



**HAL**  
open science

# Optimisation du dimensionnement des ponts en béton précontraint

Nadim Abdel Nour

► **To cite this version:**

Nadim Abdel Nour. Optimisation du dimensionnement des ponts en béton précontraint. Génie civil. Université Clermont Auvergne, 2021. Français. NNT : 2021UCFAC097 . tel-03705688

**HAL Id: tel-03705688**

**<https://theses.hal.science/tel-03705688v1>**

Submitted on 27 Jun 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Université Clermont Auvergne

Ecole Doctorale

Sciences pour l'Ingénieur

### Centre des Hautes Études de la Construction

Etablissement de l'enseignement supérieur

## THESE

Présentée par

**Nadim ABDEL NOUR**

Date de soutenance : 09/12/2021

En vue d'obtenir le titre de

**Docteur d'Université**

---

Optimisation du dimensionnement des ponts en béton précontraint

---

Rapporteurs :

M. Thierry Vidal

Université Toulouse III Paul Sabatier

Mme Franziska Schmidt

Université Gustave Eiffel

Directeurs de thèse :

M. Sofiane Amziane

Université Clermont Auvergne

Co-encadrants de thèse :

M. Dominique Vié

Centre des Hautes Etudes de la Construction

M. Alaa Chateauneuf

Université Clermont Auvergne

## ***Résumé***

L'infrastructure routière a connu une croissance majeure le long du vingtième siècle, accompagnée par d'importantes innovations dans les ouvrages d'art de génie civil. L'évolution des ponts le long de cette période est caractérisée par le développement des ponts en béton précontraint, reconnus comme une forme de construction puissante et compétitive, permettant d'atteindre des portées inaccessibles par le béton armé.

Les techniques de conception et de dimensionnement des structures en béton précontraint, régies par des normes et des guides de calcul, permettent de définir le comportement et la résistance de la structure. L'enjeu majeur de la conception d'une structure est la recherche d'un dimensionnement économique et performant, ceci requiert un effort considérable et itératif de la part de l'ingénieur. Dans ce contexte, l'application des méthodes d'optimisation au dimensionnement des structures est devenue un emploi courant et connaît une évolution continue.

A l'époque actuelle, la conception, le dimensionnement et la vérification des ponts en béton précontraint s'effectuent couramment à partir d'un modèle numérique et l'application des méthodes d'éléments finis pour le calcul et l'exploitation des résultats. L'interprétation des résultats de la simulation s'effectue sur une interface graphique ou bien à l'aide de valeurs tabulées. Les caractéristiques ne pouvant être exprimées analytiquement, l'exploitation des possibilités d'optimisation du dimensionnement est ainsi rendue difficile.

L'objectif de cette thèse est de présenter une démarche analytique de dimensionnement des ponts en béton précontraint, qui peut être intégrée à une procédure d'optimisation. L'approche est développée pour les structures isostatiques et hyperstatiques, à inertie constante et variable. Une nouvelle règle des pivots, inspirée de la règle des pivots en béton armé, est proposée en béton précontraint. L'application de cette règle en précontrainte totale et partielle permet de définir un domaine admissible des forces de précontrainte pour un ou plusieurs états limites de service combinés. Dans le cas des ponts hyperstatiques, les équations régissant le dimensionnement sont transformées, à chaque étape, en des fonctions polynomiales facilement manipulables mathématiquement. L'avantage principal est de permettre au concepteur d'aborder des calculs relativement complexes en phase de conception et de dimensionnement par une approche analytique facilement programmable, sans avoir recours aux méthodes numériques par éléments finis. La méthode analytique développée est programmée sur un logiciel de programmation et connectée à des algorithmes d'optimisation dont les algorithmes génétiques et le Simplexe, les résultats obtenus sont exploités et interprétés.

## Liste des symboles

$B$	Aire de la section
$A_h$	Aire de la section homogénéisée
$\alpha_e$	Coefficient d'équivalence acier béton
$\alpha$	Coefficient de variation de la force de précontrainte moyenne
$\alpha_{max}$	Coefficient de variation maximale de la force de précontrainte
$\alpha_{min}$	Coefficient de variation minimale de la force de précontrainte
$\sigma_{st}$	Contrainte au niveau des aciers de béton armé
$g_j$	Contrainte d'optimisation
$\sigma(y)$	Contrainte dans la section à la fibre $y$
$\sigma_c$	Contrainte dans le béton
$f_{ctb}$	Contrainte en traction du béton
$\sigma_{inf}$	Contrainte évaluée à la fibre inférieure de la section
$\sigma_{sup}$	Contrainte évaluée à la fibre supérieure de la section
$\varepsilon$	Déformation du béton sur une fibre $y$
$\varepsilon_{st}$	Déformation relative des aciers de béton armé
$\varepsilon_p$	Déformation relative des aciers de précontrainte
$\varepsilon_c$	Déformation relative en compression du béton
$\varepsilon_{cu}$	Déformation ultime relative en compression du béton
$\Delta M$	Différence entre la valeur maximale et minimale du moment appliqué
$N_h$	Effort normal dans la section
$N_c$	Effort normal de compression dans le béton
$N_s$	Effort normal de traction au niveau des aciers passifs
ELS	Etat limite de service
ELU	Etat limite ultime
$e_o$	Excentricité du câble
$v_{hyp}$	Expression de la ligne d'influence isostatique
$v_{iso}$	Expression de la ligne d'influence isostatique
$P$	Force de précontrainte
$P_m$	Force de précontrainte probable
$h$	Hauteur de la section considérée
$b$	Largeur de la section considérée
$e_{oo}$	Ligne de précontrainte
$\bar{\sigma}_3$	Limite de contrainte en fibre inférieure en compression
$\bar{\sigma}_4$	Limite de contrainte en fibre inférieure en traction
$\bar{\sigma}_2$	Limite de contrainte en fibre supérieure en compression
$\bar{\sigma}_1$	Limite de contrainte en fibre supérieure en traction
$L_c$	Longueur du chromosome
$I$	Moment d'inertie de la section
$I_{h/x}$	Moment d'inertie de la section homogénéisée
$M_{h/x}$	Moment fléchissant par rapport à l'axe neutre de la section

$M_{hyp}$	Moment hyperstatique de précontrainte
$S_{h/x}$	Moment statique de la section homogénéisée
$w_{max}$	Ouverture maximale des fissures
$v'$	Position de la fibre inférieure de la section par rapport au centre de gravité
$y$	Position de la fibre par rapport au centre de gravité
$v$	Position de la fibre supérieure de la section par rapport au centre de gravité
$x_{fd}$	Position du foyer droite dans la méthode des foyers
$x_{fg}$	Position du foyer gauche dans la méthode des foyers
$\rho_{ho}$	Pourcentage d'acier passif dans une section
$p_m$	Probabilité de mutation
$\rho$	Rendement de la section
$f_{ck}$	Résistance en compression caractéristique du béton
$M$	Symbole du moment fléchissant
$W_k$	Valeur calculée de l'ouverture des fissures
$\epsilon_{uk}$	Valeur caractéristique de la déformation relative de l'acier
$f_{cd}$	Valeur de calcul de la résistance en compression du béton
$f_{pd}$	Valeur de calcul de la résistance en traction des aciers de précontrainte
$f_{yd}$	Valeur de calcul de la résistance en traction des aciers du béton armé
$E_p$	Valeur de calcul du module d'élasticité des aciers de précontrainte
$E_s$	Valeur de calcul du module d'élasticité des aciers du béton armé
$E_c$	Valeur de calcul du module d'élasticité du béton
$M_{max}$	Valeur maximale du moment appliqué
$M_{min}$	Valeur minimale du moment appliqué
$P_{sous-critique}$	Valeur sous-critique de la force de précontrainte
$P_{sur-critique}$	Valeur sur-critique de la force de précontrainte

# Table des Matières

---

CHAPITRE 1 .....	18
1. Contexte et objectif de la thèse .....	18
2. Organisation de la thèse .....	19
CHAPITRE 2 .....	22
1. Introduction.....	22
2. Démarche d'étude d'un pont en béton précontraint.....	22
2.1 Evaluation des charges appliquées .....	22
2.2 Analyse du tablier .....	23
2.3 Dimensionnement de la force de précontrainte .....	23
2.4 Détermination du tracé du câble .....	24
2.5 Calcul des pertes de précontrainte .....	24
2.6 Vérifications aux Etats Limites de Service.....	24
2.7 Vérifications aux Etats Limites Ultimes.....	25
3. Méthodes d'optimisation impliquées dans le dimensionnement des ouvrages .....	25
3.1 Problème d'optimisation à variables continues et discrètes .....	25
3.2 Problèmes d'optimisation déterministes et stochastiques .....	26
3.2.1. Méthodes d'optimisation déterministes .....	26
3.3 Récapitulatif des méthodes d'optimisation déterministes .....	29
3.4 Méthodes d'optimisation stochastiques.....	30
3.4.1. Le recuit simulé.....	31
3.4.2. La recherche taboue .....	31
3.4.3. Recherche par harmonie.....	31
3.4.4. Recherche par évolution opérationnelle et différentielle .....	31
3.4.5. Optimisation par essais particuliers.....	32
3.4.6. Algorithme des colonies de fourmis .....	32
3.4.7. Les méthodes évolutionnistes.....	32
3.5 Optimisation fiabiliste .....	39
3.6 Optimisation multi-objectif .....	39
3.6.1. Méthode de pondération.....	40
3.6.2. Ensemble des solutions Pareto .....	40

4.	Synthèse des travaux effectués .....	41
4.1	Résolution par programmation linéaire .....	42
4.2	Résolution par méthodes métaheuristiques .....	43
4.2.1.	Résolution par l'algorithme génétique .....	44
4.2.2.	Résolution par le recuit simulé.....	45
4.2.3.	Résolution par recherche harmonie.....	45
4.2.4.	Résolution par évolution opérationnelle .....	46
4.2.5.	Résolution par évolution différentielle.....	46
4.3	Résolution par optimisation fiabiliste.....	46
4.4	Synthèse générale sur les travaux de recherche effectués .....	47
4.4.1.	Programmation linéaire .....	47
4.4.2.	Méthodes métaheuristiques .....	47
4.4.3.	Optimisation fiabiliste .....	48
4.4.4.	Choix de la méthode adoptée .....	48
CHAPITRE 3	.....	49
1.	Introduction.....	49
2.	Méthode conventionnelle de résolution .....	50
2.1	Limitations des contraintes aux états limites de service.....	50
2.1.1.	Limite de compression .....	50
2.1.2.	Limite de traction .....	51
2.2	Dimensionnement en précontrainte totale .....	52
2.2.1.	Conditions de coffrage .....	54
2.2.2.	Fuseau de passage .....	55
2.2.3.	Existence d'une ligne de précontrainte .....	55
2.2.4.	Condition d'enrobage .....	56
2.2.5.	Valeur minimale de précontrainte .....	57
3.	Nouvelle règle des pivots.....	57
3.1	Principe de la méthode .....	57
3.2	Hypothèses.....	57
3.3	Contraintes au niveau de la section .....	60
3.4	Caractéristiques mécaniques de la section.....	61
3.5	Equations d'équilibre.....	61

3.6	Précontrainte totale : section totalement comprimée.....	63
3.6.1.	Règle des pivots et domaine admissible.....	65
3.6.2.	Analyse et interprétation de la nouvelle approche en précontrainte totale ....	66
3.7	Précontrainte partielle : section fissurée.....	69
3.7.1.	Calcul de la force $P_{sous} - critique$ :.....	73
3.7.2.	Calcul de la force $P_{sur} - critique$ :.....	75
3.7.3.	Calcul de la force $P_{max}$ : .....	76
3.7.4.	Analyse et interprétation de la nouvelle approche en précontrainte partielle	77
4.	Condition de coffrage en précontrainte totale et partielle.....	80
5.	Corrélation entre l'ouverture des fissures et la contrainte au niveau des aciers .....	83
6.	Vérification à l'état limite ultime ELU .....	85
6.1	Principe de la vérification.....	85
6.2	Hypothèses.....	85
6.3	Diagramme d'interaction.....	85
6.3.1.	Efforts dans le béton comprimé .....	87
6.3.2.	Résolution de l'intégrale $In$ .....	89
6.3.3.	Expression de l'effort normal et du moment du béton comprimé en fonction de $In$ et des propriétés mécaniques .....	90
6.3.4.	Expression de $(x - x_c)$ .....	91
6.3.5.	Effort normal et moment fléchissant des aciers passifs .....	93
6.3.6.	Equations d'équilibre .....	94
6.3.7.	Diagramme d'interaction pour différents pourcentages d'acier.....	94
6.3.8.	Organigramme de calcul du diagramme d'interaction.....	96
7.	Calcul de la force de précontrainte à l'ELU .....	98
8.	Vérification à l'ELU .....	100
9.	Vérification de l'effort tranchant à l'ELS.....	100
9.1	Critère de l'annexe QQ de l'EN 1992-2.....	100
9.2	Calcul des contraintes principales de traction et de compression .....	101
10.	Conclusion .....	102
CHAPITRE 4.....		105
1.	Introduction.....	105
2.	Principe de dimensionnement.....	106



3.	Propriétés géométriques des sections.....	107
4.	Ligne d'influence du moment d'une poutre à inertie constante .....	108
4.1	Résolution des poutres hyperstatiques par la méthode des foyers.....	110
4.1.1.	Convention de signe .....	111
4.1.2.	Méthode de résolution.....	111
4.1.3.	Matrice canonique .....	112
4.1.4.	Couple unité à gauche d'une poutre à n travées : Foyer de droite .....	112
4.1.5.	Couple unité à droite d'une poutre à n travées : Foyer de gauche .....	113
4.1.6.	Inversion de la matrice canonique.....	114
4.2	Détermination de la ligne d'influence du moment d'une charge concentrée .....	115
4.2.1.	Déformée de la structure isostatique associée.....	115
4.2.2.	Recherche d'un point de moment nul .....	116
4.2.3.	Expression de la ligne d'influence dans les travées non chargées .....	123
4.3	Détermination de la ligne d'influence du moment d'une charge tandem TS .....	125
5.	Courbes enveloppes du moment d'une poutre à inertie constante.....	128
5.1	Courbes enveloppes sous charge concentrée.....	128
5.2	Courbes enveloppes sous charge tandem TS.....	131
5.3	Courbes enveloppes sous charge uniforme UDL .....	131
5.3.1.	Travée chargée .....	132
5.3.2.	Travées ne contenant pas la section de calcul .....	134
5.3.3.	Moment minimal et maximal enveloppe.....	134
6.	Ligne d'influence de l'effort tranchant d'une poutre à inertie constante.....	135
7.	Courbes enveloppes de l'effort tranchant d'une poutre à inertie constante.....	138
8.	Organigramme pour la détermination des courbes enveloppes du moment fléchissant pour une poutre à inertie constante .....	139
9.	Lignes d'influence du moment d'une poutre à inertie variable .....	140
9.1	Principe de la méthode .....	141
9.2	Calcul des constantes mécaniques <b>a, b et c</b> .....	142
9.3	Méthode de la matrice des transferts .....	143
9.3.1.	Démarche à suivre pour le calcul des constantes mécaniques dans le cas d'une poutre à inertie variable : .....	147
9.4	Construction de la matrice canonique et de son inverse.....	147
9.5	Expressions des lignes d'influence du moment fléchissant.....	147

9.5.1.	Déformée de la structure isostatique associée sous l'effet d'un moment unité	147
9.5.2.	Flèche hyperstatique sous couples unités sur appuis .....	150
9.5.3.	Expression de la déformée le long de la poutre : .....	151
10.	Tracé des courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable .....	152
11.	Organigramme pour la détermination des courbes enveloppes du moment pour une poutre à inertie variable .....	154
12.	Dimensionnement de la précontrainte .....	155
12.1	Dimensionnement de la force de précontrainte .....	155
12.1.1.	Condition 1 : Ouverture du fuseau de passage de traction .....	157
12.1.2.	Condition 2 : Existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau de passage	157
12.1.3.	Condition 3 : Inscription du câble à l'intérieur du fuseau .....	159
12.2	Valeur minimale de précontrainte .....	164
13.	Construction du câble moyen de précontrainte.....	164
13.1	Travée intermédiaire.....	165
13.2	Travée de rive .....	170
13.2.1.	Travée de rive gauche : la parabole d'indice 1 n'existe plus.....	170
13.2.2.	Travée de rive droite : la parabole d'indice 2 n'existe plus.....	171
14.	Détermination de la transformation linéaire TL .....	172
15.	Vérification des contraintes aux ELS .....	175
16.	Conclusion .....	176
CHAPITRE 5	.....	178
1.	Introduction.....	178
2.	Application 1 - Optimisation d'une poutre isostatique précontrainte par algorithmes génétiques .....	179
2.1	Concept de l'optimisation par algorithmes génétiques.....	179
2.1.1.	Opérateurs génétiques définis dans « scilab ».....	179
2.2	Fonction de pénalité.....	180
2.3	Application au cas étudié.....	181
2.4	Organigramme de l'algorithme appliqué.....	183
2.5	Formulation du problème d'optimisation .....	184
2.5.1.	Fonction objectif .....	184

2.5.2.	Variables de conception .....	184
2.5.3.	Constantes .....	185
2.5.4.	Contraintes .....	185
2.6	Application numérique .....	186
2.6.1.	Données d'entrée.....	186
2.6.2.	Principe des études menées .....	187
2.6.3.	Etude de sensibilité en précontrainte totale.....	188
2.6.4.	Etude de sensibilité en précontrainte partielle.....	194
2.6.5.	Analyse comparative entre précontrainte totale et partielle .....	197
2.6.6.	Etude de sensibilité des coûts unitaires .....	198
2.7	Conclusion de l'application numérique .....	201
3.	Application 2 – Optimisation de la précontrainte pour une poutre à deux travées....	202
3.1	Résolution analytique d'une poutre à deux travées symétriques.....	203
3.1.1.	Expressions de la ligne d'influence du moment fléchissant .....	204
3.1.2.	Détermination des courbes enveloppes .....	205
3.2	Détermination de la force de précontrainte .....	207
3.2.1.	Condition 1 : Ouverture du fuseau de passage en traction.....	207
3.2.2.	Condition 2 : Existence d'une ligne de précontrainte concordante à l'intérieur du fuseau .....	208
3.2.3.	Condition 3 : Inscription du câble déduit par transformation linéaire de la ligne de précontrainte dans les limites d'enrobage .....	208
3.3	Application numérique .....	211
3.4	Résolution du problème d'optimisation linéaire graphiquement .....	213
3.5	Résolution par la méthode du Simplexe en deux phases.....	218
3.5.1.	Principe de l'algorithme du Simplexe.....	218
3.5.2.	Principe de résolution.....	218
3.5.3.	Application de la méthode du Simplexe en deux phases .....	219
3.6	Conclusion de l'application numérique .....	222
CHAPITRE 6.....		225
1.	Résumé du travail réalisé .....	225
1.1	Synthèse bibliographique .....	225
1.2	Nouvelle règle des pivots en précontrainte totale et partielle.....	225
1.3	Résolution d'un ouvrage hyperstatique à inertie constante et variable .....	226

1.4	Optimisation d'une poutre précontrainte isostatique par les algorithmes génétiques	227
1.5	Optimisation d'une poutre hyperstatique à deux travées symétriques par la méthode du Simplexe .....	228
2.	Perspectives.....	229
RÉFÉRENCES .....		230
ANNEXE A .....		234
1.	Tables de Marsac .....	234
1.1	Principe de lecture des tables.....	234
1.2	Table de Marsac pour une travée de rive pour $\alpha = 0$ .....	236
2.	Calcul par la méthode analytique proposée au Chapitre 4.....	237
2.1	Coefficients de souplesse.....	238
2.2	Rotations isostatiques à droite et à gauche de la travée.....	238
3.	Comparaison des résultats des deux méthodes .....	239
ANNEXE B .....		240
1.	Introduction.....	240
2.	Principe de la méthode.....	240
3.	Ajustement de la fonction Spline sur une fonction définie par points .....	241
ANNEXE C .....		243
1.	Méthode de Muller.....	243
2.	Méthode de Laguerre .....	244
ANNEXE D .....		246
1.	Introduction.....	246
2.	Démarche proposée.....	247
2.1	Maillage .....	247
2.2	Définition d'un triangle courant .....	247
2.3	Maillage d'un triangle élémentaire dans le repère projeté .....	248
2.4	Redéfinition des polynômes élémentaires dans le maillage global .....	249
3.	Résultats.....	250

## Liste des Figures

---

Figure 2.1 - Composition d'un chromosome.....	33
Figure 2.2 - Sélection par rang.....	35
Figure 2.3 - Croisement en un point .....	36
Figure 2.4 - Croisement en deux points .....	36
Figure 2.5 - Croisement uniforme.....	37
Figure 2.6 - Mutation d'un gène.....	37
Figure 2.7 - a) Sept variables géométriques dans le recuit simulé .....	
b) Deux variables géométriques dans le Simplexe.....	45
Figure 3.1 - Limitations des contraintes en béton précontraint .....	52
Figure 3.2 - Conditions de contraintes à respecter.....	54
Figure 3.3 - Fuseau de passage en traction dans le cas où la section est sous-critique.....	56
Figure 3.4 - Diagramme parabole-rectangle du béton comprimé donné par la Figure 3.3 de l'EN 1992-1-1 .....	58
Figure 3.5 - Diagramme bilinéaire des aciers passifs donné par la Figure 3.8 de l'EN 1992-1-1 .....	58
Figure 3.6 - Diagramme contrainte-déformation des aciers de précontrainte donné par l'EN 1992-1-1 figure 3.10 .....	59
Figure 3.7 - Diagramme des contraintes sur la hauteur de la section .....	60
Figure 3.8 - Domaine admissible en précontrainte totale .....	64
Figure 3.9 – Représentation de la règle des pivots .....	65
Figure 3.10 – Pivot 1.....	65
Figure 3.11 – Pivot 2.....	65
Figure 3.12 – Pivot 3.....	66
Figure 3.13 – Domaine admissible sous toutes les combinaisons de service en précontrainte totale.....	67
Figure 3.14 – Vérification de la capacité portante d'une section existante .....	68
Figure 3.15 -Règle des pivots en précontrainte partielle .....	71
Figure 3.16 -Extension du domaine admissible en précontrainte partielle.....	71
Figure 3.17 – Représentation de la fonction $f(x)$ .....	73
Figure 3.18 - Valeurs de $P_{sous-critique}$ en précontrainte partielle.....	74
Figure 3.19 -Valeurs de $P_{surcritique}$ en précontrainte partielle.....	75
Figure 3.20 – Valeur de $P_{max}$ en précontrainte partielle .....	76
Figure 3.21 – Gain en valeur de la force de précontrainte en précontrainte partielle.....	78
Figure 3.22 – Vérification de la capacité portante d'une section existante en précontrainte partielle .....	79
Figure 3.23 – Variation de $\Delta M$ dans le plan $(M^*, P)$ en précontrainte totale .....	81
Figure 3.24 – Variation de $\Delta M$ dans le plan $(\Delta M, P)$ en précontrainte totale.....	81
Figure 3.25 – Variation de $\Delta M$ dans le plan $(M^*, P)$ en précontrainte partielle.....	82
Figure 3.26 - Variation de $\Delta M$ dans le plan $(\Delta M, P)$ en précontrainte partielle .....	82

Figure 3.27 - Diagramme des déformations et des contraintes de la section à l'ELU .....	85
Figure 3.28 - Loi de comportement non linéaire du béton .....	86
Figure 3.29 - Diagramme des déformations de la section à l'ELU .....	88
Figure 3.30 - Diagramme des contraintes et déformations en pivot C .....	92
Figure 3.31 - Diagramme d'interaction pour différents pourcentages d'acier .....	94
Figure 3.32 - Organigramme de calcul pour $x \leq h$ .....	96
Figure 3.33 - Organigramme de calcul pour $x \geq h$ .....	97
Figure 3.34 - Composantes de la précontrainte du câble .....	100
Figure 3.35 - Cercle de Mohr des contraintes .....	102
Figure 4.1 – Calcul des propriétés d'une section de forme quelconque .....	107
Figure 4.2 - Ligne d'influence d'une poutre isostatique .....	108
Figure 4.3 - Distribution de Heaviside .....	109
Figure 4.4 - Ligne d'influence du moment de flexion d'une poutre hyperstatique .....	109
Figure 4.5 – Rotule introduite dans une travée courante isolée d'une poutre continue .....	110
Figure 4.6 – Résolution d'une poutre continue .....	110
Figure 4.7 - Application de la réaction hyperstatique unité sur appui .....	111
Figure 4.8 – Diagramme du moment de la poutre soumise à un moment unité à droite .....	113
Figure 4.9 – Diagramme du moment de la poutre soumise à un moment unité à droite .....	114
Figure 4.10 - Variation de rotation unité dans la structure isostatique .....	115
Figure 4.11 - Diagramme du moment et allure de la ligne d'influence en fonction de la position "s" .....	118
Figure 4.12 – Allure des lignes d'influence en fonction de la position de la section pour une poutre à 5 travées .....	120
Figure 4.13 – Moment sur appui de gauche de la travée non chargée .....	124
Figure 4.14 – Moment sur appui de droite de la travée non chargée .....	125
Figure 4.15 – Division de la poutre en n+2 segments .....	126
Figure 4.16 - Ligne d'influence d'une charge tandem TS pour une poutre à 5 travées .....	127
Figure 4.17 – Valeur maximale et minimale de la ligne d'influence pour une section s donnée .....	129
Figure 4.18 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge concentrée pour une poutre à 5 travées .....	130
Figure 4.19 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge tandem TS pour une poutre à 5 travées .....	131
Figure 4.20 - Travées à charger et à décharger pour obtenir les courbes enveloppes du moment .....	132
Figure 4.21 - Courbes enveloppes du moment sous chargement uniforme UDL pour une poutre à 5 travées .....	135
Figure 4.22 – Déformée imposée pour la détermination de la ligne d'influence de l'effort tranchant .....	135
Figure 4.23 – Diagramme linéaire du moment dans la structure hyperstatique .....	136
Figure 4.24 - Ligne d'influence de l'effort tranchant pour une poutre à 5 travées .....	137

Figure 4.25 - Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge concentrée pour une poutre à 5 travées .....	138
Figure 4.26 - Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge uniforme pour une poutre à 5 travées .....	138
Figure 4.27 - Section transversale sur appui et à mi-travée d'un pont à caisson à inertie variable .....	140
Figure 4.28 - Section longitudinale d'une poutre hyperstatique à inertie variable .....	141
Figure 4.29 – Travée divisée en deux segments .....	143
Figure 4.30 - Travée divisée en m segments.....	144
Figure 4.31 - Segment K considéré.....	145
Figure 4.32 – Application d'un moment constant sur la travée isostatique.....	147
Figure 4.33 - Couple unité à droite appliqué .....	149
Figure 4.34 - Couple unité à gauche appliqué .....	150
Figure 4.35 - Variation de rotation unité dans la structure isostatique .....	151
Figure 4.36 - Ligne d'influence du moment pour une poutre à inertie variable .....	152
Figure 4.37 - Courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable sous charge concentrée PL .....	153
Figure 4.38 - Courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable sous charge uniforme UDL .....	153
Figure 4.39 - Distribution des contraintes en fibre supérieure et inférieure de la section .....	155
Figure 4.40 – Diagramme des fonctions $f_1$ et $f'_1$ en fonction de P .....	158
Figure 4.41 – Diagramme des fonctions $f_2$ et $f'_2$ en fonction de P .....	158
Figure 4.42 – Transformation linéaire TL tangente à $TL_{max}$ en travée et joignant $TL_{min}$ sur appuis .....	160
Figure 4.43 - Tracé du câble en travée intermédiaire .....	165
Figure 4.44 - Tracé du câble dans la travée de rive gauche .....	170
Figure 4.45 - Tracé du câble dans la travée de rive droite .....	171
Figure 4.46 - Tracé de la transformation linéaire et de son fuseau de passage.....	174
Figure 4.47 - Tracé de la ligne de précontrainte à l'intérieur de son fuseau de passage .....	174
Figure 4.48 - Tracé du câble à l'intérieur du fuseau de passage .....	175
Figure 4.49 - Vérification des contraintes en tout point de la poutre .....	175
Figure 5.1 - Section typique de la poutre .....	185
Figure 5.2 - Exemple de configuration du câblage .....	185
Figure 5.3 - Coupe transversale sur le pont étudié.....	186
Figure 5.4 - Graphe montrant la saturation de la condition de coffrage en fonction des différentes portées .....	188
Figure 5.5 - Graphe montrant la saturation de la condition en flexion en fonction des différentes portées .....	189
Figure 5.6 - Graphique de la variation de la surface du talon en fonction du nombre de câbles .....	190
Figure 5.7 – Graphique de la variation de résistance à l'effort tranchant en fonction de la longueur des travées et des charges TS appliquées .....	191

Figure 5.8 – Graphique de la variation du ratio géométrique en fonction de la longueur de travée et des charges appliquées .....	191
Figure 5.9 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction de la résistance à la compression du béton et des longueurs de travée .....	192
Figure 5.10 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction du pourcentage d'acier passif.....	193
Figure 5.11 - Diagramme d'interaction pour deux quantités d'armatures passives différentes .....	194
Figure 5.12 - Graphique de la variation de la hauteur en fonction de $f_{ck}$ en précontrainte partielle .....	194
Figure 5.13 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction du pourcentage d'armatures passives .....	195
Figure 5.14 - Graphique de la variation de force de précontrainte en fonction du pourcentage d'armatures passives .....	196
Figure 5.15 – Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives sur la saturation de la condition de coffrage aux ELS.....	196
Figure 5.16 – Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives sur la saturation de la contrainte de flexion à l'ELU.....	196
Figure 5.17 - Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives en précontrainte partielle pour une section constante.....	197
Figure 5.18 – Graphiques de l'influence du prix unitaire du béton sur la surface de la section .....	198
Figure 5.19 – Graphiques de l'influence du prix unitaire du béton sur la hauteur totale de la section .....	199
Figure 5.20 - Graphiques de l'influence du prix unitaire des câbles sur la hauteur de la section et le nombre de câbles.....	199
Figure 5.21 – Graphique de l'influence du prix unitaire du béton avec prise en compte du prix du coffrage .....	201
Figure 5.22 – Graphique de l'influence du prix unitaire des câbles avec prise en compte du prix du coffrage .....	201
Figure 5.23 - Allure de la ligne d'influence du moment d'une poutre à deux travées symétriques .....	204
Figure 5.24 – Détermination des courbes enveloppes du moment pour $s \leq xfd$ .....	205
Figure 5.25 – Détermination des courbes enveloppes du moment pour $s \geq xfd$ .....	206
Figure 5.26 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge uniforme.....	206
Figure 5.27 - Section de la poutre étudiée .....	211
Figure 5.28 – Coupe longitudinal sur le pont .....	212
Figure 5.29 - Résolution de l'optimisation linéaire graphiquement.....	215
Figure 5.30 – Résolution de l'optimisation linéaire.....	216
Figure 5.31 – Point optimal obtenu graphiquement.....	216
Figure 5.32 – Fuseau de passage de la ligne de précontrainte .....	217
Figure 5.33 – Fuseau de passage du câble .....	217



Figure 5.34 - Tableau de la solution optimale obtenue par la méthode du Simplexe.....222

## Liste des Tableaux

---

Tableau 3.1 - Limitations de l'ouverture des fissures selon l'EN 1992-2 .....	51
Tableau 4.1 – Calcul des propriétés mécaniques d'une section à partir des coordonnées.....	107
Tableau 4.2 – Détermination de la valeur des moments $M_{min}$ et $M_{max}$ .....	129
Tableau 4.3 – Détermination de la valeur du moment $M_{min}$ .....	130
Tableau 4.4 – Coefficients des paraboles 1 et 2.....	166
Tableau 4.5 – Coefficients des paraboles obtenus par les équations de continuité .....	167
Tableau 4.6 - Transformation linéaire entre le câble et la ligne de précontrainte .....	173
Tableau 5.1 – Opérateurs génétiques .....	182
Tableau 5.2- Variables de conception.....	184
Tableau 5.3 - Contraintes considérées .....	185
Tableau 5.4 – Evaluation de la surface du talon en fonction du nombre de câbles et de la longueur de la travée .....	189
Tableau 5.5 – Influence de la résistance à la compression du béton sur la hauteur et l'élançement de la section.....	192
Tableau 5.6 – Influence du pourcentage d'acier passif sur la hauteur de la section.....	193
Tableau 5.7 – Influence de la variation de $f_{ck}$ sur la solution optimale.....	195
Tableau 5.8 – Comparaison entre précontrainte totale et partielle .....	197
Tableau 5.9 – Effet de la variation du prix unitaire du béton pour une longueur de travée de 40m .....	200
Tableau 5.10 – Effet de la variation du prix unitaire des câbles pour une longueur de travée de 40m .....	200
Tableau 5.11 - Sommets des domaines d'interaction.....	210
Tableau 5.12 – Maillage de la poutre en 21 points .....	213
Tableau 5.13 - Valeurs de $m_1 *$ , $m_2 *$ , $m_3 *$ et $m_4 *$ en chaque point de maillage.....	214
Tableau 5.14 - Valeurs des sommets des quadrilatères .....	214
Tableau 5.15 - Points de maillage de la poutre .....	219

# Chapitre 1

---

## Introduction

---

### **1. Contexte et objectif de la thèse**

Le concept du béton précontraint a été introduit en 1928 par Eugène Freyssinet dans le but de compenser la faible résistance du béton à la traction. L'idée fondamentale est de créer, avant l'application des charges, un effort de compression de telle sorte qu'au total le béton reste comprimé et sans risque de fissuration. Cependant, si le dimensionnement de la précontrainte est basé sur la totalité du chargement en service, en considérant les charges d'exploitation caractéristiques rarement atteintes en réalité ; ce principe entraînerait un surdimensionnement conséquent de la force de précontrainte. C'est ainsi que la notion de précontrainte partielle s'est développée progressivement. Dans ce contexte, le béton reste comprimé sous charges permanentes mais peut être tendu et fissuré sous charges variables de courte durée. Dans ce dernier cas, il se comporte comme du béton armé, et des armatures longitudinales passives sont ajoutées pour maîtriser la fissuration.

Actuellement, la précontrainte est largement utilisée dans la construction des ouvrages d'art, notamment des ponts. En effet, le 20ème siècle a connu d'importantes innovations dans les types de ponts, parmi lesquelles les ponts en béton précontraint, employés pour franchir de grandes portées.

Les méthodes traditionnelles de conception et de l'étude des ponts sont basées sur des vérifications d'une géométrie prédéfinie à l'aide des estimations fournies par des guides techniques. Les dimensions de la structure sont modifiées après analyse du comportement structural de l'ouvrage. Le résultat ainsi obtenu est loin d'être optimal.

Dès lors, l'implémentation des techniques d'optimisation au dimensionnement des structures, visant à minimiser les coûts de la conception, de la réalisation et de la maintenance tout en vérifiant les contraintes fonctionnelles, a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Plusieurs techniques d'optimisation sont employées et ont montré une efficacité dans l'optimisation des ponts en béton précontraint, dont la programmation linéaire, les méthodes métaheuristiques et l'optimisation fiabiliste. Toutefois, des hypothèses simplificatrices sont appliquées dans la plupart des cas du fait de la complexité du problème d'optimisation et de la non-linéarité des contraintes.

L'objectif de la présente thèse consiste à développer une nouvelle approche analytique pour le dimensionnement des ponts en béton précontraint isostatiques et hyperstatiques, à inertie constante ou variable, qui pourrait être facilement intégrée dans une procédure d'optimisation. Les deux cas de précontrainte totale et partielle sont étudiées selon les Eurocodes.

## **2. Organisation de la thèse**

La thèse est divisée en 6 chapitres selon le plan suivant :

- **Chapitre 1 : *Contexte général et objectif de la thèse***
- **Chapitre 2 : *Méthodes d'Optimisation des Ponts en Béton Précontraint***

Ce chapitre est une synthèse bibliographique des méthodes d'optimisation des ponts employées pour les ponts en béton précontraint. Les étapes de l'étude conventionnelle d'un pont en béton précontraint selon les Eurocodes sont tout d'abord rappelées. Les différentes méthodes d'optimisation généralement employées pour le dimensionnement des structures sont détaillées, dont les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Finalement, une revue de littérature des travaux effectués par divers chercheurs sur l'optimisation des poutres en béton précontraint est exposée, avec analyse des difficultés rencontrées et des résultats obtenus.

L'intérêt du développement d'une méthode analytique facile à intégrer dans une procédure d'optimisation est ainsi soulevé.

- **Chapitre 3 : *Nouvelle Règle des Pivots***

Dans ce chapitre, une nouvelle règle des pivots est proposée en béton précontraint conformément aux Eurocodes. Elle est en fait inspirée de la règle des pivots en béton armé, mais avec des limitations sur les contraintes et non sur les déformations.

La démarche analytique de résolution présentée, basée sur cette règle, permet le dimensionnement cohérent ainsi que la formulation de la condition de coffrage et des valeurs minimale et maximale de précontrainte pour une poutre totalement et partiellement précontrainte. Le domaine admissible des valeurs de précontrainte, qui constitue une extension de la règle des pivots, est tracé ; l'interprétation de ce graphe est essentielle pour le calcul de la force de précontrainte optimale avec et sans aciers passifs.

Une approche analytique pour la vérification de la section en flexion à l'état limite ultime cohérente à la nouvelle méthode développée est également présentée. La résolution présentée est applicable pour une section de forme quelconque.

- **Chapitre 4 : *Résolution analytique des ouvrages hyperstatiques***

Ce chapitre présente une approche analytique pour la résolution des ouvrages hyperstatiques en béton précontraint, à inertie constante et variable. La démarche englobe toutes les étapes de dimensionnement d'un pont en béton précontraint. Les équations décrivant chaque étape sont exprimées sous forme de fonctions polynomiales facilement manipulables mathématiquement.

Les propriétés géométriques de la section transversale de forme quelconque sont calculées, les expressions analytiques polynomiales de la ligne d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont développées dans le but d'obtenir les courbes enveloppes des sollicitations sous différents cas de charges et combinaisons.

Le tracé du câble de précontrainte tracé est défini par une succession de fonctions polynomiales, des paraboles dans ce cas, respectant des conditions pratiques de courbure et les limites d'enrobage. La force de précontrainte nécessaire est par la suite déterminée, et les vérifications des contraintes aux ELS et de la flexion à l'ELU sont effectuées.

La démarche développée permet au concepteur d'aborder des calculs relativement complexes pour le dimensionnement et prédimensionnement des ponts hyperstatiques, par une approche analytique facilement programmable, sans avoir recours aux méthodes numériques des éléments finis.

- **Chapitre 5 : *Applications numériques sur l'optimisation des poutres en béton précontraint***

Deux applications numériques sur l'optimisation des ponts en béton précontraint, en utilisant les démarches analytiques développées, sont exposées dans ce chapitre.

La première application traite l'optimisation par les algorithmes génétiques d'une poutre d'un pont VIPP, isostatique avec une section en forme de T à talons. La démarche analytique de la règle des pivots présentée dans le chapitre 3 est transformée en algorithme et introduite dans un logiciel de programmation sous forme de fonctions mathématiques. Le problème d'optimisation abordé est la minimisation du coût total par mètre linéaire de la section, en respectant les contraintes géométriques et mécaniques des Eurocodes à l'ELU et à l'ELS. Le programme est développé en précontrainte totale et partielle.

Cette programmation a permis l'élaboration des études de sensibilité détaillées en variant différents paramètres. Une comparaison des résultats obtenus en précontrainte totale et partielle est également effectuée.

Dans la deuxième application, l'optimisation linéaire est appliquée pour la recherche de la force minimale de précontrainte et des coefficients du polynôme du tracé du câble de précontrainte pour une poutre hyperstatique à deux travées symétriques.

La démarche analytique pour la résolution analytique des poutres hyperstatiques développée dans le chapitre 2 est employée dans cette application. La résolution du problème est effectuée par la méthode du Simplexe et par la méthode graphique.

- **Chapitre 6 : Conclusion**

Le dernier chapitre résume les travaux effectués au cours de cette thèse ainsi que les conclusions obtenues. Finalement, des perspectives de futurs travaux éventuels sont proposées.

# Chapitre 2

---

## Méthodes d'Optimisation des Ponts en Béton Précontraint

---

### **1. Introduction**

Le travail réalisé et présenté dans ce chapitre a pour objectif l'exploration des travaux scientifiques et des différentes méthodes employées pour l'optimisation des ouvrages en béton armé et précontraint. Cette synthèse permet d'exposer les points forts et faibles des techniques utilisées. Elle montre ainsi l'intérêt de l'implication d'une méthode analytique de dimensionnement facilitant la tâche d'optimisation, ce qui constitue le sujet principal de ce travail de thèse.

Ce chapitre est structuré comme suit.

Tout d'abord, nous rappelons les étapes de l'étude d'un pont en béton précontraint, conformément aux Eurocodes.

Les différentes méthodes d'optimisation impliquées dans le dimensionnement des ouvrages sont par la suite détaillées.

Une synthèse des travaux effectués par divers chercheurs sur l'optimisation des ponts et des poutres en béton armé et précontraint est exposée ; les critères conduisant au choix de la méthode adoptée sont finalement abordés.

### **2. Démarche d'étude d'un pont en béton précontraint**

Les étapes principales de l'étude d'un pont en béton précontraint, selon les provisions des Eurocodes, sont présentées dans le paragraphe suivant.

#### **2.1 Evaluation des charges appliquées**

Les principales charges appliquées à un pont sont :

- les charges permanentes : poids propre et charges de superstructure
- les charges d'exploitation : actions de trafic et gradient thermique

Les charges routières de voitures, camions et véhicules spéciaux, engendrent des forces verticales et horizontales, statiques et dynamiques. En fonction de la future destination du pont, un modèle de charges, décrivant leur disposition et intensité, est adopté conformément à l'EN-1991-2 section 2.2.

L'échauffement et le refroidissement de la surface supérieure d'un pont entraîneront une variation de température positive (surface supérieure plus chaude) et négative (surface inférieure plus chaude). Il convient donc de prendre en compte les composantes du gradient thermique, données par l'AN de l'EN-1991-5 section 6.

Les combinaisons de charge à suivre sont définies par l'EN-1991-2.

## 2.2 Analyse du tablier

Le tablier est la partie du pont supportant la charge de trafic et s'appuyant par les piles et culées. L'analyse du tablier se fait suivant les deux directions du pont : longitudinale et transversale.

Dans le sens longitudinal, le tablier peut être assimilé à une poutre hyperstatique appuyée sur les piles et supportant les charges définies par le modèle de charges correspondant. La méthode analytique consiste à déterminer les courbes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sous les différentes combinaisons de charges pour enfin adopter le cas le plus défavorable pour le dimensionnement du pont.

Dans le sens transversal, l'étude dépend du type du tablier (pont-dalle, pont à poutres identiques, etc.). L'effet de la répartition transversale des charges est traité par plusieurs méthodes, parmi lesquelles nous citons la méthode de Guyon-Massonnet et la méthode de Courbon, aussi désignée par la méthode des entretoises rigides.

## 2.3 Dimensionnement de la force de précontrainte

Le dimensionnement de la précontrainte se fait sous les combinaisons des états limites de service.

Pour le cas d'un pont construit sur cintres, nous distinguons les méthodes suivantes :

- Méthode classique : dans ce cas, le tracé du câble est défini avant le calcul de la force de précontrainte, et les conditions de précontrainte sont ensuite vérifiées.
- Méthode du câble concordant : Le tracé du câble est défini de façon à engendrer des moments hyperstatiques de précontrainte nuls.

Dans le cas d'une poutre hyperstatique, étant empêchée de se déformer librement, ses appuis exercent des réactions hyperstatiques chargées de restituer un système de forces nulles. La ligne de précontrainte  $e_{oo}$  aura pour équation

$$e_{oo} = \frac{M}{P} = e_o + \frac{M_{hyp}}{P} \quad [2.1]$$

$e_o$  : excentricité du câble

Elle ne coïncide donc pas avec le câble.



La valeur minimale de précontrainte est déterminée en respectant des conditions imposées sur le câble et sur la ligne de précontrainte.

- Le câble doit respecter des conditions pratiques : il doit demeurer à l'intérieur du béton.
- La ligne de précontrainte doit obéir à des conditions mécaniques : la précontrainte minimale est déterminée par la nécessité de conserver les contraintes dans le béton inférieures aux contraintes admissibles.

Ces conditions seront largement détaillées dans les chapitres qui suivent.

## **2.4 Détermination du tracé du câble**

Après avoir trouvé la force de précontrainte et le nombre de câbles nécessaires, un tracé de câble est déterminé en respectant les conditions pratiques et mécaniques déjà définies.

La méthode consiste à tracer le câble et puis en déduire la ligne de précontrainte par une transformation linéaire équivalente au moment hyperstatique de précontrainte développé par le câble.

## **2.5 Calcul des pertes de précontrainte**

La valeur de la force de précontrainte est obtenue en retranchant de la force les pertes instantanées et les pertes différées données par l'EN-1992-1-1 section 5.10.

Lors de la mise en tension, les pertes instantanées sont dues :

- aux frottements du câble sur sa gaine,
- au tassement des ancrages,
- aux déformations instantanées du béton

Au cours du temps, les pertes différées sont dues aux effets du :

- Retrait du béton
- Fluage du béton
- Relaxation des aciers

## **2.6 Vérifications aux Etats Limites de Service**

La justification des ponts aux ELS (Etats Limites de Service) a pour objectif la vérification de la durabilité de la structure. Les principales vérifications données par l'EN-1992-1-1 section 7 sont :

- Limitation des contraintes (normales et tangentielles)
- Limitation des flèches (dans la pratique, le critère de flèche ne porte pas de grande importance dans les ouvrages d'art)
- Maîtrise de la fissuration

## 2.7 Vérifications aux Etats Limites Ultimes

La vérification des structures en béton précontraint aux ELU (Etats Limites Ultimes) est donnée par l’EN-1992-1-1 section 6 :

- Vérification des moments fléchissant selon la méthode des Pivots
- Vérification de l’effort tranchant
- Vérification des moments de torsion
- Vérification à la fatigue

## 3. Méthodes d’optimisation impliquées dans le dimensionnement des ouvrages

Au sens large du terme, l’optimisation signifie l’amélioration de la conception en fonction d’un ou plusieurs critères de performance. Cependant, la signification technique est la formulation d’un processus décisionnel par lequel on cherche à maximiser ou minimiser un critère de performance choisi, appelé « fonction objectif », en modifiant des paramètres précédemment définis, les variables, et en respectant un certain nombre de contraintes.

Le but des méthodes d’optimisation est de trouver un compromis entre plusieurs critères à satisfaire : besoins fonctionnels, coûts de conception, de fabrication, d’installation et de maintenance, et des critères d’esthétique. Il en résulte qu’une même conception peut être optimisée de différents points de vue.

La formulation du problème d’optimisation est donnée par l’énoncé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(X) \\ \text{où: } X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{avec: } x_{i,inf} \leq x_i \leq x_{i,sup} \\ \text{tel que: } g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{array} \right.$$

Les méthodes et stratégies d’optimisation ont connu une évolution considérable et importante, et les publications relatives à ce sujet sont de plus en plus nombreuses.

Les problèmes d’optimisation peuvent être classés en différentes catégories. Dans ce qui suit, une revue bibliographique des différentes méthodes d’optimisation utilisées dans le domaine du génie civil, et en particulier dans la conception des structures et des ponts en béton précontraint, est exposée.

### 3.1 Problème d’optimisation à variables continues et discrètes

En tenant compte de la nature des variables, les méthodes d’optimisation peuvent être classées en trois classes (Di Cesare, 2016) :

- Problème à variables discrètes
- Problème à variables continues
- Problème mixtes à variables discrètes et continues

Les variables d'optimisation discrètes ont un nombre fini, tandis que les variables d'optimisation continues sont définies sur un intervalle donné, et peuvent prendre une infinité de valeurs de cet intervalle.

### 3.2 Problèmes d'optimisation déterministes et stochastiques

#### 3.2.1. Méthodes d'optimisation déterministes

L'approche traditionnelle de l'optimisation est basée sur des *méthodes déterministes*, appelées ainsi car elles conduisent toujours au même résultat final pour une solution initiale donnée.

Ces méthodes cherchent le minimum d'une fonction en se basant sur la connaissance d'une direction de recherche, souvent donnée par le gradient de la fonction objectif. Elles utilisent la continuité et la dérivabilité au premier et/ou au second ordre de la fonction objectif et des contraintes (Hajji, 2003), (Collignan, 2011). C'est pourquoi la fonction objectif et les contraintes doivent être continues et dérivables au moins de classe C1, ce qui constitue un inconvénient majeur.

Les méthodes déterministes nécessitent une solution de référence pour débiter l'optimisation, et il arrive souvent que l'algorithme généré converge vers une solution optimale proche de la solution de référence mais qui ne soit pas la meilleure solution possible. On parle alors d'optimisation locale puisque la convergence n'a eu lieu que dans une zone locale de la fonction objectif.

Elles sont généralement rapides en temps de calcul, mais limitées à des fonctions objectifs linéaires, dérivables et convexes.

Nous distinguons deux familles de méthodes déterministes :

- les méthodes analytiques
- les méthodes heuristiques

Les *méthodes multidimensionnelles analytiques* introduisent la notion du gradient de la fonction objectif ainsi que des contraintes.

Elles sont classées en deux groupes, selon que la recherche de l'optimum soit limitée par des contraintes ou non.

##### 3.2.1.1. Méthodes analytiques sans contraintes

Les exemples les plus significatifs de méthodes analytiques multidimensionnelles sans contraintes sont :

- *la méthode de la plus grande pente ou méthode du gradient* expliqués par (Erbatur, et al., 1992) (Cerdeja, et al., 2016), (Arreckx, 2016)
- *la méthode de Newton-Raphson* (Taha, 2007), (Charon, et al.)
- les méthodes de *recherche linéaire* (Belloufi, 2008), (Belahcene, 2017)

- les *méthodes quasi-Newton* (Arreckx, 2016), (Laurent, 2012) dont la plus populaire la *méthode Davidon-Fletcher-Powell* (Gans, et al., 1974).

### 3.2.1.2. Méthodes analytiques avec contraintes

La résolution des problèmes contraints non linéaires consistent à établir des conditions nécessaires d’optimalité, appelées conditions de Kuhn-Tucker (Taha, 2007) , (Rondepierre, 2018), (Charon, et al.) qui servent à vérifier la validité de la solution obtenue, et à définir une fonction dite Lagrangienne nécessaire à l’établissement des conditions suffisantes d’optimalité.

*La méthode du gradient projeté* (Rondepierre, 2018), et *l’algorithme d’Uzawa* (Belloufi, 2008) sont un des approches de résolution d’un problème d’optimisation avec contraintes non linéaires.

Une autre résolution des problèmes d’optimisation contraints non linéaires consiste à transformer le problème initial en une suite de problèmes sans contraintes, ce sont les *méthodes de pénalité* (Rondepierre, 2018).

La méthode de *programmation quadratique séquentielle (SQP)* (Bierlaire, 2006), (Arreckx, 2016), est l’une des méthodes les plus efficaces pour résoudre les problèmes d’optimisation non linéaires avec contraintes. Elle consiste à minimiser une suite de modèles quadratiques de la fonction objectif ou du lagrangien associé, en utilisant une approximation quadratique.

En revanche, l’optimisation linéaire, désignée aussi par le nom de programmation linéaire (Meyer, 2011), (Belloufi, 2008), (Belahcene, 2017), étudie la minimisation ou la maximisation des fonctions objectif linéaires sous des contraintes linéaires.

### 3.2.1.3. Méthodes heuristiques

Les méthodes multidimensionnelles heuristiques explorent l’espace par essais successifs en recherchant les directions les plus favorables. La plupart de ces méthodes sont d’ordre 0. La méthode déterministe heuristique la plus répandue est *la méthode du Simplexe* considérée parmi les méthodes les plus importantes dans la programmation linéaire.

La programmation linéaire a servi à la résolution des problèmes d’optimisation dans divers domaines (gestion, économie, transport, ...). En particulier, dans le domaine de génie civil, on remarque d’après les nombreuses publications et références présentes sur ce sujet, que les problèmes de dimensionnement des structures en béton précontraint peuvent se transposer, par des méthodes spécifiques de linéarisation, en un programme linéaire et être résolues soit par l’algorithme du Simplexe soit par des variantes qui en découlent (Samartin Quiroga, et al., 1991), (Kirsch, 1973), (Cerda, et al., 2016), (Fereig, 1994), (Hernandez, et al., 2010), (Kanagasundaram, et al., 1991), (Erbatur, et al., 1992), (Kirsch, 1997), (Kirsch, 1972).

Vu l'importance accordée à la programmation linéaire dans le dimensionnement des structures, nous allons exposer brièvement le principe de la *méthode du Simplexe* dans le paragraphe suivant.

### Méthode du Simplexe

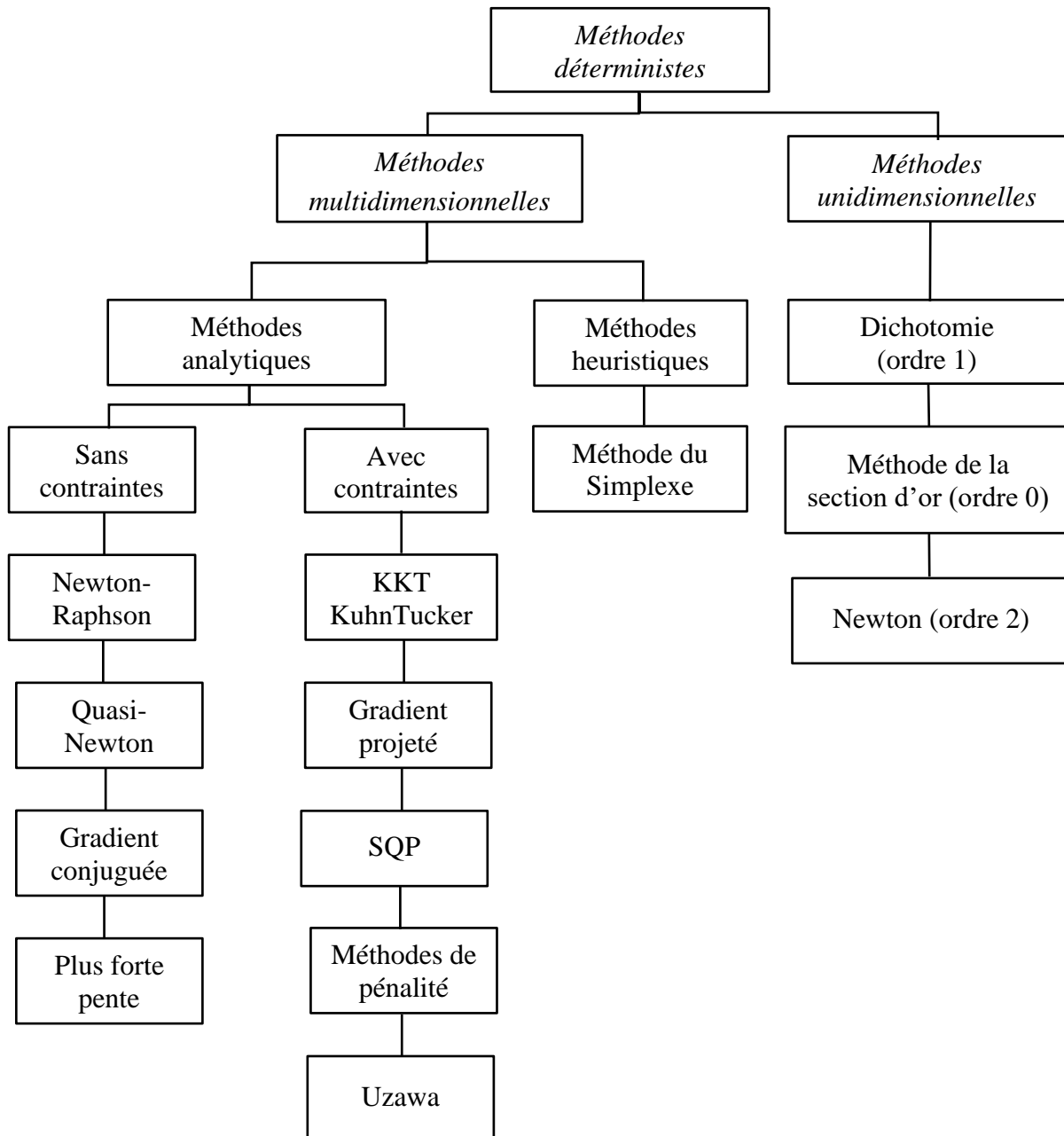
On appelle n-simplexe ou simplexe, l'enveloppe convexe d'un ensemble de (n+1) points.

Introduite en 1948 par G.B. Dantzig, la méthode du Simplexe consiste en des itérations qui font passer d'un sommet du polyèdre à un autre en sélectionnant le sommet adjacent maximisant la fonction objectif jusqu'à trouver le sommet optimal.

Les contraintes linéaires du problème d'optimisation délimitent un polyèdre convexe, appelé domaine des solutions admissibles.

La solution se trouvant forcément sur le pourtour du polyèdre admissible, l'algorithme du simplexe consiste à se placer sur une des intersections du polyèdre (un sommet). Ensuite, il s'agit de se déplacer le long d'une arête jusqu'à la prochaine intersection. Ce déplacement doit garantir le maintien ou l'amélioration du résultat de la fonction objectif. De telle sorte que ces déplacements ne nous éloignent jamais du point optimal. Cette étape est ensuite répétée jusqu'à ce que le point optimal du polyèdre soit atteint. (Taha, 2007), (Meyer, 2011), (Belloufi, 2008), (Belahcene, 2017).

### 3.3 Récapitulatif des méthodes d'optimisation déterministes



### 3.4 Méthodes d'optimisation stochastiques

L'inconvénient principal des méthodes d'optimisation déterministes réside dans leur tendance à rester piégées dans les optima locaux de la fonction objectif. On pourrait bien sûr utiliser ces méthodes classiques de nombreuses fois en changeant les conditions initiales jusqu'à ce que l'on trouve une solution qui peut être considérée comme étant la meilleure. Cependant, il faudrait effectuer ce processus une infinité de fois avant de pouvoir affirmer que la solution trouvée est effectivement la meilleure.

L'arrivée des méthodes stochastiques, qui s'appuient sur des mécanismes de transition probabilistes et aléatoires, permet de pallier ce problème. Leur nature aléatoire implique que plusieurs exécutions successives conduisent à des résultats différents pour une même initialisation du problème. Contrairement aux méthodes déterministes, elles ne nécessitent ni point de départ, ni la connaissance du gradient pour aboutir à la solution optimale.

Malgré l'évolution permanente des méthodes d'optimisation, il existe toujours des problèmes de complexité grandissante auxquels les ingénieurs sont affrontés. Ces problèmes, pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme exact polynomial, sont appelés problèmes NP-difficile (Widmer, 2001), (Dreo, et al., 2003) (problèmes Non déterministes Polynomiales). C'est pourquoi la plupart des spécialistes d'optimisation ont orienté leur recherche vers le développement des méthodes métaheuristiques qui utilisent des méthodes d'optimisation stochastiques et sont inspirées par des analogies (avec la physique : recuit simulé, avec la biologie : algorithmes évolutionnistes, recherche taboue, avec l'éthologie : colonies de fourmis, ...) (Hajji, 2003), (Dreo, et al., 2008), (Widmer, 2001), (Dreo, et al., 2003).

#### Différence entre heuristiques et métaheuristiques :

Les méthodes heuristiques sont généralement spécifiques à un problème, alors que les métaheuristiques sont conçues pour s'appliquer à divers problèmes, elles utilisent d'autres heuristiques pour obtenir une solution à un problème difficile.

Les méthodes métaheuristiques les plus employées sont :

- le recuit simulé
- la recherche taboue
- la recherche d'harmonie
- la recherche par évolution différentielle et opérationnelle
- l'algorithme d'optimisation par essais particuliers
- l'algorithme de colonies de fourmis
- les méthodes évolutionnistes dont les algorithmes génétiques sont les plus connus.

### 3.4.1. Le recuit simulé

Le *recuit simulé* (*Simulated annealing*), proposé par Kirkpatrick en 1983 (Hajji, 2003) pour la résolution des problèmes d'optimisation combinatoire, n'est autre qu'une simulation du phénomène de recuit en métallurgie. La méthode s'inspire du phénomène physique de refroidissement lent d'un corps en fusion qui le conduit à un état solide de basse énergie.

Un métal, chauffé à une température très élevée, devient liquide et peut occuper toute configuration. Quand la température décroît, le métal va se figer peu à peu dans une configuration qu'il est de plus en plus difficile à déformer, il est refroidi. En le réchauffant (recuit), le métal peut être retravaillé de nouveau pour lui donner la forme désirée. Il faut baisser lentement la température en marquant des paliers suffisamment longs pour que le corps atteigne l'équilibre thermodynamique à chaque palier, ce qui permet d'obtenir à la fin du processus un matériau dans un état cristallin bien ordonné correspondant à un état d'énergie minimum. Par contre, si la baisse de température se fait d'une manière brutale, les atomes du matériau sont figés dans un état désordonné traduisant un minimum local d'énergie (Hare, et al., 2013), (Hajji, 2003) (Dreo, et al., 2008), (Widmer, 2001), (Dreo, et al., 2003), (Smairi, 2013).

### 3.4.2. La recherche taboue

Introduite par Glover en 1986, la *recherche taboue* (*Tabu search*) est basée sur la mise en œuvre de mécanismes inspirés par la mémoire humaine.

Le principe de la méthode consiste à garder en mémoire les dernières solutions visitées, et à interdire le retour vers celles-ci dans le but de donner assez de temps à l'algorithme de sortir d'un minimum local et de ne pas y revenir (Hajji, 2003), (Hare, et al., 2013), (Widmer, 2001), (Dreo, et al., 2008), (Dreo, et al., 2003), (Smairi, 2013).

### 3.4.3. Recherche par harmonie

La recherche par harmonie (RH), (*Harmony Search*), proposée par Geem et ses collègues, est une méthode métaheuristique qui s'inspire du processus de recherche de la meilleure harmonie musicale dans un orchestre musical de Jazz, où chaque musicien joue une note avec différents instruments musicaux pour trouver l'harmonie parfaite.

### 3.4.4. Recherche par évolution opérationnelle et différentielle

L'évolution opérationnelle, introduite par Box en 1950, s'inspire du processus de fabrication et production ; elle consiste à imposer, à chaque itération, des perturbations aux variables avec des degrés spécifiques basées sur les expériences antérieures pour trouver la solution optimale.



L'évolution différentielle est inspirée des algorithmes génétiques. La principale nouveauté apportée par cette méthode est qu'à chaque itération, plutôt que de faire une reproduction des individus deux à deux, chaque individu est d'abord muté, puis croisé avec son mutant.

#### 3.4.5. Optimisation par essais particuliers

L'*optimisation par essaims particuliers (particle swarm optimization PSO)* est un algorithme proposé par Eberhart, Kennedy et Shi en 1995 (Hare, et al., 2013), (El Dor, 2012), (Smairi, 2013), (M., et al., 2016) qui s'inspire du comportement collectif des oiseaux à l'intérieur d'une nuée : leur capacité à voler de façon synchrone et leur aptitude à changer brusquement de direction tout en restant en une formation optimale.

Par analogie au monde du vivant, des règles simples telles que « rester proche des autres individus », « aller dans une même direction » ou « aller à la même vitesse », suffisent pour maintenir la cohésion de l'essaim, et permettent la mise en œuvre de comportements collectifs complexes.

#### 3.4.6. Algorithme des colonies de fourmis

L'*algorithme de colonies de fourmis (Ant colony optimization)*, développé initialement par Dorigo et Colomni en 1991, est une méthode évolutive dont les mécanismes de recherche s'inspirent fortement du comportement collectif d'une colonie de fourmis à la recherche d'une source de nourriture.

Initialement, les fourmis quittent le nid et se déplacent de manière aléatoire. Lorsqu'une fourmi découvre par hasard une source de nourriture, elle informe ses congénères de sa découverte en déposant sur le sol une marque transitoire lors de son retour vers le nid. Cette marque n'est autre qu'une substance chimique, nommée phéromone, qui va guider les autres fourmis vers la même source de nourriture. A leur retour, ces dernières déposent également de la phéromone sur le sol et renforcent ainsi le marquage de la piste qui mène du nid à la source de nourriture découverte. Le renforcement du marquage par les phéromones de la piste la plus fréquentée optimise la collecte de nourriture.

A long terme, les fourmis exploiteront uniquement la source la plus proche car la trace conduisant aux sources éloignées s'évaporerait et deviendrait indécélable.

Le chemin le plus court sera davantage parcouru, et donc plus renforcé, les chemins les moins renforcés finiront par disparaître.

#### 3.4.7. Les méthodes évolutionnistes

Les *algorithmes évolutionnistes*, apparus en 1975, sont inspirés de l'évolution biologique des êtres vivants, qui décrit comment les espèces s'adaptent à leur environnement. L'analogie avec un problème d'optimisation a donné lieu à plusieurs approches, parmi lesquelles les algorithmes génétiques sont sans doute l'exemple le plus connu (Hajji, 2003), (Collignan, 2011), (Taha, 2007), (Widmer, 2001), (Dreo, et al., 2008), (Dreo, et al., 2003), (Bouallagui, 2006).

### 3.4.7.1. L’algorithme génétique

Selon la théorie de Darwin, les individus d’une population les mieux adaptés à leur environnement ont une plus grande probabilité de survivre et de se reproduire, en donnant des descendants encore mieux adaptés.

Proposés par Holland en 1975 et développés par Goldberg en 1989, les *algorithmes génétiques* (*Genetic Algorithms*) reposent sur le principe de la manipulation d’une population de solutions candidates générées et de la faire évoluer en appliquant des mécanismes de sélection naturelle (les opérateurs génétiques). La capacité d’un individu à survivre est mesurée par la fonction objectif du problème d’optimisation.

#### 3.4.7.1.1 Codage des données

Tout d’abord, il faut représenter les différents états possibles de la variable dont on cherche la valeur optimale sous forme utilisable par l’algorithme génétique, c’est le codage.

Dans les algorithmes génétiques, chaque paramètre, ou variable, est associé à un gène. Un gène prend pour valeur l’une parmi celles possibles : ces valeurs sont les allèles. Un chromosome est une suite de gènes et il décrit complètement un individu.

Chaque individu est représenté par un ensemble de chromosomes, et une population est un ensemble d’individus.

Une itération de l’algorithme est désignée par une « génération ».

Le codage se base sur deux notions importantes : le génotype et le phénotype.

Un génotype représente l’ensemble des valeurs des gènes d’un chromosome.

Un phénotype, c’est la représentation de la solution du problème qui traduit les données contenues dans le génotype

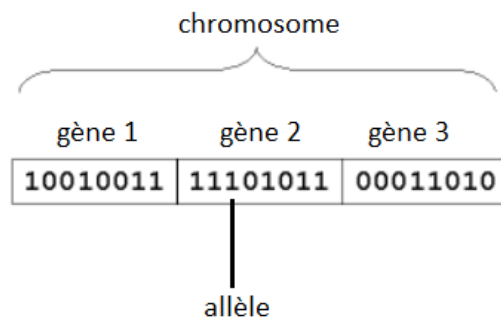


Figure 2.1 - Composition d'un chromosome

Il y a plusieurs types de codage, nous allons citer les plus utilisés.

#### Codage binaire

Les allèles possibles dans un codage binaire sont {0 ;1}. Chaque gène est représenté par une chaîne de bits et un chromosome est représenté par des tableaux de gènes.

#### Codage réel

Dans le cas où on cherche l’optimum d’une fonction réelle, le codage binaire présente quelques difficultés : les chromosomes binaires doivent être convertis en réels à chaque évaluation.

Une solution est de représenter tout simplement l’ensemble des variables par un vecteur  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , où chaque  $x_i$  est un réel.

#### 3.4.7.1.2 Les opérateurs

La recherche de la solution optimale est réglée par trois opérateurs : la sélection, la mutation et le croisement.

La méthode débute par l’initialisation aléatoire d’une population  $P$  de  $N$  individus. La population évolue sur plusieurs générations. A chaque génération  $g$ , les individus de la population  $P(g)$  sont évalués et les plus adaptés sont autorisés par l’opérateur sélection à avoir un grand nombre de descendants.

#### 3.4.7.1.3 L’opérateur sélection

La sélection consiste à choisir les individus qui vont contribuer à générer la nouvelle population. Elle doit favoriser les individus les plus performants à se reproduire le plus souvent. Une mise en œuvre de cet opérateur permet de donner à chaque individu une probabilité d’avoir un descendant dans la génération suivante proportionnelle à sa performance. L’opérateur de sélection est appliqué autant de fois que nécessaire pour compléter la nouvelle population.

On trouve dans la littérature plusieurs procédures de sélection, dont les plus connues :

- la roulette
- la sélection par rang
- la sélection par tournoi
- l’élitisme

Une brève présentation de ces méthodes est donnée dans le paragraphe suivant.

Sélection par roulette (Hajji, 2003), (Bouallagui, 2006), (Alliot, et al., 2005), (Hedible, 2000)

La sélection des individus par le système de la roulette s’inspire des roues de loterie. Elle s’effectue suivant une loi de probabilité uniforme proportionnelle à la performance de chaque individu.

La performance d’un individu est mesurée par le rapport de la fonction objectif  $f_i$  de l’individu considéré sur la somme des valeurs objectives de tous les individus de la population actuelle :

$$P_i = \frac{f_i}{\sum f_j}$$

Une roue de loterie est divisée en  $N$  secteurs de surface proportionnelle à la probabilité de sélection. Elle est lancée autant de fois qu’il y a d’individus, et à chaque coup, l’individu désigné par l’aiguille est sélectionné pour participer à la nouvelle population.

Sélection par rang (Bouallagui, 2006)

La sélection par roulette rencontre des problèmes lorsque la valeur d'adaptation des chromosomes varie énormément. Si la meilleure fonction d'évaluation d'un chromosome représente par exemple 90% de la roulette alors les autres chromosomes auront très peu de chance d'être sélectionnés et on arriverait à une stagnation de l'évolution.

La sélection par rang trie d'abord la population selon la valeur de la fonction objectif. Ensuite, chaque chromosome se voit associé un rang en fonction de sa position. Ainsi le plus mauvais chromosome aura le rang « 1 », le suivant « 2 », et ainsi de suite jusqu'au meilleur chromosome qui aura le rang « N » (pour une population de N chromosomes).

Le tableau suivant fournit un exemple de sélection par rang.

Chromosomes	1	2	3	4	5	6	Total
Probabilités initiales	89 %	5 %	1 %	4 %	3 %	2 %	100 %
Rang	6	5	1	4	3	2	21
Probabilités finales	29 %	24 %	5 %	19 %	14 %	9 %	

Figure 2.2 - Sélection par rang

Sélection par tournoi (Hajji, 2003), (Bouallagui, 2006)

Un nombre p d’individus est sélectionné parmi les N individus de la population. Le meilleur, c’est-à-dire celui dont la fonction objective est la plus élevée, est sélectionné. Ce procédé est répété jusqu’à obtenir N individus.

L’élitisme (Bouallagui, 2006), (Amedee, et al., 2004)

Cette méthode consiste à conserver les meilleurs individus à chaque génération.

Ainsi, après chaque évaluation de la performance des individus à une génération g donnée, la population est triée de manière décroissante en fonction des valeurs de la fonction objectif et le meilleur ou les N meilleurs individus de la génération précédente (g-1) sont réintroduits dans la nouvelle population.

3.4.7.1.4 L’opérateur croisement

Les individus sélectionnés sont introduits dans le bassin de reproduction pour subir des transformations de brassage, de recombinaison et de variations des caractères héréditaires pour former des descendants potentiels.

Les principaux opérateurs de transformation sont le croisement et la mutation.

Le croisement (crossover) a pour but d'enrichir la diversité de la population en manipulant la structure des chromosomes. L’opération nécessite deux chromosomes parents et génère deux chromosomes enfants. A travers cette reproduction, les chromosomes enfants héritent des parties du patrimoine génétique de leurs parents.

Son rôle fondamental est la recombinaison des informations présentes dans le patrimoine génétique de la population. Il est appliqué après l’opérateur sélection.

Cet opérateur se produit selon une probabilité  $P_c$  fixée par l’utilisateur selon le problème à optimiser.

Il existe plusieurs opérateurs de croisement : croisement en un point, croisement en plusieurs points et croisement uniforme.

### Croisement en un point

Pour chaque couple, un point de croisement est choisi au hasard. Les composantes situées à gauche de ce point sont conservées et celles à droite sont échangées entre les deux individus. Les enfants ainsi constitués sont placés dans la population suivante.

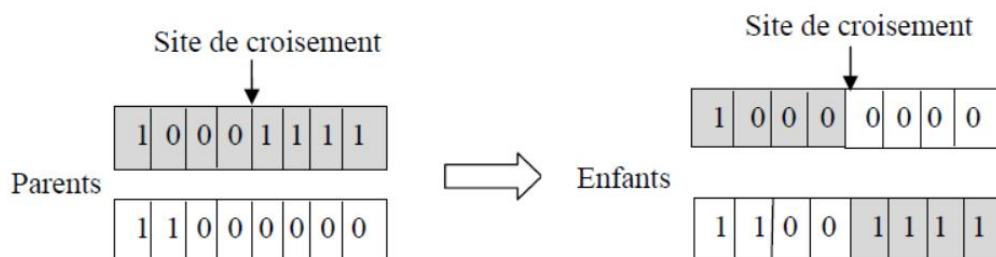


Figure 2.3 - Croisement en un point

### Croisement en plusieurs points

Le croisement précédent peut être généralisé en croisement k-points de coupe générant k+1 sous chaînes pour chaque chromosome. Les deux chromosomes fils sont obtenus par concaténation des sous chaînes en alternant les parties venant de chaque parent.

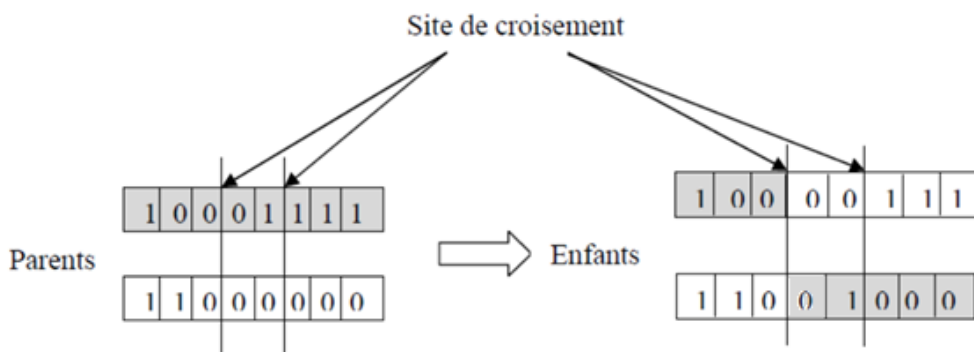


Figure 2.4 - Croisement en deux points

### Croisement uniforme

Il opère à l’aide d’un masque initialisé aléatoirement, possédant le même nombre de gènes, pour décider de la transmission de la valeur de l’allèle à l’un ou l’autre des descendants. Le premier enfant est créé en prenant les gènes du premier parent lorsque le gène du masque est 1 et ceux du deuxième parent lorsque le gène du masque est 0.

Parent 1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
Parent 2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
Masque	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
Enfant 1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
Enfant 2	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0

Figure 2.5 - Croisement uniforme

### 3.4.7.1.5 L’opérateur mutation

La mutation revient à modifier aléatoirement un gène avec une probabilité  $P_m$ , préalablement fixée et assez faible. Elle constitue un opérateur de recherche secondaire qui favorise l’apparition de nouveaux génotypes.

En effet, il arrive parfois que des informations importantes contenues dans les gènes disparaissent au cours du croisement, le rôle essentiel de la mutation est de remédier à ce type de dégénérescence.

La probabilité de la mutation selon Backer est donnée par (Hajji, 2003)

$$p_m = \frac{1}{L_c}$$

$L_c$  : longueur du chromosome

Cela revient à dire qu’en moyenne un allèle par chromosome est muté.

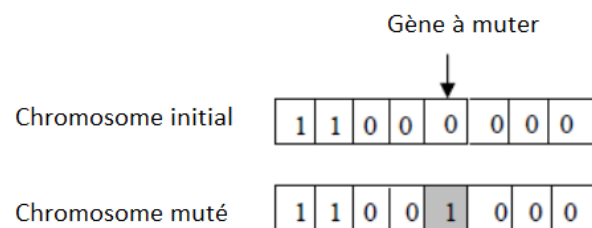


Figure 2.6 - Mutation d’un gène

### 3.4.7.1.6 Critères d’arrêt

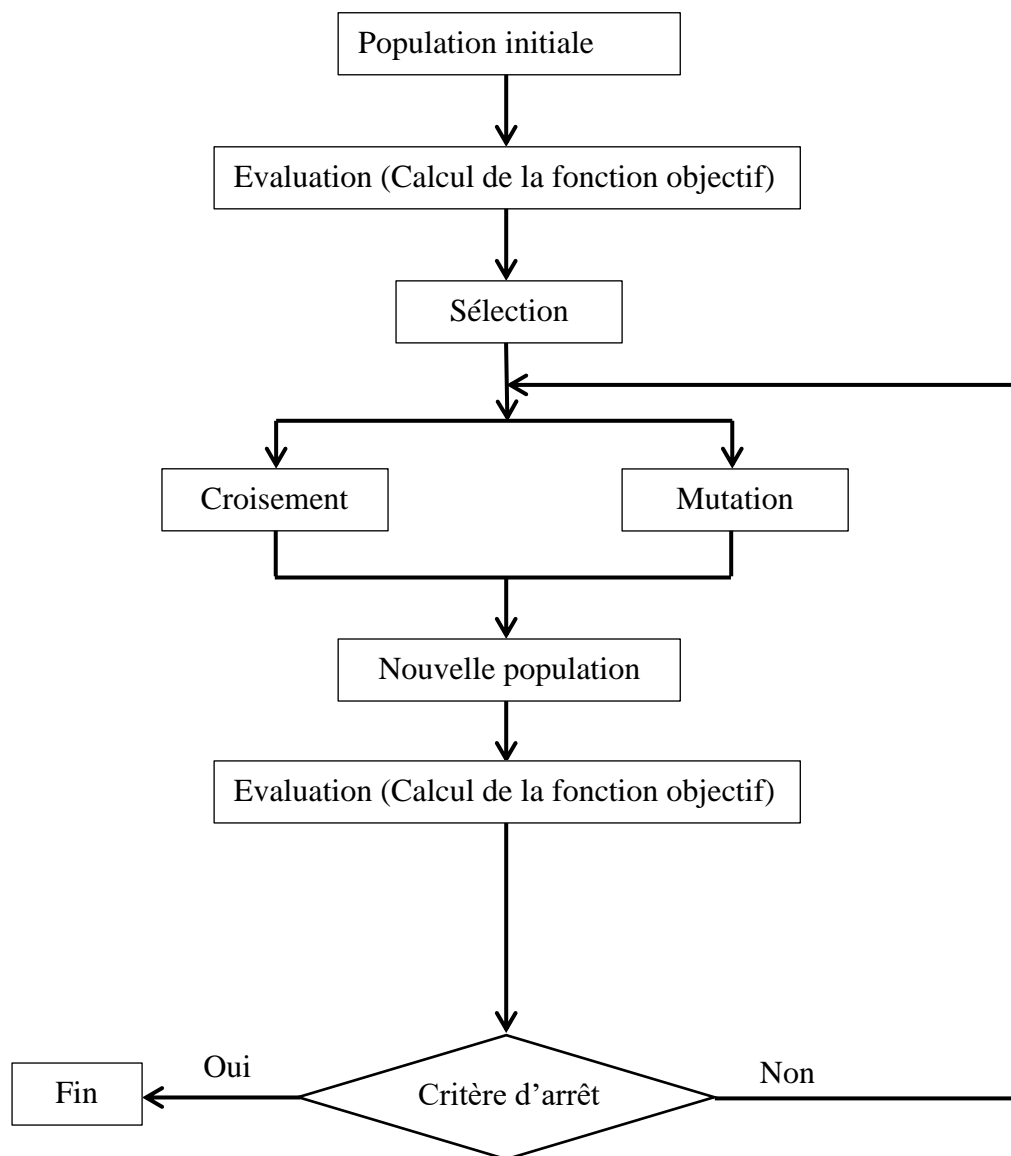
Les critères d’arrêt de l’algorithme peuvent être l’un des suivants :

- nombre maximal de générations
- temps maximal écoulé
- convergence des bits (95% de la population partage la même valeur)

### 3.4.7.1.7 Fonctionnement de l’algorithme génétique

1. Initialisation de la population initiale  $P_0$
2. Evaluation des chromosomes de la population  $P_i$
3. Sélection des chromosomes parents
4. Croisement deux à deux des chromosomes sélectionnés
5. Mutation opérée aléatoirement sur un chromosome
6. Génération de la nouvelle population  $P_{i+1}$
7. Répéter le processus tant que le critère d’arrêt n’est pas satisfait

Organigramme de fonctionnement des algorithmes génétiques



### 3.5 Optimisation fiabiliste

Le terme « fiabilité » est défini, selon la norme AFNOR (NF X50-120, 1988), par « l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données, pendant une durée donnée... le terme est aussi utilisé comme caractéristique désignant une probabilité de succès ou un pourcentage de succès » (Lemaire, 2009), (Aoues, 2012).

La fiabilité d'un système caractérise donc son aptitude à fonctionner sans défaillance.

Chaque mode de défaillance peut s'écrire sous une forme mathématique appelée fonction d'état limite. Cette fonction contient deux types de variables (Aoues, 2012):

- les variables de conception (dimensions géométriques, caractéristiques des matériaux, etc.) qui sont des paramètres déterministes définissant l'état du système
- les variables aléatoires représentant les incertitudes. Elles interviennent dans la description des modes de défaillance. Chacune est définie par sa loi de probabilité et associée en général une moyenne et un écart-type.

Le principe de la méthode consiste à minimiser le coût de la structure tout en vérifiant que sa probabilité de défaillance reste inférieure à une probabilité de défaillance admissible préalablement définie. Il existe plusieurs approches pour le calcul de la probabilité de défaillance :

- Méthodes de simulation (par ex, méthode Monte Carlo)
- Méthodes d'approximation (premier ordre FORM, second ordre SORM)

Les références consultées (Al-Harthy, et al., 1997), (Barakat, et al., 2004), (Barakat, et al., 2003) utilisent les méthodes d'approximation du premier ou du second ordre.

Ces méthodes sont basées sur la recherche d'un point, dit point de conception ou point de défaillance le plus probable.

Les états limites (modes de défaillance) de la structure sont d'abord déterminés ; et puis un indice de fiabilité est défini comme étant une mesure géométrique de l'écart entre l'état moyen de la structure et son état de défaillance. Dans l'espace normé, il s'agit de la distance entre le point de conception et l'origine de l'espace. Plus l'indice de fiabilité est élevé, plus la probabilité de défaillance est faible et par conséquent, plus la structure est fiable.

### 3.6 Optimisation multi-objectif

Dans un problème mono-objectif, il existe une seule fonction objectif bien définie pour laquelle on fait évoluer le système dans une certaine direction afin d'aboutir à une unique solution optimale.

Cependant, dans certains cas, on est obligé de satisfaire plusieurs critères simultanément. On est ramené alors à un problème d'optimisation multi-objectif.

Le caractère multi-objectif du problème est donné par l'existence d'objectifs contradictoires signifiant que l'amélioration d'un critère implique la détérioration d'un autre. Ce conflit entre les objectifs est souvent rencontré lorsque l'on cherche à obtenir les meilleures performances



possibles pour un faible coût. Plus une structure sera complexe et performante plus son coût sera élevé. L'optimisation multi-objectif consiste alors à rechercher l'ensemble des solutions qui correspondent aux meilleurs compromis entre les objectifs de sécurité à maximiser et de coût à minimiser.

Dans ce cas, deux possibilités d'agir sont possibles :

- soit le problème est transformé en un problème monocritère (Belloufi, 2008) ;
- soit l'ensemble des meilleures solutions dites « non dominées » au sens Pareto est recherché

Une des méthodes de transformation d'un problème multi-objectif à un problème mono-objectif est la méthode de pondération.

### 3.6.1. Méthode de pondération

La méthode consiste à affecter à chaque fonction objectif un coefficient de pondération appelé facteur de poids  $w_i$ .

Le problème revient donc à résoudre la somme pondérée des fonctions objectif.

Une autre alternative pour traiter les problèmes multi-objectif est de trouver l'ensemble des solutions non dominées (solutions dites Pareto).

### 3.6.2. Ensemble des solutions Pareto

Le concept de l'optimalité de Pareto a été formulé par V. Pareto en 1986.

Une solution réalisable  $x^* \in D$  est Pareto optimale (ou efficace, ou encore non dominée) si et seulement s'il n'existe pas de solution  $x \in D$  telle que  $x$  domine  $x^*$ .

On dit qu'une solution  $y$  domine une solution  $z$ , dans le cas de minimisation de la fonction objectif, si et seulement si

$$\forall i \in [1, \dots, n], \quad f_i(y) \leq f_i(z)$$

Ainsi, toute solution de l'ensemble Pareto peut être considérée comme optimale puisqu' aucune amélioration ne peut être faite sur un objectif sans dégrader la valeur relative à un autre objectif. Ces solutions forment le front Pareto.

#### 4. Synthèse des travaux effectués

L'optimisation du dimensionnement des structures a tant retenu l'attention des chercheurs, et fait le sujet de plusieurs travaux scientifiques.

Dans le présent paragraphe, nous exposons une revue de littérature à propos des approches abordées pour l'optimisation des ponts en béton précontraint, ainsi que les difficultés qui en surgissent, et finalement, les résultats obtenus.

Nous remarquons, d'après les nombreuses publications, que l'optimisation des ponts en béton précontraint est divisée en deux parties :

- Optimisation de la section en béton : les variables de conception étant les dimensions géométriques.
- Optimisation de la force de précontrainte : la configuration du câble ainsi que son excentricité constituent, dans ce cas, les variables de conception.

Bien que les méthodes d'optimisation employées pour la résolution de ce sujet, sont bien divergentes, la formulation du problème demeure la même :

**Fonction objectif :** - Réduction du coût ; volume de la structure en béton et/ou la quantité d'acier précontraint et passif  
- Ou bien réduction de la force de précontrainte

**Contraintes :** - Contraintes géométriques sur les dimensions de la section  
- Contraintes sur la configuration du câble (*excentricité maximale, courbure*)  
- Vérification à l'Etat Limite de Service (*contraintes admissibles à l'état initial, contraintes admissibles à l'état final, flèche, fissuration*)  
- Vérification à l'Etat Limite Ultime (*moments fléchissants, efforts tranchants*)

**Variables :** - Dimensions de la section du béton  
- Propriétés du câble de précontrainte (*excentricité, courbure, nombre de tendons, configuration des tendons*)  
- Quantité d'acier passif  
- Et parfois, la résistance de compression du béton

Les principales méthodes d'optimisation citées dans ce paragraphe sont décrites et détaillées dans la section 3 intitulée « Méthodes d'optimisation impliquées dans le dimensionnement des ouvrages ».

Les méthodes d'optimisation appliquées au dimensionnement des structures sont énumérées et expliquées brièvement par Hare et al. (Hare, et al., 2013) et Saka et al. (Saka, et al., 2016). Nous citons parmi elles :

- la programmation linéaire par Simplexe
- les algorithmes génétiques
- le recuit simulé
- la recherche par harmonie
- les évolutions différentielles et opérationnelles
- l'optimisation fiabiliste

#### **4.1 Résolution par programmation linéaire**

Les méthodes déterministes basées sur le calcul du gradient sont rarement utilisées dans l'optimisation des structures. L'obtention du gradient dans des problèmes complexes peut s'avérer très difficile. Hare et al. (Hare, et al., 2013) expliquent l'efficacité des méthodes heuristiques et métaheuristiques qui n'utilisent pas le gradient pour trouver le dimensionnement optimal des structures.

Les premières études effectuées utilisent la programmation linéaire pour la résolution du problème d'optimisation. En effet, les chercheurs, en totalité, admettent la forme non linéaire du problème du dimensionnement optimal d'un pont précontraint. C'est pourquoi, chacun propose une approximation différente pour linéariser les contraintes, et transformer le problème en un programme linéaire, capable d'être résolu par la méthode du Simplexe.

Grierson et al. (Grierson, 1991) démontrent l'efficacité de la méthode du Simplexe pour l'optimisation des structures en béton armé, en considérant la quantité d'armatures passives comme fonction objectif à minimiser. Les contraintes étant définies par les vérifications de la structure aux états limites ultimes, les relations entre les variables sont toutes linéaires. La méthode du Simplexe présente dans ce cas un excellent choix.

Quiroga et al. (Samartin Quiroga, et al., 1991) et Hernandez et al. (Hernandez, et al., 2010) utilisent également la méthode du Simplexe pour l'optimisation de la force de précontrainte et de l'excentricité du câble des tabliers précontraints des ponts, en supposant que les dimensions de la section en béton sont connues et constantes, ce qui rend la résolution très simple. Les relations entre les variables étant linéaires, les résultats sont satisfaisants. Toutefois, l'optimisation des dimensions de la section en béton, qui nous est primordiale et fait l'objet de notre étude, n'y est pas abordée.

Erbatur et al. (Erbatur, et al., 1992) abordent le problème d'optimisation des dimensions d'une poutre précontrainte par la méthode du Simplexe. La poutre est isostatique, de section en I, en T ou en double T et à inertie constante. La section du béton est définie par deux variables. Les dimensions restantes sont liées à ces deux dernières par des rapports fixes. La

transformation des fonctions contraintes en relation linéaires devient alors relativement simple et applicable.

Fereig (Fereig, 1994) a montré que l'application de la méthode du Simplexe au problème du choix économique de la section des poutres préfabriquées précontraintes d'un pont et de leur espacement optimal, choisis parmi des sections préalablement définies, nécessite quelques simplifications et transformations des contraintes. Les poutres sont supposées simplement appuyées, ce qui élimine les moments hyperstatiques de précontrainte et facilite l'optimisation du câble.

Les relations entre les variables n'étant pas linéaires, l'auteur procède à une transformation des contraintes en introduisant une variable  $R = 1/P$  ( $P$  force de précontrainte). Toutefois, cette transformation ne conduit pas à la linéarisation de toutes les contraintes ; pour cela, une linéarisation par morceaux est appliquée dans laquelle chaque équation non linéaire est transformée en deux équations linéaires. Notons que cette approximation n'est valable que si le degré des équations est relativement faible.

(Kirsch, 1973) utilise la programmation linéaire pour la résolution du dimensionnement de la section d'une poutre précontrainte hyperstatique à inertie constante. Il applique des transformations de linéarisation spécifiques qui ne sont valables que si la hauteur est constante tout le long de la poutre, et si aucune contrainte n'est imposée sur la forme du câble.

Dans une recherche ultérieure, Kirsh (Kirsch, 1997) propose une optimisation à deux niveaux pour résoudre le problème du dimensionnement des poutres précontraintes hyperstatiques à inertie variable avec des contraintes imposées sur la configuration du câble.

Un problème d'optimisation à deux niveaux est un problème dont les contraintes et/ou la fonction objectif dépendent des solutions optimales d'un autre problème.

Ce découplage permet de simplifier le problème, en pratiquant la méthode du Simplexe au premier niveau pour l'étude de la configuration optimale du câble et de la force de précontrainte, et un programme non linéaire simple au second niveau pour le dimensionnement optimal de la section en béton.

La résolution du problème de l'optimisation non linéaire au second niveau se fait en premier lieu. Les dimensions optimales obtenues de la section en béton sont utilisées pour résoudre l'optimisation du câble au premier niveau par le Simplexe.

## **4.2 Résolution par méthodes métaheuristiques**

Afin de pallier les problèmes d'approximation et de linéarisation des contraintes, et dans le but de résoudre des cas plus complexes, des études poussées considèrent les méthodes métaheuristiques. Celles-ci sont inspirées des processus naturels et sont basées sur une optimisation stochastique. Elles permettent de pratiquer l'optimisation dimensionnelle des ponts hyperstatiques précontraints à inertie variable.

#### 4.2.1. Résolution par l'algorithme génétique

L'algorithme génétique est classé parmi les méthodes métaheuristiques les plus utilisées dans l'optimisation du dimensionnement des structures précontraintes.

(Arfiadi, et al., 2015) appliquent l'algorithme génétique avec variables réelles pour la recherche optimale des dimensions d'une poutre hyperstatique à inertie constante en réduisant la force de précontrainte. L'interdépendance des dimensions de la structure et de la force de précontrainte constitue la principale difficulté dans la résolution de ce problème. En utilisant les opérateurs de mutation et de croisement, les résultats sont jugés satisfaisant sous les conditions des contraintes admissibles du béton à l'état initial et à l'état final et des conditions sur les dimensions de la section.

(El Semelawy, et al., 2012) abordent le même problème en ajoutant le nombre et le diamètre des tendons comme variables discrètes. Ils démontrent que la méthode déterministe SQP (programmation quadratique séquentielle) risque le plus souvent d'être piégée dans un optimum local et n'aboutit pas à la solution globale. En effet, le résultat obtenu par cette méthode dépend largement de la solution initiale adoptée ; si cette dernière est éloignée de la solution optimale, la méthode risque de ne pas converger. L'obtention d'un optimum local par les méthodes déterministes dépend de la convexité du domaine admissible délimité par les contraintes ; le résultat n'est global que si le domaine admissible est convexe.

Les auteurs montrent que cette difficulté est surmontée par la méthode de l'algorithme génétique.

(Aydm, et al., 2010) appliquent l'algorithme génétique pour le dimensionnement de la section en I du béton et des câbles précontraints des poutres préfabriquées formant un pont existant en Turquie. Les variables en jeu sont toutes discrètes. En effet, les auteurs affirment que si les dimensions de la section en béton avaient été choisies continues, il serait impossible de trouver les dimensions optimales sous forme de nombres entiers. La solution obtenue présente une économie de 28% par rapport à la structure existante.

(Govindaraj, et al., 2005) démontrent que l'application de l'algorithme génétique à variables discrètes permet de trouver la configuration détaillée optimale des armatures passives d'une poutre en béton armé. Cette méthode a permis une réduction du coût de 11% par rapport aux méthodes déterministes (Grierson, 1991). Pour simplifier la résolution du problème, une fonction de pénalité a été appliquée afin de transformer le problème contraint en un problème d'optimisation sans contraintes. Les auteurs concluent que les algorithmes génétiques apportent une meilleure optimisation économique pour le dimensionnement des poutres en béton armé.

#### 4.2.2. Résolution par le recuit simulé

La méthode la plus utilisée succédant à l’algorithme génétique est le recuit simulé, détaillée dans la section 3.4.1 de ce chapitre.

(Marti, et al., 2010) et (Marti, et al., 2013) utilisent le recuit simulé, à variables discrètes, pour trouver les dimensions optimales des poutres précontraintes préfabriquées formant un pont. Un problème similaire est abordé par (Kirsch, 1972) et résolu par la méthode du Simplexe. Dans ce dernier cas, le dimensionnement de la section et des câbles précontraints est défini par 6 variables de conception, dont deux décrivant la géométrie de la poutre. Les autres dimensions étant liées à ces dernières par des rapports fixes. Cependant, le recuit simulé met en jeu 59 variables discrètes dont 7 dédiées aux dimensions de la section. Cette augmentation du nombre de variables permet une variation simultanée de toutes les dimensions et conduit à un raffinement de la section et certainement à une solution plus économique.

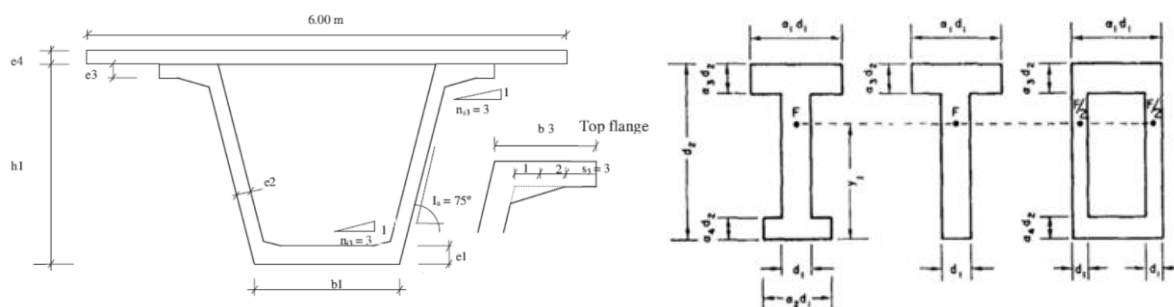


Figure 2.7 - a) Sept variables géométriques dans le recuit simulé b) Deux variables géométriques dans le Simplexe

(Marti, et al., 2010), (Marti, et al., 2013) et (Marti, et al., 2017) concluent que les résultats obtenus par le recuit simulé sont plus économiques que ceux obtenus par d’autres méthodes métaheuristiques appliquées (Threshold accepting). Il faudra noter que la difficulté principale des méthodes métaheuristiques réside dans la nécessité d’un grand nombre d’évaluations de la fonction objectif et des vérifications des contraintes à chaque itération ; ainsi dans (Marti, et al., 2017), le recuit simulé est pratiqué avec 5000 itérations.

(Martinez-Martin, et al., 2012) démontrent l’efficacité du recuit simulé aboutissant à une meilleure amélioration de la fonction objectif. Cette méthode est aussi comparée à la méthode heuristique de recherche locale pour l’optimisation du coût des piles en béton armé d’un pont, de la congestion du ferrailage et des émissions de CO<sub>2</sub>. Le problème met en jeu 110 variables discrètes et continues.

#### 4.2.3. Résolution par recherche harmonie

(Garcia-Segura, et al., 2016) proposent l’application de recherche par harmonie à variables discrètes, pour l’optimisation du dimensionnement d’un pont précontraint en réduisant le taux de CO<sub>2</sub> émis et en maximisant le facteur de sécurité global. Une réduction du coût du béton de

14%, et du taux de CO<sub>2</sub> de 16% comparées aux les valeurs moyennes données par les spécifications du pont étudié, sont notées.

#### 4.2.4. Résolution par évolution opérationnelle

(Shohel, et al., 2013) présentent une opération évolutionnaire, EVOP, pour réduire le coût d'un pont précontraint hyperstatique. Cette méthode permet la mise en jeu de variables discrètes, continues et entières dans un même problème. Les résultats obtenus par EVOP montrent une réduction du coût de 36% par rapport à un pont similaire déjà construit.

#### 4.2.5. Résolution par évolution différentielle

(Quaranta, et al., 2014) mettent en relief la concavité du domaine des contraintes non linéaires suscitant la méthode à converger vers de nombreux optimums locaux. Le recours à une optimisation par évolution différentielle à variables discrètes permet de franchir cette difficulté. Les résultats du dimensionnement optimal d'une poutre précontrainte isostatique sont comparés à ceux obtenus par l'algorithme génétique et par l'optimisation par essais particuliers. L'évolution différentielle présente une amélioration de 2,5%.

### 4.3 Résolution par optimisation fiabiliste

(Barakat, et al., 2003) appliquent l'optimisation fiabiliste mono-objectif au premier ordre (SORBO) pour le dimensionnement d'une poutre précontrainte isostatique. Le problème vise à réduire le coût du béton, du coffrage, des armatures de précontrainte et de l'acier passif. Les variables aléatoires mises en jeu sont : le chargement, les propriétés des matériaux, la force de précontrainte à l'état initial et final. Les variables de conception sont les dimensions géométriques de la section du béton et la quantité d'acier de précontrainte. Les états limites à vérifier (vérifications ELU et ELS) sont formulés en termes d'indice de fiabilité et ajoutés aux contraintes du problème d'optimisation.

Ils concluent que l'approche fiabiliste présente une réduction importante du coût par rapport aux méthodes déterministes. Toutefois, des recherches plus poussées sont nécessaires pour inclure le facteur temps dans l'optimisation fiabiliste, du fait que plusieurs variables telles que la résistance du béton, la force de précontrainte, etc. varient avec le temps.

Dans une publication ultérieure, (Barakat, et al., 2004) utilisent l'optimisation fiabiliste au premier ordre pour résoudre le même problème mais en considérant dans un premier temps, deux fonctions objectif (minimiser le coût de la structure et maximiser l'indice de fiabilité système), et dans un second temps, trois fonctions objectif (minimiser le coût de la structure, maximiser l'indice de fiabilité système et maximiser l'indice de fiabilité relatif à la résistance ultime à la flexion).

L'analyse des résultats est effectuée en s'aidant de la méthode de Pareto.

L'optimisation tri-objectif s'avère plus difficile et coûteuse en temps de calcul.

(Al-Harthy, et al., 1997) s'appuient sur l'optimisation fiabiliste pour la réduction de la quantité d'acier de précontrainte des poutres précontraintes isostatiques en forme rectangulaire, Té et double Té. Les dimensions des poutres sont supposées connues et constantes. Les indices de fiabilité introduits sont relatifs aux états limites de contraintes initiaux et finaux.

Nous remarquons que les cas traités par l'optimisation fiabiliste des poutres précontraintes sont relativement simples à comparer avec les algorithmes génétiques et le recuit simulé dans le cas du dimensionnement des poutres précontraintes. En effet, les méthodes d'optimisation fiabiliste adoptées n'incorporent pas des variables discrètes telles que le nombre, l'espacement et le diamètre de tendons, ainsi que la configuration du câble.

#### **4.4 Synthèse générale sur les travaux de recherche effectués**

Un récapitulatif de l'efficacité des méthodes d'optimisation dans la résolution du problème de dimensionnement des ouvrages est donné dans ce qui suit.

##### **4.4.1. Programmation linéaire**

Après analyse des travaux effectués par les chercheurs sur l'application de la programmation linéaire au dimensionnement optimal des ponts précontraints, nous pouvons conclure que la méthode du Simplexe est très efficace pour :

- l'optimisation des poutres en béton armé,
- l'optimisation de la force de précontrainte des ponts à condition que les dimensions de la section soient fixes.

En revanche, pour la résolution du dimensionnement optimal par le Simplexe, des transformations de linéarisation sont indispensables. Ces transformations sont valables sous des conditions spécifiques à chaque problème. Ceci limite l'application de la programmation linéaire à des cas simples et influe sur la qualité de la solution optimale.

##### **4.4.2. Méthodes métaheuristiques**

Les diverses références consultées confirment que les méthodes métaheuristiques ont réussi à résoudre des problèmes de dimensionnement des structures plus complexes que les problèmes résolus par les méthodes déterministes.

L'ensemble des méthodes métaheuristiques partagent des avantages et des inconvénients communs.

##### Avantages

- Elles peuvent incorporer des variables discrètes, continues et entières en même temps, par opposition aux méthodes déterministes qui ne traitent que des variables continues. Dans ce dernier cas, les valeurs qui doivent être approximées par l'entier le plus proche, et conduit à une altération de la solution optimale.



- Elles ne requièrent pas de solution de départ ; alors que les méthodes déterministes nécessitent une solution initiale et produisent des solutions optimales largement dépendantes de la qualité de la solution initiale. Ainsi, si la solution initiale est proche d’un optimum local, la méthode risque de converger vers ce dernier.

#### Inconvénients

- La résolution nécessite un grand nombre d’évaluations de la fonction objectif ; comme par exemple dans Marti et al. (Marti, et al., 2017), le recuit simulé est appliqué avec 5000 itérations.
- Le temps d’exécution peut devenir très important.

#### 4.4.3. Optimisation fiabiliste

La principale difficulté rencontrée dans l’optimisation fiabiliste des structures est la convergence prématurée vers d’optimums locaux. La forte non linéarité des contraintes conduit à la concavité du domaine admissible et par suite à la présence de multiples optimums locaux. L’optimisation devrait être répétée plusieurs fois en partant de différentes solutions initiales, l’optimum global est atteint lorsque la même solution finale est obtenue.

Afin de pallier ce problème, plusieurs chercheurs (Rojas, 2008) proposent de combiner les algorithmes métaheuristiques à l’optimisation fiabiliste afin d’aboutir à un optimum global. Les méthodes métaheuristiques remplaceront les méthodes FORBO et SORBO pour la recherche du point de conception.

#### 4.4.4. Choix de la méthode adoptée

Suite à l’état de l’art présenté, nous distinguons les différentes difficultés affrontées par les chercheurs dans l’optimisation des ponts :

- le grand nombre de variables de conception
- les différentes natures des variables : continues, discrètes et entières
- la non linéarité et la discontinuité des contraintes
- la possibilité de convergence vers de nombreux optimums locaux
- le choix de la fonction objectif

Afin de réduire les difficultés et d’atténuer les complexités rencontrées dans l’application des méthodes d’optimisation, une approche de dimensionnement analytique bien adaptée à un algorithme d’optimisation s’avère nécessaire, elle est proposée dans le présent travail de thèse.

Parmi les méthodes exposées, l’algorithme génétique s’avère une technique bien efficace et largement utilisée dans l’optimisation du dimensionnement des ouvrages. Elle sera employée par la suite dans l’application de l’approche analytique présentée.

# Chapitre 3

---

## Nouvelle Règle des Pivots

---

### 1. Introduction

En béton armé, la règle des pivots introduite par l'Eurocode 2 pour le dimensionnement d'une section impose des limitations sur les déformations au niveau du béton et des armatures passives. En effet, en se plaçant au niveau du pivot A, la section est entièrement tendue et la limite de déformation dans les armatures passives  $\varepsilon_{ud}$  est atteinte ; en se déplaçant vers le pivot B, la section se comprime jusqu'à atteindre la limite de déformation au niveau du béton comprimé  $\varepsilon_{cu}$  ; finalement, la rotation autour du pivot C conduit à un état de compression pure  $\varepsilon_c$ . En pivotant autour de ces 3 pivots, le diagramme d'interaction de la section à l'état limite ultime est obtenu.

Dans ce chapitre, une nouvelle règle des pivots est proposée pour le dimensionnement d'une poutre en béton totalement et partiellement précontrainte selon l'Eurocode 2.

Cette nouvelle règle introduite en béton précontraint est inspirée de la règle des pivots en béton armé, mais avec des limitations sur les contraintes et non sur les déformations. La méthode de résolution développée et exposée dans ce chapitre permet le dimensionnement cohérent ainsi que la formulation de la condition de coffrage et des valeurs minimale et maximale de précontrainte pour une poutre totalement et partiellement précontrainte ; pour ceci, la limitation de l'ouverture des fissures imposée par l'Eurocode 2 est transformée en une limitation des contraintes au niveau des aciers passifs par une corrélation détaillée. Suite à la résolution analytique du dimensionnement, le domaine admissible des valeurs de précontrainte, qui constitue une extension de la règle des pivots, est tracé ; l'interprétation de ce graphe est essentielle pour le calcul de la force de précontrainte optimale avec et sans aciers passifs.

Dans ce chapitre également, une approche analytique pour la vérification de la section en flexion à l'état limite ultime cohérente à la nouvelle méthode développée est présentée, le diagramme d'interaction de la section est ainsi tracé selon la loi de comportement non linéaire. La résolution présentée est applicable pour une section de forme quelconque, notamment une section en té à talons ou en caisson.

Finalement, la section est vérifiée à l'effort tranchant selon l'annexe QQ de l'Eurocode 2. La limitation de contraintes présente dans cette annexe est transformée en une équation d'interaction normalisée adaptée à un calcul d'optimisation.

## **2. Méthode conventionnelle de résolution**

Le règlement français antérieur de conception et de calcul des structures précontraintes BPEL imposait des limitations systématiques sur les contraintes de traction et de compression sur les fibres extrêmes du béton sous toutes les combinaisons de l'état limite de service.

Ces limitations ont par la suite été remplacées dans l'Eurocode 2 par des limitations sur l'ouverture des fissures et sur les contraintes au niveau des armatures actives et passives selon l'état limite de service correspondant (quasi-permanent, fréquent ou caractéristique).

### **2.1 Limitations des contraintes aux états limites de service**

Les limites fixées par l'Eurocode dépendent des conditions environnantes à l'ouvrage, donc de la classe d'exposition selon le type d'agression (chlorures, carbonatation, gel dégel) et par degré de sévérité.

Les zones de la section les plus sensibles à la traction sont celles qui entourent les câbles, donc dans les sections d'enrobage. La section d'enrobage est délimitée par deux axes parallèles encadrant l'ensemble des armatures longitudinales de précontrainte et à une distance de celles-ci égale à l'enrobage permis. La limitation des tractions est évidemment plus stricte dans les sections d'enrobage.

Les limitations des contraintes sont données par l'Eurocode 1992-1-1 et l'Eurocode 1992-2 ainsi que les annexes nationales.

#### **2.1.1. Limite de compression**

La contrainte de compression dans le béton doit être limitée afin d'éviter la fissuration longitudinale ainsi que les niveaux élevés de fluage.

##### **Sous combinaison caractéristique :**

En l'absence de confinement des armatures, il convient de limiter la contrainte de compression dans les parties exposées à des environnements correspondants aux classes d'exposition XD, XF et XS, à  $k_1 f_{ck}$ , avec :

$$k_1 = 0,6$$

##### **Sous combinaison quasi-permanente :**

Afin de pouvoir utiliser les modèles de fluage linéaire, il est recommandé de limiter la contrainte de compression dans le béton à  $k_2 f_{ck}$ , avec :

$$k_2 = 0,45$$

##### **En phase de construction :**

La contrainte de compression doit être limitée à  $0,6 f_{ck}(t)$ .

## 2.1.2. Limite de traction

Dans le béton :

L'Eurocode ne précise pas des limitations de traction sur le béton, il existe néanmoins des limites sur l'ouverture des fissures.

Classe d'exposition	Eléments en béton armé et en béton précontraint sans armatures adhérentes	Eléments en béton précontraint à armatures adhérentes
	Combinaison quasi-permanente	Combinaison fréquente
X0, XC1	$w_{max} = 0,3mm$ Pas de limite en l'absence de conditions sur l'aspect	$w_{max} = 0,2mm$
XC2 à XC4	$w_{max} = 0,3mm$	$w_{max} = 0,2mm$ Décompression sous combinaison quasi-permanente
XD1 à XD3 XS1 à XS3		Décompression $\sigma_c > 0$

Tableau 3.1 - Limitations de l'ouverture des fissures selon l'EN 1992-2

La limite de décompression impose que le béton dans les sections d'enrobage reste comprimé sous combinaison de charges spécifiée.

En plus de ces limites à ne pas dépasser, il existe d'autres limites de traction qui nécessitent des vérifications complémentaires si elles sont dépassées :

- Un calcul en section fissurée est nécessaire si la limite de traction du béton est dépassée sous combinaison caractéristique.
- Le comportement de fatigue des câbles doit être vérifié si le béton tendu est négligé et le béton dans la zone d'enrobage des câbles se décomprime sous combinaison fréquente des charges.

Pratiquement, les ingénieurs se donnent des limites complémentaires, similaires à celles spécifiées par le BPEL, afin de limiter les multiples justifications de l'Eurocode, au prix d'une augmentation de la force de précontrainte nécessaire.

Les contraintes de traction dans les armatures doivent être limitées afin d'éviter un niveau de déformation ou de fissuration inacceptable. Pour cela, la contrainte de traction au niveau des armatures est limitée à  $k_3 f_{yk}$ , avec :

$$k_3 = 0,8$$

## 2.2 Dimensionnement en précontrainte totale

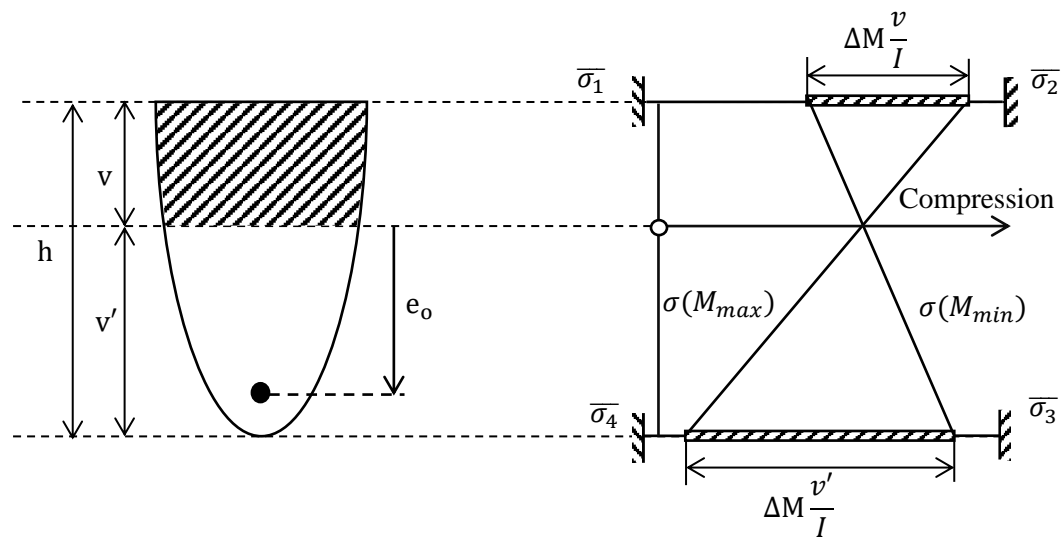


Figure 3.1 - Limitations des contraintes en béton précontraint

Un état limite de service est caractérisé par les valeurs extrêmes du moment et les critères de contrainte associés.

- $M_{\min}$  et  $M_{\max}$  respectivement les valeurs minimale et maximale du moment ;
- $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_2$  limites respectives de contrainte en fibre supérieure sous  $M_{\min}$  et  $M_{\max}$  ;
- $\bar{\sigma}_3$  et  $\bar{\sigma}_4$  limites respectives de contrainte en fibre inférieure sous  $M_{\min}$  et  $M_{\max}$  ;

Les conditions de respect des contraintes en fibres inférieure et supérieure, et en compression et traction, donnent les 4 inégalités fondamentales pour le dimensionnement d'une poutre précontrainte :

$$\bar{\sigma}_1 \leq \sigma_{\text{sup}}(M_{\min}) \leq \sigma_{\text{sup}}(M_{\max}) \leq \bar{\sigma}_2 \quad [3.1]$$

$$\bar{\sigma}_4 \leq \sigma_{\text{inf}}(M_{\max}) \leq \sigma_{\text{inf}}(M_{\min}) \leq \bar{\sigma}_3 \quad [3.2]$$

L'excentricité du câble est positive au-dessus de l'axe neutre, et négative en dessous.

Les contraintes sont positives en compression, et le moment positif comprime la fibre supérieure.

Contrainte à l'ordonnée  $y$  :

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + \frac{(P e_o + M) y}{I} \quad [3.3]$$

Les inégalités [3.1] et [3.2] peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\overline{\sigma}_1 I}{v} - M_{min} \leq \rho v' + e_o \leq \frac{\overline{\sigma}_2 I}{v} - M_{max} \quad [3.1]$$

$$\frac{\overline{\sigma}_4 I}{v'} + M_{max} \leq \rho v - e_o \leq \frac{\overline{\sigma}_3 I}{v'} + M_{min} \quad [3.2]$$

Il est important de prendre en compte les variations de la force de précontrainte quel que soit l'état limite. La précontrainte sera donc définie par une valeur de référence unique  $P_m$ , et pour chaque état limite, le coefficient  $\alpha$  est compris entre une valeur minimale et maximale.

$$\alpha_{min} P_m \leq \alpha P_m \leq \alpha_{max} P_m \quad [3.3]$$

Les inégalités fondamentales doivent être vérifiées pour toutes les valeurs de P comprises dans cet intervalle.

Les paramètres suivants sont définis :

$$\alpha_1 = \begin{cases} \text{si } \left( \frac{\overline{\sigma}_1 I}{v} - M_{min} \geq 0; \alpha_{min}; \alpha_{max} \right) \\ \alpha_1 = \text{si } \left( \frac{\overline{\sigma}_2 I}{v} - M_{max} \geq 0; \alpha_{max}; \alpha_{min} \right) \end{cases} \quad [3.4]$$

$$\alpha_3 = \begin{cases} \text{si } \left( \frac{\overline{\sigma}_3 I}{v'} + M_{min} \geq 0; \alpha_{max}; \alpha_{min} \right) \\ \alpha_4 = \text{si } \left( \frac{\overline{\sigma}_4 I}{v'} + M_{max} \geq 0; \alpha_{min}; \alpha_{max} \right) \end{cases}$$

En posant

$$m_1 = \frac{\frac{\overline{\sigma}_1 I}{v} - M_{min}}{\alpha_1} \quad m_2 = \frac{\frac{\overline{\sigma}_2 I}{v} - M_{max}}{\alpha_2} \quad [3.5]$$

$$m_3 = \frac{\frac{\overline{\sigma}_3 I}{v'} + M_{min}}{\alpha_3} \quad m_4 = \frac{\frac{\overline{\sigma}_4 I}{v'} + M_{max}}{\alpha_4}$$

Les inégalités fondamentales [3.1] et [3.2] s'écrivent

$$\text{Fibre supérieure :} \quad m_1 \leq P_m (\rho v' + e_o) \leq m_2 \quad [3.6]$$

$$\text{Fibre inférieure :} \quad m_4 \leq P_m (\rho v - e_o) \leq m_3 \quad [3.7]$$

En considérant plusieurs états limites simultanément, les inégalités deviennent

$$\text{Fibre supérieure :} \quad \text{Max}(m_1) \leq P_m (\rho v' + e_o) \leq \text{Min}(m_2) \quad [3.8]$$

$$\text{Fibre inférieure :} \quad \text{Max}(m_4) \leq P_m (\rho v - e_o) \leq \text{Min}(m_3) \quad [3.9]$$

Il convient alors de poser

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \text{Max} \left( \frac{\frac{\bar{\sigma}_1 I}{v} - M_{min}}{\alpha_1} \right) & m_2 &= \text{Min} \left( \frac{\frac{\bar{\sigma}_2 I}{v} - M_{max}}{\alpha_2} \right) \\
 m_3 &= \text{Min} \left( \frac{\frac{\bar{\sigma}_3 I}{v'} + M_{min}}{\alpha_3} \right) & m_4 &= \text{Max} \left( \frac{\frac{\bar{\sigma}_4 I}{v'} + M_{max}}{\alpha_4} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

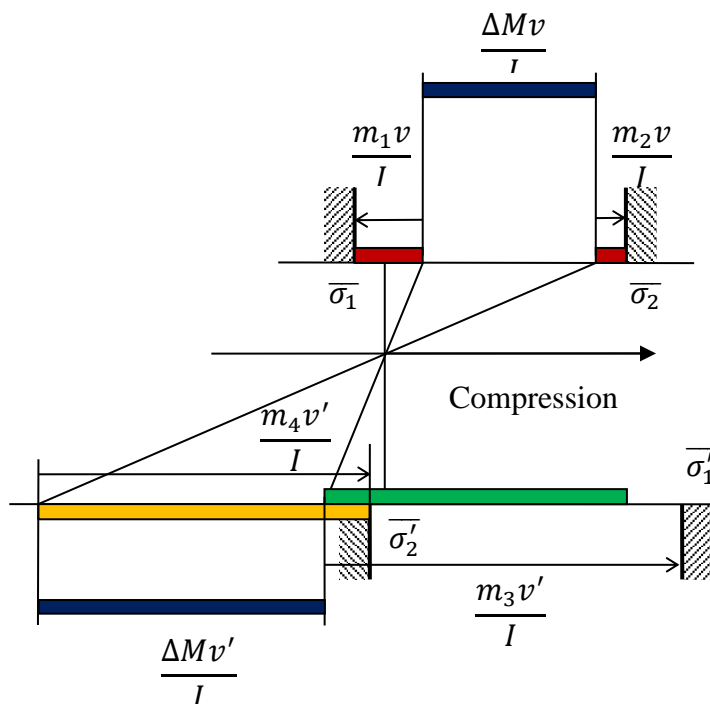


Figure 3.2 - Conditions de contraintes à respecter

### 2.2.1. Conditions de coffrage

En considérant les équations [3.6] et [3.7], deux conditions sont nécessaires pour qu'il existe une solution

$$m_1 \leq m_2 \quad m_4 \leq m_3 \tag{3.11}$$

Pour un seul état limite, ces deux conditions peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{I}{v} \geq \frac{\alpha_1 M_{max} - \alpha_2 M_{min}}{\alpha_1 \bar{\sigma}_2 - \alpha_2 \bar{\sigma}_1} \quad \frac{I}{v'} \geq \frac{\alpha_3 M_{max} - \alpha_4 M_{min}}{\alpha_4 \bar{\sigma}_3 - \alpha_3 \bar{\sigma}_4} \tag{3.12}$$

Les valeurs de  $I/v$  et  $I/v'$  ne dépendent que de la géométrie de la section ; c'est pourquoi elles sont appelées '**conditions de coffrage**'.

Lorsque la précontrainte est définie par sa valeur moyenne, sans prise en compte d'un intervalle, donc pour  $\alpha_{max} = \alpha_{min} = 1$ , ces conditions sont exprimées sous la forme usuelle suivante :

$$\frac{I}{v} \geq \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1} \quad \frac{I}{v'} \geq \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_4} \quad [3.13]$$

### 2.2.2. Fuseau de passage

Les relations [3.6] et [3.7] peuvent être réécrites pour définir deux fuseaux de passage.

#### Fuseau de passage en traction

$$-\rho v' + \frac{m_1}{P_m} \leq e_o \leq \rho v - \frac{m_4}{P_m} \quad [3.14]$$

#### Fuseau de passage en compression

$$\rho v - \frac{m_3}{P_m} \leq e_o \leq -\rho v' + \frac{m_2}{P_m} \quad [3.15]$$

Au niveau du prédimensionnement, la notion du fuseau de traction permet de définir la valeur de la force de précontrainte et son excentricité. Le fuseau de compression conditionne les caractéristiques à donner aux sections droites, ce qui est rendu plus simple par l'écriture de la condition de coffrage. De ce fait, la notion de fuseau est associée uniquement au fuseau de traction.

### 2.2.3. Existence d'une ligne de précontrainte

Pour que les doubles inégalités [3.14] et [3.15] soient respectées, il faut que les fuseaux de passage soient ouverts

$$\begin{aligned} -\rho v' + \frac{m_1}{P_m} &\leq \rho v - \frac{m_4}{P_m} \\ \rho v - \frac{m_3}{P_m} &\leq -\rho v' + \frac{m_2}{P_m} \end{aligned} \quad [3.16]$$

Ce qui donne un encadrement de la force de précontrainte

$$\frac{m_1 + m_4}{\rho h} \leq P_m \leq \frac{m_2 + m_3}{\rho h} \quad [3.17]$$

La valeur de P minimale obtenue est notée  $P_I = P_{\text{sous-critique}}$

$$P_I = \frac{m_1 + m_4}{\rho h} \quad [3.18]$$



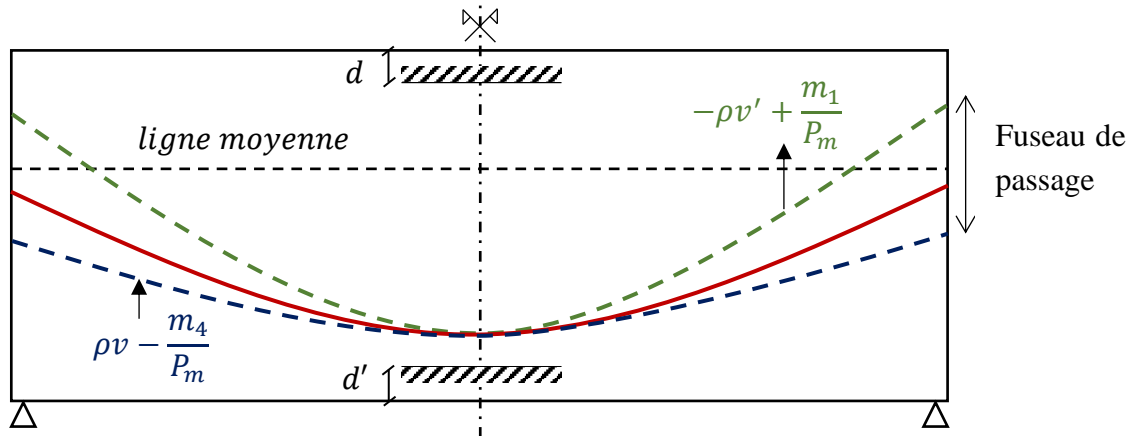


Figure 3.3 - Fuseau de passage en traction dans le cas où la section est sous-critique

#### 2.2.4. Condition d'enrobage

Les conditions d'enrobage à respecter traduisent l'inscription du câble à l'intérieur du béton

$$-(v' - d') \leq e_o \leq v - d \quad [3.19]$$

où  $d$  et  $d'$  sont les distances minimales entre le barycentre des câbles et les fibres extrêmes du béton.

Lorsque l'excentricité  $e_o$  associée à  $P_I$  ne respecte pas les conditions d'enrobage, il convient d'augmenter la valeur de la précontrainte.

##### Section sur-critique soumise à un moment positif

Dans ce cas, l'excentricité est négative et le câble risque de dépasser la limite d'enrobage inférieure. La valeur associée à l'excentricité afin de remonter le câble est

$$e_o = -(v' - d') \quad [3.20]$$

La seule contrainte de traction atteinte est la limite  $\bar{\sigma}_4$  en fibre inférieure.

La valeur de précontrainte résultante, notée sur-critique  $P_{II,a}$ , est :

$$P_{II,a} = \frac{m_4}{\rho v + v' - d'} \quad [3.21]$$

##### Section sur-critique soumise à un moment négatif

Dans ce cas, l'excentricité est positive et le câble risque de dépasser la limite d'enrobage supérieure. La valeur associée à l'excentricité afin de redescendre le câble est :

$$e_o = v - d \quad [3.22]$$

La seule contrainte de traction atteinte est la limite  $\bar{\sigma}_1$  en fibre supérieure.

La valeur de précontrainte résultante, notée sur-critique  $P_{II,b}$ , est :

$$P_{II,b} = \frac{-m_1}{\rho v' + v - d} \quad [3.23]$$

### 2.2.5. Valeur minimale de précontrainte

La force minimale de précontrainte est la valeur maximale entre  $P_{s\text{ous-critique}}$  et  $P_{s\text{ur-critique}}$ .

## 3. Nouvelle règle des pivots

### 3.1 Principe de la méthode

Cette nouvelle méthode permet la formulation analytique du dimensionnement de la section en précontrainte totale (état non fissuré) et partielle (état fissuré), à partir des équations d'équilibre du moment fléchissant et de l'effort normal. Ainsi, une équation polynomiale générale exprimée en fonction des propriétés géométriques de la section et applicable aux états fissuré et non fissuré, est développée.

Elle permet la représentation graphique du domaine admissible de la force P de précontrainte en tenant compte de sa variation autour d'une valeur moyenne.

La condition de coffrage est introduite en précontrainte partielle et représentée graphiquement en précontrainte totale et partielle.

La vérification à l'état limite ultime (ELU) est abordée d'une manière cohérente à la nouvelle approche en tenant compte de la loi de comportement non linéaire du béton.

### 3.2 Hypothèses

Les hypothèses suivantes sont considérées dans cette approche :

- a. La force de précontrainte P est une force extérieure non adhérente
- b. Loi de comportement non linéaire du béton

Le calcul de la section est effectué en utilisant la relation contrainte-déformation non linéaire donnée par l'EN 1992-1-1 section 3.1.7

$$\begin{aligned} \sigma &= f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^n \right] & \text{si} & \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c \\ \sigma &= f_{cd} & \text{si} & \quad \varepsilon_c \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \\ \sigma &= 0 & \text{sinon} & \end{aligned} \quad [3.24]$$

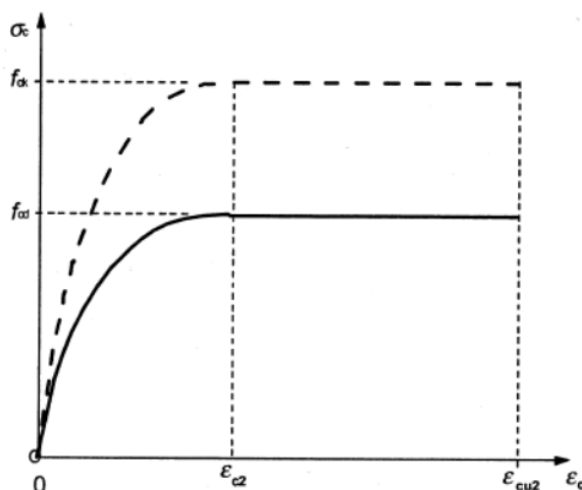


Figure 3.4 - Diagramme parabolé-rectangle du béton comprimé donné par la Figure 3.3 de l'EN 1992-1-1

c. Loi de comportement des aciers passifs de béton armé

Le diagramme de calcul contrainte-déformation utilisé pour les aciers en béton armé est le diagramme bi-linéaire donné par l'EN 1992-1-1 section 3.2.7

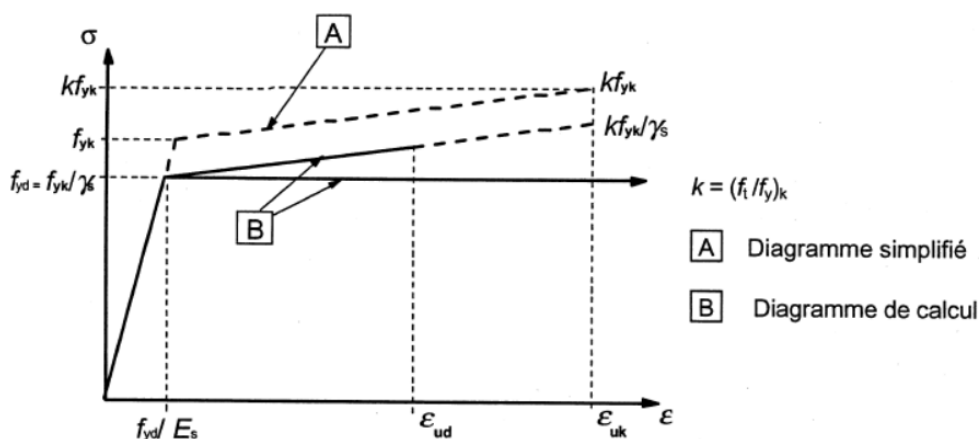


Figure 3.8 : Diagramme contrainte-déformation simplifié et diagramme de calcul pour les aciers de béton armé (tendus ou comprimés)

Figure 3.5 - Diagramme bilinéaire des aciers passifs donné par la Figure 3.8 de l'EN 1992-1-1

En posant

$$\epsilon_p = f_{yd} / E_s \quad [3.25]$$

La relation contrainte-déformation devient

$$\begin{aligned} \sigma_{st} &= E_s \epsilon_{st} & \text{si } 0 \leq \epsilon_{st} \leq \epsilon_p \\ \sigma_{st} &= f_{yd} \left[ 1 + (k - 1) \left( \frac{\epsilon_{st} - \epsilon_p}{\epsilon_{uk} - \epsilon_p} \right) \right] & \text{si } \epsilon_p \leq \epsilon_{st} \leq \epsilon_{ud} \end{aligned} \quad [3.26]$$

La valeur  $\epsilon_{ud}$  de calcul est prise

$$\epsilon_{ud} = 0,9 \epsilon_{uk} \quad [3.27]$$

d. Loi de comportement des aciers de précontrainte

Le diagramme de calcul contrainte-déformation utilisé pour les aciers de précontrainte est le diagramme bilinéaire donné par l'EN 1992-1-1 section 3.3.6

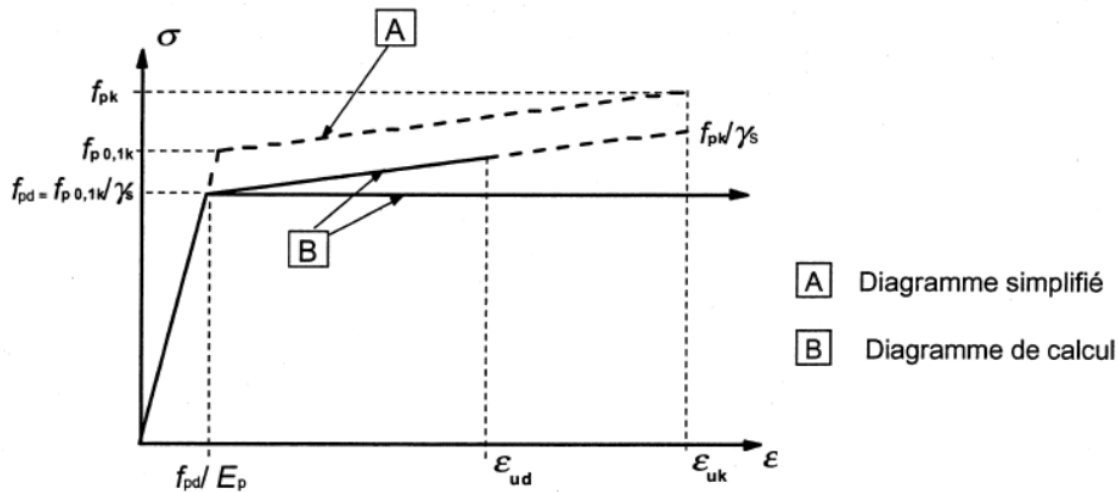


Figure 3.6 - Diagramme contrainte-déformation des aciers de précontrainte donné par l'EN 1992-1-1 figure 3.10

La loi est similaire à celle des aciers de béton armé avec d'autres limites de contraintes et de déformations.

En posant

$$\epsilon_{pd} = f_{pd}/E_p \quad [3.28]$$

La relation contrainte-déformation devient

$$\begin{aligned} \sigma_p &= E_p \epsilon & \text{si } 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{pd} \\ \sigma_p &= f_{pd} \left[ 1 + (k - 1) \left( \frac{\epsilon - \epsilon_{pd}}{\epsilon_{uk} - \epsilon_{pd}} \right) \right] & \text{si } \epsilon_{pd} \leq \epsilon \leq \epsilon_{ud} \end{aligned} \quad [3.29]$$

La valeur  $\epsilon_{ud}$  de calcul est prise

$$\epsilon_{ud} = 0,9 \epsilon_{uk} \quad [3.30]$$

e. Hypothèse des sections planes

Toute section plane avant déformation reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation.

Les déformations sont donc des diagrammes linéaires, et les relations entre les déformations au niveau des différentes fibres de la section sont obtenues en appliquant la méthode géométrique des triangles semblables.

f. Corrélation entre l'ouverture des fissures et la contrainte au niveau des aciers passifs

La limitation de l'ouverture des fissures dictée par l'Eurocode 2, et détaillée dans la section 2.1.2 de ce document, est transformée en une limitation de contraintes au niveau des aciers passifs suite à une corrélation développée selon l'EN 1992-1-1 section 7.8. Ceci permet d'appliquer la nouvelle règle des pivots en précontrainte totale pour la précontrainte partielle également, en substituant la limite de traction en fibre inférieure dans le béton par une limite de traction au niveau des aciers passifs. La corrélation est détaillée dans les sections qui suivent.

### 3.3 Contraintes au niveau de la section

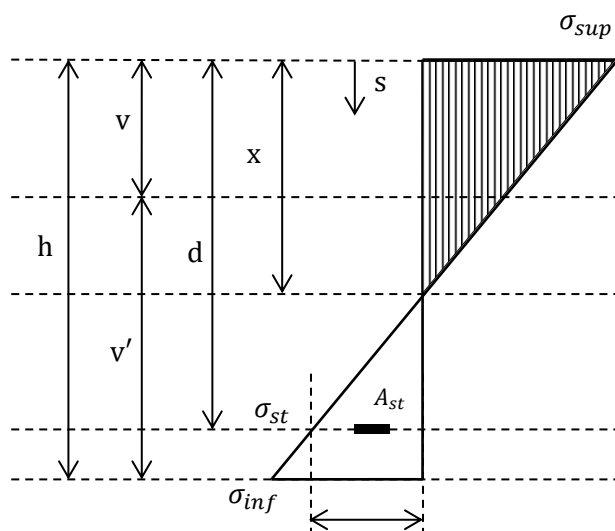


Figure 3.7 - Diagramme des contraintes sur la hauteur de la section

Les expressions des contraintes aux différentes fibres de la section sont :

$$\text{Contrainte au niveau de l'ordonnée 's'} \quad \sigma(s) = \left(1 - \frac{s}{x}\right) \sigma_{sup} \quad [3.31]$$

$$\text{Contrainte en fibre inférieure du béton} \quad \sigma_{inf} = \frac{x - h}{x} \sigma_{sup} \quad [3.32]$$

$$\text{Contrainte au niveau des aciers passifs} \quad \sigma_{st} = \alpha_e \frac{x - d}{x} \sigma_{sup} \quad [3.33]$$

avec

- $s$  ordonnée du point de calcul compté à partir de la fibre supérieure
- $x$  position de l'axe neutre
- $\sigma_{inf}$  contrainte en fibre inférieure du béton
- $\sigma_{sup}$  contrainte en fibre supérieure du béton
- $\sigma_{st}$  contrainte au niveau des aciers passifs  $A_{st}$
- $\sigma(s)$  contrainte à l'abscisse  $s$
- $\alpha_e$  coefficient d'équivalence
- $b(s)$  largeur de la section

Ces relations ne font aucune hypothèse concernant la position de l'axe neutre qui peut être réel (dans la section) comme c'est le cas lorsque la section est fissurée ou bien virtuel (hors de la section) dans le cas d'une section entièrement comprimée par exemple. Dans ce dernier cas, les relations posent un problème d'ordre numérique lorsque l'axe neutre est à l'infini (état de contrainte ou de déformation uniforme).

### 3.4 Caractéristiques mécaniques de la section

Les caractéristiques mécaniques de la section homogénéisée rapportées à l'axe neutre peuvent s'écrire comme indiqué ci-après.

$$\text{Aire de la section homogénéisée} \quad A_h = \int_0^x b(s) ds + \alpha_e A_{st} \quad [3.34]$$

$$\text{Moment statique de la section homogénéisée} \quad S_{h/x} = \int_0^x (x-s)b(s) ds + \alpha_e A_{st}(x-d) \quad [3.35]$$

$$\text{Moment d'inertie de la section homogénéisée} \quad I_{h/x} = \int_0^x (x-s)^2 b(s) ds + \alpha_e A_{st}(x-d)^2 \quad [3.36]$$

Les relations suivantes des dérivées sont facilement vérifiées

$$\frac{dI_{h/x}}{dx} = 2S_{h/x} \quad \frac{dS_{h/x}}{dx} = A_h \quad \frac{dA_h}{dx} = b(x) \quad [3.37]$$

La dérivée de l'aire par rapport à la position de la section  $x$  donne la largeur de la section, la dérivée du moment statique donne l'aire et la dérivée du moment d'inertie est deux fois le moment statique.

Dans le cas où la largeur est linéaire par morceaux, cela permet de déterminer les caractéristiques mécaniques par intégrations successives. Le détail de calcul de la transformation d'une section en caisson en une section à largeur variable est fourni dans l'Annexe D.

### 3.5 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre de l'effort normal et du moment fléchissant rapportées à l'axe neutre de la section sont exprimées en fonction des caractéristiques mécaniques de la section

$$\text{Effort normal} \quad N_h = \frac{\sigma_{sup} S_{h/x}}{x} = \int_0^x \sigma(s)b(s) ds + A_{st}\sigma_{st} \quad [3.38]$$

$$\text{Moment fléchissant} \quad M_{h/x} = \frac{\sigma_{sup} I_{h/x}}{x} = \int_0^x (x-s)\sigma(s)b(s) ds + A_{st}\sigma_{st}(x-d) \quad [3.39]$$

Le moment de la force de précontrainte est nul sur la ligne de précontrainte

$$M_{h/e_0} = \int_0^x (v - e_0 - s)\sigma(s)b(s) ds + A_{st}\sigma_{st}(v - e_0 - d) \quad [3.40]$$

Les deux équations d'équilibre peuvent donc s'exprimer sous la forme suivante

$$P = \frac{\sigma_{sup} S_{h/x}}{x} \quad I_{h/x} + \left( v - x - e_0 - \frac{M_{ext}}{P} \right) S_{h/x} = 0 \quad [3.41]$$

Il apparait ainsi que la position de l'axe neutre ne dépend que de l'excentricité du câble et du rapport entre le moment des forces extérieures et la force de précontrainte.

En posant

$$M^* = P e_0 + M_{ext} \quad [3.42]$$

Les limites de contrainte ou la ligne de rupture peuvent être représentées dans le plan  $(P, M^*)$  sans connaître la valeur de l'excentricité du câble.

Les conditions de contrainte donneront la position de l'axe neutre en fonction de la force de précontrainte.

En fibre supérieure 
$$S_{h/x} = \frac{Px}{\overline{\sigma}_{sup}} \quad [3.43]$$

En fibre inférieure 
$$S_{h/x} = (x - h) \frac{P(x - h)}{\overline{\sigma}_{inf}} \quad [3.44]$$

Au niveau des aciers passifs 
$$S_{h/x} = \frac{\alpha_e P(d - x)}{\overline{\sigma}_{st}} \quad [3.45]$$

La contrainte  $\overline{\sigma}_{st}$  est comptée positive en traction.

Connaissant la position de l'axe neutre, le moment total est obtenu par :

$$M^* = P \left[ \frac{I_{h/x}}{S_{h/x}} + v - x \right] \quad [3.46]$$

Dans un premier temps, la courbe  $(P, M^*)$  peut être déterminée de manière paramétrique en fonction de la position de l'axe neutre.

Il s'agit de trouver une position du câble, soit  $e_0$ , telle que les critères de contrainte soient respectés pour toutes les valeurs du moment des forces extérieures et, si nécessaire, en prenant en compte les variations de la force de précontrainte. Le point représentatif de l'état de contrainte doit rester à l'intérieur de la ligne de rupture pour toute valeur du moment comprise entre  $M_{min}$  et  $M_{max}$  et toute valeur de la précontrainte comprise entre  $P_{min}$  et  $P_{max}$

### 3.6 Précontrainte totale : section totalement comprimée

Lorsque la section est totalement comprimée les intégrales sont calculées sur l'intervalle  $[0, h]$  seulement et les formules suivantes pourront être vérifiées

$$S_{h/x} = (x - v)A_h \quad I_{h/x} = I_h + (x - v)^2 A_h \quad [3.47]$$

Avec  $I_h$  et  $A_h$  désignant ici l'inertie et l'aire de la section totalement comprimée

La position de l'axe neutre est obtenue en résolvant l'équation [3.41] qui peut se mettre sous la forme  $f(x) = 0$

$$f(x) = I_{h/x} + \left( v - x - e_0 - \frac{M_{ext}}{P} \right) S_{h/x} = 0 \quad [3.48]$$

Ce qui donne

$$I_{h/x} + (v - x)S_{h/x} = I_h = \frac{M^*}{P} (x - v)A_h \quad [3.49]$$

Les deux relations suivantes peuvent être déduites

$$x = v \left( 1 + \frac{\rho v' P}{M^*} \right) \quad x - h = v' \left( \frac{P \rho v}{M^*} - 1 \right) \quad [3.50]$$

Ce qui permet de retrouver l'expression usuelle des contraintes en fibres supérieure et inférieure

$$\sigma_{sup} = \frac{Px}{S_{h/x}} = \frac{v}{I_h} [\rho v' P + M^*] \quad \sigma_{inf} = \frac{P(x - h)}{S_{h/x}} = \frac{v'}{I_h} [\rho v P - M^*] \quad [3.51]$$

Les conditions de contrainte peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{En fibre supérieure} \quad \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_1 - \rho v' P \leq M^* \leq \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_2 - \rho v' P \quad [3.52]$$

$$\text{En fibre inférieure} \quad \rho v P - \frac{I_h}{v'} \bar{\sigma}_3 \leq M^* \leq \rho v P - \frac{I_h}{v'} \bar{\sigma}_4 \quad [3.53]$$

Ces conditions peuvent être représentées dans un plan  $(P, M^*)$  : les valeurs de  $M^*$  doivent s'inscrire dans un parallélogramme dont les sommets, qui correspondent aux points de jonction entre deux « pivots » successifs, sont définis par les relations suivantes



Frontière	Précontrainte	Moment	
1/3	$P_{1/3} = \frac{I_h}{\rho h} \left[ \frac{\bar{\sigma}_1}{v} + \frac{\bar{\sigma}_3}{v'} \right]$	$M_{1/3}^* = \frac{I_h}{h} [\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3]$	[3.54]
2/3	$P_{2/3} = \frac{I_h}{\rho h} \left[ \frac{\bar{\sigma}_2}{v} + \frac{\bar{\sigma}_3}{v'} \right]$	$M_{2/3}^* = \frac{I_h}{h} [\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_3]$	[3.55]
2/4	$P_{2/4} = \frac{I_h}{\rho h} \left[ \frac{\bar{\sigma}_2}{v} + \frac{\bar{\sigma}_4}{v'} \right]$	$M_{2/4}^* = \frac{I_h}{h} [\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_4]$	[3.56]
1/4	$P_{1/4} = \frac{I_h}{\rho h} \left[ \frac{\bar{\sigma}_1}{v} + \frac{\bar{\sigma}_4}{v'} \right]$	$M_{1/4}^* = \frac{I_h}{h} [\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_4]$	[3.57]

Fixons maintenant une valeur de l'excentricité  $e_0$ , le moment « total » varie en fonction de la force de précontrainte entre les valeurs suivantes :

$$M_{min} + Pe_0 \leq M^* \leq M_{max} + Pe_0 \quad [3.58]$$

Les valeurs admissibles de  $P$  et  $M^*$  en fonction de  $e_0$  peuvent être analysées graphiquement.

La plage des valeurs admissibles de la force  $P$  combinant tous les états limite de service sera :

$$\max(\alpha_{min} P_{min}) \leq P \leq \max(\alpha_{max} P_{max}) \quad [3.59]$$

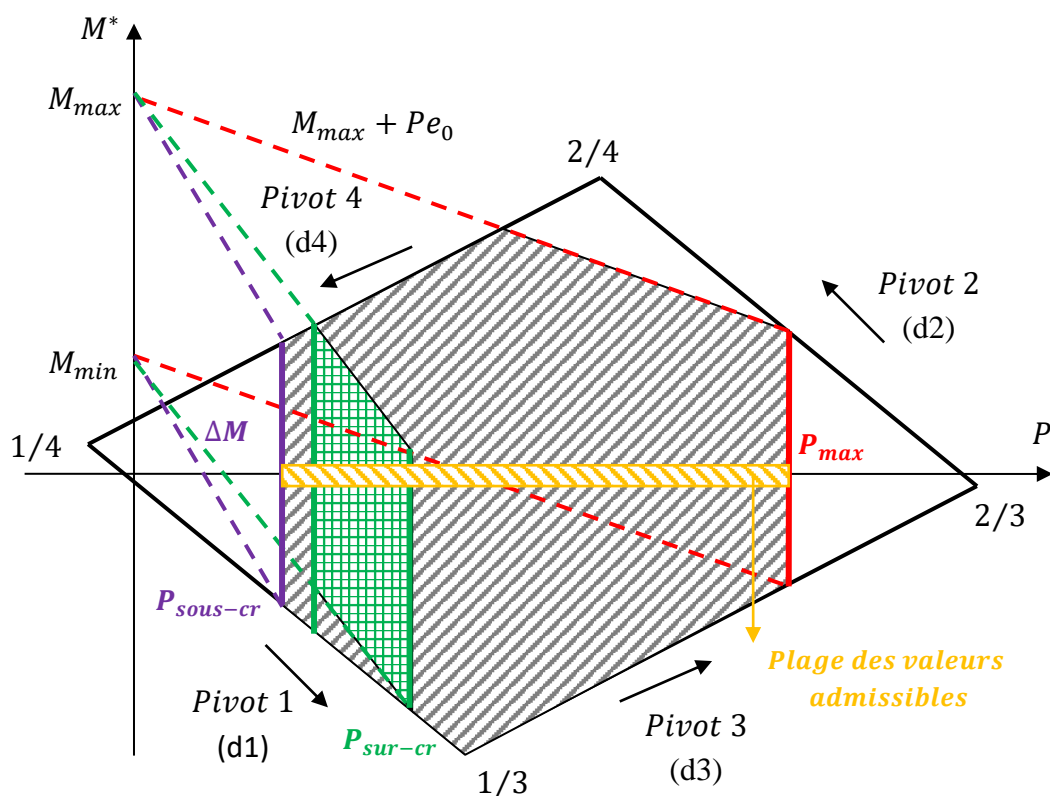


Figure 3.8 - Domaine admissible en précontrainte totale

### 3.6.1. Règle des pivots et domaine admissible

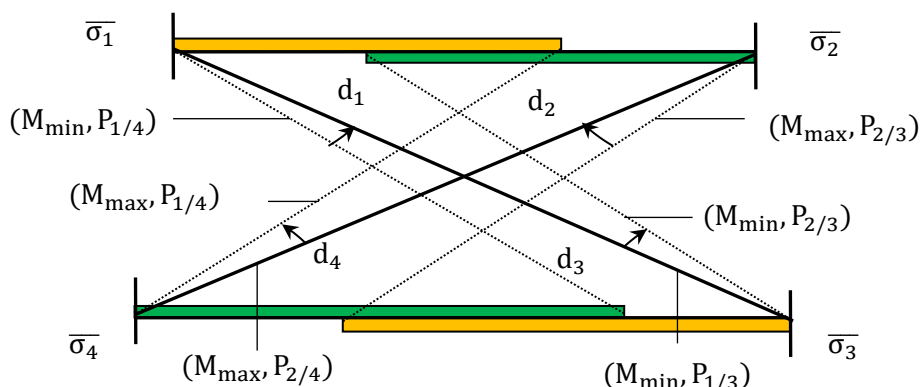


Figure 3.9 – Représentation de la règle des pivots

#### **Pivot 1**

La contrainte limite de traction en fibre supérieure  $\bar{\sigma}_1$  est atteinte sous  $M_{\min}$  et la contrainte limite de traction en fibre inférieure  $\bar{\sigma}_4$  est atteinte sous  $M_{\max}$ .

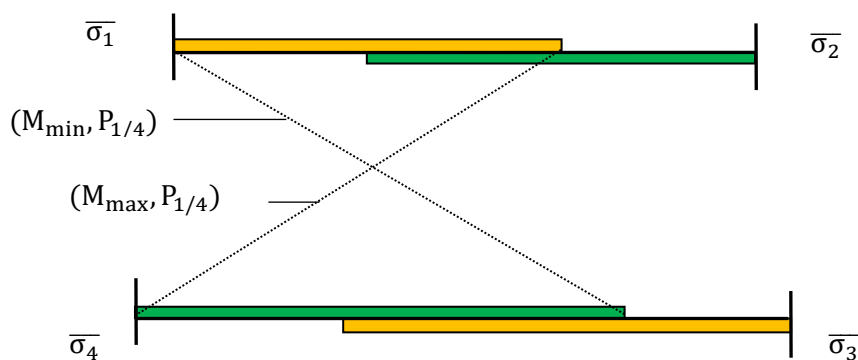


Figure 3.10 – Pivot 1

#### **Pivot 2**

En tournant autour de  $\bar{\sigma}_1$ , la contrainte limite de compression  $\bar{\sigma}_3$  est atteinte en fibre inférieure sous  $M_{\min}$  tout en maintenant la contrainte  $\bar{\sigma}_1$  en fibre supérieure.

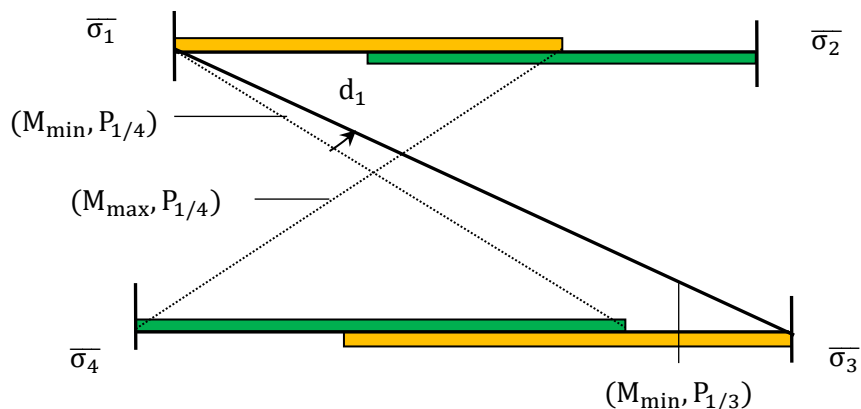


Figure 3.11 – Pivot 2

### **Pivot 3**

En tournant autour de  $\bar{\sigma}_3$ , la contrainte limite de compression  $\bar{\sigma}_2$  est atteinte en fibre supérieure sous  $M_{\max}$  tout en maintenant la contrainte  $\bar{\sigma}_3$  en fibre inférieure.

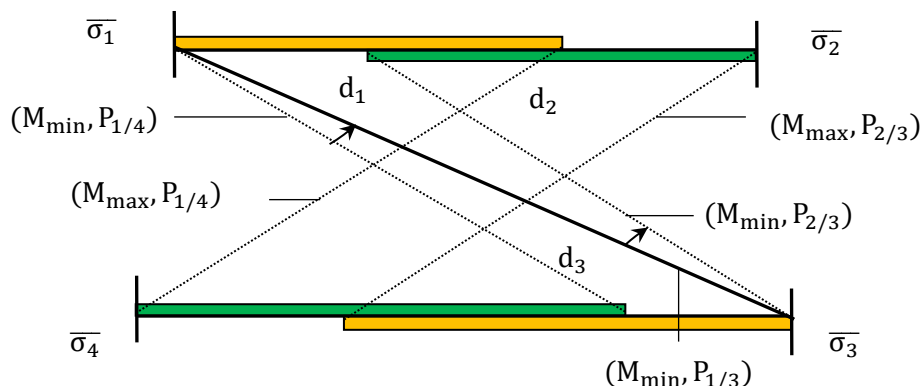


Figure 3.12 – Pivot 3

### **Pivot 4**

En tournant autour de  $\bar{\sigma}_2$ , la contrainte limite de traction  $\bar{\sigma}_4$  est atteinte en fibre inférieure sous  $M_{\max}$  tout en maintenant la contrainte  $\bar{\sigma}_2$  en fibre supérieure, et le schéma final est ainsi tracé (Figure 3.9 – Représentation de la règle des pivots)

#### 3.6.2. Analyse et interprétation de la nouvelle approche en précontrainte totale

##### **Interprétation de la Figure 3.8**

- En précontrainte totale, le domaine admissible est défini dans le plan  $(P, M^*)$ , il est délimité par 4 droites de pentes  $\rho v$  et  $\rho v'$ , parallèles deux à deux et formant un parallélogramme.

En se déplaçant sur le contour du domaine, et en parcourant les droites ( $d_1$ ) jusqu'à ( $d_4$ ), une seule limitation de contrainte est atteinte. Aux points d'intersection de deux droites, deux contraintes limites sont atteintes simultanément. A l'intérieur du domaine aucune contrainte n'est atteinte.

Les droites ( $d_1, d_4$ ) et ( $d_2, d_3$ ) représentent respectivement les limitations du fuseau de passage de traction et de compression. Le domaine admissible délimité par ces 4 droites est tronqué par les valeurs de  $P_{\min}$  et  $P_{\max}$  calculées pour une section donnée. La valeur de  $P_{\min}$  est le maximum entre la valeur de  $P_{\text{sous-cr}}$ , droite en couleur violet, et la valeur de  $P_{\text{sur-cr}}$ , droites en couleur verte.

- La valeur de  $P_{\text{sous-critique}}$  connue usuellement, ligne en couleur violet de la Figure 3.8 correspond graphiquement à la valeur de  $P$  pour laquelle la hauteur du parallélogramme est égale à  $\Delta M = M_{\max} - M_{\min}$

- Si l'excentricité du câble correspondant à la force  $P_{\text{sous-critique}}$  calculée dépasse les limites d'enrobage, le câble est remonté au niveau de cette limite et une valeur de  $P_{\text{sur-critique}}$  est calculée. En se basant sur la représentation graphique du domaine admissible de la nouvelle règle des pivots, le calcul de la valeur de  $P_{\text{sur-critique}}$  suit les étapes suivantes :
  - Placer le point  $(0, M_{\text{max}})$
  - Tracer la droite  $M_{\text{max}} + Pe_0$  avec  $e_0 = -(v' - d')$
  - La valeur de  $P_{\text{sur-critique}}$  est déduite à partir de l'intersection entre cette droite et la limite  $d_4$  du domaine admissible
- La valeur de  $P_{\text{max}}$  est calculée et interprétée graphiquement de la même manière que celle de  $P_{\text{min}}$  mais en tenant compte du fuseau de passage de compression défini par les droites  $(d_2)$  et  $(d_3)$  du parallélogramme délimitant le domaine admissible.
- A partir des valeurs de  $P_{\text{min}}$  et  $P_{\text{max}}$  calculées, un intervalle de valeurs admissibles des forces  $P$  est ainsi obtenu. Les coefficients  $\alpha$  tenant compte des variations de la force  $P$  autour d'une valeur moyenne pour chacun des états limites de service, peuvent être affectés aux bornes de l'intervalle défini.
- Les domaines admissibles correspondant à chacun des états limites de service, superposés sur un même graphique dans le plan  $(P, M^*)$ , Figure 3.13, permettent ainsi l'obtention d'un domaine admissible davantage réduit. Ce dernier met bien en relief l'état limite qui contrôle le dimensionnement à l'état limite de service, et limite l'intervalle de recherche de la solution optimale, réduisant ainsi le temps de calcul.

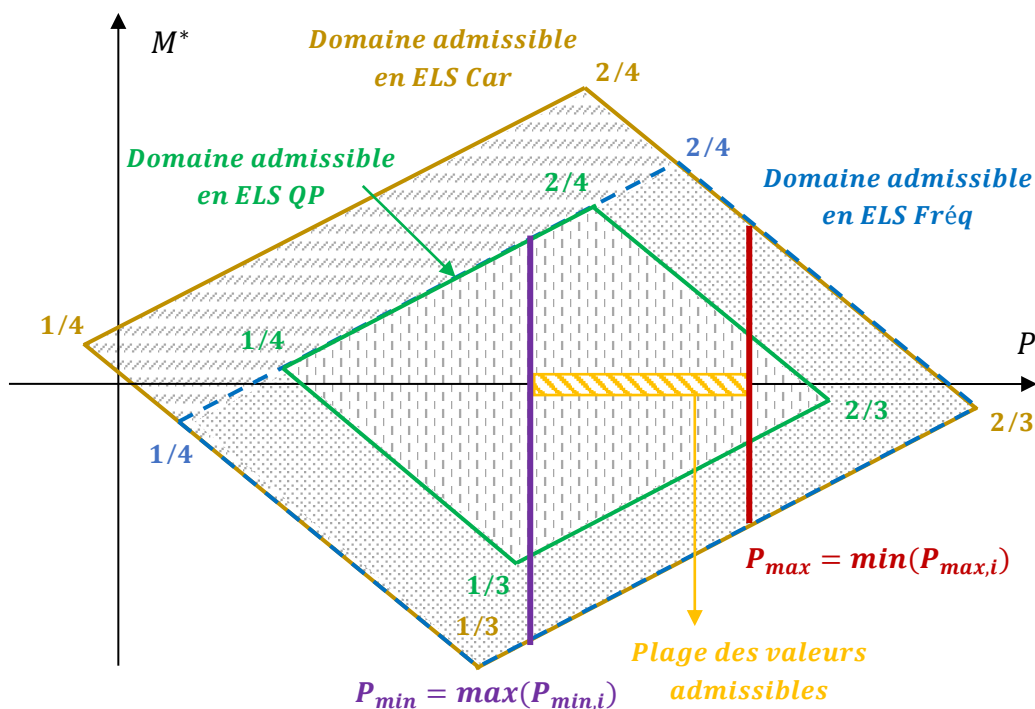


Figure 3.13 – Domaine admissible sous toutes les combinaisons de service en précontrainte totale

L'indication  $P_{min} = \max(P_{min,i})$  veut dire que la valeur de  $P_{min}$  retenue est la valeur maximale issue de tous les états limites de service : ELS Quasi-Permanent, Fréquent et Caractéristique.

- Le domaine admissible est tracé indépendamment des moments extérieurs appliqués et de l'excentricité du câble. Donc pour une section quelconque donnée et pour des limitations de contraintes définies, un domaine admissible peut être obtenu. C'est ainsi que cette approche est utile pour l'évaluation des possibilités d'optimisation des sections dimensionnées par les méthodes conventionnelles. En d'autres termes, pour une géométrie donnée, des moments extérieurs et une force  $P$  appliquée, le point  $(P, M^*)$  correspondant peut être représenté graphiquement sur le domaine admissible. L'écart entre ce point et les bords du domaine admissible est quantifié, orientant ainsi le concepteur vers des solutions plus optimales en termes de quantités de matériaux et de force de précontrainte.
- En se basant sur le domaine admissible présenté dans cette nouvelle approche, les dimensions pour une section prédéfinie avec un couple  $(P, e_0)$  peut être graphiquement vérifiée, Figure 3.14 : l'intersection entre la ligne verticale  $P$  et la droite  $(d_4)$  est déterminée graphiquement, à partir de ce point, une droite de pente  $e_0$  est tracée. L'intersection de cette droite avec l'axe vertical  $M^*$  représente la capacité de la section qui sera comparée au moment extérieur appliqué  $M_{max}$ . Si la capacité obtenue dépasse le moment extérieur appliqué, la section sera capable de résister aux charges appliquées.

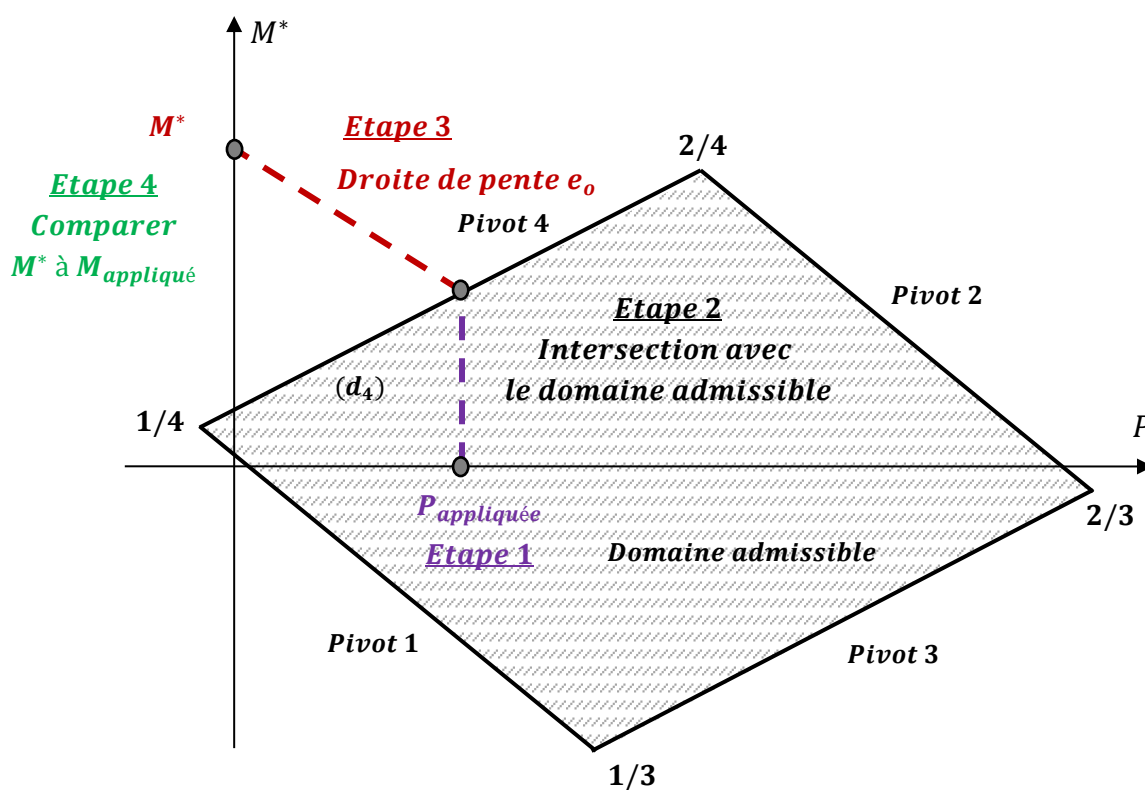


Figure 3.14 – Vérification de la capacité portante d'une section existante

- Les droites  $M_{max} + Pe_0$  représentées sur les diagrammes du domaine admissible permettent d'étudier l'effet de la variation de l'excentricité du câble sur la force de précontrainte P. La pente  $e_0$  dicte ainsi la condition de la force de précontrainte : sous-critique ou sur-critique
- Dans le cas où la plus petite hauteur du parallélogramme délimitée par les limites du fuseau de passage de traction est supérieure à  $\Delta M$ , la valeur de P requise est négative et par la suite la section est dimensionnée en béton armé sans force de précontrainte. Dans le cas contraire où la plus grande hauteur du parallélogramme est inférieure à  $\Delta M$ , il faudra augmenter la section afin de pouvoir résister aux charges extérieures appliquées.
- Le décalage entre les valeurs de  $P_{1/3}$  et  $P_{2/4}$  est dépendant du rapport  $v/v'$ . Ce même rapport a une influence sur la condition de coffrage et est utile pour la représentation de cette condition en précontrainte partielle. Pour une section rectangulaire, le rapport  $v/v' = 1$  et  $P_{1/3} = P_{2/4}$ .

### 3.7 Précontrainte partielle : section fissurée

Lorsque la limite de traction du béton est dépassée, la section devient fissurée et se comporte comme du béton armé, des armatures longitudinales passives sont ainsi ajoutées pour maîtriser la fissuration. Dans la justification de la section en état de service, la limitation des contraintes de traction dans le béton est remplacée par celle des contraintes de traction dans les armatures passives.

Dans cette nouvelle approche de dimensionnement, la force de précontrainte P est considérée comme extérieure. Les mêmes expressions de la force P et du moment  $M^*$  obtenues en précontrainte totale peuvent être appliquées pour la détermination de la position de l'axe neutre qui sera comprise entre 0 et h.

La section est considérée non-fissurée sous  $M_{min}$  (pivots 1 et 3) et fissurée sous  $M_{max}$ . La même valeur de  $M_{min}^*$  est obtenue, alors que la valeur de  $M_{max}^*$  peut être déterminée sur 3 segments différents du domaine admissible.

Le cas où  $M^*/P > \rho v$ , qui correspond à la fissuration en fibre inférieure, est considéré dans cette étude. La fissuration en fibre supérieure pourrait également être prise en compte, mais il faudrait prévoir une armature passive en lit supérieur pour pouvoir définir un critère d'ouverture de fissure ; et cela ne changera pas la méthode de résolution proposée.

Supposant que la section n'est pas fissurée sous  $M_{min}$ , la valeur de  $M_{min}^*$  en fonction de P est celle qui a été déterminée précédemment en précontrainte totale aux équations [3.52] et [3.53].

**Expression de  $M_{min}^*$**

Au pivot 1, même expression que la borne inférieure de l'équation [3.52]

$$M_{min}^* = \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_1 - \rho v' P \quad [3.60]$$

Au pivot 3, même expression que la borne inférieure de l'équation [3.53]

$$M_{min}^* = \rho v P - \frac{I_h}{v'} \bar{\sigma}_3 \quad [3.61]$$

**Expression de  $M_{max}^*$**

La valeur maximale sera déterminée sur 3 segments différents

Au pivot 2a en section non fissurée

$$M_{max}^* = \frac{I_h}{v} \bar{\sigma}_2 - \rho v' P \quad [3.62]$$

Au pivot 2b en section fissurée

$$M_{max}^* = \bar{\sigma}_2 \left[ \frac{I_{h/x} + (v - x) S_{h/x}}{x} \right] \quad [3.63]$$

Au pivot 4b en section fissurée

$$M_{max}^* = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{\alpha_e} \left[ \frac{I_{h/x} + (v - x) S_{h/x}}{(d - x)} \right] \quad [3.64]$$

L'expression du moment statique  $S_{h/x}$  est rappelée des équations [3.43] et [3.45].

$$S_{h/x} = \frac{Px}{\bar{\sigma}_{sup}} \quad S_{h/x} = \frac{\alpha_e P (d - x)}{\bar{\sigma}_{st}} \quad [3.65]$$

Les limites de contraintes sur l'armature et le béton sont atteintes simultanément pour une position particulière de l'axe neutre pour laquelle on peut déterminer la force de précontrainte

$$x_0 = \frac{\alpha_e \bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_{st} + \alpha_e \bar{\sigma}_2} d \quad P_0 = \frac{\bar{\sigma}_2 S_{h/x_0}}{x_0} = \frac{f_{ks} S_{h/x_0}}{\alpha_e (d - x_0)} \quad [3.66]$$

Pour  $P \leq P_0$  la section est au pivot 4b et, dans le cas contraire, elle est au pivot 2b.

Le domaine admissible est ainsi étendu en précontrainte partielle, et son extension est délimitée par les deux courbes représentant les pivots 2b et 4b.

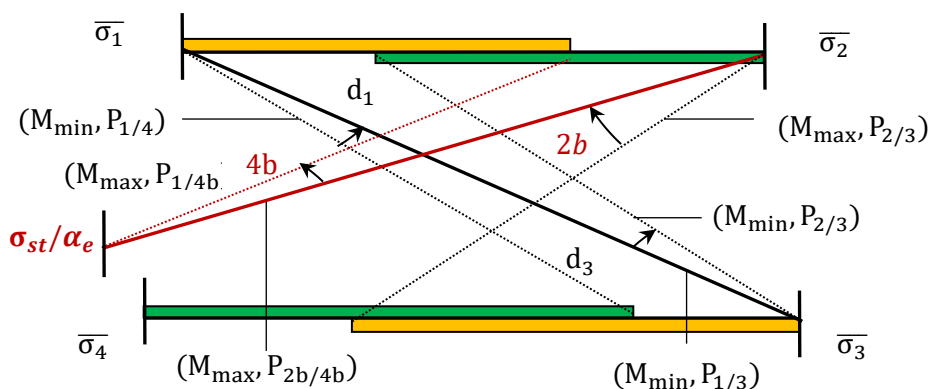


Figure 3.15 -Règle des pivots en précontrainte partielle

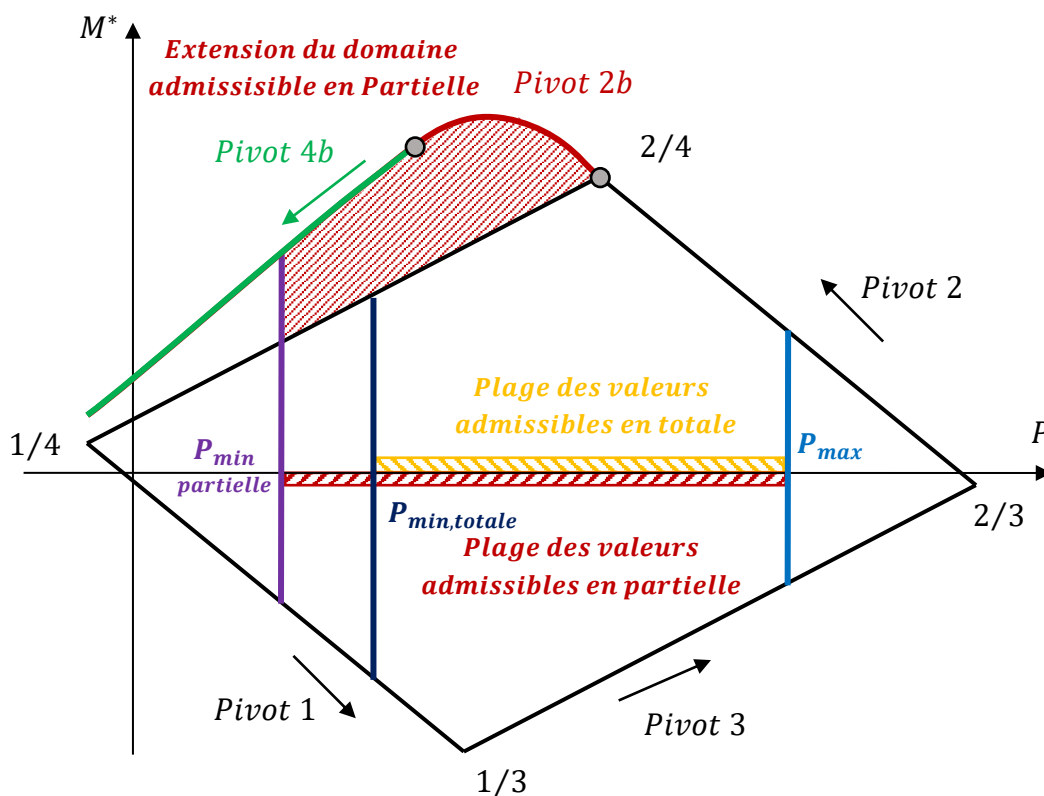


Figure 3.16 -Extension du domaine admissible en précontrainte partielle

La courbe 2b de la Figure 3.16 décrit l'ensemble des positions de l'axe neutre comprises entre  $x_0$  et  $h$  pour lesquelles la contrainte limite du béton en fibre supérieure  $\sigma_2$  est atteinte sous  $M_{\max}$ . Cette courbe représente une extension du pivot 2 défini en précontrainte totale.

La courbe 4b représente l'ensemble des points pour lesquelles la contrainte limite au niveau des aciers passifs est atteinte. Cette extension vient remplacer la droite  $d_4$  au niveau de laquelle la contrainte limite de traction  $\sigma_4$  est atteinte en fibre inférieure sous  $M_{\max}$ .



A partir de l'extension du domaine admissible décrite par les courbes 2b et 4b, le même principe de l'approche analytique de dimensionnement présentée en précontrainte totale est adopté pour la définition et le calcul des valeurs des forces de  $P_{\text{sous-critique}}$ ,  $P_{\text{sur-critique}}$  et  $P_{\text{max}}$  en précontrainte partielle.

Dans cette nouvelle approche, une condition de coffrage en précontrainte partielle est également définie.

Pour la résolution analytique, une fonction polynomiale  $f(x)$  de degré 4 est établie. Cette dernière sera utile pour le calcul des différentes valeurs de P ainsi que pour la définition de la condition de coffrage. La solution analytique est également représentée et interprétée graphiquement sur le domaine admissible étendu.

Soit

$$f(x) = I_{h/x} + (\lambda - x)S_{h/x} = ax + b \quad [3.67]$$

avec

- $x$ : Position de l'axe neutre
- $I_{h/x}$ : Polynôme de degré 4 définissant le moment d'inertie calculé par rapport à l'axe neutre
- $S_{h/x}$ : Polynôme de degré 3 définissant le moment statique calculé par rapport à l'axe neutre
- $a, b$  et  $\lambda$  des constantes

Cette fonction intervient dans l'expression des contraintes et dans l'équation de l'axe neutre pour différentes valeurs du paramètre  $\lambda$ .

Dérivation de la fonction  $f(x)$ :

$$f'(x) = S_{h/x} + (\lambda - x)A_h \quad f''(x) = (\lambda - x)b(x) \quad [3.68]$$

La dérivée seconde a une seule racine  $x = \lambda$

Valeurs particulières :

Pour  $x = 0$

$$f(0) = \alpha_e A_{st} d(d - \lambda) \quad f'(0) = \alpha_e A_{st} (\lambda - d) \quad f''(x) = \lambda b(0) \quad [3.69]$$

Pour  $x = h$

$$f(h) = [\lambda - (1 - \rho)v]v'A_h \quad f'(h) = (\lambda - v)A_h \quad f''(h) = (\lambda - h)b(h) \quad [3.70]$$

Pour  $x = \lambda$

$$f(\lambda) = I_{h/\lambda} > 0 \quad f'(\lambda) = S_{h/\lambda} \quad f''(\lambda) = 0 \quad [3.71]$$

L'équation de la tangente en  $x = 0$  est donnée par

$$y(x) = \left(1 - \frac{x}{d}\right)f(0) \quad [3.72]$$

La courbe est au-dessus de sa tangente tant que la courbure est positive c'est-à-dire  $x < \lambda$ .

$$f(\lambda) - y(\lambda) = I_{h/\lambda} - \alpha_e A_{st}(d - \lambda)^2 = \int_0^\lambda (\lambda - s)^2 b(s) ds > 0 \quad [3.73]$$

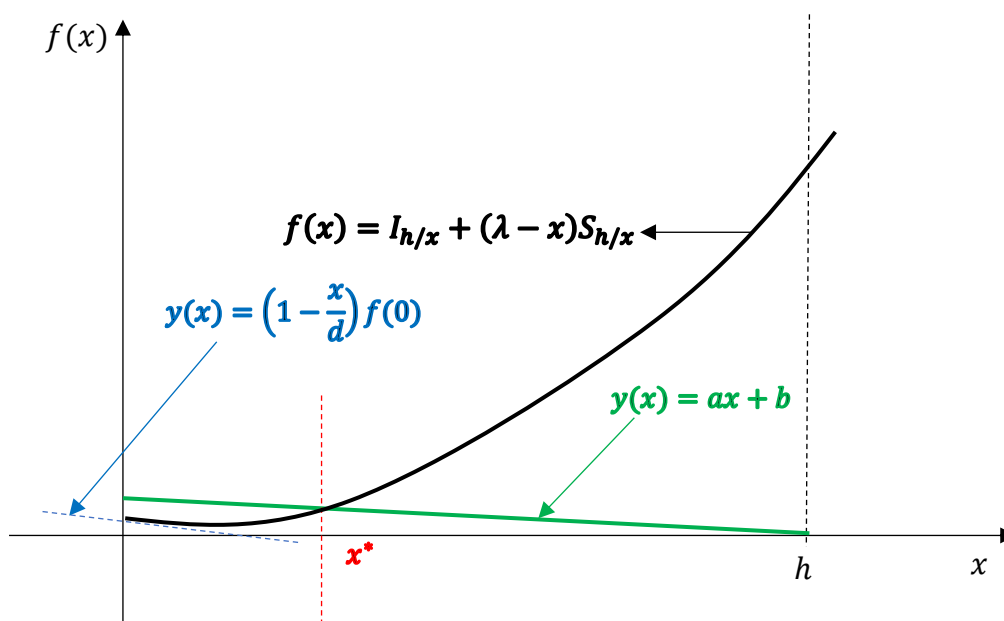


Figure 3.17 – Représentation de la fonction  $f(x)$

Pour chacun des cas détaillés dans les sections suivantes, la position de l'axe neutre  $x^*$  correspondant à l'intersection de la courbe  $f(x)$ , qui est bien une fonction croissante (Figure 3.17) avec la droite  $y(x) = ax + b$  est obtenue en résolvant une équation polynomiale de degré 4 dont les racines sont calculées à l'aide de la méthode de Muller (Legendre, 2017) détaillée dans l'Annexe C.

### 3.7.1. Calcul de la force $P_{\text{sous-critique}}$ :

La condition sous-critique peut s'exprimer de la manière suivante

$$M_{max}^* - M_{min}^* = \Delta M \quad [3.74]$$

En d'autres termes, il faudra chercher la valeur de P pour laquelle une hauteur  $\Delta M$  est inscrite à l'intérieure du domaine admissible étendu. A partir de la valeur de P calculée, l'excentricité du câble est déduite et comparée à la limite d'enrobage.

Après avoir vérifié la condition de coffrage, la valeur de  $P_I$  est déterminée. Supposant que celle-ci est obtenue aux pivots 1 et 2b, on peut écrire :

$$M_{max}^* = \frac{\bar{\sigma}_2}{x} [I_{h/x} + (v - x)S_{h/x}] \quad M_{min}^* = \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} - \rho v' P \quad [3.75]$$

$$f(x) = I_{h/x} + (v + \rho v' - x)S_{h/x} = \frac{x}{\bar{\sigma}_2} \left[ \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} + \Delta M \right]$$

Par analogie

$$\lambda = v + \rho v', \quad a = \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \left[ \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} + \Delta M \right], \quad b = 0 \quad [3.76]$$

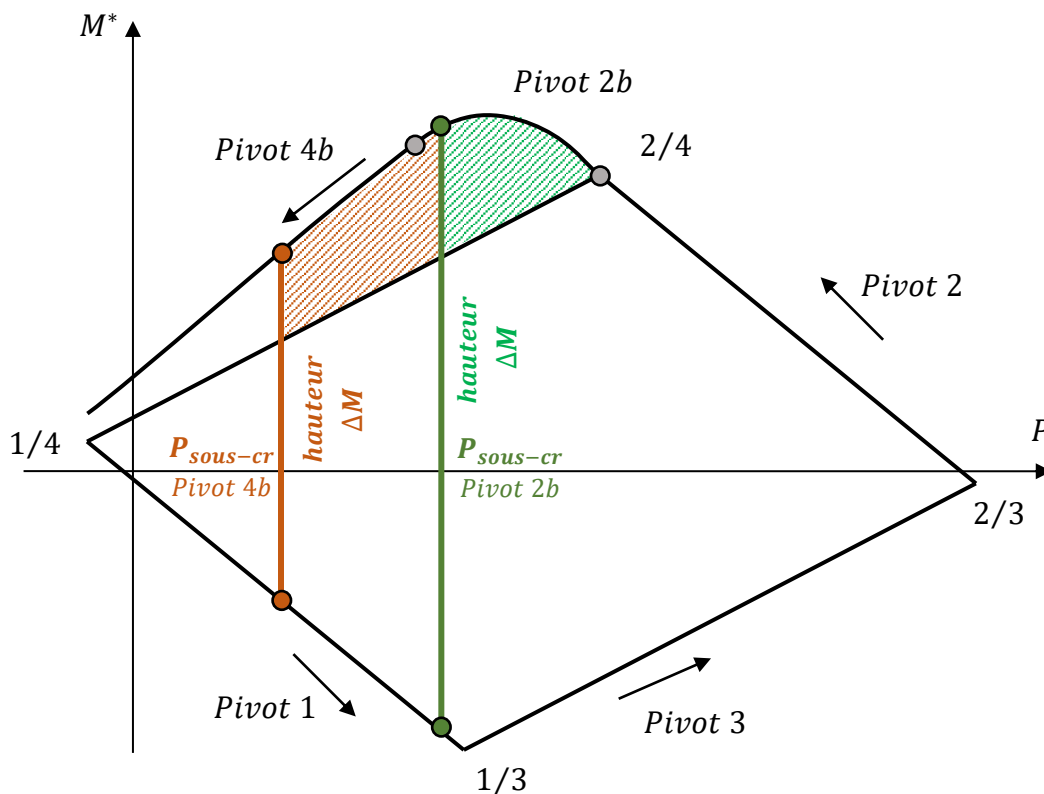


Figure 3.18 - Valeurs de  $P_{\text{sous-critique}}$  en précontrainte partielle

Des relations analogues sont établies pour les cas où la solution se trouve aux pivots 1 et 3 pour  $M_{min}^*$  et 2 ou 4b pour  $M_{max}^*$

$$M_{max}^* = \frac{\bar{\sigma}_{st}}{\alpha_e(d-x)} \left[ I_{h/x} + (v-x)S_{h/x} \right] \quad M_{min}^* = \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} - \rho v' P \quad [3.77]$$

$$f(x) = I_{h/x} + (v + \rho v' - x)S_{h/x} = \frac{\alpha_e(d-x)}{\bar{\sigma}_{st}} \left[ \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} + \Delta M \right]$$

Par analogie

$$\lambda = v + \rho v', \quad a = \frac{-\alpha_e}{\bar{\sigma}_{st}} \left[ \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} + \Delta M \right], \quad b = \frac{-\alpha_e d}{\bar{\sigma}_{st}} \left[ \frac{I_h \bar{\sigma}_1}{v} + \Delta M \right] \quad [3.78]$$

### 3.7.2. Calcul de la force $P_{sur-critique}$ :

On suppose la position du câble fixée à la limite inférieure des conditions d'enrobage

$$e_0 = -v' + d' \quad [3.79]$$

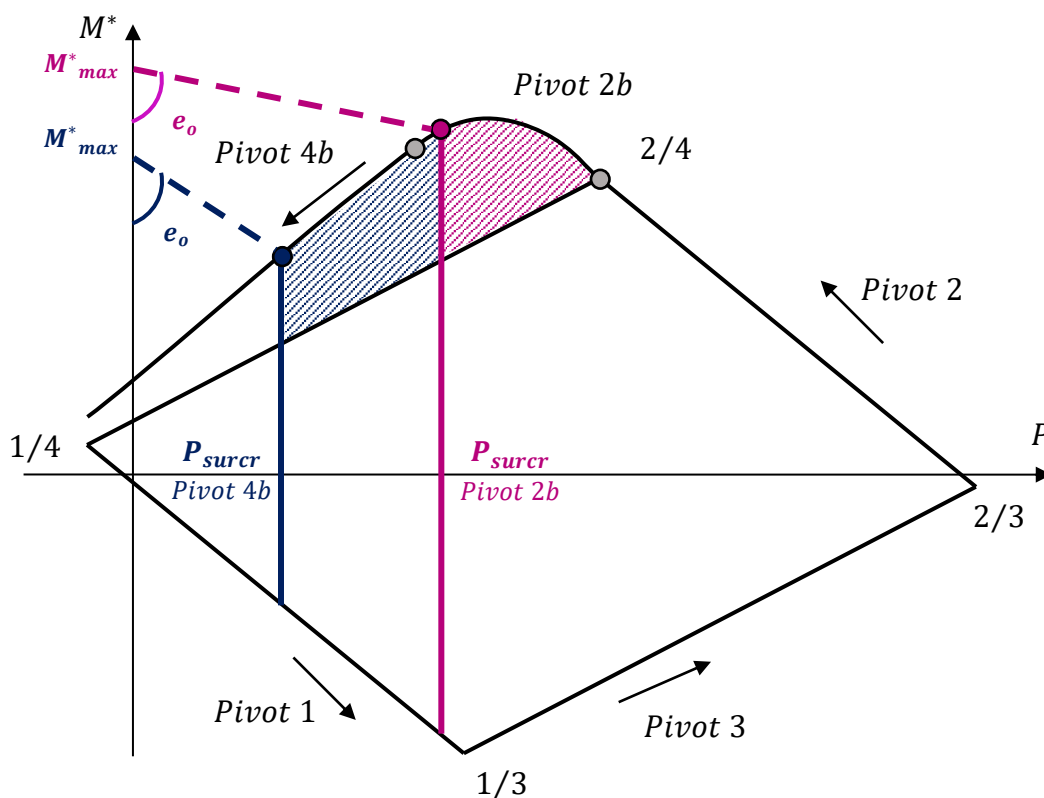


Figure 3.19 - Valeurs de  $P_{surcritique}$  en précontrainte partielle

Les positions de l'axe neutre pour lesquelles les contraintes limites sont atteintes, sont déterminées en recherchant les solutions des deux équations suivantes.

$$f(x) = \frac{xM_{max}}{\bar{\sigma}_2} \quad f(x) = \frac{\alpha_e(d-x)M_{max}}{\bar{\sigma}_{st}} \quad [3.80]$$

Cela revient à calculer l'intersection de la droite  $M_{max} + Pe_0$  avec l'une des 2 extensions 2b ou 4b du domaine admissible pour une valeur de  $e_0 = -v' + d'$ . La valeur de l'excentricité du câble fixée à la limite d'enrobage dictera la pente de la droite  $M_{max} + Pe_0$ .

Pour le cas où cette intersection coïncide avec la courbe 2b, la fonction  $f(x)$  à résoudre sera :

$$f(x) = I_{h/x} + (h - d' - x)S_{h/x} = \frac{M_{max}x}{\bar{\sigma}_2} \quad [3.81]$$

Par analogie

$$\lambda = h - d', \quad a = \frac{M_{max}}{\bar{\sigma}_2}, \quad b = 0 \quad [3.82]$$

Si l'intersection a lieu au niveau de la courbe 4b, la fonction  $f(x)$  sera :

$$f(x) = I_{h/x} + (h - d' - x)S_{h/x} = \frac{\alpha_e(d-x)M_{max}}{\bar{\sigma}_{st}} \quad [3.83]$$

Par analogie

$$\lambda = h - d', \quad a = \frac{-\alpha_e M_{max}}{\bar{\sigma}_{st}}, \quad b = \frac{\alpha_e d M_{max}}{\bar{\sigma}_{st}} \quad [3.84]$$

### 3.7.3. Calcul de la force $P_{max}$ :

La valeur de  $P_{max}$  en précontrainte partielle est interprétée graphiquement et analytiquement de la même manière que celle en précontrainte totale. C'est la valeur de précontrainte  $P$  pour laquelle la hauteur du domaine admissible délimitée par le fuseau de passage de compression est égale à  $\Delta M$ .

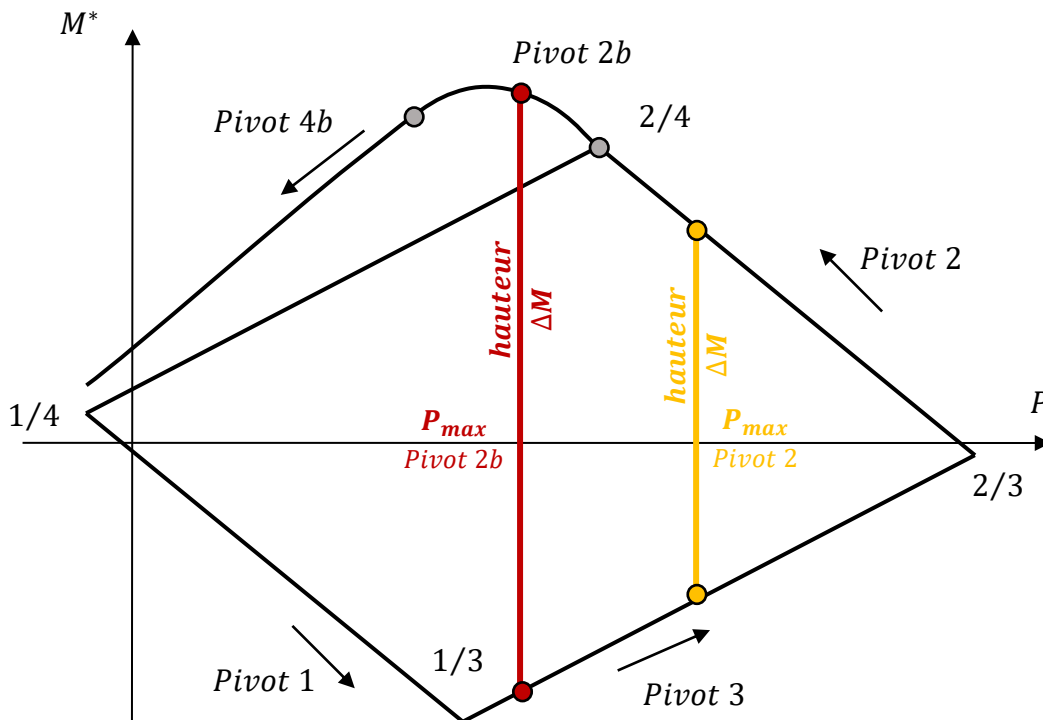


Figure 3.20 – Valeur de  $P_{max}$  en précontrainte partielle

Pour le calcul analytique de cette valeur de  $P_{max}$ , la solution est recherchée pour une valeur de  $M_{max}^*$  atteinte au pivot 2 ou 2b et une valeur de  $M_{min}^*$  atteinte au pivot 3.

Pour le cas où la hauteur  $\Delta M$  est inscrite entre les limites 2b et 3, on peut écrire :

$$M_{max}^* = \frac{\overline{\sigma}_2}{x} [I_{h/x} + (v - x)S_{h/x}] \quad M_{min}^* = \rho v P - \frac{I_h \overline{\sigma}_3}{v'} \quad [3.85]$$

$$f(x) = I_{h/x} + (v(1 - \rho) - x)S_{h/x} = \frac{x}{\overline{\sigma}_2} \left[ \Delta M - \frac{I_h \overline{\sigma}_3}{v'} \right]$$

Par analogie

$$\lambda = v(1 - \rho), \quad a = \frac{1}{\overline{\sigma}_2} \left[ \Delta M - \frac{I_h \overline{\sigma}_3}{v'} \right], \quad b = 0 \quad [3.86]$$

Par contre si la hauteur maximale est inscrite entre les limites des pivots 2 et 3 décrivant le fuseau de compression, on revient à la valeur de  $P_{max}$  calculée en précontrainte totale.

#### 3.7.4. Analyse et interprétation de la nouvelle approche en précontrainte partielle

- **En précontrainte partielle**, la même approche de dimensionnement est appliquée, et le domaine admissible tracé dans le plan ( $P$ ,  $M^*$ ) témoigne d'une extension délimitée par deux courbes représentant les pivots 2b et 4b.
- La droite ( $d4$ ) tracée en précontrainte totale est remplacée par la courbe 4b décalée vers le haut, ce qui permet d'obtenir un gain au niveau de la force  $P_{min}$ . La courbe 2b est une extension de la droite ( $d_2$ ) et du pivot 2 due à l'autorisation de la fissuration du béton en fibre inférieure en précontrainte partielle.
- En se déplaçant le long de la courbe 2b, la contrainte limite de compression du béton en fibre supérieure sous  $M_{max}$  est atteinte. A l'intersection des deux courbes 2b et 4b, les contraintes de compression en fibre supérieure ainsi que les contraintes de traction au niveau des aciers passifs sous  $M_{max}$  sont atteintes simultanément. En parcourant la courbe 4b, les contraintes limites de traction au niveau des aciers passifs sont atteintes sous  $M_{max}$ .
- Dans cette nouvelle approche, la force de  $P_{sous-critique}$  et  $P_{surcritique}$  connues en précontrainte totale sont définies, calculées analytiquement et représentées graphiquement en précontrainte partielle.
- La valeur de  $P_{sous-critique}$  définie dans la section 3.7.1 correspond graphiquement à la valeur de  $P$  pour laquelle la hauteur du domaine admissible est égale à  $\Delta M = M_{max} - M_{min}$ .

- De la même manière, si l'excentricité du câble correspondante à la force  $P_{\text{sous-critique}}$  dépasse la limite d'enrobage, le câble est remonté au niveau de cette limite et une valeur de  $P_{\text{surcritique}}$  est ainsi définie en précontrainte partielle.
- Le calcul de la force  $P_{\text{surcritique}}$  suit les étapes suivantes :
  - Placer le point  $(0, M_{\text{max}})$
  - Tracer la droite  $M_{\text{max}} + Pe_0$  avec  $e_0 = -(v' - d')$
  - Chercher le point d'intersection de la droite  $M_{\text{max}} + Pe_0$  avec l'extension du domaine admissible. Ce point d'intersection peut coïncider avec la courbe 2b ou 4b selon le cas.
  - La valeur de P correspondante peut être calculée analytiquement à partir des équations de la section 3.8.2 ou déduite graphiquement à partir du tracé du domaine admissible étendu.
- La valeur de  $P_{\text{max}}$  est calculée est interprétée graphiquement de la même manière que celle de  $P_{\text{min}}$  mais en tenant compte du fuseau de passage de compression définit par la courbe 2b et les droites  $(d_2)$  et  $(d_3)$  délimitant le domaine admissible.
- A partir des valeurs de  $P_{\text{min}}$  et  $P_{\text{max}}$  introduites en précontrainte partielle, un intervalle de valeurs admissibles des forces P est ainsi obtenu. De même, les coefficients  $\alpha$  tenant compte des variations de la force P autour d'une valeur moyenne pour chacun des états limite de service, peuvent être affectés aux bornes de l'intervalle défini.

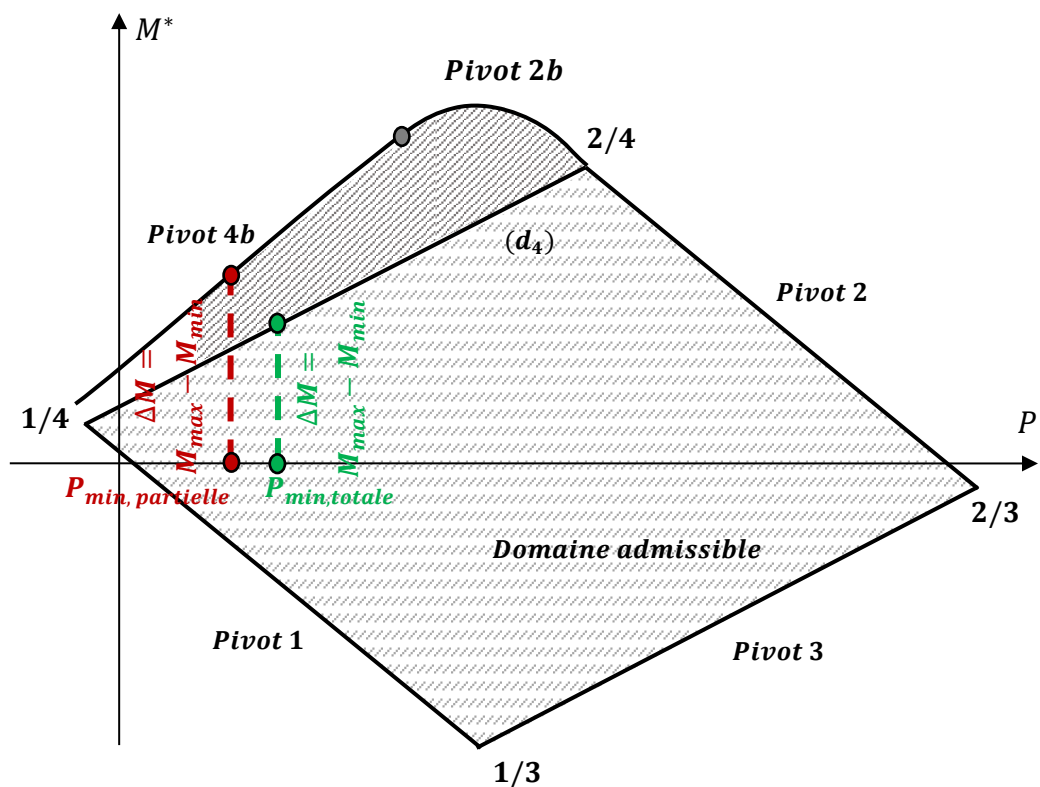


Figure 3.21 – Gain en valeur de la force de précontrainte en précontrainte partielle

- Le domaine admissible tracé en précontrainte partielle permet de visualiser sur un même graphique la force de précontrainte  $P$  nécessaire en totale et en partielle pour un pourcentage d'acier passif donné.
- L'extension du domaine admissible est tracée indépendamment des moments extérieurs appliqués et de l'excentricité du câble. Donc pour une section quelconque, et pour des limitations de contraintes définies, un domaine admissible en précontrainte partielle peut être obtenu. C'est ainsi que cette approche est utile pour l'intégration d'un calcul d'optimisation du dimensionnement d'une section en béton précontraint.
- Les droites  $M_{max} + Pe_0$  représentées sur les diagrammes du domaine admissible permettent d'étudier l'effet de la variation de l'excentricité du câble sur la force de précontrainte  $P$ , la pente  $e_0$  dicte ainsi la condition de la force de précontrainte : sous-critique ou sur-critique.
- En se basant sur le domaine admissible présenté dans cette nouvelle approche, les dimensions pour une section prédéfinie avec un couple  $(P, e_0)$  peuvent être graphiquement vérifiées. L'intersection entre la ligne verticale  $P$  et les courbes 4b ou 2b est tout d'abord déterminée. A partir de ce point une droite de pente  $e_0$  est tracée. L'intersection de cette droite avec l'axe vertical  $M^*$  représente la capacité de la section qui sera comparée au moment extérieur appliqué  $M_{max}$ . Si la capacité obtenue dépasse le moment extérieur appliqué, la section sera capable de résister aux charges appliquées.

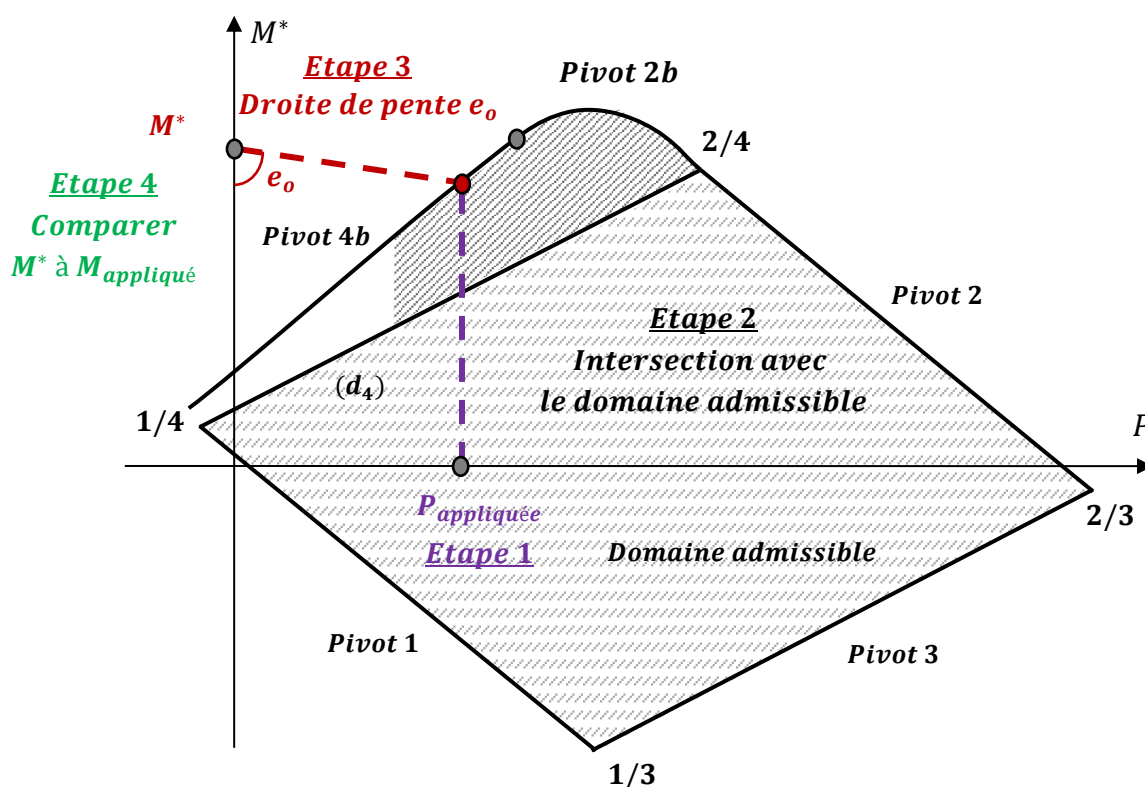


Figure 3.22 – Vérification de la capacité portante d'une section existante en précontrainte partielle



- Le décalage entre les valeurs de  $P_{1/3}$  et  $P_{2/4}$  est fonction du rapport  $v/v'$ . Ce même rapport a une influence sur la condition de coffrage définie en précontrainte partielle dans cette nouvelle approche.

#### 4. Condition de coffrage en précontrainte totale et partielle

La condition de coffrage d'une section en béton précontraint permet de fixer la géométrie de la section. Le coffrage minimal est dicté par le fuseau de passage en compression. La section minimale est alors déterminée lorsque les contraintes de compression  $\bar{\sigma}_2$  en fibre supérieure et  $\sigma'_1$  en fibre inférieure sont atteintes. Ceci donne deux équations à respecter pour la géométrie de la section.

$$\begin{array}{ll}
 \text{En fibre inférieure} & \sigma = \bar{\sigma}_3 \quad \frac{I}{v'} \geq \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}_4 - \bar{\sigma}_3} \\
 \text{En fibre supérieure} & \sigma = \bar{\sigma}_2 \quad \frac{I}{v} \geq \frac{\Delta M}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_2}
 \end{array} \quad [3.87]$$

Ce qui se traduit par

$$\begin{array}{ll}
 \text{En fibre inférieure} & \frac{I}{v'} \geq \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_3 + \bar{\sigma}_1 v/v'} \\
 \text{En fibre supérieure} & \frac{I}{v'} \geq \frac{P \rho h}{\bar{\sigma}_2 + \bar{\sigma}_4 v/v'}
 \end{array} \quad [3.88]$$

Dans cette nouvelle approche, les conditions de coffrage sont évaluées en précontrainte totale en se basant sur la hauteur du parallélogramme tracé dans le plan  $(\Delta M, P)$ . La hauteur du parallélogramme doit être suffisante pour y inscrire les variations du moment extérieur appliqué  $\Delta M = M_{max} - M_{min}$ , qui sont également celles du moment  $M^*$ , indépendamment des valeurs de  $P$  et de  $e_0$

Ceci permet aussi la définition de la condition de coffrage en précontrainte partielle en adoptant le même principe.

Un gain dans la valeur maximale de  $\Delta M$  est obtenu en se basant sur les équations des extensions du domaine admissible délimitées par les courbes 2b et 4b.

Il est intéressant de noter que le décalage entre les valeurs de  $P_{1/3}$  et  $P_{2/4}$  dépend du rapport  $v/v'$  et c'est bien ce rapport qui dicte la possibilité de gain dans la condition de coffrage en précontrainte partielle. Pour une section symétrique, ce rapport est égal à 1 et les deux forces  $P_{1/3}$  et  $P_{2/4}$  sont égales. Pour des sections ayant un rapport  $v/v' \leq 1$ , un gain dans la condition de coffrage peut être obtenu en précontrainte partielle.

**Condition de coffrage en précontrainte totale**

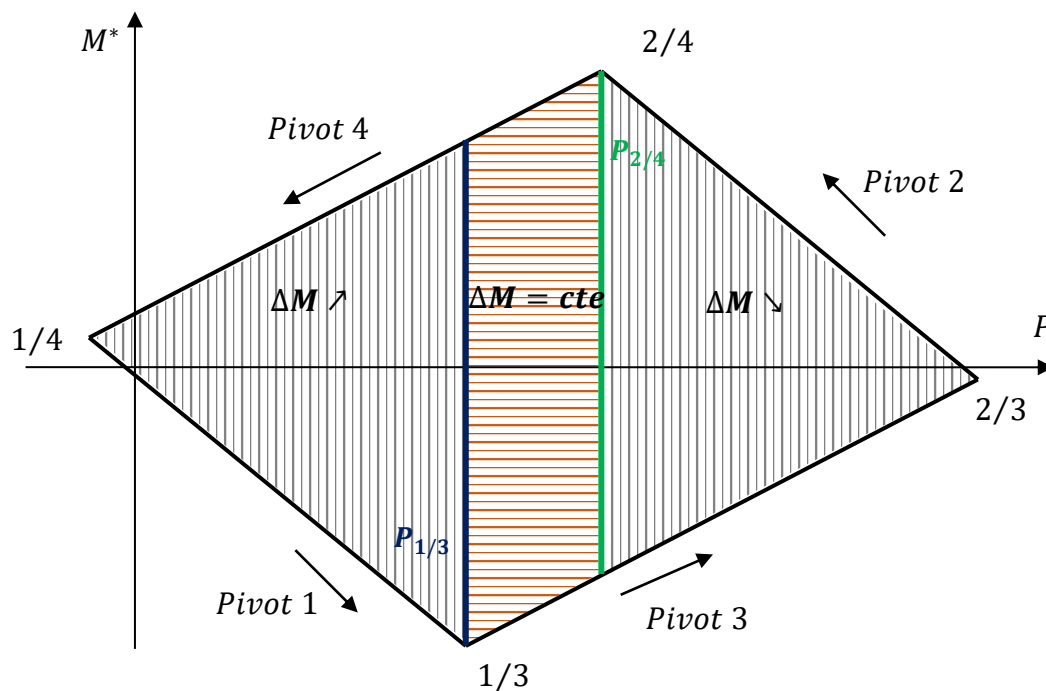


Figure 3.23 – Variation de  $\Delta M$  dans le plan  $(M^*, P)$  en précontrainte totale

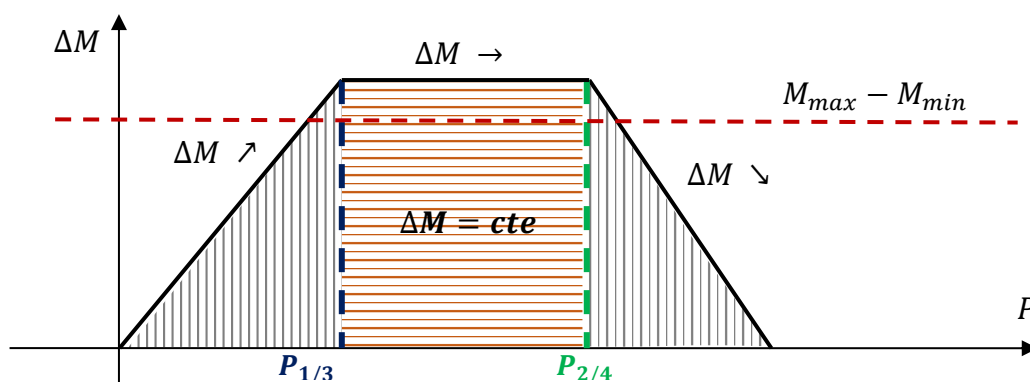


Figure 3.24 – Variation de  $\Delta M$  dans le plan  $(\Delta M, P)$  en précontrainte totale

En précontrainte totale, la courbe représentant les variations  $\Delta M$  est une fonction linéaire dépendant des propriétés géométriques de la section ainsi que des limites des contraintes admissibles de compression et de traction en fibre supérieure et inférieure. Pour les valeurs de  $P$  comprises entre 0 et  $P_{1/3}$ , cette fonction est croissante. Elle atteint un palier horizontal entre les valeurs  $P_{1/3}$  et  $P_{2/4}$  puis représente une variation décroissante entre les valeurs  $P_{2/4}$  et  $P_{2/3}$ .

La condition de coffrage est considérée comme vérifiée si la droite horizontale représentant les variations des moments extérieurs  $M_{max} - M_{min}$  est située au-dessous du palier horizontal délimitant le domaine admissible tracé dans le plan  $(\Delta M, P)$ .

**Condition de coffrage en précontrainte partielle**

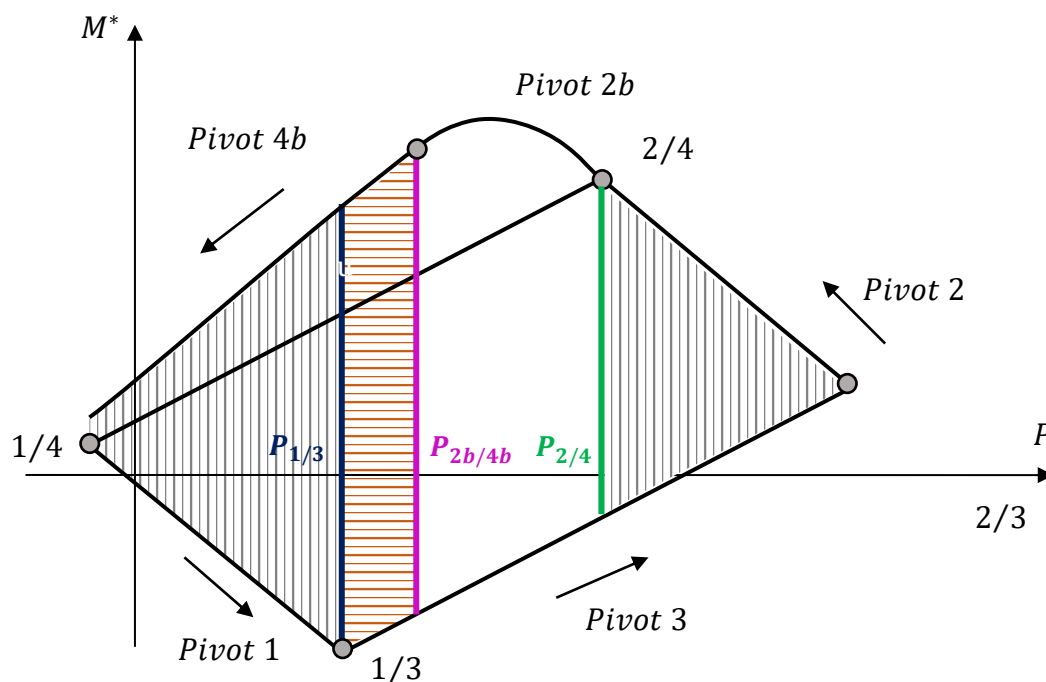


Figure 3.25 – Variation de  $\Delta M$  dans le plan  $(M^*, P)$  en précontrainte partielle

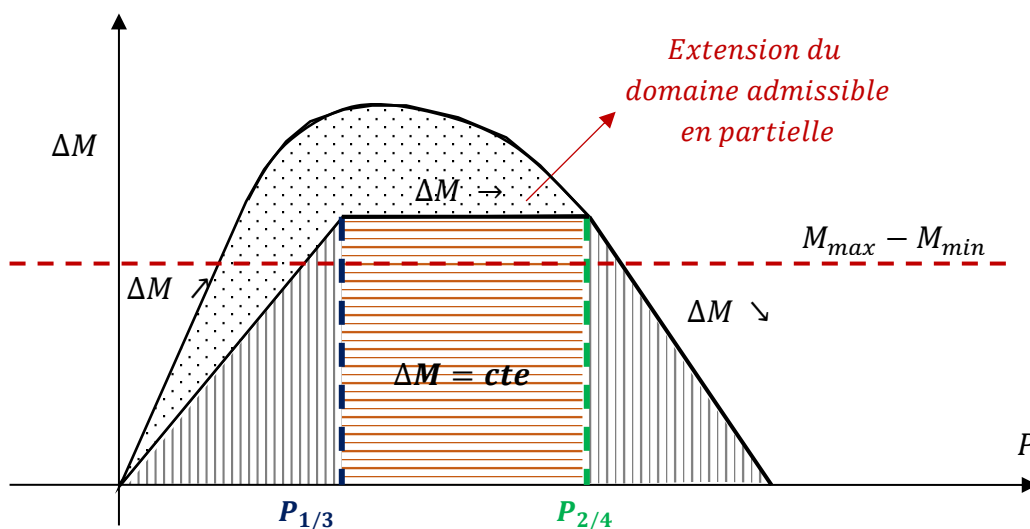


Figure 3.26 - Variation de  $\Delta M$  dans le plan  $(\Delta M, P)$  en précontrainte partielle

Le même principe adopté en précontrainte totale est appliqué pour la représentation de la condition de coffrage en précontrainte partielle dans le plan  $(\Delta M, P)$ . La différence  $M^*_{max} - M^*_{min}$  est calculée le long du domaine admissible et la valeur maximale est ainsi recherchée. Cette valeur maximale représentant la condition de coffrage en précontrainte partielle est comparée à la variation des moments extérieurs appliqués.

Pour des valeurs de  $P$  comprises entre  $P_{1/4}$  et  $P_{1/3}$  ou  $P_{2/3}$  (selon la valeur du rapport  $v/v'$ ), la courbe décrivant la variation  $\Delta M$  est constituée d'une courbe de degré 4. Pour les valeurs de  $P$  supérieures, une courbe linéaire décroissante représente la limite  $\Delta M$ .

La recherche de la valeur analytique de la variation maximale de  $\Delta M$  est effectuée en définissant un intervalle d'encadrement déduit à partir du calcul de la variation aux points particuliers correspondants aux valeurs de  $P_{1/3}$ ,  $P_{2b/4b}$  et  $P_{2/4}$ .

Pour des valeurs de  $P_{1/3} \leq P_{2b/4b}$ , la valeur de  $M^*_{max}$  est décrite par la courbe du pivot 4b ; si cette valeur est comprise entre  $P_{2b/4b}$  et  $P_{2/2b}$ , la courbe 2b est utilisée pour le calcul de  $M^*_{max}$ . Pour tous les autres cas, la valeur de  $M^*_{max}$  coïncide au niveau de la droite ( $d_2$ ) correspondante au pivot 2. Les valeurs de  $M^*_{min}$  correspondantes sont recherchées au niveau des droites ( $d_1$  et  $d_3$ ) représentant les pivots 1 et 3 respectivement.

#### Calcul de la position de l'axe neutre aux points particuliers de P :

Pour  $P = P_{1/3}$ , la valeur de  $M^*_{max}$  est recherchée le long des courbes 2b ou 4b selon le cas.

**Cas 1 :**  $P = P_{1/3}$  et  $M^*_{max}$  recherché le long de la courbe 2b

$$S_{hx} = \frac{Px}{\sigma_{sup}} \Rightarrow S_{hx} - \frac{P_{1/3}}{\sigma_2} x = 0 \quad [3.89]$$

**Cas 2 :**  $P = P_{1/3}$  et  $M^*_{max}$  recherchée le long de la courbe 4b

$$S_{hx} = \frac{\alpha_e P(d-x)}{\sigma_{st}} \Rightarrow S_{hx} - \frac{\alpha_e P_{1/3}}{f_{yd}} (x-d) = 0 \quad [3.90]$$

Le calcul de la position de l'axe neutre et donc de la valeur de  $M^*_{max}$  correspondante, revient à résoudre une équation polynomiale de degré 3. Cette équation est résolue à l'aide de la méthode Muller détaillée dans l'Annexe C.

Pour les autres cas, à partir de la valeur de P et la position de l'axe neutre, la valeur de  $M^*_{max}$  est calculée à partir de l'équation [3.49]. Les valeurs de  $M^*_{min}$  correspondantes sont ainsi recherchées au niveau des droites ( $d_1$  et  $d_3$ ) selon le cas.

### **5. Corrélation entre l'ouverture des fissures et la contrainte au niveau des aciers**

L'ouverture de la fissure est donnée par l'équation 7.8 de l'EN 1992-1-1 section 7.3.4.

$$W_k = S_{r,max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad [3.91]$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s - k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [3.92]$$

$$S_{r,max} = K_3 c + \frac{K_1 K_2 K_4 \varphi}{\rho_{p,eff}}$$

$$\rho_{p,eff} = \frac{A_s + \xi_1^2 A'_p}{A_{c,eff}} \quad [3.93]$$

Aire de la section effective du béton autour des armatures tendues de hauteur  $h_{c,eff}$

$$A_{c,eff} = b h_{c,eff} \quad [3.94]$$

$$h_{c,eff} = \text{minimum} \left\{ 2.5(h - d); \frac{(h - x)}{3}; \frac{h}{2} \right\} \quad [3.95]$$

Une valeur limite de la position de l'axe neutre est définie pour laquelle

$$2.5 (h - d) = (h - x)/3 \quad [3.96]$$

$$x_0 = h - 7.5(h - d) \quad [3.97]$$

Pour des valeurs de  $x < x_0$   $h_{c,eff} = 2.5 (h - d)$

Et cela doit être un cas assez général même si on peut s'attendre à ce qu'il y ait des exceptions. Dans ce cas nous sommes ramenés à une condition équivalente à la limitation de contrainte sur l'armature.

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\alpha_e}{E_s} \left\{ \frac{d - x}{x} \sigma_c - K_t f_{ct} \left( 1 + \frac{A_{c,eff}}{\alpha_e A_{st}} \right) \right\} \geq 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad [3.98]$$

En posant

$$\sigma_{ref} = \frac{d - x}{x} \sigma_c \quad [3.99]$$

Nous en déduisons

$$\sigma_{ref} = \text{minimum} \left\{ \frac{5}{3} \frac{E_s W_k}{\alpha_e S_{r,max}}; \frac{E_s W_k}{\alpha_e S_{r,max}} + K_t f_{ct} \left( 1 + \frac{A_{c,eff}}{\alpha_e A_{st}} \right) \right\} \quad [3.100]$$

Finalement, pour une ouverture de fissure  $W_k$  bien déterminée et en fixant les autres paramètres, la contrainte limite correspondante au niveau des aciers passifs peut être calculée.

$$f_{ys} = \alpha_e \sigma_{ref} \quad [3.101]$$

## 6. Vérification à l'état limite ultime ELU

### 6.1 Principe de la vérification

La vérification de la section à l'état limite ultime est abordée d'une manière cohérente à l'approche développée pour le dimensionnement à l'ELS, et ceci dans l'intention de connecter tout le calcul de la section à un algorithme d'optimisation.

Le pourcentage d'acier passif étant fixé au préalable, le diagramme d'interaction correspondant est ainsi tracé en tenant compte du moment de précontrainte. Sachant l'excentricité du câble, la force de précontrainte nécessaire pour la vérification à l'état limite ultime est calculée. Si cette dernière est inférieure à la force de précontrainte dimensionnante à l'ELS, alors la section est vérifiée pour la quantité d'acier passif considérée. Dans le cas contraire, il faudra soit augmenter la force de précontrainte afin de satisfaire la vérification à l'ELU soit augmenter le pourcentage d'acier passif et recommencer le calcul.

### 6.2 Hypothèses

- Hypothèse de section plane : les sections planes restent planes et perpendiculaires à leur ligne moyenne après déformation
- Loi de comportement non linéaire du béton et bilinéaire des aciers déjà mentionnées dans la section 3.2.
- Pas de glissement relatif entre le béton et les armatures
- La résistance à la traction du béton tendu est négligée
- Les sections des armatures tendues et comprimées sont supposées concentrées en leurs centres de gravité respectifs

### 6.3 Diagramme d'interaction

Tracer le diagramme d'interaction d'une section revient à écrire les équations d'équilibre au centre de gravité de la section en parcourant le diagramme des déformations et pivotant autour des pivots A, B et C, tel que défini par l'EN 1992-1-1 section 6.1.

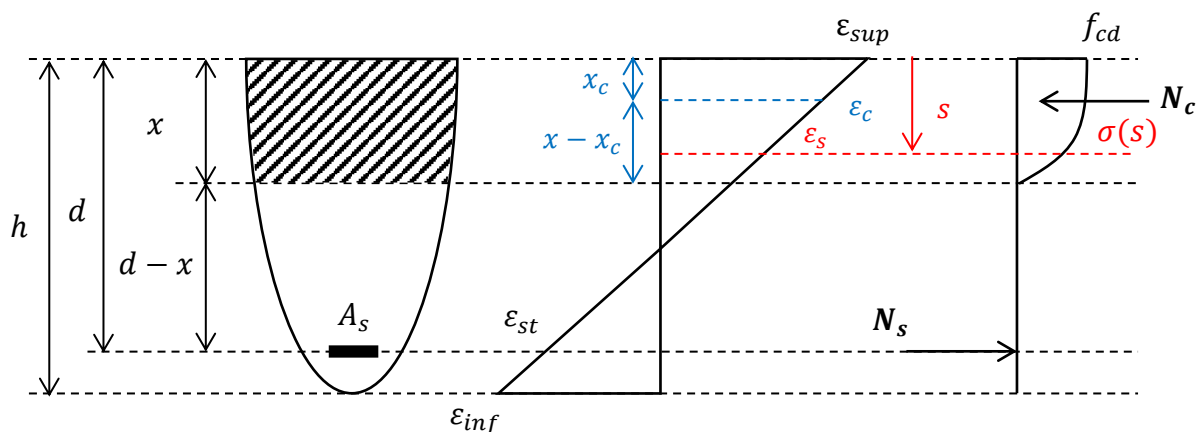


Figure 3.27 - Diagramme des déformations et des contraintes de la section à l'ELU

Avec

- $h$  hauteur totale de la section
- $d$  hauteur utile de la section
- $x$  position de l'axe neutre comptée à partir de la fibre supérieure
- $x_c$  position de l'axe neutre pour  $\varepsilon = \varepsilon_c$
- $s$  ordonnée du point de calcul
- $\varepsilon_{sup}$  déformation du béton au niveau de la fibre supérieure du béton
- $\varepsilon_{inf}$  déformation du béton au niveau de la fibre inférieure du béton
- $\varepsilon_{st}$  déformation au niveau des aciers passifs
- $\varepsilon_c$  déformation atteinte du béton pour la contrainte maximale (tableau 3.1 de l'EN 1992-1-1)
- $f_{cd}$  contrainte limite de calcul de la compression du béton
- $\sigma(s)$  contrainte du béton au niveau de l'ordonnée  $s$
- $N_c$  effort normal de compression dans le béton
- $N_s$  effort normal de traction au niveau des aciers passifs

*Il faudra tout d'abord noter que la méthode détaillée dans ce paragraphe a été développée durant le travail de thèse.*

La loi de comportement parabole-rectangle non linéaire du béton peut être assimilée à un rectangle duquel est retranchée une hyperbole, comme illustré dans le schéma suivant.

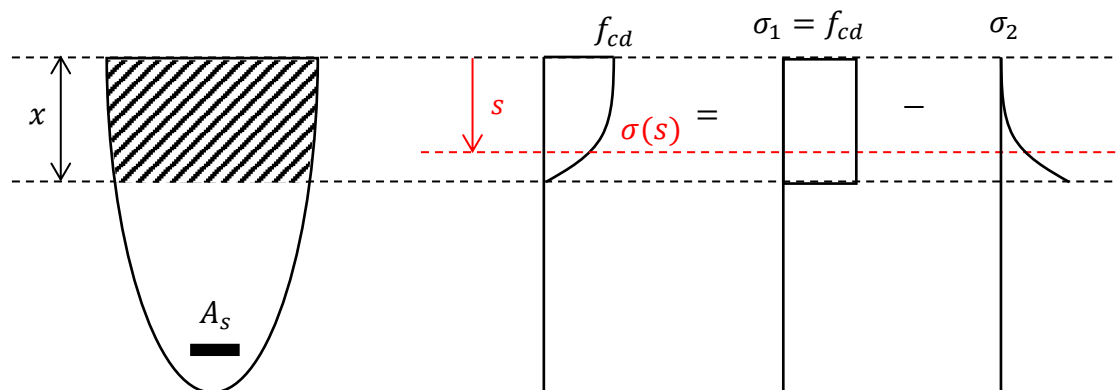


Figure 3.28 - Loi de comportement non linéaire du béton

La relation contrainte-déformation donnée par l'EN 1992-1-1 section 3.1.7

$$\sigma = \begin{cases} f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^n \right] & \text{si } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon_c \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{cu} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad [3.102]$$

La contrainte  $\sigma$  peut s'écrire

$$\sigma(s) = \sigma_1 - \sigma_2 \quad [3.103]$$

Avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= f_{cd} \\ \sigma_2 &= \begin{cases} f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^n & \text{si } \varepsilon \leq \varepsilon_c \\ f_{cd} & \text{si } \varepsilon > \varepsilon_c \end{cases} \end{aligned} \quad [3.104]$$

### 6.3.1. Efforts dans le béton comprimé

#### **Effort normal du béton comprimé**

L'effort normal de compression du béton s'écrit

$$N_c = \int_0^x b(s) \sigma(s) ds \quad [3.105]$$

En remplaçant la valeur  $\sigma(s)$  par son expression de l'équation [3.104]

$$\begin{aligned} N_c &= \int_0^{\min(x,h)} b(s) (\sigma_1 - \sigma_2) ds \\ N_c &= \int_0^{\min(x,h)} b(s) f_{cd} ds - \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^n b(s) ds \end{aligned} \quad [3.106]$$

La borne supérieure des intégrales est  $\min(x,h)$ , du fait que pour  $x \geq h$ , la section devient entièrement comprimée et passe en pivot C, ce qui changera l'expression de l'effort normal  $N_c$ . La borne inférieure de la deuxième intégrale est  $\max(x_c, 0)$  de façon à ce que si  $x_c \leq 0$ , l'intégrale commence de 0.

#### **Moment fléchissant du béton comprimé au point $x_c$**

Le moment fléchissant au point  $x_c$  pour lequel  $\varepsilon = \varepsilon_c$

$$M_{c/c} = \int_0^{\min(x,h)} b(s) f_{cd} (x_c - s) ds - \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} \sigma(s) b(s) (x_c - s) ds \quad [3.107]$$

$$M_{c/c} = f_{cd} \left[ \int_0^{\min(x,h)} b(s) (x_c - s) ds - \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^n b(s) (x_c - s) ds \right] \quad [3.108]$$

En un point  $x_o$  quelconque

$$M_{c/o} = \int_0^{\min(x,h)} b(s) f_{cd} (x_o - s) ds - \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} \sigma(s) b(s) (x_o - s) ds \quad [3.109]$$



$$M_{c/o} = \int_0^{\min(x,h)} b(s) f_{cd} (x_o - s + x_c - x_c) ds - \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} \sigma(s) b(s) (x_o - s + x_c - x_c) ds$$

$$M_{c/o} = (x_o - x_c) N_c + M_{c/c} \quad [3.110]$$

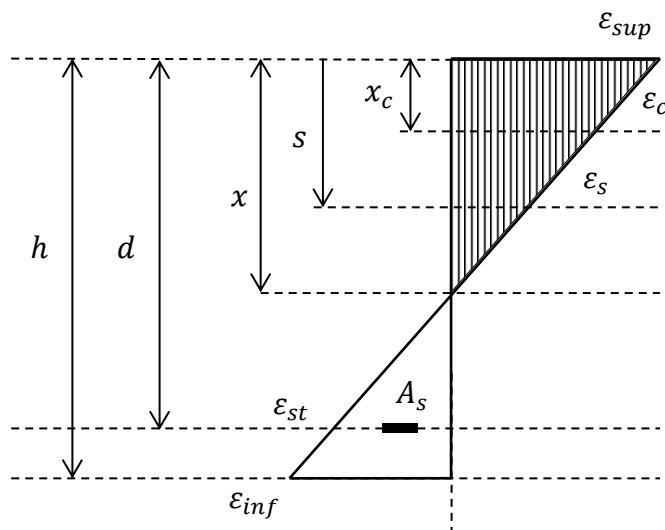


Figure 3.29 - Diagramme des déformations de la section à l'ELU

$$\frac{\varepsilon_{sup}}{x} = \frac{\varepsilon_c}{x - x_c} = \frac{\varepsilon_{st}}{x - d} = \frac{\varepsilon_{inf}}{x - h} \quad [3.111]$$

$$\sigma_2 = f_{cd} \left( 1 - \frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon_c} \right)^n \quad [3.112]$$

En appliquant le principe des triangles semblables,

$$\frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon_c} = \frac{x - s}{x - x_c} \quad [3.113]$$

$$1 - \frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon_c} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon(s)}{\varepsilon_c} = \frac{s - x_c}{x - x_c} \quad [3.114]$$

La contrainte  $\sigma_2$  devient

$$\sigma_2 = f_{cd} \left( \frac{s - x_c}{x - x_c} \right)^n \quad [3.115]$$

Les équations de l'effort normal et du moment du béton comprimé deviennent alors

$$N_c = f_{cd} \int_0^{\min(x,h)} b(s) ds - \frac{f_{cd}}{(x - x_c)^n} \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} (s - x_c)^n b(s) ds \quad [3.116]$$

$$M_{c/c} = f_{cd} \int_0^{\min(x,h)} b(s) (x_c - s) ds - \frac{f_{cd}}{(x - x_c)^n} \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} (s - x_c)^n b(s) (x_c - s) ds \quad [3.117]$$

En incluant  $(x - s)$  dans l'équation du moment  $M_{c/c}$

$$M_{c/c} = f_{cd}(x_c - x) \int_0^{\min(x,h)} b(s) ds + f_{cd} \int_0^{\min(x,h)} (x - s) b(s) ds + \frac{f_{cd}}{(x - x_c)^n} \int_{\max(x_c,0)}^{\min(x,h)} (s - x_c)^{n+1} b(s) ds \quad [3.118]$$

### 6.3.2. Résolution de l'intégrale $I_n$

Afin de résoudre les intégrales des équations d'équilibre, il faudra tout d'abord détailler la résolution de l'intégrale

$$I_n = \int_{x_c}^x (s - x_c)^n b(s) ds \quad [3.119]$$

En posant

$$\begin{aligned} t &= s - x_c \\ \Rightarrow s &= t + x_c \\ \Rightarrow ds &= dt \end{aligned} \quad [3.120]$$

Comme pour le dimensionnement en ELS, les équations d'équilibre sont exprimées en fonction des propriétés géométriques rapportées à l'axe neutre  $x$  de la section.

Propriétés mécaniques de la section à l'ELU par rapport à l'axe neutre  $x$  de la section

Aire de la section comprimée  $A_h = \int_0^x b(s) ds \quad [3.121]$

Moment statique  $S_{h/x} = \int_0^x (x - s)b(s) ds \quad [3.122]$

Moment d'inertie  $I_{h/x} = \int_0^x (x - s)^2 b(s) ds \quad [3.123]$

La section considérée étant de largeur linéaire par morceaux, la valeur  $\xi$  est définie sur chaque intervalle

$$\xi = \frac{s - x_0}{x_1} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad [3.124]$$

- $x_0$  début de l'intervalle
- $x_1$  longueur de l'intervalle

La largeur est un polynôme de **degré 1**

$$b = b_0 + b_1 \xi \quad [3.125]$$

L'aire de la section est un polynôme de **degré 2**

$$A_c = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad \{a_1; a_2\} = x_1 \left\{ b_0; \frac{b_1}{2} \right\} \quad [3.126]$$

Le moment statique de la section est un polynôme de **degré 3**

$$S_{c/x} = s_0 + s_1\xi + s_2\xi^2 + s_3\xi^3 \quad \{s_1; s_2; s_3\} = x_1 \left\{ a_0; \frac{a_1}{2}; \frac{a_2}{3} \right\} \quad [3.127]$$

Le moment d'inertie de la section est donc un polynôme de **degré 4**, qui ne sera pas utilisé dans cette résolution.

En remplaçant  $\xi$  par sa valeur dans l'équation de la largeur  $b$

$$b(s) = b_0 + b_1 \frac{s - x_0}{x_1} = b_0 + \frac{b_1}{x_1} (t + x_c - x_0) \quad [3.128]$$

De la forme

$$b(s) = c_0 + c_1 t$$

$$c_0 = b_0 + \frac{b_1}{x_1} (x_c - x_0) \quad c_1 = \frac{b_1}{x_1} \quad [3.129]$$

L'intégrale  $I_n$  pour un intervalle de la section devient

$$I_n = \int_{t_{min}}^{t_{max}} t^n (c_0 + c_1 t) dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} c_0 + \frac{t^{n+2}}{n+2} c_1 \right]_{t_{min}}^{t_{max}} \quad [3.130]$$

Bornes de l'intégrale pour chaque intervalle  $i$

$$t_{min,i} = \max(0, \min(x_{o,i}, x) - x_c) \quad [3.131]$$

$$t_{max,i} = \max(0, \min(x_{o,i} + x_{1,i}, x) - x_c)$$

L'intégrale  $I_n$  pour toute la section devient

$$\begin{aligned} I_{n,i} &= I_n(t_{max,i}) - I_n(t_{min,i}) \\ I_{n+1,i} &= I_{n+1}(t_{max,i}) - I_{n+1}(t_{min,i}) \\ I_n &= \sum I_{n,i} \quad I_{n+1} = \sum I_{n+1,i} \end{aligned} \quad [3.132]$$

6.3.3. Expression de l'effort normal et du moment du béton comprimé en fonction de  $I_n$  et des propriétés mécaniques

$$N_c = f_{cd} A_{cx} - \frac{f_{cd}}{(x - x_c)^n} I_n \quad [3.133]$$

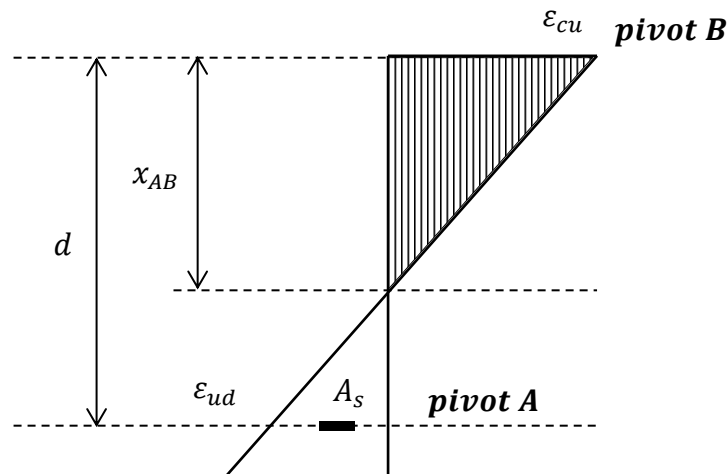
$$\text{Au point } x_c: \quad M_{c/c} = f_{cd} (x_c - x) A_{cx} + f_{cd} S_{cx} + \frac{I_{n+1}}{(x - x_c)} \quad [3.134]$$

$$\text{En un point quelconque } x_o: \quad M_{c/o} = (x_o - x_c) N_c + M_{c/c} \quad [3.135]$$

### 6.3.4. Expression de $(x - x_c)$

L'expression  $(x - x_c)$  change de valeur lorsque la section passe du pivot A au pivot B. Au pivot C, la valeur de  $x_c$  est fixe.

Il faudra tout d'abord déterminer la valeur de  $x_{AB}$  position frontière entre le pivot A et B.



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_{AB}} = \frac{\varepsilon_{ud}}{x_{AB} - d} \quad [3.136]$$

$$x_{AB} = \frac{\varepsilon_{ud} d}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{ud}}$$

si  $x \leq x_{AB} \Rightarrow$  la section est au pivot A

si  $x \geq x_{AB} \Rightarrow$  la section est au pivot B

#### **Pivot A**

$$x \leq x_{AB}$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x - x_c} = \frac{\varepsilon_{ud}}{x - d} \quad [3.137]$$

$$x - x_c = (x - d) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{ud}} \quad [3.138]$$

#### **Pivot B**

$$x \geq x_{AB}$$

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} = \frac{x - x_c}{x} \quad [3.139]$$

$$x - x_c = x \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \quad [3.140]$$

### **Pivot C : section entièrement comprimée**

L'axe neutre est hors de la section  $x \geq h$

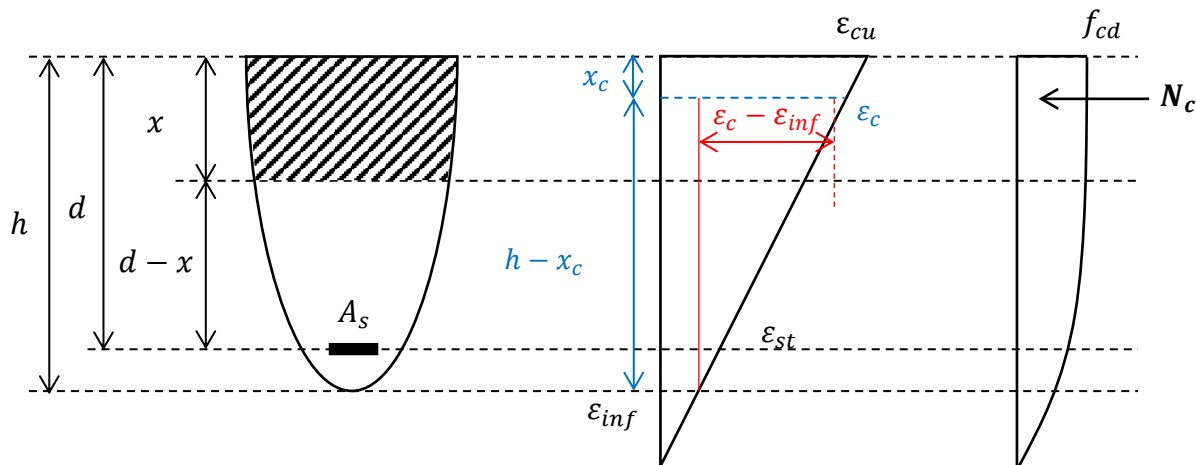


Figure 3.30 - Diagramme des contraintes et déformations en pivot C

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{inf}} = \frac{x - x_c}{h - x_c} \quad [3.141]$$

$$x - x_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{inf}} (h - x_c) \quad [3.142]$$

En pivot C, la valeur de  $x_c$  est fixe.

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} = \frac{h - x_c}{h} \quad [3.143]$$

$$\Rightarrow x_c = h \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)$$

En pivotant autour du pivot C, la déformation en fibre inférieure  $\varepsilon_{inf}$  varie entre 0 et  $\varepsilon_{c2}$ , les équations d'équilibre sont donc paramétrées en fonction de  $\varepsilon_{inf}$ .

Triangles semblables

$$\frac{\varepsilon_c - \varepsilon(s)}{\varepsilon_c - \varepsilon_{inf}} = \frac{s - x_c}{h - x_c} \quad [3.144]$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon(s)}{\varepsilon_c} = \frac{s - x_c}{h - x_c} \left( 1 - \frac{\varepsilon_{inf}}{\varepsilon_c} \right)$$

L'expression de la contrainte  $\sigma_2$  de l'équation [3.104] devient

$$\sigma_2 = f_{cd} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^n = f_{cd} \left[\frac{s - x_c}{h - x_c} \left(1 - \frac{\varepsilon_{inf}}{\varepsilon_c}\right)\right]^n \quad [3.145]$$

Les équations d'équilibre deviennent :

Effort normal de compression dans le béton

$$N_c = f_{cd} A_c(h) - \frac{f_{cd}}{(h - x_c)^n} I_n \left(1 - \frac{\varepsilon_{inf}}{\varepsilon_c}\right)^n \quad [3.146]$$

Moment fléchissant du béton comprimé

$$M_c = f_{cd} A_c(h)(x_c - h) + f_{cd} S_c(h) + \frac{f_{cd}}{(h - x_c)^n} I_{n+1} \left(1 - \frac{\varepsilon_{inf}}{\varepsilon_c}\right)^n \quad [3.147]$$

avec

- $A_c(h)$  Aire totale de la section
- $S_c(h)$  Moment statique de toute la section

### 6.3.5. Effort normal et moment fléchissant des aciers passifs

La déformation au niveau des aciers passifs est donnée par l'équation [3.111]

Lorsque  $x \leq h$ , en pivots A et B :

$$\varepsilon_{st} = \frac{\varepsilon_c (x - d)}{x - x_c} \quad [3.148]$$

Lorsque  $x \geq h$ , en pivot C :

$$\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{st}}{\varepsilon_c - \varepsilon_{inf}} = \frac{d - x_c}{h - x_c} \quad [3.149]$$

$$\varepsilon_{st} = \frac{x_c - d}{h - x_c} (\varepsilon_c - \varepsilon_{inf}) + \varepsilon_c$$

Effort normal de traction dans les armatures passives

$$N_s = A_s \varepsilon_{st} \sigma_{st} \quad [3.150]$$

La valeur de  $\sigma_{st}$  est donnée par l'équation [3.26].

$$\sigma_{st} = f_{yd} \left[1 + (k - 1) \left(\frac{\varepsilon_{st} - \varepsilon_p}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_p}\right)\right] \quad [3.151]$$

Moment fléchissant des armatures passives

$$M_s = N_s(v - d) \quad [3.152]$$

6.3.6. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre formant le diagramme d'interaction de la section sont la somme des efforts normaux et des moments fléchissant de compression du béton et de traction des armatures passives.

$$\begin{cases} N = N_s + N_c \\ M = M_s + M_c \end{cases} \quad [3.153]$$

Le diagramme d'interaction est tracé en parcourant tous les pivots de la section et en calculant à chaque position de l'axe neutre la valeur de l'effort normal total et du moment fléchissant total. Nous obtenons ainsi la partie du diagramme pour laquelle les aciers tendus sont en fibre inférieure, donc pour le cas d'un moment positif qui tend la fibre inférieure. Le cas d'un moment négatif pour lequel les aciers tendus sont en fibre supérieure devrait être également étudié afin d'obtenir la totalité du diagramme d'interaction.

6.3.7. Diagramme d'interaction pour différents pourcentages d'acier

Dans le graphe de la figure suivante, le diagramme d'interaction d'une section en béton armé est tracé pour trois pourcentages d'acier dans un plan (N, M).

**Diagramme d'interaction**

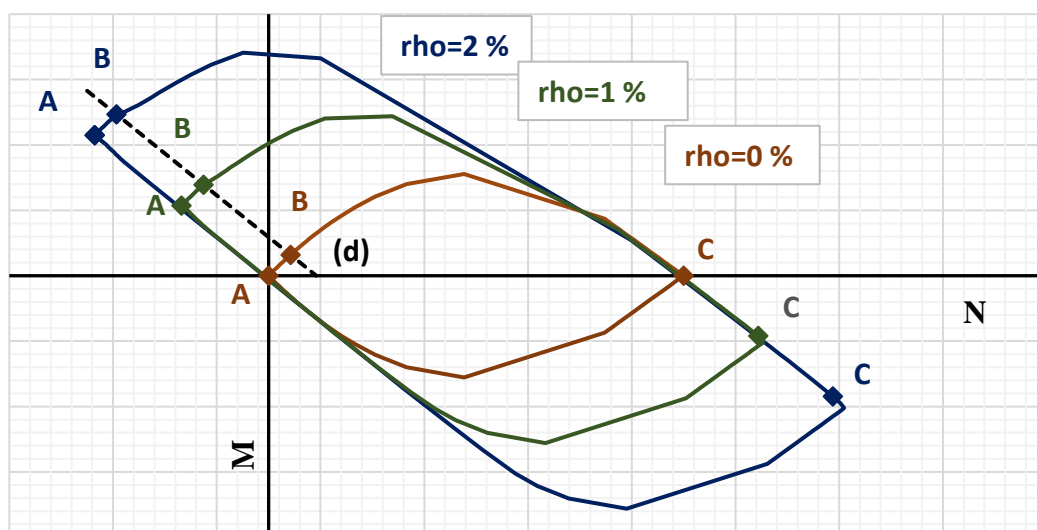


Figure 3.31 - Diagramme d'interaction pour différents pourcentages d'acier

- Pour un pourcentage d'acier nul  $\rho = 0$ , le diagramme est centré sur l'axe des abscisses.

- Les pivots A, B et C sont repérés pour chaque graphe, tel que

Pivot A	Pivot B	Pivot C
$\varepsilon_{inf} = \varepsilon_{ud}$	$\varepsilon_{sup} = \varepsilon_{cu}$	$\varepsilon_{sup} = \varepsilon_{inf} = \varepsilon_c$

- Une remarque importante :  
Il existe une famille de droites (d) de même pente  $a_d$  reliant respectivement les pivots A, B et C de tous les diagrammes d'interaction.

$$a_d = \frac{M_{\rho a} - M_{\rho b}}{F_{\rho a} - F_{\rho b}} = \frac{M_s}{F_s} = v - d \quad [3.154]$$

De plus, la distance entre les pivots A des différents diagrammes est proportionnelle au pourcentage d'acier. Ce qui veut dire qu'un diagramme d'interaction de pourcentage quelconque peut être obtenu par homothétie du diagramme sans acier de  $rho = 0$ .



6.3.8. Organigramme de calcul du diagramme d'interaction

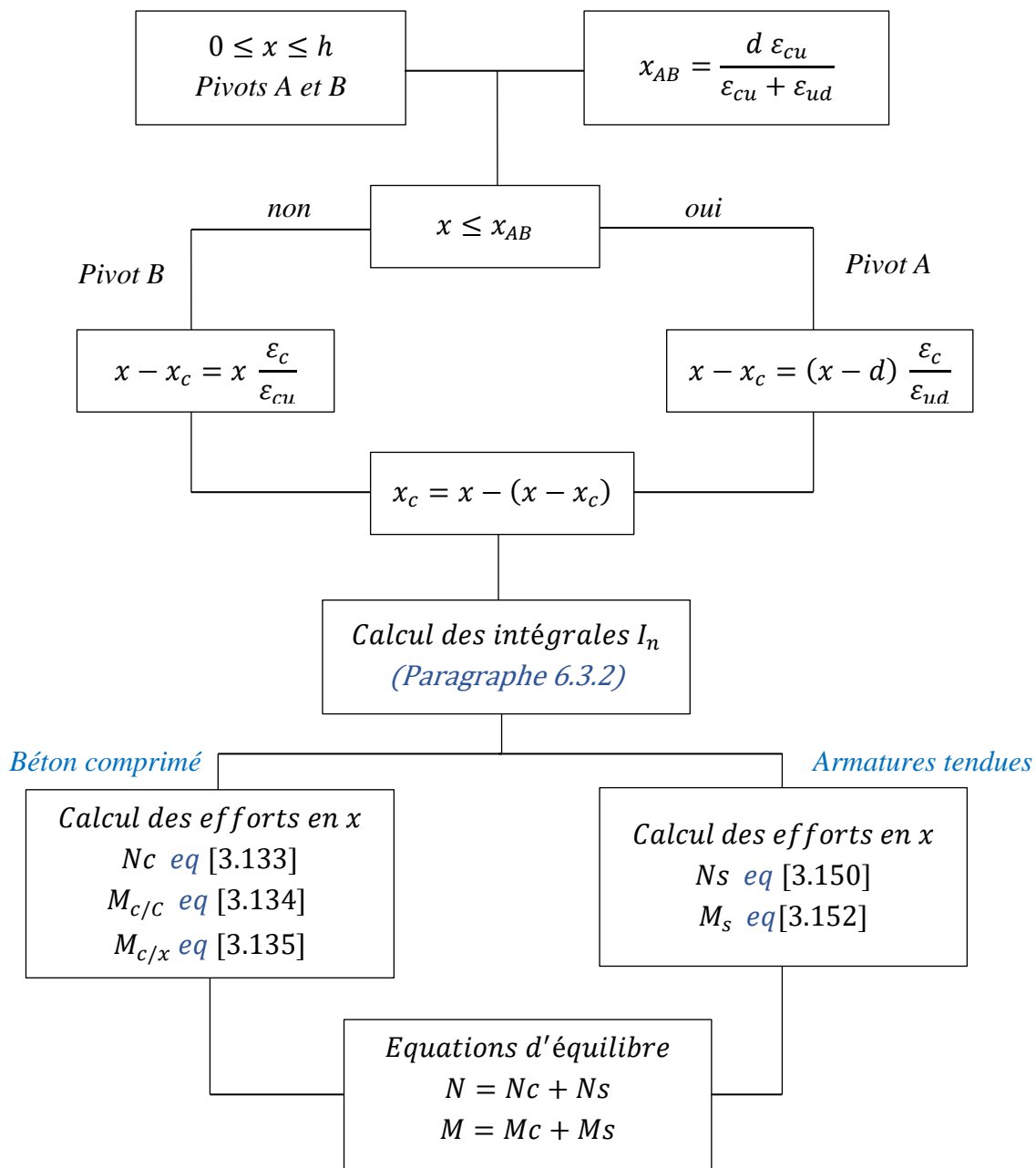


Figure 3.32 - Organigramme de calcul pour  $x \leq h$

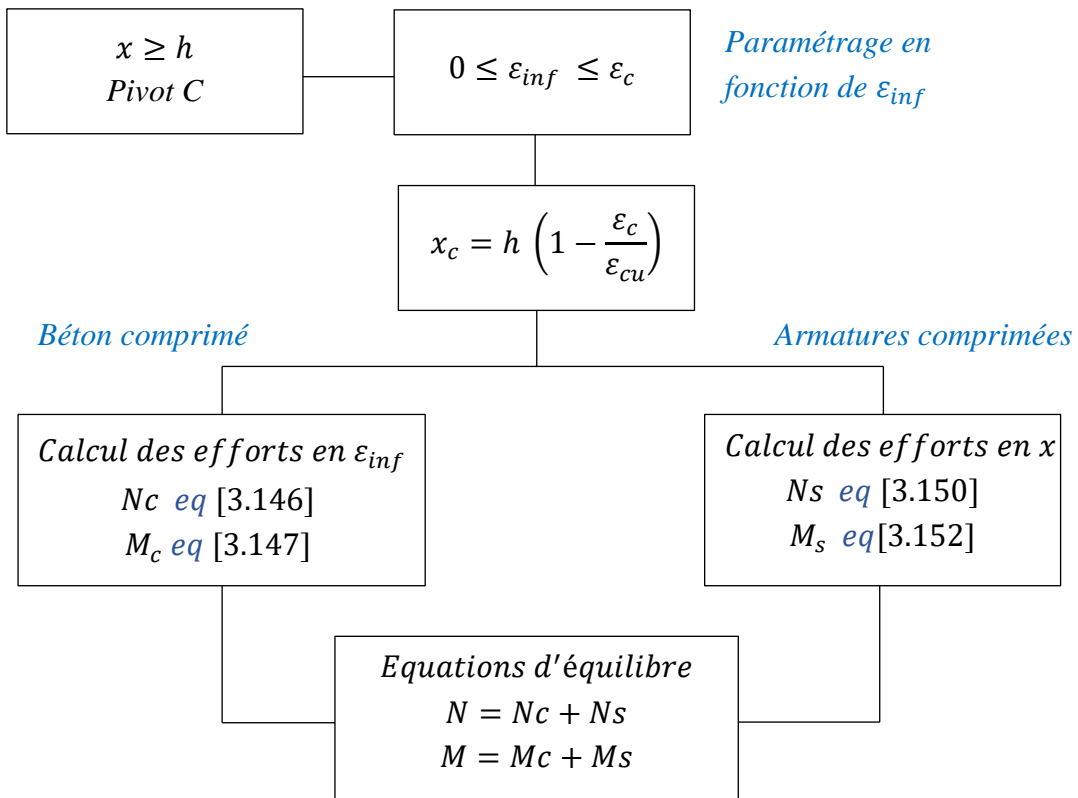
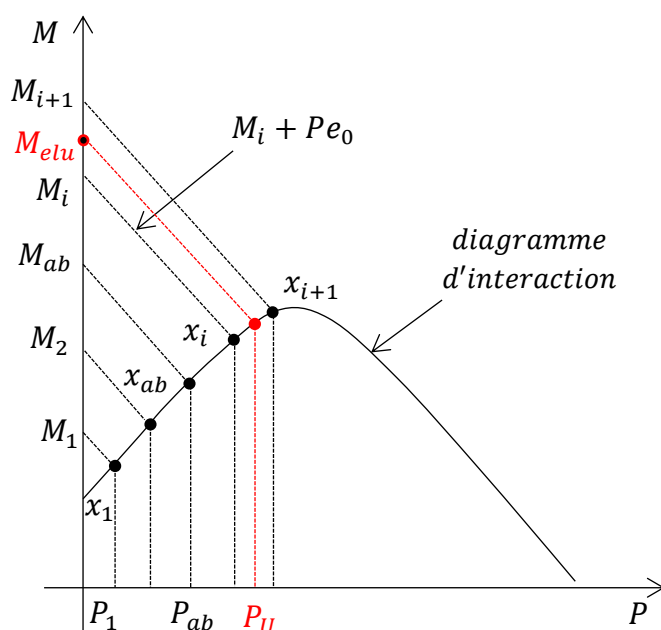


Figure 3.33 - Organigramme de calcul pour  $x \geq h$

### 7. Calcul de la force de précontrainte à l'ELU

Le but est de trouver l'effort normal qui équilibre à la fois le moment de précontrainte et le moment ultime extérieur appliqué  $M_{elu}$  pour un pourcentage d'acier passif fixé. Cet effort sera donc la force de précontrainte nécessaire pour la vérification de la section à l'ELU.

Sachant l'excentricité du câble, la droite  $M = Pe_o + M_{elu}$  est tracée. Le calcul de l'intersection entre la droite  $M_{elu} + Pe_o$  et le diagramme d'interaction à l'état limite ultime donne la valeur de  $P_u$  recherchée.



Dans cette nouvelle approche, et comme déjà mentionné, la section est divisée en n segments dont la largeur varie linéairement.

Pour le calcul la force  $P_u$ , la démarche de résolution analytique suivante est proposée :

- Fixer une précision  $\epsilon$  pour le critère d'arrêt du processus itératif
- Calcul du torseur de forces  $(N, M)$  au niveau de chacun des points du maillage  $x_i$

$x$	$N_c$	$M_c$	$N_{st}$	$M_{st}$	$N$	$M$
$x_1$	...	...	...	...	$N_1$	$M_1$
$x_2$	...	...	...	...	$N_2$	$M_2$
$x_{ab}$	...	...	...	...	$N_{ab}$	$M_{ab}$
$x_i$	...	...	...	...	$N_i$	$M_i$
$\vdots$	...	...	...	...	...	...
$x_{n-1}$	...	...	...	...	$N_{n-1}$	$M_{n-1}$
$x_n$	...	...	...	...	$N_n$	$M_n$

- Recherche de l'intervalle d'encadrement de départ  $I_0 = [x_i, x_{i+1}]$  contenant la position de l'axe neutre  $x_{elu}$

– **Première itération**

Calcul du point de départ  $x_0$

$$x_0 = x_i + (x_{i+1} - x_i) \times \frac{(M_{elu} - M_i)}{(M_{i+1} - M_i)} \quad [3.155]$$

- Evaluation du torseur de forces  $(N_0, M_0)$  correspondant à la position  $x_0$  de l'axe neutre
- Comparaison des valeurs de  $M_0$  et  $M_{elu}$
- Réduction de l'intervalle d'encadrement par élimination

Si  $M_{elu} > M_0 \Rightarrow x_i = x_0$  et  $x_{i+1} = x_{i+1}$

Si  $M_{elu} < M_0 \Rightarrow x_i = x_i$  et  $x_{i+1} = x_0$

– **Deuxième itération**

L'intervalle d'encadrement réduit devient  $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$

$$x_1 = x_i + (x_{i+1} - x_i) \times \frac{(M_{elu} - M_i)}{(M_{i+1} - M_i)} \quad [3.156]$$

- Evaluation du torseur de forces  $(N_1, M_1)$  correspondant à la position  $x_1$  de l'axe neutre

Si  $(x_1 - x_0) \leq \varepsilon$ ,

$x_{elu} = x_1, M_{elu} = M_1$ . **FIN**

Sinon

Réduction de l'intervalle d'encadrement par élimination

Si  $M_{elu} > M_1 \Rightarrow x_i = x_1$  et  $x_{i+1} = x_{i+1}$

Si  $M_{elu} < M_1 \Rightarrow x_i = x_i$  et  $x_{i+1} = x_1$

– **Troisième itération**

L'intervalle d'encadrement réduit devient  $I_2 = [x_i, x_{i+1}]$

$$x_2 = x_i + (x_{i+1} - x_i) \times \frac{(M_{elu} - M_i)}{(M_{i+1} - M_i)} \quad [3.157]$$

- Evaluation du torseur de forces  $(N_1, M_1)$  correspondant à la position  $x_1$  de l'axe neutre

Si  $(x_1 - x_0) \leq \varepsilon$ ,

$x_{elu} = x_2, M_{elu} = M_2$ . **FIN**

Sinon

Répéter les étapes de la deuxième itération jusqu'à arriver à la précision désirée.

## 8. Vérification à l'ELU

Ayant la force  $P_u$  nécessaire pour l'équilibre du moment  $M_{elu} + P e_o$ , cette valeur est comparée à la valeur de la force de précontrainte dimensionnée à l'ELS  $P$ .

Si  $P_{elu} \leq P_{els}$  la section est vérifiée à l'ELU pour la quantité d'acier passif considérée et pour le câblage dimensionné à l'ELS

Si  $P_{elu} \geq P_{els}$  la section n'est pas vérifiée à l'ELU, il faudra soit augmenter le pourcentage d'acier passif, soit augmenter la force de précontrainte dimensionnée à l'ELS, donc augmenter le nombre de câbles

## 9. Vérification de l'effort tranchant à l'ELS

La vérification et l'étude de la section à l'effort tranchant ne fait pas l'objet principal de ce travail ; de ce fait, la vérification est uniquement effectuée à l'ELS, bien que la vérification à l'ELU devrait également être effectuée pour compléter le dimensionnement de la section.

La vérification d'une section précontrainte à l'ELU est identique aux vérifications d'une section en béton armé, données dans l'Eurocode 2.

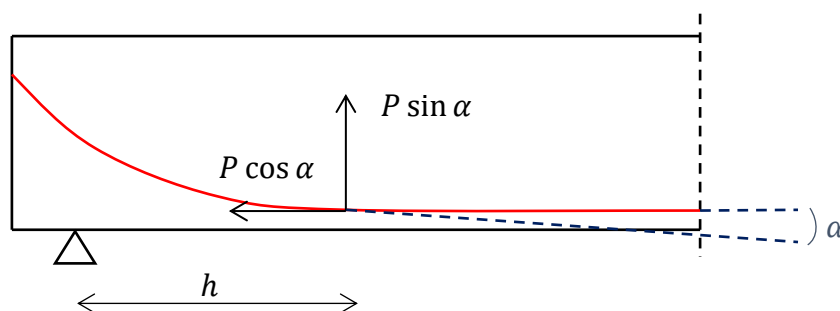


Figure 3.34 - Composantes de la précontrainte du câble

### 9.1 Critère de l'annexe QQ de l'EN 1992-2

L'Eurocode 2 donne peu d'indications sur les moyens de vérification des fissurations de l'âme. Il est recommandé d'utiliser l'annexe QQ de l'EN 1992-2 qui prévoit un critère de non fissuration des âmes pour du béton précontraint en combinaison caractéristique.

Il n'est alors pas nécessaire de vérifier la fissuration des âmes par cisaillement pour les éléments en béton précontraint lorsque le critère de l'annexe QQ est respecté.

Il convient tout d'abord de calculer la résistance de traction du béton  $f_{ctb}$  au niveau des âmes à l'aide de l'expression QQ.101.

$$f_{ctb} = \left(1 - 0,8 \frac{\sigma_3}{f_{ck}}\right) f_{ctk,0,05} \quad [3.158]$$

avec

- $\sigma_3$  la plus grande contrainte principale de compression
- $f_{ctk,0,05}$  la résistance caractéristique en traction directe du béton

Les relations de  $f_{ctk,0,05}$  et  $f_{cm}$  sont données dans l'EN 1992-1-1 section 3.1.2.

$$f_{ctk,0,05} = 0,7 f_{ctm} \quad [3.159]$$

La plus grande contrainte principale de traction  $\sigma_1$  qui s'exerce sur l'âme est comparée à la résistance correspondante  $f_{ctb}$ .

### **Selon l'annexe QQ**

- Si  $\sigma_1 < f_{ctb}$ , il convient de mettre en place le ferrailage minimal conforme à la section 7.3.2 de l'EN 1992-2
- Si  $\sigma_1 \geq f_{ctb}$ , il convient de maîtriser la largeur de fissure conformément à la section 7.3.3 de l'EN 1992-2 en tenant compte de l'angle de déviation entre la direction de la contrainte principale et les directions des armatures

Dans cette nouvelle approche, une équation d'interaction normalisée déduite à partir des vérifications prescrites dans l'annexe QQ est présentée. Cette équation d'interaction est bien adaptée à un calcul d'optimisation. La valeur du ratio calculée montrera ainsi le degré d'influence de la contrainte de l'effort tranchant sur la solution optimale obtenue.

$$\frac{\sigma_1}{f_{ctk,0,05}} + \frac{0,8 \sigma_3}{f_{ck}} \leq 1 \quad [3.160]$$

## **9.2 Calcul des contraintes principales de traction et de compression**

La détermination des contraintes principales de traction  $\sigma_1$  et de compression  $\sigma_3$  s'effectue à l'aide du cercle de Mohr.

La contrainte de cisaillement  $\tau$  est donnée par l'équation suivante

$$\tau(y) = \frac{V Q(y)}{b(y) I} \quad [3.161]$$

- $V$  Effort tranchant appliqué en combinaison caractéristique
- $Q(y)$  Moment statique de la section à l'ordonnée  $y$  par rapport au centre de gravité
- $b(y)$  Largeur de la section à l'ordonnée  $y$
- $I$  Moment d'inertie de la section

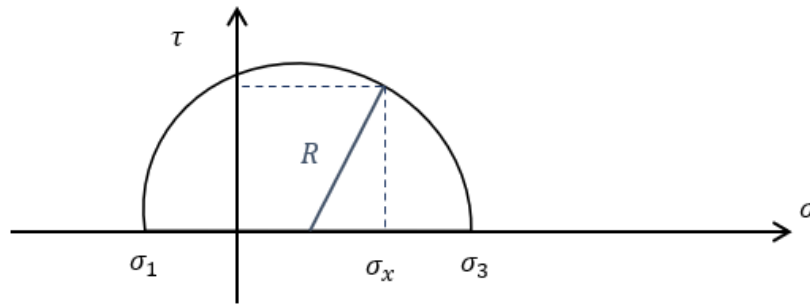


Figure 3.35 - Cercle de Mohr des contraintes

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\tau^2 + \frac{\sigma_x^2}{4}} \quad [3.162]$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\tau^2 + \frac{\sigma_x^2}{4}} \quad [3.163]$$

La contrainte principale  $\sigma_1$  est donc comparée à  $f_{ctb}$  pour la vérification de la section à l'effort tranchant.

## 10. Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle règle des pivots en béton précontraint, inspirée de la règle des pivots en béton armé, est présentée. Elle permet le dimensionnement d'une poutre en béton totalement et partiellement précontrainte selon l'Eurocode 2. La résolution présentée est applicable pour toute section de forme quelconque, notamment une section en té à talons ou en caisson.

Dans cette nouvelle approche, la force de précontrainte  $P$  est considérée comme extérieure ; néanmoins, elle pourrait être adaptée pour le cas de la précontrainte adhérente.

Les équations de résolution analytique principales permettant le dimensionnement en précontrainte totale et partielle sont déduites des équations d'équilibre de l'effort normal et du moment fléchissant. Elles sont exprimées en fonction des propriétés mécaniques calculées par rapport à l'axe neutre.

La résolution du dimensionnement des poutres précontraintes par la méthode conventionnelle est tout d'abord exposée, en détaillant les conditions nécessaires pour l'obtention de la valeur minimale de précontrainte. Les limitations de contraintes définissent ainsi un fuseau de passage en traction et en compression. Le coffrage minimal est dicté par le fuseau de compression et se traduit par la condition nommée « condition de coffrage ».

La nouvelle approche est par la suite exposée, en se basant sur la règle des pivots introduite en béton précontraint. Un domaine admissible des valeurs de la force de précontrainte pour une section quelconque en béton précontraint est ainsi défini et représenté graphiquement. Ce domaine peut correspondre à un seul état limite de service comme il peut également combiner plusieurs états limites simultanément.

En précontrainte totale, le domaine admissible est défini dans le plan  $(P, M^*)$ . Il est délimité par 4 droites de pentes  $\rho v$  et  $\rho v'$ , parallèles deux-à-deux et formant un parallélogramme.

Les valeurs de  $P_{s\text{ous-critique}}$  et  $P_{s\text{urcritique}}$  usuellement connues sont définies et représentées également sur le graphe du domaine admissible.

Cette nouvelle approche met en relief la valeur de la précontrainte maximale  $P_{max}$  permettant ainsi l'obtention d'une plage de valeurs admissible de  $P$  pour chacun des états limites de service. La variation de la force de précontrainte dans un même état limite de service autour d'une valeur  $P_0$  moyenne est encore prise en compte.

La condition de coffrage connue usuellement est représentée graphiquement dans le plan  $(\Delta M, P)$ . Elle est considérée comme vérifiée si la droite horizontale représentant les variations des moments extérieurs  $M_{max} - M_{min}$  est située au-dessous du palier horizontal délimitant le domaine admissible tracé dans le plan  $(\Delta M, P)$ .

La règle des pivots appliquée en précontrainte partielle requiert une limitation de l'ouverture des fissures imposée par l'Eurocode 2, cette dernière est transformée en une limitation des contraintes au niveau des aciers passifs par une corrélation détaillée.

L'application de la règle des pivots en précontrainte partielle montre une extension du domaine admissible. Elle permet ainsi l'introduction des valeurs de  $P_{s\text{ous-critique}}$  et  $P_{s\text{urcritique}}$  en précontrainte partielle. La représentation graphique des domaines admissibles met en relief le gain obtenu dans la force minimale de précontrainte  $P_{min}$  en précontrainte partielle.

La droite  $(d4)$  tracée en précontrainte totale est remplacée par la courbe 4b décalée vers le haut et la courbe 2b est une extension de la droite  $(d_2)$  et du pivot 2. L'extension est due à l'autorisation de la fissuration du béton en fibre inférieure en précontrainte partielle.

De même, en précontrainte partielle, la valeur de  $P_{max}$  est calculée et une plage de valeurs admissibles de  $P$  est ainsi obtenue pour chacun des états limites de service.

Cette nouvelle approche permet ainsi la formulation de la condition de coffrage en précontrainte partielle. La différence  $M^*_{max} - M^*_{min}$  est calculée le long du domaine admissible et la valeur maximale est ainsi recherchée. Cette valeur maximale représentant la condition de coffrage en précontrainte partielle est comparée à la variation des moments extérieurs appliqués.



Pour des sections ayant un rapport  $v/v' \leq 1$ , un gain dans la condition de coffrage peut être obtenu en précontrainte partielle.

La vérification de la section à l'état limite ultime abordée d'une manière cohérente à l'approche développée pour le dimensionnement à l'ELS est exposée. Le principe de la vérification à l'ELU consiste à tracer le diagramme d'interaction correspondant à un pourcentage d'acier passif préalablement fixé, et de trouver la force de précontrainte nécessaire à la vérification de la section. La force  $P_u$  obtenue est ainsi comparée à la plage des valeurs admissible obtenue à partir des vérifications aux états limite de service. Le détail de calcul aboutissant au tracé du diagramme d'interaction est exposé et un organigramme énumérant les étapes à suivre est présenté.

Dans cette approche, la section est vérifiée à l'effort tranchant selon les provisions de l'annexe QQ de l'Eurocode 2. La limitation de contraintes présente dans cette annexe est transformée en une équation d'interaction normalisée adaptée à un calcul d'optimisation.

En se basant sur le domaine admissible présenté dans cette nouvelle approche, la géométrie d'une section prédéfinie avec un couple  $(P, e_0)$  peut être graphiquement vérifiée.

La représentation graphique du domaine admissible en précontrainte totale et partielle permet au concepteur de situer sa solution par rapport à la solution optimale.

Finalement, la nouvelle règle des pivots présentée peut être facilement intégrée dans un calcul d'optimisation ; une application numérique intégrant un calcul d'optimisation du dimensionnement avec les algorithmes génétiques sur un VIPP (Ponts à Poutres Précontraintes) est présentée dans le Chapitre 5.

# Chapitre 4

---

## Résolution Analytique des Ouvrages Hyperstatiques

---

### 1. Introduction

Le présent chapitre présente une méthode de résolution analytique pour les ouvrages hyperstatiques en béton précontraint, à inertie constante et variable.

Les calculs de dimensionnement des poutres précontraintes hyperstatiques, notamment les ponts, sont usuellement effectués en s'appuyant sur des logiciels de calcul aux éléments finis. Ces derniers fournissent les résultats sous formes de graphiques/cartographies ou de tableaux de valeurs ponctuelles, sans toutefois donner une formulation analytique qui serait néanmoins très utile pour le suivi des étapes de calcul intermédiaires et par la suite pour l'étude des possibilités d'optimisation du dimensionnement.

L'objectif principal de la démarche de résolution proposée dans ce chapitre est de présenter au concepteur une alternative lui permettant d'aborder des calculs relativement complexes, par une approche analytique facilement programmable, sans avoir recours aux méthodes numériques des éléments finis.

Dans cette approche, les différentes équations décrivant chaque étape du problème sont exprimées sous forme de fonctions polynomiales mathématiquement faciles à manipuler et programmer.

La démarche analytique de dimensionnement proposée englobe toutes les étapes de calcul. Après définition de la géométrie de l'ouvrage, les propriétés mécaniques de la section transversale de forme quelconque sont tout d'abord calculées, et les expressions analytiques polynomiales des lignes d'influence sont développées permettant ainsi la construction des courbes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sous différents cas et combinaisons de charges.

La construction du tracé du câble de précontrainte est également abordée. Dans le but d'entretenir toujours des fonctions polynomiales, le tracé est défini par une succession de paraboles respectant des conditions pratiques de courbure et les limites d'enrobage. La force de précontrainte nécessaire est par la suite déterminée, et les vérifications des contraintes aux ELS et de la flexion à l'ELU sont effectuées. Finalement, dans le calcul de la flexion à l'ELU proposée, les propriétés mécaniques de la section sont transformées en fonctions polynomiales afin de permettre le calcul en tout point de la poutre.

## **2. Principe de dimensionnement**

La première étape dans le dimensionnement des ponts hyperstatiques est la détermination des sollicitations agissant sur l'ouvrage. Ce dernier est soumis à des charges permanentes et à des charges variables d'exploitation définies par des modèles de trafic routier fournis par la norme NF EN 1991-2 et son Annexe Nationale Française, selon le type de situation du projet.

Les actions routières sont assimilées à un convoi de charges mobiles qui se décomposent en une charge uniformément répartie notée UDL et en des charges concentrées, à double ou à plusieurs essieux selon le modèle, notées TS.

La difficulté réside dans la détermination, en chaque section du pont, des sollicitations les plus défavorables en fonction des positions des charges mobiles. Le principe consiste alors à considérer, en chaque point de la poutre, toutes les positions des actions variables mobiles sur le pont et de retenir la valeur la plus critique des sollicitations. Ceci revient donc à tracer les courbes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sous charges mobiles.

Ces courbes nécessitent le calcul de la ligne d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant sous différents cas de charges.

Dans la démarche analytique proposée, les expressions des lignes d'influence d'un ouvrage hyperstatique à inertie constante et variable sont exprimées sous forme de fonctions polynomiales facilement intégrables, permettant ainsi la détermination des sollicitations maximales et minimales dimensionnant la structure.

Ayant les sollicitations extrêmes, l'étape suivante consiste à la détermination de la force de précontrainte  $P$  nécessaire pour un profil de câble bien défini. Les vérifications requises par les Eurocodes à l'ELS et aux ELU sont par la suite effectuées.

Les étapes de dimensionnement abordées dans ce chapitre se résument comme suit :

- Calcul des propriétés géométriques de la section transversale
- Détermination des lignes d'influence en inertie constante ou variable
  - Calcul des constantes mécaniques
  - Construction de la matrice canonique pour application de la méthode des foyers
  - Calcul des expressions polynomiales des lignes d'influence
- Détermination des courbes enveloppes du moment fléchissant et de l'effort tranchant sous UDL et TS à partir de l'intégration des expressions des lignes d'influence
- Calcul des sollicitations maximales et minimales sous différentes combinaisons de charges prescrites par les Eurocodes
- Définition du profil du câble de précontrainte
- Calcul de la force de précontrainte  $P$
- Vérification des contraintes aux ELS et de la flexion à l'ELU

### 3. Propriétés géométriques des sections

Les propriétés géométriques d'une section de forme polygonale quelconque peuvent être calculées à partir des coordonnées des nœuds formant la section. Cette dernière est positionnée dans un repère d'origine  $(O, x, y)$  par rapport auquel les coordonnées sont évaluées.

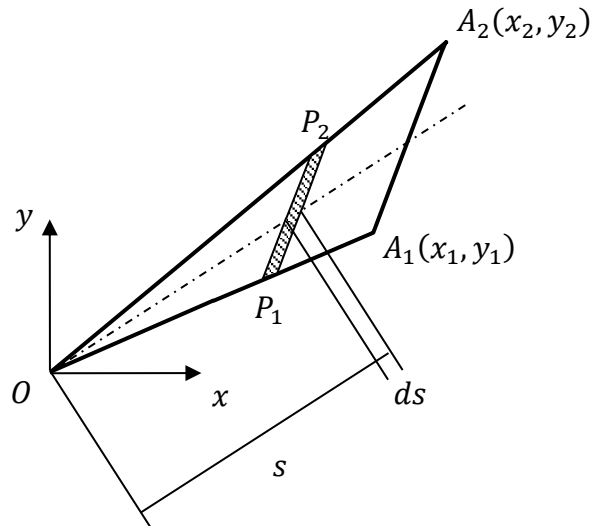


Figure 4.1 – Calcul des propriétés d'une section de forme quelconque

Les propriétés mécaniques, données par le tableau suivant, peuvent être adaptées à toute section polygonale avec un ou plusieurs contours intérieurs.

Aire de la section	$A = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2}$	[4.1]
Moment statique	$S_{Ox} = \frac{A(y_1 + y_2)}{3} \quad S_{Oy} = \frac{A(x_1 + x_2)}{3}$	[4.2]
Moment d'inertie par rapport à l'axe $x$ ou $y$ passant par le centre $O$	$I_{Ox} = \frac{A}{6}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)$ $I_{Oy} = \frac{A}{6}(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$	[4.3]
Centre de gravité de la section	$x_g = \frac{S_{Oy}}{A} \quad y_g = \frac{S_{Ox}}{A}$	[4.4]
Moment d'inertie rapporté au centre de gravité	$I_{gx} = I_{Ox} - A y_g^2 \quad I_{gy} = I_{Oy} - A x_g^2$	[4.5]

Tableau 4.1 – Calcul des propriétés mécaniques d'une section à partir des coordonnées

Ce calcul peut être facilement mené sur un fichier Excel en définissant l'ordre des nœuds de façon à décrire un contour continu autour de la section.

#### 4. Ligne d'influence du moment d'une poutre à inertie constante

La ligne d'influence est, par définition, la représentation graphique de l'évolution d'un effort (moment, effort tranchant, etc.) à un emplacement donné, due à une force unitaire mobile parcourant la structure.

##### Cas des structures isostatiques

Dans le cas des **structures isostatiques**, la détermination des lignes d'influence est basée sur le principe des travaux virtuels, plus précisément en considérant des déplacements virtuels pour un solide rigide. La ligne d'influence s'obtient en pratiquant à l'emplacement désigné une coupure correspondant à l'effort considéré et en appliquant ensuite à la structure un déplacement unitaire associé à l'effort considéré.

##### Théorème des travaux virtuels :

*A l'équilibre, le travail virtuel de toutes les forces appliquées est nul dans un déplacement virtuel élémentaire.*

En considérant le principe des travaux virtuels, pour une charge concentrée unitaire, la déformée représente donc l'intensité du moment de flexion à l'endroit de la coupure pour une charge unitaire placée au point considéré ; c'est-à-dire la ligne d'influence du moment de flexion. Dans le cas des structures isostatiques, les lignes d'influence sont constituées de segments de droite.

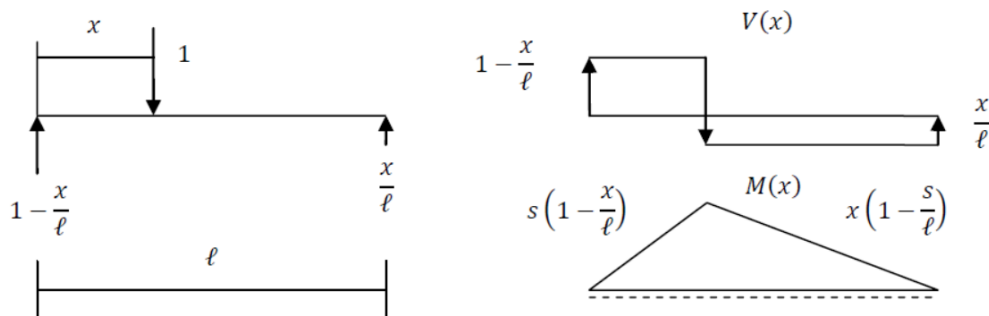
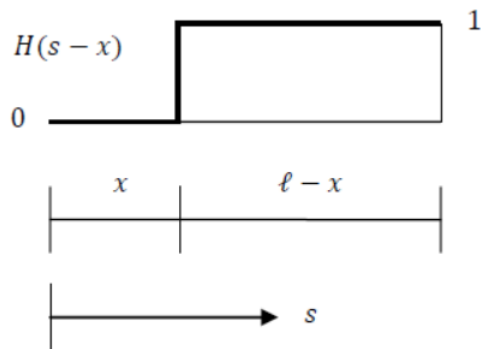


Figure 4.2 - Ligne d'influence d'une poutre isostatique

Le moment dans une section d'abscisse « s » sous l'effet d'une charge unité à l'abscisse « x » vaut :

Si la charge est située avant la section « s » $x \leq s$	$M(x, s) = x \left(1 - \frac{s}{l}\right)$	[4.6]
Si la charge est située après la section « s » $x \geq s$	$M(x, s) = s \left(1 - \frac{x}{l}\right)$	[4.7]

Les deux expressions peuvent être écrites sous une forme unique en utilisant la distribution de Heaviside :



$$\begin{aligned}
 H(s-x) &= 0 \text{ si } x < s \\
 H(s-x) &= 1 \text{ si } x > s \\
 H(s-x) &\text{ non définie si } x = s
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Figure 4.3 - Distribution de Heaviside

Les deux expressions du moment deviennent

$$M(x, s) = x \left( 1 - \frac{s}{l} \right) + (s-x)H(s-x)
 \tag{4.9}$$

De la même manière, la ligne d'influence de l'effort tranchant s'écrira sous la forme

$$V(x, s) = \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - H(s-x)
 \tag{4.10}$$

### Cas des structures hyperstatiques

Pour les **structures hyperstatiques**, après la coupure associée à l'effort considéré, la déformation ne s'effectue pas en bloc. Les lignes d'influence ne sont pas formées de segments de droite, dans ce cas le théorème de Maxwell-Betti est appliqué.

Théorème de Maxwell-Betti aussi appelé théorème de réciprocité :

*Le travail des efforts intérieurs réels dans un champ de déformation virtuel est égal au travail des efforts intérieurs virtuels dans le champ de déformation réel.*

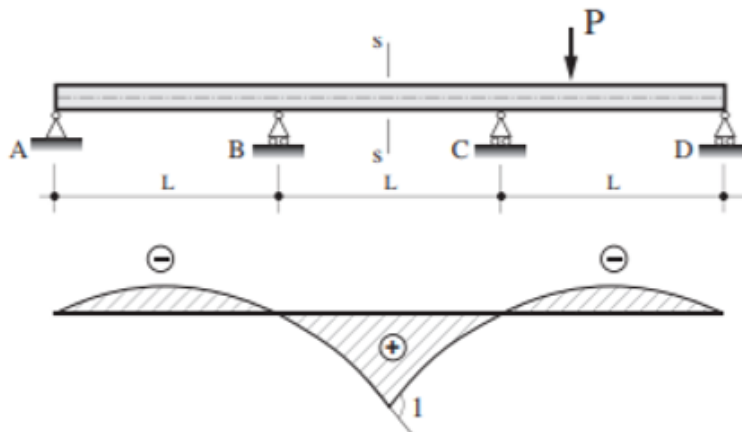


Figure 4.4 - Ligne d'influence du moment de flexion d'une poutre hyperstatique

Ce qui veut aussi dire, que le travail de la force  $P_i$  suite à un déplacement  $\delta_j$  causé par une force  $Q_j$  est égal au travail de la force  $Q_j$  suite au déplacement  $\delta_i$  causé par la force  $P_i$

L'étude de la ligne d'influence du moment en travée courante d'une poutre continue peut être effectuée en isolant la travée et en étudiant le moment dans une section particulière sous l'effet d'une charge ponctuelle se déplaçant le long de la poutre

L'application du théorème de Maxwell-Betti permet de remplacer ce problème, hyperstatique de degré 2 sauf cas particulier d'une travée de rive, par l'étude d'un problème plus simple :

- Une rotule est introduite au droit de la section étudiée « s »
- La déformée de cette poutre soumise à deux couples opposés de part et d'autre de la rotule est déterminée

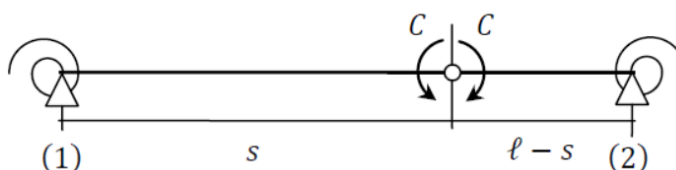


Figure 4.5 – Rotule introduite dans une travée courante isolée d'une poutre continue

La structure est hyperstatique de degré 1, la résolution est effectuée par la méthode des foyers.

#### 4.1 Résolution des poutres hyperstatiques par la méthode des foyers

La méthode des foyers, basée sur la formule des trois moments, est appliquée pour trouver les moments sur appuis intermédiaires sous différents cas de charges.

La méthode de résolution d'une poutre continue consiste à placer une rotule sur chacun des appuis intermédiaires.

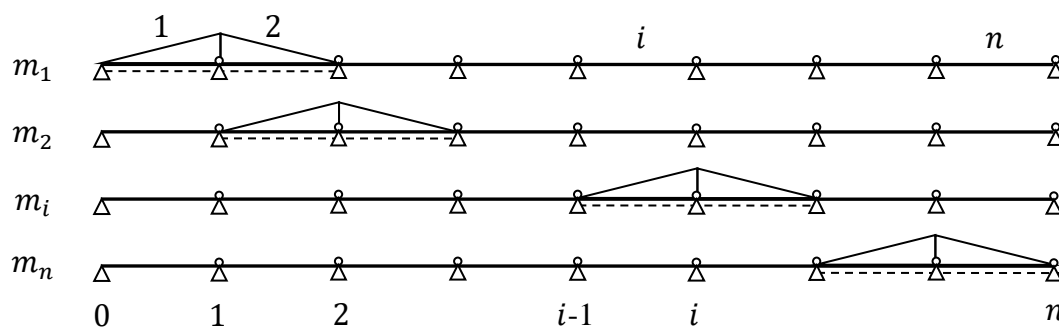


Figure 4.6 – Résolution d'une poutre continue

Le système est hyperstatique de degré  $n-1$ , les inconnues hyperstatiques sont les moments sur appuis « 1 » à «  $n-1$  ».

## 4.1.1. Convention de signe

Les poutres considérées sont horizontales et soumises à des charges verticales descendantes :

- les appuis et les travées sont numérotés de gauche à droite
- l'indice « 0 » est affecté à l'appui de gauche et l'indice « 1 » à la 1<sup>ère</sup> travée de telle sorte que la travée d'indice «  $i$  » est comprise entre les appuis «  $i - 1$  » et «  $i$  »
- les abscisses (axe «  $x$  ») sont comptées dans chaque travée à partir de l'appui de gauche
- l'effort tranchant, résultante des forces de gauche, est compté positif vers le haut
- le moment positif est celui qui tend la fibre inférieure
- les déplacements (axe «  $y$  ») sont positifs vers le bas
- les rotations sont comptées positivement dans le sens horaire (de «  $x$  » vers «  $y$  »)

## 4.1.2. Méthode de résolution

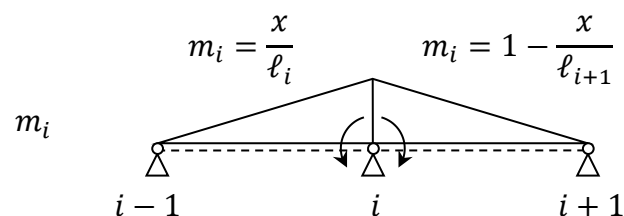


Figure 4.7 - Application de la réaction hyperstatique unité sur appui

Les intégrales de Mohr de la méthode des forces s'expriment de la manière suivante

$$\delta_{ij} = \int_{i-1}^i \left(\frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} + \int_{i-1}^i \left(1 - \frac{x}{\ell_{i+1}}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad \text{si } i = j$$

$$\delta_{ij} = \int_{i-1}^i \frac{x}{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI} \quad \text{si } i = j \pm 1$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{sinon}$$
[4.11]

Ces intégrales sont appelées constantes mécaniques et notées de la manière suivante

$$a_i = \int_{i-1}^i \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad b_i = \int_{i-1}^i \frac{x}{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI} \quad c_i = \int_{i-1}^i \left(\frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad [4.12]$$

- Le coefficient  $a_i$  est la rotation de la travée «  $i$  » au droit de l'appui «  $i-1$  » sous l'effet d'un couple unité sur l'appui «  $i-1$  » ;



- Le coefficient  $b_i$  est la rotation de la travée « i » au droit de l'appui « i-1 » sous l'effet d'un couple unité sur l'appui « i » ou bien au droit de l'appui « i » sous l'effet d'un couple unité sur l'appui « i-1 »;
- Le coefficient  $c_i$  est la rotation de la travée « i » au droit de l'appui « i » sous l'effet d'un couple unité sur l'appui « i ».

*Dans le cas d'une poutre à inertie constante, le terme « 1/EI » est constant et sort de l'intégrale, ceci n'est pas le cas pour une poutre à inertie variable traitée dans la section suivante.*

#### 4.1.3. Matrice canonique

Les n-1 équations canoniques de la méthode des forces constituent la formule des 3 moments qui s'écrit de la manière suivante.

$$\begin{bmatrix} c_1 + a_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_2 & c_2 + a_3 & \ddots & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & b_i & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & b_i & c_i + a_{i+1} & b_{i+1} & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & b_{i+1} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \ddots & c_{n-2} + a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} & c_{n-1} + a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_{n-2} \\ X_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \delta_{1,iso} \\ \delta_{2,iso} \\ \vdots \\ \delta_{i,iso} \\ \vdots \\ \delta_{n-2,iso} \\ \delta_{n-1,iso} \end{bmatrix} \quad [4.13]$$

Ou également

$$S_n X_i = -\delta_{i,iso} \quad [4.14]$$

La résolution par la formule des trois moments présente l'intérêt de faire apparaître la notion de foyer utile pour la compréhension des lignes d'influence.

#### 4.1.4. Couple unité à gauche d'une poutre à n travées : Foyer de droite

En appliquant un couple unité sur l'appui gauche à l'origine de la poutre hyperstatique, et en résolvant le système d'équations canoniques [4.14], les moments sur les appuis intermédiaires sont obtenus.

En notant  $\psi_k$  le rapport entre deux moments sur appuis consécutifs

$$\psi_k = -\frac{X_k}{X_{k-1}} \quad [4.15]$$

Les coefficients  $\psi_k$  sont obtenus par récurrence

$$\psi_n = 0 \quad \psi_k = \frac{b_k}{c_k + a_{k+1} - b_{k+1}\psi_{k+1}} \quad [4.16]$$

Pour chaque travée, les coefficients  $\psi_k$  déterminent les points de moment nul appelés dans ce cas foyers de droite.

Position des foyers de droite

$$\frac{x_{dk}}{\ell_k} = \frac{X_k}{X_k - X_{k-1}} = \frac{\psi_k}{1 + \psi_k} \quad [4.17]$$

Le diagramme du moment dans la poutre présente donc l'allure suivante

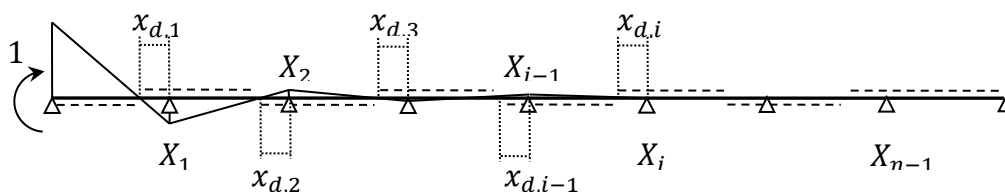


Figure 4.8 – Diagramme du moment de la poutre soumise à un moment unité à droite

Le coefficient  $\psi_1$  permet également de calculer la rotation provoquée par un couple unité appliqué sur l'appui de gauche :

- la rotation « 0 » de la poutre rendue isostatique sous l'effet d'un couple unité placé sur ce même appui est  $\theta_{iso} = a_1$
- la rotation de l'appui « 0 » due à la réaction  $X_1$  sur l'appui « 1 » est  $X_1 b_1$  (négative)

Comme  $\delta_{1,iso} = b_1$  la rotation totale vaut

$$\theta_0 = a_1 - b_1 \psi_1 \quad [4.18]$$

#### 4.1.5. Couple unité à droite d'une poutre à n travées : Foyer de gauche

En appliquant un couple unité sur l'appui de droite de la poutre hyperstatique, et en résolvant le système des équations canoniques de l'équation [4.14], les moments sur les appuis intermédiaires sont obtenus.

Le rapport entre deux moments sur appuis consécutifs est noté  $\varphi_k$  tel que

$$\varphi_k = -\frac{X_{k-1}}{X_k} \quad [4.19]$$

Les coefficients  $\varphi_k$  sont obtenus par récurrence

$$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_{k+1} = \frac{b_{k+1}}{c_k + a_{k+1} - b_k \varphi_k} \quad [4.20]$$

Pour chaque travée, les coefficients  $\varphi_k$  déterminent les points de moment nul appelés dans ce cas foyers de gauche et dont la distance à l'appui de gauche de la travée considérée vaut

Position des foyers de gauche  $\frac{x_{gk}}{\ell_k} = \frac{\varphi_k}{1 + \varphi_k}$  [4.21]

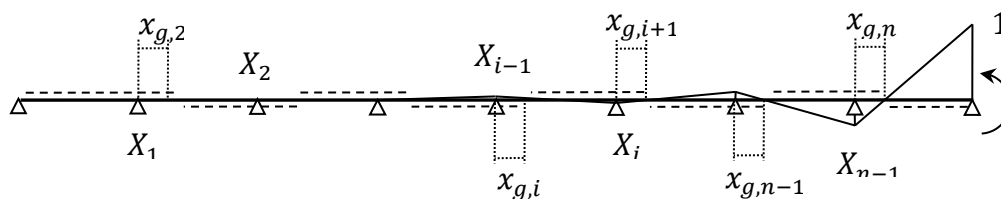


Figure 4.9 – Diagramme du moment de la poutre soumise à un moment unité à droite

La rotation sur l'appui de rive droite sous l'effet d'un couple unité appliqué sur cet appui est donnée par

$$\theta_n = c_n - b_n \varphi_n \quad [4.22]$$

#### 4.1.6. Inversion de la matrice canonique

En considérant le cas où un seul des coefficients  $\delta_{k,iso}$  est non nul, à partir des relations précédentes [4.15] et [4.19], la résolution de la formule des trois moments donnée par l'équation [4.14] donne la formule suivante

$$b_k X_{k-1} + (c_k + a_{k+1}) X_k + b_{k+1} X_{k+1} = -\delta_{k,iso} \quad [4.23]$$

Ce qui donne

$$X_k = \frac{-\delta_{k,iso}}{c_k + a_{k+1} - b_k \varphi_k - b_{k+1} \psi_{k+1}} \quad [4.24]$$

En conséquence, la réaction  $X_k$  peut s'écrire sous l'une des deux formes suivantes

$$X_k = \frac{-\psi_k \delta_{k,iso}}{b_k (1 - \varphi_k \psi_k)} = \frac{-\varphi_{k+1} \delta_{k,iso}}{b_{k+1} (1 - \varphi_{k+1} \psi_{k+1})} \quad [4.25]$$

Les expressions ci-dessus permettent de déterminer l'inverse de la matrice des équations canoniques de la méthode des forces. Il suffit de déterminer les suites des coefficients  $(\varphi_k)_{k=0,n}$  et  $(\psi_k)_{k=1,n}$

En posant  $R_n$  égale à la matrice inverse canonique

$$R_n = [r_{ij}] = S_n^{-1} \quad [4.26]$$

Les termes diagonaux sont :

$$r_{i,i} = \frac{\psi_i}{b_i (1 - \varphi_i \psi_i)} = \frac{\varphi_{i+1}}{b_{i+1} (1 - \varphi_{i+1} \psi_{i+1})} \quad [4.27]$$

$$\text{Pour } j = i - 1, \dots, 1 \qquad r_{j,i} = -\varphi_{j+1} r_{j+1,i} \qquad [4.28]$$

$$\text{Pour } j = i + 1, \dots, n - 1 \qquad r_{j,i} = -\psi_j r_{j-1,i} \qquad [4.29]$$

**L'application traditionnelle de la méthode des foyers consiste à charger successivement les travées les unes après les autres puis, à la fin, à cumuler les sollicitations pour étudier la poutre continue soumise à un chargement quelconque intéressant plusieurs travées.**

Dans le cas d'une poutre continue à travées égales et à inertie constante, la matrice canonique et son inverse peuvent s'écrire de la manière suivante.

$$\text{Constantes mécaniques} \qquad a_i = c_i = 2 b_i = \frac{l_i}{3EI} \qquad [4.30]$$

$$\text{Termes diagonaux de la matrice inverse canonique} \qquad r_{ii} = \frac{6 EI \Psi_i}{l_i(1 - \varphi_i \Psi_i)} = \frac{6 EI \varphi_{i+1}}{l_{i+1}(1 - \varphi_{i+1} \Psi_{i+1})} \qquad [4.31]$$

Le produit  $EI$  étant supposé constant sur toute la longueur de la poutre, les lignes d'influence et courbes enveloppes peuvent être déterminées comme si  $EI = 1$ .

## 4.2 Détermination de la ligne d'influence du moment d'une charge concentrée

En suivant le théorème de Maxwell-Betti évoqué dans la section 4, c'est évident qu'il est plus facile de tracer la déformée de la poutre sous le cas de charge d'un couple concentré que de résoudre les cas correspondant à chaque position de la charge.

En appliquant deux couples opposés placés de part et d'autre de la section considérée, seule la travée de la section est chargée. Connaissant les rapports focaux  $\varphi$  et  $\psi$ , obtenus précédemment, la poutre continue est résolue par la méthode des foyers en imposant une variation de rotation unité au droit de la section considérée sur la travée isolée considérée isostatique.

### 4.2.1. Déformée de la structure isostatique associée

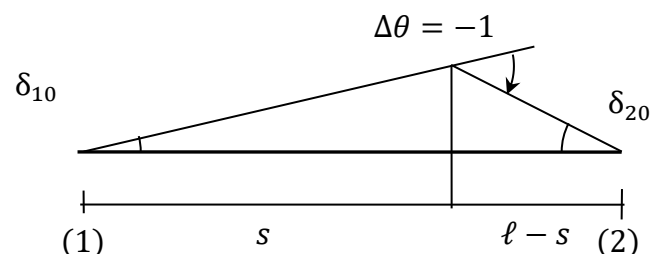


Figure 4.10 - Variation de rotation unité dans la structure isostatique

Les rotations sont comptées positives dans le sens du moment qui tend la fibre inférieure.

$$\text{Rotation sur appui de gauche} \quad \delta_{10} = -\left(1 - \frac{s}{\ell}\right) \quad [4.32]$$

$$\text{Rotation sur appui de droit} \quad \delta_{20} = -\frac{s}{\ell} \quad [4.33]$$

En appliquant la méthode des foyers

$$\delta_{11} = \frac{b_k}{\varphi_k} \quad \delta_{12} = b_k \quad \delta_{22} = \frac{b_k}{\psi_k} \quad [4.34]$$

$$b_k \begin{bmatrix} 1/\varphi_k & 1 \\ 1 & 1/\psi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - s/\ell \\ s/\ell \end{bmatrix} \quad [4.35]$$

Les réactions d'appui obtenues sont les suivantes

$$X_1 = -\frac{\varphi}{b(1 - \varphi\psi)} \left[ 1 - (1 + \psi) \frac{s}{\ell} \right] \quad X_2 = \frac{\psi}{b(1 - \varphi\psi)} \left[ \varphi - (1 + \varphi) \frac{s}{\ell} \right] \quad [4.36]$$

En les exprimant en fonction de la position des foyers gauche  $x_{fg}$  et droite  $x_{fd}$

$$X_1 = \frac{x_{fg}(s - x_{fd})}{b\ell(x_{fd} - x_{fg})} \quad X_2 = \frac{(\ell - x_{fd})(x_{fg} - s)}{b\ell(x_{fd} - x_{fg})} \quad [4.37]$$

#### 4.2.2. Recherche d'un point de moment nul

$$M(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{\ell} = \frac{X_1}{X_1 - X_2} = \frac{x_{fg}(x_{fd} - s)}{\ell x_{fg} - s(\ell - x_{fd} + x_{fg})} \quad [4.38]$$

Le point de moment nul existe si

$$X_1 \cdot X_2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_{fg} - s)(s - x_{fd}) < 0 \quad [4.39]$$

Il apparait ainsi que lorsque la section est située entre les foyers, les deux moments sur appui sont positifs. Le point de moment nul existe alors si la section ne se trouve pas entre les deux foyers.

En examinant les signes de  $X_1$  et  $X_2$ , trois cas se présentent en fonction de la position de « s »

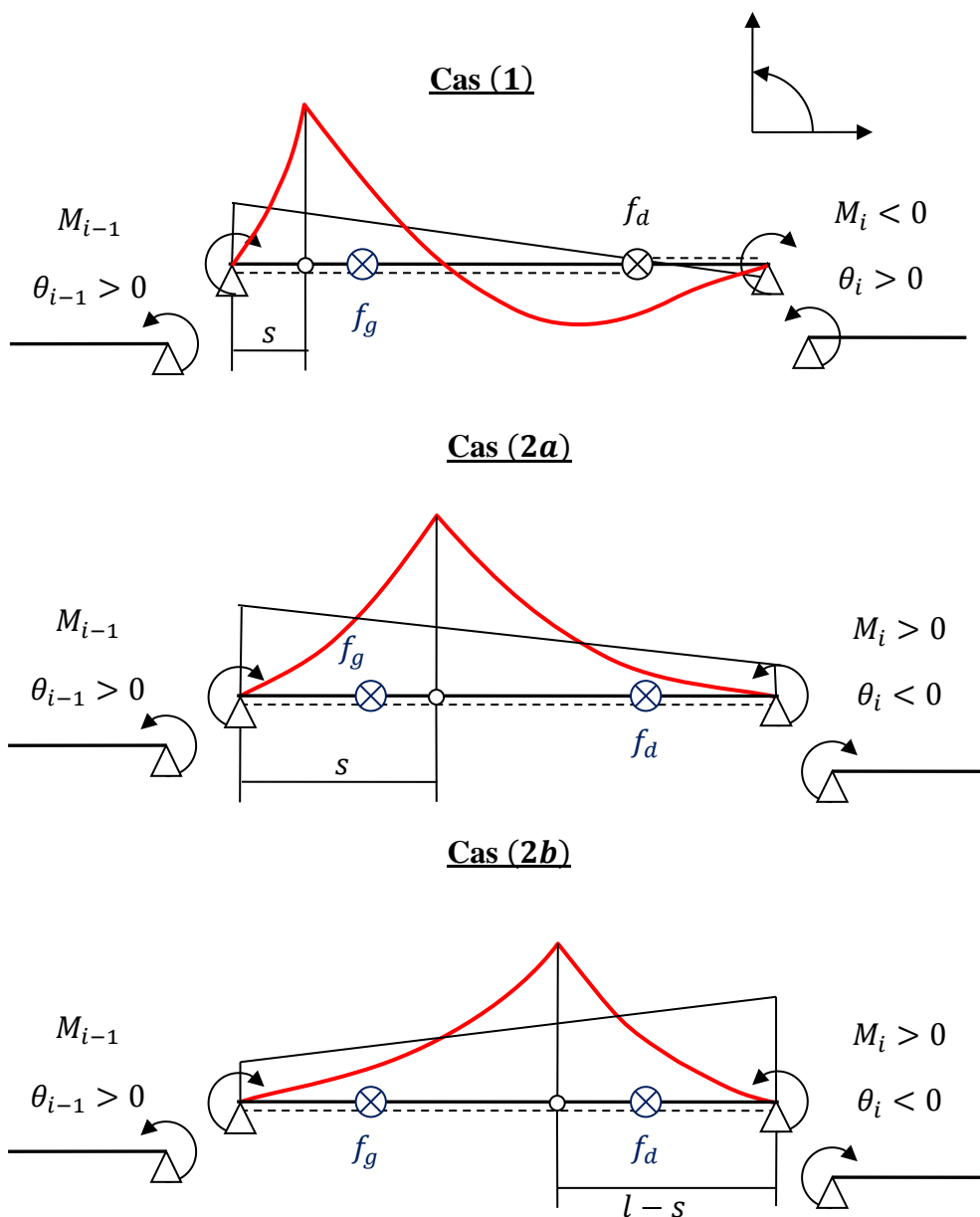
- (1)  $s < x_{fg}$   $M(x) < 0$  à gauche du point de moment nul  $x > x_{fd}$
- (2)  $x_{fg} < s < x_{fd}$   $M(x) > 0$  sur toute la longueur
- (3)  $x_{fd} < s$   $M(x) < 0$  à droite du point de moment nul  $x < x_{fg}$

Pour le cas 2

$$(2a) \quad x_{fg} < s < \frac{\ell x_{fg}}{\ell - x_{fd} + x_{fg}} \quad M(x) \text{ décroissant}$$

$$(2b) \quad \frac{\ell x_{fg}}{\ell - x_{fd} + x_{fg}} < s < x_{fd} \quad M(x) \text{ croissant}$$

Les différents diagrammes du moment selon la position de la section sont représentés sur la figure suivante



**Cas (3)**

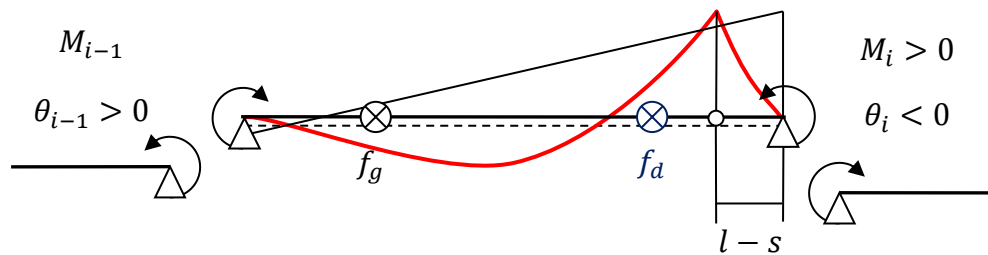


Figure 4.11 - Diagramme du moment et allure de la ligne d'influence en fonction de la position "s"

L'expression du moment est :

- dans les travées non chargées, une fonction linéaire par travée correspondant à l'interpolation des moments sur appuis ;
- dans la travée chargée, la somme d'une fonction linéaire due aux moments sur appuis et d'une fonction de Dirac placée au droit de la section correspondant à la variation de rotation unitaire.

La déformée, obtenue par double intégration du moment, est

- dans les travées non chargées, un polynôme de degré 3 ;
- dans la travée chargée ; : la somme d'un polynôme de degré 3 et d'une fonction bilinéaire.

4.2.2.1. Expression de la ligne d'influence dans la travée chargée

On désigne par « travée chargée » ; la travée contenant la rotule à la section s, et « travée non chargée » toute travée ne contenant pas s.

La déformée en travée chargée est la somme de deux expressions :

- flèche isostatique : fonction bilinéaire due à la différence de rotation
- flèche hyperstatique : polynôme de degré 3 dû aux moments hyperstatiques sur appui

La composante isostatique de la flèche est donnée par

$$\begin{aligned} v_{iso}(x) &= x \left(1 - \frac{s}{l}\right) && \text{à gauche de la section } x < s \\ v_{iso}(x) &= s \left(1 - \frac{x}{l}\right) && \text{à droite de la section } x > s \end{aligned} \quad [4.40]$$

La composante hyperstatique de la flèche dues aux réactions  $X_1$  et  $X_2$  données par l'équation [4.37] est un polynôme de degré 3.

$$v_{hyp}(x) = X_{i-1} v_{o,1}(x) + X_i v_{o,2}(x) \quad [4.41]$$

Les expressions  $v_{o,1}(x)$  et  $v_{o,2}(x)$  sont respectivement les flèches de la poutre isostatique sous l'effet d'un couple unité sur l'appui de gauche et sur l'appui de droite.

Ces dernières peuvent être obtenues par intégration en appliquant la formule de Bresse ou à partir des intégrales élémentaires de Mohr.

$$v_{o,1}(x) = \frac{x(l-x)(2l-x)}{6lEI} \quad v_{o,2}(x) = \frac{x(l-x)(l+x)}{6lEI} \quad [4.42]$$

En intégrant les valeurs des réactions hyperstatiques  $X_1$  et  $X_2$  obtenus à partir de l'équation [4.37] et en posant  $\xi = x/l$ , l'expression suivante de la composante hyperstatique de la flèche est obtenue

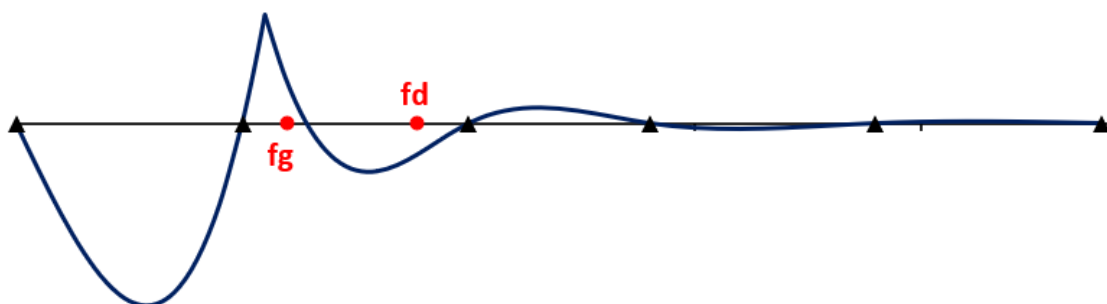
$$v_{hyp}(x) = \xi(1-\xi) \left[ (2-\xi) \frac{x_{fg}(s-x_{fd})}{(x_{fd}-x_{fg})} + (1+\xi) \frac{(x_{fg}-s)(l-x_{fd})}{(x_{fd}-x_{fg})} \right] \quad [4.43]$$

L'équation de la flèche est un polynôme de degré 3 dont les coefficients sont tous de fonctions linéaires de l'abscisse « s » de la section considérée.

Les résultats suivants sont importants pour la détermination des courbes enveloppes, ils sont valables quelle que soit la répartition de l'inertie :

- **Pas de point nul de la ligne d'influence pour une section située entre les foyers**
- **Le point nul de la ligne d'influence est situé à droite de la section pour une section située à gauche du foyer de gauche**
- **Le point nul de la ligne d'influence est situé à gauche de la section pour une section située à droite du foyer de droite**

Section à gauche du foyer de gauche





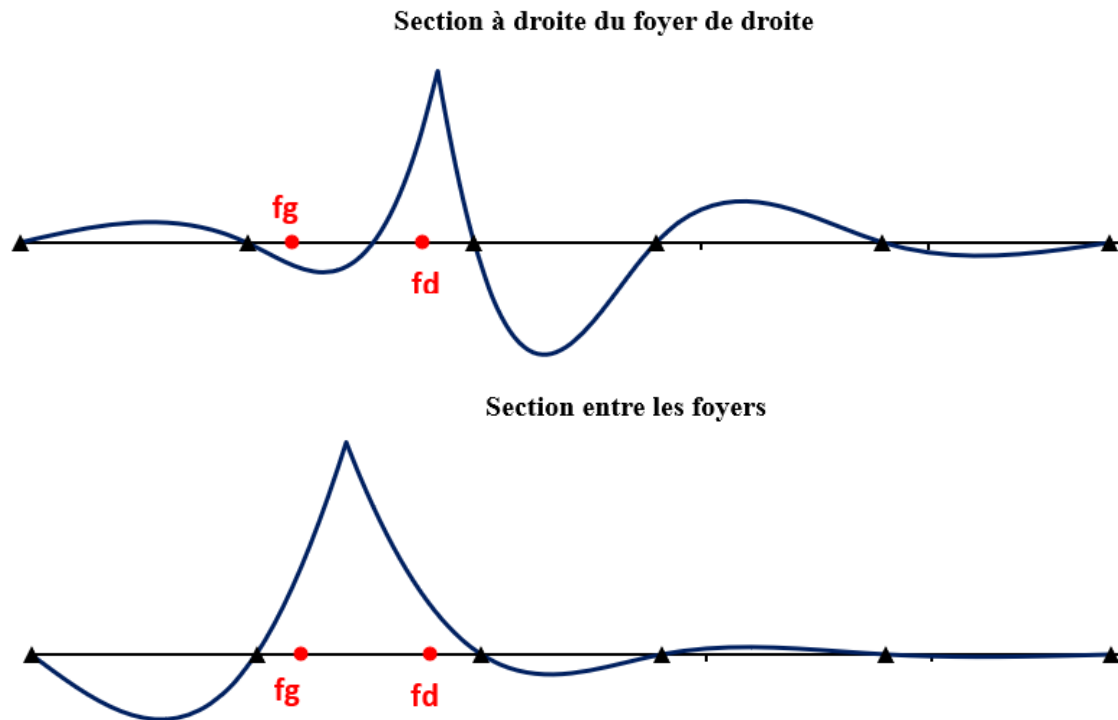


Figure 4.12 – Allure des lignes d'influence en fonction de la position de la section pour une poutre à 5 travées

### Expression de la flèche pour une section située à droite du foyer de droite

Le point de flèche nulle se situant à gauche de la section, l'expression de la flèche à considérer est celle obtenue évidemment à gauche de la section.

En notant

$$\xi_s = \frac{s}{\ell} \quad \xi_g = \frac{x_{fg}}{\ell} \quad \xi_d = \frac{x_{fd}}{\ell} \quad [4.44]$$

Expression de la flèche

$$v(\xi) = (l - s)\xi + v_{hyp}(\xi) \quad [4.45]$$

$$v(\xi) = \xi l \left[ 1 - \xi_s + \frac{\xi_g(\xi_s - \xi_d)}{(\xi_d - \xi_g)}(2 - 3\xi + \xi^2) + \frac{(1 - \xi_d)(\xi_g - \xi_d)}{(\xi_d - \xi_g)}(1 - \xi^2) \right]$$

Pour simplification

$$u_1 = \frac{(1 - 3\xi_g)(\xi_d - \xi_s)}{(\xi_d - \xi_g)} \quad u_2 = \frac{3\xi_g(\xi_d - \xi_s)}{(\xi_d - \xi_g)} \quad u_3 = 1 - \xi_s - u_1 - u_2 \quad [4.46]$$

La flèche totale à gauche de la section

$$v(\xi) = \ell[u_1\xi + u_2\xi^2 + u_3\xi^3] \quad [4.47]$$

Le point de flèche nulle est obtenu en résolvant l'équation

$$u_1 + u_2\xi + u_3\xi^2 = 0 \quad [4.48]$$

Point de flèche nulle obtenu

$$\xi_0 = \frac{-u_2 + \sqrt{u_2^2 - 4u_1u_3}}{2u_3} \quad [4.49]$$

Le point de flèche minimale, donc le point de rotation nulle, est obtenu en résolvant l'équation suivante, qui n'est autre que la dérivée de l'expression de la flèche.

$$u_1 + 2u_2\xi + 3u_3\xi^2 = 0 \quad [4.50]$$

Point de rotation nulle obtenu

$$\xi_{min} = \frac{-u_2 + \sqrt{u_2^2 - 3u_1u_3}}{3u_3} \quad [4.51]$$

Lorsque la section est sur le foyer de droite

$$u_2 = u_1 = 0 \quad [4.52]$$

Et les deux solutions sont

$$\xi_{min} = \xi_0 = 0 \quad [4.53]$$

Donc le point de flèche nulle et de flèche minimale est sur l'appui de gauche.

Lorsque la section est sur l'appui de droite

$$\begin{aligned} \xi_s = 1 \quad u_2^2 - 3u_1u_3 &= (1 - \xi_d)^2(2 - 3\xi_g)^2 \\ \xi_0 &= 1 \end{aligned} \quad [4.54]$$

Le point de flèche nulle est sur l'appui de gauche

Flèche totale à droite de la section

$$v(\xi) = \ell[u_1\xi + u_2\xi^2 + u_3\xi^3 + 1 - \xi] \quad [4.55]$$

Valeurs minimale et maximale de la flèche

La valeur minimale de la flèche est atteinte pour  $\xi = \xi_{min}$ , et la valeur maximale est atteinte sur la section considérée pour  $\xi = \xi_s$ .

$$v_{min}(\xi) = \ell[u_1\xi_{min} + u_2\xi_{min}^2 + u_3\xi_{min}^3]$$

$$v_{max}(\xi) = \ell[u_1\xi_s + u_2\xi_s^2 + u_3\xi_s^3]$$
[4.56]

Ces deux valeurs donnent les valeurs minimales et maximales respectives du moment dans la section d'abscisse « s » lorsqu'une charge unité est placée dans la travée.

### **Expression de la flèche pour une section située à gauche du foyer de gauche**

Le point de flèche nulle se situant à droite de la section, l'expression de la flèche à considérer est celle obtenue à droite de la section.

Les expressions sont obtenues à partir des précédentes en remplaçant  $\xi_s$  par  $1 - \xi_s$ ,  $\xi_g$  par  $1 - \xi_g$  et  $\xi_d$  par  $1 - \xi_d$ .

Expression de la flèche

$$v(\xi) = (1 - \xi)s + v_{hyp}(\xi)$$

$$v(\xi) = (1 - \xi)l \left[ \xi_s + \frac{\xi_g(\xi_s - \xi_d)}{(\xi_d - \xi_g)}(2\xi - \xi^2) + \frac{(1 - \xi_d)(\xi_g - \xi_d)}{(\xi_d - \xi_g)}(\xi + \xi^2) \right]$$
[4.57]

En posant

$$u_1 = \frac{(2 - 3\xi_d)(\xi_g - \xi_s)}{(\xi_d - \xi_g)} \quad u_2 = \frac{3(1 - \xi_d)(\xi_s - \xi_g)}{(\xi_d - \xi_g)}$$
[4.58]

$$u_3 = \frac{\xi_g - \xi_s(1 - \xi_d + \xi_g)}{(\xi_d - \xi_g)}$$

La flèche totale à droite de la section

$$v(\xi) = (1 - \xi)l [u_3(1 - \xi)^2 + u_2(1 - \xi) + u_1]$$
[4.59]

Le point de flèche nulle est obtenu en résolvant l'équation

$$u_1 + u_2(1 - \xi) + u_3(1 - \xi)^2 = 0$$
[4.60]

Point de flèche nulle obtenu

$$\xi_0 = 1 - \frac{-u_2 + \sqrt{u_2^2 - 4u_1u_3}}{2u_3}$$
[4.61]

Le point de flèche minimale, donc le point de rotation nulle, est obtenu en annulant la dérivée de la flèche.

Les points de flèche nulle et de rotation nulle peuvent également être obtenus en remplaçant  $\xi_0$  par  $1 - \xi_0$  et  $\xi_{min}$  par  $1 - \xi_{min}$ .

Point de rotation nulle obtenu

$$\xi_{min} = 1 - \frac{-u_2 + \sqrt{u_2^2 - 3u_1u_3}}{3u_3} \quad [4.62]$$

Lorsque la section est sur le foyer de gauche

$$u_2 = u_1 = 0 \quad [4.63]$$

Et les deux solutions sont

$$\xi_{min} = \xi_0 = 1 \quad [4.64]$$

Donc le point de flèche nulle et de flèche minimale est sur l'appui de droite.

Flèche totale à gauche de la section

$$v(\xi) = (1 - \xi) l [u_3 (1 - \xi)^2 + u_2 (1 - \xi) + u_1 + 1 - \xi] \quad [4.65]$$

Valeurs minimale et maximale de la flèche

La valeur minimale de la flèche est atteinte pour  $\xi = \xi_{min}$ , et la valeur maximale est atteinte sur la section considérée pour  $\xi = \xi_s$ .

$$\begin{aligned} v_{min}(\xi) &= l [u_3 (1 - \xi_{min})^3 + u_2 (1 - \xi_{min}) + u_1 (1 - \xi_{min})] \\ v_{max}(\xi) &= l [u_3 (1 - \xi_{max})^3 + u_2 (1 - \xi_{max}) + u_1 (1 - \xi_{max})] \end{aligned} \quad [4.66]$$

Ces deux valeurs donnent les valeurs minimales et maximales respectives du moment dans la section d'abscisse « s » lorsqu'une charge unité est placée dans la travée.

#### 4.2.3. Expression de la ligne d'influence dans les travées non chargées

Pour les travées situées à gauche de la travée chargée, l'amplitude des flèches maximales est proportionnelle au couple sur l'appui de gauche de la travée chargée ; par contre, la position de ces maxims est indépendante du couple.

De même, les positions des flèches maximales à droite de la travée chargée sont indépendantes du couple sur l'appui droite de la travée, mais leur amplitude est proportionnelle à ce couple.

Lorsqu'une charge est appliquée dans une travée autre que celle de la section, le moment varie linéairement dans la travée de la section. Il est nul :

- au foyer de droite lorsque la charge est située dans une travée de gauche
- au foyer de gauche lorsque la charge est située dans une travée de droite

L'expression de la flèche n'est autre que la composante hyperstatique donnée aux équations [4.41] et [4.43].

En rappelant les expressions des flèches pour une poutre isostatique soumise à des couples de moments sur appuis, voir équation [4.42].

$$v_{o,1}(x) = \frac{l}{6EI} x \left(2 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad v_{o,2}(x) = \frac{l}{6EI} \left(1 + \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad [4.67]$$

$$\xi = \frac{x}{l} \quad v(\xi) = \xi(1 - \xi)[(2 - \xi)X_1 + (1 + \xi)X_2] \frac{l^2}{6EI}$$

Le point de flèche maximale est donné par

$$f'(\xi) = 0 \quad \xi = \frac{-3X_1 \pm \sqrt{3(X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2)}}{3(X_2 - X_1)} \quad [4.68]$$

### Travées à droite de la travée chargée

Le couple est appliqué sur l'appui gauche de la travée non chargée, les réactions  $X_1$  et  $X_2$  des travées non chargées sont obtenues en appliquant la méthode des foyers

$$X_1 = 1 \quad X_2 = -\psi \quad [4.69]$$

Il n'y a pas un point de flèche nulle.

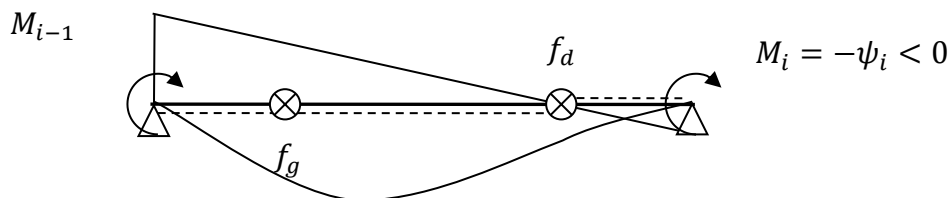


Figure 4.13 – Moment sur appui de gauche de la travée non chargée

Point maximal avant le foyer de droite

$$\xi_{max} = \frac{1}{1 + \psi} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 - \psi + \psi^2}{3}} \right] \quad [4.70]$$

Expression de la flèche

$$v_g(\xi) = \xi(1 - \xi)[2 - \xi - \psi(1 + \xi)] \frac{l^2}{6EI} \quad [4.71]$$

### Travées à gauche de la travée chargée

Le couple est appliqué sur l'appui droite de la travée non chargée, les réactions  $X_1$  et  $X_2$  des travées non chargées sont obtenues en appliquant la méthode des foyers

$$X_1 = -\varphi \quad X_2 = 1 \quad [4.72]$$

Il n'y a pas un point de flèche nulle.

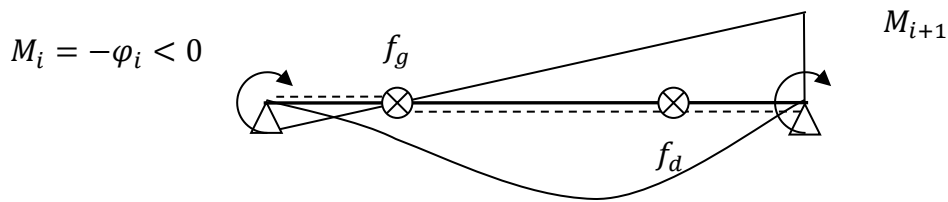


Figure 4.14 – Moment sur appui de droite de la travée non chargée

Point maximal après le foyer de gauche

$$\xi_{max} = \frac{1}{1 + \varphi} \left[ \varphi + \sqrt{\frac{1 - \varphi + \varphi^2}{3}} \right] \quad [4.73]$$

Expression de la flèche

$$v_d(\xi) = \xi(1 - \xi)[1 + \xi - \varphi(2 - \xi)] \frac{l^2}{6EI} \quad [4.74]$$

### 4.3 Détermination de la ligne d'influence du moment d'une charge tandem TS

Les modèles de charge à considérer comprennent également des charges concentrées à double ou à plusieurs essieux. Dans cette section, le calcul des lignes d'influence sous une charge tandem à double essieux est traité. Les cas d'essieux multiples s'appliqueront en suivant la même démarche.

En effet, les lignes d'influence des deux charges sont obtenues à partir de la même fonction polynomiale par morceaux qui est la ligne d'influence de la charge ponctuelle déjà décrite dans la section précédente. Toutefois, ces deux fonctions sont décalées de la distance entre les deux charges et les coefficients du polynôme ne changent pas au même moment.

D'autre part la longueur de la ligne d'influence du tandem sera égale à la longueur de la poutre augmentée de la distance entre les essieux. La longueur totale sera divisée en autant d'intervalle que nécessaire de telle sorte que, sur chaque intervalle on puisse déterminer les coefficients du polynôme correspondant à l'influence de la somme des deux charges.

#### Principe de la méthode

L'abscisse de la première charge est prise comme référence, et la contribution de chacune des charges est décrite comme une succession de polynômes de degré 3 en effectuant le changement de variable nécessaire.

La première étape consiste à déterminer les abscisses de changement d'équation pour l'une ou l'autre charge.

Les coefficients du polynôme total changent à chaque fois qu'une charge passe sur un appui ou bien sur la section de calcul. La poutre est divisée en  $2n+2$  segments,  $n$  étant le nombre de travées.

Pour chaque intervalle et pour chacune des charges, il faudra déterminer :

- l'intervalle de définition de la ligne d'influence élémentaire (d'une charge ponctuelle) dans lequel se trouve la charge ;
- l'abscisse d'origine et l'abscisse de fin de l'intervalle ;
- les coefficients du polynôme après avoir effectué le changement de variable.

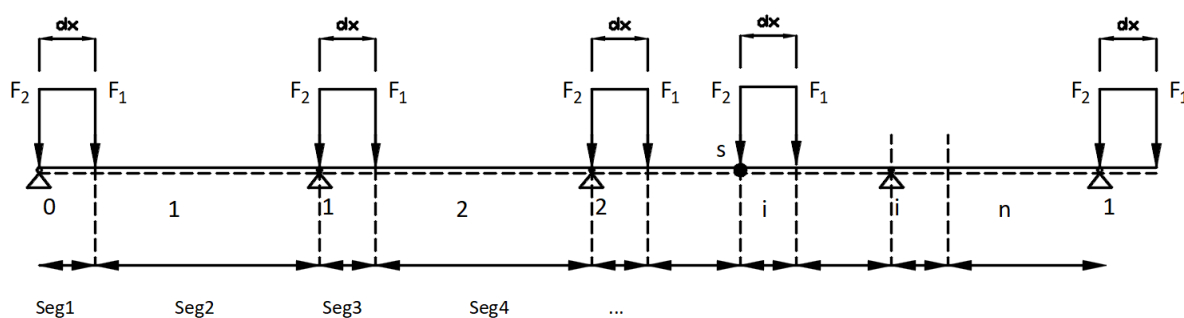


Figure 4.15 – Division de la poutre en  $n+2$  segments

L'intervalle de la ligne d'influence du tandem ne décrit qu'une partie de cette longueur ;

$$\chi = p_0 + p_1 \xi \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad [4.75]$$

$$p_0 = \frac{x_{seg} - x_{deb, travée}}{l_{travée}} \quad p_1 = \frac{l_{seg}}{l_{travée}} \quad [4.76]$$

La contribution de la charge correspondante s'exprime donc sous la forme suivante, en remplaçant  $\chi$  par sa valeur :

$$v(\xi) = c_0 + c_1(p_0 + p_1 \xi) + c_2(p_0 + p_1 \xi)^2 + c_3(p_0 + p_1 \xi)^3 \quad [4.77]$$

Après développement et regroupement des termes en fonction de  $\xi$  :

$$v(\xi) = d_0 + d_1 \xi + d_2 \xi^2 + d_3 \xi^3 \quad [4.78]$$

$$\begin{aligned} d_0 &= c_0 + c_1 p_0 + c_2 p_0^2 + c_3 p_0^3 & d_1 &= (c_1 + 2c_2 p_0 + 3c_3 p_0^2) p_1 \\ d_2 &= (c_2 + 3c_3 p_0) p_1^2 & d_3 &= c_3 p_1^3 \end{aligned} \quad [4.79]$$

Par suite, sous cette forme, l'influence d'un nombre quelconque de charges pourra être intégrée.

Le même calcul est effectué pour les deux charges.

Les coefficients du polynôme regroupant les deux charges sont calculés par sommation des coefficients de chacune des charges, pondérés par la valeur de chacune des charges 1 et 2.

$$\begin{aligned} d_{0,final} &= d_{0,F1} F_1 + d_{0,F2} F_2 & d_{2,final} &= d_{2,F1} F_1 + d_{2,F2} F_2 \\ d_{1,final} &= d_{1,F1} F_1 + d_{1,F2} F_2 & d_{3,final} &= d_{3,F1} F_1 + d_{3,F2} F_2 \end{aligned} \quad [4.80]$$

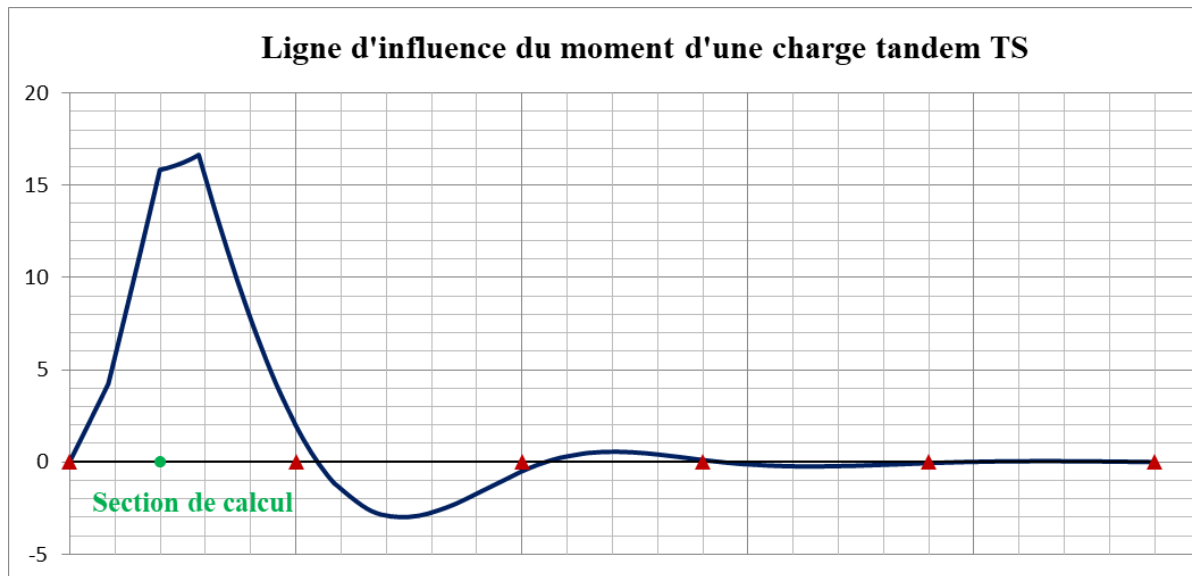


Figure 4.16 - Ligne d'influence d'une charge tandem TS pour une poutre à 5 travées

### Valeurs maximale et minimale de la ligne d'influence

Les valeurs extrêmes sont obtenues en calculant la dérivée de la ligne d'influence

$$v'(\xi) = d_1 + 2 d_2 \xi + 3 d_3 \xi^2 = 0 \quad [4.81]$$

Résolution de l'équation

$$\text{Discriminant } \Delta = 4 d_2^2 - 12 d_1 d_3 = 4 (d_2^2 - 3 d_1 d_3) \quad [4.82]$$

$$\xi_1 = \frac{-2 d_2 - \sqrt{\Delta}}{6 d_3} = \frac{-d_2 - \sqrt{d_2^2 - 3 d_1 d_3}}{3 d_3} \quad [4.83]$$

En posant  $n_1 = -d_2 - \sqrt{d_2^2 - 3 d_1 d_3}$

Pour que  $\xi_1$  soit comprise entre 0 et 1, il faut que

$$0 \leq \frac{n_1}{3 d_3} \leq 1 \quad [4.84]$$

$$3 d_3 - n_1 > 0 \quad (3 d_3 - n_1) n_1 > 0$$



$$v(\xi_1) = c_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_1^2 + c_3\xi_1^3 \quad [4.85]$$

De la même manière,

$$\xi_2 = \frac{-2 d_2 + \sqrt{\Delta}}{6 d_3} = \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 3 d_1 d_3}}{3 d_3} \quad [4.86]$$

En posant

$$n_2 = -d_2 + \sqrt{d_2^2 - 3 d_1 d_3} \quad [4.87]$$

Pour que  $\xi_2$  soit comprise entre 0 et 1, il faut que

$$0 \leq \frac{n_2}{3 d_3} \leq 1 \quad [4.88]$$

$$3 d_3 - n_2 > 0 \quad (3 d_3 - n_2) n_2 > 0 \quad [4.89]$$

$$v(\xi_2) = c_0 + c_1\xi_2 + c_2\xi_2^2 + c_3\xi_2^3$$

Le minimum et le maximum sont pris sur  $v(0)$  et  $v(1)$  et, lorsque ces valeurs existent  $v(\xi_1)$  et  $v(\xi_2)$ .

## **5. Courbes enveloppes du moment d'une poutre à inertie constante**

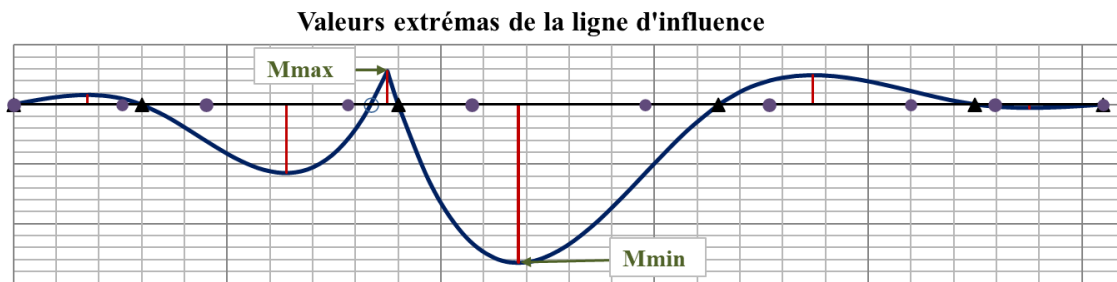
### **5.1 Courbes enveloppes sous charge concentrée**

La courbe enveloppe d'un effort donné, le moment fléchissant en l'occurrence, permet de connaître en chaque section la valeur maximale ou bien la valeur minimale du moment. Elle est construite à partir de la ligne d'influence.

Dans le cas d'une charge ponctuelle, la courbe enveloppe du moment maximal est obtenue en calculant pour chaque section, la valeur maximale positive de la ligne d'influence. De même, la courbe enveloppe du moment minimal est donc obtenue en calculant pour chaque section la valeur minimale de la ligne d'influence.

Les valeurs minimales et maximales du moment ne sont pas nécessairement obtenues lorsque la charge est dans la même travée que la section de calcul. Il est donc nécessaire de déterminer les valeurs minimales et maximales obtenues en situant la charge dans chacune des travées.

Lorsque la charge est dans la travée de la section étudiée, le maximum est obtenu lorsque la charge est au droit de la section sauf dans le cas où la section est entre les foyers.


 Figure 4.17 – Valeur maximale et minimale de la ligne d'influence pour une section  $s$  donnée

Les valeurs de  $M_{max}$  et  $M_{min}$  sont obtenues en calculant la ligne d'influence du moment en chaque point de maillage de la poutre et en retenant au point courant les valeurs minimale et maximale de la ligne d'influence pour la travée chargée et les travées non chargées.

En chaque point,

$$M_{min} = \min (v_{min, travée\ chargée}, v_{min, autres\ travées}) \quad [4.90]$$

$$M_{max} = \max (v_{max, travée\ chargée}, v_{max, autres\ travées})$$

### Section à gauche du foyer de gauche de la travée chargée

Travée chargée	$M_{min,1} = l [ u_3 (1 - \xi_{min})^3 + u_2 (1 - \xi_{min}) + u_1 (1 - \xi_{min}) ]$ $M_{max,1} = l [ u_3 (1 - \xi_{max})^3 + u_2 (1 - \xi_{max}) + u_1 (1 - \xi_{max}) ]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer à l'équation [4.66]</i></p>
Travées à gauche de la travée chargée représentées par l'indice $i$	$M_{max,2,i} = \xi_{max,i} (1 - \xi_{max,i}) [ 1 + \xi_{max,i} - \varphi_i (2 - \xi_{max,i}) ] \frac{\ell^2}{6EI}$ $\xi_{max,i} = \frac{1}{1 + \varphi_i} \left[ \varphi_i + \sqrt{\frac{1 - \varphi_i + \varphi_i^2}{3}} \right]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer aux équations [4.73] et [4.74]</i></p>
Travées à droite de la travée chargée représentées par l'indice $j$	$M_{max,3,j} = \xi_{max,j} (1 - \xi_{max,j}) [ 2 - \xi_{max,j} - \psi_j (1 + \xi_{max,j}) ] \frac{\ell^2}{6EI}$ $\xi_{max,j} = \frac{1}{1 + \psi_j} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 - \psi_j + \psi_j^2}{3}} \right]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer aux équations [4.70] et [4.71]</i></p>
<b>Courbe enveloppe</b>	$M_{min} = \min (M_{min,1}, M_{max,2,i}, M_{max,3,j})$ $M_{max} = \max (M_{max,1}, M_{min,2,i}, M_{min,3,j})$

 Tableau 4.2 – Détermination de la valeur des moments  $M_{min}$  et  $M_{max}$

**Section à droite du foyer de droite de la travée chargée**

Travée chargée	$M_{min,1} = \ell[u_1\xi_{min} + u_2\xi_{min}^2 + u_3\xi_{min}^3]$ $M_{max,1} = \ell[u_1\xi_s + u_2\xi_s^2 + u_3\xi_s^3]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer à l'équation [4.56]</i></p>
Travées à gauche de la travée chargée représentées par l'indice i	$M_{max,2,i} = \xi_{max_i}(1 - \xi_{max_i})\left[1 + \xi_{max_i} - \varphi_i(2 - \xi_{max_i})\right] \frac{\ell^2}{6EI}$ $\xi_{max_i} = \frac{1}{1 + \varphi_i} \left[ \varphi_i + \sqrt{\frac{1 - \varphi_i + \varphi_i^2}{3}} \right]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer aux équations [4.73] et [4.74]</i></p>
Travées à droite de la travée chargée représentées par l'indice j	$M_{max,3,j} = \xi_{max_j}(1 - \xi_{max_j})\left[2 - \xi_{max_j} - \psi_j(1 + \xi_{max_j})\right] \frac{\ell^2}{6EI}$ $\xi_{max_j} = \frac{1}{1 + \psi_j} \left[ 1 - \sqrt{\frac{1 - \psi_j + \psi_j^2}{3}} \right]$ <p style="text-align: center;"><i>Se référer aux équations [4.70] et [4.71]</i></p>
<b>Courbe enveloppe</b>	<p style="text-align: center;"><b><math>M_{min} = \min(M_{min,1}, M_{max,2,i}, M_{max,3,j})</math></b></p> <p style="text-align: center;"><b><math>M_{max} = \max(M_{max,1}, M_{min,2,i}, M_{min,3,j})</math></b></p>

Tableau 4.3 – Détermination de la valeur du moment Mmin

Lorsque la section est située entre les deux foyers, la ligne d'influence ne s'annule pas ; le moment minimal est nul et le moment maximal est obtenu au droit de la section de calcul.

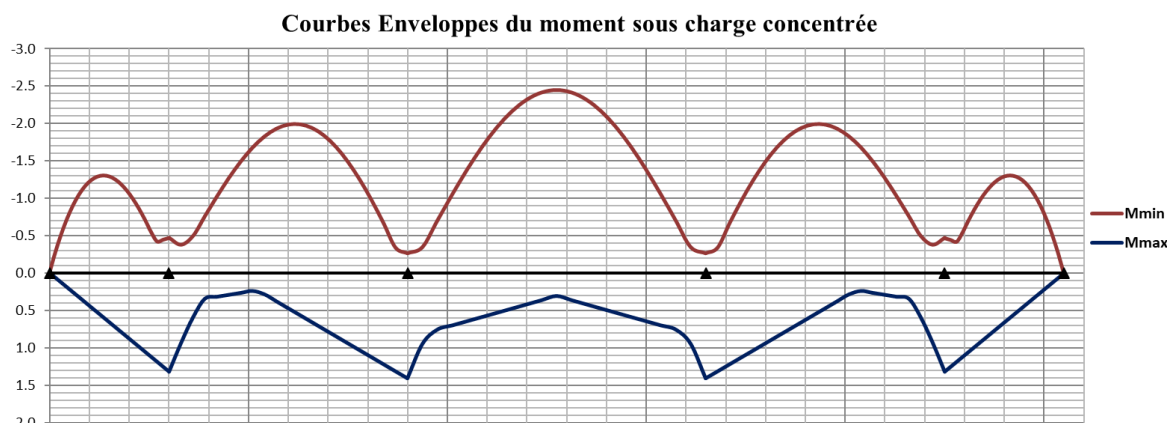


Figure 4.18 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge concentrée pour une poutre à 5 travées

## 5.2 Courbes enveloppes sous charge tandem TS

Ayant les valeurs minimale et maximale de la déformée sur chaque segment, le tracé des courbes enveloppes s'effectue en appliquant le même principe que pour la charge concentrée.

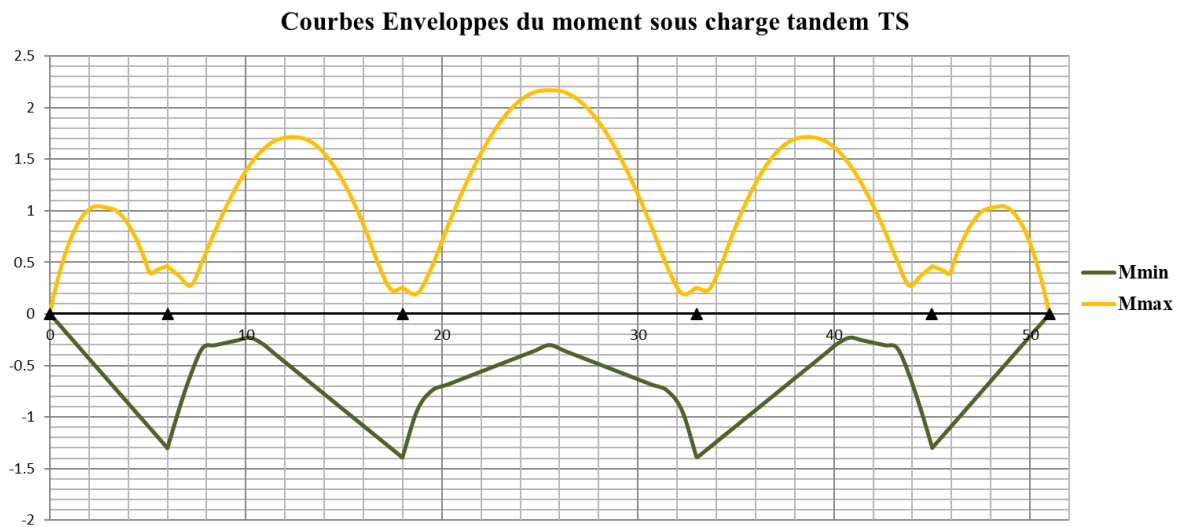


Figure 4.19 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge tandem TS pour une poutre à 5 travées

## 5.3 Courbes enveloppes sous charge uniforme UDL

Les courbes enveloppes du moment sous charge UDL sont obtenues par intégration de la ligne d'influence. Pour trouver le moment minimal, la somme est exclusivement effectuée sur les travées pour lesquelles la ligne d'influence est négative en suivant les conventions de signe indiquées dans la section 4.1.1. Le moment maximal sera donné par la différence entre le moment uniforme et le moment minimal.

**L'intégrale est facilement effectuée dans cette méthode du fait que la ligne d'influence de chaque point de maillage de la poutre est exprimée en tant que fonctions polynomiales.**

La détermination de la courbe enveloppe  $M_{max}$  s'effectue en intégrant les lignes d'influence de tous les segments affectés d'une couleur rose, dans les figures suivantes, pour lesquels la ligne d'influence est positive.

De la même manière, la détermination de la courbe enveloppe  $M_{min}$  s'effectue en intégrant les lignes d'influence des segments affectés d'une couleur jaune, pour lesquels la ligne d'influence est négative.

Il est plus commode de déterminer la valeur de  $M_{min}$ , et d'obtenir  $M_{max}$  en retranchant  $M_{min}$  du moment uniforme.

L'intégrale est calculée sur les travées entières qui ne contiennent pas la section de calcul « s », et entre l'appui et le point de flèche nul pour la travée qui contient la section « s ».

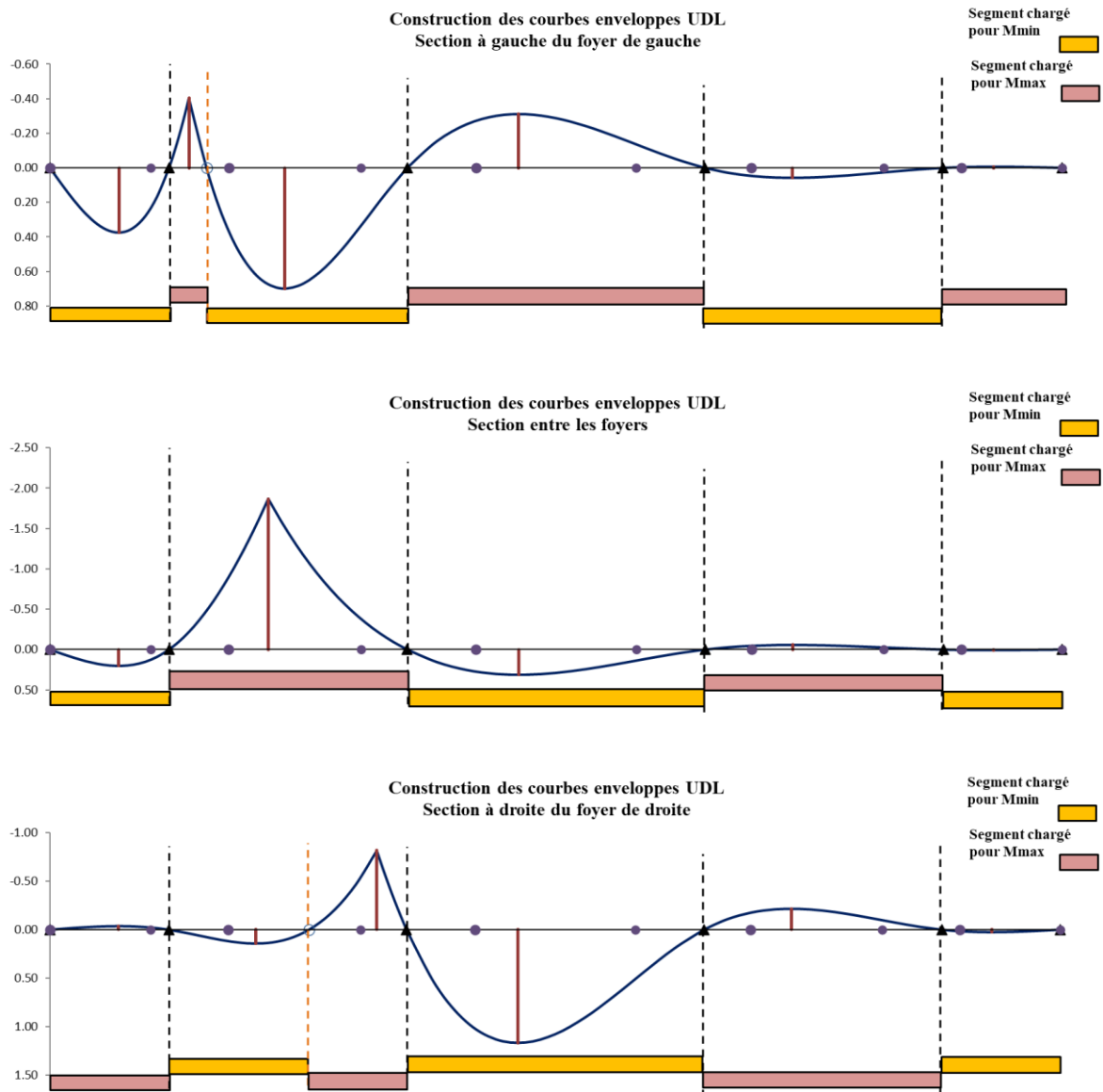


Figure 4.20 - Travées à charger et à décharger pour obtenir les courbes enveloppes du moment

### 5.3.1. Travée chargée

- **Lorsque la section « s » est située à droite du foyer de droite**

Afin d'obtenir la valeur de  $M_{min}$ , il faudra intégrer la ligne d'influence entre l'appui de gauche et le point de flèche nulle de la travée chargée notée  $i$ , en plus des intégrales sur les travées paires  $i - 2, i - 4, i - 6, \dots$  à gauche de la travée chargée, et les travées impaires  $i + 1, i + 3, \dots$  à droite de la travée chargée.

$$\begin{aligned}
 \text{Travée chargée} \quad M_{min,i} &= \int_0^{\xi_o} v(\xi) d\xi \\
 \text{Autre travée} \quad M_{min,j} &= \sum_{j=i-2, i-4, i-6, \dots}^1 \int_0^1 v_j(\xi) d\xi + \sum_{j=i+1, i+3, \dots}^n \int_0^1 v_j(\xi) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{4.91}$$

**Expression de  $M_{min,i}$  dans la travée chargée :**

Il suffit d'intégrer l'expression de la flèche  $v(\xi)$  à gauche de la section donnée par l'équation [4.47].

$$M_{min} = \ell \int_0^{\xi_0} v(\xi) d\xi \tag{4.92}$$

$$M_{min,i} = \left[ \frac{u_1 \xi_0^2}{2} + \frac{u_2 \xi_0^3}{3} + \frac{u_3 \xi_0^4}{4} \right] \ell^2$$

**Expression du moment  $M_{uni}$  sous chargement uniforme unité**

$$M_{uni} = \ell \int_0^1 v(\xi) d\xi \tag{4.93}$$

$$M_{uni} = \left[ \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} - \frac{(1 - \xi_s)^2}{2} \right] \ell^2$$

**Moment maximal**

$$M_{max,i} = M_{uni} - M_{min} \tag{4.94}$$

- **Lorsque la section « s » est située à gauche du foyer de gauche**

Afin d'obtenir la valeur de  $M_{min}$ , il faudra intégrer la ligne d'influence entre le point de flèche nulle et l'appui de droite de la travée chargée notée  $i$ , en plus des intégrales sur les travées impaires  $i - 1, i - 3, i - 4, \dots$  à gauche de la travée chargée, et les travées paires  $i + 2, i + 4, \dots$  à droite de la travée chargée.

$$\begin{aligned} \text{Travée chargée} \quad M_{min,i} &= \int_{\xi_0}^1 v(\xi) d\xi \\ \text{Autre travée} \quad M_{min,j} &= \sum_{j=i-1, i-3, i-5, \dots}^1 \int_0^1 v_j(\xi) d\xi + \sum_{j=i+2, i+4, \dots}^n \int_0^1 v_j(\xi) d\xi \end{aligned} \tag{4.95}$$

**Expression de  $M_{min,i}$  dans la travée chargée**

Il suffit d'intégrer l'expression de la flèche  $v(\xi)$  à droite de la section donnée par l'équation [4.59].

$$M_{min} = \ell \int_{\xi_0}^1 v(\xi) d\xi \tag{4.96}$$

$$M_{min,i} = \left[ \frac{(1 - \xi_0)^4}{4} u_3 + \frac{(1 - \xi_0)^3}{3} u_2 + \frac{(1 - \xi_0)^2}{2} u_1 \right] \ell^2$$

L'expression du moment uniforme est donnée par l'équation [4.96].

Le moment maximal obtenu dans la travée chargée sera

$$M_{max,i} = M_{uni} - M_{min} \quad [4.97]$$

Lorsque la section est située entre les foyers, l'intégrale s'effectue sur toute la travée.

Dans les travées non chargées, l'intégrale est calculée à partir de l'expression polynomiale de la flèche déterminée en fonction des coefficients focaux de la méthode des foyers.

### 5.3.2. Travées ne contenant pas la section de calcul

#### **Travées à droite de la travée chargée**

En intégrant l'expression de la ligne d'influence donnée par l'équation [4.71], le moment maximal/minimal est obtenu.

$$M_{min/max, travée \text{ à droite}} = \int_0^\ell v_g(x) dx = (1 - \psi) \frac{\ell^3}{24EI} \quad [4.98]$$

#### **Travées à gauche de la travée chargée**

En intégrant l'expression de la ligne d'influence donnée par l'équation [4.74], le moment maximal/minimal est obtenu.

$$M_{min/max, travée \text{ à gauche}} = \int_0^\ell v_d(x) dx = (1 - \varphi) \frac{\ell^3}{24EI} \quad [4.99]$$

### 5.3.3. Moment minimal et maximal enveloppe

Pour chaque position de la section de calcul, la courbe enveloppe du moment minimal est obtenue en sommant les valeurs des  $M_{min}$  des travées chargées et non chargées, et de même pour le moment maximal.

Les courbes données par la figure suivante sont finalement obtenues. Ces courbes seront par la suite combinées avec d'autres actions, et ils constitueront alors les sollicitations de dimensionnement de la poutre ou bien du pont étudié.

**La méthode développée et exposée dans ce chapitre est programmée sur un fichier Excel et sur le logiciel scilab. La méthode analytique proposée intégrant la méthode des foyers et l'expression des lignes d'influence en tant que fonctions polynomiales facilite la résolution de la poutre hyperstatique et la détermination des courbes enveloppes. Elle**

permet surtout de suivre analytiquement toutes les étapes de calcul, ce qui sera très utile dans la procédure d'optimisation présentée dans le chapitre suivant.

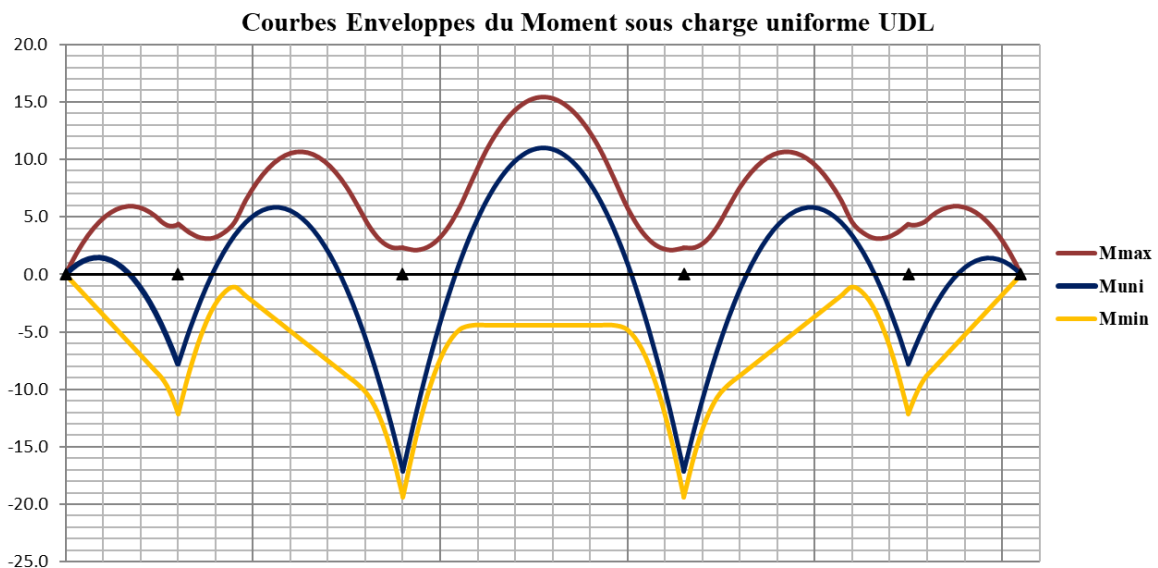


Figure 4.21 - Courbes enveloppes du moment sous chargement uniforme UDL pour une poutre à 5 travées

### 6. Ligne d'influence de l'effort tranchant d'une poutre à inertie constante

La même démarche analytique appliquée pour la ligne d'influence du moment s'applique également pour la ligne d'influence de l'effort tranchant, sauf qu'au lieu d'imposer une différence de rotation unité au droit de la section de calcul, une variation de déplacement unitaire  $\Delta\delta = 1$  avec conservation de la rotation est imposée. La flèche est donc discontinue, mais la rotation est constante

Il suffit de calculer les rotations isostatiques aux deux appuis dues à cette variation de déplacement pour obtenir les réactions hyperstatiques  $X_1$  et  $X_2$  et déterminer l'équation de la ligne d'influence.

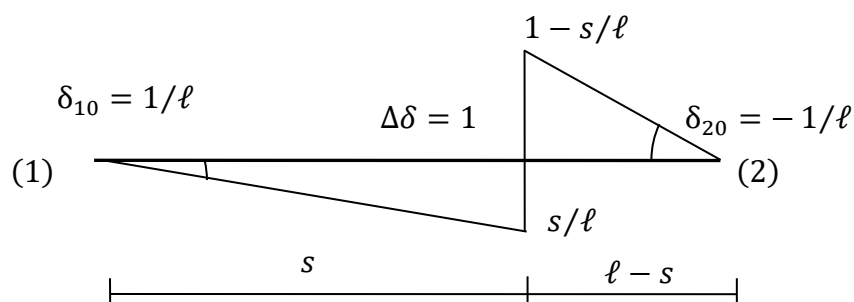


Figure 4.22 – Déformée imposée pour la détermination de la ligne d'influence de l'effort tranchant

Rotation sur appui de gauche	$\delta_{10} = 1/l$	[4.100]
------------------------------	---------------------	---------

Rotation sur appui de droite	$\delta_{20} = -\frac{s}{l}$	[4.101]
------------------------------	------------------------------	---------



En appliquant la méthode des foyers, les réactions hyperstatiques aux appuis obtenues sont les suivantes :

$$X_1 = -\frac{\varphi (1 + \psi)}{b\ell(1 - \varphi\psi)} \quad X_2 = \frac{\psi (1 + \varphi)}{b\ell(1 - \varphi\psi)} \quad [4.102]$$

En fonction de la position du foyer de gauche  $x_{fg}$  et du foyer de droite  $x_{fd}$

$$X_1 = -\frac{x_{fg}}{b\ell(x_{fd} - x_{fg})} \quad X_2 = \frac{\ell - x_{fd}}{b\ell(x_{fd} - x_{fg})} \quad [4.103]$$

Dans la structure isostatique, le moment est nul.

Dans la structure hyperstatique, le moment est donc linéaire.

$$M(x) = X_1 + \frac{x}{\ell}(X_2 - X_1) \quad [4.104]$$

Les deux moments sur appui sont indépendants de la position de la section, le moment sur appui de gauche est négatif, le moment sur appui de droite est positif. Il existe donc un point de moment nul dont la position est déterminée par

$$\frac{x}{\ell - x} = -\frac{X_1}{X_2} = \frac{x_{fg}}{\ell - x_{fd}} \quad [4.105]$$

Le graphique suivant on représente le diagramme linéaire du moment et en tirets les fibres tendues

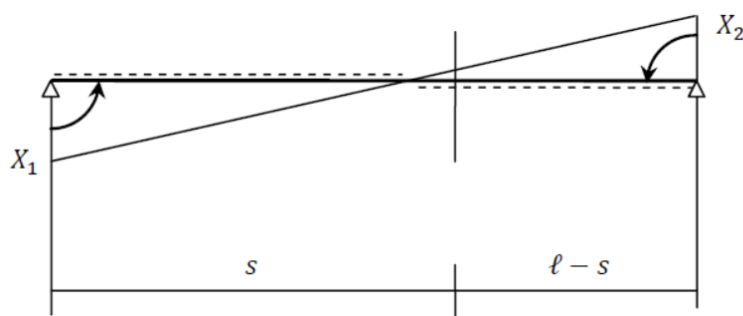


Figure 4.23 – Diagramme linéaire du moment dans la structure hyperstatique

Les moments sur appui étant de signe opposé, les rotations sur appui sont de même sens.

Les rotations sur appuis sont également déterminées par les caractéristiques mécaniques de la travée

$$\theta_1 = \frac{1}{l} + aX_1 + bX_2 \quad \theta_2 = -\frac{1}{l} + bX_1 + cX_2 \quad [4.106]$$

A partir des expressions de  $X_1$  et  $X_2$  en fonction de  $\varphi$  et de  $\psi$ , il est facile de vérifier que  $\theta_1 \geq 0$  et  $\theta_2 \leq 0$  (la rotation sur appui est comptée positive dans le sens du moment sur appui qui tend la fibre inférieure).

A gauche du point de moment nul, la fibre supérieure est tendue et la courbure est donc vers le bas. A droite du point de moment nul la fibre inférieure est tendue et la courbure est orientée vers le bas.

### Ligne d'influence de l'effort tranchant

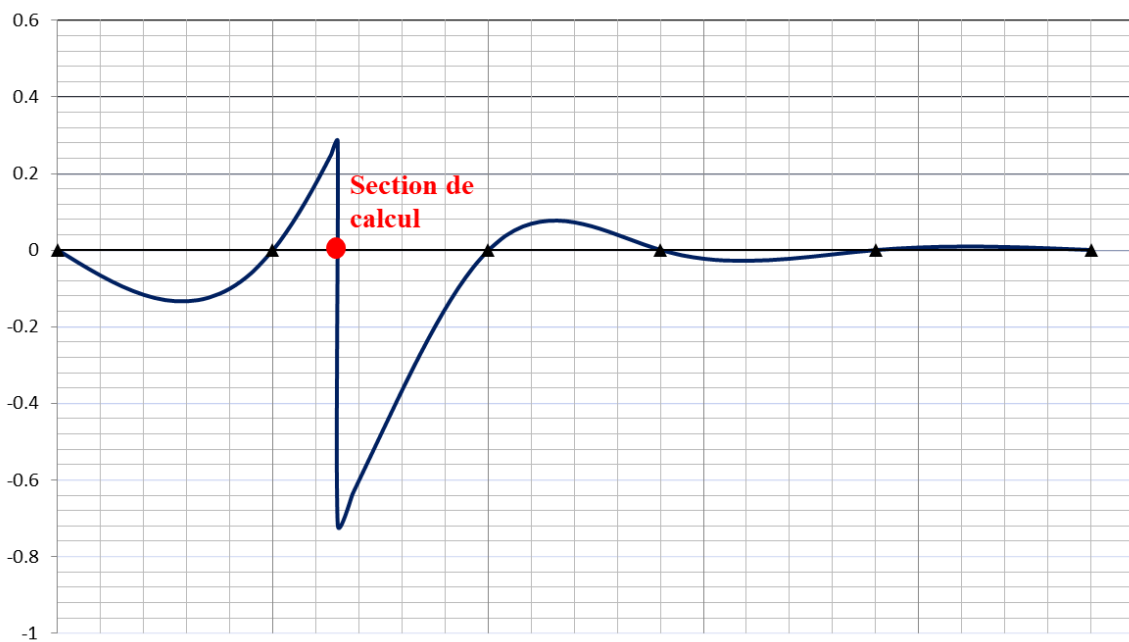


Figure 4.24 - Ligne d'influence de l'effort tranchant pour une poutre à 5 travées

Le schéma de la ligne d'influence de l'effort tranchant montre qu'il n'y a pas de point de flèche nulle en dehors de la section considérée où la flèche n'est pas continue.

Pour obtenir les valeurs maximales de l'effort tranchant :

- sous charge ponctuelle, il faut placer la charge juste à droite de la section ;
- sous charge répartie, il faut placer la charge entre la section et l'appui de droite

Inversement, pour obtenir les valeurs minimales de l'effort tranchant :

- sous charge ponctuelle, il faut placer la charge juste à gauche de la section ;
- sous charge répartie, il faut placer la charge entre l'appui de gauche et la section

### 7. Courbes enveloppes de l'effort tranchant d'une poutre à inertie constante

Les courbes enveloppes de l'effort tranchant sont obtenues en suivant le même principe présenté dans la section 5 pour le moment fléchissant.

Il faudra considérer la travée dans l'ensemble de la poutre et rechercher les valeurs minimales et maximales dues aux charges dans les autres travées.

#### Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge concentrée

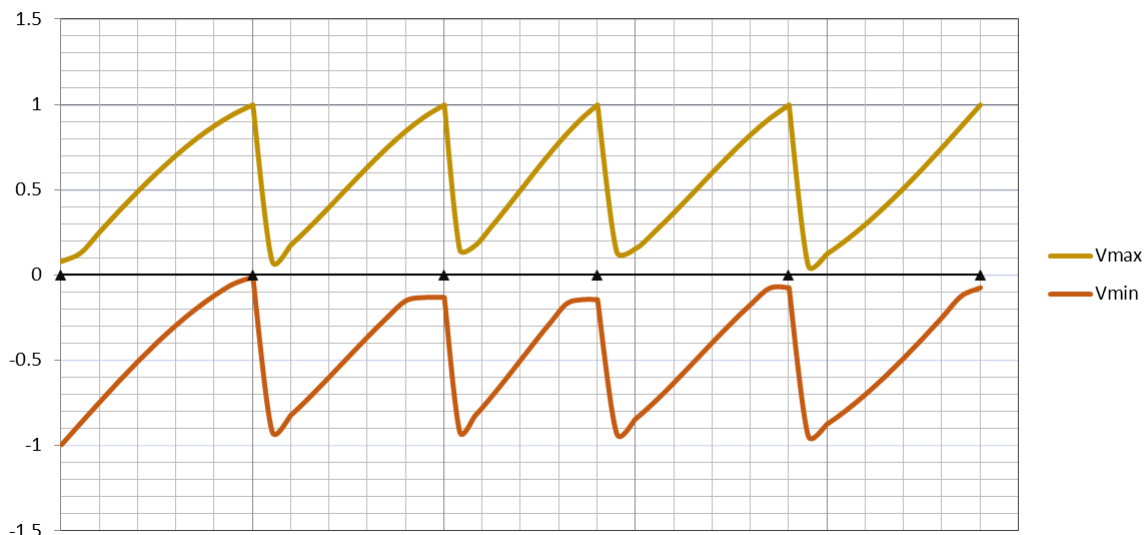


Figure 4.25 - Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge concentrée pour une poutre à 5 travées

#### Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge uniforme UDL

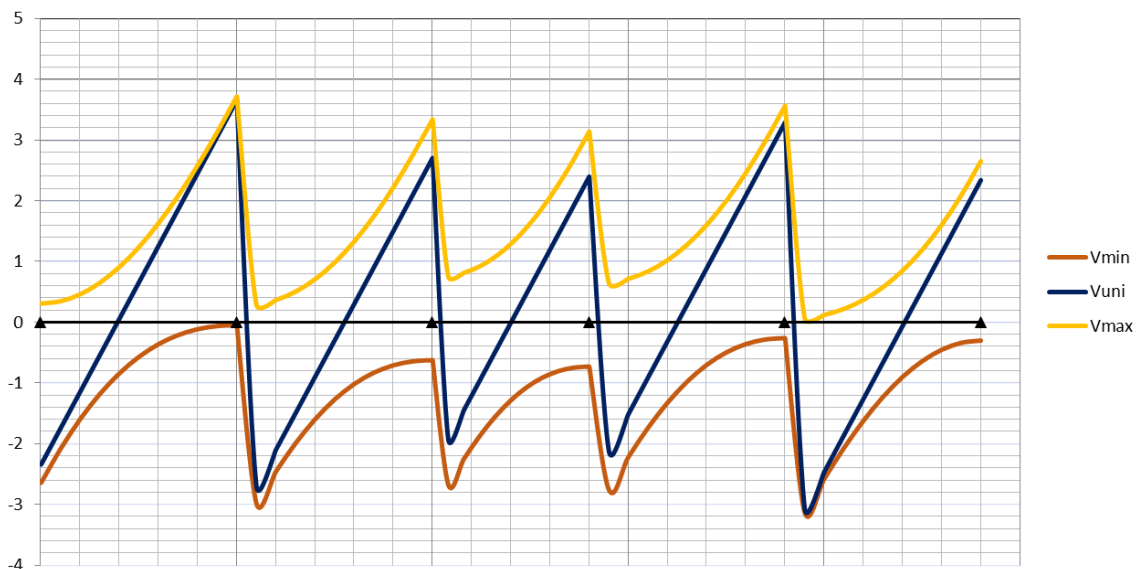
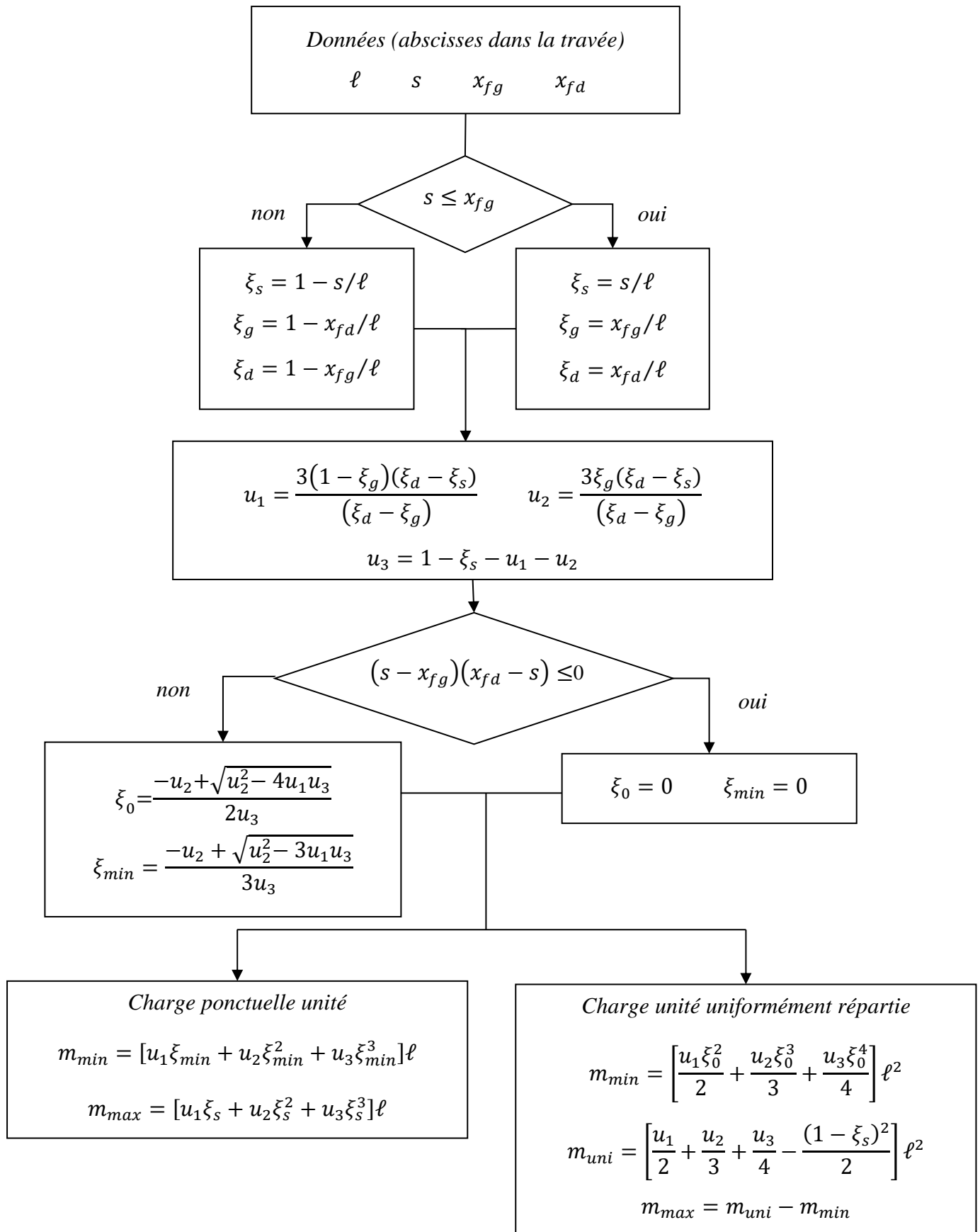


Figure 4.26 - Courbes enveloppes de l'effort tranchant sous charge uniforme pour une poutre à 5 travées

**8. Organigramme pour la détermination des courbes enveloppes du moment fléchissant pour une poutre à inertie constante**



## 9. Lignes d'influence du moment d'une poutre à inertie variable

Dans cette section, on s'intéresse aux poutres de hauteurs continument variables.

L'approche de calcul développée met en œuvre une méthode de résolution analytique pour la détermination des courbes enveloppes des poutres hyperstatiques à inertie variable. La méthode proposée s'inspire du même principe suivi pour le cas de la poutre à inertie constante en tenant compte de la variation des propriétés géométriques le long de l'ouvrage et son impact sur les différentes équations polynomiales.

Dans le cas des ponts en béton précontraint, l'usage est de considérer des variations paraboliques pour la hauteur totale ainsi que pour l'épaisseur du hourdis inférieur.

Ces variations paraboliques sont généralement de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 \left(\frac{x}{l}\right)^n \quad [4.107]$$

Il est recommandé de considérer un degré  $n$  de la fonction égal à 2 pour la hauteur et égal à 4 pour l'épaisseur des hourdis, voire Guide du Setra « Ponts en béton précontraint construits par encorbellements successifs » section 2.4.5 et 2.2.2.2

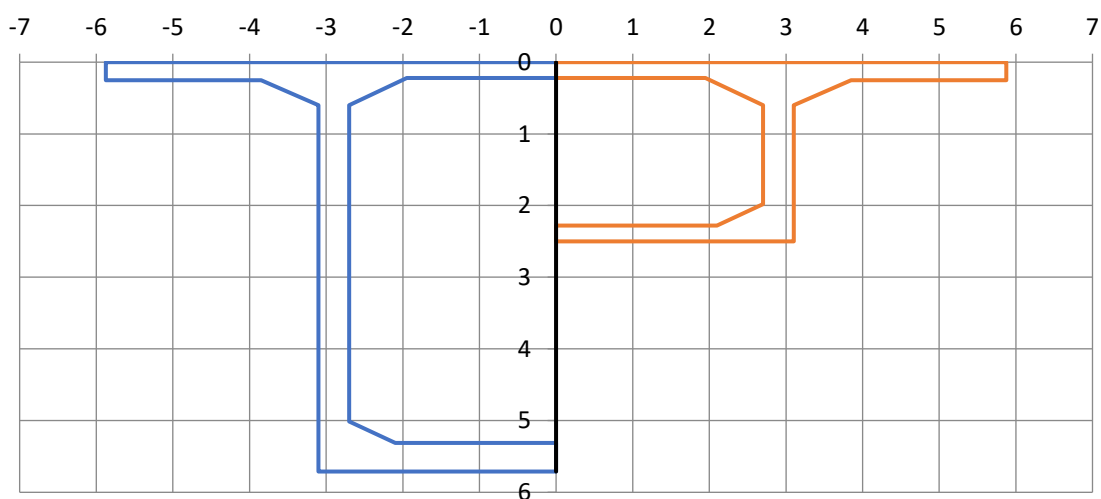


Figure 4.27 - Section transversale sur appui et à mi-travée d'un pont à caisson à inertie variable

La détermination des intégrales nécessaires pour trouver les coefficients de souplesse puis les courbes enveloppes du moment fléchissant peut être délicate. Dans le principe, il conviendrait de décomposer ces fractions rationnelles en éléments simples. Lorsqu'il s'agit d'un caisson à âmes inclinés, le degré des polynômes augmente assez vite, c'est pourquoi on utilise des approximations.

En effet, en 1970 le SETRA, a publié des tables numériques pour le calcul des poutres continues de hauteur variable (SETRA, 1970). Ces tables supposent que, lorsque la variation de hauteur

est parabolique, la variation de l’inertie doit être proche d’une loi du type suivant pour un segment de longueur  $l$  avec l’abscisse  $x$  comptée du point d’inertie minimale

$$EI(x) = EI_0 \left( 1 + k \frac{x^2}{l^2} \right)^{5/2} \quad [4.108]$$

La poutre continue est définie dans chaque travée par les hauteurs sur appuis intermédiaires  $h_1$  et aux clés ou sur appuis extrêmes  $h_0$ .

Le coefficient  $k$  peut être déterminé par un ajustement au sens des moindres carrés. Toutefois, selon les tables de Marsac, on peut également utiliser la relation suivante à partir du rapport des hauteurs ou bien du rapport des inerties maximales et minimales

$$k = \frac{h_1}{h_0} - 1 = \left[ \frac{I_1}{I_0} \right]^{2/5} - 1 \quad [4.109]$$

Les tables donnent les coefficients de souplesse  $a$ ,  $b$  et  $c$  et les rotations isostatiques d’extrémité des travées. Les moments sur appuis intermédiaires se calculent alors facilement en utilisant la méthode des foyers déjà exposée dans la section 4.1.

Les travées de rive comportent généralement des parties de hauteur constante et donc des travées qui ne peuvent être décrites par une seule équation analytique. D’ailleurs ces mêmes tables donnent des valeurs de coefficients de souplesse pour les travées de rive en fonction du rapport des longueurs entre la partie de hauteur constante et la partie de hauteur variable.

C’est pourquoi il est intéressant d’utiliser une approximation par des fonctions polynomiales par morceaux, ce qui est d’ailleurs d’usage courant pour l’intégration des fractions rationnelles.

Les tables de Marsac ont été utilisées pour la détermination des coefficients de souplesse et les rotations isostatiques d’extrémité utilisées dans l’expression de la flèche. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de la méthode analytique proposée dans la section suivante, dont le principe est de diviser la travée en segments selon la variation et de la hauteur, et d’effectuer une approximation par fonctions polynomiales sur chaque segment.

**Les résultats de la méthode analytique proposée correspondent bien aux mêmes résultats des tables numériques de Marsac publiées par le SETRA.**

Les détails de cette comparaison figurent dans l’Annexe A.

### 9.1 Principe de la méthode

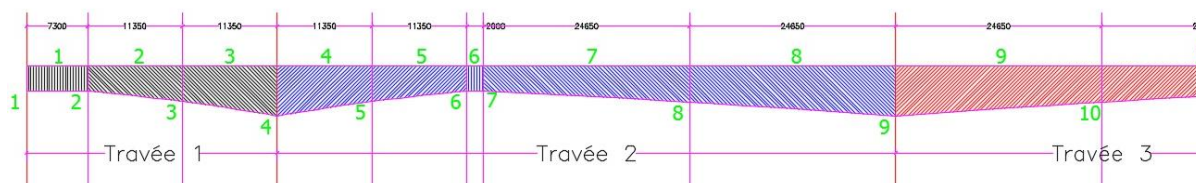


Figure 4.28 - Section longitudinale d'une poutre hyperstatique à inertie variable

Chaque travée est divisée en plusieurs segments en fonction de la variation de la section.

La poutre est donc divisée en un certain nombre d'intervalles, tel qu'illustré sur la figure précédente. Sur chaque intervalle, l'inverse de la rigidité  $1/EI$  est exprimé par un polynôme calculé à partir de la fonction Spline, fréquemment utilisée dans les logiciels de dessin.

L'interpolation cubique par fonction Spline (Legendre, 2017) permet de construire un polynôme de degré 3 sur un intervalle donné en interpolant les valeurs de la fonction et de sa dérivée aux bornes de l'intervalle.

Les détails de l'approximation de l'inverse de la rigidité  $1/EI$  en un polynôme de degré 3 par la fonction Spline dans chaque segment sont donnés en Annexe B.

Le polynôme obtenu est de la forme :

$$\frac{1}{EI} = \sum_{i=0}^P a_i t^i \quad [4.110]$$

L'étape suivante consiste à déterminer les constantes mécaniques nécessaires pour le calcul de la matrice canonique et son inverse. Une méthode de calcul basée sur la méthode des matrices de transfert est ainsi développée afin de pouvoir intégrer d'une manière analytique la variation de l'inertie. Cette méthode est détaillée dans les sections qui suivent.

Une fois les constantes mécaniques calculées et la matrice canonique construite, on passe à la détermination de la ligne d'influence et des courbes enveloppes sous charges UDL et TS. Le même principe général suivi pour le cas des poutres à inertie constante est adopté. La différence majeure dans ce cas résulte du fait que les polynômes décrivant les expressions des flèches hyperstatiques ne sont plus de degré 3 mais de degré 6. Pour le calcul des racines de ces polynômes afin de déterminer les points de flèche maximale et minimale ainsi que les points nuls de la ligne d'influence, nous avons recours aux méthodes de Muller et de Laguerre (Legendre, 2017) qui sont détaillées dans l'Annexe C.

## 9.2 Calcul des constantes mécaniques $a, b$ et $c$

La construction de la matrice canonique et de son inverse s'effectue de la même manière que pour le cas de la poutre hyperstatique à inertie constante. La seule différence réside dans le calcul des constantes mécaniques  $a, b$  et  $c$  du fait que le terme  $1/EI$  figurant dans ces trois intégrales n'est plus égal à une constante. Dans cette approche de dimensionnement analytique, la méthode des matrices de transfert est utilisée pour le calcul de ces constantes dans chaque travée.

$$a = \int_0^{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad b = \int_0^{\ell} \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI} \quad c = \int_0^{\ell} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI} \quad [4.111]$$

avec

$$S_n = \int_0^{\ell} \frac{x^n}{\ell^n} \frac{dx}{EI} \quad [4.112]$$

Le résultat prend la forme :

$$\mathbf{c} = \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{b} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2 \quad \mathbf{a} = \mathbf{S}_0 - 2\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 \quad [4.113]$$

### 9.3 Méthode de la matrice des transferts

Il s'agit de déterminer les intégrales suivantes

$$S_n = \int_0^l \frac{x^n}{l^n} \frac{dx}{EI} \quad [4.114]$$

Afin de pouvoir développer une formule générale indépendante du nombre de segments formant la travée, la première étape est de commencer par un cas simple en divisant la travée en 2 segments de longueurs  $l_1$  et  $l_2$ .

Soit les deux intégrales  $I_{1,n}$  et  $I_{2,n}$

$$I_{1,n} = \int_0^{l_1} \frac{S^n}{l_1^n} \frac{ds}{EI} \quad \text{et} \quad I_{2,n} = \int_0^{l_2} \frac{S^n}{l_2^n} \frac{ds}{EI} \quad [4.115]$$

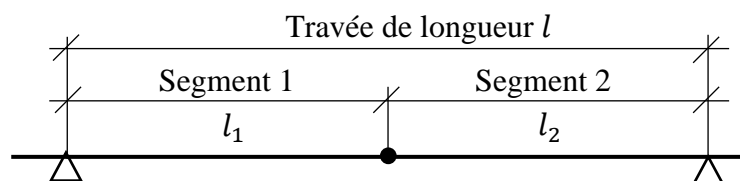


Figure 4.29 – Travée divisée en deux segments

L'intégrale générale  $S_n$  peut être écrite sous la forme

$$S_n = \int_0^{l_1} \frac{x^n}{l^n} \frac{dx}{EI} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{x^n}{l^n} \frac{dx}{EI} \quad [4.116]$$

L'objectif principal derrière cette discrétisation est de pouvoir calculer l'intégrale  $S_n$  au niveau de chaque segment de la travée suite au maillage effectué pour la poutre et par la suite déduire les valeurs des constantes mécaniques dans chacune des travées.

Le changement de variables suivant est appliqué

$$s = x - l_1 \Rightarrow x = s + l_1$$

$$S_n = \frac{l_1^n}{l^n} I_{1,n} + J_{2,n} \quad [4.117]$$



avec

$$J_{2,n} = \int_0^{l_2} \frac{(s + l_1)^n}{l^n} \frac{ds}{EI} \quad [4.118]$$

En appliquant la formule du binôme de Newton et en multipliant le dénominateur de l'expression de  $J_{2,n}$  par  $l_{2,k}$ , l'expression générale de l'intégrale  $S_n$  sera de la forme

$$S_n = \frac{l_1^n}{l^n} I_{1,n} + \frac{l_2^k}{l^n} \int_0^{l_2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{l_1^{n-k} s^k}{l_2^k} \frac{ds}{EI} \quad [4.119]$$

Ecriture sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{1,0} \\ \frac{l_1}{l} I_{1,1} \\ \frac{l_1^2}{l^2} I_{1,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{l_1}{l} & \frac{l_2}{l} & 0 \\ \frac{l_1^2}{l^2} & \frac{2l_1 l_2}{l^2} & \frac{l_2^2}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{2,0} \\ I_{2,1} \\ I_{2,2} \end{bmatrix} \quad [4.120]$$

En passant au cas plus général, pour lequel la poutre est toujours d'inertie constante mais chaque travée est discrétisée en  $m$  segments

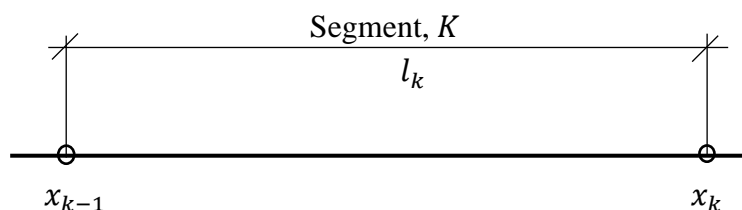


Figure 4.30 - Travée divisée en  $m$  segments

En appliquant le changement de variables suivant et en utilisant la formule du binôme de Newton, l'intégrale générale  $S_n$  sera de la forme

$$S = x - x_{k-1}$$

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{x_{k-1}^{n-j} \left[ x_k \left( 1 - \frac{x_{k-1}}{x_k} \right) \right]^j x_k^{n-j}}{l^{n-j} j! x_k^{n-j}} \times I_{k,j} \quad [4.121]$$

Avec

$$I_{k,j} = \int_0^{l_k} \frac{s_j}{l_k^j EI} ds \quad [4.122]$$

$$\frac{x_k^j x_k^{n-j}}{l^{n-j} j!} = \frac{x_k^n}{l^n} = \beta_k^n \quad [4.123]$$

$$\frac{x_{k-1}^{n-j}}{x_k^{n-j}} = \alpha_k^{n-j}$$

$$\frac{x_{k-1}}{x_k} = \alpha_k$$

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{x_{k-1}^{n-j} \left[ x_k \left( 1 - \frac{x_{k-1}}{x_k} \right) \right]^j x_k^{n-j}}{l^{n-j} j x_k^{n-j}} \times I_{k,j} \quad [4.124]$$

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \beta_k^n \alpha_k^{n-j} (1 - \alpha_k)^j \times I_{k,j}$$

Sous forme d'écriture matricielle

$$\beta_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_k^3 \end{pmatrix} \quad [4.125]$$

$$\alpha_k^{n-j} (1 - \alpha_k)^j = \begin{pmatrix} j=0 & j=1 & j=2 & j=3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_k & (1 - \alpha_k) & 0 & 0 \\ \alpha_k^2 & 2\alpha_k(1 - \alpha_k) & (1 - \alpha_k)^2 & 0 \\ \alpha_k^3 & 3\alpha_k^2(1 - \alpha_k) & 3\alpha_k(1 - \alpha_k)^2 & (1 - \alpha_k)^3 \end{pmatrix} \quad [4.126]$$

$$\begin{bmatrix} S_{k,0} \\ S_{k,1} \\ S_{k,2} \\ S_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{k-1,0} \\ S_{k-1,1} \\ S_{k-1,2} \\ S_{k-2,3} \end{bmatrix} + A(\beta_k, \alpha_k) \begin{bmatrix} I_{k,0} \\ I_{k,1} \\ I_{k,2} \\ I_{k,3} \end{bmatrix} \quad [4.127]$$

Soit  $\xi$  un point qui se trouve entre  $x_{k-1}$  et  $x_k$

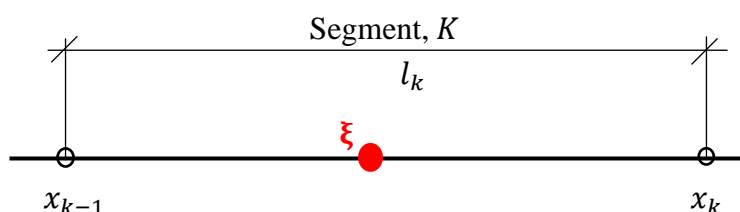


Figure 4.31 - Segment K considéré

Pour faciliter le développement de l'intégrale  $S_n$ , la variable  $\tau$  variant entre 0 et 1 est ainsi introduite

$$\tau = \frac{\xi - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \quad [4.128]$$

$$d\xi = l_k d\tau$$

De même, en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} + l_k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{x_{k-1}^{n-j} l_k^j}{l^{n-j} l^j} \times \int_0^\tau \tau^j \frac{d\tau}{EI} \quad [4.129]$$

Il reste à introduire la variation polynomiale de l'inverse de la rigidité dans l'expression de  $S_{k,n}$ , avec :

$$\frac{1}{EI} = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + a_3 \tau^3 = \sum_{i=1}^p a_i \tau^i \quad [4.130]$$

En remplaçant  $1/EI$  par son expression polynomiale dans l'intégrale  $S_{k,n}$ , l'expression générale sera de la forme

$$S_{k,n} = S_{k-1,n} + l_k \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^p \binom{n}{j} \beta_k^n \alpha_k^{n-j} (1 - \alpha_k)^j \times a_i \frac{\tau^{i+j+1}}{i+j+1} \quad [4.131]$$

Avec

$$\begin{aligned} \frac{x_k^j x_k^{n-j}}{l^{n-j} l^j} &= \frac{x_k^n}{l^n} = \beta_k^n \\ \frac{x_{k-1}^{n-j}}{x_k^{n-j}} &= \alpha_k^{n-j} \\ \frac{x_{k-1}}{x_k} &= \alpha_k \end{aligned} \quad [4.132]$$

Sous forme matricielle

$$l_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_k \beta_k & (1 - \alpha_k) \beta_k & 0 & 0 \\ \alpha_k^2 \beta_k^2 & 2\alpha_k \beta_k^2 (1 - \alpha_k) & \beta_k^2 (1 - \alpha_k)^2 & 0 \\ \alpha_k^2 \beta_k^3 & 3\alpha_k^2 \beta_k^2 (1 - \alpha_k) & 3\alpha_k \beta_k^3 (1 - \alpha_k)^2 & \beta_k^3 (1 - \alpha_k)^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad [4.133]$$

9.3.1. Démarche à suivre pour le calcul des constantes mécaniques dans le cas d'une poutre à inertie variable :

- Discrétisation de la poutre en  $m$  segments en fonction de la variation de l'inertie
- Détermination de l'expression polynomiale de l'inverse de la rigidité à partir d'une approximation par des fonctions Spline d'ordre 3.
- Calcul des abscisses de début  $x_{k-1}$  et de fin  $x_k$  de chacun des segments de la poutre.
- Détermination de l'indice de la travée dans laquelle se trouve chacun des segments
- Calcul des facteurs  $\alpha$  et  $\beta$  pour chacun des segments
- Calcul des valeurs de  $S_0, S_1$  et  $S_2$  pour chacun des segments
- Déduction des valeurs de  $S_0, S_1$  et  $S_2$  dans chacune des travées
- Calcul des constantes mécaniques  $a, b$  et  $c$  à partir de l'équation [4.156]

Il faudra noter que les valeurs de  $S_0, S_1$  et  $S_2$  calculées à partir de la méthode de transfert seront encore utiles pour la détermination des équations des polynômes décrivant la déformée de la ligne d'influence.

**9.4 Construction de la matrice canonique et de son inverse**

Pour la construction de la matrice canonique ainsi que son inverse, la même formulation détaillée dans la section 4 de ce chapitre est appliquée tout en considérant les constantes mécaniques calculées à partir de la méthode de la matrice des transferts développée dans la section précédente.

**9.5 Expressions des lignes d'influence du moment fléchissant**

La même démarche de calcul basée sur le théorème de Maxwell-Betti et la méthode des foyers, utilisée pour le cas d'une poutre à inertie constante, est appliquée dans ce cas pour la détermination des expressions des lignes d'influence en inertie variable.

9.5.1. Déformée de la structure isostatique associée sous l'effet d'un moment unité

*Flèche d'une poutre isostatique soumise à un moment constant :*

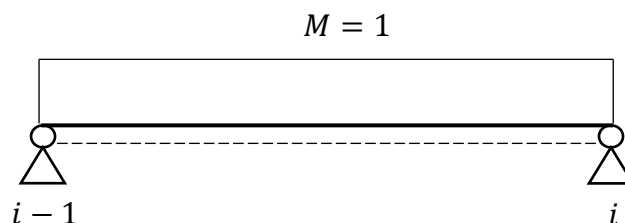


Figure 4.32 – Application d'un moment constant sur la travée isostatique

Formulation de Bresse pour le calcul des déformations et des rotations

$$w(x) = w_0 - \int_0^x M(s) \frac{ds}{EI} \tag{4.134}$$

$$v(x) = w_0 x - \int_0^x (x-s) M(s) \frac{ds}{EI}$$

avec  $w_0$  la rotation de l'appui de gauche  $i - 1$

$$\frac{1}{EI} = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 = \sum_{i=1}^3 a_i \xi^i \quad [4.135]$$

Le moment appliqué étant constant et l'inverse de la rigidité étant exprimée par un polynôme de degré 3, l'expression de la flèche isostatique correspondante sera un polynôme de degré 5. L'expression de la déformée est déterminée au niveau de chaque segment de la poutre.

$$v_{constant}(\xi) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^4 + c_5 \xi^5 = \sum_{i=1}^5 c_i \xi^i \quad [4.136]$$

Les constantes  $c_2, c_3, c_4$  et  $c_5$  sont déterminées par analogie à partir de l'expression de la courbure.

$$2c_2 = a_0 \quad 6c_3 = a_1 \quad 12c_4 = a_2 \quad 20c_5 = a_3 \quad [4.137]$$

Les coefficients  $c_0$  et  $c_1$  sont déterminés à partir des valeurs de la déformée et la rotation au début de chaque segment.

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad v(\xi) &= c_0 \\ \xi = 0 \quad w(\xi) &= c_1 \end{aligned} \quad [4.138]$$

Sous l'effet d'un moment unité, la rotation de l'appui de gauche  $w_0$  peut être obtenue à partir de l'équation générale [4.177].

$$w_0 = \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{dx}{EI} = b + c \quad [4.139]$$

D'autre part

$$V(x_{début}) = w_0 x_{début} - \int_0^{x_{début}} (x-s) M(s) \frac{ds}{EI} \quad [4.140]$$

$$c_0 = w_0 x_{début} - S_0 x_{début} + L_{travée} S_1$$

Les valeurs de  $S_0$  et  $S_1$  sont déterminées à partir de la méthode de la matrice de transfert détaillée dans la section précédente.

$$W(x_{début}) = w_0 - \int_0^{x_{début}} M(s) \frac{ds}{EI} \quad [4.141]$$

$$c_1 = w_0 - S_0$$

Les segments appartenant à la même travée auront la même rotation de l'appui de gauche  $w_0$   
*Flèche d'une poutre isostatique soumise à un moment unité de l'appui de droite :*

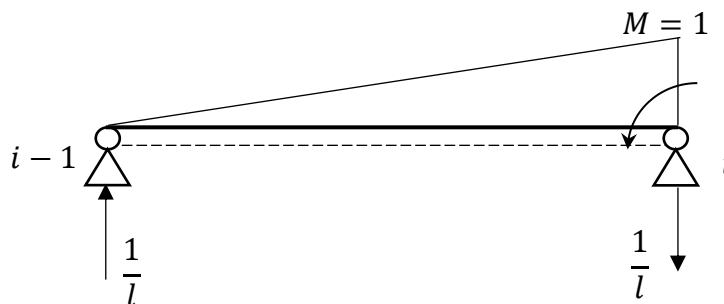


Figure 4.33 - Couple unité à droite appliqué

Le même changement de variables utilisé pour la détermination des intégrales  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  est appliqué afin de trouver l'expression de la courbure dans le segment concerné et déduire les valeurs de constantes  $c_i$  du polynôme de la déformée qui est de degré 6 dans ce cas.

$$v_{droite}(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 + c_5\xi^5 + c_6\xi^6 = \sum_{i=1}^6 c_i\xi^i \quad [4.142]$$

Soit

$$x = x_0 + \xi L_{seg} \quad \frac{x}{l} = \alpha\beta[\alpha + \xi(1 - \alpha)] \quad [4.143]$$

avec

$$\alpha = \frac{x_{k-1}}{x_k} \quad \beta = \frac{x_k}{l_{travée}} \quad [4.144]$$

Les valeurs de  $x_{k-1}$  et  $x_k$  sont comptées à partir du début de la travée correspondante.

L'expression de la courbure devient

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = \frac{M}{EI} = & \beta[\alpha a_0 + [(1 - \alpha)a_0 + \alpha a_1]\xi + [(1 - \alpha)a_1 + \alpha a_2]\xi^2 \\ & + [(1 - \alpha)a_2 + \alpha a_3]\xi^3 + (1 - \alpha)a_3\xi^4] \end{aligned} \quad [4.145]$$

Par identification de l'expression de la courbure, les coefficients  $c_i$  peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} 2c_2 \\ 6c_3 \\ 12c_4 \\ 20c_5 \\ 30c_6 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad [4.146]$$

Les coefficients  $c_0$  et  $c_1$  à partir des valeurs de la déformée et de la rotation pour  $\xi = 0$ .

$$\begin{aligned} c_0 &= w_0 x_{début} - S_1 x_{début} + L_{travée} S_2 \\ c_1 &= w_0 - S_1 \end{aligned} \quad [4.147]$$

*Flèche d'une poutre isostatique soumise à un moment unité de l'appui de gauche*

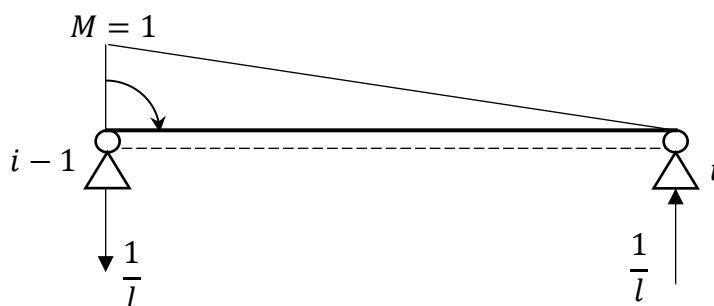


Figure 4.34 - Couple unité à gauche appliqué

Le cas d'un moment unité appliqué à l'appui de gauche est pareil que celui du moment de droite, l'expression de la déformée est un polynôme de degré 6 et elle peut être déduite à partir des deux cas précédents : moment unité constant et moment unité appliqué au niveau de l'appui de droite.

$$v_{gauche}(\xi) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^4 + c_5 \xi^5 + c_6 \xi^6 = \sum_{i=1}^6 c_i \xi^i \quad [4.148]$$

$$v_{gauche}(\xi) = v_{constant}(\xi) - v_{droite}(\xi)$$

### 9.5.2. Flèche hyperstatique sous couples unités sur appuis

Les expressions des flèches hyperstatiques sous l'effet des couples unités sur appuis gauche et droite sont ainsi déterminées. Les positions ainsi que les valeurs des extrémums dans chacune des travées sont calculées à partir des expressions des flèches hyperstatiques en utilisant la méthode de Muller.

*Pour le cas d'une rotule et couple unité sur appui de gauche*

$$v_{g,hyper} = v_{g,iso} - \psi v_{d,iso} \quad [4.149]$$

Dans ce cas, le point de flèche maximale est à gauche du foyer de droite.

Pour le cas d'une rotule et couple unité sur appui de droite :

$$v_{d,hyper} = v_{d,iso} - \varphi v_{g,iso} \quad [4.150]$$

Dans ce cas, le point de flèche maximale est à droite du foyer de gauche

Les positions ainsi que les valeurs des flèches maximales normées sont obtenues à partir des expressions des polynômes de  $v_{d,hyper}$  et de  $v_{g,hyper}$  sous l'effet des moments unités.

### 9.5.3. Expression de la déformée le long de la poutre :

Le principe de calcul est pareil que celui détaillé pour le cas d'une section à inertie constante.

La déformée en travée chargée est la somme de deux expressions :

- flèche isostatique : fonction bilinéaire due à la différence de rotation
- flèche hyperstatique : polynôme de degré 6 dû aux moments hyperstatiques sur appui

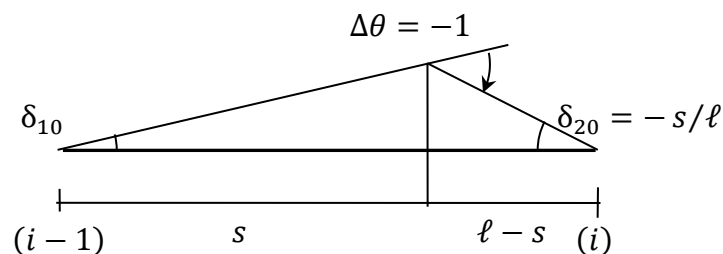


Figure 4.35 - Variation de rotation unité dans la structure isostatique

Les réactions d'appui obtenues sont les suivantes

$$X_{i-1} = -\frac{\varphi}{b(1-\varphi\psi)} \left[ 1 - (1+\psi) \frac{s}{\ell} \right] \quad X_i = \frac{\psi}{b(1-\varphi\psi)} \left[ \phi - (1+\varphi) \frac{s}{\ell} \right] \quad [4.151]$$

La composante isostatique de la flèche est donnée par

$$\begin{aligned} v_{iso}(x) &= x \left( 1 - \frac{s}{\ell} \right) && \text{à gauche de la section } x < s \\ v_{iso}(x) &= s \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) && \text{à droite de la section } x > s \end{aligned} \quad [4.152]$$



Puisque la travée est divisée en plusieurs segments, un changement de variables est nécessaire pour trouver l'expression de la flèche isostatique correspondante dans chaque segment.

La composante hyperstatique de la flèche dues aux réactions  $X_{i-1}$  et  $X_i$  données par l'équation [4.194] est un polynôme de degré 6.

$$v_{hyp}(x) = X_{i-1} v_{gauche}(x) + X_i v_{droite}(x) \quad [4.153]$$

Les expressions  $v_{gauche}(x)$  et  $v_{droite}(x)$  sont respectivement les flèches de la poutre isostatique sous l'effet d'un couple unité appliqué sur l'appui de gauche et sur l'appui de droite respectivement.

L'expression de flèche de l'équation [4.196] sera utilisée pour la détermination de la flèche hyperstatique dans les travées non-chargées.

La courbe en couleur rose de la Figure 4.36 représente la ligne d'influence isostatique dans la travée chargée, une droite de degré 1, et la courbe en couleur verte représente la ligne d'influence totale, somme de la ligne isostatique et hyperstatique.

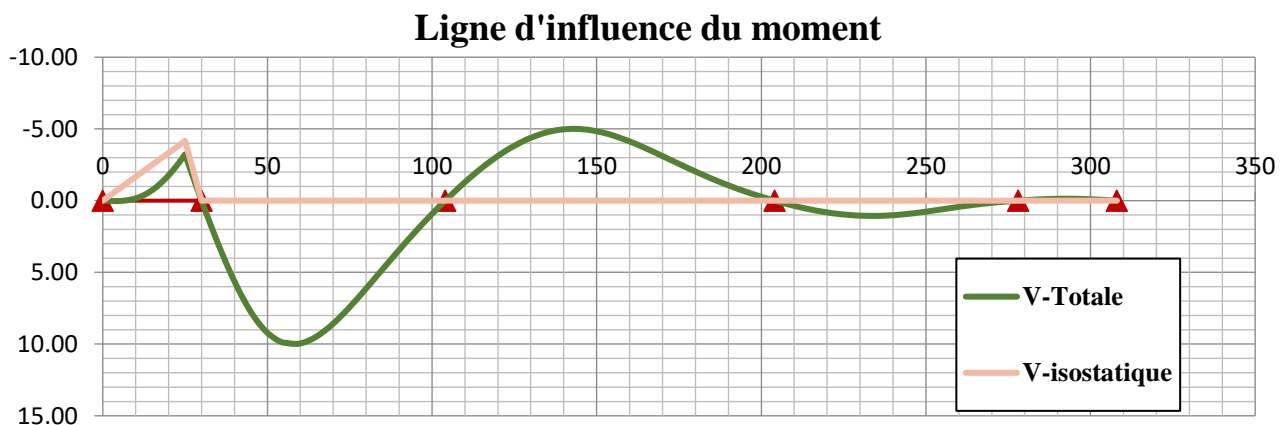


Figure 4.36 - Ligne d'influence du moment pour une poutre à inertie variable

## 10. Tracé des courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable

Le calcul des courbes enveloppes du moment fléchissant sous charges TS et UDL est effectué à partir de l'étude de la ligne d'influence.

Le même principe de résolution détaillé pour le cas des poutres hyperstatiques à inertie constante est adopté.

### *Courbes enveloppes sous charges TS*

Pour chaque point de calcul  $s$  le long de la poutre, les expressions polynomiales de la ligne d'influence sont déterminées dans toutes les travées. Comme déjà expliqué dans le cas de la poutre à inertie constante, dans la travée où se trouve le point de calcul  $s$ , la flèche totale consiste en la sommation de la flèche isostatique et la flèche hyperstatique. Pour le calcul des

extrémums de la ligne d'influence, la méthode de Muller détaillée dans l'Annexe C est utilisée afin de trouver les racines de la dérivée de la ligne d'influence exprimée par un polynôme de degré 6.

*Courbes enveloppes sous charges UDL*

Le calcul des courbes enveloppes sous charge UDL est effectué à partir de l'intégration de la ligne d'influence en suivant le même principe que celui de la poutre hyperstatique à inertie constante.

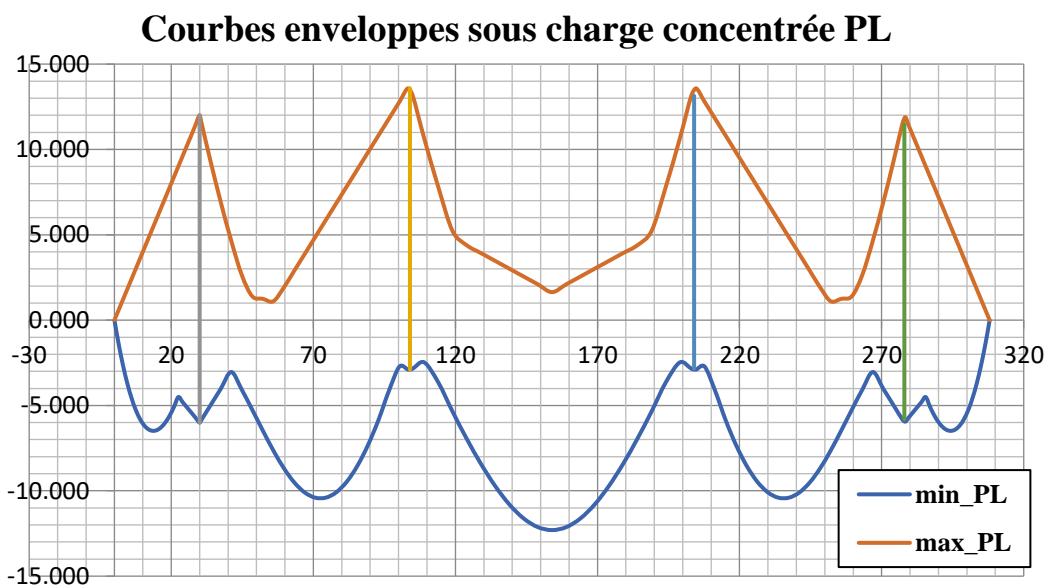


Figure 4.37 - Courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable sous charge concentrée PL

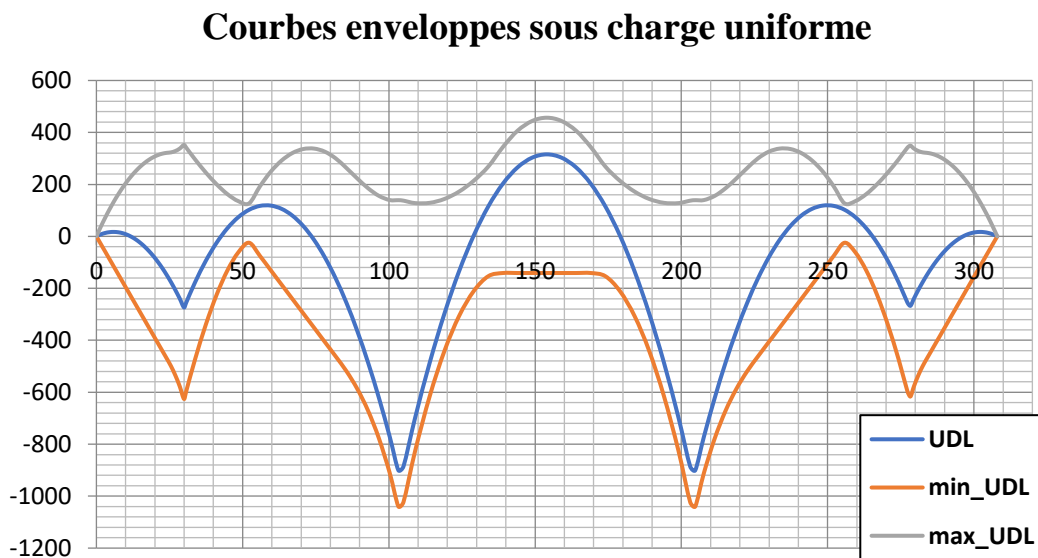
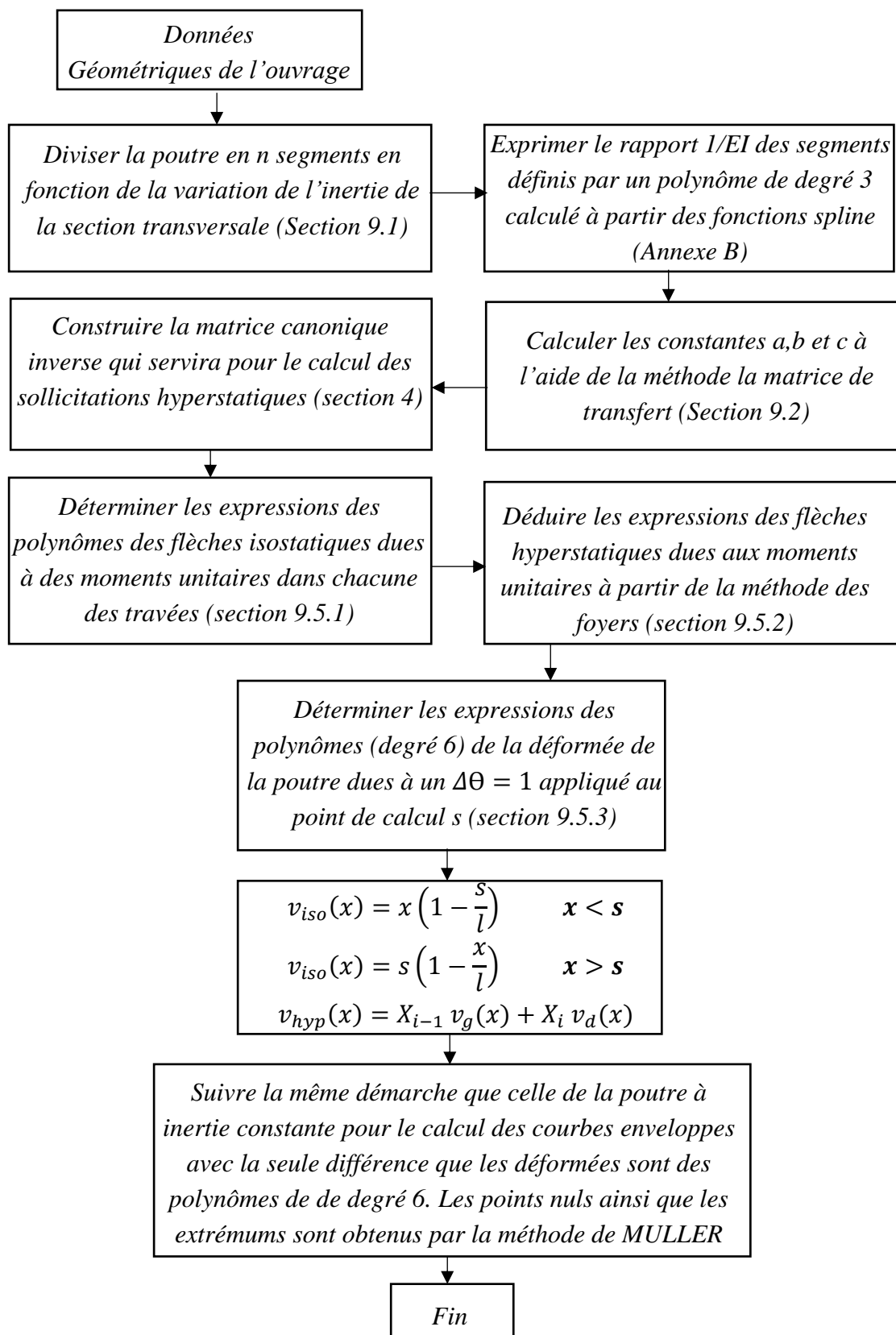


Figure 4.38 - Courbes enveloppes pour une poutre à inertie variable sous charge uniforme UDL

**11. Organigramme pour la détermination des courbes enveloppes du moment pour une poutre à inertie variable**



## 12. Dimensionnement de la précontrainte

Dans cette section, une approche analytique pour le dimensionnement de la force de précontrainte d'une poutre hyperstatique à inertie constante est présentée. Cette approche comprend la définition du profil du câble ainsi que le calcul de la force de précontrainte minimale vérifiant les conditions pratiques et mécaniques dans chaque travée. Les expressions correspondantes sont formulées sous forme d'équations polynomiales parfaitement compatibles avec le calcul des courbes enveloppes détaillé dans les sections précédentes.

L'objectif principal derrière cette formulation analytique présente dans toutes les étapes de calcul de l'ouvrage, est de présenter au concepteur une nouvelle approche pour la résolution d'un problème relativement complexe sans avoir recours aux logiciels de calcul par la méthode des EF ; ceci permet le contrôle de toutes les étapes de calcul afin d'évaluer les possibilités d'optimisation. La démarche ne présente pas de difficultés majeures en tant que programmation et peut être liée à un algorithme d'optimisation.

### 12.1 Dimensionnement de la force de précontrainte

Le dimensionnement de la force de précontrainte  $P$  se fait sous combinaisons de service ELS. Le fuseau de passage de la ligne de précontrainte doit respecter trois conditions afin qu'il existe un tracé permettant d'éviter une fissuration systématique et donc de ne pas dépasser les contraintes admissibles du béton sous combinaison caractéristique.

- **Condition 1** : Ouverture du fuseau de passage en traction
- **Condition 2** : Existence d'une ligne de précontrainte dans le fuseau de passage
- **Condition 3** : Inscription du câble à l'intérieur du fuseau

Chacune de ces trois conditions résulte en une valeur minimale de la force  $P$  ; le maximum de ces valeurs sera retenu pour le dimensionnement de la précontrainte.

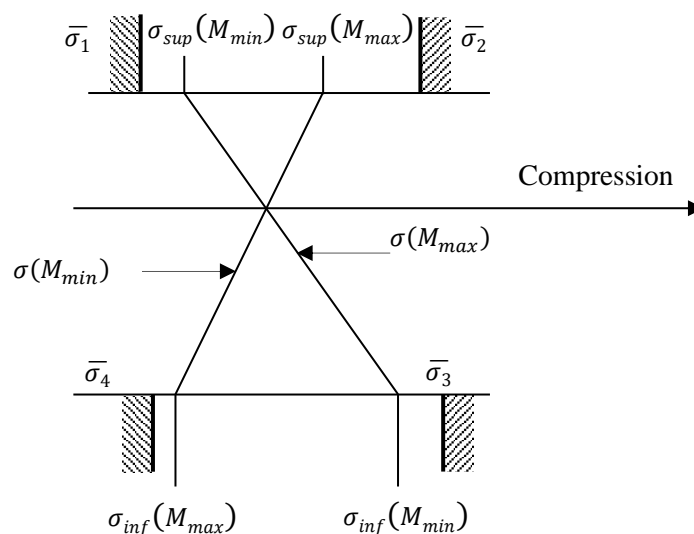


Figure 4.39 - Distribution des contraintes en fibre supérieure et inférieure de la section

Expressions des contraintes sur la fibre supérieure et inférieure de la section

$$\begin{aligned}
 \text{Fibre supérieure} \quad \sigma_{sup} &= \frac{P}{B} + \frac{(Pe_{00} + M)v}{I} \\
 \text{Fibre inférieure} \quad \sigma_{inf} &= \frac{P}{B} - \frac{(Pe_{00} + M)v'}{I}
 \end{aligned}
 \tag{4.154}$$

avec :-  $B$ : aire de la section

- $e_{00}$ : ligne de précontrainte
- $v$  et  $v'$ : position de la fibre supérieure et inférieure respectivement
- $I$ : moment d'inertie de la section
- $M$ : moment appliqué sur la section

La ligne de précontrainte  $e_{00}$  est donnée par

$$e_{00}(x) = e_0(x) + \frac{M_{hyp}}{P} \tag{4.155}$$

- $e_0(x)$ : tracé du câble de précontrainte
- $M_{hyp}$ : moment hyperstatique de précontrainte

#### Respect des contraintes

$$\text{Sous } M_{min} \quad \sigma_{sup} \geq \bar{\sigma}_1 \text{ et } \sigma_{inf} \leq \bar{\sigma}_3$$

$$\text{Sous } M_{max} \quad \sigma_{sup} \leq \bar{\sigma}_2 \text{ et } \sigma_{inf} \geq \bar{\sigma}_4$$

[4.156]

#### Fuseau de passage en traction

Les contraintes en fibre inférieure sous  $M_{max}$  et en fibre supérieure sous  $M_{min}$  doivent rester inférieure aux contraintes limites de traction  $\bar{\sigma}_1$  et  $\bar{\sigma}_4$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{P}{B} + \frac{(Pe_{00} + M_{min})v}{I} &\geq \bar{\sigma}_1 \\
 \frac{P}{B} - \frac{(Pe_{00} + M_{max})v'}{I} &\geq \bar{\sigma}_4
 \end{aligned}
 \tag{4.157}$$

Encadrement de la ligne de précontrainte  $e_{00}$  en intégrant le rendement de la section  $\rho$

Fuseau de traction :

$$\text{Traction} \quad e_2(x) = -\rho v' - \frac{M_{min}}{P} + \frac{\bar{\sigma}_1 I}{Pv} \leq e_{00} \leq e_1(x) = -\frac{\bar{\sigma}_4 I}{Pv} + \rho v - \frac{M_{max}}{P} \tag{4.158}$$

12.1.1. Condition 1 : Ouverture du fuseau de passage de traction

$$\forall x, e_2(x) \leq e_1(x) \quad [4.159]$$

Ce qui donne la première valeur de la force de précontrainte  $P_{min,I}$

$$P_{min,I} = \frac{\left(M_{max} + \frac{\overline{\sigma}_4 I}{v}\right) - \left(M_{min} - \frac{\overline{\sigma}_1 I}{v}\right)}{\rho h} \quad [4.160]$$

12.1.2. Condition 2 : Existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau de passage

Encadrement de la ligne de précontrainte  $e_{00}$  en regroupant les inéquations séparément en fibre inférieure et supérieure

$$\begin{aligned} \text{Fibre supérieure} \quad & \frac{\overline{\sigma}_1 I}{Pv} - \frac{I}{Bv} - \frac{M_{min}}{P} \leq e_{00} \leq \frac{\overline{\sigma}_2 I}{Pv} - \frac{I}{Bv} - \frac{M_{max}}{P} \\ \text{Fibre inférieure} \quad & \frac{I}{Bv'} - \frac{\overline{\sigma}_3 I}{Pv'} - \frac{M_{min}}{P} \leq e_{00} \leq \frac{I}{Bv'} - \frac{\overline{\sigma}_4 I}{Pv'} - \frac{M_{max}}{P} \end{aligned} \quad [4.161]$$

Le fuseau sera défini par

$$e_{20} - \frac{M_{min}}{P} \leq e_{00} \leq e_{10} - \frac{M_{max}}{P} \quad [4.162]$$

Les termes  $e_{20}$  et  $e_{10}$  à retenir sont

$$e_{20} = \max \left\{ \frac{\overline{\sigma}_1 I}{Pv} - \rho v' \quad ; \quad \rho v - \frac{\overline{\sigma}_3 I}{Pv'} \right\} \quad e_{10} = \min \left\{ \frac{\overline{\sigma}_2 I}{Pv} - \rho v' \quad ; \quad \rho v - \frac{\overline{\sigma}_4 I}{Pv'} \right\} \quad [4.163]$$

Pour trouver le maximum de  $e_{10}$  et le minimum  $e_{20}$ , il faudra tracer le diagramme des fonctions suivantes pour différentes valeurs de P

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\overline{\sigma}_1 I}{Pv} - \rho v' & f'_1 &= \rho v - \frac{\overline{\sigma}_3 I}{Pv'} \\ f_2 &= \frac{\overline{\sigma}_2 I}{Pv} - \rho v' & f'_2 &= \rho v - \frac{\overline{\sigma}_4 I}{Pv'} \end{aligned} \quad [4.164]$$

On notera  $P_B$  le point d'intersection des courbes  $f_1$  et  $f'_1$  et  $P_A$  le point d'intersection des courbes  $f_2$  et  $f'_2$

$$P_A = \frac{B}{h} (\overline{\sigma}_2 v' + \overline{\sigma}_4 v) \quad P_B = \frac{B}{h} (\overline{\sigma}_1 v' + \overline{\sigma}_3 v) \quad [4.165]$$

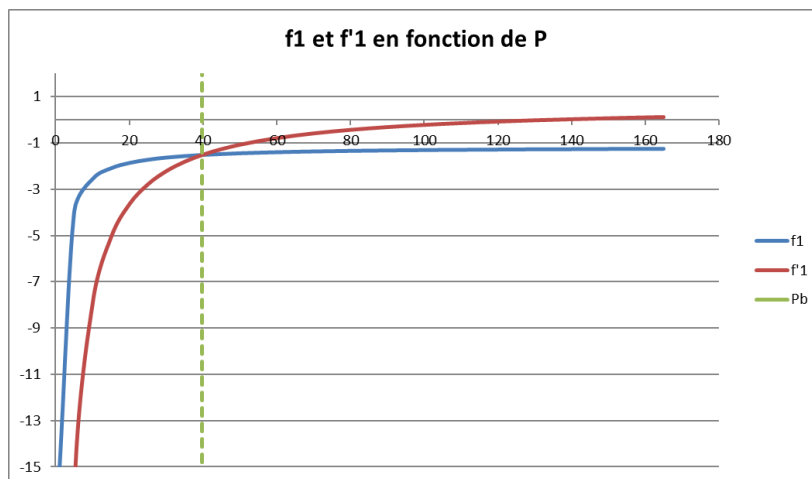


Figure 4.40 – Diagramme des fonctions  $f_1$  et  $f'_1$  en fonction de  $P$

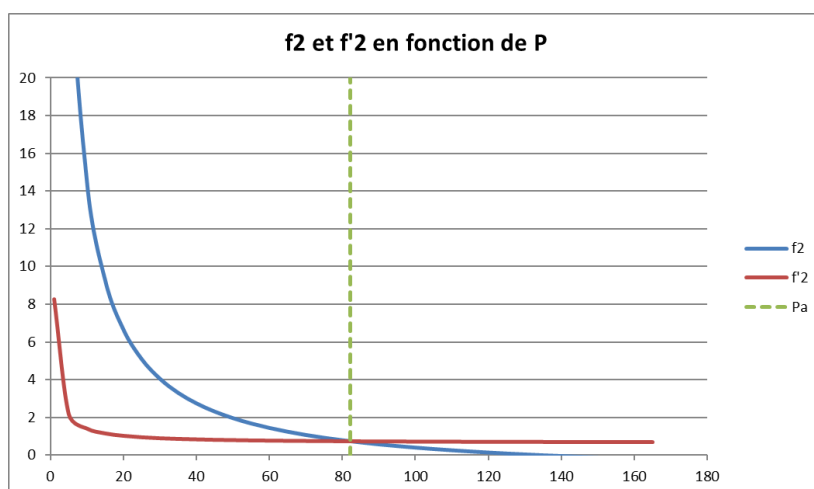


Figure 4.41 – Diagramme des fonctions  $f_2$  et  $f'_2$  en fonction de  $P$

Pour  $P \leq P_A$ , la valeur de  $e_{10}$  est donnée par

$$e_{10} = \rho v - \frac{\bar{\sigma}_4 l}{P v'} \quad [4.166]$$

Pour  $P \leq P_B$ , la valeur de  $e_{20}$  est donnée par

$$e_{20} = \frac{\bar{\sigma}_1 l}{P v} - \rho v' \quad [4.167]$$

### Notion de concordance

Un tracé d'un câble est dit concordant lorsqu'il ne génère aucune réaction hyperstatique dans la structure.

Donc si un tracé est concordant, il doit vérifier les propriétés qui expriment la nullité des réactions hyperstatiques.

Ceci est exprimé par la relation suivante qui annule les rotations différentielles sur appuis

$$\delta_{i,0} = \int_{i-1}^i \frac{x}{\ell} P e_0(x) dx + \int_i^{i+1} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) P e_0(x) dx \quad [4.168]$$

En posant

$$J_i(e_0) = \int_{i-1}^i \frac{x}{\ell} e_0(x) dx + \int_i^{i+1} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) e_0(x) dx \quad [4.169]$$

La relation de concordance se traduit par

$$J_i(e_0) = 0 \quad [4.170]$$

Toute ligne de précontrainte est concordante.

La condition d'existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau exige le respect de l'inéquation suivante

$$J_i\left(e_{20} - \frac{M_{min}}{P}\right) \leq J_i(e_{00}) = 0 \leq J_i\left(e_{10} - \frac{M_{max}}{P}\right) \quad [4.171]$$

Il existe deux inégalités pour chaque appui intermédiaire, la valeur à retenir est le maximum de tous les appuis

$$P_{min,IIa}(M_{min}) = \max \left\{ \frac{J_i\left(\frac{\sigma_1 I}{v'} - M_{min}\right)}{J_i(\rho v')} \right\}$$

$$P_{min,IIb}(M_{max}) = \max \left\{ \frac{J_i\left(\frac{\sigma_4 I}{v'} + M_{max}\right)}{J_i(\rho v)} \right\} \quad [4.172]$$

### 12.1.3. Condition 3 : Inscription du câble à l'intérieur du fuseau

Cette condition se traduit par l'existence d'une transformation linéaire TL, représentant l'écart entre la ligne de précontrainte et le tracé du câble, respectant les conditions d'enrobage.

$$TL(x) = e_{00}(x) - e_0(x) \quad [4.173]$$

La transformation linéaire étant une fonction linéaire par travée continue sur l'ensemble de la poutre, pour qu'il y ait un tracé possible il faut que :

$d$  et  $d'$  sont les distances respectives entre le câble et les fibres extrêmes

- la transformée de la limite supérieure du fuseau se situe au-dessus de la limite inférieure d'enrobage ( $d' - v'$ )

$$\min \left\{ e_{10} - \frac{M_{max}}{P} - TL(x) \right\} \geq d' - v' \quad [4.174]$$



- la transformée de la limite inférieure se situe au-dessous de la limite supérieure d'enrobage ( $v - d$ )

$$\max \left\{ e_{20} - \frac{M_{min}}{P} - TL(x) \right\} \leq v - d \quad [4.175]$$

Supposant que  $P \leq \min\{P_A, P_B\}$ , ces deux inégalités peuvent s'écrire sous la forme suivante à vérifier sur toute la longueur de la poutre

$$\frac{\bar{\sigma}_1 I}{Pv} - (\rho v' + v - d) - \frac{M_{min}}{P} \leq TL(x) \leq \rho v + v' - d' - \frac{\bar{\sigma}_4 I}{Pv'} - \frac{M_{max}}{P} \quad [4.176]$$

Soit les deux fonctions

$$TL_{min} = \frac{\bar{\sigma}_1 I}{Pv} - (\rho v' + v - d) - \frac{M_{min}}{P} \quad TL_{max} = \rho v + v' - d' - \frac{\bar{\sigma}_4 I}{Pv'} - \frac{M_{max}}{P} \quad [4.177]$$

Ces deux fonctions ont une courbure positive. Usuellement, entre les foyers, la fonction  $M_{max}$  est une parabole.

Les deux inégalités peuvent donc se traduire de la manière suivante : la valeur de précontrainte minimale est obtenue lorsque la droite joignant les valeurs de  $TL_{min}$  sur appui est tangente à la courbe  $TL_{max}$  en travée.

On sera amené à distinguer le cas des travées courantes et celui des travées de rive : en effet la transformation linéaire est nulle sur les appuis de rive.

En posant

$$k = \rho v + v' - d' \quad k' = \rho v' + v - d \quad [4.178]$$

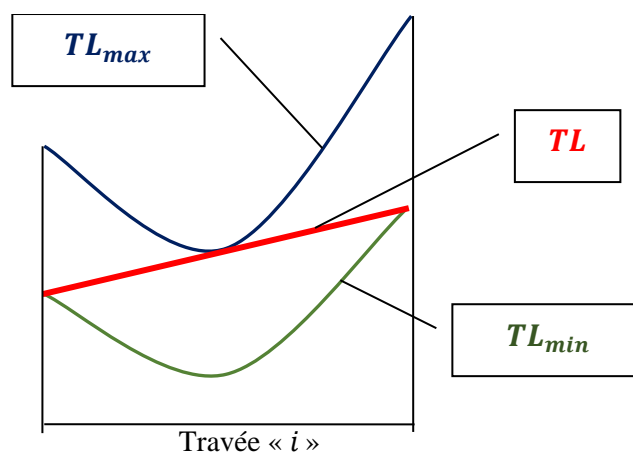


Figure 4.42 – Transformation linéaire  $TL$  tangente à  $TL_{max}$  en travée et joignant  $TL_{min}$  sur appuis

**En travée courante**

Les notations  $M_{min,i}$  et  $TL_{min,i}$  désignent respectivement les valeurs des moments et de la transformation linéaire sur appui et la fonction  $M_{max}$  est remplacée par une parabole obtenue par ajustement au sens des moindres carrés entre les foyers.

En notant  $\xi = x/\ell$

$$M_{max} \approx a_i \xi^2 + b_i \xi + c_i \quad [4.179]$$

Rappel du Chapitre 3 du présent document

$$m_1 = \frac{\bar{\sigma}_1 I}{v} \quad m_2 = \frac{\bar{\sigma}_2 I}{v} \quad m_3 = \frac{\bar{\sigma}_3 I}{v'} \quad m_4 = \frac{\bar{\sigma}_4 I}{v'} \quad [4.180]$$

La fonction linéaire reliant les valeurs  $TL_{min,i-1}$  et  $TL_{min,i}$  peut s'écrire

$$TL = (1 - \xi)TL_{min,i-1} + \xi TL_{min,i} = \frac{m_1}{P} - k' - \frac{M_{min,i-1}}{P} + \xi \frac{M_{min,i-1} - M_{min,i}}{P} \quad [4.181]$$

Et la fonction  $TL_{max}$  est remplacée par

$$TL_{max} \approx k - \frac{m_4}{P} - \frac{a_i \xi^2 + b_i \xi + c_i}{P} \quad [4.182]$$

L'égalité entre ces deux expressions s'écrit sous la forme suivante

$$a_i \xi^2 + (M_{min,i-1} - M_{min,i} + b_i) \xi + c_i + m_1 + m_4 - M_{min,i-1} - P(k + k') = 0 \quad [4.183]$$

La valeur de précontrainte minimale est obtenue lorsque la droite joignant les valeurs de  $TL_{min}$  sur appui est tangente à la courbe  $TL_{max}$  en travée. Elle correspond donc à la valeur pour laquelle cette équation a une racine double.

Le discriminant  $\Delta$  doit donc être nul

$$(M_{min,i-1} - M_{min,i} + b_i)^2 - 4a_i [c_i + m_1 + m_4 - M_{min,i-1} - P(k + k')] = 0 \quad [4.184]$$

Ce qui donne la valeur minimale de la précontrainte

$$P_{min,III,a} = \frac{c_i + m_1 + m_4 - M_{min,i-1}}{k + k'} - \frac{(M_{min,i-1} - M_{min,i} + b_i)^2}{4a_i(k + k')} \quad [4.185]$$

### En travée de rive gauche

La fonction linéaire TL varie entre 0 sur l'appui de gauche à  $TL_{min,1}$

$$TL = \xi TL_{min,1} = \xi \left[ \frac{m_1}{P} - k' - \frac{M_{min,1}}{P} \right] \quad [4.186]$$

En écrivant l'égalité avec  $TL_{max}$

$$a_1 \xi^2 + (b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk')\xi + c_1 + m_4 - Pk = 0 \quad [4.187]$$

Pour que cette équation ait une racine double comprise entre 0 et 1, il faut que le discriminant s'annule et la valeur de  $\xi$  soit comprise en 0 et 1

$$\Delta = 0 \quad 0 \leq \xi = -\frac{b}{2a} \leq 1 \quad [4.188]$$

$$(b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk')^2 - 4a_1(c_1 + m_4 - Pk) = 0 \quad [4.189]$$

$$0 < -\frac{b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk'}{2a_1} < 1$$

La valeur de P correspondante est donc obtenue en résolvant une équation de degré 2

$$k'^2 P^2 - 2[k'(b_1 + m_1 - M_{min,1}) - 2a_1 k]P + (b_1 + m_1 - M_{min,1})^2 - 4a_1(c_1 + m_4) = 0 \quad [4.190]$$

En posant

$$B = \left( \frac{b_1 + m_1 - M_{min,1}}{k'} \right) - \frac{2a_1 k}{k'^2} \quad C = \left( \frac{b_1 + m_1 - M_{min,1}}{k'} \right)^2 - \frac{4a_1(c_1 + m_4)}{k'^2} \quad [4.191]$$

Ce qui donne

$$P^2 - 2BP + C = 0 \quad P = B \pm \sqrt{B^2 - C} \quad [4.192]$$

Pour trouver la solution à retenir il faut observer que  $a_i < 0$  et donc  $-2a_i > 0$

$$0 < -\frac{b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk'}{2a_1} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk'}{-2a_1} < 1 \quad [4.193]$$

Alors pour que la racine double  $\xi$  soit comprise entre 0 et 1 il faut que

$$0 < b_1 + m_1 - M_{min,1} - Pk' < -2a_i \quad [4.194]$$

Implique

$$\frac{-b_1 - m_1 + M_{min,1}}{k'} < -P < \frac{-2a_i - b_1 - m_1 + M_{min,1}}{k'} \quad [4.195]$$

$$\frac{b_1 + m_1 - M_{min,1}}{k'} + \frac{2a_1}{k'} < P < \frac{b_1 + m_1 - M_{min,1}}{k'}$$

Or

$$B = \left( \frac{b_1 + m_1 - M_{min,1}}{k'} \right) - \frac{2a_1 k}{k'^2} \quad \text{et} \quad -\frac{2a_1 k}{k'^2} > 0 \quad [4.196]$$

Donc, pour que  $0 \leq \xi \leq 1$ , il faut que

$$P < B \quad [4.197]$$

Il faudra donc choisir

$$P = B - \sqrt{B^2 - C} \quad [4.198]$$

On peut vérifier que la solution obtenue est équivalente à la solution usuelle, et sans doute plus simple à mettre en œuvre, ce qui consiste à rechercher le maximum de la fonction sur l'intervalle  $[0,1]$

$$P_{min,III,b}(\xi) = \frac{M_{max}(\xi) - \xi M_{min,1}}{k + \xi k'} \quad [4.199]$$

### **En travée de rive droite**

La fonction linéaire TL varie entre  $TL_{min,n-1}$  sur l'appui de gauche à 0

$$TL = (1 - \xi)TL_{min,n-1} = (1 - \xi) \left[ \frac{m_1}{P} - k' - \frac{M_{min,n-1}}{P} \right] \quad [4.200]$$

En écrivant l'égalité avec  $TL_{max}$

$$a_n \xi^2 + (b_n - m_1 + M_{min,n-1} + Pk')\xi + c_n + m_1 + m_4 - M_{min,n-1} - P(k + k') = 0 \quad [4.164]$$

Pour que cette équation ait une racine double il faut donc que

$$(b_n - m_1 + M_{min,n-1} + Pk')^2 - 4a_n[c_n + m_1 + m_4 - M_{min,n-1} - P(k + k')] = 0 \quad [4.201]$$

La valeur de P correspondante est donc obtenue en résolvant une équation de degré 2

$$k'^2 P^2 - 2[k'(m_1 - b_n - M_{min,n-1}) - 2a_n(k + k')]P + (b_n - m_1 + M_{min,n-1})^2 - 4a_i(c_n + m_1 + m_4 - M_{min,n-1}) = 0 \quad [4.202]$$

En posant

$$B = \left( \frac{m_1 - b_n - M_{min,n-1}}{k'} \right) - \frac{2a_n(k + k')}{k'^2} \quad [4.203]$$

$$C = \left( \frac{b_n - m_1 + M_{min,n-1}}{k'} \right)^2 - \frac{4a_n(c_n + m_1 + m_4 - M_{min,n-1})}{k'^2}$$

Ce qui donne

$$P^2 - 2BP + C = 0 \quad P = B \pm \sqrt{B^2 - C} \quad [4.204]$$

Il faudra retenir

$$P_{min,III,c} = B - \sqrt{B^2 - C} \quad [4.205]$$

## 12.2 Valeur minimale de précontrainte

La valeur minimale de précontrainte à retenir pour le dimensionnement de la structure est le maximum des valeurs obtenues par les trois conditions déjà citées.

$$P_{min} = \text{Max}\{P_I; P_{II}; P_{III}\} \quad [4.206]$$

## 13. Construction du câble moyen de précontrainte

Le câble de précontrainte est construit par une succession de trois paraboles dans les travées intermédiaires et deux paraboles dans les travées de rive.

Les paraboles sont tangentes horizontalement au droit des appuis intermédiaires, et les courbures et valeurs des ordonnées du câble sur appuis sont préalablement fixées.

Le choix des courbures est fait :

- En travée à partir de la courbure de la courbe supérieure du fuseau de passage, en suivant les valeurs du rayon de courbure de la fonction  $M_{max}/P$
- Sur appui à partir d'une valeur forfaitaire fonction du type de câble à retenir

Les courbures des trois paraboles en travée intermédiaire sont notées  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_3$ . Les excentricités du câble sur appuis sont notées  $e_1$  et  $e_2$ .

$$a_1 < 0 \quad a_0 > 0 \quad a_2 < 0 \quad [4.207]$$

L'équation du câble s'écrit sous la forme suivante

$$y = a_i \xi^2 + b_i \xi + c_i \quad [4.208]$$

Le rayon de courbure d'une fonction est égal à l'inverse de la dérivée seconde de la fonction

$$R = \frac{1}{f''} \quad [4.209]$$

En dérivant la fonction du câble deux fois

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2 a_i}{l^2} \quad R = \frac{1}{y''(x)} = \frac{l^2}{2a_i} \quad [4.210]$$

D'où

$$a_i = \frac{l^2}{2R} \quad [4.211]$$

### 13.1 Travée intermédiaire

La figure suivante illustre les trois paraboles formant le câble en travée intermédiaire.

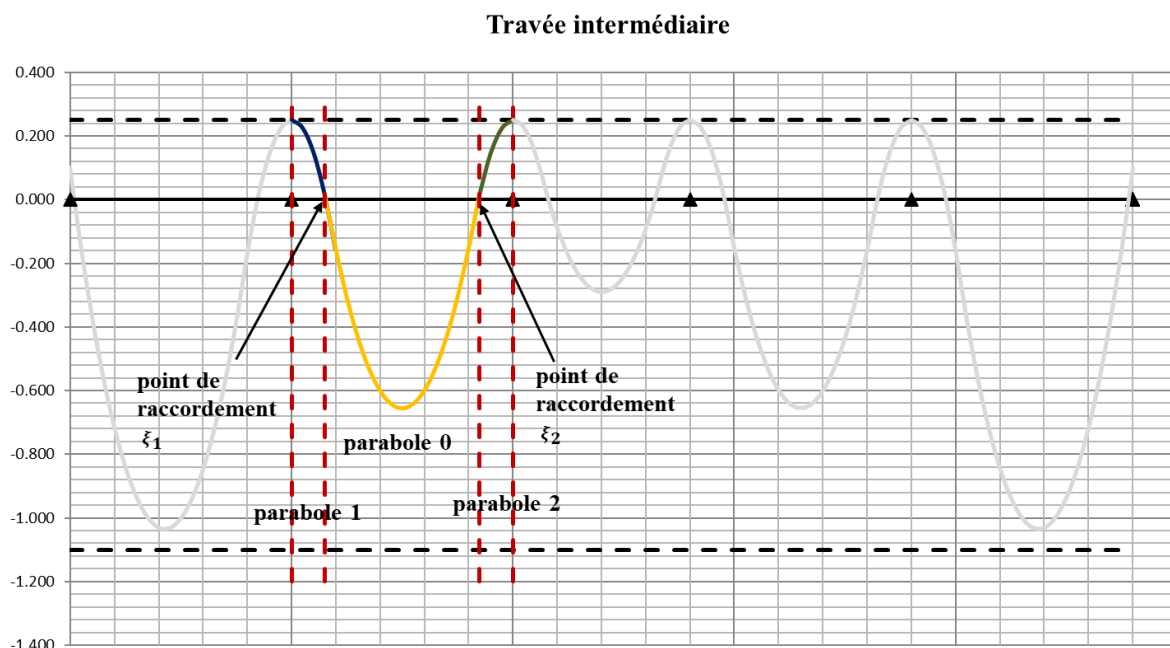


Figure 4.43 - Tracé du câble en travée intermédiaire

Les trois paraboles formant le câble en travée intermédiaire ont pour indice respectif 1 à gauche, 0 au milieu et 2 à droite.

Chacune des trois paraboles possèdent 3 coefficients  $a_i, b_i$  et  $c_i$  qui définissent les équations des paraboles.

En fait, le nombre d'inconnues nécessaire pour la détermination des équations est 8 : coefficients  $b_i, c_i$  pour chaque segment et position des 2 points de contacts.

Les 8 équations permettant de résoudre ce système sont données par les conditions aux limites et les conditions de continuité C1 entre les paraboles.

### Conditions aux limites (sur appuis)

- A gauche : tangente horizontale sur appui et point de passage sur appui fixé

$$\xi = 0 \quad y(0) = e_1 \quad \Rightarrow c_1 = e_1 \quad [4.212]$$

$$\xi = 0 \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow b_1 = 0$$

- A droite : tangente horizontale sur appui et point de passage sur appui fixé

$$\xi = 1 \quad y(1) = e_2$$

$$\xi = 1 \quad y'(1) = 0 \quad \Rightarrow b_2 = -2a_2 \quad [4.213]$$

$$\Rightarrow c_2 = e_2 + a_2$$

Résultats des conditions aux limites sur appuis

A gauche	A droite
$b_1 = 0 \quad c_1 = e_1$	$b_2 = -2a_2 \quad c_2 = e_2 + a_2$

Tableau 4.4 – Coefficients des paraboles 1 et 2

### Equations de continuité C1

Les équations de continuité sont exprimées aux points de raccordement des paraboles 1 et 0 noté  $\xi_1$  et des paraboles 0 et 2 noté  $\xi_2$ .

- A gauche : excentricités  $y_1$  et  $y_0$  et dérivée  $y'_1$  et  $y'_0$  égaux au point de raccordement  $\xi_1$

$$y_1(\xi_1) = y_0(\xi_1) \quad y'_1(\xi_1) = y'_0(\xi_1) \quad [4.214]$$

$$a_1 \xi_1^2 + e_1 = a_0 \xi_1^2 + b_0 \xi_1 + c_0 \quad \text{et} \quad 2a_1 \xi_1 = 2a_0 \xi_1 + b_0$$

- A droite : excentricités  $y_2$  et  $y_0$  et dérivée  $y_2'$  et  $y_0'$  égaux au point de raccordement  $\xi_2$

$$y_2(\xi_2) = y_0(\xi_2) \quad y_2'(\xi_2) = y_0'(\xi_2) \quad [4.215]$$

$$a_0\xi_2^2 + b_0\xi_2 + c_0 = a_2\xi_2^2 - 2a_2\xi_2 + a_2 + e_2 \quad \text{et} \quad 2a_0\xi_2 + b_0 = 2a_2\xi_2 - 2a_2$$

Résultats des équations de continuité

A gauche	A droite
$a_1\xi_1^2 + e_1 = a_0\xi_1^2 + b_0\xi_1 + c_0$ $2a_1\xi_1 = 2a_0\xi_1 + b_0$	$a_0\xi_2^2 + b_0\xi_2 + c_0 = a_2\xi_2^2 - 2a_2\xi_2 + a_2 + e_2$ $2a_0\xi_2 + b_0 = 2a_2\xi_2 - 2a_2$

Tableau 4.5 – Coefficients des paraboles obtenus par les équations de continuité

### Détermination des points de raccordement

En égalisant les expressions de  $b_0$  et  $c_0$  dans les deux expressions à gauche et à droite

$$b_0 = 2(a_1 - a_0)\xi_1 = 2(a_2 - a_0)\xi_2 - 2a_2 \quad [4.216]$$

$$c_0 = (a_0 - a_1)\xi_1^2 + e_1 = (a_0 - a_2)\xi_2^2 + a_2 + e_2$$

Deux équations obtenues pour déterminer  $\xi_1$  et  $\xi_2$

$$(a_0 - a_1)\xi_1^2 - (a_0 - a_2)\xi_2^2 = +a_2 + e_2 - e_1 \quad [4.217]$$

$$(a_0 - a_1)\xi_1 - (a_0 - a_2)\xi_2 = a_2$$

Ce qui donne

$$\xi_2 = \frac{(a_0 - a_1)\xi_1 - a_2}{a_0 - a_2} \quad [4.218]$$

En éliminant  $\xi_2$  on obtient une équation de degré 2 en  $\xi_1$

$$(a_0 - a_1)(a_1 - a_2)\xi_1^2 + 2a_2(a_0 - a_1)\xi_1 - a_0a_2 - (a_0 - a_2)(e_2 - e_1) = 0 \quad [4.219]$$

Cas particulier  $a_1 = a_2$

$$\xi_1 = \frac{a_0a_2 + (a_0 - a_2)(e_2 - e_1)}{2a_2(a_0 - a_1)} \quad [4.220]$$

Sinon

$$\Delta = (a_0 - a_1)(a_0 - a_2)[a_1a_2 + (a_1 - a_2)(e_2 - e_1)] \quad [4.221]$$



$$\xi_1 = \frac{-a_2(a_0 - a_1) \pm \sqrt{\Delta}}{(a_0 - a_1)(a_1 - a_2)}$$

Etude de la fonction  $f(\xi)$

$$f(\xi) = (a_0 - a_1)(a_1 - a_2)\xi^2 + 2a_2(a_0 - a_1)\xi - a_0a_2 - (a_0 - a_2)(e_2 - e_1) \quad [4.222]$$

Dérivée

$$f'(\xi) = 2(a_0 - a_1)[(a_1 - a_2)\xi + a_2] \quad [4.223]$$

$$f'(0) = 2a_2(a_0 - a_1) < 0 \quad f'(1) = 2a_1(a_0 - a_1) < 0$$

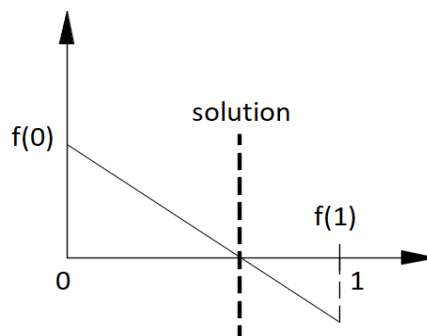
Or  $a_2 < 0$        $a_1 < 0$        $a_0 > a_1$

On constate donc que

$$f'(0) < 0 \quad f'(1) < 0 \quad [4.224]$$

Il y a donc au plus une racine sur l'intervalle  $[0,1]$  car la fonction est décroissante le long de l'intervalle

Condition d'existence de la solution :  $f(1) < 0 < f(0)$



$$f(0) = -a_0a_2 - (a_0 - a_2)(e_2 - e_1)$$

$$f(1) = a_1(a_0 - a_1 - a_2) - (a_0 - a_2)(e_2 - e_1) \quad [4.225]$$

$$f(1) < 0 < f(0)$$

$$\frac{(a_0 - a_1 - a_2)a_1}{a_0 - a_2} < e_2 - e_1 < \frac{-a_0a_2}{a_0 - a_2} \quad [4.226]$$

La valeur de  $\xi_1$  étant

$$\xi_1 = \frac{-a_2(a_0 - a_1) \pm \sqrt{\Delta}}{(a_0 - a_1)(a_1 - a_2)} = \frac{-a_2}{(a_1 - a_2)} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{(a_0 - a_1)(a_1 - a_2)} \quad [4.227]$$

En notant

$$\xi_0 = \frac{-a_2}{(a_1 - a_2)} = \frac{a_2}{(a_2 - a_1)} = \frac{1}{1 - \frac{a_1}{a_2}} \quad [4.228]$$

Solution à retenir

Cas 1:  $a_1/a_2 < 1$

$$\Rightarrow \xi_0 > 1 \quad \text{et} \quad \text{comme } a_1 < 0 \text{ et } a_2 < 0 \Rightarrow a_1 - a_2 > 0$$

En considérant  $+\sqrt{\Delta}$ , on aura  $\xi_1 > 1$

Cas 1:  $a_1/a_2 > 1$

$$\Rightarrow \xi_0 < 0 \quad \text{et} \quad \text{comme } a_1 < 0 \text{ et } a_2 < 0 \Rightarrow a_1 - a_2 > 0$$

En considérant  $+\sqrt{\Delta}$ , on aura  $\xi_1 < 0$

C'est pourquoi lorsqu'une solution existe sur l'intervalle  $[0,1]$  c'est toujours

$$\xi_1 = \frac{-a_2(a_0 - a_1) - \sqrt{\Delta}}{(a_0 - a_1)(a_1 - a_2)} \quad [4.229]$$

Il reste à déterminer les autres paramètres à partir des expressions ci-dessus

$$\xi_2 = \frac{(a_0 - a_1)\xi_1 - a_2}{(a_0 - a_2)} \quad b_0 = 2(a_1 - a_0)\xi_1 \quad c_0 = (a_0 - a_1)\xi_1^2 + e_1 \quad [4.230]$$

On peut de la même manière éliminer  $\xi_1$  pour obtenir une équation de degré 2 en  $\xi_2$

$$(a_0 - a_2)(a_1 - a_2)\xi_2^2 + 2a_2(a_0 - a_2)\xi_2 + a_2^2 - (a_0 - a_1)(a_2 + e_2 - e_1) = 0 \quad [4.231]$$

Les conditions d'existence d'une solution sur l'intervalle  $[0,1]$  sont les suivantes

$$\frac{a_0 a_1}{a_0 - a_2} < e_2 - e_1 < \frac{-(a_0 - a_1 - a_2)a_2}{a_0 - a_2} \quad [4.232]$$

### 13.2 Travée de rive

En travée de rive, le câble est défini par deux paraboles.

#### 13.2.1. Travée de rive gauche : la parabole d'indice 1 n'existe plus

Les coefficients des paraboles sont déterminés à partir des conditions aux limites sur appuis et des équations de continuité des paraboles.

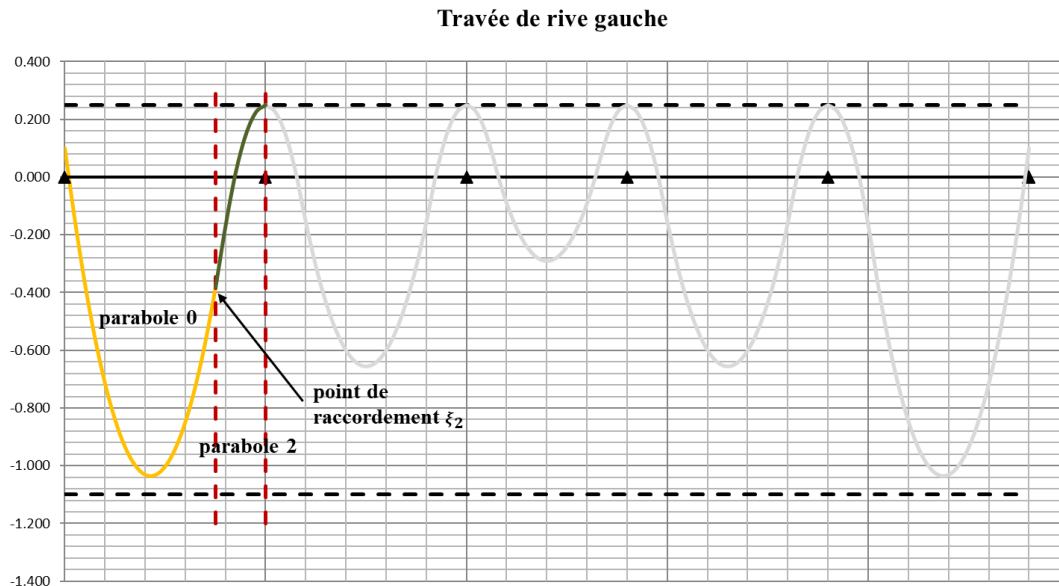


Figure 4.44 - Tracé du câble dans la travée de rive gauche

#### Conditions aux limites (sur appuis)

- A gauche : ordonnée du câble sur appui de rive

$$\xi = 0 \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow c_0 = e_1 \quad [4.233]$$

- A droite : tangente horizontale sur appui et point de passage sur appui fixé

$$\xi = 1 \quad y(1) = e_2 \quad [4.234]$$

Les valeurs des coefficients  $b_2$  et  $c_2$  sont obtenus

$$\begin{aligned} \xi = 1 \quad y'(1) = 0 &\quad \Rightarrow b_2 = -2a_2 \\ &\quad \Rightarrow c_2 = e_2 + a_2 \end{aligned} \quad [4.235]$$

#### Equations de continuité C1

Les équations de continuité sont exprimées au point de raccordement des paraboles 0 et 2 noté  $\xi_2$ .

Ordonnées  $y_2$  et  $y_0$  et dérivée  $y'_2$  et  $y'_0$  égaux au point de raccordement  $\xi_2$

$$y_2(\xi_2) = y_0(\xi_2) \quad y_2'(\xi_2) = y_0'(\xi_2)$$

$$a_0 \xi_2^2 + b_0 \xi_2 + e_1 = a_2 \xi_2^2 - 2a_2 \xi_2 + a_2 + e_2 \quad \text{et} \quad 2a_0 \xi_2 + b_0 = 2a_2 \xi_2 - 2a_2 \quad [4.236]$$

$$b_0 = 2(a_2 - a_0)\xi_2 - 2a_2 \quad e_1 = (a_0 - a_2)\xi_2^2 + a_2 + e_2$$

Le point de raccordement  $\xi_2$

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{e_1 - e_2 - a_2}{a_0 - a_2}} \quad b_0 = 2(a_2 - a_0)\xi_2 - 2a_2 \quad [4.237]$$

Condition d'existence d'une solution sur l'intervalle [0,1]

$$a_2 < e_1 - e_2 < a_0 \quad [4.238]$$

13.2.2. Travée de rive droite : la parabole d'indice 2 n'existe plus

Les coefficients des paraboles sont déterminés à partir des conditions aux limites sur appuis et des équations de continuité des paraboles.

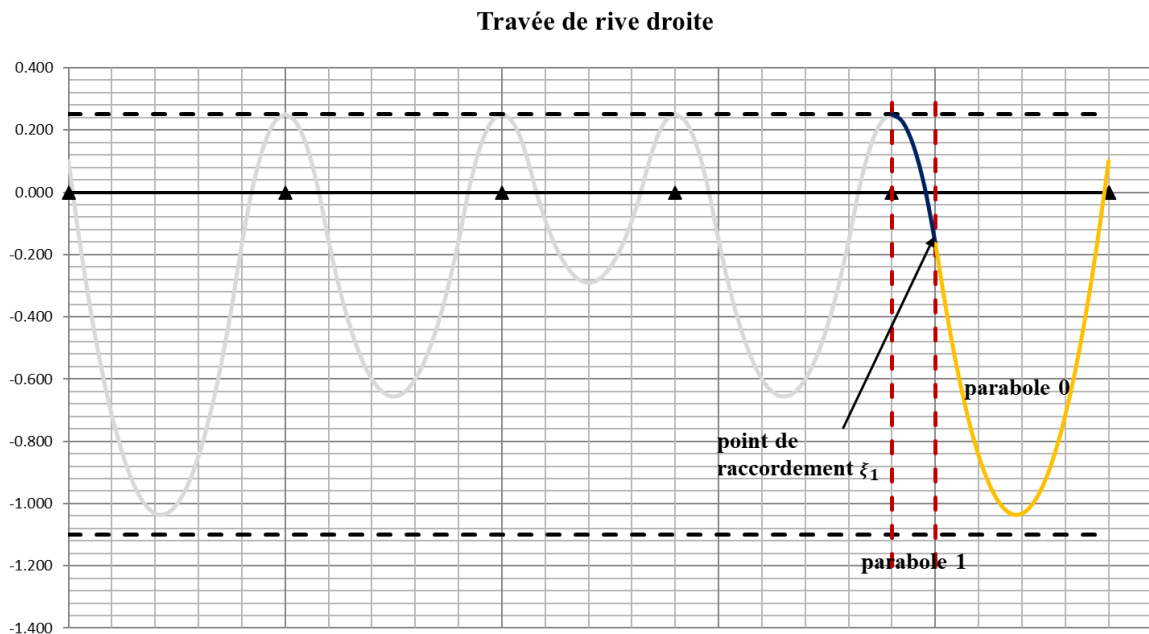


Figure 4.45 - Tracé du câble dans la travée de rive droite

**Conditions aux limites (sur appuis)**

- A gauche : ordonnée du câble sur appui intermédiaire fixée

$$\xi = 0 \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow c_1 = e_1 \quad [4.239]$$

Tangente horizontale sur appui intermédiaire nulle

$$\xi = 0 \quad y'(0) = 0 \quad \Rightarrow b_1 = 0 \quad [4.240]$$

- A droite ordonnée du câble sur l'appui de rive  $e_2$

$$\xi = 1 \quad y(1) = e_2 \quad a_0 + b_0 + c_0 = e_2 \quad [4.241]$$

### **Equations de continuité C1**

Les équations de continuité sont exprimées au point de raccordement des paraboles 1 et 0 noté  $\xi_1$ .

Ordonnées  $y_1$  et  $y_0$  et dérivée  $y'_1$  et  $y'_0$  égaux au point de raccordement  $\xi_1$

$$\begin{aligned} y_1(\xi_1) &= y_0(\xi_1) & y'_1(\xi_1) &= y'_0(\xi_1) \\ a_1\xi_1^2 + e_1 &= a_0\xi_1^2 + b_0\xi_1 + c_0 & \text{et} & \quad 2a_1\xi_1 = 2a_0\xi_1 + b_0 \end{aligned} \quad [4.242]$$

Coefficients obtenus

$$b_0 = 2(a_1 - a_0)\xi_1 \quad c_0 = (a_0 - a_1)\xi_1^2 + e_1 \quad [4.243]$$

Et l'ordonnée du câble sur l'appui de rive est  $a_0 + b_0 + c_0 = e_2$  ce qui peut s'écrire sous la forme

$$(a_0 - a_1)(1 - \xi_1)^2 = e_2 - e_1 - a_1 \quad [4.244]$$

Condition d'existence d'une solution sur l'intervalle  $[0,1]$

$$a_1 < e_1 - e_2 < a_0 \quad [4.245]$$

Expression de la solution

$$\xi_1 = 1 - \sqrt{\frac{e_2 - e_1 - a_1}{a_0 - a_1}} \quad b_0 = 2(a_1 - a_0)\xi_1 \quad c_0 = (a_0 - a_1)\xi_1^2 + e_1 \quad [4.165]$$

## **14. Détermination de la transformation linéaire TL**

La transformation linéaire permettant de passer de la ligne de précontrainte au câble n'est autre que le tracé des moments hyperstatiques de précontrainte. Elle est donc définie à partir du tracé du câble.

$$TL(x) = e_{00}(x) - e_0(x) = \frac{M_{hyp}}{P} \quad [4.246]$$

Au total, le nombre de paramètres mis en jeu pour la détermination du tracé du câble est  $3n$ ,  $n$  étant le nombre de travées

- $n + 1$  ordonnées du câble sur appuis
- $n - 1$  courbures sur appuis intermédiaires
- $n$  courbures en travée

Le choix des courbures étant déjà déterminé, les principaux paramètres sont donc les  $n + 1$  ordonnées du câble sur appui qui vont déterminer la transformation linéaire.

Ayant tracé le câble, la matrice des déplacements est calculée par l'équation du câble à partir des rotations hyperstatiques

$$\delta_{i-1} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_{iso} \frac{dx}{EI} = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) P e_0(x) \frac{dx}{EI}$$

$$\delta_i = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) M_{iso} \frac{dx}{EI} = \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right) P e_0(x) \frac{dx}{EI}$$
[4.247]

Les moments sur appuis sont obtenus par multiplication de la matrice canonique inverse et de la matrice des déplacements.

La matrice obtenue des moments sur appuis correspond aux valeurs de la transformation linéaire TL sur appuis.

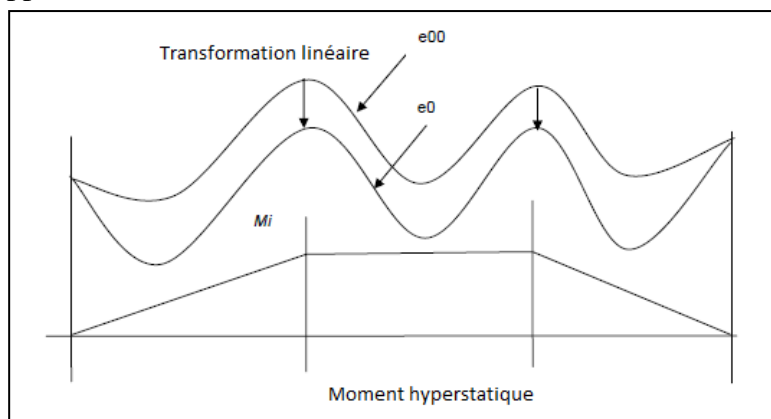


Tableau 4.6 - Transformation linéaire entre le câble et la ligne de précontrainte

Le fuseau de la transformation linéaire est tracé à partir des valeurs  $TL_{min}$  et  $TL_{max}$  calculées en chaque point.

Le fuseau de la ligne de précontrainte est tracé à partir des valeurs  $e_{00_{min}}$  et  $e_{00_{max}}$ .

Le fuseau de passage du câble est délimité par les courbes  $e_{0_{min}}$  et  $e_{0_{max}}$

Rappel des limites des 3 fuseaux

$$e_{20} = \frac{\sigma_1 I}{Pv} - \rho v' \quad e_{10} = \rho v - \frac{\sigma_4 I}{Pv'} \quad [4.248]$$

**Fuseau de transformation linéaire**

$$TL_{min} = e_{20} - (v - d) - \frac{M_{min}}{P} \quad TL_{max} = e_{10} + v' - d' - \frac{M_{max}}{P} \quad [4.249]$$

**Fuseau de la ligne de précontrainte**

$$e_{00\_min} = e_{20} - \frac{M_{min}}{P} \quad e_{00\_max} = e_{10} - \frac{M_{max}}{P} \quad [4.250]$$

**Fuseau de passage du câble**

$$e_{0\_min} = e_{00\_min} - TL(x) \quad e_{0\_max} = e_{00\_max} - TL(x) \quad [4.251]$$

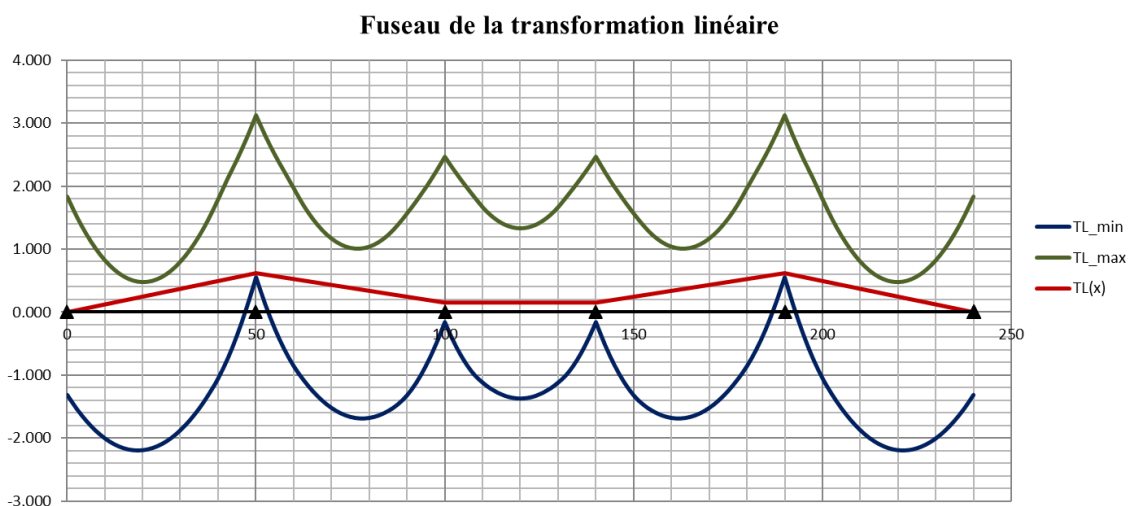


Figure 4.46 - Tracé de la transformation linéaire et de son fuseau de passage

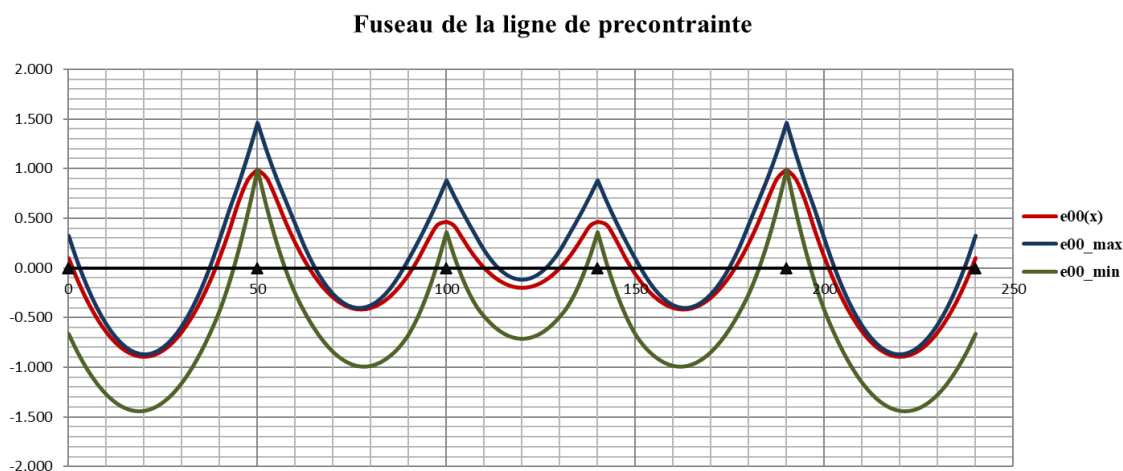


Figure 4.47 - Tracé de la ligne de précontrainte à l'intérieur de son fuseau de passage

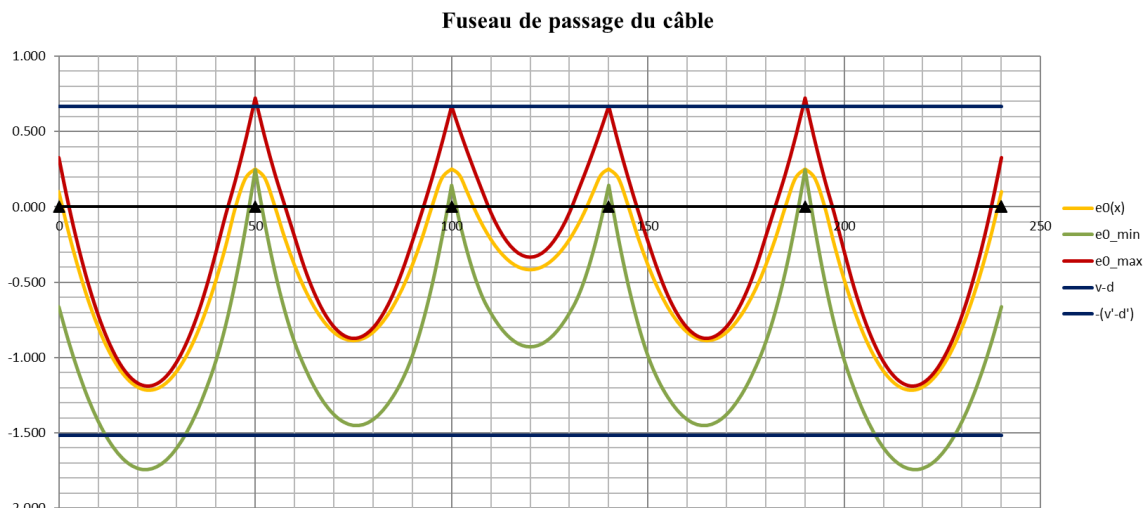


Figure 4.48 - Tracé du câble à l'intérieur du fuseau de passage

### 15. Vérification des contraintes aux ELS

La vérification des contraintes sous moment minimal et maximal en fibre inférieure et supérieure est finalement effectuée sous combinaisons ELS.

$$\begin{aligned}
 \text{Fibre inférieure sous } M_{\min} \quad \sigma_{\text{inf},\min} &= \frac{P_m}{B} - (M_{\min} + P_m e_{oo}) \frac{v'}{I} \\
 \text{Fibre supérieure sous } M_{\min} \quad \sigma_{\text{sup},\min} &= \frac{P_m}{B} + (M_{\min} + P_m e_{oo}) \frac{v'}{I} \\
 \text{Fibre inférieure sous } M_{\max} \quad \sigma_{\text{inf},\max} &= \frac{P_m}{B} - (M_{\max} + P_m e_{oo}) \frac{v'}{I} \\
 \text{Fibre supérieure sous } M_{\max} \quad \sigma_{\text{sup},\max} &= \frac{P_m}{B} + (M_{\max} + P_m e_{oo}) \frac{v'}{I}
 \end{aligned}
 \tag{4.252}$$

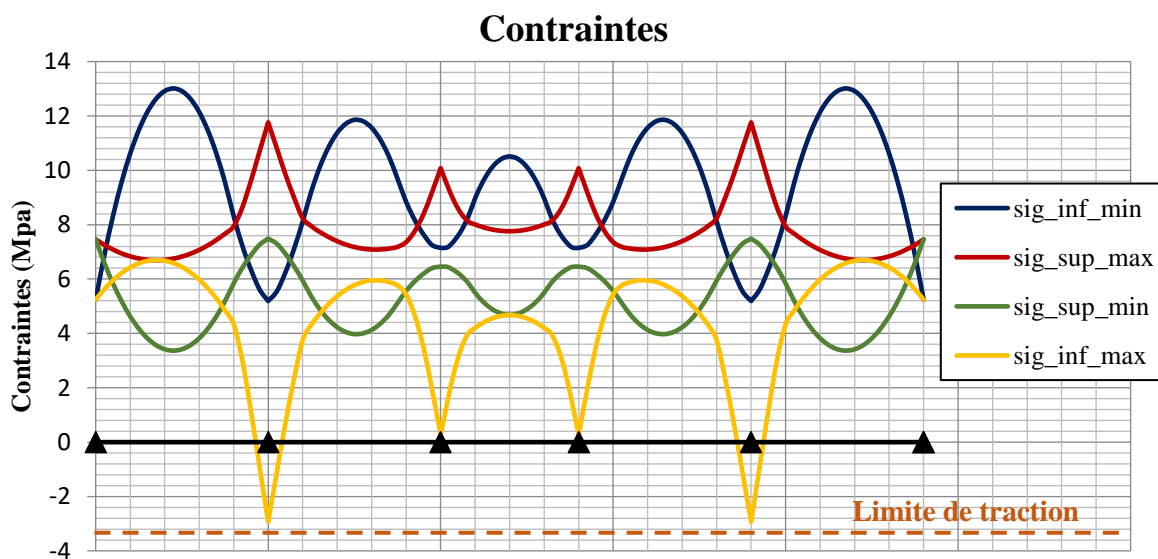


Figure 4.49 - Vérification des contraintes en tout point de la poutre



## 16. Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de résolution analytique des ouvrages hyperstatiques est proposée. Les cas des poutres à inertie constante ainsi que les poutres à hauteur continument variable sont traités.

La méthode de calcul développée englobe toutes les étapes de dimensionnement de l'ouvrage :

- Calcul des propriétés géométriques de la section de forme quelconque
- Développement des expressions analytiques polynomiales des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant
- Calcul des courbes enveloppes par intégration des expressions des lignes d'influence
- Définition du profil du câble par une succession de paraboles respectant les conditions pratiques et les limites d'enrobage
- Détermination de la force de précontrainte nécessaire pour le cas d'un ouvrage à câble filant
- Vérification des contraintes à l'ELS
- Vérification de la flexion à l'ELU

La démarche proposée fait appel à la méthode des foyers exprimée sous forme matricielle pour le calcul des réactions hyperstatiques utilisées dans les expressions de la ligne d'influence.

Dans le cas d'une poutre à inertie constante, les lignes d'influence sont exprimées par des polynômes de degré 3. Les points nuls de la ligne d'influence dans la travée chargée sont déterminés analytiquement en résolvant des équations du second degré.

Pour le cas de la poutre à inertie variable, l'ouvrage est divisé en un certain nombre de segments dépendant de la variation de la géométrie de la section transversale le long de l'ouvrage.

Dans chacun des segments, l'inverse de la rigidité  $1/EI$  est approximée à un polynôme de degré 3 à l'aide des fonctions d'interpolation Spline.

Les lignes d'influence sont exprimées par des polynômes de degré 6. Les points de flèche maximale ainsi que les points nuls de la ligne d'influence sont calculés par la méthode de MULLER.

Le même principe de segmentation pourrait être appliqué pour le cas d'une poutre à inertie constante par morceaux.

La méthode de la matrice de transfert utilisée montre bien son efficacité pour le calcul des constantes mécaniques  $a, b$  et  $c$  ainsi que les rotations sur appuis dans le cas d'un ouvrage à inertie variable. Ce calcul peut servir au calcul de toute intégrale pouvant s'écrire sous la forme de  $S_n$ .

Les résultats de la méthode analytique proposée ont été comparés avec les résultats obtenus à partir des tables numériques de Marsac publiées par le SETRA, les valeurs obtenues sont presque identiques (voir les détails dans l'Annexe A).

Les courbes enveloppes des moments et efforts tranchants maximale et minimale sous charge UDL sont obtenues par des expressions polynomiales de la ligne d'influence.

La méthode proposée présente également une formulation analytique des expressions des lignes d'influence pour le cas d'un tandem de charges TS à partir de la sommation des expressions des lignes d'influence d'une charge concentrée décalées de l'espacement entre les roues du tandem. Cette méthode peut facilement être généralisée pour le cas d'une charge à plusieurs essieux.

Le dimensionnement de la force de précontrainte minimale est abordé pour une poutre hyperstatique à inertie constante, en vérifiant les conditions pratiques et mécaniques de la section dans chaque travée. Il faudra noter que cette démarche ne tient pas compte des pertes de précontrainte instantanées et différées, usuellement une estimation de 15% à 20% est forfaitairement considérée.

Le tracé du câble moyen est défini par une série de paraboles, dont trois paraboles en travées intermédiaires et deux en travées de rive. Les expressions correspondantes sont formulées sous forme d'équations polynomiales parfaitement compatibles avec le calcul des courbes enveloppes présenté.

L'objectif principal de la démarche de résolution analytique proposée dans ce chapitre, est de permettre au concepteur d'aborder des calculs relativement complexes pour le dimensionnement et prédimensionnement des ponts hyperstatiques, par une approche analytique facilement programmable, sans avoir recours aux méthodes numériques des éléments finis. Ceci permet également de contrôler toutes les étapes de calcul afin de pouvoir évaluer les possibilités d'optimisation

L'approche présentée a été programmée sous VBA et sous SCILAB. Elle peut être facilement connectée à un algorithme d'optimisation.

Une application sur l'optimisation de la force de précontrainte avec la méthode du Simplexe en utilisant la démarche présentée sera détaillée dans le chapitre suivant.

# Chapitre 5

---

## Applications numériques sur l'optimisation des poutres en béton précontraint

---

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, deux applications numériques sur l'optimisation des poutres en béton précontraint sont présentées en utilisant les méthodes analytiques proposées dans les Chapitres 3 et 4 de ce manuscrit.

La première application traite l'optimisation d'une poutre isostatique en béton totalement et partiellement précontraint, en utilisant les algorithmes génétiques exposés dans le Chapitre 2. La démarche analytique de la règle des pivots, présentée dans le Chapitre 3, est programmée sous le logiciel « scilab » et connectée à un algorithme d'optimisation.

La définition de la fonction objectif, des contraintes et des différents paramètres d'optimisation est également introduite dans le programme.

Dans l'application présentée, le problème d'optimisation abordé est la minimisation du coût total par mètre linéaire de la section en respectant les contraintes géométriques et mécaniques des Eurocodes à l'ELU et à l'ELS. La fonction objectif peut facilement être modifiée dans le programme selon le besoin du concepteur. Il peut par exemple choisir de minimiser la force de précontrainte, la section de la poutre ou bien n'importe quelle autre grandeur. Les fonctions sont développées pour les cas de la précontrainte totale et de la précontrainte partielle.

La deuxième application concerne l'optimisation de la force de précontrainte d'une poutre hyperstatique à deux travées par la méthode du Simplexe, exposée dans le Chapitre 2. Le problème abordé est la minimisation de la force de précontrainte sous contraintes géométriques et mécaniques. Le développement analytique de la résolution d'une poutre à deux travées par la démarche présentée dans le Chapitre 4 est exposé. La fonction objectif et les contraintes sont exprimées par des fonctions linéaires, parfaitement compatible avec une résolution par la programmation linéaire du Simplexe.

Pour chacune des applications, le principe d'optimisation adopté est exposé, et le fonctionnement de l'algorithme est connecté aux démarches analytiques présentées dans les Chapitres 3 et 4. Les résultats obtenus sont exploités et interprétés.

## **2. Application 1 - Optimisation d'une poutre isostatique précontrainte par algorithmes génétiques**

L'algorithme est codé sous le logiciel « scilab » pour une poutre en T à talons totalement et partiellement précontrainte. Les paramètres d'entrée sont introduits à l'aide d'un fichier Excel. Chacune des contraintes ainsi que la fonction objectif sont programmées par des fonctions séparées.

Paramètres d'entrée :

- Longueur de la travée
- Chargement appliqué
- Combinaisons ELS et ELU
- Valeurs des contraintes limites à respecter selon les Eurocodes
- Caractéristiques des matériaux
- Type de câble de précontrainte choisi
- Pourcentage d'acier passif
- Valeurs minimales et maximales à respecter pour la hauteur totale  $h$  et la largeur de l'âme  $b_w$  de la section

### **2.1 Concept de l'optimisation par algorithmes génétiques**

Les algorithmes génétiques sont des algorithmes d'optimisation évolutionnistes, inspirés par la théorie de l'évolution naturelle. Le principe d'application est largement détaillé dans le Chapitre 2 de ce manuscrit.

Une population initiale de candidats est générée aléatoirement, et évaluée par la fonction objectif, ceci représente la première génération de solutions. Les individus sont classés en catégories selon la valeur de leur fonction objectif, et les opérateurs génétiques (sélection, croisement et mutation) sont appliqués avec différentes probabilités afin de produire une meilleure génération. Ce processus est répété par itérations jusqu'à atteindre une convergence préalablement fixée, ou un critère d'arrêt imposé.

#### 2.1.1. Opérateurs génétiques définis dans « scilab »

##### 2.1.1.1. Sélection

La méthode de sélection appliquée par défaut aux algorithmes génétiques dans « scilab » est l'élitisme. Elle pourrait toutefois être modifiée dans le programme.

Le principe consiste à choisir les meilleurs individus auxquels les opérateurs de croisement et de mutation seront appliqués dans le but de produire une meilleure génération.

### 2.1.1.2. Croisement

L’opérateur « croisement » permet de créer un nouvel individu à partir du croisement de deux ou plusieurs individus. Le but est d’augmenter la diversité de la population en manipulant la structure des individus parents.

Il est appliqué après la sélection avec une probabilité fixe  $pc$ .

Le croisement utilisé dans le programme d’optimisation est une extension d’une combinaison convexe. Les individus croisés sont déterminés à partir des parents selon les relations suivantes.

$$\begin{aligned}
 prob &= (1 + 2\beta) \times \text{aléatoire} - \beta \\
 \text{Individu croisé 1} &= prob \times \text{individu 1} + (1 - prob) \times \text{individu 2} \\
 \text{Individu croisé 2} &= prob \times \text{individu 2} + (1 - prob) \times \text{individu 1}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Le paramètre  $\beta$  est une valeur positive, dans ce cas il est pris égal à 0 et le croisement résulte d’une combinaison convexe simple.

### 2.1.1.3. Mutation

La mutation est appliquée après le croisement. Elle modifie localement et aléatoirement un individu dans le but de produire un nouvel individu. Etant un opérateur de divergence, la mutation est appliquée avec une faible probabilité  $pm$ .

Dans cette étude, une fonction continue et variable est utilisée pour appliquer la mutation. L’opérateur aléatoire modifie l’individu parent délimité par deux limites en un nouvel individu muté en utilisant la relation suivante.

$$\text{Individu muté} = \delta(\text{limite inférieure}; \text{limite supérieure})
 \tag{5.2}$$

Le paramètre  $\delta$  représente la loi de distribution uniforme sur l’intervalle [limite inférieure, limite supérieure] avec une probabilité  $pm$ .

## 2.2 Fonction de pénalité

Les algorithmes génétiques étant généralement utilisés pour la résolution des problèmes sans contraintes, une fonction pénalisante est introduite afin de prendre en compte l’impact des contraintes non respectées sur la solution optimale et de transformer le problème d’optimisation initialement contraint en un problème non-contraint.

La fonction de pénalité vaut la somme absolue des contraintes normalisées non respectées.

$$p = \sum_{i=1}^n p_i \quad \begin{array}{l} p_i = g_i \quad \text{for } g_i > 0 \\ p_i = 0 \quad \text{for } g_i \leq 0 \end{array} \quad [5.3]$$

$n$  : ombre total de contraintes

$p_i$  : coefficient définissant le non-respect de la  $i^{\text{ème}}$  contrainte

$g_i$  : contrainte numéro  $i$

Les valeurs de  $p_i$  sont calculées pour chaque évaluation de la fonction objectif, et cette dernière est multipliée par le facteur  $C$

$$C = (1 + p)^2 \quad [5.4]$$

Par exemple, pour la vérification de la force de précontrainte entre deux valeurs minimales et maximales  $P_{min}$  et  $P_{max}$ , deux fonctions de pénalité sont calculées.

Les contraintes  $P \geq P_{min}$  et  $P \leq P_{max}$  se traduisent par les relations suivantes

$$\begin{aligned} p_{P_{min}} &= \text{abs} \left( \min \left( 0; 1 - \frac{P_{min}}{P} \right) \right) \\ p_{P_{max}} &= \text{abs} \left( \min \left( 0; 1 - \frac{P}{P_{max}} \right) \right) \end{aligned} \quad [5.5]$$

Ce qui signifie que lorsque la contrainte n'est pas respectée

$$P \leq P_{min} \quad 1 - \frac{P_{min}}{P} \leq 0 \quad p_{P_{min}} > 0 \quad [5.6]$$

En revanche, lorsque la contrainte est respectée

$$P \geq P_{min} \quad 1 - \frac{P_{min}}{P} \geq 0 \quad p_{P_{min}} = 0 \quad [5.7]$$

Le but est d'augmenter la valeur de la fonction objectif pour l'éliminer de la sélection optimale dans un problème d'optimisation

### 2.3 Application au cas étudié

Dans cette étude, la population initiale est bidimensionnelle et composée du couple  $(h, b_w)$  aléatoirement générée par l'algorithme. Le concepteur introduit les limites minimales et maximales de  $(h, b_w)$  à respecter ainsi que tous les paramètres d'entrée déjà cités.

La taille de la population est prise égale à 100 et le nombre de générations est pris égal à 50, ces valeurs peuvent être modifiés dans l'algorithme.

Les opérateurs génétiques sont définis dans le programme avec des probabilités fixées aux valeurs suivantes.

Opérateur de sélection	Elitisme
Opérateur de croisement	Probabilité $pc = 0,6$
Opérateur de mutation	Probabilité $pm = 0,1$

Tableau 5.1 – Opérateurs génétiques

Pour chaque itération, ou génération produite, et pour chaque couple  $(h, b_w)$  de la population initiale, la fonction objectif définie, « Coût », fait appel à une autre fonction nommée « Talon » pour la détermination des dimensions du talon de la section en Té.

La fonction « Talon » comprend les calculs de la force de précontrainte nécessaire, le nombre de câbles, la quantité d’aciers passifs et toutes les configurations possibles des câbles et des aciers passifs conduisant aux dimensions spécifiques du talon. Pour chaque nombre de câbles, différentes configurations du câblage et des aciers passifs sont introduites dans le programme conduisant à différentes dimensions du talon. Le pourcentage d’armature passive est initialement introduit par le concepteur, et les configurations qui possèdent le même nombre de câbles, obtenu à partir de la force de précontrainte et un pourcentage d’acier passif supérieur ou égal à celui introduit, sont retenues. La force de précontrainte réelle est recalculée pour chaque configuration du fait que l’excentricité du câble moyen varie selon les dispositions du câblage et de l’acier passif.

En fonction des configurations retenues et des dimensions de talon correspondantes, une fonction balaise tous les cas et retient celui qui possède le coût minimal. Le coût calculé comprend le coût des aciers, du béton et du coffrage. Ayant la configuration d’aciers et les dimensions optimales du talon, ces valeurs sont renvoyées à la fonction objectif initiale « Coût ».

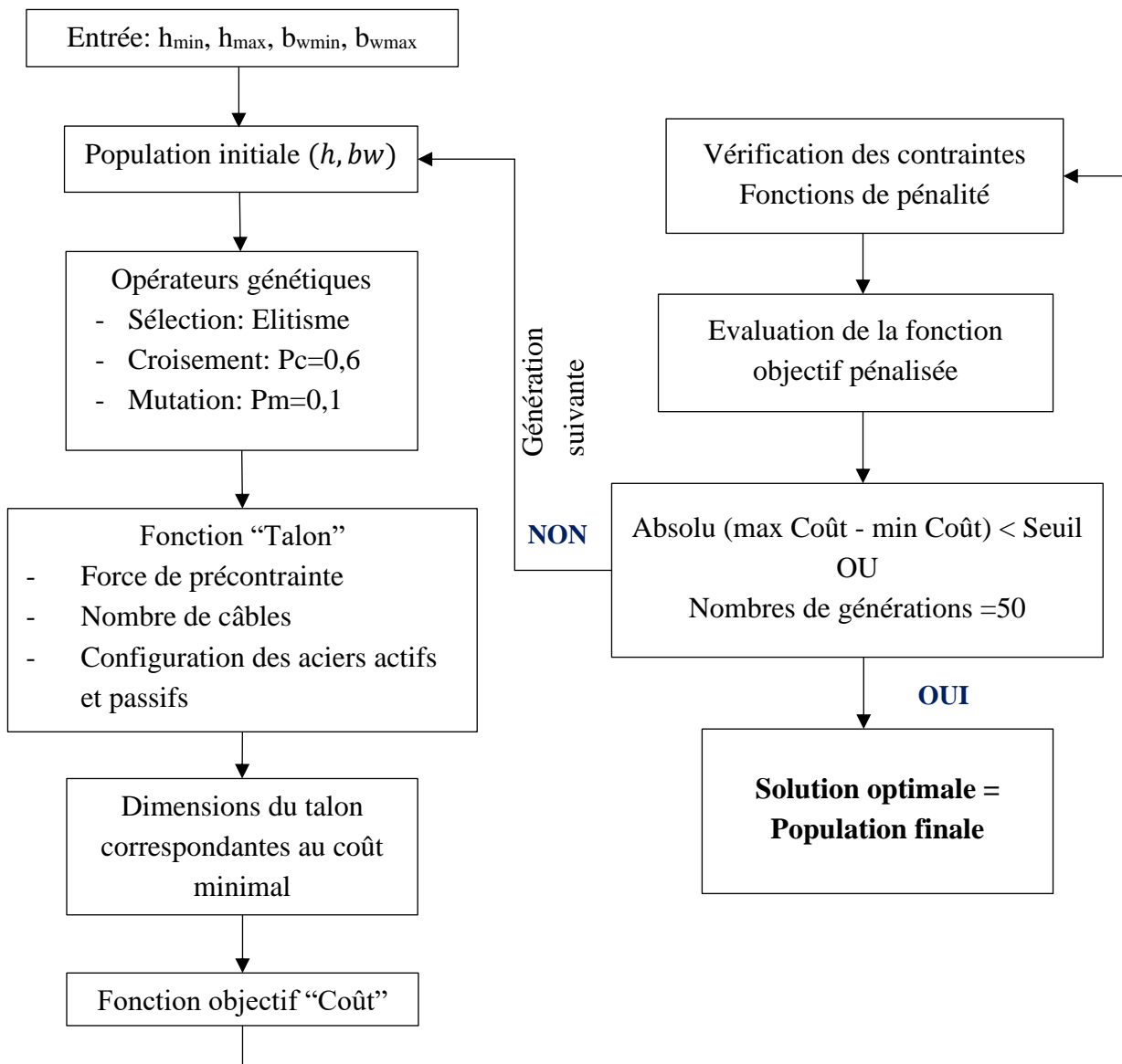
A priori, les dimensions de la section sont toutes connues pour un couple spécifique  $(h, b_w)$ . Les contraintes sont par la suite vérifiées et un ratio est appliqué pour chaque contrainte mécanique pour être implémenté dans la fonction objectif pénalisée. Le ratio d’une contrainte est défini comme le rapport entre la valeur maximale appliquée de la contrainte et la valeur admissible. Le but d’affecter une pénalité à la fonction objectif est d’augmenter sa valeur quand une contrainte n’est pas satisfaite, de façon à l’éliminer quand le minimum de la fonction est évalué.

Finalement, la fonction objectif pénalisée est évaluée pour chaque couple  $(h, b_w)$  de la population initiale. Le critère d’arrêt est atteint lorsque toutes les solutions convergent vers une valeur unique ; ceci est évalué en comparant la différence absolue entre la valeur maximale et minimale de la fonction objectif pour chaque itération à un seuil fixé ; l’algorithme s’arrête lorsque la différence est inférieure à ce seuil. Dans cette étude, un seuil de  $10^{-6}$  est adopté.

Si le seuil n’est pas atteint, une nouvelle population est générée, et l’algorithme reprend la même procédure jusqu’à convergence de la solution avec un taux de convergence fixé à 100%, ou bien lorsque le nombre maximal de générations est atteint.

Quand la convergence est atteinte, la population finale comprend nécessairement des couples  $(h, b_w)$  identiques pour toute la population.

## 2.4 Organigramme de l’algorithme appliqué



Le programme d’optimisation de l’algorithme génétique n’est pas développé dans ce travail, un programme prédéfini dans la bibliothèque du logiciel scilab est utilisé, et adapté à la démarche appliquée.



## 2.5 Formulation du problème d’optimisation

Le problème d’optimisation est formulé comme suit

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimiser } F(x) & F(x) = \text{fonction objectif} \\
 \text{Sous } g_i(x) \leq 0 & g_i(x) = \text{contraintes} \\
 x & = \{x_k\} \text{ variables de conception } k = 1, 2, \dots, n \\
 x^l \leq x \leq x^u & x^l = \{x_k^l\} \text{ limites inférieures des variables } k = 1, 2, \dots, n \\
 & x^u = \{x_k^u\} \text{ limites supérieures des variables } k = 1, 2, \dots, n
 \end{array}$$

### 2.5.1. Fonction objectif

Cette étude a pour objectif de minimiser le coût par mètre linéaire d’une poutre en béton précontraint. La fonction objectif pénalisée est exprimée de la manière suivante.

$$F = V_c C_c + W_s C_s + W_p C_p + P_{er} C_f \quad [5.8]$$

Fonction objectif pénalisée

$$\phi = F (1 + p)^2 \quad [5.9]$$

avec  $C_c$ ,  $C_s$ ,  $C_p$  et  $C_f$  les coûts unitaires respectifs du béton, aciers passifs, aciers actifs et coffrage; et  $V_c$ ,  $W_s$ ,  $W_p$  and  $P_{er}$  désignent respectivement le volume du béton, le poids des aciers passifs, le poids des aciers actifs et le périmètre de la section.

### 2.5.2. Variables de conception

Variable	Description	Type
$h$	Hauteur de la poutre	continue
$b_w$	Largeur de l’âme	continue
$b_t$	Largeur du talon	continue
$h_t$	Hauteur du talon	continue
$h_g$	Hauteur en pente du talon	continue
$n_{As}$	Nombre d’armatures passives	discrète
$con$	Configuration du câblage	discrète

Tableau 5.2- Variables de conception

Les dimensions du gousset du talon sont introduites comme variables de conception du fait que le rôle du talon est de loger les armatures actives et passives avec le minimum de quantité de béton ; donc avec les pentes qui minimisent la quantité de béton dans le talon. Les armatures passives sont placées sur une nappe inférieure à la position des câbles en respectant les dispositions constructives des Eurocodes et les enrobages prédéfinis.

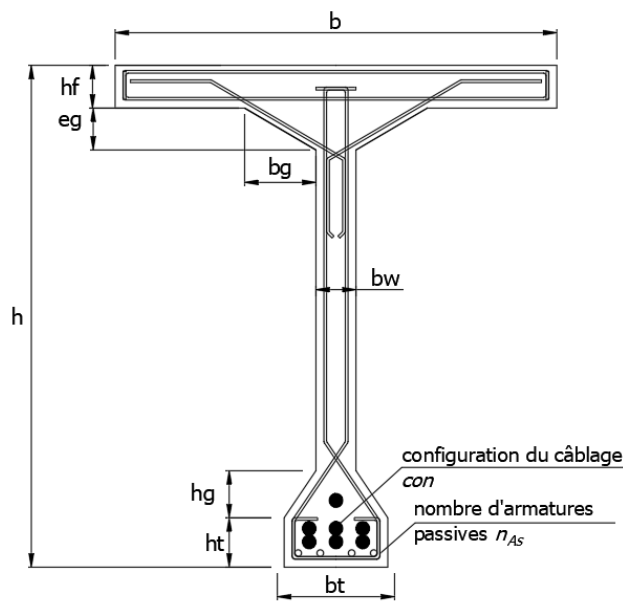


Figure 5.1 - Section typique de la poutre

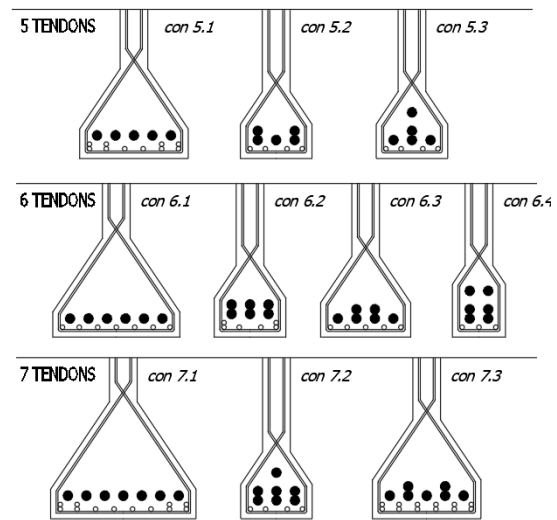


Figure 5.2 - Exemple de configuration du câblage

### 2.5.3. Constantes

Les constantes comprennent les caractéristiques des matériaux, le chargement, le prix unitaire, l'épaisseur du hourdis supérieur ainsi que les dimensions de la poutre qui ne changent pas telles que la largeur de la semelle supérieure et l'inclinaison du gousset supérieur.

### 2.5.4. Contraintes

Les contraintes considérées sont géométriques et mécaniques, conformes à l'Eurocode 2. Les contraintes mécaniques sont définies par un ratio, le rapport entre la valeur maximale appliquée et la valeur admissible.

Contraintes géométriques	Hauteur de la section	$h_{min} \leq h \leq h_{max}$
	Largeur de l'âme	$b_{w,min} \leq b_w \leq b_{w,max}$
	Largeur du talon	$b_w \leq b_t$
	Largeur de l'âme pour loger un câble	$b_w \geq 3\varphi$
Contraintes mécaniques	Force de précontrainte minimale	$g_1 = 1 - P_{min}/P$
	Force de précontrainte maximale	$g_2 = 1 - P/P_{max}$
	Condition de coffrage	$g_3 = 1 - ratio_{coffrage}$
	Flexion à l'ELU	$g_4 = 1 - P_u/P$
	Effort tranchant à l'ELU	$g_5 = 1 - ratio_{effort\ tr}$

Tableau 5.3 - Contraintes considérées

$\phi$  est le diamètre de la gaine. La largeur de l'âme de la poutre devrait être suffisante pour loger au moins une gaine avec un enrobage égal au diamètre de la gaine.

## 2.6 Application numérique

La démarche d'optimisation présentée est appliquée sur un pont à poutres préfabriquées précontraintes VIPP. La chaussée de largeur 10m est décomposée en trois voies et portée par trois poutres précontraintes en T à talons.

L'étude est abordée pour la poutre de rive la plus sollicitée, ce résultat est obtenu suite à une répartition transversale par la méthode de Courbon.

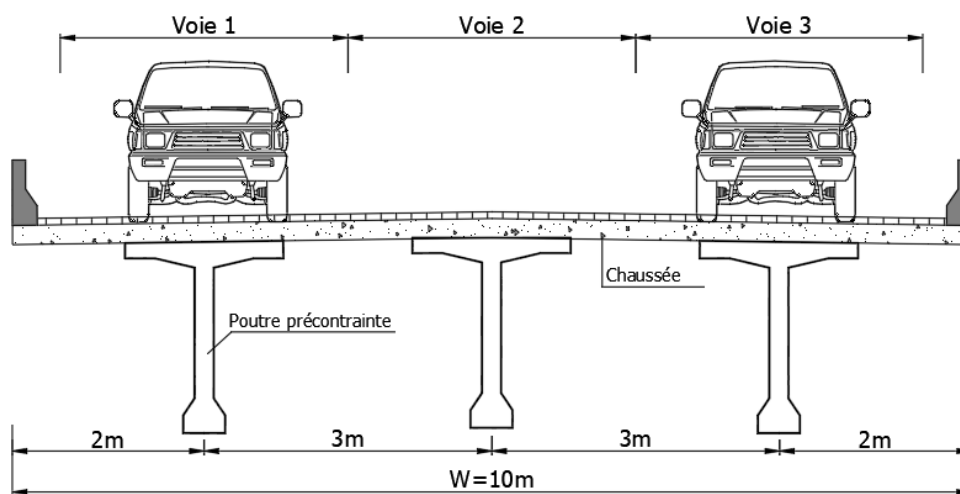


Figure 5.3 - Coupe transversale sur le pont étudié

Les données d'entrée et les hypothèses considérées figurent dans les tableaux suivants

### 2.6.1. Données d'entrée

#### Données géométriques

Largeur de la semelle supérieure	$b = 2m$
Épaisseur de la semelle supérieure	$h_f = 0,16m$
Largeur du gousset supérieur	$b_g = 0,2m$
Épaisseur du gousset supérieur	$e_g = 0,1m$
Épaisseur du hourdis supérieur	$th = 0,25m$

#### Propriétés des matériaux

Résistance caractéristique du béton à la compression	$f_{ck} = 40MPa$
Résistance caractéristique des aciers passifs	$f_{yk} = 500MPa$
Résistance caractéristique des aciers de précontrainte	$f_{pk} = 1860MPa$
Type des câbles utilisés	12T15
Classe d'exposition	XC1

### Hypothèses de chargement

Modèle de chargement	Modèle LM1
Poids volumique du béton armé	25 kN/m <sup>3</sup>
Charges permanentes	22,5 kN/m
Surcharge d'exploitation uniformément répartie UDL	17,15 kN/m
Surcharge tandem TS	544 kN

### Contraintes géométriques

Limites géométriques de la hauteur de la poutre	$1 \leq h \leq 4m$
Limites géométriques de la largeur de l'âme	$0.1 \leq b_w \leq 0.4m$

### Paramètres d'optimisation

Nombre de générations	50
Dimension de la population	100
Probabilité de croisement	$p_c = 0,6$
Probabilité de mutation	$p_m = 0,1$

### Prix unitaire

Prix du béton	$C_c = \text{€}250/m^3$
Prix des aciers passifs	$C_s = \text{€}1,2/kg$
Prix des câbles de précontrainte	$C_p = \text{€}3,6/kg$
Prix du coffrage	$C_f = \text{€}125/m$

### Limitation des contraintes

ELS Quasi-Permanent	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,45 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = 0$
ELS Fréquent	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,6 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = 0,5 f_{ctm}$
ELS Caractéristique	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,6 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = f_{ctm}$

Les valeurs des contraintes limites peuvent être facilement modifiées dans le fichier des données.

#### 2.6.2. Principe des études menées

Le programme d'optimisation est introduit sur le logiciel « scilab », et les données et hypothèses sont fournies dans un fichier Excel.

Une étude de sensibilité est tout d'abord menée **en précontrainte totale** pour différentes longueurs de travée afin d'étudier l'influence des paramètres en jeu sur le choix de la solution optimale et d'analyser les conditions dimensionnantes. Pour chaque longueur de travée, le programme est lancé et la solution optimale est retenue pour l'étude et l'analyse des résultats.

Une étude paramétrique sur des poutres de différentes portées est menée afin d'étudier l'influence de chacun des paramètres suivants sur la solution optimale :

- Contraintes de flexion
- Condition de coffrage
- Résistance à la compression  $f_{ck}$
- Pourcentage d'armatures passives
- Epaisseur de l'âme
- Dimensions du talon

L'étude est répétée en **précontrainte partielle**, et l'influence des paramètres suivants sur la solution optimale est exploitée :

- Pourcentage d'armatures passives
- Résistance caractéristique à la compression du béton  $f_{ck}$

A la suite de ces résultats, une analyse comparative entre précontrainte totale et partielle est exposée. Finalement, une analyse de sensibilité des coûts unitaires est effectuée dans le but d'étudier leur influence sur la solution optimale.

### 2.6.3. Etude de sensibilité en précontrainte totale

#### 2.6.3.1. Contraintes dimensionnantes

Les principales contraintes mécaniques dimensionnantes sont la condition de coffrage aux états limites de service qui donne la valeur minimale de précontrainte et la vérification à la flexion à l'état limite ultime en considérant le nombre de câbles obtenu et le pourcentage d'acier passif.

Pour déterminer la condition dimensionnante, le degré de saturation de chaque contrainte est évalué, et noté « ratio ». Dans le cas de la condition de coffrage par exemple, le ratio est égal au rapport entre la variation des moments appliqués  $\Delta M = M_{max} - M_{min}$  et la variation maximale permise pour respecter la condition.

Ce ratio est évalué pour les deux conditions dimensionnantes et pour des travées allant de 25 à 50m.

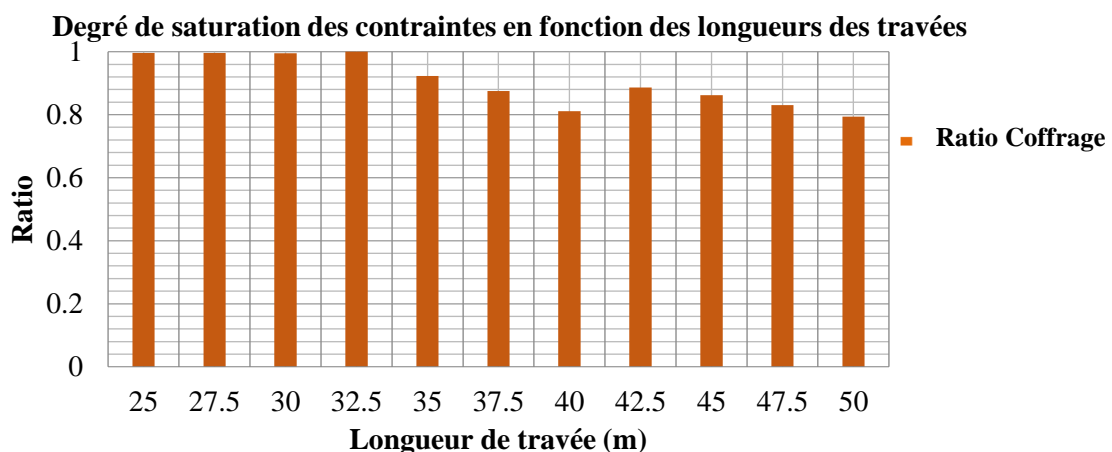


Figure 5.4 - Graphe montrant la saturation de la condition de coffrage en fonction des différentes portées

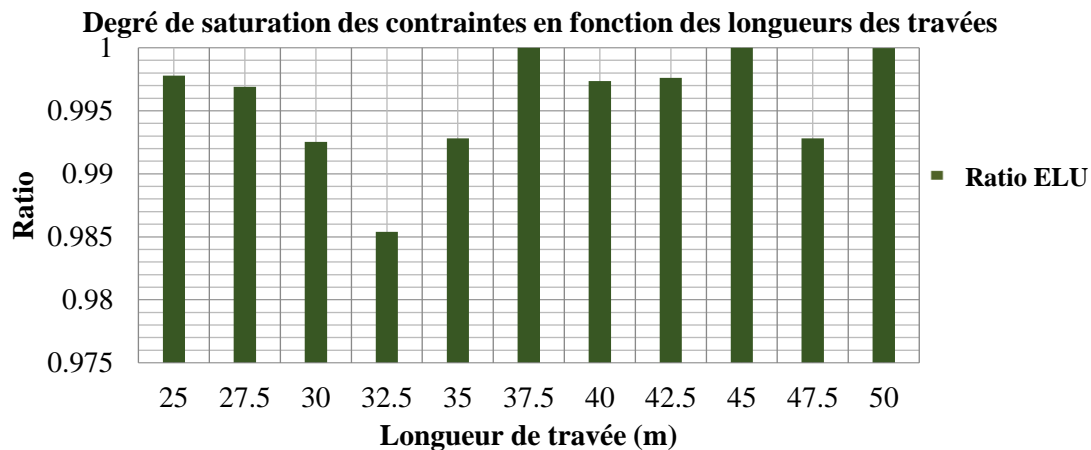


Figure 5.5 - Graphe montrant la saturation de la condition en flexion en fonction des différentes portées

Les résultats illustrés dans le graphique de la figure précédente représentent chacun une solution optimale issue de l’optimisation de la section pour une longueur de travée donnée. En analysant les résultats obtenus dans le graphique précédent, il est clair que pour des travées de portée inférieure à 35m, les deux conditions sont dimensionnantes et jouent un rôle important dans le choix de la solution optimale. Pour des portées supérieures à 35m, la condition de flexion à l’ELU est plus dimensionnante.

### 2.6.3.2. Dimensions du gousset du talon

Les dimensions du talon de la section en Té jouent un rôle important dans la procédure d’optimisation. Elles ont une influence sur le coût du béton et du coffrage et affectent donc la solution optimale retenue.

Afin d’évaluer l’influence du talon sur le dimensionnement de la section, la surface du talon est calculée pour chaque solution optimale en faisant varier la charge d’exploitation de tandem TS dans un premier temps et la longueur de la travée dans un second temps.

Sachant que la valeur de TS pour un modèle de charge LM1 est de 544 kN, trois valeurs des charges TS sont considérées pour cette analyse :

- TS = 0
- TS = 272 kN
- TS = 544 kN

En fonction de la longueur de la travée :

Longueur de la travée (m)	Nombre de câble	Surface du talon (m <sup>2</sup> )
25	3	0
30	4	0,0798
35	4	0,0970
40	5	0,1776
45	6	0,1390
50	6	0,1478

Tableau 5.4 – Evaluation de la surface du talon en fonction du nombre de câbles et de la longueur de la travée

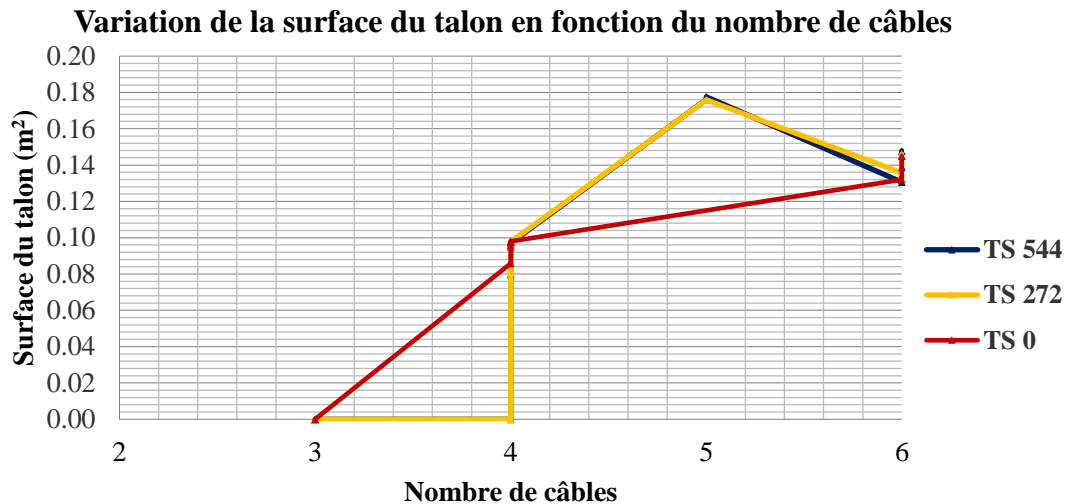


Figure 5.6 - Graphique de la variation de la surface du talon en fonction du nombre de câbles

A partir du graphique de la Figure 5.6, nous pouvons constater que la surface du talon est nulle pour un nombre de câbles inférieur ou égal à 4, en d'autres termes, la section devient une section en Té sans talon. La surface du talon augmente avec le nombre de câble.

Nous pouvons conclure que le talon de la section en Té est dimensionné dans l'algorithme d'optimisation dans le seul but de loger les câbles de précontrainte et les armatures passives tout en respectant les dispositions constructives, et sans aucune valeur ajoutée à la résistance de la section.

### 2.6.3.3. Influence de l'amplitude de la charge de tandem TS

L'épaisseur de l'âme de la section est normalement dictée par l'effort tranchant appliqué et il doit respecter une valeur minimale géométrique permettant de loger au moins un câble de précontrainte afin de pouvoir remonter les câbles sur les appuis. Dans le but d'étudier l'influence de cet effort issu de la charge de tandem TS sur l'épaisseur de l'âme, le programme d'optimisation est appliqué pour différentes valeurs de TS.

Pour chaque longueur de travée et chaque valeur de TS, deux rapports sont calculés :

- Ratio\_V représentant la capacité de la section à résister à l'effort tranchant appliqué, donc quand le ratio\_V est égal à 1, la section aura atteint sa résistance maximale à l'effort tranchant
- Ratio géométrique  $3\phi/b_w$ , équivalent à un rapport entre la valeur minimale de l'épaisseur de l'âme requise en fonction du diamètre de gaine et la valeur optimale de l'épaisseur

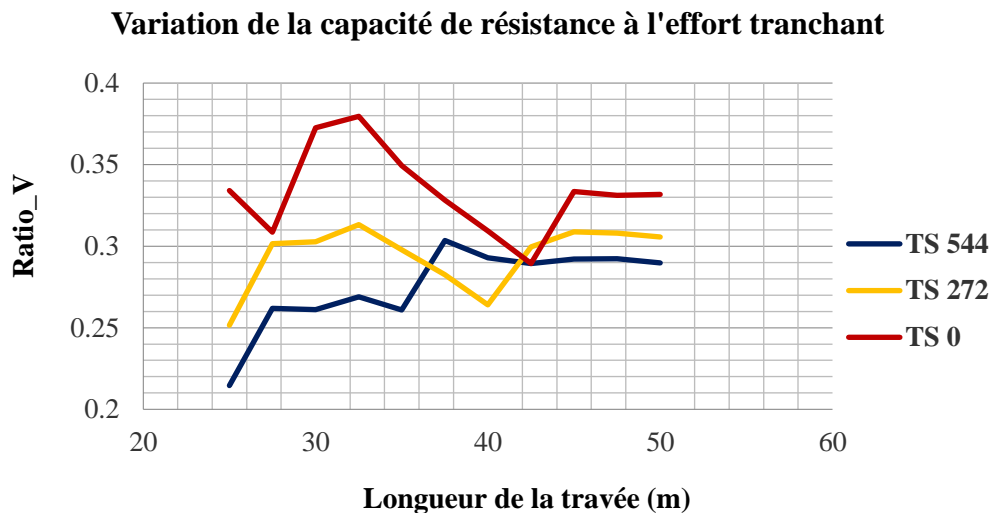


Figure 5.7 – Graphique de la variation de résistance à l'effort tranchant en fonction de la longueur des travées et des charges TS appliquées

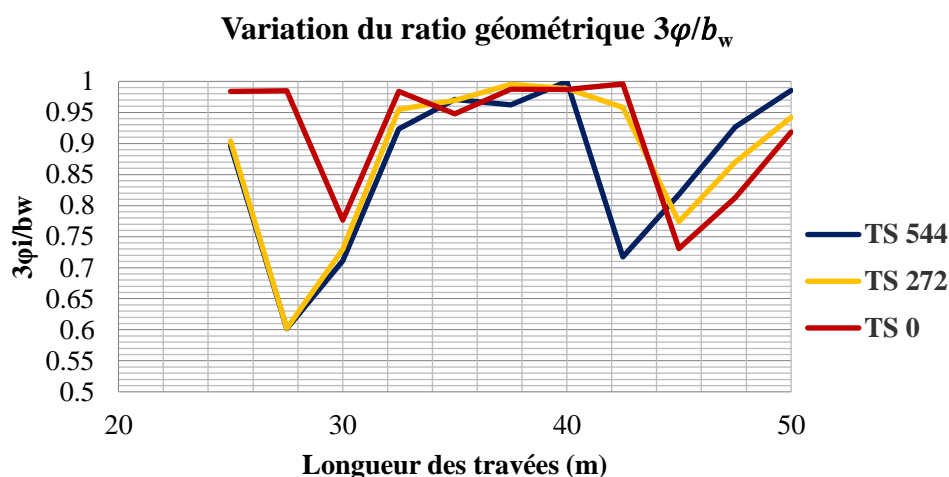


Figure 5.8 – Graphique de la variation du ratio géométrique en fonction de la longueur de travée et des charges appliquées

Les graphiques illustrés montrent que le ratio\_V possède une valeur proche de 0,3 pour toutes les longueurs de travée et toutes les valeurs des charges appliquées; alors que le ratio géométrique est saturé pour des longueurs de travée entre 30m et 40m.

Nous pouvons conclure que l'épaisseur de l'âme n'est donc pas dimensionnée par l'effort tranchant mais par la contrainte géométrique appliquée.

#### 2.6.3.4. Influence de la résistance caractéristique à la compression du béton $f_{ck}$

L'influence de la résistance caractéristique à la compression du béton sur la solution optimale est étudiée en appliquant différentes valeurs de  $f_{ck}$  variant entre 30 MPa et 60 MPa, avec un pas de 10 MPa pour des longueurs de travée de 30m, 40m et 50m.



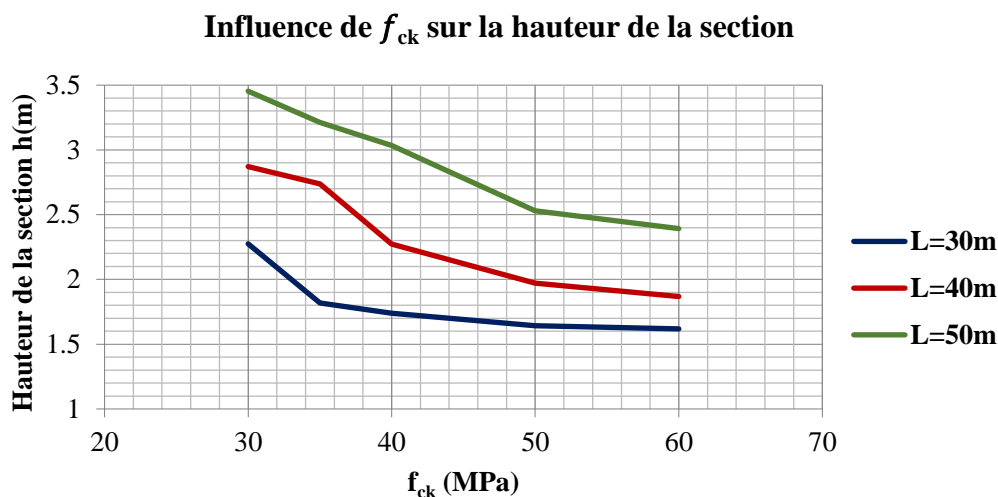


Figure 5.9 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction de la résistance à la compression du béton et des longueurs de travée

Les valeurs de la hauteur et de l'élancement de la section pour différentes valeurs de résistance à la compression et pour une travée de longueur 40m sont données dans le tableau suivant

Travée de longueur = 40m

$f_{ck}$ (MPa)	h (m)	Elancement
30	2,87	13,93
40	2,27	17,60
50	1,97	20,29
60	1,87	21,41

Tableau 5.5 – Influence de la résistance à la compression du béton sur la hauteur et l'élancement de la section

L'élancement de la section est défini comme étant le rapport entre la hauteur et la portée. C'est un paramètre intéressant dans l'étude des ouvrages d'art ; il intervient surtout dans l'estimation financière et l'étude de faisabilité préliminaire de l'ouvrage. Augmenter la résistance à la compression du béton  $f_{ck}$  conduit à l'augmentation de l'élancement de la section proportionnellement à la diminution de la hauteur de la section.

Selon le Tableau 5.5, une réduction de 35% de la hauteur de la section est remarquée en augmentant  $f_{ck}$  de 30 MPa à 60 MPa pour une travée de longueur 40m.

La saturation des contraintes mécaniques, condition de coffrage et vérification de la flexion à l'ELU, n'est pas influencée par la variation de  $f_{ck}$ .

#### 2.6.3.5. Influence du pourcentage d'armatures passives sur la solution optimale

Dans le cas de la précontrainte totale, les armatures passives sont ajoutées pour assurer la vérification de la section à la flexion à l'ELU. Dans une première étape, les dimensions de la section sont déterminées en respectant les vérifications aux ELS, avec un pourcentage minimal d'armatures passives. Toutefois selon le graphique de la Figure 5.4, la contrainte à l'ELU est

saturée pour des travées de longueur inférieure à 40m, et dimensionnante pour des longueurs supérieures à 40m. Ceci a conduit à l’étude de l’influence du pourcentage d’armatures passives sur le choix de la solution optimale en précontrainte totale.

Longueur de travée	Hauteur de la section $h$ (m)		Réduction
	0% acier passif	0,8% acier passif	
25m	1,730	1,310	24,27%
30m	1,752	1,505	14,08%
35m	2,179	1,838	15,64%
40m	2,313	2,061	10,90%
45m	2,593	2,474	4,61%
50m	3,057	2,776	9,21%

Tableau 5.6 – Influence du pourcentage d’acier passif sur la hauteur de la section

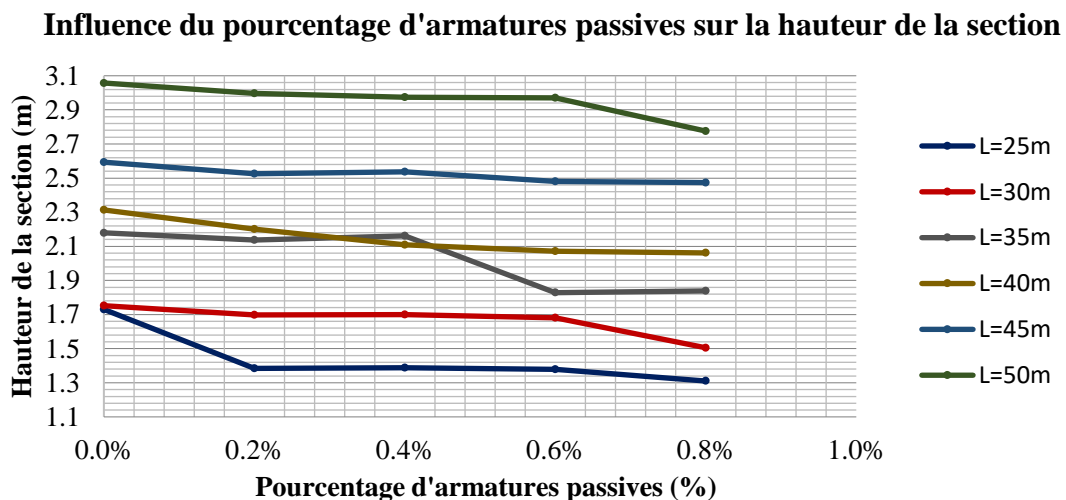


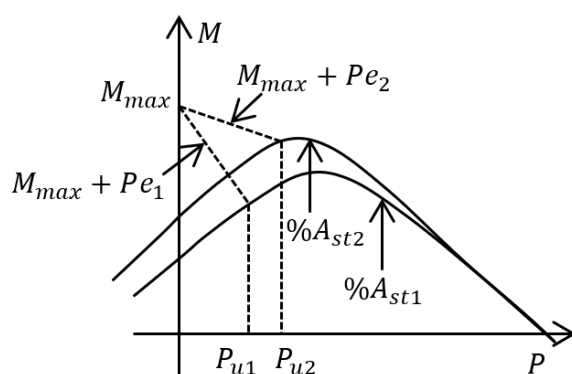
Figure 5.10 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction du pourcentage d’acier passif

Les résultats montrent une diminution progressive de la hauteur de la section optimale avec l’augmentation du pourcentage d’armatures passives, ce qui favorise l’augmentation de l’élancement. Ceci est accompagné d’une augmentation de la force de précontrainte nécessaire, et donc du nombre de câbles et des dimensions du talon.

L’augmentation des dimensions du talon est due à la nécessité de loger une quantité d’armatures plus importante, alors que l’augmentation de la force de précontrainte est due à la diminution de la valeur de l’excentricité du câble moyen causée par l’addition des armatures passives généralement placées sous les câbles.

Dans le cas où une réduction dans la hauteur de la section n’est pas recherchée, la solution optimale en précontrainte totale est obtenue pour la valeur minimale du pourcentage d’armatures passives.

D'autre part, pour une hauteur fixe de la section, une augmentation du pourcentage d'armatures passives devrait améliorer la résistance de la section à la flexion à l'ELU. Ceci peut être observé à condition que l'excentricité du câble moyen demeure inchangée du fait que le moment ultime à équilibrer est la somme du moment appliqué et du moment de précontrainte  $M_{ELU} + P e_0$ .



$A_{st1}$  et  $A_{st2}$ : différentes quantités d'armatures passives

$P_{u1}$  et  $P_{u2}$ : force de précontrainte pour la vérification à l'ELU correspondante à  $A_{st1}$  et  $A_{st2}$

$e_1$  et  $e_2$ : excentricités des câbles

Figure 5.11 - Diagramme d'interaction pour deux quantités d'armatures passives différentes

#### 2.6.4. Etude de sensibilité en précontrainte partielle

Des études sur l'influence de la résistance de compression du béton  $f_{ck}$  et du pourcentage d'armatures passives sur la solution optimale sont menées.

##### 2.6.4.1. Influence de la résistance $f_{ck}$ sur la solution optimale en précontrainte partielle

En précontrainte partielle, les armatures passives contribuent au dimensionnement de la force de précontrainte et des dimensions de la section aux ELS. L'influence de la résistance à la compression  $f_{ck}$  sur la hauteur de la section est étudiée pour deux pourcentages d'armatures passives et pour différentes longueurs de travée.

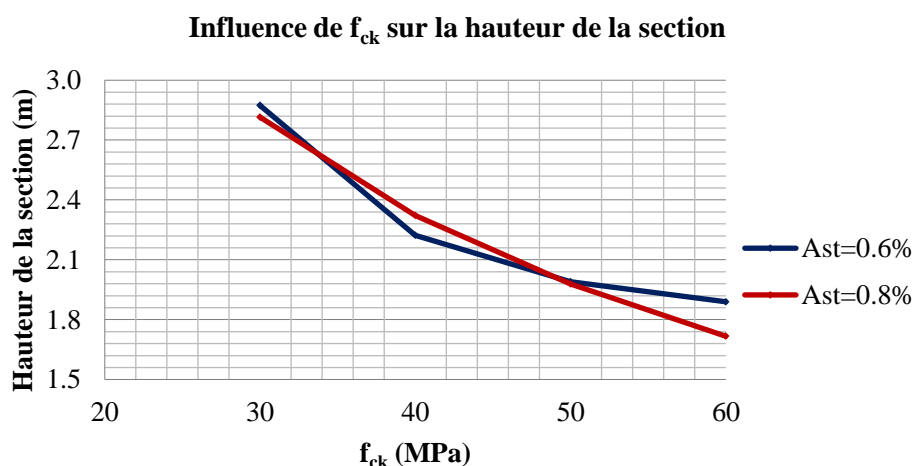


Figure 5.12 - Graphique de la variation de la hauteur en fonction de  $f_{ck}$  en précontrainte partielle

$f_{ck}$ (MPa)	30	40	50	60
$h$ (m)	2,87	2,22	1,98	1,89
Surface talon (m2)	1,10	0,96	0,90	0,87
$P$ (MN)	7,71	10,91	11,16	10,97
câbles	3	5	5	5

Tableau 5.7 – Influence de la variation de  $f_{ck}$  sur la solution optimale

$P$  : force de précontrainte

$h$  : hauteur de la section

Les résultats obtenus montrent que la variation de  $f_{ck}$  possède le même que celui constaté en précontrainte totale. Une augmentation de  $f_{ck}$  de 30MPa à 60MPa conduit à une diminution de la hauteur totale de 39% pour un pourcentage d’armatures passives de 0,8% et une travée de longueur 40m. Toutefois, cette diminution est accompagnée par une augmentation de la force de précontrainte et du nombre de câble.

#### 2.6.4.2. Influence du pourcentage d’armatures passives en précontrainte partielle

Le pourcentage d’armatures passives joue un rôle important dans le dimensionnement des sections en précontrainte partielle. Pour cette étude, des valeurs de pourcentage allant de 0,2% à 0,8% avec un pas de 0,2% sont considérées pour différentes longueur de travée.

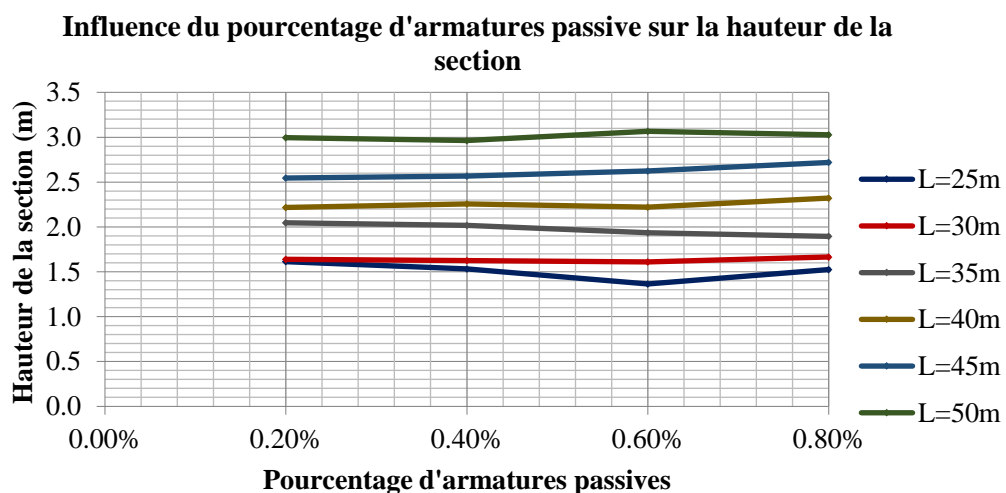


Figure 5.13 - Graphique de la variation de la hauteur de la section en fonction du pourcentage d’armatures passives

Les résultats obtenus montrent une diminution de la force de précontrainte avec l’augmentation du pourcentage d’armatures passives, avec une légère diminution de la hauteur de la section. La diminution de la force de précontrainte n’est pas assez importante, comme la valeur constatée dans l’étude théorique de la précontrainte partielle avec l’extension du domaine admissible, du fait que ces résultats sont les solutions optimales de l’algorithme. Donc lorsque le pourcentage d’acier diminue, les dimensions de la section varient également ce qui atténue la diminution de la force de précontrainte attendue.

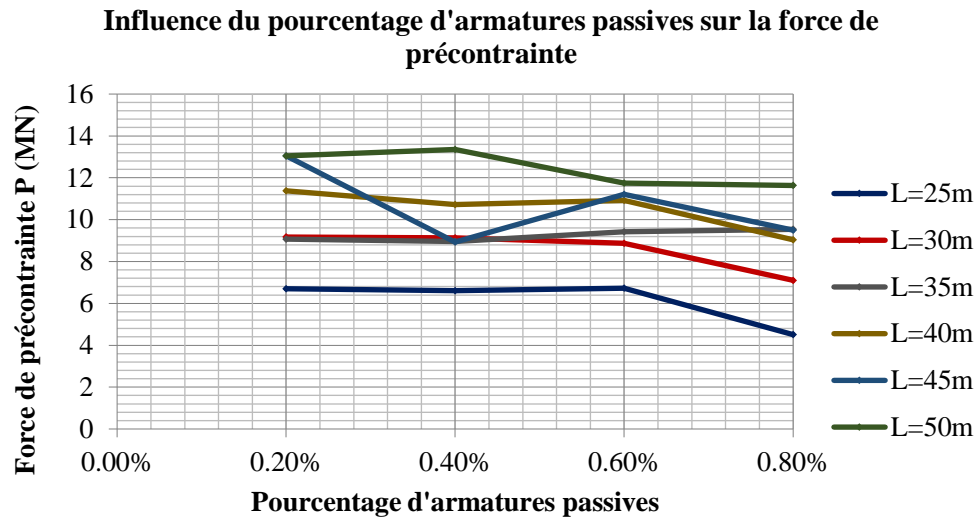


Figure 5.14 - Graphique de la variation de force de précontrainte en fonction du pourcentage d'armatures passives

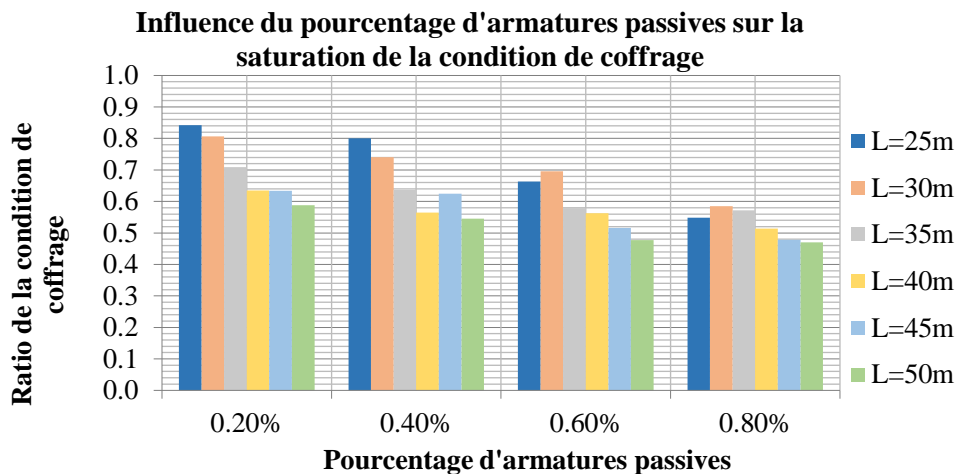


Figure 5.15 – Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives sur la saturation de la condition de coffrage aux ELS

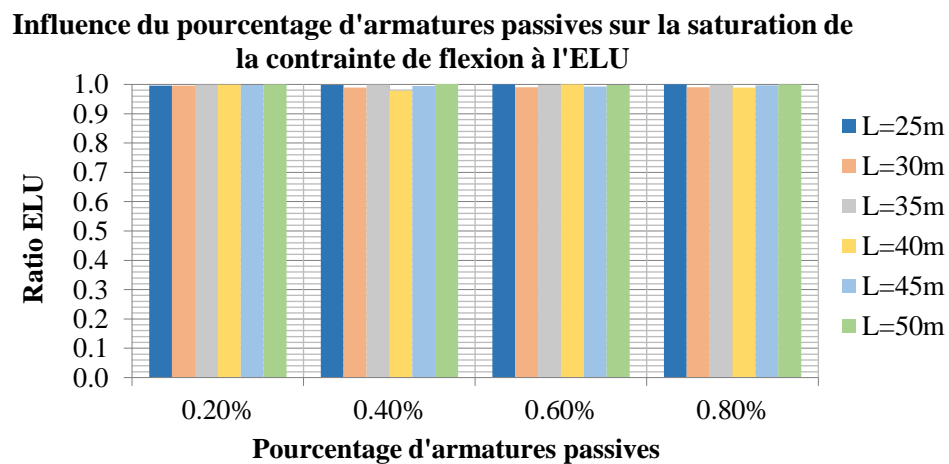


Figure 5.16 – Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives sur la saturation de la contrainte de flexion à l'ELU

Le ratio de la condition de coffrage présente une diminution significative avec l’augmentation du pourcentage d’armatures passives, alors que le ratio ELU représentant la saturation de la contrainte de vérification ELU demeure constant et égal à l’unité, comme en précontrainte totale.

Dans le but d’exposer clairement l’effet de l’extension du domaine admissible et de la diminution de la force de précontrainte P en précontrainte partielle, les dimensions de la section sont maintenues constantes et différents pourcentages d’armatures passives sont appliqués.

La réduction de la force de précontrainte est bien significative. Elle atteint 50% lorsque le pourcentage d’armatures passives augmente de 0,2% à 1% pour une travée de longueur 25m, et une réduction de 42% est observée pour une travée de longueur 35m.

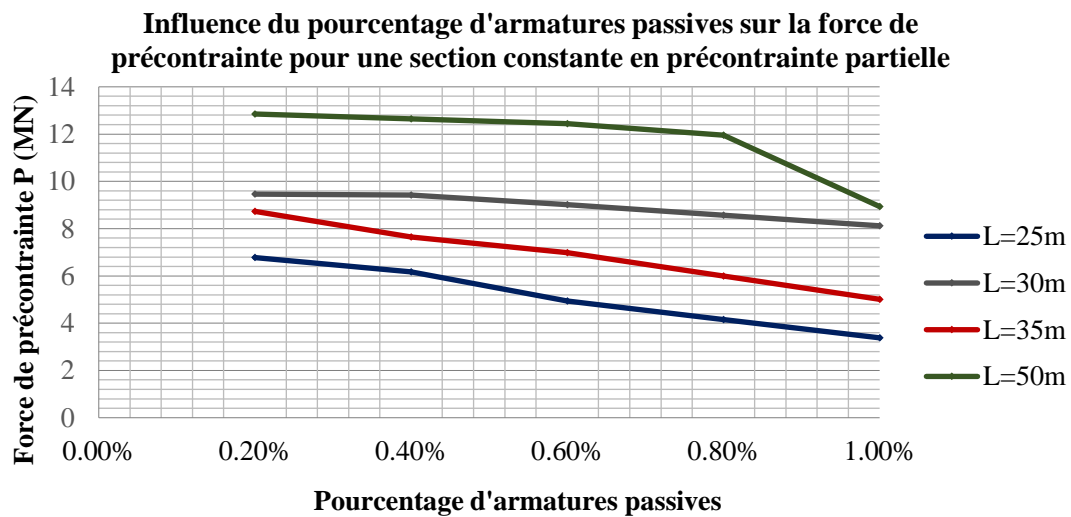


Figure 5.17 - Graphique de l'influence du pourcentage d'armatures passives en précontrainte partielle pour une section constante

### 2.6.5. Analyse comparative entre précontrainte totale et partielle

Une comparaison entre les résultats de la précontrainte totale et partielle est menée pour des longueurs de travée de 25m et 40m, et des pourcentages d’armatures passives de 0,4%, 0,6% et 0,8%.

% acier passif	Travée longueur L=25m				Travée longueur L=40m			
	0,40%		0,60%		0,60%		0,80%	
Précontrainte	Totale	Partielle	Totale	Partielle	Totale	Partielle	Totale	Partielle
P (MN)	10,45	6,61	10,39	6,73	14,95	10,92	15,10	9,04
n câbles	4	3	4	3	6	5	6	4
Ratio coffrage	1,00	0,80	1,00	0,66	0,77	0,56	0,75	0,51
Surface (m <sup>2</sup> )	0,82	0,66	0,80	0,73	1,02	0,97	1,04	0,99
Coût (€)	1019,66	959,43	1021,95	993,48	1398,90	1382,97	1412,16	1375,45

Tableau 5.8 – Comparaison entre précontrainte totale et partielle

- P : force de précontrainte
- n câbles : nombre de câbles
- Ratio coffrage : degré de saturation de la condition de coffrage
- Surface : aire totale de la section
- Coût : coût total de la section

Les résultats montrent une réduction significative dans la force de précontrainte, du nombre de câbles et dans la saturation de la condition de coffrage en précontrainte partielle.

Pour une longueur de travée de 25m, la réduction de la force de précontrainte atteint 35% pour un pourcentage d’armatures passives de 0.4%. La surface totale et le coût de la section diminuent également en précontrainte partielle mais avec un taux plus faible.

### 2.6.6. Etude de sensibilité des coûts unitaires

La sensibilité des coûts unitaires de béton et des câbles de précontrainte est étudiée afin de tester leur impact sur le dimensionnement. Le prix unitaire du béton est varié entre 0 et 350€/m<sup>3</sup> avec un pas de 50€/m<sup>3</sup>; la variation est donc effectuée entre 0,4 C<sub>c</sub> et 1,4 C<sub>c</sub>, avec C<sub>c</sub> le prix unitaire pris comme hypothèse dans les tableaux des données d’entrée de la section 2.6.1. L’impact sur la hauteur et l’aire totale de la section est étudié.

Le prix unitaire des câbles de précontrainte C<sub>p</sub> est varié entre 0 et 5,76€/kg avec un pas 0,72€/kg, la variation est donc effectuée entre 0,4 C<sub>p</sub> et 1,6 C<sub>p</sub>. L’impact sur le nombre de câbles et la hauteur de la section est étudié. Pour l’intérêt de la comparaison, le coût du coffrage est prix égal à 0.

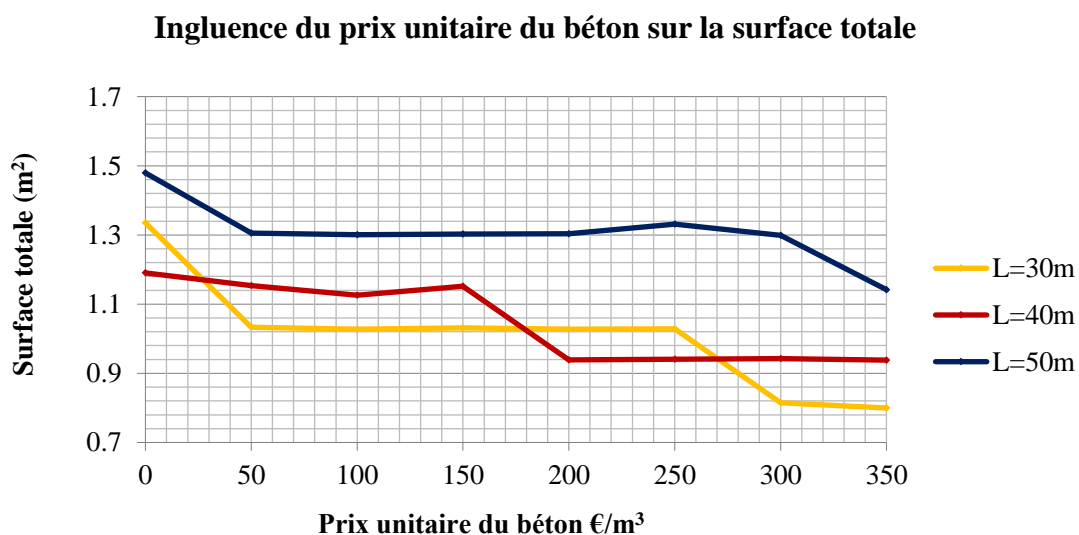


Figure 5.18 – Graphiques de l’influence du prix unitaire du béton sur la surface de la section

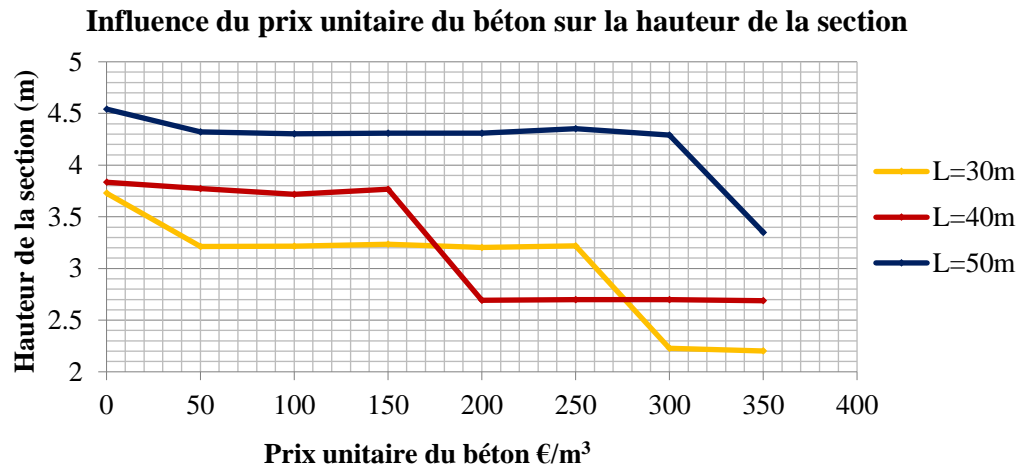
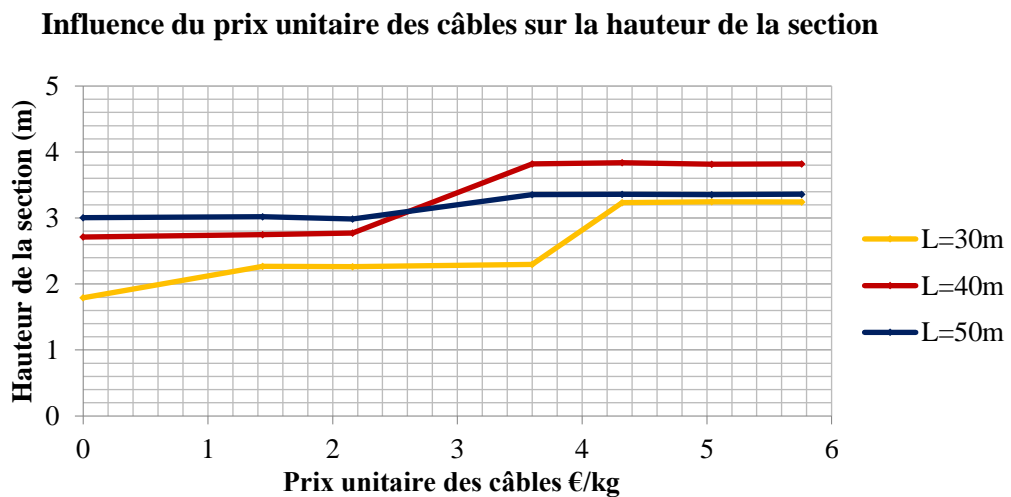


Figure 5.19 – Graphiques de l'influence du prix unitaire du béton sur la hauteur totale de la section



### Influence du prix unitaire des câbles sur le nombre de câbles

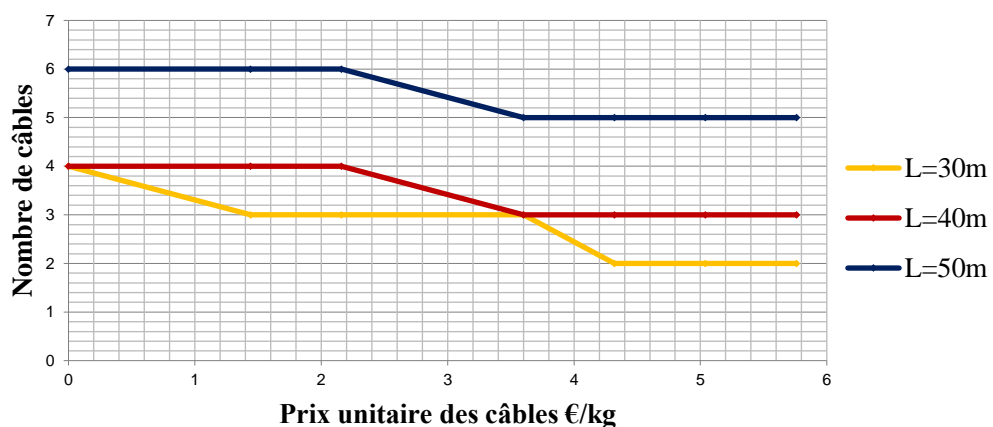


Figure 5.20 - Graphiques de l'influence du prix unitaire des câbles sur la hauteur de la section et le nombre de câbles



Travée de longueur = 40m

$C_c$	$h(m)$	Surface(m <sup>2</sup> )	nombre de câbles
0	3,834	1,190	3
0,4 $C_c$	3,718	1,126	3
0,6 $C_c$	3,768	1,152	3
0,8 $C_c$	2,692	0,939	4
1,0 $C_c$	2,699	0,941	4
1,2 $C_c$	2,699	0,942	4
1,4 $C_c$	2,688	0,938	4

Tableau 5.9 – Effet de la variation du prix unitaire du béton pour une longueur de travée de 40m

$C_c$ : Prix unitaire du béton

$h(m)$  : Hauteur totale de la section

Travée de longueur = 40m

$C_p$	$h(m)$	Surface(m <sup>2</sup> )	nombre de câbles
0	2,712	1,040	4
0,4 $C_p$	2,746	1,006	4
0,6 $C_p$	2,772	1,204	4
0,8 $C_p$	3,819	1,204	3
1,0 $C_p$	3,838	1,204	3
1,2 $C_p$	3,816	1,204	3
1,4 $C_p$	3,820	1,204	3

Tableau 5.10 – Effet de la variation du prix unitaire des câbles pour une longueur de travée de 40m

Comme attendu, les résultats montrent que le prix unitaire du béton influence largement la section totale et la hauteur de la section. Pour des prix unitaires peu élevés, la hauteur de la section et la surface sont maximales, elles décroissent lorsque le prix augmente. Une réduction soudaine dans ces deux paramètres est observée pour différentes valeurs du prix unitaire.

Ceci veut dire qu’il serait plus économique, pour un coût unitaire du béton plus élevé, d’avoir une section avec une surface de béton plus faible et un nombre de câbles plus important.

Pour des valeurs faibles du prix unitaire des câbles, le nombre de câbles atteint sa valeur maximale, et la hauteur de la section sa valeur minimale. Cette dernière augmente progressivement en augmentant le prix unitaire des câbles, pour atteindre sa valeur maximale permise imposée par la contrainte géométrique, et le nombre de câbles évidemment décroît.

Les allures des graphiques des Figure 5.19 et Figure 5.20 sont tout à fait cohérentes.

Lorsque le prix du coffrage est pris en compte, la hauteur de la section est légèrement affectée par la variation des prix unitaires du béton et des câbles. Les allures sont presque constantes.

### Influence du prix du béton avec prise en compte du prix du coffrage

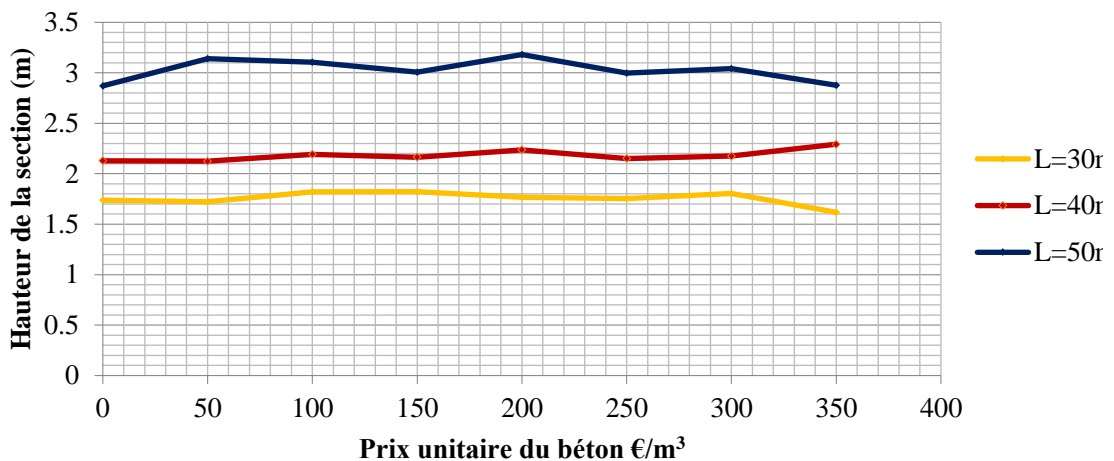


Figure 5.21 – Graphique de l'influence du prix unitaire du béton avec prise en compte du prix du coffrage

### Influence du prix des câbles avec prise en compte du prix du coffrage

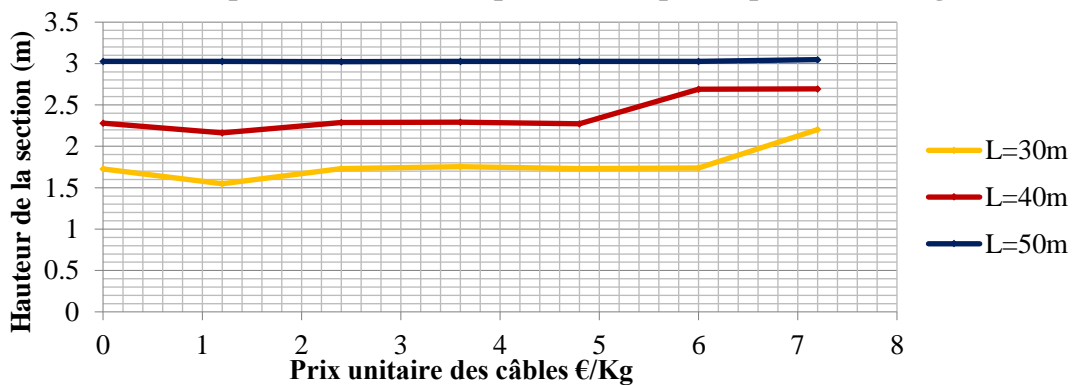


Figure 5.22 – Graphique de l'influence du prix unitaire des câbles avec prise en compte du prix du coffrage

En résumé, les coûts unitaires sont d'une grande importance et affectent largement la solution optimale. Leurs valeurs devraient être soigneusement déterminées, et peuvent varier selon les régions et les pays.

## 2.7 Conclusion de l'application numérique

Dans cette application, l'optimisation par algorithmes génétiques d'une poutre totalement et partiellement précontrainte en T à talon d'un pont VIPP est abordée. La démarche analytique de la nouvelle règle des pivots proposée dans les chapitres précédents de ce manuscrit est programmée sur le logiciel « scilab », et connectée à l'algorithme d'optimisation. Les données d'entrée et les hypothèses sont exposées et introduites dans le programme à l'aide d'un fichier Excel.

La formulation du problème d'optimisation consiste à minimiser la fonction objectif, le coût total de la section, sous contraintes géométriques imposées et contraintes mécaniques aux ELS et à l'ELU conformes aux méthodes analytiques proposées et selon l'Eurocode 2. Les variables

considérées sont les dimensions de la section, le nombre d'armatures passives et la configuration du câblage.

La fonction « objectif » pourrait être facilement modifiée selon les objectifs du concepteur.

Une étude paramétrique est ainsi effectuée, et l'influence de chaque paramètre sur le dimensionnement de la section est analysée.

Une comparaison entre les résultats de la précontrainte totale et partielle est menée. Elle montre une réduction significative de la force de précontrainte et du nombre de câbles en précontrainte partielle avec une légère réduction dans la surface de la section et le coût total. Ce résultat prévisible sert à valider la démarche développée. L'approche analytique développée peut être adaptée au cas de la précontrainte adhérente, et un gain plus important dans la réduction de la force de précontrainte et dans le pourcentage d'armatures passives nécessaires pour la vérification de la flexion à l'ELU peut être obtenu.

### **3. Application 2 – Optimisation de la précontrainte pour une poutre à deux travées**

Dans cette application, la recherche de la force de précontrainte minimale d'une poutre hyperstatique à deux travées symétriques est abordée. La formulation analytique de l'application conduit à un problème d'optimisation avec des relations linéaires entre les contraintes et les variables ; ce qui peut être facilement résolu par la méthode du Simplexe.

La résolution de la poutre à deux travées est effectuée par la méthode analytique proposée dans le chapitre précédent. Du fait de la symétrie des travées, les expressions de la ligne d'influence et des courbes enveloppes obtenues sont simplifiées par rapport aux expressions générales d'une poutre continue à  $n$  travées.

La détermination de la force de précontrainte minimale se fait sous combinaisons ELS. Elle est dictée par les trois conditions détaillées dans le chapitre précédent, et rappelées ci-après.

- Condition 1 : Ouverture du fuseau de passage
- Condition 2 : Existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau
- Condition 3 : Inscription du câble à l'intérieur des limites d'enrobage

Chaque condition donne lieu à une force de précontrainte minimale, et la force dimensionnante sera le maximum de ces trois valeurs.

Les deux premières conditions donnent des valeurs de précontrainte minimale indépendante du profil de câble. La troisième condition exige la vérification de l'existence d'une ligne de précontrainte à l'intérieur du fuseau, donnant par transformation linéaire, un câble qui respecte les conditions d'enrobage.

Pour qu'il y ait un tracé possible, il faut que la transformée de la limite supérieure du fuseau se situe au-dessus de la limite inférieure d'enrobage et la transformée de la limite inférieure se situe au-dessous de la limite supérieure d'enrobage. La pratique usuelle traduit cette condition

en deux inégalités à vérifier en deux points de la poutre. Dans les méthodes conventionnelles, cette vérification s'effectue sur l'appui intermédiaire et en un point choisi en travée, généralement sur  $0.4L$ .

Dans la méthode analytique développée, cette troisième condition est définie par la recherche, en travée, d'un point de tangence entre la transformation linéaire maximale et la droite reliant la transformation linéaire minimale sur appui. Les moments hyperstatiques engendrés par le tracé du câble réel devront s'inscrire dans le fuseau de passage des transformations linéaires définies. Le but est de diminuer autant que possible l'écart entre les moments hyperstatiques obtenus à partir du tracé réel et la transformation linéaire définie en amont afin d'obtenir un tracé ayant une force de précontrainte minimale.

Dans le cas de la poutre étudiée, la démarche d'optimisation développée par la méthode du Simplexe permet d'obtenir la force minimale de précontrainte ainsi que les coefficients définissant le tracé parabolique optimal du câble.

Pratiquement, les étapes formant la démarche d'optimisation sont les suivantes

- Définir un tracé parabolique (polynôme de degré 2)
- Calculer la transformation linéaire correspondante, qui n'est autre que le moment hyperstatique du câble de précontrainte
- Dédire l'expression polynomiale de la ligne de précontrainte
- Définir des points de maillage le long de la travée
- Appliquer la méthode du Simplexe sur les inégalités fondamentales de dimensionnement en béton précontraint afin d'obtenir la force de précontrainte et les coefficients définissant le polynôme du tracé du câble
- Vérifier graphiquement les résultats obtenus par la méthode du simplexe

La méthode du Simplexe appliquée dans ce chapitre est le Simplexe en deux phases, une première phase pour l'étude de l'existence d'une solution et une deuxième pour la calcul de la solution optimale.

Le problème d'optimisation étant à deux variables, il est aussi résolu graphiquement dans un fichier Excel.

Pour information, la recherche de la valeur minimale de la force de précontrainte par la méthode du Simplexe peut également être appliquée à une poutre isostatique. Elle n'apportera pas une valeur ajoutée sur la minimisation de la force de précontrainte, mais elle permettra de valider l'approche analytique développée.

### **3.1 Résolution analytique d'une poutre à deux travées symétriques**

La résolution de la poutre et la détermination des lignes d'influence et des courbes enveloppes s'effectuent en utilisant l'approche analytique exposée dans le chapitre précédent. Le but est de trouver les sollicitations enveloppes qui dimensionnent la section.

### 3.1.1. Expressions de la ligne d'influence du moment fléchissant

L'équation de la ligne d'influence du moment fléchissant est déterminée pour une travée, et déduite par un simple changement de variable pour la deuxième travée.

Les positions des foyers de droite de la travée 1 et de gauche de la travée 2 sont données par les expressions suivantes, en comptant l'origine des abscisses à l'appui gauche de chaque travée.

$$x_{fd} = \frac{4L}{5} \quad x_{fg} = \frac{L}{5} \quad [5.10]$$

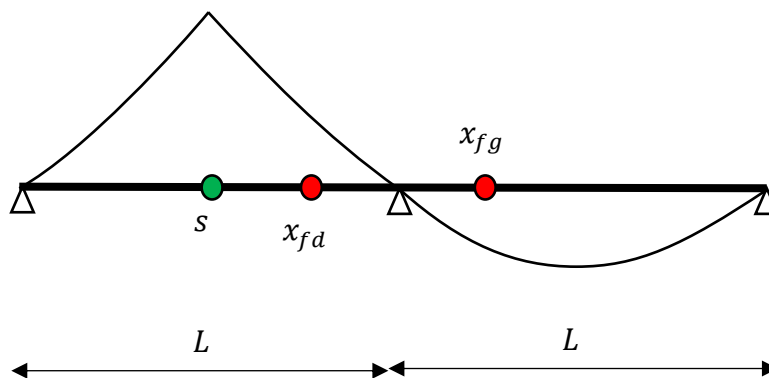


Figure 5.23 - Allure de la ligne d'influence du moment d'une poutre à deux travées symétriques

Expression de la ligne d'influence dans la travée 1 :

$$v(s) = \frac{s}{4L} x \left( 5 - \frac{4L}{s} - \frac{x^2}{L^2} \right) \text{ pour } x \leq s \quad [5.11]$$

$$v(s) = -\frac{s}{4L^3} x^3 + \left( \frac{s}{4L} + \frac{s}{L} \right) x - s \text{ pour } x \geq s$$

Expression de la ligne d'influence dans la travée 1 lorsque la travée 2 est chargée

$$v(s) = -\frac{s}{4L^3} x^3 + \frac{s}{4L} x \quad [5.12]$$

Point nul et point maximal de la ligne d'influence

Lorsque la section se situe à droite du foyer de droite de la première travée, la ligne d'influence du moment admet un point nul et un point maximal entre 0 et s.

Point nul de la ligne d'influence

$$\xi_o = \sqrt{5 - \frac{4L}{s}} \quad [5.13]$$

Le point maximal de la ligne d'influence est obtenu en annulant la dérivée  $v'(s)$

$$\xi_{max} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(5 - \frac{4L}{s}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xi_o \quad [5.14]$$

### 3.1.2. Détermination des courbes enveloppes

La courbe enveloppe du moment sous charge unitaire concentrée est la courbe de la ligne d'influence maximale en chaque position de  $s$ .

$$v_{max} = v(\xi_{max}) = s \frac{\sqrt{3}}{18} \xi_o^3 \quad [5.15]$$

Expression du moment sous chargement uniforme  $p$  :

$$M_{uni} = \frac{ps}{8L} \left(3 - \frac{4s}{L}\right) \quad [5.16]$$

Pour la détermination des courbes enveloppes du moment pour une charge uniformément répartie, deux cas doivent être envisagés.

Cas 1 :  $s \leq x_{fd}$

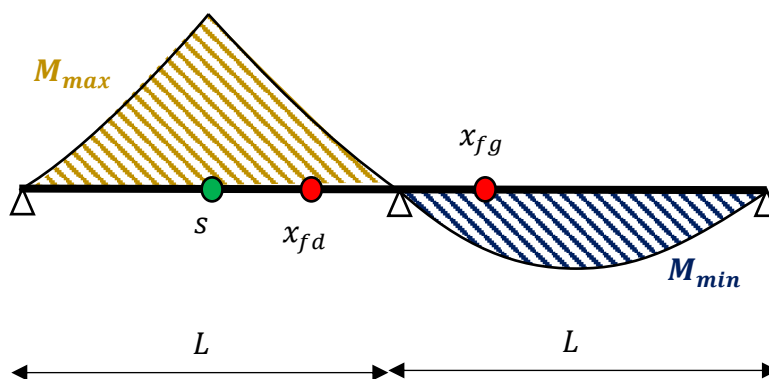


Figure 5.24 – Détermination des courbes enveloppes du moment pour  $s \leq x_{fd}$

Il faudra intégrer la ligne d'influence de la deuxième travée pour obtenir le moment minimal et la première travée pour obtenir le moment maximal.

Cas 2 :  $s \geq x_{fd}$

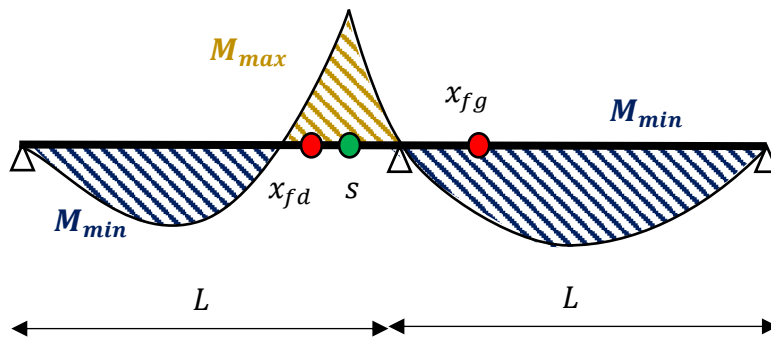


Figure 5.25 – Détermination des courbes enveloppes du moment pour  $s \geq x_{fd}$

Il faudra intégrer la ligne d'influence entre l'appui de gauche et le point nul de la ligne d'influence de la première travée et sur la deuxième travée pour obtenir le moment minimal, et entre le point nul de la ligne d'influence et l'appui intermédiaire pour obtenir le moment maximal.

Expressions des moments  $M_{min}$  et  $M_{max}$  obtenues pour une charge uniforme unitaire

Moment minimal

$$\begin{aligned}
 s \leq x_{fd} \quad M_{min} &= -\frac{sL}{16} \\
 s \geq x_{fd} \quad M_{min} &= -\frac{sL}{16} (1 + \xi_o^4) = -\frac{sL}{16} \left[ 1 + \left( 5 - \frac{4L}{s} \right)^2 \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Moment maximal

Le moment maximal est obtenu en retranchant  $M_{min}$  de  $M_{uni}$

$$M_{max} = M_{uni} - M_{min}
 \tag{5.18}$$

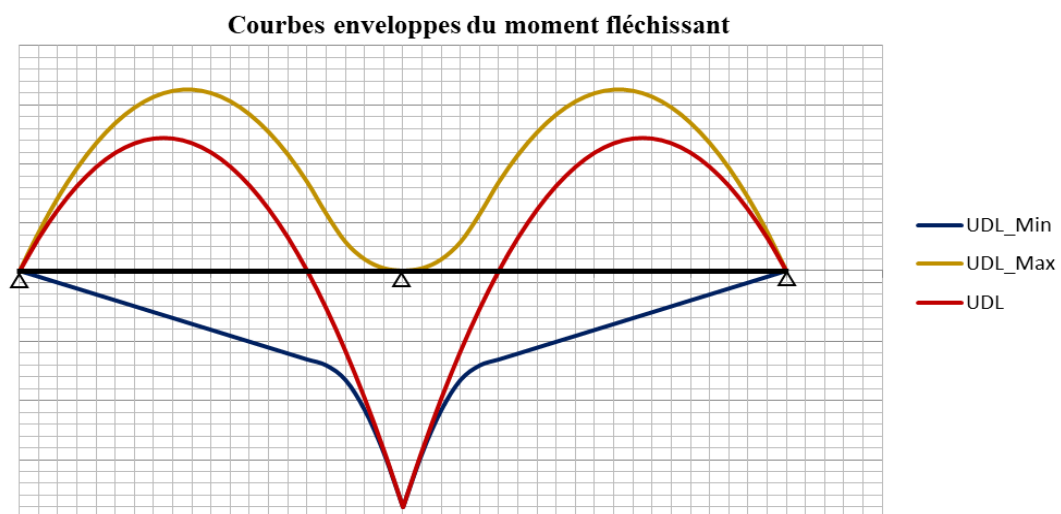


Figure 5.26 - Courbes enveloppes du moment fléchissant sous charge uniforme

### 3.2 Détermination de la force de précontrainte

Le dimensionnement de la force de précontrainte se fait à partir des inégalités fondamentales de précontrainte sous combinaisons ELS. Pour prendre en compte les variations de la force de précontrainte, on prend une valeur de référence unique  $P_m$  de la force de précontrainte et on définit, pour chaque état limite, des valeurs minimales et maximales d'un coefficient  $\alpha$

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max} \quad [5.19]$$

En fibre supérieure

$$\frac{I}{v} \bar{\sigma}_1 - M_{min} \leq \alpha P_m (\rho v' + e_{00}) \leq \frac{I}{v} \bar{\sigma}_2 - M_{max} \quad [5.20]$$

En fibre inférieure

$$\frac{I}{v'} \bar{\sigma}_4 + M_{max} \leq \alpha P_m (\rho v - e_{00}) \leq \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_3 + M_{min} \quad [5.21]$$

En posant  $\xi = x/L$

$$\begin{aligned} m_1^*(\xi) &= \max_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1 - M_{min}(x) \right) \right\} & m_2^*(\xi) &= \min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{I}{v} \bar{\sigma}_2 - M_{max} \right) \right\} \\ m_3^*(\xi) &= \min_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_3 + M_{min}(x) \right) \right\} & m_4^*(\xi) &= \max_{\alpha} \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{I}{v'} \bar{\sigma}_4 + M_{max} \right) \right\} \end{aligned} \quad [5.22]$$

Les inégalités fondamentales deviennent :

$$\begin{aligned} m_1^*(\xi) - P_m \rho v' &\leq P_m e_{00}(\xi) \leq m_2^*(\xi) - P_m \rho v' \\ P_m \rho v - m_3^*(\xi) &\leq P_m e_{00}(\xi) \leq P_m \rho v - m_4^*(\xi) \end{aligned} \quad [5.23]$$

#### 3.2.1. Condition 1 : Ouverture du fuseau de passage en traction

La première condition d'ouverture du fuseau de passage de la ligne de précontrainte est obtenue en réarrangeant les inéquations précédentes, ce qui donne la première valeur de  $P_{min,I}$  en respectant les inégalités suivantes

$$P_m e_{00}(\xi) \leq \min\{m_2^* - P_m \rho v' \quad ; \quad P_m \rho v - m_4^*\} \quad [5.24]$$

$$P_m e_{00}(\xi) \geq \max\{m_1^* - P_m \rho v' \quad ; \quad P_m \rho v - m_3^*\}$$

$$P_{min,I} = \frac{m_4^* + m_1^*}{\rho h} \quad [5.25]$$



### 3.2.2. Condition 2 : Existence d'une ligne de précontrainte concordante à l'intérieur du fuseau

La deuxième condition est le respect de la relation de concordance, et donc l'existence d'une ligne de précontrainte concordante à l'intérieur du fuseau.

En posant

$$J(f(\xi)) = \int_0^1 \xi f(\xi) d\xi \quad [5.26]$$

Sachant que la relation de concordance se traduit par

$$J(e_{00}) = 0 \quad [5.27]$$

Ce qui conduit aux deux valeurs minimales de la force de précontrainte  $P_{min,IIa}$  et  $P_{min,IIb}$

$$P_{min,IIa}(M_{min}) = \frac{J(m_1^*)}{\rho v' / 2} \quad [5.28]$$

$$P_{min,IIb}(M_{max}) = \frac{J(m_4^*)}{\rho v / 2}$$

### 3.2.3. Condition 3 : Inscription du câble déduit par transformation linéaire de la ligne de précontrainte dans les limites d'enrobage

Comme déjà mentionné au début de cette section et dans le chapitre précédent, cette condition se traduit par l'existence d'une transformation linéaire TL, représentant l'écart entre la ligne de précontrainte et le tracé du câble, respectant les conditions d'enrobage.

$$TL(x) = e_{00}(x) - e_0(x) \quad [5.29]$$

En effet, la transformation linéaire n'est autre que le rapport entre le moment hyperstatique de précontrainte et la force de précontrainte P

$$e_{00}(x) = e_0(x) + \frac{M_{hyp}}{P_m} \quad [5.30]$$

En appliquant la méthode des forces, le moment hyperstatique est obtenu en fonction de  $J(e_0)$ , la rotation isostatique sur appui intermédiaire.

Sachant que

$$J(\xi) = \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \quad [5.31]$$

L'expression de la ligne de précontrainte devient

$$e_{00}(\xi) = e_0(\xi) - 3\xi J(e_0) \quad [5.32]$$

Les conditions d'enrobage à vérifier par le tracé sont :

$$-(v' - d') \leq e_0(\xi) \leq v - d \quad [5.33]$$

### 3.2.3.1. Démarche d'optimisation

Un tracé de câble parabolique est considéré dans cette application. L'équation du câble prend la forme suivante

$$e_0 = v_{,0} + v_{,1}\xi + v_{,2}\xi^2 \quad [5.34]$$

$$J(e_0) = \frac{v_{,0}}{2} + \frac{v_{,1}}{3} + \frac{v_{,2}}{4} \quad [5.35]$$

Ligne de précontrainte

$$e_{00} = e_0 - 3\xi J(e_0) = v_{,0} \left(1 - \frac{3\xi}{2}\right) + v_{,2}\xi \left(\xi - \frac{3}{4}\right) \quad [5.36]$$

La ligne de précontrainte ne dépend donc pas de  $v_{,1}$ .

En supposant que le câble passe par l'axe neutre sur l'appui de rive

$$v_{,0} = 0 \quad [5.37]$$

Les deux inconnues restantes sont  $v_{,2}$  et  $P_m$

$$e_{00} = v_{,2} \xi \left(\xi - \frac{3}{4}\right) \quad [5.38]$$

En remplaçant l'équation [5.38] par sa valeur dans les inégalités de l'équation [5.23], un quadrilatère est obtenu dans le plan  $(P_{i,j}, v_{,2})$  tel que les sommets sont les  $P_{i,j}$

$$P_{i,j} = \frac{m_i^* + m_j^*}{\rho h} \quad P_{i,j} v_{,2} = \frac{\rho v m_i^*(\xi) - \rho v' m_j^*}{\rho h \xi (\xi - 3/4)} \quad [5.39]$$

En divisant la poutre en plusieurs points de maillage, le domaine admissible est obtenu à partir de l'intersection des domaines d'interaction, qui sont les quadrilatères définis sur chacun des points, avec  $\xi \neq 0$ .

Les équations obtenues sont linéaires.

Les valeurs de  $i$  et  $j$  définissent les sommets des quadrilatères, elles sont données dans le tableau suivant :

	$i$	$j$
1/3	1	3
3/2	2	3
2/4	2	4
4/1	1	4

Tableau 5.11 - Sommets des domaines d'interaction

Dans le cas  $\xi = 0$ , le parallélogramme est un rectangle dont les branches horizontales se trouvent à l’infini : le domaine d’interaction est limité par deux droites verticales.

Il reste à définir la condition d’enrobage. Le but est de vérifier que la transformation linéaire sur appui intermédiaire qui amène le point en limite supérieure d’enrobage permet de satisfaire la condition d’enrobage en travée.

$$e_0(\xi) = v_{,2}\xi \left( \xi - \frac{3}{4} \right) - \left( v - d - \frac{v_{,2}}{4} \right) \xi = v_{,2}\xi^2 - (v - d - v_{,2})\xi \quad [5.40]$$

Valeur minimale

$$e'_0(\xi) = 0 \quad [5.41]$$

$$e_{0\_min} = -\frac{(v - d - v_{,2})^2}{4v_{,2}} \geq -(v' - d') \quad [5.42]$$

Il faudra trouver la valeur de  $v_{,2}$  qui respecte la condition suivante

$$v_{,2}^2 - 2v_{,2}[v - d + 2(v' - d')] + (v - d)^2 \leq 0 \quad [5.43]$$

Ce qui donne

$$v_{,2} \leq v - d + 2(v' - d') + 2\sqrt{(v' - d')(h - d - d')} \quad [5.44]$$

Cette équation est également linéaire.

### 3.2.3.2. Formulation du problème d’optimisation

Le problème d’optimisation est un système linéaire à deux variables :  $P_m v_{,2}$  et  $P_m$

Objectif : Minimiser la force de précontrainte  $P_m$

$$\text{Fonction objectif} = P_m \quad [5.45]$$

avec les contraintes suivantes à respecter :

- Contraintes qui dépendent de la position du point de calcul  $\xi$  de la poutre

$$\begin{aligned} \xi \left( \xi - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v' P_m &\geq m_1^*(\xi) \\ \xi \left( \xi - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v' P_m &\leq m_2^*(\xi) \\ -\xi \left( \xi - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v P_m &\leq m_3^*(\xi) \\ -\xi \left( \xi - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v P_m &\geq m_4^*(\xi) \end{aligned} \quad [5.46]$$

- Contrainte indépendante de la position du point de calcul  $\xi$  de la poutre

$$v_{,2} \leq v - d + 2(v' - d') + 2 \sqrt{(v' - d')(h - d - d')} \quad [5.47]$$

Les 4 premières inégalités forment un quadrilatère pour chaque point de la poutre, et la dernière inéquation est une droite dans le plan  $(P_m, P_m v_{,2})$ .

Cette démarche d'optimisation pourrait être appliquée pour chaque état limite de service séparément comme elle peut combiner tous les ELS tout en tenant compte de la variation de la force de précontrainte dans chaque état limite.

En faisant varier la valeur de  $\xi$  entre 0 et 1, la poutre sera divisée en un certain nombre de points de maillage, et l'intersection des quadrilatères de tous les points et de la droite d'enrobage de l'équation [5.47] donnera la valeur minimale de la force  $P_m$ .

### 3.3 Application numérique

L'optimisation est appliquée sur une poutre de pont à nervures en double T.

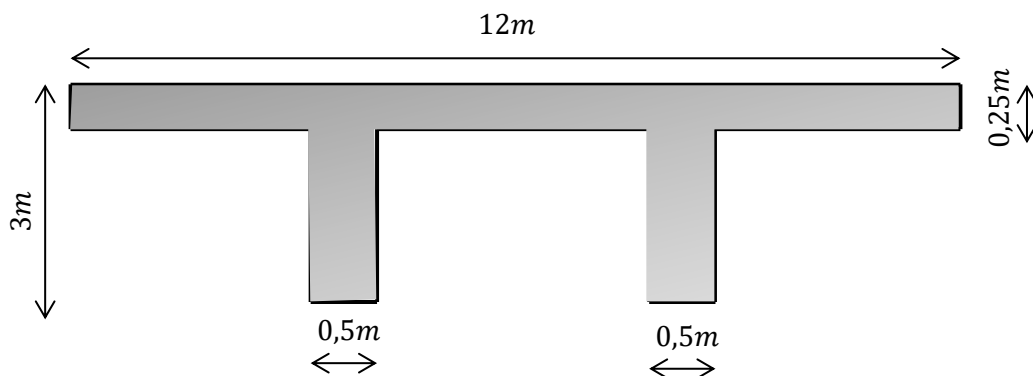


Figure 5.27 - Section de la poutre étudiée

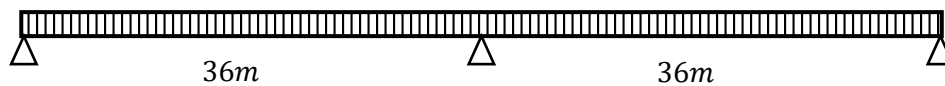


Figure 5.28 – Coupe longitudinal sur le pont

### Données d'entrée

#### Données géométriques

Longueur travée	$L = 36m$
Hauteur poutre	$h = 3m$
Largeur hourdis	$b_f = 12m$
Epaisseur hourdis	$h_f = 0,25m$
Epaisseur âme	$b_w = 0,5m$
Distance du câble moyen à la fibre inférieure	$d = 0,3m$
Distance du câble moyen à la fibre supérieure	$d' = 0,3m$

#### Caractéristiques géométriques de la section

Aire de la surface	$A = 5,75m^2$
Position de la fibre supérieure	$v = 0,842m$
Position de la fibre inférieure	$v' = 2,158m$
Moment d'inertie	$I = 4,977m^4$
Rendement de la section	$\rho = 0,476$

#### Propriétés des matériaux

Résistance caractéristique du béton à la compression	$f_{ck} = 40MPa$
Résistance caractéristique du béton à la traction	$f_{ctm} = 3,5 MPa$
Résistance caractéristique des aciers passifs	$f_{yk} = 500MPa$
Résistance caractéristique des aciers de précontrainte	$f_{pk} = 1860MPa$
Type des câbles utilisés	19T15
Force utile des câbles	$P_u = 3,2 MN$

#### Hypothèses de chargement

Poids volumique du béton armé	$25 kN/m^3$
Charges permanentes	$35 kN/m$
Surcharge d'exploitation uniformément répartie UDL	$32,9 kN/m$
Surcharge tandem TS	$860 kN$

#### Limitation des contraintes

ELS Quasi-Permanent	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,45 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = 0$
ELS Fréquent	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,6 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = 0,5 f_{ctm}$
ELS Caractéristique	Compression	$\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3 = 0,6 f_{ck}$
	Traction	$\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_4 = f_{ctm}$

**Coefficient  $\alpha$** 

$\alpha$	Quasi-Permanent	Fréquent	Caractéristique
$\alpha_{min}$	0,9	0,95	0,95
$\alpha_{max}$	1,1	1,05	1,05

**Dimensionnement de la précontrainte**

Les dimensions de la section étant fixes, les valeurs de la force de précontrainte minimale issues des conditions 1 et 2 peuvent être calculées en utilisant les formules de la section 3.2 indépendamment du tracé du câble. La force minimale de précontrainte issue de la condition 3 ainsi que le profil du câble sont obtenus à partir de l'optimisation linéaire détaillée dans la section précédente.

**3.4 Résolution du problème d'optimisation linéaire graphiquement**

La formulation du problème d'optimisation est donnée dans la section 3.2.3.2.

La résolution du problème linéaire à deux variables peut s'effectuer graphiquement.

La poutre est divisée en 21 points de maillage, et les 4 contraintes qui dépendent de  $\xi$  sont évaluées pour chaque point formant donc 11 quadrilatères dans le plan  $(P_m, P_m v_2)$ .

L'intersection de ces quadrilatères avec la dernière contrainte de condition d'enrobage vient tronquer le domaine admissible.

Nombre total de contraintes

$$n_{contraintes} = 4 \times 21 + 1 = 85 \quad [5.48]$$

Les valeurs de  $\xi$  pour les 21 points de maillage varient entre 0 et 1

Point	$\xi = x/L$	Point	$\xi = x/L$
1	0,00	12	0,55
2	0,05	13	0,60
3	0,10	14	0,65
4	0,15	15	0,70
5	0,20	16	0,75
6	0,25	17	0,80
7	0,30	18	0,85
8	0,35	19	0,90
9	0,40	20	0,95
10	0,45	21	1,00
11	0,50		

Tableau 5.12 – Maillage de la poutre en 21 points

Pour chaque point, les valeurs de  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ ,  $m_3^*$  et  $m_4^*$  sont calculées et les sommets des quadrilatères  $P_{1/3}$ ,  $P_{3/2}$ ,  $P_{2/4}$  et  $P_{4/1}$  sont obtenus.

$\xi$	$m_1^*$	$m_2^*$	$m_3^*$	$m_4^*$
0	0,00	96,68	37,75	0,00
0,05	-3,53	92,70	41,27	4,87
0,1	-6,53	89,24	44,27	9,09
0,15	-9,00	86,31	46,75	12,67
0,2	-10,95	83,91	48,70	15,61
0,25	-12,37	82,03	50,12	18,34
0,3	-13,27	80,68	51,01	20,48
0,35	-13,63	79,86	51,38	22,12
0,4	-13,48	79,56	51,22	22,86
0,45	-12,79	79,79	50,54	22,72
0,5	-11,58	80,55	49,32	21,70
0,55	-9,84	81,83	47,59	19,81
0,6	-7,58	83,64	45,32	17,07
0,65	-4,79	85,97	42,53	13,53
0,7	-1,47	88,84	39,21	9,59
0,75	2,90	92,22	35,37	5,44
0,8	8,24	96,14	31,00	0,66
0,85	14,23	100,58	26,10	-3,90
0,9	20,86	105,55	20,68	-8,87
0,95	28,13	111,04	14,73	-14,37
1	36,05	117,07	8,25	-20,39

 Tableau 5.13 - Valeurs de  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ ,  $m_3^*$  et  $m_4^*$  en chaque point de maillage

Les sommets  $P_{i,j}$  et  $M_{i,j} = P_{i,j} v_2$  sont obtenus en appliquant l'équation [5.39].

$\xi$	P1/3	P3/2	P2/4	P4/1	M1/3	M3/2	M2/4	M4/1
0,05	26,42	93,77	68,29	0,94	876,41	104,43	-643,66	128,32
0,1	26,42	93,45	68,83	1,79	518,07	104,36	-284,92	128,79
0,15	26,42	93,13	69,28	2,57	401,66	104,28	-168,03	129,35
0,2	26,42	92,82	69,66	3,26	346,33	104,19	-112,14	130,00
0,25	26,42	92,50	70,25	4,18	316,14	104,08	-78,76	133,30
0,3	26,42	92,18	70,81	5,05	299,35	103,94	-58,68	136,72
0,35	26,42	91,86	71,38	5,94	291,29	103,77	-46,53	140,98
0,4	26,42	91,54	71,69	6,57	290,16	103,56	-42,13	144,47
0,45	26,42	91,22	71,75	6,95	295,83	103,27	-44,94	147,63
0,5	26,42	90,90	71,56	7,08	309,81	102,86	-56,11	150,84
0,55	26,42	90,59	71,14	6,98	336,26	102,25	-79,36	154,64
0,6	26,42	90,27	70,49	6,65	385,82	101,23	-124,52	160,07
0,65	26,42	89,95	69,65	6,12	491,28	99,20	-221,72	170,36
0,7	26,42	89,63	68,89	5,68	817,59	93,09	-515,75	208,74
0,75	26,79	89,31	68,36	5,84	-	-	-	-
0,8	27,47	88,99	67,75	6,23	-499,51	117,51	663,06	46,04
0,85	28,23	88,67	67,67	7,23	-173,86	111,40	365,29	80,03
0,9	29,07	88,35	67,67	8,39	-66,79	109,37	266,80	90,64
0,95	30,00	88,04	67,67	9,63	-14,18	108,35	218,49	95,95
1	31,01	87,72	67,67	10,96	16,74	107,74	190,13	99,13

Tableau 5.14 - Valeurs des sommets des quadrilatères

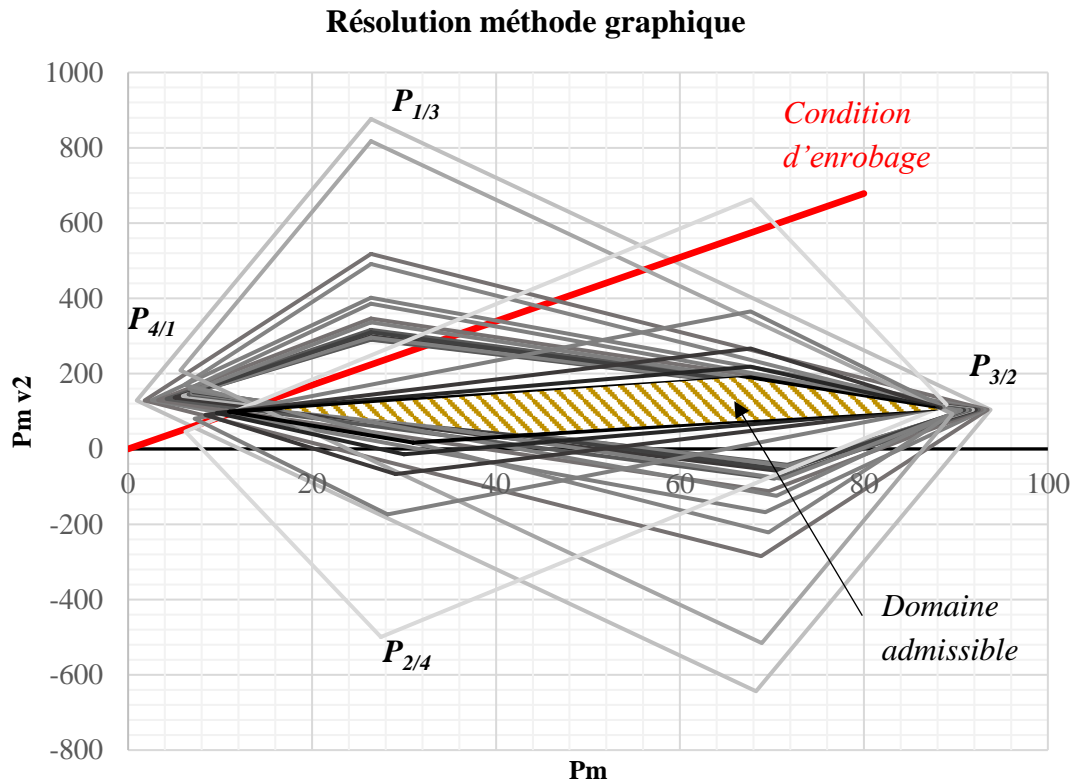


Figure 5.29 - Résolution de l'optimisation linéaire graphiquement

Le graphique précédent représente les 21 quadrilatères tracés en nuances de gris et la droite représentant la condition d'enrobage en couleur rouge. Les quadrilatères sont tracés en reliant les 4 sommets par des droites

Chaque quadrilatère représente un domaine admissible pour une position donnée de la poutre, à l'intérieur duquel toute valeur de la force de précontrainte  $P_m$  respecte les 4 inégalités de précontrainte. La force de précontrainte minimale pour chaque quadrilatère est le sommet de gauche  $P_{4/1}$ .

Le domaine admissible illustré sur la Figure 5.29 n'est autre que l'intersection de tous les domaines admissibles définis en chaque point du maillage tout en tenant compte de la condition d'enrobage.

Il faudra être attentif au changement de signe des valeurs de  $m_1^*(\xi)$ ,  $m_2^*(\xi)$ ,  $m_3^*(\xi)$  et  $m_4^*(\xi)$  en fonction du signe de  $e_{00}$ . Les droites délimitant les pivots 1 et 4 sont ainsi inversées en fonction du signe de  $e_{00}$

La droite de la condition d'enrobage vient tronquer ce domaine, puisque le domaine admissible de cette condition comprend les points situés sous la droite dans le repère  $(P_m, P_m v_2)$ .

La force minimale de précontrainte qui respecte toutes les conditions est donc située à l'intersection des quadrilatères et sous la droite de la condition d'enrobage.



En agrandissant le schéma de la Figure 5.29 pour repérer l'intersection des quadrilatères dans le domaine admissible de la condition d'enrobage, nous obtenons le graphique de la Figure 5.30.

A partir de la figure suivante, il est clair que l'intersection des quadrilatères en couleur verte et bleue, qui correspondent respectivement aux points numéros 11 et 21 de la poutre, donne la valeur de la force de précontrainte minimale. A droite de cette intersection, toutes les valeurs de  $P_m$  respectent les 85 contraintes.

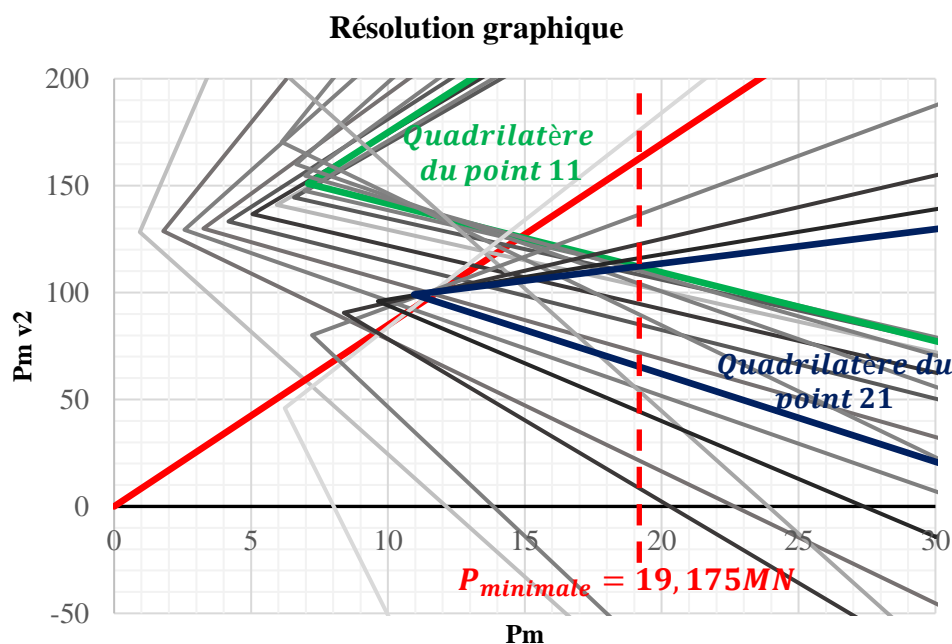


Figure 5.30 – Résolution de l'optimisation linéaire

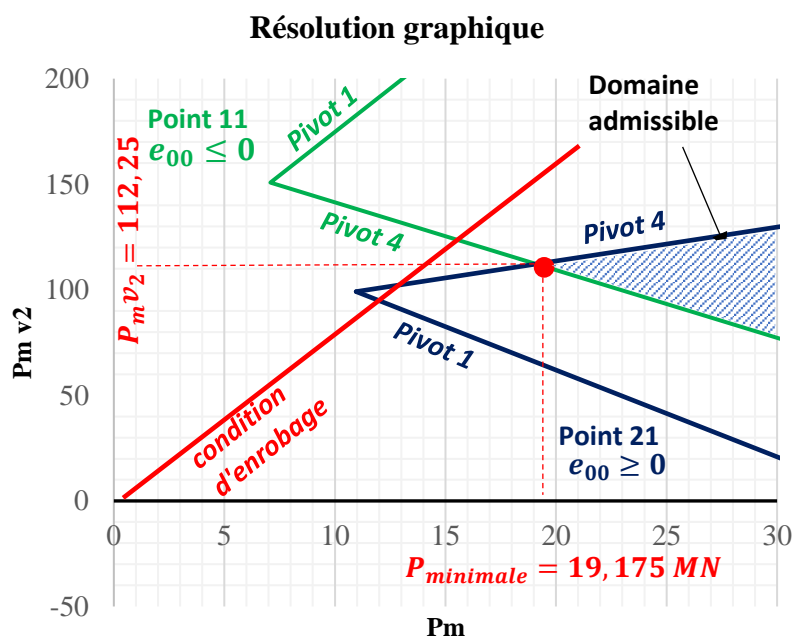


Figure 5.31 – Point optimal obtenu graphiquement

Pour la valeur de  $P_{min}$  optimale, nous observons une saturation de la contrainte de traction en fibre inférieure sous  $M_{max}$  en deux points le long de la travée.

Le coefficient  $v_2$  du polynôme d degré 2 définissant le tracé du câble est déduit à partir de la valeur optimale  $P_m v_2$ . Les coefficients  $v_0$  et  $v_1$  sont calculés à partir des conditions de passage du câble sur appuis.

Les fuseaux de passage de la ligne de précontrainte et du câble illustré dans les deux graphiques ci-dessous montrent bien les deux points de tangence dictant la solution optimale obtenue.

### Fuseau de la ligne de Précontrainte

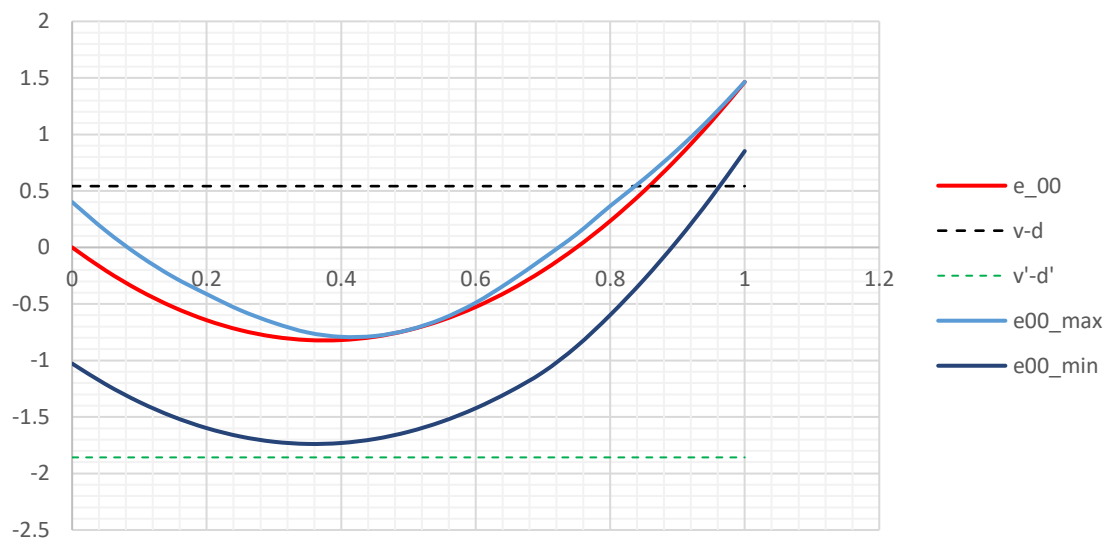


Figure 5.32 – Fuseau de passage de la ligne de précontrainte

### Fuseau de passage du câble

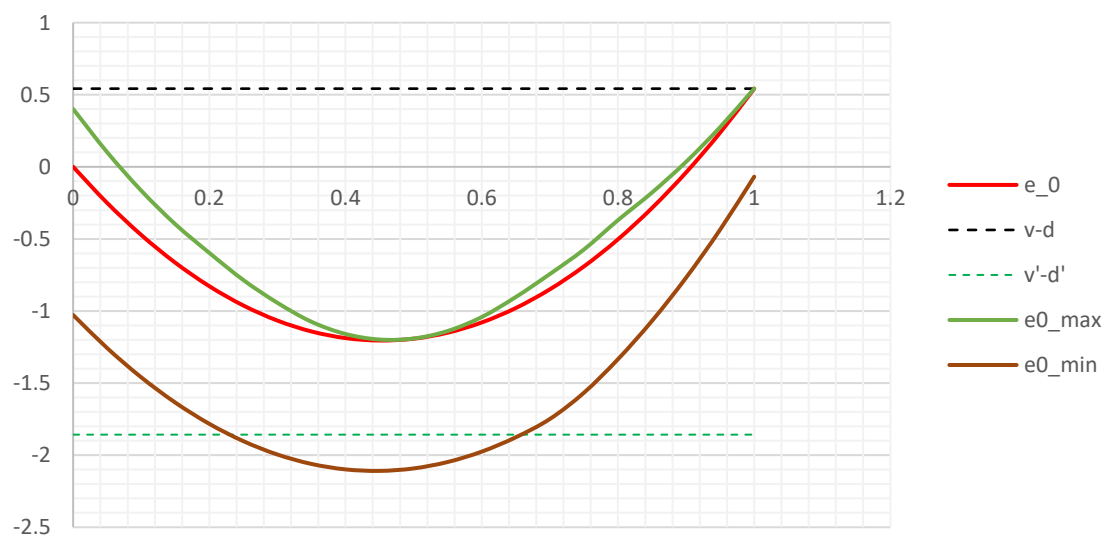


Figure 5.33 – Fuseau de passage du câble

### 3.5 Résolution par la méthode du Simplexe en deux phases

La méthode du Simplexe est une procédure itérative visant à améliorer une fonction objectif linéaire sous des contraintes d'inégalités affines (Press, et al., 1988-1992).

#### 3.5.1. Principe de l'algorithme du Simplexe

Il s'agit de trouver l'optimum d'une fonction à  $n$  variables sous  $m$  contraintes linéaires. Du fait de la linéarité des contraintes et de la fonction objectif, le domaine des solutions admissibles est obligatoirement convexe ; et l'optimum se trouve sur la frontière du domaine admissible. Ce domaine est un polyèdre délimité par les contraintes du problème.

La solution optimale étant forcément un sommet du polyèdre, l'objectif est de se déplacer sur la frontière du domaine en passant d'un sommet à un sommet adjacent permettant l'amélioration de la fonction objectif.

L'algorithme du Simplexe est basé sur le principe suivant : Si la fonction objectif n'atteint pas sa valeur minimale sur un sommet A, alors il existe une arête du polyèdre dont le point de départ est A et le long de laquelle la fonction objectif diminue jusqu'à atteindre un sommet adjacent.

#### 3.5.2. Principe de résolution

Le problème d'optimisation est transformé sous une forme standard avec normalisation des contraintes pour appliquer l'algorithme du Simplexe.

#### Forme standard d'un programme linéaire

$$\text{Fonction objectif} = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

$$\begin{aligned} \text{Contraintes:} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{aligned} \quad [5.49]$$

$$\text{Variables: } x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \text{ et } b_i \geq 0$$

Dans cette application, l'objectif est de minimiser la valeur de la fonction objectif. Toutes les contraintes doivent être des égalités, pour cela, une variable d'écart est retranchée pour toute contrainte du type  $\geq$  et une variable d'écart est ajoutée pour toute contrainte du type  $\leq$ .

Les termes du second membre des contraintes  $b_i$  sont tous positifs.

Une solution admissible d’un problème à  $n$  variables et  $m$  contraintes est toute solution respectant les limitations. Une solution est dite de base dans le cas où  $n - m$  variables sont mises à zéro et la résolution s’effectue pour le reste des variables. Les variables annulées sont les « variables hors base ». Les autres variables sont les « variables de base ».

L’algorithme débute par une solution de base admissible. Si le point de départ appartient à un domaine admissible, la solution de base est facile à trouver ; dans le cas contraire, il faudra changer de sommet pour trouver une solution admissible de départ.

La méthode du Simplexe dite en deux phases consiste à segmenter l’algorithme en deux phases : la première est dédiée à la recherche d’une solution de base admissible au problème, elle permet de confirmer donc qu’il existe un optimum ; la deuxième phase vise la recherche de cet optimum.

Des tableaux itératifs sont construits pour chaque phase ; à chaque itération, les variables de base sont permutées et la fonction objectif est évaluée. La procédure s’arrête lorsque la fonction objectif ne peut plus être améliorée.

Le détail de cette méthode avec des exemples d’application est donné en référence (Press, et al., 1988-1992).

### 3.5.3. Application de la méthode du Simplexe en deux phases

Le problème linéaire à résoudre est donné dans les équations [5.45], [5.46] et [5.52].

La poutre est divisée en 11 points de maillage afin de réduire le nombre de contraintes de 85 à 45. La réduction du nombre de points de maillage n’a pour but que la réduction du nombre de contraintes.

Les valeurs de  $m_1^*$ ,  $m_2^*$ ,  $m_3^*$  et  $m_4^*$  sont calculées pour chaque point.

Point	$\xi$	$\xi(\xi - 3/4)$	$m1^*$	$m2^*$	$m3^*$	$m4^*$
1	0	0	0,00	96,68	37,75	0,00
2	0,1	-0,065	-6,53	89,24	44,27	9,09
3	0,2	-0,11	-10,95	83,91	48,70	15,61
4	0,3	-0,135	-13,27	80,68	51,01	20,48
5	0,4	-0,14	-13,48	79,56	51,22	22,86
6	0,5	-0,125	-11,58	80,55	49,32	21,70
7	0,6	-0,09	-7,58	83,64	45,32	17,07
8	0,7	-0,035	-1,47	88,84	39,21	9,59
9	0,8	0,04	8,24	96,14	31,00	0,66
10	0,9	0,135	20,86	105,55	20,68	-8,87
11	1	0,25	36,05	117,07	8,25	-20,39

Tableau 5.15 - Points de maillage de la poutre

### Forme standard du problème

Les variables d’écart sont ajoutées ou retranchées pour transformer les contraintes d’inégalités en égalités.

Variables  $P_m$  et  $P_m v_2 \geq 0$

$$\text{Fonction objectif} = 1. P_m + 0. P_m v_2 \quad [5.50]$$

- Contraintes pour chacune des 11 valeurs de  $\xi$

$$\xi_i \left( \xi_i - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v' P_m - \mathbf{e}_{1,i} = m_1^*(\xi)$$

$$\xi_i \left( \xi_i - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v' P_m + \mathbf{e}_{2,i} = m_2^*(\xi)$$

[5.51]

$$-\xi_i \left( \xi_i - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v P_m + \mathbf{e}_{3,i} = m_3^*(\xi)$$

$$-\xi_i \left( \xi_i - \frac{3}{4} \right) P_m v_{,2} + \rho v P_m - \mathbf{e}_{4,i} = m_4^*(\xi)$$

- Contrainte indépendante de la position du point de calcul  $\xi$  de la poutre

$$v_{,2} + \mathbf{e}_5 = v - d + 2(v' - d') + 2 \sqrt{(v' - d')(h - d - d')} \quad [5.52]$$

Comme dans cette application, il existe des valeurs négatives de la variable  $P_m v_2$ , un changement de variable est effectué pour résoudre le problème avec des variables positives. Le changement de variable initial est appliqué à la solution obtenue pour retrouver les valeurs dans le plan d’origine.

Le problème est résolu sur un programme automatique.

### Résolution de l’application numérique

Les annotations suivantes sont considérées :

Variable X1 =  $P_m v_2$

Variable X2 =  $P_m$

Variables X3 à X47 sont les variables d’écart ajoutées ou retranchées aux contraintes

Fonction objectif

$$Z = 0 X1 + X2$$

Objectif : Minimiser Z

Contraintes

Contrainte 1	$0 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_3 = 0$
Contrainte 2	$0 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_4 = 96,68$
Contrainte 3	$0 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_5 = 37,75$
Contrainte 4	$0 X_1 - 0,4 X_2 + 1 X_6 = 0$
Contrainte 5	$0,065 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_7 = 58,53$
Contrainte 6	$-0,065 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_8 = 37,24$
Contrainte 7	$0,065 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_9 = 96,27$
Contrainte 8	$0,065 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{10} + 1 X_{48} = 61,09$
Contrainte 9	$0,11 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{11} = 98,95$
Contrainte 10	$0,11 X_1 - 1,03 X_2 - 1 X_{12} + 1 X_{49} = 4,09$
Contrainte 11	$0,11 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{13} = 136,7$
Contrainte 12	$0,11 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{14} + 1 X_{50} = 103,61$
Contrainte 13	$0,135 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{15} = 121,27$
Contrainte 14	$0,135 X_1 - 1,03 X_2 - 1 X_{16} + 1 X_{51} = 27,32$
Contrainte 15	$0,135 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{17} = 159,01$
Contrainte 16	$0,135 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{18} + 1 X_{52} = 128,48$
Contrainte 17	$0,14 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{19} = 125,48$
Contrainte 18	$0,14 X_1 - 1,03 X_2 - 1 X_{20} + 1 X_{53} = 32,44$
Contrainte 19	$0,14 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{21} = 163,22$
Contrainte 20	$0,14 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{22} + 1 X_{54} = 134,86$
Contrainte 21	$0,125 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{23} = 111,58$
Contrainte 22	$0,125 X_1 - 1,03 X_2 - 1 X_{24} + 1 X_{55} = 19,45$
Contrainte 23	$0,125 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{25} = 149,32$
Contrainte 24	$0,125 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{26} + 1 X_{56} = 121,7$
Contrainte 25	$0,09 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{27} = 79,58$
Contrainte 26	$-0,09 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_{28} = 11,64$
Contrainte 27	$0,09 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{29} = 117,32$
Contrainte 28	$0,09 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{30} + 1 X_{57} = 89,07$
Contrainte 29	$0,035 X_1 - 1,03 X_2 + 1 X_{31} = 29,47$
Contrainte 30	$-0,035 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_{32} = 60,84$
Contrainte 31	$0,035 X_1 + 0,4 X_2 + 1 X_{33} = 67,21$
Contrainte 32	$0,035 X_1 + 0,4 X_2 - 1 X_{34} + 1 X_{58} = 37,59$
Contrainte 33	$0,04 X_1 + 1,03 X_2 - 1 X_{35} + 1 X_{59} = 40,24$
Contrainte 34	$0,04 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_{36} = 128,14$
Contrainte 35	$0,04 X_1 - 0,4 X_2 - 1 X_{37} + 1 X_{60} = 1$
Contrainte 36	$0,04 X_1 - 0,4 X_2 + 1 X_{38} = 31,34$
Contrainte 37	$0,135 X_1 + 1,03 X_2 - 1 X_{39} + 1 X_{61} = 128,86$
Contrainte 38	$0,135 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_{40} = 213,55$
Contrainte 39	$0,135 X_1 - 0,4 X_2 - 1 X_{41} + 1 X_{62} = 87,32$
Contrainte 40	$0,135 X_1 - 0,4 X_2 + 1 X_{42} = 116,87$
Contrainte 41	$0,25 X_1 + 1,03 X_2 - 1 X_{43} + 1 X_{63} = 236,05$
Contrainte 42	$0,25 X_1 + 1,03 X_2 + 1 X_{44} = 317,07$
Contrainte 43	$0,25 X_1 - 0,4 X_2 - 1 X_{45} + 1 X_{64} = 191,75$
Contrainte 44	$0,25 X_1 - 0,4 X_2 + 1 X_{46} = 220,3$
Contrainte 45	$1 X_1 - 8,48053 X_2 + 1 X_{47} = 800$



Un tracé parabolique du câble de précontrainte est défini, et l'expression polynomiale de la ligne de précontrainte est déduite à partir de la transformation linéaire du câble qui correspond au moment hyperstatique de précontrainte.

La recherche de la force de précontrainte minimale revient à minimiser le long de la poutre l'écart entre les moments hyperstatiques obtenus à partir du tracé réel et la transformation linéaire définie en amont. La formulation analytique du problème d'optimisation conduit à des relations linéaires entre les contraintes et les variables ; ce qui peut être facilement résolu par la méthode du Simplexe. Le problème d'optimisation étant à deux variables, il est également résolu graphiquement dans un fichier Excel.

L'application de la méthode du simplexe sur un tracé parabolique dans le cas d'une poutre symétrique à 2 travées a permis l'obtention de la force de précontrainte optimale ainsi que les coefficients du polynôme définissant le profil du câble en se passant des méthodes usuelles.

Une application numérique est effectuée sur une poutre de pont en double T et à deux travées de longueur 36m chacune. La résolution par la méthode graphique et par la méthode du Simplexe sont abordées.

Dans la résolution graphique du problème, la poutre est divisée en 21 points de maillage, et un total de 85 contraintes est obtenu. Les 84 contraintes correspondantes aux inégalités fondamentales délimitent des quadrilatères tracés dans le plan  $(P_m, P_m v_2)$  et définissant chacun un domaine admissible. L'enveloppe de ces domaines est tronquée par la contrainte numéro 85, qui n'est autre que la condition d'enrobage. La solution optimale obtenue graphiquement est la force minimale de précontrainte qui respecte toutes les contraintes et correspond à un sommet du domaine admissible.

La méthode de résolution utilisée est le Simplexe en deux phases. La première phase permet de déterminer une solution de départ dans le cas où elle existe, et la deuxième phase consiste à résoudre le problème de minimisation en pivotant sur les sommets du domaine admissible pour aboutir à la solution optimale. Dans cette application, la poutre est divisée en 11 points de maillage ; résultant en 45 contraintes linéaires.

Les résultats obtenus par les deux méthodes sont identiques.

Il convient également de retrouver la force maximale de précontrainte par la même méthode, à partir de l'intersection des domaines admissibles du côté des abscisses maximales.

Cette démarche d'optimisation pourrait être appliquée pour chaque état limite de service séparément comme elle peut combiner tous les ELS tout en tenant compte de la variation de la force de précontrainte dans chaque état limite.



Il faudra noter que les pertes de précontrainte ne sont pas calculées dans cette application, elles sont estimées à une valeur forfaitaire appliquée à la force de précontrainte obtenue.

Finalement, la recherche de la valeur minimale de la force de précontrainte par la méthode du Simplexe peut également être appliquée à une poutre isostatique, elle n'apportera pas une valeur ajoutée sur la minimisation de la force de précontrainte, mais elle permettra de valider l'approche analytique développée.

# Chapitre 6

---

## Conclusion

---

### **1. Résumé du travail réalisé**

L'objectif principal du présent travail de recherche est l'optimisation du dimensionnement des ponts en béton précontraint. Le sujet est traité pour des poutres isostatiques et hyperstatiques.

#### **1.1 Synthèse bibliographique**

Une synthèse bibliographique est tout d'abord établie pour mettre en relief les travaux effectués par différents chercheurs sur ce sujet. Plusieurs méthodes d'optimisation sont employées pour le dimensionnement des ponts en béton précontraint. L'efficacité des techniques utilisées ainsi que les points forts et faibles sont exposées. Du fait de la complexité du problème d'optimisation résultant du nombre élevé de variables et de la non linéarité des contraintes, diverses hypothèses simplificatrices sont considérées dans les études réalisées. Ce chapitre montre ainsi l'intérêt du développement d'une méthode analytique de dimensionnement qui permet de faciliter la procédure d'optimisation et l'exploitation des résultats.

#### **1.2 Nouvelle règle des pivots en précontrainte totale et partielle**

Dans le cadre du développement d'une démarche analytique de dimensionnement facilement programmable, une nouvelle règle des pivots en béton précontraint, inspirée de la règle des pivots en béton armé est présentée ; elle est appliquée en précontrainte totale et partielle selon l'Eurocode 2. La nouvelle approche permet de définir un domaine admissible des valeurs de la force de précontrainte, représenté graphiquement, pour une section quelconque en béton précontraint. Ce domaine, tracé dans le plan  $(P, M^*)$ , peut correspondre à un seul état limite de service comme il peut également combiner plusieurs états limites simultanément. Une plage des valeurs admissibles de la force de précontrainte pour chaque état limite de service est obtenue.

L'application de cette règle en précontrainte partielle montre une extension du domaine admissible. La représentation graphique des domaines admissibles met en relief le gain obtenu dans la force minimale de précontrainte. Cette nouvelle approche permet également la formulation de la condition de coffrage en précontrainte partielle. La limitation de l'ouverture

des fissures imposée par l'Eurocode 2 en précontrainte partielle est transformée en une limitation des contraintes au niveau des aciers passifs par une corrélation détaillée.

La vérification de la section à l'état limite ultime est abordée d'une manière cohérente à l'approche développée pour le dimensionnement à l'ELS. Le principe de la vérification à l'ELU consiste à tracer le diagramme d'interaction correspondant à un pourcentage d'acier passif préalablement fixé, et de trouver la force de précontrainte nécessaire à la vérification de la section.

La résolution présentée permet le dimensionnement cohérent ainsi que la formulation de la condition de coffrage et des valeurs minimale et maximale de précontrainte pour une poutre totalement et partiellement précontrainte. Elle est applicable pour toute section à largeur variable par morceaux, notamment une section en té à talons ou en caisson, le plus souvent utilisée dans les ponts en béton précontraint. Une comparaison entre la méthode conventionnelle de dimensionnement et la nouvelle approche est effectuée pour montrer l'efficacité de la nouvelle démarche.

### **1.3 Résolution d'un ouvrage hyperstatique à inertie constante et variable**

Les résolutions conventionnelles des ponts hyperstatiques en béton précontraint s'effectuent en s'appuyant sur les logiciels aux éléments finis, qui fournissent des résultats tabulés et des cartographies, sans toutefois donner la formulation analytique et le suivi des étapes intermédiaires de calcul très utiles pour l'étude d'optimisation.

La démarche proposée dans ce travail pour la résolution des poutres hyperstatiques permet d'aborder des calculs relativement complexes par une approche analytique facilement programmable. Elle englobe toutes les étapes de dimensionnement. En effet, les équations décrivant chaque étape sont exprimées sous forme de fonctions polynomiales facilement dérivables et intégrables. Elle est développée pour les poutres à inertie constante et à hauteur continument variable.

Les propriétés géométriques de la section transversale de forme quelconque du pont, sont tout d'abord calculées. La méthode des foyers exprimée sous forme matricielle est employée pour le calcul des moments hyperstatiques. Les expressions analytiques des lignes d'influence du moment fléchissant et de l'effort tranchant sont déterminées sous forme polynomiale, ce qui permet d'obtenir par intégration les courbes enveloppes des sollicitations.

Dans le cas d'une poutre à inertie constante, les lignes d'influence sont exprimées par des polynômes de degré 3. Pour le cas de la poutre à inertie variable, l'ouvrage est divisé en un certain nombre de segments dépendant de la variation de la géométrie de la section transversale le long de l'ouvrage. Dans chacun des segments, l'inverse de la rigidité  $1/EI$  est approximée à un polynôme de degré 3 à l'aide des fonctions d'interpolation de type Spline.

Les lignes d'influence sont exprimées par des polynômes de degré 6. Les points de flèche maximale ainsi que les points nuls de la ligne d'influence sont calculés par la méthode de Muller.

Les expressions des lignes d'influence pour le cas d'un tandem de charges TS sont déterminées à partir de la sommation des expressions des lignes d'influence d'une charge concentrée décalées de l'espacement entre les roues du tandem. Cette méthode peut facilement être généralisée pour le cas d'une charge à plusieurs essieux.

La méthode de la matrice de transfert employée dans cette étude montre bien son efficacité pour le calcul des constantes mécaniques et des rotations sur appuis pour le calcul des moments hyperstatiques dans le cas d'un ouvrage à inertie variable.

Le dimensionnement de la force de précontrainte est effectué pour une poutre hyperstatique à inertie constante en respectant les conditions mécaniques de précontrainte. Le tracé du câble moyen est défini par une série de paraboles, dont trois en travées intermédiaires et deux en travées de rive. Les expressions correspondantes sont formulées sous forme d'équations polynomiales parfaitement compatibles avec le calcul des courbes enveloppes présenté.

Il faudra noter que le calcul des pertes de précontrainte n'est pas abordé dans cette étude, par contre une estimation des pertes de l'ordre de 20% est appliquée.

L'intérêt de cette démarche est de permettre au concepteur d'aborder des calculs relativement complexes pour le dimensionnement et prédimensionnement des ponts hyperstatiques, par une approche analytique facilement programmable, sans avoir recours aux méthodes numériques des éléments finis. Ceci permet également de contrôler toutes les étapes de calcul afin de pouvoir évaluer les possibilités d'optimisation.

#### **1.4 Optimisation d'une poutre précontrainte isostatique par les algorithmes génétiques**

L'optimisation d'une poutre isostatique d'un pont VIPP en Té à talon par les algorithmes génétiques est abordée. La démarche analytique de la règle des pivots présentée est transformée en algorithme et introduite dans le logiciel « scilab » sous forme de plusieurs fonctions.

Le problème d'optimisation se traduit par la minimisation du coût total de la section par mètre linéaire en respectant les contraintes géométriques imposées et les contraintes mécaniques aux ELS et à l'ELU selon l'Eurocode 2. L'algorithme est développé pour les cas de précontrainte totale et partielle. Les variables en jeu sont les dimensions de la section, la quantité d'armatures passives et la configuration du câblage.

La démarche analytique étant clairement exposée, les résultats sont facilement exploités. Ainsi, une étude paramétrique a été effectuée, et l'influence de chaque paramètre sur le dimensionnement de la section est analysée.

La comparaison entre les résultats en précontrainte totale et partielle montre une réduction significative de la force de précontrainte en partielle avec une légère réduction dans la surface de la section et le coût total.

L'approche détaillée est développée en considérant la force de précontrainte comme extérieure, elle pourrait être adaptée au cas de la précontrainte adhérente, et dans ce cas, un gain plus important dans la réduction de la force de précontrainte et dans le pourcentage d'armatures passives nécessaires pour la vérification de la flexion à l'ELU peut être obtenu.

### **1.5 Optimisation d'une poutre hyperstatique à deux travées symétriques par la méthode du Simplexe**

La résolution d'une poutre de pont à nervures en double T, hyperstatique à deux travées symétriques de longueur 36m, est effectuée en appliquant la méthode analytique proposée. L'optimisation est employée dans le but de rechercher la valeur minimale de précontrainte et les coefficients du polynôme du tracé du câble moyen. La formulation analytique de l'application conduit à un problème d'optimisation avec des relations linéaires entre les contraintes et les variables ; ce qui peut être facilement résolu par la méthode du Simplexe ou par la méthode graphique.

Un tracé parabolique du câble de précontrainte est défini. L'expression polynomiale de la ligne de précontrainte est déduite à partir de la transformation linéaire du câble qui correspond au moment hyperstatique de précontrainte. La recherche de la force de précontrainte minimale revient à minimiser le long de la poutre l'écart entre les moments hyperstatiques obtenus à partir du tracé réel et la transformation linéaire définie en amont.

La résolution graphique est effectuée sur un fichier Excel, la poutre est divisée en 21 points de maillage, et un total de 85 contraintes est obtenu. Les contraintes qui correspondent aux inégalités fondamentales de précontrainte délimitent des quadrilatères définissant un domaine admissible. La condition d'enrobage du câble vient tronquer le domaine ; et la solution optimale obtenue graphiquement correspond à la force minimale de précontrainte.

Par ailleurs, la méthode du Simplexe en deux phases est également employée. Le principe consiste à déterminer une solution de départ, dans la mesure où elle existe, dans une première phase ; et de résoudre le problème de minimisation en pivotant sur les sommets du domaine admissible dans une deuxième phase. Dans cette application, la poutre est divisée en 11 points de maillage ; résultant en 45 contraintes linéaires. Les résultats obtenus par les deux méthodes donnent presque la même valeur de précontrainte minimale.

## **2. Perspectives**

La procédure développée dans ce travail est reliée à un algorithme d'optimisation et programmée sur des logiciels de programmation scientifique. La démarche développée pourrait servir par la suite à élaborer des abaques de dimensionnement similaires à des diagrammes d'interaction, pour les poutres en précontrainte totale et partielle.

Le tracé du câble considéré dans la deuxième application numérique est défini par une seule parabole le long de la travée. Un tracé différent pourrait être étudié avec comparaison des résultats afin d'explorer la possibilité d'optimiser davantage la solution obtenue.

La démarche analytique proposée étant développée en considérant la force de précontrainte comme extérieure, une étude est prévue pour adapter la méthode au cas de la précontrainte adhérente. Ce travail a déjà débuté, et permet de témoigner d'un gain en force en précontrainte partielle. Il pourrait être implémenté d'une manière cohérente dans la procédure développée.

Ce travail de recherche tient compte des vérifications de flexion à l'état limite ultime, et des contraintes et limites de fissurations aux états limites de service. Il pourrait être complété par la vérification de la flexion transversale et des sollicitations de torsion de la section à inertie variable à l'état limite ultime.

L'application numérique effectuée est appliquée sur un pont en béton précontraint construit sur cintres. Il serait également intéressant d'appliquer la méthode proposée à des ponts construits par encorbellements successifs, et d'intégrer les phénomènes de phasage dans la procédure d'optimisation.

Finalement, l'évolution prévue de la procédure d'optimisation développée est l'adaptation de l'algorithme et des étapes de calcul analytique au cas général d'une poutre continue à  $n$  travées. L'objectif est le développement d'un outil numérique permettant l'optimisation des ponts hyperstatiques à  $n$  travées en béton précontraint, qu'ils soient construits sur cintres ou par encorbellements successifs, en employant la démarche analytique proposée.

# Références

- Abdel Nour Nadim [et al.]** Dimensioning of partially prestressed concrete beams, optimization of T-shaped section with heels [Revue]. - [s.l.] : Engineering Structures, 2021. - 112054 : Vol. 235.
- Al-Harthy A.S. et Frangopol D.M.** Integrating system reliability and optimization in prestressed concrete design [Revue] // Computers & structures. - 1997. - Vol. 64. - pp. 729-735.
- Alliot J.M. et Durand N.** Algorithmes génétiques. - 2005.
- Amedee S. et Francois-Gerard R.** Algorithmes génétiques. - 2004.
- Aoues Younes** Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures. - [s.l.] : Univesite Blaise Pascal-Clermont-Ferrand, 2012.
- Arfiadi Yoyong et Zebua Wiranata Alfian** Cross sections and prestressing forces optimizations of prestressed concrete beams [Conférence] // 11th World congress on structural and multidisciplinary optimization. - Sydney, Australia : [s.n.], 2015.
- Arreckx Sylvain** Méthodes sans factorisation pour l'optimisation non linéaire. - 2016.
- aut titre** [Article]. - 1995.
- Aydm Zekerya et Ayvaz Yusuf** Optimum topology and shape design of prestressed concrete bridge girders using genetic algorithms [Revue] // Struc Multidisc Optim. - 2010. - 41. - pp. 151-162.
- Barakat Samer, Bani-Hani Khaldoun et Taha Mohammed** Multi-Objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams [Revue] // Structural safety. - 2004. - Vol. 26. - pp. 311-342.
- Barakat Samer, Kallas Nabil et Taha Mohammed** Single objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams [Revue] // Computers & structures. - 2003. - Vol. 81. - pp. 2501-2512.
- Belahcene Abdelkader** Optimisation: programmation linéaire et non linéaire. - 2017.
- Belloufi Abderrahim** Optimisation du processus d'usinage à l'aide de la programmation non linéaire. - 2008.
- Bierlaire Michel** Introduction à l'optimisation différentiable [Livre]. - [s.l.] : Broché, 2006.
- Bouallagui Sarah** Techniques d'optimisation déterministe et stochastique pour la résolution de problèmes difficiles en cryptologie. - 2006.
- Cerda Victor, Cerda Juan Luis et Idris Abubakr** Optimization using the gradient and simplex methods [Revue] // Talanta. - 2016. - Vol. 148. - pp. 641-648.

**Charon Irene et Hudry Olivier** Optimisation non linéaire. - [s.l.] : Ecole supérieure des télécommunications.

**Collignan Arnaud** Méthodes d'optimisation et aide à la décision en conception mécanique. - 2011.

**Coulomb Jean-Louis** Optimisation. - 2002.

**Dhaenens C.** Optimisation Combinatoire Multi-Objectif : Apport des méthodes coopératives et contribution à l'extraction de connaissances. - [s.l.] : Université des Sciences et Technologie, Lille, 2005.

**Di Cesare Noëlie** Développement d'une nouvelle méthode métaheuristique pour l'optimisation topologique des structures et des métamatériaux [Revue] // Mécanique des matériaux, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard. - 2016.

**Dreo J. [et al.]** Métaheuristiques pour l'optimisation difficile. - [s.l.] : Eyrolles, 2003.

**Dreo Johann et Siarry Patrick** Métaheuristiques d'optimisation vues sous l'angle de l'échantillonnage de distribution [Revue] // Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA). - 2008. - 1 : Vol. 42. - pp. 9-30.

**El Dor Abbas** Perfectionnement des algorithmes d'optimisation par essaim particulaire. - [s.l.] : Université Paris-Est, 2012.

**El Semelawy M., Nassef A.O. et El Damatty A.A.** Design of prestressed concrete flat slab using modern heuristic optimization techniques [Revue] // Expert systems with applications. - 2012. - 39. - pp. 5758-5766.

**Erbatur F., Al Zaid R. et Dahman N.A.** Optimization and sensitivity of prestressed concrete beams [Revue] // Computers & Structures. - October 1992. - 5/6 : Vol. 45. - pp. 881-886.

**Fauchart Jacques** Exemples d'étude de tabliers de ponts courants en béton précontraint, coulés sur cintre [Revue] // Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics. - Mai 1968.

**Fereig S.M.** An application of linear programming to bridge design with standard prestressed girders [Revue] // Computers & Structures. - November 1994. - 4 : Vol. 50. - pp. 455-469.

**Françaises Normes** Eurocodes NF EN 1990, NF EN 1991, NF EN 1992, NA [Livre]. - 2007.

**Gans P. et Vacca A.** Application of the Davidon-Fletcher-Powell method to the calculation of stability constants [Revue] // Talanta. - 1974. - 1 : Vol. 21. - pp. 45-51.

**Garcia-Segura Tatiana et Yepes Victor** Multiobjective optimization of post-tensioned concrete box-girder road bridges considering cost, CO2 emissions, and safety [Revue] // Engineering structures. - 2016. - 125. - pp. 325-336.

**Govindaraj V. et Ramasamy J.V.** Optimum detailed design of reinforced concrete continuous beams using genetic algorithms [Revue] // Computers & Structures. - 2005. - 84. - pp. 34-48.



- Grierson E., Donald** Design optimization of civil engineering structures: a retrospective [Article]. - 1991.
- Hajji Omessaad** Contribution au développement de méthodes d'optimisation stochastiques.. - 2003.
- Hare Warren, Nutini Julie et Tesfamariam Solomon** A survey of non-gradient optimization methods in structural engineering [Revue] // Advances in engineering software. - March 2013. - 59. - pp. 19-28.
- Hedible C.** Algorithme génétique pour l'affectation de cellules à des commutateurs dans les réseaux mobiles. - [s.l.] : Ecole polytechnique de Montréal, 2000.
- Hernandez S. [et al.]** VTOP. An improved software for design optimization of prestressed concrete beams [Revue] // Advances in Engineering Software. - April 2010. - Vol. 41. - pp. 415-421.
- Kanagasundaram S. et Karihaloo B.L.** Minimum-cost reinforced concrete beams and columns [Revue] // Computers & structures. - 1991. - 3 : Vol. 41. - pp. 509-518.
- Kirsch U.** Two-level optimization of prestressed structures [Revue] // Engineering structures. - 1997. - 4 : Vol. 19. - pp. 309-317.
- Kirsch Uri** Optimized prestressing by linear programming [Revue] // International journal for numerical methods in engineering. - 1973. - 125-136 : Vol. 7.
- Kirsch Uri** Optimum design of prestressed beams [Revue] // Computers & Structures. - 1972. - Vol. 2. - pp. 573-583.
- Laurent Guillaume** Optimisation sans contrainte de fonction continues non linéaires. - 2012.
- Legendre Guillaume** Méthodes numériques, Introduction à l'analyse numérique et au calcul scientifique [Livre]. - [s.l.] : Université Paris Dauphine, 2017.
- Lemaire Maurice** Structural Reliability [Livre]. - [s.l.] : ISTE, 2009.
- M. Zemzami [et al.]** Application d'un modèle parallèle de la méthode PSO au problème de transport d'électricité [Revue] // ISTE Science Publishing. - 2016.
- Marti Jose V. [et al.]** Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing [Revue] // Engineering structures. - 2013. - 48. - pp. 342-352.
- Marti Jose V. et Gonzalez-Vidoza Fernando** Design of prestressed concrete precast pedestrian bridges by heuristic optimization [Revue] // Advances in engineering software. - 2010. - 41. - pp. 916-922.
- Marti Jose V., Yepes Victor et Garcia-Segura Tatiana** Heuristics in optimal detailed design of precast road bridges [Revue] // Archives of civil and mechanical engineering. - 2017. - 17. - pp. 738-749.

- Martinez-Martin Francisco [et al.]** Multi-objective optimization design of bridge piers with hybrid heuristic algorithms [Revue] // J Zhejiang Univ-Sci A (Appl Phys & Eng). - 2012. - 13 : Vol. 6. - pp. 420-432.
- Meyer Xavier** Etude et implémentation de l'algorithme du simplexe standard sur GPUs. - [s.l.] : Université de Genève, Faculté de sciences, 2011.
- N. Jozefowicz.** Optimisation combinatoire multi-objectif : des méthodes aux problèmes, de la Terre à (presque) la Lune. - [s.l.] : Institut National Polytechnique de Toulouse, 2013.
- Press William H. [et al.]** Numerical Recipes in C [Livre]. - [s.l.] : Cambridge University Press, 1988-1992.
- Quaranta Giuseppe, Fiore Alessandra et Marano Giuseppe Carlo** Optimum design of prestressed concrete beams using constrained differential evolution algorithm [Revue] // Struc Multidisc Optim. - 2014. - 49. - pp. 441-453.
- Rojas Jhojan Enrique** Méthodologie d'analyse de fiabilité basée sur des techniques heuristiques d'optimisation. - [s.l.] : INSA Rouen, 2008.
- Rondepierre Aude** Méthodes numériques pour l'optimisation non linéaire déterministes. - 2018.
- Saka M.P., Hasancebi O. et Geem Z.W.** Metaheuristics in structural optimization and discussions on harmony search algorithm [Revue] // Swarm and evolutionary computation. - January 2016. - pp. 88-97.
- Samartin Quiroga A. et Utrilla Arroyo M.A.** Optimization of prestressed concrete bridge [Revue] // Computers & Structures. - 1991. - 3 : Vol. 41. - pp. 553-559.
- SETRA** Poutres continues de hauteur variable tables numériques [Livre]. - Bagneux : Ministère de l'équipement et du logement SETRA, 1970.
- Shohel Rana [et al.]** Application of evolutionary operation to the minimum cost design of continuous prestressed concrete bridge structure [Revue] // Engineering structures. - 2013. - 46. - pp. 38-48.
- Smairi Nadia** Optimisation par essaim particulière : adaptation de tribes à l'optimisation multiobjectif. - [s.l.] : Université Paris-Est, 2013.
- Taha Hamdi** Operations Research an introduction [Livre]. - [s.l.] : Pearson Education, Inc, 2007.
- Widmer Marino** Les métaheuristiques: des outils performants pour les problèmes industriels [Conférence] // 3eme conference francophone de Modelisation et Simulation "Conception, analyse et gestion des systemes industriels". - Troyes, France : [s.n.], 2001.

# ANNEXE A

---

## Résolution d'une poutre hyperstatique par les tables de Marsac et comparaison des résultats avec la méthode analytique

---

### 1. Tables de Marsac

Les tables de Marsac sont des tables numériques publiées par le SETRA en 1970 (SETRA, 1970) dans le but de calculer rapidement les efforts et les déformées des poutres continues en béton de hauteur variable.

La poutre continue est définie dans chaque travée par les hauteurs sur appuis intermédiaires  $h_1$  et aux clés ou sur appuis extrêmes  $h_0$ .

La loi de variation de l'inertie retenue est donnée par la relation suivante, en comptant l'abscisse  $x$  du point d'inertie minimale

$$EI(x) = EI_0 \left( 1 + k \frac{x^2}{l^2} \right)^{5/2} \quad [\text{A. 1}]$$

Le coefficient  $k$  est donné par les tables de Marsac ou par la relation suivante

$$k = \frac{h_1}{h_0} - 1 = \left[ \frac{I_1}{I_0} \right]^{2/5} - 1 \quad [\text{A. 2}]$$

#### 1.1 Principe de lecture des tables

Les tables publiées considèrent deux cas :

- Travée courante symétrique
- Travée de rive avec une partie de hauteur constante

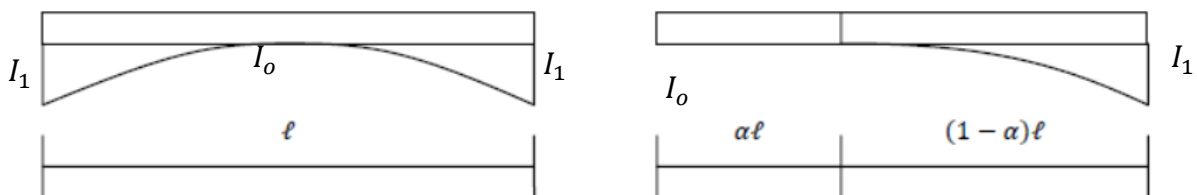
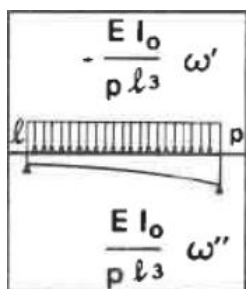


Figure A. 1 - Cas considérés par les tables de Marsac

En choisissant la table correspondante au cas considéré, pour chaque valeur du rapport  $I_0/I_1$ , les valeurs suivantes données :

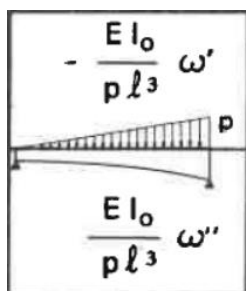
- Coefficient  $k$
- Coefficients de souplesse  $EI_0a/l$ ,  $EI_0b/l$  et  $EI_0c/l$
- Rotations isostatiques d'extrémité sous charge répartie de densité constante

*Symbole dans la table*



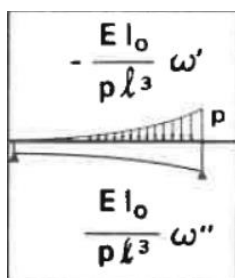
- Rotations isostatiques d'extrémité sous charge répartie de densité linéairement variable

*Symbole dans la table*



- Rotations isostatiques d'extrémité sous charge répartie de densité parabolique


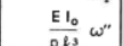
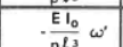
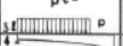
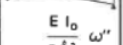
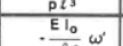
*Symbole dans la table*



### 1.2 Table de Marsac pour une travée de rive pour $\alpha = 0$

TRAVÉE DE RIVE

$\alpha = 0$

$\frac{l_0}{l_1}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
K	0,31950	0,44270	0,61860	0,90365	1,13580	1,33520	1,51190	1,74640	2,08136	2,31450	2,62390	3,06580	3,78175	5,30960
$\frac{E I_0}{\ell} a$	0,3103	0,3029	0,2934	0,2802	0,2709	0,2637	0,2579	0,2509	0,2420	0,2364	0,2296	0,2210	0,2092	0,1898
$\frac{E I_0}{\ell} b$	0,1350	0,1261	0,1153	0,1015	0,0927	0,0863	0,0814	0,0757	0,0689	0,0649	0,0603	0,0548	0,0478	0,0378
$\frac{E I_0}{\ell} c$	0,2199	0,1924	0,1619	0,1269	0,1068	0,0934	0,0837	0,0732	0,0616	0,0552	0,0483	0,0407	0,0319	0,0210
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,03610	0,03440	0,03228	0,02943	0,02750	0,02607	0,02494	0,02360	0,02195	0,02095	0,01976	0,01831	0,01641	0,01351
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,03142	0,02864	0,02537	0,02133	0,01882	0,01706	0,01574	0,01424	0,01251	0,01151	0,01038	0,00908	0,00751	0,00538
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,03197	0,03053	0,02873	0,02630	0,02464	0,02340	0,02242	0,02125	0,01981	0,01893	0,01789	0,01661	0,01492	0,01233
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,02587	0,02370	0,02114	0,01793	0,01592	0,01450	0,01342	0,01219	0,01076	0,00993	0,00900	0,00791	0,00657	0,00475
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,02085	0,02004	0,01901	0,01759	0,01661	0,01587	0,01527	0,01456	0,01367	0,01312	0,01247	0,01166	0,01057	0,00886
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,01438	0,01329	0,01199	0,01034	0,00929	0,00854	0,00797	0,00731	0,00653	0,00607	0,00555	0,00493	0,00416	0,00309

Activate wind  
Go to Settings to a

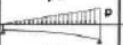
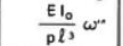
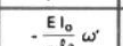
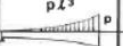
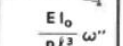
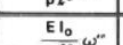
$\frac{l_0}{l_1}$	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,12	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
K	0,31950	0,44270	0,61860	0,90365	1,13580	1,33520	1,51190	1,74640	2,08136	2,31450	2,62390	3,06580	3,78175	5,30960
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,01656	0,01569	0,01461	0,01319	0,01223	0,01153	0,01098	0,01033	0,00953	0,00905	0,00849	0,00781	0,00693	0,00560
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,01642	0,01487	0,01306	0,01084	0,00948	0,00854	0,00783	0,00703	0,00612	0,00560	0,00502	0,00435	0,00355	0,00249
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,00935	0,00883	0,00819	0,00734	0,00678	0,00636	0,00604	0,00566	0,00521	0,00493	0,00461	0,00422	0,00372	0,00298
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,01011	0,00911	0,00795	0,00654	0,00569	0,00509	0,00465	0,00416	0,00360	0,00328	0,00292	0,00252	0,00204	0,00141
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega'$	0,01340	0,01276	0,01197	0,01096	0,01029	0,00980	0,00942	0,00897	0,00843	0,00811	0,00773	0,00727	0,00666	0,00575
 $\frac{E I_0}{p \ell^3} \omega''$	0,00707	0,00671	0,00627	0,00571	0,00534	0,00508	0,00487	0,00463	0,00434	0,00416	0,00396	0,00372	0,00340	0,00292

Figure A. 2 – Table de Marsac pour une travée de rive  $\alpha = 0$

## 2. Calcul par la méthode analytique proposée au Chapitre 4

En posant

$$\lambda = \frac{I_0}{I_1} \quad [\text{A. 3}]$$

Le coefficient  $k$  devient

$$k = \frac{1}{\lambda^{2/5}} - 1 \quad [\text{A. 4}]$$

Les intégrales  $S_i$  définies en fonction de  $k$  et de  $x$  pour aborder le calcul polynomial sont données par les relations suivantes

$$S_0(k, x) = \int_0^x \frac{ds}{(1 + ks^2)^{5/2}} = \frac{x(3 + 2kx^2)}{3(1 + kx^2)^{3/2}}$$

$$S_1(k, x) = \int_0^x \frac{sds}{(1 + ks^2)^{5/2}} = \frac{1}{3k} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + kx^2)^{3/2}} \right] \quad [\text{A. 5}]$$

$$S_2(k, x) = \int_0^x \frac{s^2 ds}{(1 + ks^2)^{5/2}} = \frac{x^3}{3(1 + kx^2)^{3/2}}$$

En retenant comme paramètre le ratio entre inertie minimale et maximale, les intégrales deviennent

$$S_0(\lambda, 1) = \frac{(2 + \lambda^{2/5})\lambda^{1/5}}{3} \quad S_1(\lambda, 1) = \frac{(2 + \lambda^{3/5})\lambda^{2/5}}{3(1 - \lambda^{2/5})} \quad S_2(\lambda, 1) = \frac{\lambda^{3/5}}{3}$$

$$S_3(\lambda, 1) = \frac{(2 - 3\lambda^{1/5} + \lambda^{3/5})\lambda^{4/5}}{3(1 - \lambda^{2/5})}$$

$$S_4(\lambda, 1) = \frac{\lambda}{(1 - \lambda^{2/5})^{5/2}} \left[ \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \lambda^{2/5}}}{\lambda^{1/5}} \right) - \frac{4 - \lambda^{2/5}}{3\sqrt{1 - \lambda^{2/5}}} \right] \quad [\text{A. 6}]$$

$$S_5(\lambda, 1) = \frac{\lambda(3 - 8\lambda^{1/5} + 6\lambda^{2/5} - \lambda^{4/5})}{3(1 - \lambda^{2/5})^3}$$

## 2.1 Coefficients de souplesse

Les coefficients de souplesse de la méthode de foyer sont déterminés à partir des intégrales  $S_i$ .

$$\frac{EI_0 a}{l} = S_0 - 2S_1 + S_2 \quad \frac{EI_0 b}{l} = S_1 - S_2 \quad \frac{EI_0 c}{l} = S_2 \quad [\text{A. 7}]$$

Ce qui donne le tableau suivant

$\lambda$	$EI_0 a/l$	$EI_0 b$	$EI_0 c$
0,5	0,3103	0,1351	0,2199
0,4	0,3029	0,1261	0,1924
0,3	0,2934	0,1153	0,1619
0,2	0,2801	0,1015	0,1269
0,15	0,2708	0,0927	0,1068
0,12	0,2637	0,0863	0,0934
0,1	0,2579	0,0814	0,0837
0,08	0,2509	0,0757	0,0732
0,06	0,2420	0,0689	0,0616
0,05	0,2364	0,0649	0,0552
0,04	0,2296	0,0603	0,0483
0,03	0,2210	0,0548	0,0407
0,02	0,2092	0,0478	0,0319
0,01	0,1898	0,0378	0,0210

Tableau A.1 - Coefficients de souplesse obtenus par la méthode proposée

## 2.2 Rotations isostatiques à droite et à gauche de la travée

Pour une charge répartie de la forme

$$p(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^n \quad [\text{A. 8}]$$

Le moment sera donné par

$$m(x) = \frac{lx}{(n+1)(n+2)} \left(1 - \frac{x^{n+2}}{l^{n+2}}\right) \quad [\text{A. 9}]$$

Les rotations à droite et à gauche seront obtenues par les relations suivantes

$$w_g = \frac{l^3 [S_1 - S_2 - S_{n+2} + S_{n+3}]}{(n+1)(n+2) E I_0} \quad [\text{A. 10}]$$

$$w_d = \frac{l^3 [S_2 - S_{n+3}]}{(n+1)(n+2) E I_0}$$

Ce qui donne le tableau suivant

$\lambda$	Charge constante		Charge linéaire		Charge parabolique	
	$\omega_g$	$\omega_d$	$\omega_g$	$\omega_d$	$\omega_g$	$\omega_d$
0,50	0,03610	0,03143	0,01656	0,01643	0,00935	0,01011
0,40	0,03440	0,02864	0,01569	0,01487	0,00883	0,00911
0,30	0,03228	0,02537	0,01462	0,01306	0,00819	0,00795
0,20	0,02943	0,02133	0,01319	0,01084	0,00734	0,00654
0,15	0,02751	0,01882	0,01224	0,00948	0,00678	0,00569
0,12	0,02608	0,01706	0,01153	0,00854	0,00636	0,00509
0,10	0,02494	0,01574	0,01098	0,00783	0,00604	0,00465
0,08	0,02360	0,01424	0,01033	0,00704	0,00566	0,00416
0,06	0,02195	0,01251	0,00953	0,00612	0,00521	0,00360
0,05	0,02095	0,01151	0,00906	0,00560	0,00493	0,00328
0,04	0,01977	0,01038	0,00850	0,00502	0,00461	0,00292
0,03	0,01832	0,00908	0,00781	0,00435	0,00422	0,00252
0,02	0,01641	0,00751	0,00693	0,00355	0,00372	0,00204
0,01	0,01351	0,00538	0,00561	0,00249	0,00298	0,00141

Tableau A.2 – Rotations d'extrémité obtenues par la méthode proposée

### **3. Comparaison des résultats des deux méthodes**

En comparant les valeurs des coefficients de souplesse (Tableau A.1) et les rotations isostatiques d'extrémité pour une charge constante, linéaire et parabolique (Tableau A.2) aux valeurs données par les tables de Marsac dans la Figure A.2, nous retrouvons pratiquement les mêmes valeurs.

Les résultats de la méthode analytique proposée correspondent bien aux mêmes résultats des tables numériques de Marsac publiées par le SETRA.



# ANNEXE B

---

## Interpolation cubique par la fonction Spline

---

### 1. Introduction

L'interpolation cubique par Spline permet de construire un polynôme de degré 3 sur un intervalle donné en interpolant les valeurs de la fonction et de sa dérivée aux bornes de l'intervalle.

Une Spline cubique est une fonction polynomiale de classe  $C^2$ , de degré au plus 3 sur son intervalle de définition définie par sa valeur et la valeur de sa dérivée en un certain nombre de points. La fonction repose sur la détermination de 4 fonctions de bases chacune de degré 3 formant le polynôme final.

Elle peut dès lors être analysée comme une combinaison linéaire de 4 fonctions élémentaires qui sont chacune un polynôme de degré 3.

### 2. Principe de la méthode

Soit la fonction  $f(x)$  définie sur un intervalle de longueur  $l$ , avec l'abscisse  $x$  comptée à partir du début de l'intervalle.

$$f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l^2} + a_3 \frac{x^3}{l^3} \quad [\text{B. 1}]$$

$$f'(x) = \frac{a_1}{l} + 2 \frac{a_2}{l^2} x + 3 \frac{a_3}{l^3} x^2$$

Les valeurs  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f(l)$  et  $f'(l)$  sont supposées connues.

Les coefficients  $a_i$  sont donnés par les relations suivantes

$$a_0 = f(0) \quad a_1 = l f'(0)$$

$$a_2 + a_3 = f(l) - f(0) - l f'(0) \quad [\text{B. 2}]$$

$$2a_2 + 3a_3 = l f'(l) - l f'(0)$$

Les valeurs obtenues

$$a_0 = f(0) \quad a_1 = l f'(0) \quad [\text{B. 3}]$$

$$a_2 = -3 f(0) + 3 f(l) - 2lf'(0) - lf'(l)$$

$$a_3 = 2f(0) - 2f(l) + lf'(0) + lf'(l)$$

Ce qui donne les quatre solutions élémentaires

Solution 1	$f(0) = 1$	$f(l) = lf'(0) = lf'(l) = 0$	
Solution 2	$f(l) = 1$	$f(0) = lf'(0) = lf'(l) = 0$	
Solution 3	$lf'(0) = 1$	$f(0) = f(l) = lf'(l) = 0$	[B. 4]
Solution 4	$lf'(l) = 1$	$f(0) = f(l) = lf'(0) = 0$	

En remplaçant les expressions des coefficients  $a_i$  dans  $f(x)$  :

$$f(x) = f(0)f_1\left(\frac{x}{l}\right) + f(l)f_2\left(\frac{x}{l}\right) + lf'(0)f_3\left(\frac{x}{l}\right) + lf'(l)f_4\left(\frac{x}{l}\right) \quad [\text{B. 5}]$$

Avec

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (1-x)^2(1+2x) \\ f_2(x) &= x^2(3-2x) \\ f_3(x) &= x(1-x)^2 \\ f_4(x) &= x^2(1-x) \end{aligned} \quad [\text{B. 6}]$$

### **3. Ajustement de la fonction Spline sur une fonction définie par points**

Les caractéristiques géométriques d'une section à inertie variable, dont la valeur de  $1/EI$  utilisée dans le Chapitre 4, sont définies par points. Le but est de les transformer en fonctions polynomiales en utilisant la fonction Spline cubique.

La poutre est divisée en plusieurs segments, en fonction de la variation de la hauteur.

Le principe de la méthode consiste à évaluer les valeurs suivantes pour chaque segment :

$$\begin{aligned} y_0 &= f(0) \text{ du premier segment} \\ y_1 &= f(l) \text{ du premier segment} = f(0) \text{ du deuxième segment} \\ y_2 &= f(l) \text{ du deuxième segment} \end{aligned} \quad [\text{B. 7}]$$

Puis les valeurs des dérivées

$$\begin{aligned}
w_0 &= f'(0) \text{ du premier segment} \\
w_1 &= f'(l) \text{ du premier segment} = f'(0) \text{ du deuxième segment} \\
w_2 &= f'(l) \text{ du deuxième segment}
\end{aligned}
\tag{B. 8}$$

Chaque segment est divisé en plusieurs pas, et pour chaque pas noté  $s$  du segment, les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  sont évaluées.

Le problème revient alors à résoudre la régression linéaire suivante

$$f(s) = f(0)f_1\left(\frac{s}{l}\right) + f(l)f_2\left(\frac{s}{l}\right) + lf'(0)f_3\left(\frac{s}{l}\right) + lf'(l)f_4\left(\frac{s}{l}\right) \tag{B. 9}$$

$s$  allant de 0 à 1

Et  $f(s)$  représente la valeur de la caractéristique géométrique : Aire, Inertie, positions des fibres extrêmes, et notamment la fonction  $1/EI$ .

Sous forme d'écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ \dots \\ f(s) \\ \dots \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\left(\frac{0}{l}\right) & f_2\left(\frac{0}{l}\right) & f_3\left(\frac{0}{l}\right) & f_4\left(\frac{0}{l}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1\left(\frac{s}{l}\right) & f_2\left(\frac{s}{l}\right) & f_3\left(\frac{s}{l}\right) & f_4\left(\frac{s}{l}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1\left(\frac{1}{l}\right) & f_2\left(\frac{1}{l}\right) & f_3\left(\frac{1}{l}\right) & f_4\left(\frac{1}{l}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f(0) \\ f(l) \\ lf'(0) \\ lf'(l) \end{pmatrix} \tag{B. 10}$$

Finalement, les valeurs des coefficients  $a_i$  sont calculées à partir de l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, et la fonction polynomiale est donc définie.

$$f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{l} + a_2 \frac{x^2}{l^2} + a_3 \frac{x^3}{l^3} \tag{B. 11}$$

# ANNEXE C

---

## Approximation quadratique par la méthode de Muller et la méthode de Laguerre

---

### 1. Méthode de Muller

La méthode consiste à effectuer une approximation quadratique à partir du développement de Taylor (Legendre, 2017).

Développement de Taylor en un point  $x_0$

$$P(x) = P(x_0) + (x - x_0)P'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}P''(x_0) \quad [\text{C. 1}]$$

Deux évaluations des racines sont obtenues

$$x = x_0 - \frac{P'(x_0) \pm \sqrt{P'^2(x_0) - 2P(x_0)P''(x_0)}}{P''(x_0)} \quad [\text{C. 2}]$$

En posant

$$G(x_0) = \frac{P'(x_0)}{P(x_0)} \quad H(x_0) = \frac{P'^2(x_0)}{P^2(x_0)} - 2\frac{P''(x_0)}{P(x_0)} \quad [\text{C. 3}]$$

La valeur la plus proche est retenue selon le signe de G

$$x_1 = x_0 - \frac{2}{G(x_0) \pm \sqrt{H(x_0)}} \quad [\text{C. 4}]$$

Et les itérations continuent jusqu'à convergence

Notons que dans cette méthode, il faudra avoir

$$P'(x_0) \geq 2P(x)P''(x) \quad [\text{C. 5}]$$

## 2. Méthode de Laguerre

Au voisinage d'une racine simple, un polynôme peut être approché par un produit de la forme

$$P(x) = (x - a)(x - b)^{n-1} \quad [\text{C. 6}]$$

Les dérivées premières et secondes s'expriment donc sous la forme

$$P'(x) = [n(x - a) + a - b](x - b)^{n-2} \quad [\text{C. 7}]$$

$$P''(x) = (n - 1)[n(x - a) + 2(a - b)](x - b)^{n-3}$$

En posant

$$G(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{n(x - a) + a - b}{(x - a)(x - b)} \quad [\text{C. 8}]$$

$$H(x) = (n - 1) \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} - n \frac{P''(x)}{P(x)} = \frac{(n - 1)(a - b)^2}{(x - a)^2(x - b)^2}$$

Et  $\delta = x - a$

$$G(x) = \frac{n\delta + a - b}{\delta(\delta + a - b)} \quad H(x) = \frac{(n - 1)(a - b)^2}{\delta^2(\delta + a - b)^2} \quad [\text{C. 9}]$$

A partir de ces deux équations, nous obtenons

$$a - b = \frac{\delta[\delta G(x) - n]}{1 - \delta G(x)} \quad H(x) = \frac{[\delta G(x) - n]^2}{(n - 1)\delta^2} \quad [\text{C. 10}]$$

D'où

$$\delta = \frac{n}{G(x) \pm \sqrt{(n - 1)H(x)}} \quad [\text{C. 11}]$$

A partir d'un point où  $P(x) \neq 0$ , nous pouvons trouver une estimation d'une racine

$$a = x - \frac{n}{G(x) \pm \sqrt{(n - 1)H(x)}} \quad [\text{C. 12}]$$

Nous retenons celle des deux solutions pour laquelle  $|x - a|$  est minimal c'est-à-dire que nous donnons à la racine carrée le signe de  $G(x)$ . Et lorsque le dénominateur devient trop grand en valeur absolue, ou  $P(x)$  trop petit, nous retenons  $a = x$

Notons que dans cette méthode, il faudra avoir

$$P'^2(x) \geq 2P(x)P''(x) \quad [\text{C. 13}]$$

La méthode de Laguerre est donc plus robuste que la méthode de Muller pour des polynômes de degré supérieur ou égal à 3.

# ANNEXE D

---

## Transformation de la section en caisson en une section à largeur linéairement variable par morceau

---

### 1. Introduction

Cette annexe détaille la démarche analytique développée pour la transformation d'une section en caisson en une section à largeur  $b$  variable par morceaux tout en conservant les mêmes propriétés mécaniques. La démarche proposée consiste à appliquer un changement de repère en se basant sur la notion du produit vectoriel pour le calcul des aires et largeur équivalente de chaque triangle élémentaire. Les propriétés mécaniques sont exprimées par des fonctions polynômiales et peuvent être calculées par intégration successive. Cette méthode pourrait être également appliquée pour toute section à contour fermé.

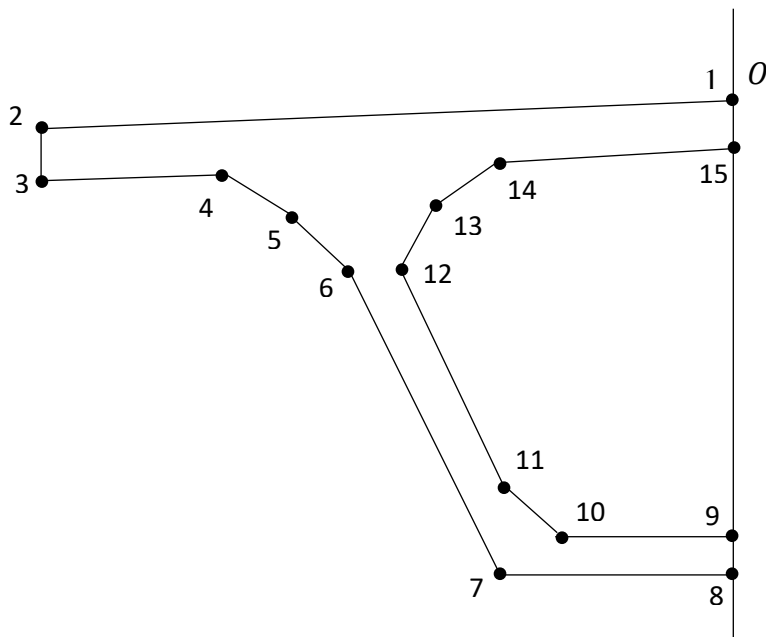


Figure D. 1 - Section en caisson

## 2. Démarche proposée

### 2.1 Maillage

Pour une section en caisson, un maillage de  $n = 15$  points est considéré pour la définition du contour.

Point	$X$	$Y$
1	$x_1$	$y_1$
2	$x_2$	$y_2$
--	--	--
--	--	--
--	--	--
14	$x_{14}$	$y_{14}$
15	$x_{15}$	$y_{15}$

Tableau D. 1 – Définition du contour de la section

### 2.2 Définition d'un triangle courant

Un nombre de  $n - 2 = 13$  triangles élémentaires ayant un sommet commun  $O$  (origine du repère projeté) est considéré.

Un triangle  $(1, k, k + 1)$  est défini par un sommet (pivot/origine du repère projeté) et 2 points  $k$  et  $k + 1$

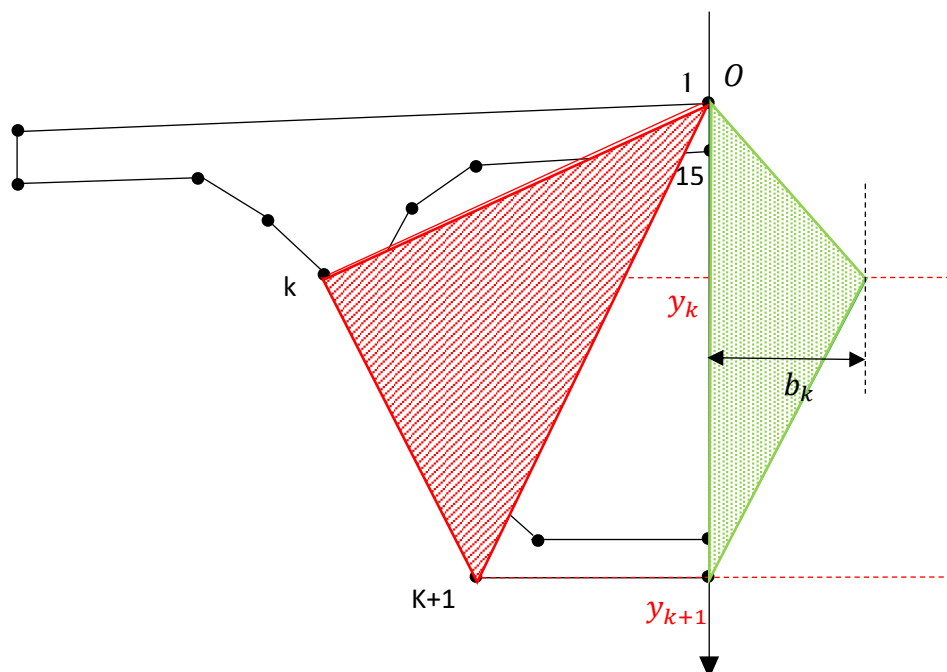


Figure D. 2 - Triangle courant

La surface du triangle courant dans le repère initial est calculée à partir du produit vectoriel :



$$A_{triangle} = \frac{\vec{OA_k} \wedge \vec{OA_{k+1}}}{2} \quad A_{triangle} = \frac{x_k y_{k+1} - y_k x_{k+1}}{2} \quad [D. 1]$$

avec :

Point	Abscisse	Ordonnée
$A_k$	$x_k$	$y_k$
$A_{k+1}$	$x_{k+1}$	$y_{k+1}$

Tableau D. 2 – Définition d'un triangle élémentaire

Dans le repère projeté, la surface du triangle courant est conservée et elle est calculée à partir de la formule suivante :

$$A_k = \frac{b_k \times \max(y_k; y_{k+1})}{2} \quad [D. 2]$$

La largeur du triangle courant dans le repère projeté est ainsi déduite :

$$b_k = \frac{2A_k}{\max(y_k; y_{k+1})} \quad [D. 3]$$

### 2.3 Maillage d'un triangle élémentaire dans le repère projeté

Dans le repère projeté, le triangle élémentaire est divisé en deux segments de largeur linéairement variable.

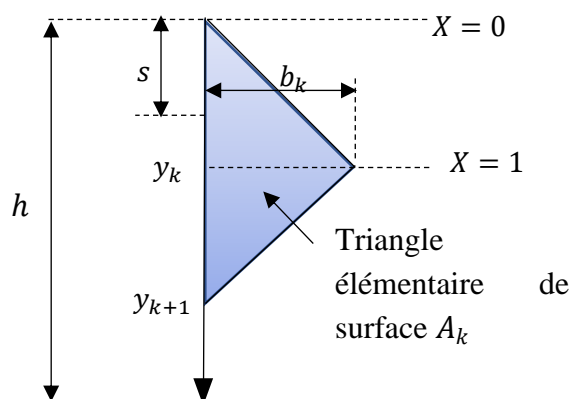


Figure D. 3 - Triangle courant dans le repère projeté

$y_0$	$y_1$	$b_0$	$b_1$
0	$\min(y_k; y_{k+1})$	0	$b_k$
$\min(y_k; y_{k+1})$	$\max(y_k; y_{k+1}) - \min(y_k; y_{k+1})$	$b_k$	$-b_k$
$\max(y_k; y_{k+1})$	$h - \min(y_k; y_{k+1})$	0	0

Tableau D. 3 – Maillage d'un triangle élémentaire

avec :

$b_0$ : largeur début segment

$b_1$  : variation de la largeur entre début et fin segment

$y_0$  : ordonnée début segment

$y_1$  : longueur segment

Pour chacun des segments, la largeur  $b(s)$  sera définie par l'équation linéaire suivante :

$$b(s) = b_0 + Xb_1 \quad [D. 4]$$

Avec  $0 \leq X \leq 1$  entre les bornes des segments du triangle élémentaire.

## 2.4 Redéfinition des polynômes élémentaires dans le maillage global

La première étape consiste à définir le maillage global de la section. Un indice est attribué à chacun des points du maillage tout en éliminant les points doubles.

Les points ayant la même ordonnée  $y$  sont considérés comme points doubles et seront éliminés.

Segment	$y_{\text{début}}$	$L_{\text{segment}}$
1	0	$l_1$
--	--	--
$i$	--	$l_i$
--	--	--
$n$	--	$l_n$

Tableau D. 4 – Maillage global de la section

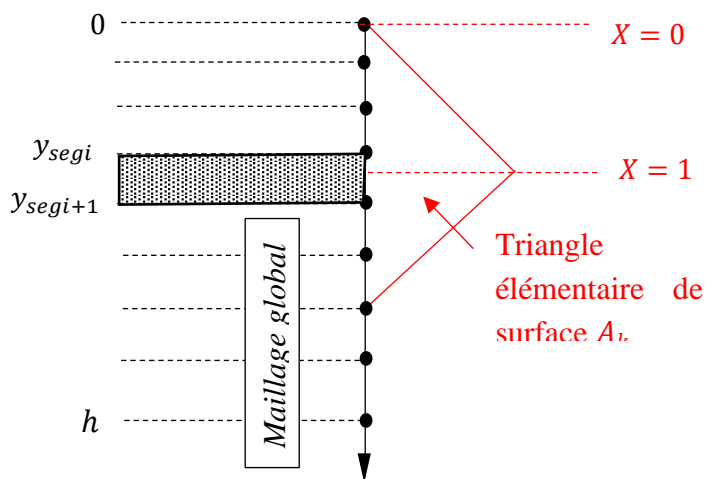


Figure D. 4 - Changement de variable

Le but cette redéfinition des polynômes est de déterminer les équations de la variation de la largeur  $b$  de chaque segment du triangle courant en fonction d'une variable  $0 \leq \xi \leq 1$  entre les bornes des segments du maillage global définis dans le tableau précédent.

Polynôme initial :

$$b(\chi) = c_0 + c_1\chi \quad [D. 5]$$

$$\chi = \frac{x}{l} = \frac{x_0}{l} + \xi \frac{x_1}{l}, \text{ changement de variables}$$

avec:

$x_0$  : début segment

$x_1$  : longueur segment

Polynôme résultant :

$$\begin{aligned} b(\xi) &= b_0 + b_1 \xi \\ b_0 &= c_0 + c_1 \frac{x_0}{l} \quad b_1 = \frac{c_1 x_1}{l} \end{aligned} \quad [\text{D. 6}]$$

L'équation générale de la variation de la largeur  $b$  le long de chaque segment du maillage global sera obtenue à partir de la sommation de toutes les équations correspondantes à chacun des triangles élémentaires exprimées en fonction de  $\xi$ .

Segment	$y_{\text{début}}$	$L_{\text{segment}}$	$b_0$	$b_1$	$A_k$
1	0	$l_1$			
2	--	--			
--	--	--			
$i$	--	$l_i$			
--	--	--			
$n$	--	$l_n$			
				$A_{\text{totale}}$	$\sum_{k=1}^n A_k$

Tableau D. 5 – Polynôme définissant la largeur  $b$

### 3. Résultats

A partir de cette transformation en une section à largeur variable linéairement par morceaux, les différentes propriétés mécaniques (aire, moment statique et inertie) sont facilement exprimées par des fonctions polynômiales et peuvent être obtenues par intégration successives :

$$\begin{aligned} b(\xi) &= b_0 + b_1 \xi \\ A(\xi) &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \\ S(\xi) &= s_0 + s_1 \xi + s_2 \xi^2 + s_3 \xi^3 \\ I(\xi) &= I_0 + I_1 \xi + I_2 \xi^2 + I_3 \xi^3 + I_4 \xi^4 \end{aligned} \quad [\text{D.7}]$$

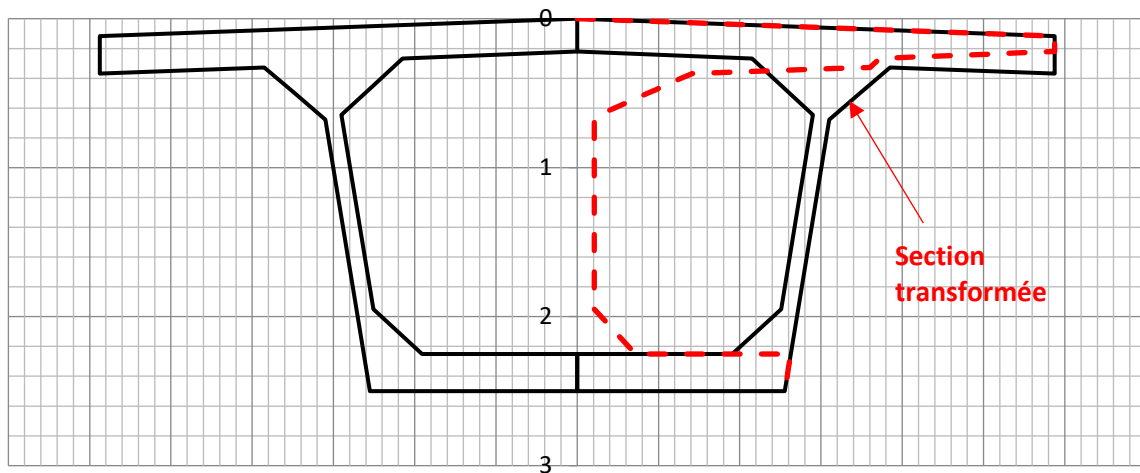


Figure D. 5 - Section en caisson transformée

### Variation de l'aire en fonction de x

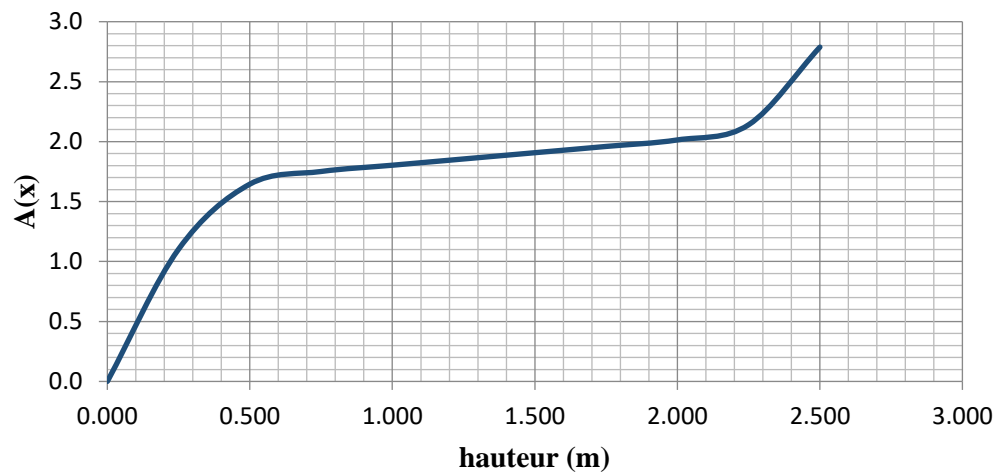


Figure D. 6-Variation de l'aire en fonction de x

### Variation du moment statique en fonction de x

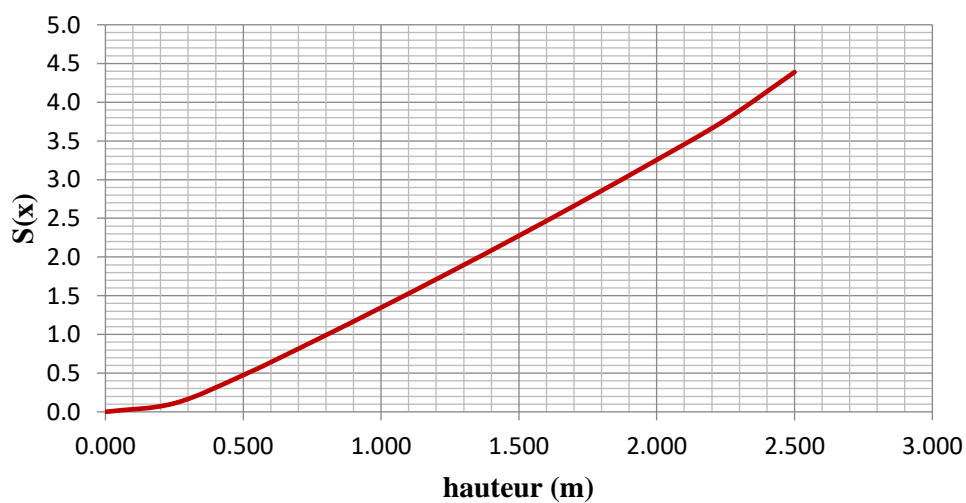


Figure D. 7-Variation du moment statique en fonction de x

### Variation de l'inertie en fonction de x

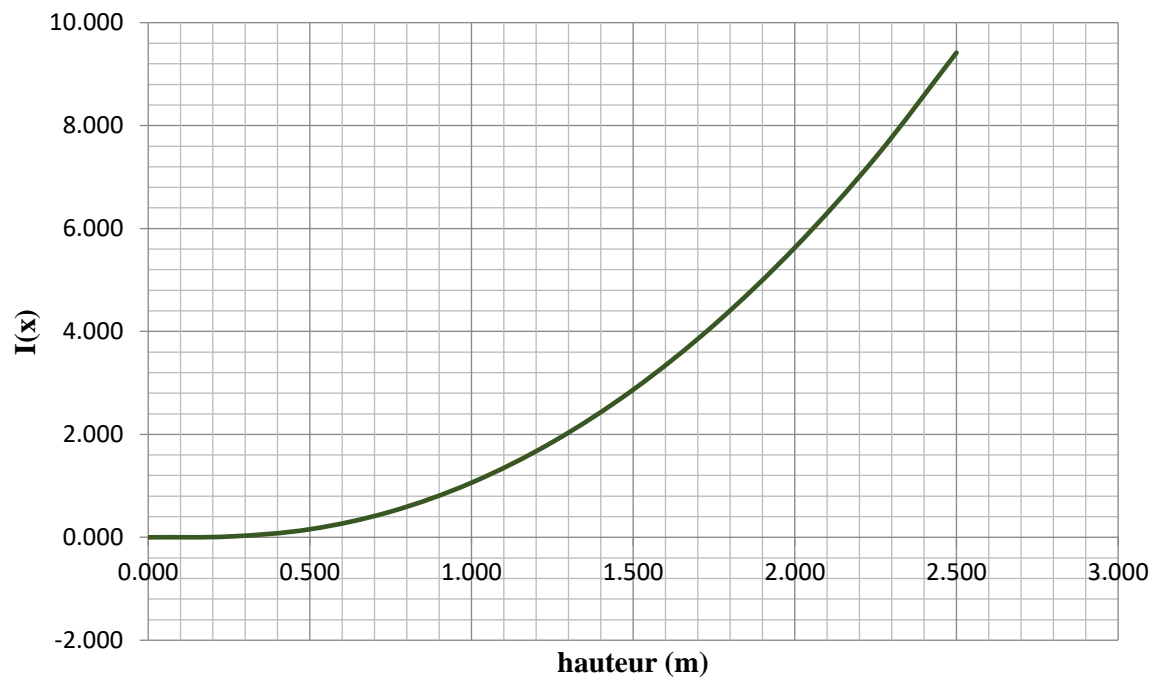


Figure D. 8-Variation de l'inertie en fonction de x