



**HAL**  
open science

# Normes sur le groupe des contactomorphismes et contactisation de domaines étoilés, leurs géodésiques et leurs caractéristiques translitées.

Pierre-Alexandre Arlove

► **To cite this version:**

Pierre-Alexandre Arlove. Normes sur le groupe des contactomorphismes et contactisation de domaines étoilés, leurs géodésiques et leurs caractéristiques translitées.. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Strasbourg, 2021. Français. NNT : 2021STRAD019 . tel-03700704v2

**HAL Id: tel-03700704**

**<https://theses.hal.science/tel-03700704v2>**

Submitted on 21 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Pierre-Alexandre Arlove**

**Normes sur le groupe des contactomorphismes  
et contactisation de domaines étoilés, leurs  
géodésiques et leurs caractéristiques  
translatées**

Soutenue le 9 juillet 2021  
devant la commission d'examen

Mihai Damian, directeur de thèse  
Sheila Sandon, directrice de thèse  
Miguel Abreu, co-directeur de thèse  
Vincent Colin, rapporteur  
Felix Schlenk, rapporteur  
Jean-François Barraud, examinateur  
Yohann Le Floch, examinateur  
Emmanuel Opshtein, examinateur

[irma.math.unistra.fr](http://irma.math.unistra.fr)

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mille fois Margherita Sandon, ma directrice de thèse, qui a eu confiance en moi et qui m'a guidé pendant plus de quatre ans pour réaliser ce projet. Sa patience, son humilité, sa sincérité ainsi que sa curiosité ont été pour moi une grande source d'inspiration et de motivation.

Je suis également très reconnaissant envers Mihai Damian, mon directeur de thèse, pour son appui et son soutien tout au long de mon parcours doctoral.

Ma codirection à l'Instituto Superior Tecnico de Lisbonne encadrée par Miguel Abreu a été une expérience très enrichissante. Je remercie Miguel Abreu pour l'accueil chaleureux qu'il m'a réservé ainsi que pour ses questions et son recul qui ont été cruciaux dans ce travail.

Durant cette thèse je me suis beaucoup intéressé à certains travaux de Vincent Colin et de Felix Schlenk. C'est donc un réel honneur pour moi qu'ils aient accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, je les en remercie.

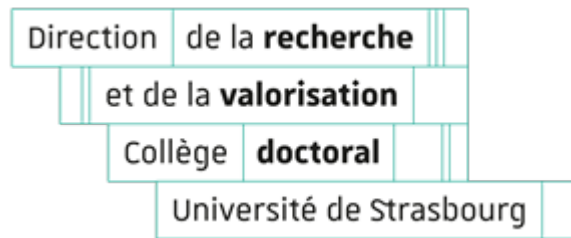
Je remercie également Jean-François Barraud, Emmanuel Ophstein et Yohann le Floch qui ont suivi l'avancement de cette thèse durant ces quatre années et qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie l'IRMA ainsi que tout son personnel pour les excellentes conditions de travail dont j'ai pu bénéficier.

J'ai par ailleurs eu la chance de me lier de vrais amitiés durant mon passage à l'Université de Strasbourg. Je pense tout d'abord à Francisco, Martin et Valdo avec qui nous avons partagé des moments inoubliables et très précieux à mes yeux. Je les remercie d'avoir toujours été à mes côtés. Je remercie chaleureusement mes cobureaux Djibril, Yohann, Francisco et Valdo qui ont rempli le bureau 114 de leur bonne humeur. Je remercie également Nicolas, Guillaume, Philippe et Claire pour leurs conseils d'anciens. Je remercie Alexander, Laura, Frederic, Cuong, Simao, Kien, Thibault, Lukas, Philippe, Firat, Tsung Hsuan, Marie, Romane, Guillaume, Lorenzo, Sonia, Elena, Xing et tous les autres doctorants, pour les déjeuners, les discussions, les cafés qui ont fait de ces quatre années une aventure agréable, stimulante et enrichissante.

Je remercie du fond du coeur Olimpia pour l'équilibre qu'elle m'apporte, ses encouragements qui me motivent tous les jours à donner le meilleur de moi-même et pour la relecture de ce manuscrit.

Enfin je remercie ma famille pour son soutien inconditionnel. Ma petite soeur Julie pour tout ce qu'elle est et ce qu'elle m'apporte. Ma maman qui a fait de mon éducation une de ses priorités. Et enfin mon papa qui m'a initié à la beauté des mathématiques et qui a toujours su nourrir ma curiosité.



## Déclaration sur l'honneur *Declaration of Honour*

J'affirme être informé que le plagiat est une faute grave susceptible de mener à des sanctions administratives et disciplinaires pouvant aller jusqu'au renvoi de l'Université de Strasbourg et passible de poursuites devant les tribunaux de la République Française.

Je suis conscient(e) que l'absence de citation claire et transparente d'une source empruntée à un tiers (texte, idée, raisonnement ou autre création) est constitutive de plagiat.

**Au vu de ce qui précède, j'atteste sur l'honneur que le travail décrit dans mon manuscrit de thèse est un travail original et que je n'ai pas eu recours au plagiat ou à toute autre forme de fraude.**

*I affirm that I am aware that plagiarism is a serious misconduct that may lead to administrative and disciplinary sanctions up to dismissal from the University of Strasbourg and liable to prosecution in the courts of the French Republic.*

*I am aware that the absence of a clear and transparent citation of a source borrowed from a third party (text, idea, reasoning or other creation) is constitutive of plagiarism.*

***In view of the foregoing, I hereby certify that the work described in my thesis manuscript is original work and that I have not resorted to plagiarism or any other form of fraud.***

**Nom : ARLOVE Prénom : Pierre-Alexandre**

**Ecole doctorale : MSII 269**

**Laboratoire : IRMA**

**Date : 16 août 2021**

**Signature :**

# Introduction

## Contexte

Les structures de contact apparaissent de manière naturelle lors de la formalisation d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 ou encore lors de la formalisation de problèmes de propagation d'ondes. Dès la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle S. Lie s'intéresse aux changements de variables qui préservent la structure de contact canonique de la variété des 1-jets de l'espace de configurations d'un système physique. Il démontre que ces changements de variables préservent également les solutions des équations aux dérivées partielles d'ordre 1 considérées sur l'espace de configurations. D'autre part, la théorie de propagation des ondes lumineuses de C. Huygens, qui décrit l'évolution de fronts d'ondes, se formule très clairement lorsque l'on munit la variété des éléments de contact de l'espace physique où se propage cette lumière de sa structure de contact canonique ([25], [3]).

L'étude de la géométrie de l'espace des contactomorphismes d'une variété de contact a été introduite quant à elle bien plus tard par Y. Eliashberg et L. Polterovich en 2000 [20]. Ils définissent pour cela une relation binaire partielle qui est réflexive, transitive et bi-invariante sur le revêtement universel du groupe des symétries d'une variété de contact. Ils montrent que sous certaines conditions de rigidités géométriques d'une variété de contact - à savoir la persistance d'intersection entre domaines lors de transformations qui préservent la structure de contact - la relation binaire est antisymétrique et définit donc une relation d'ordre partiel. Les variétés de contact pour lesquelles la relation binaire partielle ainsi définie est une relation d'ordre partiel sont dites ordonnables.

En utilisant des rigidités géométriques similaires et en attribuant un nombre à ces intersections, S. Sandon [41] construit la première norme invariante par conjugaison non bornée sur le groupe des contactomorphismes de  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  qui sont à support compact et dans la composante neutre de l'identité. Depuis plusieurs normes invariantes par conjugaison non bornées ont été construites sur le groupe des contactomorphismes d'une variété de contact, et sur le revêtement universel de ce groupe ([21], [55], [16]). D'après des résultats de D. Burago, S. Ivanov et L. Polterovich [10] et T. Tsuboi [51], [52], ces normes utilisent nécessairement des propriétés de rigidité de la structure de contact de la variété sous-jacente. En effet, ces auteurs ont démontré que les normes invariantes par conjugaison sur le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte ne peuvent être non bornées en raison d'une trop grande flexibilité de la structure différentielle.

En contre partie, Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [19] montrent que pour une grande famille de variétés de Liouville, le bord de contact idéal d'un élément de cette famille est non ordonnable. S. Courte et P. Massot [17] démontrent qu'il n'existe pas de normes invariantes par conjugaison non bornées sur ces variétés en raison de la flexibilité de leurs legendriennes. Une autre flexibilité géométrique dans ce cas se traduit par l'existence de tassements dans la contactisation de la variété de Liouville [19]. Ces tassements sont construits grâce à une bijection entre les chemins positifs de contactomorphismes du bord de contact idéal d'une variété de Liouville et les domaines étoilés fibre-par-fibre de la contactisation de cette variété de Liouville.

## Résultats principaux

Nous introduisons dans cette thèse la notion de géodésique pour la norme discriminante, la norme d'oscillation [16] et celle de E. Shelukhin [44]. Bien qu'en géométrie symplectique les géodésiques de la métrique de Hofer sur le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens aient suscité beaucoup d'intérêt grâce aux liens qu'elles entretiennent avec des résultats profonds de

rigidité symplectique ([36], [9], [30]), les géodésiques dans le cas des normes sur le groupe des contactomorphismes n'avaient jusqu'ici pas été étudiées. Lorsque la variété de contact est  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  munie de sa structure de contact standard, nous trouvons des conditions suffisantes sur la fonction hamiltonienne qui engendre un chemin de contactomorphismes pour que ce chemin soit une géodésique pour toutes les normes considérées. Cela nous permet de calculer explicitement la norme discriminante, la norme d'oscillation, celles de E. Shelukhin et de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21] de certains contactomorphismes en fonction du maximum et du minimum de la fonction hamiltonienne qui l'engendre, et de donner une nouvelle démonstration du caractère non borné de ces normes. Plus précisément, en fixant la forme de contact standard  $\alpha_{st}$  sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ , pour toute fonction hamiltonienne à support compact  $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , nous notons  $\phi_h$  le chemin lisse de contactomorphismes à support compact associé. En notant  $\mathcal{L}_d$  la longueur discriminante de ce chemin et  $\nu_d$  la norme discriminante sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  nous montrons le théorème suivant.

**Théorème 0.1.** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit suffisamment petite, i.e.  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} ||| \text{Hess}_p(H) ||| < 2\pi$ . Supposons de plus que 0 soit une valeur*

*régulière de  $H$  à l'intérieur de son support, c'est-à-dire que  $d_p H \neq 0$  pour tout  $p \in \text{Supp}(H) \cap H^{-1}\{0\}$ . Notons  $\phi_h$  le chemin de contactomorphismes engendré par la fonction hamiltonienne*

$$h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, z) \mapsto H(p) .$$

*Alors pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ , le chemin lisse de contactomorphismes  $\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}$  est une géodésique pour la norme discriminantes  $\nu_d$ . Plus précisément nous avons :*

$$\mathcal{L}_d(\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}) = \nu_d(\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}) = \max \{ \lfloor \max h \rfloor + 1, \lfloor -\min h \rfloor + 1 \} .$$

Nous montrons également des théorèmes similaires pour la norme d'oscillation, et celles de E. Shelukhin et de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen. Il est intéressant de noter que toute fonction hamiltonienne à support compact  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie les hypothèses du théorème 4.3 engendre un chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens qui est une géodésique de la métrique de Hofer.

Les variétés de contact pour lesquelles l'existence d'une norme invariante par conjugaison non bornée sur le revêtement universel du groupe de leurs contactomorphismes a été prouvée [42], [16], [21], [55] ont la particularité d'admettre un flot de Reeb périodique. Dans le cas d'une variété de contact n'admettant pas de flot de Reeb périodique, il ne figure à ce jour aucun résultat d'existence de normes invariantes par conjugaison non bornées sur le revêtement universel du groupe de ses contactomorphismes. Nous montrons néanmoins que sans l'hypothèse d'existence de flot de Reeb périodique, la norme de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen peut encore être définie sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes de toute variété de contact compacte ordonnable. Cette norme est encore non bornée, par contre, elle n'est *a priori* plus invariante par conjugaison. Nous calculons explicitement la norme d'un grand ensemble d'éléments, qui contient strictement la classe des itérés du flot de Reeb, lorsque la variété de contact considérée est le cotangent unitaire du tore - variété de contact compacte ordonnable n'admettant pas de flot de Reeb périodique. Plus précisément pour tout entier  $n$  plus grand que 2 nous identifions le cotangent unitaire du tore à la sous-variété  $\left( \mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker} \left( \sum_{i=1}^n p_i dq_i \right) \right)$  incluse dans  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , où  $(p_1, \dots, p_n)$  désignent les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$  et où  $(dq_1, \dots, dq_n)$  désignent les 1-formes de canoniques de  $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ . En notant  $\alpha$  la 1-forme de contact  $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$  et  $\widetilde{\nu}^\alpha$  la norme étudiée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  nous montrons le théorème suivant.

**Théorème 0.2.** Soit  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse et considérons la fonction hamiltonienne

$$h : \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (q, p) \mapsto f(p) .$$

Nous avons alors

$$\widetilde{\nu}^\alpha([\phi_h]) = \max \{ \lceil \max h \rceil, \lceil -\min h \rceil \} .$$

De plus pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$

$$\widetilde{\nu}^\alpha([\phi \circ \phi_h \circ \phi^{-1}]) \geq \widetilde{\nu}^\alpha([\phi_h]) .$$

Ce théorème nous permet de retrouver le fait que la norme  $\widetilde{\nu}^\alpha$  est non bornée. De plus la deuxième affirmation reflète une certaine rigidité du cotangent unitaire du tore qui n'existe pas dans la variété de contact qu'est l'espace euclidien muni de sa structure de contact standard  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker}(\alpha_{st}))$ . En effet, bien que cette dernière variété de contact soit ordonnable et que nous pouvons bien définir la norme non bornée  $\widetilde{\nu}^{\alpha_{st}}$  sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker}(\alpha_{st}))$ , pour tout élément  $[\{\phi^t\}]$  de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker}(\alpha_{st}))$ , il est possible de conjuguer  $[\{\phi^t\}]$  par un contactomorphisme  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker}(\alpha_{st}))$  tel que la norme  $\nu^{\alpha_{st}}$  de  $[\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}]$  soit égale à 1. Ce théorème et sa démonstration nous amènent de plus à construire des applications invariantes par conjugaison non bornées sur le revêtement universel du groupe de contactomorphismes du cotangent unitaire du tore. Ces applications ont toutes les propriétés d'une norme sauf celle de l'inégalité triangulaire qu'il reste à démontrer ou à infirmer.

Enfin, motivés par la bijection que Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich exhibent entre les chemins positifs de contactomorphismes du bord de contact idéal d'une variété de Liouville et les domaines étoilés fibre-par-fibre de la contactisation de cette variété de Liouville ainsi que par les résultats géométriques qui s'en déduisent [19], [21], nous définissons un nouvel ensemble de nombres associé aux domaines de la contactisation de variétés de Liouville dans le but d'étudier la norme discriminante et la norme d'oscillation. Par analogie au cas symplectique, où le spectre symplectique d'un ouvert est défini comme l'ensemble des aires des caractéristiques fermées de son bord, nous définissons le spectre de contact d'un ouvert de la contactisation d'une variété de Liouville, ou même plus généralement d'une variété symplectique exacte. Pour ce faire, nous attribuons des nombres à certaines caractéristiques particulières d'une hypersurface provenant du bord de l'ouvert considéré. Nous définissons alors le spectre de contact de l'ouvert en question comme l'ensemble de ces nombres. La particularité de ces caractéristiques provient du fait qu'elles se referment lorsque nous y attachons une corde de Reeb. Nous appelons ces caractéristiques des caractéristiques translâtées, et le nombre que nous attribuons à une caractéristique translâtée est la longueur de la corde de Reeb qui permet de la fermer. Nous montrons que le spectre de contact généralise la notion du spectre dans le cas d'une variété symplectique exacte, et que l'ensemble des valeurs entières du spectre de contact est un invariant de contact. Plus précisément, si  $(W, \omega = d\lambda)$  désigne une variété symplectique exacte et  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  sa contactisation, nous montrons le théorème suivant.

**Théorème 0.3.** Soit  $U \subset W \times S^1$  un ouvert dont le bord est lisse, nous avons alors pour tout contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  :

$$\text{Spectre}(U) \cap \mathbb{Z} = \text{Spectre}(\phi(U)) \cap \mathbb{Z} .$$

De plus si  $U = \mathcal{U} \times S^1$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $(W, \omega = d\lambda)$  dont le bord est une hypersurface alors

$$\text{Spectre}(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U}) ,$$

où  $\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U})$  désigne le spectre symplectique de  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire l'ensemble des aires des caractéristiques fermées du bord de  $\mathcal{U}$ .

En particulier, la deuxième affirmation du théorème précédent nous assure que le spectre de contact de la contactisation d'un ouvert  $\mathcal{U}$  inclus dans  $(W, \omega = d\lambda)$  est non vide dès que le spectre symplectique de  $\mathcal{U}$  est non vide. Nous montrons également plusieurs liens entre la longueur discriminante et la longueur d'oscillation d'un chemin strictement positif de contactomorphismes du bord de contact idéal d'une variété de Liouville et le spectre de contact du domaine étoilé fibre-par-fibre que Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [19] associent à ce chemin. Par exemple nous montrons que lorsqu'un chemin de contactomorphismes est engendré par une fonction hamiltonienne autonome strictement positive, sa longueur discriminante et sa longueur d'oscillation est égale à la plus petite valeur du spectre de contact de son domaine associé. De plus la question d'existence de caractéristiques translées pour des hypersurfaces de la contactisation d'une variété de Liouville est une question en soi. En effet, dans le cas symplectique la question d'existence de caractéristiques fermées sur le bord d'ouverts a été intensément étudiée et a motivé le développement de nouveaux outils telles que les capacités de C. Viterbo [54] et de Hofer-Zendher [30].

## Guide pour le lecteur

Dans le premier chapitre de cette thèse nous introduisons la notion de normes invariantes par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes et son revêtement universel ainsi que la relation binaire introduite par Y. Eliashberg et L. Polterovich [20] sur le revêtement universel de ce groupe. En particulier nous énonçons et démontrons le théorème de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21] concernant le caractère discret de toute norme invariante par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes. En suivant Y. Eliashberg et L. Polterovich [20] nous montrons également qu'une variété de contact admettant un sous-ensemble avec la propriété stable d'intersection est une variété de contact ordonnable. Dans la dernière section de ce chapitre nous discutons de quelques liens entre l'ordonnabilité (resp. la non ordonnabilité) d'une variété et l'existence (resp. l'absence) de normes invariantes par conjugaison non bornées sur le groupe des contactomorphismes de la variété de contact ([41], [21], [17]).

Au deuxième chapitre nous énonçons et donnons une idée de démonstration du théorème d'existence de chemin de fonctions génératrices pour les chemins de legendriennes de l'espace des 1-jets d'une variété compacte partant de la section nulle [35], [12], [11]. Nous utilisons ce résultat pour démontrer que l'espace des 1-jets d'une variété compacte et certains cotangents unitaires de variétés compactes admettent des sous-ensemble avec la propriété d'intersection stable. Nous retrouvons donc les résultats d'ordonnabilité de ces variétés de contact déjà établis par d'autres auteurs [15], [20]. Nous décrivons également comment S. Sandon [42] utilise ce résultat d'existence de fonctions génératrices pour montrer que tout contactomorphisme à support compact, différent de l'identité, de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  munie du noyau de sa forme de contact standard a des points translés non triviaux. Un point translé non trivial pour un contactomorphisme dans ce contexte, par définition, est d'une part un point dont l'image par ce contactomorphisme est donné par une translation non nulle dans la direction  $S^1$  et, d'autre part, un point où la forme de contact standard est préservée par ce contactomorphisme. Cette direction  $S^1$  est en fait la direction du flot de Reeb associé à la forme de contact standard. Nous détaillons alors la construction du sélecteur de translation de S. Sandon [42] qui à un contactomorphisme à support compact dans la composante connexe de l'identité lui associe la translation d'un de ses points translés, ainsi que la construction de la norme invariante par conjugaison non bornée qu'elle en déduit [41].

Au chapitre 3, nous rappelons la définition de la norme discriminante, de celles d'oscillation [16] de E. Shelukhin [44] et de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21]. Nous définissons de plus la notion de géodésique pour la norme discriminante, la norme d'oscillation et celle de E. Shelukhin.



Nous démontrons au chapitre 4 le théorème [4.3](#), ainsi que les variantes de ce théorème pour les différentes normes étudiées au chapitre précédent. L'outil essentiel pour prouver que les chemins de contactomorphismes que nous caractérisons sont des géodésiques sur le groupe des contactomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  est le sélecteur de translation construit par S. Sandon [\[42\]](#) que nous décrivons au chapitre 2. L'idée est de minorer ces normes par le sélecteur de translation. Nous calculons ensuite explicitement d'une part la translation choisie pour les chemins que nous construisons et, d'autre part, la longueur de ces chemins. Nous montrons que ces deux nombres coïncident et donc que la longueur du chemin construit réalise son minimum. Cela nous permet de conclure que ces chemins sont des géodésiques. Il n'est alors pas difficile de construire des géodésiques de longueurs aussi grandes que l'on veut pour montrer que ces normes sont non bornées.

Au chapitre 5 nous démontrons le théorème [5.8](#). L'outil principal que nous utilisons pour avoir des résultats sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes du cotangent unitaire du tore est un invariant symplectique de domaines du cotangent du tore introduit par J.-C. Sikorav [\[46\]](#) et Y. Eliashberg [\[18\]](#), nommé le *shape*. L'idée de la preuve reste quant à elle la même. Nous minorons la norme d'un élément de  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  par un nombre que l'on extrait du *shape* de domaines du cotangent du tore associés à cet élément. Ces domaines proviennent du graphe de "la fonction hamiltonienne" qui engendre cet élément. Nous montrons alors que les normes des chemins que nous considérons réalisent ce minimum. Le calcul explicite du *shape* se base sur un théorème de M. Gromov [\[27\]](#) qui assure l'intersection de lagrangiennes exactes du cotangent avec la section nulle. C'est également en utilisant le *shape* que nous construisons une application non bornée et invariante par conjugaison sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  qui a toutes les propriétés d'une norme sauf celle de l'inégalité triangulaire, qu'il reste à démontrer ou à infirmer.

Enfin, au chapitre 6, nous décrivons la bijection que Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [\[19\]](#) établissent entre les chemins positifs de contactomorphismes du bord de contact idéal d'une variété de Liouville et les domaines étoilés fibre-par-fibre de la contactisation de cette même variété de Liouville ainsi que le théorème de tassements de contact qu'ils en déduisent lorsque le bord de contact idéal est non ordonnable. Dans une deuxième section, nous définissons les caractéristiques translitées et démontrons le théorème [6.23](#) et les théorèmes faisant des liens entre les longueurs discriminante et d'oscillation d'un chemin positif de contactomorphismes et le spectre de contact du domaine étoilé fibre-par-fibre associé à ce chemin. L'idée pour démontrer ces théorèmes est de voir l'hypersurface provenant du bord de l'ouvert considéré comme le niveau d'une fonction bien choisie et de paramétrer les feuilles caractéristiques de cette hypersurface par le flot de symplectomorphismes hamiltoniens engendré par la fonction choisie. Nous concluons ce dernier chapitre de la thèse en discutant des liens qui existent entre certaines capacités symplectiques, l'existence de caractéristiques fermées et le spectre symplectique dans le cas de variétés de Liouville ([\[30\]](#), [\[23\]](#), [\[22\]](#), [\[29\]](#)), et de la possibilité d'espérer des liens analogues entre les capacités de contact et le spectre de contact dans le cas de contactisation de variétés de Liouville.

Nous commencerons cette thèse par un chapitre 0 qui a pour but d'être un chapitre préliminaire de géométrie symplectique et de géométrie de contact. Nous y introduisons les conventions et notations que nous utiliserons tout au long de ce travail.

# Table des matières

<b>0 Chapitre 0</b>	<b>9</b>
0.1 Variétés de contact et variétés symplectiques	9
0.2 La symplectisation d'une variété de contact	11
0.3 Variétés de Liouville	12
0.3.1 Le bord d'un ouvert étoilé	13
0.3.2 La préquantification d'une variété symplectique exacte	16
0.4 Le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens et des contactomorphismes	17
0.5 Les fonctions hamiltoniennes	19
0.5.1 Le cas symplectique	20
0.5.2 Le cas de contact	21
<b>1 La géométrie de <math>\text{Cont}_0^c(M, \xi)</math> et <math>\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)</math></b>	<b>25</b>
1.1 Normes	25
1.2 Ordonnabilité	30
1.2.1 Définition de la relation binaire	30
1.2.2 La propriété d'intersection stable : critère suffisant d'ordonnabilité	35
1.3 Quelques liens entre ces deux notions	39
<b>2 Fonctions génératrices pour legendriennes de l'espace des jets et applications</b>	<b>42</b>
2.1 L'existence de fonctions génératrices quadratiques à l'infini et théorème d'intersection	42
2.2 Unicité des fonctions génératrices et extractions de valeurs critiques	48
2.3 Les contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$	51
2.3.1 Le graphe d'un contactomorphisme comme legendrienne de l'espace des jets	51
2.3.2 Points translatsés et spectre d'un contactomorphisme	54
2.3.3 Extraction d'invariants spectraux : ordonnabilité, norme invariante par conjugaison et capacité	55
2.3.4 Capacité de contact sur $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$	58
<b>3 Différentes normes sur le groupe des contactomorphismes et son revêtement universel</b>	<b>60</b>
3.1 Normes provenant de fonctionnelles de longueur	60
3.1.1 Le premier cas	60
3.1.2 Le deuxième cas	61
3.2 Norme discriminante	62
3.2.1 Le cas où $(M, \xi)$ est compacte	62
3.2.2 Le cas où $(M, \xi)$ est non compacte	65
3.3 La norme d'oscillation	66
3.3.1 Le cas où $(M, \xi)$ est compacte	67
3.3.2 Le cas où $(M, \xi)$ n'est pas compacte	68
3.4 Norme FPR	68
3.5 Norme de Shelukhin	71
<b>4 Géodésiques de différentes normes sur <math>\text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})</math> et son revêtement universel</b>	<b>73</b>
<b>5 Sur les variétés de contact ordonnables n'admettant pas de flot de Reeb périodique et le cotangent unitaire du tore</b>	<b>86</b>
5.1 Variantes de la norme FPR	86
5.2 Étude de ces normes dans le cas du cotangent unitaire du tore	89
5.2.1 Le <i>shape</i> dans $(T^*\mathbb{T}^N, d\lambda_{TN})$	91

5.2.2	Démonstration du théorème 5.8	93
5.3	Questions d'existence de normes invariantes par conjugaison non bornées	97
<b>6</b>	<b>Propriétés géométriques de certains domaines de la préquantification d'une variété de Liouville</b>	<b>101</b>
6.1	Associer à un chemin de contactomorphismes du bord d'un ouvert étoilé un domaine étoilé fibre-par-fibre	101
6.2	Le spectre de domaines dans $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$	104
6.2.1	Le spectre dans le cas symplectique	104
6.2.2	Le spectre dans le cas de contact	105
6.2.3	Liens entre le spectre et les longueurs d'oscillation et discriminante	114
6.3	Spectre de contact, une interprétation géométrique des capacités?	122
6.3.1	Sélecteurs d'action, capacités et spectre dans le cas symplectique	122
6.3.2	Questions ouvertes dans le cas de contact	126

## 0 Chapitre 0

Le but de ce chapitre 0 est essentiellement d'introduire les conventions et les objets que nous utiliserons et étudierons durant cette thèse.

Dans la première section nous définirons la notion de variété de contact ainsi que de variété symplectique. Dans la deuxième section nous verrons le procédé de symplectisation qui consiste à associer à toute variété de contact une variété symplectique. Dans une troisième section nous nous attarderons sur des variétés symplectiques particulières : les variétés de Liouville. Dans la quatrième section nous nous intéresserons au groupe de symétries des objets précédents, ainsi qu'au revêtement universel du groupe de symétries d'une variété de contact. Enfin, dans la cinquième section nous verrons comment associer à des fonctions définies sur les variétés considérées des chemins lisses de symétries.

### 0.1 Variétés de contact et variétés symplectiques

Nous assumons que le lecteur est familier avec les notions de base de la géométrie différentielle, en particulier avec la notion de variétés différentielles, de difféomorphismes, de fibrés, ainsi que celle de formes différentielles [32], [24]. Dans cette thèse, sauf mention contraire, nous travaillerons uniquement avec des variétés lisses connexes et orientables de dimension finie quelconque. De même, sauf mention contraire, les objets que nous y définirons, tels que les fonctions, les champs de vecteurs, les distributions, les formes différentielles y seront lisses.

**Définition 0.1** (Variété symplectique). Soit  $W$  une variété et  $\omega$  une 2-forme différentielle sur  $W$ . La 2-forme  $\omega$  est une forme symplectique

1. si elle est fermée, c'est-à-dire que  $d\omega = 0$  et
2. si elle est non dégénérée, c'est-à-dire que l'application

$$\omega_x : T_x W \rightarrow T_x^* W, \quad u \mapsto (T_x W \ni v \mapsto \omega_x(u, v))$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels pour tout  $x$  dans  $W$ , où  $T_x W$  désigne l'espace vectoriel tangent de  $W$  en  $x$  et  $T_x^* W$  son dual.

Dans le cas où  $\omega$  est une forme symplectique nous disons que  $(W, \omega)$  est une variété symplectique.

Le fait de demander qu'une 2-forme  $\omega$  sur  $W$  soit non dégénérée impose, par des arguments d'algèbre linéaire, à  $W$  d'être de dimension paire [37]. En notant  $2n$  la dimension de  $W$ , avec  $n \in \mathbb{N}$  un entier naturel, la condition qu'une 2-forme  $\omega$  soit non dégénérée est équivalente à demander que  $\omega^n := \bigwedge_{i=1}^n \omega$  soit une forme volume. Nous disons qu'une variété symplectique  $(W, \omega)$  est exacte s'il existe une 1-forme  $\lambda \in \Omega^1(W)$  telle que  $\omega = d\lambda$ .

**Définition 0.2** (Symplectomorphisme). Soient  $(W_1, \omega_1)$  et  $(W_2, \omega_2)$  deux variétés symplectiques. Un difféomorphisme  $\psi : W_1 \rightarrow W_2$  est un symplectomorphisme si  $\psi^* \omega_2 = \omega_1$ , c'est-à-dire que

$$(\omega_2)_{\psi(x)}(d_x \psi(u), d_x \psi(v)) = (\omega_1)_x(u, v) \text{ pour tout } ((x, u), (x, v)) \in TW_1 \times TW_1,$$

où  $TW_1$  désigne le fibré tangent de  $W_1$ . Dans le cas où il existe un symplectomorphisme entre  $(W_1, \omega_1)$  et  $(W_2, \omega_2)$  ces variétés symplectiques sont dites symplectomorphes.

De la même façon si  $(W_1, d\lambda_1)$  et  $(W_2, d\lambda_2)$  sont deux variétés symplectiques exactes, nous disons qu'un symplectomorphisme  $\psi : (W_1, d\lambda_1) \rightarrow (W_2, d\lambda_2)$  est fortement exact si  $\psi^* \lambda_2 = \lambda_1$ , c'est-à-dire que  $(\lambda_2)_{\psi(x)}(d_x \psi(u)) = (\lambda_1)_x(u)$  pour tout  $(x, u) \in TW_1$ . Dans le cas où il existe un symplectomorphisme fortement exact entre  $(W_1, \omega_1 = d\lambda_1)$  et  $(W_2, \omega_2 = d\lambda_2)$  ces variétés sont dites fortement exactement symplectomorphes.

**Définition 0.3** (Variété de contact). Soient  $M$  une variété et  $\xi$  une distribution d'hyperplans sur  $M$ . La distribution  $\xi$  est une distribution de contact si elle est maximale non intégrable, c'est-à-dire que pour tout point  $x_0$  de  $M$ , il existe un ouvert  $U$  inclus dans  $M$  contenant  $x_0$  et une 1-forme  $\alpha$  définie sur  $U$  tels que la restriction de la 2-forme  $(d\alpha)_x$  à  $\xi_x$  soit non dégénérée pour tout  $x$  dans  $U$ . Dans le cas où la distribution  $\xi$  est de contact nous disons que  $(M, \xi)$  est une variété de contact.

Nous déduisons de nouveau, du caractère maximale non intégrable, que le rang d'une distribution de contact est pair et donc que la dimension d'une variété de contact est impaire. Nous disons qu'une distribution de contact  $\xi$  sur une variété  $M$  est co-orientable si le fibré quotient  $TM/\xi$  - qui est de rang 1 - est trivialisable. De manière équivalente la distribution  $\xi$  est co-orientable s'il existe une 1-forme  $\alpha \in \Omega^1(M)$  telle que le noyau de  $\alpha$  soit égal à  $\xi$ , ce que nous notons  $\text{Ker}(\alpha) = \xi$ . Nous appelons une telle 1-forme  $\alpha$  une forme de contact pour  $\xi$ . De même une 1-forme  $\beta \in \Omega^1(M)$  telle que son noyau soit une distribution de contact sur  $M$  est dite une 1-forme de contact.

**Définition 0.4** (Contactomorphisme). Soient  $(M_1, \xi_1)$  et  $(M_2, \xi_2)$  deux variétés de contact. Un difféomorphisme  $\phi : M_1 \rightarrow M_2$  est un contactomorphisme si  $\phi_*\xi_1 = \xi_2$ , c'est-à-dire que

$$d_x\phi(\xi_1)_x = (\xi_2)_{\phi(x)} \quad \text{pour tout } x \in M_1 .$$

Dans le cas où il existe un contactomorphisme entre les variétés de contact  $(M_1, \xi^1)$  et  $(M_2, \xi^2)$ , ces variétés sont dites contactomorphes.

Discutons de quelques exemples de variétés symplectiques et de contact.

*Exemple 0.5.* 1. Soit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  un entier naturel strictement positif. Munissons  $\mathbb{R}^{2n}$  des fonctions coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ . La 2-forme  $\omega_{st} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  est une forme symplectique sur  $\mathbb{R}^{2n}$ . Nous l'appelons la forme symplectique standard. De plus, elle est exacte. En effet la 1-forme  $\lambda = - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$  est une primitive de  $\omega$ .

2. Soit  $X$  une variété de dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe une unique 1-forme  $\lambda_X$  sur  $T^*X$  qui satisfait la propriété suivante : pour toute section  $\beta : X \rightarrow T^*X$  le tiré en arrière de  $\lambda_X$  par  $\beta$  est égal à  $\beta$ , c'est-à-dire que  $\beta^*\lambda_X(x)(u) := \lambda_X(\beta(x))(d_x\beta(u)) = \beta_x(u)$  pour tout  $(x, u) \in TX$ . Cette 1-forme canonique  $\lambda_X$  est communément appelée la forme de Liouville du cotangent. Nous donnerons une définition plus explicite de  $\lambda_X$  au chapitre 2. En particulier, nous verrons qu'en tout point de  $T^*X$  il existe un ouvert muni de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  tel que la 1-forme  $\lambda_X$  restreinte à cet ouvert s'écrive  $\sum_{i=1}^n y_i dx_i$ . Ainsi  $d\lambda_X$  est une forme symplectique exacte sur  $T^*X$ .

3. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et munissons  $\mathbb{R}^{2n+1}$  des fonctions coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ . Le noyau de la 1-forme  $\alpha_{st} := dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$  est une distribution de contact sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Nous la notons  $\xi_{st} := \text{Ker}(\alpha_{st})$  et nous l'appelons distribution de contact standard. De même nous appelons  $\alpha_{st}$  la 1-forme de contact standard.

4. Nous verrons au chapitre 2 que l'espace des 1-jets d'une variété  $X$  peut être identifié au produit cartésien du cotangent avec la droite réelle  $T^*X \times \mathbb{R}$ . Nous déduisons du point 2 qu'en chaque point de l'espace des 1-jets d'une variété  $X$  il existe un ouvert muni de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  tel que  $d\lambda_X$  dans ces coordonnées s'écrive  $dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ . Ainsi le noyau de cette 1-forme est une distribution de contact d'après le point précédent.

5. Pour toute variété  $X$  nous appelons la variété quotient  $T^*X/\mathbb{R}_{>0}$  - où  $\mathbb{R}_{>0}$  agit sur  $T^*X$  en multipliant les covecteurs - le cotangent unitaire de  $X$ . La distribution d'hyperplans

$\text{Ker}(\lambda_X)$  sur  $T^*X$  passe au quotient en une distribution de contact sur le cotangent unitaire de  $X$ . Nous notons cette  $(\mathbb{P}^+T^*X, \xi_X)$  cette variété de contact. Nous verrons plus en détail cette construction au chapitre 2. Remarquons que lorsque  $X$  est compact le cotangent unitaire l'est également. La même construction marche en considérant le quotient  $T^*X/\mathbb{R}^*$ , la variété ainsi obtenue est la variété des éléments de contact [25].

*Remarque 0.6.* Dans les deux premiers exemples ci-dessus la forme symplectique est donnée localement par  $\sum_{i=1}^n (dx_i \wedge dy_i)$  et dans les deux suivants la distribution de contact est donnée localement par le noyau de  $dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ . Le théorème de Darboux [25], [37] assure que c'est toujours le cas. Plus précisément pour toute variété symplectique  $(W, \omega)$  de dimension  $2n$  (resp. variété de contact  $(M, \xi)$  de dimension  $2n+1$ ), où  $n \in \mathbb{N}$  désigne un entier naturel, il existe en tout point  $x_0$  de  $W$  (resp. de  $M$ ) une carte  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  (resp.  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ ) telle que  $\omega$  dans cette carte s'écrive  $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$  (resp. telle que  $\xi$  dans cette carte soit donnée par le noyau de  $dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ ). La géométrie symplectique et la géométrie de contact sont donc des géométries sans invariants locaux.

Revenons sur la terminologie *maximalement non intégrable* utilisée dans la définition d'une variété de contact. Considérons pour cela une variété de contact  $(M, \xi)$  de dimension  $2n+1$ , où  $n \in \mathbb{N}$  est un entier naturel, dont la distribution de contact  $\xi$  est co-orientable. Soit  $\alpha$  une 1-forme telle que  $\text{Ker}(\alpha) = \xi$ . La condition pour la distribution  $\text{Ker}(\alpha)$  d'être maximalement non intégrable est équivalente à demander que  $\alpha \wedge (d\alpha)^n$  soit une forme volume sur  $M$ . Or le théorème de Frobenius assure qu'une distribution d'hyperplans sur une variété  $M$  donnée par le noyau d'une 1-forme  $\beta \in \Omega^1(M)$  est intégrable si et seulement si  $\beta \wedge d\beta = 0$ . Dans ce sens une distribution de contact est à l'extrême opposé d'une distribution intégrable [37], [25].

**Définition 0.7** (Sous-variétés lagrangiennes et legendriennes). 1. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $(W, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . Une sous-variété  $V \subset W$  est isotrope si  $\omega_x(v_1, v_2) = 0$  pour tout  $x \in V$  et pour tout  $(v_1, v_2) \in T_x V \times T_x V$ . Une sous-variété isotrope est de dimension au plus  $n$ . Nous appelons une sous-variété isotrope de dimension  $n$  une lagrangienne. 2. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $(M, \xi)$  une variété de contact de dimension  $2n+1$ . Une sous-variété  $N \subset M$  est isotrope si c'est une sous-variété intégrale de la distribution de contact, c'est-à-dire que  $T_x N \subset \xi_x$  pour tout  $x \in N$ . Une sous-variété isotrope est de dimension au plus  $n$ . Nous appelons une sous-variété isotrope de dimension  $n$  une legendrienne.

Dans la définition précédente, les restrictions sur les dimensions des sous-variétés isotropes proviennent d'arguments d'algèbre linéaire portant pour le premier point sur le caractère non dégénéré de la forme symplectique et pour le deuxième sur le caractère maximalement non intégrable de la distribution de contact discuté avant la définition.

## 0.2 La symplectisation d'une variété de contact

Une construction que nous utiliserons souvent dans cette thèse est la *symplectisation* d'une variété de contact. Cette construction consiste à associer à une variété de contact une variété symplectique ayant une dimension de plus que la variété de contact. Cette variété symplectique sera un sous fibré vectoriel du cotangent de la variété de contact.

Plus précisément soit  $(M, \xi)$  une variété de contact. La symplectisation de  $(M, \xi)$  est la variété

$$\mathcal{S}_\xi(M) := \{(x, \mu) \in T^*M \mid \text{Ker}(\mu) = \xi_x\}$$

que l'on munit de la forme symplectique  $\omega_\xi = d\lambda_\xi$ , où  $\lambda_\xi$  désigne la restriction de la forme de Liouville  $\lambda_M$  de  $T^*M$  à  $\mathcal{S}_\xi(M)$ . Le lecteur pourra voir une preuve du fait que  $\omega_\xi$  est une

forme symplectique dans [37]. Notons qu'il y a une action  $\rho_\xi$  qui est lisse, libre et propre du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}^*$  sur  $\mathcal{S}_\xi(M)$ . Elle est donnée par la multiplication des covecteurs, plus précisément  $\rho_\xi(\theta)(x, \mu) = (x, \theta\mu)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^*$  et  $(x, \mu) \in \mathcal{S}_\xi(M)$ . De plus  $\omega_\xi$  (resp.  $\lambda_\xi$ ) est homogène de degré 1 par rapport à cette action, c'est-à-dire que  $\rho_\xi(\theta)^*\omega_\xi = \theta\omega_\xi$  (resp.  $\rho_\xi(\theta)^*\lambda_\xi = \theta\lambda_\xi$ ) pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^*$ . Il existe alors une bijection entre les contactomorphismes  $\phi$  de  $(M, \xi)$  et les symplectomorphismes  $\psi$  de  $(\mathcal{S}_\xi(M), \omega_\xi)$  qui sont  $\mathbb{R}^*$ -équivariants, c'est-à-dire les symplectomorphismes  $\psi$  qui vérifient  $\psi \circ \rho_\xi = \rho_\xi \circ \psi$ . Plus explicitement, si  $\phi \in \text{Cont}(M, \xi)$  nous lui associons le symplectomorphisme  $\mathbb{R}^*$ -équivariant défini pour tout  $(x, \mu) \in \mathcal{S}_\xi(M)$  par la formule suivante

$$\psi(x, \mu) = \left( \phi(x), \mu \circ d_{\phi(x)}\phi^{-1} \right). \quad (1)$$

De plus lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact dont la distribution de contact  $\xi$  est co-orientable nous avons une description plus explicite de la symplectisation. C'est ce que nous présentons au paragraphe suivant.

Lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact dont la distribution est co-orientable nous pouvons fixer une co-orientation de  $\xi$ , c'est-à-dire que nous pouvons assigner aux deux composantes connexes de  $TM \setminus \xi$  un signe plus et un signe moins respectivement. Notons  $(TM \setminus \xi)^+$  la composante dont nous assignons le signe plus. Nous définissons la symplectisation positive de  $(M, \xi)$  comme étant la variété

$$\mathcal{S}_\xi^+(M) := \left\{ (x, \mu) \in T^*M \mid \text{Ker}(\mu) = \xi_x \text{ et } \mu(v) > 0 \text{ pour tout } v \in (T_x M \setminus \xi_x)^+ \right\},$$

que l'on munit à nouveau de la forme symplectique  $\omega_\xi := d\lambda_\xi$ , où, par abus de notation nous désignons une fois de plus  $\lambda_\xi$  la restriction de la forme de Liouville  $\lambda_M$  de  $T^*M$  à  $\mathcal{S}_\xi^+M$ . Une 1-forme  $\alpha$  pour  $\xi$  est dite compatible avec la co-orientation de  $\xi$  si  $\alpha_x(v) > 0$  pour tout  $(x, v) \in (TM \setminus \xi)^+$ . Pour toute 1-forme  $\alpha$  pour  $\xi$  compatible avec la co-orientation l'application

$$\Psi : (M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha)) \rightarrow (\mathcal{S}_\xi^+(M), d\lambda_\xi), \quad (x, \theta) \mapsto (x, e^\theta \alpha(x))$$

est alors un symplectomorphisme fortement exact, c'est-à-dire que  $\psi^*\lambda_\xi = e^\theta \alpha$ . De manière analogue à la symplectisation, nous avons une action  $\rho_\xi^+ := \rho_{\xi|_{\mathbb{R}_{>0}}}$  du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_{>0}$  sur la symplectisation positive  $\mathcal{S}_\xi^+(M)$  donnée par la multiplication des covecteurs par les scalaires. Les formes  $\omega_\xi$  et  $\lambda_\xi$  sont de nouveau homogènes de degré 1 par rapport à cette action. L'action correspondante de  $\theta_0 \in \mathbb{R}_{>0}$  sur  $M \times \mathbb{R}$  est définie par

$$M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}, \quad (x, \theta) \mapsto \Psi^{-1} \left( \rho_{\xi^+}(\theta_0) (\Psi(x, \theta)) \right) = (x, \ln(\theta_0) + \theta).$$

De même si  $\phi$  est un contactomorphisme qui préserve la co-orientation, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi^*\alpha = e^g \alpha$ , alors le symplectomorphisme  $\mathbb{R}_{>0}$ -équivariant de  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$  correspondant est défini par

$$M \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}, \quad (x, \theta) \mapsto \Psi^{-1} (\psi(\Psi(x, \theta))) = (\phi(x), \theta - g(x))$$

où  $\psi$  désigne le symplectomorphisme  $\mathbb{R}^*$ -équivariant de  $\mathcal{S}_\xi(M)$  que nous avons défini à la formule (1). Nous appelons  $g$  le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à  $\alpha$ .

### 0.3 Variétés de Liouville

Cette section est consacrée aux variétés de Liouville. Nous y définissons dans un premier temps les variétés de Liouville et le bord de contact idéal d'une variété de Liouville. Dans un deuxième temps nous parlons brièvement de la préquantification d'une variété de Liouville.

Soit  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété symplectique exacte. Sous cette hypothèse la variété considérée ne peut être compacte [37]. Nous disons que  $P$  est une *hypersurface* de  $W$  si  $P$  est une sous-variété lisse et connexe de co-dimension 1 de  $W$ .

**Définition 0.8.** Une variété symplectique exacte  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété de Liouville si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Le champs de vecteurs  $X$  qui vérifie  $\iota_X \omega = \lambda$  est complet, c'est-à-dire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  le flot du champs de Liouville au temps  $t$ , que nous notons  $\phi_X^t$ , est bien défini.
2. Il existe un ouvert borné  $\mathcal{U}$  tel que son bord  $P$  soit une hypersurface fermée partout transverse au champs de vecteurs  $X$ .
3. Enfin

$$W = \mathcal{U} \sqcup \left( \bigsqcup_{t \geq 0} \phi_X^t(P) \right) .$$

Nous appelons le champs de vecteurs  $X$  le champs de Liouville de  $(W, \omega = d\lambda)$ , et nous disons que  $\mathcal{U}$  est un ouvert étoilé. Le symbole  $\sqcup$  entre deux ensembles précise que l'union entre ces deux ensembles est disjointe.

Plusieurs variétés symplectiques naturelles sont des variétés de Liouville.

*Exemple 0.9.* 1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace euclidien  $\left( \mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = \frac{1}{2} d \left( \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i \right) \right)$  est une variété de Liouville. Le champs de vecteurs radial  $X = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right)$  est le champs de Liouville associé. La boule ouverte euclidienne unité est un ouvert étoilé, et son bord est la sphère unité.

2. Le cotangent  $(T^*M, \omega_M = d\lambda_M)$  de toute variété lisse  $M$  de dimension plus grande que 2, où  $\lambda_M$  est la forme de Liouville, est une variété de Liouville. Le champs de Liouville  $X$  engendre la distribution verticale  $\text{Ker}(d\pi_M)$ , où  $\pi_M : T^*M \rightarrow M$  désigne la projection canonique. En munissant  $M$  d'une métrique riemannienne  $g$ , nous pouvons identifier le fibré tangent  $TM$  au fibré cotangent  $T^*M$ . Dans cette identification le fibré en disque  $\mathcal{D}_g TM = \{(q, u) \in T^*M \mid g_q(u, u) < 1\}$  est envoyé sur le fibré en co-disque  $\mathcal{D}_g T^*M$ . Le fibré en co-disque est alors un ouvert étoilé dont le bord est le fibré en co-sphère  $S_g T^*M$ . Le noyau de la restriction de la forme de Liouville à  $S_g T^*M$  confère à  $S_g T^*M$  une structure de contact et  $(S_g T^*M, \text{Ker}(\lambda_M|_{S_g T^*M}))$  est contactomorphe à  $(\mathbb{P}^+ T^*M, \xi_M)$ . Pour plus de détails par rapport à cette construction le lecteur pourra lire la preuve du lemme [2.14](#).
3. Si  $(W_1, \omega = d\lambda_1)$  et  $(W_2, d\lambda_2)$  sont deux variétés de Liouville, alors  $(W_1 \times W_2, d(\lambda_1 \oplus \lambda_2))$  est une variété de Liouville.

### 0.3.1 Le bord d'un ouvert étoilé

Considérons  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété de Liouville. Nous montrons dans les prochaines lignes que le bord de tout ouvert étoilé est une variété de contact qui est contactomorphe au bord de contact idéal de la variété de Liouville.

Soit  $P$  le bord d'un ouvert étoilé  $\mathcal{U} \subset W$ . Notons  $\alpha \in \Omega^1(P)$  la restriction à  $P$  de la forme 1-forme  $\lambda \in \Omega^1(W)$ , c'est-à-dire que  $\alpha = i_P^* \lambda$  avec  $i_P : P \hookrightarrow W$  désignant l'injection canonique. Montrons que dans ce cas  $(P, \text{Ker}(\alpha) = \eta)$  est une variété de contact. En effet, comme  $P$  est une hypersurface son orthogonale symplectique  $P^\omega$  défini comme suit

$$P^\omega := \{ (x, u) \in TW \text{ avec } x \in P \mid (d\lambda)_x(u, v) = 0, \text{ pour tout } v \in T_x P \}$$

est une distribution de rang 1 à valeurs dans  $TP$ . Elle est de rang 1 car  $\omega$  est non dégénérée et  $P$  est une hypersurface. Elle est contenue dans  $TP$  car  $\omega$  est antisymétrique. Notons  $Y \in \chi(P)$  un champs de vecteurs qui engendre l'orthogonale symplectique de  $P$ , c'est-à-dire que  $\langle Y \rangle = P^\omega$ . La distribution d'hyperplans  $\text{Ker}(\alpha) = \eta$  sur  $P$  est alors égale à l'orthogonale symplectique de



la distribution de rang 2 engendrée par le champs de vecteurs  $Y$  et le champs de Liouville  $X$  restreint à  $P$ , plus précisément

$$\text{Ker}(\alpha) = \langle X|_P, Y \rangle^\omega := \{(x, u) \in TW \text{ avec } x \in P \mid \omega_x(u, v) = 0, \text{ pour tout } v \in \langle X(x), Y(x) \rangle\}.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x$  un point de  $P$  tel que  $\omega_x(X(x), Y(x)) = 0$ . Comme le champs de vecteurs  $X$  est transverse à  $P$  et que  $Y$  engendre l'orthogonale symplectique de  $P$ , cela implique que  $\omega_x(Y(x), v) = 0$  pour tout  $v \in T_x P$ . Ceci est une contradiction car  $\omega$  est non dégénérée et  $Y$  est un champs de vecteurs partout non nul. Ainsi la forme symplectique  $\omega$  est non dégénérée sur  $\langle X|_P, Y \rangle$ . Donc la forme symplectique  $\omega$  est également non-dégénérée sur l'orthogonale symplectique de  $\langle X|_P, Y \rangle$  qui vaut  $\text{Ker}(\alpha) = \eta$ . De manière équivalente,  $d\alpha$  est non-dégénérée sur  $\text{Ker}(\alpha)$ , ce qui permet de conclure que  $(P, \eta = \text{Ker}(\alpha))$  est une variété de contact.

De plus la symplectisation positive de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$ , que nous notons  $\mathcal{S}^+(P, \text{Ker}(\alpha))$ , peut être identifiée à  $W_{*,P} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_X^t(P)$  que l'on munit de la forme symplectique exacte  $d\lambda|_{W_{*,P}}$ . Pour s'en convaincre, remarquons tout d'abord que d'après les hypothèses faites dans la définition d'une variété de Liouville et du bord d'un domaine étoilé,  $W_{*,P} = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_X^t(P)$  est une union disjointe de copies de  $P$ . Identifions  $\mathcal{S}^+(P, \text{Ker}(\alpha))$  à  $(P \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$  où  $\theta$  désigne la coordonnée sur  $\mathbb{R}$ . Nous affirmons que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_P : (P \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha)) &\rightarrow (W_{*,P}, \omega|_{W_{*,P}} = d\lambda|_{W_{*,P}}) \\ (x, \theta) &\mapsto \phi_X^\theta(x) \end{aligned}$$

est un symplectomorphisme fortement exact. En effet, pour tout  $(x, \theta) \in P \times \mathbb{R}$  et  $(u, v) \in T_x P \times T_\theta \mathbb{R}$ ,

$$\Phi_P^* \lambda_{(x,\theta)}(u, v) = \lambda_{\phi_X^\theta(x)}(vX(\phi_X^\theta(x)) + d_x \phi_X^\theta(u)) = v \lambda_{\phi_X^\theta(x)}(X(\phi_X^\theta(x))) + (\phi_X^\theta)^* \lambda_x(u).$$

Or  $\iota_X \lambda = \omega(X, X) \equiv 0$ , donc le premier terme de cette somme est nulle. D'après la formule de Cartan et en utilisant le fait que  $\iota_X \lambda \equiv 0$  nous avons pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{d\theta} (\phi_X^\theta)^* \lambda = (\phi_X^\theta)^* (\iota_X d\lambda + d\iota_X \lambda) = (\phi_X^\theta)^* \lambda.$$

Nous constatons ainsi que le flot de Liouville dilate exponentiellement la forme de Liouville :

$$(\phi_X^\theta)^* \lambda = e^\theta \lambda \tag{2}$$

pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ . Nous avons donc *in fine* pour tout  $((x, \theta), (u, v)) \in T(P \times \mathbb{R})$

$$\Phi_P^* \lambda_{(x,\theta)}(u, v) = e^\theta \lambda_x(u) = e^\theta \alpha_x(u)$$

ce qui justifie l'affirmation que  $\Phi$  est un symplectomorphisme fortement exact.

Un fait remarquable de cet ouvert  $W_{*,P}$  est qu'il ne dépend pas de l'ouvert étoilé  $\mathcal{U}$  choisi dont  $P$  est le bord. Pour prouver ce fait il sera commode d'introduire également son complémentaire que nous notons  $\text{Core}_P(W) := W \setminus W_{*,P}$ . La manipulation ensembliste suivante permet de voir que  $\text{Core}_P(W) = \bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U})$  :

$$\left( \bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U}) \right)^c = \bigcup_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U}^c) = \bigcup_{t>0} \phi_X^{-t} \left( \bigcup_{s \geq 0} \phi_X^s(P) \right) = \bigcup_{t>0, s \geq 0} \phi_X^{-t+s}(P) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_X^t(P) = W_{*,P}.$$

Dans la ligne précédente  $A^c$  désigne le complémentaire d'un ensemble  $A$  inclus dans  $W$ .

**Lemme 0.10.** Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux ouverts étoilés et notons  $P := \partial\mathcal{U}$  le bord de  $\mathcal{U}$  et  $Q := \partial\mathcal{V}$  le bord de  $\mathcal{V}$ . Nous avons alors les égalités ensemblistes suivantes :

$$W_{*,P} = W_{*,Q} \quad \text{et} \quad \text{Core}_P(W) = \text{Core}_Q(W) .$$

Nous notons alors  $W_*$  et  $\text{Core}(W)$  ces ensembles et nous appelons le cœur de  $W$  l'ensemble  $\text{Core}(W)$ .

Avant de démontrer ce lemme donnons quelques exemples de cœurs de variétés de Liouville.

*Exemple 0.11.* 1. Dans le cas de  $\left(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = d \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i dy_i - y_i dx_i)\right)$ , le cœur correspond au singleton  $\{0\}$ .

2. Dans le cas de  $(T^*X, d\lambda_X)$ , le cœur correspond à la section nulle. Ainsi

$$\left(T^*\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{2n}, -\omega_{st} = d \sum_{i=1}^n y_i dx_i\right) \text{ a un cœur différent de } \left(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = d \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(x_i dy_i - y_i dx_i)\right).$$

Prouvons le lemme précédent.

*Démonstration.* Remarquons que comme  $W_{*,Q}$  est un ouvert cela implique que  $\text{Core}_Q(W)$  est un fermé. De plus, c'est un fermé inclus dans  $\mathcal{V}$  qui est un ouvert borné par définition. Ainsi  $\text{Core}_Q(W)$  est un fermé borné et donc c'est un compact. Supposons alors par l'absurde que  $W_{*,P}$  soit différent de  $W_{*,Q}$ . Cela implique que  $W_{*,P}$  intersecte  $\text{Core}_Q(W)$ . Soit alors  $(x, t) \in P \times \mathbb{R}$  tel que  $\phi_X^t(x) \in W_{*,P} \cap \text{Core}_Q(W)$  fasse partie de cette intersection. Par définition de  $W_{*,P}$  et  $\text{Core}_Q(W)$ , pour tout  $T > 0$  nous avons que  $\phi_X^T(\phi_X^t(x)) = \phi_X^{t+T}(x)$  sera toujours dans  $W_{*,P} \cap \text{Core}_Q(W)$ . En effet, en décrivant  $W_{*,P}$  comme  $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \phi_X^s(P)$ , il est immédiat que  $\phi_X^T$

laisse stable  $W_{*,P}$ . Pour les mêmes raisons  $\phi_X^T$  laisse stable  $W_{*,Q}$  pour tout  $T > 0$  et donc laisse stable également son complémentaire  $\text{Core}_Q(W)$ , ce qui confirme bien l'affirmation que  $\phi_X^{t+T}(x) \in W_{*,P} \cap \text{Core}_Q(W)$  pour tout  $T > 0$ . Or, en identifiant  $W$  à  $(P \times \mathbb{R}_{\geq 0}) \cup \mathcal{U}$  il est facile de voir qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel que  $\text{Core}_Q(W)$  soit inclus dans  $(P \times [0, \theta]) \cup \mathcal{U}$  car  $\text{Core}_Q(W)$  est compact. Ainsi pour  $T > 0$  suffisamment grand - dès que  $t + T > \theta$  - ceci contredit le fait que  $\phi_X^{t+T}(x)$  soit dans  $\text{Core}_Q(W)$ .  $\square$

*Remarque 0.12.* Nous n'avons pas utilisé dans la preuve le fait que  $P$  soit connexe.

Ainsi quel que soit l'ouvert étoilé que l'on choisit, le bord de cet ouvert étoilé est une variété de contact dont la symplectisation est fortement exactement symplectomorphe à  $(W_*, \omega|_{W_*} = d\lambda|_{W_*})$ . Nous avons donc le corollaire suivant.

**Corollaire 0.13.** Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux ouverts étoilés dont les bords sont respectivement  $P$  et  $Q$  que nous munissons des formes de contact  $\alpha = \lambda|_P$  et  $\beta = \lambda|_Q$ . Alors les variétés de contact  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  et  $(Q, \text{Ker}(\beta))$  sont contactomorphes.

*Démonstration.* Il existe une application lisse  $\Theta : P \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'application

$$\begin{aligned} \Phi_{P,Q} : P &\rightarrow Q \\ p &\mapsto \phi_X^{\Theta(p)}(p) \end{aligned}$$

réalise un difféomorphisme. En effet, nous pouvons construire cette application  $\Theta$  de la façon suivante. Notons  $\Phi_P : P \times \mathbb{R} \rightarrow W_*$  et  $\Phi_Q : Q \times \mathbb{R} \rightarrow W_*$  les symplectomorphismes qui identifient les symplectisations de  $P$  et  $Q$  à  $W_*$  -  $\Phi_P(p, \theta) = \phi_X^\theta(p)$  pour tout  $p \in P$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  et de même pour  $Q$  - ainsi pour tout  $p \in P$

$$\Theta(p) := pr_{\mathbb{R}} \left( (\Phi_Q)^{-1} \Phi_P(p, 0) \right) ,$$

où  $pr_{\mathbb{R}}$  désigne la projection canonique sur la coordonnée  $\mathbb{R}$ . Montrons que ce difféomorphisme préserve les distributions de contact. Pour cela prenons  $p \in P$  et  $u \in \text{Ker}(\alpha_p)$

$$(\Phi_{P,Q})^* \lambda_p(u) = \lambda_{\phi_X^{\Theta(p)}(p)} \left( d_p \Theta(u) X \left( \phi_X^{\Theta(p)}(p) \right) + d_p \phi_X^{\Theta(p)}(u) \right) = \left( \phi_X^{\Theta(p)} \right)^* \lambda_p(u) = e^{\Theta(p)} \lambda_p(u) = 0$$

la deuxième égalité provient du fait que  $\lambda(X) = \omega(X, X) \equiv 0$  et la troisième du fait que le flot de Liouville dilate exponentiellement la forme de Liouville (voir formule (2)).  $\square$

Ce dernier corollaire peut être vu de manière plus abstraite. En effet, le flot du champs de Liouville induit une action libre et propre de  $\mathbb{R}$  sur  $W_*$ , ainsi  $P_\infty := W_*/\mathbb{R}$  est une variété. De plus comme le flot de Liouville dilate exponentiellement la forme de Liouville, la distribution  $\text{Ker}(\lambda)$  sur  $W_*$  passe au quotient  $P_\infty$  en une distribution  $\eta_\infty$ . Le lecteur pourra alors vérifier que  $(P_\infty, \eta_\infty)$  est une variété de contact contactomorphe à toute variété de contact que nous avons construite comme le bord d'un ouvert étoilé. Sa symplectisation positive est symplectomorphe à  $(W_*, \omega|_{W_*})$ . C'est cette variété de contact abstraite que nous appelons le bord de contact idéal de  $(W, \omega = d\lambda)$ .

- Exemple 0.14.* 1. Dans le cas de  $\left(\mathbb{R}^{2n}, 2\omega_{st} = d \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)\right)$ , où  $n$  désigne un entier plus grand que 1, le bord de contact idéal peut être identifié à la sphère euclidienne standard  $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  munie du noyau de la forme  $\alpha_{S^{2n-1}} := \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)$  que l'on restreint à  $S^{2n-1}$ .
2. Dans le cas où la variété de Liouville est  $(T^*X, d\lambda_X)$ , le cotangent d'une variété  $X$  de dimension plus grande que 2, le bord de contact idéal peut être identifié à  $(\mathbb{P}^+ T^*X, \xi_X)$ , le cotangent unitaire de  $X$ .
3. En voyant  $S^1$  comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , la 1-forme constante  $dt$  sur  $\mathbb{R}$  descend en une 1-forme  $dt$  sur  $S^1$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , la variété

$$\left( S^1 \times \mathbb{R}^{2n+1}, d \left( zdt + \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i) \right) \right),$$

où  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  désignent les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , est une variété de Liouville. Remarquons que lorsque  $n = 0$  le bord d'un ouvert étoilé n'est pas connexe, c'est la raison pour laquelle nous supposons  $n > 0$ . Le bord de contact idéal de cette variété de Liouville peut être identifié à

$$\left( S^1 \times S^{2n}, \text{Ker} \left( zdt + \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i) \right) \right) \subset S^1 \times \mathbb{R}^{2n+1}.$$

### 0.3.2 La préquantification d'une variété symplectique exacte

Lorsque  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété symplectique exacte de dimension  $2n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ , nous pouvons lui associer la variété de contact  $(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$ , où  $z$  désigne la coordonnée sur  $\mathbb{R}$ . En effet, sachant que  $\bigwedge_{i=1}^n (d\lambda)$  est une forme volume sur  $W$ , la  $2n+1$ -forme  $(dz - \lambda) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^n (-d\lambda) \right)$  en est également une sur  $W \times \mathbb{R}$ . Nous en déduisons que la 1-forme  $dz - \lambda$  est une forme de contact sur  $W \times \mathbb{R}$ . En considérant l'action libre et propre de  $\mathbb{Z}$  sur  $W \times \mathbb{R}$  donnée par,

$$\rho(k)(p, z) = (p, z + k), \quad \text{pour tout } (p, z) \in W \times \mathbb{R} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

nous pouvons construire une nouvelle variété de contact : la variété quotient que nous notons  $W \times S^1$ . En effet,  $\rho(k)^*(dz - \lambda) = dz - \lambda$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi la forme de contact  $dz - \lambda \in \Omega^1(W \times \mathbb{R})$  descend en une forme de contact sur  $W \times S^1$  que nous notons encore  $dz - \lambda$ . Nous appelons la variété de contact  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  la préquantification de la variété de Liouville  $(W, d\lambda)$ . Remarquons que le champs de Reeb associé à la forme de contact  $dz - \lambda$  sur  $W \times \mathbb{R}$  et  $W \times S^1$  est donné par  $\frac{\partial}{\partial z}$ , nous notons  $\phi_{\frac{\partial}{\partial z}}$  son flot. Ce flot est défini pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$  par  $\phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^t(p, z) = (p, z + t)$  pour tout  $(p, z) \in W \times \mathbb{R}$ .

## 0.4 Le groupe des symplectomorphismes hamiltoniens et des contactomorphismes

- Définition 0.15.** 1. Soit  $(W, \omega)$  une variété symplectique. L'ensemble des symplectomorphismes  $\psi : (W, \omega) \rightarrow (W, \omega)$  muni de la loi de composition forme un groupe que nous appelons le groupe des symplectomorphismes. Nous notons ce groupe  $\text{Symp}(W, \omega)$ .
2. Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact. L'ensemble des contactomorphismes  $\phi : (M, \xi) \rightarrow (M, \xi)$  muni de la loi de composition forme un groupe que nous appelons le groupe des contactomorphismes. Nous notons ce groupe  $\text{Cont}(M, \xi)$ .

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $A$  un ensemble. Par définition une famille d'éléments de  $A$  indexé par  $I$  est une application  $a : I \rightarrow A$ ,  $t \mapsto a^t$ , et nous la notons  $\{a^t\}_{t \in I}$ . Nous appelons  $I$  l'intervalle de temps.

Considérons  $X$  une variété munie d'une forme symplectique  $\omega$  (resp. d'une distribution de contact  $\xi$ ). Nous disons qu'une famille de symplectomorphismes (resp. de contactomorphismes, resp. de difféomorphismes)  $\{\varphi^t\}_{t \in I}$  de  $X$  indexé par  $I$ , est un chemin lisse de symplectomorphismes (resp. contactomorphismes, resp. difféomorphismes) indexé par  $I$  si l'application

$$I \times X \rightarrow X, \quad (t, x) \mapsto \varphi^t(x)$$

est lisse. Si  $I = [0, 1]$  et  $\{\varphi^t\}_{t \in [0, 1]}$  est un chemin lisse indexé par  $[0, 1]$ , nous disons simplement que c'est un chemin lisse - nous omettons l'intervalle de temps - et notons uniquement  $\{\varphi^t\}$  pour désigner  $\{\varphi^t\}_{t \in [0, 1]}$ . Nous notons  $\text{Symp}_0(X, \omega)$  (resp.  $\text{Cont}_0(X, \xi)$ , resp.  $\text{Diff}_0(X)$ ) l'ensemble des symplectomorphismes (resp. contactomorphismes, resp. difféomorphismes) qui sont le temps 1 d'un chemin lisse de symplectomorphismes (resp. contactomorphismes, resp. difféomorphismes)  $\{\varphi^t\}$  tel que  $\varphi^0 = \text{Id}$ . C'est un sous-groupe distingué de  $\text{Symp}(X, \omega)$  (resp.  $\text{Cont}(X, \xi)$ , resp.  $\text{Diff}(X)$ ).

Pour tout sous-ensemble  $A \subset X$ , nous notons  $\bar{A}$  l'adhérence de cet ensemble. Nous disons que  $\varphi$  est un symplectomorphisme (resp. contactomorphisme, resp. difféomorphisme) à support compact si

$$\text{Supp}(\varphi) := \overline{\{x \in X \mid \varphi(x) \neq x\}} \text{ est compact.}$$

De même nous disons qu'un chemin lisse de symplectomorphismes (resp. de contactomorphismes, resp. difféomorphismes) est à support compact si

$$\text{Supp}(\{\varphi^t\}) := \bigcup_{t \in [0, 1]} \overline{\{x \in X \mid \varphi^t(x) \neq x\}} \text{ est compact.}$$

Nous notons  $\text{Symp}_0^c(X, \omega)$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(X, \xi)$ , resp.  $\text{Diff}_0^c(X)$ ) l'ensemble des symplectomorphismes (resp. contactomorphismes, resp. difféomorphismes) qui sont le temps 1 d'un chemin lisse de symplectomorphismes (resp. contactomorphismes, resp. difféomorphismes) à support compact  $\{\varphi^t\}$  tel que  $\varphi^0 = \text{Id}$ . C'est un sous-groupe distingué de  $\text{Symp}_0(X, \omega)$  (resp.  $\text{Cont}_0(X, \xi)$ , resp.  $\text{Diff}_0(X)$ ). Il est clair que lorsque  $X$  est compact ces deux groupes coïncident  $\text{Symp}_0^c(X, \omega) = \text{Symp}_0(X, \omega)$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(X, \xi) = \text{Cont}_0(X, \xi)$ , resp.  $\text{Diff}_0^c(X) = \text{Diff}_0(X)$ ) et que quand  $X$  ne l'est pas nous avons une inclusion stricte.

*Remarque 0.16.* A. Banyaga dans [6] étudie la topologie compacte-ouverte  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'espace des difféomorphismes de  $X$  à support dans un compact  $K \subset X$ . Il considère alors  $\text{Diff}^c(X)$ , l'ensemble des difféomorphismes à support compact de  $X$ , muni de la topologie provenant de la limite inductive de l'espace des difféomorphismes à support dans un compact  $K \subset X$  lorsque  $K$  parcourt tous les compacts de  $X$ . Il démontre que la composante connexe contenant l'identité de  $\text{Diff}^c(X)$  correspond à ce que nous avons noté  $\text{Diff}_0^c(X)$ .

Lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact, un groupe associé à  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  que nous étudions durant cette thèse est son revêtement universel que nous notons  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Plus précisément notons  $\mathcal{D}(M, \xi)$  l'ensemble des chemins lisses de contactomorphismes à support compact  $\{\phi^t\}$  commençant à l'identité. Le revêtement universel est alors défini en identifiant les éléments de  $\mathcal{D}(M, \xi)$  qui sont homotopes à extrémités fixées. Plus précisément,

$$\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) = \mathcal{D}(M, \xi) / \sim$$

où pour tous  $\{\phi_1^t\}, \{\phi_2^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  nous avons  $\{\phi_1^t\} \sim \{\phi_2^t\}$  si et seulement si il existe un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  et une application lisse

$$[0, 1] \times [0, 1] \times M \rightarrow M, \quad (s, t, x) \mapsto \varphi_s^t(x)$$

telle que

1.  $\varphi_0^t(x) = \phi_1^t(x)$  et  $\varphi_1^t(x) = \phi_2^t(x)$  pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times M$
2.  $\{\varphi_s^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes à support compact qui commence à l'identité et finit à  $\phi$  pour tout  $s \in [0, 1]$ , c'est-à-dire que  $\varphi_s^0 = \text{Id}$  et  $\varphi_s^1 = \phi$ .

Ainsi pour tout  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$ , nous notons  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  la classe de cet élément.

Il y a deux façons de définir la même loi de groupe sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . En effet, la loi de groupe sur  $\mathcal{D}(M, \xi)$  qui consiste en la composition temps par temps de deux chemins lisses descend en une loi de groupe sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Plus précisément pour tous  $[\{\phi_1^t\}], [\{\phi_2^t\}]$  dans  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  le produit de ces deux éléments est défini par

$$[\{\phi_1^t\}][\{\phi_2^t\}] := [\{\phi_1^t \circ \phi_2^t\}].$$

Il est clair de cette définition que l'élément neutre de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  est donné par la classe du chemin constant égal à l'identité. Nous notons cet élément  $\text{Id}$ . De plus, l'inverse de tout élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  est donné par  $[\{(\phi^t)^{-1}\}]$ .

La deuxième façon de définir la même loi de groupe se fait par la concaténation de chemins. Soient  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$  deux éléments de  $\mathcal{D}(M, \xi)$ . Considérons une fonction surjective croissante  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que les dérivées  $n$ -ième en 0 et en 1 soient nulles pour tout  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , *i.e.*  $a^{(n)}(0) = a^{(n)}(1) = 0$ . Nous définissons la concaténation de  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$  par rapport à  $a$  de la façon suivante :

$$\{\phi_1^t\} \cdot_a \{\phi_2^t\} := \left\{ \begin{array}{ll} \phi_1^{a(2t)} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \phi_2^{a(2t-1)} \circ \phi_1^1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{array} \right\}.$$

La condition d'annulation de toutes les dérivées de  $a$  en 0 et 1 permet de s'assurer que  $\{\phi_1^t\} \cdot_a \{\phi_2^t\}$  est un chemin lisse. Nous affirmons que

$$[\{\phi_1^t\}][\{\phi_2^t\}] = [\{\phi_1^t\} \cdot_a \{\phi_2^t\}].$$

Cela vient du fait que pour tout chemin  $\{\phi^t\}$  et pour toute fonction  $b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  surjective et croissante  $[\{\phi^t\}]$  est égal à  $[\{\phi^{b(t)}\}]$ . En définissant alors les fonctions

$$b_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \begin{cases} a(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$b_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ a(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

nous avons  $\{\phi_1^{b_1(t)} \circ \phi_2^{b_2(t)}\} = \{\phi_1^t\} \cdot_a \{\phi_2^t\}$ , d'où l'affirmation précédente.

À partir de maintenant pour des raisons techniques, la fonction  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que nous utilisons pour concaténer tous chemins  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$  est supposée *strictement* croissante en plus d'être surjective et de vérifier  $a^{(n)}(0) = a^{(n)}(1) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Nous écrivons  $\{\phi_1^t\} \cdot \{\phi_2^t\}$  pour désigner  $\{\phi_1^t\} \cdot_a \{\phi_2^t\}$  lorsque  $a$  vérifie cette propriété supplémentaire.

Lorsque  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  est un chemin lisse et  $[\{\varphi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons des représentants privilégiés de  $[\{\phi^t\}]^{-1}$  et  $[\{\varphi^t\}][\{\phi^t\}][\{\varphi^t\}]^{-1}$ . C'est ce que nous discutons jusqu'à la fin de cette sous-section.

Nous disons qu'un chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  est un lacet si  $\phi^0 = \phi^1$ . Pour tout  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  nous notons  $\{\phi^t\}^{-1}$  pour désigner le chemin  $\{\phi^{1-t} \circ (\phi^1)^{-1}\}$ .

**Lemme 0.17.** *Pour tout chemin lisse de contactomorphismes commençant à l'identité  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  nous avons  $[\{\phi^t\}^{-1}] = [\{\phi^t\}]^{-1}$ .*

*Démonstration.* En effet,

$$\{\phi^t\} \cdot \{\phi^t\}^{-1} = \left\{ \begin{array}{ll} \phi^{a(2t)} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \phi^{1-a(2t-1)} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{array} \right\}.$$

est un lacet basé en l'identité. Montrons que c'est un lacet contractile, c'est-à-dire que  $[\{\phi^t\} \cdot \{\phi^t\}^{-1}] = \text{Id}$ . Il suffit pour cela de considérer pour tout  $s \in [0, 1]$  le chemin lisse

$$\{\varphi_s^t\} := \left\{ \begin{array}{ll} \phi^{s(a(2t))} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \phi^{s(1-a(2t-1))} & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{array} \right\}.$$

Le lecteur pourra alors vérifier que

$$[0, 1] \times [0, 1] \times M \rightarrow M, \quad (s, t, x) \mapsto \varphi_s^t(x)$$

est une application lisse telle que

1.  $\{\varphi_0^t\}$  est égal au chemin constant basé en l'identité et  $\{\varphi_1^t\} = \{\phi^t\} \cdot \{\phi^t\}^{-1}$
2.  $\{\varphi_s^t\}$  est un lacet basé en l'identité pour tout  $s \in [0, 1]$ .

□

Un lemme que nous utiliserons constamment au cours de cette thèse est le suivant.

**Lemme 0.18.** *Soient  $\{\phi^t\}$  et  $\{\varphi^t\}$  deux chemins lisses de  $\mathcal{D}(M, \xi)$  nous avons alors :*

$$[\{\varphi^t\}][\{\phi^t\}][\{\varphi^t\}]^{-1} = [\{\varphi^1 \circ \phi^t \circ (\varphi^1)^{-1}\}].$$

*Démonstration.* Il suffit pour cela de considérer l'application lisse

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \times M \rightarrow M, \quad (s, t, x) \mapsto \varphi^{s+(1-s)t} \circ \phi^t \circ (\varphi^{s+(1-s)t})^{-1}.$$

□

## 0.5 Les fonctions hamiltoniennes

Dans cette sous-section nous verrons comment associer à des fonctions des chemins lisses de contactomorphismes ou de symplectomorphismes.

Remarquons tout d'abord que si  $\{\varphi^t\}$  désigne un chemin lisse de difféomorphismes d'une variété  $X$ , nous pouvons lui associer un chemin lisse de champs de vecteurs  $\{Y^t\}$ , c'est-à-dire que  $Y^t \in \chi(X)$  est un champs de vecteurs pour tout  $t \in [0, 1]$  et l'application

$$[0, 1] \times X \rightarrow TX, \quad (t, x) \mapsto Y^t(x)$$

est lisse. C'est l'unique chemin lisse de champs de vecteurs qui vérifie pour tout  $(t, x) \in [0, 1] \times X$

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = Y^t(\varphi^t(x)) . \quad (3)$$

Nous disons qu'un chemin lisse de champs de vecteurs  $\{Y^t\}$  est à support compact si  $\{Y^t\}$  est un chemin lisse de champs de vecteurs tel que  $\text{Supp}(Y^t) := \{x \in X \mid Y^t(x) \neq 0\}$  est compact pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Réciproquement pour tout chemin lisse de champs de vecteurs à support compact  $\{Y^t\}$  il existe un unique chemin lisse de difféomorphismes à support compact  $\{\varphi^t\}$  qui *commence à l'identité* et qui vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 (3). Nous appelons ce chemin lisse  $\{\varphi^t\}$  le flot du chemin de champs de vecteur  $Y := \{Y^t\}$ . Nous écrivons  $\phi_Y$  pour désigner  $\{\varphi^t\}$  et  $\phi_Y^t := \varphi^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

*Exemple 0.19.* 1. Nous avons vu que lorsque  $(W, \omega = d\lambda)$  désigne une variété de Liouville, le champs de Liouville  $X \in \chi(W)$ , défini comme l'unique champs de vecteurs vérifiant  $\iota_X \omega = \lambda$ , est un champs de vecteurs dont le flot est défini pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Un objet naturel associé à une variété  $M$  munie d'une 1-forme de contact  $\alpha$  est un champs de vecteurs de  $M$  nommé le champs de Reeb. Nous le notons  $R_\alpha$  et c'est l'unique champs de vecteurs de  $M$  qui satisfait les conditions suivantes

$$\begin{cases} \alpha(R_\alpha) \equiv 1 \\ \iota_{R_\alpha} d\alpha \equiv 0 . \end{cases} \quad (4)$$

Nous appelons le flot de ce champs de vecteurs le flot de Reeb. Lorsque le flot de Reeb au temps  $t \in \mathbb{R}$  est bien défini, c'est le cas pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$  lorsque  $M$  est compacte, c'est un contactomorphisme. En effet d'après la formule de Cartan nous avons pour tout  $s \in [0, t]$

$$\frac{d}{ds}(\phi_{R_\alpha}^s)^* \alpha = \phi_{R_\alpha}^{s*} (\iota_{R_\alpha} d\alpha + d\iota_{R_\alpha} \alpha) = 0 .$$

De plus comme  $\phi_{R_\alpha}^0 = \text{Id}$  cela implique que  $(\phi_{R_\alpha}^s)^* \alpha = \alpha$  pour tout  $s \in [0, t]$ , et donc en particulier lorsque  $s = t$ .

### 0.5.1 Le cas symplectique

Soit  $(W, \omega)$  une variété symplectique. Considérons  $\{\psi^t\}$  un chemin lisse de symplectomorphismes de  $(W, \omega)$  et notons  $\{X^t\}$  son chemin lisse de champs de vecteurs associé. D'après la formule de Cartan nous avons alors pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\frac{d}{dt} \left( (\psi^t)^* \omega \right) = (\psi^t)^* (\iota_{X^t} d\omega + d\iota_{X^t} \omega) .$$

De plus comme  $\{\psi^t\}$  est un chemin lisse de symplectomorphismes cette dernière quantité vaut 0 et comme  $\omega$  est fermée nous concluons *in fine* que  $\iota_{X^t} \omega$  est une forme fermée pour tout  $t \in [0, 1]$ . Dans le cas où  $\{\psi^t\}$  commence à l'identité et que  $\iota_{X^t} \omega$  est, en plus d'être fermée, une forme exacte pour tout  $t \in [0, 1]$  nous disons que  $\{\psi^t\}$  est une isotopie hamiltonienne. Plus précisément nous disons que  $\{\psi^t\}$  est une isotopie hamiltonienne si  $\psi^0 = \text{Id}$  et s'il existe  $\{H^t\}$  un chemin lisse de fonctions, c'est-à-dire que l'application  $[0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto H^t(x)$  est lisse, tel que  $\iota_{X^t} \omega = -dH^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Nous appelons alors le chemin de fonctions  $H := \{H^t\}$  une fonction hamiltonienne pour l'isotopie hamiltonienne  $\{\psi^t\}$ . Nous notons  $\text{Ham}(W, \omega)$  l'ensemble des symplectomorphismes de  $(W, \omega)$  qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne et par définition un symplectomorphisme hamiltonien est un élément de cet ensemble. De même nous notons  $\text{Ham}^c(W, \omega)$  l'ensemble des symplectomorphismes de  $(W, \omega)$  qui sont le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne à support compact et par définition un symplectomorphisme hamiltonien

à support compact est un élément de cet ensemble.

Réciproquement à toute fonction hamiltonienne  $H := \{H^t\}$  qui est à support compact, *i.e.*  $\overline{\bigcup_{t \in [0,1]} \{x \in W \mid H^t(x) \neq 0\}}$  est compact, il existe un unique chemin lisse de champs de vecteurs

$X := \{X^t\}$  défini par la relation  $\iota_{X^t}\omega = -dH^t$ . Nous appelons  $X$  (resp.  $X^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ) le gradient symplectique de  $H$  (resp. de  $H^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ). Son flot  $\phi_X$  est alors une isotopie hamiltonienne et nous disons que  $H \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R})$  engendre l'isotopie hamiltonienne  $\phi_X$ . Nous notons généralement  $\psi_H := \phi_X$  cette isotopie et  $\psi_H^t := \phi_X^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Le lemme qui suit a pour conséquence que les ensembles  $\text{Ham}(W, \omega)$  et  $\text{Ham}^c(W, \omega)$  sont des sous-groupes distingués de  $\text{Symp}(W, \omega)$ .

**Lemme 0.20.** *Soient  $\{\psi_1^t\}$  et  $\{\psi_2^t\}$  deux isotopies hamiltoniennes. Considérons  $H_1$  et  $H_2$  deux fonctions hamiltoniennes qui engendrent  $\{\psi_1^t\}$  et  $\{\psi_2^t\}$ .*

1. *Le chemin lisse de symplectomorphismes  $\{\psi_1^t \circ \psi_2^t\}$  est une isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction hamiltonienne*

$$H_1 \# H_2 : [0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto H_1^t(x) + H_2^t((\psi_1^t)^{-1}(x)) .$$

2. *Pour tout symplectomorphisme  $\psi \in \text{Symp}(M, \omega)$  le chemin lisse de symplectomorphismes  $\{\psi^{-1} \circ \psi_1^t \circ \psi\}$  est une isotopie hamiltonienne engendrée par la fonction hamiltonienne*

$$H_1 \circ \psi : [0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto H_1^t(\psi(x)) .$$

Nous laissons la démonstration de ce lemme au lecteur.

*Remarque 0.21.* 1. Si  $H_1 : [0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction hamiltonienne à support compact qui engendre l'isotopie hamiltonienne  $\{\psi_{H_1}\}$ , alors pour toute constante  $c \in \mathbb{R}$  la fonction  $H_1 + c$  est une fonction hamiltonienne qui engendre la même isotopie hamiltonienne.

2. Il n'est *a priori* pas clair qu'un chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens partant de l'identité  $\{\psi^t\}$  soit une isotopie hamiltonienne. A. Banyaga [5] a prouvé que c'est bien le cas.

## 0.5.2 Le cas de contact

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact telle que la distribution  $\xi$  est co-orientable. Fixons  $\alpha$  une 1-forme de contact pour la distribution  $\xi$ . Considérons alors  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes de  $(M, \xi)$  qui commence à l'identité et notons  $\{X^t\}$  le chemin lisse de champs de vecteurs associé. Comme  $\{\phi^t\}$  est un chemin de contactomorphismes qui part de l'identité, il existe un chemin lisse de fonctions  $\{g^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  tel que  $(\phi^t)^*\alpha = e^{g^t}\alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$  -  $g^t$  est le facteur de conformalité de  $\phi^t$  par rapport à  $\alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Ainsi pour tout  $t \in [0, 1]$  nous avons

$$(\phi^t)^*\mathcal{L}_{X^t}(\alpha) = \frac{d}{dt} \left( (\phi^t)^*\alpha \right) = \frac{d}{dt} e^{g^t} \alpha = \frac{\partial g^t}{\partial t} e^{g^t} \alpha ,$$

où  $\mathcal{L}_{X^t}$  désigne la dérivée de Lie par rapport au champs de vecteurs  $X^t$ . En particulier cela implique qu'il existe un chemin lisse de fonctions  $\{k^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  tel que  $\mathcal{L}_{X^t}\alpha = k^t\alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un chemin lisses de champs de vecteurs  $\{X^t\}$  à support compact et un chemin lisse de fonctions  $\{k^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  tel que  $\mathcal{L}_{X^t}\alpha = k^t\alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . En notant  $\phi_X$  le flot de  $X := \{X^t\}$  nous avons pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\frac{d}{dt} \left( (\phi_X^t)^*\alpha \right) = \left( \phi_X^t \right)^* k^t \alpha = (k^t \circ \phi_X^t) \left( \phi_X^t \right)^* \alpha .$$

De ce fait,

$$\left( \phi_X^t \right)^* \alpha = \exp \left( \int_0^t (k^s \circ \phi_X^s) ds \right) \alpha \tag{5}$$



et donc  $\phi_X$  est un chemin lisse de contactomorphismes. Nous disons donc qu'un champs de vecteurs  $X \in \chi(M)$  est de contact s'il existe une fonction  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{L}_X \alpha = k\alpha$ , et qu'un chemin lisse de champs de vecteurs  $\{X^t\}$  est de contact s'il existe un chemin lisse de fonctions  $\{k^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  tel que  $\mathcal{L}_{X^t} \alpha = k^t \alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

*Remarque 0.22.* Le fait qu'un champs de vecteurs soit de contact ne dépend pas de  $\alpha$  mais uniquement de  $\xi$ . En effet, si  $\beta$  est une autre forme de contact pour  $\xi$  il existe une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  telle que  $\beta = f\alpha$ . Si  $X$  est un champs de vecteurs tel que  $\mathcal{L}_X \alpha = k\alpha$  où  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  désigne une fonction lisse, alors

$$\mathcal{L}_X \beta = \frac{1}{f} (df(X) + fk) \beta .$$

**Lemme 0.23.** *Nous avons une bijection entre l'ensemble des chemins lisses de fonctions et l'ensemble des chemins lisses de champs de vecteurs de contact. Plus précisément cette bijection et sa réciproque sont définies par les points suivants*

1. À un chemin lisse de champs de vecteurs de contact  $\{X^t\}$  nous associons le chemin lisse de fonctions  $\{h^t := \alpha(X^t)\}$ .
2. À un chemin lisse de fonctions  $\{h^t\}$  nous associons l'unique chemin lisse de champs de vecteurs  $\{X^t\}$ , où  $X^t$  est défini pour tout  $t \in [0, 1]$  par

$$\begin{cases} \alpha(X^t) = h^t \\ \iota_{X^t} d\alpha = dh^t(R_\alpha)\alpha - dh^t \end{cases} \quad (6)$$

et où  $R_\alpha$  désigne le champs de Reeb associé à la forme  $\alpha$  (voir le système d'équations (4)).

*Démonstration.* Soit  $\{X^t\}$  un chemin lisse de champs de vecteurs de contact et notons  $\{k^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  le chemin lisse de fonctions tel que  $\mathcal{L}_{X^t} \alpha = k^t \alpha$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Définissons alors le chemin lisse de fonctions  $\{h^t := \alpha(X^t)\}$ . En appliquant la formule de Cartan pour tout  $t \in [0, 1]$  nous avons

$$\mathcal{L}_{X^t} \alpha = \iota_{X^t} d\alpha + d\iota_{X^t} \alpha = \iota_{X^t} d\alpha + dh^t = k^t \alpha . \quad (7)$$

En évaluant les 1-formes de l'équation (7) en le champs de Reeb  $R_\alpha$ , nous avons

$$k^t = dh^t(R_\alpha). \quad (8)$$

Ainsi

$$\iota_{X^t} d\alpha = dh^t(R_\alpha)\alpha - dh^t . \quad (9)$$

Réciproquement si  $\{h^t\}$  est un chemin lisse de fonctions, montrons dans un premier temps que le système d'équations (6) définit un unique champs de vecteurs. Le fait que  $d\alpha$  soit non dégénérée sur  $\xi$  et que  $TM = \xi \oplus \langle R_\alpha \rangle$  permet de dire que si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs tels que

$$\iota_X d\alpha = \iota_Y d\alpha ,$$

il existe une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $X - Y = fR_\alpha$ . Si de plus  $\alpha(X) = \alpha(Y)$  cela implique que  $f = 0$  et donc que  $X = Y$ . Ainsi le système d'équations (6) définit bien un unique chemin lisses de champs de vecteurs  $\{X^t\}$ . Montrons qu'il est de contact. En combinant la formule de Cartan et le système d'équations (6) nous avons pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{L}_{X^t} \alpha = \iota_{X^t} d\alpha + d\iota_{X^t} \alpha = dh^t(R_\alpha)\alpha - dh^t + dh^t = dh^t(R_\alpha)\alpha ,$$

et donc que  $\{X^t\}$  est un chemin lisses de champs de vecteurs de contact.  $\square$

*Remarque 0.24.* Si  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes commençant à l'identité et  $\{g^t\}$  le chemin lisse de facteurs de conformalité de  $\{\phi^t\}$  par rapport à  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $(\phi^t)^* \alpha = e^{g^t}(\alpha)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous déduisons des formules (5) et (8) que pour tout  $t \in [0, 1]$

$$g^t = \int_0^t (dh^s(R_\alpha) \circ \phi^s) ds .$$

Ainsi lorsque  $h := \{h^t : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  est un chemin lisse de fonctions à support compact via le lemme précédent nous pouvons lui associer un chemin lisse de champs de vecteurs de contact à support compact  $\{X^t\}$ . Nous notons  $\phi_h^t$  le flot au temps  $t \in \mathbb{R}$  de ce champs de vecteurs et  $\phi_h := \{\phi_h^t\}_{t \in [0,1]}$  le chemin lisse de contactomorphismes correspondant. Nous disons que  $h$  est la fonction hamiltonienne qui engendre  $\phi_h$ . Attention cette construction n'a de sens qu'une fois une forme de contact  $\alpha$  fixée.

Enfin il est intéressant de voir qu'un chemin lisse de contactomorphismes de  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  partant de l'identité se relève dans la symplectisation positive en une isotopie hamiltonienne de  $(\mathcal{S}_\xi^+(M), d\lambda_\xi)$  qui est équivariante par l'action de  $\mathbb{R}_{>0}$ . Pour le voir, identifions la symplectisation à  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ . Considérons  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes partant de l'identité et  $\{g^t\}$  le chemin lisse de facteurs de conformalité par rapport à  $\alpha$  de  $\{\phi^t\}$ . Rappelons que nous définissons  $\{\psi^t\}$  le chemin lisse de symplectomorphismes  $\mathbb{R}_{>0}$ -équivariant de  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$  par la formule

$$\psi^t(x, \theta) = (\phi^t(x), \theta - g^t(x)) , \text{ pour tout } (t, x, \theta) \in [0, 1] \times M \times \mathbb{R}.$$

De ce fait pour tout  $(t, x, \theta) \in [0, 1] \times M \times \mathbb{R}$  nous avons d'après la remarque [0.24](#) que

$$\frac{d}{dt} \psi^t(x, \theta) = \left( X^t(\phi^t(x)), -\frac{\partial g^t}{\partial t}(x) \right) = \left( X^t(\phi^t(x)), -dh^t(R_\alpha) \circ \phi^t \right)$$

où  $\{X^t\}$  désigne le champs de vecteurs de contact associé à  $\{\phi^t\}$  et  $\{h^t := \alpha(X^t)\}$  sa fonction hamiltonienne. Ainsi le chemin de champs de vecteurs associé à  $\{\psi^t\}$  est défini pour tout  $(t, x, \theta) \in [0, 1] \times M \times \mathbb{R}$  par

$$Y^t(x, \theta) = \left( X^t(x), -d_x h^t(R_\alpha(x)) \right) \quad (10)$$

et nous avons donc pour tout  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \iota_{Y^t} d(e^\theta \alpha) &= e^\theta \iota_{Y^t} ((d\theta)\alpha + d\alpha) \\ &= e^\theta \left( -dh^t(R_\alpha)\alpha - (d\theta)\alpha(X^t) + \iota_{X^t} d\alpha \right) \\ &= -e^\theta \left( (d\theta)h^t + dh^t \right) = -d(e^\theta h^t) . \end{aligned}$$

Ainsi  $\{\psi^t\}$  est bien une isotopie hamiltonienne dont la fonction hamiltonienne est définie par la formule suivante

$$H : [0, 1] \times M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x, \theta) \mapsto e^\theta h^t(x) .$$

Remarquons que  $H^t$  est homogène de degré 1 sous l'action de  $\mathbb{R}_{>0}$  pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$H^t(x, \ln(\theta_0) + \theta) = \theta_0 H^t(x, \theta), \quad \text{pour tout } (x, \theta) \in M \times \mathbb{R} \text{ et pour tout } \theta_0 \in \mathbb{R}_{>0} .$$

Pour cette raison nous appelons  $H$  la fonction hamiltonienne homogène correspondante à  $h$ . Nous notons  $\text{Ham}^{\mathbb{R}_{>0}}(\mathcal{S}^+(M, \xi), d\lambda_\xi)$  l'ensemble des temps 1 des isotopies hamiltoniennes  $\mathbb{R}_{>0}$ -équivariants. De cette construction et du lemme [0.20](#) nous déduisons le lemme suivant.

**Lemme 0.25.** *Soient  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$  deux chemins lisses de contactomorphismes de  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  commençant à l'identité,  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions hamiltoniennes pour  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$ .*

1. *En notant  $\{g_1^t\}$  le chemin lisse de facteurs de conformalité de  $\{\phi_1^t\}$  par rapport à  $\alpha$  la fonction*

$$h_1 \# h_2 : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto h_1^t(x) + e^{g_1^t((\phi_1^t)^{-1}(x))} h_2^t((\phi_1^t)^{-1}(x))$$

*est une fonction hamiltonienne qui engendre le chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi_1^t \circ \phi_2^t\}$ .*

2. Soit  $\varphi$  un contactomorphisme de  $(M, \xi)$  tel que  $\varphi^*\alpha = e^f\alpha$ , alors la fonction

$$[0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto e^{-f(x)}h_1^t(\varphi(x))$$

est une fonction hamiltonienne qui engendre le chemin lisse de contactomorphismes  $\{\varphi^{-1} \circ \phi_1^t \circ \varphi\}$ .

Pour conclure ce chapitre 0, motivons l'étude du groupe des symétries d'une variété de contact par le théorème suivant de A. Banyaga et A. McInerney [7].

**Théorème 0.26** ([7]). *Soient  $(M_1, \xi_1)$  et  $(M_2, \xi_2)$  deux variétés de contact. Il existe un isomorphisme de groupe  $\Phi : \text{Cont}_0^c(M_1, \xi_1) \rightarrow \text{Cont}_0^c(M_2, \xi_2)$  si et seulement s'il existe un contactomorphisme  $\phi : (M_1, \xi_1) \rightarrow (M_2, \xi_2)$ .*

Ainsi toutes les informations d'une variété de contact  $(M, \xi)$  sont contenues dans le groupe  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Ce groupe est donc "très grand". Le lecteur pourra voir par exemple dans [38], [39] qu'il est possible de mettre une structure de groupe de Lie sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Dans ce cas, son algèbre de Lie consiste en l'espace vectoriel des champs de vecteurs de contact et nous pouvons déduire du lemme 0.23 que ce dernier espace vectoriel est de dimension infinie. Cela confirme l'intuition du groupe "très grand" ainsi que l'absence d'invariants locaux discutée dans la remarque 0.6. Il s'avère cependant que pour certaines variétés de contact  $(M, \xi)$ , la rigidité globale de la distribution de contact permet de munir  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  et  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  de structures géométriques naturelles compatibles avec leur structure de groupe. Les structures géométriques qui vont nous intéresser au cours de cette thèse sont les normes (invariantes par conjugaison) ainsi qu'une relation d'ordre partielle.

# 1 La géométrie de $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$ et $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$

Dans ce chapitre nous parlerons dans la première section de normes invariantes par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes. En particulier nous verrons qu'elles sont toujours discrètes. Nous discuterons du fait que le caractère borné ou non de ces normes est alors primordial. Cette première section se base essentiellement sur les résultats de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21].

Dans la deuxième section nous définirons la relation binaire partielle, que nous noterons  $\succeq$ , introduite par Y. Eliashberg et L. Polterovich [20] sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes d'une variété de contact (éventuellement non compacte [21])  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Cette relation binaire est de manière triviale réflexive et transitive. Elle est de plus bi-invariante, c'est-à-dire que si  $f_1 \succeq g_1$  et  $f_2 \succeq g_2$  alors  $f_1 f_2 \succeq g_1 g_2$  pour tout  $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Par contre, elle n'a pas la propriété d'antisymétrie en général, c'est-à-dire qu'elle ne définit pas une relation d'ordre partiel en général. Lorsque c'est le cas, nous disons que la variété de contact est ordonnable. Nous donnerons dans cette section un critère géométrique suffisant pour que les variétés de contact soient ordonlables et également des exemples de variétés de contact non ordonlables. Cette deuxième section se base essentiellement sur les résultats que le lecteur pourra trouver dans [20], [19] et également [21].

Enfin, dans une troisième section nous discuterons de liens entre l'ordonnabilité d'une variété de contact et l'existence de normes et de métriques non triviales sur le groupe des contactomorphismes et son revêtement universel.

## 1.1 Normes

Commençons par donner la définition d'une norme invariante par conjugaison sur un groupe  $G$ .

**Définition 1.1** (Norme invariante par conjugaison). Soit  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  une application à valeurs réelles positives. Nous disons que  $\nu$  est une norme invariante par conjugaison si pour tout élément  $g$  et tout élément  $h$  dans  $G$  nous avons

1.  $\nu(gh) \leq \nu(g) + \nu(h)$
2.  $\nu(g^{-1}) = \nu(g)$
3.  $\nu(g) = 0$  si et seulement si  $g$  est l'élément neutre du groupe
4.  $\nu(hgh^{-1}) = \nu(g)$ .

Lorsqu'uniquement les 3 premières propriétés sont vérifiées nous disons que  $\nu$  est une norme. Lorsque seulement les 2 premières propriétés sont vérifiées nous disons que  $\nu$  est une pseudo-norme. Une autre façon de définir une norme invariante par conjugaison sur un groupe est de se donner une métrique bi-invariante.

**Définition 1.2** (Métrique bi-invariante). Soit  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  une application à valeurs réelles positives. Nous disons que  $d$  est une métrique bi-invariante si pour tous  $g_1, g_2, g_3$  dans  $G$  nous avons

1.  $d(g_1, g_3) \leq d(g_1, g_2) + d(g_2, g_3)$
2.  $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$
3.  $d(g_1, g_2) = 0$  si et seulement si  $g_1 = g_2$
4.  $d(g_3 g_1, g_3 g_2) = d(g_1 g_3, g_2 g_3) = d(g_1, g_2)$ .

Ainsi le lecteur pourra vérifier que si  $d$  est une métrique bi-invariante sur  $G$ , l'application  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui à tout élément  $g$  lui associe sa distance à l'élément neutre,  $\nu(g) = d(e, g)$ , est une norme invariante par conjugaison. Réciproquement, si  $\nu$  est une norme invariante par conjugaison sur  $G$  alors l'application  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , définie pour tout couple  $(g, h) \in G \times G$  de la manière suivante  $d(g, h) = \nu(gh^{-1})$ , est une métrique bi-invariante.

*Exemple 1.3.* 1. Pour tout groupe  $G$ , la norme triviale  $\nu_0 : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , qui à tout élément  $g$  différent de l'élément neutre du groupe associe 1 et 0 à l'élément neutre, est une norme invariante par conjugaison.

2. Soit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  un entier strictement positif, et considérons le groupe  $(\mathbb{R}^n, +)$ . La distance euclidienne standard entre deux points  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2},$$

est une métrique bi-invariante.

Si  $d$  est une métrique bi-invariante sur un groupe  $G$ , alors  $G$  muni de la topologie métrique définie par  $d$  est un groupe topologique, c'est-à-dire que la multiplication et le passage à l'inverse sont deux applications continues pour cette topologie. Dans le cas du groupe des contactomorphismes d'une variété de contact nous verrons à la proposition [1.6](#) que la topologie donnée par une métrique bi-invariante n'est pas intéressante, il s'agira dans tous les cas de la topologie discrète. En effet toutes les normes invariantes par conjugaison auront la propriété suivante.

**Définition 1.4** (Norme discrète). Soit  $\nu$  une norme sur un groupe  $G$ . Nous disons que  $\nu$  est discrète s'il existe  $C > 0$  tel que  $\nu(g) > C$  pour tout  $g \in G$ .

*Exemple 1.5.* 1. Soit  $G$  un groupe et  $S \subset G$  un sous-ensemble générateur de  $G$ , c'est-à-dire que pour tout  $g \in G$  il existe  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  éléments  $g_1, \dots, g_N \in S$  tels que  $g = \prod_{i=1}^N g_i$ .

Supposons que  $S$  est stable par passage à l'inverse, c'est-à-dire que  $g^{-1} \in S$  pour tout  $g \in S$ . En notant  $S_k := \left\{ \prod_{i=1}^k g_i \mid (g_i)_{i \in [1, k] \cap \mathbb{N}} \in S^k \right\}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ , l'application

$$\begin{aligned} \nu : G &\rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0} \\ g &\mapsto \begin{cases} \min \{k \mid g \in S_k\} & \text{si } g \neq e \\ 0 & \text{si } g = e \end{cases} \end{aligned}$$

est une norme. Si de plus l'ensemble  $S$  est invariant par conjugaison, c'est-à-dire que  $hgh^{-1} \in S$  pour tout  $g \in S$  et pour tout  $h \in G$ , alors la norme précédente est une norme invariante par conjugaison. Cette norme est appelée la norme des mots associés à l'ensemble  $S$ .

2. Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact de dimension  $2n+1$ . Nous disons que  $\mathcal{B} \subset M$  est une boule de Darboux si c'est l'image d'un plongement de contact d'une boule ouverte euclidienne  $B$  standard incluse dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$  munie de la distribution de contact  $\xi_{st|B}$ . Définissons les sous-ensembles de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  suivants

$$\tilde{S} := \left\{ [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \mid \text{Supp}(\{\phi^t\}) \subset \text{une boule de Darboux} \right\} \subset \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$$

et

$$S := \pi(\tilde{S}) \subset \text{Cont}_0^c(M, \xi)$$

où  $\pi : \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \rightarrow \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  désigne la projection canonique. Les ensembles  $\tilde{S}$  et  $S$  sont alors des ensembles générateurs de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  respectivement d'après

[6]. Ces ensembles sont de plus stables par conjugaison et par passage à l'inverse. Nous appelons les normes de mots associées aux ensembles  $\tilde{S}$  et  $S$  la norme de fragmentation. Nous les notons respectivement  $\widetilde{\nu}_{Frag}$  et  $\nu_{Frag}$ .

**Théorème 1.6** ([21]). *Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact.*

1. *Toute norme invariante par conjugaison  $\nu : \text{Cont}_0^c(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est discrète.*
2. *Toute norme invariante par conjugaison  $\nu : \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est discrète sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \setminus \pi_1(G)$ .*

Nous donnons une démonstration de ce théorème à la fin de cette section.

Un phénomène similaire se produit lorsque l'on s'intéresse aux normes invariantes par conjugaison sur le groupe des difféomorphismes de variétés. De plus D. Burago, S. Ivanov et L. Polterovich ainsi que T. Tsuboi ont démontré sur une grande famille de variétés différentielles que ces normes sont bornées, c'est-à-dire qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\nu(g) < M$  pour tout  $g \in G$ . Plus précisément nous avons le résultat suivant.

**Théorème 1.7** ([10], [51], [52]). *Soit  $M$  une variété connexe et fermée.*

1. *Toute norme invariante par conjugaison  $\nu : \text{Diff}_0(M) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est discrète et bornée.*
2. *Toute norme invariante par conjugaison  $\nu : \text{Diff}_0^c(M \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est discrète et bornée pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ .*

Deux normes  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sur un groupe  $G$  sont dites équivalentes s'il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $g \in G$

$$\frac{1}{A} \nu_2(g) \leq \nu_1(g) \leq A \nu_2(g) .$$

Ainsi une norme sur un groupe  $G$  qui est discrète et bornée est équivalente à la norme triviale (définie dans l'exemple [1.3]).

Bien que les normes invariantes par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes soient toujours discrètes, S. Sandon [41] a montré l'existence d'une norme invariante par conjugaison non bornée sur le groupe des contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  munie de sa structure de contact standard. Nous donnerons une nouvelle démonstration au chapitre 4 du caractère non borné de la norme de [41] ainsi que de plusieurs autres normes [21], [16], [44] en étudiant leurs géodésiques. En opposition au théorème [1.7] l'existence de telles normes sur le groupe des contactomorphisme traduit donc une certaine rigidité supplémentaire que confère la structure de contact à la variété différentielle  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ .

Une autre façon de déduire des rigidités de la structure de contact provenant de normes invariantes par conjugaison est d'utiliser ces normes pour associer aux ouverts de la variété sous-jacente des invariants de contact numériques. Soit  $U \subset M$  un ouvert d'une variété de contact  $(M, \xi)$ , nous notons  $\text{Cont}_0^c(U, \xi)$  l'ensemble des contactomorphismes de  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  qui peuvent être reliés à l'identité par des chemins lisses de contactomorphismes à support compact dans  $U$ . De même,  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(U, \xi)$  désigne l'ensemble des chemins lisses de contactomorphismes de  $(M, \xi)$  à support compact partant de l'identité et à support dans  $U$  que l'on quotiente par la relation d'être homotope à extrémités fixées. Attention, les chemins considérés durant l'homotopie peuvent ne pas être à support dans  $U$ . Si  $\nu$  est une norme invariante par conjugaison sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  (resp.  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ ) le nombre suivant

$$C(U) := \sup \{ \nu(g) \mid g \in \text{Cont}_0^c(U, \xi) \} \quad (\text{resp. } C(U) := \sup \{ \nu(g) \mid g \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(U, \xi) \})$$

est invariant par contactomorphisme, c'est-à-dire que  $c(U) = c(\phi(U))$  pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Nous reviendrons plus précisément sur cette remarque lorsque l'on parlera de capacité de contact

dans la section [2.3.4](#).

En contrepartie M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [\[21\]](#) démontrent des résultats de bornitude de normes invariantes par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes (ou sur le revêtement universel de ce dernier) d'une variété de contact qui est transportable par contactomorphisme.

**Définition 1.8** (transportable par contactomorphisme [\[21\]](#)). Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact ouverte connexe. Nous disons qu'elle est transportable par contactomorphisme s'il existe un sous-ensemble compacte connexe  $K \subset M$  et un chemin lisse de contactomorphismes partant de l'identité  $\{P^t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  tels que

1. ce compact  $K$  est attracteur, c'est-à-dire que pour tout compact  $A$  de  $M$  et pour tout voisinage  $U$  de  $K$  il existe un temps  $t > 0$  tel que  $P^t(A) \subset U$ ,
2. il existe un contactomorphisme  $\varphi \in \text{Cont}(M, \xi)$  (qui peut ne pas être à support compact) qui déplace  $K$ , c'est-à-dire que  $\phi(K) \cap K = \emptyset$ .

**Proposition 1.9** ([\[21\]](#)). Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact qui est transportable par contactomorphisme. Alors toute norme invariante par conjugaison  $\nu$  sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  ou sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  qui est bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité est équivalente à la norme triviale, c'est-à-dire que  $\nu$  est discrète et bornée.

En utilisant la proposition précédente ils démontrent la proposition suivante.

**Proposition 1.10** ([\[21\]](#)). Soit  $\nu$  une norme invariante par conjugaison sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  (respectivement sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ ). Supposons de plus qu'elle soit bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité. Il existe alors  $C > 0$  tel que  $\nu \leq C\nu_{\text{Frag}}$  (respectivement  $\nu \leq C\nu_{\widetilde{\text{Frag}}}$ ).

La démonstration que nous donnerons du théorème [1.6](#) reprend celle donnée dans [\[21\]](#). Nous aurons besoin de deux arguments. Le premier argument sera de nature algébrique (voir lemme [1.11](#)), alors que le deuxième argument proviendra de la flexibilité de la géométrie de contact (voir lemme [1.12](#)). Nous ne ferons pas ici la démonstration de la proposition [1.9](#) et [1.10](#). En plus des arguments précédents un ingrédient important pour démontrer les deux dernières propositions est le fait que le groupe des difféomorphismes de classe  $\mathcal{C}^1$  qui préserve la structure de contact est un groupe parfait [\[50\]](#). Démontrons alors le théorème [1.6](#).

Soit  $G$  un groupe et  $H \subset G$  un sous-groupe. Nous disons qu'un élément  $g$  de  $G$  déplace  $H$  si :

$$[gHg^{-1}; H] = \{e\} .$$

Ici  $[H_1, H_2]$  désigne le commutateur des sous-groupes  $H_1, H_2$  de  $G$ , c'est le sous-groupe engendré par l'ensemble  $\{[h_1, h_2] = h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \mid (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\}$ .

**Lemme 1.11.** Soient  $g$  un élément de  $G$  qui déplace  $H$ , et  $h_1, h_2$  deux éléments de  $H$ . Alors pour toute norme invariante par conjugaison  $\nu$  sur  $G$  nous avons :

$$\nu([h_1, h_2]) \leq 14\nu(g) .$$

Nous n'allons pas démontrer ce lemme dont une démonstration - purement algébrique - se trouve dans [\[10\]](#).

L'argument géométrique de flexibilité qui nous permettra de conclure quant à la démonstration de la proposition [1.6](#) est le suivant.

**Lemme 1.12.** Soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux boules de Darboux d'une variété de contact  $(M, \xi)$ , et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $M$  tel que son adhérence soit contenue dans  $\mathcal{B}_1$ . Il existe alors un contactomorphisme  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  tel que l'image de  $\mathcal{U}$  par  $\varphi$  soit incluse dans  $\mathcal{B}_2$ .

*Démonstration.* En effet, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et tout voisinage ouvert  $\mathcal{V}$  de l'origine, il est possible de trouver un contactomorphisme  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  tel que  $\psi(K) \subset \mathcal{V}$ . En effet, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application

$$P^t : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

$$(x, y, z) \mapsto (e^{-t}x, e^{-t}y, e^{-2t}z)$$

est un contactomorphisme (à support non compact). Il suffit de prendre  $t$  suffisamment grand pour que  $P^t(K) \subset \mathcal{V}$ , de plus comme  $K$  est compact, on peut multiplier la fonction hamiltonienne de  $P^t$  par une fonction cut-off pour la rendre à support compact et telle que le contactomorphisme  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  issu de cette construction envoie encore  $K$  dans  $\mathcal{V}$ .

Cela reste donc vrai pour toute boule de Darboux  $\mathcal{B}_1$  incluse dans  $(M, \xi)$ . Plus précisément soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $M$  tel que  $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathcal{B}_1$ . Ainsi pour tout  $x \in \mathcal{U}$  et pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x$ , il existe  $\psi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  tel que  $\psi(\overline{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{V}$ .

On conclut en utilisant le fait que  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  agit transitivement sur  $M$ . Ainsi pour tout  $x' \in \mathcal{B}_2$ , il existe  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  qui envoie  $x$  sur  $x'$ . Ce contactomorphisme  $\phi$  envoie donc un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $x$  sur un voisinage de  $x'$ . Quitte à restreindre ce voisinage  $\mathcal{V}$  on peut supposer que  $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{B}_2$ . Donc en posant  $\varphi = \phi \circ \psi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$ , nous avons bien  $\varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}_2$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.6.* Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert dans une boule de Darboux  $\mathcal{B}_1$  et  $\psi_1, \psi_2$  deux contactomorphismes de  $\text{Cont}_0^c(\mathcal{U})$  tels que  $\psi_1$  et  $\psi_2$  ne commutent pas, c'est-à-dire que  $[\psi_1, \psi_2] \neq \text{Id}$ . Supposons par l'absurde que  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  soit une norme invariante par conjugaison pas discrète. Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\psi_\varepsilon \in \text{Cont}_0^c(M, \xi) \setminus \text{Id}$  tel que  $0 < \nu(\psi_\varepsilon) < \varepsilon$ . Or comme  $\psi_\varepsilon$  est différent de l'identité il existe une boule de Darboux  $\mathcal{B}_2$  telle que  $\psi_\varepsilon$  déplace cette boule (au sens géométrique), c'est-à-dire que  $\psi_\varepsilon(\mathcal{B}_2) \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ . De plus, d'après le lemme précédent il existe  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  tel que  $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{B}_2$ . Ainsi,  $\phi^{-1}\psi_\varepsilon\phi$  déplace  $\mathcal{U}$  (au sens géométrique). Nous en déduisons que  $\phi^{-1}\psi_\varepsilon\phi$  déplace (au sens algébrique) le sous-groupe  $\text{Cont}_0^c(\mathcal{U}) \subset \text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Nous avons alors d'après le lemme 1.11 que

$$\nu([\psi_1, \psi_2]) \leq 14\nu(\phi^{-1}\psi_\varepsilon\phi) = 14\nu(\psi_\varepsilon) < 14\varepsilon .$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$  cela implique la contradiction que  $\nu([\psi_1, \psi_2]) = 0$  alors que  $[\psi_1, \psi_2] \neq \text{Id}$ .  $\square$

*Remarque 1.13.* Il est intéressant de remarquer que des phénomènes très différents se produisent lorsque l'on s'intéresse à la géométrie du volume ou à la géométrie symplectique. En effet, dans ce cas le lemme 1.12 ne s'applique plus. Il est clair que si nous prenons deux boules de volumes différents aucun difféomorphisme qui préserve le volume ne peut envoyer la boule qui a le plus grand volume dans celle au plus petit volume. Remarquons que les symplectomorphismes hamiltoniens préservent la forme volume associée à la forme symplectique. Rappelons qu'une norme  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est dite stablement non bornée s'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu(g^n)}{n} > 0$ . Parlons dans un premier temps du cas de la géométrie du volume, puis de celui de la géométrie symplectique.

1. Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  et  $\Omega$  une forme volume sur  $M$ , c'est-à-dire que  $\Omega \in \Omega^n(M)$  et que  $\Omega_x \neq 0$  pour tout  $x \in M$ . Nous notons alors  $\text{Diff}_0^c(M, \Omega)$  l'ensemble des difféomorphismes de  $M$  qui peuvent être reliés à l'identité par un chemin lisse de difféomorphismes à support compact qui préservent la forme volume. L'application

$$\nu : \text{Diff}_0^c(M, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\phi \mapsto \text{le volume du support de } \phi ,$$

est une norme invariante par conjugaison qui n'est pas discrète. De plus dans le cas où  $M$  est de volume infini elle est non bornée. Elle n'est cependant jamais stablement non bornée.



2. Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Dans le cas où  $M$  n'est pas compacte notons  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions lisses  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact, et dans le cas où  $M$  est fermée  $\mathcal{H}$  désigne l'ensemble des fonctions lisses  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\int_M H^t \omega^n = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . La norme de Hofer sur  $\text{Ham}^c(M, \omega)$  est définie de la manière suivante

$$\nu : \text{Ham}^c(M, \omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \phi \mapsto \inf \left\{ \int_0^1 \max H^t - \min H^t dt \mid H \in \mathcal{H} \text{ et engendre } \phi \right\} .$$

Par des calculs élémentaires le lecteur pourra vérifier que l'application précédente est une pseudo-norme (voir par exemple [37]). Par contre, la non-dégénérescence est un résultat profond de géométrie symplectique très lié aux résultats de *non-squeezing* [27], [34]. F. Lalonde et D. McDuff exhibent certains de ces liens dans [34]. Les restrictions qu'imposent le *non-squeezing* sont beaucoup plus fortes que la restriction imposée par la géométrie du volume - qui est de préservée le volume. De plus, la norme de Hofer est non bornée sur  $\text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  [30] bien qu'elle soit stablement bornée d'après un résultat de J.-C. Sikorav [47]. Enfin, il existe beaucoup d'exemples de variétés symplectiques compactes  $(M, \omega)$  pour lesquelles la norme de Hofer est stablement non bornées sur  $\text{Ham}(M, \omega)$  comme l'a montré par exemple M. Usher [53].

## 1.2 Ordonnabilité

Nous nous intéressons dans cette section à la relation binaire partielle bi-invariante sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  introduite par Y. Eliashberg et L. Polterovich [20] dans le cas où  $(M, \xi)$  est une variété de contact co-orientable compacte et par M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21] dans le cas non compacte. Nous verrons que le fait que cette relation binaire partielle soit également antisymétrique - ou de manière équivalente qu'elle soit une relation d'ordre partielle - est équivalent à l'absence de lacet strictement positif contractile de contactomorphismes. Dans la deuxième sous-section nous introduirons la notion de stabilisation d'une variété de contact et d'une variété symplectique. Nous montrerons alors que l'impossibilité de déplacer, par contactomorphismes ou symplectomorphismes hamiltoniens à support compact, certains sous-ensembles compacts de la stabilisation permet de s'assurer que la variété de contact sous-jacente soit ordonnable. Au chapitre 2 nous utiliserons la technique des fonctions génératrices pour montrer que des variétés de contact avec de telles rigidités géométriques existent. Enfin dans une troisième sous-section nous donnerons des exemples de variétés de contact non-ordonnables caractérisées par Y. Eliashberg, S. S. Kim, L. Polterovich [19].

### 1.2.1 Définition de la relation binaire

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable et fixons une orientation du fibré triviale  $TM/\xi$  de rang 1. Ainsi, en chaque point  $x$  de  $M$ ,  $T_x M \setminus \xi_x$  est constitué de deux composantes connexes l'une positive  $(T_x M \setminus \xi_x)^+$  et l'autre négative  $(T_x M \setminus \xi_x)^-$ . Nous disons qu'un élément  $[\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  est positif, ce que nous noterons  $[\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}] \succeq \text{Id}$ , s'il admet un représentant  $\{\varphi^t\}_{t \in [0, 1]}$  qui bouge les éléments de  $M$  dans une direction positivement transverse à  $\xi$ , c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \varphi^t(x) \in (T_{\varphi^t(x)} M \setminus \xi_{\varphi^t(x)})^+ \cup \xi_{\varphi^t(x)} .$$

Dans ce cas nous disons que le chemin de contactomorphismes  $\{\varphi^t\}$  est positif. Ainsi pour deux éléments  $[\{\phi_1^t\}_{t \in [0, 1]}]$  et  $[\{\phi_2^t\}_{t \in [0, 1]}]$ , par définition nous disons que

$$[\{\phi_1^t\}_{t \in [0, 1]}] \succeq [\{\phi_2^t\}_{t \in [0, 1]}] \text{ si } [\{\phi_2^t\}_{t \in [0, 1]}]^{-1} [\{\phi_1^t\}_{t \in [0, 1]}] \succeq \text{Id} .$$

Les propriétés principales de cette relation sont résumées dans le lemme qui suit.

**Lemme 1.14.** *Pour tous  $f_1, f_2, f_3 \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  on a :*

1.  $f_1 \succeq f_1$ . Ainsi la relation est réflexive.
2. Si  $f_1 \succeq \text{Id}$  et  $f_2 \succeq \text{Id}$  alors  $f_1 f_2 \succeq \text{Id}$ . Ainsi la relation est transitive, c'est-à-dire que si  $f_1 \succeq f_2$  et  $f_2 \succeq f_3$  alors  $f_1 \succeq f_3$ .
3. Si  $f_1 \succeq \text{Id}$  alors  $f_2 f_1 f_2^{-1} \succeq \text{Id}$ .

*Démonstration.* 1. La première propriété découle du fait trivial que  $\text{Id} \succeq \text{Id}$ .

2. Pour la deuxième propriété nous allons tout d'abord montrer que si  $f_1 \succeq \text{Id}$  et que  $f_2 \succeq \text{Id}$  alors  $f_1 f_2 \succeq \text{Id}$ . En effet, remarquons tout d'abord que si  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ , alors  $\phi$  préserve la distribution de contact  $\xi$ , i.e.  $\phi_* \xi = \xi$ , et  $\phi$  préserve également les deux composantes connexes  $(TM \setminus \xi)^+$  et  $(TM \setminus \xi)^-$ , i.e.  $\phi_*(TM \setminus \xi)^\pm = (TM \setminus \xi)^\pm$ . Supposons alors que  $f_1 \succeq \text{Id}$  et  $f_2 \succeq \text{Id}$ . Ces hypothèses impliquent qu'il existe deux représentants  $\{\phi_1^t\}_{t \in [0,1]}$  et  $\{\phi_2^t\}_{t \in [0,1]}$  de  $f_1$  et  $f_2$  respectivement qui bougent tous les points de  $M$  dans une direction positivement transverse à  $\xi$ . Ainsi pour tout  $x \in M$  et pour tout  $t \in [0,1]$  nous avons :

$$\frac{d}{dt} \phi_1^t \phi_2^t(x) = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \phi_1^t \right) (\phi_2^t(x))}_{\in ((TM \setminus \xi)^+ \cup \xi)_{\phi_1^t \phi_2^t(x)}} + d_{\phi_2^t(x)} \phi_1^t \left( \underbrace{\frac{d}{dt} \phi_2^t(x)}_{\in ((TM \setminus \xi)^+ \cup \xi)_{\phi_2^t(x)}} \right),$$

et comme  $d_{\phi_2^t(x)} \phi_1^t$  préserve la composante connexe positive nous avons *in fine* que

$$\frac{d}{dt} \phi_1^t \phi_2^t(x) \in \left( (TM \setminus \xi)^+ \cup \xi \right)_{\phi_1^t \phi_2^t(x)},$$

et donc  $f_1 f_2 \succeq \text{Id}$ . La propriété 2 est maintenant une conséquence directe de cela. En effet, supposons  $f_1 \succeq f_2$  et  $f_2 \succeq f_3$ , alors par définition  $f_2^{-1} f_1 \succeq \text{Id}$  et  $f_3^{-1} f_2 \succeq \text{Id}$ . D'après ce que nous venons de montrer cela implique que  $f_3^{-1} f_2 f_2^{-1} f_1 = f_3^{-1} f_1 \succeq \text{Id}$  et donc que  $f_1 \succeq f_3$ .

3. Supposons  $f_1 \succeq \text{Id}$ , cela implique qu'il existe un représentant  $\{\phi_1^t\}_{t \in [0,1]}$  qui bouge tous les points dans une direction positivement transverse à  $\xi$ . La troisième propriété provient du fait que pour tout  $\{\phi_2^t\}_{t \in [0,1]}$  représentant de  $f_2$ ,  $\{\phi_2^1 \phi_1^t (\phi_2^1)^{-1}\}_{t \in [0,1]}$  est un représentant de  $f_2 f_1 f_2^{-1}$ , et donc d'après la discussion précédente, c'est à nouveau un chemin qui va bouger tous les points dans une direction positivement transverse à  $\xi$ . □

De la dernière propriété, nous pouvons déduire que pour tous éléments  $f_1, f_2 \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ ,  $f_2^{-1} f_1 \succeq \text{Id}$  est équivalent à  $f_1 f_2^{-1} \succeq \text{Id}$ . En combinant cela à la deuxième propriété nous en déduisons que pour tous  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$

$$f_1 \succeq g_1 \text{ et } f_2 \succeq g_2 \text{ implique que } f_1 f_2 \succeq g_1 g_2 .$$

La définition de la relation binaire - que nous venons de donner - a l'avantage d'être purement géométrique et permet d'affirmer que le fait d'être plus grand que l'identité dépend uniquement du choix de l'orientation de la direction transverse à  $\xi$ . Il sera cependant souvent plus commode par la suite de fixer une forme de contact compatible avec la co-orientation pour manipuler cette notion. Dans le prochain lemme nous donnerons plusieurs conditions (équivalentes) qui permettent de caractériser le fait qu'un chemin lisse de contactomorphismes d'une variété de contact  $(M, \xi)$  soit positif. Rappelons que nous disons qu'une forme de contact  $\alpha \in \Omega^1(M)$  est compatible avec la co-orientation choisie si son champs de Reeb, que nous notons  $R_\alpha$ , est à valeurs dans  $(TM \setminus \xi)^+$ . De plus nous définissons la symplectisation positive de  $(M, \xi)$  de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^+(M, \xi) := \bigcup_{x \in M} \{ \mu \in T_x^* M \mid \mu(v) > 0, \forall v \in (T_x M \setminus \xi_x)^+ \} \subset T^* M.$$

Nous notons  $\omega_\xi$  la restriction de la forme symplectique canonique du cotangent à  $S^+(M, \xi)$ . C'est encore une forme symplectique. Rappelons également que si  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est un chemin lisse de contactomorphismes, dont nous notons le chemin de champs de vecteurs de contact associé  $\{X^t\}$ , i.e.  $\frac{d}{dt}\phi^t = X^t(\phi^t)$  pour tout  $t \in [0,1]$ , nous pouvons lui associer le chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens équivariants défini de la manière suivante :

$$\psi^t(x, \mu) = \left( \phi^t(x), \mu(d_{\phi^t(x)}(\phi^t)^{-1}) \right), \quad \forall (t, (x, \mu)) \in [0,1] \times \mathcal{S}^+(M, \xi)$$

et nous notons  $H : [0,1] \times \mathcal{S}^+(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction hamiltonienne. En conservant ces notations nous avons le lemme suivant :

**Lemme 1.15.** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout  $t \in [0,1]$  et pour tout  $x \in M$  :*

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) \in (T_{\phi^t(x)}M \setminus \xi_{\phi^t(x)})^+ \cup \xi_{\phi^t(x)}.$$

2. *Pour toute forme de contact  $\alpha$  qui est compatible avec la co-orientation choisie, la fonction  $\alpha(X^t) : M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  est positive pour tout temps  $t \in [0,1]$ .*

3. *La fonction hamiltonienne  $H : [0,1] \times \mathcal{S}^+(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}$  est positive.*

*Démonstration.* Montrons que les deux premiers points sont équivalents. En effet par définition une forme de contact  $\alpha$  est compatible avec la co-orientation si son champs de Reeb associée  $R_\alpha$  appartient au demi espace  $(TM \setminus \xi)^+$ . Ainsi  $\{\phi^t\}$  est un chemin qui vérifie l'hypothèse du point 1 si pour tout  $t \in [0,1]$  et  $x \in M$  il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  et  $u \in \xi_x$  tel que son champs de vecteurs vitesse  $X^t(x) = u + \lambda R_\alpha(x)$ . De ce fait  $\alpha(X^t(x)) = \lambda \geq 0$ .

Montrons donc que le deuxième point et le troisième sont équivalents. Soit  $\alpha$  une forme de contact compatible avec la co-orientation. Nous pouvons alors identifier symplectiquement  $(\mathcal{S}^+(M, \xi), \omega_\xi)$  à  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ . Notons  $\Psi$  ce symplectomorphisme. Dans ce cas la fonction hamiltonienne qui engendre le chemin  $\{\Psi \circ \psi^t \circ \Psi^{-1}\}$  est

$$\begin{aligned} [0,1] \times M \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, \theta) &\mapsto H^t \circ \Psi^{-1}(x, \theta) = e^\theta \alpha_x(X^t(x)). \end{aligned}$$

□

En fixant  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une forme de contact pour  $\xi$ , nous avons vu au lemme 0.23 du chapitre 0 qu'il y a une bijection entre les fonctions à support compact  $h : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  et les chemins lisses de contactomorphismes  $\phi_h := \{\phi_h^t\}_{t \in [0,1]}$  partant de l'identité. En particulier  $\alpha(\frac{d}{dt}\phi_h^t) = h^t \circ \phi^t$  pour tout  $t \in [0,1]$ . De plus si  $h_1$  et  $h_2$  sont deux fonctions hamiltoniennes qui engendrent les chemins de contactomorphismes  $\phi_{h_1}$  et  $\phi_{h_2}$  la fonction hamiltonienne associée au chemin  $\{(\phi_{h_2}^t)^{-1} \circ \phi_{h_1}^t\}$  est donnée pour tout  $(t, x) \in [0,1] \times M$  par

$$e^{-g_2^t(x)} \left( h_1(\phi_2^t(x)) - h_2(\phi_2^t(x)) \right) \quad (11)$$

où  $g_2^t$  est le facteur de conformalité de  $\phi_2^t$  par rapport à  $\alpha$  (voir le lemme 0.25 du chapitre 0).

**Corollaire 1.16.** *Fixons  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une forme de contact pour  $\xi$  compatible avec la co-orientation. Deux éléments  $f_1, f_2 \in \widehat{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  vérifient la condition que  $f_1 \succeq f_2$  si et seulement si pour toute fonction hamiltonienne  $h_2 : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  qui engendre un représentant de  $f_2$  il existe une fonction hamiltonienne  $h_1 : [0,1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  qui engendre un représentant de  $f_1$  telle que  $h_1 \geq h_2$ .*

*Démonstration.* Soient  $h_1$  et  $h_2$  deux fonctions hamiltoniennes telles que  $h_1 \geq h_2$  et  $[\phi_{h_i}] = f_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Ainsi d'après la formule (11) nous avons  $\alpha\left(\frac{d}{dt}\left((\phi_2^t)^{-1} \circ \phi_{h_1}^t\right)\right) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . D'après le lemme précédent cela implique que  $f_2^{-1}f_1 \succeq \text{Id}$  et donc que  $f_1 \succeq f_2$ . Réciproquement, supposons que  $f_1 \succeq f_2$ . Dans ce cas,  $f_2^{-1}f_1 \succeq \text{Id}$ . Toujours d'après le lemme précédent, il existe un chemin  $\{\phi_3^t\}$  qui représente  $f_2^{-1}f_1$  tel que  $\alpha\left(\frac{d}{dt}\phi_3^t\right) =: h_3^t(\phi_3^t) \geq 0$ . Soit alors  $h_2$  une fonction hamiltonienne à support compact qui engendre un représentant de  $f_2$ . Notons  $h_1$  la fonction hamiltonienne qui engendre le chemin de contactomorphismes  $\{\phi_{h_2}^t \circ \phi_{h_3}^t\}$ . Il est clair que  $[\phi_{h_1}] = f_1$ . De plus comme  $\phi_{h_3}^t = (\phi_{h_2}^t)^{-1} \circ \phi_{h_1}^t$  et que  $h_3 \geq 0$  la formule (1) permet de conclure que  $h_1 \geq h_2$ .  $\square$

Nous avons même mieux que le corollaire précédent : nous pouvons nous assurer de la périodicité des fonctions hamiltoniennes que l'on choisit. Cela nous sera utile plus loin lors de la définition de certaines normes telles que la norme FPR au chapitre 3 et surtout pour démontrer les propriétés d'une variante de cette dernière au chapitre 5. Plus précisément, en notant  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  nous avons le lemme suivant.

**Lemme 1.17.** *Fixons  $\alpha \in \widetilde{\Omega^1(M)}$  une forme de contact pour  $\xi$  compatible avec la co-orientation. Deux éléments  $f_1, f_2 \in \widetilde{\text{Cont}_0(M, \xi)}$  vérifient la condition  $f_1 \succeq f_2$  si et seulement si pour toute fonction hamiltonienne  $h_2 : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  qui engendre un représentant de  $f_2$  il existe une fonction hamiltonienne  $h_1 : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  qui engendre un représentant de  $f_1$  telle que  $h_1 \geq h_2$ .*

Le lecteur pourra trouver une démonstration de ce lemme dans le papier de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21].

D'après le lemme 1.14, la relation binaire que nous avons définie sur  $\widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)}$  est réflexive et transitive en plus d'être invariante par conjugaison pour toute variété de contact. Elle n'est cependant pas forcément antisymétrique, c'est-à-dire que si  $f_1, f_2 \in \widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)}$  sont telles que  $f_1 \succeq f_2$  et  $f_2 \succeq f_1$  cela n'implique pas forcément que  $f_1 = f_2$ . Si  $(M, \xi)$  est une variété de contact telle que la relation binaire définie sur  $\widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)}$  est également antisymétrique, nous disons que  $(M, \xi)$  est ordonnable. Dans le cas contraire nous disons qu'elle est non ordonnable.

**Lemme 1.18.**  *$(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est une variété de contact non ordonnable si et seulement si il existe un lacet positif de contactomorphismes non constant et contractile, ou de manière équivalente si et seulement si il existe une fonction hamiltonienne à support compact positive non identiquement nulle  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui engendre un lacet contractile.*

*Démonstration.* Nous allons démontrer que  $(M, \xi)$  est ordonnable si et seulement si tout lacet positif contractile est constant. En effet supposons dans un premier temps que  $(M, \xi)$  soit ordonnable. Supposons alors par l'absurde qu'il existe un lacet positif contractile non constant  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$ . Quitte à le multiplier par l'inverse de  $\phi^1 = \phi^0$ , nous pouvons supposer que c'est un lacet qui commence à l'identité. Comme il est non constant, il existe alors un temps  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que  $\phi^{t_0}$  soit différent de  $\text{Id}$ . Pour faciliter la lecture de la preuve, quitte à reparamétriser  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$  nous pouvons supposer que  $t_0 = 1/2$ . Posons alors  $\phi_1^t = \phi^{t/2}$  et  $\phi_2^t = \phi^{-t/2+1}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Comme  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$  est contractile nous avons  $[\{\phi_1^t\}_{t \in [0, 1]}] = [\{\phi_2^t\}_{t \in [0, 1]}] = f \in \widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)}$ . Cela implique donc que  $f \succeq \text{Id}$  (quand on prend  $\{\phi_1^t\}_{t \in [0, 1]}$  comme représentant) et  $\text{Id} \succeq f$  (lorsqu'on prend  $\{\phi_2^t\}_{t \in [0, 1]}$  comme représentant). Comme nous avons supposé que  $(M, \xi)$  ordonnable, cela implique que  $f = \text{Id}$ , or cela est une contradiction car  $f \notin \pi_1(\widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)})$ . Il n'existe donc pas de lacet positif contractile non constant.

Réciproquement supposons qu'il n'existe pas de lacet positif contractile non constant  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$ . Soient deux éléments  $f_1, f_2 \in \widetilde{\text{Cont}_0^c(M, \xi)}$ , tels que  $f_1 \succeq f_2$  et  $f_2 \succeq f_1$  nous voulons montrer que  $f_1 = f_2$ . En posant  $f = f_2^{-1}f_1$ , il est équivalent de montrer que si  $f \succeq \text{Id}$  et  $\text{Id} \succeq f$  alors  $f = \text{Id}$ . Soient alors  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$  un représentant positif de  $f$  et  $\{\psi^t\}_{t \in [0, 1]}$  un représentant négatif de  $f$ . Quitte à reparamétriser  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$  et  $\{\psi^t\}_{t \in [0, 1]}$  on peut supposer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

pour tout  $t \in [0; \varepsilon]$ ,  $\phi^t = \psi^t = \text{Id}$  et pour tout  $t \in [1 - \varepsilon; 1]$ ,  $\phi^t = \psi^t = \phi^1 = \psi^1$ . Définissons alors le chemin  $\{\Phi^t\}_{t \in [0,1]}$  comme suit :

$$\begin{aligned}\Phi^t &= \phi^{2t}, \quad \forall t \in [0; 1/2] \\ \Phi^t &= \psi^{2-2t}, \quad \forall t \in [1/2; 1].\end{aligned}$$

$\{\Phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est donc un lacet positif contractile. Ainsi, il est constant par hypothèse, en d'autres mots pour tout temps  $t \in [0, 1]$ ,  $\phi^t = \psi^t = \text{Id} \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$ , et donc  $f = \text{Id} \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ .  $\square$

De même que nous avons défini ce qu'était un chemin positif de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  d'une variété de contact co-orientable  $(M, \xi)$  dont nous avons fixé une orientation de  $TM/\xi$ , nous disons qu'un chemin  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est strictement positif sur  $U$  un ouvert de  $M$  s'il bouge tous les points de  $U$  dans une direction strictement positivement transverse à  $\xi$ , c'est-à-dire que pour tout temps  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $x \in U$  :

$$\frac{d}{dt}\phi^t(x) \in \left(T_{\phi^t(x)}M \setminus \xi_{\phi^t(x)}\right)^+.$$

L'existence d'un lacet positif contractile implique en fait l'existence d'un lacet strictement positif contractile, plus précisément :

**Proposition 1.19.** *Soit  $\{\phi^t\}_{t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}}$  un lacet positif contractile non constant. Alors pour tout ouvert borné  $U$  inclus dans  $M$ , il existe un lacet positif contractile  $\{\psi^t\}_{t \in S^1}$  qui est strictement positif sur  $U$  tel que  $[\{\psi^t\}_{t \in [0,1]}] = [\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}]$ . De plus si  $\{\phi^t\}_{t \in S^1}$  est à support compact on peut construire  $\{\psi^t\}_{t \in S^1}$  à support compact.*

Le lecteur pourra trouver une démonstration de cette proposition dans [EP00] et dans [FPR08]. Un corollaire que nous déduisons en couplant cette proposition au lemme précédent est le suivant.

**Corollaire 1.20.** *Une variété de contact  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est non ordonnable si et seulement si pour tout ouvert borné  $U$  inclus dans  $M$ , il existe un lacet positif de contactomorphismes contractile qui est strictement positif sur  $U$ , ou de manière équivalente s'il existe une fonction hamiltonienne positive  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui est strictement positive sur  $U$  et qui engendre un lacet contractile.*

En particulier si  $M$  est une variété compacte, alors elle est ordonnable si et seulement si il n'existe pas de lacet de contactomorphismes qui bouge tous les points de  $M$  dans une direction strictement positivement transverse à  $\xi$ . Ce dernier corollaire sera un ingrédient important pour démontrer l'ordonnabilité de certaines variétés de contact comme nous le verrons dans la sous-section suivante. En contre partie Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich démontrent qu'une grande famille de variétés de contact est non ordonnable. Plus précisément ils démontrent le théorème suivant.

**Théorème 1.21** ([19]). *Soit  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété de Liouville. Pour tout  $n \geq 2$  le bord de contact associée à la variété de Liouville*

$$\left(W \times \mathbb{R}^{2n}, d\left(\lambda \oplus \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)\right)\right),$$

*est non ordonnable.*

*Exemple 1.22.* 1. En considérant la variété de Liouville dégénérée qui ne consiste qu'en un point, nous en déduisons que la sphère de contact  $\left(S^{2n-1}, \text{Ker}\left(\sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i\right)\right)$  est non ordonnable pour tout  $n \geq 2$ .

2. En reprenant les notations de l'exemple 0.14 nous déduisons que pour tout  $n \geq 3$  la variété de contact

$$\left( S^1 \times S^{2n}, \text{Ker} \left( zdt + \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i \right) \right) \subset S^1 \times \mathbb{R}^{2n+1}$$

est non ordonnable.

### 1.2.2 La propriété d'intersection stable : critère suffisant d'ordonnabilité

Nous donnerons dans cette sous-section un critère suffisant pour qu'une variété de contact soit ordonnable en suivant [20]. Ce critère portera sur l'impossibilité de déplacer des domaines compacts de la stabilisation de la variété de contact considérée (respectivement de sa symplectisation) par contactomorphisme à support compact (respectivement par symplectomorphisme hamiltonien à support compact). Nous verrons au chapitre 2 des exemples de variétés de contact ayant cette propriété.

En voyant  $S^1$  comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  la 1-forme canonique  $dt$  sur  $\mathbb{R}$  passe au quotient en une 1-forme (qui ne s'annule pas) que nous notons encore  $dt$  sur  $S^1$ . Nous identifions alors  $T^*S^1$  à  $S^1 \times \mathbb{R}$  et nous désignons par  $r : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la projection.

**Définition 1.23.** Soient  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  une variété de contact co-orientable et  $(W, \omega)$  une variété symplectique. Nous appelons  $\text{Stab}(M, \xi) := (M \times T^*S^1, \Xi := \text{Ker}(\alpha + rdt))$  la stabilisation de  $(M, \xi)$  et  $\text{Stab}(W, \omega) := (W \times T^*S^1, \Omega := \omega + drdt)$  la stabilisation de  $(W, \omega)$ .

Nous avons le lemme suivant.

**Lemme 1.24.** *La stabilisation d'une variété symplectique est encore une variété symplectique et la stabilisation d'une variété de contact est encore une variété de contact. De plus si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux formes de contact pour une variété de contact co-orientable  $(M, \xi)$  alors  $(M \times T^*S^1, \text{Ker}(\alpha_1 + rdt))$  est contactomorphe à  $(M \times T^*S^1, \text{Ker}(\alpha_2 + rdt))$ .*

*Remarque 1.25.* Cela a donc bien du sens de parler de la stabilisation d'une variété de contact co-orientable.

*Démonstration.* Pour démontrer la première phrase il suffit de revenir à la définition d'une variété symplectique ou de contact. Pour démontrer la deuxième phrase donnons-nous  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable et  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  deux formes de contact pour cette distribution, c'est-à-dire que  $\text{Ker}(\alpha_1) = \text{Ker}(\alpha_2)$ . Il existe ainsi une fonction lisse  $\theta : M \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tel que  $\alpha_2 = \theta\alpha_1$ . Il suffit alors de vérifier que l'application suivante

$$\begin{aligned} (M \times T^*S^1, \text{Ker}(\alpha_1 + rdt)) &\rightarrow (M \times T^*S^1, \text{Ker}(\alpha_2 + rdt)) \\ (x, r, t) &\mapsto (x, \theta(x)r, t) \end{aligned}$$

est un contactomorphisme, ce que nous laissons au soin du lecteur.  $\square$

Un autre lemme agréable concernant cette opération de stabilisation est le suivant.

**Lemme 1.26.** *Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable. Les opérations de stabilisation et de symplectisation sur cette variété de contact commutent, c'est-à-dire que :*

$$\text{Stab}(\mathcal{S}^+(M, \xi)) \text{ est fortement exactement symplectomorphe à } \mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi)).$$

*Démonstration.* Fixons  $\alpha$  une forme de contact pour  $\xi$  compatible avec la co-orientation. Nous pouvons identifier symplectiquement  $\mathcal{S}^+(M, \xi)$  à  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$  et donc identifier  $\text{Stab}(\mathcal{S}^+(M, \xi))$  à  $(M \times \mathbb{R} \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha) + drdt)$ . De même fixons alors  $\bar{\alpha} := \alpha + rdt$  comme forme de contact

pour  $\text{Stab}(M, \xi)$ , nous pouvons alors identifier  $\mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi))$  à  $(M \times T^*S^1 \times \mathbb{R}, de^\theta(\alpha + rdt))$ . Nous laissons le lecteur vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : (M \times \mathbb{R} \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha + rdt)) &\rightarrow (M \times T^*S^1 \times \mathbb{R}, d(e^\theta(\alpha + rdt))) \\ (x, \theta, r, t) &\mapsto (x, e^{-\theta}r, t, \theta) \end{aligned}$$

est un symplectomorphisme fortement exact.  $\square$

Ainsi dès que nous choisissons une forme de contact  $\bar{\alpha} \in \Omega^1(M \times T^*S^1)$  pour la variété de contact  $\text{Stab}(M, \xi)$  la projection canonique  $\pi_{\Xi} : \mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi)) \rightarrow \text{Stab}(M, \xi)$  s'identifie à :

$$\begin{aligned} \pi_{\bar{\alpha}} : (M \times T^*S^1) \times \mathbb{R} &\rightarrow M \times T^*S^1 \\ (x, r, t, \theta) &\mapsto (x, e^{-\theta}r, t) . \end{aligned}$$

De même, l'action naturelle de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $\mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi)) \cong ((M \times T^*S^1) \times \mathbb{R}, de^\theta(\alpha + rdt))$  donnée par :

$$\theta_0 \cdot ((x, r, t), \theta) = ((x, r, t), \theta + \ln(\theta_0)) ,$$

peut s'identifier à une action naturelle de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $\text{Stab}(\mathcal{S}^+(M, \xi)) \cong ((M \times \mathbb{R}) \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha + rdt))$  :

$$\theta_0 \cdot ((x, \theta), r, t) = (x, \theta + \ln(\theta_0), \theta_0 r, t) .$$

**Définition 1.27** (Propriété d'intersection stable de contact). Soit  $A$  un sous-ensemble compact d'une variété de contact co-orientable  $(M, \xi)$ . Nous disons qu'il a la propriété d'intersection stable si pour tout  $\Phi \in \text{Cont}_0^c(\text{Stab}(M, \xi))$

$$\Phi(A \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap M \times \mathbb{O}_{S^1} \neq \emptyset ,$$

où  $\mathbb{O}_{S^1}$  désigne la section nulle de  $T^*S^1$ .

La même définition s'applique dans le cas symplectique.

**Définition 1.28** (Propriété d'intersection stable symplectique). Soit  $A$  un sous-ensemble compact de  $\mathcal{S}^+(M, \xi)$  où  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est une variété de contact co-orientable. Nous disons qu'il a la propriété d'intersection stable si pour tout  $\Psi \in \text{Ham}^c(\text{Stab}(\mathcal{S}^+(M, \xi)))$

$$\Psi(A \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap \mathcal{S}^+(M, \xi) \times \mathbb{O}_{S^1} \neq \emptyset ,$$

où  $\mathbb{O}_{S^1}$  désigne la section nulle de  $T^*S^1$ .

Nous avons alors les théorèmes suivants :

**Théorème 1.29** ([20]). Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable. S'il existe  $A$  un sous-ensemble compact de  $M$  avec la propriété d'intersection stable alors  $(M, \xi)$  est ordonnable.

**Théorème 1.30** ([20]). Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable. S'il existe  $A$  un sous-ensemble compact de  $\mathcal{S}^+(M, \xi)$  avec la propriété d'intersection stable alors  $(M, \xi)$  est ordonnable.

*Remarque 1.31.* Le lecteur pourra voir que dans [21], [20] les définitions d'intersection stable ne sont pas exactement les mêmes. Les définitions que nous introduisons sont mieux adaptées aux preuves que nous donnons des théorèmes [2.11], [2.13] du chapitre 2.

Avant de démontrer ces théorèmes, montrons le lemme suivant qui nous sera très utile.

**Lemme 1.32.** Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable et fixons  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une forme de contact pour  $\xi$ . Considérons  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction hamiltonienne telle que le chemin de contactomorphismes  $\phi_h$  qu'elle engendre est un lacet contractile, i.e.  $[\phi_h] = \text{Id} \in \pi_1(\text{Cont}_0^c(M, \xi))$ . En notant  $g_h$  le facteur de conformalité de  $\phi_h$  par rapport à  $\alpha$ , i.e.  $(\phi_h^t)^*\alpha = e^{g_h^t}\alpha$  pour tout  $t \in S^1$ , l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_h : M \times T^*S^1 &\rightarrow M \times T^*S^1 \\ (x, r, t) &\mapsto (\phi_h^t(x), e^{g_h^t(x)}r - h^t(\phi_h^t(x)), t) \end{aligned}$$

est un contactomorphisme de  $\text{Stab}(M, \xi)$  dont le facteur de conformalité par rapport à  $\alpha + rdt$  est  $\bar{g}_h : M \times T^*S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  défini comme suit :

$$\bar{g}_h(x, r, t) = g_h^t(x), \quad \text{pour tout } (x, r, t) \in M \times T^*S^1 .$$

De plus ce contactomorphisme est isotope à l'identité.

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\Phi_h$  est un contactomorphisme de  $\text{Stab}(M, \xi)$  dont le facteur de conformalité est  $\bar{g}_h$ . En effet pour tout point  $(x, r, t)$  dans  $M \times T^*S^1$  et pour tout vecteur tangent  $(X, R, T)$  dans  $T_{(x, r, t)}(M \times T^*S^1)$  nous avons :

$$d_{(x, r, t)}(\Phi_h)(X, R, T) = (TX_h^t(\phi_h^t(x)) + d_x\phi_h^t(X), R', T) ,$$

où  $R' \in T_r\mathbb{R}$  est un vecteur que nous ne calculerons pas explicitement, et où  $X_h^t$  désigne le champs de vecteurs vitesse du chemin  $t \mapsto \phi_h^t$ , i.e.  $\frac{d}{dt}\phi_h^t = X_h^t \circ \phi_h^t$ . Nous savons de plus que dans ce cas  $\iota_{X_h^t}\alpha = h^t$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Phi_h^*(\alpha + rdt)(x, r, t)(X, R, T) &= (\alpha + rdt)(\phi_h^t(x), e^{g_h^t(x)}r - h^t(\phi_h^t(x)), t)(TX_h^t(\phi_h^t(x)) + d_x\phi_h^t(X), R', T) \\ &= T\alpha(\phi_h^t(x))(X_h^t(x)) + (\phi_h^t)^*\alpha(x)(X) + T(e^{g_h^t(x)}r - h^t(\phi_h^t(x))) \\ &= Th^t(\phi_h^t(x)) + e^{g_h^t(x)}\alpha(x)(X) + T(e^{g_h^t(x)}r - h^t(\phi_h^t(x))) \\ &= e^{g_h^t(x)}(\alpha(x)(X) + rT) \\ &= e^{g_h^t(x)}(\alpha + rdt)(x, r, t)(X, R, T) , \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que  $\Phi_h$  est un contactomorphisme de  $(M \times T^*S^1, \Xi)$ , dont le facteur de conformalité est  $\bar{g}_h$ .

Enfin pour montrer qu'il est isotope à l'identité, il suffit d'utiliser l'hypothèse que  $[\phi_h] = \text{Id} \in \pi_1(\text{Cont}_0^c(M, \xi))$ . Il existe ainsi une application lisse

$$\begin{aligned} [0, 1] \times S^1 \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, t, x) &\mapsto h_s^t(x) \end{aligned}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $h_0 \equiv 0$ , et donc le chemin de contactomorphismes associé à cette fonction  $h_0$  que nous notons  $\phi_{h_0}$  est le chemin constamment égal à l'identité,
2.  $h_1 \equiv h$ , et
3. pour tout  $s \in [0, 1]$ , le chemin de contactomorphisme  $\phi_{h_s}$  associé à la fonction  $h_s$  est un lacet basé en l'identité qui est contractile, i.e.  $[\phi_{h_s}] = [\phi_{h_1}] = \text{Id} \in \pi_1(\text{Cont}_0^c(M, \xi))$ .

Pour tout  $s \in [0, 1]$ , nous pouvons donc définir le contactomorphisme  $\Phi_{h_s} \in \text{Cont}(M \times T^*S^1, \Xi)$ . De plus  $s \mapsto \Phi_{h_s}$  est un chemin lisse de contactomorphismes qui vaut l'identité lorsque  $s = 0$  et qui vaut  $\Phi_h$  lorsque  $s = 1$ .  $\square$



Identifions  $\mathcal{S}^+(M, \xi)$  à  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$  et associons à la fonction  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction homogène suivante

$$\begin{aligned} H : S^1 \times M \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (x, \theta)) &\mapsto e^\theta h^t(x) \end{aligned}$$

dont le flot hamiltonien  $\mathbb{R}_{>0}$ -équivariant  $\psi_H$  sur  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ , vérifie pour tout  $(x, \theta) \in M \times \mathbb{R}$  :

$$\psi_H^t(x, \theta) = (\phi_h^t(x), \theta - g_h^t(x)) .$$

En reprenant les hypothèses du lemme précédent nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 1.33.** *L'application*

$$\begin{aligned} \Psi_H : M \times \mathbb{R} \times T^*S^1 &\rightarrow M \times \mathbb{R} \times T^*S^1 \\ (x, \theta, r, t) &\mapsto (\psi_H^t(x, \theta), \theta - g_h^t(x), r - H^t(\psi_H^t(x, \theta)), t) \end{aligned}$$

est un élément de  $\text{Ham}^{\mathbb{R}_{>0}}(M \times \mathbb{R} \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha + rdt))$ .

*Démonstration.* Il suffit de relever le contactomorphisme  $\Phi_h \in \text{Cont}_0(\text{Stab}(M, \xi))$  à son correspondant dans  $\text{Ham}^{\mathbb{R}_{>0}}(\mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi)))$  et d'utiliser l'identification du lemme 1.26 pour conclure.  $\square$

Démontrons alors le théorème 1.30 (le théorème 1.29 se démontre de la même façon 20).

*Démonstration.* Fixons  $\alpha$  une forme de contact pour  $\xi$  et identifions  $\mathcal{S}^+(M, \xi)$  à  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ . Considérons alors  $A \subset M \times \mathbb{R}$  un sous-ensemble compact avec la propriété d'intersection stable, et  $\{\phi^t\}_{t \in S^1}$  un lacet contractile de  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Notons  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hamiltonienne qui engendre ce lacet, i.e  $\phi_h := \{\phi^t\}_{t \in S^1}$ . En conservant les notations du lemme 1.32 notons  $\{h_s\}_{s \in [0,1]}$  la famille de fonctions hamiltoniennes qui réalise l'homotopie du chemin  $\phi_h$  au chemin constant égal à l'identité. Ainsi d'après le corollaire précédent  $\{\Psi_{H_s}\}_{s \in [0,1]}$  est un chemin de symplectomorphismes hamiltoniens de  $(M \times \mathbb{R} \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha) + drdt)$  - qui est symplectomorphe à  $\mathcal{S}^+(\text{Stab}(M, \xi))$  - commençant à l'identité. Notons alors  $\overline{H} : [0, 1] \times (M \times \mathbb{R} \times T^*S^1) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hamiltonienne correspondante à ce chemin. Comme  $A$  est compact, il existe une fonction lisse  $\rho : M \times \mathbb{R} \times T^*S^1 \rightarrow [0, 1]$  qui est à support compact et telle que  $\rho$  est constante égale à 1 sur un voisinage de  $\bigcup_{s \in [0,1]} \Psi_{H_s}(A \times \mathbb{O}_{S^1})$ . Ainsi la fonction  $\rho \overline{H}(s, x, \theta, r, t) = \rho(x, \theta, r, t) \overline{H}(s, x, \theta, r, t)$  est une fonction lisse à support compact, et nous notons  $\Psi_{\rho \overline{H}}^s \in \text{Ham}^c(M \times \mathbb{R} \times T^*S^1, d(e^\theta \alpha) + drdt)$  le temps  $s$  de son flot hamiltonien. Remarquons alors que nous avons construit  $\rho$  de sorte que :

$$\Psi_{\rho \overline{H}}^1(A \times \mathbb{O}_{S^1}) = \Psi_H(A \times \mathbb{O}_{S^1}) .$$

Ainsi d'après l'hypothèse d'intersection stable nous avons :

$$\Psi_H(A \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap (M \times \mathbb{R}) \times \mathbb{O}_{S^1} \neq \emptyset .$$

En d'autres mots, il existe  $((x, \theta), t) \in A \times S^1$  tel que  $(-H^t(\psi_H^t(x, \theta)), t) \in \mathbb{O}_{S^1}$ , et donc  $H^t(\psi_H^t(x, \theta)) = e^{\theta - g_h^t(x)} h^t(\phi_h^t(x)) = 0$ . Tout lacet contractile de contactomorphismes de  $(M, \xi)$  a donc sa fonction hamiltonienne qui s'annule sur tout ouvert borné  $U$  de  $M$  qui contient l'image de la projection canonique de  $A \subset M \times \mathbb{R}$  sur  $M$ . La contraposée du corollaire 1.20 nous permet alors de déduire que  $(M, \xi)$  est ordonnable.  $\square$

### 1.3 Quelques liens entre ces deux notions

La notion d'ordonnabilité ainsi que de l'existence de normes invariantes par conjugaison non triviale sont très liées. En effet S. Courte et P. Massot démontrent le théorème suivant.

**Théorème 1.34** ([17]). *Soit  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété de Liouville. Toute norme invariante par conjugaison sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  ou sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  qui est bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité est équivalente à la norme triviale, lorsque  $(M, \xi)$  désigne le bord de contact de la variété de Liouville*

$$\left( W \times \mathbb{R}^{2n}, d \left( \lambda \oplus \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i) \right) \right)$$

pour tout  $n \geq 2$ .

*Remarque 1.35.* Ils démontrent ce théorème pour des variétés de contact plus générales que celles citées plus haut.

Pour démontrer ce théorème ils utilisent la flexibilité des legendriennes de telles variétés de contact, en particulier ils démontrent qu'elles vérifient des propriétés de *h-principe*. Nous invitons le lecteur à consulter leur article [17] pour plus détails.

*Exemple 1.36.* 1. Pour  $n$  plus grand que 2 nous déduisons du théorème [1.34] que toute norme invariante par conjugaison sur le groupe  $\text{Cont}_0(S^{2n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  ou sur son revêtement universel qui est bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$ -petit de l'identité est bornée, où - en reprenant les notations de l'exemple [1.22] - la 1-forme  $\alpha$  désigne la restriction de la 1-forme  $\sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i) \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$  à la sphère.

2. Pour tout  $n$  plus grand que 3, en reprenant les notations de l'exemple [1.22], la variété de contact

$$\left( S^1 \times S^{2n}, \text{Ker} \left( z dt + \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i \right) \right)$$

vérifie les hypothèses du théorème [1.34]. En particulier toute norme invariante par conjugaison sur  $\text{Cont}_0(S^1 \times S^{2n}, \text{Ker}(\alpha_{S^1 \times S^{2n}}))$  ou sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(S^1 \times S^{2n}, \text{Ker}(\alpha_{S^1 \times S^{2n}}))$  qui est bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$ -petit de l'identité est bornée, où  $\alpha_{S^1 \times S^{2n}}$  désigne la 1-forme  $z dt + \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)$ .

*Remarque 1.37.* V. Colin et S. Sandon disent dans [16] qu'il semble raisonnable de s'attendre à ce que la norme discriminante soit non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact qui vérifie la propriété suivante

$$\begin{aligned} & \text{"il existe une forme de contact } \alpha \in \Omega^1(M) \text{ pour } \xi \\ & \text{dont le flot de Reeb associé admet des orbites périodiques non contractiles".} \end{aligned} \tag{12}$$

Pour tout entier  $n$  strictement positif, le lecteur pourra vérifier que le champs de Reeb associé à  $\alpha_{S^1 \times S^{2n}} := z dt + \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)$  sur la variété de contact  $(S^1 \times S^{2n}, \text{Ker}(\alpha_{S^1 \times S^{2n}}))$  est défini comme suit

$$\begin{aligned} R_{\alpha_{S^1 \times S^{2n}}} : S^1 \times S^{2n} &\rightarrow T(S^1 \times S^{2n}) \\ (t, (x, y, z)) &\mapsto \left( -\frac{1}{1+z^2} \right) \left( \sum_{i=1}^n \left( y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right) - 2z \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

et que l'orbite d'un point  $(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  sous le flot de Reeb au temps  $s \in \mathbb{R}$ , que

nous notons  $(t(s), x_1(s), \dots, x_n(s), y_1(s), \dots, y_n(s), z(s))$ , est donné par la formule suivante

$$\begin{aligned} t(s) &= t + \frac{2z}{1+z^2}s \\ x_i(s) &= x_i \cos\left(\frac{s}{1+z^2}\right) + y_i \sin\left(\frac{s}{1+z^2}\right) \\ y_i(s) &= -x_i \sin\left(\frac{s}{1+z^2}\right) + y_i \cos\left(\frac{s}{1+z^2}\right) \\ z(s) &= z \end{aligned}$$

pour tout  $i \in [1, n]$ . En particulier le flot de Reeb présente des orbites périodiques non contractiles et pourtant la norme discriminante est bornée sur  $\text{Cont}_0(S^1 \times S^{2n}, \text{Ker}(\alpha_{S^1 \times S^{2n}}))$  et sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(S^1 \times S^{2n}, \text{Ker}(\alpha_{S^1 \times S^{2n}}))$  pour tout  $n \geq 3$  d'après l'exemple précédent.

Considérons  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété de Liouville telle que son bord de contact idéal ne soit pas ordonnable. Nous notons  $X$  le champs de vecteurs de Liouville associé, c'est-à-dire que  $\iota_X \omega = d\lambda$ , et  $\phi_X^t$  son flot au temps  $t \in \mathbb{R}$ , et  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  sa préquantification. M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen démontrent le théorème suivant.

**Théorème 1.38** ([21]). *Soit  $\mathcal{U} \subset W$  un ouvert étoilé tel qu'il existe un voisinage de  $\bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U})$  qui soit déplaçable par un symplectomorphisme hamiltonien à support compact de  $(W, \omega = d\lambda)$ . Il existe alors  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_0$ , toute norme invariante par conjugaison définie sur  $\text{Cont}_0^c(\phi_X^r(\mathcal{U}) \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  ou sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(\phi_X^r(\mathcal{U}) \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  qui est bornée dans un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité est équivalente à la norme triviale.*

Un ingrédient important de la preuve du théorème précédent est qu'en l'absence d'ordonnabilité il existe un voisinage de  $\left(\bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U})\right) \times S^1$  qui est un sous-domaine transportable par

contactomorphisme (voir définition plus bas) dont l'attracteur est  $\left(\bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U})\right) \times S^1$  lui-même.

Nous verrons la construction de ce tassement de contact sur  $\left(\bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(\mathcal{U})\right) \times S^1$  au chapitre 6. Un argument similaire à celui de la proposition 1.9 concernant les sous-domaines transportable par contactomorphisme permet alors de montrer le théorème précédent. Plus précisément, donnons la définition de sous-domaine transportable par contactomorphisme.

**Définition 1.39** ([21]). Soient  $(M, \xi)$  une variété de contact et  $V$  un ouvert de  $M$ . Nous disons que  $V$  est un sous-domaine transportable par contactomorphisme de  $(M, \xi)$  s'il existe un compact  $K \subset V$  et un chemin lisse de contactomorphismes  $\{P^t\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$  partant de l'identité tel que

1. ce compact  $K$  est attracteur dans  $V$ , c'est-à-dire que pour tout compact  $A$  de  $V$  et pour tout voisinage  $U$  de  $K$  il existe  $t > 0$  tel que  $P^t(A) \subset U$ ;
2. il existe un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}(M, \xi)$  à support dans  $V$  tel que  $\phi$  déplace  $K$ .

Par les mêmes arguments utilisés pour démontrer la proposition 1.9 M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen déduisent la proposition suivante.

**Proposition 1.40** ([21]). *Soient  $(M, \xi)$  une variété de contact et  $V$  un sous-domaine transportable par contactomorphisme de  $(M, \xi)$ . Alors toute norme invariante par conjugaison  $\nu$  sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  (resp.  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ ) qui est bornée sur un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité est bornée sur  $\text{Cont}_0^c(V, \xi)$  (resp.  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(V, \xi)$ ).*

En opposition à ces résultats Y. Eliashberg et L. Polterovich [20] utilisent un procédé général sur les groupes admettant une relation d'ordre partiel afin de déduire une métrique sur un ensemble associé à  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact compacte et ordonnable. Ils définissent tout d'abord une pseudo-distance sur le sous-ensemble de  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  constitué des éléments qui admettent un représentant engendré par une fonction hamiltonienne strictement positive. Ils considèrent ensuite le quotient de ce sous-ensemble par la relation d'équivalence où deux éléments sont identifiés si et seulement si ils sont à distance nulle l'un de l'autre. Ils obtiennent donc un espace métrique. Cet espace métrique est naturellement munie d'une relation d'ordre compatible avec la métrique ainsi définie. Dans le cas du cotangent unitaire du tore et du cercle (qui sont deux variétés ordonnables pour leur structure de contact canonique respective) ils démontrent alors que les espaces métriques associés ont un diamètre infini. Le lecteur est invité à lire leur papier [20] pour plus de détails.

Lorsque  $(M, \xi)$  est ordonnable nous disons que  $(\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi), \succeq, \nu)$  est un espace métrique ordonné, lorsque  $\nu$  est une norme sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  qui vérifie la propriété suivante : si  $[\{\phi_1^t\}]$  et  $[\{\phi_2^t\}]$  sont deux éléments de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  tels que  $[\{\phi_1^t\}] \succeq [\{\phi_2^t\}]$  alors  $\nu([\{\phi_1^t\}]) \geq \nu([\{\phi_2^t\}])$ . En utilisant encore l'ordonnabilité M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen démontrent le théorème suivant que nous verrons en détail au chapitre 3.

**Théorème 1.41** ([21]). *Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact compacte et ordonnable. Supposons qu'il existe une forme de contact pour  $\xi$  telle que son flot de Reeb associé soit périodique. Il existe alors une norme invariante par conjugaison stablement non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . De plus, muni de cette norme et de la relation d'ordre partielle  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  est un espace métrique ordonné.*

En utilisant la même construction que dans le théorème précédent nous montrons au chapitre 5 le théorème qui suit.

**Théorème 1.42.** *Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact compacte et ordonnable. Il existe alors une norme (pas forcément invariante par conjugaison) stablement non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . De plus, muni de cette norme et de la relation d'ordre partielle  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  est un espace métrique ordonné.*

Un autre exemple de ce lien qu'entretiennent la notion de normes non bornées avec celle d'ordonnabilité sera illustré dans le chapitre suivant. Nous utiliserons en effet le même outil - celui des fonctions génératrices - pour montrer d'une part l'ordonnabilité de certaines variétés de contact et pour construire, en suivant S. Sandon [41] et [42], d'autre part une norme invariante par conjugaison non bornée sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . Cet outil permet à la fois de détecter des intersections de sous-variétés incluses dans la variété de contact étudiée - ce qui nous permettra grâce au critère d'intersection stable de conclure quant à l'ordonnabilité - et à la fois d'associer un nombre aux intersections détectées - ce qui permettra de définir une norme. De plus, muni de cette norme l'espace des contactomorphismes est un espace métrique ordonné. Nous verrons aux chapitres 3 et 4 que la métrique d'oscillation [16] possède également ces propriétés.

## 2 Fonctions génératrices pour legendriennes de l'espace des jets et applications

Dans ce chapitre nous nous intéressons à certaines rigidités géométriques de l'espace des jets d'une variété compacte muni de sa structure de contact standard. Dans une première section nous énoncerons le théorème d'existence de fonctions génératrices quadratiques à l'infini [45], [11], [48] pour certaines legendriennes de l'espace des jets. Ces legendriennes consistent en l'image de la section nulle par tout contactomorphisme à support compact isotope à l'identité. Nous en déduisons que la section nulle a la propriété d'intersection stable et donc que l'espace des jets est ordonnable. Nous retrouvons ainsi les résultats de V. Colin, E. Ferrand et P. Pushkar [15]. Un raisonnement similaire nous permettra également de déduire que certains cotangents unitaires sont ordonnables et de retrouver les résultats de Y. Eliashberg et L. Polterovich [20].

Dans une deuxième section nous discuterons d'un théorème d'unicité [48] de fonctions génératrices. Nous montrons alors comment cela permet à M. Bhupal [8] et S. Sandon [42] d'associer aux legendriennes précédentes un nombre qui sera choisi par une méthode de minimax sur les fonctions génératrices associées. Cette application qui à une legendrienne lui associe un nombre aura une interprétation géométrique : toute legendrienne intersecte l'image du 1-jet de la fonction constante égale au nombre associé.

Dans la troisième section nous définissons le sélecteur de translation construit par M. Bhupal [8] et S. Sandon [42] sur l'espace des contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  et  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  munis de leur structure de contact standard. C'est une application qui à un contactomorphisme lui attribue la translation d'un de ses points translétés. En associant au graphe d'un contactomorphisme une legendrienne de l'espace des jets, ce sélecteur de translation sera encore construit via la méthode de minimax sur les fonctions génératrices. Nous verrons alors comment S. Sandon [41] en déduit une norme invariante par conjugaison non bornée sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  ainsi qu'une capacité de contact. Ce sélecteur de translation aura une importance capitale au chapitre [4] pour étudier différentes normes sur le groupe des contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  et caractériser certaines de leurs géodésiques.

### 2.1 L'existence de fonctions génératrices quadratiques à l'infini et théorème d'intersection

Soit  $X$  une variété de dimension  $n \in \mathbb{N}$ , nous appelons l'espace des jets d'ordre 1 de  $X$  - ou l'espace des jets de  $X$  - le produit cartésien du fibré cotangent de  $X$  et de la droite réelle. C'est un fibré vectoriel sur  $X$  et nous noterons cet espace  $J^1(X, \mathbb{R}) = T^*X \times \mathbb{R}$ .

Décrivons la structure de contact standard de l'espace des jets que nous étudierons dans ce chapitre. Considérons  $\pi : T^*X \rightarrow X$  la projection canonique du fibré cotangent et notons  $\lambda_X \in \Omega^1(T^*X)$  la forme de Liouville du cotangent définie par  $\lambda_X(x, \mu) = \mu \circ d_{(x, \mu)}\pi$  pour tout  $(x, \mu) \in T^*X$ . La distribution de contact standard de  $J^1(X, \mathbb{R})$  est alors donnée par le noyau de  $\alpha_X := dz - \lambda_X$  avec  $z$  qui désigne la coordonnée sur la composante  $\mathbb{R}$  de  $J^1(X, \mathbb{R}) = T^*X \times \mathbb{R}$ . Nous noterons  $\xi^X$  cette distribution d'hyperplans. Il est facile de trouver un système de coordonnées locales dans lequel cette 1-forme coïncide avec la 1-forme de contact standard de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . En effet soit  $U$  une carte de  $X$  munie des fonctions coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$ . Le  $n$ -uplet de 1-formes  $(dx_1, \dots, dx_n)$  constitue alors une base de  $T^*U$  et nous en déduisons donc un système de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  sur  $T^*U$  dans lequel  $\lambda_X = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ .

Cette distribution de contact peut également être décrite d'une manière très naturelle en s'intéressant aux 1-jets des fonctions lisses définies sur  $X$ . Toute fonction lisse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  définit

une section du fibré  $J^1(X, \mathbb{R})$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} j^1 f : X &\rightarrow T^*X \times \mathbb{R} \\ x &\mapsto ((x, (df)_x), f(x)) . \end{aligned}$$

C'est cette section que nous appelons le jet d'ordre 1 de  $f$ , ou encore le 1-jet de  $f$ . Nous pouvons alors définir la distribution d'hyperplans  $\xi^X$  en chaque point  $((x, \mu), \theta)$  de l'espace des jets de  $X$  comme l'unique hyperplan de  $T_{((x, \mu), \theta)} J^1(X, \mathbb{R})$  qui contient le plan tangent de  $T_{((x, \mu), \theta)} (\text{Im}(j^1 f))$  pour toute fonction lisse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $(df)_x = \mu$  et  $f(x) = \theta$ .

En utilisant cette deuxième définition de la structure de contact, il est clair que l'image du jet d'ordre 1 d'une fonction lisse sur  $X$  est une legendrienne de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ . Remarquons que cette dernière legendrienne se projette de manière difféomorphe sur  $X$ . Réciproquement toute legendrienne de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  qui se projette de manière difféomorphe sur  $X$  est l'image du 1-jet d'une fonction lisse définie sur  $X$ . En notant  $\mathbb{O}_X$  la section nulle de  $T^*X$  il est facile de voir que les intersections entre  $\mathbb{O}_X \times \{a\}$  avec l'image du 1-jet d'une fonction sont en bijection avec les points critiques de cette fonction de valeur critique  $a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

Le but de cette section est d'avoir un résultat similaire pour une plus grande classe de legendriennes. Pour ce faire nous formaliserons la discussion qui suit. Lorsque  $X$  est une variété compacte, pour toute legendrienne  $L$  qui se projette de manière difféomorphe sur  $X$ , l'image de cette legendrienne par un contactomorphisme à support compact isotope à l'identité sera encore associée à une fonction dite génératrice pour cette legendrienne. Dans le cas où cette nouvelle legendrienne ne se projette plus de manière difféomorphe sur  $X$  la fonction génératrice n'est plus définie sur  $X$  mais sur un fibré vectoriel au-dessus de  $X$ . Tout comme dans le cas précédent il y a une bijection entre les points critiques de la fonction génératrice et les intersections de la legendrienne associée avec  $\mathbb{O}_X \times \mathbb{R}$ . Bien que les fibrés vectoriels ne soient pas compacts, J.-C. Sikorav [45], M. Chaperon [11] et D. Théret [48] démontrent l'existence de fonctions génératrices qui sont égales à une forme quadratique en dehors d'un compact. L'intérêt d'une telle condition est qu'elle permet d'utiliser la théorie de Morse pour s'assurer de l'existence de points critiques de cette fonction et donc de s'assurer de l'existence d'intersections entre la legendrienne associée et  $\mathbb{O}_X \times \mathbb{R}$ .

Considérons dans un premier temps  $X$  une variété lisse (pas forcément compacte). Soit  $P : E \rightarrow X$  un fibré vectoriel lisse sur  $X$ . On note  $N_E$  la sous-variété de  $J^1(E, \mathbb{R})$  qui est l'image réciproque par la projection canonique  $J^1(E, \mathbb{R}) \rightarrow T^*E$  des formes linéaires qui s'annulent dans la direction de la fibre :

$$N_E = \left\{ (e, \mu, z) \in J^1 E \mid \text{Ker}(d_e P) \subset \text{Ker}(\mu) \right\} .$$

C'est un sous-fibré vectoriel de  $J^1(E, \mathbb{R})$  dont la codimension est égale au rang du fibré.

**Définition 2.1** (Fonction génératrice). Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Nous disons que  $f$  est une fonction génératrice si l'image de  $j^1 f : E \rightarrow J^1(E, \mathbb{R})$  intersecte transversalement la sous-variété  $N_E$ .

En particulier de cette définition nous déduisons que si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction génératrice alors  $(j^1 f)^{-1}(N_E)$  est une sous-variété lisse de  $E$  de la même dimension que celle de  $X$

$$\dim \left( (j^1 f)^{-1}(N_E) \right) = \dim(E) - \text{codim}(N_E) = \dim(E) - \text{rang}(E) = \dim(X) .$$

Des discussions précédentes il est immédiat que l'image de  $j^1 f$  est une legendrienne de  $J^1(E, \mathbb{R})$ . Dans la proposition suivante nous montrons comment en déduire une legendrienne immergée de  $J^1(X, \mathbb{R})$ .

**Proposition 2.2.** *Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice. Pour tout  $e \in E$  et  $u \in T_{P(e)}X$  nous notons  $\hat{u}$  pour désigner un élément quelconque de  $T_e E$  qui se projette sur  $u$ , c'est-à-dire que  $d_e P(\hat{u}) = u$ . Nous avons alors que l'application*

$$i_f : (j^1 f)^{-1}(N_E) \rightarrow J^1(X, \mathbb{R})$$

$$e \mapsto \left( P(e), T_{P(e)}X \ni u \mapsto d_e f(\hat{u}), f(e) \right)$$

*est bien définie et que son image est une legendrienne immergée de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ .*

*Démonstration.* Le fait que cette application soit bien définie provient directement de la définition de  $N_E$ . Le fait que ce soit une immersion provient du fait que  $f$  est une fonction génératrice. Montrons alors que c'est une immersion legendrienne. Notons  $pr_1 : T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  et  $pr_2 : T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les projections canoniques et remarquons que pour tout  $e \in (j^1 f)^{-1}(N_E)$  et  $u \in T_e(j^1 f)^{-1}(N_E)$  nous avons

$$d_{i_f(e)} pr_1 \circ d_e i_f(U) = d_e P(U) \text{ et } d_{i_f(e)} pr_2 \circ d_e i_f(U) = d_e f(U) .$$

Pour tout  $e \in E$  par abus de notation nous noterons  $d_{P(e)}(f \circ P^{-1})$  l'application qui à  $u \in T_{P(e)}X$  associe  $d_e f(\hat{u})$ , nous avons ainsi

$$\begin{aligned} i_f^*(dz - \lambda_X)(e)(U) &= (dz - \lambda_X)(P(e), d_{P(e)}(f \circ P^{-1}), d_e f(U))(d_e i_f(U)) \\ &= d_{i_f(e)} pr_2 \circ d_e i_f(U) - d_{P(e)}(f \circ P^{-1}) \left( d_{i_f(e)} pr_1 \circ d_e i_f(U) \right) \\ &= d_e f(U) - d_{P(e)}(f \circ P^{-1})(d_e P(U)) \\ &= d_e f(U) - d_e f(U) = 0 . \end{aligned}$$

Et comme  $(j^1 f)^{-1}(N_E)$  est de la même dimension que  $X$  c'est bien une immersion legendrienne.  $\square$

Nous disons alors que  $f$  est une fonction génératrice pour la legendrienne immergée donnée par l'image de  $(j^1 f)^{-1}(N_E)$  par l'application  $i_f$ .

Nous laissons la démonstration du lemme suivant au lecteur.

**Lemme 2.3.** *Soit  $\Lambda \subset (J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  une legendrienne. Supposons qu'il existe un fibré lisse  $P : E \rightarrow X$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice pour la legendrienne  $\Lambda$ . Nous avons alors une bijection entre les points critiques de la fonction  $f$  de valeur critique  $a$  et les intersections entre  $\Lambda$  et le 1-jet de la fonction constante égale à  $a$ , plus précisément*

$$\Lambda \cap (\mathbb{O}_X \times \{a\}) \leftrightarrow \{e \in E \mid d_e f = 0, f(e) = a\} .$$

Pour pouvoir s'assurer de l'existence de points critiques de fonctions génératrices il faut avoir un contrôle de ces fonctions en dehors d'un compact. La condition à l'infini qui sera remplie par les fonctions génératrices que nous construirons sera la suivante.

**Définition 2.4.** Soient  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel, et  $S : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse.

1. On dit que  $S$  est exactement quadratique à l'infini, s'il existe une forme quadratique non-dégénérée  $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$  et un compact  $K \subset E$  tel que en dehors du compact  $K$  la fonction  $S$  soit égale à  $Q$ .
2. On dit que  $S$  est quadratique à l'infini s'il existe une forme quadratique non-dégénérée  $Q : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que la dérivée verticale de  $S - Q$  soit bornée.

Bien que la deuxième définition soit moins intuitive que la première, il sera très naturel de considérer de telles fonctions génératrices. En effet si  $E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice pour une certaine legendrienne, alors  $f \oplus Q : E \oplus \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction génératrice pour la même legendrienne et ce pour toute forme quadratique  $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  non-dégénérée. Si  $f$  est exactement quadratique à l'infini mais est différente d'une forme quadratique sur un compact, alors  $f \oplus Q$  est quadratique à l'infini mais n'est pas exactement quadratique à l'infini. Cette opération d'ajouter une forme quadratique à une fonction génératrice s'appelle la stabilisation.

Citons alors le théorème d'existence de fonctions génératrices pour les legendriennes de l'espace des jets. C'est un théorème dû à F. Laudenbach et J.-C. Sikorav [35], [45] pour les lagrangiennes exactes du cotangent et à M. Chaperon [11] et D. Théret [48] ainsi que Y. V. Chekanov [12] pour les legendriennes de l'espace des jets.

**Théorème 2.5** ([48], [11], [12]). *Soient  $X$  une variété ferm  e et  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de contactomorphismes à support compact de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi_X)$  partant de l'identité. Il existe alors un chemin continu de fonctions génératrices quadratiques à l'infini  $\{S^t : E \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \in [0,1]}$ , tel que pour tout  $t \in [0, 1]$  la fonction  $S^t$  engendre la legendrienne  $\phi^t(\mathbb{O}_X \times \{0\})$ .*

Dans le cas où la variété  $X = \mathbb{R}^n$  (qui n'est pas compacte) ce théorème reste vrai et sa démonstration se base sur l'idée suivante d  velopp  e par D. Théret [48] et M. Chaperon [11]. Considérons la fonction  $f : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y, z) = y(x) + z$ . Pour tout  $(y, z) \in (\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}$  définissons alors la fonction  $f_{y,z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui à  $x \in \mathbb{R}^n$  associe  $f_{y,z}(x) = f(x, y, z)$ . Pour tout contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^n})$  suffisamment  $\mathcal{C}^1$  proche de l'identité  $\phi(\text{Im}(j^1 f_{y,z}))$  est encore donn  e par l'image du 1-jet d'une unique fonction  $g_{y,z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous appelons alors la fonction

$$G : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto g_{y,z}(x) - f_{y,z}(x) ,$$

la fonction de transition de  $\phi$ . Rappelons que lorsque  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes partant de l'identité et que nous fixons  $\alpha_{\mathbb{R}^n}$  comme forme de contact pour  $\xi^{\mathbb{R}^n}$  nous pouvons lui associer sa fonction hamiltonienne que l'on définit de la manière suivante

$$h^t(p) := \alpha_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \phi^s \circ (\phi^t)^{-1}(p) \right) , \text{ pour tout } (t, p) \in [0, 1] \times J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) .$$

Nous ne démontrerons pas le lemme suivant que le lecteur pourra lire dans [48], [11].

**Lemme 2.6.** *Soit  $\Lambda$  une legendrienne de  $(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^n})$  ayant une fonction génératrice quadratique à l'infini  $S : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Considérons  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes à support compact partant de l'identité de  $\text{Cont}_0^c(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^n})$  tel que  $\phi^t$  soit  $\mathcal{C}^1$ -petit pour tout  $t \in [0, 1]$ . Notons  $G^t$  la fonction de transition de  $\phi^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$  nous avons :*

1. *La fonction*

$$S^t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, u, v, w) \mapsto G^t(x, w, S(v, u) - w(v))$$

*est une fonction génératrice quadratique à l'infini pour la legendrienne  $\phi^t(\Lambda)$ .*

2. *Pour tout  $(x, y, z) \in J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$*

$$\frac{d}{dt} G^t(x_t, y, z) = -h^t(x_t, y_t, z'_t) ,$$

*où  $(x_t, y_t, z'_t) = \phi^t(x, y, z + y(x))$ .*



*Remarque 2.7.* Dans [11] l'auteur prend comme convention que la fonction hamiltonienne associée à un chemin de contactomorphismes est l'opposée de celle que nous avons définie. D'où le signe moins qui apparaît dans le deuxième point du lemme qui ne figure pas dans [11].

Ainsi pour tout chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  à support compact partant de l'identité dans  $\text{Cont}_0^c(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^n})$  et tout voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité, il existe  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  tel que le contactomorphisme  $\phi^t \circ (\phi^{i/k})^{-1}$  soit dans ce voisinage de l'identité pour tout  $t \in [i/k, (i+1)/k]$  et pour tout entier  $i$  compris entre 0 et  $k-1$ . De ce fait construire le chemin continu de fonctions génératrices du théorème 2.5 dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  se fait par récurrence. En effet soit  $i$  un entier compris entre 1 et  $k-1$  tel qu'il existe  $\{S_i^t\}_{t \in [0, i/k]}$  un chemin continu de fonctions génératrices quadratiques à l'infini pour  $\phi^t(\mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \times \{0\})$  lorsque  $t \in [0, i/k]$  (ce qui est bien le cas lorsque  $i = 1$  d'après le lemme précédent car la fonction nulle est une fonction génératrice quadratique à l'infini pour la section nulle). Nous pouvons alors encore une fois d'après le lemme précédent construire un chemin de fonctions génératrices  $\{\widetilde{S}_{i+1}^t\}_{t \in [i/k, (i+1)/k]}$  pour  $\{\phi^t(\Lambda)\}_{t \in [i/k, (i+1)/k]}$ . Il suffit alors d'appliquer une stabilisation au chemin  $\{S_i^t\}_{t \in [0, i/k]}$  pour que la stabilisation de  $S_i^{i/k}$  coïncide avec  $\widetilde{S}_{i+1}^{i/k}$ . En raccordant la stabilisation du chemin  $\{S_i^t\}$  au chemin  $\{\widetilde{S}_{i+1}^t\}$  nous avons bien construit le chemin continu de fonctions génératrices quadratiques à l'infini  $\{S_{i+1}^t\}_{t \in [0, (i+1)/k]}$  désiré.

*Remarque 2.8.* Nous n'avons pas utilisé le deuxième point du lemme dans la discussion précédente. Il sera utilisé plus tard lorsque l'on prouvera l'absence de lacets (contractiles ou non) positifs de contactomorphismes.

Le théorème 2.5 pour une variété fermée générale  $X$  se déduit de la discussion précédente en utilisant le fait qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $X$  se plonge dans  $\mathbb{R}^N$  et que ce plongement induit un contactomorphisme de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  dans  $(J^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^N})$  [11], [48]. Nous en déduisons alors les théorèmes suivants.

**Théorème 2.9.** *Soient  $X$  une variété fermée et  $\phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  alors  $\phi(\mathbb{O}_X \times \{0\})$  intersecte  $\mathbb{O}_X \times \mathbb{R}$ .*

*Démonstration.* Cela vient du fait que sous ces hypothèses il existe une fonction génératrice quadratique à l'infini pour  $\phi(\mathbb{O}_X \times \{0\})$ . Le fait que  $X$  soit fermée et que cette fonction soit quadratique à l'infini assure que cette fonction a des points critiques. Le lemme 2.3 permet alors de conclure.  $\square$

De la même façon nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.10.** *Soient  $X$  une variété fermée et  $\psi \in \text{Ham}^c(T^*X, d\lambda_X)$  alors  $\psi(\mathbb{O}_X)$  intersecte  $\mathbb{O}_X$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{\psi^t\}$  un chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens à support compact de  $(T^*X, d\lambda_X)$  commençant à l'identité et tel que  $\psi^1 = \psi$ . Désignons alors par  $F^t$  l'unique fonction à support compact de  $T^*X$  tel que  $(\psi^t)^*\lambda_X - \lambda_X = dF^t$ . Il est alors immédiat que l'application qui à  $(p, z) \in T^*X \times \mathbb{R}$  associe  $\phi^t(p, z) = (\psi^t(p), z + F^t(x))$  est un contactomorphisme de l'espace des jets pour tout  $t \in [0, 1]$ . Bien que ce chemin ne soit pas à support compact, nous pouvons construire un chemin de contactomorphismes  $\{\widetilde{\phi}^t\}$  à support compact de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  tel que  $\widetilde{\phi}^1(\mathbb{O}_X \times \{0\}) = \phi^1(\mathbb{O}_X \times \{0\})$ . Cela se fait en remarquant que  $\mathbb{O}_X \times \{0\}$  est compacte et en multipliant la fonction hamiltonienne de  $\{\phi^t\}$  par une fonction *cutoff* appropriée. Ainsi le théorème 2.9 permet de conclure que  $\phi^1(\mathbb{O}_X \times \{0\})$  intersecte  $\mathbb{O}_X \times \mathbb{R}$ . Or cette intersection se projette par  $pr : T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow T^*X$  sur une intersection entre  $\psi(\mathbb{O}_X)$  et  $\mathbb{O}_X$ .  $\square$

Nous déduisons du théorème 2.9 l'ordonnabilité de l'espace des jets de toute variété fermée et du théorème 2.10 l'ordonnabilité de certains cotangents unitaires.

**Théorème 2.11.** *Pour toute variété fermée  $X$  la variété de contact  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  est ordonnable.*

*Démonstration.* D'après le théorème [1.29](#) il suffit de montrer que  $\mathbb{O}_X \times \{0\}$  a la propriété d'intersection stable. Remarquons que la stabilisation de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  est contactomorphe à  $(J^1(X \times S^1), \xi^{X \times S^1})$ . Le fait que la section nulle de  $J^1(X, \mathbb{R})$  ait la propriété d'intersection stable découle alors directement du théorème [2.9](#) précédent.  $\square$

*Remarque 2.12.* En faisant une étude plus fine des fonctions génératrices V. Colin, E. Ferrand et P. Pushkar dans [\[15\]](#) démontrent même qu'il n'existe pas de lacets positifs (contractiles ou non) de contactomorphismes à support compact dans  $\text{Cont}_0^c(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ . Nous ne le ferons pas pour une variété  $X$  en générale, mais nous le démontrerons à la proposition [2.33](#) dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

En travaillant un peu plus nous pouvons également déduire l'ordonnabilité de certains cotangents unitaires. Rappelons tout d'abord la définition du cotangent unitaire et de sa structure de contact canonique. Soit  $X$  une variété, il existe une action naturelle libre et propre de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $T^*X$  donnée par  $\theta \cdot (x, \mu) = (x, \theta\mu)$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}_{>0}$  et pour tout  $(x, \mu) \in T^*X$ . Le cotangent unitaire est alors par définition la variété quotient  $\mathbb{P}^+T^*X := T^*X/\mathbb{R}_{>0}$ . La distribution de contact canonique du cotangent est alors donnée pour tout  $(x, [\mu]) \in \mathbb{P}^+T^*X$  par

$$\xi_X(x, [\mu]) := \left\{ u \in T_{(x, [\mu])}\mathbb{P}^+T^*X \mid d_{(x, [\mu])}\pi(u) \in \text{Ker}(\mu) \right\},$$

où  $\pi : \mathbb{P}^+T^*X \rightarrow X$  désigne la projection canonique. Remarquons que la distribution  $\text{Ker}(\lambda_X)$  de  $T^*X$  passe au quotient en une distribution de  $\mathbb{P}^+T^*X$  et qu'elle coïncide avec la distribution  $\xi_X$ . Ainsi le même calcul en coordonnées du début de chapitre permet de montrer que si  $(x_1, \dots, x_n)$  sont des fonctions coordonnées sur une carte  $U \subset X$  cela nous donne un système de coordonnées homogènes  $(x_1, \dots, x_n, (y_1 : \dots : y_n))$  sur  $\mathbb{P}^+T^*U$ . Dans l'ouvert  $\{y_1 \neq 0\}$  la distribution  $\xi_X$  est donnée par le noyau de la 1-forme

$$dx_1 - \sum_{i=2}^n y'_i dx_i, \quad \text{où } y'_i = -y_i/y_1 \text{ pour tout entier } i \in [2, n].$$

**Théorème 2.13** ([\[19\]](#)). *Soit  $X$  une variété fermée. S'il existe une 1-forme  $\beta \in \Omega^1(X)$  qui soit fermée et qui ne s'annule pas, c'est-à-dire que  $d\beta \equiv 0$  et  $\beta(x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ , alors  $(\mathbb{P}^+T^*X, \xi_X)$  est ordonnable.*

L'idée pour démontrer ce théorème sera dans un premier temps de remarquer que l'image de la 1-forme  $\beta$  est incluse dans  $T^*X \setminus \mathbb{O}_X$  (car elle ne s'annule pas) et que  $T^*X \setminus \mathbb{O}_X$  peut être identifié à la symplectisation de  $(\mathbb{P}^+T^*X, \xi_X)$ . Nous verrons alors que nous pourrons utiliser le théorème [2.10](#) ainsi qu'un lemme d'extension d'isotopie de symplectomorphismes pour déduire que l'image de  $\beta$  a la propriété d'intersection stable.

**Lemme 2.14.** *Soit  $X$  une variété (fermée ou non), alors la symplectisation positive de  $(\mathbb{P}^+T^*X, \xi_X)$  est fortement exactement symplectomorphe à  $(T^*X \setminus \mathbb{O}_X, d\lambda'_X)$ , où  $\lambda'_X$  désigne la restriction de la forme de Liouville du cotangent à  $T^*X \setminus \mathbb{O}_X$ .*

*Démonstration.* Considérons  $g$  une métrique riemannienne sur  $X$  et notons  $\Psi : TX \rightarrow T^*X$  l'isomorphisme de fibré vectoriel induit par  $g$ . Notons le sous-fibré unitaire de  $T^*X$  par

$$S_g^*X := \left\{ (x, \mu) \in T^*X \mid g_x(\Psi^{-1}(x, \mu), \Psi^{-1}(x, \mu)) = 1 \right\}.$$

Le lecteur vérifiera que l'application suivante est un contactomorphisme

$$(S_g^*X, \text{Ker}(\lambda_X^g)) \rightarrow (\mathbb{P}^+T^*X, \xi_X), \quad (x, \mu) \mapsto (x, [\mu])$$

où  $\lambda_X^g$  désigne la restriction de la forme de Liouville du cotangent à  $S_g^*X$ . De même le lecteur vérifiera que l'application suivante est un symplectomorphisme fortement exact

$$(S_g^*X \times \mathbb{R}, de^\theta \lambda_X^g) \rightarrow (T^*X \setminus \mathbb{O}_X, d\lambda'_X), \quad (x, \mu, \theta) \mapsto (x, e^\theta \mu).$$

$\square$

*Remarque 2.15.* En reprenant les notations de la démonstration du lemme précédent, le flot de Reeb de la variété de contact  $(S_g^*X, \text{Ker}(\lambda_X^g))$  associé à la forme de contact  $\lambda_X^g$  correspond au flot géodésique.

Pour pouvoir affirmer que l'image de la 1-forme fermée  $\beta$  du théorème 2.13 a la propriété d'intersection stable il nous faudra encore le lemme suivant.

**Lemme 2.16.** *Soit  $X$  une variété fermée et  $\beta \in \Omega^1(X)$  une forme fermée. Il existe  $\psi \in \text{Symp}(T^*X, d\lambda_X)$  tel que  $\psi(\text{Im}(\beta)) = \mathbb{O}_X$ .*

*Démonstration.* L'application  $[0, 1] \times X \rightarrow (T^*X, d\lambda_X)$  qui à  $(t, x)$  associe  $t\beta(x)$  est une isotopie de plongement lagrangien. Ainsi d'après l'exercice 3.4.20 de [37] nous pouvons l'étendre en une isotopie symplectique sur un ouvert contenant  $\text{Im}(\beta)$ . En remarquant alors que  $H^2(T^*X, X, \mathbb{R}) = 0$  le théorème 3.3.2 d'extension d'isotopie de symplectomorphismes [37] permet de conclure quant au résultat souhaité.  $\square$

Démontrons alors le théorème 2.13.

*Démonstration du théorème 2.13.* D'après le théorème 1.30 il suffit de montrer que  $\text{Im}(\beta)$  a la propriété d'intersection stable. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe  $\Psi \in \text{Ham}^c(T^*X \setminus \mathbb{O}_X \times T^*S^1, d(\lambda_X + rdt))$  tel que

$$\Psi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap ((T^*X \setminus X) \times \mathbb{O}_{S^1}) = \emptyset .$$

En particulier cela implique que

$$\Psi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap \text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1} = \emptyset .$$

Considérons alors  $\tilde{\Psi} \in \text{Ham}^c(T^*X \times T^*S^1)$  le prolongement lisse de  $\Psi$  défini de la manière suivante  $\tilde{\Psi}(p, r, t) = \Psi(p, r, t)$  si  $(p, r, t) \in T^*X \setminus \mathbb{O}_X \times T^*S^1$  et  $\tilde{\Psi}(p, r, t) = (p, r, t)$  si  $(p, r, t) \in \mathbb{O}_X \times T^*S^1$ . Soit alors  $\Phi \in \text{Symp}(T^*X \times T^*S^1, d(\lambda_X + rdt))$  tel que  $\Phi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) = \mathbb{O}_X \times \mathbb{O}_{S^1}$  dont l'existence a été prouvée dans le lemme précédent. Nous avons alors :

$$\Phi \left( \tilde{\Psi}(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) \cap \text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1} \right) = \emptyset \text{ et donc}$$

$$(\Phi \circ \tilde{\Psi} \circ \Phi^{-1})(\Phi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1})) \cap \Phi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) = \emptyset .$$

Or en identifiant  $(T^*X \times T^*S^1, d\lambda_X + rdt)$  à  $(T^*(X \times S^1), d\lambda_{X \times S^1})$  ceci contredit le théorème 2.10, car  $\Phi(\text{Im}(\beta) \times \mathbb{O}_{S^1}) = \mathbb{O}_{X \times S^1}$  et  $\Phi \circ \tilde{\Psi} \circ \Phi \in \text{Ham}^c(T^*(X \times S^1), d\lambda_{X \times S^1})$ .  $\square$

*Remarque 2.17.* V. Chernov et S. Nemirovski ont en fait montré que pour toute variété  $X$  compacte le cotangent unitaire est ordonnable en utilisant la technique des hypersurfaces génératrices [14]. De plus si le revêtement universel de  $X$  n'est pas compacte, ils démontrent qu'il n'existe pas de lacets positifs (contractiles ou non) de contactomorphismes [13].

## 2.2 Unicité des fonctions génératrices et extractions de valeurs critiques

Nous avons vu à la section précédente que si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction génératrice quadratique à l'infini pour une legendrienne  $\Lambda \subset (J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  - où  $E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel sur  $X$  - alors toute stabilisation de  $f$  par une forme quadratique non-dégénérée  $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire la fonction  $f \oplus Q : E \oplus \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , est encore une fonction génératrice quadratique à l'infini pour la même legendrienne. Une autre opération sur les fonctions génératrices quadratiques à l'infini qui a les mêmes propriétés est celle de la composition par un difféomorphisme de fibré vectoriel. Plus précisément soit  $P : E \rightarrow X$  un fibré vectoriel et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice quadratique à l'infini pour une legendrienne  $\Lambda$ . Alors pour tout autre fibré vectoriel  $P' : E' \rightarrow X$  isomorphe (en tant que fibré lisse) à  $P : E \rightarrow X$ , la fonction  $f \circ \phi : E' \rightarrow \mathbb{R}$  est encore une fonction génératrice quadratique à l'infini pour la legendrienne  $\Lambda$ , lorsque  $\phi : E' \rightarrow E$

désigne l'isomorphisme de fibré vectoriel.

Nous formaliserons dans cette section le fait que ce sont les deux seules opérations possibles. Ces opérations sur les fonctions génératrices étant "invisibles" d'un point de vue topologique, cela nous permettra d'utiliser la théorie de Morse et la méthode du minimax pour choisir une valeur critique particulière de "la" fonction génératrice associée à une legendrienne donnée. Cette étude plus fine des fonctions génératrices nous permettra dans la section suivante de construire une norme invariante par conjugaison sur le groupe des contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  muni de sa structure de contact standard.

Le théorème suivant est dû à C. Viterbo [54] et à D. Théret [48].

**Théorème 2.18** (Unicité des fonctions génératrices [54], [48]). *Soient  $X$  une variété fermée et  $\phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ . Si  $f_1 : E_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_2 : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions génératrices quadratiques à l'infini pour  $\phi(\mathbb{O}_X \times \{0\})$ , il existe alors  $F_1$  une fonction construite en appliquant une opération de composition par un difféomorphisme de fibré et une stabilisation à  $f_1$ , et  $F_2$  une fonction construite en appliquant une opération de composition par un difféomorphisme de fibré et une stabilisation à  $f_2$  telles que  $F_1 = F_2$ .*

Nous ne donnerons pas la preuve de ce théorème que le lecteur pourra lire dans [48]. Montrons alors comment associer à une legendrienne  $\Lambda \subset (J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ , qui est l'image de la section nulle par  $\phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$ , une valeur  $c(\Lambda) \in \mathbb{R}$  telle que  $\Lambda \cap \mathbb{O}_X \times \{c(\Lambda)\} \neq \emptyset$ .

Soient  $X$  une variété fermée et  $\Lambda \subset (J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  une legendrienne qui admet une fonction génératrice  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $E \rightarrow X$  est un fibré vectoriel. Rappelons que cela veut dire qu'il existe une forme quadratique non dégénérée telle que la dérivée verticale de  $f - Q$  soit bornée. Notons  $E^a := \{x \in E \mid f(x) \leq a\}$  le sous-niveau de  $f$  par rapport à  $a \in \mathbb{R}$ . Il existe  $a_0 \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $a \leq a_0$  le sous-niveau  $E^a$  a le même type d'homotopie que  $E^{a_0}$ . Nous écrirons  $E^{-\infty}$  pour se référer à ces sous-niveaux.

**Lemme 2.19.** *Soient  $H^*(X, \mathbb{R})$  la cohomologie de  $X$  à coefficients réels et  $H^*(E, E^{-\infty}, \mathbb{R})$  la cohomologie relative de la paire  $(E, E^{-\infty})$ . Il existe alors un isomorphisme*

$$T : H^*(X, \mathbb{R}) \cong H^{*+N}(E, E^{-\infty}, \mathbb{R}) ,$$

où  $N$  désigne l'indice de la forme quadratique.

*Démonstration.* L'isomorphisme de Thom - que le lecteur pourra voir par exemple dans [28] - assure que  $H^*(X, \mathbb{R})$  est isomorphe à  $H^{*+N}(D(E_-), S(E_-), \mathbb{R})$  où  $E_-$  désigne le sous-fibré où la forme quadratique  $Q$  est définie négative et où  $D(E_-)$  ainsi que  $S(E_-)$  désignent respectivement les fibrés en disques et en sphères pour une certaine métrique riemannienne donnée. Par excision il existe alors un isomorphisme entre  $H^{*+N}(D(E_-), S(E_-), \mathbb{R})$  et  $H^{*+N}(E, E^{-\infty}, \mathbb{R})$ .  $\square$

Considérons alors  $u \in H^*(X, \mathbb{R})$  une classe non nulle et  $i_a : (E^a, E^{-\infty}) \hookrightarrow (E, E^{-\infty})$ . En notant  $i_a^*$  l'application induite en cohomologie le nombre

$$c(u, f) := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid i_a^*(T(u)) \neq 0\}$$

est une valeur critique de la fonction  $f$ . En effet pour tout  $a \leq a_0$  l'application  $i_a^*$  est nulle et pour tout  $a$  suffisamment grand cette application vaut l'identité, de plus la théorie de Morse assure qu'il y a un changement de topologie entre deux sous-niveaux seulement s'il existe un sous-niveau critique entre eux deux. De plus d'après le théorème [2.18] si  $f' : E' \rightarrow \mathbb{R}$  est une autre fonction génératrice quadratique à l'infini pour la même legendrienne  $\Lambda$  alors  $c(u, f') = c(u, f)$  car les opérations de stabilisation et de composition par un isomorphisme de fibré sont invisibles

d'un point de vue topologique. En notant  $\mathfrak{L} := \{\phi(\mathbb{O}_X \times \{0\}) \mid \phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)\}$  nous pouvons définir sans ambiguïté l'application suivante :

$$c : H^*(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, \Lambda) \mapsto c(u, f) \text{ où } f \text{ est une fonction génératrice quadratique à l'infini pour } \Lambda.$$

Remarquons alors que  $\Lambda$  intersecte  $\mathbb{O}_X \times \{c(u, \Lambda)\}$ . Cette application a les propriétés agréables suivantes.

**Proposition 2.20** ([8], [42]). *Soit  $\nu \in H^n(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  la classe d'orientation de  $X$ , où  $n$  est la dimension de  $X$ . L'application  $c$  vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes à support compact de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi_X)$  partant de l'identité, alors l'application  $t \mapsto c(u, \phi^t(\mathbb{O}_X \times \{0\}))$  est continue pour tout  $u \in H^*(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ .*
2. *Pour tout  $u_1, u_2 \in H^*(X, \mathbb{R})$  et pour toute legendrienne  $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{L}$  nous avons*

$$c(u_1 \cup u_2, \Lambda_2 + \Lambda_2) \geq c(u_1, \Lambda_1) + c(u_2, \Lambda_2)$$

*où la somme sur les legendriennes est définie de la manière suivante*

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = \{(x, \mu_1 + \mu_2, \theta_1 + \theta_2) \mid (x, \mu_1, \theta_1) \in L_1 \text{ et } (x, \mu_2, \theta_2) \in L_2\}.$$

3. *Pour toute legendrienne  $\Lambda \in \mathfrak{L}$  nous avons*

$$c(\nu, -\Lambda) = -c(1, \Lambda)$$

*où nous définissons  $-\Lambda$  de la façon suivante*

$$-\Lambda := \{(x, -\mu, -\theta) \mid (x, \mu, \theta) \in \Lambda\}.$$

4.  *$c(\nu, \Lambda) = c(1, \Lambda)$  si et seulement si  $\Lambda = \mathbb{O}_X \times \{0\}$ . Dans ce cas  $c(\nu, \Lambda) = c(1, \Lambda) = 0$ .*

Le premier point de la proposition provient essentiellement du théorème 2.5 qui assure que nous pouvons construire le chemin de fonctions génératrices de sorte à ce qu'il soit continu. Les autres propriétés se basent sur des arguments de topologie algébrique [54], [42].

Le prochain lemme permettra dans la section suivante de déduire de l'application précédente des invariants de contact sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  munie de sa structure de contact standard. Considérons l'action de  $\theta \in \mathbb{R}$  sur  $(x, \mu, z) \in J^1(X, \mathbb{R})$  définie par  $\theta \cdot (x, \mu, z) = (x, \mu, z + \theta)$ . Nous disons qu'un contactomorphisme  $\Psi$  de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  est 1-périodique si  $\Psi(k \cdot (x, \mu, z)) = k \cdot (\Psi(x, \mu, z))$  pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $(x, \mu, z) \in J^1(X, \mathbb{R})$ .

**Lemme 2.21** ([42]). *Soit  $\{\Psi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de contactomorphismes de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  partant de l'identité et qui soit 1-périodique, c'est-à-dire que  $\Psi^t$  est 1-périodique pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors pour tout  $u \in H^*(X) \setminus \{0\}$  et pour toute legendrienne  $\Lambda \in \mathfrak{L}$*

$$[c(u, \Psi(\Lambda))] = [c(u, \Lambda - \Psi^{-1}(\mathbb{O}_X \times \{0\}))]$$

*où  $\Psi := \Psi^1$  et où pour tout nombre réel  $x$ ,  $[x]$  désigne le plus petit entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $x \leq n$ .*

*Démonstration.* Soit  $\{f^t : E \rightarrow \mathbb{R}\}$  un chemin continu de fonctions génératrices quadratiques à l'infini pour le chemin de legendriennes  $\{\Psi^t(\Lambda)\}$ . Supposons d'abord que  $c(u, \Psi(\Lambda)) = k \in \mathbb{Z}$  et que cette valeur critique  $k$  de  $f^1$  provient d'un point critique non dégénéré. Cela veut dire que  $\Psi(\Lambda)$  intersecte transversalement  $\mathbb{O}_X \times \{k\}$ . Dans la suite nous écrirons simplement  $j^1 k$  pour désigner l'image du 1-jet de la fonction constante égale à  $k$  c'est-à-dire que nous ferons l'abus de notation  $j^1 k = \mathbb{O}_X \times \{k\}$ . Remarquons que la legendrienne  $j^1 k$  peut également s'écrire

$j^1k = j^1k + j^10$  (en utilisant les notations de somme sur les legendriennes de la proposition précédente). Ainsi  $(\Psi^t)^{-1}(\Psi(\Lambda))$  intersecte transversalement  $(\Psi^t)^{-1}(j^10 + j^1k)$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . Or  $(\Psi^t)^{-1}(j^10 + j^1k) = (\Psi^t)^{-1}(j^10) + j^1k$  car  $\Psi^t$  est 1-périodique. Cela implique que  $\Lambda^t := (\Psi^t)^{-1}(\Psi(\Lambda)) - (\Psi^t)^{-1}(j^10)$  intersecte transversalement  $j^1k$  pour tous les temps  $t \in [0, 1]$ . Soit alors  $\{y^t\}$  un chemin continu de  $J^1(X, \mathbb{R})$  tel que  $y^t \in \Lambda^t \pitchfork j^1k$ . En notant  $\{g^t : F \rightarrow \mathbb{R}\}$  un chemin de fonctions génératrices quadratiques à l’infini pour  $\{\Lambda^t\}$ , le point  $i_{g^t}^{-1}(y^t)$  est un point critique non dégénéré de  $g^t$  de valeurs critiques  $k$ . Dans la phrase précédente  $i_{g^t}$  désigne l’immersion legendrienne définie dans la proposition 2.2. La théorie de Morse permet alors de conclure que  $c(u, (\Psi^t)^{-1}(\Psi(\Lambda)) - (\Psi^t)^{-1}(j^10)) = k$  pour tout temps  $t$  et en particulier lorsque  $t = 1$ . En enlevant l’hypothèse d’intersection transverse, M. Bhupal [8] arrive à la même conclusion en utilisant un argument d’approximation.

Supposons maintenant que  $c(u, \Psi(\Lambda))$  n’est pas un entier. Supposons par l’absurde que  $[c(u, \Lambda - \Psi^{-1}(j^10))] \neq [c(u, \Psi(\Lambda))]$ . Comme l’application  $t \mapsto c(u, \Lambda^t)$  est continue, qu’elle vaut  $c(u, \Psi(\Lambda))$  en  $t = 0$  et  $c(u, \Lambda - \Psi^{-1}(j^10))$  en  $t = 1$ , il existe un temps  $t_0 \in ]0, 1[$  où  $c(u, \Lambda^{t_0}) = k \in \mathbb{Z}$ . D’après la discussion précédente cela implique que  $c(u, \Psi^t(\Lambda^{t_0})) = k$  pour tout  $t \in [0, t_0]$ . En particulier lorsque  $t = t_0$  nous avons  $\Psi^{t_0}(\Lambda^{t_0}) = \Psi(\Lambda)$  d’où la contradiction.  $\square$

De cette preuve nous pouvons en déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 2.22.** *Pour tout contactomorphisme  $\Psi$  de  $(J^1(X, \mathbb{R}), \xi^X)$  dans la composante connexe de l’identité, pour tout  $u \in H^*(X, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  et pour toute legendrienne  $\Lambda \in \mathcal{L}$  nous avons*

$$c(u, \Psi(\Lambda)) = 0 \Leftrightarrow c(u, \Lambda - \Psi^{-1}(\mathbb{O}_X \times \{0\})) = 0 .$$

## 2.3 Les contactomorphismes à support compact de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$

Nous allons dans cette section utiliser les constructions précédentes pour associer à un contactomorphisme à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  muni de sa structure de contact standard la translation d’un point translaté. En fixant la forme de contact standard sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  un point translaté pour un contactomorphisme est un point dont l’image par ce contactomorphisme a été translatée dans la direction  $S^1$  et où la forme de contact a été préservée. L’idée, que nous reprenons de l’article [41], sera d’associer à tout contactomorphisme son graphe que nous verrons comme une legendrienne de  $(J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$ . Nous verrons à la fin de cette section comment de ces constructions S. Sandon a défini une norme invariante par conjugaison non bornée sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  et une capacité de contact.

### 2.3.1 Le graphe d’un contactomorphisme comme legendrienne de l’espace des jets

Soit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Considérons l’espace euclidien de dimension  $2n + 1$  muni des fonctions coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ . Sa structure de contact standard  $\xi_{st}$  est donnée par le noyau de la 1-forme  $\alpha_{st} = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ . Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ , on définit le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à  $\alpha_{st}$  comme l’unique fonction lisse  $g : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\phi^* \alpha_{st} = e^g \alpha_{st}$ . Nous appelons alors le graphe de  $\phi$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$  suivant :

$$\text{gr}(\phi) := \{(p, \phi(p), g(p)) \mid p \in \mathbb{R}^{2n+1}\} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R} .$$

En munissant  $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}$  des fonctions coordonnées

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z, X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n, Z, \theta)$$

la 1-forme

$$e^\theta \left( dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) - \left( dZ - \sum_{i=1}^n Y_i dX_i \right)$$

est une forme de contact pour laquelle le graphe de  $\phi$  est une legendrienne.

*Remarque 2.23.* Cette construction est en fait un cas particulier d'un cas général que nous croiserons plus loin dans cette thèse. Si  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est une variété de contact alors  $(M \times M \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha^1 - \alpha^2))$  est une variété de contact, où  $\alpha^i = pr_i^* \alpha$  et où pour tout  $(m_1, m_2, \theta) \in M \times M \times \mathbb{R}$  nous définissons  $pr_i(m_1, m_2, \theta) = m_i$  avec  $i \in \{1, 2\}$ . De plus pour tout  $\phi \in \text{Cont}(M, \xi)$ ,  $gr(\phi)$  est une legendrienne de  $(M \times M \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha^1 - \alpha^2))$ .

En notant  $S^{2n+1}$  la sphère unité euclidienne standard de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.24** ([8]). *Il existe un plongement de contact*

$$\Phi : (\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha_{st}^1 - \alpha_{st}^2)) \hookrightarrow (J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}}).$$

De plus pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  il existe  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  tel que

$$\Lambda_\phi := \overline{\Phi(gr(\phi))} = \varphi(\mathbb{O}_{S^{2n+1}} \times \{0\}).$$

*Démonstration.* L'application

$$\begin{aligned} \Theta : (\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha_{st}^1 - \alpha_{st}^2)) &\rightarrow (J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n+1}} = \text{Ker}(\alpha_{\mathbb{R}^{2n+1}})) \\ (x, y, z, X, Y, Z, \theta) &\mapsto (x, Y, z, Y - e^\theta y, x - X, e^\theta - 1, xY - XY + Z - z) \end{aligned}$$

est un plongement de contact qui préserve les formes de contact. De plus l'inverse de la projection stéréographique nous donne un difféomorphisme  $\psi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} \setminus \{\text{pt}\}$ . Ce difféomorphisme induit de manière canonique un contactomorphisme

$$\Psi : (J^1(\mathbb{R}^{2n+1}), \xi^{\mathbb{R}^{2n+1}}) \rightarrow (J^1(S^{2n+1} \setminus \{\text{pt}\}), \xi^{S^{2n+1}}), \quad (x, \mu, \theta) \mapsto (\psi(x), \mu(d_{\psi(x)} \psi^{-1}), \theta).$$

De même nous avons un plongement de contact canonique  $i : J^1(S^{2n+1} \setminus \{\text{pt}\}, \mathbb{R}) \hookrightarrow J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R})$  provenant de l'inclusion. L'application  $\Phi = i \circ \Psi \circ \Theta$  est le plongement de contact désiré.

Montrons la deuxième partie de la proposition. Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ , comme il est à support compact son graphe en dehors d'un compact coïncide avec la section nulle, plus précisément en notant  $j^1 0$  le 1-jet de la fonction nulle sur  $S^{2n+1}$  il existe  $K \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  un compact tel que

$$\Phi \left( gr(\phi|_{\mathbb{R}^{2n+1} \setminus K}) \right) = j^1 0 \left( \left\{ \psi(p) \mid p \in \mathbb{R}^{2n+1} \setminus K \right\} \right) \subset J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}).$$

De ce fait  $\overline{\Phi(gr(\phi))} = \Phi(gr(\phi)) \cup j^1 0(\{\text{pt}\})$  est une legendrienne compacte et lisse. En considérant alors  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  qui relie l'identité à  $\phi$ , par ce que nous venons de dire le chemin  $\{\overline{\Phi(gr(\phi^t))}\}$  est un chemin lisse de legendriennes compactes qui commence en  $t = 0$  à la section nulle. Le théorème d'extension d'isotopie (voir par exemple H. Geiges [25]) permet alors d'affirmer qu'il existe  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  tel que  $\varphi(\mathbb{O}_{S^{2n+1}} \times \{0\}) = \overline{\Phi(gr(\phi))}$ .  $\square$

Bien que cette construction marche bien pour les contactomorphismes à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  en général il n'est pas possible d'associer au graphe d'un contactomorphisme d'une variété de contact quelconque une legendrienne de l'espace des jets (sauf quand ce contactomorphisme est suffisamment  $\mathcal{C}^1$ -petit). Cependant cela reste encore vrai lorsque l'on s'intéresse aux contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  qui sont isotopes à l'identité.

En effet, considérons l'action libre et propre de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$  donnée par  $k \cdot (x, y, z) = (x, y, z + k)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ . Nous notons la variété quotient  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . Remarquons alors que la forme de contact standard  $\alpha_{st} = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$  de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  descend en une forme de contact sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  que nous noterons encore par abus de notation  $\alpha_{st}$ . La structure de contact standard sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  est alors donnée par le noyau de  $\alpha_{st}$  et nous la noterons  $\xi_{st}$ . Il sera souvent commode de voir les contactomorphismes à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  qui sont isotopes à l'identité comme des contactomorphismes 1-périodique de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ . Plus précisément les contactomorphismes  $\phi$  de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  qui vérifient les propriétés suivantes :

1.  $\phi$  est 1-périodique c'est-à-dire que  $\phi(x, y, z + k) = \phi(x, y, z) + (0, 0, k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$
2. il existe un chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  tel que  $\phi^0 = \text{Id}$  et  $\phi^1 = \phi$  et tel que  $\phi^t$  est 1-périodique et la projection du support de  $\phi^t$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  est incluse dans un compact pour tout  $t \in [0, 1]$  ;

forment un ensemble que nous notons  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$ . Il y a donc une bijection canonique entre  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$  et  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .

L'ensemble  $\mathbb{Z}$  agit également librement et proprement sur  $J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$  et cette action est donnée par  $k \cdot (x, y, z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \theta) = (x, y, z + k, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \theta)$  pour tout  $(x, y, z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \theta) \in J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ . De plus cette action préserve la forme de contact canonique de  $J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$  et l'espace quotient est contactomorphe à  $(J^1(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n} \times S^1})$ .

Montrons alors comment associer à  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  une legendrienne de  $J^1(S^{2n} \times S^1, \xi^{S^{2n} \times S^1})$ . Soit  $\bar{\phi} \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$  son correspondant 1-périodique et notons  $g$  son facteur de conformalité par rapport à  $\alpha_{st}$ , c'est-à-dire que  $\bar{\phi}^* \alpha_{st} = e^g \alpha_{st}$ . Notons  $\Gamma_{\bar{\phi}} : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R})$  le plongement legendrien définie par  $\Gamma_{\bar{\phi}}(p) = \Theta(p, \bar{\phi}(p), g(p))$  pour tout  $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$ . L'application  $\Gamma_{\bar{\phi}}$  passe au quotient en une application de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  dans  $J^1(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ . En effet  $\Gamma_{\bar{\phi}}(k \cdot p) = k \cdot \Gamma_{\bar{\phi}}(p)$  pour tout entier  $k$  et pour tout élément  $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$ . Notons encore  $\Gamma_{\bar{\phi}}$  l'application de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  dans  $J^1(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ . De ce fait l'image de  $\Gamma_{\bar{\phi}}$  est une legendrienne de  $(J^1(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n} \times S^1})$ . Or nous pouvons de nouveau utiliser la projection stéréographique pour plonger de manière contactomorphe  $\Psi : (J^1(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n} \times S^1}) \hookrightarrow (J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$ . Comme la projection du support de  $\bar{\phi}$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  est contenue dans un compact, l'adhérence de  $\Psi(\Gamma_{\bar{\phi}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1))$  est une legendrienne lisse compacte de  $(J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$  :

$$\overline{\Psi(\Gamma_{\bar{\phi}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1))} = \Psi(\Gamma_{\bar{\phi}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1)) \cup j^1 0(\{pt\} \times S^1),$$

où  $j^1 0$  désigne le 1-jet de la fonction nulle sur  $S^{2n} \times S^1$ . Enfin comme  $\bar{\phi} \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$ , il existe un chemin lisse  $\{\bar{\phi}^t\}_{t \in [0,1]}$  de contactomorphismes 1-périodique dont la projection du support est contenue dans un compact qui relie  $\bar{\phi}$  à l'identité et donc  $\{\overline{\Psi(\Gamma_{\bar{\phi}^t}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1))}\}_{t \in [0,1]}$  est un chemin lisse de legendriennes qui relie  $\overline{\Psi(\Gamma_{\bar{\phi}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1))}$  à  $\mathbb{O}_{S^{2n} \times S^1} \times \{0\}$ . Nous concluons donc comme précédemment en utilisant le théorème d'extension d'isotopie (voir par exemple [25]) quant au fait qu'il existe  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n} \times S^1), \xi^{S^{2n} \times S^1})$  tel que

$$\Lambda_\phi := \overline{\Psi(\Gamma_{\bar{\phi}}(\mathbb{R}^{2n} \times S^1))} = \varphi(\mathbb{O}_{S^{2n} \times S^1} \times \{0\}) .$$

En résumé, à tout contactomorphisme  $\phi$  dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (respectivement  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) nous pouvons associer une fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  - où  $E$  désigne l'espace total d'un fibré vectoriel sur  $S^{2n+1}$  (respectivement  $S^{2n} \times S^1$ ) - telle que cette fonction soit une fonction génératrice quadratique à l'infini pour la legendrienne correspondante à l'image du graphe de  $\phi$  vu dans  $(J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  (respectivement  $(J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$ ). Nous notons cette legendrienne  $\Lambda_\phi$ . Dans la sous-section suivante nous discutons de l'interprétation géométrique des points critiques de la fonction génératrice dans ce cas.



### 2.3.2 Points translés et spectre d'un contactomorphisme

Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction gnratrice pour la legendrienne  $\Lambda_\phi \subset J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R})$ , où  $E$  est un fibré vectoriel sur  $S^{2n+1}$ . Supposons que  $e \in E$  soit un point critique de  $f$  avec valeur critique  $f(e)$ . Cela implique que  $(P(e), 0, f(e)) \in \Lambda_\phi \subset J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R})$ , où  $P : E \rightarrow S^{2n+1}$  désigne la projection associée au fibré vectoriel. Dans le cas où  $P(e)$  est différent du point à l'infini  $pt \in S^{2n+1}$  cela implique que  $(\psi^{-1}(P(e)), 0, f(e))$  appartient à  $\Theta(\text{gr}(\phi))$  où  $\psi^{-1} : S^{2n+1} \setminus \{pt\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  désigne la projection stéréographique et  $\Theta$  le plongement de contact défini dans la démonstration de la proposition 2.24. Notons alors  $\phi(x, y, z) = (\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z), \phi_3(x, y, z)) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  et  $g : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à la forme  $\alpha_{st}$ . En particulier d'après la définition de l'application  $\Theta$  et en posant  $(x, y, z) = \psi^{-1}(P(e))$  nous avons

$$\begin{cases} \phi_2(x, y, z) - e^{g(x, y, z)} y & = 0 \\ x - \phi_1(x, y, z) & = 0 \\ e^{g(x, y, z)} - 1 & = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons donc que  $g(x, y, z) = 0$ ,  $\phi_2(x, y, z) = y$ ,  $\phi_1(x, y, z) = x$  et  $\phi_3(x, y, z) = z + f(e)$ . Ainsi  $(x, y, z)$  est un point dont l'image par  $\phi$  a été translée dans la direction  $z$  d'une quantité  $f(e)$  et où le facteur de conformalité vaut 0. En suivant la terminologie de S. Sandon [42] nous appellerons ces points des points translés.

*Remarque 2.25.* Exactement le même raisonnement permet d'avoir les mêmes conclusions pour les contactomorphismes  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .

**Définition 2.26** (Point translé). 1. Soit  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  et notons  $g$  son facteur de conformalité par rapport à  $\alpha_{st}$ , c'est-à-dire que  $\phi^* \alpha_{st} = e^g \alpha_{st}$ . Nous disons que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$  est un point  $t$ -translé pour  $\phi$  si  $\phi(x, y, z) = (x, y, z + t)$  et  $g(x, y, z) = 0$ .  
2. Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . Notons  $\bar{\phi} \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$  son correspondant 1-périodique et  $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  la projection canonique. Nous disons que  $p \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  est un point  $t$ -translé pour  $\phi$ , si pour tout élément  $\bar{p} \in \mathbb{R}^{2n+1}$  qui se projette par  $\pi$  sur  $p$  est un point  $t$ -translé de  $\bar{\phi}$ .

Le champs de Reeb associé à la forme de contact standard  $\alpha_{st}$  est le champs de vecteur  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Ainsi un point translé pour un contactomorphisme est translé dans la direction du flot de Reeb. Cette remarque a été utilisée par S. Sandon pour généraliser la définition de point translé à toute variété de contact co-orientable  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$ .

**Définition 2.27** (Point translé [43]). Un point  $x \in M$  est un point translé pour  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi(x) = \phi_{R_\alpha}^t(x)$  et  $g(x) = 0$ , où  $\phi_{R_\alpha}^t$  désigne le flot de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$  au temps  $t$  et où  $g$  est le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à  $\alpha$ .

*Remarque 2.28.* Etre un point translé pour un contactomorphisme dépend de la forme de contact choisie.

La réciproque de la discussion précédente est également vraie. Plus précisément soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp.  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ),  $P : E \rightarrow S^{2n+1}$  (resp.  $P : E \rightarrow S^{2n} \times S^1$ ) un fibré vectoriel et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction gnratrice pour la legendrienne  $\Lambda_\phi \subset J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R})$  (resp.  $\Lambda_\phi \subset J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ ).

**Lemme 2.29.** *Un point  $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$  (resp.  $p \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ ) est un point  $t$ -translé de  $\phi$  si et seulement s'il existe  $e \in E \setminus P^{-1}(\{pt\})$  (resp.  $E \setminus P^{-1}(\{pt\} \times S^1)$ ) un point critique de  $f$  de valeur critique  $f(e) = t$ . De plus  $e$  se projette par  $P$  sur un point de la sphère  $S^{2n+1} \setminus \{pt\}$  (resp. sur un point de  $(S^{2n} \setminus \{pt\}) \times S^1$ ) dont l'image par  $\psi^{-1}$  la projection stéréographique (resp.  $\psi^{-1} \times Id_{S^1}$ ) est  $p$ .*

Nous laissons ce lemme comme exercice. Ainsi nous en déduisons que quelque soit le contactomorphisme que nous considérons et quelque soit la fonction génératrice que nous lui associons l'ensemble des valeurs critiques de cette fonction sera toujours le même. Nous appellerons cet ensemble le spectre du contactomorphisme.

**Définition 2.30** (Spectre). Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) nous appelons le spectre de  $\phi$  l'ensemble de nombres suivant :

$$\text{Spectre}(\phi) := \{t \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } p \in \mathbb{R}^{2n+1} \text{ (resp. } \mathbb{R}^{2n} \times S^1) \text{ un point } t\text{-translaté pour } \phi\}.$$

*Remarque 2.31.* 1. Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice pour  $\Lambda_\phi \subset J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R})$  (resp.  $J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ ). Il n'y a pas de bijection entre les points translatsés de  $\phi$  et les points critiques de  $f$ , car tous les points de la fibre au-dessus du point à l'infini (resp. du cercle  $S^1$  à l'infini) sont tous des points critiques de  $f$ . Etant cependant tous des points critiques de valeurs critiques 0, car  $\Lambda_\phi$  en dehors d'un compact coïncide avec la section nulle, nous avons bien que le spectre de  $\phi$  est égal à l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ .

2. Dans le cas des symplectomorphismes hamiltoniens à support compact de  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de sa structure symplectique standard il y a également une notion de spectre (voir le livre de H. Hofer et E. Zehnder [30] ou la dernière section 6.3 de cette thèse pour une définition). De plus nous verrons au chapitre 4 au lemme 4.5 qu'il existe un procédé pour relever  $\psi \in \text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  à un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . Dans ce cas le lecteur pourra vérifier que  $\text{Spectre}(\psi) = \text{Spectre}(\phi)$ . Cependant contrairement au cas symplectique où le spectre d'un symplectomorphisme hamiltonien est stable par conjugaison par symplectomorphisme, dans le cas de contact ce ne sera plus le cas. Cela vient du fait qu'être un point translaté n'est pas "stable par conjugaison". En effet si  $p$  est un point translaté de  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  alors  $\varphi(p)$  n'est en général pas un point translaté de  $\varphi\phi\varphi^{-1}$  où  $\varphi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ . Nous verrons néanmoins dans la sous-partie suivante que ce sera vrai lorsque l'on se restreint aux contactomorphismes 1-périodique et que l'on s'intéresse aux points  $\mathbb{Z}$ -translatés.

### 2.3.3 Extraction d'invariants spectraux : ordonnabilité, norme invariante par conjugaison et capacité

Dans cette sous-section nous allons appliquer les techniques de minimax sur "la" fonction génératrice quadratique à l'infini pour la legendrienne  $\Lambda_\phi \subset (J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  (resp.  $\Lambda_\phi \subset (J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$ ) afin d'associer à tout  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp.  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) une valeur de son spectre. Nous verrons comment en déduire qu'il n'existe pas de lacet positifs (contraciles ou non) de contactomorphismes sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  et  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . Cela nous permettra également de définir une norme invariante par conjugaison non bornée sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  ainsi qu'une capacité de contact pour les domaines de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . Cette norme ainsi que cette capacité ont été construites par S. Sandon [42], [41].

Soit  $\nu$  la classe d'orientation dans  $H^{2n+1}(S^{2n+1}, \mathbb{R})$  (resp.  $H^{2n+1}(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ ). Considérons l'application

$$c : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto c(\nu, \Lambda_\phi)$$

$$\text{(resp. } c : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto c(\nu, \Lambda_\phi)).$$

**Théorème 2.32** ([42]). Pour tout élément  $\phi$  de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  ou  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$

1.  $c(\phi) \in \text{Spectre}(\phi)$ ,
2. Si  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est un chemin lisse de contactomorphismes alors l'application  $t \mapsto c(\phi^t)$  est continue.

3.  $c(\phi) \geq 0$ ,
4.  $c(\phi) = c(\phi^{-1}) = 0$  si et seulement si  $\phi = \text{Id}$ .

Nous appelons l'application  $c$  un sélecteur de translation.

Avant de démontrer ce théorème remarquons que pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  en notant  $g$  son facteur de conformalité par rapport à  $\alpha_{st}$ , l'application  $\Phi_\phi(p, P, \theta) = (p, \phi(P), \theta + g(P))$  définie sur  $((\mathbb{R}^{2n+1})^2 \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha_{st}^1 - \alpha_{st}^2))$  est un contactomorphisme. Il est facile de voir alors que  $\Phi_{\phi_1} \circ \Phi_{\phi_2} = \Phi_{\phi_1 \circ \phi_2}$  pour tout  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ . Ainsi l'application  $\Psi'_\phi := \Theta \circ \Phi_\phi \circ \Theta^{-1}$  est un contactomorphisme sur un ouvert de  $(J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n+1}})$  pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ . De la même façon pour tout  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  nous avons  $\Psi'_{\phi_1} \circ \Psi'_{\phi_2} = \Psi'_{\phi_1 \circ \phi_2}$ . De plus  $\Psi'_\phi(\text{Im}(j^1 0)) = \Theta(\text{gr}(\phi))$ . Nous laissons alors au lecteur de vérifier que pour tous  $\phi_1, \phi_2$  éléments de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) nous pouvons construire des applications  $\Psi_{\phi_1}$  et  $\Psi_{\phi_2} \in \text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  (resp.  $\text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n} \times S^1})$ ) telles que

$$\Psi_{\phi_1}(\text{Im}(j^1 0)) = \Lambda_{\phi_1}, \quad \Psi_{\phi_2}(\text{Im}(j^1 0)) = \Lambda_{\phi_2}, \quad \Psi_{\phi_1} \circ \Psi_{\phi_2}(\text{Im}(j^1 0)) = \Lambda_{\phi_1 \circ \phi_2} .$$

*Démonstration du théorème 2.32.* 1. Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice pour  $\Lambda_\phi$ . Ainsi  $c(\phi)$  est une valeur critique de  $f$ . Or d'après la remarque de la sous-section précédente 2.31 l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  correspond au spectre de  $\phi$ .

2. La deuxième propriété provient du fait que si  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes alors  $\Lambda_{\phi^t}$  est un chemin lisse de legendriennes et donc nous pouvons conclure en utilisant la propriété 1 de la proposition 2.20.
3. Par définition  $c(\phi) = c(\nu, \Lambda_\phi)$ . D'après la proposition 2.20 nous avons  $-c(\nu, \Lambda_\phi) = c(1, -\Lambda_\phi) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid i_a^*(1) \neq 0\}$ . Pour montrer le point 3 du théorème précédent il suffit donc de montrer que  $i_0^*(1) \neq 0$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction génératrice quadratique à l'infini pour  $\Lambda_\phi$ . Considérons  $P : E \rightarrow S^{2n+1}$  (resp.  $P : E \rightarrow S^{2n} \times S^1$ ) la projection du fibré vectoriel. Notons alors  $E_{\text{pt}} = P^{-1}(\{\text{pt}\})$  (resp.  $P^{-1}(\{\text{pt}\} \times S^1)$ ) et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^*(S^{2n+1}) & \longrightarrow & H^*(\{\text{pt}\}) \\ i_0^* \downarrow & & \downarrow \\ H^*(E^0, E^{-\infty}) & \longrightarrow & H^*(E_{\text{pt}}^0, E_{\text{pt}}^{-\infty}) \end{array}$$

(resp. on remplace  $H^*(S^{2n+1})$  par  $H^*(S^{2n} \times S^1)$  et  $H^*(\{\text{pt}\})$  par  $H^*(\{\text{pt}\} \times S^1)$ ) où les flèches horizontales sont induites par les inclusions  $\{\text{pt}\} \hookrightarrow S^{2n+1}$  (resp.  $S^{2n} \times S^1$ ) et  $E_{\text{pt}} \hookrightarrow E$ . Comme à l'infini la fonction génératrice est donnée par une forme quadratique non dégénérée  $Q : E_p \rightarrow \mathbb{R}$ , la flèche verticale de droite est un isomorphisme. De plus la flèche horizontale du haut envoie 1 sur 1. Ainsi la flèche verticale de gauche qui désigne  $i_0^*$  ne peut être nulle, et  $i_0^*(1) \neq 0$ .

4. Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$ . Faisons l'abus de notation  $j^1 0 := \mathbb{O}_{S^{2n+1}} \times \{0\}$ . De la discussion précédant cette démonstration - en étudiant la paire de contactomorphisme  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  - nous déduisons l'existence de  $\Psi_\phi \in \text{Cont}_0^c(J^1(S^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{S^{2n+1}})$  tel que  $\Psi_\phi(j^1 0) = \Lambda_\phi$  et  $(\Psi_\phi)^{-1}(j^1 0) = \Lambda_{\phi^{-1}}$ . Comme par hypothèse  $c(\phi) = c(\nu, \Lambda_\phi) = 0$ , d'après le corollaire 2.22 nous avons

$$c(\nu, \Lambda_\phi) = c(\nu, \Psi_\phi(j^1 0)) = 0 \Leftrightarrow c(\nu, j^1 0 - (\Psi_\phi)^{-1}(j^1 0)) = c(\nu, -\Lambda_{\phi^{-1}}) = 0 .$$

Or le point 3 de la proposition 2.20 nous permet alors d'affirmer que  $c(\nu, -\Lambda_{\phi^{-1}}) = -c(1, \Lambda_{\phi^{-1}}) = 0$ . En utilisant maintenant l'hypothèse que  $c(\phi^{-1}) = c(\nu, \Lambda_{\phi^{-1}}) = 0$ , nous avons  $c(1, \Lambda_{\phi^{-1}}) = c(\nu, \Lambda_{\phi^{-1}}) = 0$ . Donc le point 4 de la même proposition 2.20 nous permet de conclure que  $\Lambda_{\phi^{-1}} = \mathbb{O}_{S^{2n+1}} \times \{0\}$  et donc que  $\phi^{-1} = \text{Id}$ . La démonstration pour le cas où  $\phi$  est un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  se fait exactement de la même façon.  $\square$

De manière analogue à la relation binaire que nous avons définie au chapitre 1 sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact co-orientable, nous disons que  $\phi_1 \succeq \phi_2$  pour deux éléments  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  s'il existe des chemins lisses de contactomorphismes à support compact partant de l'identité  $\{\phi_1^t\}$  et  $\{\phi_2^t\}$  tels que  $\phi_1^1 = \phi_1$ ,  $\phi_2^1 = \phi_2$  et  $[\{\phi_1^t\}] \succeq [\{\phi_2^t\}]$ .

**Proposition 2.33.** *Soient  $\phi_1, \phi_2$  deux éléments de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  (resp. deux éléments de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ) tels que  $\phi_1 \succeq \phi_2$ . Nous avons alors  $c(\phi_1) \geq c(\phi_2)$ .*

Avant de donner l'idée de la démonstration de la proposition déduisons-en le corollaire suivant.

**Corollaire 2.34.** *Il n'existe pas de lacet positif de contactomorphismes non constant - contractile ou non - dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  et  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . En particulier  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  et  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  sont ordonnables.*

*Démonstration du corollaire.* Soit  $\{\phi^t\}$  un lacet de contactomorphismes positifs partant de l'identité. D'après la proposition précédente l'application  $t \mapsto c(\phi^t)$  est croissante. Or comme  $\phi^0 = \phi^1 = \text{Id}$  cela implique qu'elle est constante égale à 0. De plus  $\{(\phi^t)^{-1}\}$  est alors un lacet négatif comme  $\{\phi^t\}$  est positif. Donc toujours d'après la proposition précédente 2.33 nous déduisons que  $c((\phi^t)^{-1}) = 0$  pour tout  $t$ . Nous avons donc  $c(\phi^t) = c((\phi^t)^{-1}) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . D'après le 4ème point du théorème 2.32 cela implique que  $\phi^t = \text{Id}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

L'idée pour démontrer la proposition 2.33 est la suivante. Soit  $\{\phi^t\}$  un chemin de contactomorphismes positif de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  qui soit suffisamment  $\mathcal{C}^1$ -petit. En adoptant les notations de la discussion précédant la démonstration du théorème 2.32 un calcul direct permet de voir que le chemin de contactomorphismes  $\{\Psi'_{\phi^t}\} \subset \text{Cont}_0(J^1(\mathbb{R}^{2n+1}, \mathbb{R}), \xi^{\mathbb{R}^{2n+1}})$  est négatif. D'après le 2ème point du lemme 2.6 cela implique en notant  $\{f^t\}$  un chemin de fonctions génératrices quadratiques à l'infini pour  $\{\Lambda^t := \Psi'_{\phi^t}(\text{Im}(j^1 0))\}$  que  $\frac{d}{dt} f^t \geq 0$  ou encore que  $f^{t_1} \geq f^{t_2}$  si  $t_1 \geq t_2$ . Nous en déduisons donc que  $c(\phi^{t_1}) \geq c(\phi^{t_2})$ . Pour une isotopie qui n'est pas  $\mathcal{C}^1$ -petite il suffit de découper cette isotopie en suffisamment de morceaux pour que chaque morceau le soit et cela permet de déduire le même résultat. Exactement le même raisonnement s'applique pour démontrer le cas 1-périodique. Pour une preuve plus détaillée de la proposition 2.33 le lecteur pourra consulter [42] ou [8].

Les deux prochaines propositions assurent que le sélecteur de translation admet des propriétés d'inégalité triangulaire ainsi que d'invariance par conjugaison sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .

**Proposition 2.35.** *Pour tous éléments  $\phi$  et  $\psi$  appartenant à  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  nous avons :*

$$\lceil c(\phi\psi) \rceil \leq \lceil c(\phi) \rceil + \lceil c(\psi) \rceil .$$

*Démonstration.* En reprenant les notations que nous avons utilisées pour démontrer le 4ème point du théorème 2.32 remarquons que  $c(\psi) = c(\nu, \Lambda_\psi) = c(\nu, (\Psi_\phi)^{-1}(\Lambda_{\phi\circ\psi}))$ . Le lemme 2.21 nous permet alors d'affirmer que  $\lceil c(\psi) \rceil = \lceil c(\nu, \Lambda_{\phi\circ\psi} - \Psi_\phi(\mathbb{O}_{S^{2n} \times S^1} \times \{0\})) \rceil$ . Or nous avons grâce aux points 2 et 3 de la proposition 2.20 :

$$\begin{aligned} c(\nu, \Lambda_{\phi\circ\psi} - \Psi_\phi(\mathbb{O}_{S^{2n} \times S^1} \times \{0\})) &= c(\nu \cup 1, \Lambda_{\phi\circ\psi} - \Lambda_\phi) \geq c(\nu, \Lambda_{\phi\circ\psi}) + c(1, -\Lambda_\phi) \\ &= c(\phi\psi) - c(\nu, \Lambda_\phi) \\ &= c(\phi\psi) - c(\phi) . \end{aligned}$$

Nous avons donc bien  $\lceil c(\psi) \rceil \geq \lceil c(\phi\psi) - c(\phi) \rceil \geq \lceil c(\phi\psi) \rceil - \lceil c(\phi) \rceil$ .  $\square$

Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ , le spectre de  $\phi$  n'est pas stable par conjugaison (voir par exemple la remarque 2.31). Par contre pour tout  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$

$$\text{Spectre}(\phi) \cap \mathbb{Z} = \text{Spectre}(\psi\phi\psi^{-1}) \cap \mathbb{Z} . \quad (13)$$

Plus précisément nous avons le lemme suivant.

**Lemme 2.36.** Soient  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$  et  $k$  un entier. Un point  $p \in \mathbb{R}^{2n+1}$  est un point  $k$ -translaté de  $\phi$  si et seulement si  $\psi(p)$  est un point  $k$ -translaté de  $\psi\phi\psi^{-1}$  pour tout  $\psi$  dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$ .

*Démonstration.* Supposons que  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  soit un point  $k$ -translaté pour  $\phi$ , c'est-à-dire que  $\phi(x, y, z) = (x, y, z + k)$  et  $g(x, y, z) = 0$ , où  $g$  désigne le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à  $\alpha_{st}$ . Pour tout  $\psi$  contactomorphisme 1-périodique en notant  $f$  son facteur de conformalité par rapport à  $\alpha_{st}$  nous avons :

$$\psi\phi\psi^{-1}(\psi(p)) = \psi(\phi(x, y, z)) = \psi((x, y, z) + (0, 0, k)) = \psi(x, y, z) + (0, 0, k) .$$

De plus un calcul direct permet de voir que le facteur de conformalité de  $\psi\phi\psi^{-1}$  est donné par

$$h = f \circ \phi \circ \psi^{-1} + g \circ \psi^{-1} - f \circ \psi^{-1} .$$

Ainsi  $h(\psi(x, y, z)) = f(\phi(x, y, z)) + g(x, y, z) - f(x, y, z) = f((x, y, z) + (0, 0, k)) - f(x, y, z)$ , or comme  $\psi$  est 1-périodique dans la direction  $z$ ,  $f$  l'est également, donc  $h(\psi(p)) = 0$ .  $\square$

Cela nous permet d'avoir la proposition suivante.

**Proposition 2.37.** Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . Alors pour tout  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  nous avons :

$$[c(\phi)] = [c(\psi\phi\psi^{-1})] .$$

*Démonstration.* Affirmons dans un premier temps que si  $c(\phi)$  est un entier  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $c(\psi\phi\psi^{-1})$  est aussi égal à cet entier  $k$  pour tout  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ . De ce fait si  $c(\phi)$  n'est pas un entier supposons par l'absurde qu'il existe un élément  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  tel que  $[c(\psi\phi\psi^{-1})] \neq [c(\phi)]$ . Considérons alors  $\{\psi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  qui relie  $\psi$  à l'identité. Comme l'application  $t \mapsto c(\psi^t\phi(\psi^t)^{-1})$  est continue et qu'elle vaut  $c(\phi)$  en 0 et  $c(\psi\phi\psi^{-1})$  en 1, il existe un temps  $t \in ]0, 1]$  où elle vaut un entier. Ainsi d'après ce que nous affirmons elle doit être égale à cet entier pour tous les temps, en particulier quand  $t = 0$ , d'où la contradiction. Démontrons donc notre affirmation.

Supposons que  $c(\phi) = k \in \mathbb{Z}$ , cela veut dire que  $\phi$  a un point  $k$ -translaté qu'on note  $p$ . Ainsi d'après le lemme précédent  $\psi^t\phi(\psi^t)^{-1}$  a également un point  $k$ -translaté donné par  $\psi^t(p)$ , où  $\{\psi^t\}_{t \in [0,1]}$  désigne encore un chemin lisse dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  qui rejoint  $\psi$  à l'identité. On conclut alors de la même façon que dans le lemme [2.21](#).  $\square$

Nous déduisons donc la définition de la norme invariante par conjugaison introduite par S. Sandon dans [\[41\]](#).

**Définition 2.38** ([\[41\]](#)). L'application  $\nu_{San} : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ ,  $\phi \mapsto [c(\phi)] + [c(\phi^{-1})]$  est une norme invariante par conjugaison.

Dans la sous-section suivante nous introduisons la capacité de contact pour les domaines de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  que S. Sandon déduit du sélecteur de translation  $c : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Nous verrons comment elle l'utilise pour démontrer que la norme  $\nu_{San}$  est non bornée. Nous donnerons au chapitre [4](#) une démonstration plus directe de ce fait.

### 2.3.4 Capacité de contact sur $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$

Soit  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . Rappelons que nous notons  $\text{Cont}_0^c(U, \xi_{st})$  l'ensemble des contactomorphismes de  $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})$  qui peuvent être reliés à l'identité par des chemins lisses de contactomorphismes à support compact dans  $U$ . Nous pouvons alors associer à  $U$  les nombres suivants (éventuellement infinis) :

$$c(U) = \sup \{c(\phi) \mid \phi \in \text{Cont}_0^c(U, \xi_{st})\} \quad \text{et} \quad C(U) = [c(U)] .$$

**Proposition 2.39.** 1. Pour tout élément  $\phi$  de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  et pour tout domaine  $U$  dans  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  nous avons  $C(\phi(U)) = C(U)$ .

2. Pour tous domaines  $U_1 \subset U_2$  nous avons  $c(U_1) \leq c(U_2)$  et  $C(U_1) \leq C(U_2)$ .

La deuxième propriété est une conséquence directe de la définition et la première provient du fait que  $\lceil c(\phi) \rceil = \lceil c(\psi\phi\psi^{-1}) \rceil$  pour tout  $\phi$  et  $\psi$  dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .

La proposition suivante permet de faire un lien entre la capacité d'un domaine et la norme d'un contactomorphisme qui le déplace. C'est une inégalité de ce type que H. Hofer [30] utilise pour démontrer la non-dégénérescence de la norme de Hofer.

**Proposition 2.40** (Inégalité capacité-énergie [42]). Soit  $\psi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  et  $U$  un domaine de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  tel que  $\psi$  le déplace, c'est-à-dire que  $\psi(U) \cap U = \emptyset$ . Nous avons alors l'inégalité suivante :

$$C(U) \leq \nu_{San}(\psi) .$$

*Démonstration.* Soit  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  tel que le support de  $\phi^t$  soit inclus dans  $U$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . Notons  $\phi^1 = \phi$ . Affirmons que si  $c(\psi) = k$  est un entier alors  $c(\psi\phi^t) = k$  pour tout temps  $t$ . Supposons alors que  $c(\psi)$  n'est pas un entier et que  $\lceil c(\psi) \rceil \neq \lceil c(\psi\phi) \rceil$ . Comme l'application  $t \mapsto c(\psi\phi^t)$  est continue il existera un temps  $t_0$  où elle vaudra un entier. D'après notre affirmation elle sera alors toujours égal à cet entier, ce qui est une contradiction car au temps 0 nous l'avons supposé non entière. Démontrons donc notre affirmation.

Supposons que  $c(\psi) = k$  est un entier, cela implique que  $\tilde{\psi} \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-pér}}$  - son correspondant 1-périodique - a un point  $k$ -translaté, qui correspond donc à un point fixe  $x$  de  $\psi$ . Ainsi ce point fixe n'appartient pas à  $U$  car  $\psi$  déplace  $U$ . De ce fait pour tout temps  $t$  nous avons  $\phi^t(x) = x$  et  $g^t(x) = 0$  (où  $g^t$  désigne le facteur de conformalité de  $\phi^t$  par rapport à  $\alpha_{st}$ ) car  $\phi^t$  est à support dans  $U$ . Il en découle que  $x$  est un  $k$ -point translaté de  $\psi\phi^t$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . Un argument similaire à celui que nous avons utilisé dans la démonstration du lemme 2.21 permet alors de conclure que  $c(\psi\phi^t) = k$  pour tout temps  $t$ .  $\square$

De plus S. Sandon [42] montre en utilisant les résultats de [54] et L. Traynor [49] que  $C(\mathcal{B}^{2n}(r) \times S^1) = \lceil \pi r^2 \rceil$  pour tout  $r > 0$ , où  $\mathcal{B}^{2n}(r)$  désigne la boule unité ouverte standard de  $\mathbb{R}^{2n}$  de rayon  $r$  et centrée en 0. Comme pour tout  $r > 0$  il existe un contactomorphisme  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  qui déplace  $\mathcal{B}^{2n}(r) \times S^1$  elle en déduit que  $\nu_{San}$  est non bornée.

*Remarque 2.41.* 1. Cette proposition permet de plus de s'assurer que si  $U$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ , sa capacité  $C(U)$  est finie. En effet tout domaine borné est déplaçable par un contactomorphisme à support compact  $\psi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .

2. S. Sandon dans [42] démontre également que  $C(\mathcal{B}^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-1} \times S^1) = \lceil \pi r^2 \rceil$  pour tout  $r > 0$  en utilisant des résultats de C. Viterbo [54] et L. Traynor [49]. Cela lui permet alors de retrouver les résultats de *non-squeezing* de Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [19].

Cette construction de la norme ne peut pas se généraliser à une variété de contact quelconque. En effet nous avons exploité ici le fait que le graphe d'un contactomorphisme à support compact de l'espace euclidien peut être identifié à une legendrienne de l'espace des jets d'une variété compacte qui admet une fonction génératrice. Ceci n'est pas le cas en général. Dans le chapitre suivant nous verrons cependant comment V. Colin et S. Sandon [16] utilisent des points translatés particuliers de contactomorphismes pour construire une norme invariante par conjugaison sur le groupe de contactomorphismes d'une variété de contact quelconque. Il est intéressant de noter également que F. Zapolsky [55] utilise la technique des fonctions génératrices pour déduire une norme invariante par conjugaison non bornée sur  $\text{Cont}_0^c(T^*X \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda_X))$  lorsque  $X$  est une variété compacte. Nous n'étudierons pas la norme de F. Zapolsky dans cette thèse.

### 3 Différentes normes sur le groupe des contactomorphismes et son revêtement universel

Dans ce chapitre nous définissons la norme discriminante et la norme d'oscillation introduites par V. Colin et S. Sandon [16], la norme de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21] ainsi que la norme de E. Schelukhin [44]. Les normes discriminante, la norme d'oscillation et celle de Schelukhin auront en plus la propriété de provenir de fonctionnelles de longueur ce qui nous permettra de définir une notion de géodésique pour ces normes. Nous commençons ce chapitre en définissant les deux types de fonctionnelles de longueur qui permettent de définir ces normes.

#### 3.1 Normes provenant de fonctionnelles de longueur

Nous distinguerons deux types de normes qui proviennent de fonctionnelles de longueur. La norme de E. Schelukhin ainsi que la norme discriminante seront du premier type, alors que la norme d'oscillation du deuxième type. Dans son article [36] D. McDuff considère également ces deux types de fonctionnelles pour étudier des variantes de la métrique de Hofer.

##### 3.1.1 Le premier cas

Considérons  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable. Notons  $\mathcal{D}(M, \xi)$  l'ensemble des chemins lisses de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  commençant à l'identité et tels que  $\phi^t \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . Dans la suite nous écrirons uniquement  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  pour parler d'un chemin lisse de contactomorphismes et nous omettrons l'intervalle de temps  $[0, 1]$ . Nous disons qu'une application  $\mathcal{L} : \mathcal{D}(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$  est une fonctionnelle de longueur si :

1.  $\mathcal{L}(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}(\{\phi^{a(t)}\})$  pour tout chemin lisse  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  et toute fonction lisse, bijective et croissante  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .
2.  $\mathcal{L}(\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\}) = \mathcal{L}(\{\phi^t\}) + \mathcal{L}(\{\varphi^t\})$  pour tout couple de chemins lisses  $\{\phi^t\}, \{\varphi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  où  $\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\}$  désigne la concaténation des chemins que nous avons définie dans le chapitre 0.
3.  $\mathcal{L}(\{\phi^t\}) = 0$  si et seulement si  $\{\phi^t\}$  est le chemin constant égal à l'identité.
4.  $\mathcal{L}(\{\phi^t\}^{-1}) = \mathcal{L}(\{\phi^t\})$  où  $\{\phi^t\}^{-1}$  désigne le chemin  $\{\phi^{1-t}(\phi^1)^{-1}\}$ .

Le premier type de pseudo-norme  $\tilde{\nu}$  et  $\nu$  sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  que nous étudierons seront liées à ces fonctionnelles de longueur de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}([\{\phi^t\}]) &= \inf \left\{ \mathcal{L}(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\}, \text{ pour tout } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \\ \nu(\phi) &= \inf \left\{ \mathcal{L}(\{\phi^t\}) \mid \{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi), \phi^1 = \phi \right\}, \text{ pour tout } \phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi). \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera tout de suite que des propriétés de la fonctionnelle de longueur, les applications  $\tilde{\nu}$  et  $\nu$  sont bien des pseudo-normes dès qu'elles sont à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . En effet de la propriété 2 nous déduisons que les applications  $\tilde{\nu}$  et  $\nu$  vérifient l'inégalité triangulaire et de la propriété 4 que la norme d'un élément vaut la norme de son inverse. Ainsi nous aurons la notion suivante de géodésique.

**Définition 3.1.** Nous disons qu'un chemin lisse  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  est une géodésique :

1. pour  $\tilde{\nu}$  si  $\tilde{\nu}([\{\phi^t\}]) = \mathcal{L}(\{\phi^t\})$
2. pour  $\nu$  si  $\nu(\phi^1) = \mathcal{L}(\{\phi^t\})$ .

*Remarque 3.2.* 1. Dans le cas de la métrique discriminante la fonctionnelle de longueur sera définie uniquement sur un sous-ensemble  $X$  de  $\mathcal{D}(M, \xi)$ . Bien évidemment l'application  $\pi : X \rightarrow \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  qui à  $\{\phi^t\}$  associe  $[\{\phi^t\}]$  sera surjective.

2. Souvent dans la suite de ce travail nous fixerons une forme de contact  $\alpha$  pour la variété de contact  $(M, \xi)$ . Dès lors nous aurons une bijection entre l'ensemble des chemins lisses de contactomorphismes à support compact commençant à l'identité et l'ensemble des fonctions hamiltoniennes lisses à support compact dépendantes du temps. Il sera souvent plus commode de travailler avec la fonctionnelle de longueur associée à la norme de E. Schelukhin sur ce deuxième ensemble.

### 3.1.2 Le deuxième cas

La norme d'oscillation proviendra de deux "semi-normes" (en reprenant la terminologie de D. McDuff [36]). Ces semi-normes seront définies à partir de fonctionnelles  $\mathcal{L}_\pm : \mathcal{D}(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$  vérifiant les propriétés suivantes. Pour tout  $\{\phi^t\}, \{\varphi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$

1.  $\mathcal{L}_\pm(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_\pm(\{\phi^{a(t)}\})$  pour toute fonction lisse, bijective et croissante  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ .
2.  $\mathcal{L}_\pm(\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\}) = \mathcal{L}_\pm(\{\phi^t\}) + \mathcal{L}_\pm(\{\varphi^t\})$ .
3.  $\mathcal{L}_+(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_-(\{\phi^t\}^{-1})$ . De plus  $\mathcal{L}_+(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_-(\{\phi^t\}) = 0$  si et seulement si  $\{\phi^t\}$  est le chemin constant égale à l'identité.

Ces fonctionnelles permettent de construire un couple de semi-normes :

$$\tilde{\nu}_\pm([\{\phi^t\}]) = \pm \inf \left\{ \mathcal{L}_\pm(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\}, \text{ pour tout } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi).$$

Plus précisément pour tous les éléments  $[\{\phi^t\}], [\{\varphi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons :

1.  $\tilde{\nu}_-$  est à valeurs négatives et  $\tilde{\nu}_+$  est à valeurs positives
2.  $\tilde{\nu}_-([\{\phi^t\}^{-1}]) = -\tilde{\nu}_+([\{\phi^t\}])$
3.  $\tilde{\nu}_+([\{\phi^t\}] \cdot [\{\psi^t\}]) \leq \tilde{\nu}_+([\{\phi^t\}]) + \tilde{\nu}_+([\{\psi^t\}])$   
 $\tilde{\nu}_-([\{\phi^t\}] \cdot [\{\psi^t\}]) \geq \tilde{\nu}_-([\{\phi^t\}]) + \tilde{\nu}_-([\{\psi^t\}])$ .

Ainsi dès que les applications  $\tilde{\nu}_+$  et  $-\tilde{\nu}_-$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  nous déduisons que les applications  $\tilde{\nu}$  et  $\nu$  définies par

$$\tilde{\nu}([\{\phi\}]) = \max \left\{ \tilde{\nu}_+([\{\phi^t\}]), -\tilde{\nu}_-([\{\phi^t\}]) \right\} \quad \text{et} \quad \nu(\phi) = \inf \left\{ \tilde{\nu}([\{\varphi^t\}]) \mid \varphi^1 = \phi \right\},$$

sont des pseudo-normes sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$ . Remarquons de plus que  $\mathcal{L} := \max\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$  est une fonctionnelle de longueur. Nous définissons alors les géodésiques de la manière suivante.

**Définition 3.3.** Nous disons qu'un chemin lisse  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  est une géodésique :

1. pour  $\tilde{\nu}$  si  $\tilde{\nu}([\{\phi^t\}]) = \mathcal{L}(\{\phi^t\})$
2. pour  $\nu$  si  $\nu(\phi^1) = \mathcal{L}(\{\phi^t\})$ .

*Remarque 3.4.* 1. Tout comme pour la norme discriminante la fonctionnelle de longueur pour la norme d'oscillation sera définie sur un sous-ensemble de  $\mathcal{D}(M, \xi)$ .

2. Remarquons que  $\tilde{\nu}([\{\phi^t\}]) \leq \inf\{\mathcal{L}(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}]\}$  pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ , mais qu' *a priori* il n'y a pas égalité entre ces deux valeurs.
3. L'application  $\tilde{\nu}_\Sigma := \tilde{\nu}_+ - \tilde{\nu}_-$  est une norme équivalente à  $\tilde{\nu}$ . Dans le cas de  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  en définissant  $\nu_+(\phi) := \inf \tilde{\nu}_+([\{\phi^t\}])$  et  $\nu_-(\phi) := \sup \tilde{\nu}_-([\{\phi^t\}])$ , il est clair que les pseudo-normes  $\nu_\sigma := \nu_+ - \nu_-$  et  $\nu_m := \max\{\nu_+, -\nu_-\}$  sont dominées par  $\nu$  mais l'inverse n'est *a priori* pas vrai.



### 3.2 Norme discriminante

Dans cette section nous définissons la norme discriminante qui est une norme invariante par conjugaison. Nous traiterons d'abord le cas où la variété de contact est compacte puis celui où elle ne l'est pas. Avant cela rappelons la définition d'un point discriminant.

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact (compacte ou non). Considérons sa symplectisation

$$\mathcal{S}_\xi(M) := \bigcup_{x \in M} \{\mu \in T_x^*M \mid \text{Ker}(\mu) = \xi_x\} \text{ munie de sa forme symplectique canonique } \omega_\xi = d\lambda_\xi .$$

Pour tout contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  nous noterons  $\psi \in \text{Ham}^{\mathbb{R}^*}(\mathcal{S}_\xi(M), d\lambda_\xi)$  son relevé à la symplectisation équivariant par rapport à l'action de  $\mathbb{R}^*$ . Pour plus de détails sur ces constructions le lecteur pourra se rendre au chapitre [0](#). En notant  $\pi_\xi : \mathcal{S}_\xi(M) \rightarrow M$  la projection canonique nous avons la définition suivante.

**Définition 3.5** (Point discriminant). Soit  $\phi$  un contactomorphisme de  $(M, \xi)$ . Nous disons que  $x \in M$  est un point discriminant de  $\phi$  si tout  $p \in \pi_\xi^{-1}\{x\}$  est un point fixe de  $\psi \in \text{Ham}^{\mathbb{R}^*}(\mathcal{S}_\xi(M), d\lambda_\xi)$ , où  $\psi$  désigne le relevé de  $\phi$  à la symplectisation.

En un certain sens que nous rendrons plus précis la longueur discriminante d'un chemin sera égale au nombre minimum de fois qu'il faut découper ce chemin pour que chaque morceau n'ait pas de points discriminants.

*Remarque 3.6.* Si  $(M, \xi)$  désigne la variété de contact  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \text{Ker}(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i))$ , les points discriminants d'un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  sont ses points  $\mathbb{Z}$ -translatés.

#### 3.2.1 Le cas où $(M, \xi)$ est compacte

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact compacte telle que la distribution  $\xi$  soit co-orientable. Pour tous réels  $a < b$  nous disons qu'un chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [a, b]}$  est propre si

$$\text{Card} \left\{ s \in [a, b] \mid \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi^t = 0 \right\} < +\infty .$$

Désignons par  $\mathcal{F}(M, \xi)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}^\infty([0, 1], \text{Cont}_0(M, \xi))$  constitué de chemins propres.

**Définition 3.7** (Longueur discriminante). Pour tout  $\{\phi^t\} \in \mathcal{F}(M, \xi)$  nous notons  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\})$  sa longueur discriminante que nous définissons comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) &:= \inf \{ N \in \mathbb{N}^* \mid \text{il existe } 0 = t_0 < \dots < t_N = 1, \\ &\quad \text{tels que pour tout } (s, t) \in [t_i, t_{i+1}], s \neq t, \text{ et pour tout } i \in [0; N-1], \\ &\quad (\phi^s)^{-1} \phi^t \text{ n'a pas de point discriminant} \} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Par définition la longueur du chemin constant sera égale à 0 et  $\inf \emptyset = +\infty$ .

*Remarque 3.8.* De plus si  $\{\phi^t\}_{t \in [a, b]}$  est un chemin lisse et propre indexé par un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  différent de  $[0, 1]$ , nous définissons la longueur discriminante de ce chemin comme celle de  $\{\varphi^t\}_{t \in [0, 1]}$  où  $\varphi^t = \phi^{t(b-a)+a}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Lemme 3.9.** Notons  $\mathcal{F}_0(M, \xi)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{F}(M, \xi)$  constitué des chemins propres commençant à l'identité. La fonctionnelle  $\mathcal{L}_d : \mathcal{F}_0(M, \xi) \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonctionnelle de longueur. De plus elle est invariante par conjugaison, plus précisément, pour tout chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [0, 1]}$  propre par morceaux et  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  nous avons :

$$\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_d(\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}) .$$

Ayant choisi des chemins propres, il est facile de voir que toute reparamétrisation par une application bijective ne changera pas la longueur du chemin. Le lecteur pourra vérifier directement que cette fonctionnelle a bien la propriété de l'inégalité triangulaire. Le fait que la longueur d'un chemin  $\{\phi^t\}$  et que celle de son inverse  $\{\phi^t\}^{-1} := \{\phi^{1-t}(\phi^1)^{-1}\}$  soient égales, ainsi que le fait que la longueur soit invariante par conjugaison vient du lemme suivant.

**Lemme 3.10.** *Soit  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  un contactomorphisme. Un point  $x \in M$  est un point discriminant de  $\phi$  si et seulement si  $x$  est un point discriminant de  $\phi^{-1}$ . De même  $x \in M$  est un point discriminant de  $\phi$  si et seulement si  $\varphi(x)$  est un point discriminant de  $\varphi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$  pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ .*

*Démonstration.* Cela vient du fait que si  $\psi$  et  $\eta$  sont les symplectomorphismes hamiltoniens  $\mathbb{R}^*$ -équivariants correspondant respectivement à  $\phi$  et  $\varphi$  alors  $\eta \circ \psi \circ \eta^{-1}$  et  $\psi^{-1}$  sont les symplectomorphismes hamiltoniens  $\mathbb{R}^*$ -équivariants correspondant à  $\varphi \circ \phi \circ \varphi^{-1}$  et  $\phi^{-1}$  respectivement.  $\square$

Avant de pouvoir définir la norme discriminante qui provient de cette fonctionnelle de longueur, il reste à démontrer que pour toute classe d'équivalence de chemins lisses de contactomorphismes, il existe toujours un représentant qui a une longueur discriminante finie. C'est ce que nous écrivons plus précisément dans le lemme suivant.

**Lemme 3.11.** *Soit  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes partant de l'identité. Il existe toujours un chemin  $\{\varphi^t\}$  qui représente le même élément que  $\{\phi^t\}$  dans  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  tel que  $\mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}_{t \in [0,1]}) < +\infty$ .*

Le point clé pour démontrer ce lemme sera donné par le lemme suivant. Fixons une forme de contact  $\alpha$  pour la distribution  $\xi$ .

**Lemme 3.12.** *Si  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes strictement positif (respectivement strictement négatif), c'est-à-dire que  $\alpha_{\phi^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(x)\right) > 0$  (resp.  $\alpha_{\phi^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(x)\right) < 0$ ) pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $x \in M$ , alors  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) < +\infty$ .*

*Démonstration.* Munissons  $M$  d'une métrique riemannienne  $g$ . Comme le champs de Reeb  $R_\alpha$  associé à  $\alpha$  est un champs de vecteurs lisse qui ne s'annule jamais, le théorème du redressement du flot permet d'affirmer que pour tout  $x \in M$  il existe une hypersurface  $S_x \subset M$  contenant  $x$  et difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n}$  (où  $2n + 1$  est la dimension de  $M$ ) et un intervalle ouvert  $I_x \subset \mathbb{R}$  contenant 0 tels que l'application

$$\begin{aligned} I_x \times S_x &\hookrightarrow M \\ (t, p) &\mapsto \phi_{R_\alpha}^t(p) \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme sur son image. Notons  $\mathcal{V}_x$  cette image et  $\Phi_x : \mathcal{V}_x \rightarrow I_x \times S_x$  l'application réciproque. Comme  $M$  est compacte, nous affirmons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in M$  il existe  $x' \in M$  tel que la boule de centre  $x$  et de rayon  $\varepsilon$ , que nous notons  $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ , soit incluse dans  $\mathcal{V}_{x'}$ . Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Ainsi pour tout  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  il existe  $p_k \in M$  tel que la boule  $\mathcal{B}\left(p_k, \frac{1}{k}\right)$  ne soit incluse dans aucun des ouverts  $\mathcal{V}_x$  avec  $x \in M$ ; en d'autres mots  $\mathcal{B}\left(p_k, \frac{1}{k}\right) \cap \mathcal{V}_x \neq \mathcal{B}\left(p_k, \frac{1}{k}\right)$  pour tout  $x \in M$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Or comme  $M$  est compacte, il existe une suite extraite de  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$  que nous notons  $(p_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}_{>0}}$  telle que cette dernière converge vers un point  $x_\infty \in \mathcal{V}_{x_0}$  pour un certain  $x_0 \in M$ . Donc pour  $k$  suffisamment grand  $\mathcal{B}\left(p_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)}\right)$  sera incluse dans  $\mathcal{V}_{x_0}$ . D'où la contradiction.

Par ailleurs la fonction  $\phi : [0, 1] \times M \rightarrow M$ ,  $(t, x) \mapsto \phi^t(x)$  est une fonction lisse. Comme  $[0, 1] \times M$  est compact, le théorème de Heine assure que cette application est uniformément continue, et donc qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\bar{d}((t, x), (s, y)) < \delta \text{ implique que } d\left(\phi^t(x), \phi^s(y)\right) < \varepsilon,$$

où  $d$  désigne la métrique provenant de la métrique riemannienne  $g$  et où  $\bar{d}$  désigne la métrique produit de  $[0, 1] \times M$ . En particulier, d'après la discussion précédente pour tout  $(T, x) \in [0, 1] \times M$ , il existe  $x' \in M$  tel que

$$\bigcup_{t \in ]-\delta/2, \delta/2[} \{ \phi^{T+t}(x) \} \subset \mathcal{B}(\phi^T(x), \varepsilon) \subset \mathcal{V}_{x'} .$$

En notant alors  $pr_{x'} : I_{x'} \times S_{x'} \rightarrow I_{x'}$  la projection canonique nous avons :

$$\frac{d}{dt} pr_{x'} \left( \Phi_{x'} \left( \phi^{T+t}(x) \right) \right) = \alpha_{\phi^{T+t}(x)} \left( \frac{d}{dt} \phi^{T+t}(x) \right) > 0 \text{ pour tout } t \in ]-\delta/2, \delta/2[.$$

Ainsi la fonction  $] - \delta/2, \delta/2[ \mapsto I_{x'}, t \mapsto pr_{x'} \left( \Phi_{x'} \left( \phi^{T+t}(x) \right) \right)$  est strictement croissante, et donc  $(\phi^s)^{-1} \phi^t(x) \neq x$  pour tout  $s, t \in ]T - \delta/2, T + \delta/2[$ . En particulier  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) \leq \left[ \frac{1}{\delta} \right]$ . La démonstration est exactement la même si nous considérons que  $\{\phi^t\}$  est strictement négatif : au lieu d'être strictement croissante la dernière application construite est strictement décroissante et nous concluons de la même façon.  $\square$

Pour démontrer le lemme [3.11](#) il suffit de voir que pour tout chemin lisse  $\{\phi^t\}$  il existe  $N$  suffisamment grand tel que  $\{\phi_{R_\alpha}^{Nt} \circ \phi^t\}$  est strictement positif. En remarquant alors que  $[\{\phi^t\}] = [\{\phi_{R_\alpha}^{Nt}\}^{-1}] [\{\phi_{R_\alpha}^{Nt} \circ \phi^t\}]$  nous concluons en utilisant le lemme [3.12](#).

**Définition 3.13.** Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact compacte co-orientable. On définit la norme discriminante sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  de la manière suivante :

$$\widetilde{\nu}_d : \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi) \rightarrow \mathbb{N}, \quad [\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}] \mapsto \min \left\{ \mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\} .$$

De même on définit la norme discriminante sur  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  de la manière suivante :

$$\nu_d : \text{Cont}_0(M, \xi) \rightarrow \mathbb{N}, \quad \phi \mapsto \min \left\{ \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) \mid \{\phi^t\} \text{ tel que } \phi^0 = \text{Id} \text{ et } \phi^1 = \phi \right\} .$$

Il est clair d'après le lemme [3.11](#) que ces applications sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et donc qu'elle sont bien des normes. De plus le lemme [3.10](#) permet d'affirmer que ce sont bien des normes invariantes par conjugaison. Remarquons que pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$ ,  $\nu_d(\phi) = \min \{ \widetilde{\nu}_d([\{\phi^t\}]) \mid \phi^1 = \phi \}$ .

De manière générique un contactomorphisme n'a pas de points discriminants (sinon la norme serait infinie) alors qu'une conjecture de S. Sandon [\[43\]](#) - conjecture toujours vérifiée dans le cas  $\mathcal{C}^0$ -petit - stipule qu'il a toujours des points translatsés (voir définition [2.27](#)). Cependant les points translatsés ne sont pas invariants par conjugaison et donc ne permettent pas de déduire directement des invariants de contact alors que les points discriminants le sont. Ainsi un des intérêts d'étudier la norme discriminante est d'utiliser l'existence des points translatsés de contactomorphismes pour détecter des points discriminants de *chemins* de contactomorphismes et d'en déduire des invariants de contact. Une interprétation plus géométrique de ce problème est faite dans le prochain paragraphe.

Un point discriminant pour un contactomorphisme peut s'interpréter comme l'intersection de deux legendriennes. Rappelons que si  $(M, \xi)$  est une variété de contact co-orientable et que nous choisissons  $\alpha$  une forme de contact pour  $\xi$  alors pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  nous appelons le graphe de  $\phi$  l'ensemble suivant :

$$\text{gr}_\alpha(\phi) := \{ (x, \phi(x), g(x)) \mid x \in M \} \subset M \times M \times \mathbb{R}, \text{ où } \phi^* \alpha = e^g \alpha .$$

De plus nous avons vu à la remarque [2.23](#) que la variété  $(M \times M \times \mathbb{R}, \text{Ker}(e^\theta \alpha^1 - \alpha^2))$  est de contact - où  $\alpha^i = pr_i^* \alpha$  avec  $pr_i(q_1, q_2, \theta) = q_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$  - et que  $\text{gr}_\alpha(\phi)$  en est une

sous-variété legendrienne. Il y a alors une bijection entre l'ensemble des points discriminants de  $\phi$  et l'ensemble des points d'intersections entre  $\text{gr}_\alpha(\phi)$  et  $\text{gr}_\alpha(\text{Id})$  :

$$\{x \in M \text{ point discriminant de } \phi\} \leftrightarrow \text{gr}_\alpha(\phi) \cap \text{gr}_\alpha(\text{Id}) .$$

Nous pouvons de cette manière définir la longueur discriminante comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) = \min\{N \in \mathbb{N}_{>0} \mid & \text{il existe } 0 = t_0 < \dots < t_N = 1, \\ & \text{tel que pour tout } s, t \in [t_i, t_{i+1}], s \neq t \text{ et tout } i \text{ dans } [0; N-1] \cap \mathbb{N}, \\ & \text{gr}_\alpha(\phi^s) \cap \text{gr}_\alpha(\phi^t) = \emptyset\} \in \mathbb{N}_{>0} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Ainsi le fait que nous n'ayons pas de points discriminants pour un contactomorphisme de manière générique mais que nous ne pouvons pas en dire de même pour des chemins de contactomorphismes provient d'un critère de dimension.

### 3.2.2 Le cas où $(M, \xi)$ est non compacte

Considérons maintenant  $(M, \xi)$  une variété non compacte de contact dont la distribution de contact est co-orientable. Le relevé à la symplectisation  $\psi \in \text{Ham}^{\mathbb{R}^*}(\mathcal{S}_\xi(M), d\lambda_\xi)$  de tout contactomorphisme à support compact  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  aura toujours des points fixes. En effet pour tout  $x$  en dehors du support de  $\phi$ , tout point de la fibre  $p \in \pi_\xi^{-1}\{x\}$  au-dessus de  $x$  sera un point fixe de  $\psi$ . Ainsi si nous reprenons la même définition de longueur discriminante dans le cas non compact, la longueur de tout chemin non constant serait infinie. Pour y remédier nous nous intéresserons uniquement à l'intérieur du support des chemins. Rappelons que si  $\{\phi^t\}_{t \in [a,b]}$  désigne un chemin lisse de contactomorphismes, avec  $a$  et  $b$  des réels, nous appelons le support de  $\{\phi^t\}$  l'ensemble suivant  $\text{Supp}(\{\phi^t\}) := \bigcup_{t \in [a,b]} \text{Supp}(\phi^t)$ . Nous disons alors qu'un chemin lisse

de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [a,b]}$  est propre sur l'intérieur de son support si

$$\text{Card} \left\{ s \in [a, b] \mid \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} \phi^t \Big|_{\text{Supp}(\{\phi^t\}_{t \in [a,b]})} = 0 \right\} < +\infty .$$

De même, nous disons qu'un chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est propre par morceaux sur l'intérieur de son support s'il existe un nombre fini  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  de réels  $0 = a_0 < \dots < a_N = 1$  tel que  $\{\phi^t\}_{t \in [a_i, a_{i+1}]}$  soit propre sur l'intérieur de son support pour tout  $i \in [0, N-1] \cap \mathbb{N}$ . Nous noterons l'ensemble de ces chemins  $\mathcal{F}^c(M, \xi)$ .

**Définition 3.14** (Longueur discriminante). Soit  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]} \in \mathcal{F}^c(M, \xi)$ . Nous notons encore  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\})$  sa longueur discriminante et nous la définissons comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) := \inf\{N \in \mathbb{N}^* \mid & \text{il existe } 0 = t_0 < \dots < t_N = 1, \text{ tel que pour tout } i \in [0, N-1] \cap \mathbb{N}, \\ & \{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \text{ est propre sur l'intérieur de son support} \\ & \text{et pour tout } (s, t) \in [t_i, t_{i+1}], s \neq t, \\ & (\phi^s)^{-1} \phi^t \text{ n'a pas de point discriminant dans } \overset{\circ}{\text{Supp}}(\{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]})\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} . \end{aligned}$$

Par définition nous disons que la longueur du chemin constant est nulle.

Pour les mêmes raisons que dans le cas compact la longueur discriminante est une fonctionnelle de longueur invariante par conjugaison (voir le lemme [3.9](#)).

**Définition 3.15.** Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact co-orientable et non compacte. Nous définissons la norme discriminante sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  de la manière suivante :

$$\widetilde{\nu}_d(\{[\phi^t]\}) := \min \left\{ \mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\} \text{ pour tout } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) .$$

De même nous la définissons sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  comme suit :

$$\nu_d(\phi) := \min \left\{ \mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}) \mid \varphi^0 = \text{Id} \text{ et } \varphi^1 = \phi \right\} \text{ pour tout } \phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi) .$$

Comme nous nous intéressons aux contactomorphismes à support compact, nous pouvons à nouveau utiliser les lemmes [3.11](#) et [3.12](#) pour déduire que les applications  $\widetilde{\nu}_d$  et  $\nu_d$  sont bien définies à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . De plus le lemme [3.10](#) s'applique exactement de la même façon dans le cas non compact, et permet donc de conclure que ce sont bien des normes invariantes par conjugaison.

Un point de vue naturel à adopter pour définir la norme discriminante, que ce soit dans le cas compact ou non compact, est de la voir comme une norme de mots. En effet soient les sous-ensembles de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  suivants :

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_d &:= \left\{ [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \mid \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}) = 1 \right\} \text{ et} \\ S_d &:= \left\{ \phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi) \mid \text{il existe } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{S}_d \text{ tel que } \phi^1 = \phi \right\} .\end{aligned}$$

**Lemme 3.16.** *L'ensemble  $\widetilde{S}_d$  vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $\widetilde{S}_d$  est stable par passage à l'inverse, c'est-à-dire que pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{S}_d$  son inverse  $[\{\phi^t\}]^{-1} \in \widetilde{S}_d$ .
2.  $\widetilde{S}_d$  est stable par conjugaison, c'est-à-dire que pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$  et  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{S}_d$ , nous avons  $[\{\phi \circ \phi^t \circ \phi^{-1}\}] \in \widetilde{S}_d$ .
3.  $\widetilde{S}_d$  est un sous-ensemble générateur de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ .

De plus la norme de mots associée à  $\widetilde{S}_d$  est la norme discriminante  $\widetilde{\nu}_d$ .

*Démonstration.* Les points 1 et 2 sont encore une fois une conséquence directe du lemme [3.10](#). Prouvons alors le point 3 et le fait que la norme des mots associée à  $\widetilde{S}_d$  correspond à la norme discriminante. Soit  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  tel que  $\widetilde{\nu}_d([\{\phi^t\}]) = m$ . Par définition de la norme discriminante, il existe un chemin lisse  $\{\varphi^t\}$  commençant à l'identité tel que  $[\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}]$  et  $\mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}) = m$ . Par définition de la longueur discriminante, cela veut dire qu'il existe  $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$  tel que  $\{\varphi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]}$  soit de longueur discriminante 1 pour tout  $i \in [0, m-1] \cap \mathbb{N}$ . De ce fait, le chemin  $\{\varphi^t \circ (\varphi^{t_i})^{-1}\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]}$  est encore de longueur discriminante 1 et de plus commence à l'identité pour tout  $i \in [0, m-1] \cap \mathbb{N}$ . Enfin nous laissons le lecteur vérifier que  $[\{\phi^t\}] = \prod_{i=0}^{m-1} [\{\varphi^t \circ (\varphi^{t_i})^{-1}\}_{t \in [t_i, t_{i+1}]}]$ . Cela prouve donc bien le troisième point du lemme, et le fait que la norme de mots associée  $\nu_{\widetilde{S}_d}([\{\phi^t\}]) \leq m = \widetilde{\nu}_d([\{\phi^t\}])$ . D'autre part, notons  $m'$  la norme de mots associée à  $\widetilde{S}_d$  de  $[\{\phi^t\}]$ , i.e.  $\nu_{\widetilde{S}_d}([\{\phi^t\}]) = m'$ . Cela implique qu'il existe  $m'$  chemins lisses  $(\{\phi_i^t\})_{i \in [1, m'] \cap \mathbb{N}}$  partant de l'identité tel que  $\mathcal{L}_d(\{\phi_i^t\}) = 1$  pour tout  $i \in [1, m']$  et tel que le produit  $\prod_{i=1}^m [\{\phi_i^t\}] = [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Considérons alors le chemin lisse  $\{\varphi^{t_i}\} := \prod_{i=1}^{m'} \{\phi_i^t\}$  correspondant à la concaténation des chemins que nous avons définie au chapitre [0](#). Il est clair que  $\mathcal{L}_d(\{\varphi^{t_i}\}) \leq m'$  et que  $[\{\phi^t\}] = [\{\varphi^{t_i}\}]$ . Ainsi  $\nu_d([\{\phi^t\}]) \leq m' = \nu_{\widetilde{S}_d}([\{\phi^t\}])$ . En combinant avec l'inégalité précédente, nous en déduisons l'égalité voulue.  $\square$

### 3.3 La norme d'oscillation

La métrique d'oscillation est une variante de la métrique discriminante. Elle fait également intervenir dans sa définition la notion de relation d'ordre d'Eliashberg et Polterovich que nous avons définie au chapitre [1](#). Rappelons qu'un chemin lisse  $\{\phi^t\}_{t \in ]a, b[}$  de contactomorphismes d'une variété de contact co-orientée  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est dit strictement positif (respectivement négatif) si  $\alpha_{\phi^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(x)\right) > 0$  (respectivement  $\alpha_{\phi^t(x)}\left(\frac{d}{dt}\phi^t(x)\right) < 0$ ) pour tout temps  $t \in ]a, b[ \subset \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in M$ . Nous définirons tout d'abord la norme d'oscillation dans le cas où la variété de contact  $(M, \xi)$  est compacte puis dans le cas où elle ne l'est pas.

### 3.3.1 Le cas où $(M, \xi)$ est compacte

**Définition 3.17.** Soit  $\{\phi^t\} \in \mathcal{F}(M, \xi)$ , nous notons  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}(\{\phi^t\})$  les fonctionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^{osc}(\{\phi^t\}) &:= \inf\{N \in \mathbb{N}^* \mid \text{il existe } K \in \mathbb{N}^*, K \geq N, \text{ et } 0 = t_0 < \dots < t_K = 1, \\ &\quad \text{Card}\{i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N} \mid \{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[} \text{ est strictement positif}\} = N \\ &\quad \text{Card}\{i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N} \mid \{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[} \text{ est strictement négatif}\} = K - N \\ &\quad \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[}) = 1, \text{ pour tout } i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_-^{osc}(\{\phi^t\}) &:= \inf\{N \in \mathbb{N}^* \mid \text{il existe } K \in \mathbb{N}^*, K \geq N, \text{ et } 0 = t_0 < \dots < t_K = 1, \\ &\quad \text{Card}\{i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N} \mid \{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[} \text{ est strictement positif}\} = K - N \\ &\quad \text{Card}\{i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N} \mid \{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[} \text{ est strictement négatif}\} = N \\ &\quad \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}_{t \in [t_i, t_{i+1}[}) = 1, \text{ pour tout } i \in [0, K-1] \cap \mathbb{N}\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Par définition si  $\{\phi^t\}$  désigne un chemin constant alors  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}(\{\phi^t\}) = 0$ .

Les fonctionnelles  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}$  vérifient les propriétés des fonctionnelles  $\mathcal{L}_{\pm}$  définies au début de la sous-section [3.1.2](#), ainsi par les mêmes arguments que précédemment (voir lemme [3.9](#)) le lecteur pourra vérifier que la fonctionnelle  $\mathcal{L}_{osc} := \max\{\mathcal{L}_+^{osc}, \mathcal{L}_-^{osc}\}$  est une fonctionnelle de longueur invariante par conjugaison sur  $\mathcal{F}_0(M, \xi)$ .

Il est clair également d'après la partie précédente que pour tout chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  commençant à l'identité, il existe des chemins  $\{\varphi_{\pm}^t\}$  qui sont dans la même classe et tels que  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}(\{\varphi_{\pm}^t\}) < +\infty$ . Ainsi les semi-normes suivantes sont bien définies

$$\widetilde{\nu}_{\pm}^{osc}([\{\phi^t\}]) := \pm \inf \left\{ \mathcal{L}_{\pm}^{osc}(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\}, \text{ pour tout } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi).$$

Enfin nous définissons la pseudo-norme d'oscillation sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0(M, \xi)$  comme

$$\widetilde{\nu}_{osc} := \max \left\{ \widetilde{\nu}_+^{osc}, -\widetilde{\nu}_-^{osc} \right\} \text{ et } \nu_{osc}(\phi) = \min \left\{ \widetilde{\nu}_{osc}([\{\phi^t\}]) \mid [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi), \phi^1 = \phi \right\}.$$

**Proposition 3.18.** *Les pseudo-normes  $\widetilde{\nu}_{osc}$  et  $\nu_{osc}$  sont invariantes par conjugaison. De plus  $\widetilde{\nu}_{osc}$  est non dégénérée si et seulement si  $(M, \xi)$  est ordonnable. Dans ce cas  $(\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi), \succeq, \widetilde{\nu}_{osc})$  est un espace métrique ordonné.*

*Démonstration.* Le fait que ce soient des pseudo-normes invariantes par conjugaison provient directement des propriétés des fonctionnelles  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}$ .

Montrons que  $\widetilde{\nu}_{osc}$  est non dégénérée si et seulement si  $(M, \xi)$  est ordonnable. Supposons que  $[\{\phi^t\}]$  soit un élément tel que  $\widetilde{\nu}_{osc}([\{\phi^t\}]) = 0$ . Cela implique que  $\widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}]) = \widetilde{\nu}_-^{osc}([\{\phi^t\}]) = 0$  et donc que  $\text{Id} \succeq [\{\phi^t\}] \succeq \text{Id}$ . Lorsque  $(M, \xi)$  est ordonnable cela implique que  $[\{\phi^t\}] = \text{Id}$  et lorsque  $(M, \xi)$  ne l'est pas, il existe des éléments  $[\{\phi^t\}] \neq \text{Id}$  ayant cette propriété. D'où l'affirmation.

Montrons que si  $[\{\phi_1^t\}] \succeq [\{\phi_2^t\}] \succeq \text{Id}$  alors  $\widetilde{\nu}_{osc}([\{\phi_1^t\}]) \geq \widetilde{\nu}_{osc}([\{\phi_2^t\}])$ . Comme ce sont des éléments positifs leur norme  $\widetilde{\nu}_{osc}$  est donnée par  $\nu_+^{osc}$ . Soit alors  $\{\varphi_1^t\}$  un chemin lisse tel que  $[\{\varphi_1^t\}] = [\{\phi_1^t\}]$  et  $\mathcal{L}_+(\{\varphi_1^t\}) = \nu_+^{osc}([\{\phi_1^t\}])$ . Dans ce cas  $\varphi_2^t := \{\varphi_1^t\} \cdot \{(\varphi_1^t)^{-1} \circ \phi_2^t\}$  est un représentant de  $[\{\phi_2^t\}]$  et nous avons par l'inégalité triangulaire

$$\widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi_2^t\}]) \leq \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\varphi_1^t\}]) + \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{(\varphi_1^t)^{-1} \circ \phi_2^t\}]) = \nu_+^{osc}([\{\phi_1^t\}]) + \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{(\varphi_1^t)^{-1} \circ \phi_2^t\}]).$$

De plus le dernier terme de cette somme est nul car l'élément considéré est négatif, d'où l'affirmation.  $\square$

### 3.3.2 Le cas où $(M, \xi)$ n'est pas compacte

Dans le cas où la variété n'est pas compacte, nous définissons  $\mathcal{L}_{\pm}^{osc}$  sur l'ensemble constitué des chemins lisses et propres par morceaux, ensemble que nous avons noté  $\mathcal{F}^c(M, \xi)$  dans les parties précédentes. De plus au lieu de demander que  $\{\phi^t\}_{t \in ]a, b[}$  soit strictement positif (resp. négatif), nous demandons à ce qu'il soit strictement positif (resp. négatif) sur l'intérieur de son support, c'est-à-dire que :

$$\alpha_{\phi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \phi^t(x) \right) > 0 \text{ (resp. } < 0), \text{ pour tout } t \in ]a, b[, \text{ et pour tout } x \in \text{Supp} \left( \overset{\circ}{\{\phi^t\}}_{t \in ]a, b[} \right).$$

De la même façon nous définissons

1. la fonctionnelle de longueur invariante par conjugaison comme étant  $\mathcal{L}_{osc} := \max\{\mathcal{L}_+^{osc}, \mathcal{L}_-^{osc}\}$ ;
2. les semi-normes par les relations suivantes

$$\widetilde{\nu}_{\pm}^{osc} \left( [\{\phi^t\}] \right) := \pm \inf \left\{ \mathcal{L}_{\pm}^{osc} \left( \{\phi^t\} \right) \mid [\{\phi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\}, \text{ pour tout } [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$$

3. et les pseudo-normes sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  comme étant

$$\widetilde{\nu}_{osc} := \max \left\{ -\widetilde{\nu}_-^{osc}, \widetilde{\nu}_+^{osc} \right\} \text{ et } \nu_{osc}(\phi) = \min \left\{ \widetilde{\nu}_{osc} \left( [\{\phi^t\}] \right) \mid [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi), \phi^1 = \phi \right\}.$$

La proposition [3.18](#) reste encore valable dans le cas non compact. De plus, tout comme la norme discriminante, la norme d'oscillation peut être interprétée comme une norme de mots où l'ensemble générateur  $\widetilde{S}_{osc}$  est l'union des sous-ensembles  $\widetilde{S}_+^{osc}$  et  $\widetilde{S}_-^{osc}$  suivants

$$\widetilde{S}_{\pm}^{osc} := \left\{ [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \mid [\{\phi^t\}] \succeq \text{Id (resp. Id} \succeq [\{\phi^t\}]), \mathcal{L}_{\pm}^{osc} \left( \{\phi^t\} \right) = 1 \right\}.$$

### 3.4 Norme FPR

Dans cette section nous définissons la norme de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [\[21\]](#). Cette norme invariante par conjugaison est définie pour les variétés de contact  $(M, \xi)$  qui sont ordonnables et qui admettent une forme de contact dont le flot de Reeb associé est périodique. Ainsi dans cette section  $(M, \xi)$  désignera une telle variété de contact et  $\alpha$  sera une 1-forme de contact dont le flot de Reeb est périodique. Rappelons qu'une fois une forme de contact  $\alpha$  fixée, nous avons une bijection entre les fonctions lisses à support compact et dépendantes du temps  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  et les chemins de contactomorphismes à support compact partant de l'identité  $\phi_h$  (voir le chapitre [0](#)).

Notons  $R_{\alpha}$  le champs de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$ . Définissons les applications suivantes :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^{\alpha} : \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\} \\ [\{\phi^t\}] &\mapsto \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\phi_n R_{\alpha}] \succeq [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\nu}_-^{\alpha} : \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) &\rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\} \\ [\{\phi^t\}] &\mapsto \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_n R_{\alpha}] \right\}. \end{aligned}$$

**Lemme 3.19.** *Les applications  $\widetilde{\nu}_+^{\alpha}$  et  $\widetilde{\nu}_-^{\alpha}$  sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Considérons  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Soit une fonction hamiltonienne à support compact  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dont le flot  $\phi_h$  est tel que  $[\phi_h] = [\{\phi^t\}]$ . En définissant  $N_0 := \left[ \min_{(t,x) \in [0,1] \times M} h^t(x) \right]$  nous pouvons utiliser le corollaire [1.16](#) pour déduire que  $[\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{N_0 R_{\alpha}}]$

pour tout entier  $N$  qui vérifie  $N \leq N_0$ . Supposons alors par l'absurde qu'il existe un entier  $N < N_0$  tel que  $[\phi_{R_\alpha}^N] \succeq [\{\phi^t\}]$ . Cela implique alors que  $[\phi_{(N-N_0)R_\alpha}] \succeq [\{\phi_{R_\alpha}^{-N_0 t} \circ \phi_h^t\}] \succeq \text{Id}$ . Or comme  $N < N_0$  nous avons d'autre part que  $\text{Id} \succeq [\phi_{R_\alpha}^{N-N_0}]$ . On a donc  $\text{Id} \succeq [\phi_{R_\alpha}^{N-N_0}] \succeq \text{Id}$ . Or  $(M, \xi)$  étant ordonnable ça implique que  $[\phi_{R_\alpha}^{N-N_0}] = \text{Id} \in \pi_1(\text{Cont}_0^c(M, \xi))$ , et donc que  $\phi_{R_\alpha}^{N_0-N}$  est un lacet strictement positif contractile. C'est absurde car  $(M, \xi)$  est ordonnable. Ainsi  $\widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) \geq N_0$ . Dans le lemme suivant nous verrons que  $\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) = -\widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]^{-1})$  d'où le fait que  $\widetilde{\nu}_-^\alpha$  est également à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

*Remarque 3.20.* Il est facile de voir que si  $(M, \text{Ker}(\alpha))$  n'est pas ordonnable alors les applications précédentes prennent des valeurs infinies.

Nous verrons dans le lemme suivant que  $\widetilde{\nu}_\pm^\alpha$  est en fait un couple de semi-normes et donc que l'application

$$\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha : \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [\{\phi^t\}] \mapsto \max \left\{ \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]), -\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) \right\}$$

est une norme. C'est la norme de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen, nous l'appellons la norme FPR.

**Lemme 3.21.** *L'application  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$  est une norme sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ , c'est-à-dire que pour tout  $[\{\phi^t\}], [\{\varphi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons :*

1.  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) \in \mathbb{N}$ ,
2.  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) = 0$  si et seulement si  $[\{\phi^t\}] = \text{Id}$ ,
3.  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]^{-1}) = \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}])^{-1}$ ,
4.  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}] \cdot [\{\varphi^t\}]) \leq \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) + \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\varphi^t\}])$ .

*Démonstration.* 1. Pour le premier point du lemme remarquons que  $\widetilde{\nu}_+^\alpha \geq \widetilde{\nu}_-^\alpha$  par transitivité de la relation d'ordre partiel. Ainsi dans le cas où  $\widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}])$  est négatif, nous avons  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) = -\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) \geq 0$ .

2. Le deuxième point du lemme provient directement du fait que  $(M, \xi)$  est ordonnable.

3. Remarquons que pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]^{-1}) &= \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\phi_{R_\alpha}^n] \succeq [\{\phi^t\}]^{-1} \right\} \\ &= \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-n}] \right\} \\ &= -\max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^n] \right\} = -\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) . \end{aligned}$$

On en déduit donc le troisième point du lemme.

4. Remarquons que  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) \leq k \in \mathbb{Z}$  si et seulement si  $[\phi_{R_\alpha}^k] \succeq [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-k}]$ . Ainsi en posant  $k_0 := \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}])$  et  $h_0 := \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\varphi^t\}])$  nous avons :

$$\begin{aligned} [\phi_{R_\alpha}^{k_0}] \succeq [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-k_0}] \quad \text{et} \quad [\phi_{R_\alpha}^{h_0}] \succeq [\{\varphi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-h_0}], \\ \text{nous avons donc} \quad [\phi_{R_\alpha}^{h_0+k_0}] \succeq [\{\phi^t\}] \cdot [\{\varphi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-h_0-k_0}] . \end{aligned}$$

En utilisant de nouveau le fait que  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) \leq k \in \mathbb{Z}$  si et seulement si  $[\phi_{R_\alpha}^k] \succeq [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}^{-k}]$ , nous avons bien l'inégalité triangulaire désirée.  $\square$

Nous n'avons, pour le moment, pas utilisé l'hypothèse que le flot de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$  est périodique. Cette hypothèse permet de s'assurer que  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$  est invariante par conjugaison grâce au lemme suivant.



**Lemme 3.22.** *Le sous-groupe  $\pi_1(\text{Cont}_0(M, \xi)) \subset \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  est inclus dans le centre de  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ .*

*Démonstration.* Rappelons du chapitre 0 que pour tout  $[\{\phi^t\}], [\{\varphi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  nous avons :

$$[\{\phi^t\}] \cdot [\{\varphi^t\}] \cdot [\{\phi^t\}]^{-1} = [\{\phi^1 \varphi^t (\phi^1)^{-1}\}] .$$

Supposons alors que  $[\{\phi^t\}] \in \pi_1(\text{Cont}_0^c(M, \xi))$ , et  $[\{\varphi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ . Comme  $\phi^1 = \text{Id}$ , en utilisant la première phrase de la preuve la conjugaison par  $[\{\phi^t\}]$  est l'application identique. Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} [\{\varphi^t\}] \cdot [\{\phi^t\}] &= [\{\phi^t\}] \cdot ([\{\varphi^t\}] \cdot [\{\phi^t\}]) \cdot [\{\phi^t\}]^{-1} \\ &= [\{\phi^t\}] \cdot [\{\varphi^t\}] \cdot [\phi^t \circ (\phi^t)^{-1}] = [\{\phi^t\}] \cdot [\{\varphi^t\}] . \end{aligned}$$

□

De ce fait pour tout  $[\{\phi_1^t\}]$  et tout  $[\{\phi_2^t\}]$  dans  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$

$$[\phi_{NR_\alpha}] \succeq [\{\phi_1^t\}]^{-1} [\{\phi_2^t\}] [\{\phi_1^t\}] \Leftrightarrow \underbrace{[\{\phi_1^t\}] [\phi_{NR_\alpha}] [\{\phi_1^t\}]^{-1}}_{\phi_{NR_\alpha}} \succeq [\{\phi_2^t\}] ,$$

d'où le fait que  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$  est invariante par conjugaison. De même, M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen définissent la norme invariante par conjugaison  $\nu_{FPR}^\alpha$  sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  de la manière suivante :

$$\nu_{FPR}^\alpha(\phi) = \min \left\{ \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\{\phi^t\}]) \mid [\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi), \phi^1 = \phi \right\}, \forall \phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi) .$$

Bien que la preuve de la proposition suivante est élémentaire, les résultats y sont profonds - car les hypothèses d'ordonnabilité et d'avoir un flot de Reeb périodique sont fortes.

**Proposition 3.23** (21). *L'espace  $(\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi), \succeq, \widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha)$  est un espace métrique ordonné. De plus dans le cas où  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est compacte, la norme  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$  est stablement non bornée.*

*Démonstration.* Le fait que ce soit un espace métrique ordonné provient directement de la définition de  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$ . Lorsque  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est compacte,  $[\phi_{NR_\alpha}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  pour tout  $N \in \mathbb{Z}$ . De la définition de  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha$  et du fait que la variété soit ordonnable nous avons immédiatement que  $\widetilde{\nu}_{FPR}^\alpha([\phi_{NR_\alpha}]) = N$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ . □

Le lemme suivant sera utile dans la suite pour calculer la norme d'éléments qui ne sont pas dans la classe des itérés du flot de Reeb.

**Lemme 3.24.** *Pour tout élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) &= \min \left\{ \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}_c^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) &= - \min \left\{ \left[ -\min_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}_c^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $[\phi_{nR_\alpha}] \succeq [\{\phi^t\}]$ . Comme la fonction

$$\begin{aligned} S^1 \times M &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto n \end{aligned}$$

engendre le chemin  $\phi_{R_\alpha}^n$ , d'après le lemme 1.17 il existe  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $[\phi_h] = [\{\phi^t\}]$  et tel que  $h^t(x) \leq n$  pour tout  $(t, x) \in S^1 \times M$ . Ainsi

$$\min \left\{ \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}_c^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \leq \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) .$$

Réciproquement soit  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à support compact tel que  $[\phi_h] = [\{\phi^t\}]$ . Alors la fonction constante

$$S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) \mapsto \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right]$$

est plus grande que  $h$  et représente l'élément  $([\phi_{\lceil \max h \rceil R_\alpha}])$ . Donc toujours d'après le lemme [1.32](#) nous avons  $[\phi_{nR_\alpha}] \succeq [\{\phi^t\}]$  en posant  $n = \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right]$  et donc

$$\min \left\{ \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}_c^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \geq \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) .$$

En combinant les deux inégalités précédentes nous trouvons bien la première égalité du lemme. Pour démontrer l'égalité concernant  $\widetilde{\nu}_-^\alpha$  il suffit de remarquer que  $\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) = -\widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]^{-1})$  et que si  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  engendre un chemin représentant  $[\{\phi^t\}]$ , alors la fonction  $(t, x) \mapsto -h^{1-t}(x)$  engendre un chemin représentant  $[\{\phi^t\}]^{-1}$ .  $\square$

### 3.5 Norme de Shelukhin

Considérons  $(M, \xi)$  une variété de contact, pas nécessairement compacte, dont la distribution de contact est co-orientable. Fixons une forme de contact  $\alpha$  pour cette distribution et fixons par la même occasion la bijection entre l'ensemble des chemins lisses de contactomorphismes à support compact  $\{\phi^t\}$  commençant à l'identité et l'ensemble des fonctions hamiltoniennes  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact. Nous notons  $\phi_h$  le chemin de contactomorphismes engendré par la fonction  $h$  (voir le chapitre [0](#)). La fonctionnelle de longueur  $\mathcal{L}_S^\alpha$  associée à la (pseudo)-norme de Shelukhin est la suivante :

$$\mathcal{L}_S^\alpha : \mathcal{D}(M, \xi) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \{\phi^t\} \mapsto \int_0^1 \max_{x \in M} \left| \alpha_{\phi^t(x)} \left( \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \phi^s(x) \right) \right| dt = \int_0^1 \max_{x \in M} |h^t(x)| dt, \quad \text{où } \phi_h = \{\phi^t\} .$$

**Lemme 3.25.** *La fonctionnelle  $\mathcal{L}_S^\alpha$  est une fonctionnelle de longueur, c'est-à-dire que :*

1.  $\mathcal{L}_S^\alpha(\{\phi^t\}) = 0$  si et seulement si  $\{\phi^t\}$  est le chemin constant à l'identité
2.  $\mathcal{L}_S^\alpha$  est invariante par reparamétrisation
3.  $\mathcal{L}_S^\alpha$  vérifie l'inégalité triangulaire
4.  $\mathcal{L}_S^\alpha(\{\phi^t\}^{-1}) = \mathcal{L}_S^\alpha(\{\phi^t\})$ .

De plus pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  et pour tout  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  nous avons  $\mathcal{L}_S^\alpha(\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}) = \mathcal{L}_S^{\varphi^* \alpha}(\{\phi^t\})$ .

*Démonstration.* 1. Le premier point du lemme est évident.

2. Le deuxième point du lemme vient du fait que si  $\{\phi^t\}$  est un chemin engendré par  $h$  alors pour toute fonction  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  bijective croissante, le chemin  $\{\phi^{a(t)}\}$  est engendré par la fonction hamiltonienne  $[0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto a'(t)h^{a(t)}(x)$ . Or la formule de changement de variable affirme que  $\int_0^1 \max_{x \in M} |a'(t)h^{a(t)}(x)| dt = \int_0^1 \max_{x \in M} |h^t(x)| dt$ . D'où l'affirmation.

3. Soient  $\{\phi^t\}$  et  $\{\varphi^t\}$  sont deux éléments de  $\mathcal{D}(M, \xi)$  rappelons du chapitre [0](#) que

$$\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\} = \begin{cases} \phi^{a(2t)} & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \psi^{a(2t-1)} \circ \phi^1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

où  $a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  désigne une fonction lisse bijective strictement croissante telle que les dérivées  $n$ -ièmes  $a^{(n)}(0) = a^{(n)}(1) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Ainsi si  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  désignent les fonctions hamiltoniennes respectives des chemins  $\{\phi^t\}$  et  $\{\varphi^t\}$ , la fonction hamiltonienne associée à  $\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\}$  est donnée par

$$k : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \begin{cases} 2a'(2t)h^{a(2t)}(x) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 2a'(2t-1)g^{a(2t-1)}(x) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

Ce qui implique donc par la relation de Chasles et par changement de variable que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^\alpha(\{\phi^t\} \cdot \{\varphi^t\}) &= \int_0^{1/2} \max_{x \in M} |2a'(2t)h^{a(2t)}(x)| dt + \int_{1/2}^1 \max_{x \in M} |2a'(2t-1)g^{a(2t-1)}(x)| dt \\ &= \mathcal{L}_S^\alpha(\{\phi^t\}) + \mathcal{L}_S^\alpha(\{\varphi^t\}). \end{aligned}$$

4. Le 4ème point du lemme provient du fait que si  $\{\phi^t\}$  est engendré par la fonction  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  alors  $\{\phi^t\}^{-1} = \{\phi^{1-t}(\phi^1)^{-1}\}$  est engendré par la fonction hamiltonienne  $[0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto -h^{1-t}(x)$ .

Enfin la dernière affirmation se déduit immédiatement de la définition de  $\mathcal{L}_S^\alpha$ .  $\square$

Nous définissons alors les (pseudo-)normes de E. Schelukhin  $\widetilde{\nu}_S^\alpha$  et  $\nu_S^\alpha$  sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  de la manière suivante. Pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et  $\phi \in \text{Cont}_0^c(M, \xi)$ ,

$$\widetilde{\nu}_S^\alpha([\{\phi^t\}]) := \inf \left\{ \mathcal{L}_S^\alpha(\{\varphi^t\}) \mid [\{\varphi^t\}] = [\{\phi^t\}] \right\} \text{ et } \nu_S^\alpha(\phi) := \inf \left\{ \widetilde{\nu}_S^\alpha([\{\phi^t\}]) \mid \phi^1 = \phi \right\}.$$

Remarquons que ces pseudo-normes ne sont pas invariantes par conjugaison mais qu'elles vérifient pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  et pour tout  $\{\phi^t\} \in \mathcal{D}(M, \xi)$  la propriété suivante :

$$\widetilde{\nu}_S^\alpha([\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}]) = \widetilde{\nu}_S^{\varphi^* \alpha}([\{\phi^t\}]) \text{ et } \nu_S^\alpha(\varphi \circ \phi^1 \circ \varphi^{-1}) = \nu_S^{\varphi^* \alpha}(\phi^1).$$

Cela provient directement de la dernière affirmation du lemme précédent.

*Remarque 3.26.* E. Schelukhin dans son papier [44] démontre en fait que  $\nu_S^\alpha$  est non dégénérée sur  $\text{Cont}_0^c(M, \xi)$  et donc que c'est bien une norme. Sa démonstration se base sur le fait que si un contactomorphisme déplace une boule  $\mathcal{B}$ , alors la norme de ce contactomorphisme doit être plus grande que la "capacité" de cette boule. De ce fait il n'est pas clair que  $\nu_S^\alpha$  soit non-dégénéré, car ce même argument ne peut être appliqué aux lacets de contactomorphismes non contractiles basés en l'identité.

## 4 Géodésiques de différentes normes sur $\text{Cont}_0(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ et son revêtement universel

Dans ce chapitre nous définirons une famille particulière de chemins lisses de contactomorphismes à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  en émettant des restrictions sur les fonctions hamiltoniennes qui les engendrent une fois la forme de contact standard fixée. Les éléments de cette famille seront des géodésiques pour la métrique discriminante, d'oscillation et celle de Shelukhin. La norme discriminante, la norme d'oscillation, et celles de Shelukhin et de FPR des éléments de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  ou  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  représentés par ces géodésiques seront très liés au maximum et minimum de la fonction hamiltonienne qui les engendre. Cela nous permettra de donner une nouvelle démonstration du caractère non borné de ces différentes normes.

Avant d'énoncer les théorèmes principaux de ce chapitre, rappelons brièvement la distribution et la forme de contact standard de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  pour  $n$  un entier plus grand que 1. Considérons l'espace euclidien de dimension  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , avec  $n$  un entier plus grand que 1, muni de sa structure de contact standard  $\xi_{st}$ . En munissant  $\mathbb{R}^{2n+1}$  des fonctions coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$  cette structure de contact standard est donnée par le noyau de la forme de contact standard  $\alpha_{st} = dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ . Cette 1-forme descend en une 1-forme sur  $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  que nous notons encore  $\alpha_{st}$ . Ainsi la structure de contact standard sur  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  est donnée par le noyau de cette dernière 1-forme. Un deuxième rappel utile pour le reste de ce chapitre est la bijection qu'il y a entre fonctions lisses et champs de vecteurs de contact. Lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact telle que la distribution  $\xi$  est co-orientable, nous pouvons choisir une 1-forme  $\alpha$  telle que  $\xi = \text{Ker}(\alpha)$ . Le champs de Reeb  $R_\alpha$  associé à cette forme de contact  $\alpha$  est alors défini comme l'unique champs de vecteurs tel que  $\iota_{R_\alpha} d\alpha \equiv 0$  et  $\iota_{R_\alpha} \alpha \equiv 1$ . Une fois ce choix fait, nous pouvons associer de manière bijective à toute fonction lisse  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  un champs de vecteurs de contact  $X_h \in \chi(M, \xi)$  défini par les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha(X_h) = h \\ \iota_{X_h} d\alpha = dh(R_\alpha)\alpha - dh . \end{cases}$$

Nous notons  $\phi_h^t$  le flot du champs de vecteurs  $X_h$  au temps  $t \in \mathbb{R}$  où il est bien défini. Lorsque la fonction  $h$  est à support compact le flot est bien défini pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas  $\phi_h$  désignera le chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi_h^t\}_{t \in [0,1]}$ , et nous disons qu'il est engendré par la fonction hamiltonienne  $h$ . Enfin nous notons  $g_h^t : M \rightarrow \mathbb{R}$  le facteur de conformalité de  $\phi_h^t$  par rapport à  $\alpha$ , c'est-à-dire que  $\phi_h^{t*} \alpha = e^{g_h^t} \alpha$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Cette construction marche également lorsque la fonction hamiltonienne  $h : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$  dépend du temps (pour plus de détails le lecteur pourra consulter le chapitre [0](#)). Ici lorsque  $(M, \xi) := (\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \text{Ker}(\alpha_{st}))$ , pour  $n$  un entier plus grand que 1, le champs de Reeb associé à  $\alpha_{st}$  n'est rien d'autre que le champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial z}$ .

**Théorème 4.1.** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit suffisamment petite, i.e.  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} ||| \text{Hess}_p(H) ||| < 2\pi$ . Alors le chemin lisse de contactomorphismes  $\phi_h$  engendré par la fonction*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, z) &\mapsto H(p) \end{aligned}$$

*est une géodésique pour les normes de Shelukhin  $\widetilde{\nu}_S$  et  $\nu_S$ . Plus précisément nous avons*

$$\mathcal{L}_S^{\alpha_{st}}(\phi_h) = \widetilde{\nu}_S^{\alpha_{st}}([\phi_h]) = \nu_S^{\alpha_{st}}(\phi_h^1) = \max \{ \max h, -\min h \} .$$

De plus, pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  nous avons

$$\widetilde{\nu}_{FPR}^{\alpha_{st}}([\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}]) = \nu_{FPR}^{\alpha_{st}}(\varphi \circ \phi_h^1 \circ \varphi^{-1}) = \max\{[\max h], [-\min h]\} .$$

*Remarque 4.2.* Lorsque  $A : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  est une application linéaire,  $|||A|||$  désigne la norme opérateur de  $A$ , c'est-à-dire

$$|||A||| := \sup_{v \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}} \frac{|Av|}{|v|} \text{ où } |v| \text{ désigne la norme euclidienne standard de } v \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}.$$

Dans le théorème précédent (et les suivants) nous voyons la hessienne de  $H$  en un point  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  comme une application linéaire de  $\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  dont la matrice est donnée par  $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}(p)\right)_{i,j \in [1,2n]}$  avec  $(p_1, \dots, p_{2n})$  désignant les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Théorème 4.3.** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit suffisamment petite, i.e.  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} |||Hess_p(H)||| < 2\pi$ . Supposons de plus que 0 soit une valeur*

*régulière de  $H$  à l'intérieur de son support, c'est-à-dire que  $d_p H \neq 0$  pour tout  $p \in \text{Supp}(H) \cap H^{-1}\{0\}$ . Notons  $\phi_h$  le chemin de contactomorphismes engendré par la fonction hamiltonienne*

$$h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, z) \mapsto H(p) .$$

*Alors pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  le chemin lisse de contactomorphismes  $\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}$  est une géodésique pour les normes discriminantes  $\widetilde{\nu}_d$  et  $\nu_d$ . Plus précisément nous avons :*

$$\mathcal{L}_d(\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}) = \nu_d(\varphi \circ \phi_h^1 \circ \varphi^{-1}) = \widetilde{\nu}_d([\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}]) = \max\{[\max h] + 1, [-\min h] + 1\} .$$

**Théorème 4.4.** *Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit suffisamment petite, i.e.  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} |||Hess_p(H)||| < 2\pi$ . Supposons de plus que 0 soit une valeur régulière de  $H$  à l'intérieur de son support, c'est-à-dire que  $d_p H \neq 0$  pour tout  $p \in \text{Supp}(H) \cap H^{-1}\{0\}$ , et que  $H$  soit à valeur positives (respectivement négative). Notons  $\phi_h$  le chemin de contactomorphismes engendré par la fonction hamiltonienne*

$$h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (p, z) \mapsto H(p) .$$

*Alors pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  le chemin lisse de contactomorphismes  $\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}$  est une géodésique pour les normes d'oscillation  $\widetilde{\nu}_{osc}$  et  $\nu_{osc}$ . Plus précisément nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{osc}(\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}) &= \widetilde{\nu}_{osc}([\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}]) = \nu_{osc}(\varphi \circ \phi_h^1 \circ \varphi^{-1}) = [\max h] + 1 \\ (\text{resp. } \mathcal{L}_{osc}(\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}) &= \widetilde{\nu}_{osc}([\varphi \circ \phi_h \circ \varphi^{-1}]) = \nu_{osc}(\varphi \circ \phi_h^1 \circ \varphi^{-1}) = [-\min h] + 1) . \end{aligned}$$

Nous démontrerons ces théorèmes à l'aide de plusieurs lemmes. Le raisonnement consistera en un premier temps à minorer les normes par le sélecteur de translation dont nous avons rappelé la construction due à S. Sandon [42] au chapitre 2, puis dans un deuxième temps à montrer que la longueur des chemins que nous avons considérés réalisent ce minimum. Le premier lemme que nous énoncerons nous permettra d'exprimer le flot de contactomorphismes  $\phi_h$  engendré par la fonction  $h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  en fonction du flot de symplectomorphismes hamiltonien  $\psi_H$  engendré par la fonction hamiltonienne  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Plus précisément lorsque  $(W, \omega)$  est une variété symplectique, nous pouvons associer à toute fonction lisse  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact un champs de vecteurs  $X_H \in \chi(W, \omega)$ , défini par la relation  $\iota_{X_H} \omega = -dH$ , dont le flot pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$  que nous notons  $\psi_H^t$  est un symplectomorphisme hamiltonien. Nous écrivons  $\psi_H$  pour désigner le chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens  $\{\psi_H^t\}_{t \in [0,1]}$ .

Nous considérons ici la variété symplectique  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$ , et nous notons  $\lambda = \sum_{i=1}^n y_i dx_i \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n})$ .

**Lemme 4.5.** Soit  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de contactomorphismes de  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  engendré par une fonction lisse  $h$

$$h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, z) \mapsto H(p)$$

où  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse à support compact. Nous avons alors pour tout  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  et pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\phi_h^t(p, z) = \left( \psi_H^t(p), z + F^t(p) \right) \quad \text{et} \quad g_h^t(p, z) = 0$$

où

$$F^t(p) = \int_0^t \lambda(\psi_H^s(p)) (X_H(\psi_H^s(p))) ds + tH(p) .$$

*Démonstration.* En notant  $X_H$  le champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^{2n}$  qui vérifie  $\iota_{X_H} \omega_{st} = -dH$  nous avons pour tout  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  que le champs de vecteurs  $X_h$  de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  associé à la forme de contact standard  $dz - \lambda$  est donné par

$$X_h(p, z) = X_H(p) + (H(p) + \lambda_p(X_H(p))) \frac{\partial}{\partial z} .$$

De plus, comme la fonction hamiltonienne  $H$  est indépendante du temps elle est constante le long de son flot, c'est-à-dire que  $H(\psi_H^t(p)) = H(p)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $p \in \mathbb{R}^{2n}$ , d'où le fait que

$$\phi_h^t(p, z) = \left( \psi_H^t(p), z + F^t(p) \right) \quad \text{pour tout } (t, p, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 .$$

Enfin, en utilisant la formule de Cartan, nous avons pour tout  $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\phi_h^t)^* \alpha = (\phi_h^s)^* (\iota_{X_h} d\alpha + d\iota_{X_h} \alpha) = (\phi_h^s)^* (-dH + dH) \equiv 0 ,$$

et comme  $\phi_h^0 = \text{Id}$  et que  $g_h^0 \equiv 0$  nous en déduisons que  $g_h^s \equiv 0$  pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .  $\square$

*Remarque 4.6.* Ce lemme est un cas particulier d'une construction générale (qui se démontre de la même façon que le lemme précédent). En effet, considérons la contactisation d'une variété symplectique exacte  $(W, \omega = d\lambda)$ , c'est-à-dire la variété de contact  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Nous pouvons associer de manière unique à tout symplectomorphisme hamiltonien à support compact  $\psi \in \text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  de la façon suivante :

$$\phi(p, z) = (\psi(p), z + F(p)), \quad \forall (p, z) \in W \times S^1 ,$$

où  $F : W \rightarrow \mathbb{R}$  est l'unique fonction à support compact telle que  $\psi^* \lambda - \lambda = dF$ . Dans ce cas,  $\phi$  est un contactomorphisme exact par rapport à la forme de contact  $dz - \lambda$ , c'est-à-dire que son facteur de conformalité correspondant est nul. Nous disons que  $\phi$  est le relevé de contact de  $\psi$ .

L'hypothèse omniprésente que nous faisons sur la hessienne de  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  suffisamment petite permet de garantir que les seules orbites périodiques de  $\psi_H$  de période plus petite que 1 correspondent à des orbites constantes. Plus précisément :

**Lemme 4.7.** Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction hamiltonienne à support compact telle que  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} ||| \text{Hess}_p(H) ||| < 2\pi$ . S'il existe  $0 < T \leq 1$  et  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\psi_H^T(p) = p$  alors  $\psi_H^t(p) = p$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Soient  $T \in \mathbb{R}_{>0}$  et  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  tels que  $\psi_H^T(p) = p$ . Introduisons le lacet  $\gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  défini comme  $\gamma(t) = \psi_H^{tT}(p)$ . Ainsi  $\dot{\gamma}(t) = X_{TH}(\gamma(t))$  pour tout  $t \in S^1$ . Considérons alors la série de Fourier associée au lacet 1-périodique  $\dot{\gamma}$  qui est donnée par

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi Jt} x_k \quad \text{pour tout } t \in S^1 \text{ avec } x_k \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix} .$$

De même, la série de Fourier associée à  $\ddot{\gamma}$ , la vitesse de  $\dot{\gamma}$ , est donnée par  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2i\pi J e^{2i\pi J t x_k}$  pour tout  $t \in S^1$ . Comme  $\int_0^1 \dot{\gamma}(t) dt = \gamma(1) - \gamma(0) = x_0 = 0 \in \mathbb{R}^{2n}$  nous avons d'une part

$$\|\dot{\gamma}\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |x_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} k^2 |x_k|^2} = \frac{1}{2\pi} \|\ddot{\gamma}\|_{\mathcal{L}^2} \quad (14)$$

où la première et dernière égalité proviennent de la formule de Parseval. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \|t \mapsto \ddot{\gamma}(t)\|_{\mathcal{L}^2} &= \|t \mapsto T \text{Hess}_{\gamma(t)} H(\dot{\gamma}(t))\|_{\mathcal{L}^2} = T \|t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi J t} \text{Hess}_{\gamma(t)} H(x_k)\|_{\mathcal{L}^2} \\ &\leq T \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} \|\text{Hess}_p(H)\|^2 |x_k|^2} \\ &= T \sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} \|\text{Hess}_p(H)\| \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |x_k|^2} \\ &\leq T 2\pi \|\dot{\gamma}\|_{\mathcal{L}^2} . \end{aligned}$$

Or dans le cas où  $\gamma$  est un lacet non constant, la dernière inégalité est une inégalité stricte, c'est-à-dire que  $\|\ddot{\gamma}\|_{\mathcal{L}^2} < T 2\pi \|\dot{\gamma}\|_{\mathcal{L}^2}$ . En combinant cette inégalité stricte à l'inégalité (14) nous déduisons que  $T > 1$  dans ce cas. □

*Remarque 4.8.* Le lecteur pourra voir une preuve similaire dans [30].

Le lemme suivant permettra de minorer les normes de Shelukhin et de FPR.

**Lemme 4.9.** *Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  et  $k : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction hamiltonienne à support compact qui engendre ce contactomorphisme, c'est-à-dire que  $\phi_k^1 = \phi$ . Nous avons alors :*

$$c(\phi) \leq \int_0^1 \max k^t dt \quad \text{et} \quad c(\phi^{-1}) \leq - \int_0^1 \min k^t dt .$$

*Démonstration.* Considérons  $\varphi$  et  $\varphi_k^t \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi_{st})^{z\text{-per}}$  les correspondants respectifs de  $\phi$  et  $\phi_k^t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Notons  $\bar{k} : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hamiltonienne associée au chemin  $\varphi_k$ , c'est-à-dire que  $\left( dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) \left( \frac{d}{dt} \varphi_k^t(p, z) \right) = \bar{k}^t(\varphi_k^t(p, z))$  pour tout  $(t, p, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n+1}$ . On déduit alors de la périodicité de  $\varphi_k^t$  que  $\bar{k}^t = k^t \circ \rho$  pour tout  $t \in [0, 1]$  où  $\rho : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \times \underbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}_{S^1}$  désigne l'application de revêtement. Par définition du sélecteur de

translation il existe un point  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$  tel que  $\varphi(p, z) = (p, z + c(\phi))$ . Notons  $\pi : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  la projection canonique qui à un point  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$  associe  $z$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} c(\phi) &= \pi(\varphi(p, z)) - \pi(p, z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \pi(\varphi_k^t(p, z)) \right) dt \\ &= \int_0^1 d_{\varphi_k^t(p, z)} \pi \left( X_k^t(\varphi_k^t(p, z)) \right) dt \\ &= \int_0^1 \bar{k}^t(\varphi_k^t(p, z)) dt \\ &\leq \int_0^1 \max \bar{k}^t dt = \int_0^1 \max k^t dt . \end{aligned}$$

De même, en remarquant que la fonction

$$\begin{aligned} [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, (p, z)) &\mapsto -k^{1-t}(p, z) \end{aligned}$$

engendre le contactomorphisme  $\phi^{-1}$ , nous en déduisons que  $c(\phi^{-1}) \leq \int_0^1 \max(-k^{1-t})dt = -\int_0^1 \min k^t dt$ . □

Nous en déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 4.10.** *Soit une fonction hamiltonienne  $k : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact, nous avons alors les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} \max \left\{ c(\phi_k^1), c\left((\phi_k^1)^{-1}\right) \right\} &\leq \nu_S(\phi_k^1) \leq \widetilde{\nu}_S([\phi_k]) \quad \text{et} \\ \max \left\{ \left[ c(\phi_k^1) \right], \left[ c\left((\phi_k^1)^{-1}\right) \right] \right\} &\leq \nu_{FPR}(\phi_k^1) \leq \widetilde{\nu}_{FPR}([\phi_k]) . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous avons d'après le lemme précédent que

$$\max \left\{ c(\phi_k^1), c\left((\phi_k^1)^{-1}\right) \right\} \leq \max \left\{ \int_0^1 \max k^t dt, -\int_0^1 \min k^t dt \right\} .$$

Or, par définition de la longueur de Shelukhin nous avons

$$\max \left\{ \int_0^1 \max k^t dt, -\int_0^1 \min k^t dt \right\} \leq \mathcal{L}_S^{\alpha_{st}}(\phi_k)$$

pour toute fonction lisse  $k : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact d'où le résultat pour la norme de Shelukhin.

Toujours d'après le lemme précédent nous avons

$$\max \left\{ \left[ c(\phi_k^1) \right], \left[ c\left((\phi_k^1)^{-1}\right) \right] \right\} \leq \max \left\{ \left[ \int_0^1 \max k^t dt \right], \left[ -\int_0^1 \min k^t dt \right] \right\} ,$$

ce qui nous permet de déduire que

$$\max \left\{ \left[ c(\phi_k^1) \right], \left[ c\left((\phi_k^1)^{-1}\right) \right] \right\} \leq \max \left\{ \left[ \max_{(t,(p,z))} k^t(p,z) \right], \left[ -\min_{(t,(p,z))} k^t(p,z) \right] \right\} .$$

Il suffit alors d'utiliser la définition de la norme FPR vue au lemme [3.24](#) pour conclure. □

Pour les chemins vérifiant les hypothèses du théorème [4.1](#) les inégalités du lemme [4.9](#) sont en fait des égalités, plus précisément nous avons le lemme suivant.

**Lemme 4.11.** *Soit  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de contactomorphismes engendré par une fonction lisse  $h$  de la forme suivante :*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{2n} \times S^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto H(x, y) \end{aligned}$$

où  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit suffisamment petite, i.e.  $\sup_{p \in \mathbb{R}^{2n}} |||Hess_p(H)||| < 2\pi$ . Nous avons alors

$$c(\phi_h^1) = \max H \quad \text{et} \quad c\left((\phi_h^1)^{-1}\right) = -\min H .$$

*Démonstration.* D'après le lemme [4.5](#) pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  nous avons :

$$\phi_h^t(p, z) = \left( \psi_H^t(p), z + F^t(p) \right) \quad \text{et} \quad g_h^t(p, z) = 0 ,$$



où

$$F^t(p) = \int_0^t \lambda(\psi_H^s(p)) (X_H(\psi_H^s(p))) ds + tH(p) .$$

Étudions tout d'abord le spectre de  $\phi_h^t$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$  et montrons que  $\text{Spectre}(\phi_h^t) = \{tH(p) \mid d_p H \equiv 0\}$ . Remarquons que pour tout temps  $t \in [0, 1]$  le spectre de  $\phi_h^t$  est non vide car il contient 0. En effet, pour tout temps  $t$ ,  $\phi_h^t$  est un contactomorphisme à support compact et donc en dehors du support tous les points sont des points 0-translatés. Considérons un couple  $t \in ]0, 1]$  et  $s \in \text{Spectre}(\phi_h^t)$ . Par définition du spectre d'un contactomorphisme, il existe  $(p, z) \in \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  un point  $s$ -translaté de  $\phi_h^t$  ou de manière équivalente

$$\phi_h^t(p, z) = (p, z + s) = (\psi_H^t(p), z + F^t(p)) \quad \text{et} \quad g_h^t(p, z) = 0 .$$

En particulier  $p$  est un point fixe de  $\psi_H^t$ . Or comme la hessienne de  $H$  vérifie les hypothèses du lemme [4.7](#), les seules orbites fermées de  $\psi_H$  sont les orbites constantes. Ces orbites correspondent donc aux points  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  qui sont des points critiques de  $H$ . De ce fait  $F^t(p) = tH(p) = s$  et  $d_p H = 0$ . Donc  $\text{Spectre}(\phi_h^t) \subset \{tH(p) \mid d_p H = 0\}$ . Réciproquement si  $p$  est un point critique de  $H$ , alors  $\phi_h^t(p, z) = (p, z + tH(p))$  et  $g_h^t(p, z) = 0$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$  et  $z \in S^1$ , en d'autres mots  $(p, z)$  est un point  $tH(p)$ -translaté. Nous avons donc pour tout temps  $t \in [0, 1]$  :

$$\text{Spectre}(\phi_h^t) = \{tH(p) \mid d_p H = 0\} .$$

Or l'application qui à  $t \in [0, 1]$  associe  $c(\phi_h^t)$  étant continue d'après le théorème [2.32](#) et l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction n'étant nulle part dense, il existe  $p_0 \in \mathbb{R}^{2n}$  un point critique de  $H$  tel que pour tout temps  $t \in [0, 1]$  nous avons  $c(\phi_h^t) = tH(p_0)$ . Il ne nous reste plus qu'à montrer que  $H(p_0) = \max H$ . Pour cela nous allons étudier les fonctions génératrices des contactomorphismes  $\phi_h^t$  pour des temps  $t$  suffisamment petits.

Il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de l'identité dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  munie de la topologie  $\mathcal{C}^1$ , tel que pour tout contactomorphisme  $\phi$  de ce voisinage le compactifié du graphe de  $\phi$ , (ce que nous avons noté  $\overline{\Phi(\text{gr}(\phi))} \subset \mathcal{J}^1(S^{2n} \times S^1, \mathbb{R})$ , au chapitre [2](#)), soit donné par l'image du 1-jet d'une fonction  $f : S^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Cette fonction  $f$  est donc un cas particulier d'une fonction génératrice pour ce contactomorphisme  $\phi$  et, dans ce cas,  $c(\phi) = \inf\{a \in \mathbb{R} \mid [i_a^* \mu] \neq 0 \in H^{2n+1}(\{f \leq a\}, \mathbb{R})\} = \max f$  où  $\mu$  désigne une forme volume de la variété  $S^{2n} \times S^1$  et  $i_a$  l'inclusion du sous-niveau  $\{f \leq a\}$  dans  $S^{2n} \times S^1$ . Ainsi, pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit,  $\phi_h^t$  est dans ce voisinage pour tout temps  $t \in [0, \varepsilon]$ , et donc admet une fonction génératrice  $f^t : S^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Or  $\max f^t = \max\{\text{valeurs critiques de } f^t\}$ . De plus, comme  $f^t$  est une fonction génératrice pour  $\phi_h^t$  nous savons que

$$\{\text{valeurs critiques de } f^t\} = \text{Spectre}(\phi_h^t) = \{tH(p) \mid d_p H = 0\} .$$

Nous pouvons conclure que pour tout temps  $t \in [0, \varepsilon]$  :

$$c(\phi_h^t) = \max f^t = t \max H = tH(p_0) ,$$

et donc que  $H$  atteint bien son maximum en  $p_0$  et que  $c(\phi_h^t) = t \max H$  reste vrai pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . En remarquant que la fonction  $-H$  engendre le chemin  $\{(\phi_h^t)^{-1}\} = \{\phi_h^{-t}\}$ , nous pouvons faire exactement la même démonstration pour montrer que  $c((\phi_h^t)^{-1}) = -t \min H$ .  $\square$

*Démonstration du théorème [4.1](#).* Nous avons grâce au corollaire [4.10](#) et au lemme [4.11](#) précédent que

$$\max\{\max H, -\min H\} \leq \nu_S(\phi_h^1) \leq \widetilde{\nu}_S([\phi_h]) .$$

D'autre part comme

$$\nu_S(\phi_h^1) \leq \widetilde{\nu}_S([\phi_h]) \leq \mathcal{L}_S^{\alpha_{st}}(\phi_h) = \int_0^1 \max_{(t, (p, z))} |h^t(p, z)| dt = \max\{\max H, -\min H\}$$

toutes ces inégalités sont des égalités et nous avons bien

$$\mathcal{L}_S^{\alpha_{st}}(\phi_h) = \widetilde{\nu}_S^{\alpha_{st}}([\phi_h]) = \nu_S^{\alpha_{st}}(\phi_h^1) = \max\{\max h, -\min h\} .$$

De même, nous avons grâce au corollaire 4.10 et au lemme 4.11 que

$$\max\{\lceil \max H \rceil, \lceil -\min H \rceil\} \leq \nu_{FPR}^{\alpha_{st}}(\phi_h^1) \leq \widetilde{\nu}_{FPR}^{\alpha_{st}}(\phi_h) ,$$

et par définition de la norme FPR

$$\nu_{FPR}^{\alpha_{st}}(\phi_h^1) \leq \widetilde{\nu}_{FPR}^{\alpha_{st}}([\phi_h]) \leq \max\{\lceil \max H \rceil, \lceil -\min H \rceil\} .$$

Nous en déduisons à nouveau que toutes ces inégalités sont donc des égalités. De plus comme la norme FPR est invariante par conjugaison nous déduisons le résultat.  $\square$

Le raisonnement pour démontrer les théorèmes 4.3 et 4.4 sera le même que pour le théorème 4.1. En effet nous verrons au lemme 4.14 comment minorer la norme discriminante et celle d'oscillation par le sélecteur de translation (comme au corollaire 4.10) et nous verrons que, sous les hypothèses faites dans les théorèmes 4.3 et 4.4, nous arrivons à calculer explicitement la longueur discriminante et la longueur d'oscillation des chemins considérés et cette longueur réalisera le minimum. C'est ce calcul de la longueur discriminante et de la longueur d'oscillation que nous explicitons dans le lemme suivant. Comme nous aurons besoin de ce lemme dans une partie ultérieure, nous l'énonçons dans un cadre plus général d'une variété de contact non compacte  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$ . Nous fixons  $\alpha$  une forme de contact sur  $M$  pour pouvoir associer à une fonction à support compact  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  un chemin lisse de contactomorphismes  $\phi_h$  à support compact partant de l'identité comme nous l'avons expliqué au début de ce chapitre.

**Lemme 4.12.** *Soit  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact qui engendre le chemin de contactomorphisme  $\phi_h$ . Alors le support de  $\phi_h$  est inclus dans le support de la fonction hamiltonienne  $h$  et nous avons :*

$$\mathcal{L}_d(\phi_h) = \left\lfloor \frac{1}{t_0} \right\rfloor + 1 \quad \text{où } t_0 = \inf \left\{ t > 0 \mid \exists x \in \overset{\circ}{\text{Supp}}(\phi_h), \phi_h^t(x) = x \quad \text{et} \quad g_h^t(x) = 0 \right\} .$$

Si nous supposons de plus que  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction à valeurs positives (respectivement à valeurs négatives) nous avons

$$\mathcal{L}_d(\phi_h) = \mathcal{L}_{osc}(\phi_h) = \left\lfloor \frac{1}{t_0} \right\rfloor + 1 .$$

Nous prenons comme convention ici que  $\frac{1}{0} = +\infty$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que le support de  $\phi_h$  est inclus dans le support de  $h$ . Rappelons que

$$\text{Supp}(\phi_h) = \bigcup_{t \in [0,1]} \overline{\{x \in M \mid \phi_h^t(x) \neq x\}} \quad \text{et} \quad \text{Supp}(h) = \overline{\{x \in M \mid h(x) \neq 0\}} .$$

Montrons dans un premier temps que  $\{x \mid h(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{t \in [0,1]} \{x \mid \phi_h^t(x) \neq x\}$ . Prenons un élément  $x$  de  $M$  tel que  $h(x) \neq 0$ . Supposons par contradiction que  $\phi_h^t(x) = x$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Nous avons alors que

$$\frac{d}{dt} \phi_h^t(x) = X_h(\phi_h^t(x)) = X_h(x) = 0,$$

or cela implique que  $\alpha(x)(X_h(x)) = h(x) = 0$ . D'où la contradiction.

Montrons maintenant que  $\bigcup_{t \in [0,1]} \{x \mid \phi_h^t(x) \neq x\} \subset \text{Supp}(h)$ . Soit  $x$  un élément de  $M$  tel qu'il existe un temps  $t \in [0, 1]$  pour lequel  $\phi_h^t(x)$  est différent de  $x$ . Si  $h(x)$  est différent de 0 alors  $x \in \text{Supp}(h)$  de manière triviale. Supposons donc que  $h(x) = 0$ . Nous pouvons alors montrer que pour tout voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$ , il existe  $x'$  dans ce voisinage tel que  $h(x') \neq 0$ . En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x$  tel que la fonction  $h$  soit identiquement nulle sur ce voisinage, nous avons alors que pour tout temps  $s \in [0, 1]$ ,  $\phi_h^s(x) = x$  en particulier lorsque  $s = t$ , ce qui aboutit à une contradiction. Ainsi  $x$  appartient bien à l'adhérence de  $\{x \mid h(x) \neq 0\}$  qui n'est rien d'autre que  $\text{Supp}(h)$ , et donc  $\bigcup_{t \in [0,1]} \{x \mid \phi_h^t(x) \neq x\} \subset \text{Supp}(h)$ .

Nous avons donc montré que :

$$\{x \mid h(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{t \in [0,1]} \{x \mid \phi_h^t(x) \neq x\} \subset \text{Supp}(h)$$

et donc que :

$$\overline{\bigcup_{t \in [0,1]} \{x \mid \phi_h^t(x) \neq x\}} = \text{Supp}(h) .$$

Il suffit au lecteur de vérifier que toute famille d'ensembles  $(A_i)_{i \in I} \subset M$  vérifie

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

pour déduire que  $\text{Supp}(\phi_h) \subset \text{Supp}(h)$ .

Montrons maintenant que  $\mathcal{L}_d(\phi_h) = \lfloor \frac{1}{t_0} + 1 \rfloor$ .

Supposons qu'il existe  $0 \leq t < s \leq 1$ , tels que  $\phi_h^t(x) = \phi_h^s(x)$  et  $g_h^t(x) = g_h^s(x)$  pour un  $x \in \text{Supp}(\phi_h)$ . Nous avons alors que  $\phi_h^{s-t}(x) = x$  et  $g_h^{s-t}(x) = 0$  du fait que  $\phi_h$  soit une famille à un paramètre. Ainsi  $s - t \geq t_0$  par définition de  $t_0$ .

De ce fait, si  $t_0 > 0$  et si  $\frac{1}{t_0}$  n'est pas un entier, nous pouvons découper l'intervalle  $[0, 1]$  en  $\lceil \frac{1}{t_0} \rceil$  parties égales de longueurs  $1/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil$ , tel que pour tout  $i \in [0, \lceil \frac{1}{t_0} \rceil - 1] \cap \mathbb{N}$ , nous avons  $\mathcal{L}_d(\{\phi_h^t\}_{t \in [i/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil; (i+1)/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil]}) = 1$ . En effet, supposons qu'il existe  $x \in \text{Supp}(\phi_h)$  tel que  $\phi_h^t(x) = \phi_h^s(x)$  et  $g^t(x) = g^s(x)$  avec  $t < s \in [i/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil; (i+1)/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil]$ , alors  $0 < s - t \leq 1/\lceil \frac{1}{t_0} \rceil < t_0$   $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{car } \frac{1}{t_0} \notin \mathbb{N}}$

ce qui est une contradiction par définition même de  $t_0$ . Nous avons donc que  $\mathcal{L}_d(\phi_h) \leq \lceil \frac{1}{t_0} \rceil$ . De plus, si nous découpons l'intervalle  $[0, 1]$  en strictement moins de  $\lceil \frac{1}{t_0} \rceil$  intervalles il existera alors au moins un des intervalles qui sera de longueur strictement supérieure à  $t_0$  et donc, restreint à cet intervalle le chemin  $\phi_h$  sera de longueur discriminante strictement plus grande que 1. Ainsi  $\mathcal{L}_d(\phi_h) \geq \lceil \frac{1}{t_0} \rceil$  et donc  $\mathcal{L}_d(\phi_h) = \lceil \frac{1}{t_0} \rceil = \lfloor \frac{1}{t_0} + 1 \rfloor$  car  $\frac{1}{t_0} \notin \mathbb{N}$ .

Traitons maintenant le cas où  $t_0 > 0$  et  $\frac{1}{t_0} \in \mathbb{N}_{>0}$ . Nous pouvons déjà constater que si nous découpons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $\frac{1}{t_0}$  intervalles, alors au moins un des intervalles sera de longueur plus grande ou égale à  $t_0$ , ainsi le chemin  $\phi_h$  restreint à cet intervalle sera de longueur discriminante au moins 2. Nous avons donc que  $\mathcal{L}_d(\phi_h) \geq \frac{1}{t_0} + 1$ . Par contre, si nous découpons l'intervalle  $[0, 1]$  en  $\frac{1}{t_0} + 1$  morceaux, chacun de longueur  $1/(\frac{1}{t_0} + 1)$  alors le même raisonnement que précédemment permet d'affirmer que  $\mathcal{L}_d(\{\phi_h^t\}_{t \in [i/(\frac{1}{t_0} + 1); (i+1)/(\frac{1}{t_0} + 1)]}) = 1$ . Ainsi  $\mathcal{L}_d(\phi_h) \leq \frac{1}{t_0} + 1$ , et donc  $\mathcal{L}_d(\phi_h) = \frac{1}{t_0} + 1 = \lfloor \frac{1}{t_0} + 1 \rfloor$ .

Il est évident dans le cas où  $t_0 = 0$  que la longueur du chemin  $\phi_h$  est infinie.  $\square$

*Remarque 4.13.* Dans le cas où la variété de contact  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  est fermée, c'est-à-dire compacte et sans bord, et que  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction hamiltonienne engendrant le chemin de contactomorphismes  $\phi_h$ , si le support de  $\phi_h$  est différent de  $M$  tout entier, alors par définition  $\mathcal{L}_d(\phi_h) = +\infty$ . Nous avons cependant encore l'égalité

$$\mathcal{L}_d(\phi_h) = \left\lfloor \frac{1}{t_0} \right\rfloor + 1$$

lorsque nous posons  $t_0 := \inf \{t > 0 \mid \exists x \in M, \phi_h^t(x) = x \text{ et } g_h^t(x) = 0\}$ . La démonstration se fait exactement de la même façon que précédemment.

Le lemme crucial qui nous permettra d'affirmer que le chemin que nous considérons dans le théorème 4.3 et 4.4 est de longueur minimale est donné par l'inégalité suivante.

**Lemme 4.14.** *Pour tout élément  $\phi$  de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  différent de l'identité nous avons*

$$\nu_d(\phi) \geq \max \left\{ \lfloor c(\phi) \rfloor + 1, \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1 \right\} .$$

*Démonstration.* Commençons par montrer que si  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  est un chemin lisse inclus dans  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  commençant à l'identité et tel que  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}) = 1$  alors  $0 \leq c(\phi^t) < 1$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ . En effet, nous savons que  $t \in [0, 1] \mapsto c(\phi^t)$  est une application continue d'après le point 2 du théorème 2.32 et  $c(\phi^0 = \text{Id}) = 0$ . Ainsi supposons par l'absurde qu'il existe  $t \in [0, 1]$  tel que  $c(\phi^t) \geq 1$ . Cela implique qu'il existe  $s \in [0, 1]$  tel que  $c(\phi^s) = 1$  et donc que  $\phi^s$  a un point 1-translaté. Or les points translattés de translations entières sont des points discriminants, ce qui est en contradiction avec le fait que la longueur discriminante du chemin  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  soit égale à 1. D'où le fait que  $c(\phi^t) < 1$  pour tout temps  $t \in [0, 1]$ .

Soit alors  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  différent de l'identité. Notons  $k := \nu_d(\phi) \in \mathbb{N}_{>0}$  la norme discriminante de  $\phi$ . Par définition de la norme discriminante, il existe alors  $k$  chemins lisses de contactomorphismes partant de l'identité  $(\{\phi_i^t\}_{t \in [0,1]})_{i \in [1, k] \cap \mathbb{N}}$  tous de longueur discriminante égale à 1 et tels que  $\phi = \prod_{i=1}^k \phi_i^1$ . D'après l'inégalité triangulaire de la proposition 2.35 et ce que nous venons de démontrer nous avons alors :

$$\lceil c(\phi) \rceil = \left\lceil c \left( \prod_{i=1}^k (\phi_i^1) \right) \right\rceil \leq \sum_{i=1}^k \lceil c(\phi_i^1) \rceil \leq k = \nu_d(\phi) .$$

De plus, comme  $\phi$  est différent de l'identité,  $\phi^{-1}$  l'est également et donc  $\lceil c(\phi^{-1}) \rceil \leq \nu_d(\phi^{-1})$ . Or  $\nu_d(\phi^{-1}) = \nu_d(\phi)$  car  $\nu_d$  est une norme, nous avons donc

$$\nu_d(\phi) \geq \max \{ \lceil c(\phi) \rceil, \lceil c(\phi^{-1}) \rceil \} . \quad (15)$$

De plus si  $\max\{c(\phi), c(\phi^{-1})\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$  est un réel positif non entier, alors

$$\max \{ \lceil c(\phi) \rceil, \lceil c(\phi^{-1}) \rceil \} = \max \{ \lfloor c(\phi) \rfloor + 1, \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1 \},$$

et donc le lemme dans ce cas.

Il nous reste maintenant à traiter le cas où  $\max\{c(\phi), c(\phi^{-1})\} \in \mathbb{N}_{>0}$ .

Nous allons supposer que le max est égal à  $c(\phi)$ .

Nous allons considérer deux cas, le cas où  $c(\phi) = 1$  et le cas où  $c(\phi) > 1$ . Si  $c(\phi)$  vaut 1, d'après la discussion au début de la démonstration, quel que soit le chemin  $\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}$  qui rejoint  $\phi$  à l'identité,  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}_{t \in [0,1]}) \geq 2$ . Ainsi

$$\nu_d(\phi) \geq 2 = c(\phi) + 1 = \max\{\lfloor c(\phi) \rfloor + 1, \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1\}.$$

Ainsi le lemme est démontré dans le cas où  $c(\phi) = 1$ .

Il ne nous reste plus qu'à traiter le cas où  $c(\phi)$  est un entier  $k'$  plus grand que 2. D'après l'inégalité (15) que nous venons de montrer  $\nu_d(\phi) \geq k'$ . Montrons que  $\nu_d(\phi) \geq k' + 1$ . Supposons par l'absurde que  $\nu_d(\phi) = c(\phi) = k = k'$ . Comme au tout début de notre discussion, il existe alors par définition  $k$  contactomorphismes  $(\phi_i^1)_{i \in [1,k] \cap \mathbb{N}}$  et  $k$  chemins lisses  $\{\phi_i^t\}_{t \in [0,1]}$  de longueur discriminante 1 rejoignant  $\phi_i^1$  à l'identité pour tout  $i \in [1, k] \cap \mathbb{N}$ . Nous avons alors par l'inégalité triangulaire de la proposition 2.35 et la discussion du début :

$$k = c(\phi) \leq \sum_{i=1}^k \lceil c(\phi_i^1) \rceil \leq k$$

et donc pour tout  $i \in [1, k] \cap \mathbb{N}$ ,  $\lceil c(\phi_i^1) \rceil = 1$ . Ainsi pour tout  $i \in [1, k] \cap \mathbb{N}$ , nous avons  $c(\phi_i^1)$  qui est strictement positif (et strictement inférieur à 1). Appliquons alors l'inégalité triangulaire de la proposition 2.35 à la paire de contactomorphismes  $\Pi_{i=2}^k \phi_i^1$  et  $\phi_1^1$ . Dans la démonstration de cette proposition 2.35, nous avons montré que

$$\lceil c(\Pi_{i=2}^k \phi_i^1) \rceil \geq \lceil c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1) - c(\phi_1^1) \rceil.$$

Or nous avons supposé que  $c(\phi) = c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1)$  vaut un entier  $k$  et nous avons montré que  $c(\phi_1^1)$  est strictement positif (et inférieur à 1). Ainsi

$$\lceil c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1) - c(\phi_1^1) \rceil > c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1) - \lceil c(\phi_1^1) \rceil \text{ et donc } c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1) < \lceil c(\phi_1^1) \rceil + \lceil c(\Pi_{i=2}^k \phi_i^1) \rceil.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, la discussion précédente et celle du début nous avons la contradiction suivante :

$$k = c(\phi) = c(\Pi_{i=1}^k \phi_i^1) < \lceil c(\phi_1^1) \rceil + \lceil c(\Pi_{i=2}^k \phi_i^1) \rceil = \sum_{i=1}^k \lceil c(\phi_i^1) \rceil \leq k.$$

Ainsi  $\nu_d(\phi) > c(\phi)$  lorsque  $c(\phi)$  est un entier strictement positif. En admettant toujours que le max de  $\{c(\phi), c(\phi^{-1})\}$  est  $c(\phi)$  nous avons alors encore montré que :

$$\nu_d(\phi) \geq c(\phi) + 1 = \max\{\lfloor c(\phi) \rfloor + 1; \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1\}.$$

Pour traiter le cas où le max est réalisé par  $c(\phi^{-1})$  on raisonne exactement de la même façon mais avec le contactomorphisme  $\phi^{-1}$ .  $\square$

Le même lemme s'applique à la norme d'oscillation et cette fois-ci pour la démonstration nous utiliserons en plus des propriétés de continuité et d'inégalité du sélecteur de translation  $c : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st}) \rightarrow \mathbb{R}$ , la proposition 2.33 qui affirme que si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont deux éléments de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  tels que  $\phi_1 \leq \phi_2$  alors  $c(\phi_1) \leq c(\phi_2)$ .

**Lemme 4.15.** *Soit  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  différent de l'identité. Nous avons alors*

$$\nu_{osc}(\phi) \geq \max\left\{\lfloor c(\phi) \rfloor + 1, \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1\right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  différent de l'identité. Il existe par définition un élément  $\{\{\phi^t\}\} \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  tel que  $\phi^1 = \phi$  et

$$\nu_{osc}(\phi) = \widetilde{\nu}_{osc}(\{\{\phi^t\}\}) = \max\left\{\widetilde{\nu}_+^{osc}(\{\{\phi^t\}\}), -\widetilde{\nu}_-^{osc}(\{\{\phi^t\}\})\right\}.$$

Supposons alors que  $\widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}]) = k$ , cela implique qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  chemins lisses de contactomorphismes  $(\{\phi_i^t\}_{t \in [0,1]})_{i \in [1,N] \cap \mathbb{N}}$  tous de longueur discriminante 1 dont  $k$  d'entre eux sont positifs et  $N - k$  d'entre eux sont négatifs et tels que

$$\phi = \prod_{i=1}^N \phi_i^1.$$

De plus, nous déduisons de la proposition 2.33 que lorsque  $\{\varphi^t\}_{t \in [0,1]}$  est un chemin négatif de contactomorphismes  $c(\varphi^t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Ainsi  $c(\phi_i^1) = 0$  pour tout  $i \in [1, N]$  tel que  $\{\phi_i^t\}$  est un chemin négatif et  $c(\phi_i^1) < 1$  pour tout  $i \in [1, N]$  car  $\{\phi_i^t\}$  est un chemin de longueur discriminante 1. Nous déduisons alors, en utilisant l'inégalité triangulaire de la proposition 2.35 que  $\lceil c(\phi) \rceil \leq k = \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}])$ . Le même raisonnement que dans le lemme précédent assure que lorsque  $c(\phi) \in \mathbb{N}^*$ , alors  $c(\phi) + 1 \leq \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}])$ . On en déduit donc que

$$\widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}]) \geq \lfloor c(\phi) \rfloor + 1.$$

En remarquant que  $-\widetilde{\nu}_-^{osc}([\{\phi^t\}]) = \widetilde{\nu}_+^{osc}([\{\phi^t\}]^{-1})$ , le même raisonnement que précédemment nous permet de montrer que

$$-\widetilde{\nu}_-^{osc}([\{\phi^t\}]) \geq \lfloor c(\phi^{-1}) \rfloor + 1.$$

□

Nous avons donc tous les ingrédients pour démontrer les théorèmes 4.3 et 4.1

*Démonstration du théorème 4.3.* Dans le cas où la fonction  $h$  vérifie les hypothèses du théorème 4.3, le chemin  $\phi_h$  est un chemin à un paramètre. Calculons le  $t_0$  du lemme 4.12 :

$$t_0 = \inf \{ t > 0 \mid \exists x \in \text{Supp}(\phi_h), \phi_h^t(p, z) = (p, z), \text{ et } g_h^t(x) = 0 \}.$$

Or pour tout  $0 < t \leq 1$ ,  $\phi_h^t(p, z) = (p, z)$  et  $g_h^t(p, z) = 0$  si et seulement si  $(p, z)$  est un point  $k$ -translaté pour  $\phi_h^t$ , où  $k$  désigne un entier. Or nous avons vu dans les lemmes 4.5 et 4.11 que  $(p, z)$  est un point  $k$ -translaté de  $\phi_h^t$ , pour  $t \in ]0, 1]$ , si et seulement si  $p$  est un point critique de  $H$  et  $tH(p) = k$ . Ainsi nous avons

$$t_0 = \inf \left\{ t > 0 \mid \exists (p, z) \in \text{Supp}(\phi_h), d_p H = 0 \text{ et } tH(p) \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De plus, comme  $\text{Supp}(\phi_h) \subset \text{Supp}(h)$  et  $\text{Supp}(h) = \text{Supp}(H) \times S^1$  cela implique d'après le lemme 4.12, que  $\text{Supp}(\phi_h) \subset \text{Supp}(H) \times S^1$ . Or 0 est une valeur régulière à l'intérieur du support de  $H$  par hypothèse, ainsi  $t_0 > 0$  et :

$$\begin{aligned} t_0 &= \min \left\{ t > 0 \mid \exists p \in pr_{\mathbb{R}^{2n}}(\text{Supp}(\phi_h)), d_p H = 0 \text{ et } tH(p) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \min \left\{ t > 0 \mid \exists p \in pr_{\mathbb{R}^{2n}}(\text{Supp}(\phi_h)), d_p H = 0 \text{ et } t|H(p)| = 1 \right\} \\ &= \min \left\{ t > 0 \mid \exists p \in pr_{\mathbb{R}^{2n}}(\text{Supp}(\phi_h)), d_p H = 0 \text{ et } t = \frac{1}{|H(p)|} \right\} \\ &= \frac{1}{\max\{\max H; -\min H\}}. \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois le lemme 4.12 nous en déduisons que

$$\mathcal{L}_d(\phi_h) = \max\{\lfloor \max H + 1 \rfloor; \lfloor -\min H + 1 \rfloor\}.$$

D'autre part, le lemme 4.14 et le lemme 4.11 nous permettent d'affirmer que :

$$\nu_d(\phi_h^1) \geq \max \left\{ \lfloor c(\phi_h^1) \rfloor + 1; \left\lceil c((\phi_h^1)^{-1}) \right\rceil + 1 \right\} = \max \{ \lfloor \max H \rfloor + 1; \lfloor \min H \rfloor + 1 \} .$$

Or par définition de la norme discriminante nous avons que  $\mathcal{L}_d(\phi_h) \geq \nu_d(\phi_h^1)$ . En juxtaposant toutes ces inégalités nous obtenons

$$\max \{ \lfloor \max H + 1 \rfloor; \lfloor -\min H + 1 \rfloor \} = \mathcal{L}_d(\phi_h) \geq \nu_d(\phi_h^1) \geq \max \{ \lfloor \max H + 1 \rfloor; \lfloor -\min H + 1 \rfloor \} ,$$

et donc que ces inégalités sont bien des égalités. Enfin, comme la longueur discriminante et la norme discriminante sont invariantes par conjugaison nous déduisons le théorème 4.3

La démonstration du théorème 4.4 se fait exactement de la même façon car nous avons supposé dans les hypothèses que la fonction hamiltonienne  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est positive (respectivement négative). Dans ce cas  $\nu_{osc}(\phi_h^1) \leq \mathcal{L}_{osc}(\phi_h) = \mathcal{L}_d(\phi_h)$  vaut  $\lfloor \max H \rfloor + 1$  (respectivement  $\lfloor -\min H \rfloor + 1$ ). D'autre part les lemmes 4.15 et 4.11 nous assurent que

$$\nu_{osc}(\phi) \geq \lfloor \max H \rfloor + 1 \text{ (respectivement } \lfloor -\min H \rfloor + 1 \text{)} .$$

Nous déduisons une fois de plus le résultat en juxtaposant toutes ces inégalités. De plus comme la longueur d'oscillation et la norme d'oscillation sont invariantes par conjugaison nous déduisons le théorème 4.4  $\square$

Nous déduisons donc les corollaires suivants.

**Corollaire 4.16.** *Les normes  $\nu_{FPR}$ ,  $\nu_S$ ,  $\nu_d$ ,  $\nu_{osc}$  et  $\nu_{San}$  sont non bornées sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .*

Il est en effet facile de construire une fonction hamiltonienne lisse  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact telle que la hessienne de  $H$  soit petite mais que le maximum de  $H$  soit aussi grand que l'on veut car  $\mathbb{R}^{2n}$  n'est pas compact.

Rappelons qu'au chapitre 2 nous avons introduit une capacité de contact sur les domaines de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  construite par S. Sandon [42] définie pour tout  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  comme suit

$$c(U) = \sup \{ c(\phi) \mid \phi \in \text{Cont}_0^c(U, \xi_{st}) \} .$$

De plus nous avons montré à la proposition 2.40 que si  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  déplace  $U$  alors

$$c(U) \leq \lceil c(\phi) \rceil + \lceil c(\phi^{-1}) \rceil .$$

En utilisant le corollaire 4.10 et les lemmes 4.14, 4.15 nous déduisons alors le corollaire suivant.

**Corollaire 4.17.** *Soit  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  un contactomorphisme qui déplace un domaine  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . Nous avons alors*

$$\lceil \nu_S(\phi) \rceil \geq \frac{1}{2}c(U) \quad \text{et} \quad \nu(\phi) \geq \frac{1}{2}c(U)$$

où  $\nu$  dans la deuxième inégalité désigne la norme FPR, discriminante ou d'oscillation.

### Questions ouvertes :

1. Il n'est pas difficile de majorer la norme d'oscillation par la norme FPR du fait de la compatibilité de la norme d'oscillation et de la relation d'ordre (ceci reste vrai dans le cas général d'une variété de contact admettant une forme de contact dont le flot de Reeb est périodique). De même nous il est possible de majorer la norme FPR par la partie entière de la norme de E. Shelukhin [44]. Au vue des théorèmes 4.3, 4.4 et 4.1 il est naturel de se demander si toutes ces normes sont équivalentes. Rappelons que nous disons que  $\nu_1$  et  $\nu_2$  deux normes sur un groupe  $G$  sont équivalentes s'il existe  $A > 0$  tel que  $\frac{1}{A}\nu_1 \leq \nu_2 \leq A\nu_1$ .
2. Il est également intéressant de constater que lorsque  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction autonome vérifiant l'hypothèse que sa hessienne est suffisamment petite alors  $\psi_H$  est une géodésique minimale pour la métrique de Hofer (voir par exemple [9] ou [30]). Il serait alors intéressant de se demander quelles sont les géodésiques minimales de la métrique de Hofer qui se relèvent (par le procédé de relèvement de contact) en des géodésiques pour la norme de Shelukhin, la norme discriminante et celle d'oscillation.
3. Nous disons qu'une norme  $\nu$  sur un groupe  $G$  est stablement non bornée s'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu(g^n)}{n} > 0$ . Il est bien connu que la métrique de Hofer sur  $\text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  n'est pas stablement non bornée. En effet J.-C. Sikorav démontre dans [47] que la norme d'un symplectomorphisme hamiltonien à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  est toujours plus petite que l'énergie de déplacement de son support multipliée par une certaine constante. Il serait intéressant de savoir si cela est le cas également pour la norme discriminante, la norme d'oscillation et celles de FPR et de Shelukhin sur  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$ .



## 5 Sur les variétés de contact ordonnables n'admettant pas de flot de Reeb périodique et le cotangent unitaire du tore

Au chapitre [3](#) nous avons défini la norme FPR dans le cas d'une variété de contact ordonnable qui admettait un flot de Reeb périodique. Nous avons alors vu que c'était une norme invariante par conjugaison compatible avec la relation d'ordre et qu'elle était de plus stablement non bornée dans le cas où la variété de contact est compacte. Dans ce chapitre, nous étudierons des variantes de cette norme dans le cas de variétés de contact compactes n'admettant pas forcément de flot de Reeb périodique. Une fois une forme de contact fixée, ces variantes sont des pseudo-normes définies sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes. Tout comme dans le cas de la norme FPR nous montrerons que ces (pseudo)-normes sont stablement non bornées - en considérant les puissances de la classe du flot de Reeb - et qu'elles sont compatibles avec la relation d'ordre partielle. Elle ne sont cependant pas forcément invariantes par conjugaison.

Dans la deuxième section nous étudierons ces (pseudo)-normes sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes du cotangent unitaire du tore. Dans ce cas nous arrivons à calculer les normes d'une famille d'éléments plus grande que sur une variété de contact compacte ordonnable générale. En particulier cette famille d'éléments contient les puissances de la classe du flot de Reeb. Nous montrons également que la norme de tout élément de cette famille minore la norme du conjugué de cet élément par n'importe quel autre contactomorphisme. L'outil que nous utiliserons pour avoir ces résultats est le *shape* qui est un invariant symplectique introduit par J.-C. Sikorav [\[46\]](#) et Y. Eliashberg [\[18\]](#).

Enfin, dans la troisième sous-section nous discuterons de la question (ouverte) d'existence de normes invariantes par conjugaison non bornées sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes du cotangent unitaire du tore.

### 5.1 Variantes de la norme FPR

Dans tout ce chapitre (sauf mention contraire)  $(M, \xi)$  désignera une variété de contact compacte co-orientable et ordonnable. Choisissons  $\alpha$  et notons  $\phi_{R_\alpha}$  le flot de Reeb engendré par le champ de Reeb  $R_\alpha$ . Pour tout  $c \in \mathbb{R}$  nous notons  $\phi_{cR_\alpha} := \{\phi_{R_\alpha}^{ct}\}_{t \in [0,1]}$ . Nous avons vu au chapitre 3 que les applications qui à un élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  associent les nombres

$$\widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) = \min \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\phi_{R_\alpha}]^n \succeq [\{\phi^t\}] \right\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) = \max \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{R_\alpha}]^n \right\}$$

sont bien définies et définissent une norme

$$\widetilde{\nu}^\alpha = \max \left\{ \widetilde{\nu}_+^\alpha, -\widetilde{\nu}_-^\alpha \right\} .$$

Rappelons que nous disons qu'une norme  $\nu$  sur un groupe  $G$  est stablement non bornée s'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\nu(g^n)}{n} > 0$ .

**Lemme 5.1.** *La norme  $\widetilde{\nu}^\alpha$  est stablement non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ .*

*Démonstration.* Il est immédiat dans ce cas que  $\widetilde{\nu}^\alpha([\phi_{R_\alpha}]^n) = \widetilde{\nu}^\alpha([\phi_{nR_\alpha}]) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Sous les mêmes hypothèses sur la variété de contact  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  nous pouvons définir une variante des applications précédentes de la manière suivante

$$\widetilde{\mu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) = \inf \left\{ c \in \mathbb{R} \mid [\phi_{cR_\alpha}] \succeq [\{\phi^t\}] \right\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) = \sup \left\{ c \in \mathbb{R} \mid [\{\phi^t\}] \succeq [\phi_{cR_\alpha}] \right\}$$

pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  et définir l'application

$$\widetilde{\mu}^\alpha := \max \left\{ \widetilde{\mu}_+^\alpha, -\widetilde{\mu}_-^\alpha \right\} .$$

**Lemme 5.2.** *L'application  $\widetilde{\mu}^\alpha$  est une pseudo-norme sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$ .*

Rappelons qu'une pseudo norme  $\nu$  sur un groupe  $G$  est une application à valeurs positives qui vaut 0 en l'élément neutre du groupe (et éventuellement en d'autres éléments) et telle que pour tout  $g_1, g_2 \in G$  :

1.  $\nu(g_1 g_2) \leq \nu(g_1) + \nu(g_2)$ , et
2.  $\nu(g_1) = \nu(g_1^{-1})$ .

*Démonstration.* La démonstration de ce lemme se fait exactement de la même façon que le lemme [3.21](#). Le fait qu'il existe éventuellement des éléments  $[\{\phi^t\}] \neq \text{Id} \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  dont la norme est nulle provient du fait que nous prenons cette fois-ci l'infimum sur l'ensemble des réels et non plus des entiers.  $\square$

**Lemme 5.3.** *La pseudo-norme  $\widetilde{\mu}^\alpha$  est stablement non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ .*

*Démonstration.* La démonstration se fait exactement de la même façon que celle du lemme [5.1](#).  $\square$

*Remarque 5.4.* Le lecteur pourra lire la même remarque dans [10](#). Toute pseudo-norme non bornée  $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  sur un groupe  $G$  donne naissance à une norme non bornée. En effet, il suffit de considérer l'application  $\nu : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui vaut 0 en l'élément neutre du groupe et pour tout  $g \in G$  différent de l'élément neutre définir  $\nu(g) = \mu(g) + 1$ . De plus si  $\mu$  est invariante par conjugaison la norme  $\nu$  sera également invariante par conjugaison.

Il est intéressant de noter que ces applications sont compatibles avec la relation d'ordre. Plus précisément, nous avons le lemme suivant.

**Lemme 5.5.** *Soient  $[\{\phi_1^t\}]$  et  $[\{\phi_2^t\}]$  deux éléments de  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  tels que  $[\{\phi_2^t\}] \succeq [\{\phi_1^t\}] \succeq \text{Id}$  nous avons alors*

$$\widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi_2^t\}]) \geq \widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi_1^t\}]) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu}^\alpha([\{\phi_2^t\}]) \geq \widetilde{\mu}^\alpha([\{\phi_1^t\}]) .$$

Ce lemme découle directement de la définition des applications et de la transitivité de la relation d'ordre. Nous laissons sa démonstration au lecteur.

Le lemme qui suit sera utile pour calculer la norme d'éléments qui ne sont dans la classe des itérés du flot de Reeb. Rappelons qu'une fois que nous fixons une forme de contact  $\alpha$  sur  $(M, \xi)$  nous associons à une fonction  $h : S^1 \times M \rightarrow \mathbb{R}$  un chemin lisse de contactomorphismes  $\phi_h := \{\phi_h^t\}_{t \in [0,1]}$ .

**Lemme 5.6.** *Pour tout élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(M, \xi)$  nous avons les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) &= \min \left\{ \left[ \max_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) &= - \min \left\{ \left[ -\min_{t,x} h^t(x) \right] \mid h \in \mathcal{C}^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\mu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) &= \inf \left\{ \max_{t,x} h^t(x) \mid h \in \mathcal{C}^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\mu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) &= - \inf \left\{ -\min_{t,x} h^t(x) \mid h \in \mathcal{C}^\infty(S^1 \times M, \mathbb{R}), [\phi_h] = [\{\phi^t\}] \right\} . \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous avons déjà démontré les deux premières égalités au lemme [3.24](#). Les deux dernières égalités se démontrent exactement de la même façon.  $\square$

Muni du lemme précédent, nous démontrons dans le prochain lemme que si  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont deux formes de contact sur  $(M, \xi)$  qui définissent la même co-orientation, alors les normes  $\widetilde{\nu}^\alpha$  et  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}$  sont équivalentes. De même les normes  $\widetilde{\mu}^\alpha$  et  $\widetilde{\mu}^{\alpha'}$  sont également équivalentes. Plus précisément donnons-nous deux formes de contact  $\alpha$  et  $\alpha'$  qui définissent la même co-orientation. Il existe ainsi une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  telle que  $\alpha' = f\alpha$ .

**Lemme 5.7.** *Nous avons :*

$$\frac{1}{\lceil \max 1/f \rceil} \widetilde{\nu}^\alpha \leq \widetilde{\nu}^{\alpha'} \leq \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}^\alpha$$

et

$$\min f \widetilde{\mu}^\alpha \leq \widetilde{\mu}^{\alpha'} \leq \max f \widetilde{\mu}^\alpha .$$

*Démonstration.* Nous déduisons du lemme précédent [3.24](#) que

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) &= \min \left\{ \left\lceil \max_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rceil \mid \{\varphi^t\} = [\{\phi^t\}] \right\} \\ \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) &= \max \left\{ \left\lfloor \min_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rfloor \mid \{\varphi^t\} = [\{\phi^t\}] \right\} . \end{aligned}$$

- Supposons que  $\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) > 0$ . Comme la positivité ou la négativité d'un chemin ne dépend pas de la forme de contact choisie cela implique que  $\widetilde{\nu}_-^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) > 0$  et donc que  $\widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}]) = \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}])$  et  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) = \widetilde{\nu}_+^{\alpha'}([\{\phi^t\}])$ . Soit  $\{\varphi^t\}$  un représentant de  $[\{\phi^t\}]$  tel que  $\widetilde{\nu}_+^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) = \left\lceil \max_{x,t} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rceil$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} 0 < \max_{t,x} \alpha'_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) &= \max_{x,t} f(\varphi^t(x)) \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \\ &\leq (\max_x f) \max_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \end{aligned}$$

et nous en déduisons ainsi que

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}_+^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) &\leq \left\lceil \max_{t,x} \alpha'_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rceil \leq \lceil \max_x f \rceil \left\lceil \max_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rceil \\ &= \lceil \max_x f \rceil \widetilde{\nu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) . \end{aligned}$$

Dans ce premier cas nous avons donc  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) \leq \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}])$ .

- Supposons que  $\widetilde{\nu}_+^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) < 0$ . Comme précédemment, cela permet de conclure que  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) = -\widetilde{\nu}_-^{\alpha'}([\{\phi^t\}])$  et  $\widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}]) = -\widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}])$ . Considérons  $\{\varphi^t\}$  un représentant de  $[\{\phi^t\}]$  tel que  $\widetilde{\nu}_-^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) = \left\lfloor \min_{t,x} \alpha'_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rfloor < 0$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} (\max_x f) \min_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) &\leq \min_{t,x} \alpha'_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \\ &= \min_{x,t} f(\varphi^t(x)) \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \leq 0 . \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$\begin{aligned} \left\lceil (\max_x f) \right\rceil \left\lfloor \min_{t,x} \alpha_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rfloor &= \lceil \max_x f \rceil \widetilde{\nu}_-^\alpha([\{\phi^t\}]) \leq \left\lfloor \min_{t,x} \alpha'_{\varphi^t(x)} \left( \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right) \right\rfloor \\ &\leq \widetilde{\nu}_-^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) . \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce deuxième cas, nous avons à nouveau  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}([\{\phi^t\}]) \leq \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}])$ .

3. Enfin, dans le troisième cas où  $\widetilde{\nu}_+^\alpha(\{\phi^t\}) \geq 0$  et  $\widetilde{\nu}^\alpha(\{\phi^t\}) \leq 0$ , les mêmes démonstrations que données au-dessus permettent de déduire que  $\widetilde{\nu}_+^{\alpha'}(\{\phi^t\}) \leq \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}_+^\alpha(\{\phi^t\})$  et  $\widetilde{\nu}_-^{\alpha'}(\{\phi^t\}) \geq \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}_-^\alpha(\{\phi^t\})$ , et donc nous concluons encore une fois que

$$\widetilde{\nu}^{\alpha'}(\{\phi^t\}) \leq \max \left\{ \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}_+^\alpha(\{\phi^t\}), -\lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}_-^\alpha(\{\phi^t\}) \right\} = \lceil \max f \rceil \widetilde{\nu}^\alpha(\{\phi^t\}) .$$

Nous déduisons l'autre inégalité en remarquant que  $\alpha = (1/f)\alpha'$ .

La deuxième ligne d'inégalités se démontre de manière similaire.  $\square$

## 5.2 Étude de ces normes dans le cas du cotangent unitaire du tore

Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier plus grand que 2. Nous appelons tore de dimension  $n$  la variété  $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = (S^1)^n$ . Rappelons que le cotangent unitaire du tore par définition est la variété  $\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n := (T^*\mathbb{T}^n \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n})/\mathbb{R}_{>0}$ , où  $\mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}$  désigne la section nulle du cotangent et où l'action de  $\mathbb{R}_{>0}$  sur  $T^*\mathbb{T}^n \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}$  est donnée par la multiplication des covecteurs. Nous avons vu au chapitre 2 que cette variété est munie d'une structure de contact canonique. En effet, la distribution  $\text{Ker}(\lambda_{\mathbb{T}^n})$  sur  $T^*\mathbb{T}^n \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}$  - où  $\lambda_{\mathbb{T}^n}$  désigne la forme de Liouville du cotangent - passe au quotient en une distribution  $\xi_{\mathbb{T}^n}$  sur  $\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n$ . Cette dernière distribution est de contact et c'est celle que nous étudions dans cette sous-section.

Nous déduisons du théorème 2.13 du chapitre 2 que le cotangent unitaire du tore de dimension  $n$  est une variété ordonnable et donc les (pseudo)-normes de la sous-section précédente y sont bien définies. En effet, en notant  $(q_1, \dots, q_n)$  les fonctions coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$  les 1-formes  $(dq_1, \dots, dq_n)$  passent au quotient en des 1-formes sur  $\mathbb{T}^n$  que nous notons encore  $(dq_1, \dots, dq_n)$ . Il est alors facile de voir que  $dq_i$  est une 1-forme fermée sur  $\mathbb{T}^n$  qui ne s'annule jamais pour tout  $i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ . Le théorème 2.13 permet alors de conclure.

Remarquons de plus que  $(dq_1, \dots, dq_n)$  sont  $n$  sections linéairement indépendantes de  $T^*\mathbb{R}^n$ . Nous pouvons de ce fait identifier  $T^*\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  muni des fonctions coordonnées  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . Ainsi, d'après la démonstration du lemme 2.14, en munissant  $\mathbb{R}^n$  de la métrique euclidienne standard, nous pouvons identifier son cotangent unitaire  $(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{R}^n, \xi_{\mathbb{R}^n})$  à  $(\mathbb{R}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\sum_{i=1}^n p_i dq_i))$ , où  $S^{n-1}$  désigne la sphère unité standard. Cette construction passe au quotient et donc à partir de maintenant nous identifions le cotangent unitaire du tore  $(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n})$  à  $(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\sum_{i=1}^n p_i dq_i))$ . Nous notons  $\alpha$  la 1-forme  $\sum_{i=1}^n p_i dq_i$  que nous fixons pour étudier la structure de contact. Nous fixons par la même occasion l'isomorphisme entre fonctions hamiltoniennes et champs de vecteurs de contact (voir le lemme 0.23 du chapitre 0). Nous notons  $\phi_h$  le chemin de contactomorphismes engendré par une fonction hamiltonienne  $h$ .

De plus V. Chernov et S. Nemirovski montrent ([13] au corollaire 9.1 et exemple 9.2) que si  $M$  est une variété fermée de dimension plus grande que 2 et que son groupe fondamental est infini alors il n'existe pas de lacets strictement positifs de contactomorphismes (contractiles ou non) dans  $\text{Cont}_0(\mathbb{P}^+T^*M, \xi_M)$ . De la description précédente, il est clair que le groupe fondamental de  $\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n$  est infini pour tout  $n \in \mathbb{N}$  plus grand que 2 : en effet, pour  $n = 2$  il vaut  $\mathbb{Z}^3$  et pour tout  $n \geq 3$  il est égale à  $\mathbb{Z}^n$ . Nous en déduisons donc qu'il n'existe pas de forme de contact pour  $\xi_{\mathbb{T}^n}$  tel que son flot de Reeb soit périodique. C'est pour cette raison que nous ne pouvons pas étudier à proprement parler la norme FPR sur le revêtement universel de son groupe de contactomorphismes mais que nous pouvons néanmoins étudier les (pseudo)-normes introduites dans la sous-partie précédente. Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 5.8.** Soit  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse et considérons la fonction hamiltonienne

$$\begin{aligned} h : \mathbb{T}^n \times S^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\mapsto f(p) . \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\widetilde{\nu}^\alpha([\phi_h]) = \max \{ \lceil \max h \rceil, \lceil -\min h \rceil \} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu}^\alpha([\phi_h]) = \max \{ \max h, -\min h \} .$$

De plus pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$

$$\widetilde{\nu}^\alpha([\phi \circ \phi_h \circ \phi^{-1}]) \geq \widetilde{\nu}^\alpha([\phi_h]) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu}^\alpha([\phi \circ \phi_h \circ \phi^{-1}]) \geq \widetilde{\mu}^\alpha([\phi_h]) .$$

*Remarque 5.9.* En adaptant au cas de contact la reparamétrisation des chemins de symplectomorphismes hamiltoniens que L. Polterovich présente dans son livre [40] au chapitre 5, il serait intéressant de voir si la norme de Shelukhin d'un élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker} \alpha)$  peut être exprimée comme étant

$$\inf \left\{ \max_{t,x} |k^t(x)| \mid k \in \mathcal{C}^\infty(S^1 \times (\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \mathbb{R})), [\phi_k] = [\{\phi^t\}] \right\} .$$

Le théorème précédent s'appliquerait, dans ce cas, aussi bien à  $\widetilde{\mu}^\alpha$  qu'à  $\widetilde{\nu}_S^\alpha$ . En particulier en reprenant les hypothèses du théorème,  $\phi_h$  serait une géodésique de la norme de Shelukhin.

L'idée de la démonstration de ce théorème est de s'intéresser aux sous-ensembles délimités par les graphes des fonctions hamiltoniennes (que nous voyons dans la symplectisation) qui engendrent l'élément  $[\phi_h]$ . Nous montrerons - en utilisant le chapitre 1 - que quelle que soit la fonction hamiltonienne  $k$  qui engendre  $[\phi_h]$ , les deux régions délimitées par le graphe d'une telle fonction sont respectivement symplectomorphes aux deux régions délimitées par le graphe de la fonction hamiltonienne  $h$  du théorème. De plus, d'après les hypothèses que nous faisons sur la fonction hamiltonienne  $h$ , chacune des deux régions délimitées sera feuilletée par une famille de tores lagrangiens. D'après un théorème de M. Gromov [27] (que nous énonçons ci-dessous [5.10]), nous déduirons que chacune des deux familles de tores lagrangiens intersectent respectivement chacune des deux régions délimitées par le graphe de  $k$ . Cela nous permettra alors de montrer les égalités du théorèmes. Nous démontrerons les inégalités du théorème de la même façon.

Le résultat fondamental de M. Gromov pour démontrer le théorème précédent est un résultat d'intersection de lagrangiennes exactes du cotangent d'une variété  $M$  fermée muni de sa forme symplectique canonique  $(T^*M, d\lambda_M)$ . Rappelons que nous disons qu'une lagrangienne  $L \subset T^*M$  est exacte si  $\lambda_M|_L$  est, en plus d'être fermée, une forme exacte.

**Théorème 5.10** (M. Gromov [27]). Soit  $M$  une variété fermée et  $L \subset T^*M$  une lagrangienne compacte exacte. Alors  $L$  intersecte la section nulle, c'est-à-dire que  $L \cap \mathcal{O}_M \neq \emptyset$ .

Le lecteur pourra voir une démonstration de ce théorème dans [27]. Les techniques utilisées dans la démonstration de ce théorème n'ont pas été introduites dans cette thèse et proviennent de l'étude de courbes pseudo-holomorphes. Remarquons néanmoins que dans le cas où  $L$  est l'image de la section nulle par un difféomorphisme hamiltonien de  $(T^*M, d\lambda_M)$  alors  $L$  est exacte et nous pouvons démontrer ce résultat avec l'outil des fonctions génératrices.

Dans la sous-section suivante nous allons utiliser ce résultat de M. Gromov, dans le cas où la variété  $M$  désigne le tore de dimension  $N \in \mathbb{N}^*$ , pour définir un invariant (par symplectomorphisme hamiltonien) algébrique appelé le *shape* introduit par J.-C. Sikorav [46] et Y. Eliashberg [18]. C'est dans ce langage un peu plus algébrique que nous démontrerons le théorème [5.8].

*Remarque 5.11.* Dans le cas où  $n = 1$  le cotangent unitaire du tore de dimension 1 n'est pas connexe et peut être identifié à  $(S^1 \times \{\pm 1\}, \text{Ker}(dq))$ . En travaillant sur une seule des deux composantes connexes, c'est-à-dire lorsque l'on considère la variété de contact  $(S^1, \text{Ker}(dq))$ , le théorème 5.8 reste vrai. Les fonctions  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  sont alors les fonctions constantes. Notons que dans ce cas  $\text{Cont}_0(S^1, \text{Ker}(dz))$  est égal à  $\text{Diff}_0(S^1)$ , le groupe des difféomorphismes de  $S^1$  qui préservent l'orientation. Il est bien connu qu'il n'existe pas de normes bi-invariantes non bornées sur ce groupe [10]. Par contre le flot de Reeb associé à la forme de contact  $dz$  est bien périodique, et donc la norme FPR (qui coïncide alors avec la norme  $\widehat{\nu}^{dz}$ ) est un exemple de normes invariantes par conjugaison (stablement) non bornées sur son revêtement universel  $\widehat{\text{Diff}}_0(S^1) = \widehat{\text{Cont}}_0(S^1, \text{Ker}(dz))$ .

### 5.2.1 Le *shape* dans $(T^*\mathbb{T}^N, d\lambda_{\mathbb{T}^N})$

Soit  $N \in \mathbb{N}_{>0}$ . Munissons  $\mathbb{R}^N$  des fonctions coordonnées  $(q_1, \dots, q_N)$ . Les 1-formes  $dq_1, \dots, dq_N$  sont  $N$  sections linéairement indépendantes de  $T^*\mathbb{R}^N$ , et donc nous pouvons identifier  $T^*\mathbb{R}^N$  à  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ . Ces 1-formes passent au quotient en des 1-formes que nous notons encore  $dq_1, \dots, dq_N \in \Omega^1(\mathbb{T}^N)$ . Notons qu'encore une fois  $(dq_1, \dots, dq_N)$  sont  $N$  sections linéairement indépendantes de  $T^*\mathbb{T}^N$ , et donc nous pouvons identifier  $T^*\mathbb{T}^N$  à  $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ . En notant  $\eta : T^*\mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  l'identification, il est facile de voir que  $\eta_*\lambda_{\mathbb{T}^N} = \sum_{i=1}^N p_i dq_i$ , où  $(p_1, \dots, p_N)$  désignent les coordonnées sur  $\mathbb{R}^N$  et  $\lambda_{\mathbb{T}^n}$  la forme de Liouville du cotangent. Ainsi nous verrons la variété symplectique  $(T^*\mathbb{T}^N, d\lambda_{\mathbb{T}^N})$  comme  $(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, d\sum_{i=1}^N p_i dq_i)$ . Notons enfin que pour tout  $i \in [1; N] \cap \mathbb{N}$ , les formes  $dq_i \in \Omega^1(\mathbb{T}^N)$  sont fermées mais ne sont pas des formes exactes (bien que les notations puissent nous induire en erreur). Il suffit pour cela de constater qu'il existe des chemins fermés lisses de  $\mathbb{T}^N$  sur lesquels l'intégrale de  $dq_i$  le long de ce chemin est non nulle. Ainsi, nous pouvons choisir  $([dq_i])_{i \in [1; N] \cap \mathbb{N}}$  comme base de  $H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$ . Notons alors  $\Gamma_N : H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^N$  l'isomorphisme d'espace vectoriel défini par  $\Gamma_N([dq_i]) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0, \dots, 0)$  pour tout  $i \in [1; N] \cap \mathbb{N}$ .

**Définition 5.12.** Nous disons qu'un plongement  $\chi : \mathbb{T}^N \hookrightarrow \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  est lagrangien standard si :

1.  $d\chi^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) = 0$  (définition d'un plongement lagrangien)
2. l'application  $\chi^* : H^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$  induite par  $\chi$  est la même que celle induite par  $i : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  définie par  $i(q) = (q, 0)$ .

Nous avons alors la proposition suivante.

**Proposition 5.13** (J.-C. Sikorav [46]). *Si  $\chi : \mathbb{T}^N \hookrightarrow \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  est un plongement lagrangien standard et que  $[\chi^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] = a \in H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$ , alors nous avons*

$$\chi(\mathbb{T}^N) \cap \mathbb{T}^N \times \{\Gamma(a)\} \neq \emptyset .$$

*Démonstration.* Considérons le symplectomorphisme  $\psi_u \in \text{Symp}_0(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, d(\sum_{i=1}^N p_i dq_i))$  défini comme  $\psi_u(q, p) = (q, p + u)$  pour tout  $(q, p) \in \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  et  $u \in \mathbb{R}^N$ . Ainsi  $\psi_u \circ \chi$  est encore un plongement lagrangien pour tout  $u \in \mathbb{R}^N$ ,

$$d(\psi_u \circ \chi)^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) = d\chi^*\psi_u^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) = \chi^*\psi_u^*d(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) = \chi^*d(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) = 0 .$$

Nous pouvons être plus précis dans les calculs en calculant explicitement  $(\psi_u \circ \chi)^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)$  à une forme exacte près :

$$\begin{aligned} [(\psi_u \circ \chi)^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] &= [\chi^* \psi_u^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] = [\chi^*(\underbrace{(\sum_{i=1}^N p_i dq_i) + \sum_{i=1}^N u_i dq_i}_{\text{forme fermée}})] \\ &= [\chi^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] + \chi^*[(\sum_{i=1}^N u_i dq_i)] \\ &= a + \chi^*[(\sum_{i=1}^N u_i dq_i)] , \end{aligned}$$

or  $\chi^* = i^* : H^1(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R})$  car  $\chi$  est standard, ainsi

$$[(\psi_u \circ \chi)^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] = a - \sum_{i=1}^N u_i [dq_i] .$$

En prenant  $u = -\Gamma_N(a)$ , nous avons que  $[(\psi_u \circ \chi)^*(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)] = 0$ , ce qui revient à dire dans ce cas que l'image du plongement  $\psi_u \circ \chi$  est une lagrangienne exacte. Le théorème [5.10](#) permet donc de conclure que

$$\psi_u \circ \chi(\mathbb{T}^N) \cap \mathbb{T}^N \times \{0\} \neq \emptyset \text{ et donc que } \chi(\mathbb{T}^N) \cap \underbrace{\psi_{-u}(\mathbb{T}^N \times \{0\})}_{\mathbb{T}^N \times \{\Gamma(a)\}} \neq \emptyset .$$

□

Il sera intéressant pour la suite d'encoder les informations de cette proposition dans l'invariant algébrique que l'on définit ci-dessous.

**Définition 5.14** (*Shape* [118](#)). Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ , on définit alors son *shape* comme l'ensemble suivant :

$$\text{Shape}(V) := \left\{ u \in H^1(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}) \mid \exists \chi : \mathbb{T}^N \hookrightarrow V \text{ plongement lagrangien standard, } [\chi^* \sum_{i=1}^N p_i dq_i] = u \right\} .$$

Citons les propriétés du *shape* qui nous intéresseront pour la suite.

**Proposition 5.15.** 1. Pour tout  $\Psi \in \text{Ham}\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, d\left(\sum_{i=1}^N p_i dq_i\right)\right)$ , et pour tout ouvert

$V \subset \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  nous avons

$$\text{Shape}(V) = \text{Shape}(\Psi(V)) .$$

2. Si  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  alors

$$\Gamma_N(\text{Shape}(\mathbb{T}^N \times U)) = U .$$

*Démonstration.* 1. Montrons le premier point de la proposition.

Comme  $\Psi \in \text{Ham}\left(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, d\left(\sum_{i=1}^N p_i dq_i\right)\right)$ , il existe une fonction lisse  $F : \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\Psi^*\left(\sum_{i=1}^N p_i dq_i\right) - \sum_{i=1}^N p_i dq_i = dF .$$

Nous avons alors que

$$[(\Psi \circ \chi)^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)] = [\chi^* \Psi^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)] = [\chi^* \left( \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right) + dF \right)] = [\chi^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)] .$$

Ainsi,  $[\Psi^* \chi^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)] = [\chi^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)]$ . De plus comme  $\Psi$  est hamiltonien,  $\Psi \circ \chi$  est un plongement lagrangien standard. Si  $u \in \text{Shape}(V)$  cela implique donc que  $u \in \text{Shape}(\Psi(V))$ . L'autre inclusion se fait exactement de la même manière.

2. Montrons le deuxième point de la proposition. Dans un premier temps montrons, que  $U \subset \Gamma_N(\text{Shape}(\mathbb{T}^N \times U))$ . Soit  $u = (u_1, \dots, u_n) \in U$ , et considérons le plongement lagrangien standard suivant :

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{T}^N &\hookrightarrow \mathbb{T}^N \times U \\ q &\mapsto (q, u) . \end{aligned}$$

Nous avons alors  $[\chi^* \left( \sum_{i=1}^N p_i dq_i \right)] = \left[ \sum_{i=1}^N u_i dq_i \right] = \sum_{i=1}^N u_i [dq_i]$ . Or

$$\Gamma_N \left( \sum_{i=1}^N u_i [dq_i] \right) = \sum_{i=1}^N u_i (\Gamma_N [dq_i]) = u .$$

Donc  $U \subset \Gamma_N(\text{Shape}(\mathbb{T}^N \times U))$ .

Montrons maintenant l'inclusion inverse. Soit  $a \in \text{Shape}_N(\mathbb{T}^N \times U)$ . D'après la proposition [5.13](#) nous avons

$$\mathbb{T}^N \times \{\Gamma(a)\} \cap \mathbb{T}^N \times U \neq \emptyset, \text{ et donc que } \Gamma(a) \in U.$$

Nous avons bien l'inclusion dans l'autre sens et donc l'égalité des deux ensembles.  $\square$

*Remarque 5.16.* Dans la suite nous allons utiliser une variante du premier point de la proposition précédente. Nous construirons en effet des éléments  $\Psi \in \text{Ham}(\mathcal{O}, d(\sum_{i=1}^N p_i dq_i)|_{\mathcal{O}})$  où  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ . Nous affirmons que le théorème précédent s'applique encore dans ce cas, c'est-à-dire que si  $V \subset \mathcal{O}$  est un ouvert alors  $\text{Shape}(\Psi(V)) = \text{Shape}(V)$ . En effet si  $\chi : \mathbb{T}^N \hookrightarrow V$  est un plongement lagrangien standard, et si  $H : [0, 1] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$  est fonction hamiltonienne associée à  $\Psi$ , i.e. le flot de  $H$  au temps 1 vaut  $\Psi$ , nous pouvons la multiplier par une fonction *cutoff* qui vaut 1 dans un voisinage contenant  $\bigcup_{t \in [0, 1]} \Psi_H^t(\text{Im}(\chi))$ , et 0 partout en dehors d'un compact. Notons cette nouvelle fonction  $H_\chi : [0, 1] \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi nous pouvons prolonger cette nouvelle fonction  $H_\chi$  de manière lisse sur  $[0, 1] \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$  en une fonction  $\tilde{H}_\chi$  qui vaut 0 sur  $[0, 1] \times ((\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus \mathcal{O})$ . Notons  $\Psi_\chi \in \text{Ham}(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N, d \sum_{i=1}^N p_i dq_i)$  le symplectomorphisme hamiltonien qu'elle engendre. Nous l'avons construit de telle sorte que  $\Psi_\chi(\text{Im}(\chi)) = \Psi(\text{Im}(\chi)) \subset \Psi(V)$ . Nous pouvons faire cela pour tout plongement lagrangien standard dans  $V$  et donc pour les mêmes raisons qu'avant nous avons bien

$$\text{Shape}(\Psi(V)) = \text{Shape}(V) .$$

## 5.2.2 Démonstration du théorème [5.8](#)

Rappelons que pour  $n$  un entier plus grand que 2 nous avons identifié le cotangent unitaire du tore  $(\mathbb{P}^+ T^* \mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n})$  à  $(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\sum_{i=1}^n p_i dq_i)|_{\mathbb{T}^n \times S^{n-1}})$  et que nous notons  $\alpha :=$



$(\sum_{i=1}^n p_i dq_i)_{|\mathbb{T}^n \times S^{n-1}}$ . Nous identifions la symplectisation du cotangent unitaire au cotangent privé de la section nulle via l'application suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha)) &\rightarrow (\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d(\sum_{i=1}^n p_i dq_i)_{|\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}}) \\ (q, p, \theta) &\mapsto (q, e^\theta p) . \end{aligned}$$

Ainsi à toute fonction hamiltonienne périodique du cotangent unitaire du tore  $h : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction hamiltonienne homogène pour tout  $t \in S^1$  correspondante de la symplectisation est définie comme suit

$$\begin{aligned} H : S^1 \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, q, p) &\mapsto \|p\| h^t \left( q, \frac{p}{\|p\|} \right) , \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne provenant du produit scalaire standard de  $\mathbb{R}^n$ . Nous disons ici que  $K : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  est homogène si  $K(q, \lambda p) = \lambda K(q, p)$  pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $(q, p) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Nous notons  $\phi_h$  le flot de contactomorphismes de  $(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  engendré par  $h$ , et  $\psi_H$  le flot de symplectomorphismes hamiltoniens de  $(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d(\sum_{i=1}^n p_i dq_i)_{|\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}})$  engendré par  $H$ . Enfin, en remarquant que  $\mathbb{T}^n \times S^1 = \mathbb{T}^{n+1}$ , nous pouvons associer à la fonction  $h$  les ouverts de  $\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$  suivants :

$$\begin{aligned} V^+(h) &:= \{(q, t, p, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} \mid r + H^t(q, p) > 0\} \\ V^-(h) &:= \{(q, t, p, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} \mid r + H^t(q, p) < 0\} , \end{aligned}$$

où  $\mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} := \{(0, \dots, 0, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$ . Ces ouverts ont des propriétés très agréables pour étudier les éléments de  $\text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  que nous allons montrer dans les deux lemmes suivants.

**Lemme 5.17.** *Soient  $h_1, h_2 : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions hamiltoniennes lisses telles que les chemins de contactomorphismes associées  $\phi_{h_1}$  et  $\phi_{h_2}$  sont dans la même classe d'isotopie, i.e.  $[\phi_{h_1}] = [\phi_{h_2}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$ . Il existe alors*

$$\Psi \in \text{Ham} \left( \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i \right) \text{ tel que } \Psi(V^\pm(h_1)) = V^\pm(h_2) .$$

Avant de démontrer ce lemme, remarquons que nous avons alors le corollaire suivant.

**Corollaire 5.18.** *Soient  $h_1$  et  $h_2$  des fonctions hamiltoniennes lisses qui vérifient les hypothèses du lemme 5.17 alors :*

$$\text{Shape}(V^\pm(h_1)) = \text{Shape}(V^\pm(h_2)) .$$

Cela se déduit directement du lemme précédent 5.17 ainsi que de la remarque 5.16. Démontrons donc le lemme 5.17.

*Démonstration.* D'après les hypothèses,  $t \mapsto \phi_{h_2}^t (\phi_{h_1}^t)^{-1}$  est un lacet contractile de contactomorphismes. Notons  $h : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction hamiltonienne et  $g_h$  son facteur de conformalité par rapport à  $\alpha$ . Ainsi d'après le lemme 1.32 du chapitre 1 l'application

$$\begin{aligned} \Phi_h : \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^1 &\rightarrow \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^1 \\ (q, p, t, r) &\mapsto \left( \phi_h^t(q, p), e^{-g_h^t(q,p)} r - h^t(\phi_h^t(q, p), t) \right) \end{aligned}$$

est un élément de  $\text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^1, \text{Ker}(\alpha + r dt))$ , où  $(\mathbb{T}^n \times S^{n-1} \times \mathbb{R} \times S^1, \text{Ker}(\alpha + r dt))$  est la variété de contact provenant de la stabilisation de  $(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$ . D'après le corollaire

**1.33** et du fait que la symplectisation de cette dernière variété de contact est  $(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times S^1, d(\sum_{i=1}^n p_i dq_i + r dt))$ , le symplectomorphisme hamiltonien  $\Psi_H$  correspondant à  $\Phi_h$  est :

$$\begin{aligned} \Psi_H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^1 \times \mathbb{R} \\ (q, p, t, r) &\mapsto \left( \psi_H^t(q, p), t, r - H^t(\psi_H^t(q, p)) \right) \\ &= \left( \psi_{H_2}^t(\psi_{H_1}^t)^{-1}(q, p), t, r - H_2^t(\psi_{H_2}^t(\psi_{H_1}^t)^{-1}(q, p)) + H_1^t(q, p) \right) . \end{aligned}$$

Considérons alors le symplectomorphisme canonique (qui ne fait qu'échanger la position des coordonnées) suivant :

$$\begin{aligned} I : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \\ (q, p, t, r) &\mapsto (q, t, p, r), \end{aligned}$$

et  $I' : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}$  la restriction de  $I$ , nous avons alors que  $\Psi := I' \circ \Psi_H \circ I'^{-1}$  est un élément de  $\text{Ham}(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i)$ . Il est alors immédiat que

$$\Psi(V^\pm(h_1)) = V^\pm(h_2) .$$

□

Le deuxième lemme permettra de déduire les propriétés d'invariance par conjugaison.

**Lemme 5.19.** *Soit  $h_1 : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse et  $\{\varphi^t\}_{t \in [0,1]}$  un chemin lisse de contactomorphismes partant de l'identité. Soit  $h_2 : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse telle que :*

$$[\phi_{h_2}] = [\{\varphi^t\}][\phi_{h_1}][\{\varphi^t\}]^{-1} .$$

Alors il existe  $\Phi \in \text{Ham}(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i)$  tel que :

$$\Phi(V^\pm(h_1)) = V^\pm(h_2) .$$

Avant de démontrer ce lemme, déduisons-en le corollaire suivant.

**Corollaire 5.20.** *Soient  $h_1$  et  $h_2$  des fonctions hamiltoniennes lisses qui vérifient les hypothèses du lemme **5.19**. Alors :*

$$\text{Shape}(V^\pm(h_1)) = \text{Shape}(V^\pm(h_2)) .$$

En effet c'est une conséquence directe du lemme précédent **5.19** ainsi que de la proposition **5.15** accompagnée de la remarque **5.16**. Démontrons maintenant le lemme **5.19**.

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que  $[\{\varphi^t\}][\phi_{h_1}][\{\varphi^t\}]^{-1} = [\varphi \phi_{h_1}^t \varphi^{-1}]$ . Notons alors  $\psi \in \text{Ham}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, d \sum_{i=1}^n p_i dq_i)$  le symplectomorphisme hamiltonien correspondant à  $\varphi$ , et  $h_3 : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hamiltonienne correspondante au chemin  $\varphi \phi_h \varphi^{-1}$ , nous avons donc :

$$\begin{aligned} V^+(h_3) &= \{(q, t, p, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} \mid r + H_1^t(\psi(q, p)) > 0\} \\ V^-(h_3) &= \{(q, t, p, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} \mid r + H_1^t(\psi(q, p)) < 0\} . \end{aligned}$$

Ainsi en notant  $\Psi := \psi \times \text{Id}_{S^1 \times \mathbb{R}}$ , et en reprenant la même identification que dans la preuve précédente

$$I' : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n} ,$$

nous avons que  $\Psi' := I' \circ \Psi \circ I'^{-1} \in \text{Ham}(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i)$  et

$$\Psi'(V^\pm(h_3)) = V^\pm(h_1) .$$

De plus comme  $[\phi_{h_2}] = [\varphi \phi_{h_1} \varphi^{-1} := \phi_{h_3}]$ , nous savons d'après le lemme [5.17](#) qu'il existe  $\Phi' \in \text{Ham}(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i)$  tel que  $\Phi'(V^\pm(h_2)) = V^\pm(h_3)$ . En définissant  $\Phi$

le symplectomorphisme hamiltonien de  $(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{O}_{\mathbb{T}^n}, d \sum_{i=1}^{n+1} p_i dq_i)$  comme  $\Phi := \Psi'(\Phi')^{-1}$ , nous avons donc bien :

$$\Phi(V^\pm(h_2)) = V^\pm(h_1) .$$

□

Soient  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  et  $h : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction hamiltonienne telle que  $[\phi_h] = [\{\phi^t\}]$ . En notant  $\Gamma_{n+1} : H^1(\mathbb{T}^n \times S^1, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  l'isomorphisme d'espaces vectoriels que nous avons défini dans la section précédente [5.2.1](#), nous déduisons du corollaire [5.18](#) que les nombres

$$S_+([\{\phi^t\}]) = \sup\{r \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } p \in S^{n-1} \text{ tel que } \Gamma_{n+1}^{-1}(p, -r) \in \text{Shape}(V^+(h))\}$$

$$S_-([\{\phi^t\}]) = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } p \in S^{n-1} \text{ tel que } \Gamma_{n+1}^{-1}(p, -r) \in \text{Shape}(V^-(h))\}$$

ne dépendent pas de la fonction hamiltonienne  $h$  choisie pour représenter l'élément  $[\{\phi^t\}]$ . De plus, nous déduisons du corollaire [5.20](#) que les applications  $S_+, S_- : \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha)) \rightarrow \mathbb{R}$  sont invariantes par conjugaison, c'est-à-dire que pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  et pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  nous avons

$$S_\pm([\{\phi^t\}]) = S_\pm([\{\varphi \phi^t \varphi^{-1}\}]) .$$

Définissons alors l'application invariante par conjugaison

$$S : \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha)) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$[\{\phi^t\}] \mapsto \max\{S_+([\{\phi^t\}]), -S_-([\{\phi^t\}])\} .$$

**Proposition 5.21.** *Pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  et pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$  nous avons*

$$S([\{\phi^t\}]) \leq \widetilde{\mu}^\alpha([\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}])$$

$$\lceil S([\{\phi^t\}]) \rceil \leq \lceil \widetilde{\nu}^\alpha([\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}]) \rceil .$$

*Démonstration.* Soit  $r \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe  $p \in S^{n-1}$  et  $h : S^1 \times \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $[\phi_h] = [\{\phi^t\}]$  et  $\Gamma_{n+1}^{-1}(p, -r) \in \text{Shape}(V^+(h))$ . D'après la proposition [5.13](#) et la définition du *shape* nous déduisons que  $\mathbb{T}^{n+1} \times \{(p, -r)\} \cap V_+(h) \neq \emptyset$ . Il existe ainsi  $(q, t) \in \mathbb{T}^{n+1} = \mathbb{T}^n \times S^1$  tel que  $\|p\| h^t(q, \frac{p}{\|p\|}) - r > 0$ . De plus comme  $\|p\| = 1$  nous en déduisons que  $h^t(q, p) > r$ . D'après le corollaire [5.18](#) cela implique que pour tout  $g : S^1 \times \mathbb{T}^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $[\{\phi_g\}] = [\{\phi^t\}]$  il existe  $(t', q')$  tel que  $g^{t'}(q', p) > r$ . D'où le fait que

$$S^+([\{\phi^t\}]) \leq \widetilde{\mu}_+^\alpha([\{\phi^t\}]) .$$

Le même raisonnement nous permet de montrer que

$$S^-([\{\phi^t\}]) \geq \widetilde{\mu}^\alpha([\{\phi^t\}]) .$$

En utilisant alors le fait que l'application  $S$  est invariante par conjugaison nous déduisons la première inégalité de la proposition. La deuxième inégalité se démontre de manière similaire. □

Démontrons alors le théorème [5.8](#).

*Démonstration du théorème [5.8](#).* Reprenons les hypothèses du théorème [5.8](#), c'est-à-dire que nous avons une fonction lisse  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $n$  un entier plus grand que 2, et une fonction  $h : \mathbb{T}^n \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(q, p) = f(p)$  pour tout  $(q, p) \in \mathbb{T}^n \times S^{n-1}$ . Par définition de  $\widetilde{\mu}^\alpha([\{\phi^t\}])$  et  $\widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}])$  nous avons

$$\widetilde{\mu}^\alpha([\{\phi^t\}]) \leq \max\{\max h, -\min h\} \quad \text{et} \quad \widetilde{\nu}^\alpha([\{\phi^t\}]) \leq \max\{\lceil \max h \rceil, \lceil -\min h \rceil\} \quad (16)$$

Remarquons alors que  $V^+(h) = \mathbb{T}^{n+1} \times U_+(h)$  et  $V^-(h) = \mathbb{T}^{n+1} \times U_-(h)$  où  $U_+(h)$  et  $U_-(h)$  désignent les ouverts de  $\mathbb{R}^{n+1}$  suivants :

$$U_+(h) := \left\{ (p, r) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \mid \|p\|_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{p}{\|p\|}\right) + r > 0 \right\}$$

$$U_-(h) := \left\{ (p, r) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \mid \|p\|_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{p}{\|p\|}\right) + r < 0 \right\} .$$

Ainsi d'après le 2ème point de la proposition [5.15](#) nous avons :

$$\text{Shape}(V^\pm(h)) = \Gamma_{n+1}^{-1}(U_\pm(h)) .$$

Nous déduisons que

$$S_+([\phi_h]) = \max_{p \in S^{n-1}} \|p\| f\left(\frac{p}{\|p\|}\right) = \max_{(q,p) \in \mathbb{T}^n \times S^{n-1}} h(q, p) \quad \text{et}$$

$$S_-([\phi_h]) = \min_{p \in S^{n-1}} \|p\| f\left(\frac{p}{\|p\|}\right) = \min_{(q,p) \in \mathbb{T}^n \times S^{n-1}} h(q, p) .$$

De ce fait

$$S([\phi_h]) = \max\{\max h, -\min h\} \quad \text{et} \quad \lceil S([\phi_h]) \rceil = \max\{\lceil \max h \rceil, \lceil -\min h \rceil\} .$$

En utilisant les inégalités de la proposition précédentes et l'inégalité [\(16\)](#), nous déduisons que les inégalités de [\(16\)](#) sont des égalités. D'où les deux premières égalités du théorème [5.8](#). Nous déduisons la deuxième ligne d'inégalités en utilisant le fait que l'application  $S$  est invariante par conjugaison. □

*Remarque 5.22.* En adoptant les mêmes notations que Y. Eliashberg et L. Polterovich [\[20\]](#) les applications  $S^+$  et  $S^-$  que nous avons construites correspondent à

$$S^+([\{\phi^t\}]) = \max \left\{ r_- \left( a, [\{\phi^t\}] \right) \mid a \in H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n(a) \in S^{n-1} \right\}$$

$$S^-([\{\phi^t\}]) = \min \left\{ r_+ \left( a, [\{\phi^t\}] \right) \mid a \in H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}), \Gamma_n(a) \in S^{n-1} \right\} ,$$

où  $\Gamma_n : H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne l'isomorphisme d'espace vectoriel défini dans la sous-section [5.2.1](#). Nous nous attarderons un peu plus sur cette remarque dans la sous-partie suivante.

### 5.3 Questions d'existence de normes invariantes par conjugaison non bornées

À ce jour l'auteur ne connaît aucun résultat d'existence de normes invariantes par conjugaison et non bornées sur le revêtement universel du groupe des contactomorphismes d'une variété de contact (fermée ou non) n'admettant pas de flot de Reeb périodique. Nous discutons dans cette sous-section de certaines questions ouvertes à ce propos.

Soient  $G$  un groupe et  $\nu$  une norme sur  $G$ . Définissons les deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \nu^{conj} : G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \\ g &\mapsto \sup_{h \in G} \nu(hgh^{-1}) \\ \nu_{conj} : G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ g &\mapsto \inf \left\{ \sum_{i=1}^N \nu(h_i g_i h_i^{-1}) \mid \exists N \in \mathbb{N}_{>0}, \exists (g_i, h_i)_{i \in [1, N] \cap \mathbb{N}} \in G^{2N}, g = \prod_{i=1}^N g_i \right\}. \end{aligned}$$

De manière triviale nous avons pour tout  $g \in G$

$$\nu_{conj}(g) \leq \nu(g) \leq \nu^{conj}(g) .$$

Nous avons alors le lemme suivant.

**Lemme 5.23.** *L'application  $\nu_{conj}$  est une pseudo-norme invariante par conjugaison. De même si  $\nu^{conj}$  est à valeurs réelles alors c'est une norme invariante par conjugaison. Si  $\nu$  est invariante par conjugaison nous avons  $\nu_{conj} = \nu = \nu^{conj}$ .*

Nous laissons la démonstration de ce lemme en exercice.

*Remarque 5.24.* Lorsque  $\nu$  est une norme sur un groupe  $G$  l'application

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ g &\mapsto \inf_{h \in G} \nu(hgh^{-1}) \end{aligned}$$

est invariante par conjugaison mais ce n'est pas forcément une norme. En effet, rien ne garantit que l'application précédente vérifie l'inégalité triangulaire.

Supposons que  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  soit une variété de contact compacte ordonnable et dont le champs de Reeb  $R_\alpha$  associée à la forme de contact  $\alpha$  est périodique. Nous avons alors le lemme suivant.

**Lemme 5.25.** *Pour toute forme de contact  $\alpha'$  qui définit la même co-orientation que  $\alpha$  nous avons alors que  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}_{conj}$ ,  $\widetilde{\nu}^{\alpha'conj}$  et  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{FPR}$  sont équivalentes. En particulier  $\widetilde{\nu}^{\alpha'}_{conj}$  et  $\widetilde{\nu}^{\alpha'conj}$  sont des normes invariantes par conjugaison stablement non bornées.*

*Démonstration.* Cela vient directement du lemme [5.7](#) et du fait que la norme FPR est invariante par conjugaison.  $\square$

**Question :** *En reprenant les notations de la sous-section précédente, il serait intéressant de savoir si  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{conj}$  est encore non bornée sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{T}^n \times S^{n-1}, \text{Ker}(\alpha))$ .*

En nous inspirant d'un résultat de E. Shelukhin [\[44\]](#) nous pouvons cependant démontrer la proposition suivante.

**Proposition 5.26.** *Pour toute variété de contact compacte  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  nous avons  $\widetilde{\mu}^{\alpha}_{conj} \equiv 0$ .*

La démonstration de cette proposition se base sur le lemme suivant dont le lecteur pourra trouver une démonstration au corollaire 34 du papier [\[44\]](#).

**Lemme 5.27** ([\[44\]](#)). *Soit  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes de  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  partant de l'identité tel que  $\text{Supp}(\{\phi^t\})$  soit inclus dans une boule de Darboux. Alors*

$$\inf_{\phi \in \text{Cont}_0(M, \xi)} \widetilde{\mu}^{\alpha}([\{\phi^{-1}\phi^t\phi\}]) = 0 .$$

Ainsi pour démontrer la proposition il suffit de constater que pour tout élément  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  il existe  $N \in \mathbb{N}_{>0}$  éléments  $([\{\phi_i^t\}])_{i \in [1, N] \cap \mathbb{N}} \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)^N$  tels que

1.  $[\{\phi^t\}] = \prod_{i=1}^N [\{\phi_i^t\}]$  et
2.  $\{\phi_i^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes à support dans une boule de Darboux pour tout  $i \in [1, N] \cap \mathbb{N}$ .

Cela vient du fait que la norme de fragmentation (voir définition au chapitre [1](#)) est bien définie sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  lorsque  $M$  est une variété compacte.

Le même raisonnement permet de montrer que si  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes à support dans une boule de Darboux partant de l'identité tel que  $[\{\phi^t\}] \neq \text{Id} \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  alors  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}}([\{\phi^t\}]) = 1$ . Ainsi en notant  $\widetilde{\nu}_{\text{Frag}}$  la norme de fragmentation sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$  nous déduisons que  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}} \leq \widetilde{\nu}_{\text{Frag}}$ .

**Question :** *Il serait intéressant de savoir s'il existe une variété de contact compacte  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  ordonnable n'admettant pas de flot de Reeb périodique et telle que la norme  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}}$  soit bien définie sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . Dans ce cas elle serait stablement non bornée car  $\widetilde{\nu}^{\alpha}$  l'est.*

En utilisant le fait que  $\widetilde{\nu}^{\alpha}$  est compatible avec la relation d'ordre nous avons le lemme suivant.

**Lemme 5.28.** *Soit  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  une variété de contact fermée et ordonnable. L'application  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  si et seulement si  $\widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}}([\phi_{R_\alpha}]) < +\infty$ .*

*Démonstration.* Soit  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(M, \xi)$ . Il existe alors  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_{>0}$  tels que

$$[\phi_{N_2 R_\alpha}] \succeq [\{\phi_{R_\alpha}^{N_1 t} \circ \phi^t\}] \succeq \text{Id}.$$

Nous pouvons par exemple prendre  $N_1 := \widetilde{\nu}^{\alpha}([\{\phi^t\}])$  et  $N_2 := \widetilde{\nu}^{\alpha}([\{\phi_{R_\alpha}^{N_1 t} \circ \phi^t\}])$ . Ainsi pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(M, \xi)$  nous avons

$$[\varphi \circ \phi_{N_2 R_\alpha} \circ \varphi^{-1}] \succeq [\{\varphi \circ \phi_{R_\alpha}^{N_1 t} \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}] \succeq \text{Id}.$$

En utilisant le fait que  $\widetilde{\nu}^{\alpha}$  est compatible avec la relation d'ordre et que c'est une norme nous avons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \widetilde{\nu}^{\alpha}([\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}]) &= \widetilde{\nu}^{\alpha}([\{\varphi \circ \phi_{R_\alpha}^{-N_1 t} \circ \phi_{R_\alpha}^{N_1 t} \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}]) \\ &\leq \widetilde{\nu}^{\alpha}([\varphi \circ \phi_{-N_1 R_\alpha} \circ \varphi^{-1}]) + \widetilde{\nu}^{\alpha}([\{\varphi \circ \phi_{R_\alpha}^{N_1 t} \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}]) \\ &\leq \widetilde{\nu}^{\alpha}([\varphi^{-1} \circ \phi_{N_1 R_\alpha} \circ \varphi]) + \widetilde{\nu}^{\alpha}([\varphi \circ \phi_{N_2 R_\alpha} \circ \varphi^{-1}]) \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_1} \widetilde{\nu}^{\alpha}([\varphi^{-1} \circ \phi_{R_\alpha} \circ \varphi]) + \sum_{i=1}^{N_2} \widetilde{\nu}^{\alpha}([\varphi \circ \phi_{R_\alpha} \circ \varphi^{-1}]) \\ &\leq (N_1 + N_2) \widetilde{\nu}^{\alpha}_{\text{conj}}([\phi_{R_\alpha}]). \end{aligned}$$

La première et la troisième inégalité proviennent du fait que  $\widetilde{\nu}^{\alpha}$  vérifie l'inégalité triangulaire. La deuxième inégalité se déduit d'une part du fait que la norme d'un élément vaut la norme de son inverse (pour le premier terme de la somme) et d'autre part du fait que  $\widetilde{\nu}^{\alpha}$  est compatible avec la relation d'ordre (pour le deuxième terme de la somme).  $\square$

Enfin revenons sur la remarque [5.22](#) en reprenant les notations de la section précédente. Y. Eliashberg et L. Polterovich dans [\[20\]](#) définissent pour tout  $a \in H^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{R})$  et pour tout

$[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n})$  les applications suivantes

$$\begin{aligned} r_-(a, [\{\phi^t\}]) &:= \sup \left\{ r \mid (a, \Gamma_1^{-1}(-r)) \in \text{Shape} \left( V^+([\{\phi^t\}]) \right) \right\} \\ r_+(a, [\{\phi^t\}]) &:= \inf \left\{ r \mid (a, \Gamma_1^{-1}(-r)) \in \text{Shape} \left( V^-([\{\phi^t\}]) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} R_- : \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n}) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad [\{\phi^t\}] \mapsto \min \left\{ r_-(a, [\{\phi^t\}]) \mid \Gamma_n(a) \in S^{n-1} \right\} \\ R_+ : \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n}) &\rightarrow \mathbb{R}, \quad [\{\phi^t\}] \mapsto \max \left\{ r_+(a, [\{\phi^t\}]) \mid \Gamma_n(a) \in S^{n-1} \right\}, \end{aligned}$$

et définissons l'application

$$R := \max\{R_+, -R_-\}.$$

Des propriétés algébriques de  $r_-$  et  $r_+$  que Y. Eliashberg et L. Polterovich exhibent dans [20] nous avons la proposition suivante.

**Proposition 5.29.** *L'application  $R : \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n}) \rightarrow \mathbb{R}$  est invariante par conjugaison. De plus elle vérifie les propriétés suivantes pour tout  $[\{\phi^t\}] \in \widetilde{\text{Cont}}_0(\mathbb{P}^+T^*\mathbb{T}^n, \xi_{\mathbb{T}^n})$*

1.  $R([\{\phi^t\}]) \geq 0$
2.  $R([\{\phi^t\}]) = R([\{\phi^t\}]^{-1})$
3.  $R([\{\phi^t\}]^k) \leq kR([\{\phi^t\}])$  pour tout  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ .

**Question :** *En utilisant les calculs de la section précédente il est facile de voir que l'application  $R$  est non bornée. Il serait intéressant de voir si l'application  $R$  vérifie l'inégalité triangulaire. Elle définirait alors une pseudo-norme invariante par conjugaison. Dans ce cas, en utilisant la remarque [5.4], s'en déduirait une norme invariante par conjugaison non bornée.*

Nous donnerons dans le chapitre suivant d'autres outils pour étudier la longueur discriminante et d'oscillation de certains chemin positifs du bord de contact de variétés de Liouville (famille de variétés de contact dont le cotangent unitaire du tore en fait partie).

## 6 Propriétés géométriques de certains domaines de la préquantification d'une variété de Liouville

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la préquantification de variétés symplectiques exactes ainsi qu'à la préquantification de variétés de Liouville  $(W, \omega = d\lambda)$ .

Dans la première section nous précisons la bijection introduite par Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [19] entre les domaines étoilés fibre-par-fibre de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  et les chemins de contactomorphismes strictement positifs de  $(P_\infty, \eta_\infty)$ , lorsque  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  désigne la préquantification d'une variété de Liouville  $(W, d\lambda)$  et où  $(P_\infty, \eta_\infty)$  désigne le bord de contact idéal de  $(W, d\lambda)$ . Grâce à cette association, ils déduisent l'existence de tassement de contact dans  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  lorsque  $(P_\infty, \eta_\infty)$  est non ordonnable. Nous montrerons alors comment M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen utilisent ces tassements pour déduire leur théorème [1.38] que nous avons présenté au chapitre [1].

Dans la deuxième section nous définirons un nouvel ensemble de nombres que nous associerons à des ouverts à bords lisses de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  lorsque  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété symplectique exacte. Par analogie au cas symplectique, où l'ensemble des aires des caractéristiques fermées du bord d'un ouvert de la variété symplectique est un ensemble d'invariants nommé le spectre, nous utiliserons certaines caractéristiques particulières provenant du bord d'un ouvert de la préquantification de  $(W, \omega = d\lambda)$  pour définir notre ensemble de nombres. Nous appellerons l'ensemble de nombres ainsi construit le spectre de contact. Le théorème [6.23] précisera le fait que le spectre de contact ainsi défini contient des invariants de contact et qu'il est une généralisation du spectre symplectique. De plus lorsque  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété de Liouville, nous ferons des liens entre la longueur discriminante et d'oscillation d'un chemin de contactomorphismes strictement positif de  $(P_\infty, \eta_\infty)$  et le spectre de contact du domaine associée.

Enfin dans la troisième section nous discuterons de plusieurs questions ouvertes par rapport à l'existence de ces caractéristiques translattées et aux liens qu'entretiendraient le spectre de contact de domaines et la capacité de contact de ces domaines.

### 6.1 Associer à un chemin de contactomorphismes du bord d'un ouvert étoilé un domaine étoilé fibre-par-fibre

Soit  $U$  un ouvert étoilé dans une variété de Liouville  $(W, \omega = d\lambda)$  et notons  $P$  son bord. Nous avons vu à la sous-section [0.3.1] que  $(P, \text{Ker}(\alpha) = \eta)$  est une variété de contact lorsque  $\alpha$  désigne la restriction à  $P$  de la 1-forme  $\lambda \in \Omega^1(W)$ .

**Définition 6.1.** Notons  $pr_{S^1} : W \times S^1 \rightarrow S^1$  la projection canonique. Nous disons qu'un ouvert  $U$  de  $W \times S^1$  est un ouvert étoilé fibre-par-fibre si  $U \cap pr_{S^1}^{-1}\{t\}$  est un ouvert étoilé de  $W \times \{t\}$  pour tout  $t \in S^1$  et si le bord de  $U$  intersecte transversalement la fibre de la projection  $pr_{S^1}$ .

En suivant Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich [19] nous allons associer à un chemin lisse de contactomorphismes strictement positif  $\{\phi^t\}$  de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  un ouvert étoilé fibre-par-fibre de  $W \times S^1$ . Supposons que le chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  est engendré par une fonction hamiltonienne périodique, c'est-à-dire que  $\alpha(\frac{d}{dt}\phi^t) := h^t(\phi^t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $h^0 \equiv h^1$ . Nous discuterons du cas où la fonction hamiltonienne n'est pas périodique plus loin. Rappelons que nous pouvons voir  $W$  comme la réunion disjointe du fermé  $\text{Core}(W) = \bigcap_{t>0} \phi_X^{-t}(U)$  et de l'ouvert  $W_* = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_X^t(P)$ . Définissons alors la fonction  $\bar{H} : S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  qui est égale à la fonction homogène associée à  $h$  sur  $W_*$  - que nous voyons comme la symplectisation de



$(P, \text{Ker}(\alpha))$  - et qui vaut 0 sur le cœur  $\text{Core}(W)$ , plus précisément :

$$\overline{H}^t(p) = \begin{cases} e^\theta h^t(x) & \text{si } p \in W_* \text{ et } \Phi_P(x, \theta) = p \\ 0 & \text{si } p \in \text{Core}(W) . \end{cases}$$

Nous associons à  $\{\phi^t\}$  le domaine étoilé fibre-par-fibre suivant

$$\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}) := \{\overline{H} < 1\} = \{(t, p) \in S^1 \times W \mid \overline{H}^t(p) < 1\} .$$

*Remarque 6.2.* 1. Le fait d'avoir demandé à ce que le chemin lisse  $\{\phi^t\}$  soit strictement positif a permis de définir des domaines bornés.

2. La fonction  $\overline{H}$  n'est plus forcément lisse bien qu'elle reste continue.

3. Elle est par contre bien lisse sur  $W_*$ . Notons  $H := \overline{H}|_{W_*}$  la restriction de  $\overline{H}$  à  $W_*$ . Le flot de symplectomorphismes hamiltoniens engendré par  $H$  engendre sur  $W_*$  est conjugué à la symplectisation du flot de  $\phi_h$  qui est définie pour tout  $(t, (x, \theta)) \in [0, 1] \times (P \times \mathbb{R})$  par :

$$(t, (x, \theta)) \mapsto (\phi_h^t(x), \theta - g_h^t(x)) \text{ où } g_h \text{ est le facteur de conformalité de } \phi_h \text{ par rapport à } \alpha .$$

En effet, notons  $X_H$  le champs de vecteur sur  $W_*$  qui vérifie  $\omega(X_H, \cdot) = -dH$  et  $\psi_{X_H}^t$  le flot de ce champs de vecteurs au temps  $t$ . Rappelons que  $(W_*, \omega|_{W_*})$  s'identifie à la symplectisation positive de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  via l'application  $\Phi_P : P \times \mathbb{R} \rightarrow W_*$  qui à tout  $(x, \theta) \in P \times \mathbb{R}$  associe le point  $\phi_X^\theta(x)$  (cf. la sous-section [0.3.1](#)) Nous laissons le lecteur vérifier que pour tout temps  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $(x, \theta) \in P \times \mathbb{R}$  :

$$\Phi_P^{-1}(\psi_{X_H}^t(\Phi_P(x, \theta))) = (\phi_h^t(x), \theta - g_h^t(x)) ,$$

où  $g_h^t$  désigne le facteur de conformalité de  $\phi_h^t$  par rapport à  $\alpha$ .

Réciproquement si  $V$  désigne un ouvert étoilé fibre-par-fibre inclus dans  $W \times S^1$ , notons  $S := \partial V$  son bord. Ainsi, d'après le corollaire [0.13](#), les ensembles  $P_t := P \times \{t\}$  et  $S_t := S \cap pr_{S^1}^{-1}\{t\}$  sont en bijection pour tout  $t \in S^1$  (même contactomorphes). Plus précisément, il existe une application  $\Theta_t : P \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'application

$$P_t \rightarrow S_t, \quad (p, t) \mapsto (\phi_X^{\Theta_t(p)}(p), t)$$

réalise une bijection pour tout  $t \in S^1$ . Nous associons alors au domaine étoilé fibre-par-fibre  $V$  la fonction hamiltonienne définie par la formule suivante

$$h : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, \quad (t, x) \mapsto e^{-\Theta_t(x)} .$$

Le lecteur pourra trouver une démonstration du lemme suivant dans [\[19\]](#) ou [\[26\]](#).

**Lemme 6.3.** *Soient  $\{\phi_0^t\}$  et  $\{\phi_1^t\}$  deux chemins lisses de contactomorphismes strictement positifs qui représentent le même élément de  $\widetilde{\text{Cont}}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  et dont les fonctions hamiltoniennes  $h_0$  et  $h_1$  sont périodiques. Supposons qu'il existe une famille lisse de chemins lisses de contactomorphismes strictement positifs  $\{\phi_s^t\}_{s \in [0, 1]}$  telle que pour tout  $s \in [0, 1]$  le chemin  $\{\phi_s^t\}$  représente encore le même élément de  $\text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  et tel que sa fonction hamiltonienne  $h_s$  soit périodique. Il existe alors un chemin lisse de contactomorphismes à support compact  $\Phi : [0, 1] \rightarrow \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  tel que :*

$$\Phi_s(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi_0^t\})) = \mathcal{U}_\alpha(\{\phi_s^t\}) \text{ pour tout } s \in [0, 1] .$$

En remarquant que pour tout élément  $[\{\phi^t\}] \in \pi_1(\text{Cont}_0(P, \xi))$  et pour tout  $\varphi \in \text{Cont}_0(P, \xi)$  nous avons d'une part l'égalité  $[\{\varphi \phi^t \varphi^{-1}\}] = [\{\phi^t\}]$  et d'autre part que  $\{\phi^t\}$  est un chemin strictement positif si et seulement  $\{\varphi \phi^t \varphi^{-1}\}$  l'est, nous déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 6.4.** Soient  $\varphi \in \text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  et  $\{\phi^t\}$  un lacet lisse de contactomorphismes commençant à l'identité strictement positifs dont la fonction hamiltonienne est périodique. Il existe alors un contactomorphisme  $\Phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  tel que

$$\Phi \left( \mathcal{U}_\alpha \left( \{\phi^t\} \right) \right) = \mathcal{U}_\alpha \left( \{\varphi \phi^t \varphi^{-1}\} \right) .$$

*Remarque 6.5.* 1. Il existe des variétés de contact ordonnables qui admettent des lacets de contactomorphismes strictement positifs. V. Chernov et S. Nemirovski [14] ont par exemple démontré que le cotangent unitaire de la sphère euclidienne munie de sa structure de contact standard est ordonnable. Cependant son flot géodésique, qui est le flot de Reeb, est périodique.

2. Le lemme 6.3 permet d'associer à un chemin lisse de contactomorphismes, dont la fonction hamiltonienne n'est pas forcément périodique, un ouvert étoilé fibre par fibré "sans ambiguïté". En effet d'après Y. Eliashberg et L. Polterovich [20], pour tout chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  strictement positif de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  et pour tout voisinage  $\mathcal{C}^\infty$  de ce chemin, il existe un chemin lisse de contactomorphisme  $\{\varphi^t\}$  dans ce voisinage représentant le même élément que  $\{\phi^t\}$  dans  $\widetilde{\text{Cont}}_0(P, \eta)$  dont la fonction hamiltonienne est strictement positive et périodique. Ainsi quitte à prendre le voisinage  $\mathcal{C}^\infty$  suffisamment petit, si  $\{\varphi_1^t\}$  et  $\{\varphi_2^t\}$  sont deux chemins strictement positifs dans la même classe d'isotopie que  $\{\phi^t\}$  dans ce voisinage et dont les fonctions hamiltoniennes sont périodiques et strictement positives, d'après le lemme 6.3 les domaines que nous leur associons sont contactomorphes.

Y. Eliashberg, S. S. Kim et L. Polterovich utilisent cette association entre domaines et chemins positifs ainsi que le lemme 6.3 pour montrer qu'en présence d'un lacet positif contractile de contactomorphismes de  $(P, \eta)$  il existe des tassements de contact de domaines de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Plus précisément, lorsque  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  n'est pas ordonnable il existe  $\{\phi^t\}$  un lacet de contactomorphismes strictement positif contractile basé en l'identité. Considérons alors l'homotopie lisse

$$[0, 1] \times [0, 1] \times P \rightarrow P, \quad (s, t, x) \mapsto \phi_s^t(x)$$

telle que

1.  $\{\phi_s^t\}$  est un lacet de contactomorphismes basé en l'identité pour tout  $s \in [0, 1]$
2.  $\{\phi_0^t\}$  est le lacet constant égal à l'identité et  $\{\phi_1^t\} = \{\phi^t\}$ .

En notant  $h_s : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hamiltonienne de  $\{\phi_s^t\}$  pour tout  $s \in [0, 1]$  et  $\overline{H}_s : S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$  sa fonction associée nous avons le théorème suivant.

**Théorème 6.6** ([19]). Soit  $E : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse telle que  $E \circ \phi_X^\theta = e^\theta E$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et telle que  $E|_{W_*} > 0$ . Définissons pour tout  $R > 0$  le domaine  $A(R) := \{E < R\} \times S^1$ . Alors pour tout  $\mu > 0$  tel que  $\overline{H}_s^t(p) > -\mu E(p)$  et pour tout  $(s, t, p) \in [0, 1] \times S^1 \times W_*$ , il existe un réel  $\gamma > 0$  et un contactomorphisme  $\Phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  tels qu'on ait le tassement suivant

$$\Phi(A(R)) \subset \left( A \left( \frac{R}{1 + \gamma R} \right) \right) \quad \text{pour tout } R < \frac{1}{\mu}.$$

Rappelons alors l'énoncé du théorème 1.38 de M. Fraser, L. Polterovich et D. Rosen [21] que nous avons vu au chapitre 1. Nous conservons les notations et hypothèses suivantes

1.  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété de Liouville
2.  $\mathcal{U}$  est un ouvert étoilé dans  $W$  tel que son bord  $P$  muni du noyau de  $\alpha := \lambda|_P$  est une variété de contact non ordonnable.

**Théorème 6.7** ([21]). Supposons de plus qu'il existe un voisinage du cœur de  $W$  qui soit déplaçable par un symplectomorphisme hamiltonien à support compact de  $(W, \omega = d\lambda)$ . Il existe alors  $r_0 > 0$  telle que pour tout  $0 < r < r_0$ , toute norme invariante par conjugaison définie sur  $\text{Cont}_0^c(\phi_X^r(\mathcal{U}) \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  ou sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(\phi_X^r(\mathcal{U}) \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  qui est bornée dans un voisinage  $\mathcal{C}^1$  de l'identité est équivalente à la norme triviale.

*Démonstration.* Considérons le lacet contractile  $\{\phi^t\}$  ainsi que l'homotopie  $\{\phi_s^t\}_{s \in [0,1], t \in S^1}$  de ce lacet au lacet constant égal à l'identité discuté juste avant le théorème 6.6. Notons encore  $\overline{H_s} : S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction associée au lacet  $\{\phi_s^t\}$  pour tout  $s \in [0, 1]$ . Soit  $E : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui vérifie les hypothèses du théorème 6.6 et  $\mu > 0$  un nombre réel tel que  $\overline{H_s^t}(p) > -\mu E(p)$  pour tout  $(s, t, p) \in [0, 1] \times S^1 \times W_*$ . Nous affirmons que, lorsque  $0 < r_0 < \frac{1}{\mu}$ ,  $\{E < r_0\} \times S^1$  est un sous-domaine transportable par contactomorphisme dont l'attracteur est  $\text{Core}(W) \times S^1$  (voir définition 1.39).

En effet, pour tout  $0 < \varepsilon < r_0$  et pour tout compact  $K \subset \{E < r_0\} \times S^1$ , en itérant un nombre suffisant de fois le théorème 6.6, il existe un contactomorphisme  $\tilde{\Phi} \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  tel que  $\tilde{\Phi}(K) \subset \{E < \varepsilon\} \times S^1$ . Soit alors  $f : [0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à support compact qui engendre le symplectomorphisme hamiltonien à support compact  $\psi$  qui déplace le cœur de  $W$ . En appliquant une fonction *cut-off* appropriée à  $f$  nous pouvons sans perte de généralité supposer que  $f$  est à support dans  $\{E < r_0\}$  et que le symplectomorphisme  $\psi$  qu'elle engendre déplace  $\text{Core}(W)$ . De ce fait le relevé de contact de  $\psi$  à  $\text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  est à support dans  $\{E < r_0\} \times S^1$  et déplace  $\text{Core}(W) \times S^1$ . Nous déduisons donc notre affirmation en remarquant que  $\{\{E < \varepsilon\}\}_{\varepsilon > 0}$  forme une base de voisinage de  $\text{Core}(W)$ .

En utilisant alors la proposition 1.40 nous déduisons le théorème précédent.  $\square$

## 6.2 Le spectre de domaines dans $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$

Dans cette section nous proposons de définir un nouvel ensemble de nombres que nous associons à des domaines de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  dont le bord est lisse. En un sens que nous rendrons précis, cet ensemble de nombres contient des invariants de contact. La construction de cet ensemble sera faite par analogie à celle du spectre d'un domaine d'une variété symplectique exacte dont le bord est lisse. Ainsi, dans un premier temps, nous ferons un rappel du concept de spectre dans le cas symplectique, puis nous définirons par analogie le spectre de contact. À la fin de cette sous-section, nous verrons un lien entre la longueur discriminante et celle d'oscillation d'un chemin de contactomorphismes de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  strictement positif et le spectre de son domaine associé dans  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ .

Par définition nous disons qu'un sous-ensemble  $A$  d'une variété  $B$  est une hypersurface si  $A$  est une sous-variété lisse de codimension 1 et orientable.

### 6.2.1 Le spectre dans le cas symplectique

Rappelons que si  $P \subset W$  est une hypersurface dans une variété symplectique  $(W, \omega)$ , elle admet une distribution de rang 1 canoniquement associée à la forme symplectique  $\omega$ . Nous la notons  $P^\omega$  et elle est définie pour tout  $x \in P$  comme suit :

$$P^\omega(x) := \{u \in T_x W \mid \omega(x)(u, v) = 0, \forall v \in T_x P\} \subset T_x P.$$

Le lecteur pourra vérifier que cette distribution est bien de rang 1 car  $\omega$  est non dégénérée et  $P$  est de codimension 1. Le fait que cette distribution soit incluse dans  $TP$  provient du caractère antisymétrique de  $\omega$ . Nous appelons  $P^\omega$  la distribution caractéristique de  $P$  et nous appelons les feuilles intégrales de cette distribution les caractéristiques de  $P$ .

Remarquons que si  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction hamiltonienne telle que  $a \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière de  $H$  alors  $P := H^{-1}\{a\}$  est une hypersurface lisse et sa distribution caractéristique est donnée par  $\langle X_H|_P \rangle$ , où  $X_H$  désigne le gradient symplectique de  $H$ . En effet,  $T_x P = \text{Ker}(d_x H)$  pour tout  $x \in P$  et donc, comme  $\omega_x(X_H(x), \cdot) = -d_x H$ , nous avons bien

$$P^\omega(x) = \langle X_H(x) \rangle . \tag{17}$$

Ainsi une caractéristique fermée de  $P$  correspond à une orbite périodique d'énergie  $a$  du flot de symplectomorphismes hamiltoniens  $\psi_H$  engendré par la fonction hamiltonienne  $H$ . Dans le cas où la variété symplectique  $(W, \omega)$  est exacte, c'est-à-dire que  $\omega = d\lambda$  avec  $\lambda$  une 1-forme sur  $W$ , nous pouvons construire de ces caractéristiques fermées un ensemble de nombres intéressants pour étudier une hypersurface lisse  $P$  de la manière suivante :

$$\text{Spectre}_\lambda(P) := \left\{ \int_\gamma \lambda \mid \gamma : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow P, \text{ tel que } \dot{\gamma}(t) \in P^\omega(\gamma(t)) \text{ pour tout } t \in S^1 \right\} .$$

*Remarque 6.8.* Si  $\gamma$  est une caractéristique fermée de l'hypersurface  $P \subset (W, d\lambda)$  alors tous les multiples non nuls de  $\int_\gamma \lambda$  appartiennent au spectre. Pour se convaincre de cela il suffit de remarquer que la courbe qui consiste à parcourir  $\gamma$  un nombre entier de fois dans un sens ou dans l'autre est encore une caractéristique fermée.

**Lemme 6.9.** *Soit  $P$  une hypersurface lisse dans  $(W, \omega = d\lambda)$ , nous avons alors pour tout symplectomorphisme hamiltonien  $\psi \in \text{Ham}(W, \omega)$*

$$\text{Spectre}_\lambda(P) = \text{Spectre}_\lambda(\psi(P)) .$$

*De plus si  $P$  est simplement connexe alors pour toute 1-forme  $\lambda'$  telle que  $d\lambda' = \omega$  nous avons :*

$$\text{Spectre}_\lambda(P) = \text{Spectre}_{\lambda'}(P) .$$

*Démonstration.* La première propriété provient du fait que si  $\psi \in \text{Ham}(W, \omega)$  alors  $\psi^*\lambda = \lambda + df$  pour une certaine fonction  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ . Et la deuxième propriété provient du fait que si  $P$  est simplement connexe alors  $H^1(P, \mathbb{R}) = \{0\}$ . Ainsi comme  $d(i_P^*\lambda - i_P^*\lambda') = i_P^*d(\lambda - \lambda') = 0$  cela implique qu'il existe une fonction  $g : P \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $i_P\lambda = i_P^*\lambda' + dg$ , où  $i_P^* : S \hookrightarrow W$  désigne l'inclusion canonique.  $\square$

*Remarque 6.10.* De même, lorsque  $\mathcal{U}$  est un ouvert dont le bord est une hypersurface lisse, nous définissons le spectre de  $\mathcal{U}$  par le spectre de son bord

$$\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U}) := \text{Spectre}_\lambda(\partial\mathcal{U}) .$$

Nous reviendrons, à la fin de ce chapitre, sur plusieurs autres propriétés du spectre symplectique des domaines et des liens que cet ensemble de valeurs entretient avec les capacités symplectiques. Pour plus de détails et de propriétés de cet ensemble de valeurs, le lecteur pourra consulter par exemple l'article divulgatif de F. Lalonde [33] ou les notes J.-C. Sikorav [47].

## 6.2.2 Le spectre dans le cas de contact

Les hypersurfaces d'une variété de contact sont également munies d'une distribution canonique de rang 1 avec cette fois-ci - contrairement au cas symplectique - des singularités éventuelles. Nous utiliserons par analogie au cas symplectique certaines feuilles de cette distribution pour définir un ensemble de nombres que nous associerons à ces hypersurfaces. De manière imprécise, au lieu de s'intéresser à l'aire de caractéristiques fermées comme dans le cas symplectique nous nous intéresserons à la longueur des cordes de Reeb que nous pouvons attacher à des morceaux de caractéristiques pour les fermer.

Soit  $(M, \xi)$  une variété de contact dont la distribution  $\xi$  est co-orientable. Considérons  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une 1-forme de contact, *i.e.*  $\text{Ker}(\alpha) = \xi$ . Soit  $S \subset M$  une hypersurface de  $M$ , nous définissons la distribution caractéristique  $S^\xi$  sur cette hypersurface de la manière suivante :

$$S^\xi(x) = \{u \in \xi_x \mid (d\alpha)_x(u, v) = 0, \forall v \in T_x S \cap \xi_x\} .$$

**Lemme 6.11.** *La distribution caractéristique  $S^\xi$  sur  $S$  ne dépend pas de la forme de contact choisie. De plus, en un point  $x \in S$  générique, l'intersection entre  $T_x S$  et  $\xi_x$  est transverse, c'est-à-dire que  $T_x S \neq \xi_x$ , dans ce cas l'espace vectoriel  $S^\xi(x)$  est inclus dans  $T_x S$  et il est de dimension 1. En un point  $x \in S$  où l'intersection est tangente, c'est-à-dire que  $T_x S = \xi_x$ , nous avons  $S^\xi(x) = \{0\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha' \in \Omega^1(M)$  tel que  $\text{Ker}(\alpha') = \xi$ . Il existe alors une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^*$  telle que  $\alpha' = f\alpha$ . Ainsi,  $d(f\alpha) = (df) \wedge \alpha + f d\alpha$ . Soient alors  $x \in S$  et  $u \in \xi_x$  tels que  $(d\alpha)_x(u, v) = 0$  pour tout  $v \in T_x S \cap \xi_x$ . Nous avons donc

$$d_x(f\alpha)(u, v) = d_x f(u)\alpha_x(v) - d_x f(v)\alpha_x(u) + f(x)(d\alpha)_x(u, v) ,$$

or tous les termes de cette somme sont nuls. Le premier terme l'est car  $v \in \xi_x = \text{Ker}(\alpha_x)$ , le deuxième terme l'est car  $u \in \xi_x \cap T_x S = \text{Ker}(\alpha_x) \cap T_x S$ , et enfin le troisième est nul par hypothèse. La distribution caractéristique ne dépend donc pas de la forme de contact choisie mais uniquement de la distribution de contact  $\xi$ .

Montrons alors que dans le cas où  $x \in S$  et  $T_x S \neq \xi_x$ , la droite  $S^\xi(x)$  est incluse dans  $T_x S$ . En effet, dans ce cas  $T_x M = \xi_x \oplus T_x S := \{u \in T_x M \mid \exists (u_1, u_2) \in \xi_x \times T_x S, u = u_1 + u_2\}$ . La formule de Grassmann nous permet de dire que  $\dim(\xi_x) - \dim(\xi_x \cap T_x S) = 1$ . Ainsi, nous déduisons que  $\xi_x \cap T_x S$  est un hyperplan de l'espace vectoriel symplectique  $(\xi_x, (d\alpha)_x|_{\xi_x})$  et donc que son orthogonal symplectique est de dimension 1. Or dans un espace vectoriel symplectique l'antisymétrie de la forme symplectique assure qu'une droite est toujours incluse dans son orthogonal symplectique. Ainsi

$$(T_x S \cap \xi_x)^{(d\alpha)_x|_{\xi_x}} \subset ((T_x S \cap \xi_x)^{(d\alpha)_x|_{\xi_x}})^{(d\alpha)_x|_{\xi_x}} = T_x S \cap \xi_x .$$

Enfin, soit  $x \in S$  tel que  $T_x S = \xi_x$ , il est trivial dans ce cas que  $S^\xi(x) = 0$ . Cela provient du fait  $(d\alpha)_x|_{\xi_x}$  est une forme symplectique sur  $\xi_x$  et donc qu'elle est non-dégénérée.  $\square$

*Remarque 6.12.* 1. Lorsque la variété de contact  $(M, \xi)$  est de dimension 3, en un point d'une hypersurface  $S$  où la distribution caractéristique n'est pas singulière, elle est donnée par l'intersection du plan tangent de  $S$  avec la distribution de contact.

2. Dans son livre [3] V. Arnold donne une définition de la distribution caractéristique sans utiliser de forme de contact. Pour une hypersurface  $S$  dans  $M$  et un point  $x \in S$  il définit dans un premier temps le sous-groupe des contactomorphismes de  $M$  qui préservent  $S$  et qui fixent  $x$ . Il définit alors la distribution caractéristique en ce point  $x \in S$  comme l'unique direction préservée par les différentielles en  $x$  de tous les contactomorphismes appartenant au sous-groupe précédent.

Comme la distribution caractéristique  $S^\xi$  est canonique sur toute hypersurface lisse  $S \subset (M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$ , cela implique qu'elle est stable par contactomorphisme.

**Lemme 6.13.** *Soit  $\phi \in \text{Cont}(M, \xi)$  un contactomorphisme de  $(M, \xi)$  et  $S$  une hypersurface lisse incluse dans  $M$ , nous avons alors pour tout  $x \in S$  :*

$$d_x \phi(S^\xi(x)) = (\phi(S))^\xi(\phi(x)) .$$

*Démonstration.* Soit  $u \in S^\xi(x)$ , nous allons montrer que  $d_x \phi(u) \in (\phi(S))^\xi(\phi(x))$ . Comme  $\phi$  est un difféomorphisme  $T_{\phi(x)} \phi(S) = d_x \phi(T_x S)$  et comme il est de plus un contactomorphisme  $\xi_{\phi(x)} = d_x \phi(\xi_x)$ , ainsi :

$$T_{\phi(x)} \phi(S) \cap \xi_{\phi(x)} = d_x \phi(T_x S \cap \xi_x) .$$

Nous en déduisons que pour tout  $v' \in T_{\phi(x)} \phi(S) \cap \xi_{\phi(x)}$  il existe un vecteur  $v \in T_x S \cap \xi_x$  tel que

$d_x\phi(v) = v'$  et donc :

$$\begin{aligned}
(d\alpha)_{\phi(x)}(d_x\phi(u), v') &= (d\alpha)_{\phi(x)}(d_x\phi(u), d_x\phi(v)) \\
&= \phi^*(d\alpha)_x(u, v) \\
&= (d(e^g\alpha))_x(u, v) \\
&= e^g(x)(d_xg \wedge \alpha_x + (d\alpha)_x)(u, v) \\
&= e^g(x)(d_xg(u)\alpha_x(v) - d_xg(v)\alpha_x(u) + (d\alpha)_x(u, v)),
\end{aligned}$$

où  $g$  est le facteur de conformalité de  $\phi$  par rapport à  $\alpha$ . Le premier terme de cette somme est nul car  $v \in \xi_x$ , le deuxième et le troisième sont nuls car  $u \in S^\xi(x) \subset \xi_x$ . Donc  $d_x\phi(u) \in (\phi(S))^\xi(\phi(x))$ . De plus, comme  $d_x\phi$  est un isomorphisme d'espace vectoriel, nous pouvons par des considérations de dimension conclure que pour tout  $x \in S$  :

$$d_x\phi(S^\xi(x)) = (\phi(S))^\xi(\phi(x)) .$$

□

Nous avons donc le corollaire suivant :

**Corollaire 6.14.** *Soient  $S$  une hypersurface lisse dans  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $S^\xi$ , c'est-à-dire que  $\dot{\gamma}(t) \in S^\xi(\gamma(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Alors, pour tout contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}(M, \xi)$ ,  $\phi \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \phi(S)$  est une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $\phi(S)^\xi$ .*

La démonstration de ce corollaire est laissée au lecteur.

Dans le cas symplectique, lorsqu'une hypersurface est donnée par le niveau d'une fonction lisse, l'espace vectoriel engendré par le gradient symplectique de la fonction hamiltonienne correspond à la distribution caractéristique sur l'hypersurface (voir la formule (17) de la sous-section précédente). Quelque chose de similaire apparaît en géométrie de contact. En effet, rappelons que lorsque  $(M, \xi)$  est une variété de contact dont la distribution de contact est co-orientable et que nous choisissons une 1-forme  $\alpha \in \Omega^1(M)$  telle que  $\text{Ker}(\alpha) = \xi$ , nous pouvons associer à une fonction hamiltonienne lisse  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  un champs de vecteurs  $X_h$  dont le flot est un chemin lisse de contactomorphismes. Ce champs de vecteurs est défini comme suit :

$$\begin{cases} \alpha(X_h) = h \\ \iota_{X_h} d\alpha = dh(R_\alpha)\alpha - dh \end{cases}$$

où  $R_\alpha$  désigne le champs de Reeb associé à la forme de contact  $\alpha$  (voir chapitre 0).

**Lemme 6.15.** *Soient  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction hamiltonienne sur une variété de contact  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$ , et  $a \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $h$ . Notons  $S$  l'hypersurface correspondant au niveau  $h^{-1}\{a\}$ . Nous avons alors pour tout  $x \in S$  :*

$$S^\xi(x) = \langle X_h(x) - aR_\alpha(x) \rangle .$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que pour tout  $x \in S$ , le vecteur  $X_h(x) - aR_\alpha(x)$  appartient à  $\xi_x$ . Soit alors  $x \in S = h^{-1}\{a\}$ , nous avons :

$$\alpha_x(X_h(x) - aR_\alpha(x)) = h(x) - a = 0 ,$$

donc  $X_h(x) - aR_\alpha(x) \in \xi_x$ .

Montrons maintenant que pour tout  $x \in S$  et pour tout  $v \in T_xS \cap \xi_x$ ,  $(d\alpha)_x(X_h(x) - aR_\alpha(x), v) = 0$ . En effet :

$$(d\alpha)_x(X_h(x) - aR_\alpha(x), v) = (d\alpha)_x(X_h(x), v) = d_xh(R_\alpha(x))\alpha_x(v) - d_xh(v) .$$

Or le premier terme de cette somme est nul car  $v$  appartient à la distribution de contact donc  $\alpha_x(v) = 0$  et le deuxième est également nul car  $v$  appartient à  $T_x S = \text{Ker}(d_x h)$  et donc  $d_x h(v) = 0$ .

La dernière chose qu'il reste à vérifier est que dans le cas où  $S^\xi(x)$  est un espace vectoriel de dimension 1, l'espace vectoriel engendré par  $X_h(x) - aR_\alpha(x)$  est également un espace vectoriel de dimension 1, en d'autres mots  $X_h(x) \neq aR_\alpha(x)$ . Or, d'après le lemme [6.11](#), l'espace vectoriel  $S^\xi(x)$  est une droite si et seulement si  $T_x S$  est différent de  $\xi_x$  et donc si et seulement si  $\text{Ker}(d_x h)$  est différent de  $\xi_x$ . Soit alors  $u$  un vecteur de  $\xi_x$  qui n'appartient pas à  $\text{Ker}(d_x h)$ , nous avons :

$$(d\alpha)_x(X_h(x) - aR_\alpha(x), u) = (d\alpha)_x(X_h(x), u) = d_x h(R_\alpha(x))\alpha_x(u) - d_x h(u) ,$$

or le premier terme de cette somme est nul car  $u \in \xi_x = \text{Ker}(\alpha_x)$  alors que le deuxième est non nul car nous avons choisi  $u$  tel qu'il ne soit pas dans le noyau de  $d_x h$ . Ainsi  $X_h(x) - aR_\alpha(x) \neq 0$ .  $\square$

*Remarque 6.16.* La distribution caractéristique sur une hypersurface  $S = h^{-1}\{a\}$  est nulle en un point  $x$  si et seulement si  $X_h(x) = aR_\alpha(x)$ .

Une autre façon possible de définir cette distribution caractéristique est de passer à la symplectisation. Considérons  $S$  une hypersurface lisse dans  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  que l'on relève en  $S \times \mathbb{R}$  dans la symplectisation  $(M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ . Notons  $\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  la projection canonique. Nous affirmons que pour tout  $(x, \theta) \in S \times \mathbb{R}$  :

$$d_{(x,\theta)}\pi \left( (S \times \mathbb{R})^{d(e^\theta \alpha)}(x, \theta) \right) = S^\xi(x) .$$

Démontrons cette affirmation. Montrons en un premier temps que l'hypersurface  $S$  est donnée par le niveau 0 d'une fonction. En effet, une hypersurface est par définition une sous-variété de codimension 1 orientable. Or une sous-variété de codimension 1 est orientable si et seulement si son fibré normal est trivialisable. De ce fait, il existe  $\mathcal{V}(S)$  un voisinage tubulaire de  $S$  qui est difféomorphe à  $S \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$ . En notant  $\Psi$  ce difféomorphisme et  $pr : S \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow ]-\varepsilon, \varepsilon[$  la projection, il est clair que  $S = (pr \circ \Psi)^{-1}\{0\}$ . Il suffit alors d'étendre l'application lisse  $\pi \circ \Psi : \mathcal{V}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  en une application lisse  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne s'annule pas sur  $M \setminus \mathcal{V}(S)$ . Ainsi 0 est une valeur régulière de  $h$  et  $h^{-1}\{0\} = S$ , et donc, d'après le lemme précédent  $S^\xi = \langle X_{h|_S} \rangle$ . Considérons alors la fonction hamiltonienne  $H$  correspondante dans la symplectisation, i.e.  $H(x, \theta) = e^\theta h(x)$  pour tout  $(x, \theta) \in M \times \mathbb{R}$ . Nous avons que  $H^{-1}\{0\} = S \times \mathbb{R}$ . Ainsi, d'après la sous-section précédente  $(S \times \mathbb{R})^{d(e^\theta \alpha)} = \langle X_{H|_{S \times \mathbb{R}}} \rangle$ , où  $X_H$  désigne le gradient symplectique de la fonction  $H$  - de manière équivalente où  $X_H$  est l'unique champs de vecteurs vérifiant  $\iota_{X_H}(d(e^\theta \alpha)) = -dH$ . Or, d'après la formule [\(10\)](#) du chapitre [0](#)

$$X_H(x, \theta) = (X_h(x), -d_x h(R_\alpha(x))) \in T_{(x,\theta)}(M \times \mathbb{R}) \text{ pour tout } (x, \theta) \in M \times \mathbb{R} .$$

Cela permet de conclure que pour tout  $(x, \theta) \in S \times \mathbb{R}$  :

$$d_{(x,\theta)}\pi \left( (S \times \mathbb{R})^{d(e^\theta \alpha)}(x, \theta) \right) = d_{(x,\theta)}\pi \left( \langle (X_h(x), -d_x h(R_\alpha(x))) \rangle \right) = \langle X_h(x) \rangle = S^\xi(x) ,$$

d'où l'affirmation précédente. Lorsque  $\mathcal{D}$  est une distribution sur une variété  $A$  nous disons que  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  est une courbe intégrale de cette distribution si  $\frac{d}{dt}\gamma(t) \in \mathcal{D}_{\gamma(t)}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , nous en déduisons le corollaire suivant.

**Corollaire 6.17.** *Soit  $S$  une hypersurface dans  $(M, \xi = \text{Ker}(\alpha))$  que nous relevons à la symplectisation en  $S \times \mathbb{R} \subset (M \times \mathbb{R}, d(e^\theta \alpha))$ . Si  $\gamma$  est une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $(S \times \mathbb{R})^{d(e^\theta \alpha)}$  alors  $\pi \circ \gamma$  est une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $S^\xi$ .*

La démonstration de ce corollaire est laissé au lecteur.

*Remarque 6.18.* Dans le cas où  $x \in S$  est un point singulier de la distribution caractéristique, c'est-à-dire que  $S^\xi(x) = 0$ , pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$

$$(S \times \mathbb{R})^{d(e^\theta \alpha)}(x, \theta) = \langle (0, 1) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta} \right\rangle .$$

Dans le cas où la variété de contact est la préquantification d'une variété symplectique exacte  $(W, \omega = d\lambda)$ , c'est-à-dire  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ , nous pouvons associer aux ouverts à bords lisses un ensemble de nombres via certaines caractéristiques du bord de ce domaine. Pour pouvoir définir cet ensemble sans ambiguïté il sera préférable de relever le problème que nous étudions dans  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  à  $(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Le champs de Reeb de ces variétés de contact est  $\frac{\partial}{\partial z}$  et nous notons le flot de Reeb au temps  $t \in \mathbb{R}$  par  $\phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^t$ .

Considérons alors  $\rho : W \times \mathbb{R} \rightarrow W \times S^1$  l'application de revêtement canonique où nous voyons  $S^1$  comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  et notons  $\mathcal{S}\rho : W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow W \times S^1 \times \mathbb{R}$  l'application de revêtement correspondante dans la symplectisation définie par la formule suivante

$$\mathcal{S}\rho(x, z, \theta) = (\rho(x, z), \theta) , \quad \text{pour tout } (x, z, \theta) \in W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} .$$

Soit  $U$  un ouvert de  $W \times S^1$  tel que son bord  $S := \partial U$  soit une hypersurface lisse. Pour tout  $T \in \mathbb{R}$  nous donnons deux notions de l'ensemble des caractéristiques  $T$ -translatées de  $U$ .

**Définition 6.19** (Caractéristique  $T$ -translatée). 1. Une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens 1 est une courbe contenue dans une feuille caractéristique de l'hypersurface  $\rho^{-1}(S) \subset (W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  qui se referme lorsqu'on lui attache une corde de Reeb de longueur  $T$ . Nous notons  $\text{Trans}_1^T(U)$  l'ensemble des courbes avec de telles propriétés, plus précisément

$$\begin{aligned} \text{Trans}_1^T(U) := \{ \gamma : [0, 1] \rightarrow \rho^{-1}(S) \mid \dot{\gamma}(t) \in \left( \rho^{-1}(S) \right)^\xi(\gamma(t)) \text{ pour tout } t \in [0, 1] \\ \text{il existe } (p, z) \in W \times \mathbb{R} \text{ tel que} \\ \gamma(0) = (p, z) \text{ et } \gamma(1) = (p, z + T) \} . \end{aligned}$$

Nous appelons désormais un élément de cet ensemble une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens faible.

2. Une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens 2 est une courbe  $\gamma$  contenue dans une feuille caractéristique de l'hypersurface  $\mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R}) = \rho^{-1}(S) \times \mathbb{R} \subset ((W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \underbrace{de^\theta(dz - \lambda)}_\Omega)$

telle qu'en écrivant  $\gamma$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R}) \subset (W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \\ t \mapsto \left( \underbrace{\gamma_1(t)}_{\in W \times \mathbb{R}}, \underbrace{\gamma_2(t)}_{\in \mathbb{R}} \right) \end{aligned}$$

la courbe  $\gamma_1$  est un élément de  $\text{Trans}_1^T(U)$  et la courbe  $\gamma_2$  est un lacet. Nous notons  $\text{Trans}_2^T(U)$  l'ensemble des courbes avec de telles propriétés, plus précisément

$$\begin{aligned} \text{Trans}_2^T(U) := \{ \gamma := (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R}) \mid \text{pour tout } t \in [0, 1] \\ \dot{\gamma}(t) \in \left( \mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R}) \right)^\Omega(\gamma(t)) \\ \gamma_1 \in \text{Trans}_1^T(U) \text{ et } \gamma_2(0) = \gamma_2(1) \} . \end{aligned}$$

Nous appelons désormais un élément de cet ensemble une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens fort.



- Remarque 6.20.* 1. Si  $U$  est un ouvert de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  dont le bord  $S$  est une hypersurface, une même feuille intégrale de la distribution caractéristique de  $\rho^{-1}(S)$  - vue comme hypersurface de la variété de contact  $(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  - peut contenir des caractéristiques  $T$ -translatées et des caractéristiques  $T'$ -translatées au sens faible pour des réels  $T$  et  $T'$  différents. La même remarque s'applique aux caractéristiques translatées au sens fort de  $\mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R})$ . A l'aide du théorème [6.23](#), que nous verrons dans les prochaines lignes, et de la remarque [6.8](#), dans le cas particulier où  $U = \mathcal{U} \times S^1$ , avec  $\mathcal{U}$  qui désigne un ouvert de  $W$  dont le bord  $\partial\mathcal{U} = P$  est lisse, nous déduisons que si  $T$  est le plus petit réel strictement positif tel qu'une feuille intégrale de la distribution caractéristique de  $\rho^{-1}(P \times S^1)$  contienne une caractéristique  $T$ -translatée au sens faible, alors tous les autres nombres réels  $T'$  pour lesquels elle possède des caractéristiques  $T'$ -translatées au sens faible seront des multiples de  $T$ . Encore une fois la même remarque s'applique aux caractéristiques translatées au sens fort de  $\mathcal{S}\rho^{-1}(P \times S^1 \times \mathbb{R})$ .
2. Si  $U \subset (W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  est un ouvert à bord lisse et que  $T$  est un réel tel que  $\text{Trans}_2^T(U) \neq \emptyset$ , nous avons par définition l'inclusion :

$$\begin{aligned} \text{Trans}_2^T(U) &\hookrightarrow \text{Trans}_1^T(U) \\ \gamma &\mapsto \pi(\gamma) , \end{aligned}$$

où  $\pi : (W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \Omega) \rightarrow (W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  désigne la projection canonique de la symplectisation sur la variété de contact. Lorsque  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{Trans}_2(U)$  est une caractéristique translatée de  $U$  au sens fort, nous appelons  $\gamma_2$  son facteur de conformalité. Nous reviendrons sur la terminologie "caractéristique translatée" ainsi que de l'intérêt d'introduire la notion de "caractéristiques translatées au sens fort" à la remarque [6.24](#).

Considérons de nouveau un ouvert  $U$  de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  dont le bord est lisse. Nous définissons l'ensemble des caractéristiques translatées de  $U$  au sens faible comme étant  $\text{Trans}_1(U) = \bigcup_{T \in \mathbb{R}} \text{Trans}_1^T(U)$  et l'ensemble des caractéristiques translatées de  $U$  au sens fort comme étant  $\text{Trans}_2(U) = \bigcup_{T \in \mathbb{R}} \text{Trans}_2^T(U)$ . Les éléments de l'ensemble  $\text{Trans}_1(U)$  (resp.  $\text{Trans}_2(U)$ ) sont par définition ce que nous appelons les caractéristiques translatées de  $U$  au sens faible (resp. au sens fort).

**Définition 6.21** (Spectre de contact). Nous définissons le spectre de  $U$  au sens faible (resp. au sens fort) comme l'ensemble des nombres  $T \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens faible (resp. au sens fort) :

$$\text{Spectre}_1(U) := \{T \in \mathbb{R} \mid \text{Trans}_1^T(U) \neq \emptyset\} \quad (\text{resp. } \text{Spectre}_2(U) := \{T \in \mathbb{R} \mid \text{Trans}_2^T(U) \neq \emptyset\}) .$$

Nous appelons l'ensemble  $\text{Spectre}_1(U)$  le spectre de contact de  $U$  au sens faible et  $\text{Spectre}_2(U)$  le spectre de contact de  $U$  au sens fort.

*Remarque 6.22.* Soit  $U \subset (W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  un ouvert dont le bord  $S$  est lisse. Pour tout  $T \in \mathbb{R}$ , nous disons que  $\gamma$  est une caractéristique  $T$ -translatée de  $S$  au sens faible (resp. au sens fort) si  $\gamma$  est une caractéristique  $T$ -translatée de  $U$  au sens faible (resp. au sens fort). Nous notons l'ensemble des caractéristiques  $T$ -translatées de  $S$  au sens faible (resp. au sens fort)  $\text{Trans}_1^T(S)$  (resp.  $\text{Trans}_2^T(S)$ ). Ainsi, par définition,

$$\text{Trans}_i^T(S) = \text{Trans}_i^T(U) , \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

De même, nous définissons le spectre de  $S$  au sens faible (resp. au sens fort) comme l'ensemble des nombres  $T \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une caractéristique  $T$ -translatée de  $S$  au sens faible (resp. au sens fort). Ainsi, par définition,

$$\text{Spectre}_i(S) = \text{Spectre}_i(U) , \quad \text{pour } i \in \{1, 2\}.$$

Le premier résultat de naturalité que nous avons par rapport au spectre de contact d'un ouvert à bord lisse est le suivant.

**Théorème 6.23.** *Soit  $U \subset W \times S^1$  un ouvert dont le bord est lisse, nous avons alors pour tout contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  :*

$$\text{Spectre}_i(U) \cap \mathbb{Z} = \text{Spectre}_i(\phi(U)) \cap \mathbb{Z} \quad \text{avec } i \in \{1, 2\} .$$

De plus si  $U = \mathcal{U} \times S^1$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert  $(W, \omega)$  dont le bord est une hypersurface alors

$$\text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U}) .$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord le premier énoncé. Montrons-le dans un premier temps pour le spectre de contact au sens faible.

Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et soit  $\gamma \in \text{Trans}_1^k(U)$ . Par définition, cela implique que l'application :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow W \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^{tk}(\gamma(t)) \end{aligned}$$

est un lacet. Soit alors  $\phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \xi)$ , et notons  $\tilde{\phi} \in \text{Cont}_0^c(W \times \mathbb{R}, \xi)^{\text{z-péri}}$  son correspondant 1-périodique. Vérifions que  $\tilde{\phi}(\gamma)$  est une caractéristique  $k$ -translatée au sens faible de  $\phi(U)$ . Comme  $\gamma$  est par définition une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $(\rho^{-1}(S))^\xi$ , où  $S$  désigne le bord de  $U$ ,  $\tilde{\phi}(\gamma)$  est une courbe intégrale de la distribution caractéristique de  $(\tilde{\phi}(\rho^{-1}(S)))^\xi$  d'après le lemme [6.13](#). Or nous avons par définition de  $\tilde{\phi}$  que :

$$\rho^{-1}(\phi(S)) = \tilde{\phi}(\rho^{-1}(S)) .$$

De ce fait  $\tilde{\phi}(\gamma)$  est une courbe intégrale de la distribution caractéristique  $\rho^{-1}(\phi(S))^\xi$ . De plus, comme  $\tilde{\phi}$  est 1-périodique,

$$\tilde{\phi}(\gamma(1)) = \tilde{\phi}(\phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^k(\gamma(0))) = \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^k(\tilde{\phi}(\gamma(0)))$$

et donc  $\tilde{\phi}(\gamma)$  appartient à  $\text{Trans}_1^k(\phi(U))$ . Nous pouvons faire exactement le même raisonnement dans l'autre sens. Ainsi

$$\gamma \in \text{Trans}_1^k(U) \Leftrightarrow \tilde{\phi}(\gamma) \in \text{Trans}_1^k(\phi(U)) .$$

Cela implique que

$$\text{Spectre}_1(U) \cap \mathbb{Z} = \text{Spectre}_1(\phi(U)) \cap \mathbb{Z} .$$

Le raisonnement pour le spectre au sens fort est analogue. Nous devons cependant faire une étape de plus pour vérifier que l'hypothèse que l'on demande sur le facteur de conformalité d'être périodique soit satisfaite. Dans un premier temps, relevons le contactomorphisme  $\phi$  de  $\text{Cont}_0^c(W \times S^1, \xi)$  à son correspondant  $\tilde{\phi}$  de  $\text{Cont}_0^c(W \times \mathbb{R}, \xi)^{\text{z-péri}}$ . Dans un deuxième temps, considérons le symplectomorphisme hamiltonien  $\mathbb{R}_{>0}$ -équivariant  $\tilde{\psi} \in \text{Ham}^{\mathbb{R}_{>0}}(W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \Omega)$  correspondant au relevé à la symplectisation du contactomorphisme  $\tilde{\phi}$ . Remarquons alors que si  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \text{Trans}_2^k(U)$  est une caractéristique  $k$ -translatée au sens fort de  $U$ , nous avons

$$\tilde{\psi}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \left( \tilde{\phi}(\gamma_1(t)), \gamma_2(t) - \tilde{g}(\gamma_1(t)) \right) ,$$

où  $\tilde{g}$  désigne le facteur de conformalité de  $\tilde{\phi}$  par rapport à la forme de contact  $dz - \lambda \in \Omega^1(W \times \mathbb{R})$ . Les vérifications par rapport à la première coordonnée sont donc exactement les mêmes que précédemment d'après le corollaire [6.17](#). Il reste donc uniquement à vérifier que  $t \in [0, 1] \mapsto \gamma_2(t) - \tilde{g}(\gamma_1(t))$  est un lacet. Nous avons par hypothèse que  $\gamma_2$  est un lacet, il reste alors à montrer

que  $t \mapsto \tilde{g}(\gamma_1(t))$  est un lacet. Or ceci est bien le cas car  $\tilde{g} \circ \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^{k'} \equiv \tilde{g}$  pour tout  $k' \in \mathbb{Z}$  car  $\tilde{\phi}$  est un contactomorphisme 1-périodique dans la direction  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Comme par hypothèse  $\gamma_1(1) = \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^k(\gamma_1(0))$ , nous concluons que  $t \in [0, 1] \mapsto \tilde{g}(\gamma_1(t))$  est bien un lacet et que  $\tilde{\psi}(\gamma) \in \text{Trans}_2^k(\phi(U))$ . Nous pouvons faire exactement le même raisonnement dans l'autre sens ce qui permet de dire

$$\gamma \in \text{Trans}_2^k(U) \Leftrightarrow \tilde{\psi}(\gamma) \in \text{Trans}_2^k(\phi(U)) ,$$

et donc de montrer que

$$\text{Spectre}_2(U) \cap \mathbb{Z} = \text{Spectre}_2(\phi(U)) \cap \mathbb{Z} .$$

Démontrons alors la deuxième partie du théorème. Soit  $U \subset W \times S^1$  de la forme  $\mathcal{U} \times S^1$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert  $(W, \omega = d\lambda)$  tel que son bord  $P := \partial\mathcal{U}$  soit une hypersurface. Soit  $H : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse telle que 0 soit valeur régulière de  $H$  et  $H^{-1}\{0\} = P$ . Notons  $h_1 : W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $h_2 : W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par  $h_1(p, z) = H(p)$  et  $h_2(p, z, \theta) = e^\theta h_1(p, z) = e^\theta H(p)$  pour tout  $(p, z, \theta) \in W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Nous associons à ces fonctions leur gradient symplectique et leur gradient de contact, plus précisément et pour éviter les confusions, nous notons ces champs de vecteurs de la façon suivante :

1.  $X_H^\omega \in \chi(W)$  est le gradient symplectique de  $H$ , c'est-à-dire que  $\omega(X_H^\omega, \cdot) = -dH$ .
2.  $X_{h_1} \in \chi(W \times \mathbb{R})$  est le gradient de contact de  $h_1$  respectivement à la forme de contact  $dz - \lambda$  c'est-à-dire que

$$\begin{cases} (dz - \lambda)(X_{h_1}) = h_1 \\ -d\lambda(X_{h_1}) = dh_1 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (dz - \lambda) - dh_1 \end{cases}$$

3. Enfin,  $X_{h_2}^\Omega \in \chi(W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  est le gradient symplectique de  $h_2$ , c'est-à-dire que  $\Omega(X_{h_2}, \cdot) = -dh_2$ .

Avec ces notations nous affirmons que pour tout  $(p, z, \theta) \in W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$X_{h_1}(p, z) = -X_H^\omega(p) + (H(p) - \lambda_p(X_H^\omega(p))) \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{et} \quad X_{h_2}^\Omega(p, z, \theta) = (X_{h_1}(p, z), 0) .$$

Montrons d'abord l'égalité pour le champs de vecteurs  $X_{h_1}$ . Pour tout  $(p, z) \in W \times \mathbb{R}$  nous avons d'une part

$$(dz - \lambda) \left( -X_H^\omega(p) + (H(p) - \lambda_p(X_H^\omega(p))) \frac{\partial}{\partial z} \right) = \lambda_p(X_H^\omega(p)) + H(p) - \lambda_p(X_H^\omega(p)) = h_1(p, z) ,$$

et, comme  $\frac{\partial}{\partial z} \cdot h_1 = 0$ , nous avons d'autre part que

$$\begin{aligned} -(d\lambda)_p \left( -X_H^\omega(p) + (H(p) - \lambda_p(X_H^\omega(p))) \frac{\partial}{\partial z}, \cdot \right) &= (d\lambda)_p(X_H^\omega(p), \cdot) \\ &= -d_p H \\ &= dh_1 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (dz - \lambda) - d_p h_1 . \end{aligned}$$

Le champs de vecteurs  $X_{h_1}$  vérifie donc bien l'égalité énoncée plus haut. Par ailleurs, comme  $h_2$  est le relevé de  $h_1$  à la symplectisation, nous avons d'après la formule (10) du chapitre 0 que pour tout  $(p, z, \theta) \in W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$X_{h_2}^\Omega(p, z, \theta) = \left( X_{h_1}(p, z), -\frac{\partial}{\partial z} \cdot h_1 \right) = (X_{h_1}(p, z), 0)$$

comme annoncé plus haut.

De ces calculs et du lemme [6.15](#), nous avons pour tout  $(p, z, \theta) \in h_2^{-1}\{0\} = h_1^{-1}\{0\} \times \mathbb{R} = H^{-1}\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  d'une part

$$\begin{aligned} (P \times \mathbb{R})^\xi(p, z) &= \langle X_{h_1}(p, z) \rangle = \left\langle -X_H^\omega(p) + (H(p) - \lambda_p(X_H^\omega(p))) \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \\ &= \left\langle X_H^\omega(p) + \lambda_p(X_H^\omega(p)) \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \end{aligned}$$

et d'autre part

$$(P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^\Omega(p, z, \theta) = \langle X_{h_2}^\Omega(p, z, \theta) \rangle = \langle (X_{h_1}(p, z), 0) \rangle = \left\langle \left( X_H^\omega(p) + \lambda_p(X_H^\omega(p)) \frac{\partial}{\partial z}, 0 \right) \right\rangle.$$

Ainsi si  $\Gamma$  est une feuille intégrale de  $(P \times \mathbb{R})^\xi$  passant par le point  $(p_0, z_0) \in P \times \mathbb{R}$  nous pouvons la paramétriser pour qu'elle s'écrive

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow P \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left( \psi_H^t(p_0), \int_0^t \lambda_{\psi_H^s(p_0)}(X_H^\omega(\psi_H^s(p_0))) ds + z_0 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

et de même si  $\mathcal{S}\Gamma$  est une courbe intégrale de  $(P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})^\Omega$  passant par le point  $(p_0, z_0, \theta_0)$  nous pouvons la paramétriser pour qu'elle s'écrive

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{S}\Gamma} : \mathbb{R} &\rightarrow P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left( \psi_H^t(p_0), \int_0^t \lambda_{\psi_H^s(p_0)}(X_H^\omega(\psi_H^s(p_0))) ds + z_0, \theta_0 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

où  $\psi_H$  désigne le flot du champs de vecteurs  $X_H^\omega$ .

Supposons que  $\text{Trans}_1^T(U)$  soit non vide et considérons  $\gamma$  une caractéristique  $T$ -translatée au sens faible de  $U$  (en particulier  $\gamma$  est un sous-ensemble d'une feuille caractéristique  $\Gamma$ ). Il existe alors  $\eta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  tel qu'une paramétrisation de  $\gamma$  soit donnée par  $\bar{\Gamma}|_{[0, \eta]}$ . En particulier  $pr_1 \circ \gamma$  est une caractéristique fermée de  $P$  - où  $P = H^{-1}\{0\}$  est vue comme hypersurface dans la variété symplectique  $(W, \omega = d\lambda)$  et où  $pr_1 : W \times \mathbb{R} \rightarrow W$  désigne la projection canonique. Le fait que  $pr_1 \circ \gamma$  soit fermée vient directement de la définition d'une caractéristique translatée, et le fait qu'elle soit une caractéristique de  $P$  vient de la formule [\(18\)](#) précédente et de la formule [\(17\)](#) de la sous-section [6.2.1](#) précédente. Or, l'aire symplectique de  $pr_1 \circ \gamma$  est par définition  $\int_{pr_1 \circ \gamma} \lambda$ . Nous déduisons ainsi de [\(18\)](#) que l'aire symplectique correspond à la translation  $T$  de la caractéristique  $T$ -translatée au sens faible  $\gamma$ . Ainsi,  $\text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) \subset \text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U})$ . De plus, pour toute constante  $\theta \in \mathbb{R}$ , la courbe  $\mathcal{S}\gamma := (\gamma, \theta) \subset (P \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  est une caractéristique  $T$ -translatée au sens fort de  $(\mathcal{U} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \subset (W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \Omega)$  d'après la formule [\(19\)](#). Donc  $\text{Trans}_1(\mathcal{U} \times S^1) \subset \text{Trans}_2(\mathcal{U} \times S^1)$ . D'après la remarque [6.20](#), nous déduisons que  $\text{Trans}_2(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Trans}_1(\mathcal{U} \times S^1)$  et que  $\text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U} \times S^1)$ . A ce stade, nous avons montré que  $\text{Spectre}_i(\mathcal{U} \times S^1) \subset \text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U})$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . Il nous reste donc à montrer l'inclusion inverse.

Réciproquement si  $\gamma$  est une caractéristique fermée de  $P \subset (W, \omega = d\lambda)$  il existe  $p_0 \in P$  et  $\eta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : [0, 1] &\rightarrow P \\ t &\mapsto \psi_H^{\eta t}(p_0) \end{aligned}$$

avec  $\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}(1)$ . En effet, d'après la formule [\(17\)](#) de la sous-section [6.2.1](#) précédente, la distribution  $P^\omega$  est engendrée par le champs de vecteurs  $X_H^\omega|_P$ . Ainsi, d'après les formules [\(18\)](#) et [\(19\)](#), les courbes

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow P \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left( \psi_H^{\eta t}(p_0), \int_0^{\eta t} \lambda_{\psi_H^s(p_0)}(X_H^\omega(\psi_H^s(p_0))) ds \right) \quad \text{et} \\ [0, 1] &\rightarrow P \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ t &\mapsto \left( \psi_H^{\eta t}(p_0), \int_0^{\eta t} \lambda_{\psi_H^s(p_0)}(X_H^\omega(\psi_H^s(p_0))) ds, 0 \right) \end{aligned}$$

appartiennent respectivement à  $\text{Trans}_1^a(U)$  et  $\text{Trans}_2^a(U)$  où  $a = \int_\gamma \lambda$ . Donc  $\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U}) \subset \text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U} \times S^1)$ .  $\square$

*Remarque 6.24.* 1. Dans la preuve du théorème précédent, nous montrons qu'une caractéristique fermée  $\gamma$  d'un ouvert à bord lisse  $\mathcal{U} \subset (W, \omega = d\lambda)$  d'aire symplectique  $\int_\gamma \lambda$  se relève en une caractéristique  $\int_\gamma \lambda$ -translatée de  $\mathcal{U} \times S^1$  au sens faible et au sens fort. De même nous avons vu au lemme 4.5 qu'un point fixe d'un symplectomorphisme à support compact  $\psi \in \text{Ham}^c(W, \omega = d\lambda)$  dont l'action (voir la définition à la sous-section 6.3 suivante) vaut  $a \in \mathbb{R}$  se relève en 1 point  $a$ -translaté du relèvement de contact de  $\psi$ . C'est de cette analogie que nous avons choisi la terminologie "caractéristique translatée". C'est cette analogie encore qui nous a motivé à ne pas considérer uniquement les caractéristiques translatées au sens faible mais également les caractéristiques translatées au sens fort. Une autre motivation de ce fait sera donnée par le théorème 6.27. Le lecteur pourra remarquer aussi la similarité entre la première affirmation du théorème précédent et la formule (13) de la sous-section 2.3.2 du chapitre 2.

2. Le théorème précédent permet également de s'assurer que dès que le spectre symplectique d'un ouvert  $\mathcal{U} \subset (W, \omega = d\lambda)$  est non vide, le spectre de contact de  $\mathcal{U} \times S^1$  au sens faible et au sens fort est non vide. Nous verrons dans la dernière section de ce chapitre des conditions suffisantes pour que le spectre d'un ouvert  $\mathcal{U} \subset (W, \omega = d\lambda)$  soit non vide.

### 6.2.3 Liens entre le spectre et les longueurs d'oscillation et discriminante

Rappelons que lorsque  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété de Liouville et que  $\mathcal{U} \subset W$  est un ouvert étoilé il existe une bijection entre les chemins de contactomorphismes strictement positifs de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  – où  $P$  désigne le bord de  $\mathcal{U}$  et  $\alpha$  la restriction de  $\lambda$  à  $P$  – et les ouverts étoilés fibre-par-fibre de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Nous allons dans les prochaines lignes faire un lien entre les longueurs discriminante et d'oscillation d'un chemin strictement positif de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  engendré par une fonction hamiltonienne autonome et la plus petite valeur du spectre de son domaine associé  $\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})$  au sens faible et au sens fort. Pour tout ouvert à bord lisse  $U \subset (W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  et pour tout  $i \in \{1, 2\}$  nous notons ce nombre  $\mathfrak{A}_i(U) := \inf \{|T| > 0 \mid T \in \text{Spectre}_i(U)\}$ . Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 6.25.** *Soit  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes strictement positifs de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  commençant à l'identité engendré par une fonction hamiltonienne autonome, nous avons alors*

$$\mathcal{L}_{osc}(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) = \left\lfloor \frac{1}{\mathfrak{A}_i(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}))} \right\rfloor + 1 .$$

*Démonstration.* Dans le cas où  $\{\phi^t\}$  est un chemin de contactomorphismes strictement positif de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  engendré par une fonction hamiltonienne autonome, son domaine étoilé fibre-par-fibre associé  $\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})$  est de la forme  $\mathcal{V} \times S^1 \subset W \times S^1$  avec  $\mathcal{V}$  qui est un domaine étoilé de  $(W, \omega = d\lambda)$ . En effet, considérons la fonction hamiltonienne autonome  $h : P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  qui engendre  $\{\phi^t\}$  et  $\Psi_P : W_* \rightarrow P \times \mathbb{R}$  l'identification entre  $W_*$  et la symplectisation positive de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$ . La fonction  $\overline{H} : W \rightarrow \mathbb{R}$  associée à  $h$  est alors définie par

$$\overline{H}(p) = \begin{cases} e^\theta h(x) & \text{si } p \in W_* \text{ et } \Psi_P(p) = (x, \theta) \\ 0 & \text{si } p \in \text{Core}(W) . \end{cases}$$

Par définition, nous avons

$$\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}) = \underbrace{\{\overline{H} < 1\}}_{\mathcal{V}} \times S^1 .$$

Notons alors  $H : W_* \rightarrow \mathbb{R}$  la restriction de  $\overline{H}$  à  $W_*$  et notons  $\psi_H$  le flot de symplectomorphismes hamiltoniens de  $(W_*, d\lambda_{W_*})$  engendré par  $H$ . Nous affirmons que

$$\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{V}) = \left\{ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \text{Fix}(\psi_H^t) \neq \emptyset \right\} \quad (20)$$

où  $\text{Fix}(\psi_H^t)$  désigne l'ensemble des points fixes de  $\psi_H^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Montrons dans un premier temps que  $\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{V}) \subset \{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \text{Fix}(\psi_H^t)\}$ . Pour ce faire, nous montrons que l'aire symplectique d'une caractéristique fermée du bord de  $\mathcal{V}$ , que nous notons  $Q$ , correspond à un multiple de la période d'une orbite du chemin de symplectomorphismes hamiltoniens  $\psi_H$  de  $(W_*, \omega|_{W_*} = d\lambda|_{W_*})$ . En effet, soit  $\gamma$  une caractéristique fermée de l'hypersurface  $H^{-1}\{1\} = Q \subset (W, \omega = d\lambda)$ . D'après la formule (17) de la sous-section 6.2.1, il existe  $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  et  $p_0 \in Q \subset W_*$  tels qu'une paramétrisation de  $\gamma$  soit donnée par

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\rightarrow Q \\ t &\mapsto \psi_H^{\eta t}(p_0) . \end{aligned} \quad (21)$$

En notant  $X_H$  le gradient symplectique de  $H$  et  $X$  le champs de Liouville, *i.e.*  $\iota_{X_H}\omega = -dH$  et  $\iota_X\omega = \lambda$ , nous avons  $\lambda(X_H) = \omega(X, X_H) = dH(X)$ . Comme  $H$  est homogène sous l'action du flot de Liouville, c'est-à-dire que  $H \circ \phi_X^\theta = e^\theta H$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , cela implique que  $dH(X) = H$ . De plus, par définition du flot de symplectomorphisme hamiltonien  $\psi_H$  engendré par  $H$ , le champs de vecteurs associé à  $\psi_H$  est  $X_H$ . En rassemblant ces deux remarques nous avons

$$\begin{aligned} \int_\gamma \lambda &= \int_0^1 \lambda_{\psi_H^{\eta t}(p_0)}(\eta X_H(\psi_H^{\eta t}(p_0))) dt = \int_0^\eta \lambda_{\psi_H^t(p_0)}(X_H(\psi_H^t(p_0))) dt = \int_0^\eta H(\psi_H^t(p_0)) dt \\ &= \int_0^\eta H(p_0) dt \\ &= \eta , \end{aligned}$$

car  $p_0 \in Q = H^{-1}\{1\}$ . Comme  $\gamma$  est une caractéristique fermée, il advient de la formule (21) que  $\eta$  est un multiple de la période de l'orbite de  $p_0$  sous l'action de  $\psi_H$ , en particulier  $\psi_H^\eta(p_0) = p_0$ . Nous avons donc bien  $\text{Spectre}_\lambda(\mathcal{V}) \subset \{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \text{Fix}(\psi_H^t)\}$ . L'inclusion inverse se fait exactement de la même façon, d'où l'affirmation (20).

Il ne reste plus qu'à faire un lien entre les points fixes du flot de  $\psi_H$  et les points discriminants du chemin de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$ . En notant  $DP(\phi)$  l'ensemble des points discriminants d'un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0(P, \xi)$ , nous avons d'après le lemme 4.12 du chapitre 4

$$\mathcal{L}_{osc}(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) = \left\lfloor \frac{1}{t_0} \right\rfloor + 1 \quad \text{où } t_0 = \inf \left\{ t > 0 \mid DP(\{\phi^t\}) \neq \emptyset \right\} .$$

Par définition d'un point discriminant, nous avons

$$\inf \left\{ t > 0 \mid DP(\phi^t) \neq \emptyset \right\} = \inf \left\{ t > 0 \mid \text{Fix}(\psi^t) \neq \emptyset \right\}$$

où  $\psi^t$  désigne le relevé à la symplectisation de  $\phi^t$ . Plus précisément

$$\psi^t(x, \theta) = \left( \phi^t(x), \theta - g^t(x) \right), \quad \text{pour tout } (x, \theta) \in P \times \mathbb{R}$$

avec  $g^t$  désignant le facteur de conformalité de  $\phi^t$  par rapport à  $\alpha$ . Or, d'après le 3ème point de la remarque 6.2, en notant  $\Phi_P : P \times \mathbb{R} \rightarrow W_*$  l'identification de la symplectisation positive de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  à  $(W_*, \omega|_{W_*})$ , nous avons  $\psi^t = \Phi_P^{-1} \psi_H^t \Phi_P$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous en déduisons donc que  $\text{Fix}(\psi^t) = \text{Fix}(\psi_H^t)$  et que

$$\inf \left\{ t > 0 \mid \text{Fix}(\psi^t) \neq \emptyset \right\} = \inf \left\{ t > 0 \mid \text{Fix}(\psi_H^t) \neq \emptyset \right\} .$$

Or comme la fonction  $H$  est autonome et homogène nous venons de montrer que

$$\{t > 0 \mid \text{Fix}(\psi_H^t) \neq \emptyset\} = \{t > 0 \mid t \in \text{Spectre}_\lambda(\{H = 1\})\} .$$

De plus d'après le théorème [6.23](#) nous avons pour tout  $i \in \{1, 2\}$

$$\text{Spectre}_\lambda(\{H = 1\}) = \text{Spectre}_i(\{H = 1\} \times S^1)$$

et donc

$$\mathfrak{A}_i(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) = \inf \{t > 0 \mid t \in \text{Spectre}_i(\{H = 1\} \times S^1)\} = \inf \{t > 0 \mid \text{DP}(\phi^t) \neq \emptyset\} = t_0 ,$$

d'où le résultat. □

Ainsi pour résumer, les ingrédients nécessaires à la démonstration du théorème [6.25](#) sont :

1. L'ensemble des périodes auxquelles un chemin de contactomorphismes strictement positif  $\{\phi^t\} \subset \text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  engendré par une fonction hamiltonienne autonome a un point discriminant correspond au spectre de contact de son domaine associé  $\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}) \subset (W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  au sens fort et faible.
2. Pour un chemin de contactomorphismes engendré par une fonction autonome, le lemme [4.12](#) permet d'exprimer sa longueur discriminante et d'oscillation grâce à la plus petite période d'un point discriminant.

Dans le cas où le chemin de contactomorphismes  $\{\phi^t\} \subset \text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  n'est plus engendré par une fonction hamiltonienne autonome mais par une fonction hamiltonienne périodique strictement positive  $h : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  nous n'arrivons plus à exprimer sa longueur discriminante/d'oscillation grâce à la plus petite période d'un point discriminant. En d'autres mots, nous n'arrivons plus à avoir le 2ème point du résumé précédent. Par contre nous arrivons toujours à avoir un résultat similaire au premier point du résumé précédent. En effet, dans ce cas nous avons une inclusion des périodes auxquelles un chemin lisse de contactomorphismes a un point discriminant et le spectre de contact de son domaine associé au sens fort (et non au sens faible!).

Formalisons ce que nous venons d'énoncer. Considérons  $\{\phi^t\}$  un chemin lisses de contactomorphismes de  $\text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  commençant à l'identité engendré par une fonction hamiltonienne périodique et strictement positive. Remarquons que le fait que sa fonction hamiltonienne soit périodique implique que  $\phi^{t+1} = \phi^t \phi^1$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Nous appelons les périodes de points discriminants de  $\{\phi^t\}$  l'ensemble suivant :

$$\text{Per}(\{\phi^t\}) = \{T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \text{il existe } t, s \in \mathbb{R}, \text{ tels que } t - s = T \text{ et } \text{DP}((\phi^s)^{-1} \phi^t) \neq \emptyset\} ,$$

où  $\text{DP}(\phi)$  dénote l'ensemble des points discriminants de contactomorphismes  $\phi \in \text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$ .

*Remarque 6.26.* 1. Dans le cas où le chemin  $\{\varphi^t\}$  est engendré par une fonction hamiltonienne autonome nous avons

$$\text{Per}(\{\varphi^t\}) = \{T \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \text{DP}(\varphi^T) \neq \emptyset\} .$$

En effet, dans ce cas  $(\varphi^s)^{-1} \varphi^t = \varphi^{t-s}$  pour tout  $t, s \in \mathbb{R}$ . De plus, en notant  $T_0 := \inf \{T > 0 \mid T \in \text{Per}(\{\varphi^t\})\}$  nous avons ici  $\mathcal{L}_d(\{\varphi^t\}) = \lfloor \frac{1}{T_0} \rfloor + 1$  (voir [4.12](#)).

2. Remarquons également que pour tout chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  et pour tout élément  $\varphi \in \text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\alpha))$  nous avons

$$\text{Per}(\{\varphi \circ \phi^t \circ \varphi^{-1}\}) = \text{Per}(\{\phi^t\}) .$$

Revenons au cas où  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes strictement positif  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  engendré par une fonction hamiltonienne périodique  $h : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Nous disons qu'une distribution  $\mathcal{D}$  sur une variété  $A$  est complète s'il existe un champs de vecteurs complet  $Y \in \chi(A)$  tel que  $\mathcal{D} = \langle Y \rangle$ . Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 6.27.** *Si la distribution caractéristique sur le bord de  $\mathcal{S}\rho^{-1}(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}) \times \mathbb{R})$  est complète alors*

$$\text{Spectre}_2(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \subset \text{Per}(\{\phi^t\}) .$$

*Remarque 6.28.* Dans le cas où le chemin  $\{\varphi^t\}$  est engendré par une fonction hamiltonienne autonome, en utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème [6.25](#) nous avons

$$\text{Spectre}_1(\mathcal{U}_\alpha(\{\varphi^t\})) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U}_\alpha(\{\varphi^t\})) = \text{Per}(\{\varphi^t\}) .$$

Pour prouver le théorème [6.27](#) nous aurons besoin de deux lemmes. Rappelons que pour définir le spectre de contact au sens fort d'une hypersurface  $S \subset (W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  nous nous sommes intéressés à la distribution caractéristique de l'hypersurface

$$\mathcal{S}\rho^{-1}(S \times \mathbb{R}) \subset ((W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \Omega = d(e^\theta(dz - \lambda))) ,$$

où  $\mathcal{S}\rho : (W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow (W \times S^1) \times \mathbb{R}$  désigne l'application de revêtement canonique. Ainsi, pour faire le lien entre le spectre de contact au sens fort de  $\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})$  et les périodes de points discriminants d'un chemin lisse  $\{\phi^t\}$  vérifiant les hypothèses de la proposition précédente, nous allons exprimer  $\mathcal{S}\rho^{-1}(\partial(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \times \mathbb{R})$  comme le niveau 0 d'une fonction hamiltonienne construite à partir de celle qui engendre  $\{\phi^t\}$ . Le premier lemme exprimera la distribution caractéristique de l'hypersurface en fonction des gradients de contact/symplectique des fonctions hamiltoniennes que nous construisons dans le prochain paragraphe. Le deuxième lemme consistera à donner une paramétrisation des feuilles intégrales de cette distribution.

Soit  $h : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  la fonction hamiltonienne périodique qui engendre  $\{\phi^t\}$ . Considérons  $H : S^1 \times W_* \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  la fonction définie par  $H^z(p) = e^\theta h^z(x)$  pour tout  $(z, p) \in \mathbb{R} \times W_*$  lorsque  $(\Phi_P)^{-1}(p) = (x, \theta) \in P \times \mathbb{R}$ . Associons à cette fonction  $H$  la fonction  $H_1 : \mathbb{R} \times W_* \rightarrow \mathbb{R}$  correspondante, c'est-à-dire que pour tout  $(z, p) \in \mathbb{R} \times W_*$  nous définissons  $H_1^z(p) = H^{r(z)}(p)$  où  $r : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  désigne l'application de revêtement canonique. Pour des considérations techniques nous aurons également besoin de la fonction  $h_1 : \mathbb{R} \times W_* \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  définie comme  $h_1^z(p) = H_1^z(p) - 1$ . Enfin, définissons la fonction hamiltonienne périodique  $h_2$  sur la symplectisation de  $(W_* \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  correspondante à  $h_1$  :

$$\begin{aligned} h_2 : (W_* \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ ((p, z), \theta) &\mapsto e^\theta h_1^z(p) . \end{aligned}$$

Nous avons donc que le niveau 0 de la fonction  $h_2$  correspond bien à l'hypersurface de  $((W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}, \Omega)$  que nous voulons, c'est-à-dire que

$$h_2^{-1}\{0\} = \mathcal{S}\rho^{-1}(\partial(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \times \mathbb{R}) .$$

Comme dans la démonstration du théorème [6.23](#) nous allons

1. écrire  $X_{H_1}^\omega(t, \cdot) \in \chi(W_*)$  pour désigner le gradient symplectique de  $H_1^t$  sur  $(W_*, \omega|_{W_*})$ , c'est-à-dire  $\iota_{X_{H_1}^\omega(t, \cdot)}\omega = -dH_1^t$  pour tout  $t \in S^1$  ;
2. écrire  $X_{h_1} \in \chi(W \times \mathbb{R})$  pour le gradient de contact de  $h_1$  respectivement à la forme de contact  $dz - \lambda$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} (dz - \lambda)(X_{h_1}) = h_1 \\ -\iota_{X_{h_1}} d\lambda = dh_1 \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) (dz - \lambda) - dh_1 \end{cases}$$



3. écrire  $X_{h_2}^\Omega \in \chi((W_* \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R})$  pour le gradient symplectique de  $h_2$ , c'est-à-dire que  $\iota_{X_{h_2}} \Omega = -dh_2$ .

**Lemme 6.29.** *En adoptant les notations de la discussion précédente nous avons pour tout  $((p, z), \theta) \in \mathcal{S}\rho^{-1}(\partial(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \times \mathbb{R})$  :*

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}\rho^{-1}(\partial(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \times \mathbb{R})^\Omega((p, z), \theta) \\ &= \left\langle \left( X_{H_1}^\omega(z, p) - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)X(p) + \frac{\partial}{\partial z}, \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p) \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

où  $X$  désigne le champs de vecteurs de Liouville défini par la relation  $\iota_X d\lambda = \lambda$ .

*Démonstration.* La distribution caractéristique sur l'hypersurface  $\mathcal{S}\rho^{-1}(\partial(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\})) \times \mathbb{R})$  est engendrée par le champs de vecteurs  $X_{h_2}^\Omega$  restreint à cette hypersurface d'après le lemme [6.15](#). Remarquons que  $h_2$  est la fonction hamiltonienne homogène définie sur la symplectisation de  $(W_* \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  correspondant à la fonction hamiltonienne  $h_1 : W_* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et que le champs de Reeb sur la variété de contact  $(W_* \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  est  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Ainsi, pour tout  $((p, z), \theta) \in (W_* \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$  nous avons, d'après la formule [\(10\)](#) du chapitre [0](#),

$$X_{h_2}^\Omega((p, z), \theta) = \left( X_{h_1}(p, z), - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot h_1 \right)(z, p) \right).$$

Montrons alors que pour tout  $(p, z) \in W_* \times \mathbb{R}$

$$X_{h_1}(p, z) = -X_{H_1}^\omega(z, p) + \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H \right)(z, p)X(p) - \frac{\partial}{\partial z}. \quad (22)$$

Nous avons bien d'une part que

$$\begin{aligned} (dz - \lambda)_{(p, z)} \left( -X_{H_1}^\omega(z, p) + \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)X(p) - \frac{\partial}{\partial z} \right) &= \lambda_p(X_{H_1}^\omega(z, p)) - 1 \\ &= H_1^z(p) - 1 = h_1^z(p), \end{aligned}$$

où la première égalité provient du fait que  $\lambda(X) = d\lambda(X, X) = 0$ , et d'autre part que

$$\begin{aligned} & - (d\lambda)_p \left( -X_{H_1}^\omega(z, p) + \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)X(p) - \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (d\lambda)_p(X_{H_1}^\omega(z, p)) - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)(d\lambda)_p(X(p)) \\ &= -d_p H_1^z - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)\lambda_p \\ &= -d_{(p, z)} H_1 + \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(z, p)dz - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H \right)(z, p)\lambda_p \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right)(dz - \lambda) - d_{(p, z)} H_1 \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot h_1 \right)(dz - \lambda) - d_{(p, z)} h_1. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien l'identité [\(22\)](#), et donc pour tout  $((p, z), \theta) \in (W_* \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (h_2^{-1}\{0\})^\Omega((p, z), \theta) &= \langle X_{h_2}((p, z), \theta) \rangle \\ &= \langle -X_{h_2}((p, z), \theta) \rangle \\ &= \left\langle \left( -X_{h_1}(p, z), \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot h_1 \right)(z, p) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule du lemme. □

En conservant les mêmes notations que dans le lemme précédent nous avons alors le lemme suivant.

**Lemme 6.30.** *Soit  $\mathcal{S}\Gamma$  une caractéristique de  $h_2^{-1}\{0\}$  passant par le point  $((p_0, z_0), \theta_0)$ . Une paramétrisation de  $\mathcal{S}\Gamma$  est alors donnée par*

$$\overline{\mathcal{S}\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow h_2^{-1}\{0\}$$

$$t \mapsto \left( \psi_{H_1}^{t+z_0} \left( \begin{array}{c} -\ln \left( g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1 \right) \\ \phi_X \end{array} \right) (p'_0) \right), z_0 + t, \ln \left( g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1 \right) + \theta_0 \right)$$

où  $p'_0 = (\psi_{H_1}^{z_0})^{-1}(p_0)$  et où pour tout  $t \in \mathbb{R}$

1.  $\phi_X^t$  est le difféomorphisme de  $W_*$  qui désigne le flot du champs de Liouville au temps  $t$
2.  $\psi_{H_1}^t \in \text{Ham}(W_*, \omega|_{W_*})$  désigne le temps  $t$  du flot de symplectomorphismes hamiltoniens engendré par la fonction  $H_1 : \mathbb{R} \times W_* \rightarrow \mathbb{R}$ ,
3. pour tout  $p \in W_*$

$$g_{H_1}^t(p) = \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right) (z, \psi_{H_1}^z(p)) dz .$$

*Démonstration.* Pour alléger les notations pour tout  $t \in \mathbb{R}$  nous allons adopter les notations suivantes :

1.  $p(t) = \psi_{H_1}^{t+z_0} \left( \begin{array}{c} -\ln \left( g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1 \right) \\ \phi_X \end{array} \right) (p'_0)$
2.  $z(t) = z_0 + t$
3.  $\theta(t) = \ln \left( g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1 \right) + \theta_0$ .

Nous avons bien  $(p(0), z(0), \theta(0)) = (p_0, z_0, \theta_0)$ , ainsi pour montrer que  $t \mapsto (p(t), z(t), \theta(t))$  est une paramétrisation de la feuille intégrale passant par  $(p_0, z_0, \theta_0)$  il reste à vérifier que pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$(p'(t), z'(t), \theta'(t)) \in \left( h_2^{-1}\{0\} \right)^\Omega (p(t), z(t), \theta(t)) = \left\langle X_{h_2}^\Omega ((p(t), z(t), \theta(t))) \right\rangle .$$

Nous allons montrer pour cela que pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & ((p'(t), z'(t), \theta'(t))) \\ &= -X_{h_2}^\Omega (p(t), z(t), \theta(t)) \\ &= \left( X_{H_1}^\omega (z(t), p(t)) - \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right) (z(t), p(t)) X(p(t)) + \frac{\partial}{\partial z}, \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right) (z(t), p(t)) \right) , \end{aligned} \tag{23}$$

où la dernière égalité vient de la formule (22) vue dans la démonstration précédente. Rappelons que comme pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  nous avons  $H_1^t \circ \phi_X^\theta = e^\theta H_1^t$ , i.e  $H_1^t$  est homogène, cela implique que :

1.  $\psi_{H_1}^t \phi_X^\theta = \phi_X^\theta \psi_{H_1}^t$ , i.e  $\psi_{H_1}^t$  est équivariant,
2.  $d\psi_{H_1}^t(X) = X \circ \psi_{H_1}^t$
3.  $(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1)(t, \phi_X^\theta(p)) = e^\theta \left( \frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1 \right) (t, p)$  pour tout  $p \in W_*$ .

Ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}$  nous avons :

$$\begin{aligned}
\theta'(t) &= \frac{\left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right) \left(t + z_0, \psi_{H_1}^{t+z_0}(p'_0)\right)}{g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1} \\
&= \exp\left(-\ln\left(g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right) \left(t + z_0, \psi_{H_1}^{t+z_0}(p'_0)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right) \left(z_0 + t, \phi_X^{-\ln\left(g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right)} \circ \psi_{H_1}^{t+z_0}(p'_0)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right) \left(z_0 + t, \psi_{H_1}^{t+z_0} \circ \phi_X^{-\ln\left(g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right)}(p'_0)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right) (z(t), p(t)) .
\end{aligned}$$

En posant  $q(t) = \phi_X^{-\ln\left(g_{H_1}^{t+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right)}(p'_0)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  nous avons

$$\begin{aligned}
(p'(t), z'(t)) &= X_{H_1}^\omega(t + z_0, p(t)) + d_{q(t)}\psi_{H_1}^{t+z_0}(-\theta'(t)X(q(t))) + \frac{\partial}{\partial z} \\
&= X_{H_1}^\omega(z(t), p(t)) - \theta'(t)X\left(\psi_{H_1}^{t+z_0}(q(t))\right) + \frac{\partial}{\partial z} \\
&= X_{H_1}^\omega(z(t), p(t)) - \left(\frac{\partial}{\partial z} \cdot H_1\right)(z(t), p(t))X(p(t)) + \frac{\partial}{\partial z} .
\end{aligned}$$

Ainsi  $(p'(t), z'(t), \theta'(t))$  vérifie bien [\(23\)](#) pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc  $t \mapsto (p(t), z(t), \theta(t))$  est bien une paramétrisation de la caractéristique passant par  $(p_0, z_0, \theta_0)$ . Enfin le fait que  $(p(t), z(t), \theta(t))$  est bien définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  provient du fait que nous avons supposé que la distribution est complète.  $\square$

Nous pouvons désormais démontrer le théorème [6.27](#).

*Démonstration.* Soit  $T \in \text{Spectre}_2(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}))$ . Cela implique qu'il existe  $\mathcal{S}\gamma \in \text{Trans}_2(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}))$  une caractéristique T-translatée au sens fort dont une paramétrisation est donnée par  $\overline{\mathcal{S}\gamma} : [0, 1] \rightarrow h_2^{-1}\{0\}$  définie pour tout  $t \in [0, 1]$  par

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathcal{S}\gamma}(t) \\
&= \left( \psi_{H_1}^{Tt+z_0} \left( \phi_X^{-\ln\left(g_{H_1}^{Tt+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right)}(p'_0) \right), z_0 + Tt, -\ln\left(g_{H_1}^{Tt+z_0}(p'_0) - g_{H_1}^{z_0}(p'_0) + 1\right) + \theta_0 \right) \\
&=: (p(t), z(t), \theta(t)).
\end{aligned}$$

où  $(p'_0, z_0, \theta_0) \in W_* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Or comme c'est une caractéristique translatée au sens fort la fonction  $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est un lacet, c'est-à-dire que  $\theta(0) = \theta(1) = \theta_0$ . De ce fait,  $p(1) = \psi_{H_1}^{T+z_0}(p'_0)$ . En utilisant de nouveau le fait que c'est une caractéristique translatée, nous avons  $p(T) = p(0)$  et donc que  $\psi_{H_1}^{T+z_0}(p'_0) = \psi_{H_1}^{z_0}(p'_0)$ . Ainsi,  $p'_0 \in W_*$  est un point fixe de  $(\psi_{H_1}^{z_0})^{-1}\psi_{H_1}^{T+z_0}$ . En identifiant  $W_*$  à la symplectisation de  $(P, \text{Ker}(\alpha))$  et en voyant  $p'_0$  comme  $(x'_0, \theta'_0) \in P \times \mathbb{R}$ , par définition d'un point discriminant, nous avons que  $x'_0$  est un point discriminant de  $(\phi^{z_0})^{-1}\phi^{T+z_0}$ . Donc  $T \in \text{Per}(\{\phi^t\})$ .  $\square$

Il serait intéressant d'utiliser le théorème [6.27](#) pour étudier la longueur discriminante d'un chemin de contactomorphismes strictement positif. Il n'est par exemple pas difficile de montrer que si  $T \in \text{Spectre}_2(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}))$  avec  $\{\phi^t\}$  un chemin lisse de contactomorphismes strictement positif engendré par une fonction hamiltonienne périodique  $h : S^1 \times P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  et que  $0 < T < 1$

alors la longueur discriminante du chemin  $\mathcal{L}_d(\{\phi^{2t}\})$  est au moins égale à deux. En effet, comme  $0 < T < 1$ , il existe  $s < t \in \mathbb{R}$  tel que  $t - s = T < 1$  et  $DP((\phi^s)^{-1}\phi^t) \neq \emptyset$ . Nous avons alors deux cas qui se présentent à nous :

1. Soit il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $s, t \in [n, n + 1]$ . Comme  $\{\phi^t\}$  est engendré par une fonction hamiltonienne périodique,  $\phi^{z+n} = \phi^z(\phi^1)^n$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . Cela implique que  $(\phi^{t-n})^{-1}\phi^{s-n}$  est conjugué à  $(\phi^t)^{-1}\phi^s$ . Plus précisément :

$$(\phi^n)^{-1}(\phi^{t-n})^{-1}\phi^{s-n}\phi^n = (\phi^t)^{-1}\phi^s .$$

Nous en déduisons que  $DP((\phi^{t-n})^{-1}\phi^{s-n}) \neq \emptyset$  et comme  $s - n < t - n \in [0, 1]$  cela implique que  $\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) \geq 2$  et donc en particulier que  $\mathcal{L}_d(\{\phi^{2t}\}) \geq 2$ .

2. Sinon il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n - 1 < s < n < t < n + 1$ . En utilisant la périodicité comme dans le point précédent nous pouvons supposer que  $0 < s < 1 < t < 2$  et donc que  $\mathcal{L}_d(\{\phi^{2t}\}) \geq 2$ .

### 6.3 Spectre de contact, une interprétation géométrique des capacités ?

Dans cette dernière section nous motiverons quelques questions ouvertes sur le spectre de contact par analogie à ce qui se passe en géométrie symplectique. Dans un premier temps nous ferons une liste (non exhaustive) des résultats déjà existants dans la littérature concernant le spectre dans le cas symplectique, puis nous nous demanderons si nous pouvons espérer le même genre de résultats dans le cas de contact.

#### 6.3.1 Sélecteurs d'action, capacités et spectre dans le cas symplectique

Considérons  $(W, \omega = d\lambda)$  une variété de Liouville. Tout comme nous avons défini le spectre d'un contactomorphisme de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  il existe un ensemble de nombres que nous pouvons associer à un symplectomorphisme hamiltonien à support compact de  $(W, \omega = d\lambda)$ . Nous appelons encore cet ensemble le spectre du symplectomorphisme hamiltonien et il correspond à l'ensemble des actions de ses points fixes. Plus précisément, soit  $\phi \in \text{Ham}^c(W, \omega = d\lambda)$  et soit  $H : [0, 1] \times W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction hamiltonienne à support compact qui engendre  $\phi$ , c'est-à-dire que  $\phi_H^1 = \phi$  où  $\phi_H^t$  désigne le flot du gradient symplectique de  $H$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Nous définissons alors le spectre de  $\phi$  comme l'ensemble suivant :

$$\text{Spectre}(\phi) := \{ \mathcal{A}_H(\phi_H(x)) \mid x \in \text{Fix}(\phi) \},$$

où  $\phi_H(x)$  désigne le lacet  $t \mapsto \phi_H^t(x)$  et  $\mathcal{A}_H$  la fonctionnelle d'action

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_H : \mathcal{C}^\infty(S^1, W) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_\gamma \lambda + \int_0^1 H^t(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Le lecteur pourra trouver dans le livre de H. Hofer et E. Zehnder [30] ou dans l'article [1] une démonstration du fait que le spectre ne dépend pas de la fonction hamiltonienne  $H$  qui engendre  $\phi$ . Contrairement au cas de contact, dans le cas symplectique le spectre est invariant par symplectomorphisme, c'est-à-dire que  $\text{Spectre}(\psi\phi\psi^{-1}) = \text{Spectre}(\phi)$  pour tout  $\psi \in \text{Symp}(W, \omega)$  et  $\phi \in \text{Ham}^c(W, \omega)$ . Dans le cas où  $(W, \omega = d\lambda) = \left( \mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = d \left( - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) \right)$  de manière analogue à ce que nous avons fait au chapitre 2, C. Viterbo [54] associe à un symplectomorphisme hamiltonien à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  une lagrangienne du cotangent de  $(T^*S^{2n}, d\lambda_{S^{2n}})$  isotope à la section nulle par une isotopie lagrangienne. Dans ce même article [54], C. Viterbo montre que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction génératrice (normalisée) associée à cette lagrangienne est égale au spectre du symplectomorphisme hamiltonien de départ. En utilisant une technique de minimax via l'homologie de Morse, de manière analogue à ce que nous avons vu au chapitre 2, C. Viterbo construit un *sélecteur d'action* (voir la définition 6.32 plus bas) que nous notons  $\sigma_V$ , en particulier c'est une fonction qui à un symplectomorphisme hamiltonien à support compact lui associe une valeur de son spectre.

*Remarque 6.31.* Le sélecteur de translation  $c$  construit par S. Sandon [42] que nous avons étudié au chapitre 2 est une généralisation du sélecteur d'action  $\sigma_V$  au sens suivant : pour tout  $\phi \in \text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$

$$\sigma_V(\phi) = c(\varphi)$$

où  $\varphi$  désigne le relevé de contact de  $\phi$  à  $\text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n+1}, \text{Ker}(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i))$ .

**Définition 6.32.** Nous disons qu'une application  $\sigma : \mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est un sélecteur d'action si :

1.  $\sigma(H) \in \text{Spectre}(\phi_H^1)$  pour tout  $H \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R})$
2.  $\sigma$  est continue pour la topologie  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R})$

3. si  $H \in C_c^\infty(W, \mathbb{R}_{\geq 0})$  est une fonction hamiltonienne indépendante du temps et positive telle qu'il existe un ouvert non vide  $U \subset W$  sur lequel  $H$  est constante et égale à son maximum, *i.e.*  $H|_U \equiv \max H > 0$ , et les seules valeurs critiques de  $H$  étant 0 et  $\max H$  alors  $\sigma(H) > 0$ .

*Remarque 6.33.* Le sélecteur d'action de C. Viterbo est un cas particulier de la définition précédente. C'est un sélecteur d'action  $\sigma$  qui en plus des propriétés précédentes vérifie la propriété que si  $H_1$  et  $H_2$  sont deux fonctions hamiltoniennes à support compact de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  telles que  $\phi_{H_1}^1 = \phi_{H_2}^1$  alors  $\sigma(H_1) = \sigma(H_2)$ . D'où le fait qu'il soit défini comme une fonction sur  $\text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$ .

La construction de sélecteur d'action a été généralisée par U. Frauenfelder et F. Schlenk [23] dans le cas d'une variété de Liouville générale  $(W, \omega = d\lambda)$ . Dans ce cas, la construction du sélecteur d'action provient d'une méthode de minimax via l'homologie de Floer associée à la fonctionnelle d'action - en effet, les points critiques de la fonctionnelle d'action  $\mathcal{A}_H$ , pour une fonction hamiltonienne  $H$  à support compact, sont en bijection avec les points fixes de  $\phi_H^1 \in \text{Ham}^c(W, \omega)$ , et l'ensemble des valeurs critiques de  $\mathcal{A}_H$ , par définition, correspond au spectre de  $\phi_H^1$ . Nous notons ce sélecteur d'action  $\sigma_{FS}$ . Nous verrons dans cette sous-section que l'existence d'un sélecteur d'action permet d'assurer l'existence de caractéristiques fermées sur certaines hypersurfaces  $P \subset (W, \omega)$  - voir la conjecture de A. Weinstein [30] - et de construire une capacité symplectique. Enfin nous verrons certains liens que cette capacité symplectique entretient avec le spectre symplectique d'ouverts - nous parlons cette fois-ci du spectre d'un domaine, c'est-à-dire de l'aire des caractéristiques fermées de son bord.

*Remarque 6.34.* De même que pour le sélecteur d'action de C. Viterbo, U. Frauenfelder et F. Schlenk [23] démontrent que  $\sigma_{FS}$  descend en une fonction sur  $\text{Ham}^c(W, \omega = d\lambda)$  dans le cas où  $(W, \omega = d\lambda)$  est une variété de Liouville (voir remarque précédente). C'est un argument essentiel utilisé dans la preuve de A. Abbondandolo, C. Haug et F. Schlenk [1] pour démontrer la non bornitude de la métrique de Hofer sur  $\text{Ham}^c(W, \omega = d\lambda)$  dans ce cas.

Discutons de premières propriétés d'un sélecteur d'action. La propriété 3 de la définition 6.32 assure que l'application n'est pas l'application triviale égale à 0. En effet  $W$  désignant ici une variété non compacte cela implique que 0 appartient toujours au spectre de tout symplectomorphisme hamiltonien à support compact. Des propriétés 1 et 2 couplées au fait que le spectre est stable par conjugaison par symplectomorphisme et qu'il est nul part dense V. Humilière, F. Le Roux et S. Seyfaddini [31] démontrent la proposition suivante.

**Proposition 6.35.** *Soit  $\sigma : C_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  un sélecteur d'action. Alors pour tout  $H, K \in C_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R})$  nous avons :*

1.  $\sigma(H) = \sigma(H \circ \psi)$  pour tout  $\psi \in \text{Symp}(W, \omega)$ .

2.

$$\int_0^1 \min(H^t - K^t) dt \leq \sigma(H) - \sigma(K) \leq \int_0^1 \max(H^t - K^t) dt .$$

3. Si  $\phi_K^1$  déplace le support de  $H$ , c'est-à-dire que  $\phi_K^1(\text{Supp}(H)) \cap \text{Supp}(H) = \emptyset$ , alors

$$\sigma(H) \leq \int_0^1 \max K^t - \min K^t dt.$$

D'un sélecteur d'action nous pouvons déduire une capacité symplectique en définissant pour tout domaine  $U$  compact dans  $W$  l'application  $c_\sigma$  de la façon suivante

$$c_\sigma(U) := \sup \left\{ \sigma(H) \mid \bigcup_{t \in [0, 1]} \overline{\{x \mid H^t(x) \neq 0\}} \subset U \right\} .$$

Il est en effet immédiat de constater que s'il existe  $\psi \in \text{Symp}(W, \omega)$  tel que  $\psi(U_1) \subset U_2$  pour deux domaines  $U_1, U_2 \subset W$  alors  $c(U_1) \leq c(U_2)$ . Cela provient de la première propriété de la

proposition [6.35](#). De plus, dans le cas où la variété symplectique est  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  pour tout  $r > 0$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, il est possible de construire explicitement une fonction hamiltonienne autonome  $H_r : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  à support dans  $\mathcal{B}^{2n}(r)$ , la boule de centre 0 et de rayon  $r$ , telle que :

1.  $H|_{\mathcal{B}^{2n}(r')} \equiv \pi r'^2 - \varepsilon = \max H$  pour un certain  $0 < r' < r$ ,
2. les seules valeurs critiques de  $H$  sont 0 et  $\max H$
3. Spectre( $\phi_H^1$ ) =  $\{0, \pi r^2 - \varepsilon\}$ .

Pour une telle construction le lecteur peut se référer par exemple au livre [\[30\]](#). Ainsi, de la propriété 3 de la définition du sélecteur d'action et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 nous en déduisons que  $c_\sigma(\mathcal{B}^{2n}(r)) \geq \pi r^2$ . De même, pour tout  $R > 0$  il n'est pas difficile de construire explicitement pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^{2n-2}$  un symplectomorphisme hamiltonien  $\psi \in \text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  engendré par une fonction hamiltonienne  $H$  tel que  $\int_0^1 \max H^t - \min H^t dt \leq \pi R^2 + \varepsilon$  et tel que  $\psi$  déplace  $\mathcal{B}^2(R) \times K$  (avec pour coordonnées  $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ ). Voir par exemple le chapitre 12 du livre de D. McDuff, et D. Salamon [\[37\]](#). Ainsi, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on déduit de la propriété 3 de la proposition [6.35](#) que  $c_\sigma(\mathcal{B}^2(R) \times \mathbb{R}^{2n-1}) \leq \pi R^2$ .

Une propriété également très intéressante de l'existence d'un sélecteur d'action est qu'il permet d'assurer l'existence de caractéristiques fermées sur "beaucoup" d'hypersurfaces  $P \subset (W, \omega = d\lambda)$ . Considérons  $P \subset W$  une hypersurface. Il existe un voisinage tubulaire de  $P$  que nous notons  $\mathcal{V}(P)$  qui soit difféomorphe à  $P \times ]-1, 1[$ . Notons  $\Psi : P \times ]-1, 1[ \rightarrow \mathcal{V}(P)$  un tel difféomorphisme tel que  $\Psi(x, 0) = x$  pour tout  $x \in P$ . Nous notons alors  $P_\varepsilon$  l'image de  $\Psi(P, \varepsilon)$  pour tout  $\varepsilon \in ]-1, 1[$ . Nous appelons la famille  $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]-1, 1[}$  un épaississement de  $P$ . Le théorème suivant ainsi que la démonstration que nous en donnons proviennent de [\[22\]](#).

**Théorème 6.36** ([\[22\]](#)). *Soit  $\mathcal{U} \subset W$  un ouvert déplaçable, c'est-à-dire qu'il existe  $\psi \in \text{Ham}^c(W, \omega)$  tel que  $\psi(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \emptyset$ . Supposons de plus que  $P := \partial\mathcal{U}$  le bord de  $\mathcal{U}$  soit une hypersurface lisse et orientable. Pour tout  $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]-1, 1[}$  épaississement de  $P$  et pour tout  $0 < \delta < 1$  il existe alors  $\varepsilon \in ]-\delta, \delta[$  tel que l'hypersurface  $P_\varepsilon$  admette une caractéristique fermée. Plus précisément il existe un lacet lisse  $\gamma : S^1 \rightarrow P_\varepsilon$  tel que  $\dot{\gamma}(t) \in P_\varepsilon^\omega(\gamma(t))$  pour tout  $t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $\tau \in ]0, 1[$  posons  $\mathcal{U}_\tau = \mathcal{U} \cup \left( \bigcup_{t \in ]-\tau, \tau[} \Psi(P, t) \right)$ . Ayant supposé  $\mathcal{U}$  déplaçable nous avons  $c_\sigma(\mathcal{U}) < +\infty$ . Soient alors  $\delta \in ]0, 1[$  et  $0 < \tau < \delta$  deux réels et considérons une fonction lisse  $f^\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les hypothèses suivantes :

1.  $f^\tau|_{[-\tau/4, \tau/4]} \equiv c_\sigma(\mathcal{U}) + \delta$
2.  $f^\tau|_{[\mathbb{R}] \setminus ]-\tau/2, \tau/2[} \equiv 0$
3.  $f^{\tau'}(t) \neq 0$  pour tout  $t \in ]-\tau/2, -\tau/4[ \cup ]\tau/4, \tau/2[$ .

On définit alors la fonction lisse et autonome  $H^\tau : W \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  par  $H^\tau(x) = f^\tau(t)$  si  $x \in P_t$  et  $H^\tau(x) = 0$  sinon. Ainsi nous avons d'après la propriété 3 de la définition [6.32](#) d'un sélecteur d'action que

$$0 < \sigma(H^\tau) \leq c_\sigma(\mathcal{U}_\tau) ,$$

et donc qu'il existe  $x \in W$  tel que  $\phi_{H^\tau}^1(x) = x$  et  $\mathcal{A}_{H^\tau}(\phi_{H^\tau}(x)) = \sigma(H^\tau)$ . Pour  $\tau$  suffisamment petit on peut s'assurer que cette orbite périodique n'est pas triviale. En effet, posons  $C := c_\sigma(\mathcal{U}) + \delta$ , pour  $0 < \tau_0 < \delta$  suffisamment petit nous avons  $c_\sigma(\mathcal{U}_\tau) < C$  pour tout  $0 < \tau < \tau_0$ . En supposant alors par l'absurde que  $\phi_{H^\tau}(x)$  est une orbite constante cela implique que  $d_x H^\tau = 0$  et donc que

1. soit  $H^\tau(\phi_{H^\tau}^t(x)) = 0$  pour tout  $t$ , et donc que  $\mathcal{A}_{H^\tau}(\phi_{H^\tau}(x)) = 0 = \sigma(H^\tau) > 0$ , ce qui est absurde ;
2. soit  $H^\tau(\phi_{H^\tau}^t(x)) = C$  et donc que  $\mathcal{A}_{H^\tau}(\phi_{H^\tau}(x)) = C = \sigma(H^\tau) < C$  ce qui est également absurde.

N'étant pas une orbite constante, il existe donc  $\varepsilon \in ]-\tau/2, \tau/2[ \subset ]-\delta, \delta[$  tel que l'orbite périodique  $\phi_{H^\tau}(x)$  soit donnée par un  $x \in P_\varepsilon$ . Ainsi, le lacet  $\gamma : S^1 \rightarrow P_\varepsilon$  dont le théorème assure l'existence n'est rien d'autre que  $\phi_{H^\tau}(x)$ .  $\square$

En particulier dans la preuve précédente nous avons montré que

$$\mathfrak{A}_\lambda(P_\varepsilon) \leq c_\sigma(\mathcal{U}) ,$$

où  $\mathfrak{A}_\lambda(P_\varepsilon)$  désigne la plus petite aire d'une caractéristique fermée de  $P_\varepsilon$ , plus précisément :

$$\mathfrak{A}_\lambda(P_\varepsilon) := \inf \{ |a| \mid a \in \text{Spectre}_\lambda(P_\varepsilon) \} .$$

Ainsi, dans le cas où  $\mathcal{U}$  est un ouvert étoilé de  $(W, \omega = d\lambda)$  dont nous notons  $P$  le bord, en définissant la famille d'hypersurfaces  $P_\varepsilon := \phi_X^\varepsilon(P)$  pour  $\varepsilon \in ]-1, 1[$  avec  $X$  qui désigne le champs de Liouville associé à  $\lambda$ , nous déduisons que  $\text{Spectre}_\lambda(P) \neq \emptyset$  et

$$\mathfrak{A}_\lambda(P) \leq c_\sigma(\mathcal{U}) . \quad (24)$$

En effet, d'après la preuve précédente, il existe  $\varepsilon$  tel que  $\text{Spectre}_\lambda(P_\varepsilon) \neq \emptyset$ . Soit  $\gamma$  une caractéristique fermée de  $P_\varepsilon$ , il est facile de voir alors que  $\phi_X^{-\varepsilon} \circ \gamma$  est une caractéristique fermée de  $S$ . De plus comme

$$\int_{\phi_X^{-\varepsilon} \circ \gamma} \lambda = \exp(-\varepsilon) \int_\gamma \lambda$$

nous déduisons l'inégalité (24) en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

Dans le cas où  $(W, \omega = d\lambda) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = d\lambda_0)$ , avec  $\lambda_0$  qui désigne une primitive de  $\omega_{st}$  (prendre par exemple  $\lambda_0 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i dy_i - y_i dx_i)$  pour se fixer les idées) le lien entre la capacité de Viterbo d'un ouvert étoilé et son spectre est encore plus harmonieux.

**Proposition 6.37** ([29]). *Si  $\mathcal{U} \subset$  est un ouvert étoilé de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st} = d\lambda_0)$ , alors  $c_{\sigma_V}(\mathcal{U}) \in \text{Spectre}_{\lambda_0}(\mathcal{U})$ .*

- Remarque 6.38.* 1. Un sélecteur d'action est dit monotone si pour tous  $H$  et  $K \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times W, \mathbb{R})$  telles que  $H \leq K$  alors  $\sigma(H) \leq \sigma(K)$ . Cette proposition a été démontrée pour beaucoup de sélecteurs sur  $\mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  qui sont monotones [29].
2. Comme  $H^1(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}) = 0$  si  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  sont deux primitives de  $\omega_{st}$  alors il existe une fonction  $f$  telle que  $\lambda_0 = \lambda_1 + df$  et donc pour tout ouvert  $\mathcal{U}$  à bord lisse  $\text{Spectre}_{\lambda_1}(\mathcal{U}) = \text{Spectre}_{\lambda_0}(\mathcal{U})$ .

L'idée pour démontrer la proposition précédente est de voir  $\mathcal{U}$  comme le sous niveau d'une fonction homogène  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{U} = \{H < 1\}$  et  $H \circ \phi_X^\theta = e^\theta H$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  où  $X$  est le champs de Liouville associé à  $\lambda_0$ . Considérons alors une suite de fonctions lisses  $(\rho_i : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[)_{i \in \mathbb{N}}$  à support dans  $[0, 1]$  et telle que pour toute fonction  $K \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1] \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  à support dans  $\mathcal{U}$  il existe un certain rang  $i_0$  à partir duquel  $\rho_i \circ H \geq K$  pour tout  $i \geq i_0$ . On déduit alors par la monotonie du sélecteur d'action que  $c_\sigma(\mathcal{U}) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \sigma(\rho_i \circ H)$ .

Il existe donc une suite de points  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que  $x_i$  soit un point fixe de  $\phi_{\rho_i \circ H}^1$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$  et telle que

$$\sigma(\rho_i \circ H) = \mathcal{A}_{\rho_i \circ H}(\phi_{\rho_i \circ H}(x_i)) .$$

En remarquant alors que pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^{2n}$  nous avons  $\phi_{\rho_i \circ H}^t(x) = \phi_H^{t\rho'_i(H(x))}(x)$ , nous en déduisons que  $\phi_{\rho_i \circ H}(x_i)$  est une caractéristique fermée de l'hypersurface  $\{H = H(x_i)\}$  si et seulement si  $\phi_{T_i H}(y_i)$  est une caractéristique fermée de  $\{H = 1\}$  où  $T_i = \rho'_i(H(x_i))$  et  $y_i = \phi_X^{-\ln(H(x_i))}(x_i)$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$\sigma(\rho_i \circ H) = H(x_i) \int_{\phi_{T_i H}(y_i)} \lambda + \rho_i(H(x_i)) .$$



En choisissant  $\rho_i$  avec attention on peut montrer que

$$\sigma(\rho_i \circ H) = H(x_i) \int_{\phi_{T_i H}(y_i)} \lambda + \rho_i(H(x_i)) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \int_{\phi_{T_* H}(y_*)} \lambda ,$$

où  $T_* \in \mathbb{R}$  et  $y_* \in \{H = 1\}$ . Pour voir une preuve détaillée de cette proposition le lecteur pourra consulter l'article de D. Hermann [29], ou les notes de J.-C. Sikorav [47].

Enfin, H. Hofer et E. Zehnder [30] ont construit une capacité symplectique sur  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  dont la définition est plus élémentaire que celle de C. Viterbo (qui utilise l'homologie de Morse pour étudier les fonctions génératrices) ou que celle de U. Frauenfelder et F. Schlenk (qui utilise l'homologie de Floer pour étudier la fonctionnelle d'action). Pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$  ils définissent l'ensemble des fonctions admissibles sur cet ouvert, qu'ils notent  $\mathcal{H}_a(\mathcal{U}, \omega_{st})$ , comme étant l'ensemble des fonctions  $H : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  telles que :

1. il existe un compact  $K \subset \mathcal{U}$  tel qu'en dehors de ce compact  $H$  soit constante et égale à son maximum ;
2. il existe un ouvert  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  sur lequel  $H$  s'annule ;
3. les orbites périodiques du flot de symplectomorphismes hamiltoniens  $\phi_H$  sont soit constantes, soit de périodes plus grandes que 1.

Ils définissent alors la capacité de  $\mathcal{U}$  comme étant

$$c_{HZ}(\mathcal{U}) := \sup \{ \max H \mid H \in \mathcal{H}_a(\mathcal{U}, \omega_{st}) \} .$$

Une démonstration similaire que celle du théorème 6.36 leur permet alors de conclure que : lorsque  $\mathcal{U}$  est un ouvert dont le bord est lisse et orientable et tel que  $c_{HZ}(\mathcal{U}) < +\infty$ , il existe des caractéristiques fermées sur des hypersurfaces aussi proches que l'on veut de  $\partial\mathcal{U}$ .

Bien que la définition de cette capacité soit élémentaire, il n'est pas facile pour un ouvert  $\mathcal{U}$  de montrer que  $c_{HZ}(\mathcal{U}) < +\infty$ . En effet, pour montrer cela il est à nouveau question de montrer l'existence de points fixes de symplectomorphismes hamiltoniens. Dans le même livre [30], ils montrent en fait que si  $K : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction hamiltonienne à support compact tel que  $\phi_K^1$  déplace un ouvert  $\mathcal{U}$  alors

$$c_{HZ}(\mathcal{U}) \leq \int_0^1 \max K^t - \min K^t dt .$$

### 6.3.2 Questions ouvertes dans le cas de contact

Nous avons vu au chapitre 2 comment S. Sandon construit dans [42] un sélecteur de translation  $c : \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st}) \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire une application telle que

1.  $c(\phi) \in \text{Spectre}(\phi)$  pour tout  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$
2. si  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse alors  $t \mapsto c(\phi^t)$  est continue
3. si  $\phi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  est engendré par une fonction hamiltonienne à support compact  $h : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  positive et non partout nulle alors  $c(\phi) > 0$ .

De plus, S. Sandon utilise ce sélecteur de translation pour en déduire une capacité de contact en posant pour tout  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$

$$c(U) := \sup \{ c(\phi) \mid \phi \in \text{Cont}_0^c(U, \xi_{st}) \} .$$

*Remarque 6.39.* 1. C'est en prenant la partie entière de l'application précédente qu'elle devient invariante par contactomorphisme et donc une capacité de contact à proprement parler. Pour plus de détails voir la dernière section du chapitre 2.

2. D'après nos conventions de signes la variété de contact  $(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  est la contactisation de la variété symplectique exacte  $(\mathbb{R}^{2n}, -\omega_{st} = d \sum_{i=1}^n y_i dx_i)$ .

D'après la remarque [6.31](#) nous avons l'égalité  $c(\varphi) = \sigma_V(\phi)$  lorsque  $\varphi \in \text{Cont}_0^c(\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  désigne le relevé de contact de  $\phi \in \text{Ham}^c(\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$  ce qui permet à S. Sandon [\[42\]](#) de déduire que pour tout ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{2n}$

$$c(\mathcal{U} \times S^1) = c_{\sigma_V}(\mathcal{U}) .$$

De plus nous avons montré dans la partie [6.2.2](#) que le spectre de contact au sens fort et au sens faible des domaines  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  de la forme  $\mathcal{U} \times S^1$  correspond au spectre symplectique de  $\mathcal{U}$ , lorsque  $\mathcal{U}$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  :

$$\text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_\lambda(\mathcal{U}), \text{ pour tout } \lambda \text{ tel que } d\lambda = \omega_{st} .$$

Nous en déduisons donc des résultats [6.36](#), [6.37](#) et la formule [\(24\)](#) la proposition suivante.

**Proposition 6.40.** *Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert déplaçable de  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que son bord  $P := \partial\mathcal{U}$  soit lisse et orientable. Pour tout  $(P_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]-1,1[}$  épaississement de  $P$  et pour tout  $0 < \delta < 1$  il existe  $\varepsilon \in ]-\delta, \delta[$  tel que l'hypersurface  $P_\varepsilon \times S^1 \subset (\mathbb{R}^{2n} \times S^1, \xi_{st})$  admette une caractéristique translatée au sens fort et au sens faible. De plus*

$$\mathfrak{A}_1(P_\varepsilon \times S^1) = \mathfrak{A}_2(P_\varepsilon \times S^1) \leq c(\mathcal{U} \times S^1) .$$

Dans le cas où  $\mathcal{U}$  est un ouvert étoilé de  $(\mathbb{R}^{2n}, d\lambda)$ , où  $\lambda$  désigne une primitive de  $\omega_{st}$ , l'ensemble des caractéristiques translattées du bord de  $\mathcal{U} \times S^1$  au sens faible et au sens fort est non vide et

$$c(\mathcal{U} \times S^1) \in \text{Spectre}_1(\mathcal{U} \times S^1) = \text{Spectre}_2(\mathcal{U} \times S^1) .$$

**Questions :** Peut-on espérer ce résultat pour des hypersurfaces plus générales? Plus précisément :

1. Si  $S \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  est une hypersurface, est-ce que pour tout épaississement  $(S_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]-1,1[}$  et pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\varepsilon \in ]-\delta, \delta[$  tel que  $S_\varepsilon$  admette une caractéristique translatée au sens faible? au sens fort?
2. Est-ce que le spectre de contact d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$  étoilé fibre-par-fibre au sens faible (resp. au sens fort) est toujours non vide? Dans ce cas, est-ce que  $c(U) \in \text{Spectre}_1(U)$  (resp.  $c(U) \in \text{Spectre}_2(U)$ )?
3. Existerait-il une notion, analogue au cas symplectique, de fonctions hamiltoniennes admissibles pour des ouverts de  $U \subset \mathbb{R}^{2n} \times S^1$ , telle qu'en notant l'ensemble de telles fonctions  $\mathcal{H}_{cont,a}(U, \xi_{st})$  l'application

$$c_{cont,HZ}(U) := \sup \{ \max H \mid H \in \mathcal{H}_{cont,a}(U, \xi_{st}) \}$$

soit une capacité qui permette de détecter des caractéristiques translattées?

Ces questions se généralisent à toute contactisation de variété de Liouville  $(W, \omega = d\lambda)$ . En effet, les notions de points translattés et de spectre se généralisent directement pour des contactomorphismes à support compact de  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Pour ce faire, désignons par  $\text{Cont}_0^c(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))^{z\text{-pér}}$  l'ensemble des contactomorphismes  $\phi$  de  $(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  qui vérifient les propriétés suivantes :

1.  $\phi$  est 1-périodique dans la direction  $z$ , c'est-à-dire que  $\phi \circ \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^k = \phi_{\frac{\partial}{\partial z}}^k \circ \phi$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$
2. il existe un chemin lisse de contactomorphismes  $\{\phi^t\}$  de  $(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  tel que  $\phi^0 = \text{Id}$  et  $\phi^1 = \phi$  et tel que  $\phi^t$  est 1-périodique dans la direction  $z$  et la projection du support de  $\phi^t$  sur  $W$  est incluse dans un compact pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Exactement comme à la section [2.3](#) du chapitre [2](#) nous avons une bijection canonique

$$\text{Cont}_0^c(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))^{z\text{-pér}} \cong \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda)) .$$

**Définition 6.41.** 1. Soit  $\phi \in \text{Cont}_0(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$  et notons  $g$  son facteur de conformalité par rapport à  $dz - \lambda$ . Nous disons que  $(p, z) \in W \times S^1$  est un point  $t$ -translaté pour  $\phi$  avec  $t \in \mathbb{R}$  si

$$\phi(p, z) = (p, z + t) \quad \text{et} \quad g(p, z) = 0 .$$

2. Soient  $\phi$  un élément de  $\text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  et  $\bar{\phi} \in \text{Cont}_0^c(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))^{z\text{-pér}}$  son représentant 1-périodique. Nous disons que  $(p, z) \in W \times S^1$  est un point  $t$ -translaté pour  $\phi$ , où  $t \in \mathbb{R}$ , si tout point de  $W \times \mathbb{R}$  qui se projette sur  $(p, z)$  est un point  $t$ -translaté pour  $\bar{\phi}$ .

Nous définissons alors le spectre d'un élément  $\phi$  de  $\text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  comme l'ensemble de réels suivant :

$$\text{Spectre}(\phi) := \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \text{il existe } (p, z) \in W \times S^1 \text{ un point } t\text{-translaté pour } \phi \right\} .$$

De plus, il s'avère que le spectre d'un contactomorphisme correspond à l'ensemble des valeurs critiques d'une fonctionnelle : la fonctionnelle de Rabinowitz-Floer. Plus précisément, soient un contactomorphisme  $\phi \in \text{Cont}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  et une fonction hamiltonienne  $h : [0, 1] \times W \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui engendre le correspondant 1-périodique de  $\phi$  que nous notons  $\varphi \in \text{Cont}_0^{z\text{-pér}}(W \times \mathbb{R}, \text{Ker}(dz - \lambda))$ . Notons  $H : [0, 1] \times W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son relevé à la symplectisation, c'est-à-dire que  $H^t((p, z), \theta) = e^\theta h^t(x)$  pour tout  $(t, p, z, \theta) \in [0, 1] \times W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $\psi_H$  son flot de symplectomorphismes hamiltoniens associé. La fonctionnelle de Rabinowitz-Floer est définie sur  $\mathcal{C}^\infty(S^1, (W \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R})$  et à tout élément  $(\gamma, \eta)$  de cet ensemble associe le nombre réel

$$\mathcal{RF}_H(\gamma, \eta) = \int_\gamma e^\theta (dz - \lambda) - \int_0^1 H^t(\gamma(t)) - \eta \int_0^1 \left( R \left( \left( \psi_H^t \right)^{-1} (\gamma(t)) \right) - 1 \right) dt$$

où  $R : W \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction définie par  $R(p, z, \theta) = e^\theta$  (le relevé de la fonction constante égale à 1 sur  $W \times S^1$  qui engendre le flot de Reeb  $\phi_{\frac{\partial}{\partial z}}$ ). Nous avons alors

$$\text{Spectre}(\phi) = \text{Valeurs Critiques}(\mathcal{RF}_H) .$$

Dans le cas où la variété symplectique exacte est une variété de Liouville P. Albers et W. Merry [2](#) utilisent alors des techniques d'homologie de Floer et de minimax pour construire un sélecteur de translation  $c_{\mathcal{RF}}$  sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$ , c'est-à-dire que :

1.  $c_{\mathcal{RF}}(\{\{\phi^t\}\}) \in \text{Spectre}(\phi^1)$  pour tout  $\{\{\phi^t\}\} \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$
2.  $c_{\mathcal{RF}}$  est continue pour la topologie  $\mathcal{C}^2$  sur  $\widetilde{\text{Cont}}_0^c(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$
3. si  $h$  et  $k$  sont deux fonctions à support compact dépendantes du temps sur  $W \times S^1$  tel que  $h \leq k$  alors  $c_{\mathcal{RF}}(\{\{\phi_k\}\}) \leq c_{\mathcal{RF}}(\{\{\phi_h\}\})$ .

*Remarque 6.42.* À cause d'une convention de signes opposée à la notre, P. Albers et W. Merry montrent en fait que  $c_{\mathcal{RF}}$  est non pas croissante mais décroissante.

De manière analogue au lien qu'il y a entre la capacité de C. Viterbo et celle de S. Sandon (voir la remarque [6.31](#)), ils montrent que si  $\{\{\phi^t\}\}$  est un chemin lisse de symplectomorphismes hamiltoniens de  $(W, \omega = d\lambda)$  partant de l'identité et que  $\{\{\varphi^t\}\}$  désigne son relevé de contact à  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  alors

$$\sigma_{FS}(\phi^1) = c_{\mathcal{RF}}(\{\{\varphi^t\}\}) .$$

En définissant alors la capacité d'un ouvert  $U \subset W \times S^1$  comme étant

$$c_{\mathcal{RF}}(U) := \sup \left\{ c_{\mathcal{RF}}(\{\{\phi^t\}\}) \mid \{\{\phi^t\}\} \in \widetilde{\text{Cont}}_0^c(U, \text{Ker}(dz - \lambda)) \right\}$$

ils en déduisent donc que

$$c_{\mathcal{RF}}(\mathcal{U} \times S^1) = c_{\sigma_{FS}}(\mathcal{U}), \quad \text{pour tout ouvert } \mathcal{U} \subset W .$$

Ainsi, la première affirmation de la proposition [6.40](#) reste vraie dans le cadre plus général où les ouverts  $\mathcal{U}$  sont inclus dans une variété de Liouville  $(W, \omega = d\lambda)$ . Nous pouvons alors nous poser exactement les mêmes questions qui ont suivi l'énoncé de cette proposition [6.40](#) dans le cadre plus général de variétés de contact de la forme  $(W \times S^1, \text{Ker}(dz - \lambda))$  où  $(W, \omega = d\lambda)$  désigne une variété de Liouville. Remarquons alors que si  $\mathcal{U} \subset (W, \omega = d\lambda)$  est un ouvert étoilé dont nous notons  $(P, \text{Ker}(\lambda|_P))$  le bord de contact et que  $\{\phi^t\}$  est un chemin lisse de contactomorphismes strictement positif de  $\text{Cont}_0(P, \text{Ker}(\lambda|_P))$  engendré par une fonction hamiltonienne autonome  $h : P \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ , nous déduisons du théorème [6.25](#) la proposition suivante

**Proposition 6.43.**

$$\mathcal{L}_d(\{\phi^t\}) = \mathcal{L}_{osc}(\{\phi^t\}) \leq \left\lfloor \frac{1}{C(\mathcal{U}_\alpha(\{\phi^t\}))} \right\rfloor + 1,$$

où  $C$  désigne la capacité  $c_{\mathcal{RF}}$  construite par  $P$ . Albers, W. Merry ou la capacité  $c$  construite par S. Sandon lorsque  $(W, \omega = d\lambda) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{st})$ .

Faisons une dernière remarque qui mériterait d'être mieux formalisée. Dans le cas symplectique si la variété de Liouville  $(W, \omega = d\lambda)$  est le cotangent de  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire que  $(W, \omega) = (T^*\mathbb{R}^n, d(-\sum_{i=1}^n y_i dx_i))$ , la question géométrique "Pour quelles hypersurfaces  $P \subset T^*\mathbb{R}^n$  peut-on s'assurer de l'existence de caractéristiques fermées sur  $P$ ?" se traduit bien en terme de système dynamique de la façon suivante "Pour quelle fonction énergie  $H : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et pour quel niveau d'énergie de  $H$  d'un système dynamique régi par les équations d'Hamilton peut-on s'assurer d'une orbite périodique sur ce niveau d'énergie?". Il y aurait-il une traduction aussi "naturelle" à faire entre les caractéristiques translitées d'hypersurfaces de  $(T^*\mathbb{R}^n \times S^1, \text{Ker}(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i))$  et les systèmes dynamiques? Par exemple, par définition, une équation aux dérivées partielles d'ordre 1 sur une variété  $X$  est donnée par l'équation

$$F\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}(x), u(x)\right) = 0 \quad \text{pour tout } x \in X \quad (E)$$

où  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue à déterminer et  $F : T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Ainsi une fonction  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de ce problème si et seulement si l'image du 1-jet de  $u$  est incluse dans l'hypersurface  $F^{-1}\{0\}$ . V. Arnold montre dans [\[4\]](#) que lorsque  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de  $(E)$  l'image du 1-jet de  $u$  est feuilletée par des caractéristiques de l'hypersurface  $F^{-1}\{0\}$ .


## Références

- [1] Alberto Abbondandolo, Carsten Haug, and Felix Schlenk. A simple construction of an action selector on aspherical symplectic manifolds. *Enseign. Math.*, 65(1-2) :221–267, 2019.
- [2] Peter Albers and Will Merry. Orderability, contact non-squeezing, and Rabinowitz Floer homology. *J. Symplectic Geom.*, 16(6) :1481–1547, 2018.
- [3] Vladimir Igorevich Arnold. *Contact geometry and wave propagation*, volume 36. 1990.
- [4] Vladimir Igorevich Arnold. *Lectures on partial differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin; Publishing House PHASIS, Moscow, 2004. Translated from the second Russian edition by Roger Cooke.
- [5] Augustin Banyaga. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique. *Comment. Math. Helv.*, 53(2) :174–227, 1978.
- [6] Augustin Banyaga. *The structure of classical diffeomorphism groups*, volume 400 of *Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
- [7] Augustin Banyaga and Andrew McInerney. On isomorphic classical diffeomorphism groups. III. *Ann. Global Anal. Geom.*, 13(2) :117–127, 1995.
- [8] Mohan Bhupal. A partial order on the group of contactomorphisms of  $\mathbb{R}^{2n+1}$  via generating functions. *Turkish J. Math.*, 25(1) :125–135, 2001.
- [9] Misha Bialy and Leonid Polterovich. Geodesics of Hofer’s metric on the group of Hamiltonian diffeomorphisms. *Duke Math. J.*, 76(1) :273–292, 1994.
- [10] Dmitri Burago, Sergei Ivanov, and Leonid Polterovich. Conjugation-invariant norms on groups of geometric origin. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 221–250. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.
- [11] M. Chaperon. On generating families. In *The Floer memorial volume*, volume 133 of *Progr. Math.*, pages 283–296. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [12] Yu Chekanov. Critical points of quasifunctions, and generating families of Legendrian manifolds. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 30(2) :56–69, 96, 1996.
- [13] Vladimir Chernov and Stefan Nemirovski. Non-negative Legendrian isotopy in  $ST^*M$ . *Geom. Topol.*, 14(1) :611–626, 2010.
- [14] Vladimir Chernov and Stefan Nemirovski. Universal orderability of Legendrian isotopy classes. *J. Symplectic Geom.*, 14(1) :149–170, 2016.
- [15] Vincent Colin, Emmanuel Ferrand, and Petya Pushkar. Positive isotopies of Legendrian submanifolds and applications. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :6231–6254, 2017.
- [16] Vincent Colin and Sheila Sandon. The discriminant and oscillation lengths for contact and Legendrian isotopies. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(7) :1657–1685, 2015.
- [17] Sylvain Courte and Patrick Massot. Contactomorphism groups and legendrian flexibility. *arXiv.1803.07997*, 2019.
- [18] Yakov Eliashberg. New invariants of open symplectic and contact manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3) :513–520, 1991.
- [19] Yakov Eliashberg, Sang Seon Kim, and Leonid Polterovich. Geometry of contact transformations and domains : orderability versus squeezing. *Geom. Topol.*, 10 :1635–1747, 2006.
- [20] Yakov Eliashberg and Leonid Polterovich. Partially ordered groups and geometry of contact transformations. *Geom. Funct. Anal.*, 10(6) :1448–1476, 2000.
- [21] Maia Fraser, Leonid Polterovich, and Daniel Rosen. On Sandon-type metrics for contactomorphism groups. *Ann. Math. Qué.*, 42(2) :191–214, 2018.
- [22] Urs Frauenfelder, Viktor Ginzburg, and Felix Schlenk. Energy capacity inequalities via an action selector. In *Geometry, spectral theory, groups, and dynamics*, volume 387 of *Contemp. Math.*, pages 129–152. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

- [23] Urs Frauenfelder and Felix Schlenk. Hamiltonian dynamics on convex symplectic manifolds. *Israel J. Math.*, 159 :1–56, 2007.
- [24] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [25] Hansjörg Geiges. *An introduction to contact topology*, volume 109 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [26] Emmanuel Giroux. Sur la géométrie et la dynamique des transformations de contact (d’après Y. Eliashberg, L. Polterovich et al.). Number 332, pages Exp. No. 1004, viii, 183–220. 2010. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011.
- [27] Mikhaïl Gromov. Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds. *Invent. Math.*, 82(2) :307–347, 1985.
- [28] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [29] David Hermann. Inner and outer hamiltonian capacities. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 132 :509–541, 2004.
- [30] Helmut Hofer and Eduard Zehnder. *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2011. Reprint of the 1994 edition.
- [31] Vincent Humilière, Frédéric Le Roux, and Sobhan Seyfaddini. Towards a dynamical interpretation of Hamiltonian spectral invariants on surfaces. *Geom. Topol.*, 20(4) :2253–2334, 2016.
- [32] Jacques Lafontaine. *An introduction to differential manifolds*. Springer, Cham, second edition, 2015.
- [33] François Lalonde. Energy and capacities in symplectic topology. In *Geometric topology (Athens, GA, 1993)*, volume 2 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 328–374. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [34] François Lalonde and Dusa McDuff. The geometry of symplectic energy. *Ann. of Math. (2)*, 141(2) :349–371, 1995.
- [35] François Laudenbach and Jean-Claude Sikorav. Persistance d’intersection avec la section nulle au cours d’une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent. *Invent. Math.*, 82(2) :349–357, 1985.
- [36] Dusa McDuff. Geometric variants of the Hofer norm. *J. Symplectic Geom.*, 1(2) :197–252, 2002.
- [37] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. *Introduction to symplectic topology*. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, third edition, 2017.
- [38] John Milnor. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. In *Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983)*, pages 1007–1057. North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [39] Hideki Omori. *Infinite dimensional Lie transformation groups*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 427. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [40] Leonid Polterovich. *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [41] Sheila Sandon. An integer-valued bi-invariant metric on the group of contactomorphisms of  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$ . *J. Topol. Anal.*, 2(3) :327–339, 2010.
- [42] Sheila Sandon. Contact homology, capacity and non-squeezing in  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  via generating functions. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 61(1) :145–185, 2011.
- [43] Sheila Sandon. A Morse estimate for translated points of contactomorphisms of spheres and projective spaces. *Geom. Dedicata*, 165 :95–110, 2013.
- [44] Egor Shelukhin. The Hofer norm of a contactomorphism. *J. Symplectic Geom.*, 15(4) :1173–1208, 2017.

- [45] Jean-Claude Sikorav. Problèmes d'intersections et de points fixes en géométrie hamiltonienne. *Comment. Math. Helv.*, 62(1) :62–73, 1987.
- [46] Jean-Claude Sikorav. Rigidité symplectique dans le cotangent de  $T^n$ . *Duke Math. J.*, 59(3) :759–763, 1989.
- [47] Jean-Claude Sikorav. *Systèmes hamiltoniens et topologie symplectique*. Dipartimento di Matematica dell' Università di Pisa, ETS, EDITRICE PISA, 1990.
- [48] David Théret. *Utilisation des fonctions génératrices en géométrie symplectique globale*. PhD thesis, 1996. Thèse de doctorat dirigée par Chaperon, Marc Mathématiques Paris 7 1996.
- [49] Lisa Traynor. Symplectic homology via generating functions. *Geom. Funct. Anal.*, 4(6) :718–748, 1994.
- [50] Takashi Tsuboi. On the simplicity of the group of contactomorphisms. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 491–504. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.
- [51] Takashi Tsuboi. On the uniform perfectness of diffeomorphism groups. In *Groups of diffeomorphisms*, volume 52 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 505–524. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.
- [52] Takashi Tsuboi. On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 87(1) :141–185, 2012.
- [53] Michael Usher. Hofer's metrics and boundary depth. *Ann. Sci.  Ec. Norm. Sup er. (4)*, 46(1) :57–128 (2013), 2013.
- [54] Claude Viterbo. Symplectic topology as the geometry of generating functions. *Math. Ann.*, 292(4) :685–710, 1992.
- [55] Frol Zapolsky. Geometry of contactomorphism groups, contact rigidity, and contact dynamics in jet spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :4687–4711, 2013.


Nous étudions différentes normes sur le groupe des contactomorphismes d'une variété de contact. Pour tout entier  $n$  plus grand que 1, grâce à la technique des fonctions génératrices, nous caractérisons certaines géodésiques du groupe des contactomorphismes à support compact de  $\mathbb{R}^{2n} \times S^1$  que l'on munit de sa structure de contact standard. Nous calculons explicitement la norme d'une grande famille de contactomorphismes du cotangent unitaire du tore en utilisant un théorème d'intersections de lagrangiennes exactes du cotangent avec la section nulle. Enfin nous étudions la distribution caractéristique des hypersurfaces contenues dans la contactisation d'une variété symplectique exacte. Cela nous permet de définir un ensemble de valeurs pour les ouverts de la variété de contact considérée. Cet ensemble de valeurs contient des invariants de contact et généralise la notion du spectre d'un ouvert d'une variété symplectique exacte.



**IRMA**  
Institut de Recherche  
Mathématique Avancée


**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
UMR 7501

Université de Strasbourg  
CNRS  
IRMA, UMR 7501  
7 rue René Descartes  
F-67000 STRASBOURG



**cnrs**

Tél. 03 68 85 01 29  
irma.math.unistra.fr  
irma@math.unistra.fr



**Université  
de Strasbourg**

IRMA 2021/005  
<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03264969>