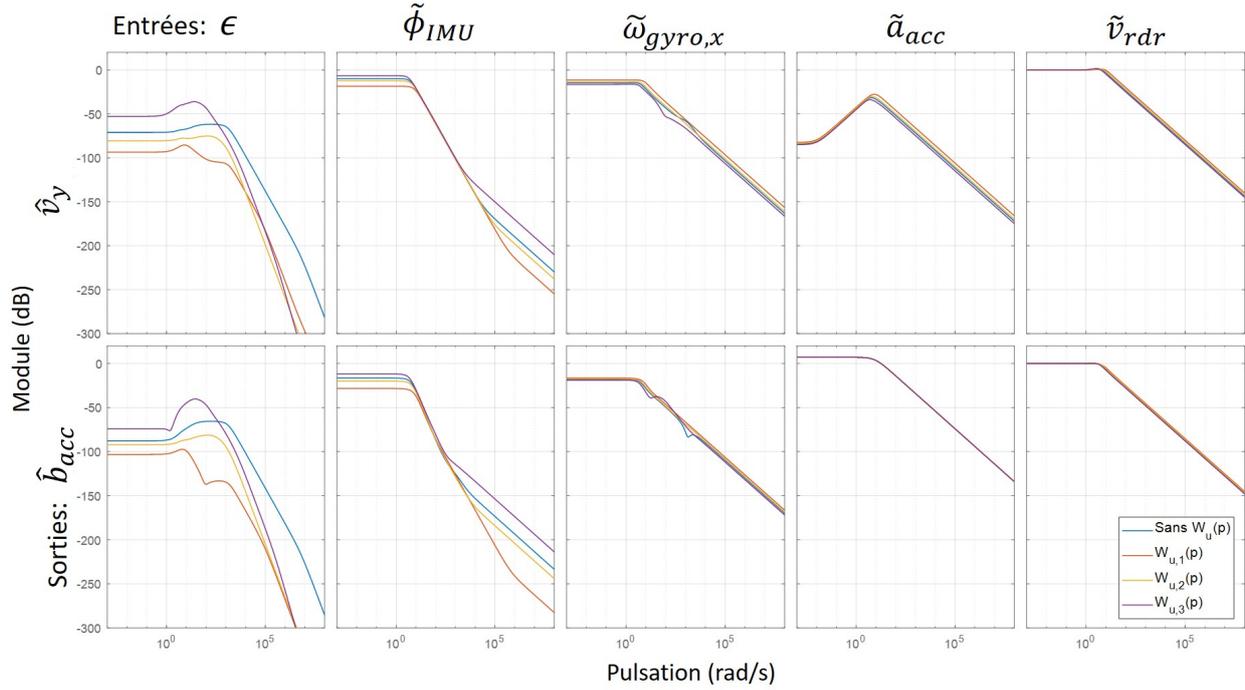


FIGURE 4.18 – Estimateur E synthétisé en fonction de la pondération sur la commande du correcteur $W_u(p)$

4.3.2.3 Synthèse conjointe : correcteur/estimateur

Désormais, on présente la démarche de synthèse conjointe qui s'appuie sur celle de synthèse séquentielle. Le schéma de synthèse utilisé dans cette section est donné sur la figure 4.19. Il regroupe les pondérations d'entrée et de sortie déjà utilisées en 4.3.2.2 lors de la synthèse séquentielle du correcteur et de l'estimateur. De la même façon que précédemment, on effectue la synthèse tout d'abord sans la pondération sur la commande $W_u(p)$, puis avec les différentes pondérations données en 4.3.2.2. Les valeurs de γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenues lors de la synthèse conjointe sont regroupées dans la table 4.5, où on note de nouveau les valeurs des tables 4.3 et 4.4 obtenues avec l'approche séquentielle.

TABLE 4.5 – γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenus par l'approche mixte (MIX) et par l'approche séquentielle (SEQ)

	Sans $W_u(p)$		$W_{u,1}(p)$		$W_{u,2}(p)$		$W_{u,3}(p)$	
	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}
SEQ	0.08	1.3875	0.13	1.5735	0.16	1.4293	0.37	1.3614
MIX	0.13	1.3614	0.22	1.3614	0.27	1.3614	0.53	1.3614

On observe qu'avec l'approche de synthèse conjointe on atteint une valeur γ_{H_2} plus faible qu'avec l'approche séquentielle pour chaque exemple, indépendamment de $W_u(p)$. On obtient en effet à chaque fois $\gamma_{H_2} = 1.3614$, ce qui est la valeur la plus faible que l'on ait obtenue avec l'approche séquentielle lorsque le correcteur était le plus contraint en bande passante⁸

8. On note que cette valeur de $\gamma_{H_2} = 1.3614$ semble correspondre une limite de performance de l'estima-

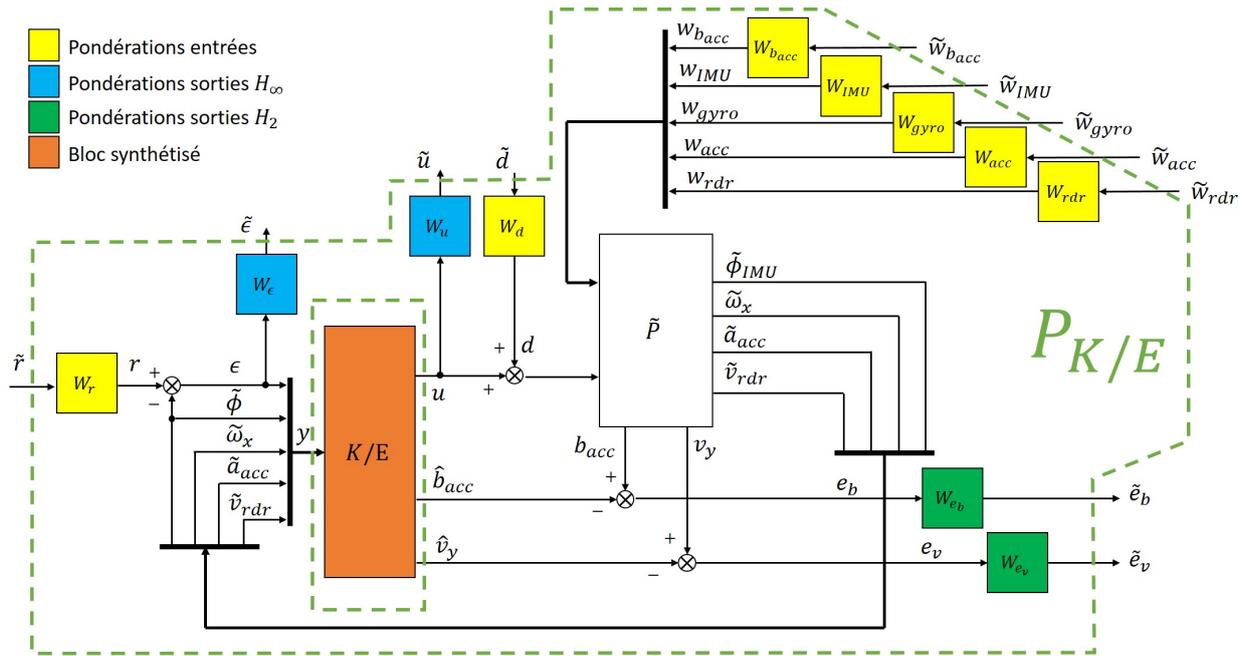


FIGURE 4.19 – Approche mixte : synthèse conjointe du correcteur H_∞ et de l'estimateur H_2

(c'est à-dire lorsque la pondération sur la commande valait $W_u(p) = W_{u,3}(p)$). On observe aussi que la norme H_∞ obtenue dans le cas *MIX* est supérieure à celle dans le cas *SEQ*, ce qui est logique, car dans le cas *MIX* on ne cherche pas directement à minimiser cette norme mais seulement à la garder inférieure à 1.

On trace sur la figure 4.20 le correcteur/estimateur K/E synthétisé avec la pondération $W_{u,1}(p)$ la moins contrainte et on le superpose au correcteur K et l'estimateur E obtenus par l'approche séquentielle. On peut voir que pour la sortie u , soit la partie associée à l'asservissement de ϕ , la bande passante de K/E (*MIX*) est limitée par rapport à celle du correcteur K (*SEQ*). De plus, on peut observer que pour les sorties estimées, notamment \hat{v}_y , la bande passante de K/E (*MIX*) est plus limitée que celle de l'estimateur E (*SEQ*). Par exemple, pour l'entrée \tilde{v}_{rdr} , qui est la mesure dont le gain associé à basses fréquences est le plus élevé, la pulsation de coupure à $-3dB$ vaut $8rad/s$ pour K/E (*MIX*) et $15rad/s$ pour E (*SEQ*). Cela semble donc valider l'hypothèse que la performance en estimation est liée à la bande passante du correcteur : si sa bande passante est limitée, alors la performance de l'estimateur est meilleure. L'approche *MIX* qui vise à minimiser la norme H_2 du système bouclé produit donc un correcteur ayant toujours une bande passante limitée, indépendamment de la pondération $W_u(p)$.

4.3.2.4 Comparaison des résultats en simulation

On simule le fonctionnement du drone bouclé avec le correcteur/estimateur de l'approche *MIX* et on le compare à celui obtenu avec l'approche *SEQ*. Le simulateur contient la structure correcteur/estimateur séquentielle de l'approche *SEQ* et celle conjointe de l'approche *MIX*. Les différents bruits de mesures sont représentés par des bruits blancs dont les écarts-types ont été donnés dans l'annexe A.10.

On trace sur la figure 4.21 la réponse du système lorsque le signal de référence ϕ_c suit un

teur puisqu'on n'obtient pas de meilleur résultat avec l'approche *MIX*, même lorsque le problème est très peu contraint c'est-à-dire lorsque $W_u(p)$ n'est pas utilisée.

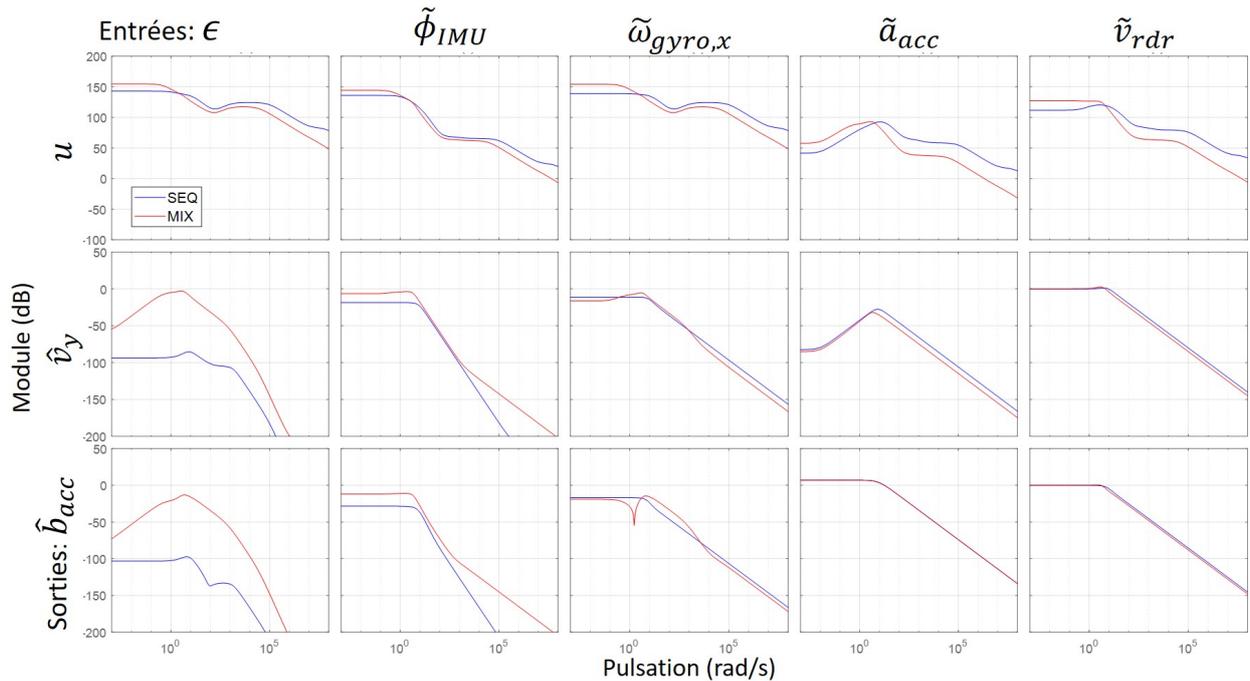


FIGURE 4.20 – Correcteur K , estimateur E (SEQ) et correcteur/estimateur K/E (MIX) synthétisés avec la pondération $W_{u,1}(p)$

échelon de 1 degré, avec une perturbation type échelon qui intervient à 1 seconde au niveau du signal de commande. Les correcteurs sont ceux qui ont été obtenus lors de la synthèse avec $W_{u,1}(p)$. On observe un suivi de référence et un rejet de perturbation similaire, bien que l’amplitude du pic lié à la perturbation soit légèrement plus faible avec l’approche *SEQ*. On note que l’angle asservi par le correcteur K de l’approche *SEQ* est plus bruité que dans le cas *MIX*, ce qui est dû au fait que la bande passante du correcteur *SEQ* est plus grande que dans le cas *MIX*, ce qui implique que le bruit des mesures se propage dans le signal de commande. Néanmoins, la réponse du système asservi par les correcteurs synthétisés par l’approche *MIX* et *SEQ* reste correcte et respecte bien le cahier des charges en matière de temps de réponse et de rejet de perturbation. C’est le cas pour toutes les synthèses de correcteurs effectuées pour toutes les pondérations $W_u(p)$ explicitées plus tôt, ce qui se vérifie par la valeur γ_{H_∞} de la table 4.5. Elle est toujours inférieure à 1, indépendamment de l’approche *MIX* ou *SEQ*, ce qui signifie que le cahier des charges représenté par les gabarits fréquentiels est toujours respecté.

Comme il n’y a pas de différence notable entre les réponses temporelles des différents systèmes issus de l’approche *SEQ* et *MIX*, aussi bien pour l’angle asservi que pour les grandeurs estimées, on ne représente pas les tracés en fonction du temps. On peut cependant calculer la différence au niveau des erreurs d’estimation de la vitesse et du biais, respectivement $e_v = \delta v_y - \delta \hat{v}_y$ et $e_b = b_{acc} - \hat{b}_{acc}$. La valeur *RMS* de ces erreurs correspond à des simulations de 10s effectuées pour chaque correcteur/estimateur obtenu en fonction de $W_u(p)$. On représente le résultat normalisé sous forme d’histogramme sur la figure 4.22. En accord avec les normes H_2 obtenues lors de la synthèse et regroupées dans la table 4.5, l’erreur d’estimation via l’approche *MIX* est toujours inférieure ou égale à celle obtenue avec l’approche *SEQ*. On peut voir que le gain principal de l’approche *MIX* par rapport à l’approche *SEQ* est réalisé sur l’estimation de vitesse, où on atteint une amélioration maximale de 25% de la performance pour la pondération $W_{u,1}(p)$.

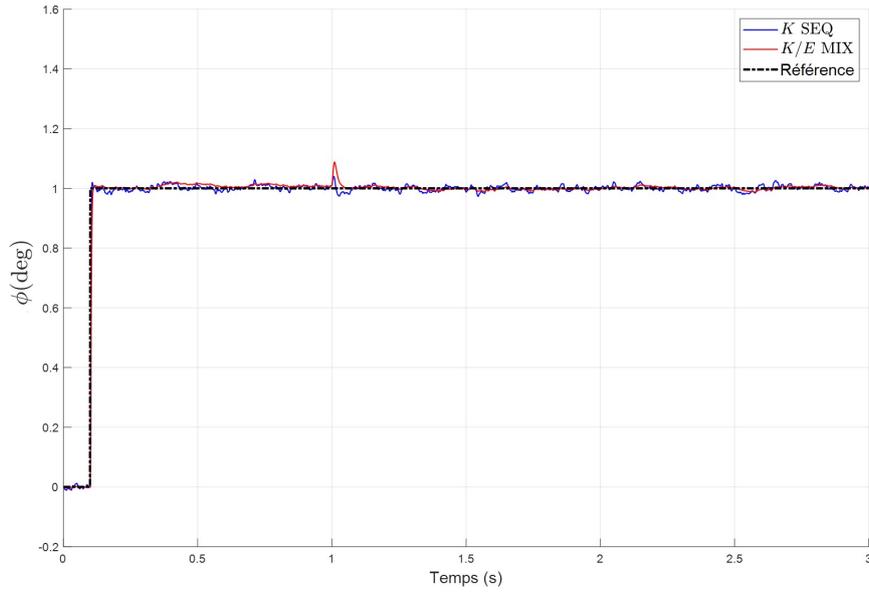


FIGURE 4.21 – Simulation de l’asservissement de l’angle $\delta\phi$ (synthèse avec $W_{u1}(p)$)



FIGURE 4.22 – Valeurs RMS des erreurs d’estimation de la vitesse et du biais en fonction de $W_u(p)$

Conclusion En analysant les résultats de la synthèse par l’approche *SEQ* et par l’approche *MIX*, on voit que cette dernière permet potentiellement un gain en performance d’estimation, tout en gardant un asservissement correct vis-à-vis du cahier des charges. L’approche *MIX* permet d’ajuster le correcteur pour atteindre une valeur γ_{H_2} qui est toujours minimale. L’ajustement du correcteur semble se faire notamment au niveau de sa bande passante, qui est directement limitée dans le cas de l’approche *MIX*, indépendamment de la pondération sur la commande $W_u(p)$. Pour obtenir le même niveau de performance d’estimation avec l’approche séquentielle, on a dû limiter fortement la bande passante du correcteur en utilisant la pondération $W_u(p) = W_{u,3}(p)$.

4.3.2.5 Prise en compte des filtres passe-bas F

Jusqu’à maintenant, les résultats ont été obtenus en négligeant les filtres passe-bas sur les mesures, notés F dans l’équation (4.1) page 120. On prend désormais en compte ces filtres dans le modèle des mesures de capteurs et on réalise de nouveau la synthèse séquentielle et la synthèse mixte des correcteurs/estimateurs en fonction de la pondération sur la commande

$W_u(p)$. On va voir que les filtres contraignent beaucoup le problème de synthèse et la bande passante du correcteur, indépendamment de la pondération $W_u(p)$ choisie.

On regroupe dans la table 4.6 les valeurs de γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenues lors des synthèses séquentielle (*SEQ*) et mixte (*MIX*). On peut voir cette fois que, dès l’ajout de la pondération $W_{u,1}(p)$ qui est celle qui contraint le moins la bande passante du correcteur, le niveau de performance en estimation est le même entre l’approche *SEQ* et *MIX* ($\gamma_{H_2} = 1.3615$). Cette valeur est d’ailleurs légèrement plus élevée que celle obtenue précédemment lors de la synthèse sans les filtres (valeur minimale de $\gamma_{H_2} = 1.3614$), ce qui implique que la performance en estimation sera légèrement plus faible. On note enfin que pour la pondération $W_{u,3}(p)$ qui est la plus contraignante en termes de bande passante, la synthèse séquentielle produit un correcteur H_∞ qui ne satisfait pas les gabarits fréquentiels ($\gamma_{H_\infty} > 1$). La synthèse conjointe ne produit donc pas de résultat, car la condition $\gamma_{H_\infty} \leq 1$ qui est nécessaire pour obtenir une solution au problème d’optimisation H_2/H_∞ n’est pas vérifiée.

Ces observations semblent confirmer l’hypothèse que le gain en performance de l’approche *MIX* par rapport à l’approche *SEQ*, que l’on observait précédemment lorsque les filtres n’étaient pas pris en compte, dépendait de la liberté allouée au correcteur en termes de bande passante. En effet, on a montré dans ce cas-là que contrairement à l’approche *MIX* qui contraignait automatiquement la bande passante de l’ensemble correcteur/estimateur, l’approche *SEQ* donnait un correcteur et donc un estimateur ayant une bande passante élevée lorsque la commande n’était pas contrainte par $W_u(p)$. On supposait alors que, étant donné que les bruits en entrée avaient un spectre fréquentiel constant, si la bande passante de l’estimateur était plus élevée alors les bruits étaient moins filtrés, et donc la norme H_2 du système était plus élevée. Pour obtenir le même niveau de performance γ_{H_2} entre l’approche *MIX* et l’approche *SEQ* on devait utiliser la pondération sur la commande $W_{u,3}(p)$ qui contraignait fortement la bande passante du correcteur, voir la table 4.5. Ici, on prend en compte les filtres F sur les mesures d’IMU qui contraignent *a priori* la bande passante atteignable par le correcteur, que ce soit avec l’approche *SEQ* ou avec l’approche *MIX*. On observe donc peu de différence entre les deux approches sur la valeur γ_{H_2} dans la table 4.6, puisque dans ce cas, la prise en compte des filtres ne permet pas de rendre visible l’intérêt de l’approche *MIX*.

TABLE 4.6 – γ_{H_∞} et γ_{H_2} obtenus lors de la synthèse *MIX* et *SEQ* avec les filtres F

	Sans $W_u(p)$		$W_{u,1}(p)$		$W_{u,2}(p)$		$W_{u,3}(p)$	
	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}	γ_{H_∞}	γ_{H_2}
SEQ	0.27	1.3984	0.34	1.3615	0.29	1.3615	4.19	1.3614
MIX	0.45	1.3615	0.45	1.3615	0.50	1.3615	\emptyset	\emptyset

On trace sur la figure 4.23 le correcteur et l’estimateur obtenus par l’approche séquentielle et par l’approche conjointe, lors de la synthèse avec la pondération $W_{u,1}(p)$. Par rapport à la figure 4.20 où les filtres étaient négligés, on peut voir qu’il y a désormais moins d’écart entre les diagrammes de Bode associés à la partie correcteur, qui correspond à la sortie u . Le correcteur issu de l’approche *SEQ* a donc une bande passante plus faible, qui s’approche de celle de l’approche *MIX*. On observe que pour la sortie estimée \hat{v}_y et au niveau des entrées \tilde{a}_{acc} et \tilde{v}_{dr} , qui sont les mesures pour lesquelles le gain de l’estimateur est le plus important, il n’y a pas d’écart entre l’approche *SEQ* et *MIX*. On note notamment que la pulsation

de coupure à $-3dB$ pour l’entrée \tilde{v}_{rdr} vaut $8rad/s$ pour les deux approches *SEQ* et *MIX*. Pour rappel, la valeur obtenue lorsque les filtres n’étaient pas pris en compte était de $8rad/s$ pour l’approche *MIX* et $15rad/s$ pour l’approche *SEQ*, voir figure 4.20.

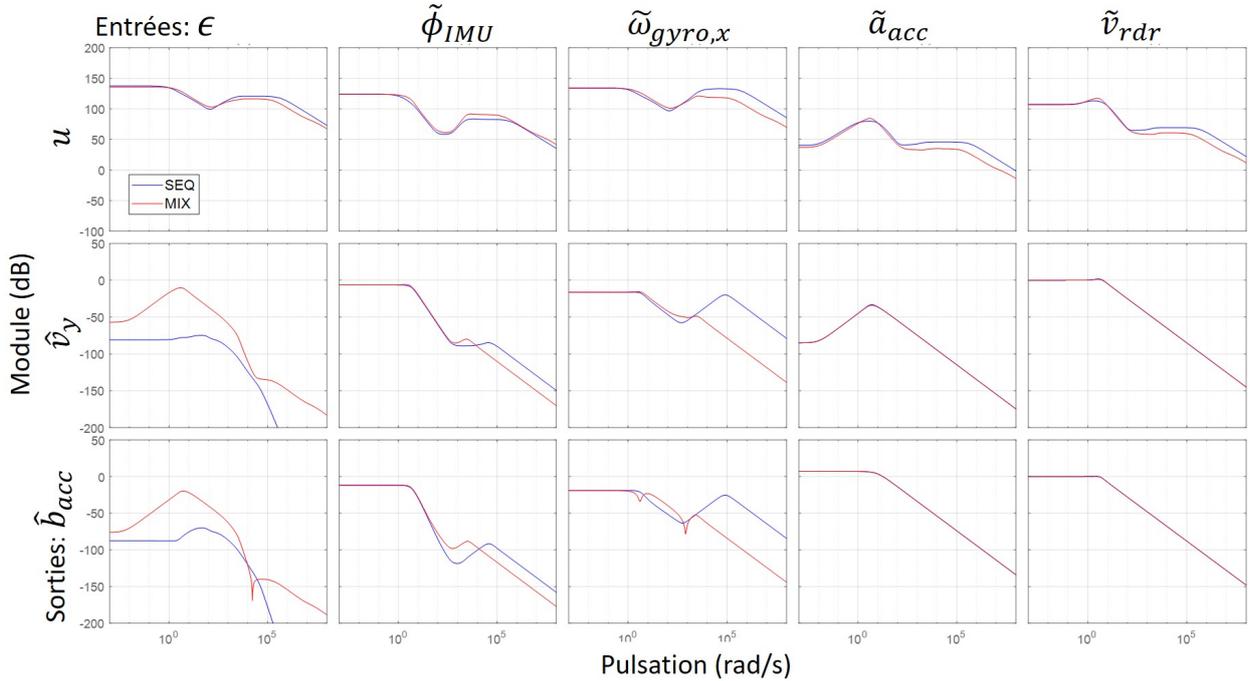


FIGURE 4.23 – Correcteur et estimateur *SEQ* et *MIX*, avec la pondération $W_{u,1}(p)$ et les filtres F

Conclusion L’ajout des filtres contraint le problème en termes de bande passante, ce qui fait tendre la solution de l’approche *SEQ* vers celle de l’approche *MIX*. Notamment, on a vu que la valeur γ_{H_2} obtenue, qui traduit la performance en estimation, était la même pour les deux approches *SEQ* et *MIX* dès que le correcteur est suffisamment contraint en bande passante (à partir de $W_{u,1}(p)$). Cependant, l’ajout de ces filtres contraint globalement le problème de synthèse, ce qui fait que la performance d’estimation atteignable par l’approche *MIX* reste moins élevée que lorsque les filtres étaient négligés, c’est-à-dire lorsque davantage de liberté était donnée pour le choix du correcteur et de l’estimateur.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié différentes approches pour estimer le mouvement du drone. Dans la première section, on a étudié les structures classiques d’estimateurs de l’état de l’art. Typiquement, les estimateurs sont basés sur le filtre de Kalman linéaire ou étendu, qui est synthétisé à partir du modèle en boucle ouverte du drone, linéaire ou non-linéaire. On a comparé ces approches à celle que l’on propose dans un premier temps, où l’estimateur est un gain optimal de Kalman, synthétisé à partir d’un modèle de la boucle fermée du drone. On a montré que notre approche présentait un intérêt en matière de complexité et de performance vis-à-vis des autres solutions issues de la littérature. Dans cette première section, le modèle du drone en boucle fermée dépendait du correcteur qui avait été synthétisé dans le chapitre 2 pour répondre à des objectifs d’asservissement fixés par le cahier des charges.

Dans la deuxième section, on a alors étendu l’idée de considérer l’influence du correcteur sur la dynamique du drone lors de la phase l’estimation. On a cherché à régler de nouveau le correcteur, de manière à maximiser la performance d’estimation tout en respectant le cahier des charges sur l’asservissement. Pour cela, on a cherché à formuler le problème de synthèse de correcteur et d’estimateur comme un problème unique de synthèse. On a montré que le problème de synthèse d’un estimateur type filtre de Kalman pouvait se formuler comme un problème de synthèse de commande H_2 , que l’on peut combiner avec le problème de synthèse de commande H_∞ du chapitre 2 pour former un unique problème de synthèse de commande H_2/H_∞ . Celui-ci peut se formuler comme un problème d’optimisation avec un critère mixte H_2/H_∞ , où l’on cherche à minimiser la norme H_2 de l’erreur d’estimation sous la contrainte que le correcteur respecte le cahier des charges sur l’asservissement, formulé sous la forme d’un critère H_∞ . Cette approche permet d’obtenir un bloc conjoint correcteur/estimateur, qui respecte le cahier des charges, tout en permettant d’estimer au mieux les grandeurs de vitesse et de biais de l’accéléromètre du drone.

Par rapport à une approche séquentielle où l’on synthétise successivement le correcteur puis l’estimateur, l’approche mixte permet un gain significatif en matière d’ordre de complexité et potentiellement un gain important en performance d’estimation. En effet, on a montré que si le gain en ordre est toujours vérifié, celui en performance d’estimation dépend des contraintes associées au problème de synthèse. Si le problème est fortement contraint, alors la différence de performance est faible entre l’approche conjointe et l’approche séquentielle. Si le problème est faiblement contraint, alors l’approche conjointe donne de meilleurs résultats en termes d’estimation, avec un gain en simulation atteignant jusqu’à 25% en matière d’erreur *RMS* sur la vitesse estimée.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Cette thèse visait à élaborer, dans le cadre de la navigation autonome sans signaux d'infrastructure, une méthode d'estimation du mouvement à faible coût de calcul pour un agent mobile asservi. Les informations accessibles pour l'estimation dans ce contexte proviennent d'un modèle du mouvement de l'agent et de mesures de capteurs. Les approches de la littérature au sujet de la navigation sans signaux d'infrastructure se concentrent principalement sur les capteurs qui sont embarqués et sur la fusion de leurs mesures. En complément de ces approches, ce travail de thèse oriente le questionnement sur les informations qui peuvent être obtenues à partir du modèle du mouvement. L'agent mobile considéré dans ce travail de thèse est un micro-drone, nécessairement asservi pour garantir sa stabilité. Sa dynamique est donc régie en partie par le correcteur qui est employé. On a alors cherché à savoir quel impact pouvait avoir le correcteur sur la performance de l'estimateur du mouvement, notamment, s'il serait possible de régler un correcteur qui maximise la performance de l'estimateur.

Dans le chapitre 2, on a commencé par obtenir un modèle de la dynamique du micro-drone non-asservi, autrement dit en "boucle ouverte". On en a identifié les paramètres et vérifié la validité à partir de données expérimentales. L'étude de ce modèle a mis en lumière le caractère non-linéaire et instable de la dynamique non-asservie du drone. De plus, on a montré qu'une modification de l'aérodynamique du drone, par exemple en embarquant des capteurs volumineux, pouvait impacter de manière importante son comportement dynamique. On a alors étudié la structure de commande d'origine du *Crazyflie* basée sur des correcteurs de type *PID*, et on a montré ses limites, notamment vis-à-vis des effets aérodynamiques précédemment cités. On a donc entrepris de re-régler ces correcteurs avec des méthodes d'automatique fréquentielle linéaire classiques, et on a obtenu des correcteurs *P/PI* à l'ordre plus faible que ceux d'origine, et plus performants. L'inconvénient de l'approche de réglage adoptée, est qu'elle n'était pas systématique et nécessitait de régler successivement les correcteurs à partir des différentes fonctions de transfert du modèle du drone à commander. Dans un second temps, on a donc montré que l'on pouvait obtenir un correcteur aux caractéristiques similaires que celles du *P/PI* par la méthode de synthèse de commande H_∞ basée sur la résolution par ordinateur d'un problème d'optimisation.

Les méthodes précédentes de synthèse de correcteurs sont basées sur des méthodes d'automatique linéaire, or le modèle du drone initialement obtenu était non-linéaire. On a alors développé une méthode pour valider le contrôle du drone via des correcteurs linéaires lorsque celui-ci est représenté par son modèle non-linéaire. Ainsi, on a mis la recherche du domaine

d'attraction des correcteurs linéaires sous la forme d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles, solvable numériquement. Cette approche permet de garantir la stabilité du drone sur son domaine de vol vis-à-vis des changements d'angles. Le modèle non-linéaire du drone considéré ici comprend seulement la partie liée à l'attitude du drone, et la partie associée à la vitesse linéaire a été mise de côté pour l'instant.

Finalement, on a obtenu dans ce chapitre un modèle du drone prenant en compte son asservissement *PID* d'origine, c'est-à-dire sa dynamique "en boucle fermée". Celui-ci étant d'ordre de complexité élevé, on a appliqué une méthode de réduction d'ordre afin de lui permettre d'être utilisé pour la synthèse d'un estimateur à bas coût de calcul.

Dans le chapitre 3, on a étudié les mesures issues de capteurs embarqués disponibles pour l'estimation du mouvement. Dans le cadre de la navigation sans signaux d'infrastructure, le système de navigation se base sur les capteurs d'une centrale inertielle. On a alors modélisé les capteurs de la centrale inertielle du drone *Crazyflie* via la méthode de la variance d'Allan, afin d'obtenir un modèle précis de leurs mesures. On a montré que les spécifications données par leur documentation technique, n'étaient pas représentatives du niveau d'erreur que l'on trouve sur les mesures effectuées en vol. On a donc adapté le modèle d'erreur de ces capteurs inertiels aux conditions expérimentales liées au vol du drone. De plus, on a montré, en s'appuyant sur des travaux de la littérature, que l'accéléromètre compris dans la centrale inertielle pouvait être assimilé à un capteur de vitesse en trois dimensions dans le cas particulier du drone. On a alors identifié les différents paramètres de ce modèle de mesure de vitesse spécifique au cas du drone à partir de données expérimentales.

Une étude comparative des informations utilisées en complément des capteurs inertiels dans la littérature a permis de montrer l'intérêt de coupler ces capteurs à un radar afin d'améliorer l'estimation de la vitesse du drone. Contrairement aux approches de la littérature qui considèrent l'utilisation de radars CW pour estimer uniquement la vitesse, on a choisi d'intégrer un radar FMCW qui permet le développement de différentes fonctionnalités en couplant les informations de vitesse et de distance qu'il retourne. On a alors conçu un algorithme spécifiquement pour ce type de radar, afin d'estimer simultanément plusieurs grandeurs du mouvement du drone, soit sa vitesse de déplacement horizontale et verticale ainsi que sa hauteur par rapport au sol. Cet algorithme a été pensé pour avoir un coût de calcul faible, ce qui lui permet potentiellement d'être intégré sur un microcontrôleur en complément d'autres algorithmes de traitement des données issues du même radar FMCW, comme des algorithmes dédiés à la détection d'obstacles pour la navigation autonome.

Enfin, à partir des développements des deux chapitres précédents, le chapitre 4 a permis de répondre à la question de comment estimer au mieux la vitesse du drone avec un coût de calcul faible, étant donné que son mouvement est asservi. Dans un premier temps, on a cherché à voir si la performance de l'estimateur pouvait être impactée par le choix du correcteur. Pour cela, on a synthétisé un estimateur de type filtre de Kalman linéaire à partir du modèle de la boucle fermée du drone obtenu dans le chapitre 2 et des modèles de mesures de capteurs du chapitre 3. Ensuite, on a comparé cette approche à celles de la littérature qui se basent sur la synthèse d'estimateurs à partir d'un modèle de la dynamique du drone en boucle ouverte. À partir de données expérimentales, on a montré que notre approche permettait d'obtenir une erreur d'estimation plus faible que celles de la littérature, tout en ayant un coût de calcul faible. La prise en compte du correcteur dans la phase d'estimation semblait donc présenter un intérêt, puisqu'elle influait sur le modèle utilisé pour synthétiser l'estimateur et donc aussi sur la performance de celui-ci.

Dans un second temps, on a donc cherché à synthétiser un correcteur qui permette de maximiser la performance de l'estimateur du mouvement. Le cahier des charges donné pour l'asservissement du drone étant peu contraint, cela permettait d'avoir une certaine liberté au niveau du réglage du correcteur qui pouvait être exploitée pour faciliter l'estimation du mouvement. Pour formaliser la recherche d'un correcteur qui satisfasse le cahier des charges sur l'asservissement tout en servant les objectifs de l'estimateur, on a construit un problème d'optimisation. Celui-ci traduit la recherche d'un ensemble correcteur/estimateur tel que la variance de l'erreur d'estimation soit minimisée et que le cahier des charges en matière d'asservissement soit satisfait. Pour cela on a utilisé un critère d'optimisation mixte, basé sur les normes H_∞ et H_2 pondérées. La norme H_∞ pondérée est utilisée pour traduire le respect du cahier des charges par le correcteur, tandis que la norme H_2 pondérée permet de spécifier l'objectif en estimation qui est de minimiser la variance de l'erreur.

On a tout d'abord conçu de manière séquentielle un correcteur H_∞ puis un estimateur H_2 basé sur le modèle en boucle fermée du drone, puis, on a comparé cette approche à celle où la synthèse de correcteur et d'estimateur s'effectue de manière conjointe avec le critère d'optimisation mixte H_2/H_∞ . On a alors montré que l'approche conjointe permettait un gain significatif en performance d'estimation qui dépend des contraintes liées au cahier des charges sur l'asservissement. Notamment, lorsque la bande-passante du correcteur n'était pas ou peu limitée, l'approche conjointe permettait de diminuer jusqu'à 25% la valeur RMS de l'erreur d'estimation en simulation par rapport à l'approche séquentielle. Lorsque les contraintes augmentent, ce gain en performance diminue jusqu'à obtenir une solution issue de l'approche de synthèse conjointe qui tend vers celle issue de la synthèse séquentielle. Indépendamment du gain en performance de l'estimation, on a également montré que l'approche conjointe menait à un ensemble correcteur/estimateur d'une complexité plus faible qu'avec l'approche séquentielle, ce qui permet de réduire le coût de calcul de la solution qui vise à être implémentée sur microcontrôleur.

5.2 Perspectives

Les résultats de cette thèse laissent entrevoir des perspectives que l'on détaille dans les sous-sections suivantes.

5.2.1 Technologie SigmaFusion™

Cette thèse a été réalisée dans le laboratoire Intelligence Intégrée Multi-capteurs (LIIM) du CEA qui développe une technologie de perception de l'environnement appelée SigmaFusion™, destinée au marché des véhicules autonomes. Celle-ci permet de fusionner les informations provenant de plusieurs capteurs extéroceptifs pour réaliser une cartographie de l'environnement du véhicule, de manière efficace vis-à-vis du coût de calcul et de mémoire. Pour fonctionner, cette technologie requiert de connaître la position des capteurs au cours du temps. Les travaux réalisés dans ce document sur l'estimation de mouvement s'inscrivent donc directement dans le contexte de la technologie SigmaFusion™, en particulier :

- Dans le cas où le mouvement du véhicule est asservi par un correcteur, la méthode de synthèse conjointe de correcteur/estimateur présente un intérêt. En effet, elle permet de commander le système d'une manière qui maximise la précision de l'estimation de son mouvement, et donc améliore la construction de la carte de son environnement, tout en satisfaisant des objectifs en matière d'asservissement.

- L’algorithme d’estimation de vitesse à partir des données brutes d’un radar FMCW de la section 3.2.3, qui pourrait être couplé à l’utilisation de ce même radar pour la détection d’obstacles. En effet, auparavant dédiée à la fusion de données pour les capteurs à champ de vision étroit (p.ex. Lidar), la technologie SigmaFusionTM permet désormais de fusionner les mesures issues de capteurs à large champ de vision, comme le radar [Dia18]. De plus, l’algorithme d’estimation de vitesse a été pensé pour avoir un coût de calcul faible, ce qui permet lors de son intégration sur microcontrôleur d’économiser des ressources en calcul nécessaires à la réalisation d’autres tâches telles que la détection d’obstacles.
- La carte de l’environnement produite par SigmaFusionTM pourrait également servir à améliorer l’estimation du mouvement. Des travaux ont été menés dans cette direction dans [Dia20], qui aborde la problématique de SLAM (*Simultaneous Localization And Mapping*).

5.2.2 Synthèse conjointe correcteur/estimateur

Dans cette thèse, le problème de la synthèse conjointe d’un ensemble correcteur/estimateur a été formulé sous la forme d’un problème d’optimisation avec un critère mixte H_2/H_∞ . La méthode de résolution de ce problème, choisie parmi les méthodes existantes de la littérature, a donné des résultats satisfaisants en simulation sur le cas du drone considéré ici. Cependant, deux points resteraient à aborder pour compléter l’analyse :

- La méthode de résolution du problème d’optimisation mixte H_2/H_∞ choisie ici, basée sur une relaxation convexe du problème initialement non-convexe implique un certain degré de conservatisme sur la solution obtenue. D’autres méthodes existent, comme celles basées sur la paramétrisation de Youla [WR95] qui permettraient d’obtenir un résultat qui tend vers l’optimal. Cependant, elles ont été écartées car elles menaient potentiellement à un ordre élevé du correcteur/estimateur, ce qui n’était pas intéressant dans un contexte où la solution vise à être embarquée sur un microcontrôleur. En revanche, on pourrait les utiliser afin de déterminer la limite de performance atteignable pour le correcteur/estimateur, ce qui permettrait alors d’évaluer le degré de conservatisme de la méthode de résolution utilisée dans cette thèse.
- Afin de valider le gain potentiel en performance d’estimation de l’approche de synthèse conjointe par rapport à celle de l’approche séquentielle, la comparaison entre les deux approches menée en simulation dans le chapitre 4 devrait être réalisée expérimentalement. Pour cela, l’étude réalisée ici sur un seul axe devrait être étendue aux trois axes du drone, et l’ensemble estimateur/correcteur obtenu devrait être implémenté sur son microcontrôleur.

5.2.3 Méthode d’estimation du domaine d’attraction des correcteurs

La méthode présentée dans la section 2.4 du chapitre 2 permet d’estimer le domaine d’attraction des correcteurs d’attitude du drone lorsque celui-ci est représenté par son modèle non-linéaire. Ce travail pourrait bénéficier des extensions suivantes :

- Le modèle considéré dans ce travail ne contient que la partie attitude du modèle non-linéaire du drone et n’inclut donc pas la partie liée à la translation. Il pourrait être intéressant de compléter l’étude en considérant le modèle non-linéaire complet, notamment pour prendre en compte l’effet du rebouclage entre les vitesses de transla-

tion et de rotation dû au paramètre h , qui peut modifier fortement le comportement dynamique du drone.

- La méthode a été conçue comme un outil de validation *a posteriori* du correcteur synthétisé pour contrôler l'attitude du drone. Elle pourrait cependant être intégrée dans une démarche de synthèse de correcteur comme dans [EGS96], ce qui permettrait de synthétiser un correcteur pour stabiliser le drone sur une plage de fonctionnement fixée *a priori*.

5.2.4 Radar FMCW

- Le travail mené sur le radar FMCW, et notamment l'algorithme d'estimation de vitesse et de hauteur à partir de ses données brutes, vise à être intégré sur un petit agent mobile tel que le micro-drone *Crazyflie*. Une validation expérimentale de l'algorithme réalisée pendant la thèse a montré la précision atteignable en matière d'estimation de la vitesse horizontale et de la hauteur. Cependant, cette validation s'effectuait à partir de données issues d'un dispositif de test non interfacé avec le drone et l'algorithme n'était pas implémenté en temps réel sur microcontrôleur. Un travail complet d'intégration d'un radar FMCW sur le drone et d'implémentation temps réel sur microcontrôleur reste donc à réaliser pour démontrer l'embarquabilité de la solution, et la précision de l'estimation atteignable sur une application embarquée telle que la navigation du micro-drone.

Annexe A

Annexes

A.1 Caractéristiques du micro-drone *Crazyflie*

Cette thèse se base sur le micro-drone *Crazyflie* 2.0, visible sur la figure 1.2 à gauche. Ci-dessous on donne ses principales caractéristiques :

- Distance de rotor à rotor : $7cm$;
- Masse : $29g$;
- 4 moteurs DC (avec balais), qui autorisent une masse maximum pour le décollage d'environ $50g$;
- Temps de vol : environ $7min$;
- Centrale inertielle 10 – *DOF* (*Degres-Of-Freedom*) :
 - Accéléromètre MPU-6500 ;
 - Gyroscope MPU-6500 ;
 - Magnétomètre AK8963 ;
 - Baromètre LPS25H.
- 2 microcontrôleurs embarqués :
 - Gestion électrique et radio : ARM Cortex-M0 (nRF51822) 32MHz
 - **Principal : ARM Cortex-M4 (STM32F405) 32 bits 168MHz**

A.2 Identification des paramètres du modèle dynamique

On rappelle dans la table A.1 l'ensemble des paramètres du modèle (2.8) que l'on doit identifier afin de pouvoir simuler le comportement du drone.

Géométrie	L
Inertie	m, g, J
Rotors	$\beta(U), k, b$
Aérodynamique	μ_{xy}, μ_z, h

TABLE A.1 – Paramètres du modèle (2.8)

L, m, g, J et h : Certains paramètres peuvent être mesurés directement comme $L = 30 \times 10^{-3}m$ qui est la longueur du bras du *Crazyflie*, $h = 15 \times 10^{-3}m$ sa hauteur, voir figure A.1, et $m = 29 \times 10^{-3}kg$ sa masse. On note ici que la hauteur h est définie comme la distance entre le plan de la carte électronique du *Crazyflie* et le sommet de ses hélices. En réalité

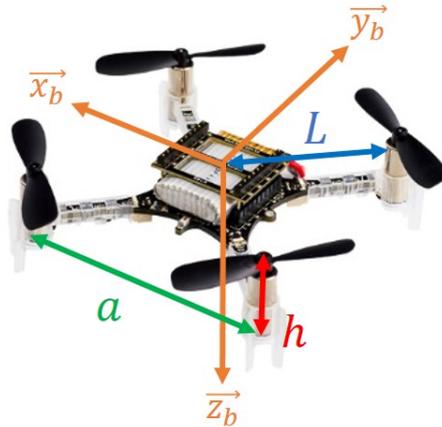
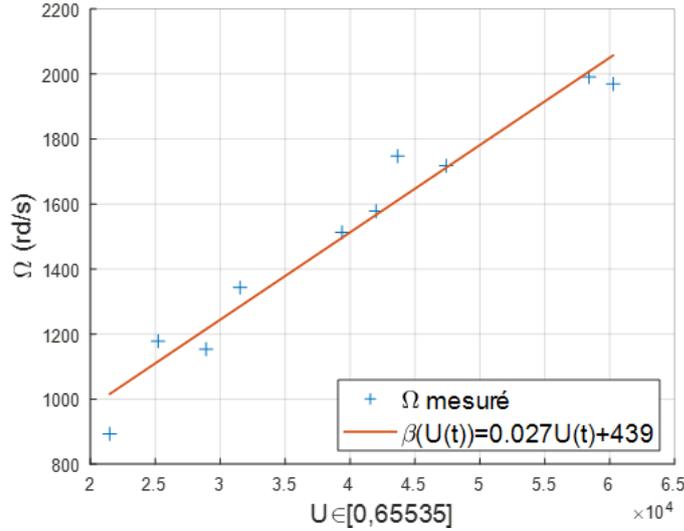


FIGURE A.1 – Dimensions utilisées dans le modèle

ce paramètre est difficilement mesurable du fait de la géométrie complexe du drone, mais on considère ici en première approximation que les efforts aérodynamiques s'appliquent à une distance h du centre de gravité, soit au niveau des hélices. La matrice J est obtenue en calculant le moment d'inertie du drone que l'on assimile à un parallélépipède de côtés a et de hauteur h , voir figure A.1. Le moment d'inertie autour de l'axe \vec{x}_b est le même qu'autour de l'axe \vec{y}_b et vaut $J_x = J_y = m \frac{a^2+h^2}{12} = 1.3 \times 10^{-5} kg.m^2$, celui autour de l'axe \vec{z}_b vaut $J_z = m \frac{a^2}{6} = 3.1 \times 10^{-5} kg.m^2$, à noter que ces valeurs sont proches de celles que l'on peut trouver dans la littérature sur le *Crazyflie* comme par exemple dans [Fö15, Lan15]. Enfin, $g = 9.81 m.s^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur fixée à sa valeur conventionnelle du système international d'unités (SI).

$\beta(U)$: On veut identifier la relation qui lie le signal de commande U et la vitesse de rotation des rotors Ω sous la forme d'une fonction affine $\Omega(t) = \beta(U(t)) = a_0 U(t) + b_0$. Le signal de commande U est associé dans le logiciel du *Crazyflie* à une valeur numérique choisie dans l'intervalle $[0, 65535]$ qui correspond à son rapport cyclique. Ici on choisit aléatoirement des valeurs comprises dans l'intervalle $[20000, 65535]$ que l'on envoie à un des moteurs par l'intermédiaire d'une radio connectée à un ordinateur et liée au *Crazyflie*, puis on mesure sa vitesse de rotation à l'aide d'un tachymètre sans contact. Notons que la valeur minimale de 20000 a été choisie afin de s'affranchir de tout effet de frottement ou de résistance mécanique des rotors. On trace sur la figure A.2 la vitesse de rotation Ω mesurée en fonction du signal U et on identifie par la méthode des moindres carrés une fonction affine approchant au mieux ces données. On obtient les coefficients de $\beta(U)$ tels que $a_0 = 0.027$ et $b_0 = 439$.

k : Le coefficient de poussée k en $kg.m.rd^{-2}$ lie la vitesse de rotation des moteurs Ω à la force poussée T avec la relation $T(t) = k \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2(t)$, d'après par exemple [Ban17] [MKC12]. Pour mesurer ce paramètre, on fixe une masse suffisamment lourde pour empêcher au drone de décoller et on place l'ensemble sur une balance. On envoie un signal de commande U constant et identique aux 4 moteurs. On note l'écart Δm mesuré par la balance avant activation des moteurs et après, ainsi que la vitesse de rotation constante des moteurs Ω_i . La force de poussée générée par le drone vaut alors $T = g \Delta m = k \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2$. On obtient donc


 FIGURE A.2 – Identification des coefficients la fonction $\beta(U(t))$

le coefficient de poussée k via l'équation :

$$k = \frac{g\Delta m}{\sum_{i=1}^4 \Omega_i^2} \quad (\text{A.1})$$

On effectue 3 tests qui mènent à des valeurs $k = \{1.71 \times 10^{-8}, 2.22 \times 10^{-8}, 1.93 \times 10^{-8}\}$, ce qui donne en moyenne $k = 1.95 \times 10^{-8} \text{kg.m.rd}^{-2}$. Ces valeurs sont proches de la valeur donnée dans l'annexe de la référence [Gre17] qui porte sur l'identification des paramètres du *Crazyflie* et qui donne $k = 2.2 \times 10^{-8} \text{kg.m.rd}^{-2}$. On choisira dans le modèle la valeur obtenue expérimentalement de $k = 1.95 \times 10^{-8} \text{kg.m.rd}^{-2}$ associée spécifiquement à notre *Crazyflie*.

b : Le coefficient de couple autour de l'axe vertical n'a pas été mesuré pour gagner du temps et parce que l'accent est mis dans cette thèse sur l'identification du modèle du drone en translation et peu sur sa rotation autour de son axe vertical. La valeur de $b = 1 \times 10^{-9} \text{kg.m}^2.\text{rd}^{-2}$ obtenue dans l'annexe de [Gre17] semble suffisamment précise pour traduire le mouvement du *Crazyflie* lors de nos expériences. On utilise donc cette valeur par la suite dans notre modèle.

μ_{xy} et μ_z : L'identification de ces paramètres est détaillée dans la section 3.2.2 du chapitre 3.

A.3 Chaîne de commande

Sur la figure de l'asservissement d'origine 2.6, on trouve un bloc "Modèle drone" avec en entrée des signaux qui sont la consigne de poussée T_c et les sorties du correcteur K_ω que l'on note $u = [u_x, u_y, u_z]^T$. Les sorties du modèle sont les grandeurs dynamiques $[v, \eta, \omega]^T$. Le lien entre ces différents signaux est détaillé sur la figure A.3.

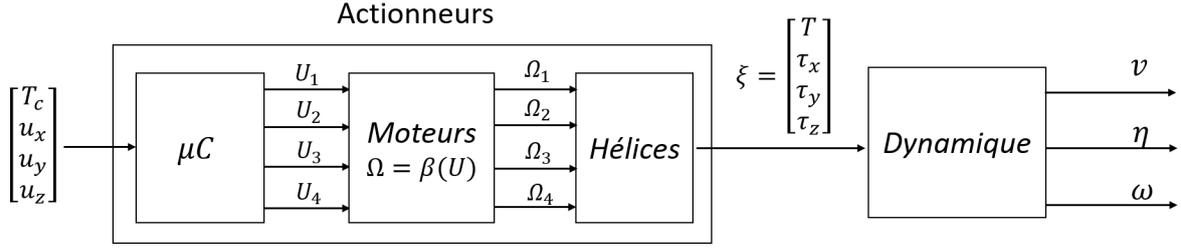


FIGURE A.3 – Bloc "Modèle drone" de la figure 2.6

Sur la figure A.3, le premier bloc correspond à la redistribution par le microcontrôleur μC des signaux d'entrée $\zeta = [T_c, u_x, u_y, u_z]^T$ pour générer la commande $U_{i=1,2,3,4}$ de chaque moteur de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Ensuite, le deuxième bloc correspond à la relation $\Omega = \beta(U)$ de conversion du signal de commande en vitesse de rotation des moteurs donnée dans l'annexe A.2. Le troisième bloc correspond à la conversion de la vitesse de rotation des hélices en une force de poussée et des couples dont les équations sont données en (2.3) et (2.4). Puis, le dernier bloc correspond à la dynamique du drone lorsqu'il est soumis à la poussée et les couples rassemblés dans $\xi = [T, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$, dont on a donné un modèle non-linéaire à l'équation (2.8).

La relation entre $[T_c, u_x, u_y, u_z]^T$ et $[T, \tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ peut être linéarisée au point de vol stationnaire où la poussée $T = mg$ annule le poids du drone. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \delta T \\ \delta \tau_x \\ \delta \tau_y \\ \delta \tau_z \end{bmatrix} = \mathbf{diag}(D_T, D_x, D_y, D_z) = \begin{bmatrix} 8.04 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.9 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.9 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T_c \\ \delta u_x \\ \delta u_y \\ \delta u_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Dans le document, on trouvera souvent la notation $\delta \tau = D \delta u$ où $\delta u = [\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z]^T$ et

$$D = \mathbf{diag}(D_x, D_y, D_z) = \begin{bmatrix} 4.9 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 4.9 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \times 10^{-5} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Enfin, on désignera le modèle de poussée comme étant l'équation suivante :

$$\delta T = D_T \delta T_c \quad (\text{A.5})$$

où $D_T = 8.04 \times 10^{-6}$.

A.4 Système bouclé par un gain h

On veut étudier en fonction de la valeur de h la stabilité du système linéarisé 2.13 que l'on rappelle ici :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\omega}_x \\ \delta\dot{\omega}_y \\ \delta\dot{\omega}_z \\ \delta\dot{\phi} \\ \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{\psi} \\ \delta\dot{v}_x \\ \delta\dot{v}_y \\ \delta\dot{v}_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h\mu_{xy}}{J_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{h\mu_{xy}}{J_y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s_{\bar{\phi}}^t \bar{t}_{\bar{\theta}} & c_{\bar{\phi}}^t \bar{t}_{\bar{\theta}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{\bar{\phi}}^- & -s_{\bar{\phi}}^- & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{\bar{\phi}}^-}{c_{\bar{\theta}}} & \frac{c_{\bar{\phi}}^-}{c_{\bar{\theta}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{v}_z & \bar{v}_y & 0 & -gc_{\bar{\theta}} & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 & 0 \\ \bar{v}_z & 0 & -\bar{v}_x & gc_{\bar{\theta}}c_{\bar{\phi}}^- & -gs_{\bar{\theta}}s_{\bar{\phi}}^- & 0 & 0 & -\frac{\mu_{xy}}{m} & 0 \\ -\bar{v}_y & \bar{v}_x & 0 & -gc_{\bar{\theta}}s_{\bar{\phi}}^- & -gs_{\bar{\theta}}c_{\bar{\phi}}^- & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu_z}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \\ \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta\psi \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta T \\ \delta \tau_x \\ \delta \tau_y \\ \delta \tau_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Pour cela on étudie plus précisément la matrice A dont les valeurs propres caractérisent la stabilité du système. On linéarise le modèle au point d'équilibre $\bar{x}_0 = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \bar{v}_{z_0}]^\top$ avec $\bar{v}_{z_0} = 1m.s^{-1}$. Le terme h apparaît dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} \delta\dot{\omega}_x = \frac{h\mu_{xy}}{J_x} \delta v_y \\ \delta\dot{\omega}_y = -\frac{h\mu_{xy}}{J_y} \delta v_x \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{v}_x \\ \delta\dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{v}_{z_0} & 0 & -g & \frac{-\mu_{xy}}{m} & 0 \\ \bar{v}_{z_0} & 0 & g & 0 & 0 & \frac{-\mu_{xy}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta v_x \\ \delta v_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Les équations (A.7) et (A.8) peuvent être vues sous la forme d'un système bouclé où les vitesses angulaires sont les entrées de commande notées u . Ce vecteur u entre dans le bloc d'équations (A.8), ce qui donne des vitesses linéaires. Ces vitesses linéaires sont ensuite rebouclées par le gain h à l'entrée du système. On schématise ce système sur la figure A.4

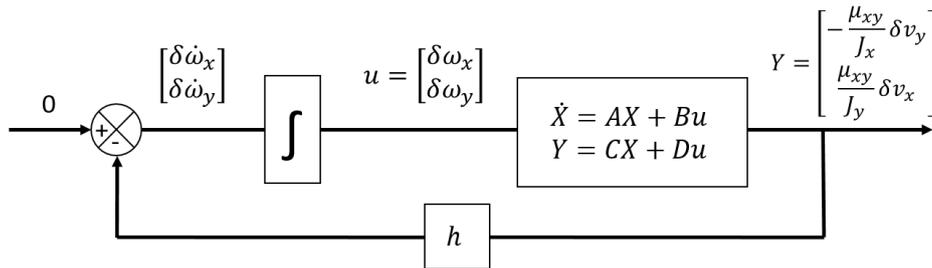


FIGURE A.4 – Le système équivalent aux équations A.7 et A.8

En accord avec le schéma A.4, pour le vecteur d'état $X = [\delta\phi, \delta\theta, \delta v_x, \delta v_y]^\top$ et le vecteur de commande $u = [\delta\omega_x, \delta\omega_y]^\top$, on a les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g & \frac{-\mu_{xy}}{m} & 0 \\ g & 0 & 0 & \frac{-\mu_{xy}}{m} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -\bar{v}_{z_0} \\ \bar{v}_{z_0} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu_{xy}}{J_x} \\ 0 & 0 & \frac{\mu_{xy}}{J_y} & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Cette transformation permet enfin de pouvoir d'appliquer la fonction *Matlab root locus* qui trace le lieu d'Evans en fonction des valeurs de h .

A.5 Produit de Redheffer et représentation linéaire fractionnaire (LFT)

Produit de Redheffer Le produit de Redheffer noté \star permet de représenter l'interconnexion entre deux systèmes G et H où les n_u dernières sorties de G sont les n_u premières entrées de H et les n_l premières sorties de H sont les dernières n_l entrées de G . Les matrices partitionnées G et H sont telles que :

$$G = \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array} \right], \quad H = \left[\begin{array}{c|c} H_{11} & H_{12} \\ \hline H_{21} & H_{22} \end{array} \right] \quad (\text{A.10})$$

Le produit de Redheffer est défini par [SP07] :

$$G \star H = \left[\begin{array}{cc} G_{11} + G_{12}H_{11}(I - G_{22}H_{11})^{-1}G_{21} & G_{12}(I - H_{11}G_{22})^{-1}H_{12} \\ H_{21}(I - G_{22}H_{11})^{-1}G_{21} & H_{22} + H_{21}G_{22}(I - H_{11}G_{22})^{-1}H_{12} \end{array} \right] \quad (\text{A.11})$$

Si l'une des matrices n'est pas partitionnée, l'expression du produit de Redheffer peut être simplifiée et donner ce qu'on appelle une représentation linéaire fractionnaire (LFT) [DPZ91], voir figure A.5.

Représentation linéaire fractionnaire Soit une matrice P de dimension $(n_1 + n_2) \times (m_1 + m_2)$ partitionnée tel que :

$$P = \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{array} \right] \quad (\text{A.12})$$

Soit des matrices Δ et K de dimensions respectives $m_1 \times n_1$ et $m_2 \times n_2$. On définit une représentation linéaire fractionnaire inférieure entre P et K telle que :

$$P \star K = \mathcal{F}_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (\text{A.13})$$

Et une représentation linéaire fractionnaire supérieure entre P et Δ telle que :

$$\Delta \star P = \mathcal{F}_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (\text{A.14})$$

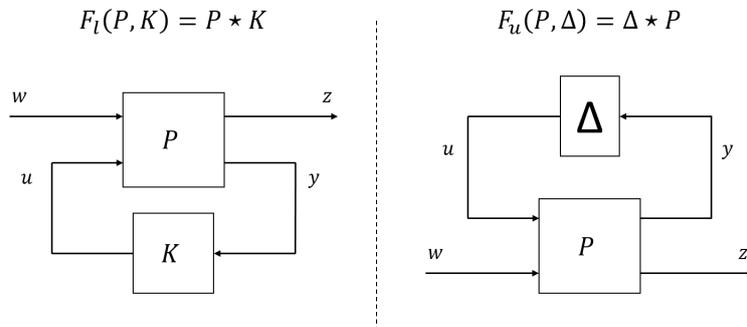


FIGURE A.5 – Représentations linéaires fractionnaires

Opérations entre LFT Soient deux systèmes $\Delta_1 \star M_1$ et $\Delta_2 \star M_2$ sous la forme LFT supérieure :

$$\Delta_1 \star M_1 = \Delta_1 \star \left[\frac{A_1 \mid B_1}{C_1 \mid D_1} \right], \quad \Delta_2 \star M_2 = \Delta_2 \star \left[\frac{A_2 \mid B_2}{C_2 \mid D_2} \right] \quad (\text{A.15})$$

On donne ci-dessous les principales opérations que l'on peut réaliser sur ces systèmes :

— Mise en série de $\Delta_1 \star M_1$ et $\Delta_2 \star M_2$

$$\Delta_{12} \star M_{12} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \star \left[\frac{A_1 \quad B_1 C_2 \mid B_1 D_2}{0 \quad A_2 \mid B_2}{C_1 \quad D_1 C_2 \mid D_1 D_2} \right] \quad (\text{A.16})$$

— Mise en parallèle de $\Delta_1 \star M_1$ et $\Delta_2 \star M_2$

$$\Delta_{1+2} \star M_{1+2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \star \left[\frac{A_1 \quad 0 \mid B_1}{0 \quad A_2 \mid B_2}{C_1 \quad C_2 \mid D_1 + D_2} \right] \quad (\text{A.17})$$

— Inversion de $\Delta \star M$

$$(\Delta \star M)^{-1} = \Delta \star \left[\frac{A - BD^{-1}C \mid BD^{-1}}{-D^{-1}C \mid D^{-1}} \right] \quad (\text{A.18})$$

A.6 Forme LFT de $A(\Delta(x))$

On veut obtenir une représentation LFT supérieure de la matrice suivante :

$$A(\Delta(x)) = \begin{bmatrix} -Dk_{p_\omega} J^{-1} & -Dk_{p_\omega} k_{p_\eta} & -Dk_{p_\omega} k_{i_\eta} \\ S(\eta)^{-1} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

où $S(\eta)$ est un terme non-linéaire tel que :

$$S(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} = I_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_\theta \\ 0 & c_\phi - 1 & c_\theta s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\theta c_\phi - 1 \end{bmatrix}}_{\Delta_{\phi,\theta}}. \quad (\text{A.20})$$

On recherche tout d'abord la forme LFT de $S(\eta)^{-1}$ puis on l'étendra à $A(\Delta(x))$.

A.6.1 Forme LFT de $S(\eta)^{-1}$

On peut écrire $\Delta_{\phi,\theta}$ sous la forme suivante :

$$\Delta_{\phi,\theta} = \alpha_\phi + \beta_\phi \beta_\theta \quad (\text{A.21})$$

avec

$$\alpha_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\phi - 1 & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi - 1 & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 - \beta_\phi &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\phi - 1 & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s_\phi \\ 0 & c_\phi \end{bmatrix} \\
 - \beta_\theta &= \begin{bmatrix} c_\theta - 1 & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_\theta \\ 0 & 0 & c_\theta - 1 \end{bmatrix} \\
 - \beta_\phi \beta_\theta &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & s_\phi \\ 0 & c_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_\theta \\ 0 & 0 & c_\theta - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_\theta \\ 0 & 0 & c_\theta s_\phi - s_\phi \\ 0 & 0 & c_\theta c_\phi - c_\phi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Afin de réaliser par la suite des opérations sur ces termes pour pouvoir aboutir à la forme LFT de $S(\eta)^{-1}$, on écrit chacun d'eux sous la forme LFT.

— $\alpha_\phi = \Delta_\phi \star M_{\alpha_\phi}$ avec :

$$\Delta_\phi = \begin{bmatrix} c_\phi - 1 & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi - 1 \end{bmatrix}, A_{\alpha_\phi} = 0_2, B_{\alpha_\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\alpha_\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\alpha_\phi} = 0_3 \quad (\text{A.22})$$

— $\beta_\phi = \Delta_\phi \star M_{\beta_\phi}$ avec

$$\Delta_\phi = \begin{bmatrix} c_\phi - 1 & s_\phi \\ -s_\phi & c_\phi - 1 \end{bmatrix}, A_{\beta_\phi} = 0_2, B_{\beta_\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\beta_\phi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\beta_\phi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

— $\beta_\theta = \Delta_\theta \star M_{\beta_\theta}$ avec

$$\Delta_\theta = \begin{bmatrix} c_\theta - 1 & s_\theta \\ -s_\theta & c_\theta - 1 \end{bmatrix}, A_{\beta_\theta} = 0_2, B_{\beta_\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\beta_\theta} = I, D_{\beta_\theta} = 0 \quad (\text{A.24})$$

La matrice $S(\eta)^{-1} = (I_3 + \Delta_{\phi,\theta})^{-1} = (I_3 + \alpha_\phi + \beta_\phi \beta_\theta)^{-1}$ s'écrit comme une combinaison de différentes opérations entre LFT. On donne ci-dessous les principales étapes qui permettent d'aboutir à la forme LFT de $S(\eta)^{-1}$:

— $\beta_\phi \beta_\theta \rightarrow$ Mise en série de $\Delta_\phi \star M_{\beta_\phi}$ et $\Delta_\theta \star M_{\beta_\theta}$

$$\Delta_{\beta_\phi \beta_\theta} = \begin{bmatrix} \Delta_\phi & 0 \\ 0 & \Delta_\theta \end{bmatrix}, A_{\beta_\phi \beta_\theta} = \begin{bmatrix} 0_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}, B_{\beta_\phi \beta_\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{\beta_\phi \beta_\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\beta_\phi \beta_\theta} = 0_3 \quad (\text{A.25})$$

— $\Delta_{\phi,\theta} = \alpha_\phi + \beta_\phi \beta_\theta \rightarrow$ Mise en parallèle de $\Delta_\phi \star M_{\alpha_\phi}$ et $\Delta_{\beta_\phi \beta_\theta} \star M_{\beta_\phi \beta_\theta}$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Delta_{\phi,\theta}} &= \begin{bmatrix} \Delta_\phi & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_\theta \end{bmatrix}, A_{\Delta_{\phi,\theta}} = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}, \\
 B_{\Delta_{\phi,\theta}} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, C_{\Delta_{\phi,\theta}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D_{\Delta_{\phi,\theta}} = 0
 \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

— $S(\eta) = I_3 + \Delta_{\phi,\theta} \rightarrow$ Mise en parallèle de $\Delta_{\Delta_{\phi,\theta}} \star M_{\Delta_{\phi,\theta}}$ et I_3

$$\Delta_S = \begin{bmatrix} \Delta_\phi & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_\theta \end{bmatrix}, \quad A_S = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}, \quad (A.27)$$

$$B_S = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad C_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_S = I_3$$

— $S(\eta)^{-1} \rightarrow$ Inversion de $\Delta_S \star M_S$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_\phi & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_\phi & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_\theta \end{bmatrix}, \quad G_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A.28)$$

$$G_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G_{22} = I_3$$

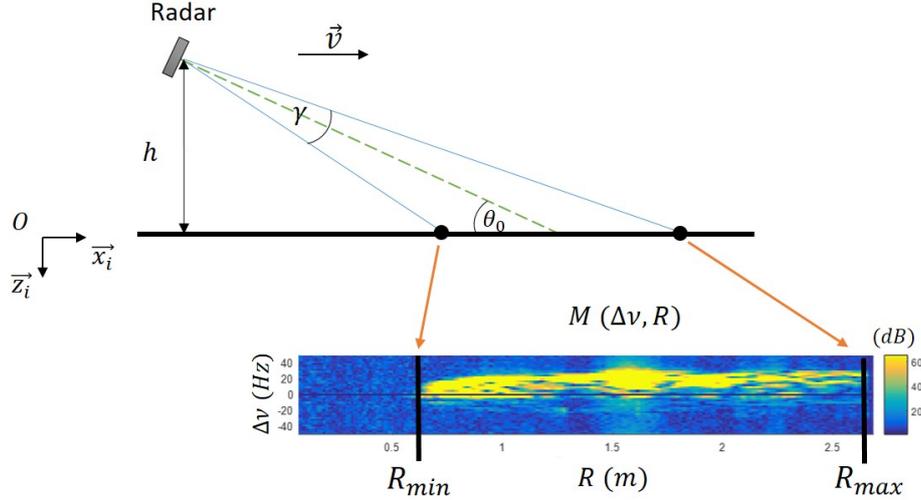
A.6.2 Forme LFT de $A(\Delta(x))$

On peut étendre cette représentation à la matrice complète $A(\Delta(x))$ que l'on peut écrire sous la forme LFT $A(\Delta(x)) = \Delta(x) \star M$ où :

$$\begin{aligned} M_{11} &= G_{11} & M_{12} &= [G_{12}J^{-1} \quad 0 \quad 0] \\ M_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ G_{21} \\ 0 \end{bmatrix} & M_{22} &= \begin{bmatrix} -Dk_{p_\omega}J^{-1} & -Dk_{p_\omega}k_{p_\eta} & -Dk_{p_\omega}k_{i_\eta} \\ G_{22}J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.29)$$

A.7 Relation entre matrice Doppler, h et θ_0

L'algorithme de mesure de vitesse 1 nécessite la connaissance des paramètres géométriques h et θ_0 . Suivant l'application, il se peut que ces paramètres ne soient pas connus ou difficilement mesurables. On propose donc ici de déterminer ces paramètres à partir de la matrice Doppler $M(\Delta\nu, R)$ issue d'un radar dans la configuration représentée sur la figure A.6.


 FIGURE A.6 – Illustration de R_{min} et R_{max}

Il faut tout d'abord déterminer, à partir de la matrice $M(\Delta\nu, R)$, les rayons notés R_{min} et R_{max} sur la figure A.6. Cela peut être réalisé en détectant avec un seuil l'intervalle de distance $[R_{min}, R_{max}]$ dans lequel la puissance reçue sur la matrice $M(\Delta\nu, R)$ est significative. Sous l'hypothèse que le sol est horizontal et que le champ de vision du radar est entièrement représenté dans $M(\Delta\nu, R)$, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} R_{min} = \frac{h}{\sin(\theta_0 + \frac{\gamma}{2})} \\ R_{max} = \frac{h}{\sin(\theta_0 - \frac{\gamma}{2})} \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

On peut ensuite obtenir les paramètres h et θ_0 à partir des équations (A.30) et de la connaissance de l'angle d'ouverture γ qui dépend du radar utilisé. Une fois que ces paramètres sont déterminés, on peut ensuite appliquer l'algorithme de mesure de vitesse décrit plus tôt.

A.8 Principe de mesure d'un radar FMCW

On explique ici comment obtenir une mesure de distance et de vitesse d'obstacle avec un radar FMCW, puis comment ces informations peuvent être rassemblées dans une matrice, appelée matrice Doppler, qui représente une cartographie du champ de vision du radar en matière de distance et de décalage Doppler. On considère un radar FMCW qui émet un signal dont la fréquence varie linéairement avec le temps comme représenté sur la figure 3.15. On appelle *chirp* le signal émis sur une période T , il s'écrit pour $0 < t < T$:

$$s_e(t) = Ae^{j2\pi(\nu_0 t + \alpha t^2)} \quad (\text{A.31})$$

où α désigne la pente du signal en fréquence et dépend de la largeur de bande du radar B : $\alpha = \frac{B}{2T}$.

Mesure de la distance [Sto92, ?] On fait l'hypothèse qu'un obstacle immobile, situé à une distance R_0 , réfléchit l'onde émise par le radar. Comme l'obstacle est immobile, il n'y a pas de décalage Doppler donc $\Delta\nu = 0$. Le signal reçu $s_r(t)$ est une réplique atténuée du signal émis par un facteur $K \leq 1$, et retardée d'un temps τ constant lié à la distance R_0 via l'équation (3.18) page 100. Le signal reçu s'écrit alors :

$$s_r(t) = KAe^{j2\pi(\nu_0(t-\tau) + \alpha(t-\tau)^2)}. \quad (\text{A.32})$$

Pour mesurer cette distance, on doit déterminer le signal noté $s_b(t)$, appelé signal de battement. Il est obtenu au sein du radar par un démodulateur, représenté sur la figure A.7. Celui-ci applique le principe de démodulation homodyne, qui donne le signal de battement suivant [Sto92] :

$$s_b(t) = s_r^*(t) \cdot s_e(t) = KA^2 e^{j2\pi(\nu_0\tau - \alpha\tau^2 + 2\alpha\tau t)}. \quad (\text{A.33})$$

Le signal de battement a une fréquence ν_b qui vaut $\nu_b = 2\alpha\tau$. Elle est liée à la distance R_0 via l'expression de τ (3.18) :

$$\nu_b = 2\alpha\tau = 4\alpha \frac{R_0}{c}. \quad (\text{A.34})$$

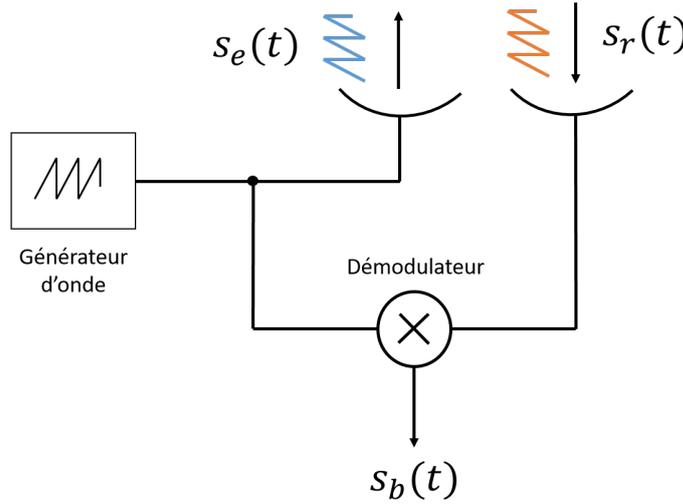


FIGURE A.7 – Signaux principaux d'un radar FMCW

Pour obtenir la mesure de la distance radiale R_0 à l'obstacle on calcule la transformée de Fourier du signal $s_b(t)$, ce qui est réalisé avec un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) implémenté au niveau du circuit électronique du radar. Ensuite, on peut détecter la fréquence de battement ν_b du signal puis remonter à l'information de distance radiale R_0 avec l'équation (A.34).

Mesure de la vitesse [Sto92, ?] Désormais, on fait l'hypothèse que l'obstacle qui réfléchit l'onde a une vitesse relative constante par rapport au radar, notée v . La distance entre le radar et l'obstacle évolue alors en fonction du temps t :

$$R(t) = R_0 + vt \quad (\text{A.35})$$

et le retard τ vaut désormais :

$$\tau(t) = \frac{2(R_0 + vt)}{c}. \quad (\text{A.36})$$

Si on injecte l'équation (A.36) dans l'expression du signal de battement (A.33) et que l'on considère les termes en t^2 (resp. τ^2) négligeables devant les termes en t (resp. τ) étant donné que t (resp. τ) $\ll 1s$, le signal de battement devient :

$$s_b(t) = K'A^2 e^{j2\pi(2\frac{R_0}{c}\nu_0 + 4\alpha\frac{R_0}{c}t + 2\frac{v}{c}\nu_0 t)}. \quad (\text{A.37})$$

Dans l'équation (A.37), le terme $4\alpha\frac{R_0}{c}$ correspond au décalage en fréquence lié à la distance R_0 du paragraphe précédent, et le terme $2\frac{v}{c}\nu_0$ correspond au décalage Doppler $\Delta\nu$ donné pour $\theta = 0$ à l'équation (3.19) page 101. La fréquence de battement vaut donc désormais :

$$\nu_b = 4\alpha\frac{R_0}{c} + 2\frac{v}{c}\nu_0 = 4\alpha\frac{R_0}{c} + \Delta\nu. \quad (\text{A.38})$$

Le décalage Doppler $\Delta\nu$ induit donc un décalage constant sur la fréquence du signal de battement. Ce décalage est néanmoins très faible vis-à-vis du terme $4\alpha\frac{R_0}{c}$, et est difficile à détecter à partir du signal de battement obtenu après un seul *chirp*. Pour remédier à ce problème, on enregistre le signal reçu lors de plusieurs *chirps* comme expliqué ci-dessous.

Acquisition lors de plusieurs *chirps* Afin de mesurer la vitesse, on enregistre le signal reçu durant plusieurs *chirps* numérotés par l'indice $m = \{0, \dots, M - 1\}$. On introduit les notions suivantes :

- Le temps court t_c , qui correspond au temps écoulé lors d'un *chirp* ($0 < t_c \leq T$) ;
- Le temps long t_l , qui correspond au temps écoulé lors de l'émission des M *chirps* ($0 < t_l \leq (M - 1)T$).

On fait l'acquisition de M signaux, appelés échantillons temps court. On peut réécrire le retard τ de l'équation (A.36) en fonction de t_c et de m :

$$\tau(t_c, m) = \frac{2(R_0 + vt_c + vmT)}{c}, \quad m = \{0, \dots, M - 1\}. \quad (\text{A.39})$$

De la même manière que précédemment, en injectant (A.39) dans l'expression (A.33) et en négligeant les termes en t^2 et τ^2 , on obtient le signal de battement en fonction de l'instant t_c et de l'indice m :

$$s_b(t_c, m) = K' A^2 e^{j2\pi(2\frac{R_0}{c}\nu_0 + 2\frac{v}{c}\nu_0 mT + t_c(2\frac{v}{c}\nu_0 + 4\alpha\frac{R_0}{c} + 4\alpha\frac{v}{c}mT))}, \quad m = \{0, \dots, M - 1\}. \quad (\text{A.40})$$

La fréquence du signal de battement s'écrit alors en fonction de m :

$$\nu_b(m) = 2\frac{v}{c}\nu_0 + 4\alpha\frac{R_0}{c} + 4\alpha\frac{v}{c}mT, \quad m = \{0, \dots, M - 1\}. \quad (\text{A.41})$$

En pratique, on peut considérer les termes $2\frac{v}{c}\nu_0$ et $4\alpha\frac{v}{c}mT$ négligeables devant $4\alpha\frac{R_0}{c}$ dans l'expression de $\nu_b(m)$. Par exemple, pour le radar [Tex21] qui pourrait potentiellement être intégré sur le *Crazyflie*, on a : $\nu_0 = 60 \times 10^9 \text{ Hz}$, $B = 4 \times 10^9 \text{ Hz}$, $T = 10 \times 10^{-6} \text{ s}$, donc $\alpha = \frac{B}{2T} = 2 \times 10^{14} \text{ s}^{-2}$, $M = 256$, et l'application drone implique des distances R_0 (resp. vitesses v) de l'ordre de 1 m (resp. m.s^{-1}). Le terme $2\frac{v}{c}\nu_0$ et donc de l'ordre de 10^1 , le terme $4\alpha\frac{R_0}{c}$ de l'ordre de 10^6 et le terme $4\alpha\frac{v}{c}mT$ de l'ordre de 10^0 . On peut alors faire l'hypothèse que la fréquence de battement ν_b est constante sur les M échantillons du temps long t_l et qu'elle vaut $\nu_b = 4\alpha\frac{R_0}{c}$. Cela revient à considérer l'obstacle immobile à une distance R_0 , sur toute la durée d'observation du temps long t_l [Ric14, Goy12]. Le signal de battement s'écrit finalement comme un signal ayant une phase constante Φ , une fréquence de battement constante ν_b liée à la distance R_0 , et une phase qui varie en fonction de l'indice m et du décalage Doppler $\Delta\nu$:

$$s_b(t_c, m) = K' A^2 e^{j2\pi(\Phi + \nu_b t_c + \Delta\nu mT)}, \quad m = \{0, \dots, M - 1\}. \quad (\text{A.42})$$

où $\Phi = 2\frac{R_0}{c}\nu_0$, $\nu_b = 4\alpha\frac{R_0}{c}$. Si l'on connaît la distance à l'obstacle R_0 , on connaît le retard $\tau = 2R_0/c$ et la fréquence de battement $\nu_b = 2\alpha\tau$ correspondante. Pour mesurer la vitesse

de cet obstacle, il faut mesurer le changement de phase lié au décalage Doppler $\Delta\nu$ du signal s_b pour $t_c = \tau$ et $m = \{0, \dots, M - 1\}$. Une FFT est alors appliquée sur le signal de battement $s_b(t_c, m)$ pour $t_c = \tau$ et $m = \{0, \dots, M - 1\}$, afin de détecter $\Delta\nu$ puis de remonter à la vitesse de l'obstacle avec l'équation (3.19) page 101.

Matrice Doppler $M(\Delta\nu, R)$ [Rao17] Certains radars comme celui utilisé lors de la thèse produisent en sortie une matrice appelée matrice Doppler et notée $M(\Delta\nu, R)$. Celle-ci représente une cartographie du champ de vision du radar en termes de distance aux obstacles et de décalage Doppler. Cette matrice est obtenue en effectuant successivement les démarches présentées précédemment de "Mesure de distance" et de "Mesure de vitesse". Cela revient à effectuer deux FFT consécutives sur les signaux de battements $s_b(t_c, m)$ comme représenté sur la figure A.8 : la première FFT est réalisée sur chaque ligne ($0 \leq t_c \leq T$, m fixé) pour traduire l'axe du temps court en axe de distance, et la seconde FFT est réalisée sur chaque colonne (R fixé, $m = \{0, \dots, M - 1\}$) pour traduire l'axe du temps long en décalage Doppler $\Delta\nu$.

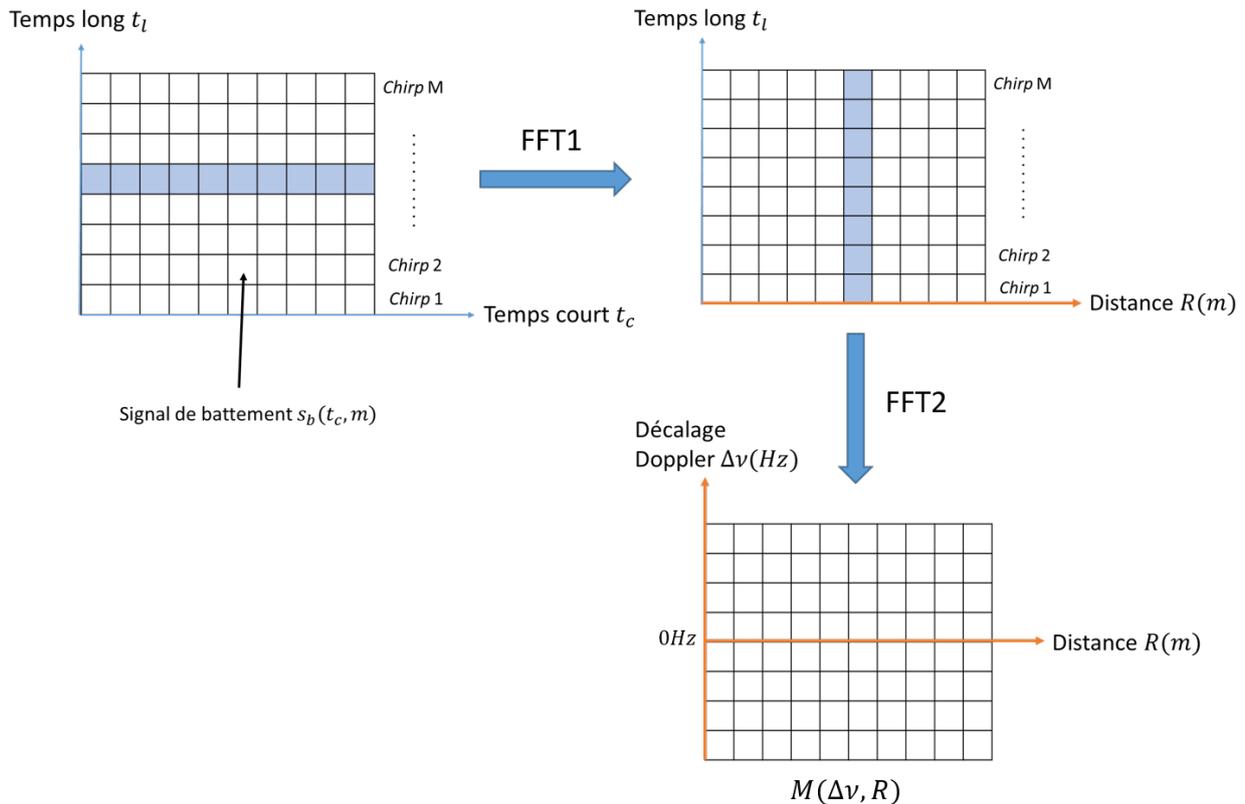


FIGURE A.8 – Obtention de la matrice Doppler $M(\Delta\nu, R)$ via 2 FFTs successives

A.9 Algorithmes en temps discret

A.9.1 Filtre de Kalman linéaire

On décrit l'algorithme du filtre de Kalman en temps discret, ce qui correspond à sa formulation originelle [Kal60]. Soit un système linéaire en temps discret :

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k) \\ y(k) = C(k)x(k) + v(k) \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

où $x(k)$ est l'état du système à l'instant k , $w(k)$ est appelé bruit d'état et $v(k)$ bruit de mesure. Le filtre de Kalman repose sur l'hypothèse que $w(k)$ et $v(k)$ sont des bruits blancs gaussiens tels que $w(k) \sim \mathcal{N}(0, Q(k))$ et $v(k) \sim \mathcal{N}(0, R(k))$. L'algorithme du filtre de Kalman est le suivant :

— **Phase de prédiction :**

- État $\hat{x}(k+1|k) = A(k)\hat{x}(k|k) + B(k)u(k)$
- Covariance $P(k+1|k) = A(k)P(k|k)A(k)^\top + Q(k)$
- $S(k+1) = C(k)P(k+1|k)C(k)^\top + R(k)$
- Gain de Kalman $K(k+1) = P(k+1|k)C(k)^\top S(k+1)^{-1}$

— **Phase de correction :**

- État $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left(y(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)$
- Covariance $P(k|k) = \left(I - K(k)C(k)\right)P(k|k-1)$

où $\hat{x}(k+1|k)$ représente la prédiction de l'état à l'instant $k+1$, sachant sa valeur à l'instant k . L'évolution des indices en fonction des phases de prédiction et de correction est représentée sur la figure A.9.

A.9.2 Filtre de Kalman étendu

Pour le système non-linéaire tel que :

$$\begin{cases} x(k+1) = f\left(x(k), u(k), w(k), k\right) \\ y(k) = h\left(x(k), v(k), k\right) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

l'algorithme du filtre de Kalman étendu est le suivant :

— **Phase de prédiction :**

- État $\hat{x}(k+1|k) = f(\hat{x}(k|k), u(k), 0, k)$
- Covariance $P(k+1|k) = F(k)P(k|k)F(k)^\top + Q(k)$
- $S(k+1) = H(k)P(k+1|k)H(k)^\top + R(k)$
- Gain $K(k) = P(k+1|k)H(k)^\top S(k+1)^{-1}$

— **Phase de correction :**

- État $\hat{x}(k|k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)\left(y(k) - h_k(\hat{x}(k|k-1), 0, k)\right)$
- Covariance $P(k|k) = \left(I - K(k)H(k)\right)P(k|k-1)$

où $F(k) = \frac{\partial f}{\partial x}|_{\hat{x}(k|k), u(k), k}$ et $H(k) = \frac{\partial h}{\partial x}|_{\hat{x}(k|k), k}$.

A.10 Table des valeurs

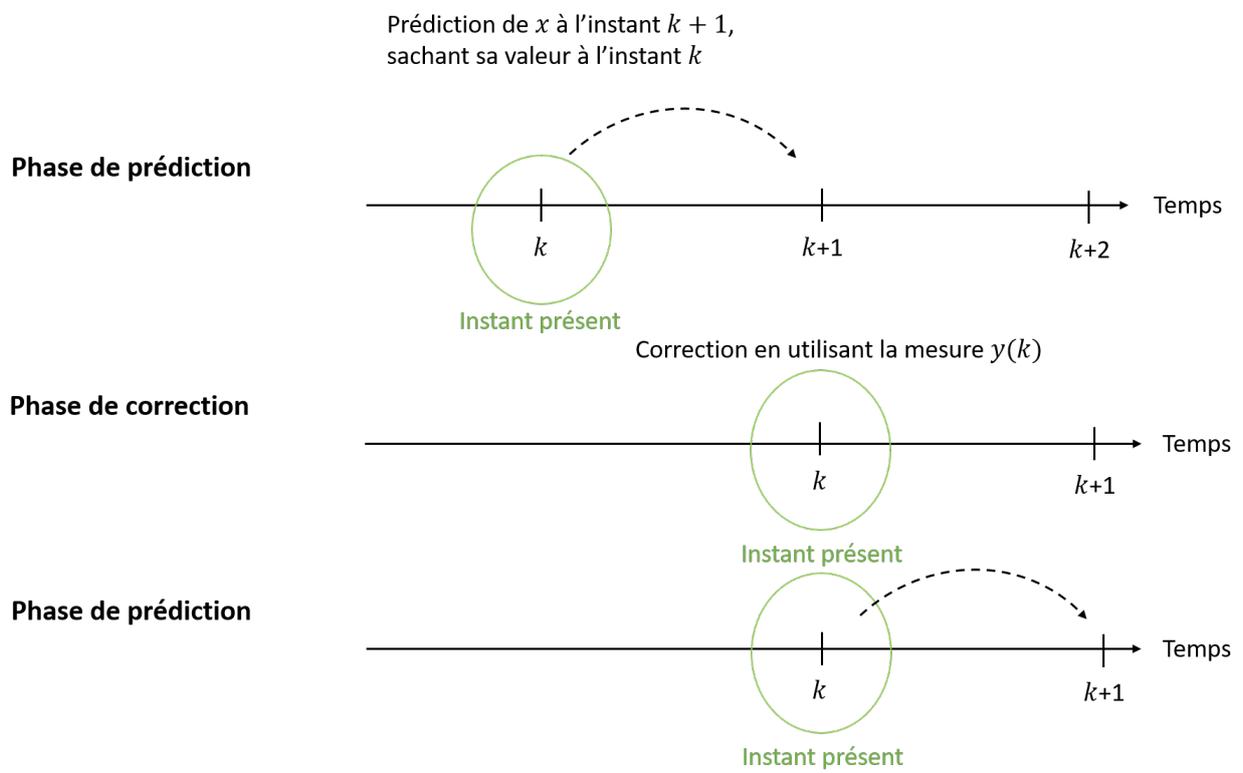


FIGURE A.9 – Phase de prédiction et de correction en fonction des indices

Grandeur	Valeur	Unité
m	29×10^{-3}	kg
g	9.81	$m.s^{-2}$
L	30×10^{-3}	m
h	15×10^{-3}	m
J_x	1.3×10^{-5}	$kg.m^2$
J_y	1.3×10^{-5}	$kg.m^2$
J_z	3.1×10^{-5}	$kg.m^2$
k	1.95×10^{-8}	$kg.m.rd^{-2}$
b	1×10^{-9}	$kg.m^2.rd^{-2}$
μ_{xy}	0.01	$kg.s^{-1}$
μ_z	0.05	$kg.s^{-1}$
D_T	8.04×10^{-6}	\emptyset
D_x	4.9×10^{-6}	\emptyset
D_y	4.9×10^{-6}	\emptyset
D_z	2.4×10^{-5}	\emptyset
$k_{p\omega,PID}$	diag (250, 250, 120)	\emptyset
$k_{i\omega,PID}$	diag (500, 500, 16.7)	\emptyset
$k_{d\omega,PID}$	diag (2.5, 2.5, 0)	\emptyset
$k_{p\eta,PID}$	diag (6, 6, 6)	\emptyset
$k_{i\eta,PID}$	diag (3, 3, 1)	\emptyset
$k_{d\eta,PID}$	diag (0, 0, 0.35)	\emptyset
T_f	0.002	\emptyset
$k_{p\omega,PPI}$	diag (350, 350, 50)	\emptyset
$k_{p\eta,PPI}$	diag (32, 32, 32)	\emptyset
$k_{i\eta,PPI}$	diag (10, 10, 10)	\emptyset
c	3×10^8	$m.s^{-1}$
σ_{bacc}^2	diag (4×10^{-6} , 4×10^{-6} , 9×10^{-6})	$(m.s^{-2})^2$
σ_{IMU}^2	diag (1×10^{-6} , 1×10^{-6} , 1×10^{-6})	rd^2
σ_{gyro}^2	diag (3×10^{-6} , 3×10^{-6} , 3×10^{-6})	$(rd.s^{-1})^2$
σ_{acc}^2	diag (1×10^{-2} , 1×10^{-2} , 1×10^{-2})	$(m.s^{-2})^2$
σ_{rdr}^2	diag (2×10^{-2} , 2×10^{-2} , 3×10^{-2})	$(m.s^{-1})^2$
$\sigma_{BO,NL}^2$	diag (1×10^{-3} , 1×10^{-3} , 2×10^{-3})	$(m.s^{-2})^2$
$\sigma_{BO,L}^2$	diag (1×10^{-3} , 1×10^{-3} , 2×10^{-3})	$(m.s^{-2})^2$
σ_{BF}^2	diag (1×10^{-3} , 1×10^{-3} , 2×10^{-3})	$(m.s^{-2})^2$

TABLE A.2 – Valeurs numériques du mémoire

Bibliographie

- [AABM14] G. Allibert, D. Abeywardena, M. Bangura, and R. Mahony. Estimating body-fixed frame velocity and attitude from inertial measurements for a quadrotor vehicle. In *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*, pages 978–983, 2014.
- [ABLCGS⁺17] L. Amezcua-Brooks, E. Liceaga-Castro, M. Gonzalez-Sanchez, O. Garcia-Salazar, and D. Martinez-Vazquez. Towards a standard design model for quad-rotors : A review of current models, their accuracy and a novel simplified model. *Progress in Aerospace Sciences*, 95 :1–23, 2017.
- [ACP17] W. G. Aguilar, V. P. Casaliglla, and J. L. Pólit. Obstacle Avoidance Based-Visual Navigation for Micro Aerial Vehicles. *Electronics*, 6(1), 2017.
- [ADGH11] D. Arzelier, G. Deaconu, S. Gumussoy, and D. Henrion. H2 for HIFOO. In *International Conference on Control and Optimization With Industrial Applications (COIA 2011)*, 2011.
- [AKDM13] D. Abeywardena, S. Kodagoda, G. Dissanayake, and R. Munasinghe. Improved State Estimation in Quadrotor MAVs : A Novel Drift-Free Velocity Estimator. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 20(4) :32–39, 2013.
- [All87] D. W. Allan. Time and Frequency (Time-Domain) Characterization, Estimation, and Prediction of Precision Clocks and Oscillators. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 34(6) :647–654, 1987.
- [AM12] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Filtering*. Courier Corporation, 2012.
- [AMGC02] M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(2) :174–188, 2002.
- [ANR09] P. Apkarian, D. Noll, and A. Rondepierre. Mixed H2/H-infinity control via nonsmooth optimization. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 6460–6465, 2009.
- [Arz04] D. Arzelier. *Théorie de Lyapunov, commande robuste et optimisation*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004.
- [AZMP20] E. Antide, M. Zarudniev, O. Michel, and M. Pelissier. Comparative Study of Radar Architectures for Human Vital Signs Measurement. pages 1–6, 2020.
- [Bal16] C. A. Balanis. *Antenna Theory : Analysis and Design*. Wiley–Blackwell, Hoboken, NJ, 4th edition, 2016.

- [BAM⁺04] C. Blanc, R. Aufrère, L. Malaterre, J. Gallice, and J. Alizon. Obstacle detection and tracking by millimeter wave RADAR. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(8) :322–327, 2004.
- [Ban17] M. Bangura. *Aerodynamics and Control of Quadrotors*. Thèse de doctorat, Australian National University, 2017.
- [Bay12] B. Bayon. *Estimation robuste pour les systèmes incertains*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2012.
- [BBG⁺09] S. Bonnet, C. Bassompierre, C. Godin, S. Lesecq, and A. Barraud. Calibration methods for inertial and magnetic sensors. *Sensors and Actuators A : Physical*, 156(2) :302–311, 2009.
- [BDL⁺20] J. Barra, O. Debicki, S. Lesecq, N. Mareau, L. Ouvry, and M. Zarudniev. Method and system for measuring the velocity of a carrier with respect to the ground. *Commissariat à l’Energie Atomique et aux Energies Alternatives*, U.S. Patent US20200200891A1, 2020.
- [BDW06] T. Bailey and H. Durrant-Whyte. Simultaneous localization and mapping (SLAM) : part II. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 13(3) :108–117, 2006.
- [Ber57] F. B. Berger. The Nature of Doppler Velocity Measurement. *IRE Transactions on Aeronautical and Navigational Electronics*, (3) :103–112, 1957.
- [BGFB94] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- [BHA⁺18] M. Bangura, X. Hou, G. Allibert, R. Mahony, and N. Michael. Supervisory Control of Multirotor Vehicles in Challenging Conditions Using Inertial Measurements. *IEEE Transactions on Robotics*, 34(6) :1490–1501, 2018.
- [Bla34] H. S. Black. Stabilized Feedback Amplifiers. *Bell System Technical Journal*, 13(1) :1–18, 1934.
- [BLZ⁺19] J. Barra, S. Lesecq, M. Zarudniev, O. Debicki, N. Mareau, and L. Ouvry. Localization system in GPS-denied environments using radar and IMU measurements : Application to a smart white cane. In *2019 18th European Control Conference (ECC)*, pages 1201–1206, 2019.
- [BM12] M. Bangura and R. Mahony. Nonlinear Dynamic Modeling for High Performance Control of a Quadrotor. *Australian Robotics and Automation Association*, 2012.
- [BMNM16] M. Bangura, M. Melega, R. Naldi, and R. Mahony. Aerodynamics of Rotor Blades for Quadrotors. *arXiv preprint arXiv :1601.00733*, 2016.
- [BMSP09] P. Bristeau, P. Martin, E. Salaün, and N. Petit. The role of propeller aerodynamics in the model of a quadrotor UAV. In *2009 European Control Conference (ECC)*, pages 683–688, 2009.
- [BNS04] S. Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart. PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 3, pages 2451–2456. IEEE, 2004.
- [Bos15] Bosch Sensortec. BMP280 - Datasheet 1.14. <https://cdn-shop.adafruit.com/datasheets/BST-BMP280-DS001-11.pdf>, 2015.

- [Bou07] S. Bouabdallah. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. PhD thesis, EPFL, 2007.
- [BS04] M. Bryson and S. Sukkarieh. Vehicle Model Aided Inertial Navigation for a UAV using Low-cost Sensors. *Proceedings of the Australasian Conference on Robotics and Automation*, pages 1–9, 2004.
- [BSL⁺20] J. Barra, G. Scorletti, S. Lesecq, M. Zarudniev, and E. Blanco. Attraction domain estimation of linear controllers for the attitude control of VTOL vehicles : P/PI control of a quadrotor. In *2020 European Control Conference (ECC)*, pages 1644–1649, 2020.
- [BVB17] C. Brothier, A. Vacque, and D. Boldo. Civil engineering inspections on nuclear sites by drone. In *24th Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, 2017.
- [BVN16] G. Balamurugan, J. Valarmathi, and V. P. S. Naidu. Survey on UAV navigation in GPS denied environments. In *2016 International Conference on Signal Processing, Communication, Power and Embedded System (SCOPE5)*, pages 198–204, 2016.
- [Can07] J. V. Candy. Bootstrap Particle Filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4) :73–85, 2007.
- [CGTH13] P. Crocoll, L. Görcke, G. F. Trommer, and F. Holzapfel. Unified Model Technique for Inertial Navigation Aided by Vehicle Dynamics Model. *Navigation*, 60(3) :179–193, 2013.
- [CLD05] P. Castillo, R. Lozano, and A. Dzul. Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors. In *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, volume 3, pages 2693–2698, 2005.
- [Col15] J. Collin. MEMS IMU Carouseling for Ground Vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(6) :2242–2251, 2015.
- [CSM11] N. A. Chaturvedi, A. K. Sanyal, and N. H. McClamroch. Rigid-Body Attitude Control. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(3) :30–51, 2011.
- [Dav75] L. S. Davis. A survey of edge detection techniques. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(3) :248–270, 1975.
- [DESC14] O. Dunkley, J. Engel, J. Sturm, and D. Cremers. Visual-Inertial Navigation for a Camera-Equipped 25 g Nano-Quadrotor. In *IROS2014 aerial open source robotics workshop*, 2014.
- [Dia18] R. Dia. General Inverse Sensor Model for Probabilistic Occupancy Grid Maps Using Multi-Target Sensors. In *23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2018.
- [Dia20] R. Dia. *Towards Environment Perception using Integer Arithmetic for Embedded Application*. Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2020.
- [DJW⁺18] S. P. H. Driessen, N. H. J. Janssen, L. Wang, J. L. Palmer, and H. Nijmeijer. Experimentally Validated Extended Kalman Filter for UAV State Estimation Using Low-Cost Sensors. *IFAC-PapersOnLine*, 51(15) :43–48, 2018.
- [DK71] E. J. Davison and E. M. Kurak. A computational method for determining quadratic lyapunov functions for non-linear systems. *Automatica*, 7(5) :627–636, 1971.

- [DP15] D. David and J. Panhaleux. Les drones civils, enjeux et perspectives. Technical report, Ministère de l'écologie, du développement durable et de l'énergie, 2015.
- [DPZ91] J. Doyle, A. Packard, and K. Zhou. Review of LFTs, LMIs, and μ . In *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1227–1232, 1991.
- [DSNW99] G. Dissanayake, S. Sukkarieh, E. Nebot, and H. D. Whyte. A new algorithm for the alignment of inertial measurement units without external observation for land vehicle applications. In *Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 2274–2279, 1999.
- [DWB06] H. Durrant-Whyte and T. Bailey. Simultaneous localization and mapping : part I. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 13(2) :99–110, 2006.
- [Dyb13] J. Dybedal. *Doppler Radar Speed Measurement Based On A 24 GHz Radar Sensor*. Thèse de maîtrise, Institutt for elektronikk og telekommunikasjon, 2013.
- [EDP08] M. El-Diasty and S. Pagiatakis. Calibration and Stochastic Modelling of Inertial Navigation Sensor Errors. *Journal of Global Positioning Systems*, 7(2) :170–182, 2008.
- [EF16] M. Emam and A. Fakharian. Attitude tracking of quadrotor UAV via mixed H2/H-infinity controller : An LMI based approach. In *2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, pages 390–395, 2016.
- [Ega82] A. Egawa. A microwave doppler radar velocity meter for construction machinery. *SAE Transactions*, pages 3404–3423, 1982.
- [EGS96] L. El Ghaoui and G. Scorletti. Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(9) :1273–1284, 1996.
- [EN18] B. J. Emran and H. Najjaran. A review of quadrotor : An underactuated mechanical system. *Annual Reviews in Control*, 46 :165–180, 2018.
- [ESHN08] N. El-Sheimy, H. Hou, and X. Niu. Analysis and Modeling of Inertial Sensors Using Allan Variance. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(1) :140–149, 2008.
- [Fö15] J. Förster. System Identification of the Crazyflie 2.0 Nano Quadcopter. Mémoire de licence, ETH Zurich, 2015.
- [FG10] C. Fischer and H. Gellersen. Location and navigation support for emergency responders : A survey. *IEEE Pervasive Computing*, 9(1) :38–47, 2010.
- [FH85] W. Fleming and A. Hundiwal. Radar ground speed sensors. In *35th IEEE Vehicular Technology Conference*, volume 35, pages 262–272, 1985.
- [Fre12] K. Fregene. Unmanned Aerial Vehicles and Control : Lockheed Martin Advanced Technology Laboratories. *IEEE Control Systems Magazine*, 32(5) :32–34, 2012.
- [Fri93] W. R. Fried. History of Doppler Radar Navigation. *Navigation*, 40(2) :121–136, 1993.

- [FSB99] V. Fromion, G. Scorletti, and J. P. Barbot. Quadratic observers for estimation and control in induction motors. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, volume 3, pages 2143–2147, 1999.
- [Gar16] Garmin. Lidar Lite v3 - Datasheet. https://static.garmin.com/pumac/LIDAR_Lite_v3_Operation_Manual_and_Technical_Specifications.pdf, 2016.
- [GBSG15] V. Grabe, H. H. Bühlhoff, D. Scaramuzza, and P. R. Giordano. Nonlinear ego-motion estimation from optical flow for online control of a quadrotor UAV. *The International Journal of Robotics Research*, 34(8) :1114–1135, 2015.
- [GCMH⁺11] J. Guerrero-Castellanos, N. Marchand, A. Hably, S. Lesecq, and J. Delamare. Bounded attitude control of rigid bodies : Real-time experimentation to a quadrotor mini-helicopter. *Control Engineering Practice*, 19(8) :790–797, 2011.
- [Gel74] A. Gelb. *Applied optimal estimation*. M.I.T. Press, 1974.
- [Gil06] M. Gilli. *Méthodes numériques*. Université de Genève, 2006.
- [GLL13] F. Goodarzi, D. Lee, and T. Lee. Geometric nonlinear PID control of a quadrotor UAV on SE(3). In *2013 European Control Conference (ECC)*, pages 3845–3850. IEEE, 2013.
- [GLSC08] J. Gadewadikar, F. Lewis, K. Subbarao, and B. M. Chen. Structured H-Infinity Command and Control-Loop Design for Unmanned Helicopters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 31(4) :1093–1102, 2008.
- [Goy12] P. Goy. *Détection d’obstacles et de cibles de collision par un radar FMCW aéropporté*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 2012.
- [Gre17] M. Greiff. Modelling and Control of the Crazyflie Quadrotor for Aggressive and Autonomous Flight by Optical Flow Driven State Estimation. Thèse de maîtrise, 2017.
- [Gro13] P. D. Groves. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Second Edition*. Artech House, 2013.
- [GSS93] N. Gordon, D. Salmond, and A. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proceedings F Radar and Signal Processing*, 140(2), 1993.
- [GTV85] R. Genesio, M. Tartaglia, and A. Vicino. On the estimation of asymptotic stability regions : State of the art and new proposals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(8) :747–755, 1985.
- [Gue14] J. R. Guerci. *Space-time adaptive processing for radar*. Artech House, 2nd edition, 2014.
- [GVL13] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 4th edition, 2013.
- [GYT01] D. A. Grejner-Brzezinska, Y. Yi, and C. K. Toth. Bridging GPS Gaps in Urban Canyons : The Benefits of ZUPTs. *Navigation*, 48(4) :216–226, 2001.
- [HBF⁺08] J. P. How, B. Behihke, A. Frank, D. Dale, and J. Vian. Real-time indoor autonomous vehicle test environment. *IEEE Control Systems Magazine*, 28(2) :51–64, 2008.

- [HHMS13] M. Hua, T. Hamel, P. Morin, and C. Samson. Introduction to feedback control of underactuated VTOL vehicles : A review of basic control design ideas and principles. *IEEE Control Systems Magazine*, 33(1) :61–75, 2013.
- [IEE98] IEEE. Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros. *IEEE Standard 952-1997 (R2008)*, 1998.
- [Inf21] Infineon Technologies. Radar sensors for automotive. <https://www.infineon.com/cms/en/applications/automotive/chassis-safety-and-adas/automotive-77-ghz-radar-system/>, 2021.
- [Inv20] InvenSense. MPU-6500 : Datasheet 1.3. <http://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2020/06/PS-MPU-6500A-01-v1.3.pdf>, 2020.
- [Kal60] R. E. Kalman. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960.
- [Kem11] V. Kempe. *Inertial MEMS Principles and Practice*. Cambridge University Press, 2011.
- [KF97] M. Kayton and W. R. Fried. *Avionics Navigation Systems*. John Wiley & Sons, 1997.
- [Kha02] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [KM91] M. Koifman and S. J. Merhav. Autonomously aided strapdown attitude reference system. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 14(6) :1164–1172, 1991.
- [KM17] V. Kumar and N. Michael. Opportunities and Challenges with Autonomous Micro Aerial Vehicles. Springer Tracts in Advanced Robotics, pages 41–58. 2017.
- [KRB96] P. P. Khargonekar, M. A. Rotea, and E. Baeyens. Mixed H₂/H_∞ filtering. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(4) :313–330, 1996.
- [KSB92] W. Kleinhempel, W. Stammers, and D. Bergmann. Radar signal processing for vehicle speed measurements. In *Signal Processing*, pages 1825–1828. Elsevier, 1992.
- [Lac04] G. Lachapelle. GNSS Indoor Location Technologies. *Positioning*, 1(2), 2004.
- [LAM18] A. L’Affitto, R. B. Anderson, and K. Mohammadi. An Introduction to Nonlinear Robust Control for Unmanned Quadrotor Aircraft : How to Design Control Algorithms for Quadrotors Using Sliding Mode Control and Adaptive Control Techniques [Focus on Education]. *IEEE Control Systems Magazine*, 38(3) :102–121, 2018.
- [Lan15] B. Landry. *Planning and control for quadrotor flight through cluttered environments*. Thèse de maîtrise, Massachusetts Institute of Technology, 2015.
- [LC02] F. Le Chevalier. *Principles of Radar and Sonar Signal Processing*. Artech House, 2002.

- [LDGAG09] D. Lhomme-Desages, C. Grand, F. B. Amar, and J.-C. Guinot. Doppler-Based Ground Speed Sensor Fusion and Slip Control for a Wheeled Rover. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(4) :484–492, 2009.
- [LFB⁺17] S. Lesecq, J. Foucault, F. Birot, H. de Chaumont, C. Jackson, M. Correvon, P. Heck, R. Banach, A. di Matteo, V. Di Palma, J. Barrett, S. Rea, J.-M. Van Gyseghem, C. Ó’Murchú, and A. Mathewson. INSPEX : Design and integration of a portable/wearable smart spatial exploration system. In *Design, Automation Test in Europe Conference Exhibition (DATE), 2017*, pages 746–751, 2017.
- [LGB⁺17] E. López, S. García, R. Barea, L. M. Bergasa, E. J. Molinos, R. Arroyo, E. Romera, and S. Pardo. A Multi-Sensorial Simultaneous Localization and Mapping (SLAM) System for Low-Cost Micro Aerial Vehicles in GPS-Denied Environments. *Sensors*, 17(4) :802, 2017.
- [LJW14] Y. Li and J. Jack Wang. A pedestrian navigation system based on low cost IMU. *The Journal of Navigation*, 67(6) :929–949, 2014.
- [LL11] J. Li and Y. Li. Dynamic analysis and PID control for a quadrotor. In *2011 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, pages 573–578, 2011.
- [LLM10] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch. Control of Complex Maneuvers for a Quadrotor UAV using Geometric Methods on SE(3). *arXiv :1003.2005*, 2010.
- [LMBM14] R. Leishman, J. Macdonald, R. Beard, and T. McLain. Quadrotors and Accelerometers : State Estimation with an Improved Dynamic Model. *IEEE Control Systems Magazine*, 34(11) :28–41, 2014.
- [Lue64] D. G. Luenberger. Observing the State of a Linear System. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2) :74–80, 1964.
- [LWZ15] H. Liu, X. Wang, and Y. Zhong. Quaternion-Based Robust Attitude Control for Uncertain Robotic Quadrotors. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 11(2) :406–415, 2015.
- [LX17] X. Li and Q. Xu. A Reliable Fusion Positioning Strategy for Land Vehicles in GPS-Denied Environments Based on Low-Cost Sensors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(4) :3205–3215, 2017.
- [LYS02] R. Luo, C.-C. Yih, and K. L. Su. Multisensor fusion and integration : approaches, applications, and future research directions. *IEEE Sensors Journal*, 2(2) :107–119, 2002.
- [Mad10] S. O. H. Madgwick. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. *Report x-io and University of Bristol (UK)*, 25 :113–118, 2010.
- [Mar16] H. Martin. *Overcoming the challenges of low-cost inertial navigation*. Thèse de doctorat, University College London, 2016.
- [Max15] MaxBotix. XL-MaxSonar Datasheet. https://www.maxbotix.com/documents/XL-MaxSonar-EZ_Datasheet.pdf, 2015.
- [MCL14] D. A. Mercado, P. Castillo, and R. Lozano. Quadrotors data fusion using a particle filter. pages 890–894. IEEE, 2014.

- [MCW⁺17] K. McGuire, G. D. Croon, C. Wagter, K. Tuyls, and H. Kappen. Efficient Optical Flow and Stereo Vision for Velocity Estimation and Obstacle Avoidance on an Autonomous Pocket Drone. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2) :1070–1076, 2017.
- [Mea13] Measurement Specialities. MS4525DO - Datasheet. <https://www.mouser.com/datasheet/2/418/MS4525DO-710170.pdf>, 2013.
- [Meg94] A. Megretski. On the order of optimal controllers in the mixed H-2/H-infinity control. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3173–3174 vol.4, 1994.
- [MHV11] S. O. H. Madgwick, A. J. L. Harrison, and R. Vaidyanathan. Estimation of IMU and MARG orientation using a gradient descent algorithm. In *2011 IEEE International Conference on Rehabilitation Robotics*, pages 1–7, 2011.
- [MHW⁺19] S. A. S. Mohamed, M.-H. Haghbayan, T. Westerlund, J. Heikkonen, H. Tenhunen, and J. Plosila. A Survey on Odometry for Autonomous Navigation Systems. *IEEE Access*, 7 :97466–97486, 2019.
- [Mid91] R. H. Middleton. Trade-offs in linear control system design. *Automatica*, 27(2) :281–292, 1991.
- [MKC12] R. Mahony, V. Kumar, and P. Corke. Multirotor Aerial Vehicles : Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 19(3) :20–32, 2012.
- [MS10] P. Martin and E. Salaün. The true role of accelerometer feedback in quadrotor control. In *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1623–1629, 2010.
- [Mur14] R. R. Murphy. *Disaster Robotics*. MIT Press, 2014.
- [NKEES09] A. Noureldin, T. B. Karamat, M. D. Eberts, and A. El-Shafie. Performance Enhancement of MEMS-Based INS/GPS Integration for Low-Cost Navigation Applications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 58(3) :1077–1096, 2009.
- [NNE07] X. Niu, S. Nassar, and N. El-Sheimy. An Accurate Land-Vehicle MEMS IMU/GPS Navigation System Using 3D Auxiliary Velocity Updates. *Navigation*, 54(3) :177–188, 2007.
- [NSEN04] S. Nassar, K.-P. Schwarz, N. El-Sheimy, and A. Noureldin. Modeling Inertial Sensor Errors Using Autoregressive (AR) Models. *Navigation*, 51(4) :259–268, 2004.
- [NTG⁺18] F. Nashashibi, O. Trebucq, P. Goatin, V. Issarny, O. Simonin, T. Lucas, P. Sturm, and A. Viari. Véhicules autonomes et connectés : les défis actuels et les voies de recherche. Livre blanc, Inria, 2018.
- [OFR⁺16] R. Opromolla, G. Fasano, G. Rufino, M. Grassi, and A. Savvaris. LIDAR-inertial integration for UAV localization and mapping in complex environments. pages 649–656, 2016.
- [OGM⁺15] P. Ondruska, C. Gurau, L. Marchegiani, Chi Hay Tong, and I. Posner. Scheduled perception for energy-efficient path following. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 4799–4806, 2015.

- [OSCD20] F. M. Ortiz, M. Sammarco, L. H. M. K. Costa, and M. Detyniecki. Vehicle Telematics Via Exteroceptive Sensors : A Survey. *arXiv :2008.12632*, 2020.
- [PDCP16] U. Papa, G. Del Core, and F. Picariello. Atmosphere effects on sonar sensor model for UAS applications. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 31(6) :34–40, 2016.
- [PLC⁺19] D. Palossi, A. Loquercio, F. Conti, F. Conti, E. Flamand, E. Flamand, D. Scaramuzza, L. Benini, and L. Benini. A 64mW DNN-based Visual Navigation Engine for Autonomous Nano-Drones. *IEEE Internet of Things Journal*, 6(5) :8357–8371, 2019.
- [PMC10] P. Pounds, R. Mahony, and P. Corke. Modelling and control of a large quadrotor robot. *Control Engineering Practice*, 18(7) :691–699, 2010.
- [PVLP⁺09] J. Parviainen, M. A. Vazquez Lopez, O. Pekkalin, J. Hautamaki, J. Collin, and P. Davidson. Using Doppler radar and MEMS gyro to augment DGPS for land vehicle navigation. In *2009 IEEE Control Applications, (CCA) Intelligent Control, (ISIC)*, pages 1690–1695, 2009.
- [PY15] M. Piccoli and M. Yim. Passive stability of vehicles without angular momentum including quadrotors and ornithopters. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1716–1721, 2015.
- [QFF⁺12] A. G. Quinchia, C. Ferrer, G. Falco, E. Falletti, and F. Dervis. Analysis and modelling of MEMS inertial measurement unit. In *2012 International Conference on Localization and GNSS*, pages 1–7, 2012.
- [QON07] M. A. Quddus, W. Y. Ochieng, and R. B. Noland. Current map-matching algorithms for transport applications : State-of-the art and future research directions. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, 15(5) :312–328, 2007.
- [Rao17] S. Rao. Introduction to mmWave sensing : FMCW radars. 2017.
- [RCMKAIM⁺21] E. Ribeiro, A. Carolina Martinazzo Kanitz, M. Aurélio Izumida Martins, K. Duarte Tomaz, and S. de Francisci. Optimization of Inspections of Underground Electricity Distribution Networks Using UAV. pages 89–92, 2021.
- [Ric14] M. A. Richards. *Fundamentals of radar signal processing*. McGraw-Hill Education, 2014.
- [Rig12] G. G. Rigatos. Nonlinear Kalman Filters and Particle Filters for integrated navigation of unmanned aerial vehicles. *Robotics and Autonomous Systems*, 60(7) :978–995, 2012.
- [SAY18] H. Shraim, A. Awada, and R. Youness. A survey on quadrotors : Configurations, modeling and identification, control, collision avoidance, fault diagnosis and tolerant control. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 33(7) :14–33, 2018.
- [Sch95] C. Scherer. Mixed H-2/H-infinity Control. In A. Isidori, editor, *Trends in Control*, pages 173–216, London, 1995.
- [Sco14] G. Scorletti. Outils pour la robustesse : inégalités matricielles affines (Notes de cours). 2014.

- [SF09] G. Scorletti and V. Fromion. Automatique fréquentielle avancée. Cours 3ième année cycle ingénieur, Ecole Centrale de Lyon, Master GEGP filière GSA, Université de Lyon 1, INSA de Lyon, 2009.
- [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7) :896–911, 1997.
- [SHD⁺17] K. K. M. Shariff, E. Hoare, L. Daniel, M. Antoniou, and M. Cherniakov. Comparison of Adaptive Spectral Estimation for Vehicle Speed Measurement with Radar Sensors. *Sensors*, 17(4), 2017.
- [Sil21] Silicon Radar. 120 GHz Transceiver TRA_120_002 Datasheet. https://siliconradar.com/datasheets/Datasheet_TRA_120_002_V0.8.pdf, 2021.
- [Sim06] D. Simon. *Optimal State Estimation : Kalman, H-Infinity, and Nonlinear Approaches*. John Wiley & Sons, 2006.
- [SKHS16] M. Schreiber, H. Königshof, A.-M. Hellmund, and C. Stiller. Vehicle localization with tightly coupled GNSS and visual odometry. In *2016 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, pages 858–863, 2016.
- [Smi13] B. W. Smith. Human error as a cause of vehicle crashes. *Center for Internet and Society*, 2013.
- [SMMK14] S. Shen, Y. Mulgaonkar, N. Michael, and V. Kumar. Multi-sensor fusion for robust autonomous flight in indoor and outdoor environments with a rotorcraft MAV. In *2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 4974–4981, 2014.
- [SP07] S. Skogestad and I. Postlethwaite. *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*, volume 2. Wiley, 2007.
- [SRFM16] A. F. Scannapieco, A. Renga, G. Fasano, and A. Moccia. Ultralight radar sensor for autonomous operations by micro-UAS. pages 727–735, 2016.
- [SRM15] A. F. Scannapieco, A. Renga, and A. Moccia. Preliminary Study of a Millimeter Wave FMCW InSAR for UAS Indoor Navigation. *Sensors*, 15(2) :2309–2335, 2015.
- [SSAF⁺19] H. Shakhathreh, A. H. Sawalmeh, A. Al-Fuqaha, Z. Dou, E. Almaita, I. Khalil, N. S. Othman, A. Khreishah, and M. Guizani. Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) : A Survey on Civil Applications and Key Research Challenges. *IEEE Access*, 7 :48572–48634, 2019.
- [ST92] U. Shaked and Y. Theodor. H-infinity optimal estimation : a tutorial. In *[1992] Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2278–2286 vol.2, 1992.
- [Sto92] A. G. Stove. Linear FMCW radar techniques. *IEE Proceedings F-Radar and Signal Processing*, 139(5) :343–350, 1992.
- [TBF05] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox. *Probabilistic Robotics*. MIT Press, 2005.
- [Tex21] Texas Instruments. IWR6843AOP Datasheet. <https://www.ti.com/lit/pdf/swrs237>, 2021.

- [TFP⁺19] P. Tosato, D. Facinelli, M. Prada, L. Gemma, M. Rossi, and D. Brunelli. An Autonomous Swarm of Drones for Industrial Gas Sensing Applications. pages 1–6, 2019.
- [TM06] A. Tayebi and S. McGilvray. Attitude stabilization of a VTOL quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3) :562–571, 2006.
- [TS90] M. Tahk and J. L. Speyer. Target tracking problems subject to kinematic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(3) :324–326, 1990.
- [TW04] D. H. Titterton and J. L. Weston. *Strapdown inertial navigation technology*, volume 17. IET, 2nd edition, 2004.
- [VAGF17] A. Valade, P. Acco, P. Grabolosa, and J.-Y. Fourniols. A Study about Kalman Filters Applied to Embedded Sensors. *Sensors*, 17(12) :2810, 2017.
- [Vet11] M. J. Veth. Navigation Using Images, A Survey of Techniques. *Navigation*, 58(2) :127–139, 2011.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.
- [Wie64] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series : With Engineering Applications*, volume 8. MIT press Cambridge, 1964.
- [WR95] D. Walker and D. Ridgely. Uniqueness of the general mixed H₂/H-infinity optimal controller. In *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*, volume 2, pages 1453–1457, 1995.
- [YJB76] D. Youla, H. Jabr, and J. Bongiorno. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers—Part II : The multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(3) :319–338, 1976.
- [Yos09] K. Yoshida. Achievements in space robotics. *IEEE Robotics Automation Magazine*, 16(4) :20–28, 2009.
- [ZC03] Y. Zhou and G. Chirikjian. Probabilistic models of dead-reckoning error in nonholonomic mobile robots. In *2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 1594–1599, 2003.
- [ZCDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [ZLWL14] X. Zhang, X. Li, K. Wang, and Y. Lu. A Survey of Modelling and Identification of Quadrotor Robot. *Abstract and Applied Analysis*, 2014.
- [ZSC⁺17] Z. Zhang, A. Suleiman, L. Carlone, V. Sze, and S. Karaman. Visual-Inertial Odometry on Chip : An Algorithm-and-Hardware Co-design Approach. *Robotics : Science and Systems*, 13, 2017.
- [ZZY18] R. Zhang, J. Zhang, and H. Yu. Review of modeling and control in UAV autonomous maneuvering flight. In *2018 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)*, pages 1920–1925, 2018.