HAL open science

Sur une perturbation de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques :cas d'une perturbation de rang-un

Traoré Gogbé Yves Arouna

▶ To cite this version:

Traoré Gogbé Yves Arouna. Sur une perturbation de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques :cas d'une perturbation de rang-un. Analyse numérique [math.NA]. Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan (Côte d'Ivoire), 2021. Français. NNT : . tel-03711999

HAL Id: tel-03711999

https://theses.hal.science/tel-03711999v1

Submitted on 1 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° : 2344/2021

RÉPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
UNION-DISPLINE-TRAVAIL
- - -
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY
UFR Mathématiques et Informatique
Laboratoire de Mathématiques et Applications

Année académique
2019/2020

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ FELIX HOUPHOUËT-BOIGNY

pour obtenir le grade de DOCTEUR

Mention : *Mathématiques et Applications*

Spécialité : *Analyse Numérique, EDP et Optimisation*

par

Arouna Traoré Gogbé Yves

TITRE DE LA THÈSE :

Sur une perturbation de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques : cas d'une perturbation de rang-un

soutenue *le* 16 ***Février*** 2021 ***devant le jury composé de :***

Mr ADJE ***Assohoun***	Professeur Titulaire, UFHB	Président
Mr KOUA BROU ***Jean Claude***	Maître de Conférences, UFHB	Directeur
Mr SOME ***Longin***	Professeur Titulaire, Université Pr Joseph Ki-Zerbo	Rapporteur
Mr ADOU ***Kablan Jerôme***	Professeur Titulaire, UFHB	Rapporteur
Mr DOSSO ***Mouhamadou***	Maître de Conférences, UFHB	Examinateur

Dédicace

Je dédie cette thèse à :

Mes parents

Mon père et ma mère, qui ont œuvré pour ma réussite, de par leur amour, leur soutien, tous les sacrifices consentis et leurs précieux conseils, pour toute leur assistance et leur présence dans ma vie. Puissent-ils recevoir au travers ce travail, l'expression de mes sentiments et de mon éternelle gratitude.

Mon petit frère, mes quatre petites sœurs et ma femme qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité.

Remerciements

Ce travail a été réalisé à l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan.

Je tiens en premier lieu, à remercier Allah, le tout puissant pour toute la santé, la volonté et le courage qu'il m'a donné pour achever ce travail.

Je tiens ensuite à remercier mon Directeur de thèse, Monsieur Koua Brou Jean-Claude, Maître de conférences à l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët-Boigny, de m'avoir accueilli dans l'équipe Analyse Numérique, EDP et Optimisation pendant mes années de thèse.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur Dosso Mouhamadou, Maître de conférences à l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët-Boigny, qui m'a proposé ce sujet de thèse en collaboration avec Monsieur Koua Brou Jean-Claude, et qui par sa maîtrise et connaissance des méthodes numériques m'a apporté un grand appui dans l'avancement de mes travaux. Je lui exprime aussi ma gratitude pour sa patience, sa sagesse et le temps qu'il m'a consacré. Je ne vous oublierai jamais, seul Allah pourra vous récompenser.

Je remercie mes deux rapporteurs, Messieurs les Professeurs Somé Longin et Adou Kablan Jerôme, pour le temps consacré à l'étude de ce rapport et les remarques importantes qui m'ont permis d'améliorer sa rigueur.

Je remercie le Doyen de l'UFR Mathématiques et Informatique de l'Université Félix Houphouët-Boigny d'Abidjan, le Professeur Adjé Assohoun, qui m'a fait l'honneur de présider le Jury de la soutenance de cette thèse.

Je remercie également le Professeur Coulibaly Adama et le groupe de travail Analyse Numérique, EDP et Optimisation pour leur critique pendant mes exposés, qui ont permis d'améliorer ce travail.

Ma gratitude va encore une fois au Professeur Somé Longin, pour m'avoir enseigné, encadré et initié à la recherche pendant mes années de DEA au sein du Laboratoire LANIBIO de l'Université Joseph Kizerbo. Pour cela, je lui addresse un grand merci.

Je remercie aussi Messieurs Mamadou Diarra, Issa Traoré, Adolphe Codjia, Mahamadou Soumaré, Médard Kouassi, Jacques Tano, Gérard Kanga, Yardjouma Yéo, Patrice Kouamé Yéboua et tous les doctorants du Laboratoire de Mathématiques

et Applications pour leur affabilité, aide et encouragements.

Je tiens à adresser une pensée affectueuse à mon père Degbéné Gogbé et à ma mère Matogoma Gogbé Elise, pour leur patience et leur soutien indéfectible durant ces longues années d'études.

Enfin, Je remercie ma femme Ahou Djénébou du fond du cœur pour son soutien si précieux...

Résumé

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse, à une théorie de perturbation de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Premièrement, partant de la théorie de perturbation de matrices symplectiques introduite par Mehl et al dans [43], nous proposons une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Dans cette étude, nous montrons que la perturbation de rang-un de la solution fondamentale du système non perturbé est solution de sa perturbation de rang-un et nous donnons ensuite quelques conséquences de la stabilité forte du système non perturbé sur sa perturbation de rang-un.

Deuxièmement, en utilisant cette théorie de perturbation de systèmes Hamiltoniens, nous présentons quelques applications des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques, notamment en physique et en mécanique.

Mots clés : système Hamiltonien, matrice symplectique, perturbation, stabilité forte.

Abstract

In this thesis, we are interested to a theory of perturbation of Hamiltonian systems with periodic coefficients.

First, starting from the perturbation theory of symplectic matrices introduced by Mehl et al in [43], we propose a theory of rank one perturbation of Hamiltonian systems with periodic coefficients. In this study, it is shown that the rank one perturbation of the fundamental solution of the unperturbed system is solution of its rank one perturbation and then we give some consequences of the strong stability of unperturbed system on its rank one perturbation.

Secondly, using this theory of perturbation, we present some applications of the Hamiltonian systems with periodic coefficients, particularly in physics and mechanics.

Key words : Hamiltonian system, symplectic matrix, perturbation, strong stability.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Table des figures **viii**

Table de Notations **xii**

Introduction générale **1**

1 Quelques rappels sur les systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques **4**
1.1 Introduction 4
1.2 A propos des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques 4
1.2.1 Matrices Hamiltoniennes et matrices symplectiques 4
1.2.1.1 Matrices Hamiltoniennes 4
1.2.1.2 Matrices symplectiques 5
1.2.1.2.1 Classification des valeurs propres de matrices symplectiques 5
1.2.1.2.2 Perturbation de rang-un de matrices symplectiques 6
1.2.1.2.3 Stabilité des matrices symplectiques 10
1.2.2 Systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques 11
1.3 Travail effectué dans cette thèse 13

2 Perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques **16**
2.1 Introduction 16
2.2 Perturbation de rang-un de matrices symplectiques 17
2.2.1 Classification des valeurs propres de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un 21

2.2.2 Conséquences de la stabilité forte de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un 26
2.3 Perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques 27
2.3.1 Forme canonique de Jordan de la solution fondamentale de (2.1) sous de petites perturbations de rang-un 37
2.3.2 Conséquences de la stabilité forte de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous de petites perturbations de rang-un 38
2.3.3 Une analyse de zone de stabilité forte de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous de petites perturbations de rang-un 42
2.4 Conclusion 47

3 Application à certains types d'équations différentielles 48
3.1 Introduction 48
3.2 Application aux systèmes de Mathieu 48
3.2.1 Etude de pendules 50
3.2.1.1 Pendule simple avec support mobile 50
3.2.1.2 Pendule double avec supports mobiles 54
3.2.1.3 Pendule triple avec supports mobiles 62
3.2.2 Mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire . 72
3.3 Application à d'autres types de systèmes bien connus 76
3.3.1 Pendule double avec supports fixes 76
3.3.2 Système dynamique mécanique 80
3.3.3 Stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps 84
3.4 Conclusion 88

Conclusion générale et perspectives 89

Bibliographie 91

ANNEXE 95

A Sur quelques méthodes de factorisation de matrices 95

Table des figures

2.1 Graphes de $(S_0(t)x,\ x)$ et de $\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) - \varphi(t,x)$, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I + uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in [0,\ 2\pi]$. 24
2.2 Graphes de $(S_0(t)x,\ x)$ et de $\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) + \varphi(t,x)$, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I - uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in [0,\ 2\pi]$. 26
2.3 Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \pi]}$ pour $(a,\ b) = (7,\ 4)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.2). 32
2.4 Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \pi]}$ pour $(a,\ b) = (16.1916618724166685,\ 5)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.2). 33
2.5 Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ pour $(\epsilon,\ \delta) = (15.5,\ 1)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.3). 35
2.6 Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ pour $(\epsilon,\ \delta) = (15,\ 2)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.3). 36
2.7 Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \pi)$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{2,1}\}$ (Exemple 2.2). 44
2.8 Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \pi)$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{2,1}\}$ (Exemple 2.2). 45
2.9 Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{7}})$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{6,1}\}$ (Exemple 2.3). 46
2.10 Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{7}})$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{6,1}\}$ (Exemple 2.3). 47

3.1 Modèle du pendule simple avec support mobile. 51
3.2 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\epsilon) \in \{(1,0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0, 0.35\}$. 52
3.3 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\epsilon) \in \{(1,0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0, 0.35\}$. 53
3.4 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi,\delta,\epsilon)$ pour $(\delta,\epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$ et $a \in \{0, 0.35\}$. 54
3.5 Modèle du pendule double non couplé avec supports mobiles. 54
3.6 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau,\delta,\ \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1,0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 56

3.7 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 57
3.8 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$ et $a \in \{0; 0.35\}$. 58
3.9 Modèle du pendule double couplé avec supports mobiles. 58
3.10 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon,\ e)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon,\ e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 60
3.11 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon,\ e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 61
3.12 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon,\ e)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$, $a \in \{0; 0.35\}$ et $e = 0.5$. 62
3.13 Modèle du pendule triple non couplé avec supports mobiles. 62
3.14 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 64
3.15 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 65
3.16 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta,\ \epsilon)$ pour $(\delta,\ \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$ et $a \in \{0; 0.35\}$. 66
3.17 Modèle du pendule triple couplé avec supports mobiles. 66
3.18 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon, e)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 70
3.19 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. 71
3.20 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta,\ \epsilon, e)$ pour $(\delta,\ \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$, $a \in \{0; 0.35\}$ et $e = 0.5$. 72
3.21 Schéma d'un analyseur quadripollaire. 73
3.22 Portrait spectrale de $\xi \mapsto \widetilde{X}_a(\xi,\ q,\ \alpha)$ pour $\xi \in [0,\ \pi]$ et $(\alpha,\ q) \in \{(0,\ 0.025)\,,\ (0.1,\ 0.7)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.3003\}$. 74
3.23 Graphes de $\xi \mapsto \|S^{(n_0)}(\xi)\|$ et $\xi \mapsto \delta_S(\xi)$ pour $\xi \in [0,\ \pi]$ et $(\alpha, q) \in \{(0,\ 0.025)\,,\ (0.1,\ 0.7)\}$, avec $a \in \{0; 0.3003\}$. 75
3.24 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(\pi, \alpha, q)$ pour $(\alpha, q) \in [0,\ 0.2] \times [0,\ 0.9]$ et $a \in \{0; 0.3003\}$. 76
3.25 Modèle du pendule double avec supports fixes. 77
3.26 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \epsilon, \delta)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5)\,,\ (0.2,\ 0.6)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.35\}$. 78
3.27 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5)\,,\ (0.2,\ 0.6)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.35\}$. 79
3.28 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi,\ \epsilon,\ \delta)$ pour $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 0.4] \times [0,\ 0.2]$ et $a \in \{0,\ 0.35\}$. 80
3.29 Schéma d'un système dynamique mécanique. 80
3.30 Portrait spectral de $t \mapsto \widetilde{X}_a(t, k, p_1)$ pour $t \in [0,\ 2\pi]$ et $(k, p_1) \in \{(0.08, 0.2)\,,\ (0.25,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.42\}$. 82
3.31 Graphes de $t \mapsto \|S^{(n_0)}(t)\|$ et $t \mapsto \delta_S(t)$ pour $t \in [0,\ 2\pi]$ et $(k, p_1) \in \{(0.08, 0.2)\,,\ (0.25,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.42\}$. 83

3.32 Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, k, p_1)$ pour $(k, p_1) \in [0,\ 0.8] \times [0,\ 0.3]$, et $a \in \{0,\ 0.42\}$. 84
3.33 Modèle du problème de trois corps. 84
3.34 Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \gamma, \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\gamma, \epsilon) \in \{(0.2, 0.2)\,,\ (0.025,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0, 0.23\}$. 86
3.35 Graphes de $\tau \mapsto \|S^{n_0}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\gamma, \epsilon) \in \{(0.2, 0.2)\,,\ (0.025,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0, 0.23\}$. 87
3.36 Instabilité de $\widetilde{X}_a(2\pi, \gamma, \epsilon)$ pour tout $(\gamma, \epsilon) \in [0,\ 0.2] \times [0,\ 0.2]$, et $a \in \{0, 0.23\}$. 88

Liste des tableaux

2.1 Vérification du lemme 2.2 et du corollaire 2.1, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I + uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in \{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$. 23

2.2 Vérification du lemme 2.2 et du corollaire 2.1, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I - uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in \{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$. 25

2.3 Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.15) pour $(a,\ b) = (7,\ 4)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.2). 40

2.4 Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.15) pour $(a,\ b) = (16.1916618724166685,\ 5)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.2). 40

2.5 Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.18) pour $(\epsilon,\ \delta) = (15.5,\ 1)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.3). 41

2.6 Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.18) pour $(\epsilon,\ \delta) = (15,\ 2)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$(Exemple 2.3). 42

Table de Notations

Nous résumons ici les notations les plus courantes qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

Typographie

1) Les notations entre guillemets correspondent à l'emploi de termes techniques que nous voulons faire ressortir.
2) s-e-i : Sous-espace invariant.
3) ■ : Fin de la preuve.

Ensembles et nombres

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{F}$	Ensemble des nombres réels ou complexes.
$\mathbb{F}^\star$	Ensemble des nombres réels non nuls ou complexes non nuls.
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^\star$	Ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{F}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des nombres réels ou complexes.
$[a,\ b]$	Intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$[a,\ b[$	Intervalle semi ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b.
$t \in \mathbb{R}$	Variable temporelle.
$\dfrac{dx}{dt}$	Dérivée de la variable x par rapport au temps.
$\dfrac{d^2x}{dt^2}$	Seconde dérivée de la variable x par rapport au temps.

Vecteurs et fonctions

x^T	Transposée du vecteur x.
x^*	Transconjuguée du vecteur x si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et Transposée du vecteur x si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.
$x \in \mathbb{F}^n$	Vecteur de composantes x_i.
$t \mapsto x(t)$	Vecteur de $\mathbb{F}^n$ représentant "l'état instantané" du vecteur x à l'instant t.
$(x,\ y)$	Produit scalaire du vecteur x par le vecteur y sur $\mathbb{F}$.
$\|.\|$	Valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\|x\|$	Norme euclidienne du vecteur x.

Matrices et opérateurs

$A^\star$	Transconjuguée de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A.
$tr(A)$	Trace de la matrice A.
$rg(A)$	Rang de la matrice A.
$\sigma(A)$	Spectre de la matrice A.
$\|A\|$	Norme spectrale de la matrice A.
I_n	Matrice identitée de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
$\bigoplus_{j=1}^n A_j$	Matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les $A_j,\ j = 1, ..., n$.
$A > 0$ $(A < 0)$	La matrice A est définie positive (définie négative).

Projecteurs

$\mathbb{P}_r$	Projecteur associé aux valeurs propres de couleur rouge de la matrice A.
$\mathbb{P}_g$	Projecteur associé aux valeurs propres de couleur verte de la matrice A.
$\mathbb{P}_0$	Projecteur associé aux valeurs propres de la matrice A qui sont à l'intérieur du cercle unité.
$\mathbb{P}_1$	Projecteur associé aux valeurs propres de la matrice A qui sont sur le cercle unité.
$\mathbb{P}_\infty$	Projecteur associé aux valeurs propres de la matrice A qui sont extérieur au cercle unité.

Introduction générale

Cette thèse concerne une théorie de perturbation de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques appelée perturbation de rang-un. Celle-ci est déduite à partir de certains travaux de C. Mehl, V. Merhmann, A. C. M. Ran et L. Rodmann [43] dans lesquels ils ont fait une étude approfondie sur la théorie de perturbations de matrices structurées ; en particulier, sur les matrices symplectiques. Or, sachant que les solutions fondamentales des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sont symplectiques [57], nous avons défini et étudié, dans cette thèse, comme une extension des travaux de Mehl et al, la perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. De cette étude, nous avons obtenu des propriétés et des résultats très enrichissants qui pourront avoir des applications intéressantes dans l'étude des systèmes différentiels, dans les domaines de la physique, de la mécanique et des mathématiques appliquées ; en particulier dans le domaine de l'ingénierie où une importance est donnée à la recherche de la stabilité des systèmes, due à de petites perturbations quelconques.

La théorie de perturbations, en générale, a été utilisée dès le debut du 18ème siècle par des astronomes de la mécanique céleste qui se sont intéressés à l'insolvabilité des équations différentielles décrivant un système de N corps en interaction gravitationnelle ($N \geq 3$)[38, 46, 47]. Ainsi, de la synthétisation de cette théorie dans les ouvrages de Laplace, Tisserant et Poincaré à la fin du 19ème siècle [37, 48, 56], elle a connu de nouveau développement avec l'avènement de la théorie de KAM (Kolmogorov, Arnold et Moser) en 1954 [2, 31]. Nous avons de nos jours, une place importante accordée à la perturbation des systèmes d'équations dans tous les domaines des sciences pures et appliquées ; en particulier, en analyse numérique, l'étude de la perturbation des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques trouve un grand intérêt pour de nombreux mathématciens de tous les continents.

L'une des importances de la théorie de perturbations de matrices symplectiques et de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques, réside dans la définition de leur stabilité forte (voir par exemple dans [14, 17, 19, 20, 57]) :

- Pour une matrice J-symplectique $W \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ ($N \geq 1$), où $J \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ est une matrice anti-symétrique et inversible, nous disons que W est fortement stable s'il existe $\epsilon > 0$ telle que toute petite perturbation $\widetilde{W}$ J-symplectique de W vérifiant $\|W - \widetilde{W}\| \leq \epsilon$, reste stable ;

– Pour un système Hamiltonien à coefficients périodiques de la forme

$$\begin{cases} J\dfrac{dX(t)}{dt} &= H(t)X(t),\ t \in \mathbb{R} \\ \\ X(0) &= I \end{cases} \tag{1}$$

où $J \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ $(N \geq 1)$ est anti-symétrique et inversible et $t \longmapsto H(t)$ est continue par morceaux sur $[0,\ P]$ telle que :

$$H(t+P) = H(t) = H^T(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N},\ \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } P > 0,$$

nous disons que le système (1) est fortement stable, s'il existe $\epsilon > 0$ telle que toute perturbation Hamiltonienne de la forme

$$J\frac{dX(t)}{dt} = \widetilde{H}(t)X(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

vérifiant la condition $\|H(t) - \widetilde{H}(t)\| < \epsilon$, reste stable.

Rappellons que la solution $X(t)$ de (1) est appelée solution fondamentale (voir [57, p.75],[14]).

De ce fait, la maîtrise d'une perturbation quelconque de matrices symplectiques ou de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques nous amenera très certainement à une grande connaissance de leurs stabilités fortes. Cette idée nous a amené au cas particulier de perturbations de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques qui est le sujet de cette thèse. Des contributions majeures seront faites dans le cadre de nos travaux. Nous montrerons que toute perturbation de rang-un de la solution fondamentale du système Hamiltonien (1) est solution de sa perturbation de rang-un [3, 4, 15, 16]. En plus des démonstrations théoriques, de nombreux tests numériques et exemples d'applications seront donnés en vue d'une confirmation des résultats acquis.

Le premier chapitre, consacré aux généralités, nous donne quelques outils théoriques nécessaires ainsi que quelques propriétés de bases utiles pour la suite de la thèse. Nous rappelons quelques définitions et propriétés sur les matrices symplectiques, les matrices Hamiltoniennes et les systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Dans le second chapitre, nous proposons une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Dans cette étude, nous montrons dans un premier temps, que la perturbation de rang-un $\widetilde{X}(t)$ de la solution fondamentale $X(t)$ du système non perturbé (1) est solution d'un système perturbé que nous appelons perturbation de rang-un de (1). Ensuite, nous nous intéressons à la forme canonique de Jordan de la solution $\widetilde{X}(t)$ du système perturbé de rang-un. Enfin, nous proposons une analyse de stabilité(forte) et de zone de stabilité forte de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous de petites perturbations de rang-un.

Le dernier chapitre est consacré à quelques applications de la théorie de perturbation de rang-un des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques à quelques

problèmes gouvernés par certains types d'équations différentielles [5, 15].

Dans un premier temps, nous nous intéressons à quelques problèmes gouvernés par les systèmes de Mathieu tels que :

- le mouvement du pendule simple avec support mobile,
- le mouvement du pendule double avec supports mobiles,
- le mouvement du pendule triple avec supports mobiles,
- le mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire.

Ensuite, nous accordons un intérêt particulier à quelques problèmes qui ne sont pas gouvernés par les systèmes de Mathieu ; à savoir :

- le mouvement du pendule double avec supports fixes,
- le mouvement d'un système dynamique mécanique,
- la stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps.

Enfin, nous terminons la rédaction de cette thèse par une conclusion générale.

Chapitre 1

Quelques rappels sur les systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques éléments de théories mathématiques sur les matrices symplectiques et les systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques, dont on aura besoin tout le long de cette thèse. Nous rappelons également certains résultats sur la théorie de perturbation de rang-un de matrices symplectiques. Enfin, nous présentons le travail effectué dans cette thèse.

Dans tout le long de cette thèse $\mathbb{F}$, désigne l'ensemble des nombres réels ou complexes et I_N désigne la matrice identité d'ordre N.

1.2 A propos des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques

1.2.1 Matrices Hamiltoniennes et matrices symplectiques

Dans cette partie, nous rappelons quelques notions importantes sur les matrices Hamiltoniennes et les matrices symplectiques.

Soit J une matrice anti-symétrique et inversible, i.e $(J^T = -J)$ [14, 15, 17, 57].

1.2.1.1 Matrices Hamiltoniennes

Définition 1.1 *[45] Soit $A \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ une matrice. A est dite J-Hamiltonienne si*

$$(JA)^* = JA.$$

Nous rappelons, dans la suite, une méthode de factorisation de matrices J-Hamiltoniennes.

Lemme 1.1 *[7] Soit $k \geq 1$ et $A \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ une matrice J-Hamiltonienne de rang-k.*

1) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{R}^{2N\times k}$ de rang k et une matrice diagonale $\Sigma = (s_1, ..., s_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, où $s_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1, ..., k$ telle que

$$A = U\Sigma U^T J.$$

2) Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{C}^{2N\times k}$ de rang k telle que

$$A = UU^\star J.$$

1.2.1.2 Matrices symplectiques

Définition 1.2 *Soit $W \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ une matrice. On dit que W est J-symplectique (ou J-orthogonale) si $W^T JW = J$.*

En lieu et place du terme " W est J-symplectique", on dira parfois W est symplectique si J est définie dans un contexte précis.
Ces types de matrices font partie d'une classe importante de matrices dites "structurées" apparaissant dans plusieurs domaines de la science telles que la théorie du contrôle (voir par exemple [11, 14]) et la théorie de résonance paramétrique [57]. En théorie du contrôle, elles apparaissent particulièrement en théorie du contrôle optimal [11] ; dans ce domaine, ces matrices n'ont pas de valeurs propres sur le cercle unité ; on est donc amené à chercher les projecteurs $\mathbb{P}_0$, et $\mathbb{P}_\infty$ sur les sous-espaces invariants (s-e-i) associés respectivement aux valeurs propres qui sont à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité. Quant à la théorie de résonance paramétrique, les valeurs propres de ces matrices sont sur le cercle unité, et dans ce cas, on est amené à déterminer le projecteur spectral $\mathbb{P}_1$ sur le s-e-i associé aux valeurs propres qui sont sur ce cercle. Dans ce domaine, les matrices symplectiques sont obtenues comme solutions matricielles des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques (voir dans [3, 4, 14, 17, 57] par exemple).

Rappelons que la solution fondamentale évaluée à la période P d'un système Hamiltonien est appelée matrice monodronique [57]. Cette matrice permet d'étudier la stabilité(forte) des systèmes Hamiltoniens en se basant sur les propriétés spectrales de matrices symplectiques déjà définies dans [3, 4, 14, 17, 20, 21, 57]. Des définitions et propriétés utiles pour la suite de nos travaux sont résumées ci-dessous.

1.2.1.2.1 Classification des valeurs propres de matrices symplectiques

Avant de rentrer dans le vif de ce paragraphe, il est important de noter au passage que le spectre de toute matrice symplectique W d'ordre $2N$ est en général composé de trois groupes : N_0 valeurs propres intérieures au cercle unité, $N_\infty = N_0$ valeurs propres extérieures au cercle unité et symétriquement placées par rapport au premier groupe, et $N_1 = 2(N - N_0)$ valeurs propres sur le cercle unité [14, 26, 27]. Les matrices symplectiques possèdent des propriétés spectrales simples et utiles que nous rappelons dans ce qui suit.

Théorème 1.1 *[14] Soit $W \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ une matrice symplectique. Alors les valeurs propres de W, intérieures et extérieures au cercle unité sont symétriques au sens de l'inversion et sont de la forme*

1. $\lambda,\ \bar{\lambda},\ 1/\lambda,\ 1/\bar{\lambda}$ *si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $|\lambda| \neq 1$;
2. $\lambda,$ *et* $\bar{\lambda}$ *si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *avec* $|\lambda| = 1$;
3. λ *et* $1/\lambda$ *si* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les valeurs propres des matrices symplectiques qui sont sur le cercle unité peuvent être classifiées [14, 17, 26, 27].

Pour cela, considérons la matrice :

$$S_0 = \frac{1}{2} J \left(W - W^{-1}\right).$$

Des propriétés simples mais, importantes de cette matrice sont résumées dans la proposition suivante (voir [14, 27])

Proposition 1.1 *1) La matrice S_0 est symétrique et vérifie la condition suivante*

$$W^T S_0 W = S_0. \tag{1.1}$$

2) Si S_0 est définie positive ($S_0 > 0$) ou définie négative ($S_0 < 0$), alors les valeurs propres de W sont sur le cercle unité.

A partir de S_0, nous pouvons classer les valeurs propres de module 1 de W conformement à la définition suivante [14, 17, 19, 57].

Définition 1.3 *Soit λ une valeur propre de module 1 de W. On dit que λ est de couleur rouge (r-valeur propre) (respectivement couleur verte (v-valeur propre)) si tout vecteur propre x associé à λ satisfait*

$$(S_0 x,\ x) > 0 \text{ (respectivement } (S_0 x,\ x) < 0).$$

De plus, si $(S_0 x,\ x) = 0$, alors λ est dite de couleur mêlées(ou dite défective).

1.2.1.2.2 Perturbation de rang-un de matrices symplectiques

Nous commençons par une modification du lemme 7.1 de Mehl et al dans [43] :

Sauf mention contraire, en lieu et place de la notation I_{2N}, on désignéra quelquefois dans ce document, la matrice identité d'ordre $2N$ simplement par I s'il n'y a pas de confusion de notation.

Soit J une matrice anti-symétrique et inversible.

Lemme 1.2 *Si W et $\widetilde{W} \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ sont J-symplectiques telle que*

$$rg\left(\widetilde{W} - W\right) = 1,$$

alors il existe un vecteur $u \in \mathbb{F}^{2N}$ telle que

$$\widetilde{W} = \begin{cases} (I + uu^{\star}J)\, W, & si\, \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ \left(I + s_1 uu^T J\right) W, & si\, \mathbb{F} = \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1.2}$$

où $s_1 = \pm 1$. De plus, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$, la matrice $\widetilde{W} = (I + uu^T J)W$ est J-symplectique.

Preuve
Soient W et $\widetilde{W} \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ deux matrices symplectiques telles que :

$$rg\left(\widetilde{W} - W\right) = 1.$$

Alors, il existe deux vecteurs non nuls $\tilde{u}$ et $v \in \mathbb{F}^{2N}$ telle que

$$\widetilde{W} = W + \tilde{u}v^*, \text{ où } * = T, \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ et } * = \star, \text{ si } \mathbb{F} = \mathbb{C}.$$

1) Pour $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, la preuve se trouve dans [43].
2) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

   Comme $\widetilde{W}$ est J-symplectique et $\tilde{u}^T J\tilde{u} = 0$ (car J est anti-symétrique), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^T J\widetilde{W} &= J \\ \Leftrightarrow \left(W + \tilde{u}v^T\right)^T J\left(W + \tilde{u}v^T\right) &= J \\ \Leftrightarrow \left(W^T + v\tilde{u}^T\right)\left(JW + J\tilde{u}v^T\right) &= J \\ \Leftrightarrow \underbrace{W^T JW}_{=J} + v\tilde{u}^T JW + W^T J\tilde{u}v^T + v\underbrace{\tilde{u}^T J\tilde{u}}_{=0}v^T &= J \\ \Rightarrow v\tilde{u}^T JW + W^T J\tilde{u}v^T &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

   En multipliant le premier membre de (1.3) à droite par v, (1.3) devient :

$$v\tilde{u}^T JWv + W^T J\tilde{u}v^T v = 0,$$

   ceci implique :

$$\begin{aligned} W^T J\tilde{u} &= -v\frac{\tilde{u}^T JWv}{v^T v}, \text{ (car } v \neq 0) \\ &= -v\frac{\tilde{u}^T w}{v^T v}, \text{ où } w = JWv. \end{aligned}$$

   En posant

$$n = \frac{\tilde{u}^T w}{v^T v},$$

   on obtient :

$$W^T J\tilde{u} = -nv.$$

Ceci montre que v et $W^T J\tilde{u}$ sont colinéaires. Ainsi, il existe une constante $c \in \mathbb{R}^*$ telle que : $v = -cW^T J\tilde{u}$. Donc

$$\widetilde{W} = \left(I + c\tilde{u}\tilde{u}^T J\right) W.$$

Comme la matrice $c\tilde{u}\tilde{u}^T J$ est J-Hamiltonienne (car $\left(Jc\tilde{u}\tilde{u}^T J\right)^T = Jc\tilde{u}\tilde{u}^T J$), d'après le point 3) du lemme 2.3 de [7](voir annexe A, lemme A.1), il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ et une constante $s_1 = \pm 1$ telle que $c\tilde{u}\tilde{u}^T J = s_1 uu^T J$. Donc

$$\widetilde{W} = \left(I + s_1 uu^T J\right) W, \text{ où } s_1 = \pm 1.$$

D'autre part, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^T J\widetilde{W} =& W^T(I_{2N} - Juu^T)J(I_{2N} + uu^T J)W \\
=& W^T JW + \underbrace{W^T Juu^T JW - W^T Juu^T JW}_{=0} \\
& - W^T Ju \underbrace{u^T Ju}_{=0} u^T JW \\
=& J, \quad \text{car } W^T JW = J.
\end{aligned}$$

Ainsi $\widetilde{W}$ est J-symplectique. ■

Ce qui nous amène à la définition suivante [43] :

Définition 1.4 *Soit $W \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ une matrice symplectique. On appelle perturbation de rang-un de W toute matrice symplectique $\widetilde{W}$ de la forme :*

$$\widetilde{W} = \begin{cases} (I + uu^\star J)\, W, & si\, \mathbb{F} = \mathbb{C} \\ \left(I + s_1 uu^T J\right) W, & si\, \mathbb{F} = \mathbb{R} \end{cases}, \tag{1.4}$$

où $s_1 = \pm 1$ et $u \in \mathbb{F}^{2N}$ tel que $u^* Ju = 0$.

A partir de cette définition, rappelons un théorème proposé par Melh et al dans [43] dans le cadre de l'étude d'une perturbation générique de rang-un.

Commençons par un rappel de quelques résultats concernant la notion d'ensembles génériques.

Définition 1.5 *[6, 44]*

1) un ensemble $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{2N}$ est dit algébrique s'il existe un ensemble fini de polynômes $p_1(x_1, ..., x_{2N})$, ..., $p_k(x_1, ..., x_{2N})$ à coefficients réels tel que $(a_1, ..., a_{2N})^T \in \mathcal{A}$ si et seulement si $p_j(a_1, ..., a_{2N}) = 0$, $\forall\, j = 1, ..., k$.

2) un ensemble algebrique $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{2N}$ est dit non trivial si $\mathcal{A} \neq \mathbb{R}^{2N}$.

Comme exemple d'ensemble algébrique, nous avons

Exemple 1.1 *[44] L'ensemble vide $\emptyset$ et $\mathbb{R}^{2N}$ sont des ensembles algébriques.*

Définition 1.6 *[6, 44] Un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^{2N}$ non trivial est dit générique si $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\mathbb{R}^{2N} \setminus \{\mathcal{A}\}$ est contenu dans une reunion finie d'ensembles algébriques non trivial.*

De ce fait, un vecteur $u \in \mathbb{F}^{2N}$ sera appelé générique s'il appartient au complémentaire d'un ensemble qui est contenu dans un ensemble algébrique non trivial [43, p.16]. Le résultat suivant donne une caractérisation d'un ensemble générique.

Lemme 1.3 *[44]*
Soit $k \in \mathbb{N}^\star$ et $Y(x_1, ..., x_r) \in \mathbb{F}^{m\times n}$ une matrice dont les coefficients sont des polynômes à variables $x_1, ..., x_r$. Si

$$rg[Y(a_1, ..., a_r)] = k, \text{ pour } (a_1, ..., a_r) \in \mathbb{F}^r,$$

alors l'ensemble

$$\{(b_1, ..., b_r) \in \mathbb{F}^r \ : \ rg\,[Y(b_1, ..., b_r)] \geq k\}$$

est générique.

Preuve
voir dans [44]. ■

Exemple 1.2 *[6, 7, 12, 45]*
- *$\mathbb{C}$ et $\mathbb{C} \setminus \{e^x\}$ sont des ensembles génériques pour tout $x \in \mathbb{C}$ [7].*
- *l'ensemble $GL_n(\mathbb{F})$ des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}$ est un ensemble générique de $\mathbb{F}^{n\times n}$ [12, p.29].*
- *l'ensemble des matrices carrées d'ordre n semi-simples et à coefficients dans $\mathbb{C}$ est un ensemble générique [12, p.29].*
- *une intersection finie d'ensembles génériques est un ensemble générique [6, 45].*
- *si $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ est inversible et $\Omega \subset \mathbb{F}^n$ est un ensemble générique, alors $X\Omega$ est un ensemble générique[6, 7, 45].*

A partir d'un vecteur générique, on peut analyser le comportement de la forme canonique de Jordan de matrices symplectiques conformément au théorème suivant :

Théorème 1.2 *[43] Soit W une matrice symplectique réelle et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de W. Supposons que W a la forme canonique de Jordan suivante :*

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda)\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_m} \mathcal{J}_{n_m}(\lambda)\right) \oplus \mathcal{J},$$

où $n_1 > \cdots > n_m$, et $\mathcal{J}$ est tel que $\sigma(\mathcal{J}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\lambda\}$ ie : contient tous les blocs de Jordan associés aux valeurs propres distinctes de λ. De plus, soit $u \in \mathbb{R}^{2N}$ un vecteur générique et $B = uu^T JW$.

1) Si $\lambda \notin \{-1, 1\}$, alors génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $W + B$ a la forme canonique de Jordan

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda)\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_m} \mathcal{J}_{n_m}(\lambda)\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}},$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}$ contient les blocs de Jordan de $W + B$ associés aux valeurs propres différentes de λ.

2) Si $\lambda \in \{+1, -1\}$, et :

2a) si n_1 est paire, alors génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $W + B$ a la forme canonique de Jordan

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda)\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_m} \mathcal{J}_{n_m}(\lambda)\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}},$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}$ contient les blocs de Jordan de $W + B$ associés aux valeurs propres différentes de λ.

2b) si n_1 est impaire, alors l_1 est paire et génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $W + B$ a la forme canonique de Jordan

$$\mathcal{J}_{n_1+1}(\lambda) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-2} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda)\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda)\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_m} \mathcal{J}_{n_m}(\lambda)\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}},$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}$ contient les blocs de Jordan de $W + B$ associés aux valeurs propres différentes de λ.

Preuve
La preuve se trouve dans [43, p.240-241]. ■

1.2.1.2.3 Stabilité des matrices symplectiques

Soit W une matrice symplectique.

Concernant la stabilité de ces matrices, nous commençons par la définition ci-dessous. Sauf mention contraire, le symbole $\| \, \|$ désigne la norme spectrale (norme 2).

Définition 1.7 *W est stable si $\exists\ C > 0$ telle que : $\|W^k\| < C$, $\forall\ k \in \mathbb{Z}$ et pour toute norme matricielle $\| \, \|$.*

Ainsi pour qu'une matrice symplectique soit stable, il suffit que toutes ses puissances soient bornées, ce qui implique que toutes ses valeurs propres doivent être sur le cercle unité et doivent être en plus non défectives. La définition suivante caractérise un autre type de stabilité :"la stabilité forte".

Définition 1.8 *W est fortement stable s'il existe $\epsilon > 0$ telle que toute matrice symplectique $\widetilde{W}$ vérifiant $\|\widetilde{W} - W\| \leq \epsilon$ est stable.*

Ce concept est plus robuste que la stabilité [14]. Bien entendu, le spectre de W doit être simple et doit être sur le cercle unité. Mais cela ne suffit pas à garantir ce type de stabilité, car en plus de cette condition, il faudrait que son spectre soit formé de valeurs propres de couleurs rouge (r-valeurs propres) et verte (g-valeurs propres) et la quantité

$$\delta_S = \min\left\{\left|e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}\right| \text{ tel que } e^{i\theta_k} \text{ et } e^{i\theta_l} \text{ sont respectivement des } r\text{-valeurs propres et } g\text{-valeurs propres de } W\right\} \tag{1.5}$$

ne doit pas être proche de zéro conformément au théorème suivant (voir [14])

Théorème 1.3 *Une matrice symplectique $W \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ est fortement stable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) *toutes ses valeurs propres sont sur le cercle unité et son spectre est formé soit de r-valeurs propres et/ou soit de g-valeurs propres, et les r-valeurs propres et les g-valeurs propres doivent être bien séparées ie : la quantité δ_S définie dans (1.5) est telle que $\delta_S > 0$.*
2) • $\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g = I$ *et* $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}_\infty = 0$, *avec*
   - $\mathbb{P}_r$ *et* $\mathbb{P}_g$ *les projecteurs associés respectivement aux valeurs propres de couleur rouge et verte de W.*
   - $\mathbb{P}_0$ *et* $\mathbb{P}_\infty$ *les projecteurs associés respectivement aux valeurs propres de W situées à l'intérieur du cercle unité et à l'extérieur du cercle unité.*

   • $S_r \geq 0,\ S_g \leq 0,\ S_r - S_g > 0,$
   où $S_r = \mathbb{P}_r^T S_0 \mathbb{P}_r$ *et* $S_g = \mathbb{P}_g^T S_0 \mathbb{P}_g$,
3) *la suite de moyenne de matrices $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ définie par :*

$$S^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(W^T)^{k-1}W^{k-1}$$

converge vers une matrice constante symétrique et définie positive $S^{(\infty)}$ et la quantité δ_S définie dans (1.5) n'est pas proche de zéro.

1.2.2 Systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques

Un système linéaire Hamiltonien à coefficients P-périodiques est un système différentiel de la forme :

$$J\frac{dx(t)}{dt} = H(t)x(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

où $t \longmapsto H(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$H(t+P) = H(t) = (H(t))^T,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La solution fondamentale $X(t)$ de (1.6) vérifiant l'équation

$$\begin{cases} J\dfrac{dX(t)}{dt} &= H(t)X(t) \\ X(0) &= I \end{cases} \tag{1.7}$$

est J-symplectique et satisfait la relation suivante :

$$X(t+nP) = X(t)X^n(P) \neq X^n(P)X(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

voir [14, 17, 18, 21, 25, 26].

Soit la définition suivante

Définition 1.9 *[14, 19, 20, 57] La matrice symplectique $X(P)$ obtenue en évaluant la solution de (1.7) à la période P est appelée matrice monodronique de (1.7) et ses valeurs propres sont appelées "multipliers"*[1] *de (1.7).*

Nous allons à présent nous intéresser à la stabilité de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Pour la stabilité des systèmes Hamiltoniens, nous avons la définition ci-dessous :

Définition 1.10 *Le système (1.7) est stable si toutes ses solutions sont bornées.*

En d'autres termes, (1.7) est stable si et seulement si tous ses "multipliers" sont sur le cercle unité et sont simples. Mais lorsque le système (1.7) est soumis à de petites perturbations Hamiltoniennes, les conditions de la définition 1.10 ne sont toujours pas vérifiées, ce qui nous conduit encore à un autre type de stabilité : "la stabilité forte".

Définition 1.11 *Le système (1.7) est fortement stable s'il existe $\epsilon > 0$ telle que tout système Hamiltonien à coefficients P-périodiques de la forme*

$$J\frac{dX(t)}{dt} = \widetilde{H}(t)X(t) \tag{1.9}$$

satisfaisant

$$\left\|\widetilde{H} - H\right\| = \int_0^P \left|\widetilde{H}(t) - H(t)\right| dt < \epsilon, \tag{1.10}$$

est stable.

De ce fait, on peut noter, l'existence d'un voisinage dans lequel ce système peut rester fortement stable lorsqu'il est sujet à de petites perturbations Hamiltoniennes (voir dans [17, 27, 57]). Ceci montre l'importance de la perturbation dans l'analyse de la stabilité forte d'un système Hamiltonien à coefficients périodiques.

Le théorème suivant montre que l'étude de la stabilité forte de systèmes Hamiltoniens revient à étudier la stabilité forte de sa matrice monodronique $X(P)$ [14, 20, 27, 57].

1. Nous conservons l'appellation anglaise "multipliers" pour plus de rigeur, car n'ayant pas de traduction exacte en français

Théorème 1.4 *Le système (1.7) est fortement stable si et seulement si sa matrice monodronique $X(P)$ est fortement stable.*

En se basant sur le critère $K.G.L$ (Krein, Gelfand et Liidski)[17, 27, 57] et sur les travaux de Godunov et Sadkane dans [27] puis de Dosso et al [14, 17], nous avons le théorème suivant qui regroupe deux résultats sur la stabilité forte.

Théorème 1.5 *(1.7) est fortement stable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1) *Les "multipliers" du système (1.7) sont soit de couleur rouge et/ou soit de couleur verte et ses "multipliers" de couleur rouge et de couleur verte de (1.7) doivent être bien séparés, ie : la quantité*

$$\delta_S(X(P)) = \min\left\{\left|e^{i\theta_k} - e^{i\theta_l}\right| \text{ tel que } e^{i\theta_k} \text{ et } e^{i\theta_l} \text{ sont des "multipliers" de couleurs distinctes de } (1.7)\right\} > 0. \tag{1.11}$$

2) *La suite de moyenne de matrices $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ définie par*

$$S^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(X^T(P))^{k-1}(X(P))^{k-1}$$

converge vers une matrice constante symétrique et définie positive $S^{(\infty)}$ et la quantité δ_S définie dans (1.11) n'est pas proche de zéro.

1.3 Travail effectué dans cette thèse

Nous résumons brièvement le travail effectué dans cette thèse.

Dans le chapitre 2, après avoir adapté le lemme 1.2 aux fonctions matricielles symplectiques de la forme :

$$\widetilde{X}(t) = \left(I + c(t)u(t)u^T(t)J\right)X(t), \tag{1.12}$$

où $t \to u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ est une fonction vectorielle et $t \longmapsto c(t) \in \{-1,\ +1\}$, nous présentons une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Dans cette étude, nous considérons un vecteur réel constant non nul $u \in \mathbb{R}^{2N}$ et nous montrons, dans un premier temps, que la perturbation de rang-un

$$\widetilde{X}(t) = \left(I + uu^TJ\right)X(t), \text{ (où } u \in \mathbb{R}^{2N} \text{ et } s_1 = 1)$$

de la solution fondamentale $X(t)$ du système Hamiltonien non perturbé (1.7) est la solution du système perturbé suivant :

$$\begin{cases} J\dfrac{d\widetilde{X}(t)}{dt} &= \left(I - uu^TJ\right)^T H(t)\left(I - uu^TJ\right)X(t) \\ \widetilde{X}(0) &= I + uu^TJ \end{cases} \tag{1.13}$$

que nous appelons perturbation de rang-un du système Hamiltonien à coefficients périodiques (1.7). Ensuite, nous donnons la forme canonique de Jordan de la solution fondamentale de la perturbation de rang-un de (1.7) en s'inspirant de l'approche introduite dans [43]. Dans ce chapitre, nous proposons également une analyse de stabilité forte et de zone de stabilité forte des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques lorsqu'ils sont soumis à de petites perturbations de rang-un. Dans l'analyse de la stabilité forte, les paramètres du système Hamiltonien sont fixés et on se sert de l'approche définie dans [14, 17, 27] pour analyser la stabilité forte du système non perturbé sous de petites perturbations de rang-un, tandis que dans l'analyse de la zone de stabilité forte, les paramètres du système varient et il n'est plus aisé d'utiliser l'approche définie dans [14, 17, 27]. Pour remédier à ce type de problème, on propose un algorithme d'analyse de zone de stabilité forte en s'inspirant cette fois-ci de l'approche introduite dans [17]. En considérant la suite $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ de moyenne de matrices

$$S^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}(W^T)^{j-1}W^{j-1},$$

où $W = \widetilde{X}(P)$ est la solution évaluée en la période P de la perturbation de rang-un de (1.7) et la quantité δ_S est définie dans (1.5). Cet algorithme proposé permet de générer la zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}(P)$ à partir des critères suivants : l'ensemble des points en lesquels

1) la suite $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ diverge, est le domaine instable.
2) la suite $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ converge, est le domaine de stabilité.
3) la suite $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ converge et δ_S n'est pas proche de zéro, est le domaine de stabilité forte.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous présentons quelques applications des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques en physique et en mécanique.

Nous structurons ce chapitre en deux sections. Dans la première section, nous appliquons la théorie de perturbation présentée dans le chapitre 2 à quelques problèmes gouvernés par les systèmes de Mathieu tels que :

- l'analyse de la stabilité du mouvement des pendules simples, double et triple avec supports mobiles ;
- et l'analyse de la stabilité du mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire.

Dans la dernière section, nous appliquons également cette théorie à quelques problèmes gouvernés par des systèmes bien connus qui ne sont pas des systèmes de Mathieu tels que :

- l'analyse de la stabilité du mouvement du pendule double avec supports fixes ;
- l'analyse de la stabilité du mouvement d'un système dynamique mécanique ;
- l'analyse de la stabilité orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps.

Pour effectuer ce travail, nous nous servons de la convergence de la suite $(S^{(n)})_{n\geq 0}$ et de la quantité δ_S pour analyser la stabilité sous de petites perturbations de rang-

un, lorsque t varie dans $[0,\ P]$. Puis nous visualisons le mouvement des valeurs propres de la solution de ces problèmes sous l'influence de la perturbation de rang-un. Enfin, on se sert encore de l'algorithme 2.1 du chapitre 2 pour générer les différentes zones de stabilité(forte) des problèmes étudiés sous l'effet de la perturbation de rang-un. Dans tout ce document, les exemples et tests numériques ont été élaborés sous la version 7.9.0($R2009b$) du logiciel MATLAB.

Chapitre 2

Perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques

2.1 Introduction

Considérons le système Hamiltonien à coefficients périodiques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} J\dfrac{dX(t)}{dt} & = & H(t)X(t),\ t \in \mathbb{R} \\ \\ X(0) & = & I \end{array} \right. , \tag{2.1}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

et $t \longmapsto H(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$H(t+P) = H(t) = (H(t))^T, \text{ avec } t \in \mathbb{R} \text{ et } P > 0;$$

dont la solution fondamentale $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est une fonction matricielle J-symplectique [57]. Dans l'article [43], Mehl et al, ont proposé une théorie de perturbation de rang-un de matrices symplectiques et ont prouvé que la perturbation de rang-un $\widetilde{W}$ d'une matrice symplectique $W \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ est une matrice symplectique de la forme

$$\widetilde{W} = (I + uu^\star J)\, W, \text{ où } u \in \mathbb{C}^{2N} \text{ tel que } u^\star J u = 0. \tag{2.2}$$

La définition 1.4 est une reformulation de cette définition en tenant compte du cas réel ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$).

Ce qui nous amène à proposer une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2.2, nous étudions la théorie de perturbation de rang-un de matrices symplectiques. Dans cette section, après

avoir adapté certains résultats de [43] et [58] aux fonctions matricielles symplectiques, nous proposons une classification des valeurs propres de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un. Enfin, nous présentons une analyse de stabilité forte de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un. Dans la section 2.3, consacrée à une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques, nous montrons que la perturbation de rang-un $\widetilde{X}(t)$ de $X(t)$ est la solution de la perturbation de rang-un de l'équation (2.1). Ensuite, nous donnons la forme canonique de Jordan de la solution fondamentale de (2.1) sous de petites perturbations génériques de rang-un. Nous donnons également une conséquence de la stabilité forte de (2.1) sur sa perturbation de rang-un et proposons un algorithme d'analyse de zone de stabilité forte de (2.1) sous de petites perturbations de rang-un. Enfin, dans la section 2.4, nous faisons une conclusion du travail effectué.

2.2 Perturbation de rang-un de matrices symplectiques

Soit le lemme suivant :

Lemme 2.1 *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $J \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ une matrice inversible et anti-symétrique. Si $W(t)$ et $\widetilde{W}(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ sont J-symplectiques telle que :*

$$rg\left(W(t) - \widetilde{W}(t)\right) = 1,$$

alors il existe une fonction vectorielle $u : t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ et une fonction $t \longmapsto s_1(t) \in \{-1,\ +1\}$ telle que

$$\widetilde{W}(t) = (I + s_1(t)u(t)u^T(t)J)W(t).$$

De plus pour toute fonction vectorielle $u : t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ et pour toute fonction $t \longmapsto s_1(t) \in \{-1,\ +1\}$, la fonction matricielle

$$\widetilde{W}(t) = (I + s_1(t)u(t)u^T(t)J)W(t)$$

est J-symplectique.

Preuve

Soient $t \in \mathbb{R}$, $W(t)$ et $\widetilde{W}(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ deux fonctions matricielles symplectiques telle que :

$$rg\left(W(t) - \widetilde{W}(t)\right) = 1.$$

Alors, il existe deux fonctions vectorielles non nulles $\tilde{u} : t \mapsto \tilde{u}(t)$ et $v : t \mapsto v(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ telles que

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \tilde{u}(t)v^T(t).$$

Comme $\widetilde{W}(t)$ est J-symplectique et $\tilde{u}^T(t)J\tilde{u}(t) = 0$ (car J est anti-symétrique), on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}^T(t)J\widetilde{W}(t) &= J \\
\Leftrightarrow \left(W(t) + \tilde{u}(t)v^T(t)\right)^T J \left(W(t) + \tilde{u}(t)v^T(t)\right) &= J \\
\Leftrightarrow \left(W^T(t) + v(t)\tilde{u}^T(t)\right)\left(JW(t) + J\tilde{u}(t)v^T(t)\right) &= J \\
\Leftrightarrow \underbrace{W^T(t)JW(t)}_{=J} + v(t)\tilde{u}^T(t)JW(t) + W^T(t)J\tilde{u}(t)v^T(t) + v(t)\underbrace{\tilde{u}^T(t)J\tilde{u}(t)}_{=0}v^T(t) &= J \\
\Rightarrow v(t)\tilde{u}^T(t)JW(t) + W^T(t)J\tilde{u}(t)v^T(t) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

En multipliant le premier membre de (2.3) à gauche par $v(t)$, l'équation (2.3) devient :

$$v(t)\tilde{u}^T(t)JW(t)v(t) + W^T(t)J\tilde{u}(t)v^T(t)v(t) = 0,$$

ceci implique :

$$\begin{aligned}
W^T(t)J\tilde{u}(t) &= -v(t)\frac{\tilde{u}^T(t)JW(t)v(t)}{v^T(t)v(t)}, \text{ (car } v(t) \neq 0) \\
&= -v(t)\frac{\tilde{u}^T(t)w(t)}{v^T(t)v(t)} \\
&= -\tilde{n}(t)v(t),
\end{aligned}$$

où l'on a pris

$$w(t) = JW(t)v(t) \text{ et } \tilde{n}(t) = \frac{\tilde{u}^T(t)w(t)}{v^T(t)v(t)}.$$

Ceci montre que $v(t)$ et $W^T(t)J\tilde{u}(t)$ sont colinéaires. Ainsi il existe une fonction $t \mapsto c(t) \in \mathbb{R}^*$ telle que $v(t) = -c(t)W^T(t)J\tilde{u}(t)$. On a donc

$$\widetilde{W}(t) = \left(I + c(t)\tilde{u}(t)\tilde{u}^T(t)J\right)W(t).$$

Comme la matrice $c(t)\tilde{u}(t)\tilde{u}^T(t)J$ est J-Hamiltonienne

$$\text{car } \left(Jc(t)\tilde{u}(t)\tilde{u}^T(t)J\right)^T = Jc(t)\tilde{u}(t)\tilde{u}^T(t)J,$$

d'après le lemme 1.1, il existe une fonction vectorielle $t \longmapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ et une fonction $t \longmapsto s_1(t) \in \{-1,\ 1\}$ telle que

$$c(t)\tilde{u}(t)\tilde{u}^T(t)J = s_1(t)u(t)u^T(t)J.$$

Donc

$$\widetilde{W}(t) = \left(I + s_1(t)u(t)u^T(t)J\right)W(t).$$

D'autre part, pour toute fonction vectorielle $u : t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ et pour toute fonction $t \longmapsto s_1(t) \in \{-1, +1\}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{W}^T(t)J\widetilde{W}(t) =& W^T(t)(I_{2N} - s_1(t)Ju(t)u^T(t))J(I_{2N} + s_1(t)u(t)u^T(t)J)W(t),\\ =& W^T(t)JW(t) + s_1(t)\left(\underbrace{W^T(t)Ju(t)u^T(t)JW(t) - W^T(t)Ju(t)u^T(t)JW(t)}_{=0}\right)\\ &-W^T(t)Ju(t)\underbrace{u^T(t)Ju(t)}_{=0}u^T(t)JW(t)\\ =& J, \quad \text{car } W^T(t)JW(t) = J.\end{aligned}$$

$\widetilde{W}(t)$ est donc J-symplectique. ■

Ainsi, on a la définition suivante :

Définition 2.1 *Soit*

$$\begin{aligned} W : \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}^{2N\times 2N}\\ t &\longmapsto W(t),\end{aligned}$$

une fonction matricielle J-symplectique. On appelle perturbation de rang-un de $W(t)$ toute fonction matricielle de la forme

$$\widetilde{W}(t) = (I + s_1(t)u(t)u^T(t)J)W(t),$$

où $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ est une fonction vectorielle et $t \longmapsto s_1(t) \in \{-1, +1\}$.

Des propriétés importantes et utiles de la fonction matricielle symplectique perturbée $I + s_1(t)u(t)u^T(t)J$ sont résumées dans la proposition ci-dessous [58] :

Proposition 2.1 *Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons*

$$I(t) = I + s_1(t)u(t)u^T(t)J, \text{ avec } t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N} \text{ et } t \longmapsto s_1(t) \in \{-1, +1\}.$$

Alors,

1) $I(t)$ est J-symplectique et son inverse est donnée par $I - s_1(t)u(t)u^T(t)J$.

2) $dim(ker(I(t) - I)) = 2N - 1$ et 1 est une valeur propre de $I(t)$.

Preuve

1) on a

$$\begin{aligned} I^T(t)JI(t) =& (I_{2N} + s_1(t)u(t)u^T(t)J)^T J(I_{2N} + s_1(t)u(t)u^T(t)J)\\ =& J + s_1(t)\left(\underbrace{Ju(t)u^T(t)J - Ju(t)u^T(t)J}_{=0}\right)\\ &- (s_1(t))^2 Ju(t)\underbrace{u^T(t)Ju(t)}_{=0}u^T(t)J = J\end{aligned}$$

Donc $I(t)$ est J-symplectique. D'autre part, comme

$$\begin{aligned}\left(I - s_1(t)u(t)u^T(t)J\right) I(t) =& I + \underbrace{s_1(t)u(t)u^T(t)J - s_1(t)u(t)u^T(t)J}_{=0} \\ & - (s_1(t))^2 u(t) \underbrace{u^T(t)Ju(t)}_{=0} u^T(t)J \\ =& I\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}I(t)\left(I - s_1(t)u(t)u^T(t)J\right) =& I + \underbrace{-s_1(t)u(t)u^T(t)J + s_1(t)u(t)u^T(t)J}_{=0} \\ & - (s_1(t))^2 u(t) \underbrace{u^T(t)Ju(t)}_{=0} u^T(t)J \\ =& I,\end{aligned}$$

on en déduit que $I(t)$ est inversible et a pour inverse $I - s_1(t)u(t)u^T(t)J$.

2) on sait que $rg(I(t) - I) = rg(s(t)u(t)u^T(t)J) = 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème du rang, nous avons :

$$dim\left(\mathbb{R}^{2N}\right) = dim\left(ker(I(t) - I)\right) + rg\left(I(t) - I\right)$$

donc

$$dim\left(ker(I(t) - I)\right) = dim\left(\mathbb{R}^{2N}\right) - rg\left(I(t) - I\right) = 2N - 1.$$

Ensuite pour toute fonction vectorielle $t \longmapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$, on a :

$$I(t)u(t) = \left(I + s_1(t)u(t)u^T(t)J\right) u(t) = u(t) + s_1(t) \underbrace{u(t)u^T(t)Ju(t)}_{=0} = u(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que 1 est une valeur propre de $I(t)$.

■

Des résultats simillaires à cette proposition ont été énoncés dans [58] pour $t \longmapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ unitaire constant et $t \longmapsto s_1(t) = -1$.

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, on considérera que la fonction vectorielle $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ est constante, de petite norme et $t \longmapsto s_1(t) = \pm 1$. Autrement dit, on considère la perturbation de rang-un

$$\widetilde{W}(t) = \left(I \pm uu^T J\right) W(t),$$

où u est un vecteur constant de $\mathbb{R}^{2N}$.

2.2.1 Classification des valeurs propres de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un

Des méthodes d'analyse de stabilité forte de matrices symplectiques ont été proposées par Krein, Gelfand et Lidskii (critère KGL)[57] à partir de la matrice antisymétrique J et par Dosso et Sadkane [14, 17] à partir d'une classification des valeurs propres d'une matrice introduite par Godunov et Sadkane [24, 25, 26, 27].

Dans cette thèse, on s'intéresse à la méthode introduite dans [14] pour classifier les valeurs propres de ces types de matrices sous de petites perturbations de rang-un préservant leur structure symplectique. Pour cela, considérons la matrice symétrique S_0 définie par [14, 24, 25, 26, 27] :

$$S_0 = (1/2)\left[(JW) + (JW)^T\right],$$

où W est une matrice symplectique.

A partir de S_0, nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Considérons la perturbation de rang-un $\widetilde{W} = (I \pm uu^T J)W$ de W où $u \in \mathbb{R}^{2N}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}^{2N}$, la forme quadratique $(S_0 x, x)$ est définie par :*

$$(S_0 x, x) = (\widetilde{S}_0 x, x) \pm \varphi(x) \tag{2.4}$$

où

$$\widetilde{S}_0 = (1/2)\left(J\widetilde{W} + (J\widetilde{W})^T\right) \text{ et } \varphi(x) = (1/2)\left((Juu^T J\widetilde{W} + (Juu^T J\widetilde{W})^T)x, x\right).$$

Preuve
Soit $x \in \mathbb{C}^{2N}$ et $u \in \mathbb{R}^{2N}$. Puisque

$$\widetilde{W} = (I \pm uu^T J)W \Rightarrow W = (I \pm uu^T J)\widetilde{W} \text{ (car } (I \pm uu^T J)^{-1} = I \pm uu^T J),$$

on a

$$\begin{aligned}
S_0 =& (1/2)\left(JW + (JW)^T\right)\\
=& (1/2)\left(J(I \pm uu^T J)\widetilde{W} + (J(I \pm uu^T J)\widetilde{W})^T\right)\\
=& (1/2)\left(J\widetilde{W} \pm Juu^T J\widetilde{W} + (J\widetilde{W} \pm Juu^T J\widetilde{W})^T\right)\\
=& (1/2)\left(J\widetilde{W} \pm Juu^T J\widetilde{W} + (J\widetilde{W})^T \pm (Juu^T J\widetilde{W})^T\right)\\
=& \left(\underbrace{(1/2)(J\widetilde{W} + (J\widetilde{W})^T)}_{=\widetilde{S}_0} \pm (1/2)(Juu^T J\widetilde{W} + (Juu^T J\widetilde{W})^T)\right)\\
=& \widetilde{S}_0 \pm (1/2)(Juu^T J\widetilde{W} + (Juu^T J\widetilde{W})^T)\\
\Rightarrow (S_0 x, x) =& \left(\widetilde{S}_0 x, x\right) \pm (1/2)\left((Juu^T J\widetilde{W} + (Juu^T J\widetilde{W})^T)x, x\right)
\end{aligned}$$

D' où

$$(S_0x, x) = \left(\widetilde{S}_0x, x\right) \pm \varphi(x), \text{ avec } \varphi(x) = (1/2)\left((Juu^TJ\widetilde{W} + (Juu^TJ\widetilde{W})^T)x, x\right).$$

■

De ce lemme, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 *Soient λ une valeur propre de module 1 de W et x un vecteur propre de W associé à λ. Alors λ est une valeur propre de couleur rouge (respectivement de couleur verte) si et seulement si $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) > \pm\varphi(x)$ (respectivement $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) < \pm\varphi(x)$).*
D'autre part, $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) = \pm\varphi(x)$ si et seulement si λ est de couleur mêlée.

Preuve
Soit λ une valeur propre de module 1 de W et x un vecteur propre de W associé à λ. D'après le lemme 2.2, on a $(S_0x, x) = \left(\widetilde{S}_0x, x\right) \pm \varphi(x)$. Donc

a) on a $(S_0x, x) > 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) \pm \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) > \pm\varphi(x)$. Alors λ est de couleur rouge si et seulement si $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) > \pm\varphi(x)$.

b) $(S_0x, x) < 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) \pm \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) < \pm\varphi(x)$. Donc, on en déduit que λ est de couleur verte si et seulement si $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) < \pm\varphi(x)$.

c) Enfin, $(S_0x, x) = 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) \pm \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\widetilde{S}_0x, x\right) = \pm\varphi(x)$. D'où λ est de couleur mêlée si et seulement si $\left(\widetilde{S}_0x, x\right) = \pm\varphi(x)$.

■

A partir de ce corollaire, on obtient une nouvelle caractérisation des valeurs propres de module 1 de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un.

Exemple 2.1 *Considérons les matrices [27]*

$$J = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}, \; B(t) = \begin{pmatrix} b(t) & b(t)-1 \\ b(t)+1 & b(t) \end{pmatrix}$$

et

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t))B(t) & -(B(t))^{-T}\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t))B(t) & (B(t))^{-T}\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix},$$

où

$$b(t) = 2\sin(4t) \text{ et } \alpha(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) \; (0 \le t \le 2\pi).$$

On vérifie facilement que $W(t)$ est J-symplectique pour tout $t \in [0,\, 2\pi]$. La fonction $W(t)$ est 2π-périodique et une perturbation de rang-un de $W(t)$ est pour tout $t \in [0,\, 2\pi]$, donnée par :

$$\widetilde{W}(t) = \left(I \pm uu^T J\right) W(t),\ \forall\, t \in [0,\, 2\pi] \text{ et } u \in \mathbb{R}^4.$$

Le but de cet exemple est de montrer numériquement tout d'abord que

$$(S_0(t)x,\ x) = \left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) \pm \varphi(t,x),\ \text{où } \widetilde{S}_0(t) = (1/2)\left(J\widetilde{W}(t) \pm (J\widetilde{W}(t))^T\right)$$

et $\varphi(t,x) = (1/2)\left[\left(Juu^T J\widetilde{W}(t) + (Juu^T J\widetilde{W}(t))^T\right)x, x\right]$, *($x$ est un vecteur propre de $W(t)$) puis de vérifier numériquement les résultats du corollaire 2.1.*

1) Pour $u = \begin{bmatrix} 0.675 \\ 0.0125 \\ 0.789 \\ 0.255 \end{bmatrix}$ *et* $\widetilde{W}(t) = \left(I + uu^T J\right) W(t),\ \forall\, t \in [0,\, 2\pi]$, *nous avons les résultats suivants :*

t	$\sigma(W(t))$	$(S_0(t)x,\ x)$	$(\widetilde{S}_0(t)x,\ x) - \varphi(t,x)$
	$-0.9167 + 0.3997i$	-0.0923	-0.0923
	$-0.9167 - 0.3997i$	-0.0923	-0.0923
0.25	$1.4914 + 0.0000i$	-4.1633×10^{-17}	-1.1102×10^{-16}
	$0.6705 + 0.0000i$	-4.0246×10^{-16}	-2.2204×10^{-16}
	$-0.4445 + 0.8958i$	0.7600	0.7600
	$-0.4445 - 0.8958i$	0.7600	0.7600
1.5	$-0.6663 + 0.7457i$	-0.5967	-0.5967
	$-0.6663 - 0.7457i$	-0.5967	-0.5967
	$2.1016 + 0.0000i$	-1.1102×10^{-16}	-5.5511×10^{-17}
	$-0.3797 + 0.9251i$	0.6907	0.6907
2.25	$-0.3797 - 0.9251i$	0.6907	0.6907
	$0.4758 + 0.0000i$	1.3878×10^{-16}	7.6328×10^{-17}
	$1.8420 + 0.0000i$	3.0531×10^{-16}	9.3675×10^{-17}
	$-0.7976 + 0.6032i$	0.1757	0.1757
3.5	$-0.7976 - 0.6032i$	0.1757	0.1757
	$0.5429 + 0.0000i$	1.9429×10^{-16}	-1.2490×10^{-16}
	$-3.9776 + 0.0000i$	-1.7208×10^{-15}	-2.1094×10^{-15}
	$-0.2514 + 0.0000i$	5.5511×10^{-15}	4.1633×10^{-16}
4.25	$-0.8250 + 0.5651i$	-0.1594	-0.1594
	$-0.8250 - 0.5651i$	-0.1594	-0.1594

TABLE 2.1 – Vérification du lemme 2.2 et du corollaire 2.1, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I + uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in \{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$.

Les résultats réportés dans la Table 2.1 montrent dans un premier temps la vérification du corollaire 2.1 pour $t \in \{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$. *Ensuite, on remarque que*

$$(S_0(t)x,\ x) \equiv \left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) - \varphi(t,x),\ \forall\, t \in \{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\},$$

pour tout vecteur propre x *de* $W(t)$ *associée à* $\lambda(t)$.

Dans la Figure 2.1, on observe que pour le vecteur $x = \begin{bmatrix} -0.2158 \\ -0.5991 \\ 0.6583 \\ 0.6583 \end{bmatrix}$,

$$(S_0(t)x,\ x) \equiv \left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) - \varphi(t,x),\ \forall\, t \in [0,\ 2\pi].$$

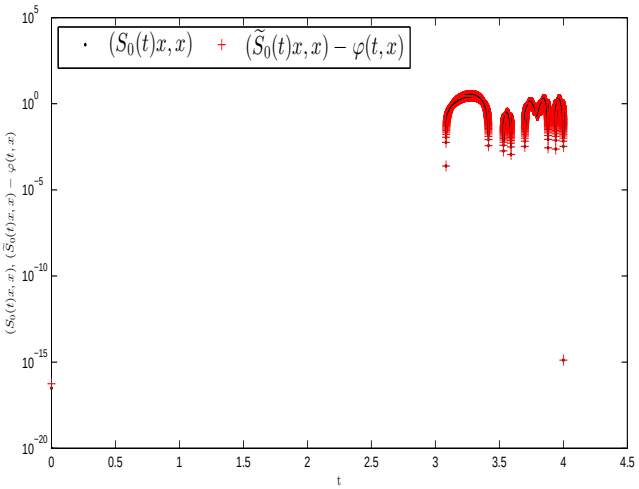

FIGURE 2.1 – Graphes de $(S_0(t)x,\ x)$ et de $\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) - \varphi(t,x)$, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I + uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in [0,\ 2\pi]$.

2) Pour $u = \begin{bmatrix} 0.675 \\ 0.0125 \\ 0.789 \\ 0.255 \end{bmatrix}$ *et* $\widetilde{W}(t) = \left(I - uu^T J\right) W(t),\ \forall\, t \in [0,\ 2\pi]$, *on obtient les résultats suivants :*

t	$\sigma(W(t))$	$(S_0(t)x,\ x)$	$(\widetilde{S}_0(t)x,\ x)+\varphi(t,x)$
	$-0.9167+0.3997i$	-0.0923	-0.0923
	$-0.9167-0.3997i$	-0.0923	-0.0923
0.25	$1.4914+0.0000i$	-4.1633×10^{-17}	1.0755×10^{-16}
	$0.6705+0.0000i$	-4.0246×10^{-16}	-3.053×10^{-16}
	$-0.4445+0.8958i$	0.7600	0.7600
	$-0.4445-0.8958i$	0.7600	0.7600
1.5	$-0.6663+0.7457i$	-0.5967	-0.5967
	$-0.6663-0.7457i$	-0.5967	-0.5967
	$2.1016+0.0000i$	-1.1102×10^{-16}	-1.1102×10^{-16}
	$-0.3797+0.9251i$	0.6907	0.6907
2.25	$-0.3797-0.9251i$	0.6907	0.6907
	$0.4758+0.0000i$	1.3878×10^{-16}	1.3878×10^{-16}
	$1.8420+0.0000i$	3.0531×10^{-16}	4.4409×10^{-16}
	$-0.7976+0.6032i$	0.1757	0.1757
3.5	$-0.7976-0.6032i$	0.1757	0.1757
	$0.5429+0.0000i$	1.9429×10^{-16}	8.3267×10^{-17}
	$-3.9776+0.0000i$	-1.7208×10^{-15}	-2.2204×10^{-15}
	$-0.2514+0.0000i$	5.5511×10^{-16}	-4.1633×10^{-17}
4.25	$-0.8250+0.5651i$	-0.1594	-0.1594
	$-0.8250-0.5651i$	-0.1594	-0.1594

TABLE 2.2 – Vérification du lemme 2.2 et du corollaire 2.1, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I-uu^TJ\right)W(t)$ pour tout $t\in\{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$.

Premièrement, la Table 2.2 montre la vérification du corollaire 2.1 pour $t\in\{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\}$. *Ensuite, elle montre que :*

$$(S_0(t)x,\ x)\equiv\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right)+\varphi(t,x),\ \forall\, t\in\{0.25,\ 1.5,\ 2.25,\ 3.5,\ 4.25\},$$

pour tout vecteur propre x *de* $W(t)$ *associée à* $\lambda(t)$. *Quant à la Figure 2.2 de la page* 26, *elle montre que pour le vecteur* $x=\begin{bmatrix}-0.2158\\-0.5991\\0.6583\\0.6583\end{bmatrix}$, *on a :*

$$(S_0(t)x,\ x)\equiv\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right)+\varphi(t,x),\ \forall\, t\in[0,\ 2\pi].$$

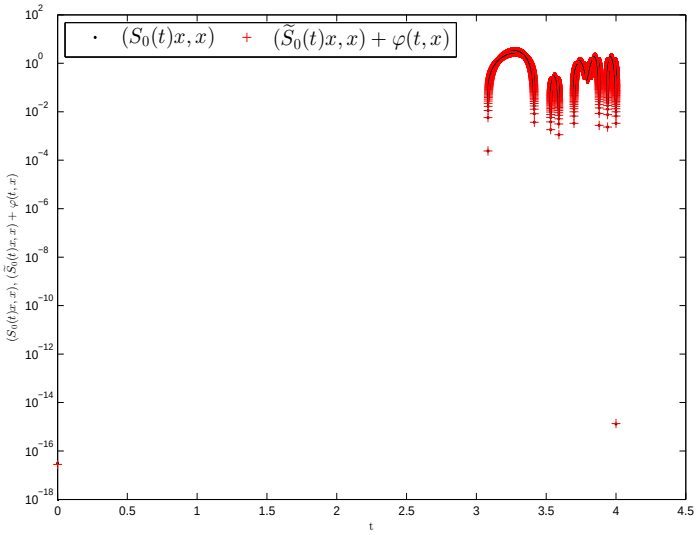

FIGURE 2.2 – Graphes de $(S_0(t)x,\ x)$ et de $\left(\widetilde{S}_0(t)x,\ x\right) + \varphi(t, x)$, avec $\widetilde{W}(t) = \left(I - uu^T J\right) W(t)$ pour tout $t \in [0,\ 2\pi]$.

2.2.2 Conséquences de la stabilité forte de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un

Dans cette section, nous étudions la stabilité forte de matrices symplectiques sous de petites perturbations de rang-un.

Soit J une matrice anti-symétrique et inversible et W une matrice symplectique.

En se référant au lemme 2.2 et au corollaire 2.1, nous avons le résultat suivant :

Proposition 2.2 *Si W est fortement stable, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|uu^T JW\| < \delta$, on a $\left(\widetilde{S}_0 x, x\right) \neq \pm\varphi(x)$, pour tout vecteur propre $x \in \mathbb{C}^{2N}$ de W.*

Preuve
La stabilité forte de la matrice symplectique W implique que les valeurs propres de W sont soit de couleur rouge, ou de couleur verte, c'est à dire que pour tout vecteur propre $x \in \mathbb{C}^{2N}$ de W, $(S_0 x, x) \neq 0$. D'où, en utilisant le corollaire 2.1, nous en déduisons que :

$$(S_0 x, x) \neq 0 \Rightarrow \left(\widetilde{S}_0 x, x\right) \neq \pm\varphi(x),$$

pour tout vecteur propre $x \in \mathbb{C}^{2N}$ de W. ■

Remarque 2.1 *La stabilité de la perturbation de rang-un d'une matrice symplectique n'entraine pas en général sa stabilité forte, mais seulement, on peut trouver un voisinage dans lequel cette matrice reste stable lorsqu'elle est soumise à de petites perturbations de rang-un.*

On a également la proposition suivante

Proposition 2.3 *Si W est fortement stable, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|uu^T JW\| < \delta$, sa perturbation de rang-un $\widetilde{W} = (I \pm uu^T J)W$ est stable.*

Preuve
D'après [14, 17, 57], on sait que W est fortement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que toute matrice symplectique $\widetilde{W}$ vérifiant la relation

$$\|W - \widetilde{W}\| < \delta \tag{2.5}$$

est stable. En particulier, pour $\widetilde{W} = (I \pm uu^T J)W$, on en déduit que s'il y'a stabilité forte de W, alors il existe $\delta > 0$ tel que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|uu^T JW\| < \delta$, la matrice $\widetilde{W} = (I \pm uu^T J)W$ est stable. ■

2.3 Perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques

Considérons les systèmes Hamiltoniens à coefficients P-périodiques (2.1) et (2.6) ci-dessous :

$$J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = [H(t) + E(t)]\,\widetilde{X}(t), \tag{2.6}$$

où $t \longmapsto H(t)$ et $t \longmapsto E(t)$ sont des fonctions matricielles continues par morceaux sur $[0,\ P]$ telles que :

$$H(t+P) = H(t) = H^T(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N} \text{ et } E(t+P) = E(t) = E^T(t) \in \mathbb{R}^{2N\times 2N},$$

avec $t \in \mathbb{R}$ et $P > 0$.

Dans tout le reste de ce chapitre, sauf mention contraire, $J \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ est la matrice par blocs définie par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

où 0 et I sont respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $\mathbb{R}^{N\times N}$.

Soit la définition suivante :

Définition 2.2 *On appelle perturbation de rang-un de la solution fondamentale $X(t)$ de (2.1) toute fonction matricielle de la forme :*

$$\widetilde{X}(t) = (I \pm uu^T J)X(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

On a la remarque ci-dessous :

Remarque 2.2 *Puisque la solution fondamentale $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de (2.1) et la matrice $I \pm uu^T J$ sont J-symplectiques, alors $(\widetilde{X}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est aussi J-symplectique comme le produit de matrices symplectiques est symplectique (voir [14, chapitre 1, p.5]).*

Ceci nous envoie à la proposition suivante :

Proposition 2.4 *Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la solution fondamentale de (2.1). Si une solution $(\widetilde{X}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de (2.6) est de la forme :*

$$\widetilde{X}(t) = (I + u(t)u^T(t)J)X(t), \tag{2.8}$$

où $t \longmapsto u(t) \in \mathbb{R}^{2N}$ est une fonction vectorielle. Alors $u(t) \equiv u$ est un vecteur constant et $E(t)$ est de la forme

$$E(t) = (Juu^T H(t))^T + Juu^T H(t) + (uu^T J)^T H(t)(uu^T J). \tag{2.9}$$

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que $u(t)$ n'est pas constante.

Alors $u(t)u^T(t)$ n'est pas constante. Comme $\widetilde{X}(t)$ est dérivable et $u(t)u^T(t)$ n'est pas constante, en remplaçant la nouvelle expression de $\widetilde{X}(t)$ dans le premier membre de (2.6), nous avons donc :

$$\begin{aligned}
J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} &= J\left(I + u(t)u^T(t)J\right)\frac{dX(t)}{dt} + J\left[\frac{d\left(u(t)u^T(t)\right)}{dt}\right]JX(t) \\
&= J\left(I + u(t)u^T(t)J\right)J^{-1}H(t)X(t) + J\left[\frac{d\left(u(t)u^T(t)\right)}{dt}\right]JX(t) \\
&= \left[\left(I + Ju(t)u^T(t)\right)H(t) + J\frac{d\left(u(t)u^T(t)\right)}{dt}J\right]\left(I - u(t)u^T(t)J\right)\widetilde{X}(t) \\
&= \left[\left(I - u(t)u^T(t)J\right)^T H(t)\left(I - u(t)u^T(t)J\right) + J\frac{d\left(u(t)u^T(t)\right)}{dt}J\left(I - u(t)u^T(t)J\right)\right]\widetilde{X}(t) \\
&= \left[H(t) + \underbrace{(Ju(t)u^T(t)H(t))^T + Ju(t)u^T(t)H(t) + (u(t)u^T(t)J)^T H(t)(u(t)u^T(t)J)}_{F(t)}\right]\widetilde{X}(t) \\
&+ \left[\underbrace{J\frac{d\left(u(t)u^T(t)\right)}{dt}J\left(I - u(t)u^T(t)J\right)}_{G(t)}\right]\widetilde{X}(t) \\
&= \left[H(t) + \underbrace{F(t) + G(t)}_{=E(t)}\right]\widetilde{X}(t),
\end{aligned}$$

Le système Hamiltonien (2.6) devient alors :

$$J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = \left[H(t) + \underbrace{F(t) + G(t)}_{=E(t)}\right]\widetilde{X}(t),$$

où $E(t) = F(t)+G(t)$ n'est pas symétrique car $F(t)$ est symétrique et $G(t)$ n'est pas symétrique. Ceci est contradictoire car par hypothèse $E^T(t) = E(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ (voir système (2.6)). Le vecteur $u(t)$ est alors constant, c'est à dire que $\exists u \in \mathbb{R}^{2N}$ tel que $u(t) \equiv u,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Donc en remplaçant $u(t)u^T(t)$ par $u(0)u^T(0)$ dans l'expression de $E(t)$, on obtient :

$$E(t) = (Juu^TH(t))^T + Juu^TH(t) + (uu^TJ)^TH(t)(uu^TJ),\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ \text{avec } u = u(0).$$

Nous avons donc le système (2.6) avec

$$E(t) = (Juu^TH(t))^T + Juu^TH(t) + (uu^TJ)^TH(t)(uu^TJ),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

■

Pour simplifier notre étude, nous considérons par la suite, les perturbations de (2.1) de la forme (2.6), avec $E(t)$ définie par

$$E(t) = (Juu^TH(t))^T + Juu^TH(t) + (uu^TJ)^TH(t)(uu^TJ),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Avec ce type de perturbation, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.5 *Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{2N}$. Considérons l'équation Hamiltonienne perturbée de (2.1)*

$$J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = [H(t) + E(t)]\,\widetilde{X}(t), \tag{2.10}$$

où $t \longmapsto H(t)$ est continue par morceaux et

$$E(t) = (Juu^TH(t))^T + Juu^TH(t) + (uu^TJ)^TH(t)(uu^TJ).$$

Alors $\widetilde{X}(t) = (I + uu^TJ)X(t)$ est une solution de (2.10).

Preuve

En dérivant $\widetilde{X}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} =& J(I + uu^TJ)J^{-1}J\frac{dX(t)}{dt}\\
=& J(I + uu^TJ)J^{-1}H(t)X(t),\ \text{d'après (2.1)}\\
=& H(t)X(t) + Juu^TH(t)X(t)\\
=& [H(t) + Juu^TH(t)]X(t)\\
=& [H(t) + Juu^TH(t)](I + uu^TJ)^{-1}\widetilde{X}(t)\\
=& [H(t) + Juu^TH(t)](I - uu^TJ)\widetilde{X}(t)\\
=& \left[H(t) - H(t)uu^TJ + Juu^TH(t) - Juu^TH(t)uu^TJ\right]\widetilde{X}(t)\\
=& \left[H(t) + \underbrace{(Juu^TH(t))^T + Juu^TH(t) + (uu^TJ)^TH(t)(uu^TJ)}_{E(t)}\right]\widetilde{X}(t)
\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation Hamiltonienne perturbée (2.10)

$$J\frac{d\widetilde{X}(t)}{dt} = [H(t) + E(t)]\,\widetilde{X}(t),$$

avec

$$E(t) = (Juu^T H(t))^T + Juu^T H(t) + (uu^T J)^T H(t)(uu^T J).$$

Ceci montre que $\widetilde{X}(t) = \left(I + uu^T J\right) X(t)$ est une solution de (2.10). ■

Le système (2.10) peut se mettre sous la forme (2.11) définie par le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *Le système (2.10) peut se mettre sous la forme*

$$\begin{cases} J\dfrac{d\widetilde{X}(t)}{dt} &= (I - uu^T J)^T H(t)(I - uu^T J)\widetilde{X}(t),\ t \in \mathbb{R} \\ \widetilde{X}(0) &= I + uu^T J \end{cases} \tag{2.11}$$

Preuve
En effet, il suffit de développer $(I - uu^T J)^T H(t)(I - uu^T J)$ pour obtenir

$$(I - uu^T J)^T H(t)(I - uu^T J) = H(t) + \underbrace{(J^T uu^T H(t))^T + J^T uu^T H(t) + (uu^T J)^T H(t)(uu^T J)}_{E(t)}$$

■

Remarque 2.3 *La solution $\widetilde{X}(t)$ du système perturbé (2.11) de rang-un de (2.1) est de la forme*

$$\widetilde{X}(t) = \left(I + uu^T J\right) X(t) \tag{2.12}$$

De cette analyse, on se donne la définition ci-dessous :

Définition 2.3 *On appelle perturbation de rang-un du système Hamiltonien à coefficients périodiques (2.1), toute perturbation de la forme (2.11).*

Remarque 2.4 *Pour ce type de perturbation, on a :*

$$\widetilde{X}(t + nP) = \widetilde{X}(t)X^n(P),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ et\ t \in [0,\ P]. \tag{2.13}$$

En effet, ayant :

$$X(t + nP) = X(t)X^n(P),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ et\ t \in [0,\ P]\ (voir\ [14,\ 19,\ 20,\ 57])$$

on a

$$\widetilde{X}(t + nP) = \left(I + uu^T J\right) X(t + nP) = \left(I + uu^T J\right) X(t)X^n(P) = \widetilde{X}(t)X^n(P),$$
$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ et\ t \in [0,\ P].$$

Exemple 2.2 *Considérons l'équation de Mathieu :*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a + b\sin(2t))\, y = 0, \tag{2.14}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $t \in [0, \pi]$ *[26]. En posant :*

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \\ \dfrac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H(t) = \begin{pmatrix} a + b\sin(2t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient l'équation Hamiltonienne (2.15) :

$$J\frac{dX(t)}{dt} = H(t)X(t), \quad X(0) = I_2 \tag{2.15}$$

où la matrice $H(t)$ *est symétrique et* π*-périodiques.*

Soit $u \in \mathbb{R}^2$ *un vecteur aléatoire non nul de petite norme. Considérons le système perturbé (2.11) de (2.15). Dans cet exemple, nous montrons numériquement que la perturbation de rang-un de la solution fondamentale de (2.15) est solution du système perturbé (2.11). Pour cela, on considère la fonction suivante :*

$$\Psi(t) = \|\widetilde{X}(t) - \widetilde{X}_1(t)\|,\ \forall\, t \in [0,\ \pi]$$

où $\widetilde{X}_1(t) = \left(I + uu^T J\right) X(t)$ *et* $\widetilde{X}(t)$ *est la solution de (2.11).*

- *pour* $a = 7$ *et* $b = 4$, *considérons le vecteur* $u = \begin{bmatrix} 0.8913 \\ 0.7621 \end{bmatrix}$.

  Dans la Figure 2.3 de la page suivante, on considère le vecteur aléatoire u *permettant de perturber le système (2.15) par les vecteurs* $u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u$ *et* $10^{-3}u$. *Dans cette Figure, nous constatons que toutes les figures sont telles que*

  $$\Psi(t) \leq 5 \times 10^{-14},\ \forall\, t \in [0,\ \pi].$$

  Ceci montre que

  $$\widetilde{X}(t) \equiv \widetilde{X}_1(t),\ \forall\, t \in [0,\ \pi]$$

  i.e la perturbation de rang-un $(\widetilde{X}_1(t))_{t\in[0,\,\pi]}$ *de la solution fondamentale* $(X(t))_{t\in[0,\,\pi]}$ *de (2.15) est égale à la solution* $(\widetilde{X}(t))_{t\in[0,\,\pi]}$ *de (2.11).*

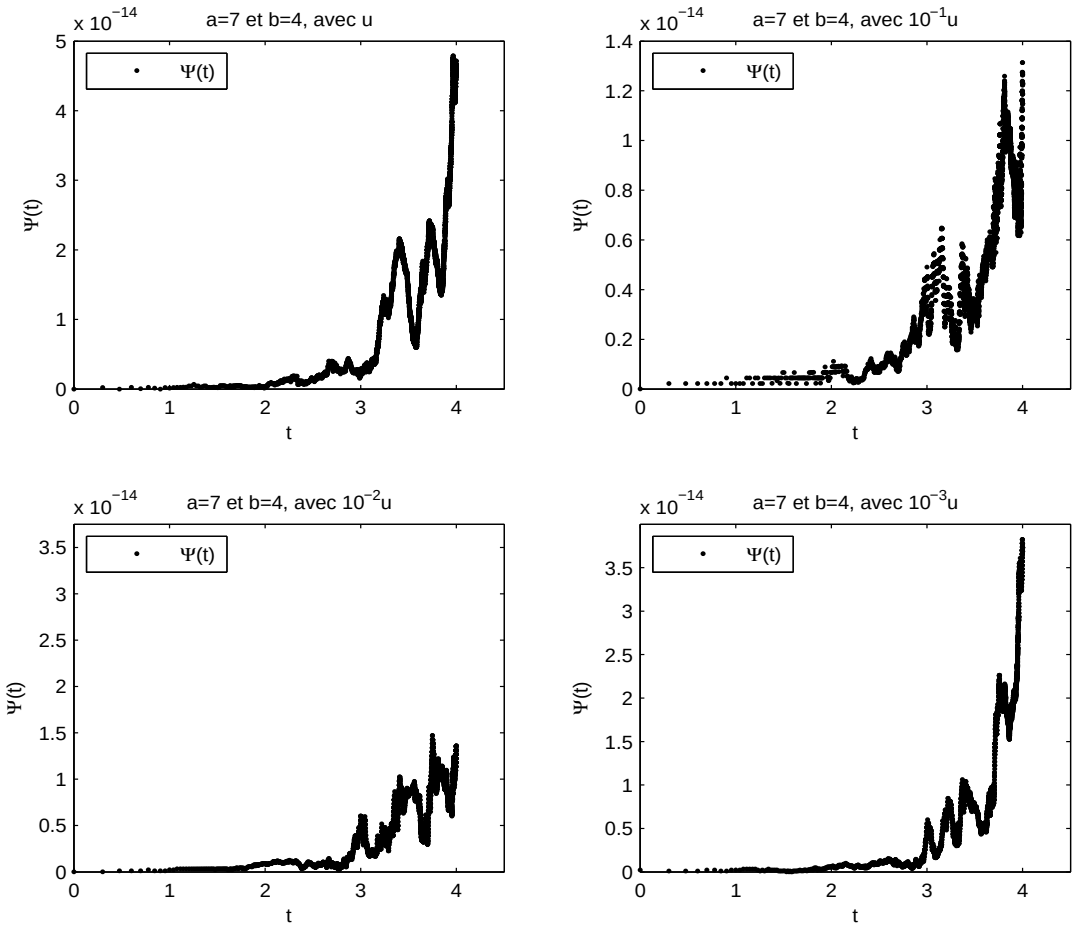

FIGURE 2.3 – Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\,\pi]}$ pour $(a,\,b) = (7,\,4)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.2).

- *pour* $a = 16.1916618724166685$ *et* $b = 5$, *on prend* $u = \begin{bmatrix} 0.4565 \\ 0.0185 \end{bmatrix}$.
  Dans cet exemple illustré par la Figure 2.4 de la page 33, *on considère le vecteur aléatoire* u *pour perturber le système (2.15) par les vecteurs* $u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u$ *et* $10^{-3}u$. *Dans cette Figure, on remarque que toutes les figures sont telles que :*

$$\Psi(t) \leq 3.5 \times 10^{-14},\ \forall\, t \in [0,\ \pi].$$

  Ceci prouve bien que $\widetilde{X}(t) \equiv \widetilde{X}_1(t),\ \forall\, t \in [0,\ \pi]$.

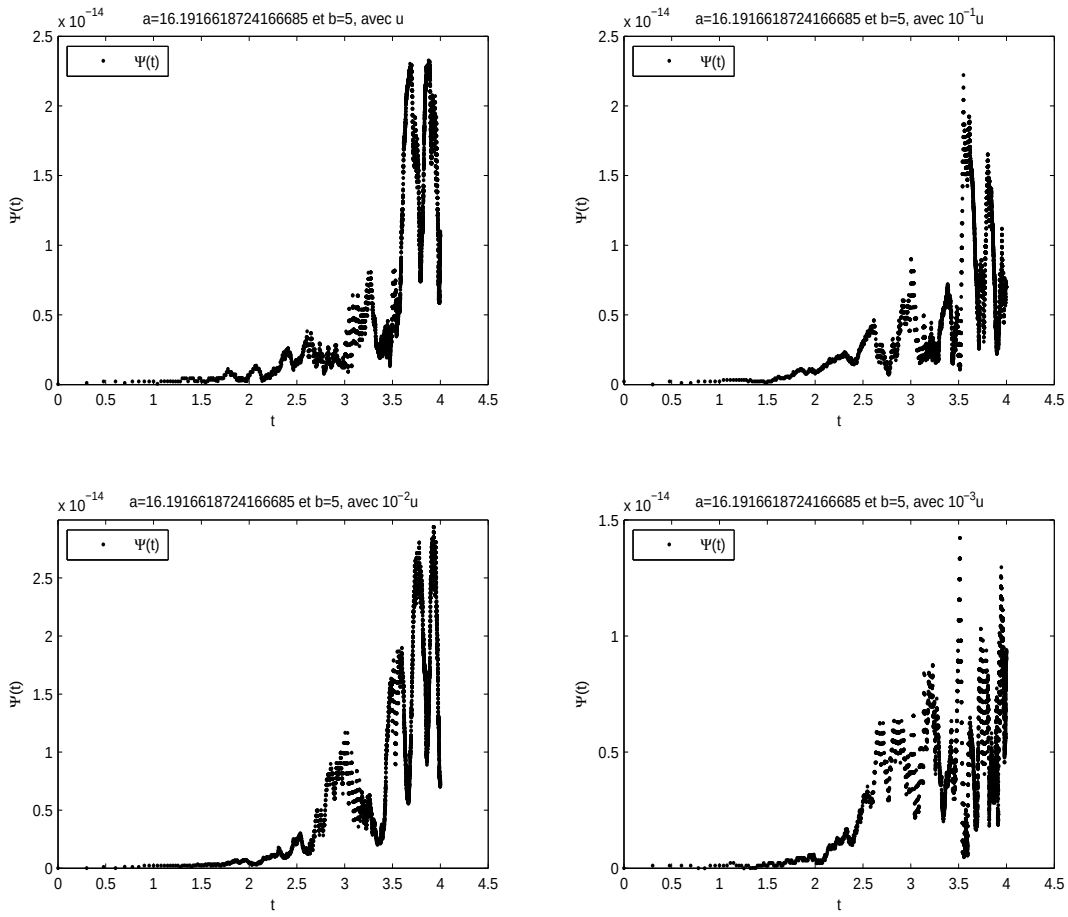

FIGURE 2.4 – Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\,\pi]}$ pour $(a,\ b) = (16.1916618724166685,\ 5)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.2).

Exemple 2.3 *Soit le système différentiel suivant(voir [57, Vol.2,P.412]) :*

$$\begin{cases} q_1\dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} + p_1\eta_1 + [\epsilon\eta_1\cos(\gamma t) + (\delta\cos(2\gamma t) + c\sin(2\gamma t))\eta_2] = 0 \\ q_2\dfrac{d^2\eta_2}{dt^2} + p_2\eta_2 + [g\eta_3\sin(5\gamma t)] = 0 \\ q_3\dfrac{d^2\eta_3}{dt^2} + p_3\eta_3 + [(\delta\cos(2\gamma t) + c\sin(2\gamma t))\eta_1 + g\eta_2\sin(5\gamma t)] = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Le système (2.16) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + P(t)\eta = 0 \tag{2.17}$$

avec

$$\eta = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta_1}{\sqrt{q_1}} \\ \\ \dfrac{\eta_2}{\sqrt{q_2}} \\ \\ \dfrac{\eta_3}{\sqrt{q_3}} \end{pmatrix} \quad et \quad P(t) = \begin{pmatrix} \frac{p1+\epsilon\cos(\gamma t)}{q_1} & 0 & \frac{\delta\cos(2\gamma t)+c\sin(2\gamma t)}{\sqrt{q_1 q_3}} \\ \\ 0 & \frac{p_2}{q_2} & \frac{g\sin(5\gamma t)}{\sqrt{q_1 q_2}}) \\ \\ \frac{\delta\cos(2\gamma t)+c\sin(2\gamma t)}{\sqrt{q_1 q_3}} & \frac{g\sin(5\gamma t)}{\sqrt{q_1 q_2}} & \frac{p_3}{q_3} \end{pmatrix}.$$

En posant

$$X(t) = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \dfrac{d\eta(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 \\ I_3 & 0_3 \end{pmatrix} \quad et \quad H(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0_3 \\ \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix},$$

on obtient le système Hamiltonien à coefficients $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$*-périodiques suivant :*

$$J\frac{dX(t)}{dt} = H(t)X(t), \quad X(0) = I_6 \tag{2.18}$$

où

$$H(t) = H(t + \frac{2\pi}{\sqrt{7}}) = H^T(t).$$

Pour simplifier le problème, on prend :

$$\gamma = \sqrt{7},\ q_1 = q_2 = q_3 = 1,\ p_1 = 4,\ p_2 = 3,\ p_3 = 2,\ a = g = \epsilon,\ b = \delta \ et\, c = 0.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^6$ *un vecteur aléatoire non nul de petite norme. Considérons le système perturbé (2.11) de (2.18). Le but de cet exemple numérique est de vérifier que la perturbation de rang-un de la solution* $(X(t))_{t\in[0,\,\frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ *de (2.18) est la solution du système perturbé de rang-un (2.11) de (2.18). Pour vérifier ceci, considérons la fonction suivante :*

$$\Psi(t) = \|\widetilde{X}(t) - \widetilde{X}_1(t)\|,\ \forall\, t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]$$

où $\widetilde{X}_1(t) = \left(I + uu^T J\right) X(t)$ *et* $\widetilde{X}(t)$ *est la solution de la perturbation de rang-un (2.11) de (2.18). Les Figures des pages* 35 *et* 36 *représentent les graphes de la fonction* $\Psi(t)$*, pour tout* $t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]$.

- *Pour* $\epsilon = 15.5$ *et* $\delta = 1$*, posons :*

$$u = \begin{bmatrix} 0.1767 \\ 0.7047 \\ 0.1176 \\ -0.5773 \\ -0.3476 \\ -0.0647 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2.5 est obtenue en perturbant le système (2.18) pour tout vecteur aléatoire u appartenant à $\{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$. Dans cette Figure, on observe que :

$$\Psi(t) \leq 7 \times 10^{-13},\ \forall\, t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]$$

pour toutes les figures. Ceci prouve que $\widetilde{X}(t) \equiv \widetilde{X}_1(t),\ \forall\, t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]$ i.e la perturbation de rang-un $(X_1(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ de la solution fondamentale $(X(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ de (2.18) est égale à la solution $(\widetilde{X}(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ de (2.11).

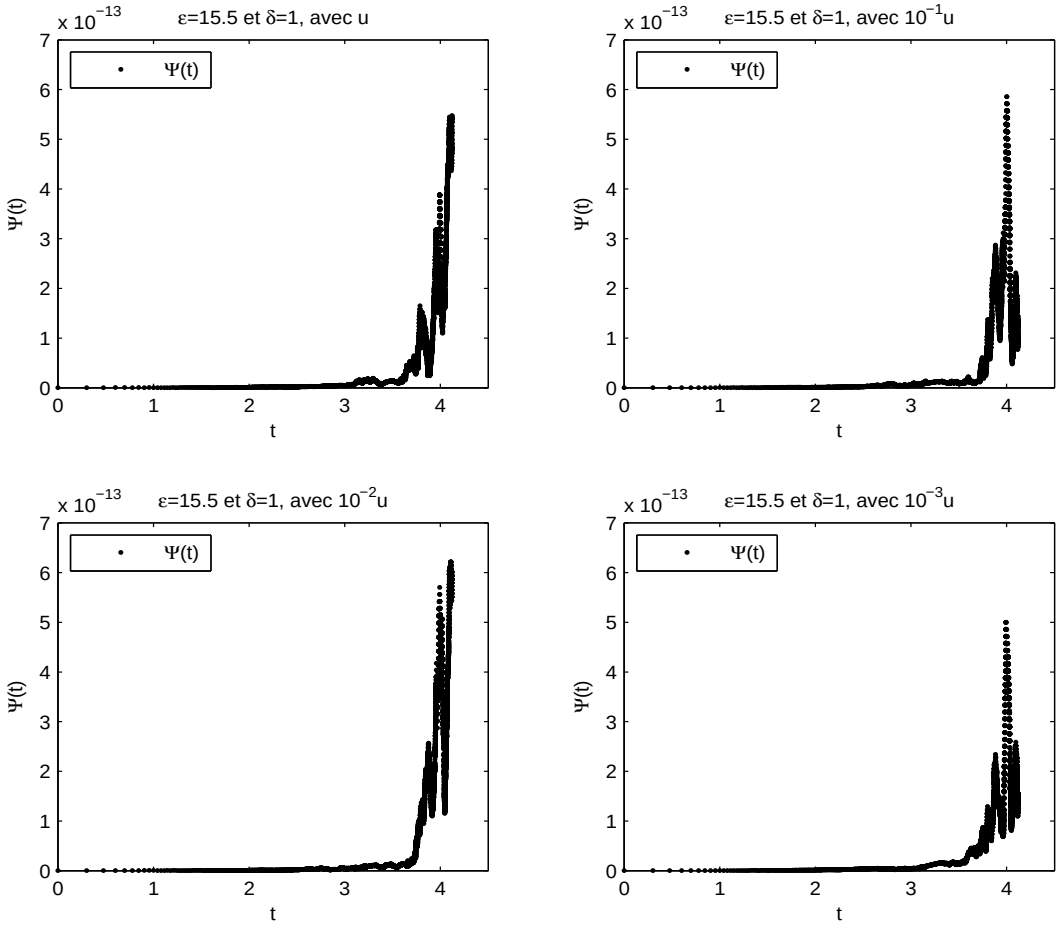

FIGURE 2.5 – Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ pour $(\epsilon,\ \delta) = (15.5,\ 1)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.3).

- *Pour $\epsilon = 15$ et $\delta = 2$, considérons le vecteur aléatoire*

$$u = \begin{bmatrix} 0.5514 \\ 0.3818 \\ 0.0589 \\ -0.4918 \\ -0.5468 \\ -0.0767 \end{bmatrix}.$$

Les Figures suivantes sont obtenues en perturbant le système (2.18) par les vecteurs $u, 10^{-1}u,\ 10^{-2}u$ et $10^{-3}u$. Dans la Figure 2.6, nous constatons également que toutes les figures sont telles que :

$$\Psi(t) \leq 1.4 \times 10^{-12},\ \forall\, t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}],$$

c'est à dire

$$\widetilde{X}(t) \equiv \widetilde{X}_1(t),\ \forall\, t \in [0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}].$$

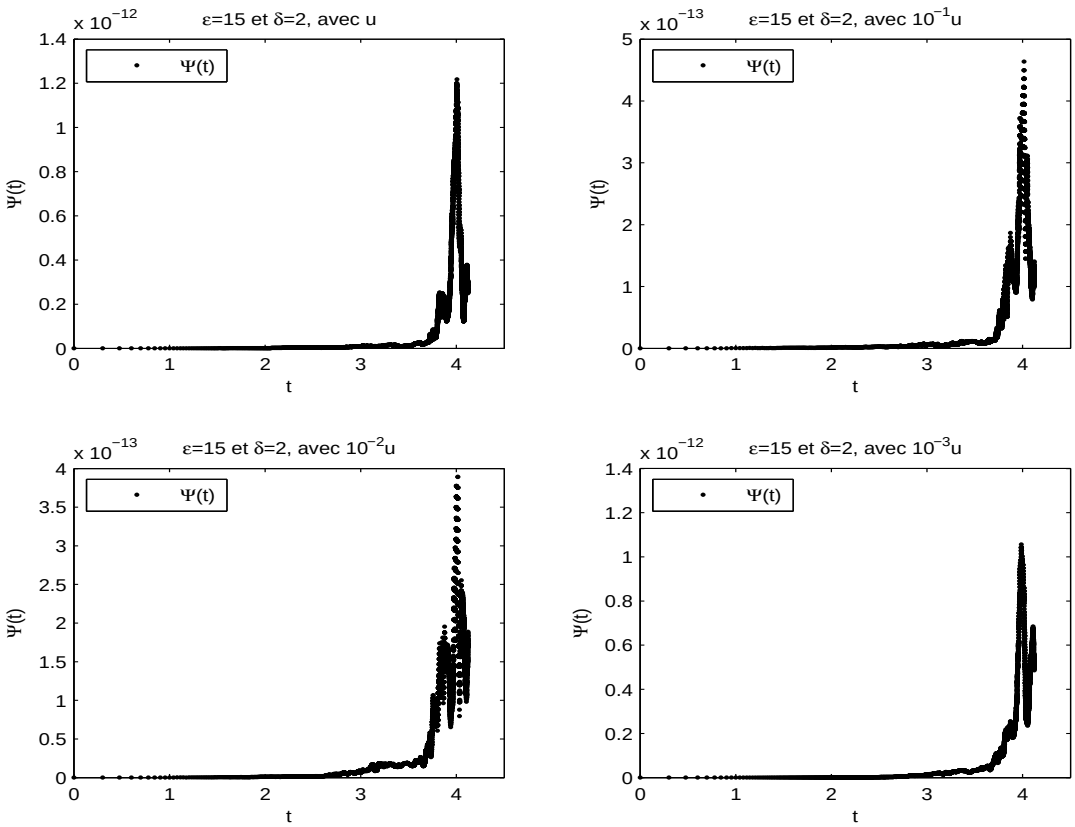

FIGURE 2.6 – Graphe de $(\Psi(t))_{t\in[0,\ \frac{2\pi}{\sqrt{7}}]}$ pour $(\epsilon,\ \delta) = (15,\ 2)$ et $u \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ (Exemple 2.3).

2.3.1 Forme canonique de Jordan de la solution fondamentale de (2.1) sous de petites perturbations de rang-un

A partir des perturbations de rang-un utilisant les vecteurs génériques $u \in \mathbb{R}^{2N}$, nous présentons le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Soient $t > 0$, $J \in \mathbb{R}^{2N\times 2N}$ une matrice anti-symétrique et inversible, $(X(t))_{t>0}$ la solution fondamentale de (2.1) et $\lambda(t) \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $(X(t))_{t>0}$. Supposons que $X(t)$ a la forme canonique de Jordan suivante :*

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda(t))\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda(t))\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_{m(t)}} \mathcal{J}_{n_{m(t)}}(\lambda(t))\right) \oplus \mathcal{J}(t), \quad (2.19)$$

où $n_1 > \cdots > n_{m(t)}$, $m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{N}^\star$, et $\mathcal{J}(t)$ est tel que $\sigma(\mathcal{J}(t)) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\lambda(t)\}$ ie : contient tous les blocs de Jordan associés aux valeurs propres distinctes de $\lambda(t)$. De plus, soit $u \in \mathbb{R}^{2N}$ un vecteur générique et $B(t) = uu^T JX(t)$.

1) Si $\lambda(t) \notin \{-1, 1\}$, alors génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $X(t) + B(t)$ a la forme canonique de Jordan

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda(t))\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda(t))\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_{m(t)}} \mathcal{J}_{n_{m(t)}}(\lambda(t))\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}}(t),$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}(t)$ contient les blocs de Jordan de $X(t)+B(t)$ associés aux valeurs propres différentes de $\lambda(t)$.

2) Si $\exists\, t_0 > 0$ telle que $\lambda(t_0) \in \{+1, -1\}$, alors

2a) si n_1 est pair, alors génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $X(t_0) + B(t_0)$ a la forme canonique de Jordan

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-1} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda(t_0))\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda(t_0))\right) \oplus \cdots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_{m(t_0)}} \mathcal{J}_{n_{m(t_0)}}(\lambda(t_0))\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}}(t_0),$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}(t_0)$ contient les blocs de Jordan de $X(t_0) + B(t_0)$ associés aux valeurs propres différentes de $\lambda(t_0)$.

2b) si n_1 est impair, alors l_1 est pair et génériquement par rapport aux coefficients de u, la matrice $X(t_0) + B(t_0)$ a la forme canonique de Jordan

$$\mathcal{J}_{n_1+1}(\lambda(t_0)) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-2} \mathcal{J}_{n_1}(\lambda(t_0))\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_2} \mathcal{J}_{n_2}(\lambda(t_0))\right) \oplus \cdots$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{l_{m(t_0)}} \mathcal{J}_{n_{m(t_0)}}(\lambda(t_0))\right) \oplus \widetilde{\mathcal{J}}(t_0),$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}(t_0)$ contient les blocs de Jordan de $X(t_0)+B(t_0)$ associés aux valeurs propres différentes de $\lambda(t_0)$.

Preuve

1) Sous l'hypothèse (2.19), si $\lambda(t) \notin \{-1,\ 1\}$, alors pour t fixé, en appliquant le théorème 1.2, nous en déduisons que la matrice $X(t)+B(t)$ a la forme canonique de Jordan suivante :

$$\left(\bigoplus_{j=1}^{l_1-1}\mathcal{J}_{n_1}(\lambda(t))\right)\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{l_2}\mathcal{J}_{n_2}(\lambda(t))\right)\oplus\cdots\oplus\left(\bigoplus_{j=1}^{l_{m(t)}}\mathcal{J}_{n_{m(t)}}(\lambda(t))\right)\oplus\widetilde{\mathcal{J}}(t),$$

où $\widetilde{\mathcal{J}}(t)$ contient les blocs de Jordan de $X(t)+B(t)$ associés aux valeurs propres différentes de $\lambda(t)$.

2) S'il existe t_0 telle que $\lambda(t_0) \in \{-1,\ 1\}$, nous sommes dans le cas d'une matrice symplectique constante. Donc, les parties $2a$) et $2b$) du théorème 2.1 se déduisent des parties $2a$) et $2b$) du thèorème 1.2.

■

2.3.2 Conséquences de la stabilité forte de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous de petites perturbations de rang-un

Concernant les conséquences de la stabilité forte des systèmes du type (2.1) sur ses perturbations de rang-un, on a la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Si (2.1) est fortement stable, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|uu^T JX(P)\| < \delta$,*

1) $\left(\widetilde{S}_0 x, x\right) \neq \varphi(x)$, pour tout vecteur propre $x \in \mathbb{C}^{2N}$ de $X(P)$, où

$$\widetilde{S}_0 = (1/2)\left((J\widetilde{X}(P)) + (J\widetilde{X}(P))^T\right)$$

et

$$\varphi(x) = (1/2)\left((Juu^T J\widetilde{X}(P) + (Juu^T J\widetilde{X}(P))^T)x, x\right),$$

avec

$$\widetilde{X}(P) = (I + uu^T J)X(P).$$

2) sa perturbation de rang-un $\widetilde{X}(P) = (I + uu^T J)X(P)$ est stable.

Preuve

1) La preuve de cette partie est analogue à celle de la proposition 2.2.
2) Elle se démontre de la même façon que la proposition 2.3.

■

On a la proposition suivante :

Proposition 2.7 *Si (2.1) est fortement stable, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|E(t)\| \leq \epsilon$, où*

$$E(t) = (Juu^T H(t))^T + Juu^T H(t) + (uu^T J)^T H(t)(uu^T J),$$

la perturbation de rang-un qui lui est associée est stable.

Preuve
D'après [57], on sait que (2.1) est fortement stable si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que tout système Hamiltonien à coefficients P-périodiques

$$J\frac{dX(t)}{dt} = \widetilde{H}(t)X(t),\ t \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

vérifiant la condition $\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| \leq \epsilon$ est stable. En particulier, si (2.20) est la perturbation de rang-un de (2.1) de la forme (2.10), on aura :

$$\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| = \|E(t)\| \leq \epsilon,$$

avec $E(t) = (Juu^T H(t))^T + Juu^T H(t) + (uu^T J)^T H(t)(uu^T J)$. Donc la stabilité forte de (2.1) implique que : s'il existe $\epsilon > 0$ tel que tout vecteur $u \in \mathbb{R}^{2N}$ vérifiant $\|E(t)\| \leq \epsilon$, sa perturbation de rang-un qui lui est associée est stable. ■

Ainsi, nous ne pouvons pas affirmer dans l'état actuel de nos recherches, que la stabilité de toutes perturbations de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques implique la stabilité forte du système non perturbé, puisque nous sommes dans un cas particulier de perturbations de systèmes Hamiltonien. Cela peut être l'objet d'une recherche approfondie.

Exemple 2.4 *Considérons l'équation (2.15) de l'exemple 2.2. Cette fois-ci, nous étudions la stabilité forte du système non perturbé (2.15) sous de petites perturbations en utilisant l'approche définie dans [17, 21].*

- *pour $a = 7$ et $b = 4$, posons*

$$u = \begin{bmatrix} 0.8913 \\ 0.7621 \end{bmatrix}.$$

La Table 2.3 de la page suivante donne les différentes normes des projecteurs, la quantité δ_S et une illustration de la convergence de la suite $S^{(n)}(n \geq 0)$.

Dans cette Table, on considère tout vecteur $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ permettant de perturber le système (2.15). On remarque que le système (2.15) est fortement stable et sa perturbation de rang-un (2.11) reste fortement stable pour $\widetilde{u} \in \{10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$ puis devient instable pour tout vecteur $\widetilde{u} =$

u. Ceci garantie l'existence d'un voisinage dans lequel le système (2.15) peut rester fortement stable(ou instable).

	u	$10^{-1}u$	$10^{-2}u$	$10^{-3}u$	$u \equiv 0$
$\|S^{(n)}\|$	$2.2504 \times 10^{+59}$	4.4099	4.4819	4.4826	4.4826
δ_S	–	1.9532	1.9469	1.9469	1.9469
$tr(\mathbb{P}_0)$	1	-9.4045×10^{-18}	-4.0878×10^{-17}	0	4.4771×10^{-17}
$\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|_2$	3.7089×10^{-16}	6.3358×10^{-17}	3.6395×10^{-17}	0	3.9781×10^{-17}
$tr(\mathbb{P}_\infty)$	1	5.2459×10^{-17}	4.0878×10^{-17}	0	-4.4771×10^{-17}
$\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|_2$	3.9541×10^{-16}	6.3358×10^{-17}	3.6395×10^{-17}	0	3.9781×10^{-17}
$tr(\mathbb{P}_r)$	–	2	2	2	2
$\|\mathbb{P}_r^2 - \mathbb{P}_r\|_2$	–	0	0	0	0
$tr(\mathbb{P}_g)$	–	0	0	0	0
$\|\mathbb{P}_g^2 - \mathbb{P}_g\|_2$	–	0	0	0	0
$\|\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g - I_6\|$	–	0	0	0	0

TABLE 2.3 – Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.15) pour $(a,\ b) = (7,\ 4)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.2).

- *pour $a = 16.1916618724166685$ et $b = 5$, considérons le vecteur*

$$u = \begin{bmatrix} 0.4565 \\ 0.0185 \end{bmatrix}.$$

La Table suivante est obtenue en perturbant (2.15) par les vecteurs $u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u$ et $10^{-3}u$. Les normes des différents projecteurs, la quantité δ_S et une illustration de la convergence de la suite $S^{(n)}$, $(n \geq 0)$ sont également données dans cette Table 2.4. A partir de ladite Table, on note que le système non perturbé est instable et sa perturbation de rang-un est instable pour le vecteur $\widetilde{u} = 10^{-3}u$ et fortement stable pour tout vecteur $\widetilde{u}$ appartenant à $\{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u\}$. Ceci montre qu'il existe un voisinage dans lequel le système (2.15) reste instable.

	u	$10^{-1}u$	$10^{-2}u$	$10^{-3}u$	$u \equiv 0$
$\|S^{(n)}\|$	2.6663	12.2795	$2.5314 \times 10^{+3}$	$5.4725 \times 10^{+42}$	$1.3161 \times 10^{+43}$
δ_S	0.2014	0.0201	0.0014	–	–
$tr(\mathbb{P}_0)$	0	-3.4598×10^{-17}	6.5759×10^{-16}	1	1
$\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|_2$	0	3.4738×10^{-17}	1.4154×10^{-15}	2.1987×10^{-14}	1.4703×10^{-14}
$tr(\mathbb{P}_\infty)$	0	3.4598×10^{-17}	-6.5759×10^{-16}	1	1
$\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|_2$	0	3.4738×10^{-17}	1.4154×10^{-15}	2.9360×10^{-13}	2.1469×10^{-13}
$tr(\mathbb{P}_r)$	0	0	0	–	–
$\|\mathbb{P}_r^2 - \mathbb{P}_r\|_2$	0	4.1633×10^{-17}	6.9389×10^{-15}	–	–
$tr(\mathbb{P}_g)$	2	2	2	–	–
$\|\mathbb{P}_g^2 - \mathbb{P}_g\|_2$	0	4.1633×10^{-17}	6.9389×10^{-15}	–	–
$\|\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g - I_6\|$	0	0	0	–	–

TABLE 2.4 – Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.15) pour $(a,\ b) = (16.1916618724166685,\ 5)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.2).

Exemple 2.5 *Dans cet exemple, nous reconsidérons le système (2.18) de l'exemple 2.3, avec les mêmes perturbations, sauf que, cette fois-ci, nous analysons la stabilité forte de (2.18) sous des perturbations Hamiltoniennes en utilisant l'approche définie dans [17, 21]. Les Tables 2.5 de la page 41 et 2.6 de la page 42 donnent les différentes normes des projecteurs, la quantité δ_S et une illustration de la convergence de la suite $S^{(n)}(n \geq 0)$ suivant les valeurs de ϵ, δ et u.*

- *Pour* $\epsilon = 15.5$ *et* $\delta = 1$, *posons*

$$u = \begin{bmatrix} 0.1767 \\ 0.7047 \\ 0.1176 \\ -0.5773 \\ -0.3476 \\ -0.0647 \end{bmatrix}.$$

Pour la construction de la Table 2.5, on a considéré le vecteur aléatoire u *permettant de perturber le système (2.18) par les vecteurs* u, $10^{-1}u$, $10^{-2}u$ *et* $10^{-3}u$. *En analysant la Table 2.5, on constate que le système non perturbé est fortement stable et sa perturbation de rang-un (2.11) reste fortement stable pour tout vecteur* $10^{-1}u$, $10^{-2}u$ *et* $10^{-3}u$ *et devient instable lorsque (2.18) est perturbé par le vecteur* u. *D'où, l'existence d'un voisinage dans lequel (2.18) reste fortement stable.*

	u	$10^{-1}u$	$10^{-2}u$	$10^{-3}u$	$u \equiv 0$
$\|S^{(n)}\|$	$5.4172 \times 10^{+55}$	$4.9063 \times 10^{+3}$	$5.5356 \times 10^{+3}$	$5.5468 \times 10^{+3}$	$5.5469 \times 10^{+3}$
δ_S	–	0.0736	0.2264	0.2294	0.2295
$tr(\mathbb{P}_0)$	1	-1.4868×10^{-15}	-5.4075×10^{-16}	-5.2772×10^{-16}	8.8747×10^{-17}
$\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|_2$	3.9127×10^{-16}	3.6219×10^{-15}	9.8117×10^{-16}	7.7767×10^{-16}	2.5904×10^{-15}
$tr(\mathbb{P}_\infty)$	1	1.4868×10^{-15}	5.1239×10^{-16}	-8.4143×10^{-16}	-1.9322×10^{-16}
$\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|_2$	2.5905×10^{-16}	3.9137×10^{-15}	1.0069×10^{-15}	6.8023×10^{-16}	2.6869×10^{-15}
$tr(\mathbb{P}_r)$	–	1.1102×10^{-16}	7.7716×10^{-16}	1.1102×10^{-16}	0
$\|\mathbb{P}_r^2 - \mathbb{P}_r\|_2$	–	5.7712×10^{-15}	2.2531×10^{-15}	1.7751×10^{-15}	2.7461×10^{-15}
$tr(\mathbb{P}_g)$	–	6	6	6	6
$\|\mathbb{P}_g^2 - \mathbb{P}_g\|_2$	–	5.7712×10^{-15}	2.2531×10^{-15}	1.7751×10^{-15}	2.7461×10^{-15}
$\|\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g - I_6\|$	–	0	0	0	0

TABLE 2.5 – Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.18) pour $(\epsilon,\ \delta) = (15.5,\ 1)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$ (Exemple 2.3).

- *Pour* $\epsilon = 15$ *et* $\delta = 2$, *considérons le vecteur aléatoire*

$$u = \begin{bmatrix} 0.5514 \\ 0.3818 \\ 0.0589 \\ -0.4918 \\ -0.5468 \\ -0.0767 \end{bmatrix}.$$

La Table 2.6 de la page 42 *est également obtenue en perturbant le système (2.18) par tout vecteur aléatoire* $\widetilde{u}$ *appartenant à* $\{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$. *Une lecture de cette Table montre que le système (2.18) est instable et sa perturbation de rang-un reste aussi instable pour tout vecteur* $\widetilde{u}$ *appartemant à l'ensemble* $\{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u\}$. *Ceci prouve l'existence d'un voisinage dans lequel le système (2.18) reste instable.*

	u	$10^{-1}u$	$10^{-2}u$	$10^{-3}u$	$u \equiv 0$
$\|S^{(n)}\|$	$4.7025 \times 10^{+53}$	$1.1111 \times 10^{+39}$	$8.2579 \times 10^{+38}$	$8.2334 \times 10^{+38}$	$8.2332 \times 10^{+38}$
$tr(\mathbb{P}_0)$	1	1	1	1	1
$\|\mathbb{P}_0^2 - \mathbb{P}_0\|_2$	3.6875×10^{-13}	5.6398×10^{-13}	7.1746×10^{-14}	1.5642×10^{-15}	1.2992×10^{-13}
$tr(\mathbb{P}_\infty)$	1	1	1	1	1
$\|\mathbb{P}_\infty^2 - \mathbb{P}_\infty\|_2$	3.6208×10^{-13}	4.6694×10^{-13}	1.8804×10^{-14}	1.6215×10^{-15}	3.1956×10^{-14}

TABLE 2.6 – Vérification de la stabilité (forte) de (2.11) appliquée à (2.18) pour $(\epsilon,\ \delta) = (15,\ 2)$ et $\widetilde{u} \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 10^{-3}u,\ 0\}$(Exemple 2.3).

2.3.3 Une analyse de zone de stabilité forte de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous de petites perturbations de rang-un

Considérons la suite de moyennes de matrices $S^{(n)}$ définie par :

$$S^{(n)} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n}(W)^{k-1}(W)^{k-1} \text{ (voir dans [4, 14, 17, 24])},$$

où $W = X(P)$ est la matrice monodronique du système Hamiltonien à coefficients périodiques (2.1). Le calcul de la suite $S^{(n)}$ s'effectue de façon commode par la formule de récurrence suivante :

$$S^{(0)} = I, \quad B^{(0)} = W \tag{2.21}$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{2}\left(S^{(n-1)} + (B^{(n-1)})^T S^{(n-1)}(B^{(n-1)})\right),\ B^{(n)} = (B^{(n-1)})^2 \tag{2.22}$$

On sait d'après [14, 17, 24] que, si la suite $S^{(n)}$ est convergente, alors elle converge vers une matrice constante, symétrique et strictement définie positive $S^{(\infty)}$ vérifiant la relation suivante :

$$W^T S^{(\infty)} W = S^{(\infty)}. \tag{2.23}$$

Dans ce cas, la matrice monodronique $W = X(P)$ est dite stable [17]. Ceci implique, par conséquent, la stabilité du système (2.1) ; de plus, si la quantité δ_S définie dans le théorème 1.5 du chapitre 1 n'est pas proche de zéro, alors (2.1) est fortement stable, sinon l'équation (2.1) serait dite stable. Dans le cas contraire, si $S^{(n)}$ diverge, alors le système (2.1) est dit instable (voir [17, 24]).

En utilisant la suite définie par (2.21)-(2.22) et la méthode proposée dans [17], nous proposons l'algorithme suivant permettant d'analyser la région de stabilité (forte) des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques dépendant de paramètres sous de petites perturbations de rang-un. Ainsi en prenant $W = \widetilde{X}(P)$, on a :

Algorithme 2.1

Donnée : Considérons l'équation (2.1) et sa perturbation de rang-un (2.11).
Sortie : Décision sur le domaine de stabilité(forte) du système (2.1)

Etape 1 *: Pour chaque paramètre donné, calculer la solution W du système perturbé (2.11) évaluée en la période P.*

Etape 2 *: Analyse de la stabilité(forte) du système (2.1) pour chaque paramètre donné.*

- *Calculer la suite de matrices $S^{(n)}$, via* (2.21) *et* (2.22)*, pour un certain n_0 (typiquement $n_0 = 25$).*

  i) Si $S^{(n)}$ diverge, alors le système perturbé (2.11) de (2.1) est instable.

  ii) Sinon si $\|S^{(n)}\|$ tend approximativement vers une valeur constante, alors W est stable. Calculer dans ce cas les projecteurs $\mathbb{P}_r$ et $\mathbb{P}_g$ sur les sous espaces invariants associés respectivement aux valeurs propres de couleurs rouge et verte du faisseau symétrique $S_0 - \lambda S^{(n)}$ (voir [17]) où $S_0 = \frac{1}{2}\left(JW + (JW)^T\right)$.

  Si

  a) $\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g = I$ et δ_S n'est pas proche de zéro, alors le système (2.11) est dit fortement stable.

  b) $\mathbb{P}_r + \mathbb{P}_g = I$ et δ_S est proche de zéro, alors le système (2.11) n'est pas fortement stable.

Etape 3 : Analyse du domaine de stabilité(forte) du système (2.1) pour l'ensemble des paramètres donnés.

- *L'ensemble des paramètres vérifiant i) est le domaine d'instabilité du système perturbé (2.11) de (2.1). Ce domaine n'est pas un domaine stable du système non perturbé (2.1).*
- *L'ensemble des paramètres vérifiant la partie a) de ii) (respectivement la partie b) de ii)) est le domaine de stabilité forte (respectivement stable) de l'equation perturbée (2.11) de (2.1).*

Nous terminons le paragraphe par deux exemples.

Sauf mention contraire, dans ces deux exemples, on considère que la partie stable de la zone de stabilité(forte) est une zone composée de deux parties à savoir : une stable et l'autre fortement stable.

Exemple 2.6 *Dans cet exemple, nous considérons à nouveau le système (2.15) de l'exemple 2.2 et sa perturbation de rang-un (2.11). Soit $X(\pi, a, b)$, $(a,\ b \in \mathbb{R})$ la matrice monodronique de (2.15) et $\widetilde{X}(\pi, a, b) = \left(I + uu^T J\right) X(\pi, a, b)$, $(u \in \mathbb{R}^2)$ la solution de (2.11) évaluée à la pérode Les Figures ci-dessous présentent les différentes zones de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\pi, a, b)$ dans le plan des paramètres $(a,\ b) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$. Dans ces Figures, la couleur blanche désigne le domaine de stabilité forte, le rouge représente le domaine instable et le bleu désigne le domaine stable.*

- *pour* $(a,\ b) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$, *considérons le vecteur aléatoire*

$$u = \begin{bmatrix} 0.8913 \\ 0.7621 \end{bmatrix}.$$

Les simulations numériques ont été faites en perturbant le système (2.15) par tout vecteur g *appartenant à* $\{0_{2,1},\ 10^{-2}u,\ 10^{-1}u,\ u\}$. *Dans la Figure 2.7, on observe que la zone de stabilité forte de* $\widetilde{X}(\pi, a, b)$ *est composée des couleurs blanche, rouge et de quelques points bleus lorsque* g *appartenant à* $\{0_{2,1},\ 10^{-2}u\}$ *et seulement des couleurs rouge et blanche lorsque* $g \in \{u,\ 10^{-1}u\}$.

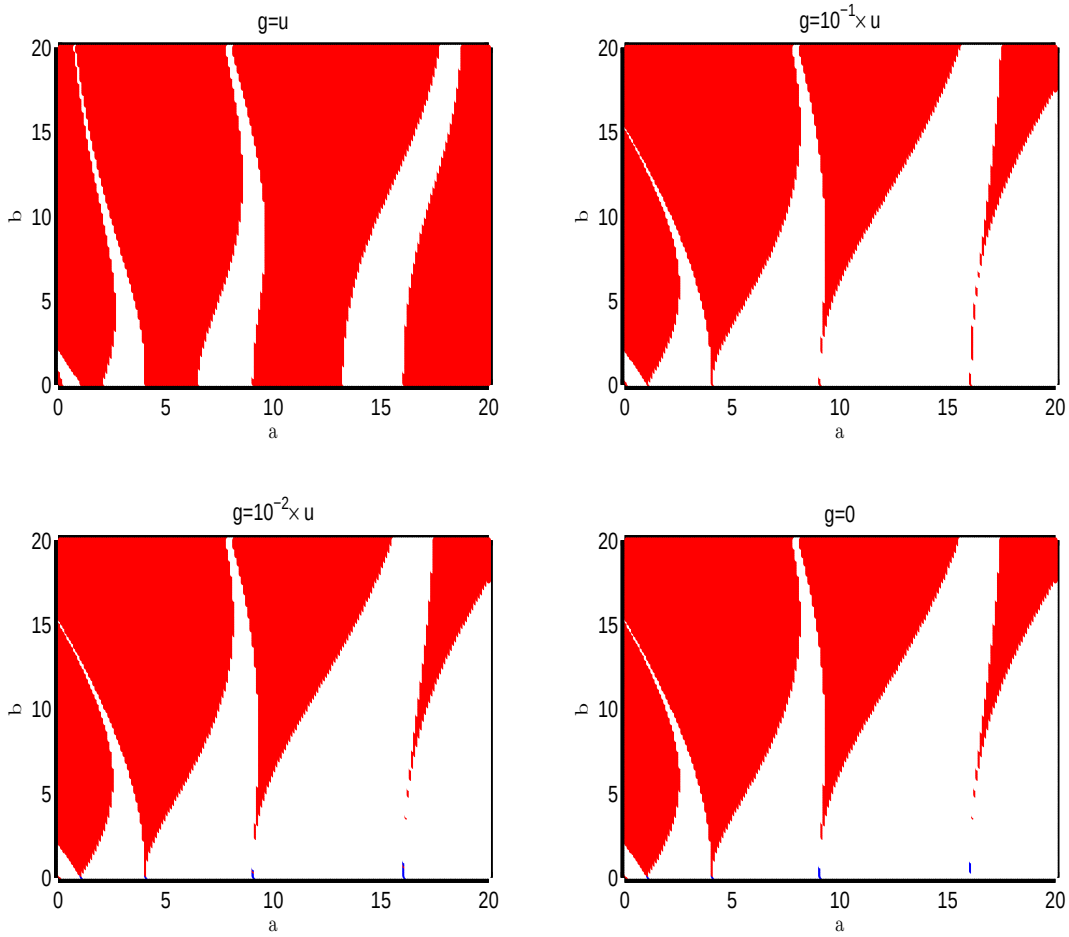

FIGURE 2.7 – Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \pi)$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{2,1}\}$ (Exemple 2.2).

- *pour* $(a,\ b) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$, *posons*

$$u = \begin{bmatrix} 0.4565 \\ 0.0185 \end{bmatrix}.$$

Pour construire la Figure 2.8, nous avons perturbé le système (2.15) par tout vecteur aléatoire $g \in \{0_{2,1},\ u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u\}$ *. Dans cette Figure, on note également que la zone de stabilité(forte) de* $\widetilde{X}(\pi, a, b)$ *est composée des couleurs rouge, bleu et blanche lorsque dans (2.11), nous avons* $g \in \{0_{2,1},\ 10^{-2}u\}$ *et des couleurs rouge et blanche lorsque* $g \in \{10^{-1}u,\ u\}$*.*

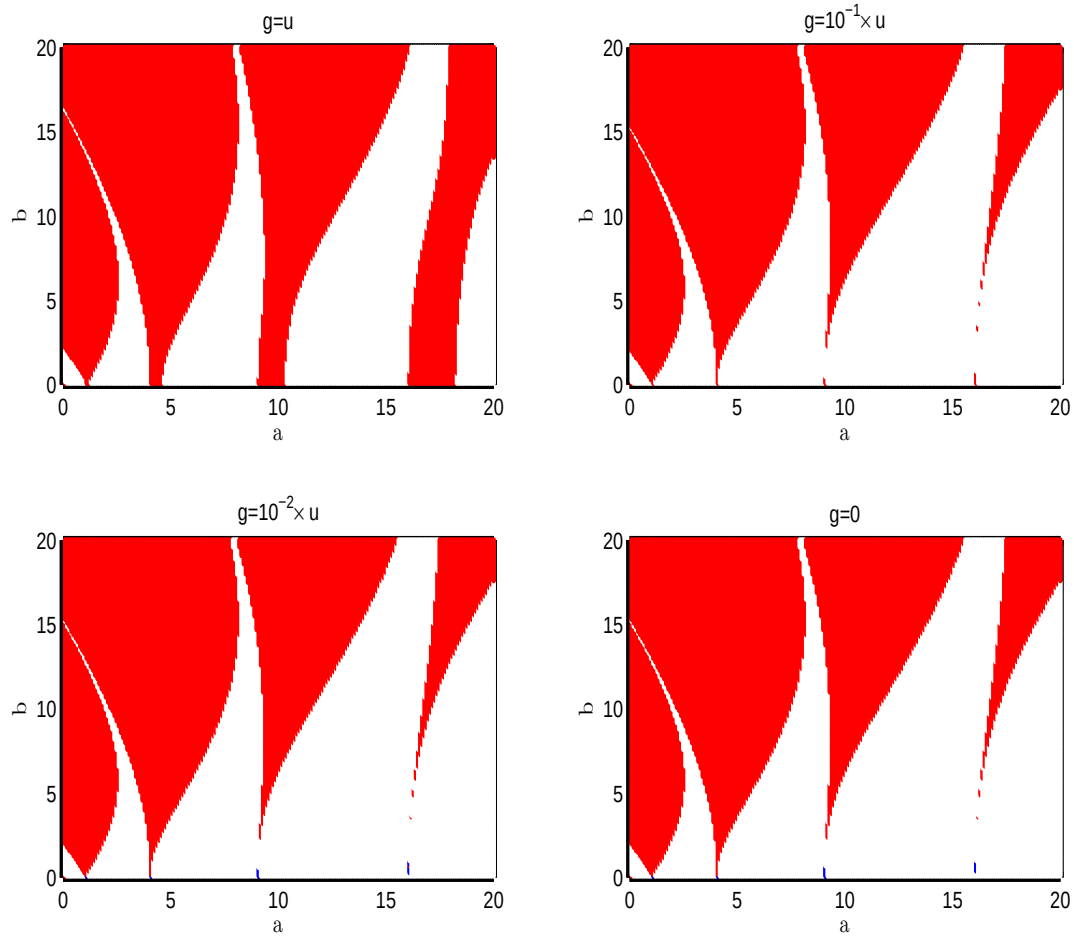

FIGURE 2.8 – Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \pi)$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 20] \times [0,\ 20]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{2,1}\}$ (Exemple 2.2).

Exemple 2.7 *Dans cet exemple, nous analysons la zone de stabilité(forte) de l'équation (2.18) de l'exemple 2.3. Pour cela, on considère un vecteur aléatoire* $u \in \mathbb{R}^6$ *non nul et on applique l'algorithme 2.1 à la solution* $\widetilde{X}(\frac{2\pi}{\sqrt{7}},\ \epsilon,\ \delta)$ *de (2.11)évaluée à la pérode* $\frac{2\pi}{\sqrt{7}}$ *pour générer les différentes zones de stabilité (forte) du système. Dans cette zone, la couleur blanche désigne le domaine de stabilité forte, la couleur rouge représente le domaine instable et la couleur bleu désigne le domaine stable.*

- *Dans le plan des paramètres* $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$, *posons*

$$u = \begin{bmatrix} 0.1767 \\ 0.7047 \\ 0.1176 \\ -0.5773 \\ -0.3476 \\ -0.0647 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2.9 est obtenue en perturbant le système (2.18) pour g *appartenant à* $\{0_{6,1},\ 10^{-2}u,\ 10^{-1}u,\ u\}$. *Dans un premier temps, les résultats présentés dans cette Figure montrent que, toutes les figures sont composées des couleurs rouge, bleu et blanche. Ensuite, on observe que, la zone de stabilité(forte) du système perturbé avec* $g = 10^{-2}u$ *et* $g = 10^{-1}u$ *ressemble à la zone de stabilité(forte) du système non perturbé (2.18) et la zone de stabilité(forte) du système perturbé avec* $g = u$ *est différente de celle du système non perturbé (2.18).*

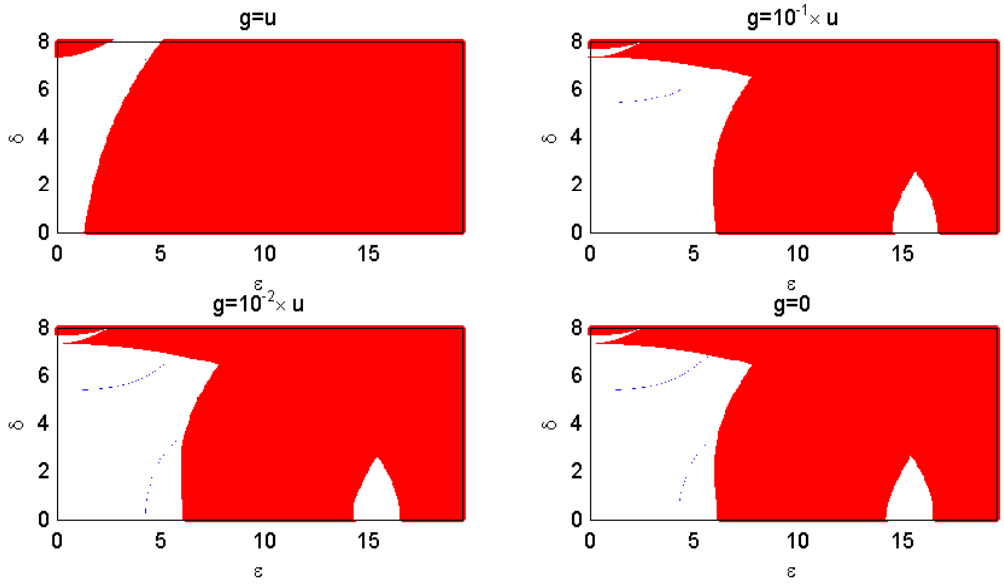

FIGURE 2.9 – Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{7}})$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{6,1}\}$ (Exemple 2.3).

- *Pour* $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$, *considérons le vecteur aléatoire*

$$u = \begin{bmatrix} 0.5514 \\ 0.3818 \\ 0.0589 \\ -0.4918 \\ -0.5468 \\ -0.0767 \end{bmatrix}.$$

La Figure 2.10, est obtenue en prenant dans (2.11) le vecteur $g \in \{0_{6,1},\ 10^{-2}u,\ 10^{-1}u,\ u\}$ *. Dans cette Figure, on observe quasiment les mêmes résulats que ceux de la Figure 2.9, sauf que, cette fois-ci, la première figure de Figure 2.10 ne contient aucun point stable.*

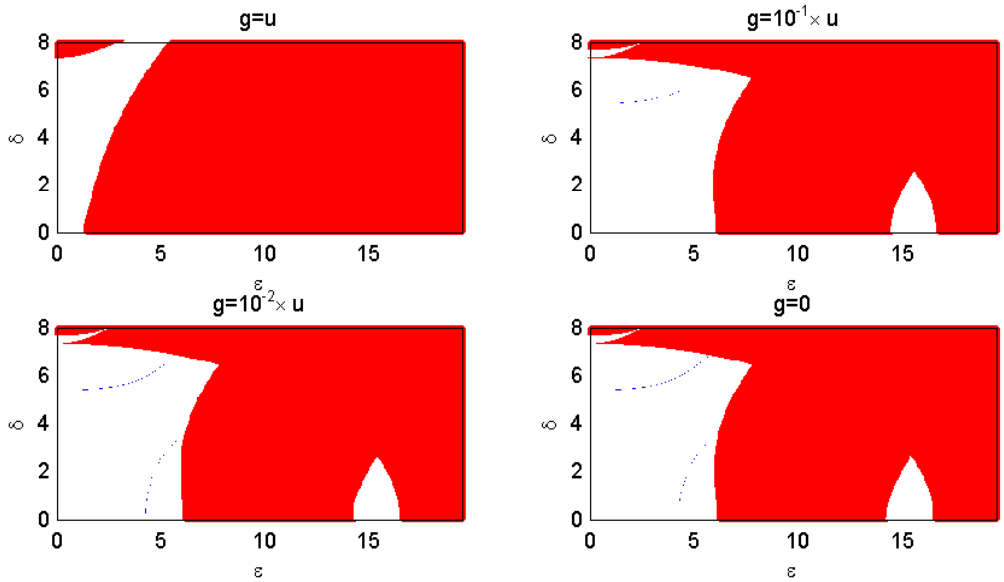

FIGURE 2.10 – Zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}(\epsilon,\ \delta,\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{7}})$, $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 19.5] \times [0,\ 8]$ et $g \in \{u,\ 10^{-1}u,\ 10^{-2}u,\ 0_{6,1}\}$ (Exemple 2.3).

2.4 Conclusion

En utilisant la théorie de perturbation de matrices symplectiques introduite par Mehl et al dans [43], nous avons présenté dans ce chapitre une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Nous avons montré, dans un premier temps, que la perturbation de rang-un de la solution fondamentale $(X(t))_{t\in[0,P]}$ du système (2.1) est solution de sa perturbation de rang-un. Ensuite, nous nous sommes intérressés à la forme canonique de Jordan de la solution $\widetilde{X}(t)$ de (2.11). Enfin, pour terminer le chapitre, nous avons proposé une analyse de stabilité forte et de zone de stabilité(forte) de systèmes Hamiltonien sous de petites perturbations de rang-un. Dans l'analyse de la stabilité forte, t varie et les autres paramètres du système sont fixés et on utilise l'approche définie dans [14, 17, 21] pour en déduire la stabilité, alors que dans l'analyse de la zone de stabilité(forte), nous n'avons proposé qu'un algorithme permettant d'analyser cette zone lorsque (2.1) est soumis à de petites perturbations de rang-un. Au terme de cette analyse, il ressort que, si (2.1) est fortement stable(respectivement instable), on peut trouver au moins un voisinage dans lequel sa perturbation de rang-un reste stable(respectivement instable) [16, 57].

Chapitre 3

Application à certains types d'équations différentielles

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions quelques applications des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques en physique et en mécanique. Le chapitre est structuré en deux sections :

La première section est dédiée à quelques systèmes différentiels de type Mathieu [40]. Dans cette partie, notre analyse porte sur des perturbations de rang-un du mouvement de pendules avec supports mobiles et celui d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire. Enfin, nous présentons une seconde partie consacrée à quelques problèmes bien connus qui ne sont pas gouvernés par des systèmes différentiels de type Mathieu ; ce sont : le mouvement du pendule double avec support fixe, le mouvement d'un système dynamique mécanique et la stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps. Là, nous nous intéressons encore à de petites perturbations de rang-un de ces systèmes.

Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, dans les zones de stabilité(forte), les zones en couleur rouge, bleue et blanche représentent respectivement les zones où il y'a instabilité, stabilité et stabilité forte. Enfin, on rappelle que, les tests numériques relatifs à ce chapitre ont été élaborés sous la version 7.9.0($R2009b$) du logiciel MATLAB.

3.2 Application aux systèmes de Mathieu

Rappelons que toute équation de Mathieu est un cas particulier de l'équation de Hill (voir [22, 32, 34]) de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + [\alpha + 2q\cos(2t)]\,x = 0, \tag{3.1}$$

où

$$x, \alpha,\ q \in \mathbb{R},$$

et

$$t \longmapsto \alpha + 2q\cos(2t) \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.$$

Ce type d'équation a été étudié pour la première fois par Emile Mathieu [40] en 1868 pour le calcul des modes vibrationnels [1] d'une membrane elliptique.

Les systèmes de Mathieu auxquels nous nous sommes confrontés dans cette section sont les systèmes différentiels de la forme [5, 15, 22, 32, 34]

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + (\delta_1 + \epsilon_1 cos(t))\, x_1 & = & 0 \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + (\delta_2 + \epsilon_2 cos(t))\, x_2 & = & 0 \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \dfrac{d^2x_N}{dt^2} + (\delta_N + \epsilon_N cos(t))\, x_N & = & 0 \end{array}\right. , \tag{3.2}$$

où $N \geq 1$, ϵ_i, $\delta_i \in \mathbb{R}$ $\forall\ i = 1, ..., N$ et les $t \longmapsto \alpha_i + 2q_i\cos(2t)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout $i = 1, ..., N$.

Ces systèmes différentiels peuvent s'écrire sous la forme canonique et Hamiltonienne suivante :

$$J\frac{dX(t)}{dt} = H(t)X(t), \quad X(0) = I_{2N}, \tag{3.3}$$

grâce au changement de variables ci-dessous :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dfrac{dx(t)}{dt} \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0_N & -I_N \\ I_N & 0_N \end{bmatrix} \text{ et } H(t) = \begin{bmatrix} P(t) & 0_N \\ 0_N & I_N \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

où

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{2N}(t) \end{bmatrix},$$

1. un mode de vibration est fondamentalement une excitation du système à sa fréquence naturelle. Lorsque cela se produit, le système commence à osciller avec une très grande amplitude.

$$P(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 + \epsilon_1 cos(t) & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 + \epsilon_2 cos(t) & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_{N-1} + \epsilon_{N-1} cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \delta_N + \epsilon_N cos(t) \end{bmatrix} \text{ et } H(t)$$

sont des fonctions matricielles continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Comme problème gouverné par ces types de systèmes, nous commençons par présenter le cas du mouvement de pendules avec supports mobiles dans le plan, soumis à de petites perturbations de rang-un [34].

3.2.1 Etude de pendules

En physique et en mécanique en particulier, un pendule est un corps solide pouvant osciller autour d'un axe fixe et qui, écarté de sa position d'équilibre, y retourne en oscillant sous l'effet d'une force, par exemple la gravité. Le mot pendule donné par Huygens, vient du latin pendere [41], qui veut dire "prendre". Il existe plusieurs types de pendules, ayant chacun un intérêt particulier. On peut citer en exemples, le pendule expérimental de Galilé (1632), le pendule ballistique inventé par Robin en 1742, le pendule de Foucault(1851) et le pendule expérimental de Stokes (1851), etc. Ils ont été utilisés dans un cadre expérimental ayant pour but de mettre en évidence un phénomène physique ou mécanique. Ainsi les pendules furent les premiers systèmes physiques capables de mesurer : l'accélération due à la pesenteur g de Newton (1659) et le temps ; et furent à l'origine des premiers horloges modernes. En dehors de cet avantage connu de l'opinion générale, on rappelle que le pendule de Foucault a permis de mettre en évidence la rotation quotidienne de la terre, et celui dédié à Stokes fut construit pour étudier les propriétés des fluides. Dans le paragraphe de la première section de ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité (forte) du mouvement de pendules dont le support est supposé mobile sous de petites perturbations de rang-un. On rappelle que, les zones de stabilité(forte) de ce paragraphe sont construites en s'inspirant de la Figure *2* de [34] dans le but d'analyser la stabilité(forte) du mouvement de pendules sous de petites perturbations de rang-un.

3.2.1.1 Pendule simple avec support mobile

On considère le pendule simple suivant dont le point d'attache est soumis à un mouvement oscillatoire $f(t)$ d'amplitude α et de pulsation Ω, défini par $f(t) = \alpha \cos(\Omega t)$ [34]. On suppose que le mouvement s'éffectue avec de faibles oscillations.

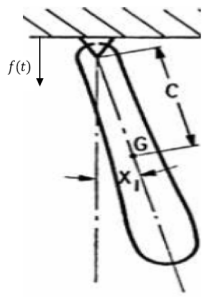

FIGURE 3.1 – Modèle du pendule simple avec support mobile.

D'après [34], le mouvement du pendule simple est gouverné par

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{cg}{k_0^2}\left(1 + \frac{\alpha\Omega^2}{g}\cos(\Omega t)\right)x = 0, \tag{3.5}$$

où $t \longmapsto 1 + \dfrac{\alpha\Omega^2}{g}\cos(\Omega t)$ est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$, k_0 est le rayon de giration du pendule autour de son point de suspension, et c est la distance entre le point de suspension et le centre du pendule.

En faisant le changement de variables $\tau = \Omega t$, l'équation (3.5) peut s'écrire comme une équation de Mathieu de la forme :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (\delta + \epsilon\cos(\tau))\,x = 0, \tag{3.6}$$

où

$\tau \longmapsto \delta + \epsilon\cos(\tau)$ est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$; et

$$\tau = \Omega t,\ \epsilon = \frac{c\alpha}{k_0^2} \text{ et } \delta = \frac{cg}{k_0^2\Omega^2}.$$

En faisant ensuite le changement de variables, donné dans (3.4) avec $N = 1$, l'équation (3.6) peut se mettre sous la forme Hamiltonienne (3.3), avec

$$H(\tau,\delta,\epsilon) = \begin{bmatrix} \delta + \epsilon\cos(\tau) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On remarque que $\tau \longmapsto H(\tau)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Dans la suite, on considérera que le mouvement du pendule est soumis à la perturbation de rang-un $E_a(\tau,\delta,\epsilon)$ définie par :

$$E_a(\tau,\delta,\epsilon) = u_a u_a^T J X(\tau,\delta,\epsilon), \tag{3.7}$$

où $u_a = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ et $a \in [0,\ 1[$. Le mouvement du pendule devient alors :

$$\widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon) = \left(I + u_a u_a^T J\right) X(\tau,\delta,\epsilon).$$

Comme $X(\tau,\delta,\epsilon) = \left(I - u_a u_a^T J\right) \widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)$, en remplaçant alors $X(\tau,\delta,\epsilon)$ par son expression dans (3.3), l'équation du mouvement du pendule sous la perturbation de rang-un devient par la suite :

$$\begin{cases} J\dfrac{d\widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)}{d\tau} &= \underbrace{(I - u_a u_a^T J)^T H(\tau,\delta,\epsilon)(I - u_a u_a^T J)}_{\widetilde{H}(\tau,\delta,\epsilon,a)} \widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon), \\ \\ \widetilde{X}_a(0,\delta,\epsilon) &= I_2 + u_a u_a^T J \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\tau \longmapsto \widetilde{H}(\tau,\delta,\epsilon,a)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Le mouvement des valeurs propres de la solution matricielle $\widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)$ de (3.8) est tracé dans la figure 3.2 pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\epsilon) \in \{(1,0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$. Pour ces mêmes paramètres, la région de stabilité forte de $\widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)$ est présentée par la figure 3.3 de la page 53.

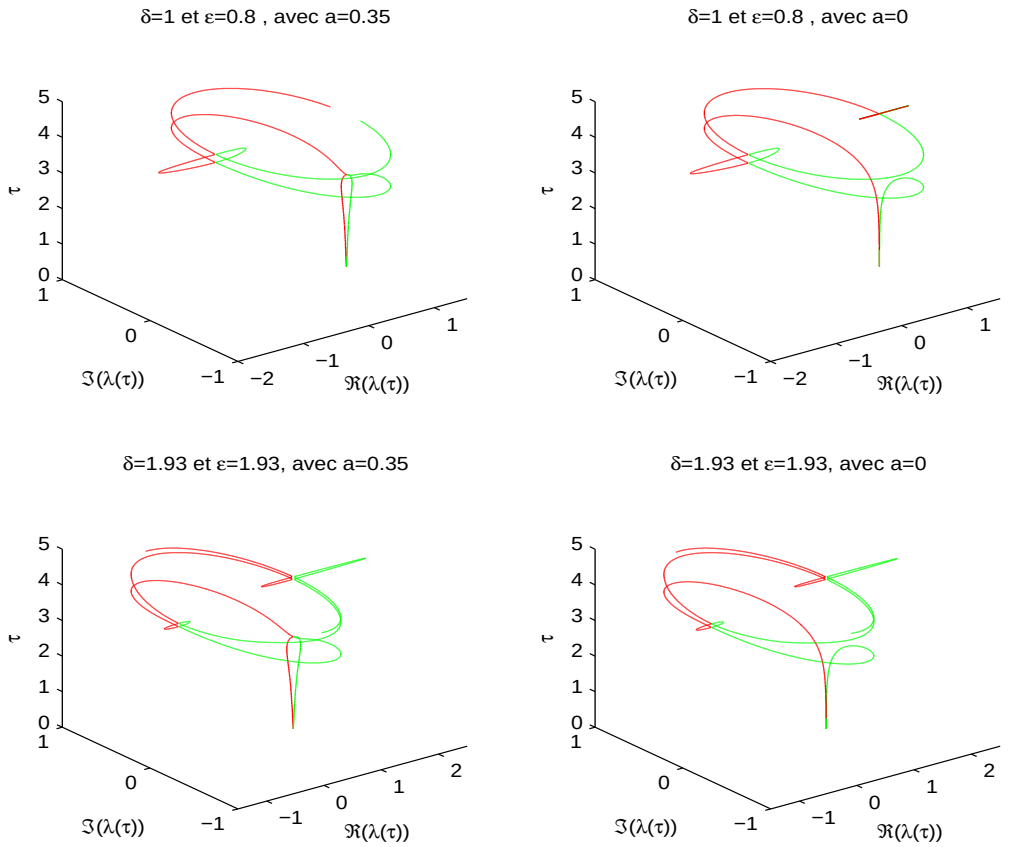

FIGURE 3.2 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau,\delta,\epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\epsilon) \in \{(1,0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0, 0.35\}$.

Dans la Figure 3.2, nous observons que le comportement du portrait spectral de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ ne change pas lorsque le mouvement du pendule simple est soumis aux petites perturbations du rang-un ci-dessus.

Quant à la Figure 3.3, elle montre qu'avec l'influence de la perturbation de rang-un, le mouvement du pendule simple devient très instable et devient moins instable en absence de cette perturbation.

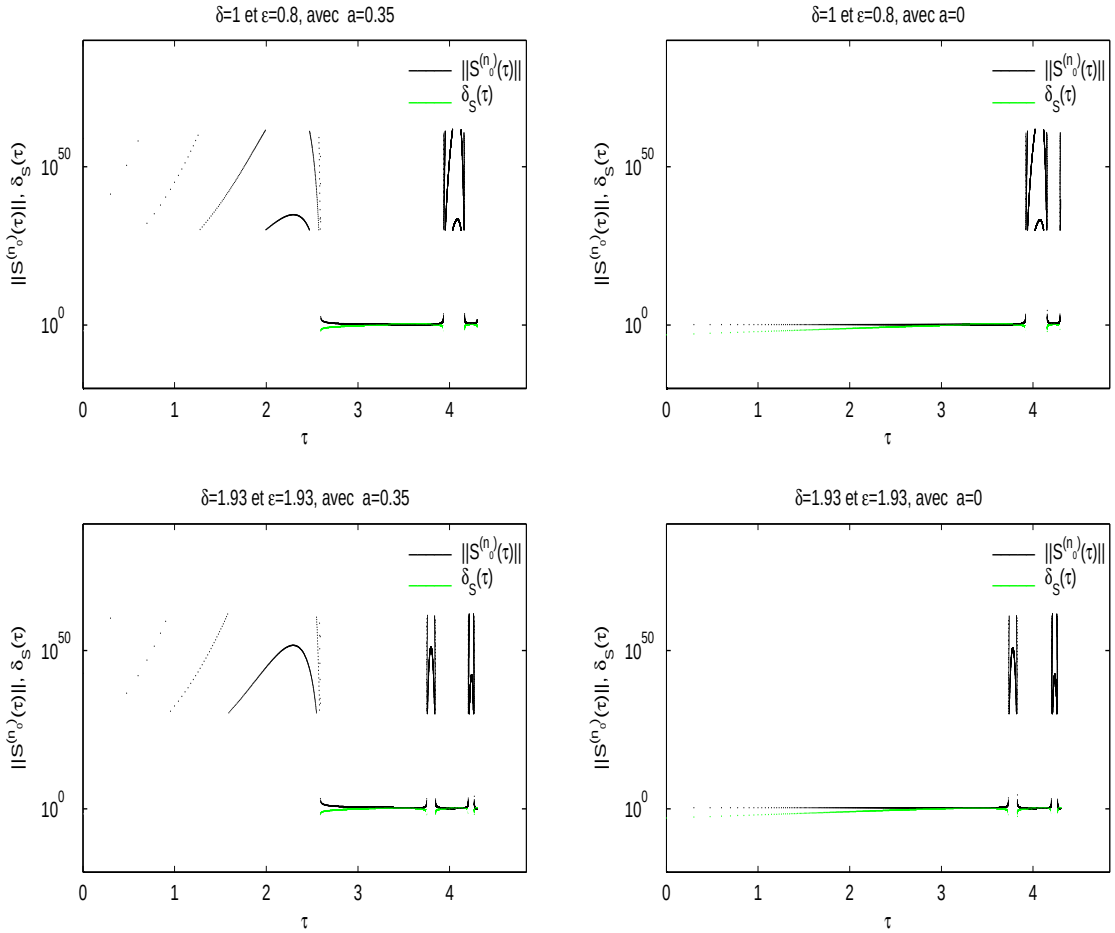

FIGURE 3.3 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0, 0.35\}$.

Concernant la Figure 3.4 de la page suivante, elle représente la région de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ dans le plan des paramètres $(\delta, \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$. Dans cette Figure, on observe une petite différence entre les deux sous-figures de cette Figure due à la petite perturbation de rang-un décrit par le mouvement du pendule simple.

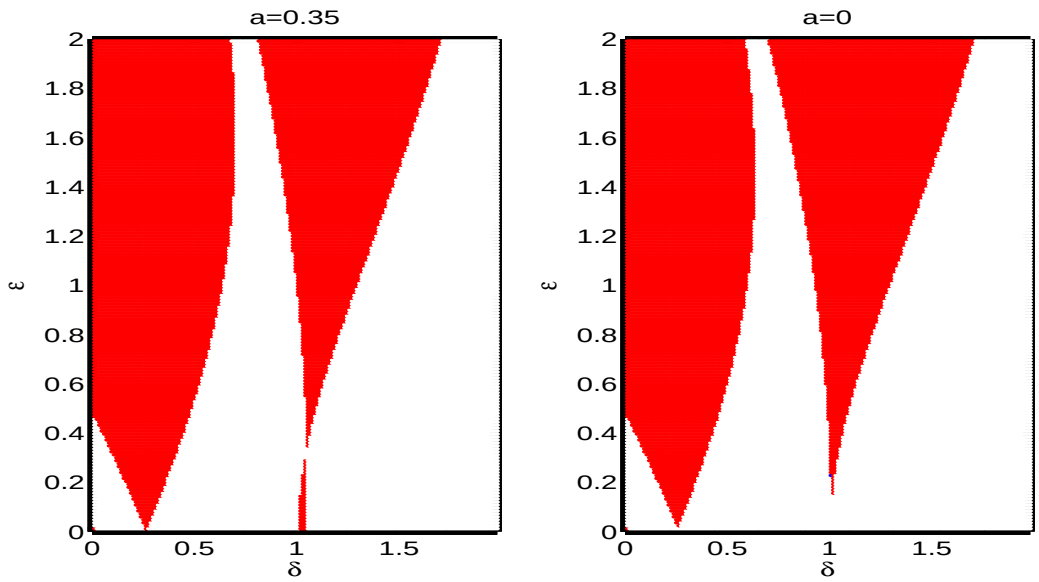

FIGURE 3.4 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$ et $a \in \{0, 0.35\}$.

3.2.1.2 Pendule double avec supports mobiles

On considère deux pendules simples identiques attachés à un support commun. Dans ce problème, on s'intéresse au cas où le support de chaque pendule est soumis à un mouvement oscillatoire $f(t)$ d'amplitude α et de pulsation Ω, defini par $f(t) = \alpha \cos(\Omega t)$ [34].

Partie 1 : Les deux pendules simples ne sont pas couplés.

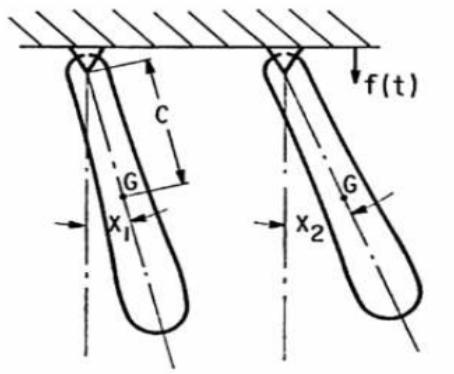

FIGURE 3.5 – Modèle du pendule double non couplé avec supports mobiles.

Comme les deux pendules sont identiques, alors d'après [34], l'équation différentielle du mouvement de chaque pendule est la même. Ainsi, l'équation du mouvement du système est donnée par :

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{cg}{k_0^2}\left(1 + \frac{\alpha\Omega^2}{g}\cos(\Omega t)\right)x_i = 0,\ i = 1, 2 \tag{3.9}$$

où k_0 et c sont définis dans le problème 3.2.1.1.

A l'aide du changement de variable $\tau = \Omega t$ et d'après [34], ce système d'équation peut se mettre encore sous la forme suivante :

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} + (\delta + \epsilon\cos(\tau))\,x_i = 0,\ i = 1, 2 \tag{3.10}$$

où $\tau \longmapsto \delta + \epsilon\cos(\tau)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ et ;

$$\epsilon = \frac{c\alpha}{k_0^2} \text{ et } \delta = \frac{cg}{k_0^2\Omega^2}.$$

Enfin, en introduisant le changement de variables (3.4) avec $N = 2$, on obtient le système (3.3) avec

$$H(\tau,\ \delta,\ \epsilon) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \delta,\ \epsilon) & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \text{ et } P(\tau,\ \delta,\ \epsilon) = (\delta + \epsilon\cos(\tau))I_2$$

des fonctions matricielles continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Dans ce qui suit, on suppose que le mouvement du système est soumis à la perturbation de rang-un suivante :

$$E_a(\tau, \delta,\ \epsilon) = u_a u_a^T JX(\tau, \delta,\ \epsilon), \tag{3.11}$$

où

$$u_a = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } a \in [0,\ 1[.$$

Dans ce cas, nous remarquons que $\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon) = \left(I + u_a u_a^T J\right) X(\tau, \delta,\ \epsilon). \tag{3.12}$$

En utilisant ensuite le fait que $X(\tau, \delta,\ \epsilon) = \left(I - u_a u_a^T J\right)\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon)$, et en remplaçant $X(\tau, \delta,\ \epsilon)$ dans (3.3), l'équation du mouvement du pendule double devient :

$$\begin{cases} J\dfrac{d\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon)}{d\tau} &= \underbrace{(I - u_a u_a^T J)^T H(\tau, \delta,\ \epsilon)(I - u_a u_a^T J)}_{\widetilde{H}(\tau,\delta,\ \epsilon,a)}\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon), \\ \\ \widetilde{X}_a(0, \delta,\ \epsilon) &= I + u_a u_a^T J \end{cases} \tag{3.13}$$

où $\tau \longmapsto \widetilde{H}(\tau, \delta, \epsilon, a)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ comme produit de fonctions continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

La figure 3.6 représente le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ pour $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$ et $a \in \{0; 0.35\}$, avec $\tau \in [0,\ 2\pi]$.

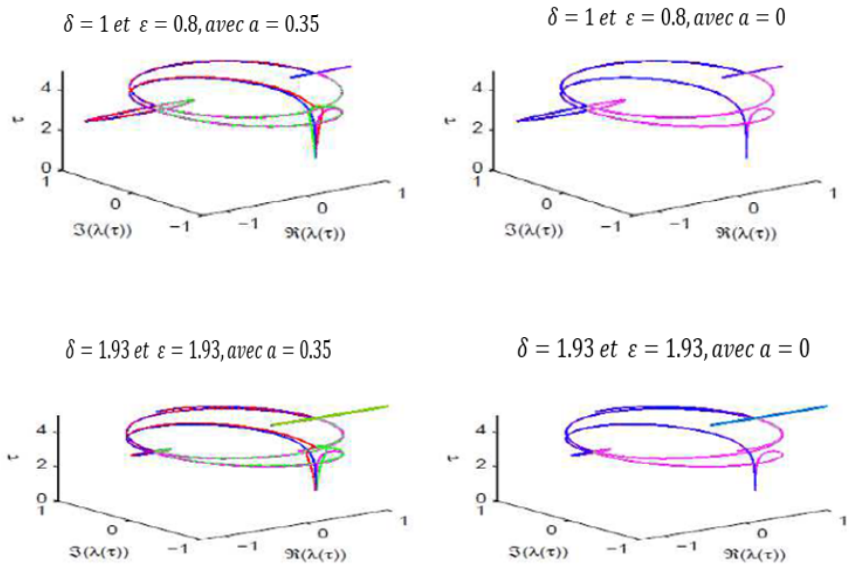

FIGURE 3.6 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Sous l'effet de cette petite perturbation de rang-un du mouvement du pendule double, ces figures montrent que la nature du portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ ne change pas.

Avec ces mêmes paramètres, on trace dans la Figure 3.7 de la page 57, la zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ pour tout $\tau \in [0,\ 2\pi]$. Dans cette Figure, on note un élargissement de la région d'instabilité lorsque la perturbation de rang-un est prise en compte et on observe un rétrécissement de la région instable puis un élargissement de la zone stable lorsque cette perturbation de rang-un est négligée.

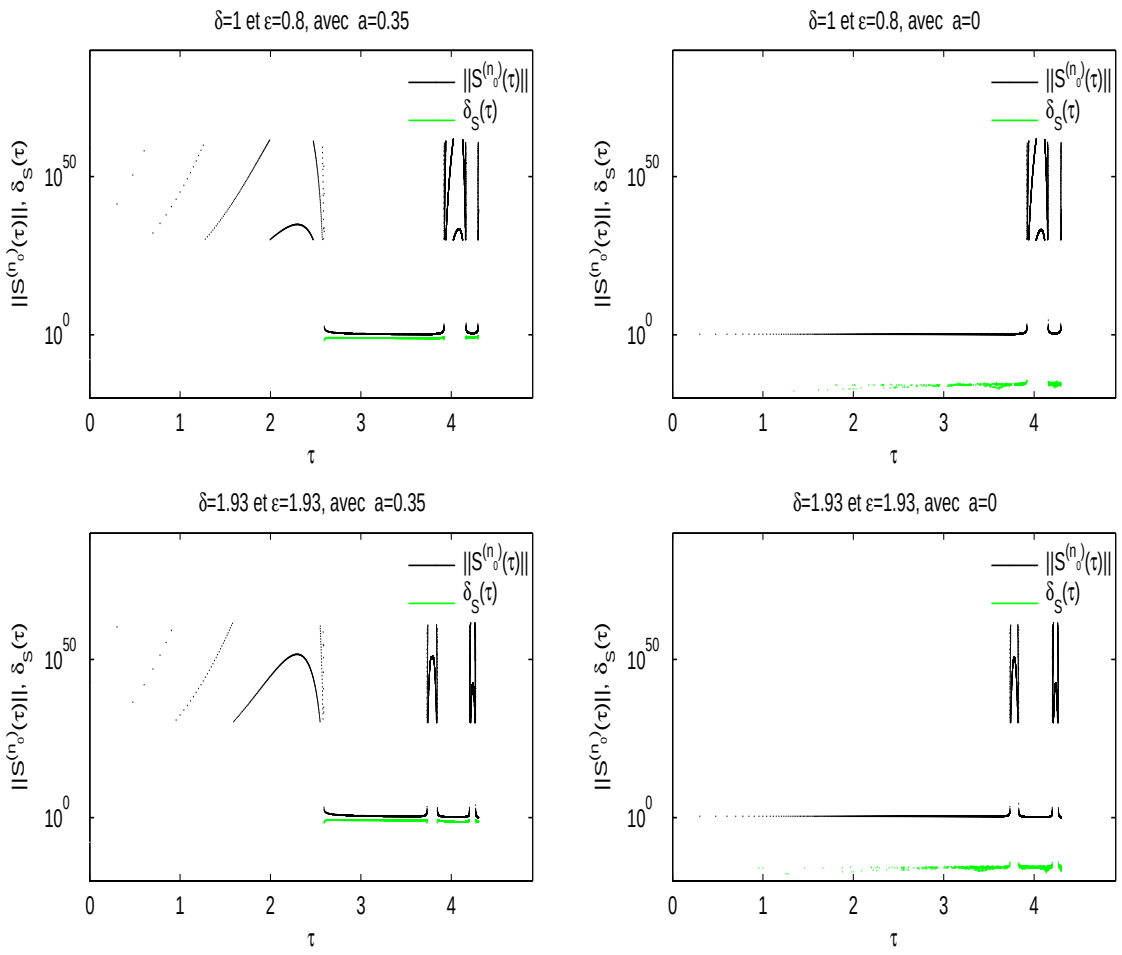

FIGURE 3.7 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Dans la Figure 3.8 de la page 58, on note une différence étroite entre les deux sous-figures de cette Figure. Cette différence est due à la petite perturbation de rang-un du système décrit par nos deux pendules non couplés.

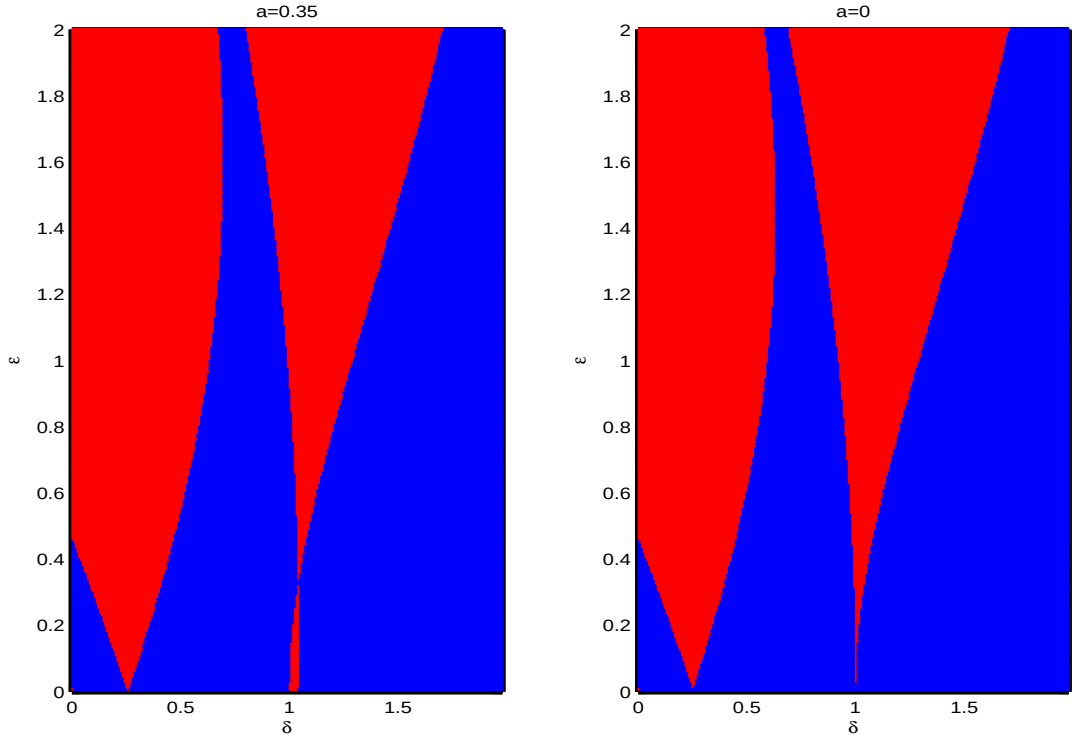

FIGURE 3.8 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0,\ 1.98] \times [0,\ 2]$ et $a \in \{0; 0.35\}$.

Partie 2 : Dans cette partie, on couple les deux pendules simples de la partie 1 par un ressort de constante de raideur k.

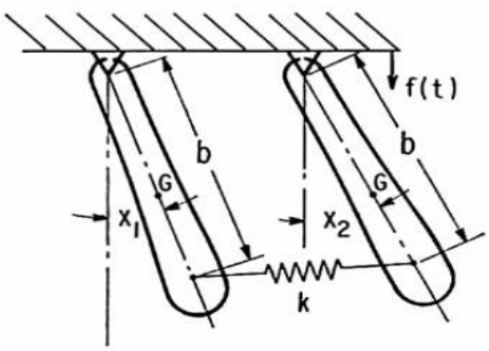

FIGURE 3.9 – Modèle du pendule double couplé avec supports mobiles.

D'après [34], le mouvement du système est gouverné par le système différentiel suivant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(B_0 + \frac{c\alpha\Omega^2}{k_0^2}\cos(\Omega t) I_2\right) x = 0, \tag{3.14}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } B_0 = \begin{pmatrix} \frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} & -\frac{kb^2}{mk_0^2} \\ -\frac{kb^2}{mk_0^2} & \frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} \end{pmatrix},$$

m est la masse de chaque pendule et b est la distance entre le point de suspension et le point d'attache du ressort de couplage.

En utilisant successivement les changements de variables suivantes :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \Omega t,$$

d'après [34], l'équation du mouvement du système devient alors

$$\frac{d^2 z_i}{d\tau^2} + (\delta_i + \epsilon_i \cos(\tau))\, z_i = 0,\ i = 1, 2 \tag{3.15}$$

où les $\tau \longmapsto \delta_i + \epsilon_i \cos(\tau)$ sont continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ et

$$\delta_1 = \delta = \frac{cg}{k_0^2 \Omega^2},\ \epsilon_1 = \epsilon = \frac{c\alpha}{k_0^2} \text{ et } \epsilon_2 = \epsilon + 2e,\ \text{avec } e = \frac{kb^2}{mk_0^2 \Omega^2}.$$

Enfin, en utilisant le changement de variables données dans (3.4) avec $N = 2$, nous remarquons que l'équation du mouvement du système couplé peut se mettre sous la forme (3.3) avec

$$H(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}$$

et

$$P(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) = \begin{pmatrix} \delta + \epsilon \cos(\tau) & 0 \\ 0 & \delta + 2e + \epsilon \cos(\tau) \end{pmatrix}$$

des fonctions matricielles continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

$$E_a(\tau, \delta, \epsilon,\ e) = u_a u_a^T J X(\tau, \delta, \epsilon,\ e), \tag{3.16}$$

où u_a est un vecteur définie dans (3.11). Dans ce cas, nous remarquons que l'équation du mouvement est gourvernée par (3.13).

La Figure 3.10 de la page suivante présente le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon,\ e)$ pour $(\delta, \epsilon,\ e) \in \{(1,\ 0.8,\ 0.5)\,, (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$ et $a \in \{0; 0.35\}$, $\forall \tau \in [0, 2\pi]$.

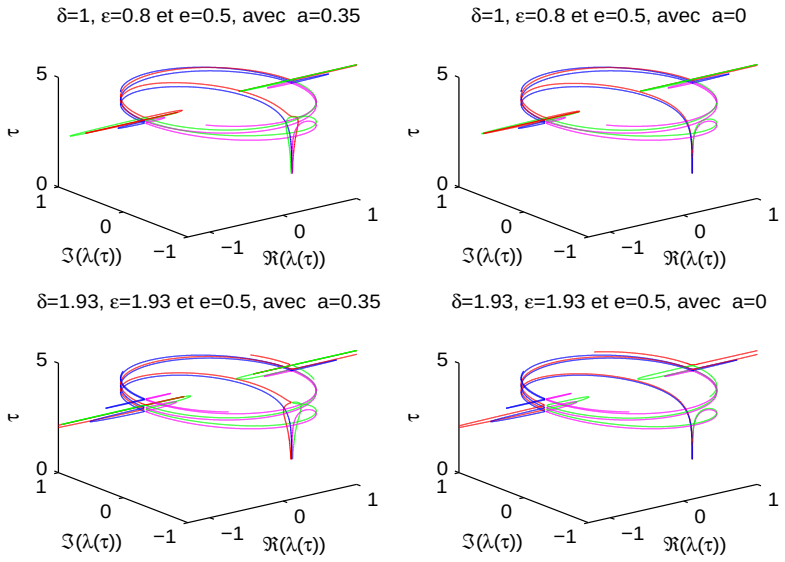

FIGURE 3.10 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon, e)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Les sous-figures de la Figure ci-dessus montrent que la nature du portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ ne change pas lorsque le mouvement des pendules couplés est soumis aux petites perturbations du rang-un ci-dessus.

Pour ce même cas particulier, on montre le comportement de la zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ dans la Figure 3.11 de la page 61. Dans cette Figure, nous constatons qu'en absence de la perturbation, la région fortement stable est plus large que la région instable. Ce qui n'est pas le cas lorsque le système est soumis à l'effet de la perturbation de rang-un.

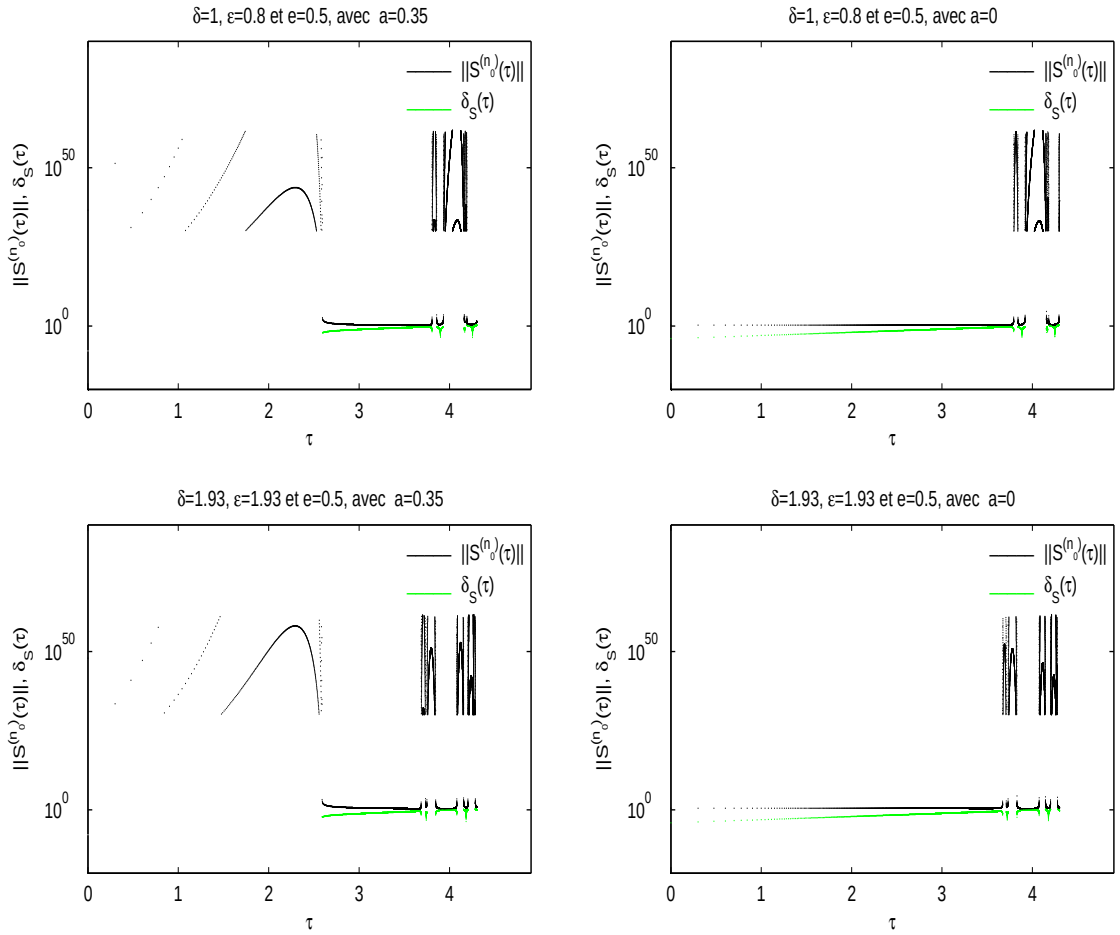

FIGURE 3.11 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\, 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon,\, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Concernant la zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon,\, e)$, nous avons la Figure 3.12 de la page suivante. En effet, dans cette figure, on note encore une différence étroite entre les deux sous-figures de cette Figure.

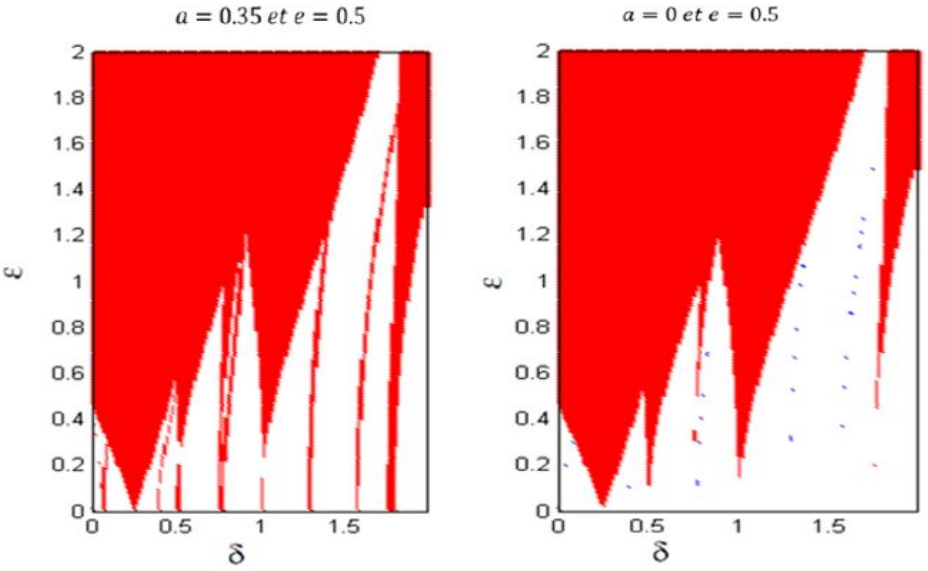

FIGURE 3.12 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon, e)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0, 1.98] \times [0, 2]$, $a \in \{0; 0.35\}$ et $e = 0.5$.

3.2.1.3 Pendule triple avec supports mobiles

Ici, on considère trois pendules simples indentiques indépendantes attachés à un support commun. Dans ce problème, sauf mention contraire, nous limiterons notre analyse au cas où le support de chaque pendule est soumis à un mouvement oscillatoire $f(t)$ d'amplitude α et de pulsation Ω, defini par $f(t) = \alpha \cos(\Omega t)$ [34].

Partie 1 : Les trois pendules ne sont pas couplés

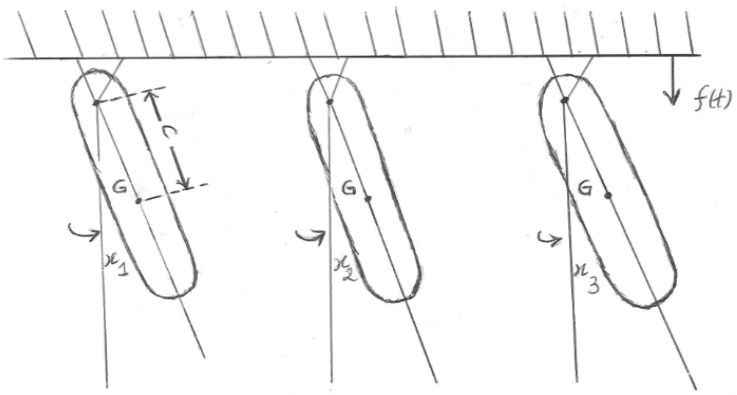

FIGURE 3.13 – Modèle du pendule triple non couplé avec supports mobiles.

Etant donné que les trois pendules sont identiques, d'après [34], chaque pen-

dule est gouverné par la même équation. Ainsi, l'équation du mouvement du système est alors :

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{cg}{k_0^2}\left(1 + \frac{\alpha\Omega^2}{g}\cos(\Omega t)\right)x_i = 0,\ i = 1, 2, 3; \tag{3.17}$$

où k_0 et c sont definis dans la section 3.2.1.1.

Grâce au changement de variable suivant $\tau = \Omega t$, cette équation différentielle peut se mettre sous la forme suivante [34] :

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} + (\delta + \epsilon\cos(\tau))\,x_i = 0,\ i = 1, 2, 3; \tag{3.18}$$

où les $\tau \longmapsto \delta + \epsilon\cos(\tau)$ sont continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ et

$$\epsilon = \frac{c\alpha}{k_0^2} \text{ et } \delta = \frac{cg}{k_0^2\Omega^2}.$$

En faisant le changement de variables (3.4) avec $N = 3$, on remarque que le mouvement du système est gouverné par (3.3), avec

$$H(\tau,\ \delta,\ \epsilon) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \delta,\ \epsilon) & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix} \text{ et } P(\tau,\ \delta,\ \epsilon) = (\delta + \epsilon\cos(\tau))I_3$$

des fonctions matricielles continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Dans ce qui suit, on perturbe le mouvement du système par la matrice de rang un suivante :

$$E_a(\tau, \delta,\ \epsilon) = u_a u_a^T J X(\tau, \delta,\ \epsilon) \tag{3.19}$$

où

$$u_a = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } a \in [0,\ 1[\text{ et } J = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 \\ I_3 & 0_3 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, le mouvement du système peut s'écrire sous la forme :

$$\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon) = \left(I + u_a u_a^T J\right) X(\tau, \delta,\ \epsilon).$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement devient :

$$\begin{cases} J\dfrac{d\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon)}{d\tau} &= \underbrace{(I - u_a u_a^T J)^T H(\tau, \delta,\ \epsilon)(I - u_a u_a^T J)}_{\widetilde{H}(\tau, \delta,\ \epsilon, a)}\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon), \\ \\ \widetilde{X}_a(0, \delta,\ \epsilon) &= I + u_a u_a^T J \end{cases} \tag{3.20}$$

où $\tau \longmapsto \widetilde{H}(\tau, \delta, \epsilon, a)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ comme produit de fonctions continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Les figures ci-dessous montrent respectivement le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ et la zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

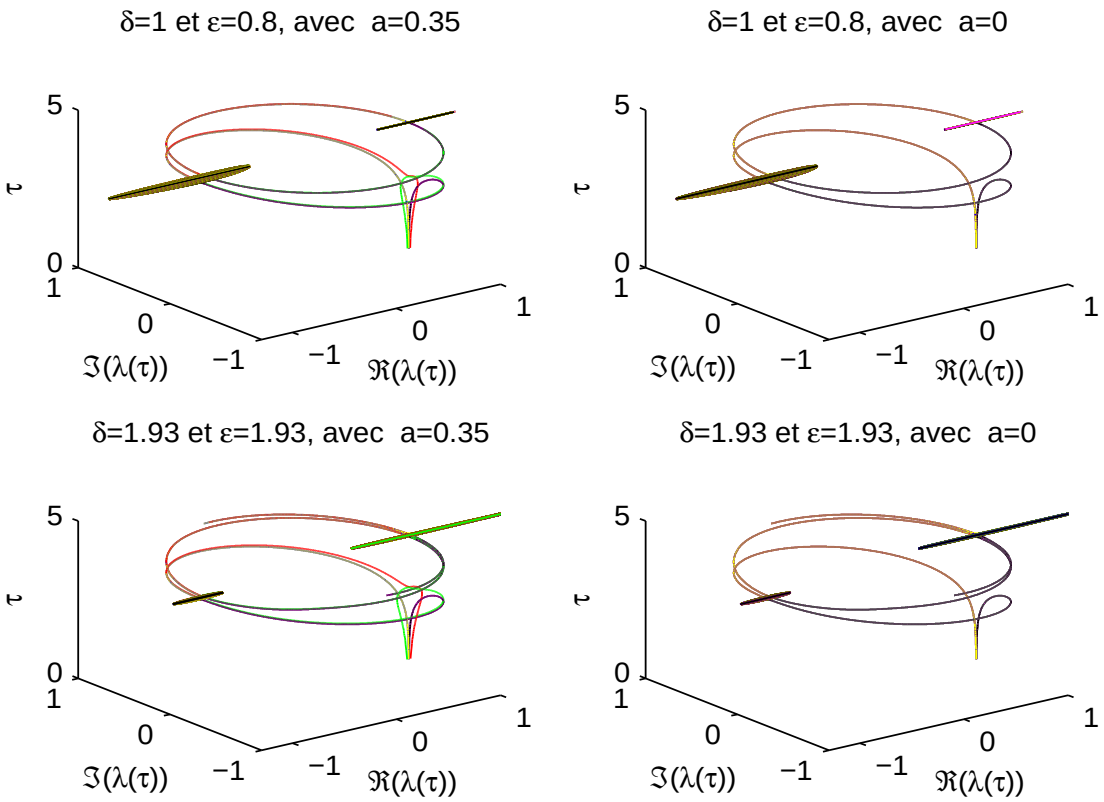

FIGURE 3.14 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta, \epsilon) \in \{(1, 0.8)\,,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Dans le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$, on observe qu'avec la perturbation de rang-un, la nature du portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon)$ change avec la perturbation.

Sur la Figure 3.15 de la page 65, nous observons qu'en présence de la perturbation de rang-un, il y'a un élargissement grossier de la région instable et un rétrécissement de la région stable, alors qu'en absence de cette perturbation, on note un rétrécissement de la région instable au profit d'un élargissement de la région de stabilité forte.

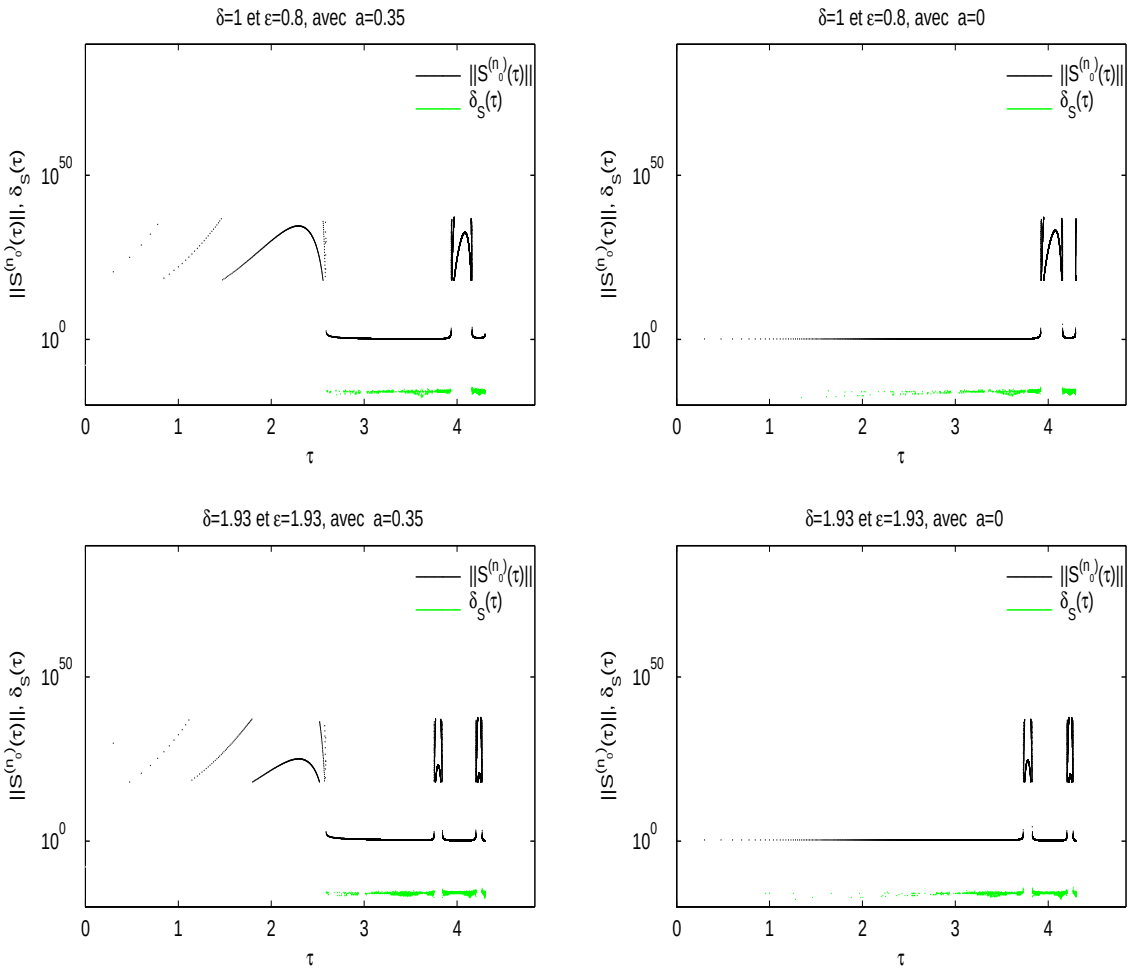

FIGURE 3.15 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon) \in \{(1, 0.8)\ ,\ (1.93,\ 1.93)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Dans la Figure 3.16 de la page suivante, les résultats obtenus concordent avec les observations faites sur Figure 3.8 du second problème.

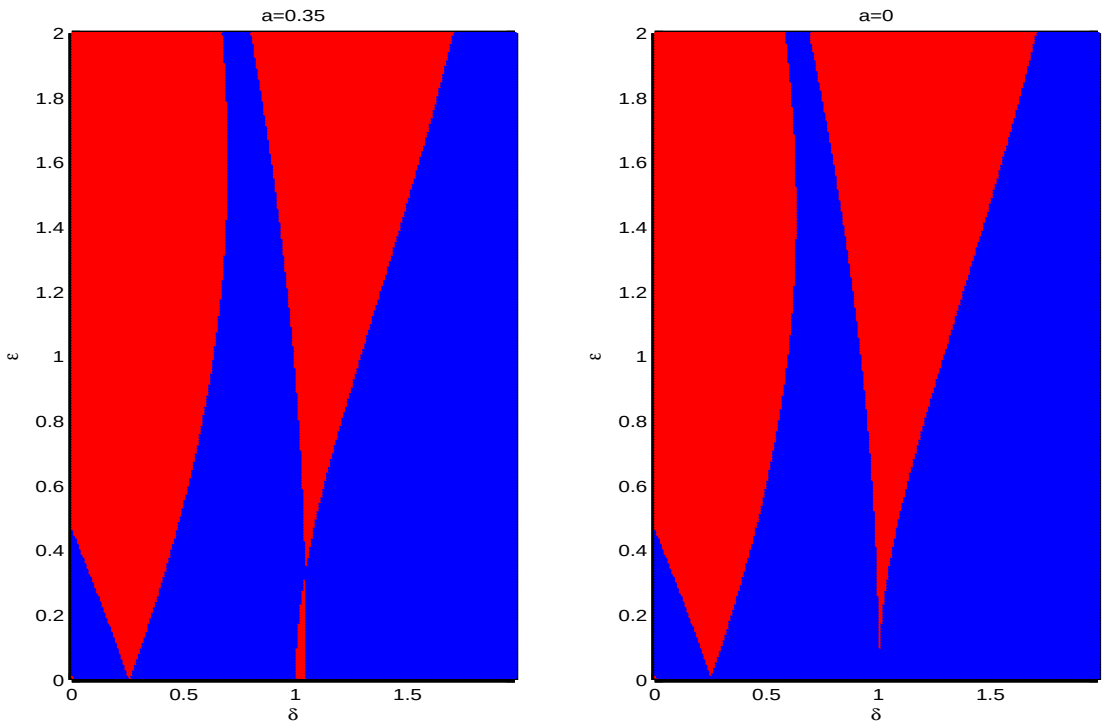

FIGURE 3.16 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0, 1.98] \times [0, 2]$ et $a \in \{0; 0.35\}$.

<u>Partie 2</u> : On couple les trois pendules par deux ressorts de constante de raideur identiques k.

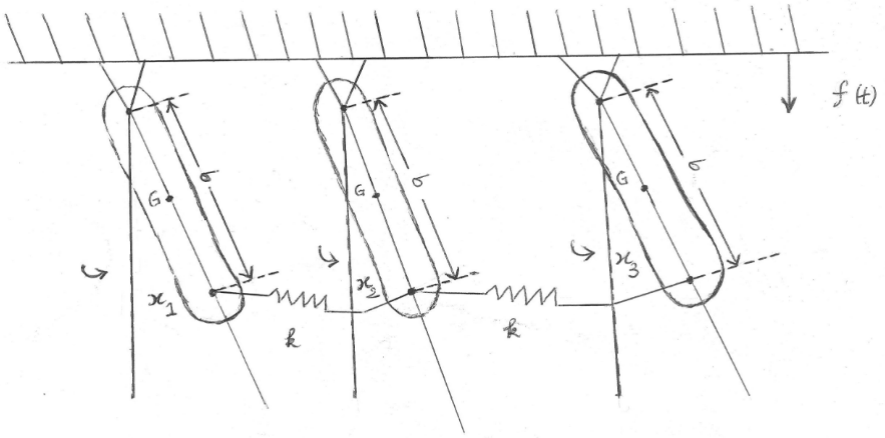

FIGURE 3.17 – Modèle du pendule triple couplé avec supports mobiles.

L'énergie cinétique de chaque pendule est de la forme :

$$T_i = \frac{1}{2}m(\frac{k_0^2}{c})^2\dot{x}_i^2,\ i = 1, 2, 3;$$

donc l'énergie cinétique du système couplé est donnée par :

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m(\frac{k_0^2}{c})^2\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right).$$

L'énergie pontentielle gravitationnelle de chaque pendule est donnée par :

$$U_i = \frac{1}{2}m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \frac{d^2f}{dt^2}\right)x_i^2,\ i = 1, 2, 3;$$

alors l'énergie pontentielle gravitationnelle du système couplé est donnée par :

$$U_{grav} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \frac{d^2f}{dt^2}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).$$

D'autre part, puisque l'elongation du ressort à gauche est donnée par $\frac{bk_0}{c}(x_2 - x_1)$ et celui du ressort à droite est donnée par $\frac{bk_0}{c}(x_3 - x_2)$, alors l'énergie pontentielle du ressort est donnée par :

$$\begin{aligned} U_{ress} = \frac{1}{2}k(\frac{bk_0}{c})^2\left[(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\right] &= \frac{1}{2}k(\frac{bk_0}{c})^2\left(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2\right) \\ &\quad - k(\frac{bk_0}{c})^2(x_2x_3). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle totale du système couplé est :

$$\begin{aligned} U = U_{grav} + U_{ress} =& \frac{1}{2}m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \frac{d^2f}{dt^2}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \\ &+ \frac{1}{2}k(\frac{bk_0}{c})^2\left(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3\right). \end{aligned}$$

Le Lagrangien est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U =& \frac{1}{2}m(\frac{k_0^2}{c})^2\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{1}{2}m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \frac{d^2f}{dt^2}\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \\ &- \frac{1}{2}k(\frac{bk_0}{c})^2\left(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3\right). \end{aligned}$$

Les équations de Lagrange donnent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_1 - k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_1 + k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_2 = m(\dfrac{k_0^2}{c})^2 \ddot{x}_1 \\ -m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_2 - 2k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_2 + k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_1 \\ \qquad\qquad + k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_3 = m(\dfrac{k_0^2}{c})^2 \ddot{x}_2 \\ -m\frac{k_0^2}{c}\left(g - \dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_3 - k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_3 + k(\dfrac{bk_0}{c})^2 x_2 = m(\dfrac{k_0^2}{c})^2 \ddot{x}_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \left(\frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} - \dfrac{c}{k_0^2}\dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_1 - \frac{kb^2}{mk_0^2}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \left(\frac{cg}{k_0^2} + \frac{2kb^2}{mk_0^2} - \dfrac{c}{k_0^2}\dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_2 - \frac{kb^2}{mk_0^2}x_1 - \frac{kb^2}{mk_0^2}x_3 = 0 \\ \ddot{x}_3 + \left(\frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} - \dfrac{c}{k_0^2}\dfrac{d^2 f}{dt^2}\right)x_3 - \frac{kb^2}{mk_0^2}x_2 = 0 \end{cases}$$

Ceci montre que le mouvement du pendule triple est gouverné par le système différentiel suivant :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(B_0 - \frac{c}{k_0^2}\frac{d^2 f}{dt^2} I_3\right)x = 0, \tag{3.21}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } B_0 = \begin{pmatrix} \frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} & -\frac{kb^2}{mk_0^2} & 0 \\ -\frac{kb^2}{mk_0^2} & \frac{cg}{k_0^2} + \frac{2kb^2}{mk_0^2} & -\frac{kb^2}{mk_0^2} \\ 0 & -\frac{kb^2}{mk_0^2} & \frac{cg}{k_0^2} + \frac{kb^2}{mk_0^2} \end{pmatrix},$$

m est la masse de chaque pendule et b est la distance entre le point de suspension de chaque pendule et le point d'attache de couplage du ressort.

En remplaçant $f(t)$ par sa nouvelle expression dans l'équation (3.21), on ob-

tient le système différentiel suivant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(B_0 + \frac{c\alpha\Omega^2}{k_0^2}\cos(\Omega t)I_3\right)x = 0. \tag{3.22}$$

Avec le changement de variables $\tau = \Omega t$, il vient, en vertu de [34], que l'équation du movement du pendule triple est gouvernée par :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + (B_1 + \epsilon\cos(\tau)I_3)\,x = 0, \tag{3.23}$$

où $\tau \longmapsto B_1 + \epsilon\cos(\tau)I_3$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$ et ;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} \delta + e & -e & 0 \\ -e & \delta + 2e & -e \\ 0 & -e & \delta + 2e \end{pmatrix},$$

avec

$$\delta = \frac{cg}{\Omega^2 k_0^2},\ e = \frac{kb^2}{mk_0^2\Omega^2} \text{ et } \epsilon = \frac{c\alpha}{k_0^2}.$$

Enfin, en introduisant le changement de variables (3.4), on obtient le système (3.3) avec

$$H(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix},$$

et

$$P(\tau,\ \delta,\ \epsilon,\ e) = \begin{pmatrix} \delta + e + \epsilon\cos(\tau) & -e & 0 \\ -e & \delta + 2e + \epsilon\cos(\tau) & -e \\ 0 & -e & \delta + e + \epsilon\cos(\tau) \end{pmatrix}$$

continues par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Nous supposons que le mouvement du système couplé est perturbé par une matrice de la forme (3.19). Alors en vertu de ce qui précède, l'équation du mouvement du système couplé peut s'écrire à nouveau sous la forme (3.20).

Dans les deux premières Figures, les simulations numériques ont été faites avec

$$\tau \in [0,\ 2\pi],\ (\delta,\ \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\} \text{ et } a \in \{0; 0.35\}.$$

Comme prévu, nous pouvons visualiser respectivement, le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta,\ \epsilon, e)$ et la région de stabilité forte du déplacement du système sur un intervalle de temps $\tau \in [0,\ 2\pi]$.

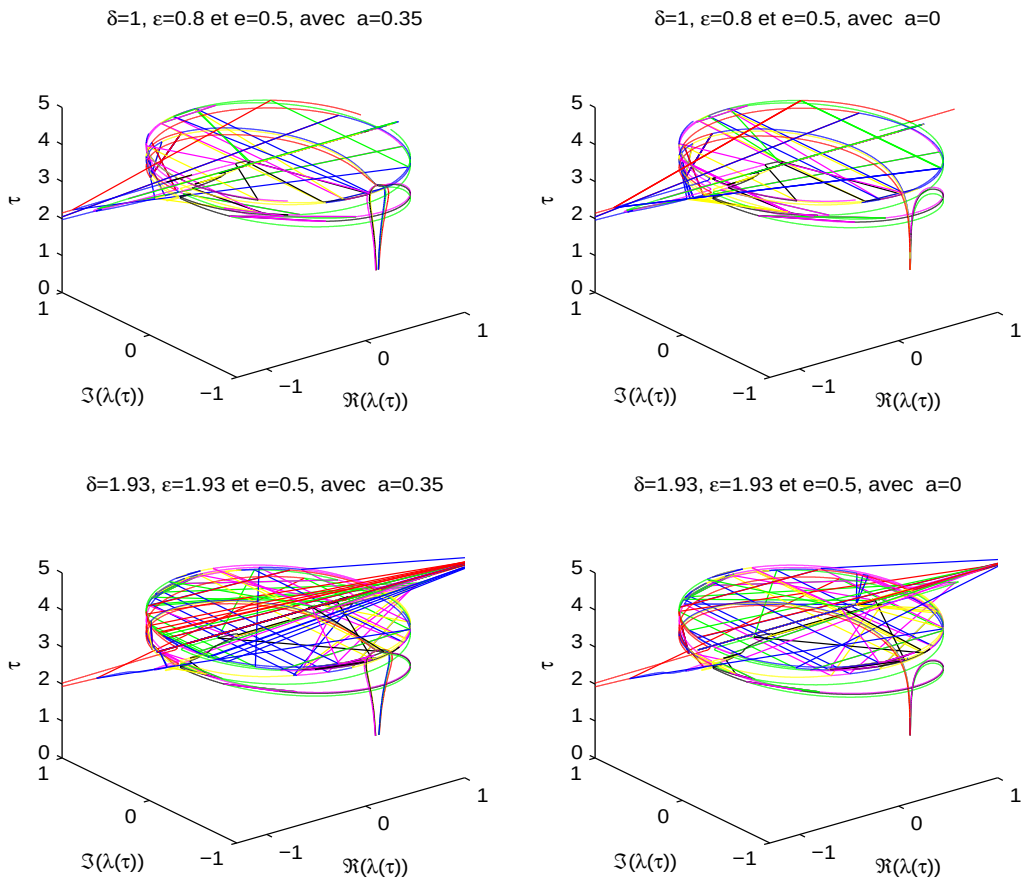

FIGURE 3.18 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon, e)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

On remarque que la nature du portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \delta, \epsilon, e)$ ne changent pas.

Dans la Figure 3.19 de la page suivante, on observe qu'en présence de la perturbation de rang-un, le mouvement du système couplé devient très instable et devient moins instable en absence de toute perturbation.

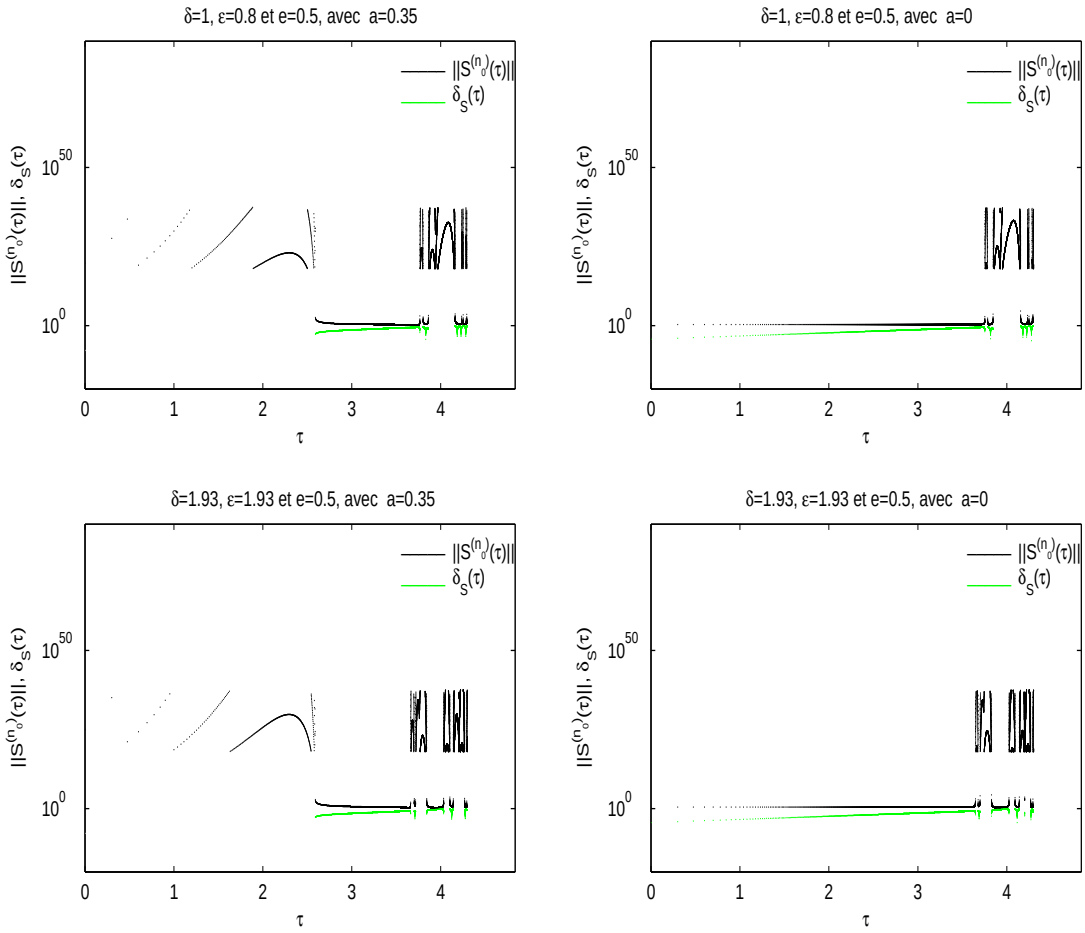

FIGURE 3.19 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\delta,\ \epsilon, e) \in \{(1, 0.8, 0.5)\,,\ (1.93,\ 1.93,\ 0.5)\}$, avec $a \in \{0; 0.35\}$.

Dans la Figure 3.20 de la page 72, on note une petite différence entre les deux sous-figures de cette Figure.

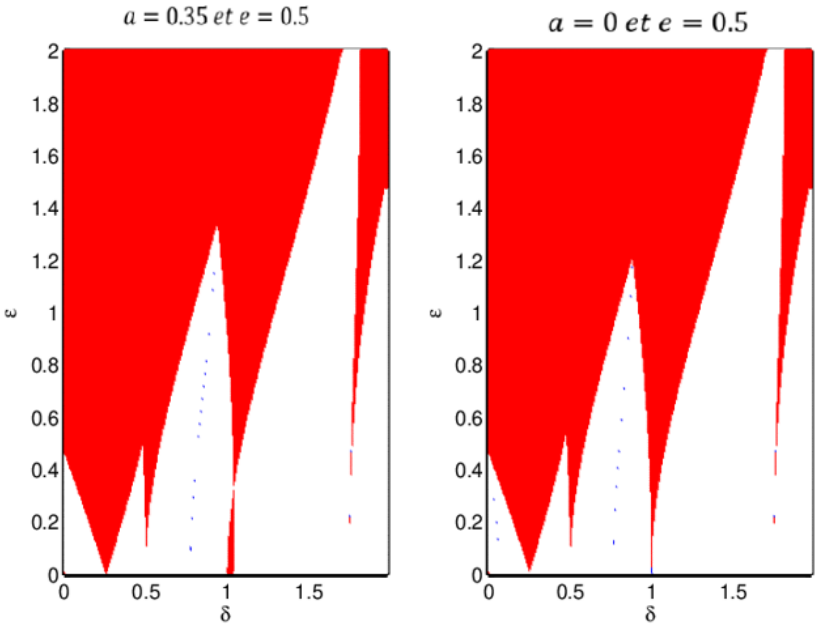

FIGURE 3.20 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, \delta, \epsilon, e)$ pour $(\delta, \epsilon) \in [0, 1.98] \times [0, 2]$, $a \in \{0; 0.35\}$ et $e = 0.5$.

3.2.2 Mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire

L'analyseur quadripolaire est un dipositif capable d'ioniser des molécules, puis de trier les ions ainsi produits selon la valeur du rapport masse/charge et enfin de détecter ces ions en terme de stabilité [32]. Cet appareil a été inventé par W. Paul et H. S. Steinwegen entre les années 1953 et 1960 au cours de leur étude sur la stabilité de la trajectoire des ions [32]. C'est pourquoi dans cette thèse, nous réutilisons ce modèle expérimental déjà étudié dans plusieurs ouvrages [32] pour analyser cette fois-ci l'effet de la perturbation de rang-un sur le mouvement d'ions.

On considère un ion de masse m et de charge électrique $|Ze|$ qui se déplace avec une vitesse v au travers d'un analyseur quadripolaire de potentiel
$\Phi_0 = U - V\cos(\omega t)$. A l'intérieur de l'analyseur, l'ion subit une force $f(x, y, t) = -Ze\nabla\mathcal{V}(x, y, t)$, où Z est le nombre de proton et e est la charge d'un proton. On suppose que la composante du champ électrique selon l'axe Oz est nulle et la composante z de la vitesse reste constante.

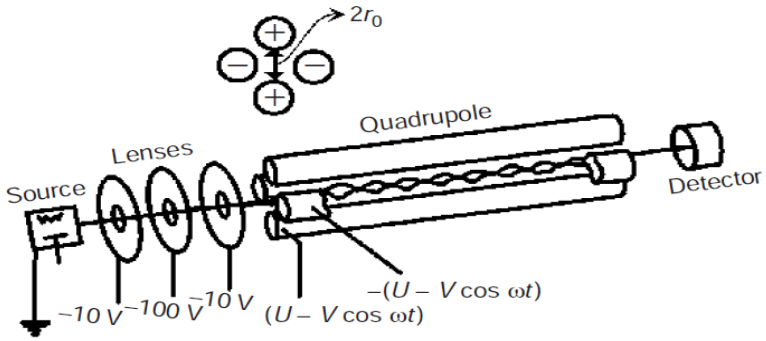

FIGURE 3.21 – Schéma d'un analyseur quadripollaire.

D'après [32], le mouvement de l'ion au travers de l'analyseur est gouverné par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d^2x}{d\xi^2} + (\alpha - 2q\cos(2\xi))\,x & = & 0 \\ \\ \dfrac{d^2y}{d\xi^2} - (\alpha - 2q\cos(2\xi))\,y & = & 0 \end{array}\right. , \tag{3.24}$$

où

$$\alpha = \frac{8ZeU}{r_0^2 m\omega^2}, q = \frac{4ZeV}{r_0^2 m\omega^2} \text{ et } \xi = \frac{\omega t}{2}.$$

En faisant le changement de variables (3.4) avec $N = 2$, on obtient le système Hamiltonien (3.3) avec

$$H(\xi) = \begin{pmatrix} P(\xi) & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix} \text{ et } P(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha - 2q\cos(2\xi) & 0 \\ \\ 0 & -\alpha + 2q\cos(2\xi) \end{pmatrix}$$

des fonctions matricielles continues par morceaux sur $[0,\ \pi]$.

Dans la suite de ce problème, on considérera que le mouvement de l'ion est soumis à une perturbation de rang-un de la forme (3.11).

En raisonnant alors de la même façon que le cas du pendule double avec supports mobiles, l'équation du mouvement de l'ion devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} J\dfrac{d\widetilde{X}_a(\xi,\ q,\ \alpha)}{d\xi} & = & \underbrace{(I - u_a u_a^T J)^T H(\xi,\ q,\ \alpha)(I - u_a u_a^T J)}_{\widetilde{H}(\xi,\,q,\,\alpha)}\,\widetilde{X}_a(\xi,\ q,\ \alpha), \\ \\ \widetilde{X}_a(0,\ q,\ \alpha) & = & I + u_a u_a^T J \end{array}\right. \tag{3.25}$$

où $\xi \longmapsto \widetilde{H}(\xi,\ q,\ \alpha)$ est continue par morceaux sur $[0,\ \pi]$ comme produit de fonctions continues par morceaux sur $[0,\ \pi]$, et

$$u_a = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } a \in [0,\ 1[.$$

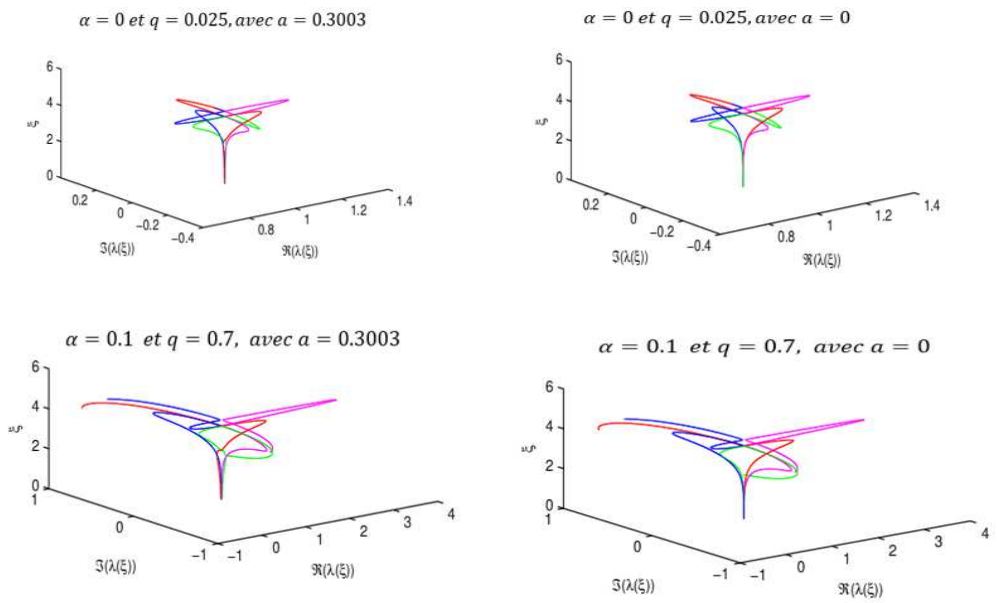

FIGURE 3.22 – Portrait spectrale de $\xi \mapsto \widetilde{X}_a(\xi,\ q,\ \alpha)$ pour $\xi \in [0,\ \pi]$ et $(\alpha,\ q) \in \{(0,\ 0.025)\,,\ (0.1,\ 0.7)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.3003\}$.

Les figures ci-dessus montrent que l'effet de cette perturbation de rang-un sur le mouvement de l'ion au travers l'analyseur ne modifie pas le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\xi,\ q,\ \alpha)$.

Dans le cas particulier $(\alpha,\ q) \in \{(0,\ 0.025)\,,\ (0.1,\ 0.7)\}$ et $a \in \{0; 0.3003\}$, nous constatons à travers la Figure 3.23 de la page 75, qu'en présence de perturbation ou pas, les régions dans lesquelles la trajectoire de l'ion est instable sur une durée π sont très grandes que celle où la trajectoire de l'ion est stable. On observe également que pour $\alpha = 0$ et $q = 0.025$, le mouvement est fortement stable seulement à $t = \pi$, lorsque l'ion est soumis à la perturbation de rang-un ; tandis qu'en absence de cette perturbation, le déplacement de cet ion connaît la présence de plusieurs points stables. Ainsi, on peut donc confirmer que la présence des effets de la perturbation dans ce cas particulier diminue la stabilité de la trajectoire de l'ion.

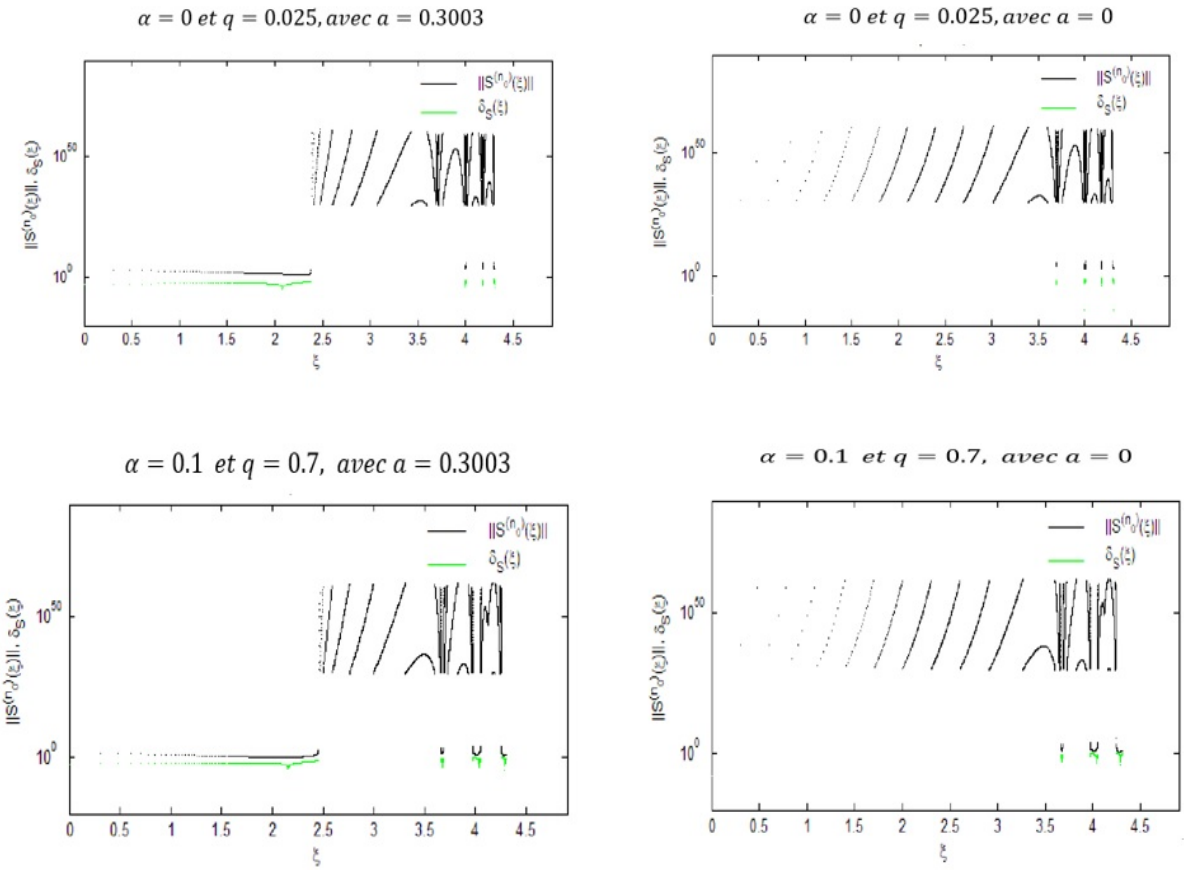

FIGURE 3.23 – Graphes de $\xi \mapsto \|S^{(n_0)}(\xi)\|$ et $\xi \mapsto \delta_S(\xi)$ pour $\xi \in [0,\ \pi]$ et $(\alpha, q) \in \{(0,\ 0.025)\,,\ (0.1,\ 0.7)\}$, avec $a \in \{0; 0.3003\}$.

Dans la Figure 3.24 de la page suivante, on trace la zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}_a(\pi,\ \alpha,\ q)$ dans le plan des paramètres $(\alpha,\ q)$. On note une petite différence entre les deux sous-figures de cette Figure.

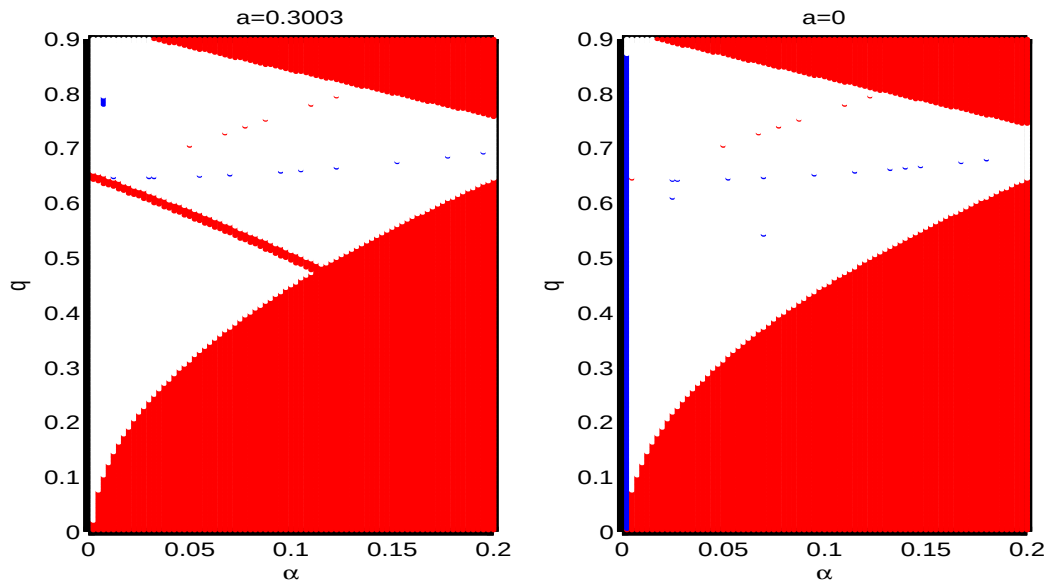

FIGURE 3.24 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(\pi, \alpha, q)$ pour $(\alpha, q) \in [0,\ 0.2] \times [0,\ 0.9]$ et $a \in \{0; 0.3003\}$.

3.3 Application à d'autres types de systèmes bien connus

Dans cette section, nous nous intéressons à d'autres types de problèmes qui ne sont pas gouvernés par les systèmes de Mathieu.

3.3.1 Pendule double avec supports fixes

On considère un pendule double constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 avec une extrémité absolument rigide de longeur l_1, et l'autre élastique de coefficient de rigidité c et d'élongation statique λ. Ces deux extrémités sont réliées entre elles en m_1, et l'extrémité du premier pendule est réliée à son autre extrémité O, considérée comme origine du repère $\left(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$. Les liaisons et les oscillations du pendule double sont supposées parfaitement faibles.

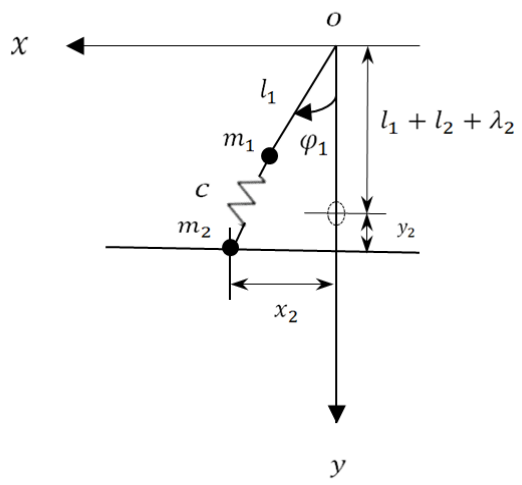

FIGURE 3.25 – Modèle du pendule double avec supports fixes.

D'après [57, Vol 2, p.474-475], l'équation du mouvement du pendule est donnée par :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + P(\tau,\ \epsilon,\ \delta)y = 0, \tag{3.26}$$

où

$$y = \begin{pmatrix} \phi \\ \xi \end{pmatrix}$$

et

$$P(\tau,\ \epsilon,\ \delta) = \begin{pmatrix} k\delta\,(1+\nu) + \nu k\epsilon\cos(\tau) + \nu\dfrac{\delta + \epsilon\cos\tau}{1+\delta+\epsilon\cos\tau} & -\sqrt{\nu}\dfrac{\delta+\epsilon\cos\tau}{1+\delta+\epsilon\cos\tau} \\ -\sqrt{\nu}\dfrac{\delta+\epsilon\cos\tau}{1+\delta+\epsilon\cos\tau} & \dfrac{\delta+\epsilon\cos\tau}{1+\delta+\epsilon\cos\tau} \end{pmatrix},$$

avec

$$\tau = \Omega t,\ \xi = \sqrt{\nu}\frac{x_2}{l_1},\ \nu = \frac{m_2}{m_1},\ k = \frac{l_2}{l_1},\ \delta = \frac{\lambda_2}{l_2} \text{ et } \epsilon = \frac{Y_2}{l_2}.$$

En faisant le changement de variables (3.4) avec $N = 2$, on obtient le système Hamiltonien à coefficients 2π-périodiques (3.3) avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix} \text{ et } H(\tau) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \epsilon,\ \delta) & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}$$

une fonction continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Pour simplifier le problème, dans tout ce qui suit, on prend :

$$m_1 = 2g,\ m_2 = 5g,\ l_1 = 0.5m,\ l_2 = 1m, \text{ et } \Omega = 1$$

et on soumet le mouvement du système à une perturbation de rang-un de la forme (3.11). Alors, l'équation du mouvement du système peut se mettre sous la forme (3.13).

Dans ce qui suit, les simulations numériques ont été faites avec $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5), (0.2,\ 0.6)\}$ et $a \in \{0;\ 0.35\}$. Comme prévu, nous pouvons visualiser sur Figure 3.26 le portrait spectral de $\widetilde{X}_a(\tau, \epsilon, \delta)$ dont la nature reste inchangée.

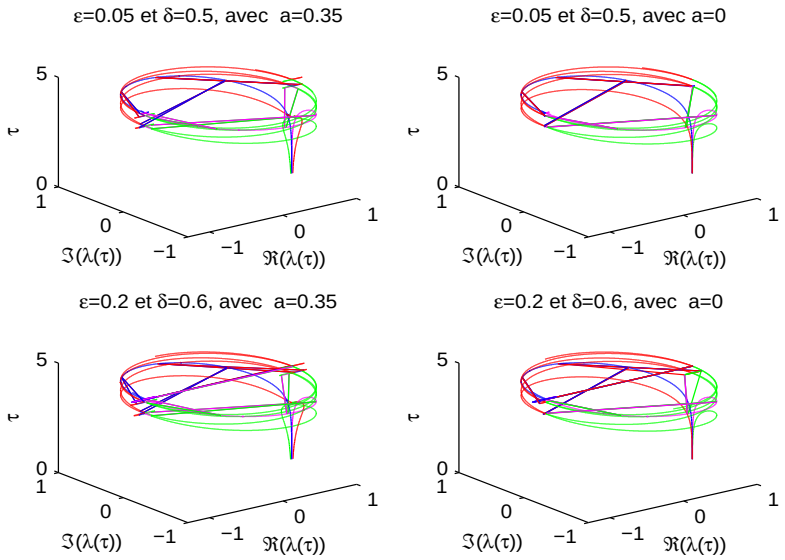

FIGURE 3.26 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \epsilon, \delta)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5), (0.2,\ 0.6)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.35\}$.

Quant à la Figure 3.27 de la page 79, elle présente la zone de stabilité(forte) de la matrice $\widetilde{X}_a(\tau, \epsilon, \delta)$ pour tout $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5), (0.2,\ 0.6)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.35\}$. En effet, dans cette zone, nous constatons que sur l'intervalle de temps $\tau \in [0,\ 2\pi]$, la présence de la perturbation de rang-un favorise plus la perte de stabilité(forte) du déplacement du pendule tandis qu'en absence de ce facteur, on note une augmentation du taux de stabilité(forte) du mouvement du système.

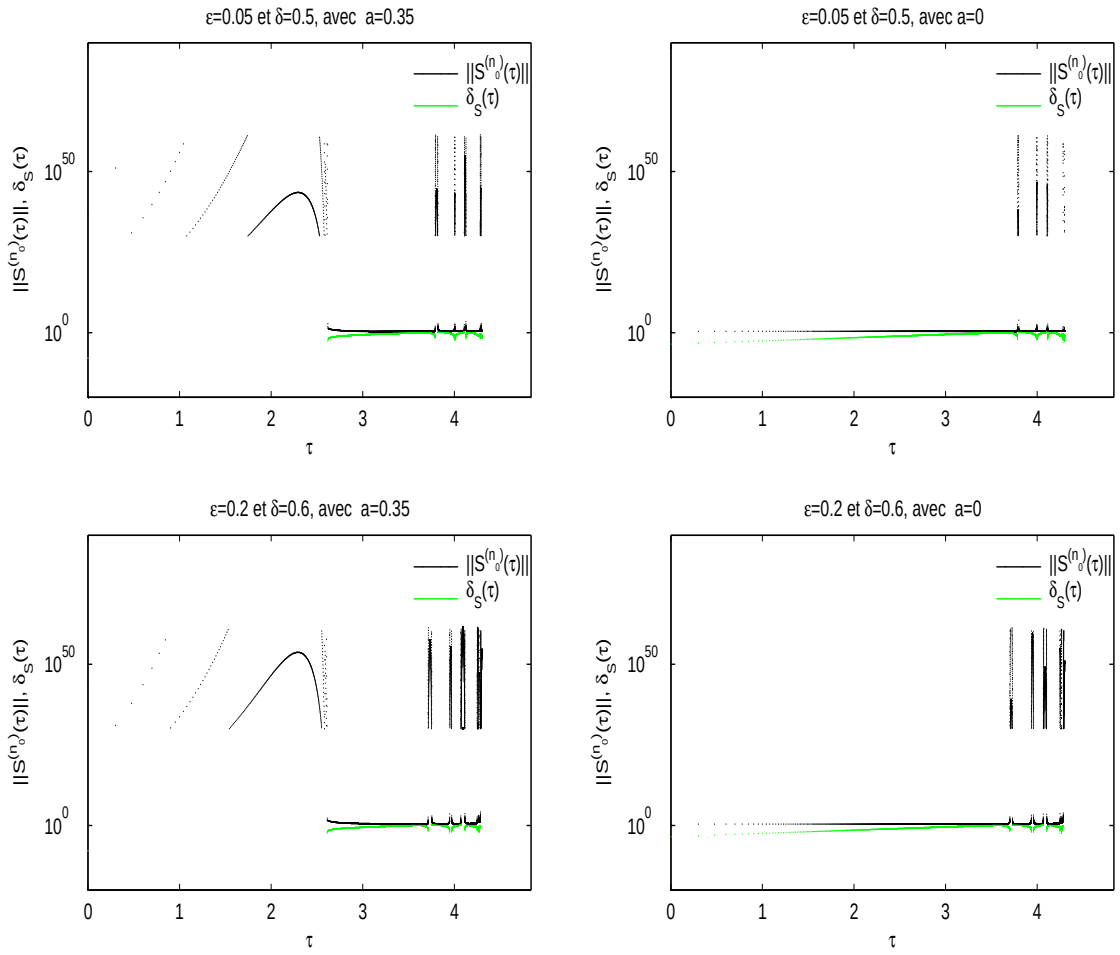

FIGURE 3.27 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{(n_0)}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\epsilon, \delta) \in \{(0.05, 0.5)\,,\ (0.2,\ 0.6)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.35\}$.

Dans la Figure 3.28 de la page suivante, on s'intérèsse à la zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi,\ \epsilon,\ \delta)$ pour $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 0.8] \times [0,\ 0.2]$ et $a \in \{0,\ 0.35\}$. Dans cette Figure, nous notons une petite différence entre les deux sous-figures.

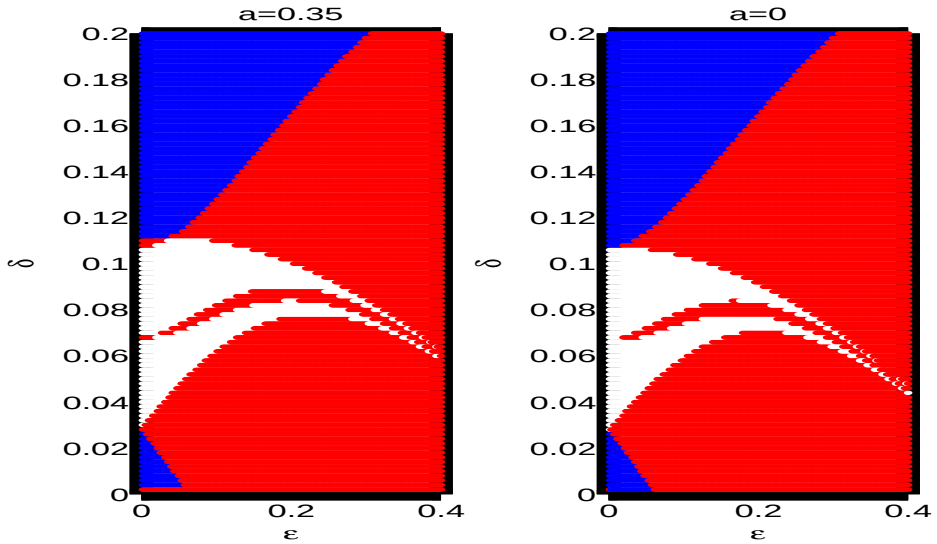

FIGURE 3.28 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi,\ \epsilon,\ \delta)$ pour $(\epsilon,\ \delta) \in [0,\ 0.4] \times [0,\ 0.2]$ et $a \in \{0,\ 0.35\}$.

3.3.2 Système dynamique mécanique

On considère un ressort vertical de constante de raideur k au bout duquel est accroché un solide (S) de masse m=1g pouvant coulisser sans frottement suivant l'axe vertical (y'Oy). Ce solide est rélié à deux fils de masses négligeables ; l'un est accroché en un point quelconque O du mur et au bout de l'autre fil est attachée une boule de masse négligeable, et protégée par deux plaques métaliques. Les deux fils sont supposés bien tendus. On exerce sur la boule une force $F_0 = \frac{lp_1\cos(t)}{1+p_1\cos(t)}$ de sorte que la force de déplacement du solide soit égale à $F_1 = \frac{lp_1\cos(t)}{1+p_1\cos(t)}y$, où y est le déplacement du dispositif suivant l'axe vertical, l est la longeur qui sépare le mur et la position initiale du solide (S) (à l'état d'équilibre), p_1 est une contante positive telle que $p_1 < 1$ et t est le temps. Pour simplifier le problème, on prendra $k = l \in [0, 1[$.

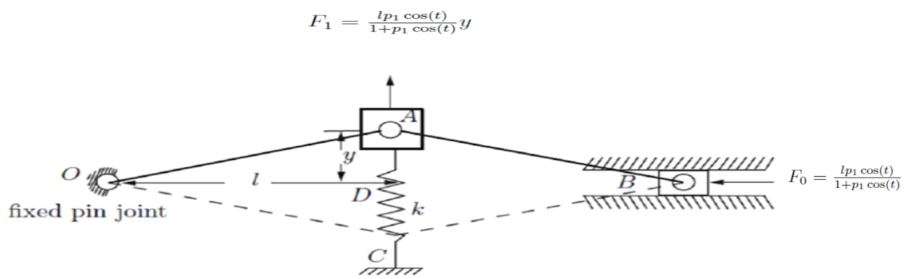

FIGURE 3.29 – Schéma d'un système dynamique mécanique.

D'après [22], en utilisant la seconde loi de Newton, il vient que le mouvement du système est gouverné par :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = F_1 \tag{3.27}$$

Comme $m = 1g$ et $F_1 = \frac{lp_1\cos(t)}{1+p_1\cos(t)}y$, (3.27) peut se réécrire comme une équation de type Carson-Cambi [51] :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{k}{1+p_1\cos(t)}\right)y = 0, \tag{3.28}$$

où $t \longmapsto \frac{k}{1+p_1\cos(t)}$ est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

En faisant ensuite le changement de variables (3.4) avec $N = 1$, on obtient le système Hamiltonien à coefficients 2π-périodiques (3.3), avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } H(t) = \begin{pmatrix} \frac{k}{1+p_1\cos(t)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Dans ce qui suit, on perturbe le mouvement du système ressort-solide par la perturbation de rang-un de la forme (3.7). Alors, en raisonnant de la même façon que le premier problème de ce chapitre, on en déduit que l'équation du mouvement en présence de cette perturbation de rang-un devient l'équation (3.8). Une étude de stabilité forte nous a permis d'obtenir les résultats suivants :

Les Figures 3.30 de la page 82 et 3.31 de la page 83 montrent respectivement le mouvement des valeurs propres de $\widetilde{X}_a(t,k,p_1)$ puis les graphes de $t \mapsto \|S^{(n_0)}(t)\|$ et $t \mapsto \delta_S(t)$ pour tout $t \in [0,\ 2\pi]$, $(k,p_1) \in \{(0.08, 0.2)\,,\ (0.25,\ 0.15)\}$ et $a \in \{0,\ 0.42\}$. Quant à la Figure 3.32 de la page 84, elle montre la zone de stabilité(forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi,k,p_1)$.

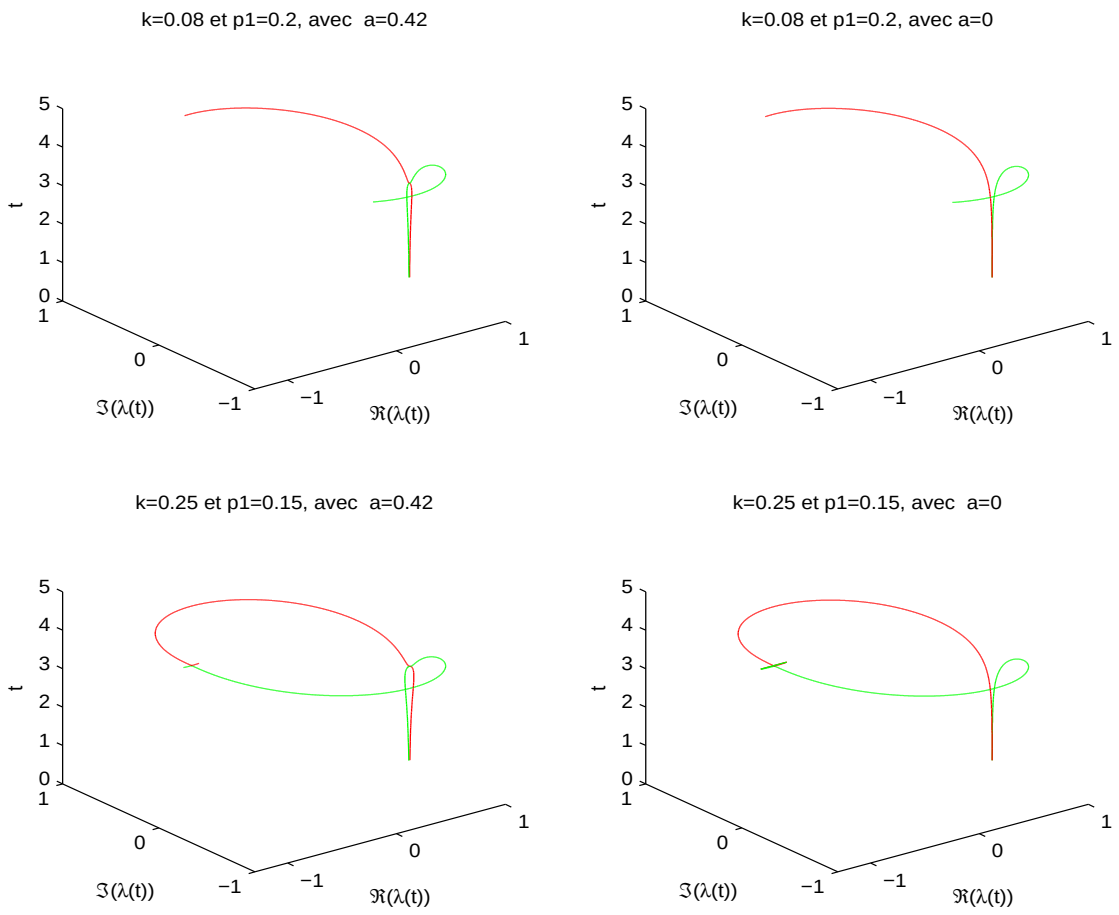

FIGURE 3.30 – Portrait spectral de $t \mapsto \widetilde{X}_a(t, k, p_1)$ pour $t \in [0,\ 2\pi]$ et $(k, p_1) \in \{(0.08, 0.2)\,,\ (0.25,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.42\}$.

Ces figures montrent que l'effet de la perturbation de rang-un sur le mouvement du système ne change pas la nature du portrait spectral.

Dans la Figure 3.31 de la page 83, nous constatons qu'en présence de perturbation, la zone instable s'élargit et la région fortement stable rétrécit. Mais, en absence de perturbation, on remarque que la zone fortement stable est grande que la zone instable. De ce fait, on peut affirmer que la présence de perturbation est un facteur provoquant plus la présence de perte de stabilité pour $t \in [0,\ 2\pi]$.

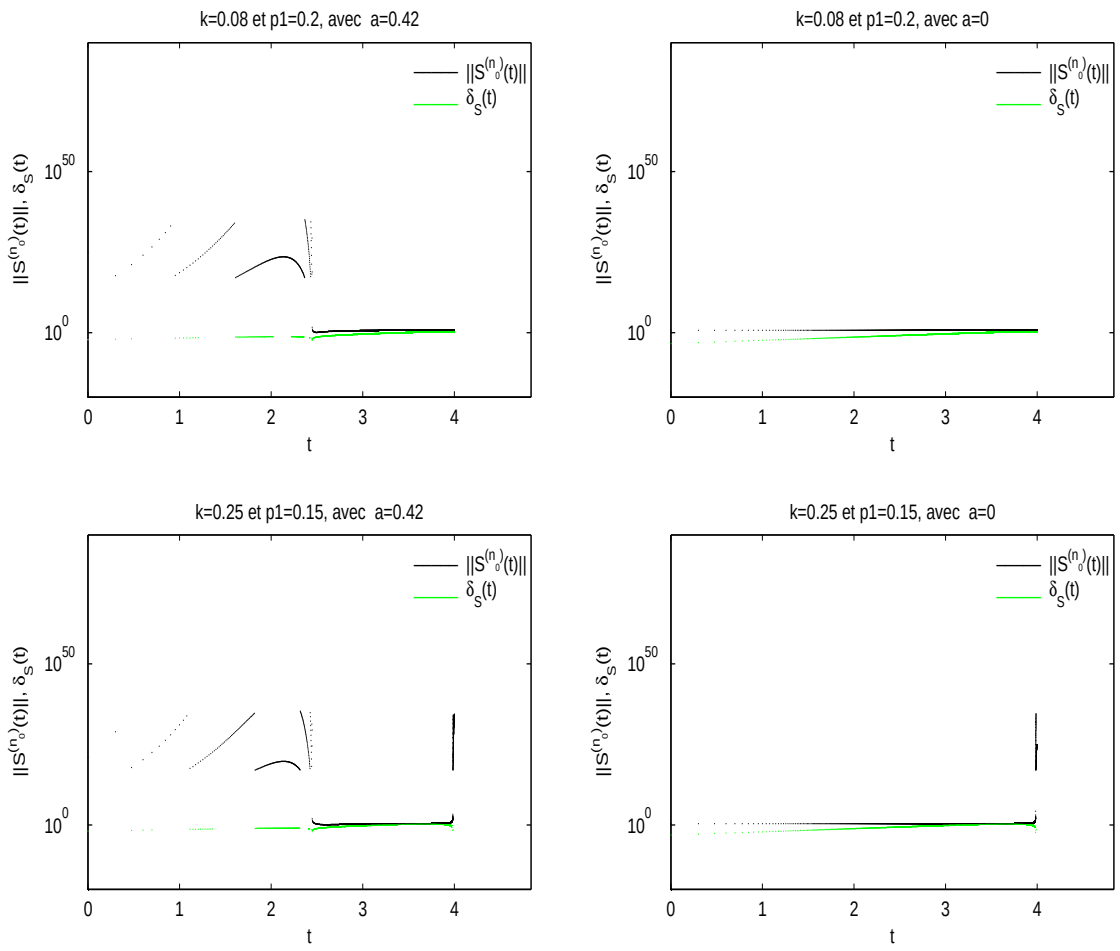

FIGURE 3.31 – Graphes de $t \mapsto \|S^{(n_0)}(t)\|$ et $t \mapsto \delta_S(t)$ pour $t \in [0,\ 2\pi]$ et $(k, p_1) \in \{(0.08, 0.2)\,,\ (0.25,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0,\ 0.42\}$.

Dans la zone de stabilité(forte) suivante, on observe une petite différence entre les deux sous-figure de la Figure 3.32 de la page 84 à cause de la présence de la perturbation de rang-un sur le mouvement du système.

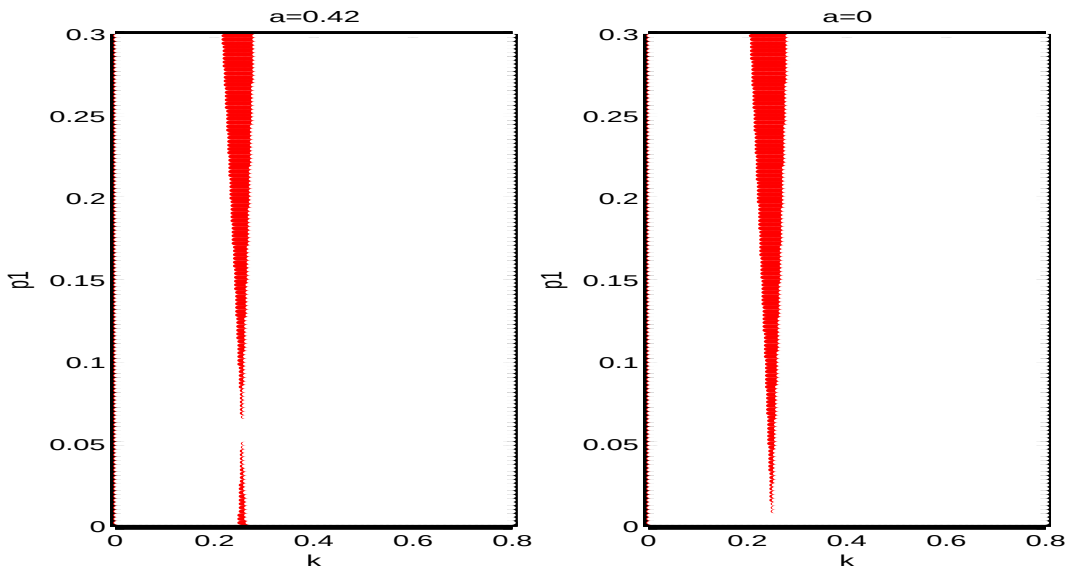

FIGURE 3.32 – Zone de stabilité (forte) de $\widetilde{X}_a(2\pi, k, p_1)$ pour $(k, p_1) \in [0,\ 0.8] \times [0,\ 0.3]$, et $a \in \{0,\ 0.42\}$.

3.3.3 Stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps

Ce problème a été déjà étudié par V.A. Yakubovich et V.M. Starzhinskii dans [57, chapitre 2, Vol.2]. Dans cette section, nous analysons l'effet de la perturbation de rang-un sur la stabilité(forte) orbitale, mais ici, on néglige dans un premier temps tous les effets gyroscopiques. Notons que nous sommes dans un cas de systèmes instables.

Trois planètres $P_1,\ P_2$, et P_3 de masse respectives $M,\ m$, et $m^{'}$ décrivent dans un plan E des éllipses d'excentricité ϵ autour du centre de gravité O pris comme point d'origine ; leur mouvement est périodique, de période 2π, pour un choix convenable de l'état initial. On désigne par $r,\ r^{'}$ et R les distances respectives $Mm,\ Mm^{'}$, et $mm^{'}$, et par $\psi,\ \varphi$, et $\varphi^{'}$ les angles respectifs formés par les différents sommets du triangle $Mmm^{'}$.

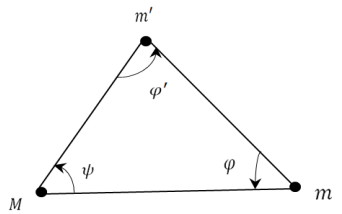

FIGURE 3.33 – Modèle du problème de trois corps.

D'après [57, Vol2, p.477-478], en abscence de forces gyroscopiques, l'équation du mouvement du système est donnée par :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + P(\tau,\ \gamma,\ \epsilon)y = 0 \tag{3.29}$$

où

$$P(\tau,\ \gamma,\ \epsilon) = \begin{bmatrix} \dfrac{3\,(1-\lambda(\gamma))}{(1+\epsilon\cos(\tau))} & 0 \\ 0 & \dfrac{-3\lambda(\gamma)}{(1-\epsilon\cos(\tau))} \end{bmatrix},$$

et la fonction $\lambda(\gamma)$ est une solution de l'équation

$$\lambda(\gamma)(1-\lambda(\gamma)) = \frac{\gamma}{4}.$$

Pour simplifier notre étude, on prendra la solution $\lambda(\gamma) = \dfrac{1+\sqrt{(1-\gamma)}}{2}$, avec $0 \leq \gamma \leq 0.2$.

En faisant ensuite le changement de variables donnée dans (3.4) avec $N = 2$, on obtient l'équation (3.3), avec

$$H(\tau,\ \gamma,\ \epsilon) = \begin{pmatrix} P(\tau,\ \gamma,\ \epsilon) & 0_2 \\ 0_2 & I_2 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $H(\tau)$ est continue par morceaux sur $[0,\ 2\pi]$.

Dans tout ce qui suit, on perturbe encore le système par une perturbation de rang-un de la forme (3.11). Dans ce cas et d'après ce qui précède, on remarque que l'équation du mouvement en présence de perturbation de rang-un est donnée par une équation de la forme (3.13). Ainsi, nous obtenons les figures suivantes :

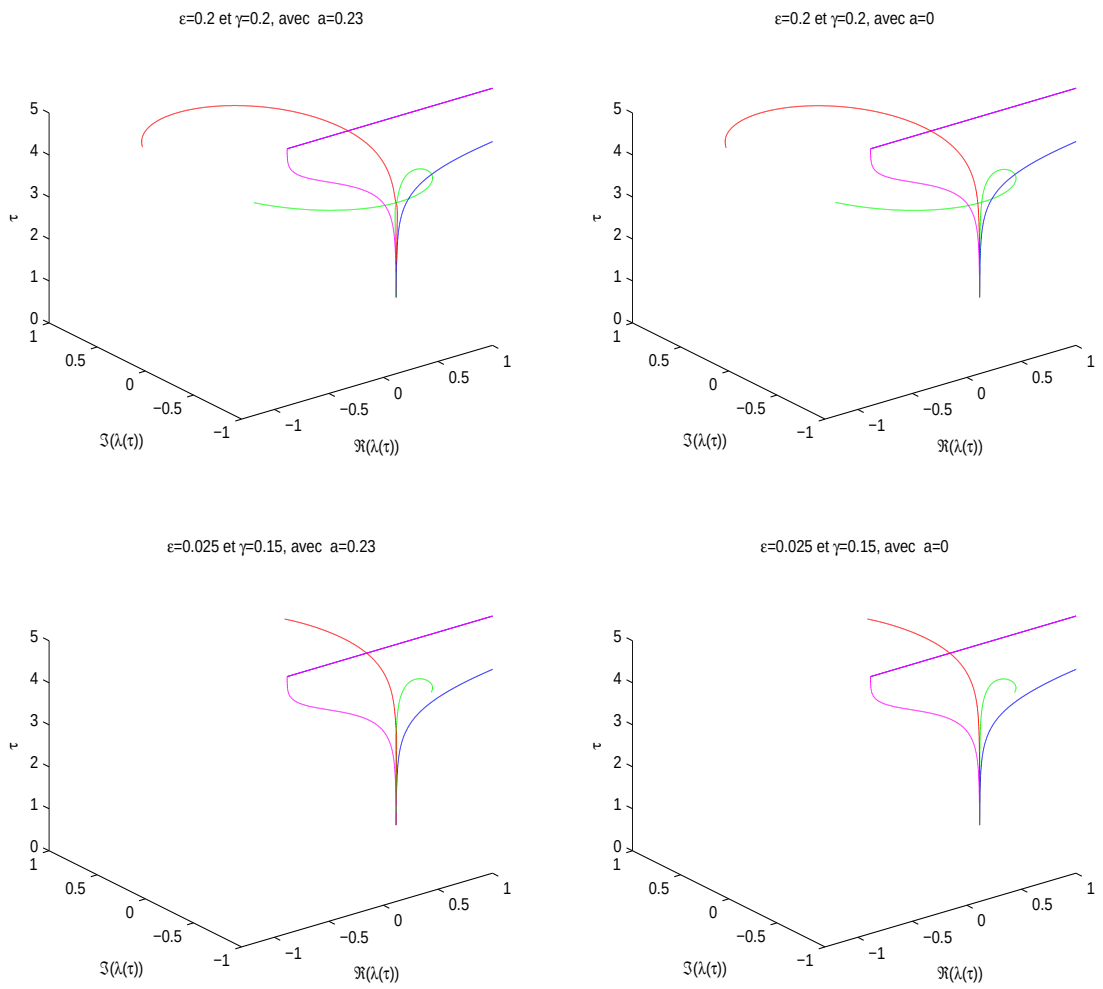

FIGURE 3.34 – Portrait spectral de $\tau \mapsto \widetilde{X}_a(\tau, \gamma, \epsilon)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\gamma, \epsilon) \in \{(0.2, 0.2)\,,\ (0.025,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0, 0.23\}$.

Dans les différents portraits spectraux de $\widetilde{X}_a(\tau, \gamma, \epsilon)$, on observe que la nature du portrait spectral ne change pas en absence ou en présence de la perturbation de rang-un.

La Figure 3.35 de la page suivante montre la zone de stabilité(forte) du mouvement du système pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$. En effet, dans cette Figure, on constate que pour $(\gamma,\ \epsilon) \in \{(0.2, 0.2)\,,\ (0.025,\ 0.15)\}$, le mouvement du système est instable bien qu'il soit soumis à l'éffet de la perturbation de rang-un ou pas.

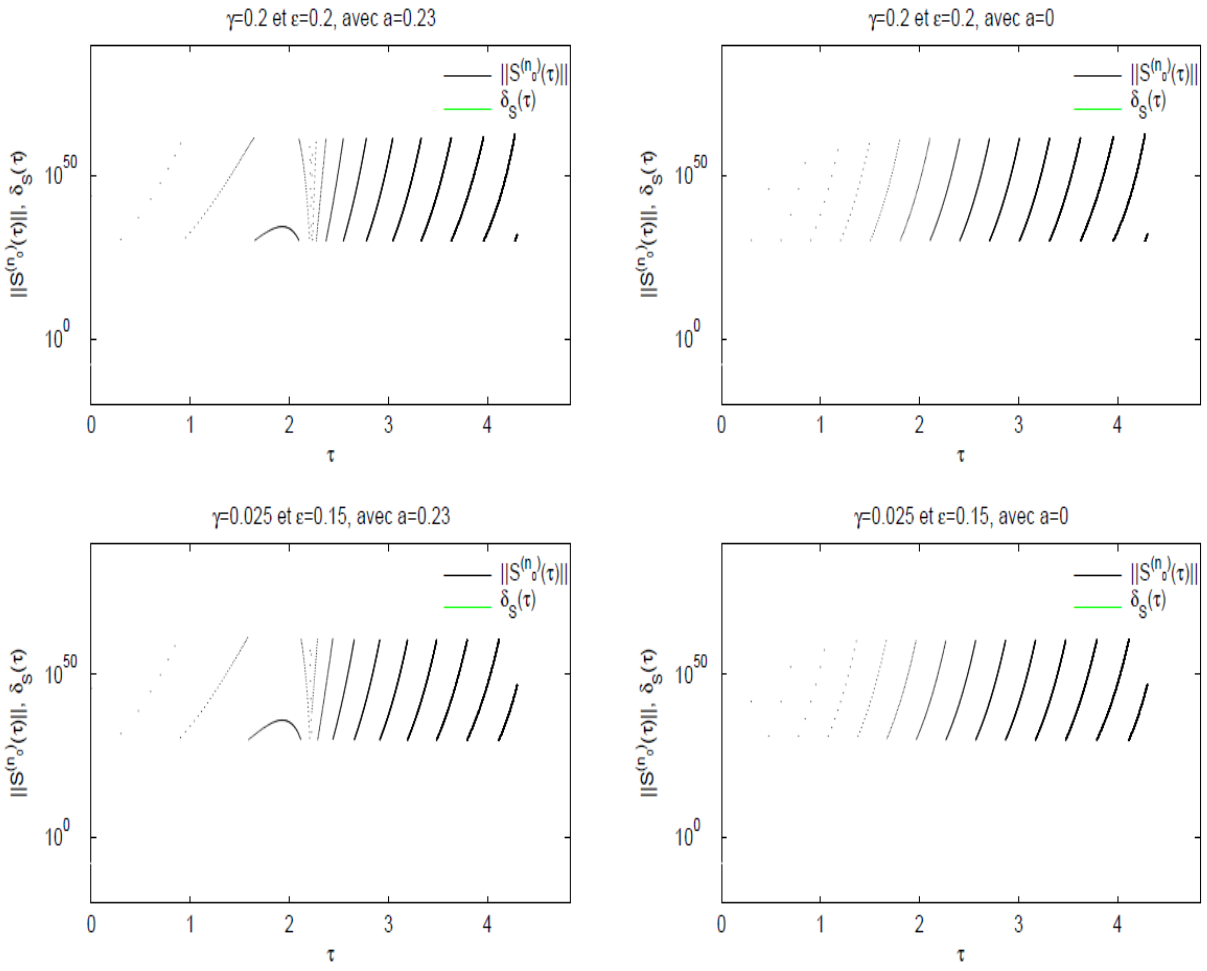

FIGURE 3.35 – Graphes de $\tau \mapsto \|S^{n_0}(\tau)\|$ et $\tau \mapsto \delta_S(\tau)$ pour $\tau \in [0,\ 2\pi]$ et $(\gamma, \epsilon) \in \{(0.2, 0.2)\,,\ (0.025,\ 0.15)\}$, avec $a \in \{0, 0.23\}$.

La Figure 3.36 de la page 88 montre l'instabilité pour $(\gamma,\ \epsilon) \in [0,\ 0.2] \times [0,\ 0.2]$. Ce qui est conforme à l'instar des figures de Figure 3.35.

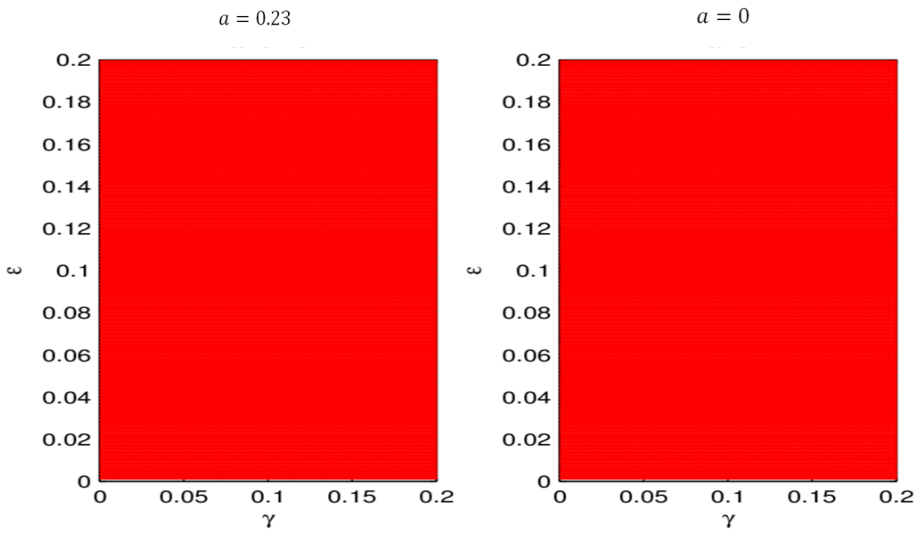

FIGURE 3.36 – Instabilité de $\widetilde{X}_a(2\pi, \gamma, \epsilon)$ pour tout $(\gamma, \epsilon) \in [0,\ 0.2] \times [0,\ 0.2]$, et $a \in \{0, 0.23\}$.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques applications de la théorie de perturbation de rang-un à des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques issus de quelques problèmes de la vie courante [5, 15, 22, 32, 34]. Pour cela, nous avons structuré le chapitre en deux parties. Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à quelques applications des systèmes différentiels de type Mathieu tels que :

- le mouvement du pendule simple avec support mobile,
- le mouvement du pendule double avec supports mobiles,
- le mouvement du pendule triple avec supports mobiles,
- le mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripolaire.

Dans la seconde partie, nous avons accordé notre intérêt à quelques problèmes qui ne sont pas gouvernés par les systèmes de Mathieu tels que :

- le mouvement du pendule double avec supports fixes,
- le mouvement d'un système dynamique mécanique,
- la stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps.

Au terme de ce travail, nous constatons qu'en général, la présence de petites perturbations de rang-un sur ces systèmes présentés n'entraine pas de grande modifications de leur mouvement et la nature de leur stabilité.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale :

Dans cette thèse, nous avons présenté une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé d'abord quelques résultats classiques sur les systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Enfin, nous avons terminé ce chapitre en donnant le travail effectué dans cette thèse.

Dans le second chapitre, nous avons présenté une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Après avoir adapté quelques résultats des travaux de Mehl et al [43] aux matrices symplectiques de fonctions, nous avons proposé une théorie de perturbation de rang-un de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques. Dans cette étude, nous avons montré premièrement que la perturbation de rang-un de la solution fondamentale $X(t)$ du système non perturbé est solution de la perturbation de rang-un de ce système. Deuxièmement, nous avons déterminé la forme canonique de Jordan de la solution $\widetilde{X}(t)$ du système perturbé de rang-un à partir de la forme en bloc de Jordan de la solution fondamentale $X(t)$ du système non perturbé. Dans cette partie, nous avons utilisé des perturbations génériques de rang-un [43, 44, 45].

Enfin, nous avons proposé une analyse de stabilité forte et de zone de stabilité(forte) de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques sous une perturbation de rang-un. Dans l'analyse de stabilité forte, nous avons utilisé l'approche définie dans [14, 17, 27] , tandis qu'avec l'analyse de zone de stabilité(forte), nous avons proposé un algorithme inspiré de [17] pour générer une zone de stabilité (forte) de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé quelques applications des systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques, notamment en physique et en mécanique[5, 15]. Le chapitre est structuré en deux parties : l'une concerne les applications des systèmes de Mathieu et l'autre celles des systèmes qui ne sont pas de type Mathieu. Dans la première partie, nous avons appliqué la perturbation de rang-un aux équations du mouvement des pendules simples, double et triple avec supports mobiles, puis à celle du mouvement d'un ion au travers d'un analyseur quadripollaire. Dans la seconde partie, nous avons également appliqué la perturbation de rang-un à quelques problèmes gouvernés par les systèmes de Hill qui ne sont pas de type

Mathieu : il s'agit du mouvement du pendule double avec supports fixes, celui d'un système dynamique mécanique gouverné par une équation de type Carson-Cambi et la stabilité(forte) orbitale dans le cas spécial d'un problème de trois corps.

A l'issue de ces analyses, nous constatons que la présence de la perturbation de rang-un sur le mouvement de ces systèmes n'entraine pas de grandes modifications de leur mouvement ainsi que leur stabilité.

Perspectives :

Comme perspectives aux travaux de cette thèse, nous comptons :

1) Analyser la notion de perturbation de rang-k ($k \geq 2$) de systèmes Hamiltoniens à coefficients périodiques.
2) Chercher à contrôler la stabilité d'un système Hamiltonien à coefficients périodiques à partir des perturbations de rang-un.
3) Appliquer cette théorie de perturbation à quelques problèmes d'optimisation.

Bibliographie

[1] V. I. Arnol'd, B. A.Dubrovin, A.Kirillov and I. M.Krichever, *Dynamical Systems IV : Symplectic geometry and its applications.* Springer Science and Business Media, 2001.

[2] V.I. Arnold, V.V. Kozlov and A.I. Neishtadt ; *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag (2e édition-1997)

[3] T. G. Y. Arouna and M. Dosso, *A structured approach to a perturbation of Hamiltonian systems with periodic coefficients.* Int J Recent Sci Res. Vol9, 2018, no 3, p.25846-25856.

[4] T. G. Y. Arouna, M. Dosso and J-C.Koua Brou, *On a perturbation theory of Hamiltonian systems with periodic coefficients. International Journal of Numerical Method and Application,* vol 17, 2018, no 2, p.47-89.

[5] T. G. Y. Arouna, M. Dosso and J-C.Koua Brou, *Application of a rank-one perturbation to pendulum systems. Journal of Mathematics Research,* vol 12, 2020, no 5, p.47-66.

[6] L. Batzke. *Generic rank-one perturbations of structured regular matrix pencils.* Linear Algebra and its Applications, 2014, vol. 458, p. 638-670.

[7] L. Batzke, C. Mehl, A. C. Ran and L.Rodman, *Generic rank-k perturbations of structured matrices.* In Operator Theory, Function Spaces, and Applications Birkhäuser, Cham. 2016. p. 27-48.

[8] P. Benner, V. Mehrmann and H. Xu, *A numerically stable, structure preserving method for computing the eigenvalues of real Hamiltonian or symplectic pencils.* Numerische Mathematik, vol. 78, 1998, no 3, p. 329-358.

[9] P. Benner, M. BollhRofer, D. Kressner, C. Mehl and T. Stykel, *Numerical Algebra, Matrix Theory, Differential-Algebraic Equations and Control Theory.* Springer International Publishing Switzerland 2015.

[10] J. Bill, Linear Algebra[M]. New York : W H Freeman and Company, 1990.

[11] C. Brezinski, Computational Aspects of Linear Control, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[12] C. I. Byrnes, N. D. Biswa , and F. M. Clyde, *Systems and Control in the Twenty-first Century.* Vol. 22. Springer Science and Business Media, 2013.

[13] F. M. Dopico and C. R. Johson, *Complementary bases in symplectic matrices and a proof that their determinant is one. Linear Algebra and Its Applications,* vol. 419, 2006, no 2-3, p. 772-778.

[14] M. Dosso, *Sur quelques algorithms d'analyse de stabilité forte de matrices symplectiques*, PHD Thesis (September 2006), Université de Bretagne Occidentale. Ecole Doctorale SMIS, Laboratoire de Mathématiques, UFR Sciences et Techniques.

[15] M. Dosso and T. G. Y. Arouna and J. C. Koua. Brou, *Rank-k perturbation of Hamiltonian systems with periodic coefficients and applications*. European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 12, 2019, no 4, p. 1744-1770.

[16] M. Dosso, T. G. Y. Arouna and J. C. Koua. Brou, *On rank one perturbations of Hamiltonian system with periodic coefficients.* Wseas Translations on Mathematics. Volume 17, 2018, P. 502-510.

[17] M. Dosso and M. Sadkane. *On the strong stability of symplectic matrices.* Numerical Linear Algebra with Applications, vol. 20, 2013, no 2, p. 234-249.

[18] M. Dosso and M. Sadkane, *A spectral trichotomy method for symplectic matrices*, Numerical Algorithms, vol. 52, 2009, no 2, p. 187-212.

[19] M. Dosso and N. Coulibaly, *An analysis of the behavior of multipliers of Hamiltonian system with periodic coefficients.* Far East Journal of Mathematical Sciences. Vol. 99, 2016, no 3, Pages 301-322.

[20] M. Dosso and N. Coulibaly, *Symplectic matrices and strong stability of Hamiltonian systems with periodic coefficients.* Journal of Mathematical Sciences : Advances and Applications. Vol. 28, 2014, pp 15-38.

[21] M. Dosso, N. Coulibaly and L. Samassi, Strong stability of symplectic matrices using a spectral dichotomy method, Far East Journal Applied Mathematics. Vol. 79, No 2, 2013, pp 73-110.

[22] T. I. Fossen and Henk Nijmeijer, *Parametric Resonance in Dynamical Systems.* Springer Science and Business Media, 2011.

[23] G. Gene H and C.F. Van Loan. *Matrix computations.* Vol. 3. JHU Press, 2012.

[24] S. K. Godunov, *Verification of the boundedness for the powers of symplectic matrices with the help of averaging*, Siberian Mathematical Journal, vol. 33, 1992, no 6, p. 939-949.

[25] S. K. Godunov, *Stability of iterations of symplectic transformations*, Siberian Mathematical Journal, vol. 30, 1989, no 1, p. 54-63.

[26] S. K. Godunov and M. Sadkane, *Numerical determination of a canonical form of a symplectic matrix*, Siberian Mathematical Journal, vol. 42, 2001, no 4, p. 629-647.

[27] S. K. Godunov and M. Sadkane, *Spectral analysis of symplectic matrices with application to the theory of parametric resonance*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 28, 2006, no 4, p. 1083-1096.

[28] S. K. Godunov, *Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient.* American Mathematical Soc, 1997.

[29] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman. Indefinite Linear Algebra and Applications. Birkhãuser, Basel, 2005.

[30] B. Hassibi, A. H. Sayed and T. Kailath, *Indefinite-Quadratic Estimation and Control,* SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[31] E. J. Hinch ; Perturbation Methods, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press (1991), (ISBN 0521378974).

[32] E. Hoffmann and V. Stroobant, *Mass spectrometry. Principles and applications,* 3rd Edition, September 2007.

[33] R. A. Horn and C.R. Johnson *Matrix analysis.* Cambridge university press, New York 37 (1985).

[34] C. S. Hsu, *On a Restricted Class of Coupled Hill's Equations and Some Applications,* Journal of Applied Mechanics, vol. 28, 1961, no 4, p. 551-556.

[35] M. Lalanne, P. Berthier and J. Der Hagopian, *Mechanical vibrations for engineers*(1984).

[36] P. Lancaster and L. Rodman. The Algebraic Riccati Equation. Oxford University Press, Oxford, 1995.

[37] P. S. Laplace ; Traité de mécanique céleste, Editions Jacques Gabay (1990)

[38] Anders Lindstedt ; *Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problème des trois corps*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences 97 (1883)

[39] A. Malyshev, M. Sadkane and A. Salam. *A subspace iteration for symplectic matrices.* Electrinic Transaction on Numerical Analysis. Vol. 43, 2015, pp. 213-222.

[40] E. Mathieu. *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique.* Journal des Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 13, 1868, p. 137-203.

[41] M. R. Matthews, *Time for science education : How teaching the history and philosophy of pendulum motion can contribute to science literacy.* Springer Science and Business Media, 2000.

[42] A. H. Nayfeh ; Introduction to Perturbation Techniques, John Wiley and Sons (New York-1981), (ISBN 0-471-31013-1).

[43] C. Mehl, V. Mehrmann, A. C. M. Ran and L. Rodman. *Eigenvalues Perturbation theory of structured matrices under generic structured rank one perturbations ; Symplectic, othogonal and unitary matrices.* BIT Numer. Math, vol. 54, 2014, p. 219-255.

[44] C. Mehl, V. Mehrmann, A. C. M. Ran, et al. *Perturbation theory of selfadjoint matrices and sign characteristics under generic structured rank one perturbations.* Linear algebra and its applications, 2012, vol. 436, no 10, p. 4027-4042.

[45] C. Mehl, V. Mehrmann, A. C. M. Ran, et al. *Eigenvalue perturbation theory of classes of structured matrices under generic structured rank one perturbations.* Linear algebra and its applications, 2011, vol. 435, no 3, p. 687-716.

[46] Henri Poincaré ; *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars (1892).

[47] Henri Poincaré ; *Sur l'application de la méthode de M. Lindstedt au problème des trois corps*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences 114 (1892) 1305-1309.

[48] H. Poincaré ; Leçons de mécanique céleste, 3 tomes, (1905-1910)

[49] Y. Saad, *Numerical methods for large eigenvalue problems.* SIAM, 2nd ed., 2011.

[50] A. Schrijver, *Theory of linear and integer programming.* John Wiley and Sons, 1998.

[51] A. P. Seyranian and A. A. Mailybaev, *Multiparameter stability theory with mechanical applications.* World Scientific, 2003.

[52] G. W. Stewart and J. G. Sun, *Matrix Perturbation Theory,* Academic Press, San Diego, CA (1990).

[53] G. W. Stewart, *Introduction to matrix computation.* Accademic press, New York, 1973.

[54] G. W. Stewart, *Matrix Algorithms : Basic Decompositions (Volume 1).* Society for Industrial and Applied Math 4.1 (1998).

[55] S. P. Timoshenko, D. H. Young and W. Weaver, *Vibrations problems in engineering*, Wiley (1974).

[56] F. F. Tisserand ; Traité de mécanique céleste, Editions Jacques Gabay (1990).

[57] V.A. Yakubovich and V.M. Starzhinskii, Linear differential equations with periodic coefficients, Vol. 1 & 2., Wiley, New York (1975).

[58] Yan Qing-You, *The properties of a kind of random symplectic matrices*, Applied mathematics and Mechanics, vol. 23, 2002, no 5, p. 590-596.

Annexe A

Sur quelques méthodes de factorisation de matrices

Dans cette annexe, nous présentons une méthode de factorisation de matrices Hamiltoniennes introduite par L. Batzke et al dans [7].

Lemme A.1 *Soient $H^* = H \in \mathbb{F}^{N\times N}$ une matrice inversible et $A \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ une matrice de rang-k. Si N est paire, soit aussi $J \in \mathbb{F}^{2N\times 2N}$ une matrice anti-symétrique et inversible.*

1) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $* = \star$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $* = T$ et si $A^*H = HA$, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{F}^{2N\times k}$ de rang-k et une matrice diagonale $\Sigma = (s_1, ..., s_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, où $s_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1, ..., k$ telle que*

$$A = U\Sigma U^T H.$$

2) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $* = T$ et A est H-symétrique, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{C}^{2N\times k}$ de rang-k telle que*

$$A = UU^T H.$$

3) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et A est J-Hamiltonienne, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{R}^{2N\times k}$ de rang k et une matrice diagonale $\Sigma = (s_1, ..., s_k) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, où $s_j \in \{\pm 1\}$, $j = 1, ..., k$ telle que*

$$A = U\Sigma U^T J.$$

4) *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et A est J-Hamiltonienne, alors il existe une matrice $U \in \mathbb{C}^{2N\times k}$ de rang k telle que*

$$A = UU^* J.$$