



HAL
open science

Contribution à l'optimisation topologique de structures piézoélectriques

Thomas Schlinquer

► **To cite this version:**

Thomas Schlinquer. Contribution à l'optimisation topologique de structures piézoélectriques. Automatique / Robotique. Université Bourgogne Franche-Comté, 2021. Français. NNT : 2021UBFCD069 . tel-03706855

HAL Id: tel-03706855

<https://theses.hal.science/tel-03706855v1>

Submitted on 28 Jun 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉTABLISSEMENT UNIVERSITÉ BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

École doctorale n°37
Sciences Pour l'Ingénieur et Microtechniques

Doctorat d'Automatique et Robotique

par

THOMAS SCHLINQUER

Contribution à l'optimisation topologique de structures piézoélectriques

Thèse présentée et soutenue à Besançon, le 15 Décembre 2021

Composition du Jury :

HADDAB YASSINE	Professeur à l'Université de Montpellier	Examineur
HUBERT ARNAUD	Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
RAHARIJAONA THIBAUT	Professeur à l'École nationale d'Ingénieurs de Metz	Rapporteur
RAKOTONDRABE MICKY	Professeur à l'École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes	Directeur de thèse
MOHAND-OUSAIID ABDENBI	Maître de conférence à l'Université de Franche-Comté	Codirecteur de thèse

Titre : Contribution à l'optimisation topologique de structures piézoélectriques

Mots-clés : Optimisation de la topologie, Piézoélectricité, Actionneurs

Résumé :

Aujourd'hui, le développement de systèmes micromécatroniques nécessite d'intégrer un ensemble de fonctionnalités notamment l'actionnement et la mesure dans un volume de plus en plus réduit. La conception de tels systèmes demeurent ainsi une démarche délicate de par leur complexité et la prise en considération des effets de couplage entre la structure et ses mécanismes d'actionnement et de mesure. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature en particulier les méthodes de conception optimale. Elles permettent entre autres le placement optimal du couple actionneur/capteur au sein d'une structure porteuse, l'optimisation simultanée ou séparée des dimensions des actionneurs, la conception avec performances garanties, la conception à partir de blocs élémentaires passifs et actifs, etc. Cependant ces approches se limitent à un ensemble de paramètres discrets, réduisant le champ de conception des structures étudiées en imposant des hypothèses sur la forme initiale du système.

Pour aboutir à des systèmes micromécatroniques performants avec une forte densité d'intégration, nous proposons dans cette thèse de développer un outil de conception à base d'optimisation topologique. La thèse a donc trait à démontrer l'intérêt de cette méthode dans le cadre de la conception de structures piézoélectriques. Tout d'abord, la physique du matériau piézoélectrique a été intégrée à l'approche d'optimisation topologique SIMP (Solid Isotropic with Material Penalization). Ensuite, l'approche étendue a été implémentée sous la forme d'un code informatique MATLAB permettant de simplifier sa manipulation par des utilisateurs non-experts. Enfin, deux structures, un actionneur 1D et un positionneur 2D, ont été conçues au travers de cet outil puis réalisées. Les simulations numériques et les validations expérimentales ont montré un bon accord entre les structures optimisées et les prototypes réalisés démontrant ainsi l'intérêt et le potentiel de cet approche d'optimisation.

Title: Contribution à l'optimisation topologique de structures piézoélectriques

Keywords: Topology optimization, Piezoelectricity, Actuators

Abstract:

Nowadays, the development of micromechatronics systems requires the integration of a set of functionalities including actuation and measurement in a reduced volume. The design of such systems remains a delicate process due to their complexity and the coupling effects between the structure and its actuation and measurement mechanisms. Several solutions have been proposed in the literature in particular the optimal design methods. For example, they allow to optimize the actuator/sensor location within a supporting structure, simultaneous or separate optimization of actuator dimensions, design with guaranteed performance, design based passive and active blocks, etc. However, they optimize only the geometric parameters of the structure and its active mechanisms. This limits in advance the shape of the active mechanisms and consequently those of the

resulting structures. To achieve high-performance micromechatronics systems with a high density integration, we propose in this thesis to develop a design tool based topology optimization. Therefore, the thesis aims to demonstrate the interest of this method for the design of piezoelectric structures. First, the physics of piezoelectric material was integrated into the SIMP topology optimization approach (Solid Isotropic with Material Penalization). Then, the extended approach was implemented under MATLAB. Finally, two structures, a 1D actuator and a 2D positioner, were designed using the developed tool and then fabricated. Numerical simulations and experimental validations have shown a good agreement between the optimized structures and the prototypes, thus demonstrating the interest and the potential of this optimization approach.

Remerciements

Pour commencer, ce travail de recherche n'aurait pas débuter sans l'impulsion de mes encadrants Abdenbi et Micky, qui m'ont fait confiance pour le mener à bien et m'ont supporté tout le long pour relever les différents défis inhérents à la création de connaissance. Ensuite, la recherche ne se fait aujourd'hui plus seule, et l'ensemble du département AS2M m'a ouvert ses portes avec bienveillance afin que je puisse m'épanouir dans mes travaux, je tiens donc à remercier l'ensemble du personnel avec qui j'ai eu le plaisir d'interagir. Je voulais en particulier citer Joel Agnus et Patrick Rougeot avec qui j'ai pu apprendre beaucoup et sans qui aucun résultat expérimental n'aurait pu exister. Ensuite, un département est rarement peuplé d'un unique doctorant, et l'ensemble de ceux que j'ai pu côtoyer au quotidien, que ce soit dans ou en dehors du laboratoire, ont permis de rendre cette expérience inoubliable, et a pu produire des amitiés encore fortes aujourd'hui. Je voulais mettre en avant en particulier mon collègue de recherche et de bureau Abbas, avec qui l'entraide et les discussions profondes nous a fait grandir chacun sur nos travaux respectifs. Enfin, je voulais finir par une pensée pour mon papa et mes grands-parents, partis trop tôt pour me voir accomplir cette ultime étape de mon éducation scientifique.

Sommaire

I	Introduction	1
II	État de l'art et objectifs de la thèse	7
1	Systèmes micromécatroniques	9
2	Méthode de conception de systèmes micromécatroniques	10
2.1	Méthode hétérogène	10
2.2	Placement optimal d'actionneur	10
2.3	Placement optimal de paire d'actionneur/capteur	11
2.4	Méthode des blocs	11
2.5	Méthode des intervalles	11
2.6	Optimisation structurelle de forme (passive)	12
2.7	Optimisation structurelle de forme (active)	13
3	Synthèse des méthodes d'optimisation	15
4	Approche retenue et objectifs de la thèse	15
III	Extension de la méthode d'optimisation topologique SIMP	17
5	Méthode d'optimisation SIMP	19
5.1	Résumé de l'approche SIMP	19
5.2	Formulation mathématique	19
5.3	Résolution du problème et éléments finis	20
6	Intégration du matériau piézoélectrique	22
6.1	Dérivation du modèle continu 2D	22
6.1.1	Hypothèses de travail	22
6.1.2	Tenseur multiphysique 2D	23
6.2	Passage aux éléments finis	25
6.2.1	Choix de l'élément	25
6.2.2	Dérivation du modèle éléments finis piézoélectrique	25

6.2.3	Normalisation des matrices	29
6.3	La polarisation comme variable d'optimisation	31
6.3.1	Principe	31
6.3.2	Schéma de pénalisation pour matériau piézoélectrique	31
7	Conclusion	32
IV	Implémentation de la méthode sous MATLAB	35
8	Algorithmes d'optimisation topologique	37
9	Implémentation de la méthode SIMP étendue	38
9.1	Initialisation	38
9.1.1	Définitions générales	38
9.1.2	Paramètres du matériau	39
9.1.3	Modèle éléments finis	39
9.1.4	Conditions aux limites	40
9.1.5	Définition de la sortie : cas de l'actionneur	41
9.2	Optimisation	41
9.2.1	Fonction objectif	41
9.2.2	Analyse de la sensibilité de la fonction objective	42
9.2.3	Algorithme d'optimisation	42
9.2.4	Filtrage	42
9.3	Affichage des variables d'optimisation	43
10	Conclusion	43
V	Conception et réalisation de structures piézoélectriques	45
11	Actionneur 1D	47
11.1	Cahier des charges et résultats	47
11.1.1	Définition du besoin	47
11.1.2	Objectif et sensibilité	48
11.1.3	Cahier des charges d'optimisation	49
11.1.4	Résultats de l'optimisation	49
11.2	Simulation numérique	50
11.2.1	Post-traitement	50
11.2.2	Résultat de simulation - structure sans polarisation	51
11.2.3	Résultat de simulation - structure avec polarisation	51

11.2.4	Conclusion sur les résultats de simulation	51
11.3	Validation expérimentale	52
11.3.1	Réalisation du prototype	52
11.3.2	Présentation du banc expérimental	52
11.3.3	Résultats et bilan	53
11.4	Conclusion	55
12	Positionneur 2D	55
12.1	Expression du besoin	55
12.1.1	Principe du positionneur 2D	55
12.1.2	Cahier des charges	56
12.1.3	Objectif et symétrie, contrainte et sensibilité	57
12.2	Résultats	59
12.2.1	Caractéristiques de la structure	59
12.2.2	Simulation numérique	60
13	Conclusion	60
VI	Conclusions et perspectives	63
14	Conclusions et perspectives	65
14.1	Conclusion	65
14.2	Perspectives	66
VII	Références	67

Première partie

Introduction

Publications

Journaux

T. Schlinquer, A. Homayouni-Amlashi, M. Rakotondrabe and A. Mohand-Ousaid, "Design of Piezoelectric Actuators By Optimizing the Electrodes Topology," in IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 6, no. 1, pp. 72-79, Jan. 2021, doi : 10.1109/LRA.2020.3030561.

Homayouni-Amlashi, **A., Schlinquer**, T., Mohand-Ousaid, A. and Rakotondrabe, M. 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters. Struct Multidisc Optim 63, 983–1014 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00158-020-02726-w>

Girerd, C., **Schlinquer**, T., Andreff, N., Renaud, P., and Rabenorosoa, K. (August 18, 2020). "Design of Concentric Tube Robots Using Tube Patterning for Follow-The-Leader Deployment." ASME. J. Mechanisms Robotics. February 2021 ; 13(1) : 011006. <https://doi.org/10.1115/1.4047983>

Conférences

T. Schlinquer, A. Mohand-Ousaid and M. Rakotondrabe, "Displacement Amplifier Mechanism for Piezoelectric Actuators Design Using SIMP Topology Optimization Approach," 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2018, pp. 4305-4311, doi : 10.1109/ICRA.2018.8460183

Thomas Schlinquer, Abdenbi Mohand-Ousaid, Micky Rakotondrabe, Optimal design of a unimorph piezoelectric cantilever devoted to energy harvesting to supply animal tracking devices, IFAC World Congress, Volume 50, Issue 1, 2017, Pages 14600-14605, ISSN 2405-8963, <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2111>.

Introduction

Les possibilités offertes par les systèmes micromécatroniques et notamment les micro-robots pour manipuler, interagir avec des objets de taille micrométrique, contrôler leurs mouvements dynamiques et caractériser leurs propriétés physiques ont ouvert une voie prometteuse pour divers champs applicatifs. Depuis les années 1990, ces systèmes sont de plus en plus répandus dans plusieurs applications liées notamment à la micro-manipulation, le micro-assemblage, le biomédical ou la chirurgie mini-invasive. La plupart de ces systèmes intègrent dans un espace réduit l'ensemble des éléments qui les constituent allant de la structure flexible et déformable à l'actionnement en passant par la mesure. Cela est rendu possible par l'utilisation de matériaux dit "intelligents" tels que les matériaux piézoélectriques.

De par leur densité d'intégration et leur complexité, la conception de tels systèmes nécessite de traiter le problème du couplage entre la structure et les mécanismes d'actionnement et de mesure à travers des stratégies d'optimisation d'ensemble. Ces dernières ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche prometteurs. Celles décrites dans la littérature permettent entre autres le placement optimal du couple actionneur/capteur au sein d'une structure porteuse, l'optimisation simultanée ou séparée des dimensions des actionneurs, la conception avec performances garanties, la conception à partir de blocs élémentaires passifs et actifs, etc.

Cependant, ces méthodes agissent seulement sur les paramètres géométriques des systèmes. Cela conditionne au préalable la forme des mécanismes actifs (actionnement et mesure) et par conséquent celle de la structure résultante. Ainsi, ces méthodes sont limitées et peu adaptées notamment par le manque de degrés de liberté et de généralisation. Pour aboutir à des systèmes micromécatroniques performants avec une forte densité d'intégration, une solution possible est d'utiliser la méthode d'optimisation topologique SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Les principaux aspects scientifiques de cette solution, appliquée particulièrement aux structures piézoélectriques, sont traités dans cette thèse :

- l'extension de la méthode d'optimisation topologique SIMP aux matériaux piézoélectriques,
- le développement et l'implémentation de la méthode d'optimisation étendue sous MATLAB,
- l'optimisation simultanée de la densité et de la polarité des structures piézoélectriques,
- la conception optimale, la fabrication et la caractérisation de structures piézoélectriques monolithiques : actionneur 1D et positionneur 2D.

Le travail de recherche présenté dans ce manuscrit a été effectué au sein de l'équipe MACS (Ex. CODE) du département AS2M (Automatique et Systèmes Micro-Mécatroniques) de l'institut FEMTO-ST. On débutera par présenter l'état de l'art autour des méthodes de conception de systèmes micromécatroniques et démontrer en particulier l'intérêt de l'approche par optimisation topologique. Le chapitre suivant traitera de la présentation du principe de cette méthode en particulier dans le cadre de structures piézoélectriques. Son implémentation pratique sous la forme d'un code programmé sous le langage MATLAB sera ensuite détaillée. Enfin deux applications seront étudiées sous la forme d'un action-

neur 1D puis d'un positionneur 2D. On présentera ensuite une conclusion générale ainsi que des axes de perspectives pour la poursuite de la recherche.

Deuxième partie

État de l'art et objectifs de la thèse

1/ Systèmes micromécatroniques

Les systèmes micromécatroniques regroupent l'ensemble des systèmes de petites tailles intégrant des fonctions d'actionnement, de perception et d'intelligence. Ils sont généralement caractérisés par de grandes précisions et sont particulièrement destinés à réaliser des tâches dans le micromonde [1]. De nos jours, ces derniers sont omniprésents dans notre vie quotidienne. De la microrobotique au biomédical en passant par l'optique, ils ont offert de nouvelles perspectives et ont permis des avancées considérables tant sur le plan scientifique et technologique ainsi que sur le plan économique [2] [3] [4].

A titre d'exemple, la figure 1 présente quelques systèmes micromécatroniques issus des travaux de laboratoires de recherche et d'entreprises actives dans le domaine de la micromécatronique. Contrairement aux systèmes classiques, ils sont particulièrement compact et intègrent dans un espace réduit les éléments qui les composent tels que la structure flexible et déformable, les mécanismes d'actionnement et de mesure.

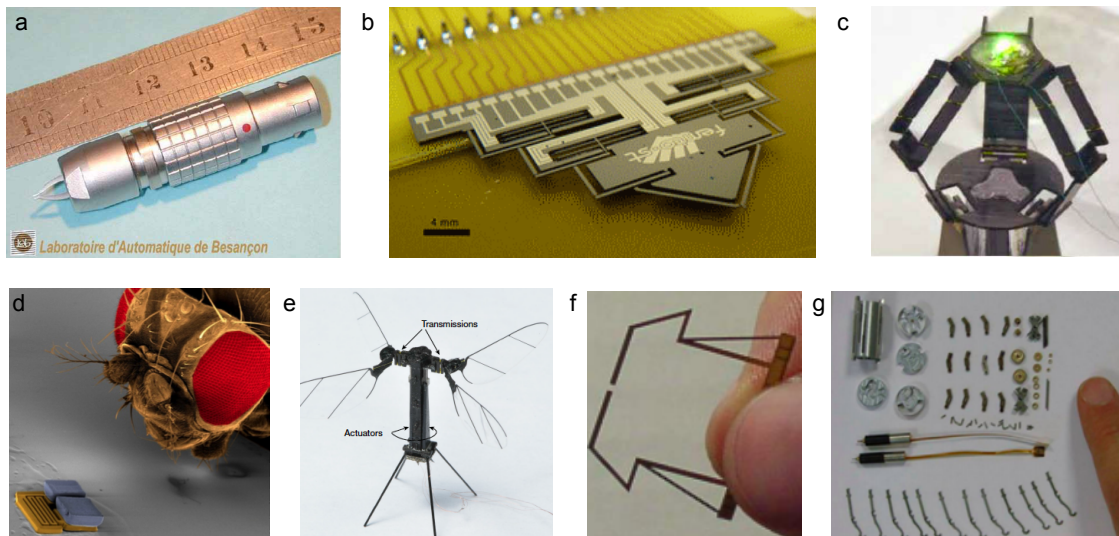


FIGURE 1 – Exemples de systèmes microrobotiques. (a) Pince MMOC [5], (b) Robot numérique DiMiBot [6], (c) Robot milliDelta [7], (d) Robot MagMites [8], (e) Robot Bee X-wing [9], (f) Micro-pince piézoélectrique [10], (g) Capsule endoscopique désassemblée [11].

Ces systèmes sont souvent amenés à interagir avec le micromonde ce qui pose plusieurs problématiques pour la microrobotique. Tout d'abord, le comportement des systèmes d'actionnement est fortement non-linéaire et engendre des effets de couplages conduisant en particulier à des problématiques de précision et de répétabilité du positionnement. De plus, les efforts surfaciques sont prédominants en dessous d'une limite d'échelle ($\approx 100\mu\text{m}$) et représentent un obstacle pour des tâches de préhension et pour la mesure de force. Par ailleurs, ces systèmes sont généralement des mosaïques de petits composants difficiles à manipuler et à assembler. Sous ces conditions, la conception et réalisation de ces systèmes restent difficile et demeurent un sujet de recherche ouvert. En réponse à cette situation, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature en particulier les méthodes de conception optimale.

2/ Méthode de conception de systèmes micromécatroniques

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous restreignons aux méthodes de conception optimale. En considérant uniquement la structure mécanique du système, ces méthodes peuvent être classées en sept catégories majeures.

2.1/ Méthode hétérogène

La méthode hétérogène est une approche d'ingénierie permettant de concevoir des systèmes micromécatroniques élément par élément. Son principe consiste à combiner un ensemble de fonctions empiriques ou optimisées en réponse à un cahier des charges. Cette méthode a pour avantage principal d'aboutir rapidement à une solution exploitable. Par exemple, la micro-pince décrite dans [12] illustre l'application de cette méthode. Dans cette réalisation, deux actionneurs à structure piézoélectrique montés en porte-à-faux sont disposés en parallèle, et leurs déformations individuelles ou combinées permettent de réaliser la fonction de préhension de la pince. Au delà de cet exemple simple, on retrouve des réalisations plus complexes telles que le robot milliDelta [7] ou le robot Bee X-wing [9]. Avec cette méthode, le concepteur ne suit pas un cycle de conception prédéfini, mais procède généralement par essais/erreurs en s'appuyant sur son intuition et son expérience.

2.2/ Placement optimal d'actionneur

La méthode de placement optimal d'actionneur a pour but de trouver le placement optimal d'un ou de plusieurs actionneurs au sein d'une structure dont la géométrie et le matériau sont définis au préalable. Cette dernière est largement utilisée pour l'optimisation de structures intelligentes en particulier lorsque des patches piézoélectriques sont associés à une structure de type poutre ou plaque [13]. Par exemple, Adali [14] a utilisé avec succès cette méthode pour minimiser la déviation verticale d'une poutre laminée à l'aide d'une paire d'actionneurs piézoélectriques. Dans ce travail, la distance entre la paire d'actionneurs et le côté encasté de la poutre est considérée comme variable de conception. La méthode est ensuite utilisée pour rechercher la distance optimale permettant de minimiser la déflexion de la poutre soumise à un ensemble de chargements. Dans le même contexte, Suleman [15] a utilisé cette méthode pour optimiser une poutre en porte-à-faux stratifiée avec une forme rectangulaire. Contrairement à l'exemple précédent, trois critères d'optimisation sont considérés simultanément, respectivement liés au déplacement vertical, à la masse de l'actionneur et à la tension d'excitation de l'actionnement. La taille, l'épaisseur et la position des patches d'actionnement sont considérées comme variables de conception. En respectant les contraintes géométriques ayant pour but d'empêcher la superposition des actionneurs, une optimisation multi-objective a été réalisée afin de déterminer la forme optimale des patches. Au delà du placement d'actionneur, la méthode a été utilisée dans [16] pour placer des capteurs. Dans ce cas, les placements sont réalisés séparément.

2.3/ Placement optimal de paire d'actionneur/capteur

La méthode de placement optimal de paire d'actionneur/capteur utilise le même principe que la précédente mais elle a pour objectif de rechercher simultanément le placement d'un actionneur et capteur. Fondamentalement, il s'agit de trouver un placement optimal d'une paire d'actionneur/capteur au sein d'une structure passive dont la géométrie et le matériau sont déjà prédéterminés. Elle est particulièrement intéressante lorsque des patches piézoélectriques (actionneur et capteur) sont utilisés pour contrôler les vibrations d'une structure mécanique. Le placement des patches est déterminé en considérant par exemple des critères tels que la maximisation de la commandabilité et de l'observabilité [17], la minimisation de l'énergie de vibration mécanique [16] ou la minimisation de la masse de l'actionneur [15]. Pour cela différents algorithmes d'optimisation peuvent être utilisés notamment les algorithmes génétiques [17] ou la méthode de la descente de gradient [15].

2.4/ Méthode des blocs

Développée initialement pour les structures passives [18] et étendue aux structures actives [10, 19–21], la méthode des blocs propose une vision originale pour la conception des mécanismes flexibles planaires. Son principe consiste à agencer d'une manière optimale des blocs élémentaires passifs, actifs et sensitifs afin d'obtenir des structures flexibles et déformables à actionnement et mesure intégrés avec une vue orientée commande de la structure finale. En utilisant un algorithme génétique, cette méthode permet de définir des contraintes de conception (architecture des mécanismes compliants, positionnement des actionneurs et des capteurs, etc.) ainsi que des contraintes sur la réponse fréquentielle de la structure. Une mise en oeuvre de cette approche dans la thèse de Mathieu Grosard, menée conjointement au CEA et au sein de l'institut FEMTO-ST, a donné lieu à la conception puis réalisation d'une micro-pince piézoélectrique monolithique [20]. Plusieurs contraintes avancées ont été intégrées dans le problème d'optimisation de la structure telle que la commandabilité et l'observabilité, la valeur des fréquences des modes de vibration dominants ainsi que sur l'alternance pôles/zéros de sa modélisation fréquentielle. Le but étant de réduire en amont de la conception l'ordre du modèle de la structure obtenue permettant afin de simplifier l'étape aval de commande.

2.5/ Méthode des intervalles

La genèse de la méthode des intervalles remonte à -250 lorsque Archimède s'est intéressé à calculer les bornes inférieure et supérieure du nombre π . Cela a été la genèse de l'idée d'utiliser des intervalles pour le calcul qui a été proposée formellement par Burkill [22] et Young [23]. Néanmoins, cette méthode a pris son essor et devenue très populaire à la suite de l'apparition du livre R.E de Moore en 1966 [24]. Dans cet ouvrage, l'auteur formalise la méthode des intervalles ainsi que son arithmétique afin de réaliser des analyses automatisées d'erreur. Depuis, la méthode a été largement utilisée dans plusieurs applications à l'exception de la conception optimale de structures mécaniques. Parmi ces applications, on trouve notamment l'estimation garantie [25] [26], l'analyse de stabilité de systèmes incertains [27] ainsi que la synthèse de contrôleurs robustes [28]. Récemment, cette méthode a été adaptée et utilisée pour concevoir la structure mécanique d'un actionneur piézoélectrique [29] [30] en se basant par exemple

sur la propriété d'inclusions des performances sur les fonctions de transfert de type intervalle [31]. Le principal avantage de la méthode est la garantie/certification du résultat : si une solution au problème de conception existe, il est garanti que la structure résultante respecte les performances prédéfinies. Avec cette stratégie, le problème de conception est considéré comme un problème d'inversion d'ensemble qui peut être résolu en utilisant un algorithme d'intervalle à base de contracteurs.

Bien qu'elles aient donné lieu à des réalisations intéressantes, les méthodes mentionnées ci-dessus manquent de généralisation. Deux raisons principales peuvent être avancées pour expliquer cette limitation : (i) le système à concevoir est souvent décomposé en plusieurs parties dont l'optimisation s'effectue séparément, et (ii) seulement les paramètres géométriques du système sont considérées dans le processus d'optimisation. Ainsi on se donne a priori la géométrie et la forme des mécanismes actifs (actionneur et capteur) et par conséquent celle de la structure résultante. Pour pallier cette limitation, l'optimisation structurelle de forme et en particulier l'optimisation topologique a été largement explorée dans la littérature [30] [32] [33] [34] [35] [36]. Contrairement aux méthodes citées précédemment, cette méthode considère en amont le couplage entre la structure et ses mécanismes, sans restriction de géométrie, offrant ainsi plus de degrés de liberté au concepteur. Son principe consiste à distribuer un ou plusieurs matériaux dans un domaine de conception en respectant un cahier des charges. Selon le niveau d'intégration, deux approches peuvent être identifiées. Elles complètent la liste des sept catégories évoquées précédemment.

2.6/ Optimisation structurelle de forme (passive)

L'optimisation structurelle de forme, et en particulier l'optimisation topologique, permet non seulement d'améliorer les performances mécaniques des systèmes, mais aussi d'optimiser leurs poids et leurs encombrements. Elle est largement utilisée pour la conception de structures mécaniques passives dont les mécanismes d'actionnement et de mesures sont connus au préalable. Cette méthode consiste à trouver une structure optimale dans un domaine de conception donné (Ω_{mat}) sans restriction sur la géométrie et la topologie de la structure. De fait, elle implique la détermination de caractéristiques telles que le nombre, l'emplacement et la forme des trous et donc la connectivité du domaine de conception, sans hypothèses sur leur initialisation [37] [38] [39]. Les seules quantités connues dans le problème d'optimisation topologique sont : les conditions limites en force (f_{in}) et déplacement (Γ_{sup}), le volume de matériau disponible pour concevoir la structure dans Ω_{mat} , et au besoin certaines restrictions supplémentaires comme l'emplacement et la taille de zones prédéfinies comme des trous (Ω_{void}) (voir la formulation du problème illustrée dans la figure 2). Cette dernière restriction est particulièrement intéressante en optimisation structurelle passive puisqu'elle permet de définir des régions pouvant accueillir des mécanismes d'actionnement et de mesure associés à la structure.

Dans le reste du domaine, un matériau est distribué en minimisant (ou maximisant) une fonction objectif telle que l'énergie mécanique ou de compliance, le déplacement selon un point d'application et une direction donnée, le ratio masse/résistance, la déformation, etc. Cette distribution se caractérise mathématiquement par la présence d'une variable dite de densité qui suit un comportement binaire, avec 1 représentant de la matière et 0 du "vide" dans le domaine de conception. Elle est généralement soumise à une contrainte de

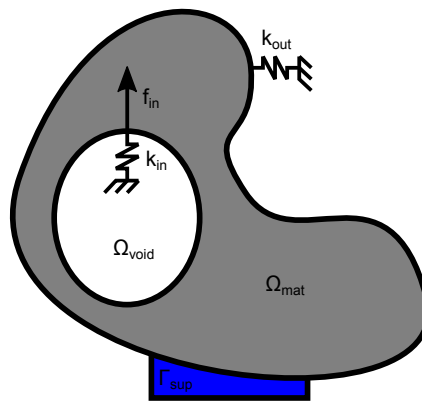


FIGURE 2 – Formulation d'un problème de conception en optimisation topologique.

volume pour éviter les topologies triviales et ainsi forcer l'apparition de structures optimales. D'autres contraintes peuvent être imposées sur la structure, comme la quantité de zones d'encastrement ou la valeur de la fréquence minimale des modes propres. La revue de la littérature révèle les avantages ainsi que les formalismes utilisés par cette méthode pour la conception de structures compliantes. Parmi ces formalismes, on trouve notamment la théorie de l'homogénéisation [40], le level-set [41] [42] [43], les heuristiques [44] ou le SIMP [37] [38].

Présenté initialement dans [37, 38], le dernier formalisme, c-à-d, la méthode SIMP (pour Solid Isotropic with Material Penalization) est très utilisée pour plusieurs raisons :

- contrairement aux approches classiques, elle conduit à une conception systématique,
- le problème de l'interprétation physique des densités intermédiaires propre à l'approche d'optimisation topologique est résolu par l'introduction d'un coefficient de pénalisation p , ce qui permet de forcer les densités finales du matériau vers des valeurs discrètes 0-1,
- sa formulation est mathématiquement bien posée,
- enfin et pas des moindres, elle est facile à mettre en œuvre et à implémenter [45, 46].

Cependant, cette méthode ne prend pas en considération l'optimisation des mécanismes d'actionnement et de mesure, mais seulement de la partie passive, c-à-d le domaine qui ne fait que résister aux efforts mécaniques externes qu'on lui applique. Les mécanismes d'actionnement et de mesures, étant connus au préalable, ne sont pas optimisés. Compte tenu de son potentiel, plusieurs travaux de recherche se sont attachés à l'étendre aux matériaux actifs tels que les matériaux piézoélectriques [32, 33, 47–52]. Ces travaux ont donné lieu à une méthode plus générique que la précédente que nous qualifions dans ce manuscrit d'optimisation structurelle de forme active.

2.7/ Optimisation structurelle de forme (active)

Cette méthode permet non seulement d'optimiser la structure du système, mais aussi ses mécanismes d'actionnement et de mesure. Elle utilise les mêmes principes que la méthode précédente mais avec une différence majeure : l'utilisation d'un matériau actif. Par

TABLE 1 – Récapitulatif des principales méthodes de conception.

Méthode	Citation	Limitations
méthode hétérogène	[7, 9, 12]	<ul style="list-style-type: none"> - décomposition du systèmes en plusieurs parties - prise en compte uniquement des paramètres géométriques - peu de degrés de liberté et manque de généralisation
placement optimal d'actionneur	[13–16]	<ul style="list-style-type: none"> - géometrie de la structure et des actionneurs prédéfinie - peu de degrés de liberté et manque de généralisation
placement optimal de paire actionneur/capteur	[15–17]	<ul style="list-style-type: none"> - géometrie de la structure et des mécanismes actifs prédéfinie - peu de degrés de liberté et manque de généralisation
méthode des blocs	[10, 18–21]	<ul style="list-style-type: none"> - bibliothèque de blocs élémentaires prédéfinis - optimisation de paramètres et de localisations de blocs
méthode des intervalles	[24, 25, 27–30]	<ul style="list-style-type: none"> - difficile à résoudre au delà de trois variables d'optimisation - formulation du problème sous forme d'intervalles
optimisation de forme (passive)	[37–44]	<ul style="list-style-type: none"> - pas d'optimisation des mécanismes d'actionnement et de mesure - forme des mécanismes prédéfinies
optimisation de forme (active)	[53–64]	<ul style="list-style-type: none"> - code d'optimisation non disponible - intégration non-intuitive du matériaux piézoélectrique - optimisation de polarité du matériau peu abordée

conséquent, la structure et ses mécanismes actifs peuvent être optimisés simultanément sans restriction de géométrie et de topologie. Plusieurs travaux ont été menés dans le but d'intégrer les matériaux actifs à la méthode d'optimisation topologique [53–64]. La plupart se sont intéressés à l'intégration de la physique piézoélectrique à la méthode SIMP. Cette dernière est particulièrement intéressant car son effet direct peut être utilisé pour la mesure ou la récupération d'énergie [35, 36, 62–65], quant à son effet inverse il peut être utilisé pour l'actionnement [53–57]. La méthode résultante de cette combinaison a été appliquée avec beaucoup de succès pour la conception globale de structures actives. L'étude décrite dans [55] démontre l'intérêt et le potentiel de cette méthode pour la

conception de micro structures, notamment les micro-pinces piézoélectriques. Conçue et réalisée en tant que structure monolithique, la méthode permet de maximiser, d'une part, les déplacements planaires des effecteurs de la pince et de minimiser, d'autre part, les déplacements hors plan. Un autre exemple d'application intéressant est le récupérateur d'énergie décrit dans [64]. En tenant compte des excitations extérieures (statiques ou harmoniques) la méthode a conduit à une structure optimale permettant de récupérer l'énergie mécanique convertie en énergie électrique grâce à l'effet piézoélectrique direct.

En dépit des réalisations intéressantes et prometteuses, cette méthode globale reste limitée pour plusieurs raisons :

- l'intégration du matériau piézoélectrique n'est pas unifiée, ce qui rend la méthode délicate à manipuler par les concepteurs non-experts en optimisation topologique,
- la méthode optimise principalement la densité du matériau distribué et ne prend pas en considération sa polarité,
- le choix des coefficients de pénalisation est une problématique ouverte pour le cas des matériaux piézoélectriques, et demande souvent une approche itérative essai/erreur pour obtenir des résultats satisfaisants
- il n'existe pas de code d'implémentation disponible permettant de prendre en main la méthode dans le cadre de matériau actif, réduisant son intérêt comparativement aux nombreux codes pour le cas passif.

3/ Synthèse des méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisation décrites ci-dessus sont résumées dans le tableau 1. Ces méthodes ont données lieu à des réalisations intéressantes et prometteuses. Elles offrent aux concepteurs la possibilité d'optimiser un système d'une façon partielle ou globale mais des limitations apparaissent. Les méthodes dites classiques agissent seulement sur les paramètres géométriques des systèmes, ce qui conditionne la forme des mécanismes actifs (actionnement et mesure) et par conséquent celle de la structure résultante. Ces méthodes sont donc limitées et peu adaptées notamment par le manque de degrés de liberté et de généralisation. Quant aux méthodes d'optimisation topologique, elles sont mieux adaptées que les méthodes classiques mais elle restent limitées notamment par l'intégration du matériau piézoélectrique, la prise en compte de sa polarité et enfin le choix des coefficients de pénalisation.

4/ Approche retenue et objectifs de la thèse

La revue de la littérature a montré l'intérêt de l'optimisation topologique par rapport aux méthodes d'optimisation classiques. Son utilisation semble donc naturellement une solution adaptée pour la conception de micro-structures à base de matériaux piézoélectriques. Peu abordée dans le cadre applicatif lié aux systèmes microrobotiques, la méthode ouvre de nouvelles perspectives pour la conception optimale et globale. Cette approche permet en résumé de distribuer une quantité de matière définie, sans limite de topologie et d'une

manière systématique, en maximisant ou minimisant une fonction coût sujette à une ou plusieurs contraintes.

L'objectif de ce travail est de proposer un outil de conception méthodologique sur base de l'approche d'optimisation topologique SIMP. Le travail consiste, dans un premier temps, à proposer un cadre unifié pour l'intégration du matériau piézoélectrique dans la méthode SIMP. Ensuite, la polarité du matériau sera considérée comme une variable d'optimisation additionnelle permettant ainsi d'augmenter le nombre de degrés de liberté de la méthode. Par ailleurs, des exemples de conception et de réalisation seront conduits pour valider et démontrer la pertinence de la méthode. Pour mettre au point cette dernière, plusieurs aspects scientifiques doivent être considérés.

- **L'extension de la méthode d'optimisation topologique SIMP aux matériaux piézoélectriques** : Plusieurs travaux se sont intéressés à l'optimisation topologique de matériaux piézoélectriques néanmoins peu font état d'une intégration unifiée de ce matériau dans la méthodologie. Cela rend la méthode difficile à manipuler par les concepteurs non-experts en optimisation topologique. Il est donc impératif d'explicitier toutes les étapes nécessaires pour l'intégration du matériau piézoélectrique en partant du modèle 3D issu de la théorie de la piézoélectricité (le modèle est reporté dans le "IEEE standard of piezoelectricity" [66]).
- **Le développement et l'implémentation de la méthode d'optimisation étendue** : Il est nécessaire de développer un code prenant en considération les propriétés mécaniques et électriques du matériau piézoélectrique. En effet, la plupart des codes existants sont adaptés à la résolution de problèmes passifs. Un code Matlab est donc proposé dans ce travail de thèse pour apporter un outil d'expérimentation. Il est développé sur la base du Code MATLAB "A 99 line topology optimization code" [67]. Ce code comprend trois parties majeures : (i) formulation et initialisation du problème, (ii) résolution du problème d'optimisation et (iii) traitement et affichage du résultat de l'optimisation.
- **L'optimisation simultanée de la densité et de la polarité** : Au delà de l'optimisation de la densité, il est nécessaire de considérer aussi la polarité du matériau piézoélectrique. Cela est d'autant intéressant que la prise en compte de la polarité offre plus de degrés de liberté en terme d'optimisation. D'un point de vue pratique, cela se traduit par la possibilité de combiner à la fois l'expansion et la compression du matériau piézoélectrique afin de mieux répondre au cahier des charges imposé.

Ces trois principaux aspects sont abordés à travers les parties 3, 4 et 5 de ce manuscrit. Après un bref rappel de la méthode d'optimisation SIMP, la partie 3 aborde les principales étapes nécessaires pour l'intégration du matériau piézoélectrique en partant du modèle linéaire 3D jusqu'au schéma de pénalisation en passant par la discrétisation par élément finis. Ensuite, la partie 4 traite de l'implémentation de la méthode d'optimisation sous MATLAB. Les trois parties principales du code sont présentées puis les codes associés sont détaillés. La méthode et le code associé sont exploités dans la partie 5 où deux réalisations sont exposées pour valider la méthode. La première concerne un actionneur piézoélectrique 1D quant à la seconde elle concerne un micro-positionneur 2D. Une conclusion générale résume les éléments importants et des perspectives sont développées autour de ce travail de thèse.

Troisième partie

Extension de la méthode d'optimisation topologique SIMP

La partie 1 a montré l'intérêt de l'utilisation de méthodes d'optimisation pour la conception de systèmes micro-mécatroniques. Il est apparu que l'optimisation topologique, et notamment la méthode SIMP, constitue un outil de conception puissant qu'il convient d'exploiter. Dans cette partie, on s'intéressera à l'extension de cet outil aux matériaux piézoélectriques. Nous commencerons par une description de la méthode SIMP en tant qu'approche d'optimisation topologique, et en particulier la démarche menant à sa formulation mathématique. Enfin, on explicitera l'ensemble des étapes nécessaires permettant l'intégration du matériaux piézoélectriques dans la méthode SIMP, du modèle élément finis et sa normalisation jusqu'à l'intégration de la polarisation comme variable d'optimisation.

5/ Méthode d'optimisation SIMP

5.1/ Résumé de l'approche SIMP

L'approche SIMP est une approche d'optimisation topologique qui a pour but de déterminer une structure optimale selon un cahier des charges donné sur un domaine restreint. Le but est de déterminer une distribution de matériau sur ce domaine, qui est considérée une variable d'optimisation, tout en minimisant une fonction objectif soumise à une ou plusieurs contraintes. Pour cela, l'approche combine la méthode éléments finis avec une loi de pénalisation pour rendre les densités intermédiaires rébarbatives et ainsi éviter le problème 0-1 classique de la démarche d'optimisation topologique. Présentée en détail dans [68], la méthode SIMP est très simple à implémenter et a déjà été largement démontrée comme pertinente pour la conception de structures passives. Depuis elle a été implémentée avec succès dans la conception de structures actives en particulier piézoélectriques comme déjà présenté dans la partie 2.7. Cette méthodologie permet en effet relativement facilement l'intégration de nouvelles physiques afin d'augmenter le problème d'optimisation. On se propose ci-après de reprendre la formulation mathématique initiale de la méthode SIMP sur le problème passif afin de donner une base au lecteur les éléments nécessaires à sa compréhension.

5.2/ Formulation mathématique

On présente maintenant la démarche permettant de construire la formulation du problème d'optimisation. On va pour cela décrire le problème classique de l'optimisation d'une structure sous compliance, c'est à dire que celle-ci doit pouvoir résister à des efforts extérieurs. Pour commencer on se donne un domaine 2D noté Ω . Celui-ci peut avoir une forme quelconque, mais souvent il prend une forme rectangulaire pour simplifier sa définition mathématique. L'ensemble de ce domaine est supposé être la variable d'optimisation, appelée densité et notée ρ . C'est donc une fonction dépendante de l'espace (ici plan) et qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1, résumé par la contrainte 1b. La problématique consiste à déterminer la valeur de ρ permettant de maximiser une fonction objectif notée J .

Pour simplifier la description, on se donne un objectif scalaire qui sera par exemple proportionnel à l'énergie élastique, soit $J = \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon dV$, avec σ et ϵ respectivement les vecteurs de contrainte et déformation sur le domaine Ω . On va chercher à minimiser cet objectif dans le but d'avoir une structure qui se déforme le moins possible sous une

action extérieure, ce qui revient à avoir le minimum d'énergie mécanique élastique dans cette structure optimale **1a**. Le lien entre ρ et les champs mécaniques σ et ϵ est donné par les équations de la mécanique des milieux continus via les équations d'équilibres et constitutives, présenté ici sous leur forme condensée dans l'équation **1c**.

En particulier, le tenseur de compliance élastique C devient dépendant de la variable de densité ρ où une valeur de 0 doit être équivalent au comportement du vide, et donc un tenseur nul **1d**, sinon pour une valeur de 1 ce sera le tenseur du matériau modélisé, supposé isotropique. Cette formulation demande aussi des conditions aux limites sur le déplacement et la contraintes, typiquement des encastrements **1e** et des efforts ponctuels **1f** respectivement.

Enfin il est important d'avoir une contrainte dite de volume sur ρ . En effet, dans le cas du problème décrit, il existe une solution immédiate au problème où l'ensemble du domaine Ω est rempli de matière. Ainsi pour forcer l'apparition d'une solution optimale, on impose une contrainte sur la densité sous la forme d'une contrainte scalaire. Celle-ci revient à limiter la quantité de matière qui peut être distribuée sur l'ensemble du domaine. En pratique on impose que l'intégrale de la densité sur l'ensemble du domaine soit inférieure à une fraction volumique f de l'aire totale du domaine, avec donc $f \in]0; 1[$, ce qui est formulé par **1g**. On résume ci-dessous la formulation mathématique complète du problème d'optimisation :

$$\min_{\rho} \quad J = \int_{\Omega} \sigma^T \epsilon dV \quad (1a)$$

$$\text{sujet à} \quad \rho \in \{0, 1\}, \quad (1b)$$

$$\text{div}^S (C \text{grad}^S (u)) = 0, \quad (1c)$$

$$C(\rho) = \{C_0 \text{ si } \rho = 1; 0 \text{ si } \rho = 0\}, \quad (1d)$$

$$u = \bar{u} \text{ sur } \Omega_u, \quad (1e)$$

$$\sigma = \bar{\sigma} \text{ sur } \Omega_{\sigma}, \quad (1f)$$

$$\int_{\Omega} \rho dV \leq f \int_{\Omega} dV. \quad (1g)$$

5.3/ Résolution du problème et éléments finis

Le problème présenté précédemment ne peut être résolu de façon analytique sauf pour certains cas très précis. La principale difficulté est due à la résolution des équations de comportement mécanique du domaine, à laquelle on ajoute un domaine qui peut potentiellement être inhomogène en tout point. Une première simplification est donc l'introduction d'une résolution approchée de ces équations via la méthode des éléments finis. Cela a deux conséquences importantes : d'un côté la nature des équations passe d'analytique à algébrique, avec tous les outils mathématiques associés. On change donc la nature de l'objectif et du modèle de comportement, qui deviennent **2a** et **2c** avec F , U et K le vecteur des forces et déplacement nodaux, ainsi que la matrice de raideur respectivement ; de l'autre côté, la nature du domaine devient discrète via son maillage, impliquant que la variable de densité n'est maintenant plus un champ défini en tout point de l'espace mais une matrice de données à valeurs constantes sur chaque élément du maillage.

En général, la stratégie la plus utilisée consiste à employer des éléments carrés Q4,

ce qui permet de paver un domaine rectangulaire quelconque. Ainsi en définissant le nombre d'éléments dans chaque direction comme étant M et N , on aura en définitive $M \times N$ variables de densité à résoudre pour un problème d'optimisation devenu multivariable. En particulier il est à noter que la contrainte en volume se convertit en le calcul de deux sommes : $\int_{\Omega} \rho dV$ devient $\sum^{M \times N} \rho$ et $\int_{\Omega} dV$ $\sum^{M \times N}$. Pour simplifier les notations, on notera V le premier résultat et V_0 le second [2e](#). On abusera aussi de la notation ρ qui représente dorénavant la valeur d'un élément quelconque de la matrice de densité. On obtient donc la formulation suivante :

$$\min_{\rho_i} \quad J = F^T U \quad (2a)$$

$$\text{sujet à} \quad \rho \in \{0, 1\}, \quad (2b)$$

$$KU = F, \quad (2c)$$

$$C(\rho) = \{C_0 \text{ si } \rho = 1; 0 \text{ si } \rho = 0\}, \quad (2d)$$

$$V \leq fV_0. \quad (2e)$$

Cependant ce problème reste difficile à résoudre en l'état. En effet la nature discrète des variables empêche l'utilisation des approches classiques de l'optimisation tel que l'algorithme de descente de gradient. On est ainsi dans un problème dit combinatoire, ou le nombre de possibilités à explorer est donné ici par $2^{M \times N}$. La problématique est alors de mettre en place une stratégie permettant d'explorer cet espace, ce qui n'a pas à ce jour été étudié sauf avec des approches heuristiques [\[69–72\]](#).

Ainsi pour pouvoir intégrer ces outils dans la résolution du problème, on relaxe le domaine des variables en le transformant en intervalle continu, qui est appelée l'approche d'homogénéisation. Ainsi on aura maintenant une variable de densité contenue sur l'intervalle $[0, 1]$ [3b](#). L'idée est d'autoriser que chaque élément du domaine puisse simuler un matériau quelconque entre le "vide" et le matériau utilisé dans la conception de la structure. Pour le cas d'un problème passif, cela revient en pratique à interpoler le comportement du tenseur de compliance C entre C_0 et le tenseur nul. Le choix le plus simple est d'utiliser une loi d'interpolation linéaire, menant à la relation [3d](#). Le problème devient alors :

$$\min_{\rho_i} \quad J = F^T U \quad (3a)$$

$$\text{sujet à} \quad \rho \in [0, 1], \quad (3b)$$

$$KU = F, \quad (3c)$$

$$C(\rho) = \rho C_0, \quad (3d)$$

$$V \leq fV_0. \quad (3e)$$

Cependant cette modification implique que les solutions que l'on peut obtenir seront dorénavant quelconque entre 0 et 1, et l'optimal global s'y trouve la plupart du temps. Or ces valeurs intermédiaires n'ont pas un sens physique simple, seules les extrêmes ont un intérêt permettant d'interpréter la solution en tant que structure. Ainsi il faut pouvoir faire en sorte de forcer l'algorithme de résolution à tendre vers ces extrêmes.

Une solution est de pénaliser les valeurs intermédiaires via l'application d'une loi de pénalisation sur la relation entre le tenseur de compliance et la densité. L'idée est de rendre non attractif l'utilisation de valeurs densité intermédiaire via la contrainte de volume. Pour cela on applique une puissance p sur la variable densité sous la forme $C(\rho) = \rho^p C_0$

4d. En imposant $p > 1$, on rend ainsi les densités intermédiaires moins résistantes mécaniquement que les extrêmes en 0 et 1 tout en ayant le même volume dans le calcul de la contrainte de volume. Ainsi si l'algorithme veut optimiser la quantité de matière qui lui ai accordée via la fraction volumique f , il est ainsi forcé d'utiliser les extrêmes. Cette solution au problème des densités intermédiaires à donner son nom à la méthode SIMP où "MP" est traduit par "pénalisation du matériau" (Material Penalization). On obtient ainsi la formulation finale du problème d'optimisation SIMP comme il est décrit dans l'article original :

$$\min_{\rho_i} J = F^T U \quad (4a)$$

$$\text{sujet à } \rho \in [0, 1], \quad (4b)$$

$$KU = F, \quad (4c)$$

$$C(\rho) = \rho^p C_0, \quad (4d)$$

$$V \leq fV_0. \quad (4e)$$

Il est à noter que la valeur que doit prendre p reste un problème ouvert dans le cas général. Dans le cadre de la conception de structures passives, il a été démontré que $p > 3$ est la valeur optimale pour un matériau à coefficient de Poisson de valeur $1/3$, ce qui est souvent le cas pour la plupart des matériaux classiques. Cependant la valeur exacte dépend du coefficient de Poisson, et est décrite dans [68] pour le cas 2D et 3D.

Après avoir décrit dans les grands traits comment obtenir un problème d'optimisation SIMP bien posé mathématiquement, on va maintenant présenter son extension dans le cadre de cette thèse.

6/ Intégration du matériau piézoélectrique

6.1/ Dérivation du modèle continu 2D

6.1.1/ Hypothèses de travail

La dérivation du modèle utilisé pour simuler le matériau piézoélectrique se base sur la formulation présentée dans [73]. Cependant celle-ci est très générique et doit être adaptée à notre besoin. On va donc commencer par lister les hypothèses simplificatrices du comportement des structures étudiées. Celles-ci seront réalisées sous la forme de fines plaques piézoélectriques comme présenté sur la figure 3. Il s'agit en pratique d'un sandwich constitué d'un matériau aux propriétés piézoélectriques entouré de deux fines couches de matériau conducteur communément appelées électrodes. On supposera par la suite un ensemble d'hypothèses supposées vérifiées pour l'ensemble des structures étudiées :

1. Le ratio entre la longueur et l'épaisseur est inférieur à $1/10$
2. La plaque est limitée à uniquement des mouvements plans et n'est sujette qu'à des chargements aussi dans son plan
3. L'épaisseur des électrodes est supposée négligeable en comparaison avec l'épaisseur totale de la plaque. En conséquence l'influence mécanique et électrique des électrodes est supposé négligeable

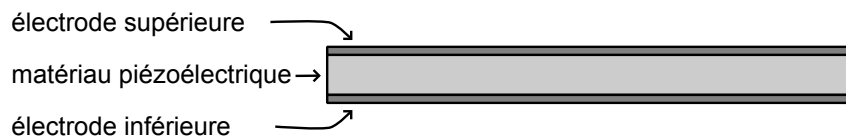


FIGURE 3 – Sandwich constitué du matériau piézoélectrique entouré de deux électrodes.

4. On supposera un comportement linéaire pour les physiques étudiées (mécanique, électrique et piézoélectrique)
5. Le matériau piézoélectrique est de la classe 4mm [66] [74]
6. Les électrodes sont parfaitement conductrices
7. La direction de polarisation est normale à la plaque selon l'axe normal au plan
8. Le potentiel sur chaque électrode est uniforme sur l'ensemble de la plaque
9. Le champ électrique résultant est aligné avec la direction de polarisation et constant selon l'épaisseur
10. L'excitation électrique du matériau est uniquement réalisée via les électrodes

On utilise maintenant ces hypothèses afin de déterminer un modèle simplifié du matériau.

6.1.2/ Tenseur multiphysique 2D

Les équations linéaires couplant les effets mécanique et électrique des matériaux piézoélectriques en négligeant les effets thermiques sont données ci-dessous en forme "e" [73] :

$$\begin{aligned}\bar{T} &= c^E \bar{S} - e \bar{E} \\ \bar{D} &= e^T \bar{S} + \varepsilon^S \bar{E}\end{aligned}\quad (5)$$

Dans l'équation 5, \bar{T} et \bar{S} sont les vecteurs des contraintes et déformations respectivement et c^E le tenseur de contraintes à champ électrique constant. \bar{D} et \bar{E} sont les vecteurs de déplacement électrique et champ électrique respectivement et ε^S le tenseur de permittivité à déformation constante. Enfin e est le tenseur piézoélectrique avec T désignant l'opérateur de transposition matricielle. Le détail de ces notations peut être retrouvé dans [66].

L'hypothèse 5 permet de définir la forme des tenseurs présentés qui vérifie une anisotropie orthotropique, qui inclut en particulier le matériau PZT [74]. On obtient ainsi la forme 3D des tenseurs mécanique, électrique et piézoélectrique :

$$\begin{aligned}
c^E &= \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E \end{bmatrix} \\
e^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\varepsilon^S &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \tag{6}
\end{aligned}$$

L'application des hypothèses 1 à 4 permet de travailler en modèle mécanique contraintes planes [75] qui est supposé aligné avec la symétrie orthogonale naturelle du matériau. En conséquence, la contrainte selon la direction 3 est supposée nulle, et la déformation selon cette même direction n'est plus une inconnue. De plus, les hypothèses 6 à 10 permettent d'obtenir uniquement un champ électrique hors plan non nul. Tous ces résultats permettent de simplifier fortement le système d'équations 5, ce qui se répercute sur les tenseurs 6. Pour cela il suffit d'appliquer la démarche suivante :

1. Passer en forme "d" afin d'isoler les vecteurs de contrainte et champ électrique du côté "variables" via les formules de passage décrites dans [66]
2. Supprimer les colonnes liées aux éléments nuls de ces vecteurs : T_3, T_4, T_5 pour les contraintes et E_1, E_2 pour le champ électrique
3. On démontre alors que $S_4 = S_5 = 0$ et $D_1 = D_2 = 0$, ainsi les lignes liées sont aussi retirées
4. De plus, on fait apparaître une autre conséquence du modèle contraintes planes avec S_3 qui est maintenant indépendant, ainsi on peut aussi sortir la ligne correspondante
5. En conséquence on se retrouve avec des tenseurs en forme "d" réduit, qu'il suffit de repasser en forme "e" avec les relations inverses aussi décrites dans [66]

On obtient en conséquence la forme simplifiée du système d'équation 5 :

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^* & c_{12}^* & 0 & -e_{31}^* \\ c_{12}^* & c_{11}^* & 0 & -e_{31}^* \\ 0 & 0 & c_{66}^* & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & 0 & \varepsilon_{33}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_6 \\ E_3 \end{bmatrix} \tag{7}$$

avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
c_{11}^{*E} &= c_{11}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, & c_{12}^* &= c_{12}^E - \frac{(c_{13}^E)^2}{c_{33}^E}, & c_{66}^* &= c_{66}^E \\
e_{31}^* &= e_{31} - e_{33} \frac{c_{13}^E}{c_{33}^E}, & \varepsilon_{33}^* &= \varepsilon_{33}^S + \frac{e_{33}^2}{c_{33}^E} \tag{8}
\end{aligned}$$

La partie mécanique de ce tenseur multiphysique peut être réécrite en l'identifiant avec le tenseur isotropique sous contraintes planes [76] :

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

On peut ainsi déterminer un module de Young et coefficient de Poisson équivalents pour cette modélisation. Pour cela on fait appel à la propriété sur le coefficient c_{66}^* pour la classe 4mm qui vérifie $c_{66}^* = \frac{1}{2}(c_{11}^{*E} - c_{12}^{*E})$ [66], ce qui conduit à la relation $c_{66} = c_{66}^* = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$. On en déduit les relations suivantes par identification :

$$E = \frac{(c_{11}^{*E})^2 - (c_{12}^{*E})^2}{c_{11}^{*E}}, \quad \nu = \frac{c_{12}^{*E}}{c_{11}^{*E}} \quad (10)$$

On retrouve ainsi une formulation isotropique du comportement des structures étudiées, ce qui simplifie fortement l'application de la méthode SIMP ainsi que l'étape de normalisation, comme présenté plus loin dans ce chapitre.

6.2/ Passage aux éléments finis

6.2.1/ Choix de l'élément

Afin de faciliter l'implémentation du matériau dans la méthode SIMP, il a été décidé de garder l'utilisation d'éléments bilinéaires à 4 noeuds en l'augmentant de l'effet piézoélectrique. On peut se permettre de travailler avec cet élément grâce à la modélisation contraintes planes déjà évoquée dans la section précédente.

La démarche classiquement utilisée consiste à intégrer aux noeuds déjà existants la physique supplémentaire. Dans notre cas, cela revient à modéliser les deux électrodes par un ajout de deux noeuds de nature électrique à chaque noeud déjà existant. Cependant dans notre configuration nous ne nous intéressons qu'à l'actionnement mécanique de la structure via l'effet piézoélectrique inverse. Cela implique qu'il n'y a pas d'intérêt à modéliser la réponse électrique de la structure, les noeuds de nature électrique ne seront utilisés que pour simuler l'application d'un potentiel extérieur. De plus, l'ensemble de la structure sera soumis à une différence de tension homogène, via l'application d'un potentiel constant sur l'ensemble des électrodes. Cette condition est appelée équipotentiel et est dérivée de l'hypothèse 8. Ainsi, l'ensemble des noeuds électriques peuvent être regroupés en un unique noeud pour chaque électrode afin d'obtenir l'élément présenté sur la figure 4.b. Un exemple de pavage d'un domaine rectangulaire est présenté sur la figure 4.a. On se retrouve ainsi avec un élément à 4 noeuds mécaniques contenant chacun deux degrés de libertés (u_i, v_i) et deux noeuds électriques avec chacun un degré de liberté ϕ_j . On passe maintenant au calcul des matrices élémentaires permettant la résolution éléments finis.

6.2.2/ Dérivation du modèle éléments finis piézoélectrique

Le choix de l'élément étant réalisé, il suffit maintenant d'appliquer les formules classiques de la théorie des éléments finis que l'on peut retrouver dans [73]. On va ici cependant s'attarder sur la démarche de calcul afin d'une part fournir les moyens de retrouver les

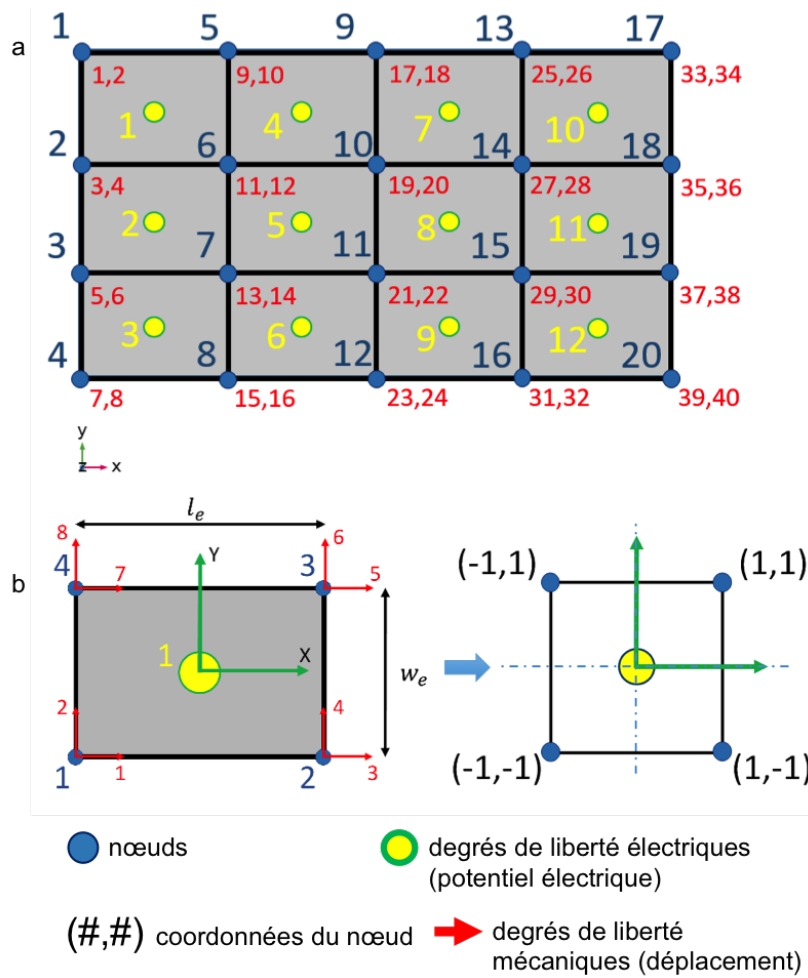


FIGURE 4 – Discrétisation élément finis du domaine de travail a) pavage avec l’élément dérivé b) élément géométrique et de référence.

résultats présentés dans la partie suivante et d’autre part faire apparaître l’intérêt de la normalisation des résultats.

On suppose que l’élément étudié est un pavé plat toujours orienté et polarisé selon \vec{z} et dont la face est un rectangle de côté l_e par w_e et d’épaisseur h comme présenté sur la figure 4.b. On utilisera aussi l’élément de référence présenté sur la figure 4.c avec les coordonnées classiques ξ et η . En conséquence, le champ de déplacement (u, v) peut être interpolé en tout point de l’élément via les valeurs aux noeuds avec les formules suivantes :

$$\begin{aligned} u &= u_1n_1 + u_2n_2 + u_3n_3 + u_4n_4 \\ v &= v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3 + v_4n_4 \end{aligned} \tag{11}$$

avec (u_i, v_i) les valeurs des déplacement à chaque noeud de l’élément et n_i les fonctions d’interpolation en coordonnées naturelles :

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & n_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ n_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & n_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (12)$$

On notera en conséquence la matrice d'interpolation des déplacements N_u :

$$N_u = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 & 0 & n_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Cette dernière permet d'utiliser la notation condensée de 11 :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = N_u \bar{u} \quad (14)$$

avec le vecteur des déplacements nodaux $\bar{u}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$.

Concernant le champ électrique, on aura supposé une variation linéaire du champ électrique via l'hypothèse 9. Ainsi on aura les relations suivantes pour la partie électrique :

$$\phi = n_{bas}\phi_{bas} + n_{haut}\phi_{haut} \quad (15)$$

avec ϕ le potentiel interpolé dans l'épaisseur, ϕ_{bas} et ϕ_{haut} respectivement le potentiel sur l'électrode basse et haute, et n_{bas} et n_{haut} les fonctions d'interpolations associées. En utilisant la variable ζ comprise entre $[-1, +1]$ selon \bar{z} , on obtient pour ces dernières :

$$n_{bas} = \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad n_{haut} = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad (16)$$

En notant de même :

$$N_\phi = [n_{bas} \ n_{haut}] \quad (17)$$

On obtient la relation condensée de 16 :

$$\phi = N_\phi \bar{\phi} \quad (18)$$

avec le vecteur des potentiels nodaux $(\bar{\phi})^T = [\phi_{bas} \ \phi_{haut}]$.

On peut alors en déduire la relation reliant les déformations avec le champ de déplacement mécanique, et de même entre le potentiel avec le champ électrique :

$$\begin{aligned} S &= \text{grad}^S(u) \iff \bar{S} = \text{grad}^S(N\bar{u}) = B_u \bar{u} \\ E &= \text{grad}(\phi) \iff \bar{E} = \text{grad}(N_\phi \bar{\phi}) = B_\phi \bar{\phi} \end{aligned} \quad (19)$$

La matrice B_u est décrite dans [77] et présentée ci-dessous :

$$\begin{aligned} B_u &= \frac{1}{|J|} [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4] \\ B_i &= \begin{bmatrix} a \frac{\partial n_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial n_i}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & c \frac{\partial n_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ c \frac{\partial n_i}{\partial \eta} - d \frac{\partial n_i}{\partial \xi} & a \frac{\partial n_i}{\partial \xi} - b \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

avec les paramètres a , b , c et d :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{4}[y_1(\xi - 1) + y_2(-1 - \xi) + y_3(1 + \xi) + y_4(1 - \xi)] \\
 b &= \frac{1}{4}[y_1(\eta - 1) + y_2(1 - \eta) + y_3(1 + \eta) + y_4(-1 - \eta)] \\
 c &= \frac{1}{4}[x_1(\eta - 1) + x_2(1 - \eta) + x_3(1 + \eta) + x_4(-1 - \eta)] \\
 d &= \frac{1}{4}[x_1(\xi - 1) + x_2(-1 - \xi) + x_3(1 + \xi) + x_4(1 - \xi)] \quad (21)
 \end{aligned}$$

où x_i et y_i sont les coordonnées des noeuds dans le domaine rectangulaire avant mise en correspondance avec l'élément de référence.

Le déterminant de la matrice jacobienne J , qui représente la transformation linéaire entre l'élément de référence et dans le domaine, est donné par :

$$|J| = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 - \eta & \eta - \xi & \xi - 1 \\ \eta - 1 & 0 & \xi + 1 & -\xi - \eta \\ \xi - \eta & -\xi - 1 & 0 & \eta + 1 \\ 1 - \xi & \xi + \eta & -\eta - 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Concernant le champ électrique, la matrice B_ϕ est immédiate et donnée par $B_\phi = 1/h$ [78].

On peut alors dériver le système d'équations vérifié par un élément en utilisant le principe variationnel d'Hamilton [73]. On obtient alors la formulation suivante :

$$\begin{bmatrix} k_{uu} & k_{u\phi} \\ k_{u\phi}^T & -k_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f} \\ \bar{q} \end{bmatrix} \quad (23)$$

avec k_{uu} la matrice de raideur mécanique, $k_{u\phi}$ la matrice de couplage piézoélectrique, $k_{\phi\phi}$ la matrice de raideur diélectrique, \bar{f} le vecteur d'effort nodaux et \bar{q} le vecteur de charge nodal. On aura utilisé les formules suivantes pour la dérivation des matrices présentées :

$$\begin{aligned}
 k_{uu} &= h \int_A B_u^T c^E B_u |J| d\xi d\eta \\
 k_{u\phi} &= h \int_A B_u^T e^T B_\phi |J| d\xi d\eta \\
 k_{\phi\phi} &= h \int_A B_\phi^T \varepsilon^S B_\phi |J| d\xi d\eta \quad (24)
 \end{aligned}$$

avec A l'aire de la surface normal de l'élément.

On notera que pour l'implémentation de ces matrices sous MATLAB, on aura utilisé une approche avec deux points de Gauss [75], ce qui donne le même résultat que l'analytique. Ce point sera détaillé dans la partie 4.

Après détermination des matrices élémentaires, il reste l'étape dite d'assemblage afin d'obtenir le système d'équation pour l'ensemble du domaine étudié. On aura alors un système d'équation global sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\phi} \\ K_{u\phi}^T & -K_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix} \quad (25)$$

où la notation en lettre capitale spécifie seulement que les vecteurs et matrices incluent l'ensemble de l'information nodal du domaine.

Ce travail de thèse se focalise uniquement sur l'actionnement de structures pour produire des mécanismes. Ainsi on se contentera de travailler sur le système d'équations représentant la conversation électrique en efforts et déplacements mécaniques, le calcul de la charge électrique n'étant pas d'intérêt :

$$K_{uu}U + K_{u\phi}\Phi = F \quad (26)$$

De plus, l'actionnement des ces structures est réalisé uniquement via l'effet piézoélectrique inverse, ainsi aucune action extérieure n'est appliquée au domaine, soit $F = 0$. En définitive on travaille avec le système suivant :

$$K_{uu}U + K_{u\phi}\Phi = 0 \iff K_{uu}U = F_{u\phi} \quad (27)$$

On aura noté $F_{u\phi}$ le terme $-K_{u\phi}\Phi$, représentant les efforts mécaniques internes produits par l'effet piézoélectrique inverse.

Ainsi ce système peut être comparé avec la modélisation mécanique classique $KU = F$ où les forces extérieures sont produites par l'effet piézoélectrique de façon interne au domaine. On va maintenant étudier la démarche de normalisation de ce système afin de démontrer son intérêt pour son implémentation numérique.

6.2.3/ Normalisation des matrices

Un défaut du système d'équations 26 est la différence d'ordre de grandeur des coefficients physiques de ces composantes. Cet écart implique des difficultés numériques pour sa résolution, ce qui engendre des instabilités pour le problème d'optimisation qui utilisent les résultats du vecteur de déplacement calculé. On propose alors une normalisation naturelle des valeurs des matrices et vecteur via un adimensionnement, limitant l'impact de ces écarts d'ordre de grandeur.

Pour cela on se place dans le cas d'un élément carré, soit $l_e = w_e = l$. A partir des formules de construction des matrices 24, il est alors possible de réaliser le calcul analytique de k_{uu} et $k_{u\phi}$. Les résultats obtenus peuvent ensuite être mis sous la forme suivante :

$$k_{uu} = k_0 \widetilde{k}_{uu}, \quad k_0 = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad (28)$$

$$(k_{u\phi})^T = \frac{le_{31}^*}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

avec \widetilde{k}_{uu} une matrice adimensionnelle de dimension 8x8 déjà présentée dans l'article original de Sigmund sur son implémentation de la méthode SIMP [79]. On fait ainsi apparaître ici des facteurs de normalisation k_0 et α_0 qui contiennent l'ensemble de la physique des matrices.

On peut pousser plus loin la démarche sur le terme piézoélectrique en utilisant la notation pour la différence de tension $V = \phi_{haut} - \phi_{bas}$, ce qui conduit à la simplification suivante :

$$\begin{aligned} (k_{u\phi}\bar{\phi})^T &= \frac{Vle_{31}^*}{2} [-1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1] \\ &= \alpha_0 \left(\widetilde{f_{u\phi}}\right)^T, \quad \alpha_0 = \frac{Vle_{31}^*}{2} \end{aligned} \quad (30)$$

avec α_0 le facteur de normalisation de la matrice piézoélectrique, qui joue un rôle équivalent à k_0 , contenant toute la "physique" du produit $k_{u\phi}\bar{\phi}$. On aura utilisé la notation $\widetilde{f_{u\phi}}$ car il est possible de montrer que la dimension de α_0 est en Newtons. En effet, on peut interpréter le produit $k_{u\phi}\bar{\phi}$ comme l'effet des forces internes générées par l'effet piézoélectrique inverse dans l'élément suite à l'application d'une tension extérieure. On aura donc le système suivant :

$$k_0\widetilde{k_{uu}}\bar{u} = -\alpha_0\widetilde{f_{u\phi}} \quad (31)$$

Cette formulation est suffisante pour être intégrée à la méthode SIMP, mais une dernière étape de normalisation est possible. En effet :

$$k_0\widetilde{k_{uu}}\bar{u} = -\alpha_0\widetilde{f_{u\phi}} \iff \widetilde{k_{uu}} \left(-\frac{k_0}{\alpha_0}\right) \bar{u} = \widetilde{f_{u\phi}} \quad (32)$$

$$\iff \widetilde{k_{uu}} \left(\frac{1}{u_0}\right) \bar{u} = \widetilde{f_{u\phi}} \quad (33)$$

$$\iff \widetilde{k_{uu}}\tilde{u} = \widetilde{f_{u\phi}} \quad (34)$$

On aura ainsi noté $u_0 = -\frac{\alpha_0}{k_0}$ et $\bar{u} = u_0\tilde{u}$ où \tilde{u} est le vecteur des déplacements nodaux normalisé.

Il est important de réaliser cette manipulation. En effet, un avantage de celle-ci est de travailler avec un système d'équations entièrement indépendant des propriétés physiques du matériau. Ceci est une des propriétés les plus intéressantes à vérifier lors de l'application de la méthodologie SIMP, car elle permet d'obtenir des résultats beaucoup plus flexibles pour la réalisation, permettant une symétrie d'échelle. Il est à noter que le coefficient de Poisson est toujours présent dans la matrice de raideur normalisée $\widetilde{k_{uu}}$.

Un second avantage porte sur l'implémentation de ce modèle numérique. En effet les grandeurs associées aux propriétés mécaniques et piézoélectriques présentent des valeurs d'ordre de grandeurs différents. Cependant avec cette étape de normalisation chaque membre de l'équation 34 sont dans un ordre de grandeur compris en 0 et -2. On réduit ainsi fortement les erreurs d'arrondis voir de conditionnement qui peuvent apparaître lors de la manipulation d'un tel système.

A noter que la démarche présentée est en l'état limitée par des hypothèses sur la forme carré de l'élément et a surtout pour but de montrer l'analyse qui peut en être faite. On peut cependant facilement l'étendre à une forme rectangle quelconque en posant $k_0 = \|\widetilde{k_{uu}}\|_\infty$ et $\alpha_0 = \|\widetilde{k_{u\phi}\bar{\phi}}\|_\infty$, avec la notation de la norme infinie pour un tenseur quelconque x donnée par $\|x\|_\infty = \max_i(|x_i|)$. C'est cette démarche qui est présentée dans l'implémentation sous MATLAB décrite dans la partie 4 pour sa plus grande flexibilité.

6.3/ La polarisation comme variable d'optimisation

Afin de pouvoir intégrer la physique piézoélectrique dans la méthode SIMP, deux points importants sont à préciser : la prise en compte du sens de la polarisation comme variable d'optimisation ainsi que le schéma de pénalisation à développer en conséquence.

6.3.1/ Principe

On souhaite avoir la liberté de modifier le sens de la polarisation du matériau tout en gardant sa direction alignée avec la normale au plan. Cette vision plutôt interne suppose que chaque élément à optimiser aura une polarisation indépendante de ses voisins, ce qui rend possible la contraction ou expansion localement selon les besoins du cahier des charges. Cependant on peut aussi avoir une vision externe à l'élément et imaginer que plutôt d'inverser le sens de la polarité du matériau, simplement prendre l'opposé de la tension d'excitation pour cet élément, ce qui aura en pratique le même effet. Ainsi en pratique seul le signe du vecteur force influence le sens de la polarisation perçue de l'élément.

En conséquence, pour pouvoir modifier le comportement de l'élément, il suffit de pré multiplier le terme $\widetilde{f}_{u\phi}$ par un facteur variant entre $[-1, +1]$ pour obtenir l'effet souhaité. Pour garder une certaine homogénéité vis à vis des variables de densité, on utilisera un facteur sous la forme $(1 - 2p_e)$ pour le vecteur de force piézoélectrique, soit $(1 - 2p_e)\widetilde{f}_{u\phi}$, avec $p_e \in [0, 1]$ représentant le sens de polarisation. Ainsi $p_e = 0$ représente un sens de -1, soit une contraction du matériau et $p_e = 1$ un sens de +1, soit une expansion du matériau, en supposant le même signe de tension appliqué dans les deux cas. Afin d'alléger les notations, on fera l'abus de langage d'appeler p_e simplement polarisation au lieu de direction de polarisation.

6.3.2/ Schéma de pénalisation pour matériau piézoélectrique

Afin d'obtenir un modèle complet pour pouvoir être intégré à la méthode SIMP, il est nécessaire d'avoir un schéma de pénalisation du matériau bien défini. Diverses approches ont déjà été proposées comme présenté dans [58, 64, 80], la grande majorité étant directement appliquées sur les tenseurs physiques c^E , e and ε^S . Cependant, l'application d'un tel schéma sur chacun des coefficients des tenseurs augmente fortement le temps de calcul, qui est déjà naturellement la limitation des calculs éléments finis, et donc de la méthode SIMP [81].

On propose ici d'approcher la démarche de pénalisation en augmentant l'approche initiale en l'appliquant directement sur la matrice de raideur et vecteur de force. On obtient alors une formulation simple nommée PEMAP-P [82] en fonction de la densité ρ et de la polarisation p_e modulant la matrice de raideur et le vecteur de force comme présenté ci-dessous :

$$\widetilde{k}_{uu} \rightarrow k_p(\rho)\widetilde{k}_{uu} \quad (35)$$

$$\widetilde{f}_{u\phi} \rightarrow k_f(\rho, p_e)\widetilde{f}_{u\phi} \quad (36)$$

avec

$$k_p(\rho) = (k_p - k_{min})\rho^{p_k} + k_{min} \quad (37)$$

$$k_f(\rho, p_e) = (f_p - f_{min})(2p_e - 1)^{p_p}\rho^{p_f} + f_{min} \quad (38)$$

où on aura noté p_k et p_f respectivement les coefficients de pénalisation de la raideur et de force, ainsi que k_{min} et f_{min} les valeurs minimales de raideur et forces respectivement. Ainsi la densité impacte la matrice de raideur ainsi que le vecteur force indépendamment, et la polarisation uniquement le vecteur force selon son propre coefficient.

On aura fait apparaître comme dans le cas purement mécanique un facteur de force minimale, toujours aussi pour éviter les problèmes numériques sous-jacents. Il reste maintenant à fixer les valeurs des différentes valeurs des coefficients. Concernant les valeurs de k_p , f_p , k_{min} and f_{min} , nous avons suivi les valeurs recommandées dans les articles de références [67,79] : $k_p = f_p = 1$ et $k_{min} = f_{min} = 10^{-9}$.

Le choix des coefficients de pénalisation s'avère moins contraint. On suit toujours la règle essentielle qu'ils doivent tous être supérieur à 1 afin d'avoir des valeurs de densité et de polarisation qui tendent vers leurs valeurs extrémales de 0 et 1. On a aussi la règle présentée dans l'article de référence [83] qui démontre qu'une valeur supérieure à 3 est nécessaire pour p_k .

Enfin pour p_f , des travaux ont été menés sur son influence en conjonction avec p_k , comme par exemple [58]. Dans notre cas avec une optimisation en actionnement, la condition $p_f - p_k > 0$ a été proposée en condition suffisante pour garantir la convergence du schéma. Cependant le choix final reste à la discrétion de l'utilisateur. Dans ces travaux, il a été choisi de prendre $p_f = p_k = 3$, ce qui a permis d'obtenir des résultats satisfaisants sur les cahiers des charges étudiés. En conséquence, cette problématique n'a pas été davantage explorée. Pour conclure sur p_p , la valeur de 1 semble être le meilleur choix disponible comme présenté dans [82], ainsi on aura aussi gardé la condition $p_p = 1$.

7/ Conclusion

Cette partie a présenté les différents éléments nécessaires à la compréhension de l'extension à la physique piézoélectrique de l'approche SIMP. En débutant depuis la formulation en approche purement mécanique, la formulation éléments finis pour le cas de plaques piézoélectriques fines a été présentée en détaillant la dérivation de la détermination du système linéaire permettant de simuler ces structures. Il s'en est suivi le détail sur la démarche importante de normalisation permettant d'améliorer la résolution de ce système. Enfin, la prise en compte de la polarisation comme variable d'optimisation a été présentée dans le but d'augmenter la liberté de la méthode SIMP piézoélectrique, et en particulier comment prendre en compte son impact sur la pénalisation.

Il est important de préciser que l'ensemble de cette modélisation se base sur l'ensemble des hypothèses présentées en début de partie. En particulier, l'hypothèse d'un comportement linéaire est la plus contraignante car souvent limitante en particulier dans un cadre piézoélectrique ou les phénomènes d'hystérésis et/ou de dérive peuvent apparaître, voire de façon plus fondamentale avec simplement un comportement grand déplacement. Cependant le modèle dérivé est une étape importante dans la prise en compte des effets piézoélectriques et constitue une base saine pouvant être augmentée selon l'axe de recherche souhaité, que ce soit sur la prise en compte de phénomènes non linéaires comme déjà évoqués ou un passage dans le domaine dynamique.

On va maintenant présenter l'implémentation pratique de cette démarche de modélisation via un code développé sous Matlab dans la partie suivante.

Quatrième partie

Implémentation de la méthode sous MATLAB

La partie précédente a exposé l'ensemble des étapes nécessaires pour l'intégration du matériau piézoélectrique dans la méthode SIMP. Il s'agit de prendre en compte la physique de ce matériau par la méthodologie. Après avoir présenté le modèle linéaire 3D du matériau, nous nous sommes intéressés à la dérivation du modèle plaque 2D. Ce dernière correspond à une couche piézoélectrique prise en sandwich entre deux électrodes. Il est largement employé pour la conception de mécanismes actifs planaires [53, 82, 84]. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la formulation par éléments finis de ce modèle. Enfin, l'intégration du matériau se fait naturellement par l'extension du schéma de pénalisation en considérant à la fois la densité et la polarité du matériau.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'algorithme d'optimisation permettant de mettre en œuvre la méthode SIMP augmentée. Il s'agit de développer un code MATLAB pour la résolution du problème de conception à base d'optimisation topologique appliquée aux structures piézoélectriques. En respectant la formulation et la résolution d'un problème d'optimisation topologique, le code est articulé selon trois sections principales : (i) initialisation, (ii) optimisation, (iii) traitement et affichage des résultats. Chaque section est présentée et le code associé est exposé dans la suite de cette partie du manuscrit.

8/ Algorithmes d'optimisation topologique

Historiquement, le problème de minimisation des déformations d'une structure mécanique soumise à différents chargements constituait un objectif d'ingénierie classique [85]. Dans la continuité de ces travaux, Bendsoe et Kikuchi [86] ont ouvert la voie à l'optimisation topologique. Depuis, la méthode fut développée et largement utilisée dans la littérature pour la résolution de différents problèmes. Dans ce sillage, plusieurs codes ont été développés pour implémenter la méthode SIMP dans différents langages logiciels notamment MATLAB. Le premier et fondateur d'une longue série de codes fut le code MATLAB 99 lignes proposé par Sigmund en 2001 [67]. Ce dernier est simple à implémenter et comprendre et est très efficace pour la résolution des problèmes de minimisation de compliance sous hypothèse de comportement linéaire. Par la suite, Andreassen et al ont publié le code MATLAB 88 lignes en se basant sur le code de Sigmund [79]. Ce dernier a pour but d'améliorer la vitesse d'exécution en utilisant les matrices de connectivité qui facilitent la procédure d'assemblage des matrices des raideurs élémentaires. Dans la continuité de ces développements, Liu and Tovar ont proposé en 2014 le code TOP3D qui consiste en une version 3D du code 88 lignes [87]. En 2019, un autre code a été développé par Chen et al [88]. Ce code comporte 213 lignes et permet particulièrement d'optimiser des structures 2D ayant une géométrie non-linéaire. Enfin, très récemment une version 2.0 du code original a été présentée par Ferrari et Sigmund, améliorant encore les gains en vitesse de calcul du code en 88 lignes, et intégrant une extension en 3D, allant jusqu'à une réduction de quasiment moitié du temps de calcul [89]. Au delà de l'approche SIMP, d'autres codes et permettent d'implémenter l'approche level-set [90, 91], l'approche BESO [92] ou bien l'approche par projection géométrique [93].

Ces différents codes ont fortement contribué à faciliter et à simplifier la formalisation algorithmique de l'optimisation topologique. En particulier, ils ont permis d'exploiter l'optimisation topologique dans la résolution de différents problèmes de conception notamment la minimisation de la compliance, les mécanismes compliant, la conduction thermique, l'électrostatique, le magnétisme dans les machines tournantes, l'électronique, les MEMS, la fabrication additive, etc. Cependant, les codes liés à l'optimisation de matériaux actifs

et en particulier les matériaux piézoélectriques sont très peu exposés dans la littérature. Pour pallier cette limitation, nous proposons ici d'implémenter la méthode SIMP exposée dans la partie précédente sous MATLAB sur base du code original de Bendsoe.

9/ Implémentation de la méthode SIMP étendue

Pour des raisons à la fois historiques et pratiques, nous avons choisi d'utiliser la plateforme MATLAB pour implémenter la méthode SIMP étendue. Premièrement, la plupart des codes en accès libre sont développés sous MATLAB (les logiciels types COMSOL, ANSYS, etc permettent également de traiter un problème d'optimisation topologique néanmoins ils n'offrent pas la possibilité de modifier le code source de l'optimisation). Ces codes constituent souvent un point de départ pour tous les nouveaux codes notamment celui exposé dans ce travail. Deuxièmement, MATLAB est un logiciel simple à prendre en main en plus d'être très largement répandu au sein de la communauté scientifique.

L'objectif est non seulement de proposer un algorithme d'optimisation topologique mais aussi d'exposer tous les détails permettant aux scientifiques, industriels et enseignants d'exploiter le code pour d'autres fins applicatives. Comme tout problème d'optimisation, la résolution débute par une phase d'initialisation où l'ensemble des paramètres et conditions initiales est défini. Viendra ensuite la phase la plus importante, celle d'optimisation où la mise à jour des variables d'optimisation sera effectuée à chaque itération. Cette mise à jour est étroitement liée au choix de la fonction objectif et s'effectue au travers du calcul de sa sensibilité. Par ailleurs, un filtrage des sensibilités où des densités du matériau est souvent nécessaire pour supprimer les artefacts numériques notamment les effets damiers (checkerboard pattern). Enfin, le traitement et l'affichage permet de simplifier l'interprétation des résultats d'optimisation.

Nous reviendrons dans la suite de cette partie plus en détail sur chaque section de l'algorithme d'optimisation. Par ailleurs, on se servira de la conception d'un actionneur piézoélectrique comme fil rouge tout au long de la construction de l'algorithme d'optimisation.

9.1/ Initialisation

La phase d'initialisation a pour but de définir et d'assigner des valeurs numériques aux différentes variables et paramètres qui découlent de la formalisation mathématique du problème d'optimisation. Cette partie du code comporte, entre autre, les définitions générales liées notamment à la géométrie du domaine de conception, les paramètres du matériau piézoélectrique, le modèle éléments finis ainsi que la définition de la sortie dans le cas de la conception d'actionneur (ce dernier point varie en fonction de l'objectif à optimiser par l'algorithme).

9.1.1/ Définitions générales

Dans cette sous partie il s'agit de définir les dimensions du domaine de conception, les paramètres du maillage par éléments finis, c-à-d, le nombre d'éléments finis selon l'axe x et l'axe y , les coefficients de pénalisation, le type de filtrage et son paramétrage, le nombre maximum d'itérations et la raideur du ressort matérialisant l'interaction de l'extrémité de

l'actionneur avec son environnement. Ces définitions concernent également les critères d'arrêt de l'algorithme. Contrairement aux problèmes mécaniques passifs, deux critères d'arrêt sont considérés ici : (i) un critère classique sur un minimum de variation de densité entre deux itérations successives et (ii) un critère additionnel sur le nombre d'itérations maximale. Ce dernier critère plus "brut" a pour but de sortir de l'optimisation si l'algorithme produit un résultat oscillant, ne pouvant pas déclencher le premier critère. L'ensemble de ces définitions se traduit par les lignes de codes suivantes :

```

3 %% GENERAL DEFINITIONS
4 Lp = 1e-2; % Piezoelectric plate length (m) in x direction
5 Wp = 0.5e-2; % Piezoelectric plate width (m) in y direction
6 h = 1e-4; % Piezoelectric plate Thickness (m) in z direction
7 nelx = 150; % Number of element in x direction
8 nely = 75; % Number of element in y direction
9 penalKuu = 3;penalKup = 4;penalPol = 1; % Penalization factors
10 Ks = 0.005; %2e-2/3 End spring stiffness
11 volfrac = 0.3; % Volume fraction
12 rmin = 2.5; % Filter radius
13 ft = 1; % Filter type - 1 for sensitivity, 2 for density
14 Max_loop = 1000; % Maximum number of Iteration

```

9.1.2/ Paramètres du matériau

Les paramètres du matériau piézoélectrique concernent, entre autres, le coefficient de couplage e_{31}^* , ainsi que les paramètres du tenseur de rigidité issu de l'application de l'hypothèse de contraintes planes donnée par les équations 8 et 10. Le matériau choisi ici est le PZT 4 qui est très largement répandu dans la littérature. D'autres types de matériaux piézoélectriques de la classe 4mm peuvent être utilisés en assignant les valeurs correspondantes aux différents paramètres cités ci-dessus.

```

20 %% MATERIAL PROPERTIES (PZT 4)
21 e31 = -14.9091; % e31 Coupling coefficient
22 C = zeros(3,3); % Creation of null mechanical stiffness tensor
23 C(1,1) = 9.1187e+10;C(2,2) = C(1,1);
24 C(1,2) = 3.0025e+10;C(2,1) = C(1,2);
25 C(3,3) = 3.0581e+10;

```

9.1.3/ Modèle éléments finis

Comme indiqué dans la partie III, la résolution numérique d'un problème d'optimisation topologique passe nécessairement par une discrétisation en éléments finis. Pour cela, nous avons adapté le code MATLAB [77] développé pour les matériaux passifs à base d'éléments bilinéaires quadratiques. Cette extension permet ainsi de calculer les matrices élémentaires en fonction de la géométrie et de la résolution souhaitée du maillage en s'appuyant sur la méthode de quadrature de Gauss. Dans un premier temps, les points de quadrature de Gauss sont définis dans la matrice GP . Ensuite, le calcul des matrices élémentaires s'effectue à l'intérieur d'une boucle (lignes 27 à 49) en fonction de la matrice GP comme suit :

```

47 kuu = kuu+h*J*transpose(Bu)*C*Bu; % Mechanical stiffness matrix:

```

```
48 kup = kup+ h*J*transpose(Bu)*e'*Bphi; % Piezoelectric coupling
    matrix:
```

Il y a lieu de noter que des facteurs de normalisation ont été rajoutés dans ce code pour s'affranchir des instabilités numériques dues aux grands écarts entre les grandeurs manipulées comme décrit dans la section 6.2.3. Leurs calculs s'effectuent comme suit :

```
50 k0 = max(abs(kuu(:))); alpha = max(kup(:)); % Normalization Factors
51 kuu = kuu/k0; kup = kup/alpha; % Normalization
```

Dans un second temps, les matrices élémentaires sont assemblées pour constituer les matrices globales données par l'équation 27. Cet assemblage débute par la constitution de la matrice de connectivité, connue sous le nom "edofMat" [46], à l'aide de la numérotation illustrée dans la figure 4. Cette figure représente une discrétisation grossière avec une numérotation des éléments et des nœuds similaire à celle décrite dans [45, 46]. En parallèle, un vecteur de connectivité des potentiels noté "edofMatPZT" est constitué pour prendre en considération le degré de liberté électrique de l'élément piézoélectrique. Le calcul de "dofMat" et de "dofMatPZT" s'effectue comme suit :

```
54 nodenrs = reshape(1:(1+nelx)*(1+nely), 1+nely, 1+nelx);
55 edofVec = reshape(2*nodenrs(1:end-1, 1:end-1)+1, nele, 1);
56 edofMat = repmat(edofVec, 1, 8)+repmat([0 1 2*nely+[2 3 0 1] -2 -1],
    nele, 1);
57 edofMatPZT = 1:nele;
```

Avec "nele" le nombre d'éléments finis, "nodenrs" la matrice de numérotation des nœuds et "edofVec" le vecteur des nœuds du premier élément. Enfin, l'assemblage des matrices globales "Kuu" et "Kup" s'effectue comme suit :

```
58 iK = kron(edofMat, ones(8, 1))';
59 jK = kron(edofMat, ones(1, 8))';
60 iKup = edofMat';
61 jKup = kron(edofMatPZT, ones(1, 8))';

109 sKuu = kuu(:)*(Emin+xPhys(:)'.^penalKuu*(E0-Emin));
110 sKup = kup(:)*(eMin+xPhys(:)'.^penalKup*(e0-eMin).*((2*pol(:)-1)'.^
    penalPol));
111 Kuu = sparse(iK, jK, sKuu); % Global stiffness matrix
112 Kup = sparse(iKup(:), jKup(:), sKup(:)); % Global piezoelectric
    coupling matrix
```

Il est important de noter que le calcul des matrices élémentaires "sKuu" et "sKup", et donc les matrices globales "Kuu" et "Kup", s'appuie sur le schéma de pénalisation (interpolation) du matériau piézoélectrique donné par l'équation 38 (voir section précédente). Étant directement liées à la densité "xPhys" et la polarité "pol" du matériau, ces matrices sont mises à jour à chaque itération.

9.1.4/ Conditions aux limites

Les conditions aux limites concernent les degrés de liberté mécaniques fixes et libres. Elles sont respectivement définies par les matrices "fixeddofs" et "freedofs" comme reporté dans [46] et [45]. Par exemple, dans le cas où le coté gauche du domaine de conception

est encastéré, la ligne de code suivante peut être utilisée pour définir les numéros des noeuds contraints par ces encastrements :

```
70 fixeddofs1 = 1:2*(nely+1); % Main supports
```

9.1.5/ Définition de la sortie : cas de l'actionneur

L'objectif de cette partie du code est de définir un point du domaine de conception de l'actionneur pour lequel la maximisation du déplacement est souhaitée. Ce point est défini par son numéro de noeud "DMDOF" auquel on associe un ressort de raideur ajustable. Ce ressort permet de simuler la force de réaction exercée par un objet imaginaire. Ainsi, la valeur de la raideur de ce ressort est ajoutée à la matrice des raideurs comme suit :

```
113 Kuu(DMDOF, DMDOF) = Kuu(DMDOF, DMDOF) + Ks; % Assembling the stiffness
    of the modeled spring
```

Avec "Ks" la raideur du ressort. Le choix de la valeur de raideur permet au concepteur de pondérer deux objectifs antagonistes : augmenter la force (raideur importante) ou maximiser le déplacement en sortie (raideur très faible) de l'actionneur.

9.2/ Optimisation

Au terme de l'initialisation des paramètres et des variables nécessaires à la formalisation du problème de conception, l'algorithme d'optimisation topologique peut être lancé. Ce dernier a pour but de mettre à jour, à chaque itération, la densité et la polarité de chaque élément du maillage vis à vis de l'objectif et en respectant les contraintes du cahier des charges.

9.2.1/ Fonction objectif

Par définition, l'optimisation consiste à maximiser ou à minimiser une fonction objectif soumise à une ou plusieurs contraintes. Dans le cas d'un actionneur piézoélectrique, une fonction objectif couramment utilisée est la maximisation du déplacement en sortie. Pour calculer cette fonction, on commence par le déplacement mécanique dû à l'application d'une tension. Ensuite, on calcule les déplacements mécaniques via la résolution du système linéaire de l'équation 27 comme suit :

```
114 Uu(freedofs, :) = Kuu(freedofs, freedofs) \ (-Kup(freedofs, :) * Up); %
    Mechanical displacement
```

Enfin, la fonction objectif, c-à-d, le déplacement en sortie peut être calculée via l'extraction de la valeur du déplacement au noeud par le vecteur sélecteur "L" (la présence de ce vecteur est détaillé dans la section 11.1.2) :

```
116 CE = -(sum(L(edofMat) .* Uu(edofMat), 2));
117 c = full(sum(CE)); % Objective Function
```

9.2.2/ Analyse de la sensibilité de la fonction objective

L'analyse de la sensibilité de la fonction objective commence par le calcul du vecteur adjoint au travers de l'équation 40 :

```
118 Adjoint(freedofs, :) = Kuu(freedofs, freedofs)\L(freedofs, :); %
    Adjoint vector
```

Ensuite le calcul des sensibilités, donné par les équations 39,41,42 et 44, s'effectue comme suit :

```
119 DCKuuE = sum((Adjoint(edofMat)*kuu).*Uu(edofMat), 2);
120 DCKupE = (Adjoint(edofMat)*kup).*Up(edofMatPZT);
121 DCKuu = reshape(DCKuuE, [nely, nelx]);
122 DCKup = reshape(DCKupE, [nely, nelx]);
123 dc = penalKuu*(E0-Emin)*xPhys.^(penalKuu-1).*DCKuu+...
124 penalKup*(E0-Emin)*((2*pol-1).^(penalPol)).*xPhys.^(penalKup-1).*
    DCKup; % sensitivity with respect to x
125 dp = 2*penalPol*((2*pol-1).^(penalPol-1)).*xPhys.^(penalKup).*DCKup;
    % sensitivity with respect to p
126 dv = ones(nely, nelx); % Volume sensitivity
```

où "dc" et "dp" sont les sensibilités par rapport à la densité "xPhys" et la polarité "pol" respectivement. "dv" est la sensibilité de la contrainte de volume par rapport à "xPhys". Notons ici que les sensibilités contenant la raideur "kuu" et la matrice de couplage "kup" sont calculées séparément. Cela permettra d'appliquer des coefficients de pénalisation différents pour chaque matrice au besoin.

9.2.3/ Algorithme d'optimisation

Un problème d'optimisation peut être résolu en employant différentes approches telles que le critère d'optimalité (OC), la programmation séquentielle linéaire (PSL), la MMA (Method of Moving Asymptotes), etc. Pour des raisons de simplification, nous avons choisi d'utiliser la méthode OC standard. Son implémentation pour les densités est inchangée, seules les variables de polarisation sont à intégrer, ce qui se traduit par l'ajout d'une ligne de code comme suit :

```
145 pol = max(0, max(pol-move, min(1., min(pol+move, sign(-dp))))); % OC
    update of polarization
```

9.2.4/ Filtrage

L'utilisation brute des densités et des sensibilités génère souvent des artefacts numériques. Ces dernières donnent lieu à des structures en damiers difficiles à interpréter et très complexes à mettre en œuvre physiquement. Pour s'en affranchir, l'utilisation d'un filtrage est fortement préconisée en optimisation topologique. Ici, nous avons utilisé les mêmes lignes de code de filtrage de densité présentées dans [79]. Nous avons également implémenté un filtrage pour les sensibilités. En général, ce dernier est moins préconisé que le filtrage de densités, ce dernier ayant de meilleurs fondements mathématiques et une interprétation des résultats plus pertinente [79]. Néanmoins les utilisateurs ont le choix

d'utiliser l'un ou l'autre en fonction de leurs problèmes de conception via le paramètre global "ft" présenté en début de partie.

9.3/ Affichage des variables d'optimisation

Pour donner un aperçu graphique du résultat d'optimisation, les densités et les polarités sont traitées puis affichées à chaque itération. Pour plus de clarté, les deux entités sont tracées sur deux figures séparées. Dans le cas des densités deux couleurs sont utilisées, le noir représentant la présence de matériau et le blanc son absence. Quant à la polarisation, un spectre de trois couleurs est utilisé : le rouge et le bleu renvoient respectivement aux zones polarisées positivement et négativement tandis que le vert renvoie aux zones neutres, c-à-d, non polarisées. Notons ici que l'utilisation du critère d'optimalité "OC" optimise la polarisation même pour des éléments à densité faible voire nuls. En conséquence, pour éliminer toute confusion, on pré multiplie les matrices de polarisation par la densité de l'élément afin de produire un filtrage des données en polarisation. Ainsi, les éléments dont les densités sont les plus faibles (vide ou pas de matériau) se voient attribuer une couleur verte, c-à-d, une polarité neutre, malgré le fait que la polarisation soit potentiellement d'une autre valeur.

Enfin, la compilation de l'ensemble des lignes de code exposées ci-dessus est reportée dans [94]. En accès libre, il peut être utilisé par un simple copier/coller. Au delà de l'actionnement le papier [94] propose un autre code dédié à la conception de récupérateurs d'énergie à base de matériaux piézoélectrique. Il s'agit du même mécanisme d'optimisation mais avec des équations et des objectifs différents, beaucoup plus avancé car intégrant l'effet piézoélectrique direct ainsi que l'aspect vibratoire des structures.

10/ Conclusion

En somme, cette partie a exposé étape par étape l'implémentation MATLAB de la méthode SIMP étendue. Dans un premier temps, le modèle éléments finis d'une plaque piézoélectrique a été implémenté et le schéma d'interpolation PEMAP-P a été utilisé pour pénaliser les variables d'optimisation (les densités ainsi que les polarités). Ensuite, le critère d'optimalité empirique "OC" a été implémenté pour mettre à jour les variables d'optimisation et un affichage avec un code couleur a été utilisé pour simplifier l'interprétation du résultat d'optimisation.

Il est à noter que le code exposé ici ne permet pas forcément d'obtenir le meilleur résultat. Le fait de modifier les coefficients de pénalisation, la fraction de volume ainsi que la nature et le rayon du filtre peut produire des des résultats différents. Cependant, l'analyse des résultats en fonction des paramètres n'est pas le sujet de ce travail de thèse et reste plus globalement un champ de recherche important. En revanche, ce code peut être vu comme un point de départ pour simplifier voire accélérer la prise en main de l'optimisation topologique de structures piézoélectriques, et reste très modulable pour son augmentation dans le but d'intégrer d'autres effets plus complexes, comme présenté dans [94] pour la conception de structure à but de récupération d'énergie. Nous reviendrons dans la suite du manuscrit sur l'application de ce code et les modifications apportées pour concevoir un actionneur 1D et un positionneur 2D.

Cinquième partie

Conception et réalisation de structures piézoélectriques

Après avoir décrit l'implémentation de la méthode d'optimisation topologique SIMP étendue, nous appliquons l'algorithme pour la conception de structures piézoélectriques. Deux structures sont ainsi exposées pour démontrer et valider l'approche proposée. La première réalisation concerne un actionneur piézoélectrique 1D quant à la seconde elle concerne un micro-positionneur 2D. Pour chaque réalisation, nous commencerons par décrire le cahier de charges. Ensuite, on s'intéressera à son optimisation. Enfin, nous exposerons les résultats sous la forme d'une validation numérique et expérimentale des prototypes réalisés.

11/ Actionneur 1D

Le principe d'un actionneur 1D est de pouvoir produire un déplacement précis dans une direction. Ici on utilisera donc l'effet piézoélectrique inverse pour avoir un actionnement réalisé via l'alimentation électrique de la structure.

11.1/ Cahier des charges et résultats

11.1.1/ Définition du besoin

On présente sur la figure 5.a l'expression du besoin utilisé pour concevoir l'actionneur 1D. On travaille sur un domaine carré de longueur 25 mm et d'épaisseur 127 μm présenté sur la figure de gauche (a). Celui-ci sera encastré sur la totalité d'un de ses côtés représenté par les symboles bleu en bas du domaine. Enfin, on souhaite ici pouvoir produire un déplacement permettant de déplacer un objet au centre du côté antagoniste à celui encastré.

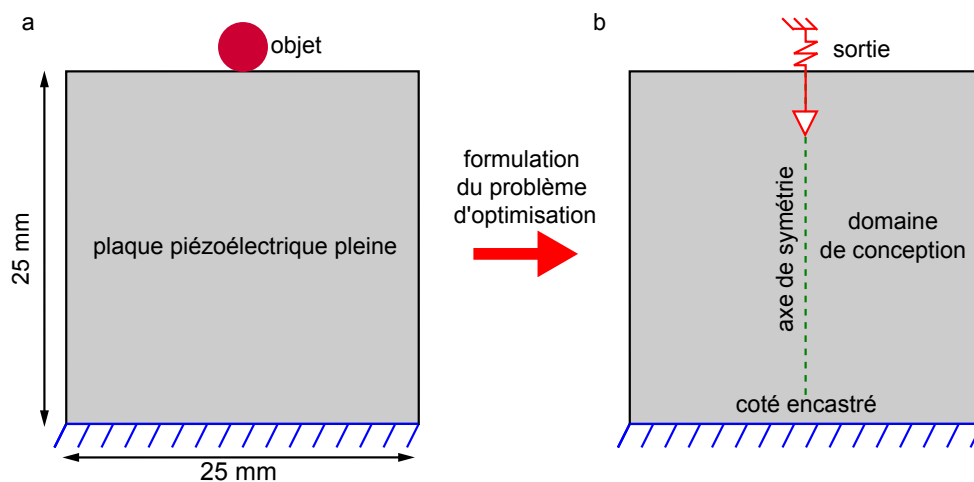


FIGURE 5 – Cahier des charges géométrique et mécanique de l'actionneur 1D. Le domaine de conception est représenté en gris.

Cette expression du besoin peut ensuite être transformée en un cahier des charges pour être implémenté dans le code MATLAB présenté précédemment. Premièrement, l'objet avec lequel la structure doit interagir sera modélisé par une raideur et une force

de contact comme présenté sur 5.b. Cette démarche est classique dans la conception de mécanismes compliants, la valeur de la raideur pouvant être utilisée pour moduler l'amplitude du déplacement en sortie, avec faible raideur impliquant un grand déplacement. Plus de détail est disponible dans [68]. Concernant la force de contact, celle-ci est la représentation du vecteur L utilisé dans le calcul des sensibilités, présenté dans la section suivante.

On peut aussi utiliser la symétrie géométrique et mécanique du domaine afin de réduire le domaine d'optimisation via l'axe de symétrie vertical présenté sur la figure 5.b. Cela permet en pratique de diviser par deux la quantité de variables à optimiser.

Enfin, les propriétés des matériaux sont déterminées à partir des équations 8 et 10. Le matériau, avec pour nom commercial PSI-5H4E de l'entreprise Piezo Systems, est un équivalent du PZT-5H. En substituant ses propriétés dans les formules présentées, on obtient $E = 66.2$ GPa, $\nu = 0.298$, $e_{31}^* = -28.30$ C/m et $\varepsilon_{33}^*/\varepsilon_0 = 1932$ avec ε_0 la permittivité du vide.

11.1.2/ Objectif et sensibilité

Le but recherché est d'obtenir un déplacement le plus grand possible en sortie, ainsi la fonction objectif utilisée sera celle de [82], soit de la forme $J_{out} = -u_{out}$. Le signe moins est appliqué car on travaille sur une formulation en minimisation de J_{out} . Il est à noter que d'autres approches sont possibles, comme celle présentée dans [57]. On suit alors la démarche classique de réécriture de cette fonction objectif comme présenté dans [37], en posant $J_{out} = -L^T U$ ou L est un vecteur "sélecteur" avec une valeur de 1 correspond au noeud de déplacement souhaité, et zéro sinon. Cependant cette valeur de J_{out} n'a pas de sens tant que les propriétés physiques n'ont pas été intégrées. Il a été alors proposé de normaliser cette fonction objectif par sa valeur sur un domaine non optimisé plein, notée J_0 , qui correspond simplement au déplacement d'une plaque pleine. On peut alors interpréter sa valeur comme le gain en déplacement obtenu par le processus d'optimisation de la structure. On notera la fonction objectif finale $J = \frac{J_{out}}{J_0} = -L^T U$ avec L qui contient dorénavant le facteur de normalisation $1/J_0$.

Afin de pouvoir appliquer l'algorithme d'optimisation continu, il est nécessaire d'avoir les dérivés ou sensibilités de l'objectif vis à vis des variables d'optimisation, ici la densité ρ et la polarisation p_e . On utilise pour cela la démarche classique de méthode de l'adjoint, comme présenté dans [37]. On obtient alors pour la sensibilité à la densité :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (-L^T U + \Lambda^T (K_{uu} U + F_{u\phi})) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \rho} ((-L^T + \Lambda^T K_{uu}) U + \Lambda^T F_{u\phi}) \\
 &= \Lambda^T \frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} U + (-L^T + \Lambda^T K_{uu}) \frac{\partial U}{\partial \rho} + \Lambda^T \frac{\partial F_{u\phi}}{\partial \rho} \\
 &= \Lambda^T \left(\frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} U + \frac{\partial F_{u\phi}}{\partial \rho} \right) \tag{39}
 \end{aligned}$$

On obtient la dernière simplification en définissant :

$$-L^T + \Lambda^T K_{uu} = 0 \iff K_{uu} \Lambda = L \tag{40}$$

Comme Λ est un vecteur quelconque, on fait le choix qu'il vérifie la relation ⁽⁴⁰⁾. On peut alors réécrire ce système d'équations sous la forme équivalente en utilisant la propriété de symétrie de la matrice de raideur. Cela implique que Λ peut être interprété comme étant le champ de déplacement résultant d'une force fictive L qui serait appliquée au noeud du déplacement en sortie [37]. On peut obtenir de façon similaire la sensibilité de la fonction objectif vis à vis de la polarisation :

$$\frac{\partial J}{\partial p_e} = \Lambda^T \frac{\partial F_{u\phi}}{\partial p_e} \quad (41)$$

Ce dernier résultat est obtenu en utilisant la propriété que la matrice de raideur est indépendante de la polarisation comme présenté dans la partie 6.3.2. La principale différence avec un problème d'optimisation purement mécanique est la dépendance des sensibilités avec la force piézoélectrique. On peut ensuite déterminer la sensibilité de la matrice de raideur aisément via l'indépendance des variables d'optimisation :

$$\frac{\partial K_{uu}}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}(k_p k_{uu}) = \frac{\partial k_p}{\partial \rho} k_{uu} = p_k (k_p - k_{min}) \rho^{p_k - 1} k_{uu} \quad (42)$$

Puis la même démarche est appliquée sur la force piézoélectrique :

$$\frac{\partial F_{u\phi}}{\partial \rho} = p_f (f_p - f_{min}) (2p_e - 1) \rho^{p_f - 1} f_{u\phi} \quad (43)$$

$$\frac{\partial F_{u\phi}}{\partial p_e} = 2(f_p - f_{min}) \rho^{p_f} f_{u\phi} \quad (44)$$

où $f_{u\phi} = k_{u\phi} \bar{\phi}$ est le vecteur nodal de force piézoélectrique d'un élément. Ainsi l'ensemble des sensibilités est maintenant connu pour cette fonction objectif, et son implémentation diffère peu par rapport à un problème purement mécanique.

11.1.3/ Cahier des charges d'optimisation

On travaille avec un domaine discrétisé via 125x250 éléments en exploitant l'axe de symétrie, ce qui revient à obtenir une précision de 200 μm de côté pour chaque élément pour les dimensions du domaine de la figure 5. Cette valeur a été choisie par itérations jusqu'à obtenir un résultat d'optimisation satisfaisant tout en limitant le temps de calcul induit. La fraction volumique a été fixée à 30%, dans le but de démontrer l'intérêt de la méthode pour produire un déplacement suffisant tout en n'utilisant qu'une faible quantité de la matière totale disponible.

11.1.4/ Résultats de l'optimisation

Le cahier des charges présenté a donc été implémenté dans le code MATLAB présentée dans la section précédente. Deux résultats ont été obtenus : un premier avec une polarisation constante sur l'ensemble du domaine, et le second en laissant la polarisation libre comme variable d'optimisation. On obtient alors les deux designs présentés sur la figure 6, avec le design avec polarisation constante présenté sur 6.a et avec polarisation libre sur 6.c. Afin de mieux comprendre les stratégies déployées par l'algorithme d'optimisation, on détaille dans la partie suivante la démarche de simulation de ces structures.

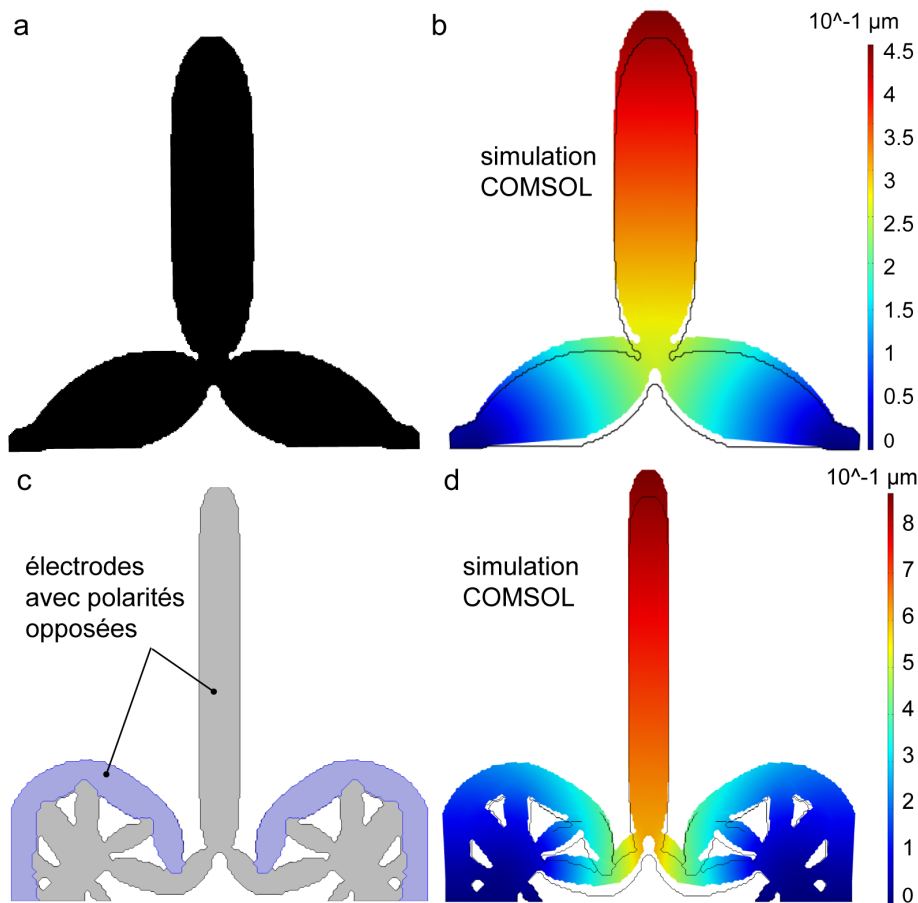


FIGURE 6 – Résultats de l'optimisation a) sans polarisation c) avec polarisation. Simulation du comportement sous Comsol du design b) sans polarisation d) avec polarisation

11.2/ Simulation numérique

11.2.1/ Post-traitement

Afin de pouvoir simuler les structures obtenues, il est nécessaire de pouvoir les convertir sous un format de fichier permettant d'être importé dans un logiciel élément fini dédié. Pour cela on passe par une première étape de post-traitement des données afin de pouvoir en obtenir une esquisse qui peut être utilisée dans un logiciel de CAO. On applique pour cela 2 étapes successives :

1. On commence par augmenter la résolution du domaine par un facteur 3 via une interpolation bilinéaire ; le but de cette étape est d'avoir un effet anticrénelage sur les frontières permettant d'améliorer la qualité de l'exportation
2. Ensuite un seuillage des données avec conservation du volume est appliqué via un algorithme par dichotomie ; il permet de supprimer les densités intermédiaires pour obtenir un domaine binaire tout en gardant la contrainte de volume souhaitée

On obtient en définitive une image binaire proche du résultat initial. Cette dernière peut alors être exportée via un processus simple : on commence par appliquer une détection

de contour via Matlab. Le nuage de point produit est ensuite importé sous la logiciel Space Claim de Ansys permettant de créer une esquisse fermée via une interpolation par splines. Il suffit alors d'extruder le résultat de l'épaisseur spécifiée pour produire un fichier pouvant être importé dans un logiciel de simulation dédié.

Pour le design avec polarisation la même démarche est appliquée sur les variables de polarisation afin d'obtenir 3 fichiers de CAO : un pour la densité, et deux autres pour la polarisation positive et négative. Le but est d'utiliser ces deux derniers comme masques pour définir les zones de polarisation dans le logiciel de simulation. On utilise le logiciel Comsol Multiphysics afin de simuler le comportement des structures obtenues. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 6.b et 6.d respectivement sans et avec polarisation. Les deux structures ont été excitées avec une tension de 5V sur l'ensemble du domaine. La couleur représente la norme du champ de déplacement en tout point du domaine avec l'échelle dédiée à droite.

11.2.2/ Résultat de simulation - structure sans polarisation

Concernant la structure sans polarisation, on peut mettre en avant la stratégie de l'optimisation de produire un treillis à 3 barres. Lors de l'application du champ électrique, ces poutres s'étendent augmentant leur longueur à vide, résultant en deux effets d'amplification combinés. Premièrement les deux poutres situées en bas de la structure produisent un effet de levier qui utilise la symétrie du domaine afin de convertir l'extension en un mouvement vertical. Deuxièmement, la poutre verticale produit elle un simple effet d'extension dans la direction souhaitée, s'ajoutant au premier effet. En définitive, on obtient un facteur d'amplification de 1.42, soit +42% de déplacement comparé à une plaque pleine équivalente en dimension et matériau.

11.2.3/ Résultat de simulation - structure avec polarisation

La structure avec polarisation utilise de façon intéressante la liberté supplémentaire qu'il lui est accordé. D'un côté, la partie du domaine contenant une polarisation qui produit une extension garde la même stratégie que la structure sans optimisation, avec le double effet de levier et extension. Cependant la structure intègre aussi une partie de son domaine qui fonctionne en compression, présenté en bleu sur la figure 6. Cette effet a pour conséquence une augmentation de l'effet de levier déjà présent dans la partie basse du domaine, résultant en un déplacement en sortie beaucoup plus grand, menant à doubler sa valeur. Ainsi on obtient un facteur d'amplification atteignant 2.82, soit +182% de déplacement toujours par rapport à la plaque pleine. En conséquence, on a obtenu +95% de déplacement en permettant l'optimisation de la polarisation du domaine comparativement à la structure sans polarisation libre, tout en conservant la même quantité de matière.

11.2.4/ Conclusion sur les résultats de simulation

L'ensemble des résultats est présenté dans le tableau 2. On y présente aussi une autre caractéristique de la structure sous la forme de la force disponible en sortie. Cette notion est importante à mettre en avant car tout gain en déplacement implique une perte en force,

et souvent la conversion n'est pas avantageuse. On observe ici cet effet avec une perte en force de plus de 90% pour les deux structures, toujours comparé à une plaque pleine. Cependant, la force initiale produite est de plus de 2.5 N, ce qui est naturel pour l'effet piézoélectrique qui produit naturellement une grande force mais un faible déplacement. Cependant autant de force n'est souvent pas nécessaire pour déplacer des objets avec précision, ainsi la perte créée n'est pas rédhibitoire pour le cahier des charges réalisé. On remarquera aussi que la structure avec polarisation produit plus de déplacement pour une perte en force équivalente, démontrant encore une fois l'intérêt de laisser cet aspect libre dans l'optimisation.

11.3/ Validation expérimentale

11.3.1/ Réalisation du prototype

Afin de confirmer les résultats obtenus en simulation, une validation expérimentale est nécessaire. Pour cela 3 prototypes ont été découpés dans des plaques en matériau PSI-5H4E de dimensions totale 70x70x0.127 mm³ de Piezo Systems. On présente sur les figures 7.(a,b,c) les trois structures obtenues via la machine de gravure Starlight laser de SiroLasertec (Siro Lasertec GmbH, Pforzheim, Allemagne). Pour chacune des structures, un rectangle de dimension 5x70 mm² a été ajouté au design pour deux raisons : d'une part il s'agissait de pouvoir simuler l'encastrement du cahier des charges, et d'autre part de pouvoir fixer les structures sur le banc expérimental. Afin de ne pas obtenir d'influence de cet ajout, les électrodes ont été détruites sur une fine bande entre la structure optimale et le rectangle, comme on peut le voir en particulier sur la structure 7.a. Concernant la structure avec polarisation deux étapes ont été nécessaires, avec un premier temps la découpe de la plaque pleine selon les densités optimales, puis la destruction des électrodes sur la frontière entre les zones de polarisation antagonistes (en plus du rectangle d'encastrement).

Un PCB a ensuite été conçu afin d'accueillir les structures mécaniquement et électriquement, visible sur la figure 7.d. Pour cela, une colle argentique a été utilisée afin d'assurer d'une part l'encastrement sur le rectangle ajouté en bas de design, et d'autre part les liaisons électriques qui ont été réalisées via la même colle et des fils électriques sur la surface supérieure de chaque design. A noter que la masse électrique a été réalisée via l'encastrement sur la face inférieure des designs. De même, pour la structure avec polarisation, plusieurs soudures ont été nécessaires pour délivrer l'opposé de la tension d'alimentation sur les surfaces dédiées. Le même PCB a été utilisé pour les trois prototypes, sous contrainte de pouvoir accueillir la structure avec polarisation demandant au moins 3 pistes à souder.

11.3.2/ Présentation du banc expérimental

La mesure de déplacement attendue étant de l'ordre du micromètre, il a été décidé d'utiliser un interféromètre pour assurer une bonne qualité de résultats avec une erreur de l'ordre du nanomètre. Pour assurer la mesure, est placé en bout de chaque structure un fragment de surface réfléchissante comme on peut l'observer sur les figures 7.(a,d). L'ensemble de la structure sur son PCB ainsi que l'interféromètre ont alors été placés sur une table anti-vibrations afin d'isoler au mieux des perturbations mécaniques extérieures.

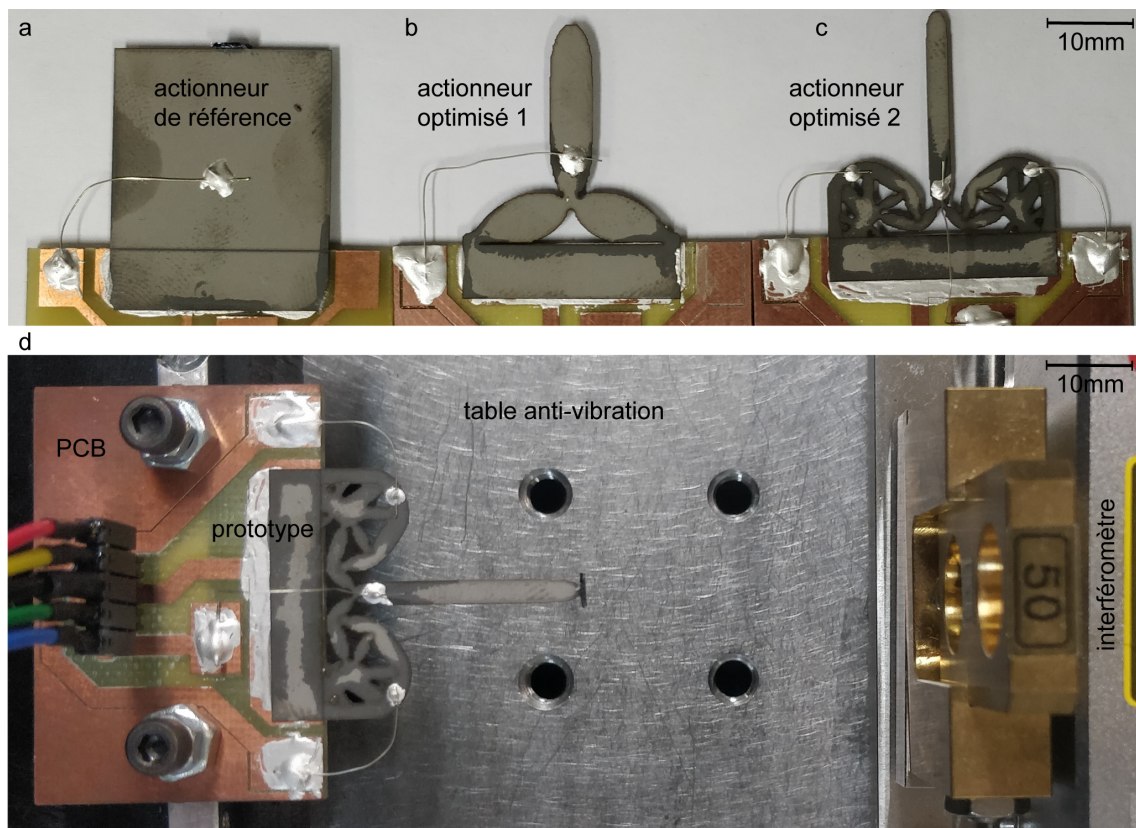


FIGURE 7 – Prototypes fabriqués et banc expérimental. a) prototype d'actionneur de référence (plaque piézoélectrique complète), b) prototype dont seulement la densité est optimisée, c) prototype dont la densité et la polarité sont optimisées simultanément, d) banc expérimental

L'ensemble du banc est commandé via un système d'acquisition dSPACE avec interfaçage via MATLAB afin de pouvoir générer les signaux d'excitations nécessaires puis enregistrer et traiter les données obtenues pour en faire l'analyse.

11.3.3/ Résultats et bilan

La caractérisation des structures est réalisée sous l'excitation via des signaux sinusoïdaux de faible amplitudes et fréquences. L'étude expérimentale consiste en une série de mesures avec une tension de 0 V à 5 V avec un pas de 0.5 V à une fréquence constante de 2 Hz. Cette fréquence est suffisamment faible proportionnellement aux fréquences modales naturelles de l'ensemble des structures afin de rester dans l'hypothèse d'une modélisation quasi-statique. L'amplitude est aussi limitée à une tension faible dans le but de valider l'hypothèse de linéarité supposée dans le modèle éléments finis utilisé pour l'optimisation. En effet, une haute amplitude et/ou une haute fréquence peuvent impliquer un comportement non linéaire parasite sous la forme d'un hystérésis [95]. Chaque série de signaux est ensuite appliquée sur chacune des trois structures et l'amplitude en déplacement obtenus sont mesurés via l'interféromètre, puis récupéré sous MATLAB. Les moyennes des résultats en déplacements obtenus pour chaque valeur d'amplitude en

tension ont été reportés sur la figure 8 ainsi que le tableau 2.

On remarque dans un premier temps la bonne correspondance des résultats expérimentaux avec les données de simulation pour chacune des structures étudiées. Cependant la différence entre les deux séries augmente quand la tension augmente. On explique ce comportement par un résidu de comportement non linéaire du matériau piézoélectrique qui produit une amplification non modélisée des structures. Cependant dans le domaine de tension étudié l'hypothèse de comportement linéaire utilisée dans la modélisation produit une erreur jugée négligeable.

On retrouve ensuite les mêmes conclusions que pour les résultats en simulation, où la structure sans polarisation produit un gain en déplacement d'environ +38% que la structure pleine, et la structure avec polarisation jusqu'à +180% de gain, à comparer à +42% et +182% respectivement. On démontre encore une fois l'intérêt d'optimiser la structure via une réduction de sa quantité de matière afin d'obtenir des effets de mécanismes flexibles permettant d'obtenir de meilleures performances selon le cahier des charges souhaité. Enfin l'ajout de la liberté d'optimiser la polarisation est encore une fois démontré comme pertinente avec un gain de plus de 100% entre la structure avec et sans polarisation.

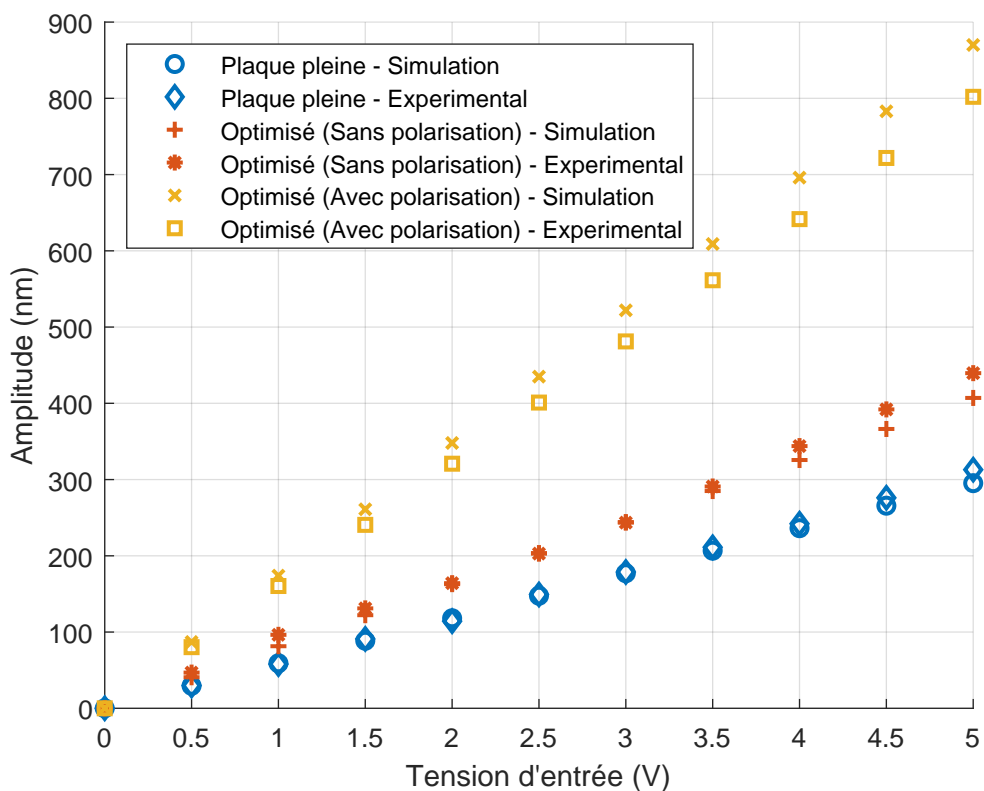


FIGURE 8 – Comparaison des résultats de simulation et expérimentaux du déplacement en fonction de l'amplitude de la tension d'excitation pour la plaque pleine, ainsi que les les actionneurs sans et avec polarisation

11.4/ Conclusion

Le tableau 2 résume l'ensemble des performances en simulation et caractérisation expérimentale pour les trois structures étudiées. On a ainsi démontré l'intérêt de cette méthode pour la conception d'actionneur afin de réduire de façon drastique la quantité de matière utilisée (dans notre cas -70%) tout en permettant un gain important sur le déplacement de la structure produite. On gagne ainsi en compacité, ce qui est particulièrement intéressant dans un contexte de miniaturisation car les espaces libérés peuvent être utiles pour l'implémentation d'autres fonctionnalités comme des capteurs ou de l'électronique.

TABLE 2 – Résumé des données de simulation et expérimental

	Simulation (Tension d'excitation = 5 V)		
	Plaque pleine	Structure sans polarisation	Structure avec polarisation
Déplacement (nm/V)	57	81	161
Gain en déplacement*	1	1.42	2.82
Force de blocage (N)	2.56	0.21	0.18
Gain en force de blocage*	1	0.08	0.07
	Expérimental (Tension d'excitation = 5 V)		
	Plaque pleine	Structure sans polarisation	Structure avec polarisation
Déplacement (nm/V)	62	86	174
Gain en déplacement*	1	1.38	2.8

* En comparaison avec la plaque pleine

12/ Positionneur 2D

Les résultats intéressants obtenus pour le cas de l'actionneur 1D ont poussés à utiliser l'outil d'optimisation développé sur un autre cahier des charges, sous la forme d'un positionneur 2D. On va donc s'attacher dans cette dernière section à présenter une autre application de la méthode.

12.1/ Expression du besoin

12.1.1/ Principe du positionneur 2D

On cherche cette fois à produire une structure nommée positionneur 2D, c'est à dire permettant de modifier la position d'un objet dans une zone de travail donnée. Le but peut être par exemple de manipuler de petites pièces afin de les assembler sur une structure externe, ou d'aligner des micro miroirs avec une grande précision. En conséquence, on souhaite pouvoir produire un déplacement planaire généré qui soit indépendant dans chaque direction. Ainsi on pourra utiliser deux tensions d'alimentation permettant d'actionner la structure selon deux directions différentes pour produire une position quelconque dans le plan. La suite de cette sous-section présente l'élaboration d'un cahier des charges représentant ce besoin tout en étant implémentable dans le code MATLAB.

12.1.2/ Cahier des charges

On commence par se donner un domaine carré de côté VAL comme présenté sur la figure 10.a. Celui ci sera supposé encastré sur l'ensemble de ses côtés. On souhaite pouvoir produire un déplacement quelconque $\vec{u} = [u_x, u_y]$ comme présenté aussi sur la figure 10.a au centre du domaine. La difficulté avec ce besoin est qu'il implique un cahier des charges multi objectifs pour prendre en compte la génération de deux déplacements. Cependant l'ensemble de la méthode présentée se limite à une approche d'objectif scalaire, en particulier en utilisant l'algorithme de résolution OC. Ainsi il est important de pouvoir rester dans ce paradigme si l'on souhaite éviter une réécriture importante du code présenté. Pour cela une stratégie de symétrie des domaines en densité et polarisation a été adoptée.

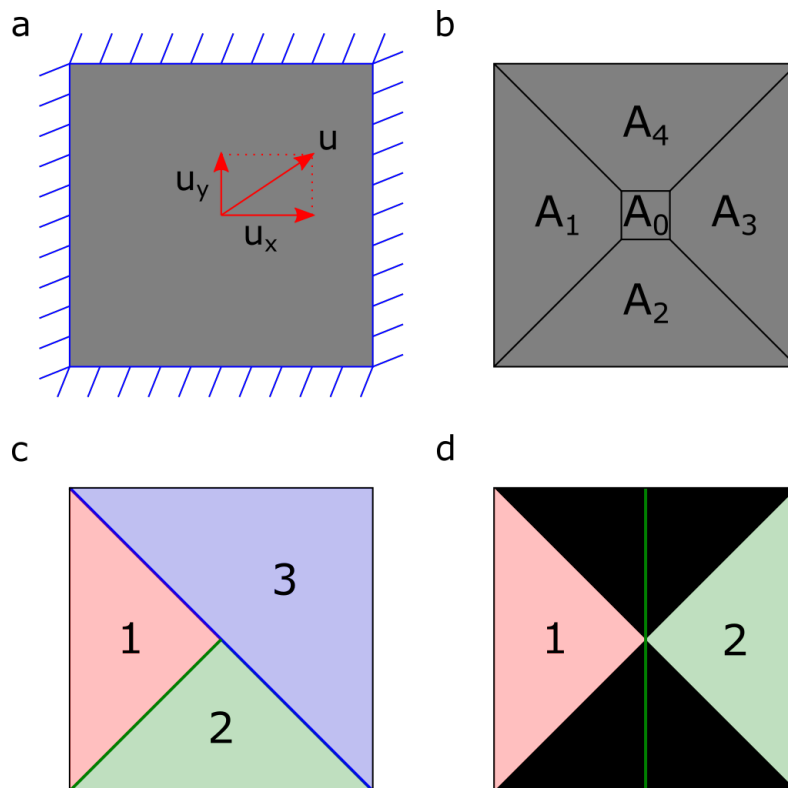


FIGURE 9 – Représentation graphique du cahier des charges pour l'actionneur 2D. a) Cahier des charges géométrique et physique b) Séparation du domaines en zones pour appliquer les différentes symétries c) Étapes successives pour les symétries des densités. En débutant par la zone rouge 1 (A_1), on symétrise celle-ci via l'antidiagonale en vert pour obtenir la zone verte 2 (A_2), puis une symétrie avec la diagonale en bleu pour obtenir la zone bleue 3 (A_3 et A_4) d) Étapes successives pour les symétries de polarisation. En débutant par la zone rouge 1 (A_1), on symétrise celle-ci via l'axe vertical en vert pour obtenir la zone verte 2 (A_3) qui contient les valeurs opposées. Les zones en noir sont à polarisation nulle (A_2 et A_4).

L'idée est d'optimiser une partie isolée du domaine pour un déplacement uniquement dans une seule direction, arbitrairement choisit comme horizontal. On fractionne pour cela le domaine selon 4 secteurs de A_1 à A_4 comme présenté sur la figure 10.b. L'algorithme n'aura alors accès qu'à l'optimisation du secteur A_1 . Les densités des autres secteurs sont alors obtenus par symétries successives via les diagonales du domaine, comme présenté

sur la figure 10.c, rendant la structure fortement symétrique.

Concernant la polarisation, la zone A_1 est laissée aussi libre. La zone A_3 est alors obtenue par symétrie via l'axe vertical. Cependant on impose en plus que ces valeurs soient l'opposé de la zone A_1 . Le but étant d'obtenir un comportement antisymétrique sur l'actionnement entre les deux zones pour avoir un fonctionnement push-pull. Concernant les zones A_2 et A_4 , celles-ci sont imposées à polarisation nulle pendant le processus d'optimisation. En effet, on cherche à obtenir un comportement identique pour le déplacement vertical de la structure. Ainsi ces zones sont dédiées à produire ce comportement, et sont donc supposées inactives lors du déplacement horizontal. De plus par cette approche on peut ainsi isoler artificiellement 4 zones pour assurer l'actionnement électrique aval de la structure. On résume le processus de symétrie et la structure des zones sur la figure 10.d.

Cette configuration imposée au domaine assure de produire une structure très symétrique et permettant d'actionner de façon indépendante deux zones pour chaque composante du déplacement souhaité. On termine par l'intégration au centre du domaine d'une dernière zone notée A_0 . En s'inspirant du concept d'une plateforme, on définit une zone de travail carrée au centre du domaine qui ne sera pas optimisée, et imposée comme ayant de la matière en permanence et une polarisation nulle. Ainsi en pratique cette zone peut être considérée comme passive vis à vis de l'effet piézoélectrique. La taille de celle-ci se veut exprès faible proportionnellement aux dimensions du domaine d'étude, avec un côté de VAL. On représente cette zone de façon exagérée aussi sur la figure 10.b.

On termine cette section avec trois précisions importantes. Tout d'abord, il est essentiel de noter que l'ensemble de ces opérations de symétrie sont appliquées tout le long du processus d'optimisation. Ensuite on notera que la structure résultante ne possède qu'un seul axe de symétrie selon ses conditions limites en polarisation, ainsi seulement la moitié haute de la structure a besoin d'être simulée. Enfin, il faut préciser le cas particulier des variables sur la diagonale et l'antidiagonale. Les variables de densités y sont donc optimisées mais celles en polarisation sont supposées nulles. En effet elle représente la transition entre les zones d'actionnement, et servira donc d'isolation électrique.

On passe maintenant à la définition du problème d'optimisation pour son intégration dans le code.

12.1.3/ Objectif et symétrie, contrainte et sensibilité

L'objectif d'optimisation ici ne diffère pas de l'exemple de l'actionneur 1D, ainsi l'ensemble de la démarche déjà présentée en section 11.1.2 pour sa définition mathématique, ainsi que le calcul des sensibilités selon les deux types de variable restent valables. On va cependant s'attarder sur l'impact de la symétrie du domaine. En effet, les symétries d'une structure sont exploitées pour réduire le coût en calcul pour sa simulation, comme c'est le cas avec l'actionneur 1D. Ainsi les éléments symétrisés n'apparaissent pas dans le domaine optimisé, et les conditions limites qui lui sont substituées reflètent cette simplification.

Cependant ici la plupart des variables densités se retrouvent à l'identique autre part dans le domaine, ce qui est dû au manque de symétries équivalentes des variables de polarisation. En conséquence la sensibilité de ces variables s'en retrouve démultipliée pour chaque instance. Pour détailler ce concept, prenons une variable en densité dans la zone A_1 . Celle-ci existe aussi dans les zones A_4 et A_3 via les différentes symétries appliquées

(la zone A_2 n'étant plus présente). Ainsi quand on souhaite calculer sa sensibilité, il faut prendre en compte son impact dans chacune de ces zones. En conséquence la sensibilité selon l'objectif d'une variable de la zone A_1 devra être augmentée de la somme des sensibilités des autres zones. Ainsi la sensibilité totale d'une variable en densité de A_1 est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} = \frac{\partial J}{\partial \rho} \Big|_{A_1} + \frac{\partial J}{\partial \rho} \Big|_{A_4} + \frac{\partial J}{\partial \rho} \Big|_{A_3} = \sum_i^{1,3,4} \frac{\partial J}{\partial \rho} \Big|_{A_i} \quad (45)$$

La même démarche est à appliquer concernant les variables en polarisation, mais cette fois en considérant que l'on doit prendre l'opposé de la valeur après symétrie, et donc se sa sensibilité. Ainsi pour une variable p_e dans A_1 , on aura :

$$\frac{\partial J}{\partial p_e} = \frac{\partial J}{\partial p_e} \Big|_{A_1} - \frac{\partial J}{\partial p_e} \Big|_{A_3} \quad (46)$$

On prend en compte que la zone A_4 est à polarisation nulle. En dehors de cette subtilité, l'ensemble de la démarche de calcul reste identique.

On passe maintenant à la seconde partie du besoin qui est le découplage des déplacements. En effet, la symétrie de la structure résulte naturellement en un effet de couplage entre la production d'un déplacement horizontal et la génération d'un déplacement vertical parasite, et vice-versa. En conséquence, on cherche à imposer que ce couplage soit minimal pour la structure générée afin d'avoir un actionnement simplifié. Pour cela on propose d'imposer une contrainte mathématique entre le déplacement dit normal u_N et transverse u_T , respectivement u_x et u_y ici. On se base pour cela sur l'approche présentée dans [68] qui propose la forme de contrainte suivante :

$$\left(\frac{u_T}{u_N} \right)^2 \leq \varepsilon^2 \quad (47)$$

avec ε l'erreur de couplage souhaitée, exprimée en pourcentage. Cette nouvelle contrainte est facilement intégrée à un algorithme type MMA. Cependant on pourra noter qu'une approche multi objectifs est possible en ajoutant celle ci à J si l'on souhaite garder l'algorithme OC. En pratique, le choix d'intégrer une contrainte indépendante permet d'avoir plus de contrôle sur le comportement de la structure, ce qui est souvent plus difficile via une approche multi objectif avec utilisation de poids.

La sensibilité se calcule comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_T}{u_N} \right)^2 &= 2 \frac{u_T}{u_N} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_T}{u_N} \right) \\ &= 2 \frac{u_T}{u_N} \left(\frac{u_N}{u_N^2} \frac{\partial u_T}{\partial \rho} - \frac{u_T}{u_N^2} \frac{\partial u_N}{\partial \rho} \right) \\ &= 2 \frac{u_T}{(u_N)^3} \left(u_N \frac{\partial u_T}{\partial \rho} - u_T \frac{\partial u_N}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

Ainsi cette contrainte demande les mêmes outils de calcul déjà présentés pour la sensibilité d'un objectif en déplacement. En conséquence, une démarche identique peut aussi être

utilisée pour déterminer les sensibilités vis à vis de u_N et u_T . On notera cependant que pour le déplacement transverse u_T , il est nécessaire d'utiliser un troisième système d'équations éléments finis à résoudre, comme déjà présenté dans la section 11.1.2. Ce besoin apparaît à chaque fois que la sensibilité vis à vis d'un déplacement est nécessaire et augmente donc en conséquence la quantité de calcul lié, et donc le temps d'optimisation. Ceci est mitigé par le fait que la sensibilité vis à vis de u_N est déjà déterminée via le calcul de la sensibilité de l'objectif. Enfin, la sensibilité sur les variables de polarisation vérifie la même démarche.

On a maintenant l'ensemble des éléments nécessaires à l'implémentation du cahier des charges pour produire des structures. On va donc dans la section suivante étudier la structure obtenue via sa simulation.

12.2/ Résultats

12.2.1/ Caractéristiques de la structure

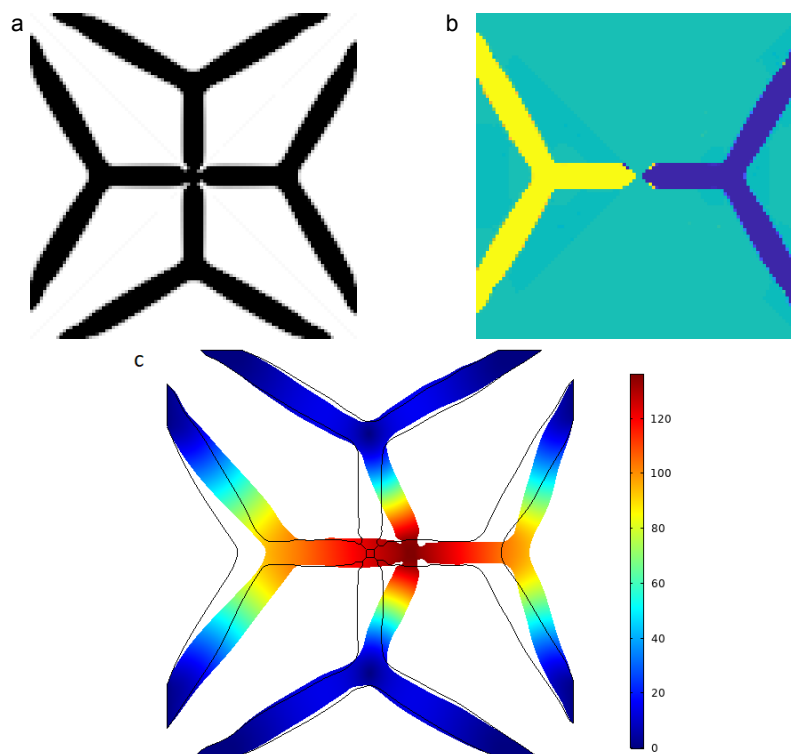


FIGURE 10 – Résultats d'optimisation du positionneur 2D avec compensation de la symétrie. a) Résultats en densité b) Résultats en polarisation c) Simulation du comportement de la structure sous Comsol. On génère un déplacement uniquement selon l'axe horizontal.

Le domaine est composée de 100×100 éléments, ce qui résulte en une zone A_0 de 2×2 éléments. On aura imposé un couplage maximal de 5%. La structure obtenue est présentée sur les figures 10.a et 10.b. Le même processus de post traitement que pour le positionneur 1D a été appliqué comme déjà présenté dans la section 11.2.1. On peut ainsi obtenir un fichier de conception pouvant être importé dans le logiciel de simulation COMSOL afin d'analyser son comportement et donc les stratégies déployées pour sa

génération.

12.2.2/ Simulation numérique

On présente sur la figure 10.c le comportement de la structure simulée pour un déplacement horizontal. On applique un potentiel de +5V sur la structure contenue dans la zone A_1 (polarisation jaune sur 10.b) et -5V sur la structure contenue dans A_3 (polarisation bleue sur 10.b). Le reste des surfaces, incluant A_0 , est imposé à un potentiel nul. La couleur représente la norme du champ de déplacement. La structure produit un déplacement au centre de 138nm , soit un gain en déplacement de 27.6nm/V . Le couplage entre le déplacement horizontal et vertical au centre est évalué à 0.024%, ce qui est négligeable.

La structure produite présente un comportement simple en reprenant l'analyse déjà réalisée sur l'actionneur 1D sans polarisation dans la section 11.2.2. En effet, le résultat obtenu présente quatre fois la même forme qui agit de façon similaire à l'actionneur, c'est à dire en combinant un effet de bras de levier via ses bases avec une structure droite en extension pure dans la direction souhaitée. Cependant cette stratégie est ici augmentée par l'utilisation d'une structure similaire symétrique, permettant un comportement push-pull au centre. Cette approche a deux avantages : (i) amplifier le déplacement généré mais surtout (ii) assurer un certain "guidage" de ce déplacement afin d'éviter la génération d'un déplacement transverse. Ainsi l'algorithme propose une solution permettant de maximiser l'objectif tout en assurant la contrainte de couplage minimal. Pour conclure, la structure permet donc de produire un déplacement au centre dans chaque direction de façon indépendante, et la symétrie imposée permet un actionnement aisé via l'apport de tension antagonistes sur les surfaces à polarisation opposées.

13/ Conclusion

Dans cette partie nous nous sommes attachés à présenter deux applications de la méthode détaillée dans les deux parties précédentes. Dans un premier temps, un cahier des charges sous la forme d'un actionneur 1D a été exposé. En commençant depuis l'expression du besoin, l'objectif a été explicité avec la dérivation des sensibilités rattachées. La démarche de simulation a permis ensuite de mettre en avant les résultats d'amplification obtenus vis à vis de la plaque pleine, qui ont ensuite été confirmés via une démarche de caractérisation expérimentale. En particulier, il a été démontré que le choix de laisser la polarisation comme variable d'optimisation est extrêmement profitable, permettant d'atteindre des performances encore plus importantes.

Un second cahier des charges a été aussi développé pour le cas d'un positionneur 2D. Celui-ci implique une formulation du problème d'optimisation spécifique par rapport à l'actionneur 1D, en prenant en compte une symétrie forcée des variables ainsi qu'une contrainte supplémentaire. Ces deux dernières sont nécessaires afin de garder la nature de l'objectif scalaire, afin d'éviter les difficultés liées aux approches multi objectifs. Les résultats de simulation démontrent encore une fois l'intérêt de l'approche, la structure obtenue est constituée de 4 structures similaires à l'actionneur 1D, utilisant ainsi les mêmes principes d'actionnement. De plus la structure utilise un agencement en push-pull, permettant une très forte réduction du couplage.

On a donc démontré dans cette partie l'intérêt de la démarche globale de thèse pour

la synthèse de structures piézoélectriques pour l'actionnement. On termine donc ce manuscrit par une section de conclusion et présentation de perspectives pour la suite de la recherche.

Sixième partie

Conclusions et perspectives

14/ Conclusions et perspectives

14.1/ Conclusion

Les micro-systèmes à forte densité d'intégration constituent un enjeu majeur de la recherche en micro-mécatronique et notamment en micro-robotique. L'intérêt de ces systèmes est de pouvoir intégrer un maximum de fonctionnalités dans un espace de plus en plus réduit, permettant ainsi de manipuler, d'interagir, avec des objets de taille micro-métrique, de contrôler leurs mouvements dynamiques et de caractériser leurs propriétés physiques.

Cependant, ces systèmes soulèvent de nombreuses questions liées notamment à leur conception. De part leur forte densité, il est nécessaire de traiter le problème de couplage entre la structure du système et ses mécanismes d'actionnement et de mesure au travers de stratégies d'optimisation globales. Bien que plusieurs travaux sur l'optimisation, en particulier l'optimisation topologique, aient donné lieu à des stratégies prometteuses, des insuffisances apparaissent notamment sur l'intégration du matériau piézoélectrique, la prise en compte de sa polarité et enfin le choix des coefficients de pénalisation. Pour pallier ces limitations, ce travail de thèse a proposé un outil de conception méthodologique à base de l'approche d'optimisation topologique SIMP (Solid Isotropic with Material Penalization). Cette solution consiste à unifier l'intégration du matériaux piézoélectrique et d'optimiser simultanément sa densité et sa polarité. Elle consiste également en un code MATLAB permettant de simplifier la prise en main de l'outil de conception.

L'approche choisie dans ce travail repose sur la distribution optimale de matériau dans un espace de travail donné. Connue sous l'acronyme SIMP, elle conduit à une conception systématique de structures passives avec une formulation mathématique bien posée et simple à implémenter. Pour adapter cette approche à la conception de structures actives, le modèle physique du matériau piézoélectrique a été intégré dans la méthode. En partant du modèle 3D standard de ce matériau, un modèle plan a été dérivé. Ensuite, un schéma d'interpolation a été proposé pour pénaliser simultanément la densité et la polarité du matériau. Ces développements ont permis, d'une part, d'explicitier toutes les étapes nécessaires pour l'intégration du matériau (cette procédure pouvant être appliquée à d'autres matériaux équivalents), et d'autre part, de simplifier la programmation de l'algorithme d'optimisation.

La mise en œuvre algorithmique de la solution proposée semble plus que nécessaire pour simplifier son utilisation et sa prise en main. Un code MATLAB détaillé a été donc proposé et articulé autour de trois sections principales. Le code commence par une partie initialisation permettant aux utilisateurs de définir les différents paramètres et variables nécessaires à la formulation et à la résolution du problème de conception. Vient ensuite la partie optimisation permettant de mettre à jour les variables de densité et de polarisation en se basant sur la fonction objectif, sa sensibilité et la méthode d'optimisation choisie. Enfin, la dernière partie permet de traiter les résultats d'optimisation et de les afficher selon un code couleur simple à interpréter. Ainsi, le code ouvre la voie vers un nouvel outil de conception dédié aux structures piézoélectriques.

Pour illustrer le potentiel de cet outil, deux structures piézoélectriques ont été étudiées. La première concerne un actionneur 1D planaire. Trois configurations ont été considérées : une plaque rectangulaire non optimisée servant de domaine de conception et d'actionneur de référence, un actionneur dont seulement la densité a été optimisée et un actionneur

dont la densité et la polarisation ont été optimisées. Les simulations numériques ainsi que les validations expérimentales ont montré un bon accord entre les structures optimisées et les prototypes réalisés. Les résultats révèlent aussi l'intérêt de considérer simultanément la densité et la polarité dans le processus d'optimisation. Avec un degré de liberté supplémentaire, l'optimisation améliore d'avantage le déplacement en sortie de l'actionneur. Quant à la deuxième structure, elle concerne un positionneur 2D. La topologie de ce dernier a été optimisée afin de minimiser voire supprimer le couplage entre l'axe x et l'axe y. Une fois encore, l'optimisation simultanée de la densité et de la polarité a permis de combiner l'expansion et la compression du matériau piézoélectrique donnant lieu à un guidage quasi-parfait selon les deux axes, rendant négligeable le couplage transverse.

14.2/ Perspectives

Enfin et au vu des résultats obtenus, les perspectives de ce travail sont nombreuses. A court terme, il serait intéressant dans un premier temps d'étendre la méthode à un domaine multi-matériaux. L'objectif est de pouvoir distribuer simultanément un matériau actif et un matériau passif. Cela permettrait, d'une part, d'utiliser un matériau passif et flexible pour la structure mécanique du micro-systèmes, et d'autre part, utiliser un matériau actif pour les mécanismes d'actionnement et de mesure. Dans un deuxième temps, il serait utile de prendre en compte les grands déplacements afin de considérer les non-linéarités du matériau piézoélectrique notamment l'hystérésis ou la dérive. Il est également intéressant de prendre en considération les aspects dynamiques jusque-là pas ou peu considérés en optimisation topologique de structures actives.

A long terme, il serait pratique de prendre en compte les critères de commandabilité et d'observabilité permettant de simplifier le modèle de la structure résultante, et par conséquent anticiper l'étape avale de commande. Le domaine restant essentiellement plan mais sous forme cylindrique, la modélisation physique présentée peut être majoritairement réutilisée. Ce type de système ouvre en particulier la voie à des perspectives d'actionnement tri dimensionnel avec réduction du couplage dès la phase de conception de la structure. Le cadre de cet outil dépasse la conception de structures piézoélectriques et pourra être adapté pour d'autres matériaux et d'autres applications. Une autre piste de développement serait de considérer des structures de type piezo tube.

Septième partie

Références

Bibliographie

- [1] Yassine Haddab. *Contribution à la conception et à la commande des systèmes micromécatroniques.- Amélioration des performances par la conception et la commande* -. Habilitation à diriger des recherches, Université de Franche-Comté, December 2012.
- [2] S. Régnier and N. Chaillet. *Microrobotics for Micromanipulation*. Wiley-ISTE, 2010.
- [3] Deiva A. Design of micro robot for minimally invasive surgery. *IAES International Journal of Robotics and Automation (IJRA)*, 2, 09 2013.
- [4] Nelson BJ, Kaliakatsos IK, and Abbott JJ. Microrobots for minimally invasive medicine. *Annual review of biomedical engineering*, 12 :55–85, 2010.
- [5] Joël Agnus, Patrick Nectoux, and Nicolas Chaillet. Overview of microgrippers and design of a micro-manipulation station based on a MMOC microgripper. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation, CIRA'05.*, volume sur CD ROM, page 7 pages, Espoo, Finland, June 2005.
- [6] Vincent Chalvet, Yassine Haddab, and Philippe Lutz. A microfabricated planar digital microrobot for precise positioning based on bistable modules. *IEEE Transactions on Robotics*, 29(3) :641–649, 2013.
- [7] Hayley McClintock, Fatma Zeynep Temel, Neel Doshi, Je-sung Koh, and Robert J. Wood. The millidelta : A high-bandwidth, high-precision, millimeter-scale delta robot. *Science Robotics*, 3(14), 2018.
- [8] D. R. Frutiger, B. E. Kratochvil, and Bradley J. Nelson. Magmites - microrobots for wireless microhandling in dry and wet environments. In *2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pages 1112–1113, 2010.
- [9] Noah T. Jafferis, E. Farrell Helbling, Michael Karpelson, and Robert J. Wood. Un-tethered flight of an insect-sized flapping-wing microscale aerial vehicle. *Nature*, 570(7762) :491–495, 2019.
- [10] Mathieu Grossard, Christine Rotinat-Libersa, Nicolas Chaillet, and Mehdi Boukallel. Mechanical and control-oriented design of a monolithic piezoelectric microgripper using a new topological optimization method. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(1) :32–45, 2009.
- [11] Claudio Quaglia, Elisa Buselli, Robert Iii, Pietro Valdastri, Arianna Menciassi, and Paolo Dario. An endoscopic capsule robot : A meso-scale engineering case study. *J. Micromech. Microeng*, 19 :105007–11, 10 2009.
- [12] Yassine Haddab. *Conception et réalisation d'un système de micromanipulation contrôlé en effort et en position pour la manipulation d'objets de taille micrométrique*. Theses, Université de Franche-Comté, December 2000.

- [13] Mary I. Frecker. Recent advances in optimization of smart structures and actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 14(4-5) :207–216, 2003.
- [14] S. Adali, J. C. Bruch Jr., I. S. Sadek, and J. M. Sloss. Robust shape control of beams with load uncertainties by optimally placed piezo actuators. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19(4) :274–281, 2000.
- [15] A. Suleman and M. A. Goncalves. Multi-objective optimization of an adaptive composite beam using the physical programming approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(1) :56–70, 1999.
- [16] I. Bruant, G. Coffignal, F. Lene, and M. Verge. A methodology for determination of piezoelectric actuator and sensor location on beam structures. *Journal of Sound and Vibration*, 243(5) :861–882, 2001.
- [17] A M Sadri, J R Wright, and R J Wynne. Modelling and optimal placement of piezoelectric actuators in isotropic plates using genetic algorithms. *Smart Materials and Structures*, 8(4) :490–498, aug 1999.
- [18] Bernardoni Paul. *Outils et méthodes de conception de structures mécaniques à déformations réparties et actionnement discret : applications en micro-robotique*. Theses, Université Peirre et Marie Curie, December 2004.
- [19] M. Grossard, C. Rotinat-Libersa, and N. Chaillet. Redesign of the mmoc microgripper piezoactuator using a new topological optimization method. In *2007 IEEE/ASME international conference on advanced intelligent mechatronics*, pages 1–6, Sep. 2007.
- [20] M. Grossard, C. Rotinat-Libersa, N. Chaillet, and M. Boukallel. Mechanical and control-oriented design of a monolithic piezoelectric microgripper using a new topological optimization method. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 14(1) :32–45, 2009.
- [21] Roba El Khoury Moussa, Mathieu Grossard, Mehdi Boukallel, Nicolas Chaillet, and Arnaud Hubert. Observation-oriented design of a monolithic piezoelectric microactuator with optimally integrated sensor. In *ISR 2010 (41st International Symposium on Robotics) and ROBOTIK 2010 (6th German Conference on Robotics)*, pages 1–8, 2010.
- [22] I. Burkill. The derivatives of functions of intervals. *Fundamenta Mathematicae*, 5(1) :321–327, 1924.
- [23] R.C. Young. The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, 104 :260–290, 1931.
- [24] R. E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1966.
- [25] Luc Jaulin and Eric Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. *Automatica*, 29(4) :1053–1064, 1993.
- [26] Luc Jaulin. Interval constraint propagation with application to bounded-error estimation. *Automatica*, 36(10) :1547–1552, 2000.
- [27] O. Didrit L. Jaulin, M. Kieffer and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer, 2001.
- [28] Sofiane Khadraoui, Micky Rakotondrabe, and Philippe Lutz. Interval modeling and robust control of piezoelectric microactuators. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(2) :486–494, 2012.
- [29] Micky Rakotondrabe and Sofiane Khadraoui. *Design of Piezoelectric Actuators with Guaranteed Performances Using the Performances Inclusion Theorem*, pages 41–59. Springer New York, New York, NY, 2013.

- [30] Sofiane Khadraoui, Micky Rakotondrabe, and Philippe Lutz. Optimal design of piezoelectric cantilevered actuators with guaranteed performances by using interval techniques. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 19(5) :1660–1668, 2014.
- [31] Micky Rakotondrabe. 'performances inclusion for stable interval systems. *ACC, (American Control Conference) San Francisco CA USA*, pages 4367–4372, June-July 2011.
- [32] R. Carbonari et al. Multi-actuated functionally graded piezoelectric micro-tools design : A multiphysics topology optimization approach. *Numerical Methods in Engineering*, 2008.
- [33] W. Fabiana, K. Manfredb, B. Eberhardc, L. Günterd, and S. Fabiand. Topology optimization of a piezoelectric-mechanical actuator with single- and multiple-frequency excitation. *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics*, 2009.
- [34] Robert J Wood, E Steltz, and RS Fearing. Optimal energy density piezoelectric bending actuators. *Sensors and Actuators A : Physical*, 119(2) :476–488, 2005.
- [35] Abbas Homayouni-Amlashi, Abdenbi Mohand Ousaid, and Micky Rakotondrabe. Multi directional piezoelectric plate energy harvesters designed by topology optimization algorithm. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2019.
- [36] Abbas Homayouni-Amlashi, Abdenbi Mohand-Ousaid, and Micky Rakotondrabe. Topology optimization of 2dof piezoelectric plate energy harvester under external in-plane force. *Journal of Micro-Bio Robotics*, pages 1–13, 2020.
- [37] Martin Philip Bendsoe and Ole Sigmund. *Topology Optimization : Theory, Methods and Applications*. Springer, February 2004.
- [38] Martin P Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural optimization*, 1(4) :193–202, 1989.
- [39] Ole Sigmund. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Journal of Structural Mechanics*, 25(4) :493–524, 1997.
- [40] G. Allaire. *Shape Optimization by the Homogenization Method*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [41] Peter D. Dunning and H. Alicia Kim. Introducing the sequential linear programming level-set method for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(3) :631–643, 2015.
- [42] Shikui Chen, Stefano Gonella, Wei Chen, and Wing Kam Liu. A level set approach for optimal design of smart energy harvesters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(37) :2532–2543, 2010.
- [43] F. Feppon, G. Michailidis, M. A. Sidebottom, G. Allaire, B. A. Krick, and N. Vermaak. Introducing a level-set based shape and topology optimization method for the wear of composite materials with geometric constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(2) :547–568, 2017.
- [44] David Munk, Gareth Vio, and Grant Steven. Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52, 05 2015.
- [45] Ole Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 21(2) :120–127, 2001.

- [46] Erik Andreassen, Anders Clausen, Mattias Schevenels, Boyan S Lazarov, and Ole Sigmund. Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1) :1–16, 2011.
- [47] N. Kikuchi E. C. Nelli Silva. Design of piezoelectric transducers using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, 1997.
- [48] E. C. Nelli Silva, J. S. Ono Fonseca, F. Montero de Espinosa, A. T. Crumm, G. A. Brady, J. W. Halloran, and N. Kikuchi. Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization—part i. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1999.
- [49] Noboru Kikuchi E. C. Nelli Silva, Shinji Nishiwaki. Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization—part ii. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1999.
- [50] N. Kikuchi E. C. Nelli Silva. Design of piezocomposite materials and piezoelectric transducers using topology optimization—part iii. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 1999.
- [51] Ronny Carbonari et al. Design of piezoelectric multi-actuated microtools using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, 2005.
- [52] Ronny Calixto Carbonari, ECN Silva, and Shinji Nishiwaki. Design of multi-actuated piezoelectric mechanisms using topology optimization. In *Proceedings of the 6th world congress on structural and multidisciplinary optimization, Rio de Janeiro, Brazil*. Citeseer, 2005.
- [53] J. Toledo and al. Design and characterization of in-plane piezoelectric microactuators. *Actuators*, 6(2) :19, 2017.
- [54] W. Gao Z. Luo and C. Song. Design of multi-phase piezoelectric actuators. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 21 :1851–1865, 2010.
- [55] D Ruiz, A Díaz-Molina, Ole Sigmund, Alberto Donoso, JC Bellido, and JL Sánchez-Rojas. Optimal design of a microgripper-type actuator based on al/si heterogeneous bimorph. In *Smart Sensors, Actuators, and MEMS VIII*, volume 10246, page 1024606. International Society for Optics and Photonics, 2017.
- [56] David Ruiz and Ole Sigmund. Optimal design of robust piezoelectric microgrippers undergoing large displacements. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 57 :1–12, 01 2018.
- [57] Ronny Carbonari, Emílio Silva, and Glaucio Paulino. Topology optimization design of functionally graded bimorph-type piezoelectric actuators. *Smart Mater. Struct.*, 16 :2605–2620, 12 2007.
- [58] Jae Eun Kim, Dae Seung Kim, Pyung Sik Ma, and Yoon Young Kim. Multi-physics interpolation for the topology optimization of piezoelectric systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(49-52) :3153–3168, 2010.
- [59] M. Rauli and K. Maute. Topology optimization of electrostatically actuated microsystems. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(5) :342–359, 2005.
- [60] Juliano F. Gonçalves, Daniel M. De Leon, and Eduardo A. Perondi. Topology optimization of embedded piezoelectric actuators considering control spillover effects. *Journal of Sound and Vibration*, 388 :20–41, 2017.
- [61] Markus J. Buehler, Bernhard Bittig, and Gordon G. Parker. Topology optimization of smart structures using a homogenization approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15(8) :655–667, 2004.

- [62] Zhe-Qi Lin, Hae Chang Gea, and Shu-Tian Liu. Design of piezoelectric energy harvesting devices subjected to broadband random vibrations by applying topology optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 27(5) :730, 2011.
- [63] Bin Zheng, Ching-Jui Chang, and Hae Chang Gea. Topology optimization of energy harvesting devices using piezoelectric materials. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38(1) :17–23, 2009.
- [64] Jin Yee Noh and Gil Ho Yoon. Topology optimization of piezoelectric energy harvesting devices considering static and harmonic dynamic loads. *Advances in Engineering Software*, 53 :45–60, 2012.
- [65] Abbas Homayouni-Amlashi, Abdenbi Mohand-Ousaid, and Micky Rakotondrabe. Analytical modelling and optimization of a piezoelectric cantilever energy harvester with in-span attachment. *Micromachines*, 11(6) :591, 2020.
- [66] An American National Standard. Ieee standard on piezoelectricity. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 31(2), March 1984.
- [67] O. Sigmund. A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2) :120–127, Apr 2001.
- [68] Martin P Bendsøe and Ole Sigmund. *Optimization of structural topology, shape, and material*, volume 414. Springer, 1995.
- [69] O.M. Querin, V. Young, G.P. Steven, and Y.M. Xie. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, pages 559–573, 2000.
- [70] M.C. Burry X. Huang, Y.M. Xie. A new algorithm for bi-directional evolutionary structural optimization. X. Huang, Y.M. Xie, M.C. Burry, pages 1091–1099, 2006.
- [71] Y.M. Xie X. Huang. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, pages 1039–1049, 2007.
- [72] Y.M. Xie X. Huang. *Evolutionary topology optimization of continuum structures : methods and applications*. Wiley-Blackwell, 2010.
- [73] R. Lerch. Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 37 :233–247, May 1990.
- [74] Vincent Piefort. *Finite element modelling of piezoelectric active structures*. PhD thesis, Ph. D. thesis. Bruxelles, Belgium : Université Libre de Bruxelles, Department . . . , 2001.
- [75] David V Hutton and Jianhua Wu. *Fundamentals of finite element analysis*, volume 1. McGraw-hill New York, 2004.
- [76] Kumar Chawla. *Mechanical Behavior of Materials*. Prentice Hall, 1999.
- [77] Peter I Kattan. *MATLAB guide to finite elements : an interactive approach*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [78] Carlos De Marqui Junior, Alper Erturk, and Daniel J Inman. An electromechanical finite element model for piezoelectric energy harvester plates. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :9–25, 2009.
- [79] E. Andreassen, A. Clausen, M. Schevenels, BS. Lazarov, and O. Sigmund. Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Struct Multidiscip Optim*, 43(1) :1–16, 2011.

- [80] Cheol Kim and Jae-Wuk Shin. Topology optimization of piezoelectric materials and application to the cantilever beams for vibration energy harvesting. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 14(11) :1925–1931, 2013.
- [81] Stephan Schmidt and Volker Schulz. A 2589 line topology optimization code written for the graphics card. *Computing and Visualization in Science*, 14 :249–256, 2011.
- [82] Martin Kögl and Emílio CN Silva. Topology optimization of smart structures : design of piezoelectric plate and shell actuators. *Smart materials and Structures*, 14(2) :387, 2005.
- [83] Martin P Bendsøe and Ole Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of applied mechanics*, 69(9-10) :635–654, 1999.
- [84] Luis Augusto Motta Mello et al. Design of quasi-static piezoelectric plate based transducers by using topology optimization. *Smart Materials and Structures*, 23(2) :025035, jan 2014.
- [85] Lucien A Schmit. Structural design by systematic synthesis. In *Proceedings of the Second National Conference on Electronic Computation, ASCE, Sept., 1960*, 1960.
- [86] Martin Philip Bendsoe and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. 1988.
- [87] Andres Tovar and Kai Liu. top3d, an efficient 3d topology optimization program, 2014.
- [88] Qi Chen, Xianmin Zhang, and Benliang Zhu. A 213-line topology optimization code for geometrically nonlinear structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(5) :1863–1879, 2019.
- [89] Sigmund O. Ferrari F. A new generation 99 line matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3d. *Struct Multidisc Optim*, 62 :2211–2228, 2020.
- [90] Vivien J Challis. A discrete level-set topology optimization code written in matlab. *Structural and multidisciplinary optimization*, 41(3) :453–464, 2010.
- [91] Mohammad Yaghmaei, Ali Ghoddosian, and Mohammad Mahdi Khatibi. A filter-based level set topology optimization method using a 62-line matlab code. *STRUCTURAL AND MULTIDISCIPLINARY OPTIMIZATION*, 2020.
- [92] Liang Xia, Qi Xia, Xiaodong Huang, and Yi Min Xie. Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials : a comprehensive review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(2) :437–478, 2018.
- [93] Hollis Smith and Julián A Norato. A matlab code for topology optimization using the geometry projection method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–16, 2020.
- [94] Abbas Homayouni-Amlashi, Thomas Schlinquer, Abdenbi Mohand-Ousaid, and Micky Rakotondrabe. 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, page 0, October 2020.
- [95] Micky Rakotondrabe. Multivariable classical prandtl-ishlinskii hysteresis modeling and compensation and sensorless control of a nonlinear 2-dof piezoactuator. *Nonlinear Dynamics*, DOI.10.1007/s11071-017-3466-5, 2017.

