



HAL
open science

Modélisation et simulation du comportement de particules dans des écoulements de fluides confinés : application aux machines de semis

Franck Gillon

► **To cite this version:**

Franck Gillon. Modélisation et simulation du comportement de particules dans des écoulements de fluides confinés : application aux machines de semis. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Clermont Auvergne, 2021. Français. NNT : 2021UCFAC093 . tel-03699500

HAL Id: tel-03699500

<https://theses.hal.science/tel-03699500>

Submitted on 20 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



INRAE



THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ CLERMONT
AUVERGNE**

École doctorale des sciences fondamentales
par **FRANCK GILLON**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR

Spécialité : Mathématiques appliquées et applications des
Mathématiques

**Modélisation et simulation du
comportement de particules dans des
écoulements de fluides confinés :
application aux machines de semis.**

Soutenue le 13 décembre 2021 devant le jury composé de :

M. François Bouchon	Directeur de thèse
M. Laurent Chupin	Directeur de thèse
M. Vivien Cluzon	Examinateur
Mme Marguerite Gisclon	Rapporteur
M. François Jauberteau	Rapporteur
M. Sébastien Martin	Rapporteur

Remerciement

Je souhaite tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, François Bouchon et Laurent Chupin, qui m'ont accompagné, aidé, et appris énormément de choses pendant cette thèse. Ils ont su faire preuve de patience, pédagogie et se sont rendue disponible pour moi et ça été très agréable d'être dirigé par eux. Merci beaucoup pour ces années.

Je remercie les membres de l'INRAE et de la task force Semi, pour l'accompagnement lors de ce projet et des échanges que nous avons eus lors des différentes réunions.

Je voudrais remercier les membres du jury qui m'ont permis de soutenir cette thèse, Marguerite Gisclon, François Jauberteau et Sébastien Martin pour avoir consacré du temps à la lecture du manuscrit et toutes vos remarques avant et pendant la soutenance. Je remercie aussi Vivien Clauzon d'avoir été présent dans ce jury et pour toutes les remarques échangées à ce moment-là.

Je remercie l'ensemble du LMBP, des chercheurs aux informaticiens en passant par les secrétaires et bibliothécaires, tout le monde est d'une grande bienveillance et chacun prend le temps pour nous lorsque nous avons une question ou un problème. Merci beaucoup pour cette atmosphère chaleureuse durant toutes ces années.

Les doctorants du laboratoire pendant ces années ont aussi eu une grande importance pour le développement de ce travail et en dehors. Je pense à Arthur, Fernando et Valentin dont on a partagé le bureau et nombreuses discussions pendant ces années, le bureau du dessus, Arnaud, Rénald et Sophie, qui m'ont accueilli quand je suis arrivé et avec qui on a partagé de très bons moments. Et sans oublier tous les autres doctorants que j'ai rencontrés pendant cette période.

Je n'oublie pas les personnes qui m'ont entouré à Clermont Ferrand pendant ces années, les doctorants d'autres domaines, les gens que j'ai rencontrés au foot et ceux dont j'ai fait la connaissance grâce à des amis. Toutes ces personnes ont apporté quelque chose pendant cette période et m'ont permis de m'évader du cadre des mathématiques. De la même façon je remercie les

amis de ma campagne bourguignonne, qui étaient là quand je rentrai et dont les moments passés ensemble étaient très importants.

Pour finir, je vais remercier ma famille d'avoir toujours été là pendant cette thèse mais aussi pendant mes études. Je pense à mon père, ma mère, mes frères ainsi que mes grands-parents et toute la famille qui a été une ressource d'énergie à chaque fois que je les voyais, merci d'avoir été là. Et enfin je souhaiterais remercier une personne qui restera particulière du fait d'avoir été présente dans la majorité de ces moments. Elle m'a aidé, épaulé, soutenu et motivé dans les difficultés que j'ai pu rencontrer, en passant aussi par des relectures qui m'étaient indispensables et pas forcément des plus agréables pour elle. Elle fait partie de la réussite de cette thèse..

Table des matières

1	Introduction	8
2	Modélisation du transport de graines dans un écoulement bidimensionnel	15
2.1	Présentation de la géométrie	16
2.2	Modélisation du comportement hydrodynamique du fluide . .	17
2.3	Modélisation du comportement des particules solides	18
2.4	Modélisation des conditions aux limites du domaine et des interactions entre le fluide et les particules	19
2.5	Adimensionnement du modèle mathématique	21
3	Recherche de positions stables dans un écoulement avec N particules	26
3.1	Résolution d'un écoulement à N particules	28
3.1.1	Définition des problèmes élémentaires	29
3.1.2	Existence et unicité des solutions aux problèmes élémentaires	30
3.1.3	Recherche des vitesses des particules dans le cas $Re = 0$	31
3.1.4	Existence et unicité de la solution dans un écoulement de Stokes ($Re = 0$)	34
3.1.5	Recherche de la solution dans le cas de Re petit	37
3.2	Recherche numérique de positions d'équilibre	40
3.2.1	Introduction de la mise en place numérique	40
3.2.2	Algorithme numérique	40
3.2.3	Choix des paramètres du maillage	41
3.2.4	Simulation dans le cas $N = 1$	47
3.2.5	Simulation dans le cas $N = 2$	52

4	Technique de pénalisation pour la recherche de positions d'équilibre	62
4.1	Définition du problème à résoudre	63
4.1.1	Formulation au sens faible du problème	63
4.1.2	Équivalence vitesse constante et déformation nulle . . .	65
4.1.3	Mise en place de la pénalisation	66
4.2	Simulations Numériques dans le cas $N = 1$	69
4.2.1	Méthode de Newton pour la résolution d'un problème stationnaire	70
4.2.2	Semi-discrétisation en temps pour une résolution évolutive	74
5	Modifications des conditions limites	78
5.1	Conditions de Robin et rugosité sur les bords	79
5.1.1	Mise en équation du problème	79
5.1.2	Formulation au sens faible	80
5.1.3	Simulations numériques dans le cas $N = 1$	81
5.2	Conditions de contrainte en entrée	83
5.2.1	Mise en équation du problème	84
5.2.2	Influence d'une force en entrée sur le fluide pour $N = 1$	85
5.2.3	Influence de l'encombrement dans le cas $N = 20$	87
6	Conclusion	90
7	Bibliographie	93

1 Introduction

Dans le cadre d'un projet de développement agrotechnologique, porté par le projet I-SITE CAP 20-25 (Challenge 2), au sein de l'université Clermont Auvergne, cette thèse est le fruit d'une collaboration entre le Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal et l'INRAE. Le projet, appelé TaskForce Semis, a pour objectif d'apporter une approche numérique complémentaire aux essais réalisés en laboratoire, notamment sur les machines de semis agricole.



FIGURE 1 – Photo d'un semoir agricole.

Un semoir agricole est un outil porté par un tracteur, permettant de mettre en sol les graines qui donneront la récolte de l'année suivante. Cet outil doit être le plus précis possible pour ne pas générer de perte de graines (trop de graines au même endroit, pas assez à d'autres) et avoir une bonne vitesse d'exécution pour semer rapidement. Si ces deux objectifs sont remplis, le rendement est optimal pour l'agriculteur. Le fonctionnement du semoir est le suivant : les graines sont stockées dans la trémie du semoir, un réservoir situé à l'avant de l'outil. Elles sont ensuite introduites dans un circuit pneumatique, alimenté par une turbine, afin d'être acheminées jusqu'au sol. Une roue cannelée à la sortie de la trémie introduit une quantité maîtrisée

de graines dans le circuit. Ces graines sont transportées jusqu'à la colonne de distribution, la tête de celle-ci ayant pour rôle de répartir uniformément les graines, sur l'ensemble des socs qui s'étendent sur toute la largeur du semoir. Une dernière partie de tuyau, alimentée pneumatiquement, relie la tête de distribution à chaque soc permettant ainsi d'acheminer les graines pour les planter. L'objectif pour l'agriculteur est d'avoir une répartition régulière des graines plantées dans le sol mais aussi une maîtrise sur l'intervalle entre les graines. Pour ce faire, il faut conserver la régularité donnée par la roue cannelée lors du transport, malgré la diversité de poids, tailles et formes des graines. Des semoirs reconnus pour leur précision existent, comme par exemple pour les grains de maïs, où ils aspirent les graines au niveau des socs afin de les déposer à l'endroit précis souhaité, mais au prix d'une largeur et d'une vitesse d'avancement plus faibles. L'idéal serait d'obtenir cette précision pour des semoirs plus polyvalents.

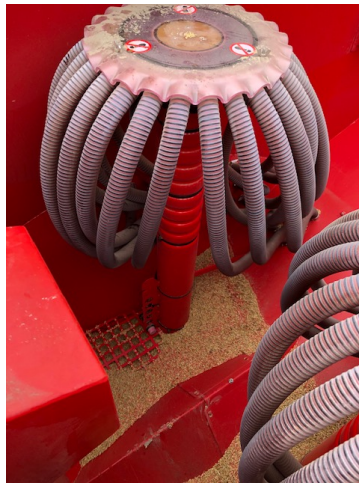


FIGURE 2 – Photo de l'intérieur d'une trémie avec la tête de distribution.

Les agriculteurs utilisant cet outil remarquent une perte de cette régularité lors de la semaille. Les graines ne sont pas réparties régulièrement dans le champ, il est remarqué la présence de doublons ou d'absence de graines. Les études proposées dans [36] sur la tête de distribution montrent une répartition équitable des graines vers les différents socs, on en déduit donc que cette perte de régularité se produit lors du transport dans les tubes. De plus, ce phénomène peut également provoquer des bouchons dans le système.

Au sein de l'INRAE, un banc d'essai a été mis en place afin de reproduire

ce qu'il se passe lors du transport des graines. À la sortie de la tête de distribution, un tube transparent est installé avec un système de capteur optique afin de détecter le passage de graines et en déduire leur vitesse et position diamétrale.



FIGURE 3 – Banc d'essai mis en place au sein de l'INRAE.

Lors des tests effectués en laboratoire, l'équipe de l'INRAE a mis en évidence quelques comportements particuliers. La soufflerie envoie dans un tube vertical un grand nombre de graines et, à l'aide du capteur optique, ils obtiennent des informations sur deux paramètres : la vitesse et la position diamétrale des graines.

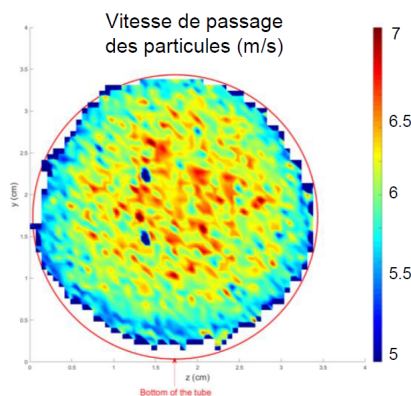


FIGURE 4 – Vitesse de passage des graines lors d'un test.

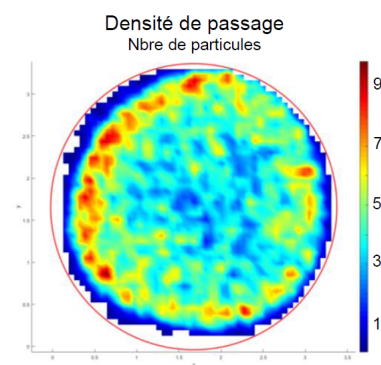


FIGURE 5 – Densité de passage des graines lors d'un test.

Ce qui est mis en évidence lors de ces essais ce sont : une vitesse plus élevée pour les graines passant par le centre du tube et plus faible pour celles passant près du bord avec une valeur des vitesses de l'ordre de 6 m/s , et une densité de passage des particules dans le tube qui se concentre autour d'un anneau se situant plus proche du bord du tube que de son centre. Ce phénomène pas forcément intuitif sera étudié dans la 3ème partie de cette thèse.

Cependant lors d'essais en laboratoire, il est difficile d'avoir accès simultanément aux paramètres du fluide et ceux des graines, mais aussi de reproduire à l'identique plusieurs fois la même expérience. Les capteurs permettant de mesurer les paramètres du fluide, comme par exemple un anémomètre pour les vitesses, ne peuvent pas être utilisés dans un écoulement particulaire. Pour la vitesse des graines, l'utilisation de méthodes optiques permet de mesurer la vitesse des particules mais ne nous donne pas accès à la vitesse du fluide. Il est alors difficile de quantifier les effets des particules sur l'écoulement et vice-versa, alors qu'il y a de fortes chances d'avoir une corrélation entre les deux phénomènes. L'utilisation de méthodes et simulations numériques peut permettre de quantifier ces interactions puisque ces méthodes nous donnent accès à la fois aux grandeurs physiques du fluide et des particules solides. Tous ces résultats numériques, en complémentarité avec ceux obtenus par les essais expérimentaux, peuvent être utilisés pour comprendre les phénomènes qui se produisent. L'objectif de cette thèse est donc de mettre en place un modèle mathématique reproduisant ce qu'il se passe lors du fonctionnement d'une machine de semis. On analysera et simulera le modèle pour comprendre la trajectoire et le comportement des graines lors de leur transport dans un semoir agricole, dans l'espoir de pouvoir optimiser le rendement de ces outils et dimensionner les solutions technologiques utilisées.

Dans cette thèse, on se basera sur les ordres de grandeurs suivants : la vitesse de l'air est d'environ 10 m/s et le tuyau apportant les graines à la tête de distribution a un diamètre d'environ 10 cm . La tête de distribution de diamètre d'environ 20 cm , repartit les graines dans 12 à 20 sorties (suivant la taille du semoir et le nombre de têtes) emmenant les graines jusqu'aux socs, transitant dans des tuyaux d'environ $3 - 4\text{ cm}$ de diamètre et de $3 - 4\text{ m}$ de long. Entre 40 et 140 graines/seconde transitent dans ces tuyaux.

La dimension, forme et densité des graines, peuvent varier suivant leur nature et ce, même au sein de la même variété. Lors de cette thèse, on se concentrera sur les graines de colza. On peut considérer que ces graines sont

sphériques et ont un diamètre d'environ 2 mm . La densité d'une graine se situe autour de 1000 kg/m^3 . Le choix de ce type de graines pour représenter la particule solide est motivé par le fait qu'une particule sphérique simplifie certains aspects de la géométrie.



FIGURE 6 – Graines de colza.

La première partie de cette thèse sera consacrée à la modélisation du problème physique. L'objectif est de mettre en équation une partie du semoir afin d'en faire l'étude numérique. La partie du semoir choisie est un tube reliant la tête de distribution et un soc. Nous choisissons cette partie du semoir en considérant que la tête de distribution répartie équitablement les graines dans les différents tubes. Tout d'abord, on définit la géométrie qui modélise le tuyau comme un tube droit bidimensionnel. Les graines de colza sont représentées comme des disques à l'intérieur du tube et on considère qu'elles n'entrent ni en contact avec les parois, ni entre elles, afin de ne pas ajouter des équations de contact dans le modèle. En s'appuyant sur [8], [14] ou [16], le fluide est modélisé par les équations de Navier-Stokes incompressibles et les solides satisfont les équations classiques de la mécanique newtonienne. À ces équations, on ajoute des conditions entre les différentes interfaces, c'est à dire avec les parois du tube et entre le fluide et les graines de colza. Il existe plusieurs équations nous permettant de modéliser la nature des interactions selon si il y a glissement, adhérence ou même de la rugosité entre les milieux. On peut s'appuyer sur [4], [21], [28] et [34] pour définir nos interactions. On applique des conditions sur la vitesse ou la contrainte du fluide en entrée et sortie du tube. Enfin, pour mettre en évidence des grandeurs caractéristiques tel que le nombre de Reynolds, on adimensionne les équations obtenues pour caractériser la nature des phénomènes mis en jeu.

La deuxième partie est consacrée à la recherche de configurations d'équilibre. Dans le cas où nous avons N particules dans un écoulement bidimensionnel, on appelle une configuration d'équilibre, une configuration où toutes les particules se déplacent à une même vitesse constante et uniquement orientée dans le sens longitudinal du tube. Cet équilibre correspond à la conservation de la distance entre les particules au cours du mouvement et donc de la régularité. Dans la même démarche que [13] et [10], on souhaite tout d'abord résoudre un problème de Stokes. Pour ce faire, on définit des "problèmes élémentaires" qui formeront une base et permettront de trouver les vitesses des particules puis de construire la solution au problème de Stokes. À partir de la solution précédente, on peut trouver la solution pour un problème de Navier Stokes dans le cas de faible turbulence et les vitesses des particules. Pour résoudre ces problèmes, nous utiliserons le solveur sur FreeFem++ puis nous rechercherons les vitesses permettant aux particules de conserver leur écartement au cours du transport.

La partie suivante utilise une technique de pénalisation comme présentée dans [22] afin d'appliquer une contrainte de non déformation sur les solides. La méthode consiste à ajouter dans l'équation une contrainte traduisant, dans notre cas, la non déformation des particules. Pour mettre en place numériquement cette méthode, nous résolvons la formulation faible du problème général avec la condition spécifique que le tenseur des déformations du milieu est nul lorsque qu'il représente une particule. Physiquement, ceci consiste à ajouter un terme de viscosité infinie à l'équation traduisant le comportement du solide. Nous travaillons ainsi sur un domaine sans distinction, du point de vue du maillage entre le milieu fluide et solide. Numériquement, on souhaite reproduire les configurations d'équilibre de la partie précédente dans un cas évolutif en temps et pour des nombres de Reynolds plus grands. La technique de pénalisation nous permet de réaliser cela sans le besoin de remailler le domaine entre chaque pas de temps. Nous avons aussi accès à la dynamique des solides au cours du mouvement et l'impact que les particules ont entre elles.

Dans la dernière partie de cette thèse, nous souhaitons étudier l'impact de conditions limites différentes pour modéliser les bords du domaine. Nous allons faire le choix d'appliquer une condition dite de Robin sur le fluide. Cette condition que nous pouvons retrouver dans [8] ou encore dans [21], permet de modéliser une rugosité sur les bords [1] ou aussi l'application d'une force (ou pression) sur le fluide [12]. Ces choix de modélisation sont motivés par le problème physique où nous pouvons supposer que les tuyaux ne sont pas parfaitement lisses ou adhérents et qu'il peut y avoir des rugosités

à leur surface mais aussi que le fluide est entraîné par une turbine, on peut supposer que celle-ci impose une force aux fluides plutôt qu'une vitesse. On souhaite dans cette partie en déterminer numériquement l'impact.

2 Modélisation du transport de graines dans un écoulement bidimensionnel

On réalise l'étude numérique du problème présenté en introduction. Pour cela, nous mettons en équation les comportements de chaque milieu en s'appuyant sur la littérature à ce sujet et nous utiliserons des modèles présents dans entre autres [8], [14], [16] et [23] pour modéliser le comportement du fluide, basé sur les équations de Navier Stokes incompressibles, et les équations classiques de la mécanique Newtonnienne pour les particules solides, utilisées aussi dans [14], [16] et [23]. Tout d'abord, on définit la géométrie du tuyau reliant la tête de distribution à un soc du semoir. On considère le tuyau comme un tube droit afin de se concentrer uniquement sur les effets des graines sur le fluide. Le choix de travailler sur une géométrie bidimensionnelle permet de réduire les temps de calcul lors de la résolution numérique mais les résultats théoriques peuvent être étendus au cas tridimensionnel. On choisit des graines de colza comme particules puisque leur forme proche d'une sphère nous permet de simplifier certains aspects dans la partie numérique. Les graines sont alors représentées par des disques et la position de leur centre détermine leur placement dans le tube. On considère que les particules ne rentrent pas en contact ni entre elles et ni avec les parois du tube. La prise en compte numérique des contacts entre les particules et les parois ou les particules entre elles, est abordée et détaillée dans [22], [23] et [35] où on applique une contrainte supplémentaire à la solution, on projette la solution dans un espace prenant en compte la contrainte.

Aux interfaces du fluide et sur les parois, on applique des conditions de bords. Dans la littérature, il existe plusieurs équations permettant de modéliser le comportement entre deux milieux, une condition de Dirichlet ([4], [21], [28], [31], [34]), elle peut être utilisée pour modéliser une paroi en mouvement et une condition d'adhérence, la condition de Neumann ([4], [21], [28]) utilisée pour modéliser un milieu en glissant sur une paroi ou encore la condition de Robin ([4], [21], [28]) peut modéliser des rugosités sur la paroi ou encore une force appliquée sur le milieu. On peut trouver dans la littérature une condition de Navier ([3]) pour modéliser aussi une force appliquée sur un fluide. Nous ferons le choix que le fluide adhère aux parois du tube et qu'il n'y pas de glissement entre le fluide et les particules. L'entrée et la sortie du tube sont représentées par une condition appliquée sur la vitesse du fluide ou la contrainte hydrodynamique. Dans [8] notamment, on peut retrouver une condition sur le tenseur des contraintes du fluide afin d'engendrer un mouvement. Cette condition aura un impact sur le débit du

fluide qui sera dépendant de l'encombrement du système, ce cas sera étudié dans la partie 5.2 de cette thèse. Une fois les conditions au temps initial imposées, on obtient un système que satisfont les inconnues de notre problème qui sont la vitesse du fluide, sa pression et les vitesses des particules.

Pour mettre en évidence la nature des phénomènes mis en jeu, on adimensionne les équations afin de faire apparaître des grandeurs caractéristiques telles que le nombre de Reynolds, de Froude ou le quotient entre le rayon du tube et d'une particule et le rapport des densités des deux milieux.

2.1 Présentation de la géométrie

Dans le plan $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, on place un tube droit de largeur $2h > 0$ noté $T = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -h < x_2 < h\}$ de bord $\Gamma = \Gamma_{sup} \cup \Gamma_{inf}$ où $\Gamma_{sup} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = h\}$ est le bord supérieur du tube et $\Gamma_{inf} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 = -h\}$ est le bord inférieur.

Chaque particule est indiquée par un entier $j \in \{1, \dots, N\}$ et est représentée pour tout temps $t > 0$ par une boule ouverte du plan $B^j(t) = \mathcal{B}(\mathbf{G}^j(t), R^j)$ où $\mathbf{G}^j(t) = (G_1^j(t), G_2^j(t))$ désigne son centre et $R^j > 0$ son rayon. Son bord $\partial B^j(t)$ sera noté $S^j(t)$ et l'ensemble des N particules sera noté $B(t) = \bigcup_{j=1}^N B^j(t)$. On définit le domaine fluide par $\Omega(t) = T \setminus \overline{B(t)}$.

On définit l'ensemble $\mathbb{D} = \{(t, \mathbf{x}), t > 0, \mathbf{x} \in \Omega(t)\}$. Afin de ne pas alourdir les notations, la variable de temps sera souvent omise dans la suite de cette thèse.

On appelle par la suite la partie gauche et droite du tube se situant au loin des particules ($x_1 \rightarrow -\infty$ et $x_1 \rightarrow +\infty$), respectivement l'entrée et la sortie de l'écoulement.

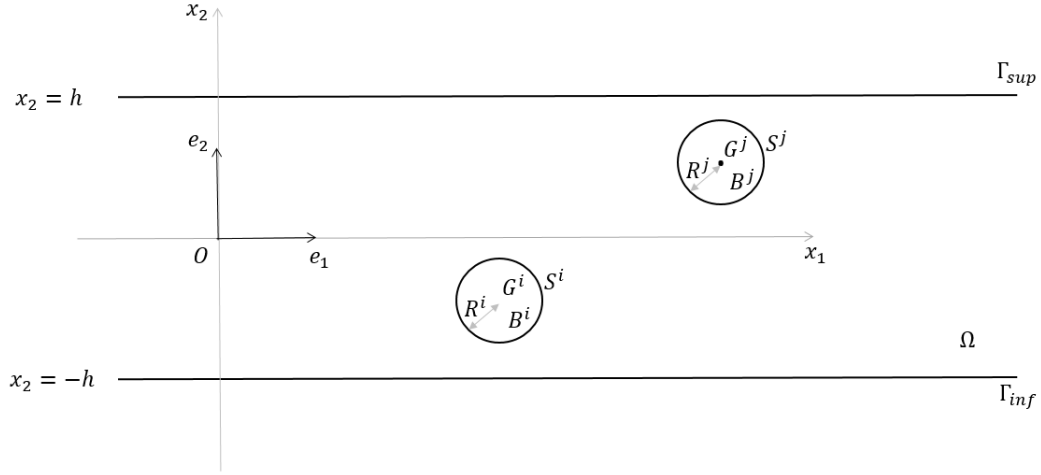


FIGURE 7 – Schéma de la géométrie.

2.2 Modélisation du comportement hydrodynamique du fluide

Au vu de la vitesse d'écoulement du fluide dans le semoir (quelques mètres par seconde), on considère que le fluide a une densité ρ_f constante. Le comportement du fluide est caractérisé par sa vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ et sa pression p . L'équation de conservation de la quantité de masse pour $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{D}$ s'écrit

$$\partial_t \rho_f + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{u}) = 0. \quad (1)$$

Puisque la densité du fluide ρ_f est supposée constante en temps et en espace, on peut écrire (1) comme

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad (2)$$

ce qui traduit l'incompressibilité du fluide.

L'expression du principe fondamental de la dynamique s'écrit pour $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{D}$:

$$\partial_t(\rho_f \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho_f \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}_f, \quad (3)$$

où \otimes représente le produit tensoriel contracté (voir appendix A de [8]), $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes du fluide et \mathbf{f}_f est la somme des forces ponctuelles s'appliquant sur le fluide, ici la force de gravité qui s'écrit

$$\mathbf{f}_f = -\rho_f g \mathbf{e}_2, \quad (4)$$

avec $g = 9.81m/s^2$.

En remarquant que

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \quad (5)$$

avec $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (v_1\partial_{x_1}u_1 + v_2\partial_{x_2}u_1, v_1\partial_{x_1}u_2 + v_2\partial_{x_2}u_2)$, en utilisant l'expression précédente et (2), on peut écrire (3) pour $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{D}$

$$\rho_f (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}_f. \quad (6)$$

On fait l'hypothèse que le fluide a un comportement newtonien. En notant μ_f la viscosité dynamique du fluide, on exprime le tenseur des contraintes sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{Id}, \quad (7)$$

où \mathbf{Id} est la matrice identité 2×2 et $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u})$ représente le tenseur des taux de déformation, la partie symétrique du gradient de vitesses.

2.3 Modélisation du comportement des particules solides

Pour $j \in \{1, \dots, N\}$, chaque particule j se comporte comme un solide indéformable de masse $m^j = \pi R^{j2} \rho_p^j$ avec ρ_p^j sa densité, et de moment d'inertie $I^j = \frac{1}{2}m^j R^{j2}$. Son mouvement est caractérisé pour $t > 0$ par la vitesse de son centre de gravité

$$\mathbf{V}^j = \frac{d\mathbf{G}^j}{dt}, \quad (8)$$

et la vitesse de rotation, la troisième composante de la vitesse de la particule j ,

$$\boldsymbol{\omega}^j = \omega^j \mathbf{e}_3, \quad (9)$$

où on peut définir \mathbf{e}_3 comme le vecteur orthogonal au plan $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

À partir des équations classiques de la mécanique newtonienne, la somme des forces sur chaque particule j s'écrit pour $t > 0$

$$m^j \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} = \mathbf{F}^j + \mathbf{f}_g^j. \quad (10)$$

Les forces s'appliquant sur la bille j sont $\mathbf{f}_g^j = -m^j g \mathbf{e}_2$ représentant le poids de la particule et la force hydrodynamique du fluide s'écrivant

$$\mathbf{F}^j = - \int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j, \quad (11)$$

avec \mathbf{n}^j représentant la normale sortante de la particule j .

La somme des moments s'appliquant en son centre de gravité \mathbf{G}^j s'écrit pour $t > 0$

$$I^j \frac{d\omega^j}{dt} = T^j, \quad (12)$$

où T^j est le moment exercé par le fluide appliqué au centre de gravité de la particule j que l'on écrit sous la forme

$$T^j = - \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, \quad (13)$$

où $\mathbf{r}^j = \mathbf{x} - \mathbf{G}^j$ représente le vecteur rayon de la particule j . On définira le produit vectoriel dans le plan comme le produit

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 * y_2 - x_2 * y_1) \mathbf{e}_3.$$

2.4 Modélisation des conditions aux limites du domaine et des interactions entre le fluide et les particules

On souhaite définir le comportement du fluide sur les bords du domaine Ω . Dans la littérature, on trouve plusieurs conditions permettant de modéliser le comportement du fluide au contact de solides. On se base sur les modèles utilisés dans [4], [21], [28] et [34]. Pour chaque bord appartenant à $\partial\Omega$, on note $\mathbf{u}_n = u_n \mathbf{n} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ la vitesse normale à cet interface où \mathbf{n} représente la normale sortante du bord concerné et $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - \mathbf{u}_n$ la vitesse tangentielle à ce bord. On définit le vecteur tangentiel $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{e}_3$ et on peut écrire $\mathbf{u}_\tau = u_\tau \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau}$.

Tout d'abord, le fluide ne pénètre pas dans les solides, ce qui se traduit par :

$$u_n = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (14)$$

On peut écrire comme condition générale pour modéliser le bord d'un domaine la condition aux limites de Robin,

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} + au_\tau = K_\tau \text{ sur } \Gamma, \quad (15)$$

où $\frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u_\tau \cdot \mathbf{n}$. Ce produit scalaire représente le gradient de vitesse ∇u_τ traversant la paroi.

Les conditions aux limites de Robin peuvent être utilisées lors de la modélisation d'une paroi rugueuse [1]. Nous étudierons l'impact de cette condition dans la partie 5.1.

Dans le cas où $a = 0$, on obtient la condition aux limites de Neumann,

$$\frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{n}} = K_\tau \text{ sur } \Gamma. \quad (16)$$

Cette condition traduit l'effet d'une force induite par le bord sur le fluide. Dans le cas où K_τ est nul, qu'on appelle condition de Neumann homogène, on parle de glissement parfait.

Lorsque $a \rightarrow \infty$, on obtient la condition aux limites de Dirichlet

$$u_\tau = K_\tau \text{ sur } \Gamma. \quad (17)$$

Cette condition traduit la vitesse de translation K_τ de la paroi par rapport au fluide. Dans le cas K_τ est nul, c'est à dire que la paroi ne bouge pas, on dit que le fluide adhère à la paroi. Cette condition appelée Dirichlet homogène sera majoritairement utilisée dans cette thèse pour modéliser les parois Γ du tube.

Sur le bord S^j de la particule j , on considère que le fluide a une adhérence parfaite avec la particule. On obtient alors que le fluide ait la même vitesse que la particule en chaque point du bord. On écrit ainsi

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j \text{ sur } S^j. \quad (18)$$

Pour fermer le système, il reste à imposer une condition en entrée et en sortie du tube T loin des particules. De façon similaire que pour les bords $\partial\Omega$, on peut appliquer une condition sur la vitesse du fluide ou imposer une force sur le fluide [8]. Pour les parties 3 et 4, nous choisissons d'imposer une vitesse

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty(x_2), \quad (19)$$

où $\mathbf{u}_\infty = (u_\infty, 0)$ est une fonction donnée. Il est aussi possible d'imposer une fonction \mathbf{u}_∞ en entrée et une sortie libre $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}$.

L'application d'une force sur l'entrée ou la sortie sera représentée par

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_e. \quad (20)$$

ou

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_s. \quad (21)$$

Cette condition sera étudiée dans la partie 5.2.

On complète toutes ces conditions aux limites avec des conditions initiales (c'est à dire au temps $t = 0$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, \cdot) &= \mathbf{u}_0, & \text{avec } u_0 \text{ respectant (2), (16) et (19),} \\ \mathbf{V}^j(0) &= \mathbf{V}_0^j, \quad \omega^j(0) = \omega_0^j, \quad \mathbf{G}^j(0) = \mathbf{G}_0^j. \end{aligned} \quad (22)$$

2.5 Adimensionnement du modèle mathématique

Les inconnues du problème mathématique sont la vitesse du fluide $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$, la pression du fluide $p(t, \mathbf{x})$ et pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, la vitesse du centre de gravité de la particule $\mathbf{V}^j(t)$ et sa vitesse angulaire $\omega^j(t)$. On rappelle le système dont elles sont solutions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_f (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\rho_f g \mathbf{e}_2, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mu_f \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathcal{I} \mathbf{d}, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2), & \text{pour tout } t > 0, \text{ pour tout } x_2 \in [-h, h], \\ \mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j, & \text{sur } S^j(t), j \in \{1, \dots, N\}, \\ m^j \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} = - \int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j - m^j g \mathbf{e}_2, & \text{sur } B^j(t), \text{ pour } t > 0 \text{ et } j \in \{1, \dots, N\}, \\ \frac{m^j R^{j2}}{2} \frac{d\omega^j}{dt} = - \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, & \text{sur } B^j(t), \text{ pour } t > 0 \text{ et } j \in \{1, \dots, N\}, \\ \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, & \text{sur } \Omega(0), \\ \mathbf{V}^j(0) = \mathbf{V}_0^j, \quad \omega^j(0) = \omega_0^j, \quad \mathbf{G}^j(0) = \mathbf{G}_0^j, \quad j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (23)$$

L'objectif est de rendre sans dimension les inconnues du modèle en utilisant des variables caractérisant le problème étudié et de mettre en avant des nombres sans dimension, caractéristiques des phénomènes mis en jeu. Pour chaque grandeur X , on notera \tilde{X} la quantité adimensionnée correspondante. Pour adimensionner les variables métriques, on utilise comme grandeur caractéristique la demi-largeur h du tube T . On obtient alors

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{h}, \quad \tilde{\mathbf{G}}^j = \frac{\mathbf{G}^j}{h}. \quad (24)$$

Pour adimensionner les variables homogènes à une vitesse, on utilise le débit du fluide en entrée

$$Q = \int_{-h}^{+h} u_\infty(x_2) dx_2, \quad (25)$$

et on choisit la vitesse moyenne $\frac{Q}{2h}$ comme vitesse caractéristique de l'écoulement

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{2h}{Q} \mathbf{u}, \quad \tilde{\mathbf{V}}^j = \frac{2h}{Q} \mathbf{V}^j. \quad (26)$$

L'adimensionnement du temps découle des deux variables caractéristiques précédentes :

$$\tilde{t} = \frac{Q}{2h^2} t. \quad (27)$$

La vitesse angulaire est homogène à l'inverse du temps, on pose donc :

$$\tilde{\omega}^j = \frac{2h^2}{Q} \omega^j. \quad (28)$$

L'adimensionnement de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et la pression p découle de (7), et on pose :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{2h^2}{\mu_f Q} \boldsymbol{\sigma}, \quad \tilde{p} = \frac{2h^2}{\mu_f Q} p. \quad (29)$$

Les nombres sans dimension, caractéristiques à notre problème seront les suivants :

- Le nombre de Reynolds représentant le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses

$$Re = \frac{\rho_f \frac{Q^2}{4h^3}}{\mu_f \frac{Q}{2h^3}} = \frac{\rho_f Q}{2\mu_f}. \quad (30)$$

Ce nombre sans dimension indique le caractère turbulent de l'écoulement, si $Re \ll 1$ on caractérise l'écoulement comme laminaire. Dans le cas $Re \gg 1$, on parle d'écoulement turbulent. Le cas $Re = 0$ correspond au cas où nous négligeons le terme de non-linéarité $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ de l'équation de Navier-Stokes que nous appelons dans ce cas l'équation de Stokes. On prend comme valeur de densité de l'air $\rho_f = 1 \text{ kg/m}^3$ et viscosité $\mu_f = 2.10^{-5} \text{ Pa.s}$. Le débit de l'écoulement est $Q = 4.10^{-1} \text{ m}^3/\text{s}$. Dans le cas d'une graine de colza transportée par de l'air dans la machine de semis avec les caractéristiques données en introduction, on obtient $Re = 10000$. Dans la suite, on travaillera à Reynolds petit pour des raisons de simplifications mathématiques. Cela est une hypothèse simplificatrice supplémentaire nous éloignant du cadre applicatif de départ.

- Le nombre de Froude met en évidence le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$Fr = \frac{\rho_f \frac{Q^2}{4h^3}}{\rho_f g} = \frac{Q^2}{4gh^3}. \quad (31)$$

Lorsque $Fr > 1$, on dit que le régime est torrentiel. L'impact de l'énergie cinétique du fluide en aval est supérieur à celui de l'énergie potentielle lorsque $Fr < 1$, le régime est caractérisé comme fluvial. Dans le cas exposé précédemment, le nombre de Froude est égal à $Fr = 1185$.

- Les rapports des densités entre le milieu solide et fluide

$$\alpha^j = \frac{\rho_f}{\rho_p^j}. \quad (32)$$

Le fluide étant représenté par de l'air et transportant une graine de colza, le rapport de densité est de l'ordre de $\alpha^j = 10^{-3}$. Ce faible rapport peut induire des difficultés numériques. Nous étudierons parfois des configurations moins raides.

- Le carré du rapport de taille entre le rayon du tube et le rayon d'une particule.

$$\delta^j = \left(\frac{R^j}{h} \right)^2. \quad (33)$$

Dans les configurations étudiées lors de cette thèse, ce nombre est égal à $\delta^j = 4, 3.10^{-3}$.

Remarque 1 *L'adimensionnement des variables est effectué dans la configuration bidimensionnelle. Les valeurs numériques des grandeurs caractéristiques du problème physique sont, elles, tridimensionnelles, nous avons donc calculé les nombres sans dimension à l'aide de ces valeurs. Adimensionner dans la configuration tridimensionnelle est similaire à la démarche bidimensionnelle qui est effectuée.*

La faible valeur de ce nombre sera une difficulté, en particulier numériquement, lorsqu'on souhaitera faire le maillage du domaine.

La géométrie adimensionnée est la suivante

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^j &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 / (\tilde{x}_1 - \tilde{G}_1^j)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{G}_2^j)^2 < \delta^j\}, \\
\tilde{S}^j &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 / (\tilde{x}_1 - \tilde{G}_1^j)^2 + (\tilde{x}_2 - \tilde{G}_2^j)^2 = \delta^j\}, \\
\tilde{B} &= \bigcup_{j=1}^N \tilde{B}^j, \\
\tilde{T} &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 / -1 < \tilde{x}_2 < 1\}, \\
\tilde{\Gamma} &= \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2 / \tilde{x}_2 \in \{-1; 1\}\}, \\
\tilde{\Omega} &= \tilde{T} \setminus \tilde{B}, \\
\tilde{\mathbb{D}} &= \{(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}), \tilde{t} > 0, \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{\Omega}(\tilde{t})\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Le modèle (23) sans dimension s'exprime de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} \tilde{div}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = -\frac{1}{2Fr} \mathbf{e}_2, & \text{sur } \tilde{\mathbb{D}}, \\
 \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{u}}) - \tilde{p}\mathcal{I}\mathbf{d}, & \text{sur } \tilde{\mathbb{D}}, \\
 \tilde{div}(\tilde{\mathbf{u}}) = 0, & \text{sur } \tilde{\mathbb{D}}, \\
 \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, & \text{sur } \tilde{\Gamma}, \\
 \lim_{|\tilde{x}_1| \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{\mathbf{u}}_\infty(\tilde{x}_2), & \text{pour tout } \tilde{t} > 0, \tilde{x}_2 \in [-1, 1], \\
 \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{V}}^j + \tilde{\omega}^j \mathbf{e}_3 \wedge \tilde{\mathbf{r}}^j, & \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{S}^j(\tilde{t}), j \in \{1, \dots, N\}, \\
 \frac{d\tilde{\mathbf{V}}^j}{d\tilde{t}} = -\frac{\alpha^j}{\pi Re \delta^j} \int_{\tilde{S}^j} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^j - \frac{1}{Fr} \mathbf{e}_2, & \text{sur } \tilde{B}^j(\tilde{t}), \text{ pour } \tilde{t} > 0 \text{ et } j \in \{1, \dots, N\}, \\
 \frac{d\tilde{\omega}^j}{d\tilde{t}} = -\frac{2\alpha^j}{\pi Re \delta^{j^2}} \int_{\tilde{S}^j} (\tilde{\mathbf{r}}^j \wedge (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, & \text{sur } \tilde{B}^j(\tilde{t}), \text{ pour } \tilde{t} > 0 \text{ et } j \in \{1, \dots, N\}, \\
 \tilde{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \tilde{\mathbf{u}}_0, & \text{sur } \tilde{\Omega}(0), \\
 \tilde{\mathbf{V}}^j(0) = \tilde{\mathbf{V}}_0^j, \quad \tilde{\omega}^j = \tilde{\omega}_0^j, \quad \tilde{\mathbf{G}}^j = \tilde{\mathbf{G}}_0^j, & j \in \{1, \dots, N\}.
 \end{array} \right. \quad (35)$$

où on note l'application linéaire $\tilde{\nabla}$ l'adimensionné de ∇ par $\tilde{\nabla} = h\nabla$.

À partir d'ici, on travaille avec le système (35) en omettant les " \sim " par soucis de lisibilité. Le nombre de Froude étant plutôt grand ($Fr \gg 1$), on néglige les effets de la gravité par la suite. La résolution du problème, en prenant en compte les effets de la gravité, rajoute un terme constant aux équations, indépendant des inconnues.

3 Recherche de positions stables dans un écoulement avec N particules

L'objectif de la collaboration avec l'INRAE est d'étudier la perte de régularité et la variation de l'écartement entre les particules. Pour cela dans cette partie, nous recherchons dans le cas bidimensionnel si il existe des configurations où N particules se déplacent de façon stable avec une même vitesse uniquement dans le sens longitudinal du tube. Dans [13], une méthode similaire est appliquée au cas 2D pour une particule et dans [10], les résultats sont étendus en 3D.

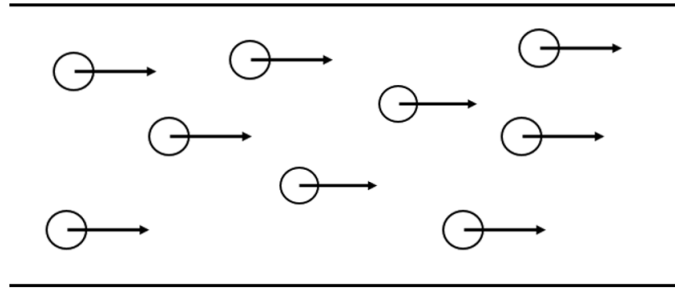


FIGURE 8 – Schématisation d'une configuration d'équilibre.

Remarque 2 *L'objectif souhaité dans le problème physique est la conservation de la distance entre les graines. Les particules peuvent avoir une vitesse de rotation différente lors de leur déplacement, cela n'aura pas d'impact dans la recherche de positions d'équilibre.*

Cette configuration qu'on appelle par la suite "configuration d'équilibre" correspond au cas physique où les graines se déplacent sans se rattraper et donc en conservant l'espacement introduit en sortie de la tête de distribution. Mathématiquement, on cherche une solution stationnaire de (35) pour laquelle la vitesse de toutes les particules s'exprime sous la forme

$$\mathbf{V}^j = W\mathbf{e}_1, \quad (36)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ où $W \in \mathbb{R}$.

Etant donné $W \in \mathbb{R}$ (a priori inconnu), on se place dans le référentiel en mouvement à la vitesse $(W, 0) = W\mathbf{e}_1$, on pose

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - W\mathbf{e}_1,$$

avec $\mathbf{X} = \mathbf{x} - W\mathbf{e}_1 t$.

La dérivée particulaire s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{Dt} &= \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \partial_t \mathbf{x} \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ &= \partial_t (\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + W\mathbf{e}_1) + \partial_t \mathbf{X} \partial_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \partial_{\mathbf{x}} (\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + W\mathbf{e}_1) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + W\mathbf{e}_1 - W\mathbf{e}_1) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \\ &= \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x} - W\mathbf{e}_1 t, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x} - W\mathbf{e}_1 t, t) \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x} - W\mathbf{e}_1 t, t) \end{aligned}$$

Dans le référentiel en mouvement à la vitesse $(W, 0) = W\mathbf{e}_1$, la configuration que nous recherchons est la solution stationnaire de

$$\left\{ \begin{array}{ll} Re(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - div(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0}, & \text{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{\Sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{v}) - p\mathbf{I}d, & \text{sur } \Omega, \\ div(\mathbf{v}) = 0, & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{v} = -W\mathbf{e}_1, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(x_1, x_2) = \mathbf{u}_{\infty}(x_2) - W\mathbf{e}_1, & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1], \\ \mathbf{v} = \mathbf{V}^j - W\mathbf{e}_1 + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j, & \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \int_{S^j} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j = \mathbf{0}, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, & j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (37)$$

et la condition sur la vitesse de la particule pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\mathbf{V}^j - W\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Remarque 3 Pour définir \mathbf{u}_{∞} , on utilisera une fonction de la forme

$$\mathbf{u}_{\infty}(x_2) = (C(1 - x_2^2), 0), \quad C \in \mathbb{R}.$$

On choisit une fonction de cette forme car (\mathbf{u}_P, p_P) où $\mathbf{u}_P(x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2)$ est solution d'un problème d'écoulement similaire sans particule appelé un écoulement de Poiseuille. Dans le cas d'un écoulement de débit Q , on obtient que $C = \frac{3}{4}Q$.

On choisit $W\mathbf{e}_1$ comme la moyenne des vitesses horizontales de chaque particule j où

$$W = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N V_1^j. \quad (39)$$

Dans un premier temps, on s'intéressera au problème (37) dans le cas linéaire avec $Re = 0$. Nous exprimerons les quatre premières équations de ce système comme combinaisons linéaires de systèmes que nous appellerons "problèmes élémentaires" qui seront eux-même définis suivant les degrés de liberté du problème. Nous rechercherons les combinaisons linéaires respectant les 2 dernières équations du problème (37) afin d'obtenir la solution $(\mathbf{v}_S, p_S, \mathbf{V}^j, \omega^j)$ dans le cas $Re = 0$. Nous déterminerons à partir de ces solutions le cas pour $Re > 0$ petit. Nous nous appuyerons sur le solver FreeFem++ afin de résoudre numériquement le problème et déterminer les configurations respectant (38).

3.1 Résolution d'un écoulement à N particules

Tout d'abord, nous posons les problèmes que nous qualifions "d'élémentaires" afin d'exprimer l'équation de Stokes ($Re = 0$) comme combinaison linéaire de ces problèmes et montrer l'existence de celle-ci. On recherche $(\mathbf{v}_S, p_S, \mathbf{V}_S^j, \omega_S^j)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \begin{array}{l} \mathit{div}(\boldsymbol{\Sigma}_S) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_S = 2\mathbf{D}(\mathbf{v}_S) - p_S\mathcal{I}d, \\ \mathit{div}(\mathbf{v}_S) = 0 \\ \mathbf{v}_S = -W\mathbf{e}_1 \end{array} & \begin{array}{l} \text{sur } \Omega, \\ \\ \text{sur } \Omega, \\ \text{sur } \Gamma, \end{array} \\ \begin{array}{l} \mathbf{v}_S = \mathbf{V}_S^j - W\mathbf{e}_1 + \omega_S^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{v}_S(x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) - W\mathbf{e}_1 \end{array} & \begin{array}{l} \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{array} \end{array} \quad (40)$$

Et vérifiant pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{cases} \int_{S^j} \boldsymbol{\Sigma}_S \cdot \mathbf{n}^j = \mathbf{0} & \text{sur } B^j, \\ \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3 = 0 & \text{sur } B^j. \end{cases} \quad (41)$$

3.1.1 Définition des problèmes élémentaires

On définit les problèmes élémentaires suivants :

- On pose $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty)$ solution du problème "élémentaire à l'infini",

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}^\infty = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}^\infty) - p^\infty \mathbf{I}d & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\infty = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{u}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\infty(x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (42)$$

- Et on pose $(\mathbf{u}^{ji}, p^{ji})$ solution du problème "élémentaire j, i " pour $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{ji} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}^{ji} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) - p^{ji} \mathbf{I}d & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{ji} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u}^{ji} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma \text{ et sur } S^k, k \neq j, \\ \mathbf{u}^{ji} = \boldsymbol{\alpha}^{ji} & \text{sur } S^j, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{ji}(x_1, x_2) = \mathbf{0} & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (43)$$

où pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$ on a $\boldsymbol{\alpha}^{j,1} = \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\alpha}^{j,2} = \mathbf{e}_2$ et $\boldsymbol{\alpha}^{j,3} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$.

Le système (40) étant linéaire, on peut alors en déduire que (\mathbf{v}_S, p_S) s'écrit

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{u}^\infty + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 V_{S,i}^j \mathbf{u}^{ji} - W \mathbf{e}_1, \quad p_S = p^\infty + \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 V_{S,i}^j p^{ji}. \quad (44)$$

Par simplification, on note $(\mathbf{V}_S^j, \omega_S^j) = (V_{S,1}^j, V_{S,2}^j, V_{S,3}^j)$.

Ainsi, si on connaît les vitesses des particules $V_{S,i}^j$, alors la détermination de la solution (\mathbf{v}_S, p_S) du problème (40), découle de la résolution des $3N + 1$ problèmes élémentaires ci-dessus. Il est important de noter que d'un point de vue numérique, il est relativement facile de résoudre les problèmes "élémentaires" car ils sont indépendants de la vitesse des particules.

3.1.2 Existence et unicité des solutions aux problèmes élémentaires

Dans cette partie, nous souhaitons montrer l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes élémentaires afin de montrer l'existence et l'unicité de (\mathbf{v}_S, p_S) .

On note les espaces suivants :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &= \{\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 < +\infty\}, \\ H^1(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega) / \int_{\Omega} |\nabla(\mathbf{u})|^2 < +\infty\}. \end{aligned} \tag{45}$$

On note aussi $L_{Loc}^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur tout compact de Ω , et $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ l'image de l'application trace définie dans [33].

On définit le produit contracté $\mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} \mathbf{D}(\mathbf{u})_{ij} \mathbf{D}(\mathbf{v})_{ij}$.

Définition 1 *On dit que $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty) \in H_0^1(\Omega) \times L_{Loc}^2(\Omega)$ est solution au sens faible de (42) si et seulement si pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$*

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^\infty) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p^\infty \operatorname{div}(\phi) - \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \mathbf{n} \cdot \phi = 0,$$

et $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\infty(x_1, x_2) = \mathbf{u}^\infty(x_2)$.

Proposition 1 *Étant donnée $\mathbf{u}_\infty = (C(1-x_2^2), 0)$, il existe un unique couple $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty) \in H^1(\Omega) \times L_{Loc}^2(\Omega)$ solution au sens faible de (42).*

Preuve :

Du système (42), on cherche $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{u}^\infty - \nabla p^\infty = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^\infty = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{u}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\infty(x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (46)$$

Posons $\mathbf{v}^\infty(x_1, x_2) = \mathbf{u}^\infty(x_1, x_2) - \mathbf{u}_\infty(x_2)$ de sorte que notre problème revient à rechercher $(\mathbf{v}^\infty, p^\infty) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ solution de,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{v}^\infty - \nabla p^\infty = -\partial_{x_2}^2 \mathbf{u}_\infty & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^\infty = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{v}^\infty = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{v}^\infty(x_1, x_2) = -\mathbf{u}_\infty(x_2) & \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{v}^\infty(x_1, x_2) = \mathbf{0} & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (47)$$

L'existence et l'unicité de $(\mathbf{v}^\infty, p^\infty) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ sont données par la proposition 2.3 de [33] car $\mathbf{u}_\infty \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Par construction, on trouve alors l'existence et l'unicité de $(\mathbf{u}^\infty, p^\infty) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ solution au sens faible de (42).

La proposition suivante découle de l'utilisation des mêmes arguments que la proposition précédente :

Proposition 2 *Il existe un unique couple $(\mathbf{u}^{ji}, p^{ji}) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ solution au sens faible de (43) pour tout $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$.*

3.1.3 Recherche des vitesses des particules dans le cas $Re = 0$

De la partie précédente, étant données les vitesses $(\mathbf{V}_{S,i}^j, \omega_S^j)$, il existe une solution (\mathbf{v}_S, p_S) au problème (40). L'unicité de cette solution vient du fait que les problèmes élémentaires ont été construits de façon à être indépendants (suivant les degrés de liberté). Ainsi découle l'unicité de la solution

(\mathbf{v}_S, p_S) . Dans cette partie, on souhaite déterminer les vitesses $(\mathbf{V}_{S,i}^j, \omega^j)$ afin que $(\mathbf{v}_S, p_S, \overline{\mathbf{V}_{S,i}^j}, \overline{\omega^j})$ vérifie aussi (41).

Proposition 3 *Dans un écoulement de Stokes dont le domaine est borné dans une direction, N particules immergées se déplacent dans l'écoulement à une vitesse \mathbf{V} solution du système linéaire*

$$\mathcal{A}\mathbf{V} = \mathcal{B}.$$

La matrice \mathcal{A} et le terme \mathcal{B} ne dépendent que de la position des particules et de l'écoulement imposé à l'infini.

Preuve de la proposition :

Considérons la solution (\mathbf{v}_S, p_S) du système (40) associée à des vitesses (\mathbf{V}_S^j) de N particules (voir la partie précédente). Par différence des systèmes (40) et (42), $\mathbf{w} = \mathbf{v}_S - \mathbf{u}^\infty + W\mathbf{e}_1$ et $q = p_S - p^\infty$ satisfont

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{T} = 2\mathbf{D}(\mathbf{w}) - q\mathcal{I}\mathbf{d} & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 V_{S,i}^j \boldsymbol{\alpha}^{ji} & \text{sur } S^j, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{w}(x_1, x_2) = \mathbf{0} & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{array} \right. \quad (48)$$

Étape 1 - Pour $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$, on fait le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de la première équation de (48) par \mathbf{u}^{ji} . En utilisant une intégration par parties, et le fait que \mathbf{T} soit symétrique, on en déduit

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^{ji}) \cdot \mathbf{n}.$$

Puisque $\mathbf{T} = 2\mathbf{D}(\mathbf{w}) - q\mathcal{I}\mathbf{d}$ et que \mathbf{u}^{ji} est à divergence nulle, on peut réécrire le terme de gauche de l'égalité précédente, pour obtenir

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{w}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^{ji}) \cdot \mathbf{n}.$$

En utilisant les conditions aux bords sur la vitesse \mathbf{u}^{ji} , nulle sur tous les bords, excepté S^j (voir le système (43)), le second membre permet d'écrire

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{w}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) = \int_{S^j} (\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j.$$

En utilisant $\mathbf{T} = \boldsymbol{\Sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}^\infty$, on réécrit cette équation sous la forme suivante

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{w}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) = \int_{S^j} (\boldsymbol{\Sigma}_S \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j - \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j. \quad (49)$$

Étape 2 - De la même manière, pour $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$, on effectue le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de la première équation de (43) par \mathbf{w} . En utilisant une intégration par parties, le fait que $\boldsymbol{\sigma}^{ji}$ soit symétrique, et que \mathbf{w} soit à divergence nulle, nous donne

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{w}) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}.$$

En utilisant les conditions aux bords sur \mathbf{w} (voir le système (48)), on en déduit

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{w}) = \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^3 V_{S,k}^\ell \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^j. \quad (50)$$

Étape 3 - Les équations (49) et (50) impliquent que $(\mathbf{v}_S, p_S, (V_{S,i}^j)_{i,j})$ vérifie le système (40) si et seulement si pour tout $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$, on a

$$\sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^3 V_{S,k}^\ell \int_{S^\ell} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^\ell = \int_{S^j} (\boldsymbol{\Sigma}_S \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j - \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j.$$

Remarquons que, par définition des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^{ji}$, nous avons l'équivalence suivante

$$(41) \quad \iff \quad \forall (j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\} \quad \int_{S^j} (\boldsymbol{\Sigma}_S \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j = 0.$$

On obtient que si $(\mathbf{v}_S, p_S, (V_{S,i}^j)_{i,j})$ vérifie les systèmes (40) et (41) alors il est équivalent à

$$\forall (j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\} \quad \sum_{\ell=1}^N \sum_{k=1}^3 V_{S,k}^\ell \int_{S^\ell} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^\ell = - \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j.$$

Ces $3N$ relations forment un système linéaire dont les inconnues sont les vitesses $V_{S,k}^\ell$. Il est donc possible de l'écrire sous forme matricielle

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{B}, \quad (51)$$

en posant, pour $(I, J) \in \{1, \dots, 3N\}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_I &= V_{S,k}^\ell && \text{avec } I = 3(\ell - 1) + k, \\ & && k \in \{1, 2, 3\}, \quad \ell \in \{1, \dots, N\}, \\ \mathcal{B}_J &= - \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^\infty \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j && \text{avec } J = 3(j - 1) + i, \\ & && i \in \{1, 2, 3\}, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \\ \mathcal{A}_{JI} &= \int_{S^\ell} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^\ell. \end{aligned} \quad (52)$$

On remarque qu'on obtient k et ℓ à partir de I en effectuant la division euclidienne de $I - 1$ par 3 : $\ell - 1$ est le quotient, et $k - 1$ est le reste (de même, on obtient j et i à partir de J). On définit la bijection suivante

$$\begin{aligned} \Psi : \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\} &\longrightarrow \{1, \dots, 3N\}, \\ (j, i) &\longmapsto I = 3(j - 1) + i, \end{aligned}$$

dont la réciproque, notée Φ , est obtenue par quotient et reste de la division euclidienne par 3 .

La proposition est ainsi démontrée : tous les coefficients de \mathcal{A} et de \mathcal{B} ne dépendent que des solutions des problèmes élémentaires, qui peuvent être obtenues uniquement à partir de la position des particules (c'est-à-dire le domaine Ω d'écoulement du fluide), et de la vitesse imposée \mathbf{u}_∞ .

3.1.4 Existence et unicité de la solution dans un écoulement de Stokes ($Re = 0$)

Proposition 4 *Le système $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{B}$, introduit dans la proposition précédente, admet une unique solution.*

Nous allons montrer le lemme suivant qui implique en particulier que \mathcal{A} est inversible.

Lemme 1 *La matrice \mathcal{A} est symétrique définie positive.*

Preuve du lemme 1 :

Nous allons montrer que

$$\forall \mathcal{L} \in \mathbb{R}^{3N} \setminus \{0\} \quad \mathcal{L}^T \mathcal{A} \mathcal{L} > 0.$$

Soient (j, i) et (ℓ, k) deux couples de $\{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$. On note \mathbf{u}^{ji} et $\mathbf{u}^{\ell k}$ les champs de vitesses, solutions des problèmes (43) associés à ces couples. En effectuant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ de la première équation de (43) satisfaite par \mathbf{u}^{ji} par $\mathbf{u}^{\ell k}$, en utilisant une intégration par parties, puis sachant que $\boldsymbol{\sigma}^{ji}$ est symétrique, et $\mathbf{u}^{\ell k}$ est à divergence nulle, on obtient

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\ell k}) = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \mathbf{u}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}.$$

En utilisant les conditions aux bords sur $\mathbf{u}^{\ell k}$ (voir le système (43) pour $\mathbf{u}^{\ell k}$), on en déduit

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\ell k}) = \int_{S^\ell} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^\ell.$$

Ceci permet d'écrire que, pour tout $(I, J) \in \{1, \dots, 3N\}^2$:

$$\mathcal{A}_{JI} = 2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\Phi(J)}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\Phi(I)}). \quad (53)$$

- La symétrie de la relation (53) vis-à-vis des couples (j, i) et (ℓ, k) implique que $\mathcal{A}_{JI} = \mathcal{A}_{IJ}$: la matrice \mathcal{A} est symétrique.

- Pour montrer que la matrice \mathcal{A} est positive, on considère $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{3N}$. On introduit la combinaison suivante

$$\boldsymbol{\zeta} = \sum_{J=1}^{3N} \mathcal{L}_J \mathbf{u}^{\Phi(J)} = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 \mathcal{L}_{\Psi(j,i)} \mathbf{u}^{ji},$$

de sorte que

$$\int_{\Omega} \mathbf{D}(\boldsymbol{\zeta}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{J=1}^{3N} \sum_{I=1}^{3N} \mathcal{L}_I \mathcal{L}_J \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\Phi(I)}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{\Phi(J)}).$$

En utilisant la caractérisation (53) des coefficients de la matrice \mathcal{A} , on en déduit que

$$2 \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\zeta})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathcal{L}^T \mathcal{A} \mathcal{L}. \quad (54)$$

où $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ est le produit scalaire classique sur $L^2(\Omega)$. La positivité de la matrice \mathcal{A} en découle.

• Montrons maintenant que la matrice \mathcal{A} est définie. On suppose que $\mathcal{L}^T \mathcal{A} \mathcal{L} = 0$, ce qui est équivalent d'après l'égalité (54) à $\mathbf{D}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Puisque $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ sur le bord Γ (car toutes les vitesses \mathbf{u}^{ji} sont nulles sur ce bord, voir le système (43)) ceci implique que $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ dans Ω . De plus, si on évalue la valeur de $\boldsymbol{\zeta}$ sur le bord d'une particule S^j , $j \in \{1, \dots, N\}$, on en déduit

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\zeta}|_{S^j} = \sum_{i=1}^3 \mathcal{L}_{\Psi(j,i)} \boldsymbol{\alpha}^{ji}.$$

Rappelons que $\boldsymbol{\alpha}^{j1} = \mathbf{e}_1$, $\boldsymbol{\alpha}^{j2} = \mathbf{e}_2$ sont constants en temps et en espace contrairement à $\boldsymbol{\alpha}^{j3} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$ qui est variable en espace. Ainsi, en évaluant l'égalité précédente en plusieurs points de S^j (par exemple en des points où \mathbf{r}^j est proportionnel à \mathbf{e}_1 ou à \mathbf{e}_2), on en déduit que

$$\mathcal{L}_{\Psi(j,1)} = \mathcal{L}_{\Psi(j,2)} = \mathcal{L}_{\Psi(j,3)} = 0.$$

Finalement, $\mathcal{L}_{\Psi(j,i)} = 0$ pour tout $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire $\mathcal{L} = \mathbf{0}$.

En conclusion des deux sections précédentes, nous avons montré que quel que soit la configuration des N particules dans le tube, il existe une unique famille de vitesses des N particules $(V_{S,i}^j)_{j,i}$ telle que le couple vitesse-pression de fluide (\mathbf{v}_S, p_S) associé permette de satisfaire à la fois (40) et (41). Nous avons donc prouvé l'existence et l'unicité d'une solution $(\mathbf{v}_S, p_S, (V_{S,i}^j)_{i,j})$ au système (40)–(41). De plus, cette solution peut se décomposer en une somme de $3N + 1$ solutions à des problèmes élémentaires. Or à ce stade, la résolution du problème n'est pas physique puisqu'on résout un problème stationnaire mais les particules admettent une vitesse non nulle dans le sens radial du tube. L'objet d'une partie suivante est d'utiliser cette information pour calculer numériquement des solutions afin de déterminer les configurations dans lesquelles les vitesses des particules sont nulles.

3.1.5 Recherche de la solution dans le cas de Re petit

On s'intéresse maintenant au cas où le nombre de Reynolds Re est non nul mais petit. On reprend le système (37) : $(\mathbf{v}, p, \mathbf{V}^j, \omega^j)$ solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}) = Re(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}, & \text{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{\Sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{v}) - p\mathcal{I}\mathbf{d}, & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{v} = -W\mathbf{e}_1, & x_2 \in \Gamma, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{v}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) - W\mathbf{e}_1, & x_2 \in [-1, 1], \\ \mathbf{v} = \mathbf{V}^j - W\mathbf{e}_1 + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j, & \text{sur } S^j, \forall j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (55)$$

et vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{cases} \int_{S^j} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j = 0, & \text{sur } B^j, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, & \text{sur } B^j, j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (56)$$

D'après [13], il existe $Re_0 > 0$ tel que pour tout $Re < Re_0$, nous pouvons écrire les séries convergentes suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=0}^{\infty} Re^i \mathbf{v}^{[i]}, & p &= \sum_{i=0}^{\infty} Re^i p^{[i]}, \\ \forall (j, k) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}, & \mathbf{V}_k^j &= \sum_{i=0}^{\infty} Re^i \mathbf{V}_k^{j[i]}. \end{aligned} \quad (57)$$

Cette décomposition permet de linéariser (55) - (56) par rapport au nombre de Reynolds. Par linéarité des opérateurs ∇ et \mathbf{D} , on peut écrire

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=0}^{\infty} Re^i \boldsymbol{\Sigma}^{[i]}$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}^{[i]} = 2\mathbf{D}(\mathbf{v}^{[i]}) - p^{[i]}\mathcal{I}\mathbf{d}$.

On remarque que $\mathbf{v}^{[0]}, p^{[0]}, V_k^{j[0]}, \boldsymbol{\Sigma}^{[0]}$ sont respectivement égales à $\mathbf{v}_S, p_S, V_{S,k}^j, \boldsymbol{\Sigma}_S$.

Proposition 5 *Pour Re petit, dans un écoulement de Navier-Stokes dont le domaine est borné dans une direction, les vitesses au premier ordre de N particules immergées s'obtiennent comme la solution $\mathcal{V}^{[1]}$ d'un système linéaire*

$$\mathcal{A}\mathcal{V}^{(1)} = \mathcal{C}.$$

La matrice \mathcal{A} est la matrice du système à l'ordre 0 et le terme source \mathcal{C} dépend de l'écoulement à l'ordre 0.

Preuve :

Étape 1 - En identifiant le problème à l'ordre 1, $(\mathbf{v}_S, p_S, V_{S_k}^j)$ solution de (40) et (41), on cherche $(\mathbf{v}^{[1]}, p^{[1]}, V_k^{j[1]})$ solution de :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \Sigma^{[1]} = (\mathbf{v}_S \cdot \nabla) \mathbf{v}_S & \text{sur } \Omega, \\ \Sigma^{[1]} = 2\mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) - p^{[1]} \mathcal{I}d & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^{[1]} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{v}^{[1]} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma, \\ \mathbf{v}^{[1]} = \mathbf{V}^{j[1]} - W\mathbf{e}_1 + \omega^{j[1]} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j & \text{sur } S^j, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{v}^{[1]}(x_1, x_2) = \mathbf{0} & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1]. \end{array} \right. \quad (58)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{S^j} \Sigma^{[1]} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \\ \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\Sigma^{[1]} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3 = 0. \end{array} \right. \quad (59)$$

Étape 2 - On effectue le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de la première équation de (58) par $\phi \in H^1(\Omega)$. En utilisant une intégration par parties,

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) : \mathbf{D}(\phi) + \int_{\partial\Omega} (\Sigma^{[1]} \cdot \phi) \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \phi. \quad (60)$$

On effectue aussi le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de la première équation de (43) par $\psi \in H^1(\Omega)$. En utilisant une intégration par parties,

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\psi) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \psi) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (61)$$

- En choisissant $\phi = \mathbf{u}^{ji}$ pour $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$ dans (60),

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) + \int_{\partial\Omega} (\Sigma^{[1]} \cdot \mathbf{u}^{ji}) \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{u}^{ji}. \quad (62)$$

D'après (43), \mathbf{u}^{ji} est nulle sur $\partial\Omega$ sauf sur S^j où $\mathbf{u}^{ji} = \boldsymbol{\alpha}^{ji}$ donc,

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) + \int_{S^{(j)}} (\Sigma^{[1]} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{u}^{ji}. \quad (63)$$

Remarquons que, par définition des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}^{ji}$, nous avons aussi l'équivalence

$$(56) \quad \iff \quad \forall (j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\} \quad \int_{S^j} (\boldsymbol{\Sigma}^{[1]} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ji}) \cdot \mathbf{n}^j = 0.$$

Ainsi (63) s'écrit

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{u}^{ji}. \quad (64)$$

• Pour tout $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$, en choisissant $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{v}^{[1]}$ dans (61),

$$-2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\Sigma}^{ji} \cdot \mathbf{v}^{[1]}) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (65)$$

D'après (58), $\mathbf{v}^{[1]}$ est nulle sur Γ , $\mathbf{v}^{[1]} = \sum_{i=1}^3 V_i^{j[1]} \boldsymbol{\alpha}^{ji}$ sur S^j où pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, on a $\boldsymbol{\alpha}^{j,1} = (1, 0)$, $\boldsymbol{\alpha}^{j,2} = (0, 1)$ et $\boldsymbol{\alpha}^{j,3} = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$.

$$2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{ji}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^{[1]}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 V_i^{j[1]} \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^j. \quad (66)$$

Alors avec (64) et (66), pour tout $(j, i) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, 2, 3\}$,

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^3 V_i^{j[1]} \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma}^{ji} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{\ell k}) \cdot \mathbf{n}^j = - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{u}^{ji}. \quad (67)$$

On a obtenu un système linéaire de la forme,

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\mathcal{V}}^{[1]} = \mathcal{C}, \quad (68)$$

en posant, pour $(I, J) \in \{1, \dots, 3N\}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_I^{[1]} &= V_k^{\ell[1]}, & \text{avec } I &= 3(\ell - 1) + k, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \\ \mathcal{C}_J &= - \int_{\Omega} (\mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) \cdot \mathbf{u}^{ji}, & \text{avec } J &= 3(j - 1) + i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

et \mathcal{A} la matrice du système (52).

Ainsi pour résoudre (55)-(56), il faut résoudre le système linéaire (68) avec $(\mathbf{v}_S, p_S, \mathbf{V}_S^j, \omega_j)$ la solution de (40) et les coefficients de la matrice du système (51).

À ce stade, on sait déterminer les V^j pour que (41) soit satisfait. Mais pour autant, ce ne sera pas la solution stationnaire recherchée puisqu'on souhaite qu'elle respecte aussi (38). On recherche numériquement une solution stationnaire.

3.2 Recherche numérique de positions d'équilibre

Dans cette section, nous recherchons les configurations où la vitesse des particules est à la fois horizontale et constante. Pour cela, nous allons proposer un algorithme numérique de résolution puis une étude de la géométrie choisie, afin d'effectuer la simulation sur FreeFem++. On étudie ensuite le problème pour $N = 1$ puis pour $N = 2$.

3.2.1 Introduction de la mise en place numérique

De la partie précédente, on peut déterminer de façon unique le champ de vitesses du fluide et la vitesse des particules tels que l'on ait (41) satisfait uniquement à partir de la position des N particules. L'objectif de cette partie est de résoudre numériquement le problème (55) - (56), par combinaison linéaire des $3N + 1$ problèmes "élémentaires", afin de mettre en évidence des configurations "particulières".

Les configurations particulières que nous recherchons sont celles pour lesquelles la distance des particules ne varie pas entre elles. On veut que la solution $(\mathbf{v}, p, \mathbf{V}^j, \omega^j)$ satisfasse la condition suivante : pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, il existe $W \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbf{V}^j = (W, 0). \quad (69)$$

3.2.2 Algorithme numérique

Pour résoudre numériquement (55) - (56), on utilise le solveur FreeFem++. À partir de la position $(\mathbf{G}^1, \dots, \mathbf{G}^N)$ des centres de gravité des particules données, toutes de même rayon $\delta = 0.004225$ (valeur pour le cas de la graine de colza), on génère un maillage dans un domaine rectangulaire fermé de longueur $[-L; L]$ et largeur $[-1; 1]$, en excluant l'intérieur des particules. Pour définir un écoulement à l'infini, on impose la fonction \mathbf{u}_∞ sur les bords droit et gauche du domaine. On impose au maillage un nombre N_L de mailles pour décrire les bords du domaine rectangulaire et un nombre N_R de mailles décrivant le bord des particules.

On résout les $3N$ problèmes élémentaires (43) et le problème à l'infini (42) (où $\mathbf{u}_\infty = (\frac{3Q(1-x_2^2)}{4}, 0)$ est une solution à un problème de Poiseuille), afin d'obtenir le champ des vitesses du fluide. On prendra $Q = 1$. Pour cela, nous utiliserons les éléments P2 pour les vitesses et P1 pour les pressions.

Pour résoudre numériquement le problème, nous cherchons les solutions dans des espaces discrets du problème, adapté au maillage M_H . Nous noterons les espaces

$$\mathbb{P}^k = \{v \in C^\infty(\Omega), \forall K \in M_H, v|_K \in P^k\}.$$

En se basant sur [9] et [15], pour respecter la condition inf-sup pour un problème mixte (condition de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi), nous devons prendre pour la vitesse et la pression des espaces discrets avec une différence d’ordre de 1. Ceci nous donne l’unicité de la pression à une constante près. On utilise les espaces P2 pour la vitesse et P1 pour la pression. Une autre possibilité est de choisir un espace P1 pour la pression et un espace P1-bulle pour la vitesse. Ces espaces sont du même ordre mais on enrichit l’espace de la vitesse par une fonction produit des coordonnées barycentriques du point dans la maille. Dans [2] et [18], les espaces sont définis ainsi que leur utilisation et couplage pour la résolution de problème de Stokes avec la méthode des éléments finis.

Des résolutions précédentes, on construit la matrice \mathbf{A} ainsi que le second membre \mathbf{B} de (51), en utilisant la norme $L^2(\Omega)$ sur les vitesses pour le calcul des coefficients. Nous préférons intégrer sur une surface plutôt que sur une courbe pour limiter les erreurs numériques. On résout le système linéaire (51) permettant d’obtenir les vitesses des particules $V_{S_i}^j$ à l’ordre 0 c’est-à-dire pour un problème de Stokes.

On résout ensuite le problème au premier ordre (58) pour construire le second membre \mathbf{C} puis on résout le second système linéaire (68). On obtient les vitesses des particules V_i^j à l’ordre 1.

3.2.3 Choix des paramètres du maillage

Le but de ce qui suit est de déterminer la géométrie à mailler ainsi que le nombre de mailles à utiliser, afin de représenter le problème sur FreeFem++ et ainsi minimiser l’erreur de calcul numérique. Afin d’effectuer le calcul à l’aide du solveur FreeFem++, nous devons mailler une géométrie bornée représentant le tube T . La précision et le temps du calcul sont des paramètres dépendants de la finesse du maillage et de la taille de la géométrie. Dans cette partie, nous faisons un choix sur le couple longueur/nombre de mailles du domaine afin d’optimiser le couple erreur/temps de calcul. Nous interviendrons sur les paramètres suivants :

- L demi-longueur de la géométrie,
- N_L nombre de mailles le long des bords $\Gamma \times \{-L; L\}$,
- N_R nombre de mailles le long du bord des particules S^j .

On se place pour $N = 1$ dans une géométrie bornée de demi-longueur $L = 3$. Nous allons faire varier le nombre de triangles pour mailler le domaine à l'aide des paramètres N_L et N_R . Nous définissons l'erreur commise comme étant la suivante

$$err = \left(\frac{V_2 - V_{ref2}}{V_{ref2}} \right)^2,$$

où V_{ref2} est la vitesse verticale de la particule dans la simulation avec le plus grand nombre de triangles. Nous faisons le choix de calculer l'erreur en fonction de la variable V_2 puisque dans la suite, c'est la grandeur sur laquelle sera concentrée l'étude.

Dans un premier temps, on augmente le nombre de mailles par unité de longueur N_L , uniformément sur le domaine en se plaçant dans une configuration fixe.

Aussi, nous affichons les temps de calcul en fonction du nombre de triangles.

On souhaite obtenir un temps de calcul raisonnable puisque, par la suite, nous allons effectuer ce calcul pour un nombre important de configurations. On choisit $N_L = 20$, ce qui correspond à environ 10^4 triangles.

Autre point nous permettant d'améliorer l'erreur de calcul, est d'augmenter le nombre de mailles dans la zone de la particule. Dans cette zone, nous appliquons un nombre de mailles par unité de longueur N_R comme étant un rapport avec N_L ,

$$N_R = n * N_L.$$

Nous faisons varier ce coefficient dans une configuration fixe.

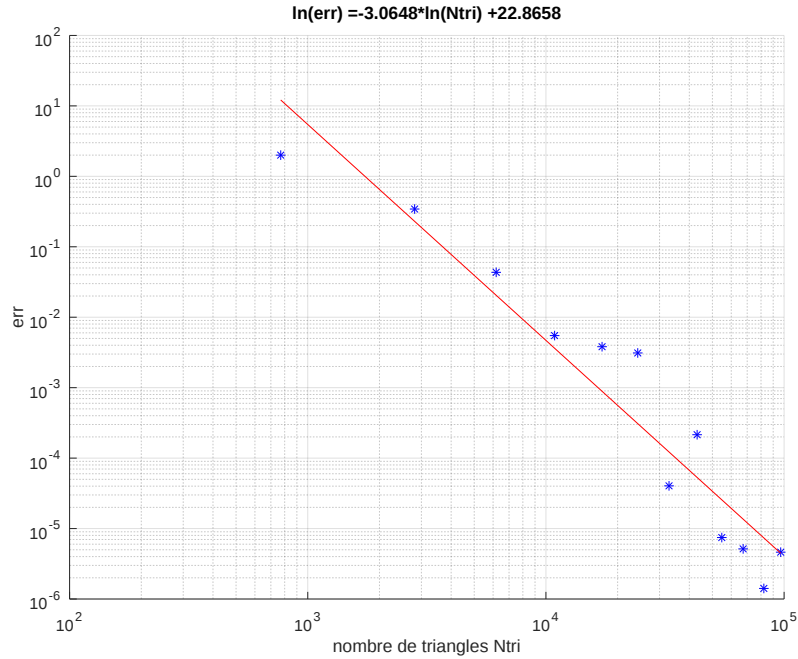


FIGURE 9 – Evolution de err en fonction du nombre de mailles. En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés.

On fait le choix de prendre $n = 4$ qui correspond à environ $1.1 * 10^4$ triangles afin de garder un temps de calcul assez faible avec une erreur err acceptable.

Dans le solver FreeFem++, nous devons travailler dans une géométrie bornée. On choisit ainsi de fermer la géométrie T par un rectangle de demi-longueur L . Sur ce rectangle, on imposera une vitesse \mathbf{u}_∞ au fluide sur les bords gauche et droit, représentant respectivement l'entrée et la sortie du tube. Une plus grande longueur du domaine impose un nombre de mailles plus grand ou des mailles plus étendues pour représenter toute l'aire du domaine. Ainsi, on va regarder l'impact de la demi-longueur L du rectangle sur l'erreur err et le temps de calcul en gardant les paramètres N_L et N_R sélectionnés précédemment.

On définit

$$err = \left(\frac{V_2 - V_{ref2}}{V_{ref2}} \right)^2,$$

où V_{ref2} correspond à la vitesse verticale de la particule dans la simulation

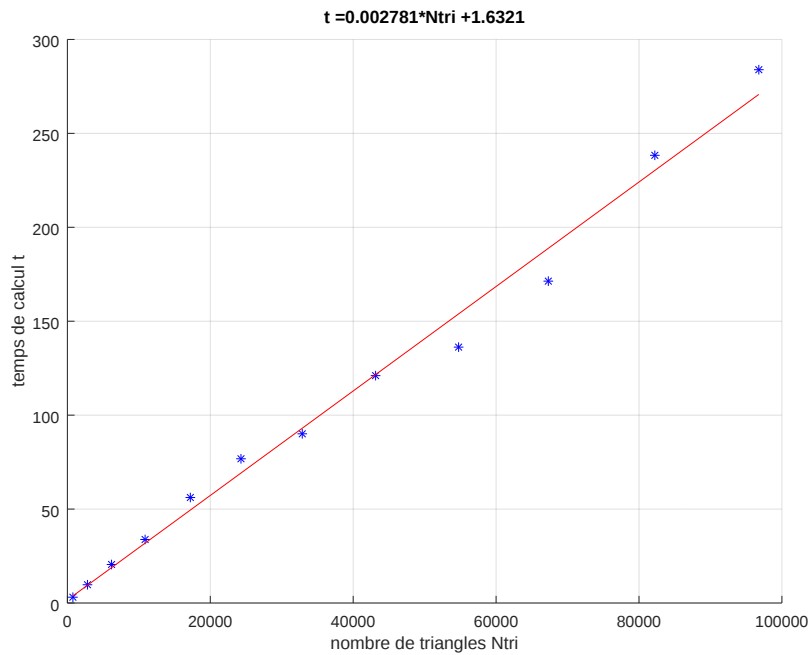


FIGURE 10 – Temps de calcul pour le nombre de triangles dans le maillage. En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés.

avec la géométrie la plus grande.

Pour étudier l'impact de la longueur du domaine sur le calcul, nous augmentons la taille de la géométrie maillée en conservant la taille des mailles. L'augmentation de la longueur provoque l'augmentation du nombre de mailles. L'erreur de calcul dépend à la fois de la longueur du domaine et aussi la taille des mailles, alors, à partir d'une certaine longueur du domaine, l'impact de l'erreur *err* provoquée par la taille du maillage est prépondérante. C'est pour cela que sur la figure 13 on observe qu'à partir d'une certaine longueur du domaine, l'erreur est indépendante de L .

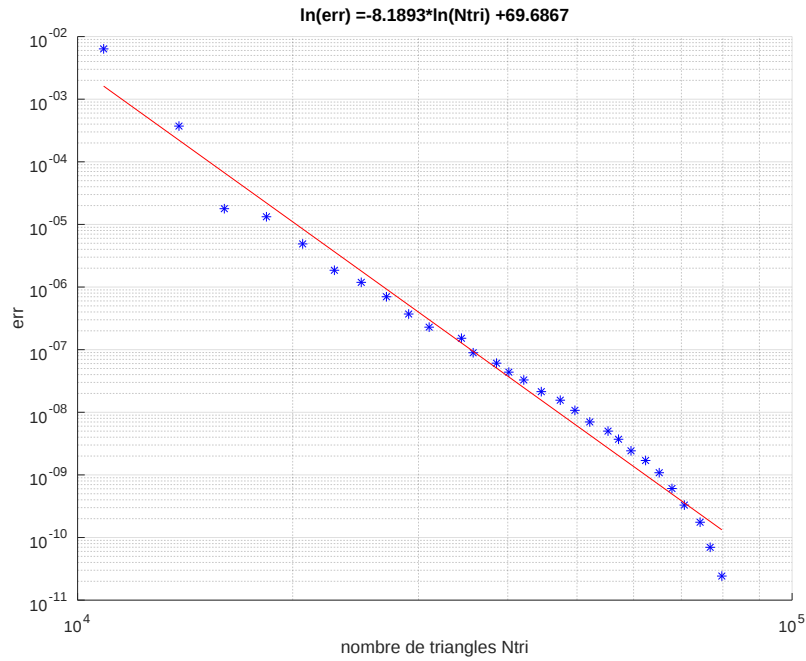


FIGURE 11 – Evolution de err en fonction du nombre de mailles dans le domaine pour $N_L = 20$. En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés.

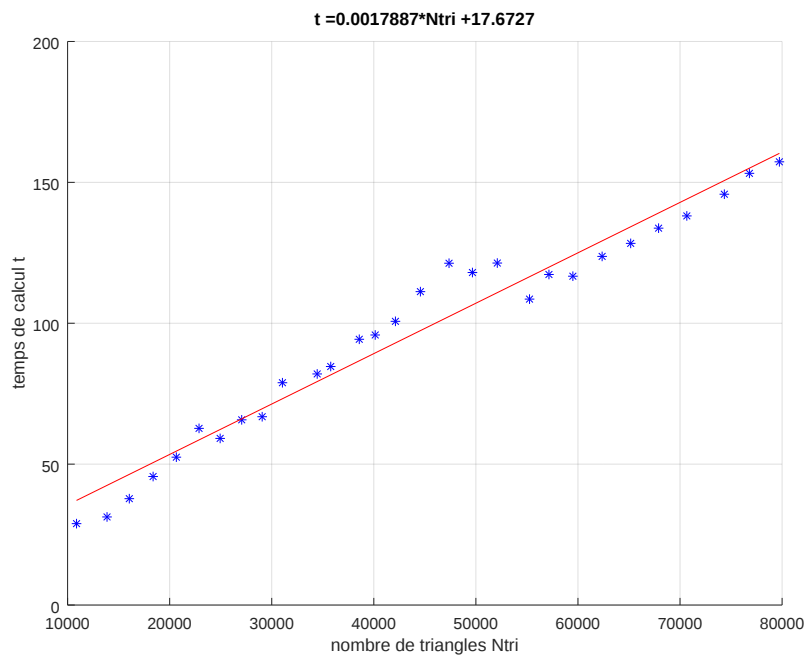


FIGURE 12 – Temps de calcul pour le nombre de mailles dans le domaine pour $N_L = 20$. En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés.

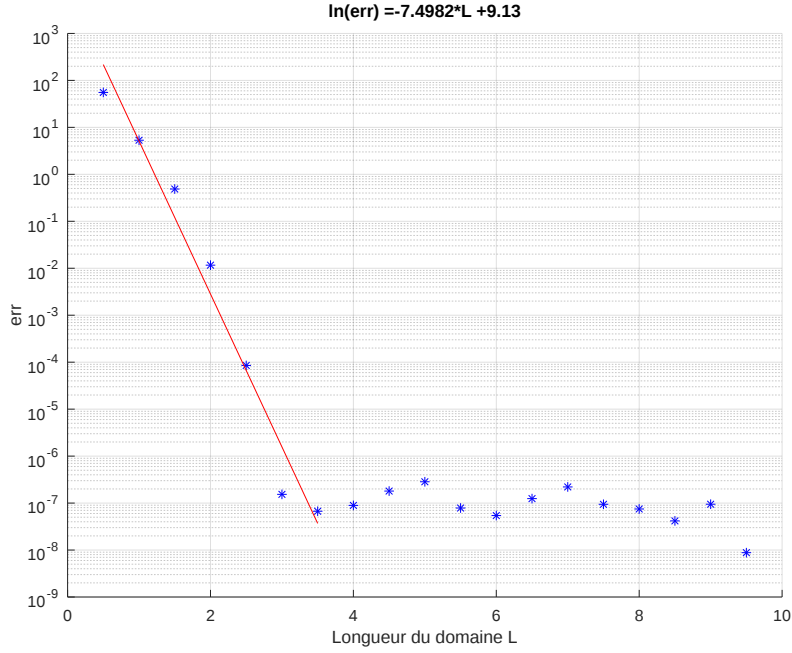


FIGURE 13 – Evolution de err en en fonction de la demi-longueur L du domaine. En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés pour les demi-longueurs L comprises entre 0.5 et 3.5.

Remarque 4 Dans [14], on a le résultat suivant :

pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)$, $p \in L^2_{loc}(\Omega)$ solution au sens faible de (37), si il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $|Q| < \frac{b}{Re}$ alors il existe c, d deux constantes réelles dépendantes de la géométrie telles que pour tout $(x_1, x_2) \in T$, $a \in \mathbb{R}$,

$$\|\mathbf{v}(x_1 > a, x_2, t)\|_2^2 + \|\nabla \mathbf{v}(x_1 > d, x_2, t)\|_2^2 < c \left(\|\mathbf{v}(x_1, x_2, t)\|_2^2 + \|\nabla \mathbf{v}(x_1, x_2, t)\|_2^2 \right) e^{-da}. \quad (70)$$

La remarque 4 appuie les résultats de la figure 13, à partir d'une certaine longueur du domaine, l'impact des particules sur le fluide est négligeable.

La figure 14 indique le nombre de mailles en fonction de la longueur du domaine. Les mailles étant de taille fixée pour cette étude, on explique alors la proportionnalité entre les deux grandeurs. Le temps de calcul étant directement lié au nombre de mailles du domaine, on peut en déduire que le temps de calcul est proportionnel à la longueur du domaine.

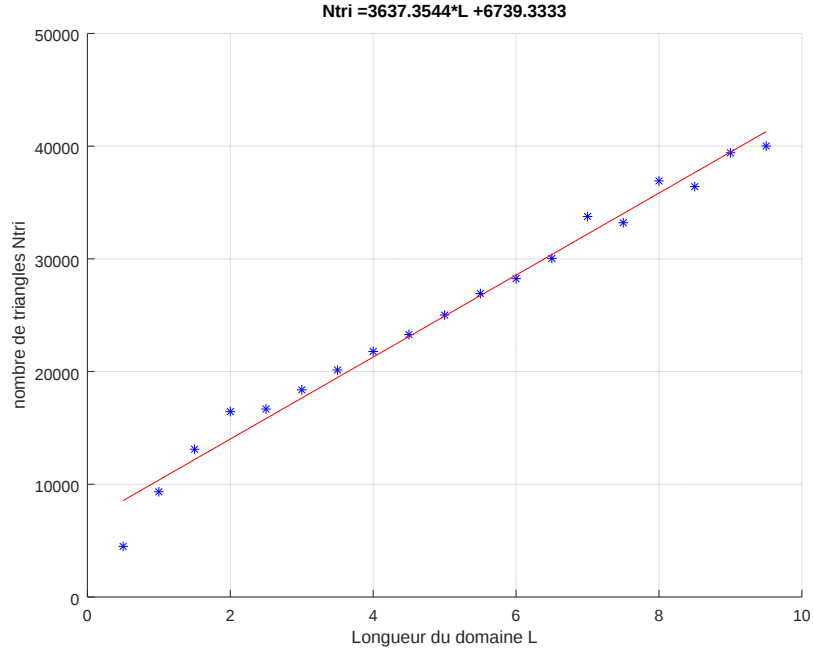


FIGURE 14 – Temps de calcul pour différentes demi-longueurs L du domaine En rouge, la régression linéaire utilisant la méthode des moindres carrés.

Nous faisons le choix de prendre un rectangle de demi-longueur $L = 3$ afin de représenter le tube T .

3.2.4 Simulation dans le cas $N = 1$

Pour le cas $N = 1$, il y a existence et unicité d'une solution et les positions d'équilibre sont calculées numériquement dans [13]. On souhaite retrouver ces résultats avec l'algorithme que nous avons mis en place.

À partir de la position des particules, on est capable de trouver $(\mathbf{v}_S, p_S, \mathbf{V}_S, \omega)$ solution de (40) - (41). On recherche les configurations dans lesquelles la solution vérifie la condition suivante :

$$\mathbf{V}_S = (W, 0), \quad (71)$$

où $W \in \mathbb{R}$. La recherche d'une vitesse de la forme $W\mathbf{e}_1$ est motivée par le fait que nous attendons un déplacement horizontal de la particule donc la vitesse doit être colinéaire à \mathbf{e}_1 . De plus, puisque nous avons une seule particule dans

notre écoulement, la valeur de la vitesse est la même que celle engendrée par l'écoulement.

La position de la particule est repérée uniquement par sa position verticale dans le tube, puisqu'il y a invariance de la position horizontale dans le tube $\mathbf{G} = x_2 \mathbf{e}_2$.

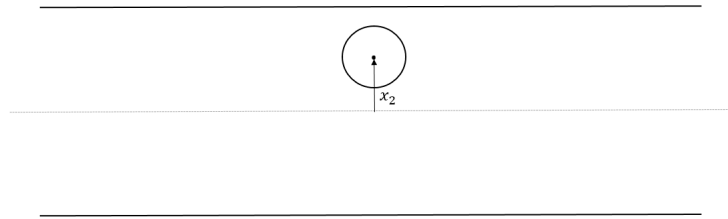


FIGURE 15 – Position de la particule.

D'après [13], dans le cas $Re = 0$, toutes les positions de la particule dans le tube sont des positions "d'équilibre" c'est-à-dire que, pour tout $x_2 \in]-1 + \delta, 1 - \delta[$, la solution $(\mathbf{v}_S, p_S, \mathbf{V}_S, \omega_S)$ vérifie $V_{S,2} = 0$: la vitesse de la bille dans un écoulement de Stokes est de la forme $\mathbf{V}_S = (W, 0)$, $W \in \mathbb{R}$, quelque soit sa position dans le tube. C'est ce qu'on retrouve dans notre simulation à la figure 16 où pour toutes valeurs de x_2 , $V_2(x_2) = 0$.

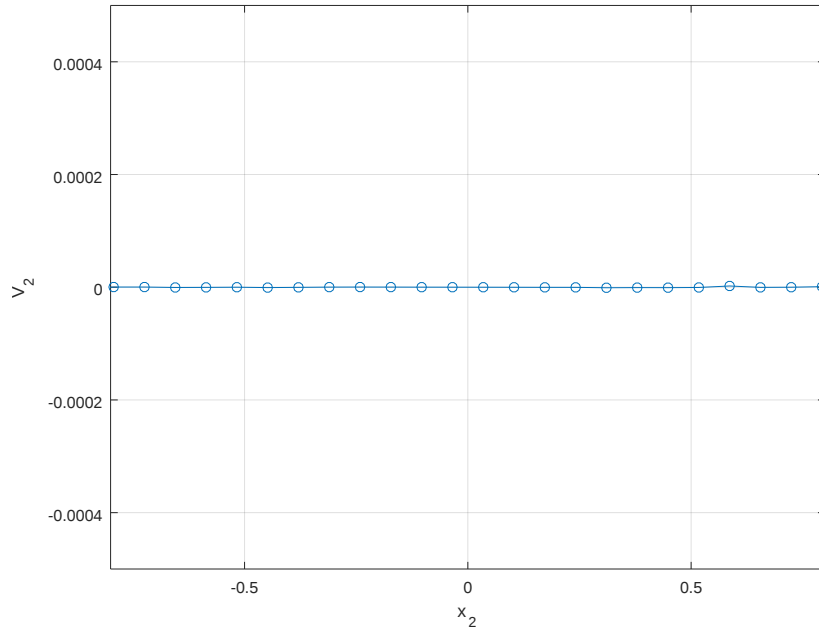


FIGURE 16 – Vitesse verticale de la particule à l'ordre 0.

Remarque 5 *Comme il est décrit dans [13], il existe un lien entre la position de la particule et la vitesse V_1 et ω .*

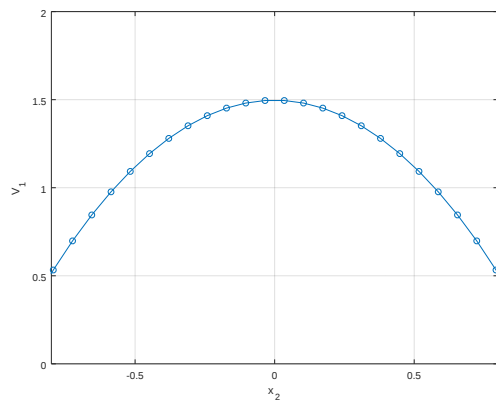


FIGURE 17 – Valeur de la vitesse horizontale V_1 de la particule en fonction de sa position x_2 .

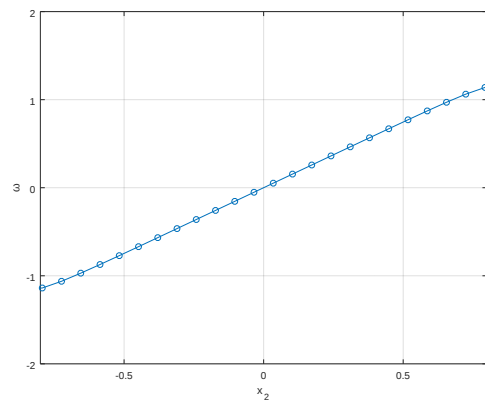


FIGURE 18 – Valeur de la vitesse angulaire ω suivant la position de la particule x_2 .

Le fait qu'on recherche une vitesse V_2 de la particule nulle, n'implique pas la nullité de ω . Ce résultat n'a pas d'impact pour les positions que nous recherchons du fait que les particules sont sphériques dans notre étude.

Pour le cas $Re > 0$, au premier ordre, on remarque qu'il existe trois positions "d'équilibre". Pour repérer ces positions, on trace en fonction de x_2 la vitesse V_2 calculée numériquement (ou la deuxième composante du vecteur \mathbf{C} qui est proportionnelle à V_2). Dans [13], $\mathcal{G}_2(h)$ correspond à ce qu'on appelle $C_2(x_2)$.

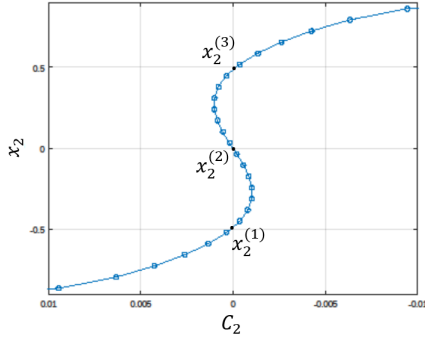


FIGURE 19 – Evolution du coefficient C_2 en fonction de la position de la particule.

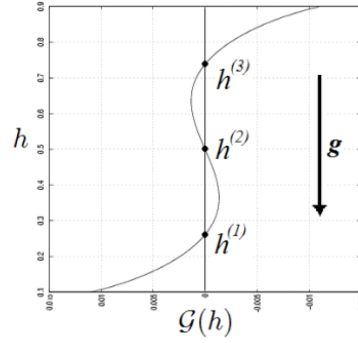


FIGURE 20 – Evolution de \mathcal{G} équivalent au coefficient C_2 en fonction de la position h de la particule. Extrait de [13].

Dans [13], la particule est le centre du repère et h représente la distance entre les bords repérés par $-h$ et $1-h$. Dans notre algorithme, les bords sont fixes et repérés par -1 et 1 et la particule se situe en x_2 . On utilise alors la relation suivante pour repérer de la même façon les positions des particules

$$h = \frac{x_2 + 1}{2}.$$

Pour repérer une position d'équilibre, on cherche pour quelles valeurs de x_2 (ou h), V_2 (ou C_2) s'annule. Dans [13], les positions d'équilibre sont pour

$$h^{(1)} \approx 0.26, \quad h^{(2)} \approx 0, \quad h^{(3)} \approx 0.74,$$

qui sont équivalentes à

$$x_2^{(1)} \approx -0.48, \quad x_2^{(2)} \approx 0, \quad x_2^{(3)} \approx 0.48,$$

De la simulation que nous avons effectuée, nous trouvons que \mathcal{C}_2 s'annule pour

$$x_2^{(1)} = -0.48 \pm 0.03, \quad x_2^{(2)} = 0 \pm 0.03, \quad x_2^{(3)} = 0.48 \pm 0.03.$$

L'incertitude qui est présente dans ces résultats est due à l'écart entre les deux simulations autour du point d'équilibre.

En prenant le graphe d'évolution de la vitesse V_2 de la particule en fonction de sa position dans le tube, on remarque que la vitesse V_2 est proportionnelle à \mathcal{C}_2 et de même signe.

Nous remarquons 3 points où la vitesse V_2 est nulle : $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}$. On appelle ces points les positions d'équilibre. Hors de ces positions, le calcul induit une vitesse verticale $V_2 \neq 0$. Ces résultats ne sont pas physiques puisque nous travaillons avec un système stationnaire et que cela implique un déplacement vertical dans le tube. Dans le cas d'un raisonnement non stationnaire ($\partial_t V \neq 0$), nous remarquons l'évolution de la vitesse suivante.

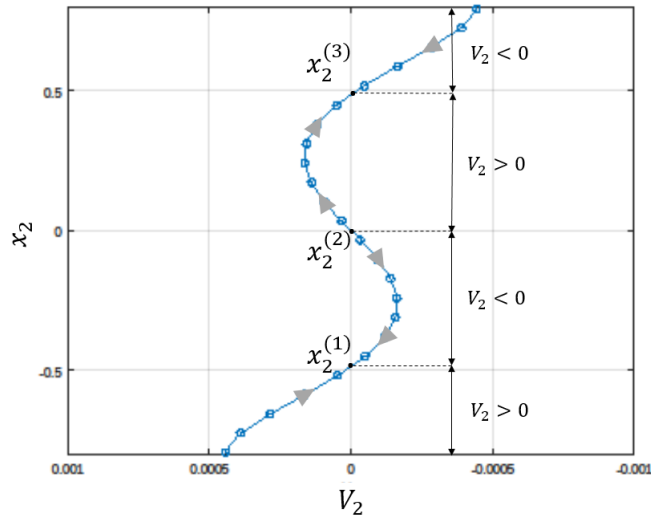


FIGURE 21 – Evolution de V_2 en fonction de la position de la particule.

Une position d'équilibre est une position dont la vitesse V_2 est nulle. Ceci correspond à une position x_2 dans le tube où la particule se déplace uniquement horizontalement. Ce sont les seules configurations physiquement acceptables dans une résolution du problème stationnaire. À l'aide de la

figure 21, nous pouvons caractériser la stabilité de ces positions à l'aide du sens (déterminé par son signe) de la vitesse V_2 de la particule. Si la vitesse V_2 des positions voisines d'une position d'équilibre tend à déplacer la particule vers cette position, on parle de positions stables comme c'est le cas pour les positions $x_2^{(1)}$ et $x_2^{(3)}$. Nous parlerons de position instable dans le cas contraire c'est à dire pour la position d'équilibre $x_2^{(2)}$.

3.2.5 Simulation dans le cas $N = 2$

Paramétrisation de la résolution numérique

L'objectif de la partie est d'observer ce qu'il se passe avec plusieurs particules dans l'écoulement. Pour les simulations, on regarde pour le cas $N = 2$ et on rappelle que les particules ne sont pas en contact ni entre elles ni avec les parois. La condition supplémentaire pour satisfaire l'équilibre est la suivante,

$$\mathbf{V}^1 = \mathbf{V}^2 = W\mathbf{e}_1. \quad (72)$$

On souhaite que les particules aient la même vitesse horizontale et qu'elles ne se déplacent pas verticalement dans le tube. C'est-à-dire que dans le référentiel se déplaçant à la vitesse du barycentre des particules, les particules sont immobiles.

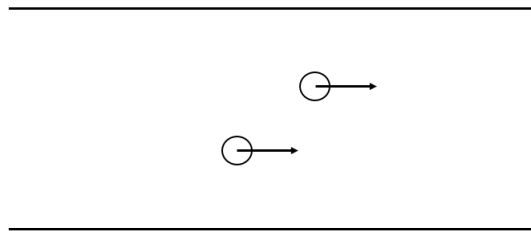


FIGURE 22 – Schéma d'une position d'équilibre dans le cas $N = 2$.

Pour repérer la position des particules, on utilise la position verticale du barycentre y_p , la demi distance entre les particules a et l'angle θ que forme le segment reliant les deux particules avec le vecteur \mathbf{e}_1 . Cette façon de repérer la position des particules nous permet d'obtenir la configuration des particules avec trois paramètres.

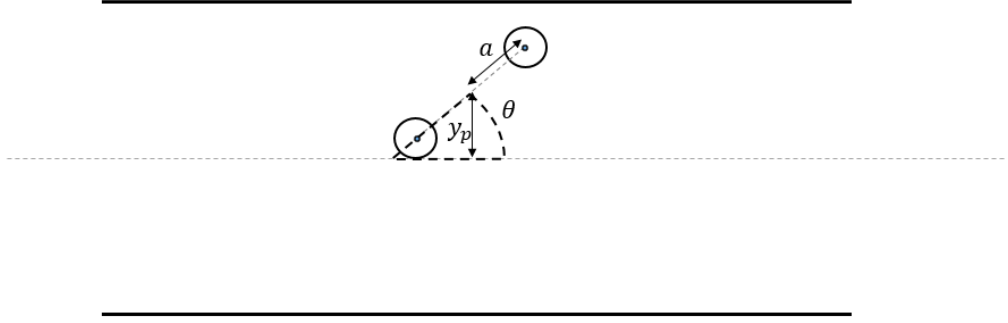


FIGURE 23 – Paramétrisation de la configuration.

Recherche de position d'équilibre

On prend un échantillon pour a de 27 points équirépartis entre $[0.07; 0.93]$, pour y_p de 27 points équirépartis entre $[-0.93; 0.93]$ et pour θ de 27 points équirépartis entre $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Pour chaque possibilité de triplet (a, y_p, θ) , on effectue la résolution numérique des problèmes (42), (43), (51) et (68).

Dans le cas $Re = 0$, on recherche les configurations respectant la condition (72). D'après les valeurs de V_2 sur la figure 21 et des erreurs calculées précédemment, on considère que les valeurs des vitesses inférieures à 10^{-5} numériquement, sont nulles. On recherche les configurations pour lesquelles

$$|V_1^1 - V_1^2| < 10^{-5}, \quad |V_2^1| < 10^{-5}, \quad |V_2^2| < 10^{-5}. \quad (73)$$

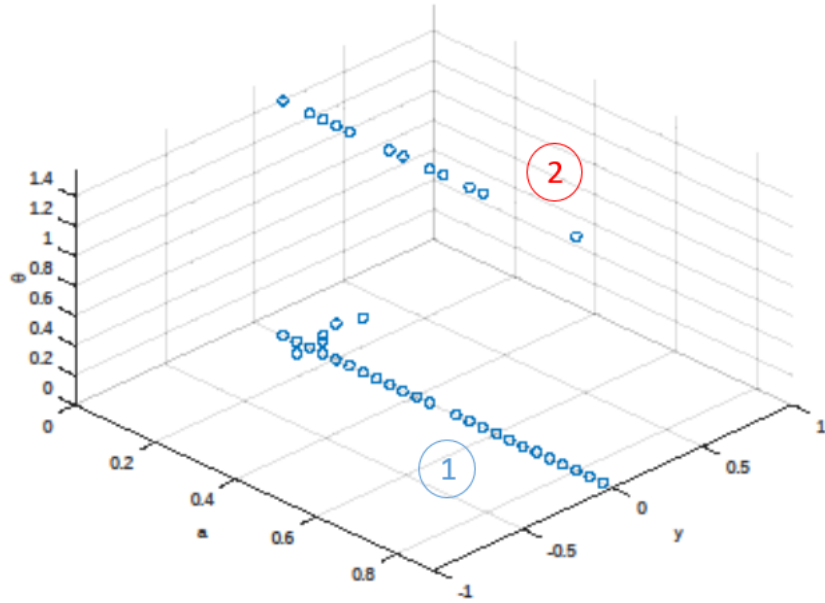


FIGURE 24 – Configurations respectant la contrainte (72).

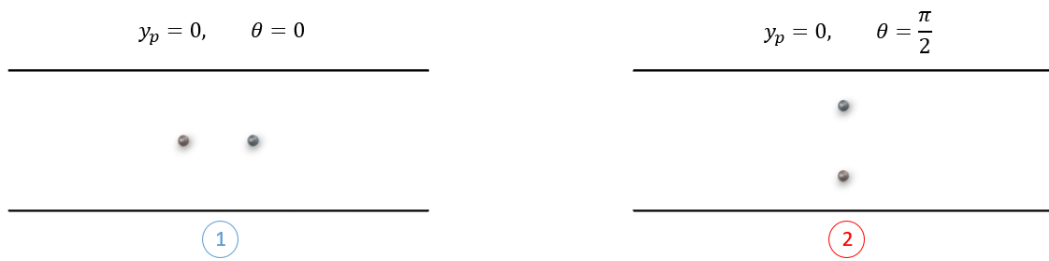


FIGURE 25 – Schéma des configurations $y_p = 0$ et $\theta = \{0, \frac{\pi}{2}\}$.

Remarque 6 *Le choix de définir 10^{-5} comme "zéro" du problème est motivé par les valeurs de la vitesse dans le cas $N = 1$. On pourrait aussi faire le choix du "zéro" comme égal à 10^{-4} , cela ferait apparaître quelques configurations d'équilibre supplémentaires dans le plan $\omega = 0$ et le plan $y_p = 0$. La solution afin de déterminer au mieux le "zéro", serait d'étudier le cas où les particules sont très loin l'une de l'autre puisqu'on peut raisonnablement faire l'hypothèse qu'à une grande distance les particules n'interfèrent pas entre elles.*

Par symétrie, on peut restreindre le tracé sur $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Les solutions de (40)-(41) et respectant (73) sont représentées sur la figure 24. On remarque que les positions d'équilibre dans le cas $Re = 0$, sont concentrées pour les positions où $y_p = 0$ et $\theta = \{0, \frac{\pi}{2}\}$. Ces configurations correspondent au cas où la géométrie du problème admet une symétrie d'axe $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1)$.

Evolution des configurations

On se place dans le cas $Re = 0$. On souhaite observer l'évolution des configurations qu'induisent les vitesses des particules calculées précédemment lors de la résolution dans le cas stationnaire. Pour cela, on va appliquer l'algorithme suivant

$$(a^0, y_p^0, \theta^0) \rightarrow (\mathbf{x}^{1,0}, \mathbf{x}^{2,0}) \xrightarrow{\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2} (\mathbf{x}^{1,1}, \mathbf{x}^{2,1}) \rightarrow (a^1, y_p^1, \theta^1).$$

On a a^0, y_p^0, θ^0 qui correspondent aux paramètres initiaux de la configuration. À partir de ces paramètres, on en déduit la position des deux particules $\mathbf{x}^{1,0}, \mathbf{x}^{2,0}$ à l'instant "initial". À l'aide du calcul effectué, on récupère les vitesses des particules induites par la résolution. On applique ces vitesses aux positions des particules afin de déterminer les positions des particules à l'étape suivante $\mathbf{x}^{1,1}, \mathbf{x}^{2,1}$. On calcule les paramètres de la nouvelle configuration a^1, y_p^1, θ^1 à partir de ces positions. On peut déduire les vitesses de ces paramètres de la façon suivante

$$(V_a, V_{y_p}, V_\theta) = (a^1, y_p^1, \theta^1) - (a^0, y_p^0, \theta^0).$$

On obtient alors un champ de vitesses des paramètres (a, y_p, θ) en appliquant cette méthode à toutes les configurations que nous avons générées précédemment.

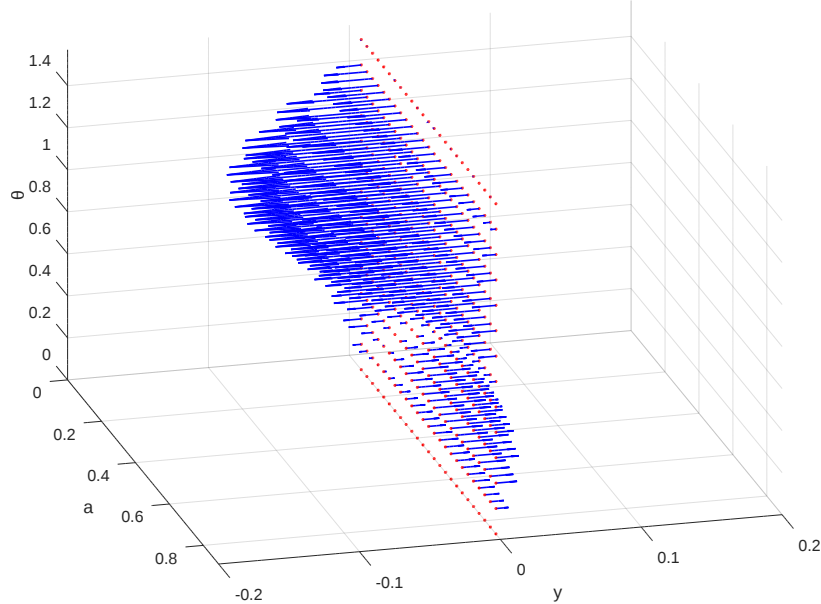


FIGURE 26 – Champ de vecteurs (V_a, V_{y_p}, V_θ) pour le cas $y_p = 0$.

En traçant le champ de vitesse (V_a, V_{y_p}, V_θ) pour $y_p = 0$, on retrouve les configurations à l'équilibre $((V_a, V_{y_p}, V_\theta) = (0, 0, 0))$ comme le montre la figure 24, c'est à dire pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$. On remarque aussi qu'aucune des autres configurations issues du plan $y_p = 0$ ne tend à évoluer vers les configurations d'équilibre précédentes, que l'on caractérise de ce fait comme instables.

Nous pouvons caractériser le problème comme périodique. Les configurations où $\theta = -\frac{\pi}{2}$ sont respectivement les mêmes que celles où $\theta = \frac{\pi}{2}$, simplement en inversant les 2 particules puisqu'elles ont les mêmes propriétés. Pour les plans $y_p \neq 0$, les simulations montrent de faibles intensités de V_{y_p} par rapport aux 2 autres variables V_a et V_θ . La faible variation de la position du barycentre des particules dans le cas $Re = 0$, motive le fait de travailler dans le plan des 2 autres paramètres a et θ .

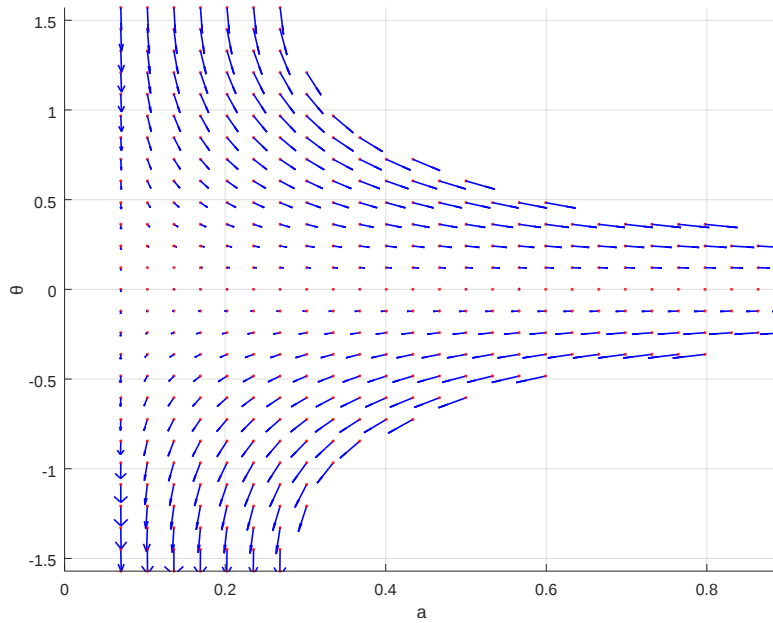


FIGURE 27 – Champ de vecteurs (V_a, V_{y_p}, V_θ) dans le cas $y_p = -0.64$.

On souhaite tracer quelques lignes de courant dans la figure 27. Le tracer de lignes de courant dans le champ de vitesse de l'évolution des configurations, permet d'une certaine manière de suivre l'évolution d'une configuration de départ (a^0, y_p^0, θ^0) en fonction d'un pseudo temps.

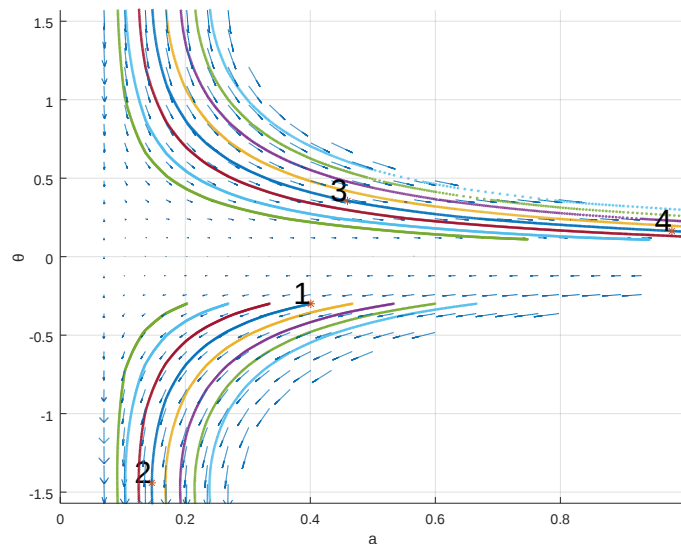


FIGURE 28 – Champ d'évolution des configurations dans le graphe (a, θ) pour $y_p = -0.64$ et lignes de courant suivant l'évolution de quelques configurations.



FIGURE 29 – Évolution d'une configuration le long d'une ligne de courant.

En observant la direction des lignes de courant, les paramètres de la configuration tendent vers $a \rightarrow +\infty$ et $\theta \rightarrow 0$.

Du fait que $\theta \rightarrow 0$, on peut émettre 2 hypothèses :

- les particules ont tendance à s'aligner,
- l'alignement entre les particules ne varie pas, l'évolution du paramètre θ est la conséquence de la distance a entre les particules qui augmente.

Pour déterminer l'évolution de la trajectoire horizontale des particules, nous traçons l'évolution de $a * \sin(\theta)$ le long d'une ligne de courant.

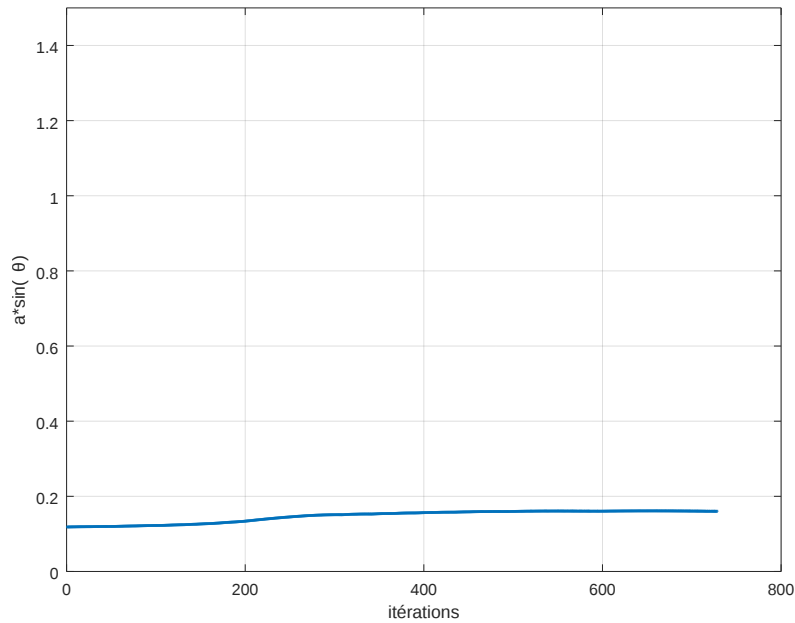


FIGURE 30 – Evolution de $a * \sin(\theta)$ le long d'une ligne de courant.

La figure 30 montre que la variation de la position verticale des particules est très faible. On peut conclure du fait que $\theta \rightarrow 0$ est une conséquence de $a \rightarrow \infty$. Les particules ne sont jamais parfaitement alignées.

Champ de vecteur dans le cas $\theta = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ pour $Re > 0$

Des figures 24 et 25, on a remarqué que les positions d'équilibre dans le cas $Re = 0$ se situent pour les paramètres $\theta = \{0, \frac{\pi}{2}\}$ et $y_p = 0$. On souhaite observer l'évolution des paramètres du problème en traçant le champ de vecteurs (V_a, V_{y_p}, V_θ) dans le cas $Re > 0$. On utilise pour cela la résolution de (68) dans les cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

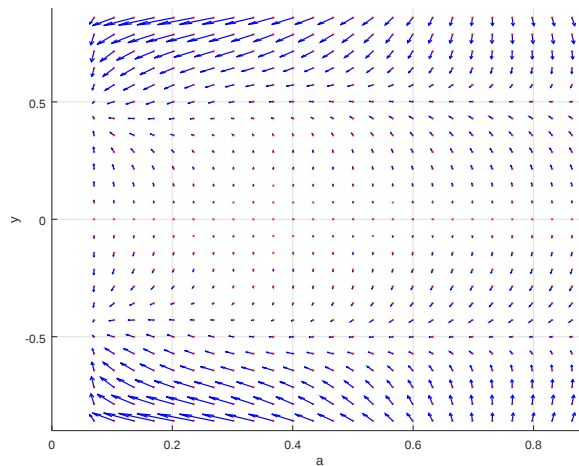


FIGURE 31 – Champ de vecteurs (V_a, V_{y_p}, V_θ) pour $\theta = 0$.

Dans le cas $\theta = 0$, les positions d'équilibre correspondent aux configurations qui entraînent une symétrie d'axe $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_1)$ au problème. On remarque que ces positions sont instables.

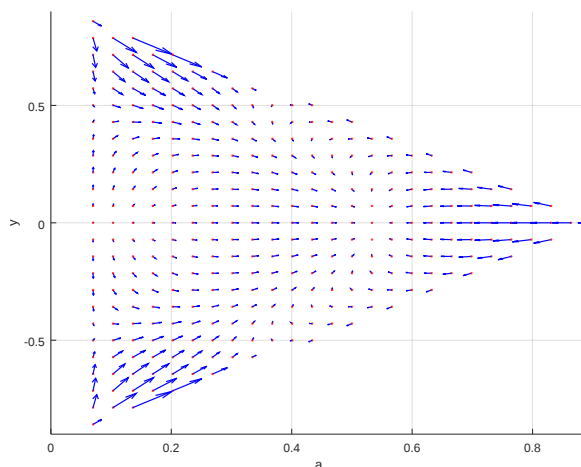


FIGURE 32 – Champ de vecteurs (V_a, V_{y_p}, V_θ) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Dans le plan (a, y_p) pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il est mis en évidence une position d'équilibre stable pour les paramètres $y_p = 0$ et $a = 0.53$. On peut conclure que c'est la seule position d'équilibre physiquement acceptable.

Évolution du barycentre dans le cas $Re > 0$ petit

Dans le cas $Re > 0$ petit, on résout numériquement (68) pour les configurations précédemment engendrées. Des figures 24 et 25, on ne remarque pas de positions d'équilibre pour le cas $Re = 0$ mis à part pour les cas symétriques que nous avons étudié ensuite pour $Re > 0$.

Par définition, la valeur des variables à l'ordre 1 est bien plus faible que celle à l'ordre 0. Donc si $V_2 \neq 0$, la vitesse d'ordre 1 ne compense pas les phénomènes engendrés à l'ordre 0.

Dans cette partie, on va se concentrer uniquement sur l'ordre 1 ($Re > 0$ petit), et regarder l'évolution de la position du barycentre des particules dans le cas $\theta = 0$.

On trace la vitesse $V_{y_p}^{[1]}$ en fonction des positions du barycentre y_p pour les différentes distances entre les particules que nous avons. On fait l'analogie avec l'évolution du barycentre dans le cas d'une particule.

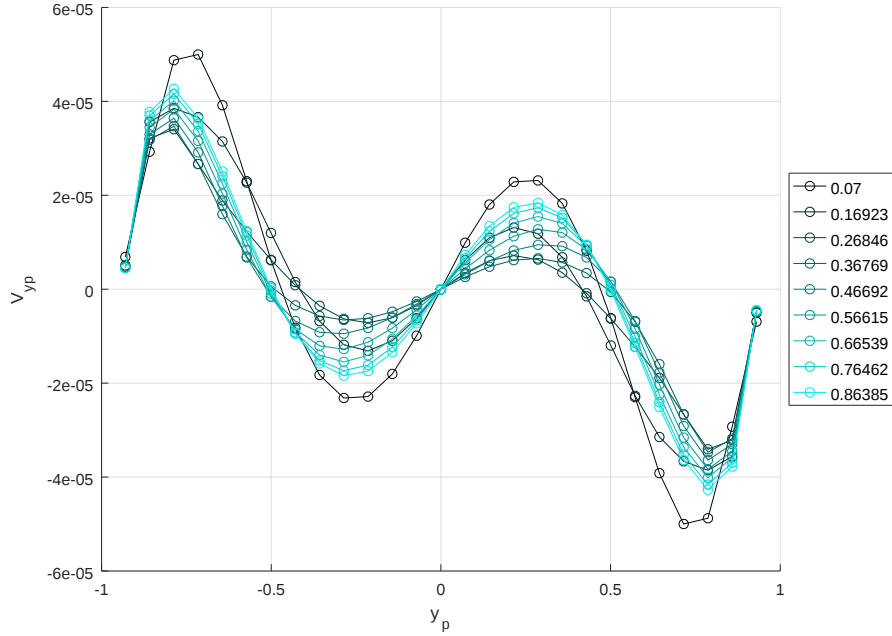


FIGURE 33 – Variation de y_p au 1er ordre pour différentes valeurs de a .

Nous ne prenons pas en compte l'évolution de la distance entre des particules comme sur la figure 31, on se place à un écart fixe en négligeant cette variation. D'après la figure 33, on observe 3 configurations dans lesquelles le barycentre des particules ne varie pas. On peut effectuer un parallèle avec la figure 21 pour $N = 1$ puisque ces positions se trouvent dans les mêmes plages de valeurs. De même, on remarque aussi une attractivité de certaines positions. L'écart entre les particules a un impact sur le positionnement du barycentre dans le cas des positions d'équilibre appelées stables dans la partie pour $N = 1$.

4 Technique de pénalisation pour la recherche de positions d'équilibre

La partie précédente permet à Reynolds petit, de résoudre le système (37) et de caractériser la configuration. Nous mettons en évidence une dynamique des positions lors de la résolution et dans cette partie nous souhaitons étudier cette dynamique dans un cas évolutif et l'influence du nombre de Reynolds sur ces configurations.

Le problème est le suivant, on recherche $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2_{Loc}(\Omega)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} Re \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}), & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathcal{I}d, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1], \\ \mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j, & \text{sur } S^j, j \in \{1, \dots, N\} \\ \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} = -\frac{\alpha^j}{\pi Re \delta^j} \int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \frac{d\omega^j}{dt} = -\frac{2\alpha_j}{\pi Re \delta^j} \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, & j \in \{1, \dots, N\}. \end{array} \right. \quad (74)$$

où $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ appelée la dérivée particulaire, la dérivée en temps dans une description lagrangienne.

Afin de résoudre numériquement (74), nous allons nous inspirer de la méthode appliquée dans [22] qui consiste à pénaliser les équations afin de modéliser la présence des particules. Le choix d'utiliser une technique de pénalisation est motivé par le fait de ne pas avoir besoin de remailler le domaine à chaque itération et de travailler numériquement sur un domaine rectangulaire. Dans notre cas nous appliquons une condition sur le fluide en entrée afin de mettre en mouvement les particules. Dans une première partie, nous intégrons les équations du problème (74) sur le domaine T à l'aide des techniques de pénalisation. À l'aide d'une méthode de Newton, appliquée sur la formulation mise en place précédemment, nous résolvons le problème numériquement dans le cas stationnaire et pour différents Reynolds. L'objectif

étant de rechercher des positions d'équilibre. Ensuite, nous allons travailler sur le problème évolutif, en usant d'une méthode des caractéristiques, afin d'étudier la dynamique.

4.1 Définition du problème à résoudre

Nous travaillons dans l'espace

$$K_B = \{\mathbf{u} \in H_0^1(T), \exists(\mathbf{V}^j, \omega^j) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \text{ tels que } \mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j \text{ dans } \overline{B^j}\}.$$

On cherche la solution $(\mathbf{u}, p) \in K_B \times L_{loc}^2(T)$ au sens faible de (74).

4.1.1 Formulation au sens faible du problème

Soit $t > 0$, on se concentre sur les trois premières équations de (74). En effectuant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ de l'équation 1 du système (74) par $\phi \in K_B$ et en utilisant une intégration par partie,

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\phi) - \sum_{j=1}^N \int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j) \cdot \phi \right) = 0. \quad (75)$$

Puisqu'on a $\phi \in K_B$, alors pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, il existe $(\mathbf{V}_{\phi}^j, \omega_{\phi}^j) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi = \mathbf{V}_{\phi}^j + \omega_{\phi}^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$ sur $\overline{B^j}$. Ainsi on peut écrire,

$$\int_{S^j} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j) \cdot \phi = \left(\int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j \right) \cdot \mathbf{V}_{\phi}^j + \left(\int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j \wedge \mathbf{r}^j \right) \cdot \omega_{\phi}^j \mathbf{e}_3. \quad (76)$$

Avec l'équation (76) et les deux dernières équations de (74), on peut réécrire (75) de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\phi) \right) \\ + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\pi \delta^j}{\alpha^j} \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} \cdot \mathbf{V}_{\phi}^j + \frac{\pi \delta^{j^2}}{2\alpha^j} \frac{d\omega^j}{dt} \omega_{\phi}^j \right) = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

En exprimant le produit scalaire $L^2(\overline{B^j})$ de la dérivée particulière de \mathbf{u} et ϕ , on obtient la relation suivante

$$\int_{\overline{B^j}} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi = \pi \delta^j \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} \cdot \mathbf{V}_{\phi}^j + \frac{\pi \delta^{j^2}}{2} \frac{d\omega^j}{dt} \omega_{\phi}^j. \quad (78)$$

Preuve :

Pour aboutir à cette relation, on calcule la dérivée particulaire de $\mathbf{u} \in K_B$ sur $\overline{B^j}$

$$\begin{aligned}
\frac{D\mathbf{u}|_{\overline{B^j}}}{Dt} &= \partial_t \mathbf{u}|_{\overline{B^j}} && + (\mathbf{u}|_{\overline{B^j}} \cdot \nabla) \mathbf{u}|_{\overline{B^j}} \\
&= \partial_t (\mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j) && + ((\mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j) \cdot \nabla) (\mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j) \\
&= \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} + \frac{d\omega^j}{dt} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j - \omega^j \mathbf{V}^j && + \omega^j \mathbf{V}^j - \omega^{j2} \mathbf{r}^j \\
&= \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} + \frac{d\omega^j}{dt} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j && - \omega^{j2} \mathbf{r}^j.
\end{aligned} \tag{79}$$

En effectuant le produit scalaire $L^2(B^j)$ de (79) par $\phi \in K_B$,

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{B^j}} \frac{D\mathbf{u}|_{\overline{B^j}}}{Dt} \cdot \phi &= \int_{B^j} \left(\frac{d\mathbf{V}^j}{dt} + \frac{d\omega^j}{dt} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j - \omega^{j2} \mathbf{r}^j \right) \cdot (\mathbf{V}_\phi^j + \omega_\phi^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j) \\
&= \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} \cdot \mathbf{V}_\phi^j \int_{B^j} \mathbf{1} + \left(\frac{d\omega^j}{dt} \mathbf{V}_\phi^j + \omega_\phi^j \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} \right) \cdot \int_{B^j} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j \\
&\quad + \frac{d\omega^j}{dt} \omega_\phi^j \int_{B^j} \|\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j\|^2 - \omega^{j2} \omega_\phi^j \int_{B^j} \mathbf{r}^j \cdot (\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j) \\
&= \pi \delta \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} \cdot \mathbf{V}_\phi^j + \frac{\pi \delta^2}{2} \frac{d\omega^j}{dt} \omega_\phi^j.
\end{aligned} \tag{80}$$

Nous retrouvons donc le résultat.

En utilisant l'égalité (78), on peut écrire (77)

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\phi) \right) + \sum_{j=1}^N \int_{\overline{B^j}} \frac{1}{\alpha^j} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = 0. \tag{81}$$

On ajoute la condition d'incompressibilité sur \mathbf{u} (troisième équation de (74)) et $\operatorname{div}(\phi) = 0$ sur B .

Définition 2 On dit que $(\mathbf{u}, p) \in K_B \times L^2_{loc}(T)$ est solution au sens faible de (74) si et seulement si pour tout $\phi \in K_B$, pour tout $q \in L^2(T)$,

$$\begin{cases} \int_T A \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(\int_\Omega D(\mathbf{u}) : D(\phi) - \int_T p \operatorname{div}(\phi) \right) = 0, \\ \int_\Omega q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (82)$$

où $A = 1_\Omega + \frac{1}{\alpha} 1_B$.

C'est cette définition que nous utiliserons par la suite.

4.1.2 Équivalence vitesse constante et déformation nulle

On souhaite montrer que l'espace K_B peut aussi s'écrire

$$K_B = \{\mathbf{u} \in H_0^1(T), \mathbf{D}(\mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \overline{B}\}.$$

Proposition 6 Soit $j \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbf{D}(\mathbf{u}|_{\overline{B^j}}) = \mathbf{0}$ si et seulement si il existe $\mathbf{V}^j \in \mathbb{R}^2$ et $\omega^j \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbf{u}|_{\overline{B^j}} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$

Preuve :

Soit $j \in \{1, \dots, N\}$, on se place sur la boule B^j .

• On souhaite montrer que $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ sur $\overline{B^j}$ implique l'existence d'une vitesse de la particule j sous la forme $\mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j$ dans $\overline{B^j}$.

On peut exprimer $\nabla \mathbf{u}$ comme la somme d'une partie symétrique et d'une partie anti-symétrique,

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \mathbf{A}(\mathbf{u}). \quad (83)$$

La partie symétrique s'écrit sous la forme,

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \frac{1}{2}(\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2) \\ \frac{1}{2}(\partial_{x_2} u_1 + \partial_{x_1} u_2) & \partial_{x_2} u_2 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

et la partie anti-symétrique s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

où $\beta = \frac{1}{2}(\partial_{x_2} u_1 - \partial_{x_1} u_2)$.

Remarque 7 *On peut montrer que β est égal ω^j .*

En calculant $\partial_{x_1}\beta$ et $\partial_{x_2}\beta$,

$$\begin{aligned}\partial_{x_1}\beta &= \partial_{x_1}\left(\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 - \partial_{x_1}u_2)\right) \\ &= \partial_{x_1}(\partial_{x_2}u_1 - \frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2)) \\ &= \partial_{x_2}(\partial_{x_1}u_1) - \partial_{x_1}\left(\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2)\right) \\ &= 0,\end{aligned}\tag{86}$$

$$\begin{aligned}\partial_{x_2}\beta &= \partial_{x_2}\left(\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 - \partial_{x_1}u_2)\right) \\ &= \partial_{x_2}\left(\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2) - \partial_{x_1}u_2\right) \\ &= \partial_{x_2}\left(\frac{1}{2}(\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2)\right) - \partial_{x_1}(\partial_{x_2}u_2) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{87}$$

On a montré que β est constant et donc que $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ est constant. Puisque $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{u})$ est constant d'après les équations précédentes, alors il existe $(\mathbf{V}^j, \omega^j) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j \text{ dans } \overline{B^j},\tag{88}$$

et ce pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$.

- La deuxième implication découle du calcul de $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ sur $\overline{B^j}$ où l'on retrouve $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

4.1.3 Mise en place de la pénalisation

Dans la littérature, il existe différentes méthodes de couplage fluide structure ([7], [8], [11], [23]). On peut regrouper ces méthodes en deux familles : les méthodes à maillage non structuré et les méthodes de domaines fictifs.

Dans les méthodes à maillage non structuré, on maille le domaine fluide, évolutif au cours du temps. Ces méthodes sont plus précises que les méthodes de domaine fictifs mais nécessitent un remaillage du domaine à chaque pas de temps et donc des temps de calculs plus élevés. Des méthodes telles que les méthodes ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) utilisées dans [19] et [24],

ou encore les méthodes à maillage adaptatif (AMR) [6], sont optimisées afin de contourner ce problème mais impliquent d'autres gestions au niveau du maillage.

Les méthodes de domaine fictif ont elles pour objectif de travailler sur un domaine fixe, indépendant du temps. Parmi ces méthodes, on peut utiliser des méthodes à maillage fixe, le maillage ne suit pas les solides en mouvement, telles que les méthodes de forcing (Peskin, [26]) et les méthodes de pénalisation ([5]).

Les méthodes de forcing consistent à appliquer un terme source à l'équation afin de représenter une paroi solide. Cette technique est plus utilisée lors de la modélisation de parois élastiques ayant un faible impact sur l'écoulement. Les techniques de pénalisation permettent de travailler avec une unique équation régissant tout le domaine. On introduit les contraintes du solide dans l'équation du milieu fluide en la multipliant par un très grand scalaire, afin de contraindre les solutions. C'est cette méthode que nous allons appliquer par la suite en nous inspirant de ce qui est fait dans [23] et [22].

Nous voulons pénaliser le milieu représentant les particules solides. Il est possible d'appliquer la pénalisation sur deux paramètres des équations solides, la vitesse de translation, égale en tout point dans un solide indéformable, ou contraindre la déformation à être nulle [29].

Nous choisissons de pénaliser la déformation de la particule, tel qu'il est effectué dans [20] et [25]. Elle est aussi utilisée dans [22], on ajoute, dans la formulation au sens faible, un terme pour $\varepsilon \ll 1$:

$$\frac{2}{\varepsilon} \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi).$$

L'utilisation d'une méthode de pénalisation permet de travailler dans un espace de solution plus grand. On souhaite appliquer une contrainte sur la solution dans la formulation au sens faible (82). Dans notre cas nous souhaitons contraindre la non déformation de la particule solide au cours du mouvement et donc, pour $\varepsilon \ll 1$, nous recherchons $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(T) \times L^2(T)$ solution au sens faible de (74) si et seulement si pour $x_2 \in [-1, 1]$,

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2)$$

et pour tout $\phi \in H_0^1(T)$, pour tout $q \in L^2(T)$,

$$\begin{cases} \int_T A \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\overline{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) + \frac{1}{Re} \left(\int_T \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_T p \operatorname{div}(\phi) \right) = 0, \\ \int_T q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (89)$$

On souhaite travailler dans le domaine T tout entier afin de, numériquement, ne pas remailler le domaine à chaque itération. D'un point de vue physique, cette méthode revient à imposer une viscosité très grande au domaine concerné. Le domaine a un comportement très proche à celui d'un solide. Une autre méthode utilisable est d'imposer une vitesse au domaine concerné au lieu de restreindre la déformation. Ceci aura le même effet d'un point de vue physique puisque une autre propriété d'un solide est que tous ces points se translatent à la même vitesse.

Remarque 8 Nous pouvons retrouver la démarche qui suit dans [22] et [25] avec plus de détails dans le cas d'une géométrie bornée. Si on se place dans un problème de Stokes stationnaire, on cherche $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(T) \times L_{loc}^2(T)$ solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, & \text{sur } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathcal{I}d, & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2) & \text{pour tout } x_2 \in [-1, 1], \\ \mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j, & \text{sur } \overline{B^j}, j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (90)$$

et,

$$\begin{cases} \int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j = \mathbf{0}, & j \in \{1, \dots, N\}, \\ \int_{S^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3 = 0, & j \in \{1, \dots, N\}. \end{cases} \quad (91)$$

On peut déterminer le problème comme :
on cherche $(\mathbf{u}, p) \in K_B \times L_{loc}^2(T)$ solution au sens faible de (90) si et seulement si pour $x_2 \in [-1, 1]$, $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2)$ et pour tout $\phi \in K_B$,

pour tout $q \in L^2(T)$,

$$\begin{cases} \int_T \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_T p \operatorname{div}(\phi) = 0, \\ \int_T q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (92)$$

Nous définissons les espaces suivants :

$$\begin{aligned} K_{div} &= \{\mathbf{u} \in H^1(T), \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0\}, \\ K_{inf} &= \{\mathbf{u} \in H^1(T), \forall x_2 \in [-1, 1], \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2)\}. \end{aligned} \quad (93)$$

On peut associer à (92) le problème de minimisation suivant

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in K_{div} \cap K_B \cap K_{inf}, & J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in K_{div} \cap K_B \cap K_{inf}} J(\mathbf{v}), \\ J(\mathbf{v}) = \int_T \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}). \end{cases} \quad (94)$$

Considérons le problème de minimisation non contraint suivant, pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^\varepsilon \in K_{div} \cap K_{inf}, & J^\varepsilon(\mathbf{u}^\varepsilon) = \min_{\mathbf{v}^\varepsilon \in K_{div} \cap K_{inf}} J^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon), \\ J^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) = \int_T \mathbf{D}(\mathbf{v}^\varepsilon) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\varepsilon) - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{v}^\varepsilon) : \mathbf{D}(\mathbf{v}^\varepsilon). \end{cases} \quad (95)$$

Avec la coercivité de $b(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_T \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})$, la positivité de $b'(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v})$ et ε petit, on a \mathbf{u}^ε qui tend vers \mathbf{u} (voir [5]).

4.2 Simulations Numériques dans le cas $N = 1$

À partir du système (89), nous souhaitons retrouver les positions et configurations d'équilibre mises en évidence dans la partie 3.2.4. Afin de résoudre le système, nous allons appliquer deux méthodes :

- une méthode de Newton afin de résoudre le problème dans le cas stationnaire comme elle peut être notamment proposée dans [30],

- une méthode de remontée des caractéristiques afin de traiter la dérivée en temps, cette méthode est par exemple utilisée dans [23].

L'utilisation de ce système avec ces méthodes nous permettra aussi de quantifier l'influence de la turbulence sur les positions d'équilibre.

4.2.1 Méthode de Newton pour la résolution d'un problème stationnaire

Dans cette partie, nous souhaitons résoudre le système (89) dans le cas stationnaire, dans le but de le résoudre sur le solveur FreeFem++. La résolution de ce problème est motivée par notre volonté de retrouver les résultats de la partie 3.2.4 en les étendant à une turbulence plus forte.

En posant

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - W\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} - W\mathbf{e}_1$$

où $W\mathbf{e}_1$ représente la vitesse horizontale moyenne des particules, on cherche alors $(\mathbf{v}, p) \in H^1(T) \times L^2(T)$ solution pour tout $(\phi, q) \in H^1(T) \times L^2(T)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T A(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \phi - \frac{2}{\varepsilon} \int_B \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\phi) \\ + \frac{1}{Re} \left(\int_T \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_T p \operatorname{div}(\phi) \right) - \frac{1}{Re} \int_{\partial T} ((2\mathbf{D}(\mathbf{v}) - p\mathcal{I}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \phi = 0, \\ \int_T q \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0. \end{array} \right. \quad (96)$$

Nous souhaitons résoudre un problème dans le cas stationnaire, nous pouvons alors utiliser un algorithme de Newton comme il est présenté dans [17], par exemple, afin de la résoudre numériquement.

On cherche à résoudre le problème suivant : pour tout $\phi \in H^1(T)$ et pour tout $q \in L^2(T)$, on cherche (\mathbf{v}, p) solution de l'équation

$$F(\mathbf{v}, p, \phi, q) = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q) &= \int_T A(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{2}{\varepsilon} \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) \\
&+ \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) - \int_T p \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) \right) + \int_T q \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad (97) \\
&- \frac{1}{Re} \int_{\partial T} ((2\mathbf{D}(\mathbf{v}) - p\mathbf{I}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi}.
\end{aligned}$$

On définit la dérivée fonctionnelle de F comme

$$D_{\delta\mathbf{v}, \delta p} F(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} F(\mathbf{v} + \varepsilon\delta\mathbf{v}, p + \varepsilon\delta p, \boldsymbol{\phi}, q), \quad (98)$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
D_{\delta\mathbf{v}, \delta p} F(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q) &= \int_T A(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\phi} + \int_T A(\mathbf{v} \cdot \nabla) \delta\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\phi} \\
&+ \frac{2}{\varepsilon} \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\delta\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \mathbf{D}(\delta\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) - \int_T \delta p \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) \right) \\
&+ \int_T q \operatorname{div}(\delta\mathbf{v}) - \frac{1}{Re} \int_{\partial T} ((2\mathbf{D}(\delta\mathbf{v}) - \delta p\mathbf{I}\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \boldsymbol{\phi}, \quad (99)
\end{aligned}$$

linéaire en $\delta\mathbf{v}$, δp .

On linéarise $F(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q)$ autour d'un état de départ \mathbf{v}_0, p_0 :

$$F(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q) \simeq D_{\mathbf{v}-\mathbf{v}_0, p-p_0} F(\mathbf{v}_0, p_0, \boldsymbol{\phi}, q) + F(\mathbf{v}_0, p_0, \boldsymbol{\phi}, q) = S(\mathbf{v}, p, \boldsymbol{\phi}, q), \quad (100)$$

et on recherche l'état suivant $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}_0$, $p_1 = p_0 + \delta p_0$ de sorte que $S(\mathbf{v}_1, p_1, \boldsymbol{\phi}, q) = 0$ et donc par résolution de

$$D_{\delta\mathbf{v}_0, \delta p_0} F(\mathbf{v}_0, p_0, \boldsymbol{\phi}, q) + F(\mathbf{v}_0, p_0, \boldsymbol{\phi}, q) = 0. \quad (101)$$

On réitère le processus jusqu'au test d'arrêt, pour $\varepsilon_1 > 0$,

$$\int_T \frac{\|\delta\mathbf{v}_{n+1}\|_2}{\|\mathbf{v}_{n+1}\|_2} < \varepsilon_1.$$

Paramètres numériques

On souhaite résoudre l'algorithme précédent à l'aide du solveur FreeFem++. Pour cela, on se place dans un rectangle de demi-longueur $L = 3$ et demi-largeur $l = 1$ représentant le tube T . Les particules seront représentées par leur position (x_1^i, x_2^i) et le carré de leur rayon $\delta = 0.004225$ correspondant au cas d'une graine de colza. Toutes les particules auront le même rapport de densité, $\alpha = \frac{1}{2}$. Le choix de travailler avec des rapports de densité proche de 1 s'éloigne du cas réel. Ce choix est motivé par le fait de stabiliser la convergence de la résolution numérique du problème. Les espaces utilisés pour représenter les vitesses, la pression et l'indicatrice représentant les particules sont respectivement P1-bulle, P1 et P0 décrits dans la partie 3.2.2.

Positions d'équilibre

On souhaite retrouver les positions d'équilibre mises en évidence dans la partie 3.2.4 pour valider cet algorithme.

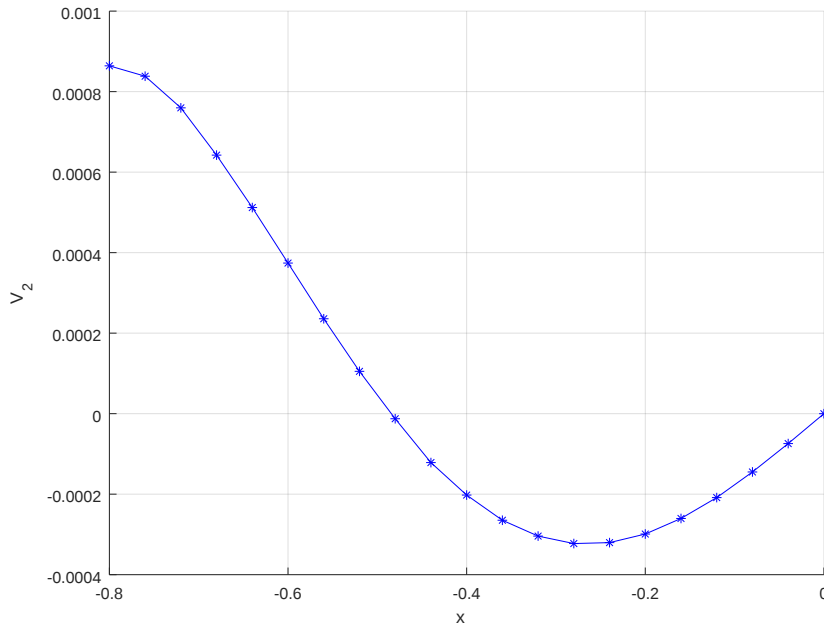


FIGURE 34 – Variation de la vitesse verticale V_2 en fonction de x_2 pour $Re = 2$.

Dans la figure 34, on retrouve lorsque la vitesse V_2 s'annule que les positions d'équilibre sont situées en $x_2^{(1)} = -0.480 \pm 0.039$ et $x_2^{(2)} = 0$ similaires aux positions d'équilibre mis en évidence dans la figure 21. On retrouve aussi les mêmes caractérisations de la stabilité de ces positions.

Évolution des positions d'équilibre en fonction du nombre de Reynolds

Maintenant, on souhaite observer l'impact de la turbulence sur les positions d'équilibre du problème. Pour cela, nous allons effectuer avec l'algorithme précédent plusieurs simulations, afin de déterminer pour différents Reynolds, l'évolution de la position d'équilibre stable $x_2^{(1)}$ (la position en $x_2^{(2)}$ est une conséquence de la symétrie du problème).

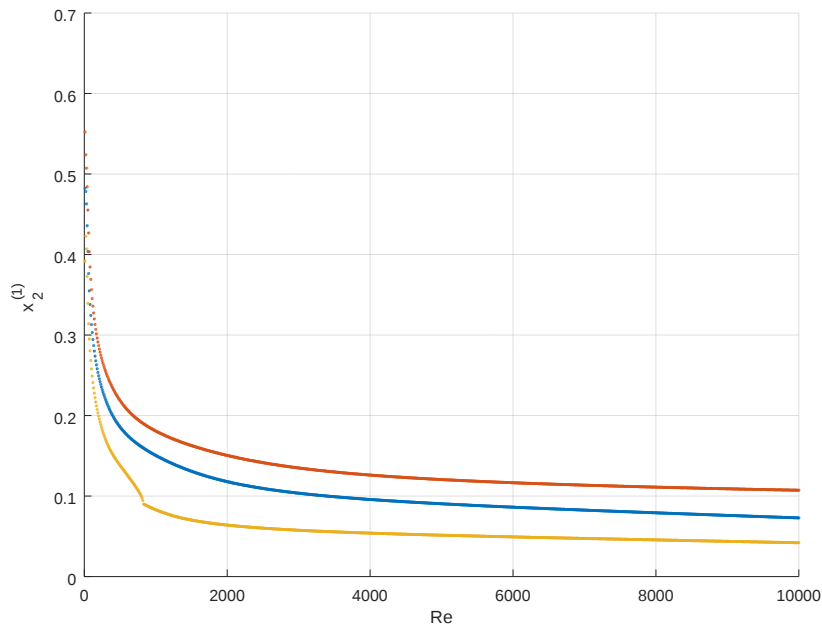


FIGURE 35 – Évolution de la position d'équilibre stable $x_2^{(1)}$ en fonction du nombre de Reynolds. En bleu, l'évolution de la position d'équilibre $x_2^{(1)}$, en rouge l'incertitude haute et en jaune, l'incertitude basse.

La figure 35 met en exergue l'évolution des positions d'équilibre dites stables vers le centre du tube lorsque la turbulence augmente. On peut en conclure que la turbulence concentre les positions d'équilibre.

4.2.2 Semi-discrétisation en temps pour une résolution évolutive

Dans cette partie on souhaite résoudre (89) dans le cas évolutif. L'objectif est de mettre en avant les positions d'équilibre vues dans les parties précédentes ainsi que leur stabilité. Afin de le résoudre sur le solver FreeFem++, nous souhaitons semi discrétiser en temps l'équation. La méthode utilisée, décrite dans [23] ou [27], consiste à discrétiser la dérivée particulière $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ de façon lagrangienne. Le principe de cette méthode des caractéristiques est la suivante, soit \mathbf{X} la trajectoire d'une particule de fluide dans un écoulement. La particule positionnée en \mathbf{x} au temps t de vitesse \mathbf{v} satisfait :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \tau), \tau), \\ \mathbf{X}(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{x}. \end{cases} \quad (102)$$

Soit $\varphi(x, t) \in H^1(T)$,

$$\frac{D\varphi}{Dt}(x, t) = (\partial_t \varphi + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \varphi)(x, t) = \partial_\tau (\varphi(\mathbf{X}(x, t, \tau), \tau))|_{\tau=t}. \quad (103)$$

Notons $\Delta t > 0$ le pas de temps tel que $t_n = n\Delta t$ et $\varphi(x, t_n) = \varphi^n(x)$,

$$\frac{D\varphi}{Dt}(x, t) = \frac{\varphi^{n+1}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_{n+1})) - \varphi^n(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t_{n+1}, t_n))}{\Delta t} + o_{\Delta t \rightarrow 0}(1). \quad (104)$$

Des équations précédentes, on peut écrire

$$\frac{D\varphi}{Dt}(\mathbf{x}, t) = \frac{\varphi^{n+1}(\mathbf{x}) - \varphi^n(\mathbf{X}^n(\mathbf{x}))}{\Delta t} + o_{\Delta t \rightarrow 0}(1). \quad (105)$$

Ainsi en appliquant la méthode à l'équation (89), on peut écrire la semi-discrétisation en temps sous la forme :

on cherche $(\mathbf{u}, p) \in H_0^1(T) \times L^2(T)$ tels que pour $x_2 \in [-1, 1]$,

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t, x_1, x_2) = \mathbf{u}_\infty(x_2),$$

et pour tout $\phi \in H_0^1(T)$, pour tout $q \in L^2(T)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_T A \frac{\mathbf{u}^{n+1}(x) - \mathbf{u}^n(X^n(x))}{\Delta t} \cdot \phi - \frac{2}{\varepsilon} \int_{\bar{B}} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) \\ + \frac{1}{Re} \left(\int_T \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_T p \operatorname{div}(\phi) \right) = 0, \\ \int_T q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{array} \right. \quad (106)$$

Paramètres numériques

On se place dans la même configuration que la partie précédente. Nous souhaitons implémenter le problème (106). Pour la partie en temps, nous utilisons la fonction *convect* de FreeFem++ pour traiter la remontée des caractéristiques. Le maillage utilisé est similaire au maillage de la partie 3.2.3. Nous choisissons d'itérer l'algorithme avec un pas de temps $\Delta t = 0.5$.

Stabilité des positions d'équilibre

Dans la partie 3.2.4, des positions d'équilibre sont mises en lumière, tout comme leur caractérisation. Une dynamique de ces positions est trouvée, caractérisant les positions stables et instables. Nous souhaitons, dans cette partie, observer numériquement l'évolution des ces positions en temps. Pour résoudre ce problème, nous prenons plusieurs configurations où la position initiale x_2 est équirépartie entre $[-1 + \sqrt{\delta}, 0]$ puis, on observe l'évolution au cours du temps du barycentre de la particule.

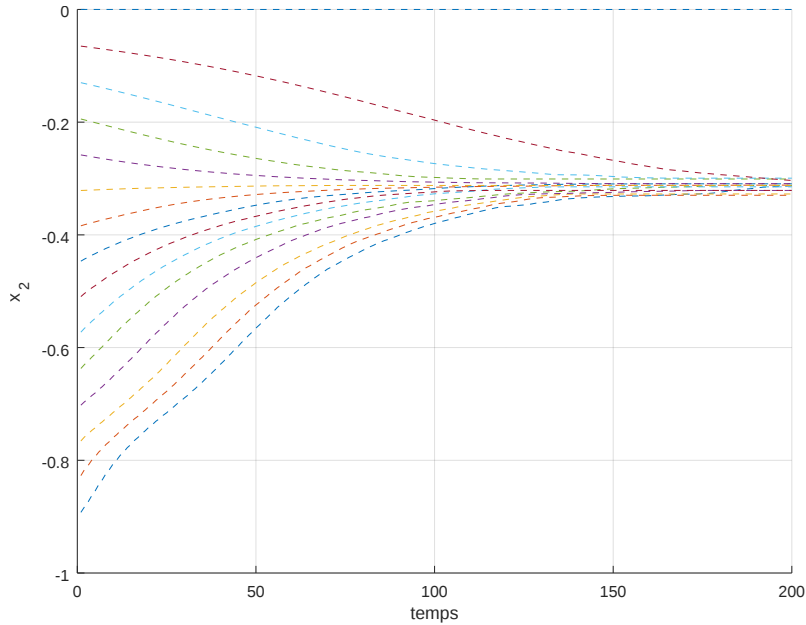


FIGURE 36 – Évolution de la position d'une particule à différentes positions initiales au cours du temps.

De la figure 36, on retrouve les positions d'équilibre ainsi que la caractérisation de la stabilité mis en évidence sur la figure 21 dans le cas évolutif.

Influence de la densité

Dans cette partie, on souhaite déterminer l'impact de la densité de la particule, dans le cas stationnaire, sur sa vitesse verticale. Pour des raisons de convergence numériques, les simulations précédentes ont été effectuées pour un rapport de densité $\alpha = \frac{1}{2}$ correspondant à une densité des particules de $\rho_p = 2 \text{ kg.m}^{-3}$ par exemple. On souhaite déterminer l'impact de la densité de la particule sur les positions d'équilibre stables. Pour cela, on effectue les simulations pour différentes positions x_2 de la particule et on se place à $Re = 2$.

Remarque 9 On rappelle que $\alpha = \frac{\rho_f}{\rho_p}$. Du fait que le fluide est de l'air et donc $\rho_f = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, on trouve que numériquement α est l'inverse de ρ_p (à unité près).

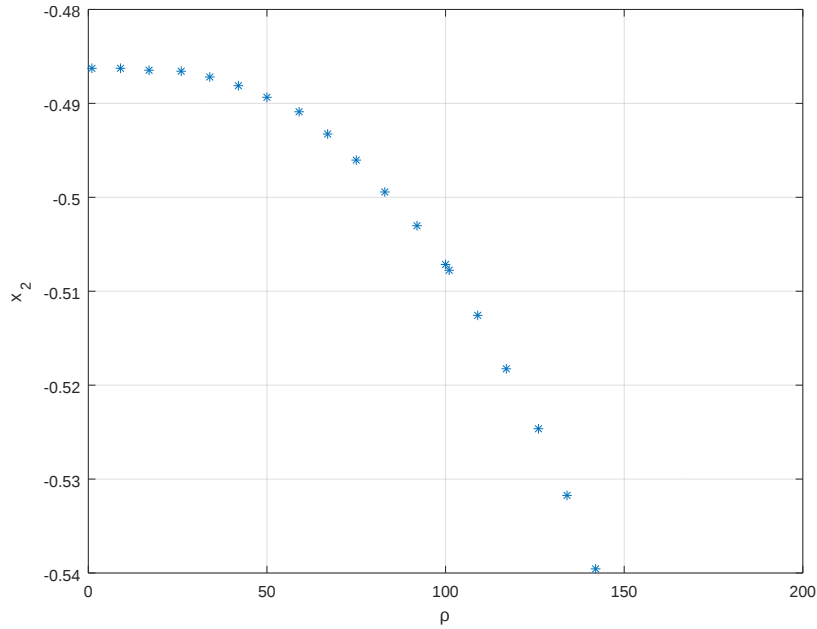


FIGURE 37 – Évolution d'une position d'équilibre stable pour différentes densités de particule ρ_p .

Nous simulons pour $\rho_p < 140 \text{ kg.m}^{-3}$ puisque que au delà, la résolution avec les paramètres numériques que nous utilisons ne converge plus. D'après la figure 37, en augmentant la densité de la particule, les positions d'équilibre ont tendance à s'éloigner les unes des autres. On peut intuiter que l'évolution d'une position d'équilibre stable admet une asymptote. Nous rappelons que nous n'avons pas pris en compte la gravité dans ces simulations.

5 Modifications des conditions limites

L'objectif de cette partie est de quantifier l'impact des conditions aux limites sur le problème. On conserve la modélisation de la partie 2 concernant le comportement du fluide et celui des particules solides. Nous appliquerons différentes conditions sur les bords Γ_{inf} et Γ_{sup} ainsi qu'en entrée et sortie du tube T .

La première condition que nous allons appliquer est une condition de Robin sur les bords Γ_{inf} et Γ_{sup} . Cette condition est la combinaison d'une condition de Neumann et de Dirichlet comme nous pouvons trouver ainsi que d'autres conditions dans [21]. Cette condition de bords peut permettre de modéliser une paroi rugueuse dont [1] explique la démarche afin d'en faire le lien. Les parois des tuyaux du système de semis ne sont pas parfaitement lisses et nous souhaitons déterminer l'impact de cette condition en supposant des rugosités sur la surface. Ce choix implique un changement de vitesse imposée en entrée et en sortie du tube T , conformément à cette nouvelle condition. [32] présente différents résultats sur l'existence et la régularité de solution satisfaisant cette condition. Nous utiliserons le solveur FreeFem++ pour calculer numériquement l'impact de ces conditions sur les solutions.

L'autre condition pouvant avoir un impact sur la solution est appliquée en entrée et sortie du tube T . Dans les parties précédentes, nous imposions une vitesse \mathbf{u}_∞ sur fluide. [8] applique une condition de contrainte sur fluide au bord du domaine dans le cas d'un domaine borné et fait l'analyse mathématique d'une solution. Dans notre cas, nous allons imposer une condition sur la contrainte du fluide en entrée du tube qui représentera une force qui s'applique sur ce milieu, et en sortie du tube T nous modéliserons une sortie libre. Cette condition est utilisée pour plusieurs raisons. Technologiquement, c'est une turbine qui alimente le circuit pneumatique. Intuitivement, on peut penser que ce système impose une pression assimilée à une force sur le fluide afin de le mettre en mouvement. Une utilisation numérique de cette condition est effectuée dans [12], dans le cas sans particule dans un domaine borné. Dans cette partie, nous étudions numériquement l'impact de l'encombrement sur le débit du fluide en imposant une telle condition.

5.1 Conditions de Robin et rugosité sur les bords

Dans cette partie, nous souhaitons modéliser des parois admettant des rugosités. Pour cela, nous allons appliquer une condition de Robin sur les parois Γ représentant la combinaison d'aspects de glissement et d'adhérence d'une surface. Nous reprenons les équations de la partie 2 pour modéliser et simuler numériquement l'impact de cette condition.

5.1.1 Mise en équation du problème

On travaille avec la géométrie de la partie 2. En reprenant le travail de modélisation effectué dans cette partie, on modélise le comportement du fluide de la façon suivante,

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \mathbb{D}, \quad (107)$$

avec $\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{Id}$.

Le fluide est toujours considéré comme incompressible,

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{D}. \quad (108)$$

Chaque particule j a un comportement satisfaisant les conditions suivantes,

$$\frac{d\mathbf{V}^j}{dt} = -\frac{\alpha^j}{\pi Re \delta^j} \int_{S^j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j, \quad \text{pour } t > 0, \quad (109)$$

et

$$\frac{d\omega^j}{dt} = -\frac{2\alpha_j}{\pi Re \delta^{j^2}} \int_{S_t^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, \quad \text{pour } t > 0. \quad (110)$$

Pour les conditions sur les bords Γ , on impose une condition de non-pénétrabilité du fluide,

$$u_n = 0 \text{ sur } \Gamma. \quad (111)$$

Pour tout $j \in \{1 \dots N\}$, on a la condition de continuité sur S^j

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j. \quad (112)$$

Sur les bords Γ_{inf} et Γ_{sup} , pour modéliser la rugosité possible de la surface du tuyau, la vitesse tangentielle du fluide u_τ respecte la condition suivante

$$\partial_n u_\tau + a u_\tau = K_\tau. \quad (113)$$

où a et K_τ sont des paramètres réels représentant respectivement l'inverse de la taille des rugosités et la vitesse de la paroi (cf [1]).

En entrée et sortie du tube T , on applique toujours une condition sur la vitesse du fluide pour $x_2 \in [-1; 1]$,

$$\lim_{|x_1| \rightarrow +\infty} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}_{rug}(x_2). \quad (114)$$

Remarque 10 La vitesse \mathbf{u}_{rug} est issue de la solution $(\mathbf{u}_{rug}, p_{rug})$ de l'écoulement d'un fluide dans un tube sans particule soumis à un débit Q , où les conditions de bord sur les parois s'écrivent $\partial_n u_{rug_\tau} + a u_{rug_\tau} = K_\tau$.

$$\mathbf{u}_{rug}(x_2) = \left(\frac{6K_\tau - 3aQ}{4(3+a)} (x_2^2 - 1) + \frac{2K_\tau + 3Q}{2(3+a)}, 0 \right),$$

et

$$p_{rug} = \frac{6K_\tau - 3aQ}{2(3+a)} x_1 + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$.

5.1.2 Formulation au sens faible

Nous allons définir la formulation au sens faible du modèle défini dans la partie précédente dans le but de l'implémenter sur le solveur FreeFem++.

Soient $\phi \in H^1(\Omega)$ et $q \in L^2_{loc}(\Omega)$. On effectue le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ de l'équation (107) avec $\phi \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi - \frac{1}{Re} \left(\int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \phi \right) = 0. \quad (115)$$

En effectuant une intégration par parties de l'équation précédente,

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \text{div}(\phi) - \int_{\partial\Omega} 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \cdot \phi + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \phi \right) = 0. \quad (116)$$

On note que $\partial\Omega$ est composé de Γ_{inf} , Γ_{sup} et de la réunion des bords de B^j . On remarque que sur Γ ,

$$[2\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]_{\Gamma} = (\partial_n u_\tau, 0) = (K_\tau - a u_\tau, 0) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2).$$

où $[\cdot]_\Gamma$ correspond à la restriction sur Γ .

De ce fait et en utilisant l'équation (113), on écrit (116)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) \right. \\ & \left. - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)(K_\tau - au_\tau, 0) \cdot \boldsymbol{\phi} + \int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi} - \int_{\overline{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j) \cdot \boldsymbol{\phi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (117)$$

Le problème à résoudre est donc le suivant :

On recherche $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega)$ telles que pour tout $\boldsymbol{\phi} \in H^1(\Omega)$ et pour tout $q \in L^2(\Omega)$, $\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}_{rob, \infty}(x_2)$ et

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \boldsymbol{\phi} + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\boldsymbol{\phi}) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\boldsymbol{\phi}) \right. \\ \left. - \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2)(K_\tau - au_\tau, 0) \cdot \boldsymbol{\phi} + \int_{\partial\Omega} p\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\phi} - \int_{\overline{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j) \cdot \boldsymbol{\phi} \right) = 0, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (118)$$

Nous pouvons trouver des résultats d'existence et de régularité dans [32].

5.1.3 Simulations numériques dans le cas $N = 1$

On souhaite déterminer dans cette partie l'influence d'une condition de bord de type Robin et ses paramètres. Pour cela, on se place dans un domaine rectangulaire de $L = 3$ et $h = 1$ représentant le tube T . On prend une particule dont le carré du rayon vaut $\delta = 4.3 * 10^{-3}$ et le rapport de densité $\alpha = \frac{1}{2}$. Nous souhaitons résoudre (118) sur FreeFem++. Nous utilisons des éléments P2 afin de résoudre les vitesses et P1 pour la pression. Les conditions limites qui seront appliquées sont la vitesse \mathbf{u}_{rug} en entrée et sortie du tube et une condition de Robin sur les bords représentant Γ . On choisit comme débit du fluide $Q = 2$.

Influence de a

On applique une condition de Robin (113) où $K_\tau = 0$ sur les bords Γ . On souhaite déterminer l'impact du paramètre a sur l'évolution d'une position d'équilibre stable et sur l'évolution de la vitesse verticale de la particule V_2 en fonction de sa position.

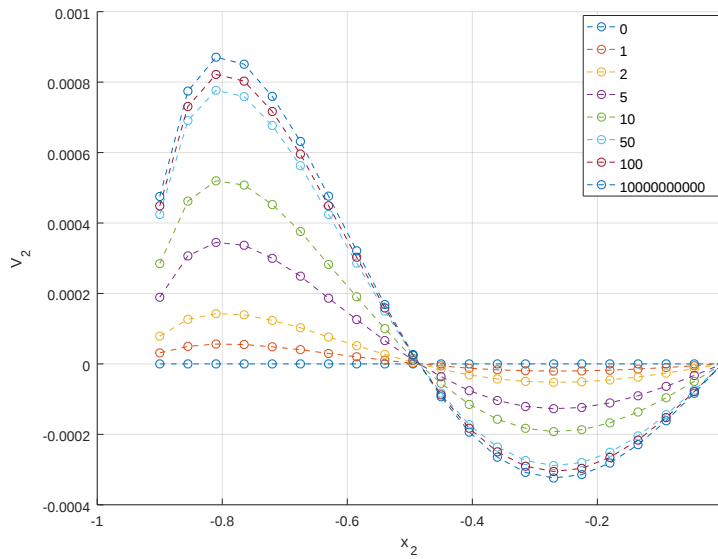


FIGURE 38 – Impact de a sur l'évolution de la vitesse V_2 pour différentes positions de la particule.

La figure 38 indique que le paramètre a n'a pas d'influence sur les positions d'équilibre. Par contre, la dynamique permettant d'atteindre une position d'équilibre stable est diminuée lorsque a est faible.

Influence de K_τ

Dans cette partie, on applique une condition de Robin (38) sur les bords Γ pour $a = 1$ et en faisant varier K_τ afin d'en déterminer son impact.

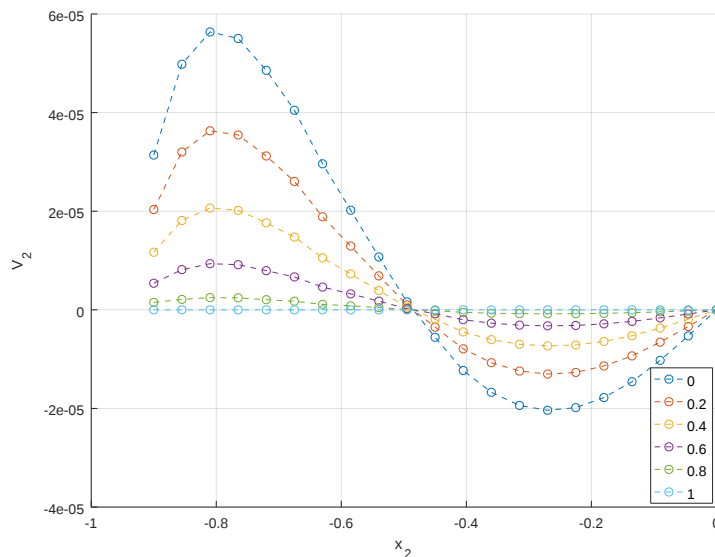


FIGURE 39 – Impact de K_τ sur l'évolution de la vitesse V_2 pour différentes positions de la particule.

De même qu'avec le paramètre a , K_τ n'a pas d'influence sur les positions d'équilibre. La dynamique de la vitesse V_2 est atténuée lorsque K_τ est grand.

On conclut donc que l'application d'une condition de Robin sur les bords Γ n'a pas d'impact sur les positions d'équilibre. Cette condition aura un impact sur la dynamique de la particule.

5.2 Conditions de contrainte en entrée

Dans cette partie, on cherche une autre modélisation de l'entrée et de la sortie du tube T . Le transport des particules dans le semoir est alimenté par une turbine. Le choix d'une modélisation imposant une vitesse au loin des particules, n'est pas totalement représentatif du système physique mais plus conventionnel. Nous souhaitons évaluer numériquement l'impact d'une condition imposant une contrainte en entrée et sortie du tube. Cette modélisation paraît plus intuitive, du fait qu'une turbine impose une force sur le fluide pour le mettre en mouvement. Pour ce faire, nous nous inspirons de ce qui est fait dans [8] et [21], dans le cas d'un domaine borné, pour mettre en place une formulation faible, afin d'implémenter sur Freefem++ et de déterminer l'impact de cette condition sur le débit et la congestion dans le tuyau.

5.2.1 Mise en équation du problème

Pareillement à la partie précédente, on met en équation le problème avec la géométrie de la partie 2 en modélisant le fluide de la façon suivante

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{D}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}d, & \text{sur } \mathbb{D}, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, & \text{sur } \mathbb{D}. \end{cases} \quad (119)$$

Et chaque particule j satisfait les équations de la mécanique classique newtonienne

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}^j}{dt} = -\frac{\alpha^j}{\pi Re \delta^j} \int_{S_j} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j, & \text{pour } t > 0, \\ \frac{d\omega^j}{dt} = -\frac{2\alpha_j}{\pi Re \delta^j} \int_{S_t^j} (\mathbf{r}^j \wedge (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}^j)) \cdot \mathbf{e}_3, & \text{pour } t > 0. \end{cases} \quad (120)$$

On considère qu'il y a toujours non pénétration du fluide et qu'il adhère sur les bords du tube Γ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

On garde la condition de continuité sur les bords S^j pour $j \in \{1 \dots N\}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^j + \omega^j \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{r}^j. \quad (121)$$

L'objectif de cette partie est d'appliquer une condition à l'entrée et sortie du tube T de la forme

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{n}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_e \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{n}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_s, \quad (122)$$

où \mathbf{F}_e est un vecteur représentant une force imposée en entrée du tube et \mathbf{F}_s celui représentant une force en sortie. Généralement on considérera une sortie libre, c'est à dire $\mathbf{F}_s = \mathbf{0}$.

En effectuant le produit de la première équation de (119) sur $L^2(\Omega)$ par $\phi \in H_0^1(\Omega)$ et en utilisant une intégration par partie

$$\int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\phi) \right) = 0. \quad (123)$$

Ainsi, on cherche $(\mathbf{u}, p) \in H^1(\Omega) \times L^2_{loc}(\Omega)$ telles que pour tout $\phi \in H^1(\Omega)$ et $q \in L^2(\Omega)$, $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_e$ et $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\sigma}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot \phi + \frac{1}{Re} \left(2 \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\phi) - \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\phi) - \int_{\bar{B}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^j) \cdot \phi \right) = 0, \\ \int_{\Omega} q \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0. \end{cases} \quad (124)$$

Une analyse mathématique de l'existence et de la régularité est présente dans [8].

5.2.2 Influence d'une force en entrée sur le fluide pour $N = 1$

Comme dans les sections précédentes, nous nous plaçons dans un domaine rectangulaire de longueur $L = 3$ et largeur $h = 1$. Nous prenons comme nombre de Reynolds $Re = 2$. La particule a un rapport de densité $\alpha = \frac{1}{2}$ et un rayon de $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$. Les espaces P2 et P1 seront utilisés pour résoudre les vitesses et la pression solution de (124). On applique une condition sur la contrainte sur le bord représentant l'entrée du tube et en sortie une condition de sortie libre.

On souhaite, tout d'abord, déterminer l'influence de $\mathbf{F}_e = (F_e, 0)$ sur les positions d'équilibre ainsi que sur la vitesse verticale de la particule V_2 .

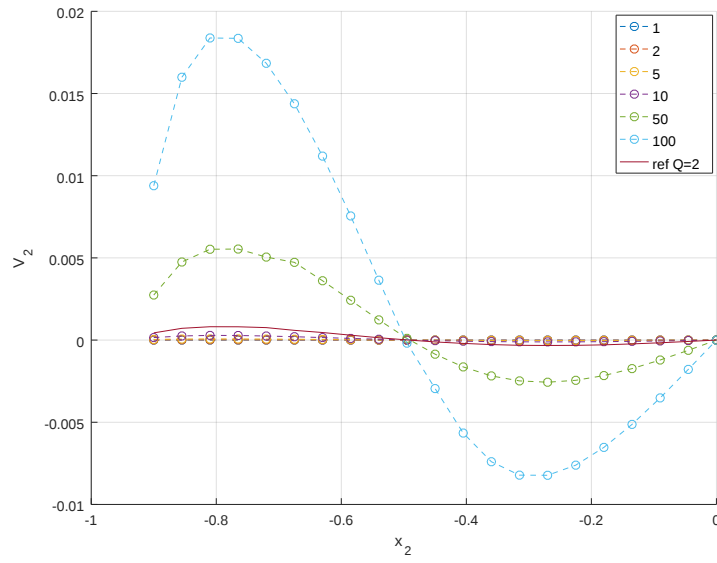


FIGURE 40 – Vitesse V_2 en fonction de x_2 pour différentes valeur de F_e .

Le paramètre F_e n'a pas d'influence sur la position d'équilibre stable mais l'augmentation de ce paramètre augmente aussi la dynamique du problème. Ce paramètre représentant une pression appliquée sur le fluide, nous regardons son impact sur la vitesse horizontale de la particule.

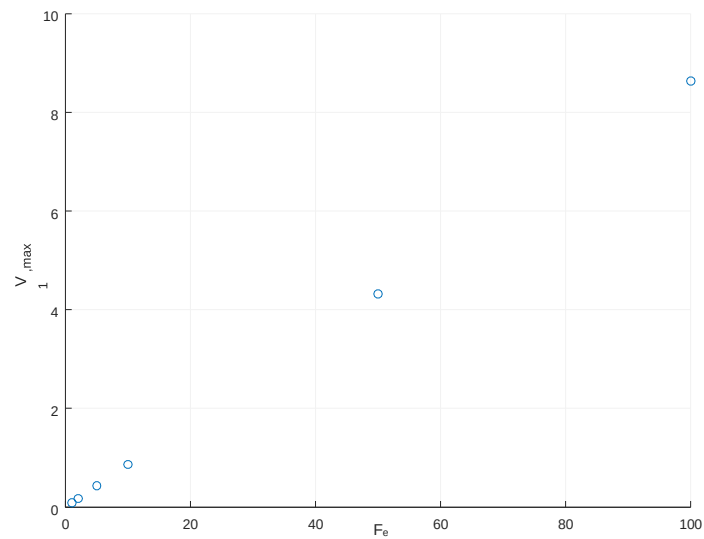


FIGURE 41 – Évolution du maximum de la vitesse V_1 (en $x_2 = 0$) en fonction de F_e .

La vitesse d'avancement de la particule est donc proportionnelle à la force appliquée sur le fluide en entrée.

5.2.3 Influence de l'encombrement dans le cas $N = 20$

L'objectif de cette partie est de déterminer l'influence de l'encombrement du tube sur l'écoulement des particules (le débit du fluide). Une problématique soulevée par l'équipe de l'INRAE est la formation de bouchons due à l'incapacité du fluide à transporter un grand nombre de graines à la fois. Cette problématique peut être prise en compte par le choix de la modélisation de la partie précédente, c'est à dire l'application d'une force afin de mettre en mouvement le fluide.

Numériquement, afin de reproduire ce phénomène, nous allons disposer un nombre N de particules dans un tube, positionnées aléatoirement et nous calculons le débit effectif du fluide en sortie. Nous réitérons ce procédé 1000 fois et nous affichons les configurations des particules correspondant aux cas pour les 3 débits les plus élevés et les 3 débits les plus faibles.

Dans un domaine de longueur $L = 4$ et $h = 1$, nous disposons aléatoirement 20 particules comprises dans un rectangle de demi-longueur 3 et largeur 1 (nous laissons une distance entre le bord et la position des premières particules afin que le profil de la vitesse du fluide se stabilise en entrée) que nous représentons par un disque de rayon $R = 0.067$ ($\delta = 0.0043$). En entrée, on applique une contrainte sur le fluide de valeur $F_e = 0.5$ et une sortie libre.

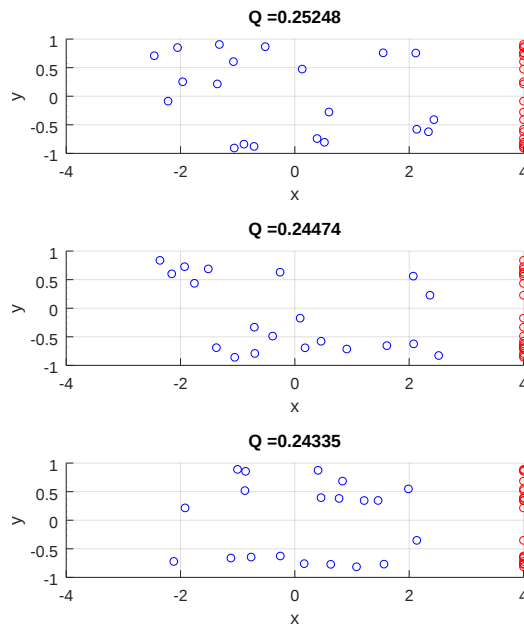


FIGURE 42 – Configurations avec les débits les plus élevés.

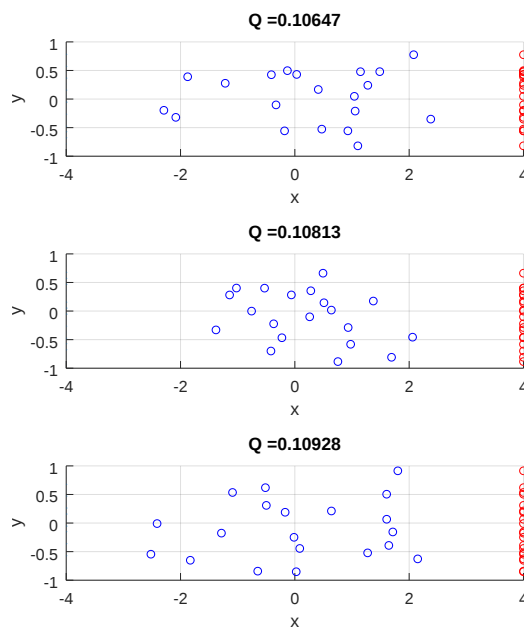


FIGURE 43 – Configurations avec les débits les plus faibles.

La première conclusion que nous pouvons faire est la variation du débit du fluide en fonction de l'emplacement des particules. Ce modèle de condition en entrée appliqué sur le fluide tend à respecter les intuitions de l'équipe de l'INRAE et l'hypothèse faite d'une modélisation plus fidèle de ce qu'impose une turbine sur le fluide.

En projetant les particules sur la sortie du tube, nous remarquons, d'après les figures 42 et 43, que dans le cas des débits les plus élevés, les particules sont réparties sur les extrémités du tube. On remarque l'absence de particules au centre contrairement aux cas des débits les plus faibles. Ceci peut s'expliquer par le fait que la contrainte en entrée induit une vitesse ayant un profil similaire à celle dans le cas d'un écoulement de Poiseuille et donc la valeur de la vitesse du fluide est plus élevée au centre du tube.

Une condition sur la contrainte en entrée du tube n'influe pas sur les positions d'équilibre stables du problème. Or il existe une influence mutuelle entre la position et les vitesses des particules avec le débit et donc la vitesse du fluide.

6 Conclusion

L'objectif de la collaboration entre le laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal et l'INRAE est de comprendre, au travers d'une approche numérique, la perte de régularité lors du semi. Pour répondre à cette problématique, nous avons fait le choix d'étudier la conservation de la distance entre les particules, lors de leur transport, en recherchant des configurations conservant la régularité.

Dans le cas de deux particules, les seules positions d'équilibre mis en évidence, à faible turbulence, sont celles reproduisant une symétrie au problème. Or ces configurations étant instables, nous ne pouvons les prendre en considération dans le cas réel. De ce fait, le comportement qui est mis évidence, est l'éloignement des deux particules entre elles lors du transport. Afin de comprendre la formation de bouchons dans le semoir, il faudra utiliser plus de particules dans la simulation.

Dans le cas d'une particule, seule dans l'écoulement, nous remarquons des positions d'équilibre stables où la particule se déplace sans variation de vitesse lors du transport. L'impact de la turbulence du fluide et de la densité de la particule, déplace uniquement ces positions dans le tube.

D'un point de vue numérique, nous utilisons aussi des conditions aux limites moins conventionnelles, mais paraissant plus adaptées au problème réel. Une étude plus approfondie de l'impact de ces conditions sur les particules pourrait être envisagée.

Mathématiquement, nous avons un algorithme pouvant résoudre l'écoulement tubulaire d'un fluide, transportant N particules à de faible turbulence.

Cette thèse est soumise à plusieurs choix et hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, nous avons choisi de travailler sur une géométrie bidimensionnelle afin de simplifier l'étude mathématique et limiter les temps de calcul. Pour travailler sur une géométrie tridimensionnelle, nous avons appréhendé le logiciel de calcul OpenFoam et nous avons tenté d'appliquer les méthodes utilisées sur ce logiciel.

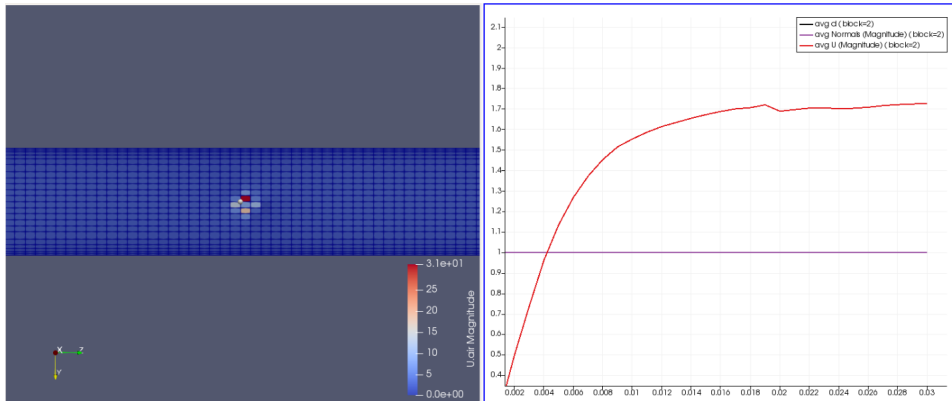


FIGURE 44 – Exemple de simulation sur OpenFoam : Évolution de la vitesse d’une particule lors d’un écoulement dans un tube.

La géométrie utilisée représente un tube droit. La prise en compte de l’aspect coudé des tuyaux du semoir pourrait être une étape supplémentaire à cette étude. De même, la prise en compte de la diversité des formes, densités et tailles de graines est une piste potentielle d’amélioration de cette thèse.



FIGURE 45 – Comparaison de différentes graines : colza, blé, soja, féverole, maïs.

La modélisation du comportement des milieux fluide et solide, est effectuée au travers des modèles classiques pour ces milieux. Afin d'enrichir le modèle, nous avons travaillé avec différentes conditions sur les limites du tube mais ceci n'exclut pas la possibilité d'utiliser d'autres modèles plus fidèles à l'outil agricole. Notamment, la prise en compte des contacts des particules entre elles ou avec les parois, peut être implémentée en s'inspirant des modèles de [23] et [35], appliqués à notre problème.

Lors de cette thèse, nous nous sommes concentrés sur le transport dans les tubes, pour expliquer la perte de régularité lors du semis. D'autres parties technologiques du semoir peuvent être responsables de cette perte, telles que la tête de distribution et la répartition des particules dans les différentes sorties.

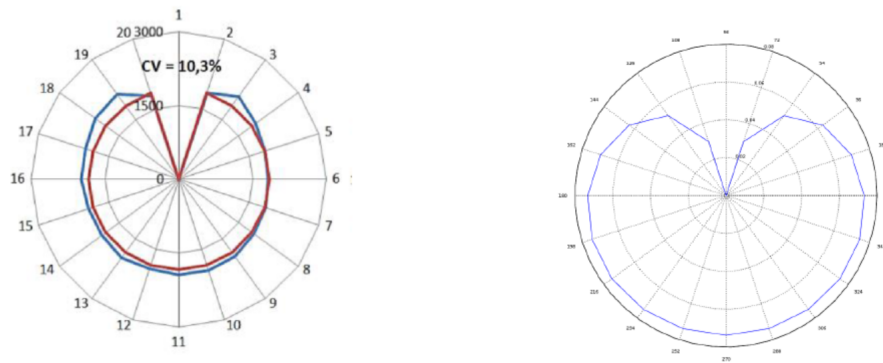


FIGURE 46 – Étude de la tête de distribution lors du bouchage d'une sortie. À gauche, graphe issu de [36] montrant la répartition des graines dans chaque sortie de la tête de distribution en bouchant un orifice. À droite, la répartition des débits du fluide dans chaque entrée de tube en bouchant une sortie, réalisé sur FreeFem++.

Une étude expérimentale d'un semoir agricole est présentée dans [36] et une modélisation de cette partie pourrait être envisagée.

7 Bibliographie

Références

- [1] Y Achdou, O Pironneau, and F Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *Journal of Computational Physics*, 147(1) :187–218, 1998.
- [2] G Allaire. *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [3] C Amrouche and A Rejaiba. Lp-theory for stokes and navier–stokes equations with navier boundary condition. *Journal of Differential Equations*, 256(4) :1515–1547, 2014.
- [4] P Angot. A unified fictitious domain model for general embedded boundary conditions. *Comptes Rendus Mathématique*, 341(11) :683–688, 2005.
- [5] P Angot, CH Bruneau, and P Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81(4) :497–520, 1999.
- [6] Marsha J Berger and J Olinger. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of computational Physics*, 53(3) :484–512, 1984.
- [7] W Bizid. *Développement de méthodes de pénalisation pour la simulation de l’écoulement turbulent autour d’obstacles*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2017.
- [8] F Boyer and P Fabrie. *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, volume 183. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] S C Brenner and L Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 3. Springer, 2008.
- [10] L Chupin and N Cindea. Numerical method for inertial migration of particles in 3d channels. *Computers & Fluids*, 192 :104246, 2019.
- [11] A Doradou. *Simulation numérique d’écoulements diphasiques autour d’un solide mobile*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 2017.

- [12] J Fabricius. Stokes flow with kinematic and dynamic boundary conditions. *arXiv preprint arXiv :1702.03155*, 2017.
- [13] G Galdi. Mathematical problems in classical and non-newtonian fluid mechanics. In *Hemodynamical flows*, pages 121–273. Springer, 2008.
- [14] G Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations : Steady-state problems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [15] V Girault and P-A Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations : theory and algorithms*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] R Glowinski, TW Pan, TI Hesla, D Joseph, and J Periaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : application to particulate flow. *Journal of computational physics*, 169(2) :363–426, 2001.
- [17] S Gounand. *Introduction à la méthode des éléments finis en mécanique des fluides incompressibles*. 2012.
- [18] F Hecht, O Pironneau, A Le Hyaric, and K Ohtsuka. Freefem++ manual, 2005.
- [19] H H Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2) :335–352, 1996.
- [20] J Janela, A Lefebvre, and B Maury. A penalty method for the simulation of fluid-rigid body interaction. In *ESAIM : Proceedings*, volume 14, pages 115–123. EDP Sciences, 2005.
- [21] A Jazayeri and A D Werner. Boundary condition nomenclature confusion in groundwater flow modelling. 2019.
- [22] A Lefebvre. Fluid-particle simulations with freefem++. In *Esaim : Proceedings*, volume 18, pages 120–132. EDP Sciences, 2007.
- [23] A Lefebvre. *Modélisation numérique d’écoulements fluide-particules : prise en compte des forces de lubrification*. PhD thesis, Paris 11, 2007.
- [24] B Maury. Direct simulations of 2d fluid-particle flows in biperiodic domains. *Journal of computational physics*, 156(2) :325–351, 1999.

- [25] B Maury. Numerical analysis of a finite element/volume penalty method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2) :1126–1148, 2009.
- [26] C S Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of computational physics*, 10(2) :252–271, 1972.
- [27] O Pironneau, J Liou, and T Tezduyar. Characteristic-galerkin and galerkin/least-squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1) :117–141, 1992.
- [28] I Ramiere, P Angot, and M Belliard. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(4-6) :766–781, 2007.
- [29] TN Randrianarivelo, G Pianet, S Vincent, and JP Caltagirone. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 47(10-11) :1245–1251, 2005.
- [30] P Saramito. *Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes*. PhD thesis, Mathématiques appliquées, 2013.
- [31] R S Subramanian. Boundary conditions in fluid mechanics. *Department of Chemical and Biomolecular Engineering, Clarkson University*, 2019.
- [32] P A Tapia, C Amrouche, C Conca, and A Ghosh. Stokes and Navier-Stokes equations with Navier boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, 285 :258–320, 2021.
- [33] R Temam. *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*, volume 343. American Mathematical Soc., 2001.
- [34] D J Tritton. *Physical fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] N Verdon, A Lefebvre-Lepot, L Lobry, and P Laure. Contact problems for particles in a shear flow. *European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique*, 19(5-7) :513–531, 2010.
- [36] A Yatskul. *Modélisation et optimisation énergétique des organes d'un semoir pneumatique*. PhD thesis, Dijon, 2016.

Modélisation et simulation du comportement de particules dans des écoulements de fluides confinés : application aux machines de semis.

Résumé : Le but de cette thèse est d'apporter une solution numérique aux problèmes rencontrés dans un semoir agricole notamment lors du transport des graines dans les tubes. Dans une première partie, en nous focalisant sur la phase de transport des particules, nous mettons en équations le problème physique dans le cas bidimensionnel. Nous choisissons un modèle de Navier Stokes dans le cas incompressible pour représenter le comportement du fluide et les équations de la mécanique classique newtonienne pour les particules. Pour les conditions aux limites et aux interfaces, nous choisissons dans les modèles les plus courants rencontrés dans la littérature. La deuxième partie est consacrée à la recherche de positions d'équilibre des particules dans un tube droit infini. Nous souhaitons savoir si dans certaines configurations, les particules conservent leurs distances entre elles au cours du mouvement. Nous travaillons dans le cas stationnaire et pour un nombre de Reynolds très petit afin de déterminer l'existence et l'unicité du problème à N particules. Une étude numérique, à l'aide du solveur FreeFem++, est effectuée dans le cas de deux particules afin de déterminer ces positions ainsi que leur stabilité. La dernière partie est une étude numérique, avec le solveur FreeFem++, de l'évolution des positions d'équilibre en changeant certaines conditions aux limites. Afin de modéliser au plus proche le tuyau, nous considérons des rugosités à l'interface et pour la turbine, alimentant le système pneumatique, nous considérons qu'elle impose une pression au fluide et non une vitesse.

Mots-clés : Mécanique des fluides, mécanique newtonienne, interface fluide/structure, conditions limites, adimensionnement, Navier-Stokes, positions d'équilibres, simulations numériques, FreeFem++, machines de semis.

Mathematical model and numerical simulation of the behavior of particles in fluid flows confined : application to seed drills.

Abstract : The aim of this thesis is to bring a numerical solution to problems related to seed drills, particularly in the transportation of the grains inside the tubes. In the first part, we describe the bidimensional case in equations, focusing on the stage of transportation of particles. We choose a Navier Stokes model in the incompressible case in order to represent the behavior of the fluid and the equations of the classical Newtonian mechanics for the particles. For the limit and interface conditions, we choose, among the models, the most recent ones that can be found in the literature. The second part is focused on the search for equilibrium positions of particles inside an infinite straight tube. Our goal is to know if, in certain settings, the particles maintain their distance during the movement. We work on the stationary case and for a very small Reynolds number in order to determine the existence and unicity of the N particles problem. A numerical approach, with the aid of the solver FreeFem++, is made in the case of two particles with the aim to determine these positions as well as their stability. The third and last part is again a numerical study, still with the solver FreeFem++, on the evolution of equilibrium positions when we change certain limit conditions. In order to model the real-life situation as accurately as we can, we consider some roughness in the interface moreover we assume that the turbine powering the pneumatic system applies a pressure on the fluid and not a velocity.

Keywords : Fluids mecanics, Newtonian mechanics, boundaries conditions, Navier-Stokes, equilibrium positions , numerical simulation, FreeFem++, seed drill.