



HAL
open science

Dynamique des zones radiatives stellaires en rotation différentielle

Bastien Gouhier

► **To cite this version:**

Bastien Gouhier. Dynamique des zones radiatives stellaires en rotation différentielle. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2022. Français. NNT : 2022TOU30025 . tel-03715323

HAL Id: tel-03715323

<https://theses.hal.science/tel-03715323v1>

Submitted on 6 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 19/01/2022 par :

Bastien GOUHIER

Dynamique des zones radiatives stellaires en rotation différentielle

JURY

ANA PALACIOS
PASCALE GARAUD

JÉRÔME GUILLET

SÉBASTIEN DEHEUVELS

LAURÈNE JOUVE

FRANÇOIS LIGNIÈRES

Astronome

Full Professor

Ingénieur-Chercheur

Maître de Conférences

Maîtresse de Conférences

Directeur de Recherche

Présidente du Jury

Rapportrice

Rapporteur

Examineur

Directrice de thèse

Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

Laurène JOUVE et François LIGNIÈRES

Rapporteurs :

Pascale GARAUD et Jérôme GUILLET

REMERCIEMENTS

Ainsi s'achèvent trois années passées à découvrir, explorer et étudier un sujet aussi vaste que passionnant, combinant à la fois dynamique des fluides et physique stellaire. Ce travail de recherche n'aurait naturellement jamais pu être aussi abouti sans la supervision de mes deux directeurs de thèse. Aussi, je tiens à les remercier en tout premier lieu. Je vous suis reconnaissant de m'avoir fait confiance en acceptant de m'embarquer dans cette aventure, moi qui venais d'un univers différent de par ma formation de dynamique des fluides, mais pourtant pas si éloigné puisqu'il s'agit d'un domaine que vous côtoyez régulièrement. Au cours de ces trois années passées à vos côtés, j'ai pu remarquer que vos connaissances vont bien souvent au-delà même du domaine de l'astrophysique. Cette ouverture d'esprit, votre regard critique et votre rigueur scientifique sont des qualités que j'ai grandement appréciées. Je vous remercie également pour votre patience (je suis sûr qu'il vous en a fallu avec moi) et pour la liberté que vous m'avez accordée dans mes choix de recherche. La rédaction de ce manuscrit fut une période éprouvante en raison de mes insomnies chroniques. Vous avez su être compréhensifs et présents même lorsque cela prenait sur votre temps personnel. Alors pour toutes ces choses : merci.

Je remercie également mes rapporteurs, Pascale Garaud et Jérôme Guilet, d'avoir accepté de relire ce manuscrit. Il est amusant de constater que j'ai débuté cette thèse en assistant à vos cours durant l'école Evry Schatzman qui s'est tenue à Roscoff, et que celle-ci se termine à vos côtés en tant que rapporteur. C'est un honneur de vous avoir dans mon jury et je vous remercie pour vos commentaires bienveillants qui ne feront qu'améliorer le présent manuscrit. J'ai pu constater que rien n'échappait à l'œil aguerré de Jérôme, pas même un mot manquant ou un problème d'indice. Je tiens également à remercier Pascale de ne pas m'avoir tenu rigueur d'avoir oublié de citer certains de ces travaux et lui prie de m'excuser pour cette fâcheuse omission. Merci également à Ana Palacios et à Sébastien Deheuvels d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Sébastien, outre le fait que tu aies également accepté de faire partie de mon comité de thèse et d'avoir été mon tuteur pour l'enseignement à l'université (ça en fait des choses), je te remercie d'avoir toujours pris le temps de partager avec moi ton expertise sur les sous-géantes et de m'avoir communiqué des profils d'évolution stellaire lorsque ceux-ci m'étaient nécessaires.

Bon nombre de personnes ont contribué à cette thèse sans même s'en rendre compte et à présent, il convient de les remercier comme il se doit. Frédérique Saïd, sans toi je n'en serai pas là aujourd'hui. Depuis ma première année universitaire où je t'ai eu en tant qu'enseignante de mathématiques, tu m'as soutenu dans des périodes difficiles de ma vie. Ton implication auprès des étudiants va bien au-delà de ton travail d'enseignante et est admirable. J'espère sincèrement que tes élèves ont conscience de la chance qu'ils ont d'avoir une enseignante comme toi, à la fois profondément investie et passionnée par son métier. Je suis heureux de t'avoir revue après

toutes ces années dans le cadre de mes missions d'enseignement. Je souhaite aussi remercier Francis Auclair. Bien que tu ne répondes que rarement à tes mails, c'est toi qui m'a communiqué le goût de la dynamique des fluides durant ma première année de master. Nul doute que tu fais partie de ces rares enseignants qui savent transmettre une passion et dont on a aucune envie de louper le cours. Je tiens également à remercier Laurent Lacaze et Raphaël Maurin qui m'ont permis de faire mes premiers pas dans le monde de la recherche. Les deux mois passés à l'IMFT en votre compagnie m'ont été particulièrement agréables (la bonne humeur de Raphaël n'y est sans doute pas pour rien). Toujours au sein de l'IMFT, je remercie Pierre Brancher et Christophe Airiau de m'avoir encadré durant six mois sur un sujet passionnant (mes premiers "vrais" pas dans la recherche). Vous avez été des maîtres de stage exemplaires, tant sur le plan scientifique qu'humain, et votre rigueur scientifique m'a beaucoup apporté. Enfin, merci à Geneviève Soucaïl qui depuis mon audition pour mon contrat doctoral a toujours su être disponible afin de répondre aux questions que je pouvais me poser en tant que doctorant.

Au cours de mes deux premières années de thèse j'ai eu la chance d'enseigner à l'université. C'est une expérience inoubliable que j'ai réellement appréciée et qui s'est révélée particulièrement enrichissante. Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à cette aventure. Je pense à Marie Brut qui m'a confié mes premiers TDs d'optique géométrique, à Frank Roux dont la gentillesse n'a aucune limite, Frédérique Saïd (même si je t'ai déjà remerciée, cette expérience à tes côtés était particulièrement agréable), Sylvain Coquillat, Corinne Jambert, Patrick Benzo (les heures de TPs en ta compagnie étaient tout simplement géniales), Doug Marshall, Mai Dinh et bien sûr aux élèves que j'ai pu avoir, premiers acteurs de cette expérience et dont la passion pour la physique est pour certains déjà bien présente.

Avant de terminer, je tiens à remercier ma mère pour son soutien et son amour sans faille. Merci également à mon père, mon grand-père et ma grand-mère. Chaque jour vous continuez de vivre dans mon cœur.

Je conclurai ces remerciements avec toi Claire, toi qui dans la vie de tous les jours comme dans ton métier est présente pour les autres sans ne jamais rien attendre en retour, toi qui fais les choses avec humilité (une qualité bien rare dans un monde où l'on cultive la compétition) au risque de t'effacer. Huit ans et quatre mois que tu partages ma vie. Ton soutien inconditionnel tout comme ta présence à mes côtés ont été salvateurs. Je n'exposerai pas ici tout ce que l'on a traversé ensemble car la pudeur est une vertu et qu'un jardin secret doit le rester. Sache néanmoins que je te remercie du fond du cœur pour tout ce que tu as fait pour moi. Merci d'avoir été présente durant ces trois années de thèse, de mes moments de démotivation et de doute à la relecture minutieuse de ce manuscrit. Merci de m'avoir fait voir que l'essentiel était ailleurs et qu'un verre à moitié vide est en réalité à moitié plein. À nos courses de montagne interminables empreintes de beauté, à nos baignades et nos sorties VTT improvisées, à la nature devant laquelle nous continuerons de nous émerveiller, je te dédie cette thèse.

Les étoiles expérimentent des phases de contraction et/ou d'expansion à différentes étapes de leur existence. Les mesures sismiques de la rotation interne ont montré la nécessité d'améliorer la description physique des processus de transport du moment cinétique et des éléments chimiques durant ces phases d'évolution rapide. Par ailleurs, les relevés spectropolarimétriques indiquent une dichotomie champs forts/champs faibles parmi les étoiles de masse intermédiaire. Comprendre comment ces champs interagissent avec la rotation différentielle forcée par la contraction peut nous aider à élucider l'origine du magnétisme de ces étoiles.

L'objectif de cette thèse est de progresser sur la question du transport du moment cinétique induit par la contraction d'une zone radiative stellaire magnétisée, ou non. À cette fin, nous réalisons des simulations axisymétriques (magnéto)hydrodynamiques d'une couche sphérique d'un fluide stablement stratifié en rotation et en contraction, possédant, ou non, un champ magnétique à grande échelle. La contraction est modélisée par un flux de masse radial stationnaire et les simulations sont effectuées dans les approximations de Boussinesq et anélastique. Une étude paramétrique étendue est menée afin de couvrir les différents régimes de rotation, contraction, stratification stable et champ magnétique, appropriés dans les étoiles considérées.

En l'absence de champ magnétique, nous déterminons deux régimes pertinents : le régime d'Eddington-Sweet, dans lequel la circulation méridienne domine le transport de moment cinétique, et le régime visqueux où la viscosité joue un rôle prépondérant. Le régime d'Eddington-Sweet, pertinent pour les étoiles de la pré-séquence principale et dans les sous-géantes en dehors de leur cœur dégénéré, aboutit naturellement à une rotation différentielle à la fois en rayon et en latitude. Le régime visqueux, correspondant au cœur dégénéré des sous-géantes, conduit quant à lui à un profil de rotation à symétrie sphérique. Dans les deux cas, nous obtenons une loi d'échelle qui permet d'estimer l'amplitude de la rotation différentielle. Lorsqu'un champ magnétique est imposé, l'écoulement est caractérisé par deux régions magnétiquement découplées. Dans l'une d'elles la tension magnétique impose une rotation solide alors que dans l'autre, que l'on appelle la zone morte, la force de Lorentz devient passive et une rotation différentielle existe. Dans certains cas, nous montrons que le cisaillement en latitude présent dans les zones mortes déclenche une puissante instabilité axisymétrique capable de détruire la structure à grande échelle du champ magnétique et d'entraîner une reconfiguration de l'écoulement. Nous proposons que ceci puisse potentiellement expliquer l'évolution rotationnelle des sous-géantes ainsi que la dichotomie observée entre champ forts/champ faibles des étoiles de masse intermédiaire.

ABSTRACT

Stars experience contraction and/or expansion phases at different stages of their existence. Seismic measurements of internal rotation have shown the need to improve the physical description of transport processes of angular momentum and chemical elements during these rapid phases of evolution. In addition, spectropolarimetric surveys suggest a strong-fields/weak-fields dichotomy among the intermediate-mass stars. Understanding how these fields interact with the differential rotation forced by the contraction could help us to address the origin of the magnetism of these stars.

This thesis aims at making progress on the issue of the angular momentum transport induced by the contraction of a magnetised, or non-magnetised, stellar radiative zone. For this purpose, we perform axisymmetric (magneto)hydrodynamical simulations of a stably stratified rotating spherical layer undergoing contraction, having or not, a large-scale magnetic field. Contraction is modelled by a steady radial mass flux and simulations are carried out in the Boussinesq and anelastic approximations. An extensive parametric study is conducted to cover the different regimes of rotation, contraction, stable stratification and magnetic field that are appropriate for stars.

In the absence of magnetic field, we determine two relevant regimes: the Eddington-Sweet regime in which the meridional circulation dominates the angular momentum transport, and the viscous regime where the viscosity plays a leading role. The Eddington-Sweet regime, relevant for pre-main sequence stars and outside the degenerate core of subgiants, naturally results in a differential rotation, both in latitude and radius. The viscous regime, relevant in the degenerate core of subgiants, leads to a spherically symmetric rotation profile. In both cases, we derive a scaling law which enables us to estimate the amplitude of the differential rotation. When a magnetic field is applied, the flow is characterised by the presence of two magnetically decoupled regions. In one of them, magnetic tension imposes solid-body rotation while in the other, called the dead zone, the Lorentz force becomes negligible and a differential rotation exists. In some cases, we show that the latitudinal shear built in the dead zones triggers a powerful axisymmetric instability able to destroy the large-scale structure of the magnetic field and to result in a flow reconfiguration. We propose that this could potentially explain the rotational evolution of subgiants as well as the observed dichotomy between strong-fields/weak-fields of intermediate-mass stars.

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Sommaire	xi
Introduction	1
1 Contexte astrophysique	5
1.1 Contraction des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire au fil de l'évolution stellaire	6
1.2 Pré-séquence principale	9
1.2.1 Évolution rotationnelle des T Tauri	9
1.2.2 Rotation et magnétisme des étoiles de Herbig Ae/Be	11
1.3 Étoiles de faible masse de la post-séquence principale	15
1.3.1 Rotation interne des sous-géantes et des géantes rouges	15
1.3.2 Quelques indices en faveur de la présence d'un champ magnétique	18
1.4 Modélisation du transport du moment cinétique et comparaison aux données	19
1.4.1 Mélange rotationnel : circulation méridienne et instabilités hydrodynamiques	19
1.4.2 Champ magnétique	20
1.4.3 Ondes de gravité internes et modes mixtes	21
1.4.4 Modèles incluant une viscosité effective	22
2 Transport du moment cinétique, instabilités et couches limites : <i>physique des écoulements axisymétriques dans une zone radiative stellaire</i>	25
2.1 Transport axisymétrique du moment cinétique	26
2.1.1 Circulation méridienne d'Eddington-Sweet	27
2.1.1.1 Un bref historique	27
2.1.1.2 Temps caractéristique de transport du moment cinétique	29
2.1.2 Ondes d'Alfvén	31
2.1.2.1 L'origine de ces ondes hydromagnétiques	32
2.1.2.2 Effet Ω et loi d'isorotation de Ferraro	34

2.1.2.3	Mélange de phase	36
2.1.2.4	Zone morte	38
2.2	Instabilités axisymétriques dans une zone radiative	40
2.2.1	Instabilités hydrodynamiques	41
2.2.1.1	Instabilité centrifuge	41
2.2.1.2	Instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke	44
2.2.2	Instabilités magnétohydrodynamiques	46
2.2.2.1	Instabilité magnétorotationnelle standard	46
2.2.2.2	Instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale	50
2.3	Couches limites (magnéto)hydrodynamiques	54
2.3.1	Couche d'Ekman	55
2.3.2	Couches de Stewartson	61
2.3.3	Couche de Hartmann	64
2.3.4	Couche de Shercliff	66
3	Étude magnétohydrodynamique d'une zone radiative en contraction	69
3.1	Modélisation d'une zone radiative en contraction	70
3.2	Équations gouvernant la dynamique de l'écoulement	73
3.3	Différents régimes de transport du moment cinétique	79
3.4	Principaux résultats	86
3.4.1	Le cas hydrodynamique	86
3.4.1.1	Régime d'Eddington-Sweet linéaire	86
3.4.1.2	Régime d'Eddington-Sweet non-linéaire	92
3.4.1.3	Un régime de forte stratification stable : le régime visqueux	93
3.4.2	Le cas magnétohydrodynamique	95
3.4.2.1	Effet typique d'un champ magnétique de grande échelle	96
3.4.2.2	Instabilité magnétorotationnelle : vers un scénario expliquant la rotation des sous-géantes.	101
3.5	Résumé de l'étude axisymétrique	106
	Conclusion et perspectives	109
	Annexes	119
	A Le code MagIC	121
	B État hydrostatique induit par la contraction	129
	C Description analytique des couches limites	135
C.1	Couche d'Ekman	135
C.2	Couche de Hartmann	137
	D Solutions analytiques de la rotation différentielle	139
D.1	Rotation différentielle maximale	139
D.2	Rotation différentielle dans le cas hydrodynamique	140
D.2.1	Régime de Taylor-Proudman	140
D.2.2	Particularité du régime d'Eddington-Sweet	143
D.2.3	Régime Visqueux	145
D.2.3.1	Cas Boussinesq	145

D.2.3.2	Cas anélastique	148
D.3	Rotation différentielle dans les zones mortes en régime visqueux	149
D.3.1	Pas d'effet de la contraction sur les lignes de champ	149
D.3.2	Effet de la contraction sur les lignes de champ	155
Bibliographie		172
Table des figures		182
Liste des tableaux		183
Publications		185

INTRODUCTION

La rotation est un mécanisme fondamental de l'évolution stellaire. Elle engendre un transport de moment cinétique et d'éléments chimiques qui modifie l'évolution de l'étoile. Pourtant, elle fut initialement considérée comme un effet de second ordre dans les modèles d'évolution standards dans lesquels les zones radiatives étaient traitées comme des régions au repos. Même si on savait depuis [Von Zeipel \(1924\)](#) qu'il n'existait pas de solution stationnaire d'une étoile en rotation uniforme, il faudra attendre les travaux de [Zahn \(1992\)](#) pour avoir un modèle auto-cohérent du transport du moment cinétique et des éléments chimiques dans une zone radiative stellaire. Ce formalisme repose sur l'idée que des instabilités hydrodynamiques sont à l'origine d'une turbulence beaucoup plus efficace à produire du mélange dans la direction latitudinale du fait de la très forte stratification stable qui limite les mouvements dans la direction radiale. Cette turbulence anisotrope produit alors une rotation dite "shellular", c'est-à-dire qui ne dépend que de la direction radiale. Enfin, le transport turbulent de moment cinétique peut s'équilibrer avec une redistribution par une circulation méridienne à grande échelle. Le formalisme de [Zahn \(1992\)](#) a été implémenté dans les codes 1D d'évolution stellaire ce qui a permis de le tester en le confrontant aux observations. Bien qu'il soit parvenu à expliquer un certain nombre d'observables parmi les étoiles massives, tel que les anomalies chimiques au sein des étoiles de type B et F ([Talon et al., 1997](#); [Talon & Charbonnel, 1998](#); [Charbonnel & Talon, 1999](#)), les excès d'azote dans les supergéantes ([Maeder & Meynet, 2000](#)), ou encore le rapport entre supergéantes bleues et rouges dans le Petit Nuage de Magellan ([Maeder & Meynet, 2001](#)), il s'avère incapable d'expliquer les observables dont on dispose à propos des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire. Un premier exemple est celui du Soleil dont le profil de rotation déduit par l'héliosismologie, prévoit une très faible rotation différentielle dans sa zone radiative entre $0.25R_{\odot}$ et $0.7R_{\odot}$ ([Schou et al., 1998](#)), qui ne peut pas être expliquée par le mélange rotationnel uniquement induit par une circulation méridienne et des instabilités hydrodynamiques, tel que modélisé dans [Zahn \(1992\)](#) ([Turck-Chieze et al., 2010](#)).

Les phases d'évolution rapide au cours desquelles l'étoile se contracte afin de réajuster sa structure thermique (pré et post-séquence principale), permettent de tester le formalisme de [Zahn \(1992\)](#) dans des conditions différentes pour lesquelles les temps de forçage sont réduits. L'astérosismologie fournit de nombreuses contraintes sur la rotation interne des étoiles de faible masse qui se contractent après avoir épuisé leur contenu en hydrogène. Nous savons que lorsqu'elles quittent la séquence principale, elles expérimentent une première phase d'évolution au cours de laquelle elles restent en rotation quasi-solide malgré la contraction ([Deheuvels et al., 2020](#)). Leur cœur accélère ensuite sous l'effet de la contraction tandis que leur enveloppe décélère sous l'effet de l'expansion, produisant un certain niveau de rotation différentielle dans

l'étoile, d'autant plus important que celle-ci est évoluée (Deheuvels et al., 2014). Lorsqu'elles atteignent la base de la branche des géantes rouges, les étoiles de faible masse de la post-séquence principale ont ainsi un cœur tournant en moyenne entre 5 et 15 fois plus rapidement que leur enveloppe (Beck et al., 2012; Deheuvels et al., 2012, 2014; Di Mauro et al., 2016; Triana et al., 2017). Cependant, au cours de leur ascension sur la branche des géantes rouges, leur cœur va cesser d'accélérer en dépit de sa contraction et tourner à un taux qui restera approximativement constant jusqu'à ce qu'elles atteignent le sommet de cette branche (Gehan et al., 2018). Les codes d'évolution stellaire incluant le mélange rotationnel formalisé par Zahn (1992) et Maeder & Zahn (1998) produisent un transport qui n'est pas suffisamment efficace. Par conséquent, ils ne parviennent pas à reproduire l'évolution rotationnelle de ces étoiles et ce, à aucune des étapes que nous venons de décrire. En particulier, ils prédisent un taux de rotation du cœur des jeunes géantes rouges 2 à 3 ordres de grandeur plus élevé que ce qui est observé (Eggenberger et al., 2012; Marques et al., 2013; Ceillier et al., 2013).

Un autre exemple concerne les étoiles de faible masse qui se trouvent sur la pré-séquence principale : les T Tauri. Les périodes de rotation de centaines d'entre elles ont été déterminées à travers des amas d'âges différents, en passant de la nébuleuse d'Orion, âgée de seulement un million d'années (Stassun et al., 1999; Herbst et al., 2001, 2002; Rodriguez-Ledesma et al., 2009), à l'amas ouvert NGC 2547 dont l'âge correspond approximativement à l'arrivée d'une étoile de masse solaire sur la séquence principale (Irwin et al., 2008b). Des modèles simples, dans lesquels on considère que l'enveloppe convective et le cœur radiatif sont en rotation solide avec des vitesses angulaires qui ne sont pas nécessairement identiques, ont été conçus dans le but de reproduire l'évolution des périodes de rotation de ces étoiles (MacGregor & Brenner, 1991; Allain, 1998; Gallet & Bouvier, 2013, 2015). Un résultat important de ces modèles est qu'il est nécessaire d'introduire une rotation différentielle entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective pour reproduire l'évolution de la rotation de surface des T Tauri jusqu'à leur arrivée sur la séquence principale, avant qu'un processus de transport du moment cinétique ne re-couple progressivement les deux régions (Gallet & Bouvier, 2013, 2015). Là encore, modéliser ce processus à travers le formalisme de Zahn ne fonctionne pas (Amard et al., 2016).

De plus en plus d'observations tendent à montrer que des mécanismes additionnels de transport du moment cinétique, autres que la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement, doivent exister au sein des zones radiatives en contraction. Dans les étoiles T Tauri, les ondes de gravité internes excitées à l'interface entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective ont été proposées par Charbonnel et al. (2013) pour re-coupler ces deux régions. Il a également été suggéré que ces ondes puissent transporter du moment cinétique durant la phase de sous-géante (Fuller et al., 2014; Pinçon et al., 2016, 2017). Sur la branche des géantes rouges, ce transport devient inefficace en raison de l'augmentation importante de la fréquence de Brunt-Väisälä. Il a donc été avancé par Belkacem et al. (2015a,b) que les modes mixtes prennent le relais à cette étape de l'évolution. Le champ magnétique est également un bon candidat pour améliorer l'efficacité du transport du moment cinétique. Cependant, un champ structuré à grande échelle imposant une rotation solide entre l'enveloppe convective et le cœur radiatif (Mestel & Weiss, 1987), n'est pas compatible avec la rotation différentielle mise en évidence dans les sous-géantes ou les T Tauri. Toutefois, le champ magnétique pourrait induire des instabilités magnétohydrodynamiques capables d'extraire suffisamment de moment cinétique du cœur radiatif des géantes rouges pour maintenir leur taux de rotation à peu près constant jusqu'à la phase de brûlage de l'hélium au cœur (Spruit, 2002; Rüdiger et al., 2015; Fuller et al., 2019; Jouve et al., 2020).

Un autre aspect intéressant concerne le magnétisme des étoiles de masse intermédiaire en contraction. De récents relevés spectropolarimétriques indiquent que $\sim 10\%$ des étoiles de Herbig (des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale) arborent un champ ma-

gnétique dans leur enveloppe radiative (Alecian et al., 2013a,b). Leur structure à grande échelle est compatible avec celle d'un dipôle incliné par rapport à l'axe de rotation, stable dans le temps, dont l'amplitude est de l'ordre du kilo-Gauss (Alecian et al., 2008; Folsom et al., 2008; Alecian et al., 2009). Ceci amène à penser que ces étoiles sont les progéniteurs des Ap/Bp, une classe d'étoile de masse intermédiaire chimiquement particulières de la séquence principale hébergeant un champ magnétique dans leur enveloppe radiative aux caractéristiques semblables à celui des étoiles de Herbig (voir Donati & Landstreet (2009) pour une revue). Il a été montré par Aurière et al. (2007), que le champ magnétique dipolaire de ces étoiles possédait une intensité comprise entre 300 G et 30 kG. En dessous de cette valeur seuil, les relevés spectropolarimétriques des étoiles de type A révèlent la présence d'un désert magnétique (Aurière et al., 2010). En effet, les autres étoiles magnétiques de type A semblent posséder un champ très faible de ~ 1 G. C'est le cas de Vega (Lignières et al., 2009) et des étoiles de type Am, Sirius (Petit et al. (2011), β Ursae Majoris et θ Leonis (Blazère et al., 2016). L'imagerie Zeeman-Doppler de Vega révèle par ailleurs, que son champ magnétique possède une topologie complexe, à l'opposé de celui des Ap/Bp (Petit et al., 2010). Il a été avancé par Aurière et al. (2007) que le désert magnétique pourrait être attribué à une instabilité magnétohydrodynamique : en dessous d'une valeur seuil, la structure à grande échelle du champ magnétique devient instable et résulte en de petites échelles aux polarités inversées qui, une fois intégrées sur la surface visible de l'étoile, réduisent fortement l'amplitude du champ longitudinal. Une telle instabilité pourrait potentiellement se déclencher au cours de la pré-séquence principale où la contraction de l'étoile tend à forcer une rotation différentielle (Lignières et al., 2014).

Dans cette thèse, nous souhaitons apporter une meilleure compréhension de la dynamique des zones radiatives stellaires en contraction. Cela concerne en particulier les sous-géantes et géantes rouges pour lesquelles nous disposons de nombreuses contraintes à propos de leur rotation interne, ainsi que les étoiles de Herbig pour lesquelles nous avons des mesures de champ magnétique. Pour ce faire, nous réaliserons des simulations numériques axisymétriques d'une couche fluide stablement stratifiée, en rotation et en contraction, pouvant également abriter un champ magnétique. L'objectif est de déterminer et de caractériser les écoulements axisymétriques stationnaires induits par la contraction, à savoir la rotation différentielle et la circulation méridienne, à travers une étude paramétrique approfondie. Notre approche se distingue de la plupart des travaux précédents qui s'appuient sur des arguments phénoménologiques pour ramener à une dimension la modélisation du transport du moment cinétique. En particulier, nous ne faisons aucune hypothèse a priori sur les propriétés de la rotation différentielle. Par ailleurs, les simulations axisymétriques permettront d'étudier l'effet d'un champ magnétique structuré à grande échelle sur le transport du moment cinétique et de déterminer son impact au cours des phases de contraction. Enfin, les simulations 2D nous permettront d'observer le développement d'instabilités axisymétriques. Ces instabilités, qui ne peuvent pas se manifester dans les codes 1D, sont par nature à grande échelle et ont des effets importants sur la dynamique de l'écoulement.

Le présent manuscrit est organisé de la manière suivante. Dans le chapitre 1, nous présenterons plus en détail le contexte astrophysique dans lequel se place cette thèse. Pour cela, nous exposerons l'ensemble des données observationnelles dont nous disposons sur la rotation et le champ magnétique des étoiles en contraction. Nous finirons en décrivant les processus de transport du moment cinétique implémentés dans les codes d'évolution stellaire et la manière dont ils sont mis en défaut par ces données observationnelles. Dans le chapitre 2, nous présenterons différents processus physiques qui interviennent dans la production et le maintien des écoulements à grande échelle dans une zone radiative stellaire. Il s'agit des processus de transport de moment cinétique tels que la circulation méridienne, des instabilités axisymétriques (ma-

gnéto)hydrodynamiques, mais aussi des couches limites que l'on rencontre inévitablement lors des simulations numériques que nous effectuons. Ce chapitre aura notamment pour objectif de faciliter la compréhension du chapitre 3 qui suivra, et dans lequel nous présenterons notre modèle mathématique ainsi que nos principaux résultats concernant l'étude d'une zone radiative stellaire en contraction, en présence, ou non, d'un champ magnétique structuré à grande échelle. Ces résultats ont donné lieu à la rédaction de deux articles, l'un publié ([Gouhier et al., 2021](#)) et l'autre accepté pour publication ([Gouhier et al., 2022](#)), dans la revue *Astronomy & Astrophysics*. Ces deux articles sont reproduits à la page 185. Ce manuscrit s'achèvera en page 109 par un résumé de ces résultats, une discussion de notre modèle et les perspectives qui devraient être explorées à la lumière du présent travail de thèse.

CHAPITRE 1

CONTEXTE ASTROPHYSIQUE

Sommaire

1.1	Contraction des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire au fil de l'évolution stellaire	6
1.2	Pré-séquence principale	9
1.2.1	Évolution rotationnelle des T Tauri	9
1.2.2	Rotation et magnétisme des étoiles de Herbig Ae/Be	11
1.3	Étoiles de faible masse de la post-séquence principale	15
1.3.1	Rotation interne des sous-géantes et des géantes rouges	15
1.3.2	Quelques indices en faveur de la présence d'un champ magnétique	18
1.4	Modélisation du transport du moment cinétique et comparaison aux données	19
1.4.1	Mélange rotationnel : circulation méridienne et instabilités hydrodynamiques	19
1.4.2	Champ magnétique	20
1.4.3	Ondes de gravité internes et modes mixtes	21
1.4.4	Modèles incluant une viscosité effective	22

Les motivations astrophysiques de notre étude du transport de moment cinétique dans une zone radiative magnétisée en contraction sont exposées dans ce chapitre. Dans la section 1.1, nous décrivons les premières étapes de l'évolution stellaire au cours desquelles les étoiles sont en contraction rapide, en précisant les échelles de temps associées. Nous présentons ensuite les contraintes observationnelles dont on dispose sur la rotation et le champ magnétique de ces étoiles en nous concentrant sur trois phases : la phase pré-séquence principale des étoiles de masse inférieure à $2M_{\odot}$ (les étoiles T Tauri ; sous-section 1.2.1, section 1.2), la phase pré-séquence principale des étoiles de masse intermédiaire (les étoiles de Herbig ; sous-section 1.2.2, section 1.2), et la phase sous-géante et géante rouge des étoiles de masse $\lesssim 2M_{\odot}$ (section 1.3). Finalement, en section 1.4 nous passons en revue les processus de transport du moment cinétique qui ont été proposés pour modéliser la rotation de ces étoiles.

1.1 Contraction des étoiles de faible masse et de masse intermédiaire au fil de l'évolution stellaire

La contraction est un ingrédient essentiel de l'évolution stellaire apparaissant la toute première fois lors de la formation de l'étoile, lorsque le nuage interstellaire composé de gaz et de poussières s'effondre sur lui-même afin de donner naissance à la proto-étoile (voir [Larson \(2003\)](#) et [McKee & Ostriker \(2007\)](#) pour des revues détaillées sur les différentes phases de formation des étoiles). Après la phase d'effondrement du nuage moléculaire sur un temps de chute libre, puis la formation de la proto-étoile accrétante, l'étoile devient visible dans le domaine optique et la phase pré-séquence principale, proprement dite, débute. Au cours de cette période de l'évolution stellaire, les étoiles se contractent parce qu'elles perdent de l'énergie par rayonnement alors que la température centrale n'est pas encore suffisante pour que cette perte puisse être compensée par les réactions nucléaires. En accord avec le théorème du viriel, la moitié de l'énergie issue de la contraction gravitationnelle sert à chauffer le gaz tandis que l'autre moitié est rayonnée. La contraction s'effectue alors sur un temps de Kelvin-Helmholtz

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{GM^2}{R\bar{L}}, \quad (1.1)$$

où G est la constante gravitationnelle, M la masse de la proto-étoile, R son rayon et \bar{L} , la luminosité rayonnée par l'étoile. Le temps de Kelvin-Helmholtz représente le temps de refroidissement thermique par rayonnement ou encore, le temps mis par un photon pour atteindre la surface depuis le centre de l'étoile. Comme le montre le tableau 1.1 tiré de [Maeder \(2008\)](#), ce

Masse (en M_{\odot})	0.2	0.6	1.0	1.5	2.0	5	15	60
τ_{KH} (en millions d'années)	200	90	38.9	35.4	23.4	1.15	0.117	0.028
t_{PMS} (en millions d'années)			38.1	30.8	11.5	0.41	Pas de PMS	

Tableau 1.1 : Valeur du temps de Kelvin-Helmholtz et de la durée de la pré-séquence principale en fonction de la masse de l'étoile. D'après [Maeder \(2008\)](#).

temps dépend de la masse de l'étoile. On observe en effet, une différence de près de deux ordres de grandeur entre le temps de contraction d'une étoile de $0.6M_{\odot}$ et celui d'une étoile de $5M_{\odot}$. Dans ce tableau, la durée de la phase pré-séquence principale en fonction de la masse de l'étoile est également répertoriée. On constate qu'elle est du même ordre de grandeur que le temps de Kelvin-Helmholtz.

Lorsque le cœur a atteint une température $\sim 10^7$ K (cette température n'est pas atteinte pour une étoile de masse $\lesssim 0.08M_{\odot}$ qui devient une naine brune (Kippenhahn et al., 2012)), la fusion de l'hydrogène est amorcée, soit à travers un cycle proton-proton (PP) pour les étoiles de masse $\lesssim 1.2M_{\odot}$, soit via un cycle carbone-azote-oxygène (CNO) pour les autres (Maeder, 2008). L'étoile évolue alors sur la séquence principale sur une échelle de temps nucléaire (~ 9.8 milliards d'années pour une étoile de masse solaire), jusqu'à ce que son combustible d'hydrogène soit épuisé, et sans que son rayon ne soit significativement modifié. Débute alors la phase post-séquence principale où dans un premier temps, l'étoile doit de nouveau se contracter jusqu'à atteindre une température $\sim 10^8$ K nécessaire à la fusion de l'hélium. Cette fois, seules les étoiles de masse $\gtrsim 0.47M_{\odot}$ y parviendront, les autres se refroidiront et finiront leur vie en tant que naines blanches He-H (Maeder, 2008). On doit distinguer deux gammes de masses afin de décrire la phase d'évolution qui s'étend de la fin de la séquence principale jusqu'à celle de brûlage de l'hélium au cœur.

Étoiles de masse intermédiaire ($2M_{\odot}$ à $\sim 10M_{\odot}$) :

Une fois que l'hydrogène au cœur est consommé, il laisse place à un cœur d'hélium encore inerte, entouré d'une coquille d'hydrogène. Tant que la masse du cœur d'hélium ne dépasse pas $\sim 10\%$ de la masse totale de l'étoile, ce que l'on appelle la limite de Schönberg-Chandrasekhar (Schönberg & Chandrasekhar, 1942), il est capable de supporter l'enveloppe qui la surplombe. L'étoile est encore dans une phase de quasi-équilibre thermique au cours de laquelle elle brûle de l'hydrogène dans la coquille qui entoure le cœur d'hélium. Les cendres issues de la combustion en couche font progressivement croître la masse du cœur et lorsqu'elle dépasse la limite de Schönberg-Chandrasekhar, celui-ci ne peut plus supporter l'enveloppe et se contracte. L'échelle de temps de cette contraction est de nouveau un temps de Kelvin-Helmholtz qui représente une très faible fraction de la durée de vie sur la séquence principale. Ainsi, pour une étoile de $5M_{\odot}$ et de composition solaire ($X = 0.68$ et $Z = 0.02$), dont la durée de vie est d'environ 94 millions d'années sur la séquence principale, le temps de contraction sera seulement de 0.94 millions d'années (Maeder, 2008). Cela se traduit par une déplétion de ces étoiles de masse intermédiaire dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell que l'on appelle le "Hertzsprung gap" (Hekker & Christensen-Dalsgaard, 2017). À partir du moment où le cœur se contracte, et tout le long de son ascension sur la branche des géantes rouges, son évolution est régie par le principe miroir : tandis que le cœur d'hélium localisé sous la coquille de brûlage d'hydrogène se contracte, l'enveloppe située au-dessus est en expansion.

Étoiles de faible masse ($\lesssim 2M_{\odot}$) :

Pour les étoiles de faible masse, l'histoire se complique quelque peu. Comme pour les étoiles de masse intermédiaire, une fois qu'elles ont quitté la séquence principale, elles brûlent de l'hydrogène dans une coquille, épaisse d'environ $0.1M_{\odot}$ (Salaris et al., 2002), entourant un cœur d'hélium encore inerte. Cependant, comme la densité de ce cœur augmente plus rapidement que sa température, il devient peu à peu dégénéré et la pression de dégénérescence est capable de supporter le poids de l'enveloppe (Kippenhahn et al., 2012). Par conséquent, la contraction s'effectue sur un temps significativement supérieur au temps de Kelvin-Helmholtz. Au cours de cette phase, dite de sous-géante, la température effective diminue progressivement tandis que la luminosité de l'étoile n'augmente que légèrement : celle-ci parcourt un chemin quasiment horizontal à travers le diagramme d'Hertzsprung-Russell. Cette phase se poursuit jusqu'au moment où l'étoile entame son ascension sur la branche des géantes rouges. Au cours de cette nouvelle

étape où le cœur d'hélium est devenu totalement dégénéré, la température effective reste quasiment constante et la luminosité augmente beaucoup : l'étoile parcourt désormais un chemin quasiment vertical dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell. La couche de brûlage d'hydrogène s'amincit jusqu'à atteindre une fine épaisseur de seulement $\sim 0.001M_{\odot}$ (Salaris et al., 2002), la zone convective s'approfondit ce qui permet d'apporter des éléments chimiques issus des réactions nucléaires en surface (ce que l'on appelle le premier "dredge-up"), et la contraction du cœur d'hélium, et donc l'expansion de l'enveloppe, s'accélèrent. Cette contraction s'effectue désormais sur une échelle de temps thermique et se poursuit jusqu'à ce que la température du cœur devienne suffisamment élevée pour permettre la fusion de l'hélium. Typiquement, cela se produit lorsque le cœur a atteint une masse comprise entre $0.45M_{\odot}$ et $0.5M_{\odot}$ et une température de $\sim 10^8$ K (Salaris et al., 2002; Kippenhahn et al., 2012; Hekker & Christensen-Dalsgaard, 2017). En raison de la dégénérescence de ce cœur, la combustion de l'hélium se traduit par un emballement thermique et une surproduction d'énergie nucléaire. Cela se manifeste sous la forme d'un flash d'hélium qui lève la dégénérescence du cœur et stoppe sa contraction (Salaris et al., 2002; Hekker & Christensen-Dalsgaard, 2017). Afin de quantifier le temps de contraction durant les phases de sous-géante et de géante rouge, nous procédons comme Deheuvels et al. (2020) en utilisant l'échelle de temps d'évolution de la rotation du cœur, sous l'effet de la contraction à symétrie sphérique. En effet, la rotation du cœur va naturellement augmenter comme résultat de la contraction. Le temps typique de cette rotation nous informe ainsi sur le temps caractéristique de contraction. Celui-ci s'écrit :

$$\tau_{\text{DR}} = \frac{\Omega_{\text{cœur}}}{d\Omega_{\text{cœur}}/dt}, \quad (1.2)$$

où $\Omega_{\text{cœur}}$ correspond au taux de rotation moyenné dans le cœur. Ce temps est tracé sur la figure 1.1 en fonction du logarithme décimal de la gravité effective pour deux sous-géantes étudiées par Deheuvels et al. (2020). La gravité effective est un proxy du stade évolutif de l'étoile sachant que sur cette figure, les deux étoiles sont suivies depuis la fin de la séquence principale jusqu'à un peu après la base de la branche des géantes (qui est indiquée par une ligne verticale en pointillés). KIC 8524425 (en rouge) est une sous-géante de $1.113M_{\odot}$ et $1.797R_{\odot}$ dont le cœur était radiatif sur la séquence principale. KIC 5955122 (en bleu) est une sous-géante de $1.218M_{\odot}$ et $2.099R_{\odot}$ qui possédait un cœur convectif sur la séquence principale. Nous constatons que l'échelle de temps de contraction sur la branche des sous-géantes est de l'ordre d'un milliard d'années. Le tracé, différent entre ces deux étoiles, s'explique par le réajustement thermique, sur une courte durée de l'ordre de 200 millions d'années, de l'étoile qui possédait un cœur convectif sur la séquence principale. Une fois qu'elles atteignent la base des géantes, le temps de contraction devient de l'ordre de 100 millions d'années.

Après la phase de fusion de l'hélium, les étoiles se retrouvent avec un cœur inerte et dégénéré constitué d'oxygène et de carbone, entouré d'une coquille d'hélium et d'une coquille d'hydrogène. Elles vont finalement passer par d'autres phases de contraction (branche asymptotique des géantes rouges ; voir Karakas & Lattanzio (2014) pour une revue) jusqu'à ce que les vents stellaires aient débarrassé l'étoile de son enveloppe. Celle-ci atteindra alors le stade ultime de son évolution : celui de naine blanche qui consiste en un cœur dénudé, à la fois inerte et dégénéré, composé de carbone et d'oxygène. Nous sommes moins concernés par ces phases de contraction pour lesquelles nous ne disposons pas de contraintes précises sur la rotation des étoiles qui se trouvent à ce stade d'évolution.

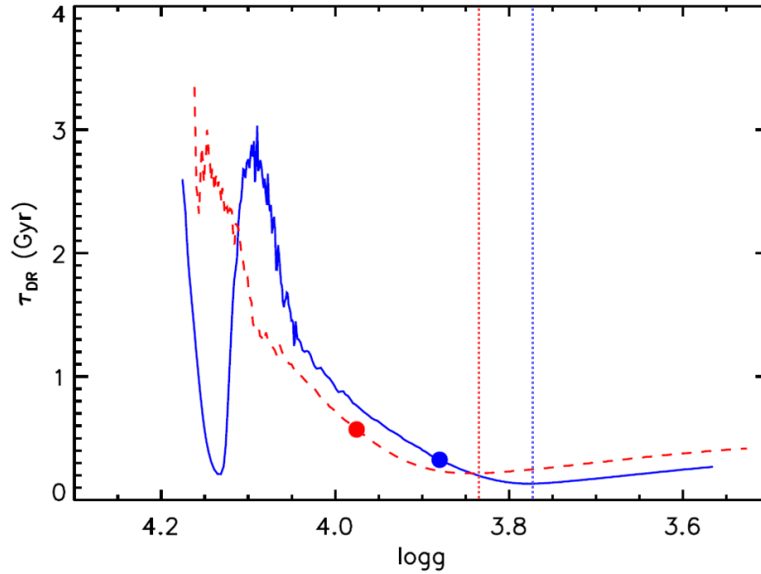


FIGURE 1.1 : Échelle de temps d'évolution de la rotation du cœur sous l'effet de la contraction radiale $\tau_{DR} = \Omega_{\text{cœur}} / (d\Omega_{\text{cœur}}/dt)$, où $\Omega_{\text{cœur}}$ est le taux de rotation moyen du cœur, en fonction du logarithme décimal de la gravité effective, entre la fin de la séquence principale et un point arbitraire de la branche des géantes rouges, pour deux étoiles de faible masse. La courbe en rouge (bleu) correspond à KIC 8524425 (5955122), une jeune sous-géante de $1.113M_{\odot}$ ($1.218M_{\odot}$) et $1.797R_{\odot}$ ($2.099R_{\odot}$) qui possédait un cœur radiatif (convectif) sur la séquence principale. Les lignes en pointillés marquent le début de la phase des géantes rouges. Crédit : [Deheuvels et al. \(2020\)](#).

1.2 Pré-séquence principale

Selon leur masse, les étoiles de la pré-séquence principale se divisent en deux catégories, d'un côté les T Tauri ($\lesssim 2M_{\odot}$) et de l'autre, les étoiles de Herbig Ae/Be ($2M_{\odot}$ à $\sim 10M_{\odot}$). Dans ce qui suit, nous commencerons par présenter en sous-section 1.2.1, les données observationnelles qui concernent la rotation des T Tauri ainsi que les modèles simples construits dans le but de reproduire ces données. Nous décrirons ensuite en sous-section 1.2.2, les propriétés des étoiles de Herbig, et en particulier leur champ magnétique, ainsi qu'un scénario impliquant la contraction visant à expliquer la dichotomie magnétique des étoiles de masse intermédiaire.

1.2.1 Évolution rotationnelle des T Tauri

Les T Tauri se divisent en deux catégories, les T Tauri classiques ("classical T Tauri Stars" cTTSs) d'un côté, et les T Tauri à faibles raies ("weak-line T Tauri Stars" wTTSs) de l'autre. Les cTTSs et les wTTSs se distinguent par l'épaisseur optique du disque circumstellaire qui les entoure ([Maeder, 2008](#)). Les cTTSs sont entourées d'un disque optiquement épais, qui produit de grands excès infrarouges, et à partir duquel elles accrètent de la matière. Au contraire, les wTTSs ont quasiment dissipé leur disque (pour cette raison on retrouve aussi dans la littérature l'appellation "naked T Tauri Stars") et n'accrètent plus de matière : le disque est devenu optiquement fin et les excès infrarouges, faibles.

Selon leur masse, la structure interne des T Tauri varie également. Les T Tauri de masse comprise entre $\sim 0.08M_{\odot}$ et $\sim 0.4M_{\odot}$ sont complètement convectives alors que celles dont

la masse est comprise entre $0.4M_{\odot}$ et $2M_{\odot}$ développent un cœur radiatif (Chabrier & Baraffe, 1997). La présence d'une enveloppe convective facilite la détermination de leur rotation (Bouvier, 2007). En effet, les champs dynamos qui y sont engendrés (Yu et al., 2019; Donati et al., 2013, 2012, 2011) produisent des tâches qui induisent à leur tour, une modulation rotationnelle du flux émis. De plus, l'étude d'amas jeunes et d'âges variés, permet de retracer assez finement l'évolution de la rotation de surface des étoiles T Tauri.

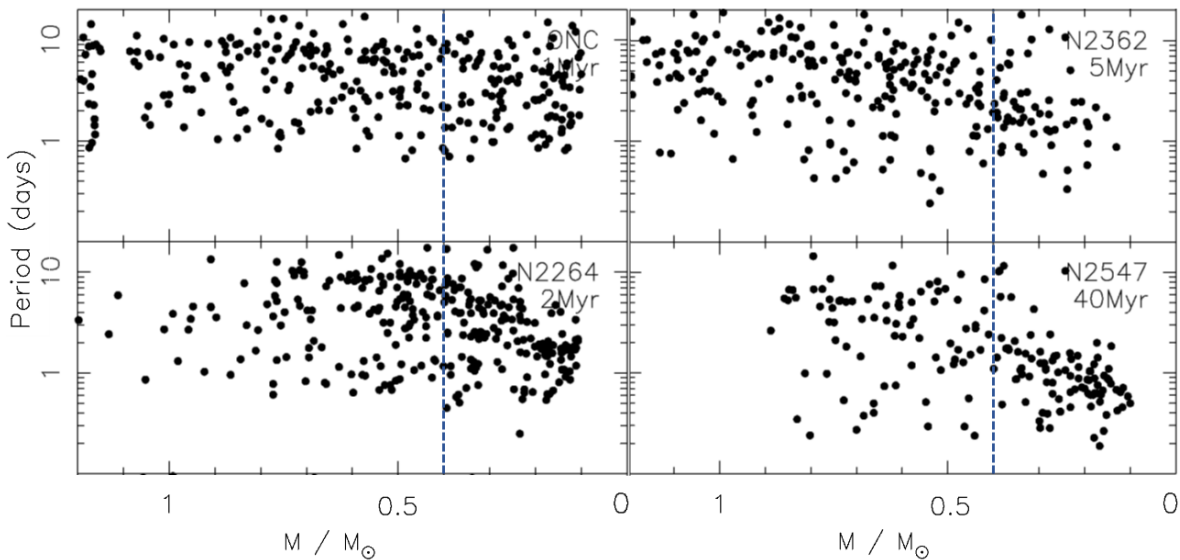


FIGURE 1.2 : Distribution des périodes de rotation de T Tauri mesurées dans la nébuleuse d'Orion (Orion Nebula Cluster, ONC) (en haut à gauche), âgée de 1 million d'années, par Stassun et al. (1999) et Herbst et al. (2001, 2002), dans l'amas ouvert NGC 2264 (en bas à gauche), âgé de 2 millions d'années, par Makidon et al. (2004) et Lamm et al. (2005), dans l'amas ouvert NGC 2362 (en haut à droite), âgé de 5 millions d'années, par Irwin et al. (2008a), et dans l'amas ouvert NGC 2547 (en bas à droite), âgé de 40 millions d'années, par Irwin et al. (2008b), en fonction de la masse de l'étoile. Les lignes tracées en tirets bleus permettent de distinguer les T Tauri entièrement convectives ($M \lesssim 0.4M_{\odot}$) de celles qui développent un cœur radiatif au cours de la pré-séquence principale ($0.4M_{\odot} \leq M < 2M_{\odot}$). Figure adaptée de Irwin & Bouvier (2008).

La figure 1.2 tirée de Irwin & Bouvier (2008) illustre ce point en montrant les mesures des périodes de rotation obtenues pour quatre amas ouverts d'âges compris entre 1 et 40 million(s) d'années. Les trois principaux ingrédients de l'évolution du moment cinétique dans ces étoiles sont la contraction, l'interaction entre l'étoile et son disque d'accrétion par l'intermédiaire de son champ magnétique (qui peut durer de un à quelques million(s) d'années (Bell et al., 2013)), ce que l'on appelle le "disk-locking" (Königl, 1991), et la perte de moment cinétique par le vent stellaire magnétisé. Les modèles qui prennent en compte ces trois ingrédients et qui font l'hypothèse d'une rotation solide sont incapables de reproduire les mesures des taux de rotation. Ils nécessitent en effet d'inclure une rotation différentielle. Un modèle simple, introduit par MacGregor & Brenner (1991), consiste à supposer que l'enveloppe convective et le cœur radiatif sont chacun en rotation solide, et à caractériser l'efficacité du transport du moment cinétique entre ces deux régions par un temps de couplage. On obtient ainsi un modèle qui ne dépend que de quatre paramètres libres : la période de rotation initiale, la durée du disk-locking, le temps de

couplage t_{c-e} , et une constante paramétrant la loi de freinage du vent magnétisé. Ces paramètres sont ajustés de façon à reproduire au mieux les taux de rotation à travers chacun des amas, du début de la pré-séquence principale à l'âge du Soleil (Allain, 1998; Bouvier, 2007; Irwin et al., 2007b; Bouvier, 2008; Irwin et al., 2008b; Irwin & Bouvier, 2008; Gallet & Bouvier, 2013, 2015). Un des résultats de ces modèles à deux régions est que les temps de couplage enveloppe convective/cœur radiatif doivent être plus longs pour les rotateurs lents que pour les rotateurs rapides. On constate en particulier que pour la grande majorité des étoiles T Tauri, il existe un saut de rotation entre les deux régions que l'on peut aussi interpréter comme la signature d'une rotation différentielle dans la zone radiative puisque le mélange du moment cinétique est bien plus efficace dans l'enveloppe convective.

1.2.2 Rotation et magnétisme des étoiles de Herbig Ae/Be

Les étoiles de Herbig sont des étoiles en contraction de la pré-séquence principale (Strom et al., 1972) dont les masses varient entre $2M_{\odot}$ et $\sim 8 - 10M_{\odot}$, les étoiles plus massives n'ayant pas de pré-séquence principale puisqu'elles ont déjà rejoint la séquence principale lorsqu'elles deviennent pour la première fois optiquement visibles (Palla & Stahler, 1990). La classe des étoiles de Herbig a été définie par Herbig (1960) à partir de trois critères observationnels :

- de type spectral A ou B avec des raies d'émission,
- localisée dans une région obscure,
- illumine une nébulosité assez brillante dans son entourage immédiat.

Cette définition a par la suite connu quelques réajustements (voir Thé et al. (1994)) et fut notamment complétée par un critère concernant l'excès infrarouge dans leur distribution spectrale d'énergie. Celui-ci est généralement attribué à l'émission de poussières du disque circumstellaire qui les entoure (Waters & Waelkens, 1998). Certaines de ces étoiles présentent des raies d'émission typiques d'un profil de P-Cygni, qui est une signature de la présence d'un vent stellaire pouvant affecter le transport de moment cinétique (Böhm & Catala, 1995; Lignières et al., 1996).

Les étoiles de Herbig Ae/Be possèdent une enveloppe radiative, ainsi qu'un cœur convectif qui se développe à un moment donné de leur évolution pré-séquence principale (Maeder, 2008). Contrairement aux T Tauri, l'absence de taches à la surface des étoiles de Herbig ne permet pas de déterminer leur période de rotation par un suivi photométrique. Au lieu de cela, l'élargissement des raies d'absorption photosphériques fournit le produit $v \sin i$ où v désigne la vitesse équatoriale et i l'angle d'inclinaison entre l'axe de rotation et la direction de l'observateur. La figure 1.3 illustre cette méthode et montre des exemples d'élargissement de raies d'absorption pour différentes valeurs de la vitesse rotationnelle projetée $v \sin i$. Comme l'angle d'inclinaison est a priori inconnu, il est nécessaire d'obtenir un grand nombre de vitesses rotationnelles projetées pour obtenir des valeurs moyennes significatives. Des observations spectroscopiques ont été réalisées sur différents échantillons d'étoiles de Herbig par Finkenzeller (1985) (23 étoiles), Böhm & Catala (1995) (24 étoiles), Wolff et al. (2004), Alecian et al. (2013a,b) (70 étoiles) et Pinzón et al. (2021) (6 étoiles). La figure 1.4 illustre le travail récent de Pinzón et al. (2021) portant sur 6 étoiles de Herbig de l'association OB1 d'Orion. Sur cette figure sont également reportées les mesures du $v \sin i$ réalisées par Alecian et al. (2013a) sur 70 étoiles de Herbig. Ces études indiquent une valeur moyenne du $v \sin i$ de $\sim 100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

Dans cette thèse, les étoiles de Herbig nous intéressent particulièrement car une partie d'entre elles, semblent héberger un champ magnétique dans leur enveloppe radiative. La première détection directe d'un champ magnétique à la surface d'une étoile de Herbig a été effec-

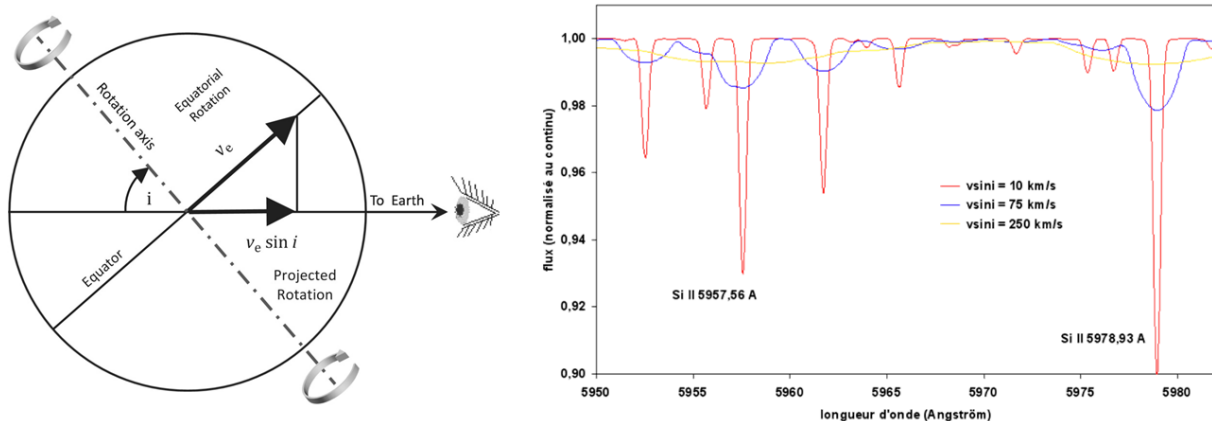


FIGURE 1.3 : Gauche : projection de la vitesse de rotation v (v_e sur le présent schéma) sur l'axe de visée (c'est-à-dire la droite théorique reliant l'œil de l'observateur au point observé à travers l'instrument) incliné d'un angle i par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Crédit : [Trypsteen & Walker \(2017\)](#). Droite : spectre d'une étoile sous l'influence de la rotation. Dans cet exemple, les raies d'absorption de silicium ionisé sont élargies par effet Doppler, avec un élargissement d'autant plus important que la vitesse de rotation de l'étoile est élevée. Crédit : <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Spectre-vitesse-rotation-etoile.xml>.

tuée par [Donati et al. \(1997\)](#). Elle a été obtenue par l'analyse de la polarisation des raies d'absorption photosphérique grâce au spectropolarimètre MUSICOS du télescope Bernard-Lyot. L'effet Zeeman, produit par le champ magnétique stellaire, induit une polarisation circulaire de la lumière dans les raies d'absorption qui permet de remonter jusqu'à la valeur de la composante du vecteur champ magnétique projetée selon la ligne de visée et intégrée sur la surface visible, que l'on appelle le champ magnétique longitudinal. Le relevé spectropolarimétrique le plus récent et le plus étendu a été réalisé par [Alecian et al. \(2013a,b\)](#) sur un échantillon de 70 étoiles de Herbig. Les 6 détections de champ magnétique obtenues, indiquent une incidence du magnétisme de l'ordre de $\sim 10\%$. L'amplitude du champ longitudinal est en moyenne d'une centaine de Gauss. L'analyse détaillée effectuée sur trois de ces étoiles par [Alecian et al. \(2008\)](#), [Folsom et al. \(2008\)](#) et [Alecian et al. \(2009\)](#) a permis de montrer que ces champs magnétiques sont structurés à grande échelle, c'est-à-dire qu'ils peuvent être modélisés par un dipôle magnétique d'intensité de l'ordre du kilo-Gauss dont l'axe est incliné par rapport à l'axe de rotation. Par ailleurs, ces champs s'avèrent stables dans le temps comme l'indique l'observation de HD 200775 effectuée par [Alecian et al. \(2008\)](#) sur plus de 2 ans. Ces champs magnétiques ont les mêmes caractéristiques (dominé par un dipôle incliné, stable dans le temps) que les étoiles Ap/Bp qui constituent une classe d'étoiles magnétiques de masse intermédiaire sur la séquence principale ([Donati & Landstreet, 2009](#)). Par ailleurs, l'augmentation de l'amplitude du champ des étoiles de Herbig au cours de la contraction est compatible avec les amplitudes des champs magnétiques de type Ap/Bp dont les intensités du dipôle sont comprises entre 300 G et 30 kG ([Aurière et al., 2007](#)). Ces considérations suggèrent fortement que les étoiles de Herbig magné-

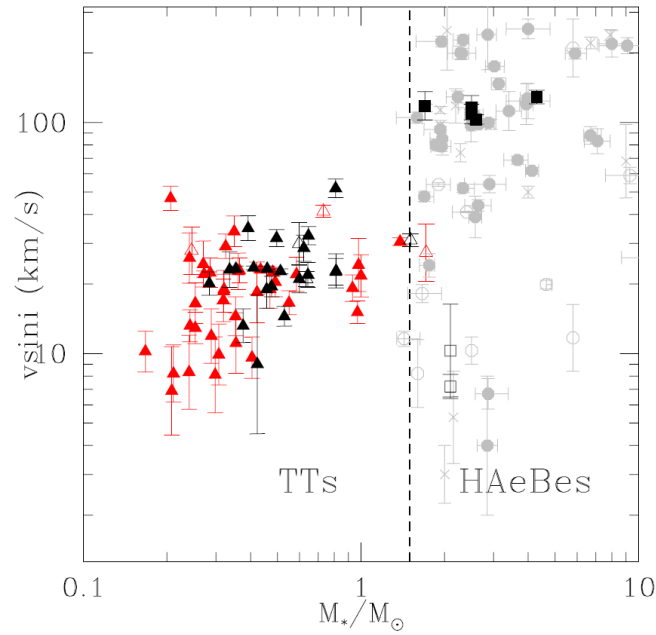


FIGURE 1.4 : Distribution des vitesses rotationnelles projetées des T Tauri localisées dans l’amas σ Orionis (triangle), des étoiles de Herbig situées dans l’association OB1 d’Orion (carrés noirs) et des étoiles de Herbig étudiées par [Alecian et al. \(2013b\)](#) (symboles gris), en fonction de la masse. La ligne tracée en tirets noirs, en $M_*/M_\odot = 2$, sépare les T Tauri des étoiles de Herbig. La valeur médiane de la vitesse rotationnelle projetée des T Tauri est $\langle v \sin i \rangle = 21 \pm 9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, celle des étoiles de Herbig localisées dans l’association OB1 d’Orion, $\langle v \sin i \rangle = 115 \pm 9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, et celle des étoiles de Herbig étudiées par [Alecian et al. \(2013b\)](#), de $\sim 100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Crédit : [Pinzón et al. \(2021\)](#).

tiques détectées jusqu’à présent sont les progéniteurs des étoiles de type Ap/Bp, sachant que les champs magnétiques Ap/Bp sont dits fossiles¹ i.e., engendrés au cours des phases précoces de l’évolution stellaire (phase complètement convective de la proto-étoile, champ magnétique du milieu interstellaire) avant d’avoir relaxé dans une configuration stable ([Braithwaite & Spruit, 2004](#); [Braithwaite & Nordlund, 2006](#)). Autrement dit, l’existence des champs de ce type parmi les étoiles de Herbig indique que la formation des champs fossiles a précédé la phase pré-séquence principale.

Sur la séquence principale, le magnétisme des étoiles de masse intermédiaire est caractérisé par une dichotomie entre les étoiles à champ fort de type Ap/Bp ([Aurière et al., 2007](#); [Donati & Landstreet, 2009](#)), et les étoiles à champ très faible ($\sim 1 \text{ G}$) de type Vega ([Lignières et al., 2009](#); [Petit et al., 2010](#)) également détecté sur les étoiles de type Am, Sirius ([Petit et al., 2011](#)), β Ursae Majoris et θ Leonis ([Blazère et al., 2016](#)). L’existence de ces deux populations, séparées par un désert magnétique entre 1 G et 100 G dans le champ longitudinal, tel qu’illustré sur la figure 1.5, reste une énigme bien que plusieurs scénarios aient été proposés. Le premier, avancé par [Aurière et al. \(2007\)](#), repose sur une instabilité du champ toroïdal à travers laquelle la structure à grande échelle du champ magnétique est détruite et résulte en de petites échelles dont les polarités sont opposées. Par conséquent, lorsqu’elle est intégrée sur la surface visible de l’étoile, la composante du vecteur champ magnétique projetée selon la ligne de visée a une

1. La théorie des champs fossiles est une hypothèse originellement avancée par [Cowling \(1945\)](#) pour expliquer l’origine du magnétisme du Soleil, puis reprise par [Moss \(1987\)](#) dans le cadre des étoiles de type Ap/Bp.

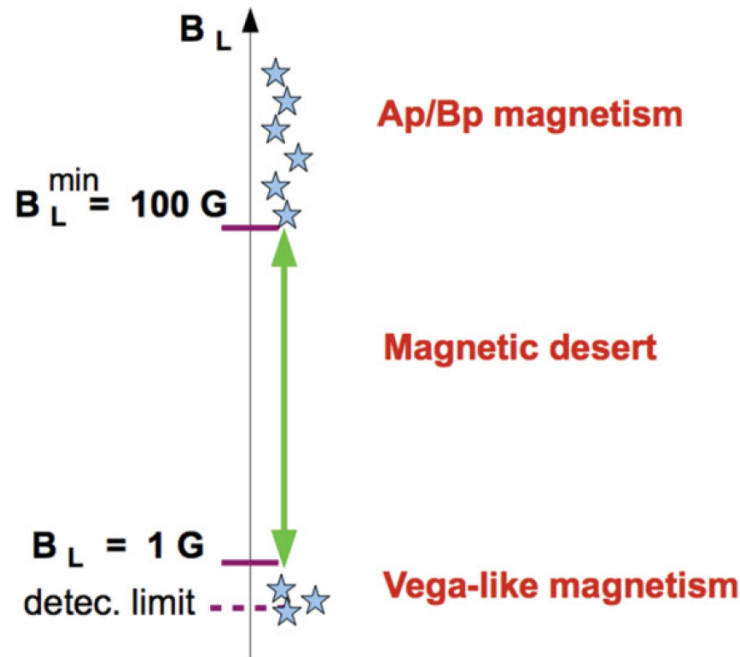


FIGURE 1.5 : Désert magnétique illustrant la dichotomie qui existe entre le magnétisme des étoiles de type Ap/Bp et celui des étoiles de type Vega. Crédit : [Lignièrès et al. \(2014\)](#).

amplitude fortement réduite par effet d'annulation entre ces polarités opposées, ce qui se traduit par une faible intensité du champ longitudinal. Le second, proposé par [Braithwaite & Cantiello \(2013\)](#), est basé sur l'hypothèse des champs fossiles "échoués". Dans ce scénario, le champ magnétique des étoiles de type Vega est encore en train d'évoluer et ne constitue donc pas un véritable champ fossile. Au contraire, le champ magnétique des Ap/Bp, lui, est rapidement devenu un champ magnétique fossile au cours de l'évolution de l'étoile, notamment à la suite d'évènements extrêmement violents liés à la fusion de binaires durant lesquels de puissantes dynamos étaient produites. Ce scénario s'appuie directement sur le manque de binaires parmi les Ap/Bp. Finalement, le troisième scénario repose sur l'existence d'une couche convective localisée en dessous de la surface de l'étoile, et à travers laquelle le champ magnétique est susceptible d'être advecté lorsque son amplitude n'est pas suffisamment importante pour résister aux mouvements turbulents ([Jermyn & Cantiello, 2020](#)). Alors, la structure à grande échelle est détruite en surface et résulte en de petites échelles provoquant, comme dans le scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#), une forte diminution de l'amplitude du champ longitudinal mesuré.

Dans cette thèse, nous insisterons plus particulièrement sur le scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#) pour la raison suivante : la contraction qui se produit au cours de la pré-séquence principale, induit une rotation différentielle susceptible de produire une instabilité magnétohydrodynamique ([Lignièrès et al., 2014](#)). Celle-ci peut, en retour, potentiellement détruire la structure à grande échelle d'une étoile de Herbig. Si c'est le cas, une telle étoile présentera un faible magnétisme de type Vega. Au contraire, si le champ reste stable vis-à-vis d'une instabilité magnétohydrodynamique, elle présentera, au cours de la pré-séquence principale et à son arrivée sur la séquence principale, les caractéristiques d'un champ fossile de type Ap/Bp, à savoir un dipôle incliné par rapport à l'axe de rotation avec une intensité de l'ordre du kilo-Gauss. Cette possibilité a été étudiée par [Jouve et al. \(2015\)](#), [Gaurat et al. \(2015\)](#) et [Jouve et al. \(2020\)](#). Ces auteurs trouvent en effet qu'une instabilité magnétohydrodynamique est à même de se déve-

opper dans une zone radiative stellaire en rotation différentielle où le champ magnétique est suffisamment faible. Toutefois, dans ces simulations multidimensionnelles, la composante axi-symétrique initiale du champ poloïdal reste inchangée et ne peut donc pas créer le saut sur l'amplitude du champ magnétique longitudinal, requis pour expliquer le désert magnétique.

1.3 Étoiles de faible masse de la post-séquence principale

Ces dernières années, l'astérosismologie nous a apporté de nombreuses contraintes sur la structure interne des étoiles de faible masse ($M \lesssim 2M_{\odot}$) de la post-séquence principale à travers l'étude des ondes qui se propagent dans leur intérieur. La sismologie des étoiles s'est d'abord développée avec le Soleil pour lequel, l'étude des ondes acoustiques excitées par les mouvements turbulents dans son enveloppe convective, nous a permis de déterminer son profil de rotation interne à la fois en rayon (jusqu'à $\sim 0.2R_{\odot}$) et en latitude (hormis aux pôles) (Schou et al., 1998). Comme le Soleil, les sous-géantes et les géantes rouges oscillent dans un large spectre de fréquence de modes acoustiques excités par la convection de surface, et grâce à l'avènement des télescopes spatiaux CoRoT ("Convection, Rotation and planetary Transits") (Baglin et al., 2006) et Kepler² (Borucki et al., 2010), ces oscillations sont aujourd'hui mesurables. Depuis les premiers travaux de Beck et al. (2012), Deheuvels et al. (2012) et Mosser et al. (2012b), nous avons ainsi glané pléthore d'informations sur l'évolution rotationnelle des étoiles de faible masse de la post-séquence principale et ce, du milieu de la branche des sous-géantes au sommet de la branche des géantes rouges. Dans la sous-section 1.3.1 qui suit, nous commençons par présenter ces informations avant d'exposer en sous-section 1.3.2, les indices suggérant la présence d'un champ magnétique enfoui dans la zone radiative de ces étoiles.

1.3.1 Rotation interne des sous-géantes et des géantes rouges

Les modes d'oscillation d'une étoile constituent un outil précieux permettant de sonder sa rotation interne. La structure spatiale des modes est décrite dans la direction horizontale par un harmonique sphérique de degré l et d'ordre azimuthal m , et dans la direction radiale par un ordre radial n . En l'absence de rotation, les modes de même degré l et de même ordre radial n sont dits dégénérés parce que leur fréquence ne dépend pas de l'ordre m . Il existe ainsi des multiplets de modes $(2l+1)$ possédant des fréquences angulaires ω_{nl} identiques. La rotation de l'étoile lève la dégénérescence, induisant une séparation en fréquences des modes d'ordre azimuthal m différent : c'est ce que l'on appelle le "splitting" rotationnel. En mesurant la fréquence d'espacement entre ces modes, on peut finalement en déduire le taux de rotation de la cavité dans laquelle ils se propagent (Christensen-Dalsgaard, 2002; Thompson et al., 2003; García & Ballot, 2019). Ceci est particulièrement intéressant pour les sous-géantes et les géantes rouges car lorsque ces étoiles de faible masse quittent la séquence principale, la densité de leur cœur augmente de façon si importante, que la fréquence de Brunt-Väisälä peut devenir comparable à la fréquence des modes acoustiques. Comme illustré sur la figure 1.6, lorsqu'une telle chose se produit et que la région évanescence localisée entre la cavité des modes de gravité (en bleu) et celle des modes de pression (en orange) est suffisamment petite, ces dernières se couplent de façon à ce que les modes possèdent un caractère mixte. Ces modes se comportent alors comme des modes de gravité dans le cœur et comme des modes de pression dans l'enveloppe. Ils nous permettent ainsi de sonder le cœur radiatif de ces étoiles tout en étant détectables en surface. Les modes

2. Suite à la perte de deux roues de réaction en mai 2013, la mission Kepler fut rebaptisée la mission K2 (Howell et al., 2014).

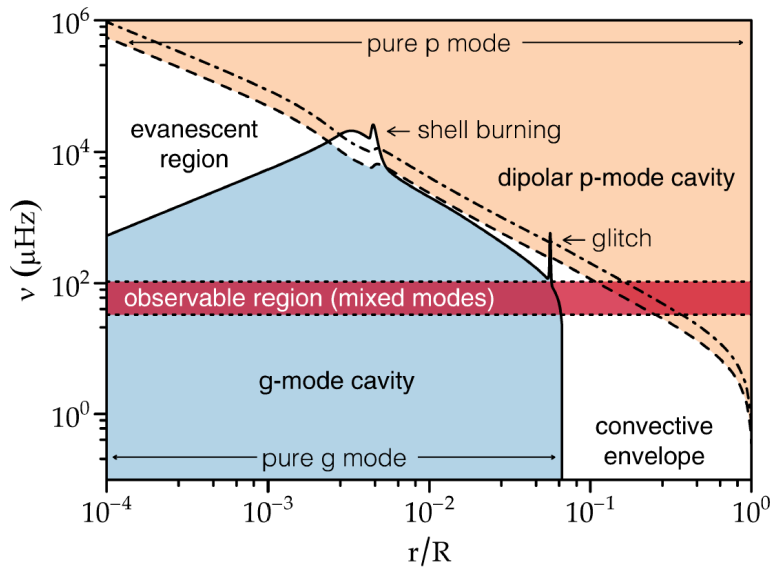


FIGURE 1.6 : Diagramme de propagation d'une étoile de faible masse ($M = 1M_{\odot}$ et $R = 7R_{\odot}$) se trouvant sur la branche des géantes rouges. Les modes mixtes se comportent comme des modes de pression dans la cavité acoustique illustrée en orange ($\omega > S_l$ et $\omega > N$, où ω est la fréquence d'oscillation du mode, S_l la fréquence de Lamb et N la fréquence de Brunt-Väisälä), et comme des modes de gravité dans celle illustrée en bleu ($\omega < S_l$ et $\omega < N$). La cavité des modes acoustiques est délimitée par des tirets pour les modes dipolaires ($l = 1$) et par une alternance de tirets et de pointillés pour les modes quadrupolaires ($l = 2$). Plus le degré l d'un mode est élevé, plus la région évanescente (illustrée en blanc) devient épaisse et plus le couplage entre les cavités acoustique et de gravité est faible. Les modes mixtes sont observés dans la gamme de fréquences délimitée par la bande rouge centrée autour de la fréquence ν_{\max} correspondant à l'amplitude maximale des oscillations. Crédit : [Christensen-Dalsgaard et al. \(2020\)](#).

mixtes sont généralement mesurés dans les sous-géantes qui se trouvent à un stade déjà avancé de leur évolution, ainsi que dans les géantes rouges. On manque pour le moment d'informations sur les sous-géantes les plus jeunes. Ceci s'explique par le fait que le spectre d'oscillation de ces dernières comporte moins de modes mixtes car la densité de leur cœur est plus faible, et donc la fréquence de Brunt-Väisälä aussi, mais également parce que leur température effective est plus importante (cf. section 1.1), ce qui réduit la durée de vie des modes ([Deheuvels et al., 2020](#)). De plus, la cadence d'observation des télescopes spatiaux est encore trop faible par rapport à leur fréquence d'oscillation.

En une dizaine d'années, la sismologie des modes mixtes est parvenue à lever une partie du voile masquant la rotation interne des étoiles de faible masse qui évoluent en se contractant depuis la fin de la séquence principale jusqu'à la phase de brûlage de l'hélium au cœur. Bien entendu, il reste encore beaucoup à faire puisque nous ne disposons pour le moment que du taux de rotation moyen des cavités dans lesquelles se propagent les ondes de gravité et les ondes acoustiques, sans pour autant être à même de déterminer le profil de rotation en rayon ou en latitude de ces étoiles, comme cela a été fait par [Schou et al. \(1998\)](#) pour le Soleil. Par ailleurs, les mesures astérosismiques qui permettent de déterminer simultanément les taux de rotation du cœur et de l'enveloppe, ne concernent pour le moment qu'un échantillon restreint d'étoiles ([Deheuvels et al., 2012, 2014](#); [Di Mauro et al., 2016](#); [Triana et al., 2017](#)).

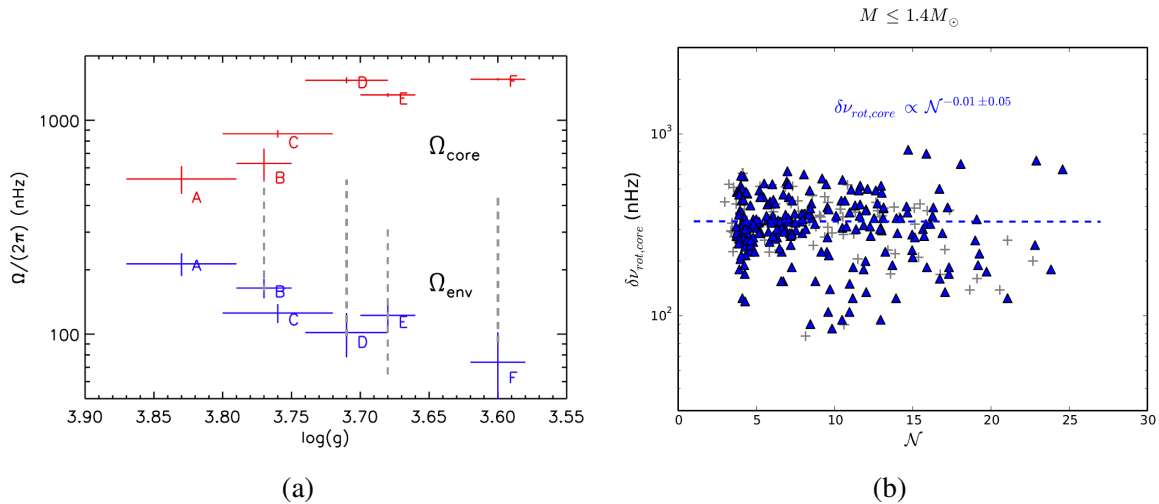


FIGURE 1.7 : Figure 1.7a : taux de rotation moyen (divisé par 2π) du cœur radiatif (en rouge) et de l'enveloppe convective (en bleu) de deux sous-géantes évoluées (A et B) et de quatre jeunes géantes rouges (C, D, E et F), en fonction du logarithme décimal de la gravité effective. La gravité effective est un proxy du stade évolutif de l'étoile, donc A est l'étoile la moins évoluée et F, l'étoile la plus évoluée. Crédit : Deheuvels et al. (2014). Figure 1.7b : "splitting" rotationnel moyen du cœur de géantes rouges de masse $\leq 1.4M_{\odot}$, en fonction de la densité de modes mixtes (voir Gehan et al. (2018) pour une définition). $\delta\nu$ est un proxy de la rotation du cœur, et la densité de modes mixtes \mathcal{N} , un proxy du stade évolutif de l'étoile. Plus ce nombre est élevé, plus l'étoile est évoluée sur la branche des géantes rouges. Crédit : Gehan et al. (2018).

Récemment, Deheuvels et al. (2020) ont déterminé les taux de rotation de deux jeunes sous-géantes, montrant qu'ils étaient compatibles avec une rotation quasi-solide à travers l'ensemble de l'étoile. La détermination des taux de rotation du cœur et de l'enveloppe dans deux sous-géantes évoluées par Deheuvels et al. (2014) (A et B sur la figure 1.7a), puis dans 22 étoiles de faible masse localisées à la base de la branche des géantes rouges (dont 4 sont aussi présentées sur la figure 1.7a (C, D, E et F)) par Beck et al. (2012), Deheuvels et al. (2012), Deheuvels et al. (2014), Di Mauro et al. (2016) et Triana et al. (2017) montrent qu'une rotation différentielle est présente à cette étape de l'évolution où le cœur tourne en moyenne entre 5 et 15 fois plus rapidement que l'enveloppe. Par ailleurs, les mesures de Deheuvels et al. (2014) suggèrent qu'une discontinuité, probablement associée à la localisation de la couche de brûlage d'hydrogène, est présente dans le profil de rotation de ces étoiles et qu'une rotation différentielle existe dans leur cœur radiatif en contraction. Enfin, la sismologie de 875 étoiles de faible masse (dont le sous-groupe de masse $\leq 1.4M_{\odot}$ est montré sur la figure 1.7b) se trouvant sur la branche des géantes rouges, et donc à un stade plus avancé de la post-séquence principale, montre que le taux de rotation du cœur semble rester constant en dépit de sa contraction jusqu'à la phase de brûlage de l'hélium au cœur (Mosser et al., 2012b; Gehan et al., 2018). En effet, comme le montre la figure 1.7b, où $\delta\nu$ est un proxy de la rotation du cœur et \mathcal{N} un proxy de l'âge des étoiles, la rotation du cœur semble rester constante au cours de l'évolution. Ces différents résultats permettent d'esquisser le scénario suivant pour rendre compte de l'évolution rotationnelle des étoiles de faible masse lors de la post-séquence principale : dès la fin de la séquence principale, un mécanisme très efficace de transport de moment cinétique est à l'œuvre et impose une rotation quasi-solide malgré la contraction du cœur de la jeune sous-géante et de l'expansion de son enveloppe. Spada et al. (2016) indiquent que ce mécanisme devrait maintenir le

couplage cœur/enveloppe durant ~ 1 milliard d'années après la fin de la séquence principale. Ensuite, il devient moins efficace, permettant au cœur des sous-géantes d'accélérer et à leur enveloppe de décélérer, d'une manière à peu près compatible avec une conservation du moment cinétique (voir figure 1.7a). Finalement, lorsqu'elles commencent leur ascension sur la branche des géantes rouges, le mécanisme d'extraction du moment cinétique devient de nouveau efficace et permet de maintenir un cœur à rotation constante malgré la contraction, jusqu'au sommet de la branche des géantes rouges (voir figure 1.7b). À la fin du chapitre 3, nous discuterons dans quelle mesure les résultats de nos simulations numériques sont compatibles avec ces contraintes observationnelles.

1.3.2 Quelques indices en faveur de la présence d'un champ magnétique

Bien que l'astérosismologie nous permette de connaître la rotation interne au centre des sous-géantes et des géantes rouges, elle ne nous permet pas, pour l'instant, de savoir si un champ magnétique est présent. Des travaux prometteurs sont actuellement en cours quant à l'effet qu'un champ pourrait avoir sur les fréquences d'oscillations (Bugnet et al., 2021; Mathis et al., 2021). Dans l'attente de preuves concrètes, nous ne disposons que de quelques indices qui suggèrent en effet qu'un champ magnétique pourrait être enfoui dans le cœur radiatif des étoiles de faible masse de la post-séquence principale.

Le premier indice est issu des simulations de dynamo réalisées par Brun et al. (2005) et Augustson et al. (2016). Elles montrent qu'il est possible d'engendrer des champs magnétiques par effet dynamo dans le cœur convectif des étoiles de type A et B au cours de la séquence principale, avec des intensités allant de 0.1 à 1 méga-Gauss. Or, les sous-géantes de masse $\gtrsim 1.1M_{\odot}$ possédaient un cœur convectif lorsqu'elles brûlaient de l'hydrogène en leur cœur sur la séquence principale. Il est donc possible que ces étoiles aient pu produire un champ magnétique par effet dynamo à cette étape de leur évolution avant que celui-ci ait relaxé dans une configuration stable lorsque le cœur convectif fut progressivement devenu radiatif à la fin de la séquence principale. Des configurations magnétiques stables dans les intérieurs radiatifs ont par exemple été obtenues numériquement par Braithwaite & Spruit (2004) et Braithwaite & Nordlund (2006).

Le deuxième indice nous vient d'une théorie développée par Fuller et al. (2015) pour expliquer l'observation de modes dipolaires d'amplitude anormalement faible dans le spectre d'oscillation d'une fraction de géantes rouges par Mosser et al. (2012a). Il a été proposé par Fuller et al. (2015) que ceci pourrait être la conséquence d'un champ magnétique, d'une intensité $\sim 10^6$ G, qui serait enfoui dans le cœur radiatif des étoiles de faible masse de la post-séquence principale. L'idée est qu'à une certaine profondeur dans l'étoile, l'intensité du champ magnétique est si élevée que la tension magnétique ne permet plus la propagation des ondes de gravité. Alors, soit l'onde transmet son énergie dans un spectre continu d'ondes d'Alfvén avec un large spectre de valeurs de l , soit elle se réfléchit tout en transférant son énergie à de plus hauts degrés l en raison de la nature non-sphérique du champ magnétique. La modification de la structure angulaire de l'onde par le champ magnétique provoque alors son piégeage dans les régions profondes de l'étoile, ce que Fuller et al. (2015) nomment l'effet de serre magnétique. Comme les ondes excitées dans la cavité acoustique qui transmettent le plus d'énergie à la cavité sous-jacente sont celles de degré l le plus bas, les modes dipolaires et quadrupolaires seraient les plus affectés par la présence d'un champ magnétique, ce qui a en effet été confirmé par Stello et al. (2016a). Bien que ce scénario fut soutenu par Stello et al. (2016b) et Cantiello et al. (2016), il est également controversé. En effet, la présence d'un champ magnétique devrait réduire la taille de la cavité des modes de gravité et donc modifier la période d'espacement des modes dépri-

més, tandis que l'énergie qui est transmise dans cette cavité devrait être définitivement perdue et par conséquent, les modes déprimés observés en surface ne devraient plus présenter de nature mixte. Comme noté par [Mosser et al. \(2017\)](#), aucune de ces deux caractéristiques n'est observée.

1.4 Modélisation du transport du moment cinétique dans les étoiles en contraction et comparaison aux données

En révélant la rotation interne des étoiles de faible masse de la post-séquence principale, l'astérosismologie a permis une confrontation directe des codes d'évolution stellaire aux données observationnelles. Il est alors rapidement devenu clair que des processus additionnels de transport du moment cinétique, non pris en compte dans ces codes, devaient exister pour expliquer l'évolution rotationnelle de ces étoiles. En effet, la contraction du cœur d'hélium inerte situé sous la coquille de brûlage d'hydrogène, conjointement à l'expansion de l'enveloppe qui la surplombe, devrait conduire à une rotation différentielle qui n'est pas observée dans les jeunes sous-géantes ([Deheuvels et al., 2020](#)). De même, la contraction du cœur d'hélium dégénéré devrait s'accompagner de son accélération tout au long de l'ascension d'une étoile sur la branche des géantes rouges, ce qui là encore n'est pas le cas ([Mosser et al., 2012b](#); [Gehan et al., 2018](#)). Après avoir passé en revue les différents processus de transport du moment cinétique implémentés dans les codes d'évolution stellaire, nous montrons comment ceux-ci sont mis en défaut par les données observationnelles dont nous disposons à ce jour sur la rotation des étoiles de faible masse en contraction (pré-séquence principale et post-séquence principale).

1.4.1 Mélange rotationnel : circulation méridienne et instabilités hydrodynamiques

Une partie des codes d'évolution stellaire actuels prend en compte un mélange rotationnel initialement formalisé par [Zahn \(1992\)](#). Dans ces prescriptions, on suppose que les zones radiatives sont le siège d'une turbulence induite par des instabilités hydrodynamiques, principalement de type cisaillement ([Zahn et al., 1974](#); [Zahn, 1975](#); [Knobloch & Spruit, 1982](#)), et d'une circulation méridienne. Une hypothèse importante de [Zahn \(1992\)](#) est que cette turbulence, préférentiellement horizontale en raison de la stratification stable, impose un profil de rotation différentielle principalement radial et redistribue, avec la circulation méridienne, le moment cinétique. L'hypothèse d'une rotation différentielle principalement radiale permet d'implémenter la circulation méridienne dans ces codes en réduisant sa description aux polynômes de Legendre de degré $l = 2$ ([Zahn, 1992](#); [Maeder & Zahn, 1998](#)). Le transport turbulent, lui, est modélisé à travers une viscosité effective déterminée à partir d'une description phénoménologique de la turbulence ([Zahn, 1992](#); [Talon & Zahn, 1997](#); [Mathis et al., 2004](#)).

Il s'avère que le mélange rotationnel à la Zahn n'est pas capable de rendre compte du taux de rotation du cœur des étoiles de faible masse qui se trouvent sur la post-séquence principale, tel que mesuré à travers l'astérosismologie ([Eggenberger et al., 2012](#); [Marques et al., 2013](#); [Ceillier et al., 2013](#)). Comme illustré sur la figure 1.8, les codes d'évolution stellaire qui incluent ce type de mélange prévoient des taux de rotation d'au moins deux ordres de grandeur plus élevés que ce qui est observé. Même en jouant sur certains paramètres (comme l'overshoot convectif), en réduisant l'effet inhibiteur du poids moléculaire moyen afin d'augmenter l'efficacité de la circulation méridienne ou en renforçant celle du transport turbulent, le taux de rotation est encore trop élevé d'au moins un ordre de grandeur ([Marques et al., 2013](#); [Ceillier et al., 2013](#)). Par

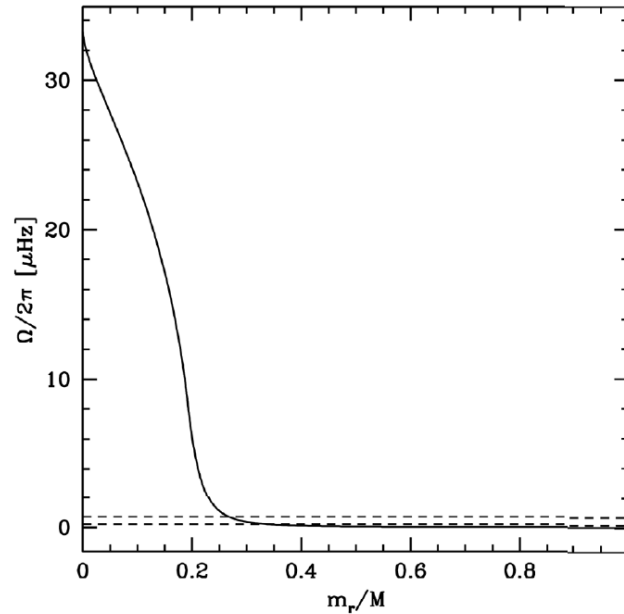


FIGURE 1.8 : Comparaison du profil de rotation obtenu avec un code d'évolution stellaire tenant compte du mélange rotationnel induit par la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement (trait plein), avec les taux de rotation du cœur radiatif et de l'enveloppe convective (tirets clairs et foncés respectivement) de KIC 7341231, une étoile de faible masse ($0.77 - 0.88M_{\odot}$) étudiée par [Deheuvels et al. \(2012\)](#), localisée à la base de la branche des géantes rouges. Les mesures astérosismiques montrent que le taux de rotation du cœur est de $\sim 0.71 \mu\text{Hz}$. C'est approximativement 2 ordre de grandeur plus faible que ce qui est prédit par le code d'évolution stellaire prévoyant un taux de rotation de $\sim 33 \mu\text{Hz}$. Crédit : [Ceillier et al. \(2013\)](#).

ailleurs, les codes d'évolution stellaire dans lesquels les prescriptions à la Zahn sont implémentées ne sont pas non plus capables d'expliquer l'évolution rotationnelle des T Tauri ([Amard et al., 2016](#)). En effet, bien qu'elles parviennent à reproduire l'évolution de leur rotation de surface au fil de la pré-séquence principale, elles prédisent par exemple des rotations différentielles trop importantes entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective à l'âge du Soleil, en désaccord avec les mesures héliosismiques.

1.4.2 Champ magnétique

Le mélange rotationnel induit par la circulation méridienne et les instabilités hydrodynamiques n'étant pas suffisamment efficace pour expliquer la rotation des sous-géantes et des géantes rouges, d'autres modèles ont été proposés. Certains d'entre eux incluent l'effet d'un champ magnétique. Comme nous l'avons vu en sous-section 1.3.2, il est en effet possible qu'un champ magnétique soit présent dans le cœur radiatif de ces étoiles. Un champ magnétique structuré à grande échelle impose une rotation solide sur un temps court par rapport au temps d'évolution et en particulier au temps de contraction ([Ferraro, 1937](#); [Mestel & Weiss, 1987](#); [Spruit, 1999](#)). Diverses études axisymétriques dans lesquelles un champ structuré à grande échelle est supposé être présent dans la zone radiative, ont été réalisées (voir par exemple, [Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#)). Dans ces modèles, on observe en effet qu'une co-rotation de la zone radiative avec l'enveloppe convective est rapidement imposée par l'intermédiaire du champ magnétique. Un tel champ connectant le cœur radiatif avec l'enveloppe convective n'est donc pas

compatible avec la rotation différentielle observée dans les sous-géantes évoluées, les géantes rouges ou les étoiles T Tauri. Dans le cas du Soleil, un modèle 2D alternatif a été proposé par [Gough & McIntyre \(1998\)](#) et [Acevedo-Arreguin et al. \(2013\)](#). Ces auteurs supposent que le champ est confiné au sein de la zone radiative par un pompage gyroscopique (voir [Garaud & Acevedo-Arreguin \(2009a\)](#) et [Garaud & Bodenheimer \(2010\)](#) pour une définition et une étude approfondie du pompage gyroscopique), ce qui permet non seulement à la rotation différentielle d'exister entre les zones convective et radiative, mais aussi à cette dernière d'être en rotation quasi-solide.

Une autre approche est de considérer que ces champs sont instables ([Spruit, 1999](#)) et que la turbulence magnétique résultante participe au transport du moment cinétique. Le seul formalisme de ce type actuellement implémenté dans les codes d'évolution stellaire est celui développé par [Spruit \(2002\)](#). Celui-ci repose sur une instabilité de type Tayler ([Tayler, 1973](#); [Pitts & Tayler, 1985](#)) du champ toroïdal. L'idée est qu'une graine de champ magnétique poloïdal, initialement enfouie dans la zone radiative de l'étoile, voit l'amplitude de sa composante toroïdale croître linéairement au cours du temps à travers l'étirement et l'enroulement de ses lignes de champ par la rotation différentielle, jusqu'à devenir instable. Cette instabilité génère ensuite une nouvelle composante magnétique poloïdale, qui à son tour est enroulée par la rotation différentielle existante. Le processus se répète ainsi jusqu'à saturation et conduit à une dynamo au sein de la zone radiative, connue sous le nom de dynamo de Tayler-Spruit. Celle-ci est capable d'induire un transport magnétique turbulent efficace de moment cinétique, qui est implémenté dans les codes d'évolution stellaire sous la forme d'une viscosité turbulente dans l'équation d'évolution du moment cinétique. La viscosité effective est déterminée à partir d'une description phénoménologique de la turbulence magnétique liée à la dynamo de Tayler-Spruit. Ce formalisme s'est d'abord avéré insuffisant pour expliquer le taux de rotation des géantes rouges, même lorsqu'il était couplé à un transport de moment cinétique par une circulation méridienne et des instabilités de cisaillements ([Cantiello et al., 2014](#)). Le mécanisme de saturation de cette dynamo fut alors révisé par [Fuller et al. \(2019\)](#). Il permet désormais d'avoir une viscosité effective plus élevée, et donc un transport de moment cinétique plus efficace. Toutefois, [Eggenberger et al. \(2019b\)](#) ont montré que cette nouvelle prescription ne pouvait pas reproduire simultanément le taux de rotation des sous-géantes évoluées et des géantes rouges. Enfin, l'existence même de la dynamo de Tayler-Spruit dans une zone radiative stellaire est toujours une question ouverte ([Braithwaite, 2006](#); [Zahn et al., 2007](#)).

1.4.3 Ondes de gravité internes et modes mixtes

Un autre prétendant au transport du moment cinétique sont les ondes de gravité internes. Ces dernières peuvent être excitées par les mouvements turbulents qui siègent au sein de la zone convective, à l'interface avec la zone radiative ([Fuller et al., 2014](#)), ou par les panaches convectifs qui pénètrent dans la zone radiative ([Pinçon et al., 2016](#)). Elles vont ensuite se propager dans la zone radiative jusqu'à une certaine profondeur où elles vont être amorties et déposer le moment cinétique qu'elles ont extrait de leur zone d'excitation. Le transport par ondes de gravité internes est introduit sous la forme d'un flux de moment cinétique dans les codes d'évolution stellaire, sous l'hypothèse d'une rotation différentielle principalement radiale ([Maeder, 2008](#)). [Fuller et al. \(2014\)](#) ont montré que les codes d'évolution stellaire dans lesquels le transport de moment cinétique par ondes de gravité internes excitées de façon stochastique est implémenté, étaient capables de reproduire les taux de rotation des sous-géantes évoluées mesurés par [Deheuvels et al. \(2014\)](#). Toutefois, les récentes mesures astérosismiques de [Deheuvels et al. \(2020\)](#) montrent aussi que le découplage cœur/enveloppe se produit trop tôt sur la branche des

sous-géantes pour que le formalisme de [Fuller et al. \(2014\)](#) puisse constituer un mécanisme viable. En revanche, [Pinçon et al. \(2017\)](#) ont montré que le transport de moment cinétique par ondes de gravité internes excitées par les panaches convectifs était plus efficace, et permettait d'imposer une rotation quasi-solide plus longtemps sur la branche des sous-géantes, tout en étant capable de reproduire les taux de rotation des sous-géantes de [Deheuvels et al. \(2014\)](#). Cette fois, le couplage cœur/enveloppe est maintenu suffisamment longtemps sur la branche des sous-géantes pour rendre compte des mesures astérosismiques de [Deheuvels et al. \(2020\)](#). Dans les deux cas cependant, l'extraction du moment cinétique par les ondes de gravité internes devient inefficace sur la branche des géantes rouges car l'augmentation importante de la fréquence de Brunt-Väisälä rend le cœur radiatif opaque à ces ondes ([Fuller et al., 2014](#); [Pinçon et al., 2017](#)). Un autre mécanisme faisant intervenir les modes mixtes a donc été proposé par [Belkacem et al. \(2015a\)](#). Celui-ci a été introduit dans un code d'évolution stellaire puis testé sur une étoile de $1.3M_{\odot}$ par [Belkacem et al. \(2015b\)](#). Les auteurs montrent que les modes mixtes peuvent efficacement extraire du moment cinétique dans le cœur des géantes rouges évoluées alors qu'ils ne contribuaient que très peu à ce transport lors de la phase de sous-géante et dans les jeunes géantes rouges. Notons que le transport du moment cinétique par ondes de gravité internes excitées de manière stochastique a également été proposé par [Charbonnel et al. \(2013\)](#) pour expliquer la rotation des T Tauri.

1.4.4 Modèles incluant une viscosité effective

Puisque nous ne connaissons pas avec certitude les mécanismes de transport du moment cinétique à l'œuvre dans les sous-géantes et les géantes rouges, une autre idée consiste à introduire une viscosité effective additionnelle dont l'origine physique n'est pas connue, et de l'ajuster de façon à ce que le flux turbulent qu'elle produit dans l'équation de conservation du moment cinétique, soit capable de rendre compte des taux de rotation mesurés par astérosismologie ([Eggenberger et al., 2012](#); [Spada et al., 2016](#); [Eggenberger et al., 2017, 2019a](#)). Ceci est quelque peu équivalent aux modèles à deux régions que nous avons décrits en sous-section [1.2.1](#) et dans lesquels un temps de couplage, caractérisant l'efficacité d'un transport de moment cinétique dont l'origine est inconnue, est ajusté afin de reproduire au mieux l'évolution rotationnelle des T Tauri. Ces modèles permettent de contraindre l'efficacité du transport de moment cinétique requise pour rendre compte des observations. Par exemple, [Eggenberger et al. \(2012\)](#) ont montré que pour reproduire la rotation du cœur de la géante rouge KIC 8366239, une viscosité effective additionnelle de l'ordre de $3 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ était nécessaire. Cette valeur est 600 fois plus élevée que la viscosité effective associée à une instabilité de cisaillement pour cette étoile. De même, [Eggenberger et al. \(2017, 2019a\)](#) trouvent que la viscosité effective (et donc l'efficacité du transport du moment cinétique) doit augmenter avec la masse de l'étoile, à la fois durant la phase de sous-géante et sur la branche des géantes rouges. Finalement, ces modèles permettent également d'esquisser un scénario décrivant l'évolution rotationnelle de ces étoiles. Comme nous en avons discuté à la section précédente, [Spada et al. \(2016\)](#) montrent que la viscosité effective nécessaire pour reproduire le taux de rotation des sous-géantes évoluées de [Deheuvels et al. \(2014\)](#) revient à maintenir une rotation solide dans l'ensemble de l'étoile pendant ~ 1 milliard d'années après la fin de la séquence principale. Ainsi, la viscosité effective doit d'abord être très élevée (transport de moment cinétique très efficace) pour maintenir un couplage cœur/enveloppe durant toute cette période, avant de diminuer (transport moins efficace) jusqu'à la fin de la phase sous-géante, puis de ré-augmenter (transport plus efficace) le long de la branche des géantes rouges ([Spada et al., 2016](#); [Eggenberger et al., 2019a](#)).

Dans cette thèse, nous avons pour objectif d'apporter quelques éléments de réponse au problème du transport de moment cinétique dans les étoiles en contraction. Pour cela, nous effectuons des simulations numériques 2D afin de déterminer les écoulements axisymétriques induits par la rotation et la contraction d'une zone radiative stellaire. Ceci nous permettra de déterminer le profil de rotation différentielle naturellement produit par la contraction. Nous pourrons alors directement tester l'hypothèse de Zahn (1992) d'une rotation différentielle essentiellement à symétrie sphérique. Par ailleurs, nous déterminerons également si une circulation méridienne peut exister dans les régions où la stratification stable est plus forte. Finalement, nous étudierons la question de l'interaction entre la rotation différentielle induite par la contraction et un champ magnétique de grande échelle qui serait présent dans la zone radiative stellaire. Nous souhaitons savoir si un tel champ peut efficacement imposer une rotation solide dans l'étoile comme sembleraient l'indiquer les quelques mesures sismiques des jeunes sous-géantes. Si oui, nous espérons déterminer si un découplage peut se produire à un moment donné durant la phase sous-géante afin d'expliquer les mesures astérosismiques des sous-géantes plus évoluées.

CHAPITRE 2

TRANSPORT DU MOMENT CINÉTIQUE, INSTABILITÉS ET COUCHES LIMITES : *PHYSIQUE DES ÉCOULEMENTS AXISYMÉTRIQUES DANS UNE ZONE RADIATIVE STELLAIRE*

Sommaire

2.1	Transport axisymétrique du moment cinétique	26
2.1.1	Circulation méridienne d'Eddington-Sweet	27
2.1.1.1	Un bref historique	27
2.1.1.2	Temps caractéristique de transport du moment cinétique	29
2.1.2	Ondes d'Alfvén	31
2.1.2.1	L'origine de ces ondes hydromagnétiques	32
2.1.2.2	Effet Ω et loi d'isorotation de Ferraro	34
2.1.2.3	Mélange de phase	36
2.1.2.4	Zone morte	38
2.2	Instabilités axisymétriques dans une zone radiative	40
2.2.1	Instabilités hydrodynamiques	41
2.2.1.1	Instabilité centrifuge	41
2.2.1.2	Instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke	44
2.2.2	Instabilités magnétohydrodynamiques	46
2.2.2.1	Instabilité magnétorotationnelle standard	46
2.2.2.2	Instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale	50
2.3	Couches limites (magnéto)hydrodynamiques	54
2.3.1	Couche d'Ekman	55
2.3.2	Couches de Stewartson	61
2.3.3	Couche de Hartmann	64
2.3.4	Couche de Shercliff	66

Dans cette thèse, nous nous concentrons sur les écoulements axisymétriques dans une zone radiative en contraction et leur capacité à transporter du moment cinétique. La contraction elle-même constitue déjà une première façon de transporter du moment cinétique. Pour le comprendre, le lecteur devrait garder en tête l'image du patineur qui, en rapprochant les bras de son corps augmente progressivement sa vitesse de rotation par conservation du moment cinétique. Il en est de même lorsqu'une étoile se contracte. Certaines couches fluides tournent alors plus rapidement que d'autres façonnant finalement, un profil de rotation à travers l'ensemble de la zone radiative.

En l'absence de tout champ magnétique, de nombreux processus de transport du moment cinétique sont susceptibles d'exister, que ce soit les ondes de gravité internes (Pinçon et al., 2017), les effets visqueux ou encore une circulation méridienne de grande échelle de type Eddington-Sweet (Eddington, 1925; Sweet, 1950) dont la description en sous-section 2.1.1 marquera le commencement de ce chapitre. Comme nous le verrons en sous-section 2.1.2, un champ magnétique est lui aussi capable d'engendrer un transport très efficace de moment cinétique via des ondes hydromagnétiques (Ferraro, 1937; Mestel & Weiss, 1987). En redistribuant du moment cinétique lors des phases de contraction, ces processus affectent et transforment peu à peu le profil de rotation qui à son tour, devient potentiellement instable. Dans un écoulement axisymétrique stablement stratifié, lorsque les inhomogénéités chimiques ne sont pas prises en compte, les instabilités susceptibles d'apparaître sont au nombre de trois : l'instabilité centrifuge, l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke, et l'instabilité magnétorotationnelle. Les deux premières seront décrites en sous-section 2.2.1. La dernière, elle, peut se manifester sous deux formes différentes et ne se développe qu'en présence d'un champ magnétique. Elle a été observée dans nos simulations et sera détaillée en sous-section 2.2.2. Ces instabilités constituent en fait, une autre manière de transporter du moment cinétique. En effet, un écoulement instable devient très rapidement turbulent et cette turbulence permet un transport plus efficace de moment cinétique en renforçant la viscosité (Zahn, 1992).

Lorsque l'on entreprend d'étudier un phénomène physique, les simulations numériques multidimensionnelles constituent un outil particulièrement efficace. Toutefois, ces simulations imposent de déterminer un domaine dans lequel les calculs sont effectués, et d'appliquer des conditions aux limites aux bords de ce domaine. Dans notre cas, une conséquence de ces conditions aux limites est le développement de couches limites aux bords sphériques de nos simulations. Celles-ci peuvent avoir une influence sur la dynamique interne qui doit être bien comprise, notamment pour s'en affranchir. Dans la suite, nous présentons les couches d'Ekman (sous-section 2.3.1), de Stewartson (sous-section 2.3.2), de Hartmann (sous-section 2.3.3) et de Sherriff (sous-section 2.3.4) que nous avons rencontrées dans nos simulations.

Le présent chapitre comporte trois parties. Une première partie, la section 2.1, sera axée sur la description des transports axisymétriques de moment cinétique. Dans une seconde partie, la section 2.2, nous nous focaliserons sur les diverses instabilités axisymétriques à même de se développer dans un intérieur radiatif stellaire. Enfin, dans une dernière partie, la section 2.3, nous décrirons les différentes couches limites susceptibles d'apparaître dans nos simulations d'une zone radiative en cours de contraction.

2.1 Transport axisymétrique du moment cinétique

Dans cette section, nous nous intéressons à deux processus de transport de moment cinétique dans le cas d'un écoulement axisymétrique : la circulation méridienne d'Eddington-Sweet et les ondes d'Alfvén.

2.1.1 Circulation méridienne d'Eddington-Sweet

Les intérieurs radiatifs stellaires peuvent être le siège d'une circulation méridienne de grande échelle qui transporte à la fois du moment cinétique et des éléments chimiques. Bien que ce transport soit réalisé sur une échelle de temps longue, il peut avoir une influence sur le profil de rotation différentielle. Comme nous le verrons rapidement, l'origine de cette circulation découle de l'absence de solution stationnaire dans une zone radiative en rotation solide. Depuis les travaux de Zahn (1992), elle est implémentée dans l'état de l'art des codes d'évolution stellaire. Après une brève revue historique de cette circulation, nous déterminerons par une analyse en ordre de grandeur son temps caractéristique de transport de moment cinétique.

2.1.1.1 Un bref historique

La circulation méridienne d'Eddington-Sweet est un problème astrophysique qui débute il y a près d'un siècle avec les travaux de Von Zeipel (1924). C'est en recherchant des solutions d'équilibre d'une zone radiative en rotation solide, que ce dernier fait état d'une incompatibilité entre les conditions d'équilibre hydrostatique et thermique dans un intérieur radiatif. Il montre en effet que pour une zone radiative en rotation solide, l'accélération centrifuge dérive d'un potentiel, et qu'un équilibre mécanique n'est possible que si les isobares, isopycnes, isothermes et équipotentielles sont confondues. L'étoile est dite barotrope, et toute grandeur thermodynamique peut ainsi être exprimée en fonction d'un potentiel généralisé Φ défini via la relation

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} + \frac{\Omega^2}{2} \vec{\nabla} s^2 = -\vec{\nabla} \Phi, \quad (2.1)$$

où \vec{g}_{eff} est la gravité effective, \vec{g} la gravité et $(\Omega^2/2) \vec{\nabla} s^2$ l'accélération centrifuge dans laquelle Ω désigne le taux de rotation et s la coordonnée radiale cylindrique. En présence de réactions nucléaires, un équilibre radiatif est réalisé lorsque

$$\chi(\Phi) \frac{\partial T(\Phi)}{\partial \Phi} (4\pi\rho(\Phi)G - 2\Omega^2) + \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\chi(\Phi) \frac{\partial T(\Phi)}{\partial \Phi} \right) (\vec{\nabla} \Phi)^2 + \rho(\Phi)\epsilon = 0, \quad (2.2)$$

où, χ est la conductivité thermique, T la température, ρ la densité, G la constante de gravitation universelle et ϵ le taux de production d'énergie nucléaire. Von Zeipel (1924) montre qu'une solution d'équilibre n'est possible que si le second membre de cette équation est nul. En effet, le terme en rouge n'est autre que la gravité effective au carré qui ne peut pas être uniforme le long d'une équipotentielle. Il est à l'origine de ce que l'on nomme l'assombrissement gravitationnel : l'accélération centrifuge tend à étirer l'étoile à l'équateur et à l'aplatir au niveau des pôles. Puisque le flux radiatif est proportionnel à la gravité effective, les pôles sont plus chauds et plus brillants que l'équateur. La nullité du second membre de l'équation (2.2) implique que $\chi(\Phi) \partial T(\Phi) / \partial \Phi = C$ où C désigne une constante, ici sans importance. Donc, une solution d'équilibre n'est possible que si le taux de production d'énergie nucléaire satisfait la relation suivante :

$$\epsilon = C \left(1 - \frac{\Omega^2}{2\pi G \rho(\Phi)} \right). \quad (2.3)$$

Rapidement, Vogt (1925) et Eddington (1925) doutent qu'une telle relation soit possible puisqu'il n'y a aucune raison physique pour que le taux de réactions nucléaires s'ajuste au taux de rotation. Ils suggèrent alors qu'une zone radiative ne peut tout simplement pas être en équilibre : comme illustré sur la figure 2.1, la distorsion des équipotentielles engendrée par la rotation induit un flux radiatif plus important au niveau des pôles qu'à l'équateur. Ce chauffage différentiel

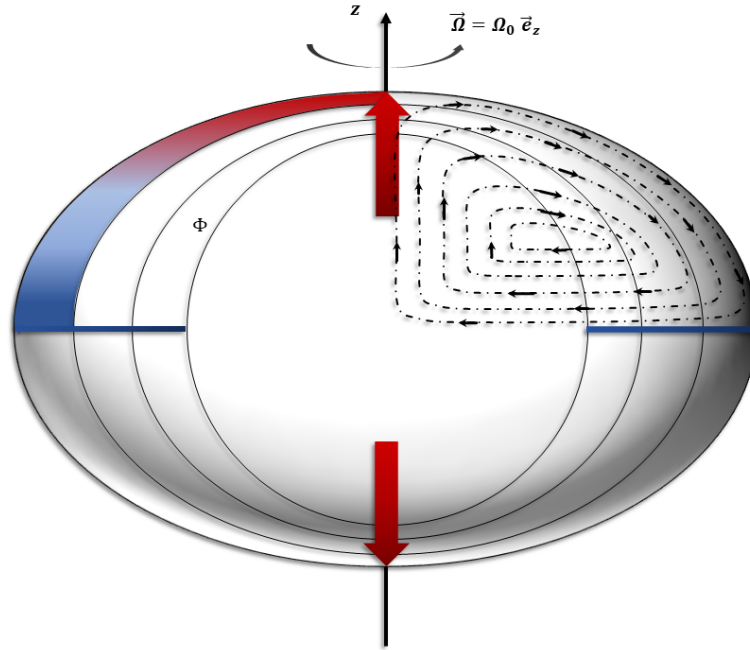


FIGURE 2.1 : Illustration de la circulation méridienne d'Eddington-Sweet induite par l'accélération centrifuge. Les équipotentiels (contours noirs en trait plein) sont déformées par cette dernière et se retrouvent d'autant plus resserrées que l'on approche des pôles. Par conséquent, à cette localisation, la gravité effective et donc le flux radiatif, sont maximums. Ceci produit un chauffage différentiel le long d'une équipotentielle (rouge pour le chaud, bleu pour le froid) et entraîne un déséquilibre thermique. Une circulation méridienne (contours noirs en tirets) est alors générée et tente de rétablir une situation d'équilibre.

le long d'une équipotentielle doit à son tour produire une circulation méridienne qui va advecter l'entropie jusqu'à rétablir une situation d'équilibre thermique en compensant exactement la divergence du flux de chaleur.

Cette circulation méridienne, telle que conceptualisée par [Eddington \(1925\)](#) et formalisée vingt-cinq ans plus tard par [Sweet \(1950\)](#), était déjà à l'époque sérieusement remise en cause par [Randers \(1941\)](#) parce qu'elle ne respectait pas le principe de conservation du moment cinétique. Il suffit en effet de prendre l'équation de conservation du moment cinétique sous sa forme conservative en négligeant l'effet de la viscosité ou l'effet lié à la présence d'un champ magnétique, comme cela fut originellement supposé par [Eddington \(1925\)](#) et [Sweet \(1950\)](#),

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega) + \vec{\nabla} \cdot (\rho r^2 \sin^2 \theta \Omega \vec{U}) = 0, \quad (2.4)$$

pour voir que si un état stationnaire est atteint, la divergence du flux de moment cinétique advecté par la circulation méridienne n'est pas compensée et localement, la conservation du moment cinétique n'est pas assurée.

Ce manque de conservation du moment cinétique et ses conséquences sur la circulation d'Eddington-Sweet furent discutés en détail par [Busse \(1981, 1982\)](#). L'auteur montre qu'en l'absence de flux capable de contrebalancer le flux de moment cinétique advecté par la circulation d'Eddington-Sweet, celle-ci ne peut exister que durant un transitoire, tout au plus, de l'ordre d'un temps d'Eddington-Sweet défini par $\tau_{ED} = (N/2\Omega)^2 (r_0^2/\kappa)$ ([Spiegel & Zahn, 1992](#)), où N est la contribution thermique de la fréquence de Brunt-Väisälä, Ω le taux de rotation, r_0

une échelle de longueur caractéristique (par exemple la taille de la zone radiative) et κ la diffusivité thermique. Passé ce temps, la circulation méridienne et la divergence du flux thermique ont relaxé vers un état d'équilibre où ils sont tous deux nuls. Le seul état stationnaire possible est alors celui d'une rotation différentielle déterminée par l'équation du vent thermique (Roxburgh, 1964; Busse, 1981) que nous explicitons dans la partie 2.1.1.2 qui suit.

Il faudra finalement attendre les travaux de Zahn (1992) pour avoir un modèle dans lequel la circulation méridienne d'Eddington-Sweet respecte la conservation du moment cinétique. L'idée de Zahn (1992) est de postuler qu'une zone radiative est une région turbulente car la rotation différentielle qui y siège produit un cisaillement potentiellement suffisamment important pour rendre l'écoulement hydrodynamiquement instable. En partant de cette hypothèse, un flux turbulent visqueux est désormais introduit dans l'équation (2.4) et assure la conservation du moment cinétique. Par ailleurs, puisque les intérieurs radiatifs sont stratifiés en entropie, la turbulence ainsi postulée devrait être fortement anisotrope, i.e. préférentiellement horizontale, et ainsi lisser le taux de rotation sur un niveau de surface (une couche sphérique ou une isobare) façonnant alors une rotation différentielle préférentiellement radiale. L'hypothèse d'une faible rotation différentielle en latitude permet entre autre de développer l'ensemble des grandeurs physiques impliquées dans le problème sur la base des polynômes de Legendre jusqu'au degré $l = 2$, de rendre le problème globalement unidimensionnel, et donc de permettre son implémentation dans les codes d'évolution stellaire. Ainsi, la prescription de Zahn (1992) permet d'avoir un modèle respectant la conservation du moment cinétique, dans lequel la circulation et la turbulence transportent du moment cinétique et des éléments chimiques.

2.1.1.2 Temps caractéristique de transport du moment cinétique

Comme nous venons de le voir, la circulation méridienne se manifeste en réponse à une situation de déséquilibre. Jusqu'ici nous avons considéré que celle-ci était produite par l'accélération centrifuge. Nous allons maintenant voir que ce déséquilibre peut être engendré de diverses façons.

Considérons le cas d'un écoulement stationnaire axisymétrique et barocline (les isobares ne sont pas confondues avec les isopycnes) dans un repère en rotation tournant à la vitesse angulaire Ω_0 , sous l'approximation de Boussinesq (c'est-à-dire que l'on néglige les variations de densité sauf lorsqu'elles produisent un mouvement à travers la force d'Archimède). Dans ce qui suit, nous restreignons notre discussion à une portion de zone radiative stellaire caractérisée par une couche fluide comprise entre r_i et r_0 (où r_i désigne la base de la couche et r_0 le haut), stablement stratifiée et en rotation, au sein de laquelle on suppose que la rotation différentielle est de faible amplitude de telle sorte que le nombre de Rossby basé sur le contraste de rotation différentielle $R_0 = \Delta\Omega/\Omega_0$, où $\Delta\Omega = \Omega_i - \Omega_0$ et Ω_i désigne le taux de rotation à la base de la couche, est $\ll 1$. Ceci permet de négliger les termes inertiels par rapport à l'accélération de Coriolis. Par ailleurs, nous négligeons aussi les effets visqueux et ignorons la présence éventuelle d'un champ magnétique. Nous introduisons une force $\vec{\mathcal{F}}$ qui n'interviendra que dans la composante azimuthale de l'équation de quantité de mouvement afin d'assurer la conservation du moment cinétique. Celle-ci peut par exemple être due à des effets visqueux d'origine turbulente, comme dans Zahn (1992), ou encore à la contraction de l'étoile. Par simplicité, nous ignorons également l'effet des inhomogénéités chimiques, et nous considérons que la couche fluide stratifiée en entropie est suffisamment éloignée du cœur stellaire afin de ne pas avoir à prendre en compte le taux de production d'énergie nucléaire. Nous supposons également que la diffusivité thermique à travers cette couche est uniforme. Pour un profil de gravité associé à une densité du fluide uniforme $\vec{g} = -g_0 \vec{r}/r_0$, avec g_0 uniforme, les équations qui permettent de décrire cet écoulement stationnaire s'écrivent dans le repère tournant à Ω_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0, \\ 2r \sin \theta \frac{\partial \delta \Omega}{\partial z} = \frac{g_0}{r_0 \Omega_0 \bar{T}} \frac{\partial \Theta'}{\partial \theta}, \\ 2r \Omega_0 \sin \theta \cos \theta \delta \Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (r \sin \theta \delta \Omega) + 2\Omega_0 U_s = \mathcal{F}, \\ \frac{\partial \Theta'}{\partial t} + U_r \frac{d\bar{T}}{dr} = \kappa \vec{\nabla}^2 \Theta', \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où \vec{U} est le champ de vitesse, r le rayon de la couche, $\delta \Omega = U_\phi / (r \sin \theta)$ la rotation différentielle, g_0 une valeur de référence de la gravité prise en $r = r_0$, \bar{T} le champ de température à symétrie sphérique correspondant à l'état de référence en équilibre hydrostatique, Θ' les fluctuations de température, P la pression, et U_ϕ , U_r et U_s sont respectivement les composantes azimuthale, radiale et perpendiculaire à l'axe de rotation, du champ de vitesse \vec{U} . La première équation du système (2.5) exprime la conservation de la masse. La deuxième est ce que l'on appelle l'équilibre du vent thermique et est obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de quantité de mouvement projeté dans la direction azimuthale. Il s'agit d'une relation sans causalité entre les fluctuations de température et la rotation différentielle. La troisième équation correspond à l'équilibre géostrophique. Il s'agit d'un équilibre entre le gradient de pression et l'accélération de Coriolis, obtenu en projetant l'équation de quantité de mouvement dans la direction latitudinale. La quatrième équation représente la conservation du moment cinétique et enfin, la dernière correspond à l'équilibre thermique. Les termes instationnaires, en rouge, ont simplement été rajoutés pour faciliter la discussion qui suit.

D'après l'équation du vent thermique, si l'on crée des déviations sphériques du champ de température, on produit de la rotation différentielle. Inversement, si une rotation différentielle est forcée, celle-ci va immédiatement produire des déviations sphériques du champ de température ($\partial \Theta' / \partial \theta \neq 0$). Dans les deux cas, une circulation méridienne est induite pour assurer l'équilibre thermique (dernière équation). Cette circulation va ensuite redistribuer du moment cinétique via l'équation d'évolution du moment cinétique (avant-dernière équation) jusqu'à ce que l'état stationnaire décrit par le système d'équations (2.5) soit atteint. Dans cette image, la rotation différentielle peut être forcée à la base de la zone convective, une situation considérée par Spiegel & Zahn (1992), tandis que les déviations sphériques de température peuvent être produites par l'accélération centrifuge comme envisagé par Eddington (1925) et Sweet (1950). Cependant, on peut également voir les choses autrement. D'après l'équation de conservation du moment cinétique, si une circulation méridienne est imposée, celle-ci va induire des déviations sphériques du champ de température (dernière équation) qui à leur tour, vont produire de la rotation différentielle à travers l'équation du vent thermique. Ce dernier cas est celui que l'on rencontrera dans une étoile en contraction où la circulation méridienne va être forcée par un écoulement radial (terme \mathcal{F} dans l'équation du moment cinétique). Comme nous l'aurons compris, la circulation méridienne d'Eddington-Sweet n'est rien d'autre qu'une réponse du système à un déséquilibre, l'autre réponse étant de la rotation différentielle et un certain niveau de baroclinité.

Nous allons maintenant effectuer un raisonnement en ordre de grandeur afin de déterminer

l'échelle de temps caractéristique sur laquelle une circulation d'Eddington-Sweet transporte le moment cinétique. Pour ce faire, nous prendrons comme échelle de longueur caractéristique le rayon r_0 de la couche stablement stratifiée, $\Delta\Omega$ comme amplitude caractéristique de la rotation différentielle, et $\Delta\bar{T}/r_0$ comme échelle représentative du gradient radial de température de l'état de référence en équilibre hydrostatique. D'après l'équation du moment cinétique, la circulation advecte du moment cinétique sur une échelle de temps

$$\tau_{\text{AM}} \approx \frac{r_0}{U_s} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}. \quad (2.6)$$

Par ailleurs, l'équation d'équilibre thermique montre que

$$U_r \approx \frac{\kappa}{r_0} \frac{\Theta'}{\Delta\bar{T}}, \quad (2.7)$$

tandis que d'après l'équation du vent thermique, les déviations sphériques du champ de température sont reliées à la rotation différentielle via la relation

$$\frac{\Theta'}{\Delta\bar{T}} \approx \left(\frac{\Omega_0}{N_T}\right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}, \quad (2.8)$$

où nous avons introduit une amplitude caractéristique de la fréquence de Brunt-Väisälä $N_T = \sqrt{g_0 \Delta\bar{T}/r_0 \bar{T}}$. Puisque d'après l'équation de continuité $U_r \sim U_\theta \sim U_s$, ces équations peuvent finalement être combinées pour aboutir au temps d'Eddington-Sweet que nous avons vu plus haut en 2.1.1.1

$$\tau_{\text{AM}} = \tau_{\text{ED}} = \frac{r_0^2}{\kappa} \left(\frac{N_T}{\Omega_0}\right)^2 = \tau_{\text{KH}} \left(\frac{N_T}{\Omega_0}\right)^2, \quad (2.9)$$

et sur lequel la circulation méridienne redistribue du moment cinétique. Comme indiqué dans l'équation (2.9), ce temps peut aussi être défini comme un produit entre le temps de Kelvin-Helmholtz τ_{KH} et le rapport au carré de la fréquence de Brunt-Väisälä au taux de rotation. Puisque ce rapport est généralement ≥ 1 dans les zones radiatives, et parce que le temps de Kelvin-Helmholtz varie entre ~ 1.15 millions d'années pour une étoile de Herbig de $5M_\odot$ et une centaine de millions d'années pour une T Tauri de $0.6M_\odot$ ou une géante rouge (cf. section 1.1 du chapitre 1), le transport du moment cinétique par la circulation d'Eddington-Sweet est, comme nous l'avons dit plus tôt, un processus relativement long. Notons toutefois que ce temps peut devenir plus court si la circulation méridienne est restreinte à une région spécifique de l'étoile, telle que la tachocline considérée par Spiegel & Zahn (1992). Dans ce cas, l'analyse en ordre de grandeur conduit à définir un temps d'Eddington-Sweet prenant en compte la taille de cette zone comme $\tau_{\text{ED}}^* = (\Delta/r_{\text{CZ}})^2 \tau_{\text{ED}}$, où Δ est l'épaisseur de la tachocline et r_{CZ} est le rayon de la zone radiative qui s'étend jusqu'à la base de la zone convective (Oglethorpe & Garaud, 2013). Pour une tachocline dont l'épaisseur est comprise entre 2% et 4% du rayon solaire et $r_{\text{CZ}} = 0.7R_\odot$, le temps d'Eddington-Sweet est donc divisé par mille.

2.1.2 Ondes d'Alfvén

Rappelons que l'objectif de cette section est de décrire différents processus axisymétriques de transport du moment cinétique qui se sont avérés pertinents pour notre étude d'une zone radiative stellaire en contraction. En présence d'un champ magnétique, les ondes d'Alfvén jouent le plus souvent un rôle prépondérant.

2.1.2.1 L'origine de ces ondes hydromagnétiques

La force de Lorentz induite par le champ magnétique a pour expression :

$$\vec{\mathcal{F}}_L = \frac{1}{\mu_0} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} \left[\underbrace{(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}}_{\text{Tension magnétique}} - \underbrace{\vec{\nabla}^2 \left(\frac{B^2}{2} \right)}_{\text{Pression magnétique}} \right], \quad (2.10)$$

où μ_0 désigne la perméabilité du vide et \vec{B} correspond au vecteur champ magnétique. Cette force se décompose ainsi comme la somme d'un terme de tension magnétique et d'un terme de pression magnétique, et chacun d'eux agit comme une force de rappel permettant la propagation d'ondes magnétohydrodynamiques. Par exemple, dans un milieu compressible, toute perturbation de la pression engendre la propagation d'ondes magnéto-acoustiques, lentes ou rapides. Les écoulements que nous considérerons dans cette étude seront toujours caractérisés par de faibles nombres de Mach $\mathcal{M}_a = V_{\text{fluide}}/c_s$, où V_{fluide} est la vitesse locale du fluide et c_s la célérité du son, et par conséquent, cette catégorie d'onde sera ignorée. Toutefois, le terme de tension magnétique est lui aussi, susceptible d'exciter un certain type d'onde à même de se propager au sein d'un écoulement à bas nombre de Mach : les ondes d'Alfvén. Découvertes par [Alfvén \(1942\)](#), ces ondes sont associées à un transport de moment cinétique extrêmement efficace et sont capables d'imposer une rotation solide dans la majeure partie d'une zone radiative en seulement 10^4 ans pour un champ magnétique poloïdal dont l'intensité est aussi faible que 1 G ([Mestel & Weiss, 1987](#)). Avant de décrire la façon dont elles parviennent à un tel résultat, intéressons-nous à leur origine.

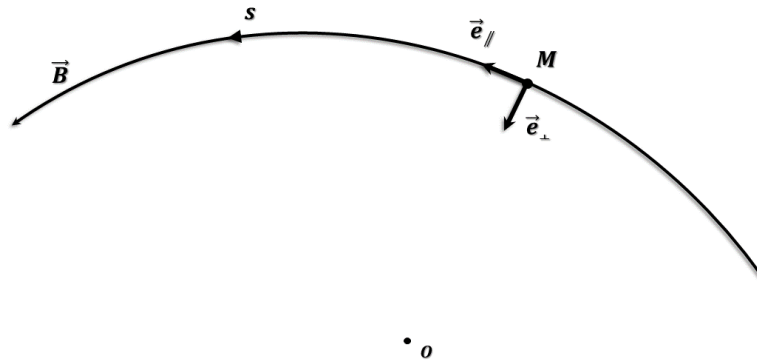


FIGURE 2.2 : Ligne de champ magnétique dans un système de coordonnées curvilignes. \vec{e}_\perp et \vec{e}_\parallel sont respectivement les vecteurs normal et tangent à la ligne de champ. s est la coordonnée curviligne.

Soit un système de coordonnées curvilignes associé à une ligne de champ magnétique, tel que représenté sur la figure 2.2. Dans ce cas nous avons $\vec{B} = B_\parallel \vec{e}_\parallel$, et le terme de tension magnétique peut se réécrire

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\partial B_\parallel^2}{\partial s} \vec{e}_\parallel + \frac{B_\parallel^2}{R} \vec{e}_\perp, \quad (2.11)$$

où R est le rayon de courbure de la ligne de champ, s est la coordonnée curviligne et \vec{e}_\perp et \vec{e}_\parallel sont respectivement les vecteurs normal et tangent à la ligne de champ. D'après (2.11), toute

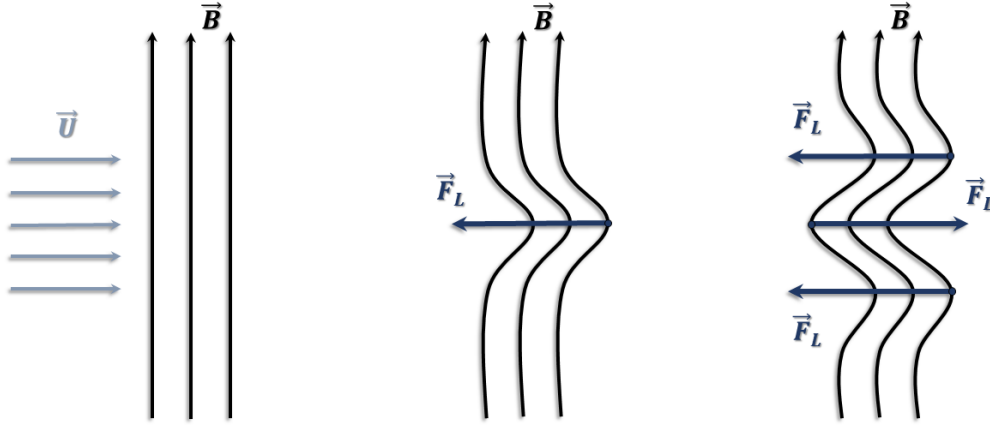


FIGURE 2.3 : Excitation d'ondes d'Alfvén via la force de Lorentz (en bleu) en réponse à la déformation des lignes de champ magnétique (en noir) par une perturbation de vitesse \vec{U} (en gris). Figure inspirée de [Galtier \(2013\)](#).

accentuation de la courbure de cette ligne sous l'action, par exemple, d'une perturbation de vitesse \vec{U} , entraîne instantanément une tension B_{\parallel}^2/R perpendiculairement à la ligne de champ qui tend à rétablir sa forme d'origine. En tentant de réduire cette courbure, la force de rappel excite des ondes hydromagnétiques qui se propagent le long de la ligne de champ : les ondes d'Alfvén. Cette situation est imagée en figure 2.3.

Afin de comprendre la nature intrinsèque de ces ondes, il convient d'établir leur relation de dispersion. Pour cela, on peut considérer la situation illustrée en figure 2.3, d'une perturbation infinitésimale d'un écoulement compressible à la fois non stratifié et non visqueux, initialement statique ($\vec{U} = 0$, $\vec{\nabla} P = 0$ et $\bar{\rho} \neq 0$) et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = \bar{B} \vec{e}_z$. Les deux directions x et y perpendiculaires à ce champ étant équivalentes, le problème est réduit à deux dimensions (x, z). Après avoir négligé l'effet de la diffusion magnétique, les équations de la magnétohydrodynamique sont linéarisées puis combinées sous la forme d'une unique équation d'onde ([Spruit, 2013](#)) :

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = c_s^2 \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) + \frac{1}{\mu_0 \bar{\rho}} \left[\left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{U} \times \vec{B} \right) \right) \right) \times \vec{B} \right]. \quad (2.12)$$

Cette dernière admet des solutions sous la forme d'ondes planes de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z$: $\vec{U} = \vec{U} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t))$. En injectant cette expression dans l'équation (2.12), on obtient la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 \vec{U} = \left(c_s^2 + \frac{\bar{B}^2}{\mu_0 \bar{\rho}} \right) \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{U}) + \frac{(\vec{k} \cdot \vec{B})}{\mu_0 \bar{\rho}} \left[\vec{U} (\vec{k} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{k} \cdot \vec{U}) - \vec{k} (\vec{B} \cdot \vec{U}) \right]. \quad (2.13)$$

Considérons le cas limite représenté en figure 2.3 pour lequel le champ de vitesse est perpendiculaire au champ magnétique. Alors l'onde se propage dans une direction parallèle à la ligne de champ et l'expression (2.13) se simplifie pour donner

$$\omega^2 = k_z^2 \frac{\bar{B}^2}{\mu_0 \bar{\rho}}. \quad (2.14)$$

Il s'agit de la relation de dispersion des ondes d'Alfvén. Cette expression montre que la fréquence d'une onde d'Alfvén ne dépend que de la composante du nombre d'onde, parallèle au champ magnétique. Par conséquent, une onde d'Alfvén se déplace le long d'une ligne de champ avec une vitesse de phase $V_{Ap} = \omega/k_z = \bar{B}/\sqrt{\mu_0 \bar{\rho}}$, que l'on nomme la vitesse d'Alfvén, et transporte de l'énergie à la vitesse de groupe $\vec{v}_g = \partial\omega/\partial\vec{k} = \pm V_{Ap} \vec{e}_z$. De ce fait, elle est dite non-dispersive et préserve ainsi son enveloppe au cours du temps. En outre, on la qualifie également d'onde transverse car sa direction de propagation est perpendiculaire aux perturbations qui en sont la cause. Finalement, on peut montrer (voir Spruit (2013)) que les amplitudes des perturbations sont reliées via la relation $|U_y|/V_{Ap} = |b_y|/B_0$, de laquelle on déduit

$$\underbrace{\frac{\rho U_y^2}{2}}_{\text{Énergie cinétique}} = \underbrace{\frac{b_y^2}{2\mu_0}}_{\text{Énergie magnétique}}. \quad (2.15)$$

Il résulte que les énergies magnétique et cinétique d'une onde d'Alfvén sont en équipartition.

Afin d'illustrer la rapidité avec laquelle ces ondes se propagent, nous concluons cette première partie de la sous-section 2.1.2 en fournissant au lecteur une idée du temps de propagation d'une onde d'Alfvén dans un intérieur stablement stratifié. Pour un champ magnétique de grande échelle, l'échelle de longueur caractéristique parcourue par une onde d'Alfvén peut être assimilée au rayon de la zone radiative R_{rz} . Dans ce cas, l'échelle de temps de propagation est approximativement donnée par $\tau_{Ap} = R_{rz}/V_{Ap}$. En prenant une densité moyenne de l'étoile, on obtient alors $\tau_{Ap} \approx \sqrt{3M_\star\mu_0/4\pi R_{rz}/B_0}$. Ainsi, si l'on considère une sous-géante typique de $M_\star = 1.1M_\odot$ et $R_\star = 2R_\odot$ dont la zone radiative s'étend sur 74% du rayon de l'étoile, on obtient un temps de propagation d'environ $8 \cdot 10^3$ ans pour une intensité de champ magnétique de l'ordre du Gauss. Cette valeur chute à seulement une trentaine de jours pour une intensité de l'ordre de 10^5 G. Bien qu'il ne s'agisse que d'estimations, ceci montre de façon très simple que les ondes d'Alfvén agissent sur des temps incroyablement courts par rapport à la circulation d'Eddington-Sweet et par conséquent, qu'elles ont, sauf exception, un rôle prépondérant dans la dynamique d'un écoulement d'une zone radiative.

2.1.2.2 Effet Ω et loi d'isrotation de Ferraro

Comme illustré sur la figure 2.4, l'effet Ω provoque la production d'une composante azimutale (dite toroïdale) de champ magnétique à travers l'étirement et l'enroulement des lignes de champ méridional (dit poloïdal) par la rotation différentielle. Le dénominateur Ω découle simplement de la forme des boucles créées par ce mécanisme, non sans rappeler la forme de la lettre grecque, mais aussi du fait que cet effet est directement induit par la rotation de l'étoile que l'on désigne généralement par Ω .

Afin de comprendre mathématiquement ce phénomène, nous allons considérer une situation idéalisée dans laquelle la circulation méridienne n'intervient pas. Ceci pourrait par exemple être le cas si en raison d'une très forte stratification stable cette dernière était inhibée. Imaginons alors qu'un champ magnétique axisymétrique $\vec{B} = \vec{B}_p + B_\phi \vec{e}_\phi$, où \vec{B}_p et B_ϕ désignent

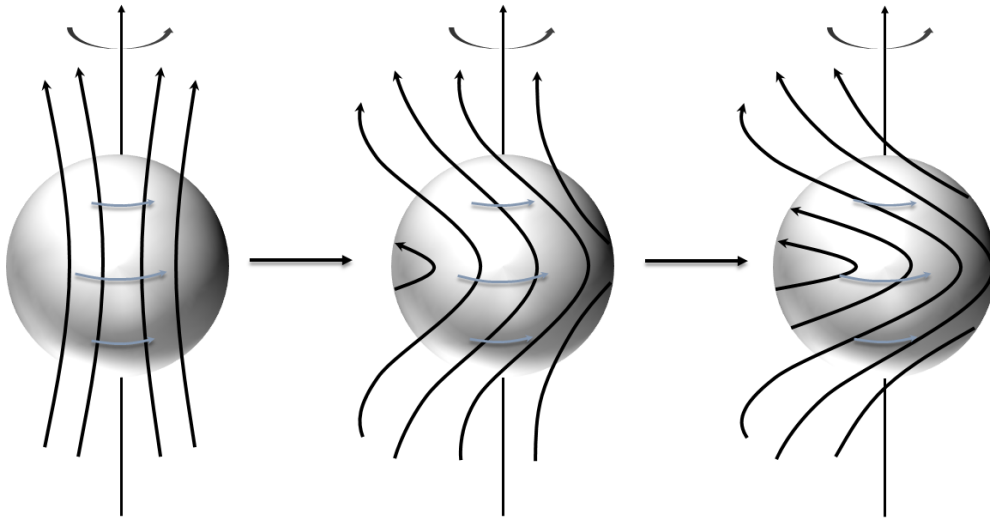


FIGURE 2.4 : Illustration de l'effet Ω . Les lignes de champ poloidal sont représentées en noir et l'intensité de la rotation à une latitude donnée est fixée par la taille des flèches bleues. Dans cette situation, le taux de rotation est donc plus important à l'équateur qu'au niveau des pôles. Cette rotation différentielle latitudinale étire puis enroule les lignes de champ poloidal permettant ainsi, la production d'une composante toroïdale.

respectivement les composantes poloidal et toroïdale de ce champ, soit initialement présent, et supposons qu'une rotation différentielle soit forcée. Dans ces circonstances, l'équation d'induction pour les composantes poloidal et toroïdale a pour expression

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{B}_p}{\partial t} = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}_p, \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = r \sin \theta (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \Omega + \eta \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) B_\phi, \end{cases} \quad (2.16)$$

où $\Omega(r, \theta)$ est le taux de rotation et η correspond à la diffusivité magnétique. La seconde équation du système (2.16) montre que l'évolution temporelle de la composante azimuthale du champ magnétique est le résultat d'une compétition entre des effets diffusifs (dernier membre de droite) et un mécanisme de production (premier membre de droite). Le terme source associé à ce mécanisme constitue ce que l'on appelle l'effet Ω . En supposant que l'échelle de la rotation différentielle soit grande, B_ϕ va alors varier sur une grande échelle spatiale et par conséquent, le terme diffusif peut être négligé. En supposant que \vec{B}_p évolue, lui aussi, sur un temps diffusif associé à de grandes échelles, on déduit de la première équation du système (2.16) que l'amplitude du champ poloidal est constante. Finalement, en supposant que Ω ne varie pas dans le temps, la seconde équation du système (2.16) peut être intégrée pour donner :

$$B_\phi(r, \theta, t) = B_\phi(r, \theta, t = 0) + \left[r \sin \theta (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \Omega \right] t. \quad (2.17)$$

Cette expression montre que l'amplitude du champ toroïdal croît linéairement au cours du temps par effet Ω . En particulier, cette croissance est optimale lorsque l'angle formé par une ligne de

champ poloïdal et une surface d'isorotation est maximum. Autrement dit, le terme source s'anule dès que la direction du gradient devient perpendiculaire à une ligne de champ. L'équation (2.17) nous renseigne également sur la topologie du champ toroïdal ainsi produit. En effet, supposons que la rotation différentielle soit à symétrie sphérique $\Omega = \Omega(r)$. Alors, pour un champ magnétique initialement dipolaire $\vec{B}(r, \theta, t = 0) \cdot \vec{e}_r = B_r \propto \cos \theta$, l'effet Ω va donner naissance à deux lobes de champ toroïdal anti-symétriques par rapport à l'équateur en raison du facteur $\sin \theta$ présent dans l'équation (2.17).

La seconde équation du système (2.16) dans laquelle on a négligé l'effet de la diffusion magnétique, montre qu'à l'état stationnaire :

$$r \sin \theta (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \Omega = 0. \quad (2.18)$$

Il s'agit de la loi d'isorotation de Ferraro (Ferraro, 1937). Elle stipule qu'un état stationnaire est caractérisé par une rotation uniforme le long des lignes de champ. Lorsqu'une circulation méridienne est présente, et si cette dernière est suffisamment faible, on peut montrer que la solution stationnaire et axisymétrique est un écoulement dans lequel la circulation méridienne est colinéaire au champ poloïdal (Mestel et al., 1988) : $\vec{U}_p = \alpha \vec{B}_p$, avec α une fonction de r et θ . On obtient alors une généralisation de la loi de Ferraro (2.18) :

$$(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \left(\Omega - \frac{\alpha B_\phi}{s} \right) = 0, \quad (2.19)$$

qui montre que c'est désormais la quantité $\Omega - \alpha B_\phi / s$ (où $s = r \sin \theta$ est le rayon perpendiculaire à l'axe de rotation) qui est uniforme le long d'une ligne de champ.

2.1.2.3 Mélange de phase

La croissance linéaire de l'amplitude du champ toroïdal par l'effet Ω dont nous venons de discuter, n'est pas infinie. Comme nous l'avons vu en 2.1.2.1, la force de Lorentz tend à s'opposer à toute déformation des lignes de champ. Aussi, dès que l'amplitude du champ toroïdal devient suffisamment importante, la tension magnétique $\propto (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) B_\phi$ contribue à diminuer la rotation différentielle et donc, s'oppose efficacement à tout étirement ou enroulement des lignes de champ par celle-ci. Cette rétroaction de la force de Lorentz sur l'écoulement se réalise par l'intermédiaire des ondes d'Alfvén.

La figure 2.5 présente (à gauche) une configuration magnétique initiale. Il s'agit d'un champ poloïdal dipolaire dont la valeur de la norme est donnée en couleur et dont les lignes de champ sont représentées en noir. Initialement, un écoulement en rotation différentielle est plongé dans ce champ. Afin d'illustrer le résultat de l'interaction entre la rotation différentielle et le champ magnétique, les évolutions temporelles, en unité de temps d'Alfvén, du champ toroïdal B_{ϕ_c} (en haut à droite) et de la rotation différentielle $\Delta\Omega_c/\Omega_0$ (en bas à droite), sont tracées en certains points fixes, représentés en noir sur la coupe méridienne. En observant ces figures, nous constatons que la rotation différentielle commence par produire une composante toroïdale par l'effet Ω décrit en 2.1.2.2, dont l'amplitude croît linéairement au cours du temps. Après approximativement un temps d'Alfvén, l'amplitude du champ toroïdal sature. Cette étape marque le début de la rétroaction de la force de Lorentz sur l'écoulement et l'excitation d'ondes d'Alfvén qui vont se propager le long des lignes de champ. Ces ondes sont matérialisées par les oscillations successives des amplitudes du champ toroïdal et de la rotation différentielle aux points fixes sélectionnés sur la coupe méridienne de la norme du champ poloïdal. En se propageant, elles redistribuent efficacement du moment cinétique le long des lignes de champ jusqu'à ce que l'état stationnaire (2.18) soit atteint après ~ 18 temps d'Alfvén. Alors, l'amplitude du champ

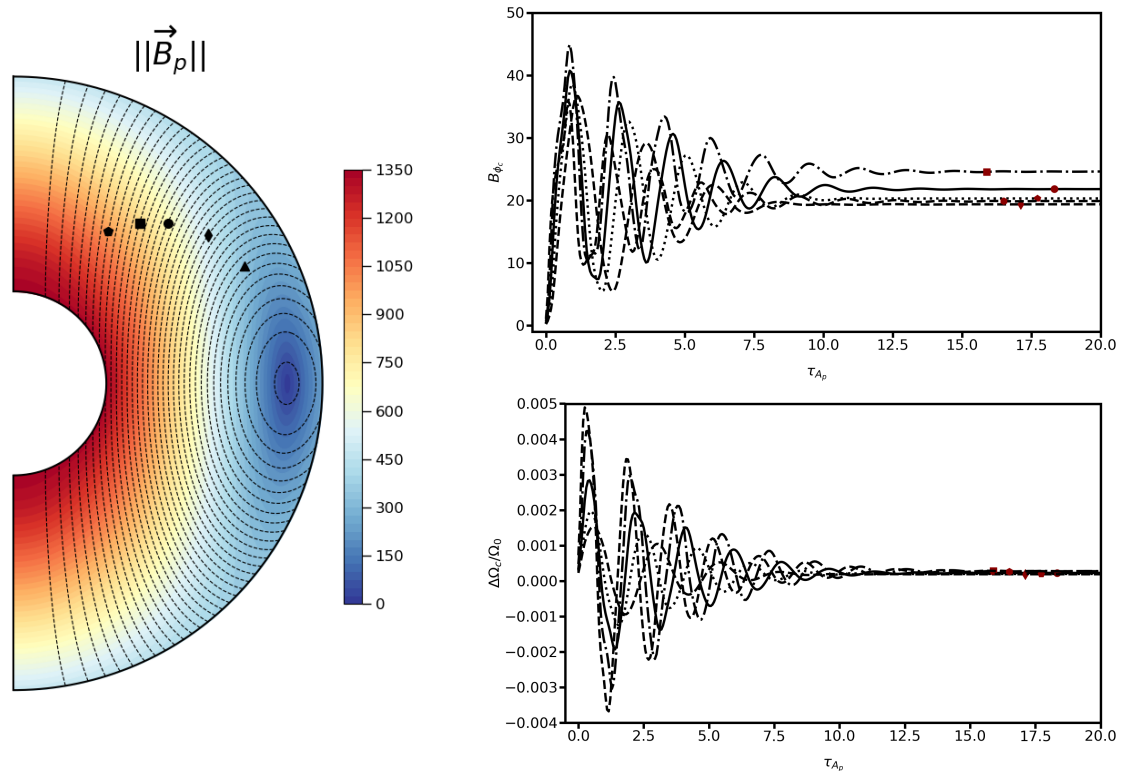


FIGURE 2.5 : Illustration de la propagation d'ondes d'Alfvén excitées par la force de Lorentz lorsque cette dernière rétroagit sur l'écoulement en s'opposant à l'effet Ω . La figure de gauche est une coupe méridienne du champ magnétique initialement présent dans l'écoulement en rotation différentielle. Il s'agit d'un dipôle dont la norme est donnée en couleur et les lignes de champ associées sont représentées en noir. Différents points fixes sont sélectionnés sur des lignes de champ poloïdal suffisamment voisines les unes des autres. Les évolutions temporelles du champ toroïdal produit par effet Ω (en haut à droite) et de la rotation différentielle (en bas à droite) sont suivies sur une vingtaine de temps d'Alfvén, en ces points fixes. La propagation des ondes d'Alfvén est alors illustrée par les oscillations au cours du temps, des amplitudes du champ toroïdal et de la rotation différentielle aux points fixes.

toroïdal devient approximativement constante. De quelle manière cet état stationnaire est-il atteint et qu'advient-il de la rotation différentielle qui pouvait exister entre les lignes de champ ? Pour répondre à ces questions, retournons à la figure 2.5.

En observant attentivement l'évolution temporelle du champ toroïdal et de la rotation différentielle aux différents points de contrôle, nous remarquons que les multiples oscillations se déphasent rapidement au cours du temps. Pour comprendre l'origine de ce déphasage, revenons quelques instants à l'étape de production des ondes d'Alfvén par la force de Lorentz. Lorsque ces dernières sont excitées, elles se propagent le long des lignes de champ et se réfléchissent au niveau des frontières du domaine. Dans une étoile réelle, ces ondes pourraient par exemple se réfléchir à l'interface entre la zone convective et la zone radiative (Charbonneau & MacGregor, 1993). Plusieurs choses vont provoquer un déphasage croissant des ondes d'Alfvén au cours des multiples réflexions. Tout d'abord, comme nous l'avons vu en 2.1.2.1, la vitesse de phase de ces ondes dépend à la fois de l'amplitude du champ poloïdal et de la densité. Ainsi, en fonction de la ligne de champ considérée, une onde d'Alfvén ne se propage pas à la même vitesse que sa voisine circulant sur une ligne de champ environnante. Par ailleurs, si le milieu

est stratifié en densité, l'onde se propage plus difficilement vers l'intérieur du domaine. Enfin, ces ondes ne parcourent pas toutes la même distance dans le domaine. La combinaison de ces différents effets contribue au déphasage, croissant au cours du temps, observé sur la figure 2.5. La conséquence directe, est la création de gradients de champ toroïdal et de rotation différentielle sur des échelles si petites que les processus diffusifs, essentiellement la diffusion ohmique et la diffusion visqueuse, peuvent agir beaucoup plus vite qu'un temps de diffusion à l'échelle du rayon de l'étoile. Par conséquent, les ondes d'Alfvén sont efficacement amorties et l'écoulement atteint l'état stationnaire : c'est ce que l'on appelle le mélange de phase. Ce phénomène a largement été discuté dans le cadre du chauffage de la couronne solaire (Heyvaerts & Priest, 1983; Parker, 1991; Cally, 1991), l'idée étant qu'une fois excitées dans la zone convective, les ondes d'Alfvén vont parcourir une certaine distance dans la couronne avant d'être amorties puis dissipées sous forme de chaleur par ce mécanisme. Comme nous pouvons le voir sur la figure 2.5, la rotation différentielle devient finalement indépendante de la localisation considérée, ce qui signifie que le mélange de phase dissipe toute rotation différentielle qui pouvait exister entre les lignes de champ conduisant ainsi, en seulement quelques temps d'Alfvén, à une rotation solide. De même, les gradients de champ toroïdal tendent à être affaiblis par ce processus. En outre, la rotation solide désormais présente dans la majeure partie de la zone radiative exclut toute possibilité de produire du champ toroïdal par effet Ω . Ce dernier n'évolue alors que par l'effet de la diffusion ohmique. Comme le temps de diffusion magnétique est très long pour le cas considéré ici, aucune diminution de l'amplitude de ce champ n'est observée.

2.1.2.4 Zone morte

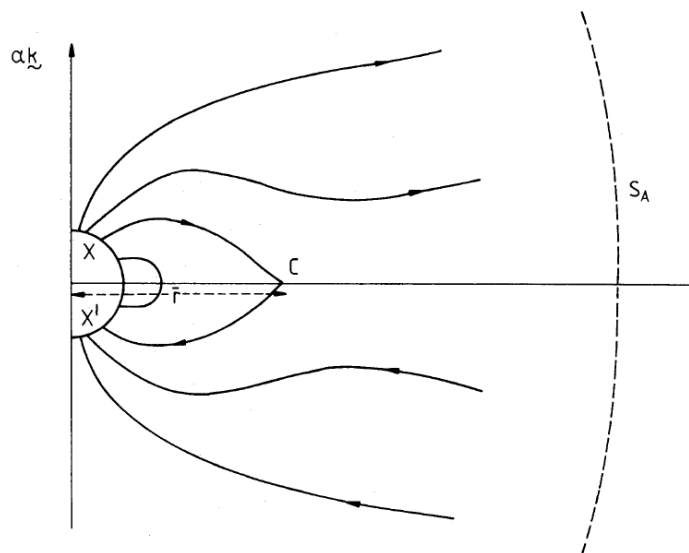


FIGURE 2.6 : Illustration du vent stellaire d'une étoile de type solaire plongée dans un champ magnétique dipolaire. Les lignes fléchées correspondent aux lignes de champ magnétique. On distingue deux régions, la zone de vent où les lignes de champ sont ouvertes, et la zone morte délimitée par la première ligne de champ qui se referme sur elle-même et dans laquelle le vent ne peut pas circuler. S_A désigne la surface d'Alfvén au delà de laquelle le vent n'est plus contraint magnétiquement et en deçà de laquelle le plasma est canalisé le long des lignes de champ. Crédit : Mestel & Spruit (1987).

Jusqu'ici, nous avons montré qu'un champ magnétique de grande échelle était capable, à lui seul, d'imposer une rotation solide dans la majeure partie d'une zone radiative. Il existe cependant des régions particulières qui échappent à cette règle et que nous nommerons dans ce qui suit les zones mortes. L'origine de ce terme remonte à [Mestel \(1968\)](#) lors de son étude sur les vents stellaires magnétisés. Le modèle qu'il considéra est illustré en figure 2.6 et représente une étoile de type solaire baignée dans un champ magnétique dont la structure est principalement dipolaire. La vaste majorité des lignes de champ s'ouvrent alors sous l'effet du vent stellaire.

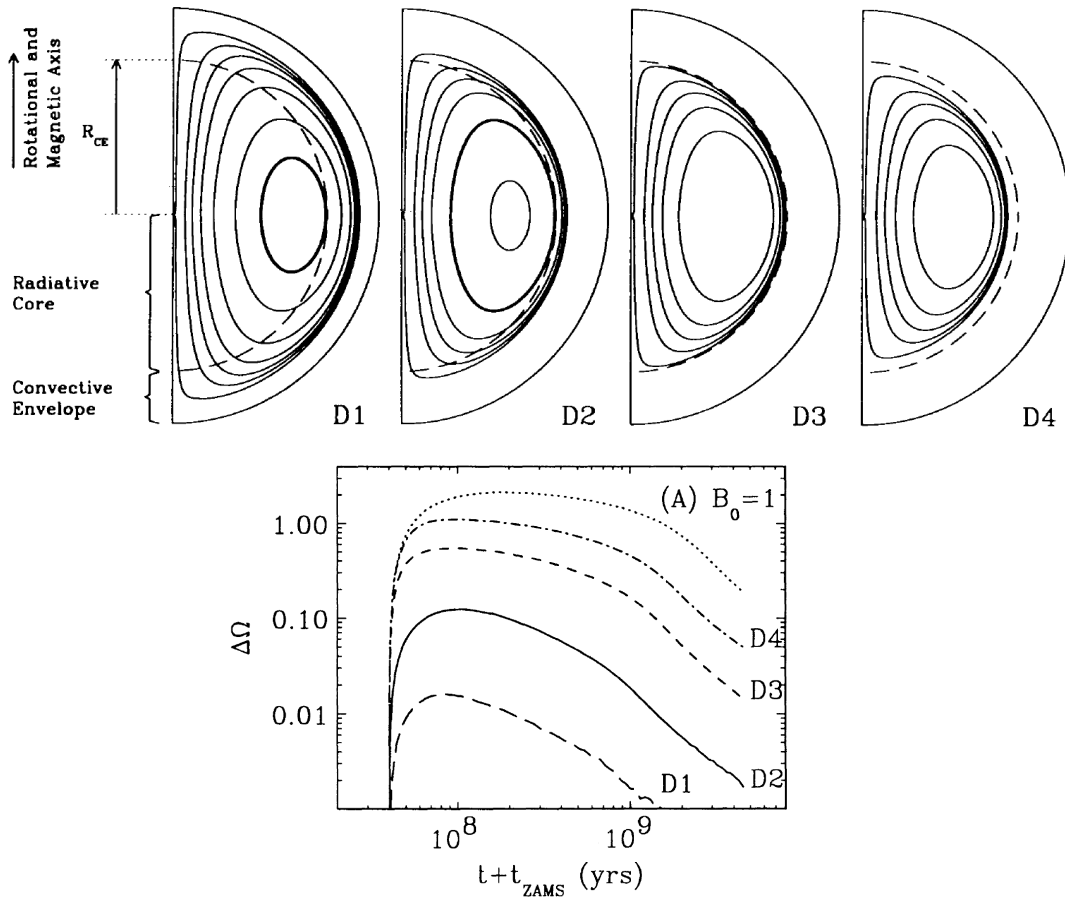


FIGURE 2.7 : Haut : configurations d'un champ magnétique poloïdal dipolaire dans une zone radiative stellaire. La limite entre les zones convective et radiative est indiquée par des lignes en tirets. Dans les configurations D1 et D2 certaines lignes de champ traversent la zone convective, couplant ainsi le cœur radiatif à l'enveloppe convective. Le nombre de lignes traversant la région convective est plus élevé dans la configuration D1 que D2. Dans les configurations D3 et D4, l'ensemble des lignes se referment sur elles-mêmes au sein de la zone radiative. La différence entre ces deux topologies dipolaires est que certaines lignes de champ traversent une couche limite visqueuse localisée à la base de l'enveloppe convective dans le cas D3 mais pas dans la configuration D4. Bas : rotation différentielle moyenne entre les zones convective et radiative en fonction du temps, pour les quatre topologies magnétiques illustrées en haut, et pour une intensité du dipôle de 1 G. La rotation différentielle est estimée par
$$\Delta\Omega(t) = \left(2/3R_{CE}^3\right) \int_0^\pi \int_0^{R_{CE}} [(\Omega(r, \theta, t) - \Omega_{CE}(t)) / \Omega_{CE}(t)] r^2 \sin\theta dr d\theta$$
, où R_{CE} est le rayon de la zone radiative qui s'étend jusqu'à la base de la zone convective, Ω le taux de rotation et Ω_{CE} le taux de rotation de l'enveloppe convective. Crédit : [Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#).

Cependant, à proximité de l'équateur, la pression magnétique est suffisamment élevée pour piéger le plasma chaud au sein de boucles fermées. Dans cette région que [Mestel \(1968\)](#) nomme la zone morte, le plasma est en co-rotation avec l'étoile et aucun vent ne peut circuler. À l'inverse, dans les zones ouvertes, aussi appelées trous coronaux (par analogie aux zones de champ magnétique ouvertes dans la couronne solaire) par [Mestel & Spruit \(1987\)](#), le plasma s'écoule le long des lignes de champ jusqu'à une certaine distance que l'on appelle le rayon d'Alfvén, et au delà de laquelle l'écoulement n'est plus contraint magnétiquement. En deçà de ce rayon critique, la torsion des lignes de champ par la rotation excite des ondes d'Alfvén qui extraient du moment cinétique et ce faisant, freinent l'étoile. Le nombre et la localisation de ces zones mortes dépendent de la topologie magnétique. Par exemple, pour un dipôle on aura une zone morte centrée sur l'équateur, pour un quadrupôle on aura deux zones mortes de part et d'autre de l'équateur (voir [Réville et al. \(2015\)](#)).

Un autre exemple de zone morte apparaît dans la situation envisagée par [Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#) dans laquelle ils ont considéré un champ magnétique enfoui dans la zone radiative du Soleil. Comme illustré sur la figure 2.7 (en haut), les auteurs ont analysé quatre topologies dipolaires différentes. Pour les configurations D1 et D2, certaines lignes de champ traversent l'enveloppe convective, produisant un couplage du cœur radiatif avec l'enveloppe convective. Dans les cas D3 et D4, toutes les lignes de champ se referment sur elles-mêmes. Dans chacune de ces configurations magnétiques, la région où les lignes de champ se referment sur elles-mêmes correspond à une zone morte. Celle-ci possède un point neutre au voisinage duquel la force de Lorentz est faible ([Spada et al., 2010](#)). Puisque les configurations magnétiques considérées ici sont des dipôles, il n'y a dans chacune d'elles qu'une zone morte centrée sur l'équateur. Parce qu'elle est découplée de la région convective, elle ne ressent pas directement le freinage par le vent stellaire et constitue un réservoir de moment cinétique. Comme indiqué sur la figure 2.7 (en bas), plus la zone morte est grande, plus la quantité de moment cinétique stockée est importante, conduisant à une rotation différentielle plus élevée entre les zones convective et radiative.

2.2 Instabilités axisymétriques dans une zone radiative

Dans cette thèse, nous étudions numériquement les écoulements axisymétriques produits par la contraction d'une zone radiative stellaire. Ceux-ci sont susceptibles d'être instables vis-à-vis d'instabilités axisymétriques ou non-axisymétriques. Dans le premier cas, l'instabilité peut apparaître dans nos simulations 2D, et ce fut effectivement le cas, alors que des simulations 3D seraient nécessaires pour observer d'éventuelles instabilités non-axisymétriques. Dans cette section, nous considérons les instabilités axisymétriques en nous focalisant sur celle observée dans nos simulations. Nous mentionnerons les possibles instabilités non-axisymétriques lorsque nous discuterons des perspectives de la présente thèse dans la conclusion de ce manuscrit.

La rotation différentielle induite par la contraction est susceptible de rendre un écoulement instable à des perturbations axisymétriques. En présence d'un champ magnétique, elle peut également interagir avec ce dernier afin de déclencher une instabilité magnétohydrodynamique. Ces instabilités tirent ainsi leur énergie du cisaillement et peuvent aussi être aidées par un champ magnétique. Par ailleurs, même si elles sont gênées par la stratification en entropie qui caractérise les intérieurs radiatifs, la diffusion thermique peut encore favoriser leur développement. Dans ce qui suit, nous décrirons les différentes instabilités axisymétriques (magnéto)hydrodynamiques susceptibles de se manifester dans une zone radiative stellaire en rotation différentielle.

2.2.1 Instabilités hydrodynamiques

Nous commençons cette section en décrivant les instabilités axisymétriques qui peuvent potentiellement se développer en l'absence de champ magnétique. Ces instabilités hydrodynamiques sont au nombre de trois : l'instabilité centrifuge, l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke et l'instabilité barocline-diffusive axisymétrique. Nous décrirons essentiellement les deux premières, respectivement en 2.2.1.1 et 2.2.1.2, car nous ne considérons pas dans ce travail les inhomogénéités chimiques nécessaires au développement de la troisième.

2.2.1.1 Instabilité centrifuge

L'instabilité centrifuge apparaît au sein d'un fluide en rotation lorsque le gradient de pression centripète ne peut plus contrebalancer l'accélération centrifuge. Le critère de stabilité linéaire a été établi par [Rayleigh \(1917\)](#) dans la limite d'un fluide non-visqueux. Pour le com-

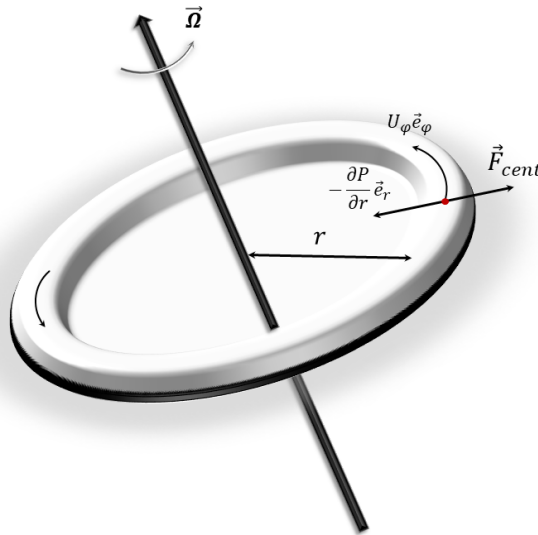


FIGURE 2.8 : Anneau fluide en rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire Ω . Une particule fluide (point rouge) initialement localisée à une distance r de l'axe de rotation, tourne autour de celui-ci à la vitesse U_ϕ . Elle est ainsi soumise à une accélération centrifuge $\vec{\mathcal{F}}_{cent}$ contrebalancée par un gradient de pression centripète $-\partial P/\partial r \vec{e}_r$.

prendre, considérons l'écoulement axisymétrique montré en figure 2.8 dans lequel une particule fluide (en rouge) initialement située à la distance r d'un axe de rotation, tourne autour de celui-ci à la vitesse U_ϕ . Son moment cinétique par unité de masse s'écrit alors $\mathcal{J}(r) = r^2\Omega(r)$. L'accélération centrifuge qui s'applique sur cette particule s'écrit quant à elle $\mathcal{F}_{cent} = \mathcal{J}^2(r)/r^3$ et est naturellement compensée par un gradient de pression centripète $\partial P/\partial r$. Supposons maintenant que cette particule fluide soit déplacée de sa position d'origine d'une distance infinitésimale δr . Du fait de l'axisymétrie de la configuration, son moment cinétique est conservé et la particule fluide doit ralentir. L'accélération centrifuge qui s'applique désormais sur cette particule, $\mathcal{F}_{cent}^* = \mathcal{J}^2(r)/(r + \delta r)^3$, ne peut donc plus être contrebalancée par le gradient de pression environnant $\partial P^*/\partial r = \mathcal{J}^2(r + \delta r)/(r + \delta r)^3$. Il s'ensuit naturellement que si $\partial P^*/\partial r > \mathcal{F}_{cent}^*$, la particule fluide est soumise à une force de rappel qui tend à la ramener vers sa position d'origine et la situation est stable. Dans le cas contraire, la situation devient instable et le mouvement est amplifié. Il résulte le critère d'instabilité suivant ([Rayleigh, 1917](#)) :

$$\frac{\partial P^*}{\partial r} < \mathcal{F}_{\text{cent}}^* \Leftrightarrow \frac{\mathcal{J}^2(r + \delta r)}{(r + \delta r)^3} - \frac{\mathcal{J}^2(r)}{(r + \delta r)^3} < 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{J}^2}{dr} = \frac{d(r^2\Omega)^2}{dr} < 0. \quad (2.20)$$

Autrement dit, un fluide est instable par centrifugation dès lors que son moment cinétique (par unité de masse) décroît avec le rayon. Ce critère plutôt simple nécessite cependant d'être quelque peu nuancé.

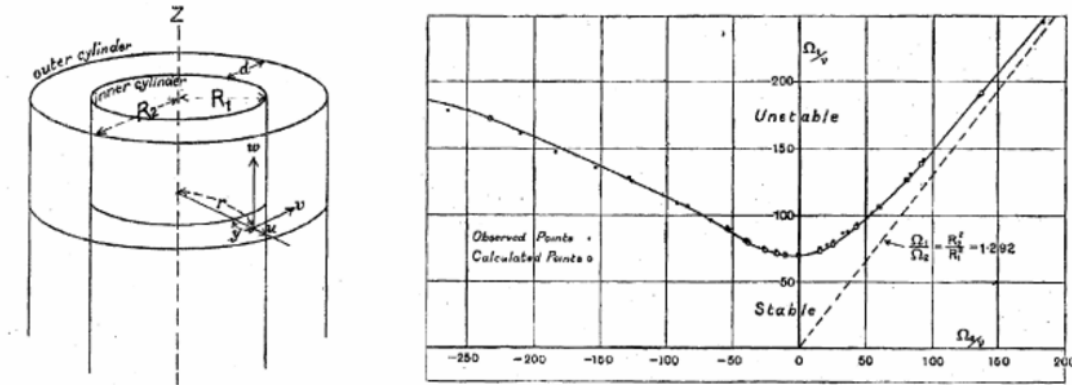


FIGURE 2.9 : Gauche : illustration du dispositif de Taylor-Couette. R_1 est le rayon du cylindre intérieur et R_2 , celui du cylindre extérieur. Droite : diagramme de stabilité obtenu par Taylor (1923). L'abscisse correspond au taux de rotation du cylindre extérieur et l'ordonnée à celui du cylindre intérieur. La courbe pleine correspond à la courbe théorique obtenue par l'analyse de stabilité linéaire réalisée par Taylor (1923). Les points correspondent aux mesures expérimentales. Remarquons l'accord parfait entre théorie et résultats expérimentaux. La courbe en tirets correspond à la ligne de Rayleigh obtenue lorsque l'effet de la viscosité est négligé. Crédit : Kirillov & Stefani (2012).

En reprenant l'expérience du viscosimètre de Couette (1890), initialement conçu dans l'optique de déterminer la viscosité d'un fluide, Taylor (1923) montre qu'en présence de cette dernière, le critère d'instabilité de Rayleigh (1917) devient une condition nécessaire mais toutefois non suffisante, car les perturbations doivent désormais surpasser l'effet stabilisant de la viscosité afin de permettre le développement de l'instabilité. Le dispositif de Taylor (1923), illustré à gauche sur la figure 2.9 et connu sous le nom de configuration de Taylor-Couette, permet la co-rotation ou la contra-rotation des cylindres intérieur et extérieur. Il permet ainsi de fixer le cylindre extérieur tout en permettant la rotation du cylindre intérieur. Or, dans ce dernier cas le critère d'instabilité de Rayleigh (1917) s'écrit : $\Omega_1 R_1^2 > 0$. Autrement dit, toute rotation du cylindre intérieur, le cylindre extérieur étant fixe, devrait entraîner le développement d'une instabilité centrifuge. En réalité, Taylor (1923) montre expérimentalement que l'instabilité ne peut se déclencher qu'au delà d'une certaine vitesse critique (voir figure 2.9 à droite) à cause de l'effet stabilisant de la viscosité. En réalisant une analyse de stabilité linéaire de ce problème, Taylor (1923) introduit un nombre sans dimension, le nombre de Taylor

$$T_a = \frac{\Omega_1^2 R_1 (R_2 - R_1)^2}{\nu^2}, \quad (2.21)$$

qui compare les effets inertiels aux effets visqueux, et s'aperçoit que la valeur critique de ce nombre $T_{a_c} = 1.696$ correspond à la valeur seuil du taux de rotation du cylindre intérieur au

delà duquel l'écoulement est instable. Comme on peut le voir à droite de la figure 2.9, son analyse de stabilité linéaire appliquée à différents taux de rotation du cylindre extérieur, montre un accord parfait entre ses résultats théoriques et les résultats expérimentaux, marquant ainsi le début des analyses de stabilité linéaire en hydrodynamique. Nous noterons au passage, que

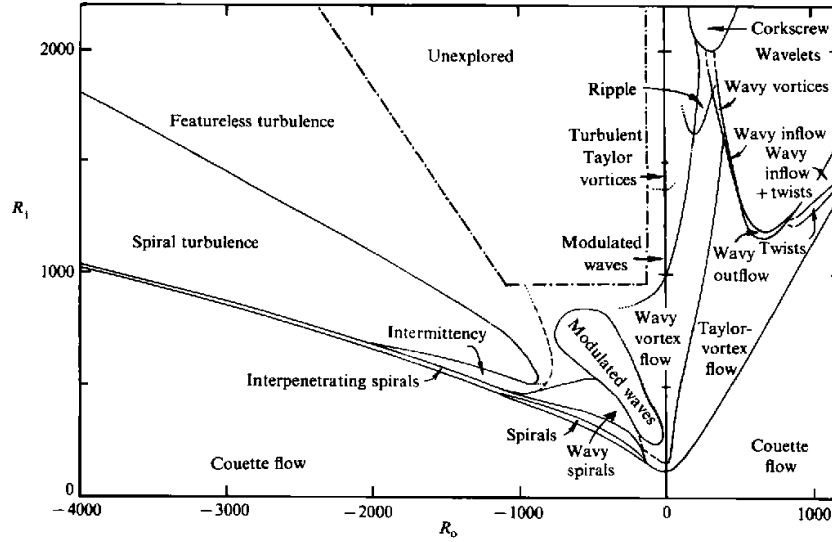


FIGURE 2.10 : Représentation des régimes dynamiques observés dans un dispositif de Taylor-Couette. R_0 caractérise ici, la rotation du cylindre extérieur et R_1 , celle du cylindre intérieur. Une valeur négative de R_0 correspond à une contra-rotation, une valeur positive à une co-rotation. Crédit : [Andereck et al. \(1986\)](#).

l'étude de [Taylor \(1923\)](#) est un superbe exemple de la théorie des bifurcations. Une fois la valeur seuil du nombre de Taylor atteinte, l'instabilité primaire se développe. À forçage plus élevé, une série de bifurcations se manifeste et mène à un écoulement complètement turbulent ([Shaw et al., 1982](#)), comme illustré sur la figure 2.10.

Pour conclure, appliquons le critère de Rayleigh au contexte d'une zone radiative stellaire en rotation différentielle où la stratification stable tend à stabiliser le système. Pour cela, nous nous plaçons en géométrie cylindrique et nous considérons deux cas : à l'équateur et loin de l'équateur. Dans la première situation, la gravité est perpendiculaire à l'axe de rotation et dans ce cas, les déplacements radiaux nécessaires à l'instabilité doivent lutter contre la force de flottabilité. Alors, le critère d'instabilité de Rayleigh devient ([Randers, 1942](#))

$$\frac{1}{s^3} \frac{d(s^2\Omega)^2}{ds} + N^2 < 0, \quad (2.22)$$

où s est le rayon perpendiculaire à l'axe de rotation, $N = \sqrt{(g/T)(dT/dz)}$ la fréquence de Brunt-Väisälä (g est la gravité et T la température) et $\Omega(s)$ la vitesse angulaire. Dans la deuxième situation, où l'on s'éloigne progressivement de l'équateur, la gravité n'est plus perpendiculaire à l'axe de rotation. Alors, les déplacements parallèles à une surface isentropique évitent de lutter contre la force d'Archimède et sont instables si ([Knobloch & Spruit, 1982](#)) :

$$\left. \frac{d(s^2\Omega)^2}{ds} \right|_{P=\text{constant}} < 0, \quad (2.23)$$

où P désigne la pression. Le critère d'instabilité (2.22) peut également se mettre sous la forme $(N/\Omega)^2 < d \ln(s^4 \Omega^2) / d \ln s$. Puisque dans les intérieurs radiatifs stellaires nous avons généralement $(N/\Omega)^2 \gg 1$, il est d'après ce critère, peu probable que l'équateur soit une région instable. Considérons maintenant le critère (2.23). D'après ce dernier, il faudrait des lois de rotation de la forme $\Omega \propto s^{-n}$ avec $n > 2$ pour déclencher une instabilité. Par conséquent, des rotations différentielles importantes sont requises afin de provoquer une augmentation du moment cinétique par unité de masse avec le rayon et ainsi permettre le développement d'une instabilité axisymétrique centrifuge.

2.2.1.2 Instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke

Nous prenons maintenant en compte l'effet de la forte diffusion thermique présente au sein des zones radiatives. Dans la limite des très petits nombres de Prandtl $P_r = \nu/\kappa$ représentatifs de ces intérieurs, où ν est la viscosité cinématique et κ la diffusivité thermique, il existe des échelles suffisamment petites pour lesquelles l'effet de la stratification stable est amoindri par cette diffusion thermique, facilitant ainsi le développement d'une instabilité. Cette dernière est connue sous le nom d'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke (Goldreich & Schubert, 1967; Fricke, 1968) (GSF) et sera le sujet de cette deuxième partie de la sous-section 2.2.1.

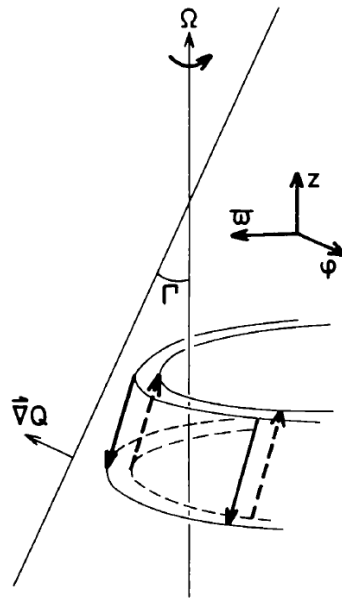


FIGURE 2.11 : Mécanisme de développement de l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke. Les surfaces de moment cinétique spécifique \mathcal{J} (Q sur la présente illustration) constant font un angle Γ avec l'axe de rotation de l'étoile. Une particule fluide qui se déplace dans la région décrite par l'angle Γ dans la direction de la flèche en trait plein, présentera dans sa nouvelle position un excès de moment cinétique par rapport à son environnement et subira une accélération centrifuge amplifiant son mouvement initial. Crédit : Knobloch & Spruit (1982).

L'instabilité GSF est une généralisation de l'instabilité centrifuge aux intérieurs radiatifs. Pour comprendre la façon dont elle se développe, considérons le raisonnement de Knobloch & Spruit (1982). Comme illustré sur la figure 2.11, les surfaces de moment cinétique spécifique \mathcal{J} constant font en général un certain angle Γ avec l'axe de rotation de l'étoile. Si une particule fluide se déplace dans la zone opposée à cet angle dans la direction de la flèche en traits

pointillés, elle présentera un déficit en moment cinétique par rapport à son environnement lorsqu'elle arrivera dans sa nouvelle position, et sera ainsi renvoyée vers l'axe de rotation par les forces de pression. Dans le cas contraire, si elle se déplace dans la région décrite par l'angle Γ dans la direction de la flèche en trait plein, elle présentera à son arrivée dans sa nouvelle position, un excès de moment cinétique par rapport à son environnement et sera expulsée par l'accélération centrifuge. Cette situation instable est rendue possible pour deux raisons. Premièrement, la diffusion thermique permet de réduire l'effet stabilisant de la stratification stable. Deuxièmement, la viscosité moléculaire d'un plasma est trop faible pour être capable, à ces petites échelles, d'entraver les perturbations. Par conséquent, l'instabilité GSF est une instabilité double diffusive car il y a d'un côté, un effet stabilisant réduit par la diffusion thermique, et de l'autre, un effet déstabilisant associé à la faible viscosité. Comme le temps de développement de cette instabilité est plus long qu'une échelle de temps dynamique, une première condition à son apparition est qu'elle ne doit pas entrer en compétition avec une instabilité dynamique (Knobloch & Spruit, 1982).

Originellement, le critère de cette instabilité axisymétrique double diffusive a été obtenu comme suit. Goldreich & Schubert (1967) ont effectué une analyse de stabilité linéaire d'une zone radiative en rotation à la vitesse angulaire $\Omega(s, z)$, vis-à-vis de perturbations axisymétriques, en se plaçant dans la limite $P_r \rightarrow 0$. Ils trouvent que la situation est séculairement instable lorsque :

$$\frac{\partial(s^2\Omega)}{\partial s} < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} \neq 0 \quad \text{ou les deux.} \quad (2.24)$$

La limite des nombres de Prandtl infiniment petits mais différents de zéro a ensuite été étudiée par Fricke (1968) puis Acheson (1978) qui montrèrent que le paramètre $P_r (N/\Omega)^2$ modifie substantiellement les critères d'instabilité de Goldreich & Schubert (1967). Dans le plan équatorial, ceux-ci s'écrivent désormais :

$$\frac{P_r}{2} \left(\frac{N}{\Omega}\right)^2 s\Omega < \frac{\partial}{\partial s}(s^2\Omega) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\Omega}{\partial z} > \frac{P_r}{2} \left(\frac{N}{\Omega}\right)^2 \frac{\Omega}{s} \quad \text{ou les deux.} \quad (2.25)$$

Ainsi, la prise en compte de la viscosité moléculaire, qui n'est jamais nulle dans une zone radiative, montre que l'écoulement peut en réalité être stable et ce, même lorsque le profil de rotation n'est pas à symétrie cylindrique. Comme noté par Acheson (1978), bien que la viscosité moléculaire soit faible, il est indispensable qu'elle soit prise en compte car même si dans les intérieurs radiatifs $P_r \ll 1$ (typiquement $P_r \sim 10^{-6}$ (Garaud et al., 2015)), il est possible que le rapport $(N/\Omega)^2 \gg 1$, de sorte que le produit $P_r (N/\Omega)^2$ peut encore être $\sim O(1)$.

Afin de conclure cette partie, mentionnons que le critère (2.25) fut généralisé par Knobloch & Spruit (1982) à l'ensemble d'une zone radiative, c'est-à-dire pour toutes les latitudes. Par ailleurs, Knobloch & Spruit (1983) ont étudié l'effet des inhomogénéités chimiques sur cette instabilité. En effet, excepté à certaines étapes bien particulières de leur évolution (Maeder & Meynet, 2012), les étoiles sont rarement chimiquement homogènes. En particulier, des gradients de composition chimique se forment autour des cœurs convectifs (Maeder, 2008). Ceux-ci se révèlent être fortement stabilisant vis-à-vis de l'instabilité GSF (Knobloch & Spruit, 1983). Lorsqu'ils sont pris en compte, le critère (2.25) est modifié et montre que même de faibles gradients de composition chimique sont susceptibles de supprimer l'instabilité. Toutefois, en présence de ces gradients, une nouvelle instabilité fait son apparition : l'instabilité barocline-diffusive axisymétrique (ABCD) (Knobloch & Spruit, 1983). Il s'agit d'une instabilité oscillatoire pour laquelle les perturbations sont peu affectées par les inhomogénéités chimiques. Elle peut égale-

ment se manifester dans un milieu chimiquement homogène mais dans ce cas, l'instabilité GSF se développe plus rapidement.

2.2.2 Instabilités magnétohydrodynamiques

Nous décrivons maintenant les instabilités axisymétriques qui se développent en présence d'un champ magnétique. Celles-ci sont de type magnétorotationnel et se divisent en deux catégories. Lorsque l'intensité du champ toroïdal n'entre pas en considération dans la dynamique de l'instabilité, on parle d'instabilité magnétorotationnelle standard (SMRI). Dans le cas contraire, l'instabilité magnétorotationnelle est qualifiée d'hélicoïdale (HMRI). Dans les deux parties qui suivent, 2.2.2.1 et 2.2.2.2, nous décrivons successivement ces deux instabilités magnétorotationnelles axisymétriques enclines à se développer dans une zone radiative stellaire en rotation différentielle, en présence d'un champ magnétique.

2.2.2.1 Instabilité magnétorotationnelle standard

L'instabilité magnétorotationnelle a été découverte dans le milieu du 20^{ème} siècle par [Velikhov \(1959\)](#) et [Chandrasekhar \(1960\)](#) qui ont étudié la stabilité d'un fluide non-visqueux et incompressible, idéalement conducteur, plongé dans un champ magnétique, dans une configuration de Couette cylindrique. Ce n'est que bien plus tard que cette instabilité fut redécouverte par [Balbus & Hawley \(1991\)](#) dans un contexte astrophysique. À cette époque, un problème de longue date consistait à trouver un mécanisme capable de permettre l'accrétion de matière en orbite autour d'un objet central, c'est-à-dire un mécanisme susceptible de briser l'équilibre entre la force de gravité et l'accélération centrifuge s'appliquant sur les particules fluides au sein du disque d'accrétion. La viscosité moléculaire de ces disques étant trop faible pour permettre cela ([Pringle, 1981](#)), le frottement visqueux des couches fluides en orbite les unes par rapport aux autres ne pouvait pas constituer un mécanisme viable. Pour cette raison, on soupçonnait d'ores et déjà à cette époque qu'une certaine forme de turbulence devait générer une viscosité effective permettant l'accrétion de matière. Cependant, d'après le critère de [Rayleigh \(1917\)](#) établi en 2.2.1.1, tout écoulement non visqueux dont le profil de vitesse angulaire satisfait

$$\frac{d}{ds} (s^2 \Omega)^2 > 0, \quad (2.26)$$

est hydrodynamiquement stable (en fait, stable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge). Ici, $s = r \sin \theta$ désigne le rayon perpendiculaire à l'axe de rotation, r le rayon et θ la latitude, tandis que le profil de vitesse angulaire Ω est supposé ne dépendre que de la coordonnée s , c'est-à-dire $\Omega = \Omega(s)$. Comme un disque d'accrétion peut, en première approximation, être modélisé par un disque Képlérien, sa vitesse angulaire associée est telle que $\Omega \propto s^{-3/2}$. Par conséquent, les disques d'accrétion sont des objets astrophysiques hydrodynamiquement stables. La clé du problème se trouvait en fait du côté du champ magnétique. Son rôle était déjà évoqué par [Lynden-Bell \(1969\)](#) et [Shakura & Sunyaev \(1973\)](#) qui soupçonnaient qu'une turbulence magnétisée devrait permettre un transport renforcé de moment cinétique permettant l'accrétion de matière. Toutefois, ce sont [Balbus & Hawley \(1991\)](#) qui ont montré qu'un disque d'accrétion, bien qu'hydrodynamiquement stable, pouvait être sujet à une instabilité linéaire magnétohydrodynamique en présence d'un champ magnétique faible : l'instabilité magnétorotationnelle.

Originellement, la relation de dispersion associée à cette instabilité a été obtenue en négligeant l'effet du champ magnétique toroïdal. Celui-ci peut être présent, croître linéairement au cours du temps par effet Ω , mais est néanmoins supposé être assez faible pour ne pas affecter la dynamique de l'instabilité (SMRI). En considérant alors le cas d'un champ poloïdal axial et

d'une vitesse angulaire dont les profils ne dépendent tous deux que de la distance s à l'axe de rotation, puis en négligeant les effets diffusifs, [Balbus & Hawley \(1991\)](#) montrent qu'en présence d'un champ magnétique, le critère de stabilité de [Rayleigh \(1917\)](#) portant sur le gradient de moment cinétique par unité de masse devient un critère de stabilité portant sur le gradient de vitesse angulaire :

$$\frac{d\Omega^2}{d \ln s} \geq 0. \quad (2.27)$$

Fort de ce nouveau critère, il s'avère désormais qu'un disque d'accrétion en rotation avec une vitesse angulaire Képlérienne est magnétohydrodynamiquement instable. Le taux de croissance maximum associé à cette instabilité pour un tel profil s'écrit alors ([Balbus & Hawley, 1992](#))

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Omega}{d \ln s} \right|, \quad (2.28)$$

et est associé à un nombre d'onde vertical maximum tel que ([Balbus & Hawley, 1998](#)) :

$$k_{z,\max} = \frac{\Omega}{B_z} \sqrt{-\frac{d \ln \Omega}{d \ln s} - \left(\frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln s} \right)^2} \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \quad (2.29)$$

Il s'ensuit que pour une vitesse angulaire donnée, plus l'amplitude du champ magnétique augmente, plus le nombre d'onde maximum vertical doit diminuer.

Le mécanisme de l'instabilité magnétorotationnelle est illustré en figure 2.12 dans le contexte d'un disque d'accrétion en orbite autour d'une jeune étoile magnétisée. Le disque est ici modélisé par un disque Képlérien ($\Omega \propto s^{-3/2}$) et par conséquent, son moment cinétique spécifique a pour expression $\mathcal{J} = s^{1/2}$. Il est donc hydrodynamiquement stable en vertu de $d\mathcal{J}/ds > 0$, mais magnétohydrodynamiquement instable d'après le critère établi par [Balbus & Hawley \(1991\)](#) ($d\Omega^2/d \ln s < 0$). Considérons le cas de deux particules fluides (en bleu sur la figure 2.12) liées à une même ligne de champ magnétique (en noir sur la même figure). Si l'une des deux particules est initialement déplacée de sa position d'équilibre vers l'intérieur du disque alors que sa voisine, elle, est déplacée vers l'extérieur, par conservation du moment cinétique, la première va devoir tourner plus vite et la seconde plus lentement. La ligne de champ, gelée dans le fluide, suit alors le mouvement de ces particules et se retrouve cisailée. Ceci a pour effet d'induire une tension magnétique qui s'oppose au mouvement des deux particules : celle initialement déplacée vers l'intérieur du disque décélère tandis que la seconde accélère. La particule freinée par la ligne de champ va donc présenter un déficit en moment cinétique par rapport à son environnement tandis que la seconde, elle, sera pourvue d'un excédant. De nouveau, par conservation du moment cinétique, la particule ralentie chute vers l'intérieur du disque et se retrouve sur une orbite plus rapide. Au contraire, la seconde est expulsée vers l'extérieur sur une orbite plus lente. La perturbation de départ s'amplifie de cette manière de façon exponentielle au cours du temps ce qui rend la situation instable. Il y a toutefois un pré-requis important au développement de l'instabilité : le champ magnétique doit, certes être présent, mais son intensité ne doit pas être trop élevée, faute de quoi, la tension magnétique s'opposera fermement au déplacement des particules fluides et stabilisera l'écoulement. Ceci se traduit par la condition de stabilité suivante sur l'amplitude du champ magnétique ([Balbus & Hawley, 1998](#)) :

$$B_z > \frac{\lambda_z \Omega}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left| \frac{d \ln \Omega}{d \ln s} \right|} \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \quad (2.30)$$

où λ_z désigne ici l'échelle de longueur verticale des perturbations.

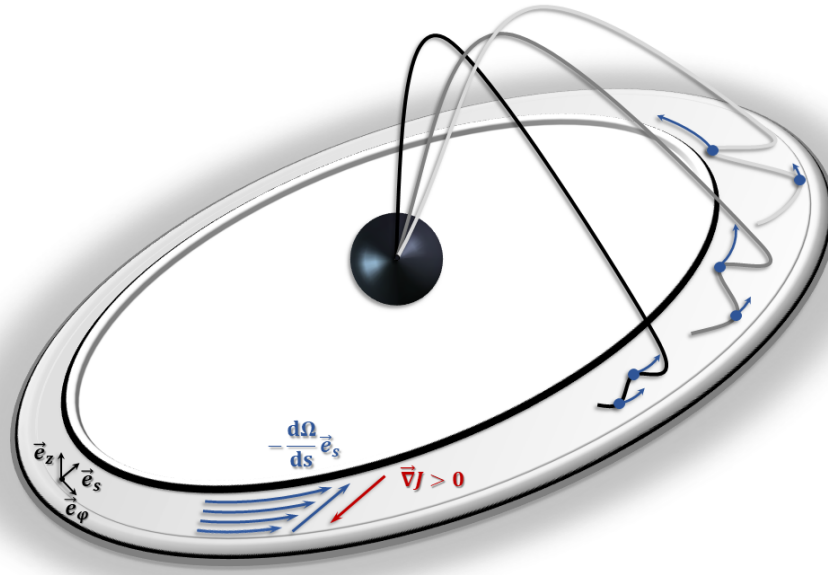


FIGURE 2.12 : Principe de l'instabilité magnétorotationnelle dans un disque d'accrétion en orbite autour d'une jeune étoile magnétisée. Deux particules fluides (en bleu) associées à une même ligne de champ (en noir) sont déplacées de leur position d'équilibre, l'une vers l'intérieur du disque, l'autre vers l'extérieur. Si le champ magnétique est suffisamment faible, il peut permettre le développement d'une instabilité linéaire comme suit : la particule fluide déplacée vers l'intérieur du disque doit accélérer par conservation du moment cinétique alors que celle déplacée vers l'extérieur doit décélérer. La ligne de champ est donc cisailée ce qui produit une tension magnétique qui freine la particule déplacée vers l'intérieur du disque et accélère celle déplacée vers l'extérieur. Par conservation du moment cinétique, la première va chuter sur une orbite plus rapide et la seconde, être éjectée sur une orbite plus lente. La perturbation de départ s'accroît ainsi au fil du temps (ligne de champ allant du plus foncé au plus clair) et l'écoulement est linéairement instable.

Comme l'ensemble des résultats originellement établis par [Balbus & Hawley \(1991\)](#) ne tient pas compte des effets de la stratification stable, il convient de s'interroger sur la façon dont ceux-ci peuvent être affectés par une forte stratification en entropie. [Balbus & Hawley \(1994\)](#) ont étendu leur analyse au cas plus complexe d'une zone radiative stellaire. Comme la force d'Archimède agit préférentiellement dans la direction radiale, le critère (2.27) ne devrait pas être modifié si l'on se place le long d'une couche sphérique ([Balbus & Hawley, 1994](#)). Dans ce cas, le critère d'instabilité s'écrit

$$\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \theta} < 0. \quad (2.31)$$

Hors d'une couche sphérique, l'instabilité est encore possible bien que la force d'Archimède amortisse les déplacements radiaux nécessaires à son développement. Le critère d'instabilité s'écrit alors ([Balbus, 1995](#)) :

$$-\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r} \geq \frac{N(r)^2}{2\Omega^2}. \quad (2.32)$$

D'après ce dernier, il s'ensuit que l'instabilité n'a que très peu de chance de pouvoir apparaître

dans une direction orthogonale à une couche sphérique, excepté peut-être dans un écoulement exceptionnellement faiblement stratifié. Il y a deux limitations à l'analyse de [Balbus & Hawley \(1994\)](#) et [Balbus \(1995\)](#).

Premièrement, les auteurs considèrent une situation idéalisée dans laquelle les perturbations possèdent une longueur d'onde infinie dans la direction latitudinale. Il s'agit d'un cas extrême qui ne peut pas s'appliquer directement à une zone radiative réelle dans laquelle les gradients de rotation se font sur des échelles finies. Dans l'analyse de [Balbus & Hawley \(1994\)](#), le taux de croissance est donné par (2.28), bien que l'écoulement soit stablement stratifié. Nous verrons au chapitre suivant que ce taux surestime le taux de croissance trouvé dans nos simulations car comme nous venons de l'expliquer, $k_\theta \neq 0$. Par ailleurs, le taux de croissance maximum (2.28) est associé à un nombre d'onde radial maximum donné par l'équation

$$k_{r_{\max}} = \frac{\Omega}{B_r} \sqrt{-\frac{d \ln \Omega}{d \ln s} - \left(\frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln s}\right)^2} \cos \theta \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \quad (2.33)$$

D'après celle-ci, pour un taux de rotation donné, plus l'amplitude du champ magnétique augmente, plus le nombre d'onde radial maximum doit diminuer. Ceci est de nouveau lié à la limite idéalisée $k_\theta \rightarrow 0$. Nous montrerons en effet dans le chapitre qui suit que ce nombre d'onde radial dépend également de la stratification stable et qu'il n'est pas simplement inversement proportionnel à l'intensité du champ poloïdal. De même, le critère (2.30) basé sur l'intensité critique du champ poloïdal au delà de laquelle l'écoulement est stable doit être nuancé. Dans la limite $\lambda_\theta \rightarrow 0$, celui-ci s'écrit désormais :

$$B_r > \frac{\lambda_r \Omega}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\left| \frac{d \ln \Omega}{d \ln s} \right|} \sqrt{\mu_0 \rho_0}. \quad (2.34)$$

Donc d'une part il s'applique à un profil de rotation différentielle cylindrique, et d'autre part il ne tient pas compte de l'effet de la stratification stable. Or, comme nous venons de l'expliquer, l'échelle de longueur radiale maximale λ_r des perturbations a tendance à être significativement réduite par la stratification en entropie. Aussi, il est de rigueur de choisir correctement cette dernière lorsque l'on souhaite estimer l'intensité maximale du champ magnétique pour laquelle il y a instabilité.

Deuxièmement, l'analyse de [Balbus \(1995\)](#) ne tient pas compte des effets diffusifs qui, comme nous l'avons vu jusqu'ici, peuvent favoriser l'apparition d'une instabilité en réduisant l'amplitude de la force d'Archimède. Ceux-ci ont été pris en compte par [Menou & Le Mer \(2006\)](#) à travers l'étude numérique d'une relation de dispersion, obtenue à partir d'une analyse de stabilité linéaire d'une zone radiative en rotation différentielle et faiblement magnétisée. Cette étude, conduite pour des valeurs typiques du Soleil, aboutit au critère suivant :

$$-\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r} \geq \frac{N(r)^2 \eta}{2\Omega^2 \kappa}, \quad (2.35)$$

qui montre en effet, que la diffusion thermique va favoriser le développement de l'instabilité magnétorotationnelle en présence d'un gradient, radial et négatif, de vitesse angulaire. Ceci implique néanmoins que l'effet de la stratification stable ne soit pas trop important, une condition, qui nous le verrons au chapitre suivant, est rencontrée dans la plupart des intérieurs radiatifs excepté dans le cœur dégénéré des sous-géantes.

2.2.2.2 Instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale

Lorsque l'influence du champ toroïdal sur la dynamique de l'instabilité ne peut plus être ignorée, sa nature change et se complexifie. On parle alors d'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale (HMRI). Les instabilités de ce type sont pertinentes pour notre étude car les champs magnétiques structurés à grande échelle ne peuvent rester stables au cours du temps que s'ils possèdent une configuration mixte dans laquelle la composante poloïdale est du même ordre de grandeur que la composante toroïdale (Braithwaite & Spruit, 2004; Braithwaite & Nordlund, 2006). Notons qu'il existe également des instabilités magnétorotationnelles pour lesquelles la composante toroïdale domine entièrement la configuration magnétique. On parle alors d'instabilité magnétorotationnelle azimuthale (AMRI) (Ogilvie & Pringle, 1996; Rüdiger et al., 2007). Toutefois, cette dernière ne peut se développer que dans les écoulements non-axisymétriques (Herron & Soliman, 2006) et de ce fait, nous n'en discuterons pas.

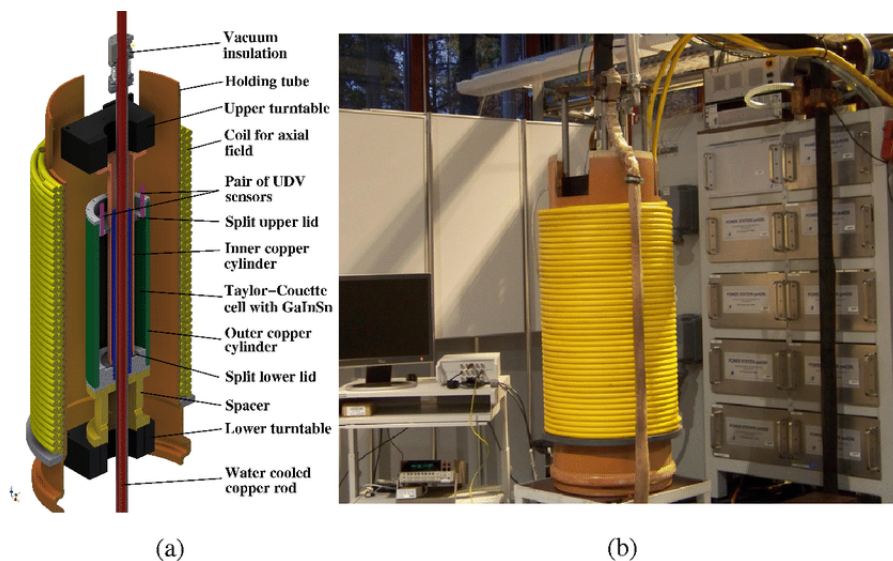


FIGURE 2.13 : Illustration de l'expérience PROMISE. Crédit : Stefani et al. (2018).

L'instabilité magnétorotationnelle standard n'a jamais été observée expérimentalement de façon fiable. La raison est que les expériences d'écoulement de type Taylor-Couette conçues pour son observation font intervenir des métaux liquides dont les nombres de Prandtl magnétiques sont de l'ordre de 10^{-5} voir 10^{-7} (Hollerbach & Rüdiger, 2005). En comparaison, dans les intérieurs radiatifs ce nombre est compris entre 10^{-3} et 10^{-2} (Rüdiger et al., 2016), excepté dans les intérieurs dégénérés où il peut atteindre des valeurs de 1 voir 10 (Rüdiger et al., 2015). Observer l'instabilité dans ce type de configuration requiert donc des nombres de Reynolds si grands que l'écoulement est totalement dominé par des effets de bords (Hollerbach & Fournier, 2004). Si instabilité magnétorotationnelle il y a, il n'est alors plus possible de la distinguer d'une autre instabilité, bien que certains auteurs soutiennent l'avoir déjà observée expérimentalement (voir par exemple Sisan et al. (2004)). Au cours des années 2000, Hollerbach & Rüdiger (2005) suggèrent de combiner un champ magnétique azimuthal à un champ magnétique axial dans une configuration de Taylor-Couette cylindrique afin d'observer une instabilité de type magnétorotationnel à des nombres de Reynolds réduits. Ils montrent en effet que l'incorporation d'un champ toroïdal tend à réduire le nombre de Reynolds critique de façon significative, même pour des nombres de Prandtl magnétiques aussi faibles que 10^{-6} . Cette instabilité, qu'ils nommèrent l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale, fut pour la première fois expérimentalement ob-

servée par [Stefani et al. \(2006\)](#) à l'aide de l'expérience PROMISE illustrée en figure 2.13. Cette expérience consiste à reproduire un écoulement de Taylor-Couette à l'aide d'une cuve de cuivre remplie de galistan, un alliage liquide à température ambiante, en imposant des champs magnétiques axial et azimuthal extérieurement au fluide afin d'éviter l'apparition d'autres instabilités magnétohydrodynamiques (en particulier l'instabilité de Taylor). Outre les améliorations qui suivirent cette expérience (voir par exemple [Stefani et al. \(2009\)](#)), ceci marqua le début de développements théoriques permettant de mieux comprendre cette instabilité.

Physiquement, les instabilités magnétorotationnelles standard et hélicoïdale diffèrent par leur nature. Dans le premier cas, l'accélération de Coriolis se couple à la force de Lorentz pour donner naissance à des ondes magnéto-Coriolis, un mixte entre les ondes inertielles dont la force de rappel est la force de Coriolis, et les ondes d'Alfvén dont la force de rappel est la force de Lorentz. Lorsque ces forces agissent de concert sur une particule fluide, on parle d'ondes magnéto-Coriolis rapides. Dans le cas contraire, ces ondes sont dites lentes. Il s'avère qu'en présence d'un cisaillement, les ondes magnéto-Coriolis lentes peuvent être déstabilisées (taux de croissance positif) bien que la perturbation reste stationnaire (vitesse de phase nulle), donnant ainsi naissance à l'instabilité magnétorotationnelle standard ([Nornberg et al., 2010](#)). Lorsqu'un champ magnétique toroïdal est appliqué, la nature de l'instabilité change et se complexifie. On distingue alors l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale essentielle de l'instabilité magnétorotationnelle standard modifiée hélicoïdalement ([Kirillov & Stefani, 2010](#)). Dans le premier cas, l'instabilité est associée à la déstabilisation d'une onde inertielle ([Liu et al., 2006](#)) et peut opérer à des nombres de Reynolds magnétiques remarquablement faibles pour lesquels l'instabilité magnétorotationnelle standard ne peut pas se développer ([Priede et al., 2007](#)). Dans le second cas, la forme standard est simplement modifiée par la présence du champ toroïdal. La nature complexe de l'instabilité magnétorotationnelle standard modifiée hélicoïdalement a été décrite par [Kirillov & Stefani \(2010\)](#) auquel nous référons le lecteur pour plus de détails.

Maintenant que nous nous sommes intéressés à la nature de cette instabilité, il convient de s'interroger sur la façon dont le champ toroïdal modifie la forme standard de la MRI. Pour cela, il est nécessaire de passer par l'analyse de la relation de dispersion. La forme la plus complète de cette relation, c'est-à-dire prenant en compte les effets diffusifs et ne faisant aucune hypothèse sur la forme du champ toroïdal mais négligeant néanmoins les effets de la stratification stable, a été obtenue par [Kirillov et al. \(2014\)](#). Lorsque les effets visqueux et ohmiques sont négligés et que la configuration est axisymétrique, cette relation s'écrit, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \gamma^4 + \left[4 \frac{k_z^2}{k^2} \left(\Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} \right) - \frac{\omega_{A_\phi}^2}{2} \frac{\partial \ln \omega_{A_\phi}}{\partial \ln s} \right) + 2\omega_{A_z}^2 \right] \gamma^2 - \left(8i \frac{k_z^2}{k^2} \Omega \omega_{A_z} \omega_{A_\phi} \right) \gamma + \\ \omega_{A_z}^2 \left[\omega_{A_z}^2 + 4 \frac{k_z^2}{k^2} \left(\frac{\Omega^2}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} - \omega_{A_\phi}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \omega_{A_\phi}}{\partial \ln s} \right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Afin de l'analyser, nous allons considérer quelques cas limites. Premièrement, lorsque $B_\phi \rightarrow 0$ et $\Omega = \Omega(s)$, cette expression se réduit à la forme suivante :

$$\gamma^4 + \left[\frac{k_z^2}{k^2} 4\Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \ln \Omega}{d \ln s} \right) + 2\omega_{A_z}^2 \right] \gamma^2 + \omega_{A_z}^2 \left[\omega_{A_z}^2 + \frac{k_z^2}{k^2} \frac{d\Omega^2}{d \ln s} \right] = 0. \quad (2.37)$$

Nous retrouvons ainsi la relation de dispersion de la SMRI obtenue par [Balbus & Hawley \(1991\)](#). Le terme en bleu correspond à la fréquence épicyclique, c'est-à-dire la fréquence à laquelle une particule fluide en orbite dans un disque, oscille radialement lorsqu'elle est perturbée. Si ce terme est négatif, l'écoulement est instable vis-à-vis de l'instabilité centrifuge en

accord avec le critère (2.20) de [Rayleigh \(1917\)](#). En vert, nous retrouvons le terme responsable de l'instabilité magnétorotationnelle. Dès qu'il devient négatif, un écoulement magnétisé est instable pourvu que l'intensité du champ poloïdal ne soit pas trop élevée et ne dépasse pas une certaine valeur critique donnée par le critère (2.30).

Plaçons-nous maintenant dans la limite d'un champ toroïdal "current-free" (c'est-à-dire que ce dernier est produit à partir de courants électriques extérieurs au fluide), dans ce cas, $(\partial \ln \omega_{A\phi} / \partial \ln s) = -2$ et la relation de dispersion (2.36) devient :

$$\begin{aligned} \gamma^4 + \left[4 \frac{k_z^2}{k^2} \left(\Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} \right) + \omega_{A\phi}^2 \right) + 2\omega_{A_z}^2 \right] \gamma^2 - \left(8i \frac{k_z^2}{k^2} \Omega \omega_{A_z} \omega_{A\phi} \right) \gamma + \\ \omega_{A_z}^2 \left[\omega_{A_z}^2 + 4 \frac{k_z^2}{k^2} \frac{\Omega^2}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Nous observons qu'il existe désormais un coefficient complexe en violet, sur lequel nous revenons un peu plus bas, ainsi qu'un terme associé à la présence du champ toroïdal, en rouge. Dans cette configuration, [Rüdiger et al. \(2018\)](#) ont montré que l'instabilité a tendance à être moins vigoureuse (son taux de croissance est plus faible) lorsque l'amplitude du champ toroïdal augmente.

Revenons maintenant au cas général :

$$\begin{aligned} \gamma^4 + \left[\frac{k_z^2}{k^2} \left(4\Omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} \right) - 2\omega_{A\phi}^2 \frac{\partial \ln \omega_{A\phi}}{\partial \ln s} \right) + 2\omega_{A_z}^2 \right] \gamma^2 - \left(8i \frac{k_z^2}{k^2} \Omega \omega_{A_z} \omega_{A\phi} \right) \gamma + \\ \omega_{A_z}^2 \left[\omega_{A_z}^2 + 4 \frac{k_z^2}{k^2} \left(\frac{\Omega^2}{2} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln s} - \omega_{A\phi}^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln \omega_{A\phi}}{\partial \ln s} \right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nous pouvons conclure que pour tout cisaillement $\partial \ln \Omega / \partial \ln s < -2$, l'instabilité centrifuge sera déclenchée et dominera la dynamique du système (terme en bleu) car elle se développe sur un temps bien plus court que l'instabilité magnétorotationnelle. Au contraire, si le cisaillement est positif ($\partial \ln \Omega / \partial \ln s > 0$), l'écoulement est stable en accord avec les critères de (2.20) et (2.27) de [Rayleigh \(1917\)](#) et [Balbus & Hawley \(1991\)](#), (termes en bleu et en vert). Pour des taux de cisaillement $\partial \ln \Omega / \partial \ln s \in]-2; 0[$, l'écoulement est potentiellement instable vis-à-vis d'une HMRI, à condition toutefois que l'intensité du champ magnétique le permette. Si elle l'autorise, la dynamique de l'instabilité dépend alors fortement du profil du champ toroïdal. Considérons un profil de la forme $V_{A\phi} \propto 1/s^n$. Plusieurs cas se présentent à nous :

- $n > 1$: le champ azimuthal aura systématiquement un effet stabilisant, d'autant plus stabilisant que le profil est "raide" (c'est-à-dire d'autant plus stabilisant pour des n croissants).
- $n < -1$: le champ toroïdal aura un effet déstabilisant et favorisera le développement de l'instabilité.
- $n = 1$: nous retrouvons le champ magnétique "current-free" et par conséquent, le champ toroïdal aura un effet stabilisant.
- $n = -1$: l'effet du champ toroïdal est inexistant.

Entre ces différentes gammes de valeur, la situation est plus complexe car les deux termes en rouge peuvent avoir des effets opposés. Par exemple, pour $n = 1/2$ le terme rouge du haut aura un effet stabilisant alors que celui du bas favorisera l'apparition de l'instabilité.

Revenons maintenant au terme violet. La présence d'un champ azimuthal a introduit un coefficient complexe dans la relation de dispersion, modifiant le problème aux valeurs propres. Désormais, il existe des valeurs propres réelles et des valeurs propres imaginaires et par conséquent, les perturbations ont une vitesse de phase. En fait, en introduisant un champ toroïdal dans notre problème, nous avons également introduit une certaine hélicité magnétique¹ à travers le terme en violet dans l'équation (2.39), ce qui a pour conséquence de briser la symétrie de réflexion $z \rightarrow -z$ (Knobloch & Spruit, 1982; Julien & Knobloch, 2010). Cette brisure de symétrie, provoquée par la présence du champ toroïdal, modifie profondément l'instabilité puisque désormais, les perturbations vont se propager. Le sens de propagation dépend alors du signe de l'hélicité magnétique (Julien & Knobloch, 2010).

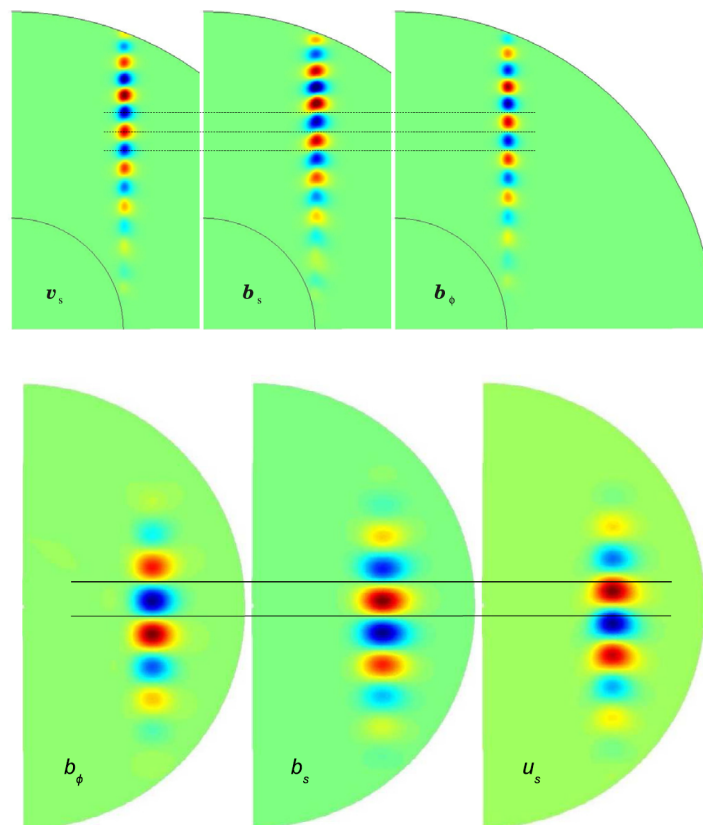


FIGURE 2.14 : Effet d'un champ toroïdal sur la dépendance de phase entre les différents champs perturbés. Pour une SMRI (coupes du haut), la composante radiale du champ magnétique perturbé est en exacte opposition de phase avec la composante toroïdale, tandis que ces dernières sont en exacte quadrature de phase avec la composante radiale du champ de vitesse perturbé. Cette dépendance de phase est modifiée pour une HMRI (coupes du bas) où la quadrature de phase entre la composante radiale du champ de vitesse perturbé et les composantes radiale et azimuthale du champ magnétique perturbé, n'est plus exactement observée. Crédits : [Petitdemange et al. \(2008\)](#) (coupes du haut) et [Petitdemange et al. \(2013\)](#) (coupes du bas).

Pour conclure sur la description de l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale nous allons mentionner un dernier phénomène. Dans le cadre de la SMRI, il existe des relations de phase très claires entre les différentes quantités perturbées. [Petitdemange et al. \(2008\)](#) montrent en

1. Rappelons que l'hélicité magnétique H est défini par le produit scalaire $A \vec{e}_\phi \cdot \vec{B}$ où A est le potentiel vecteur du champ magnétique défini par la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \times A \vec{e}_\phi$.

effet que la composante radiale du champ de vitesse perturbé est en exacte quadrature de phase avec les composantes radiale et toroïdale du champ magnétique perturbé, ces dernières étant elles-mêmes, en exacte opposition de phase. Cette signature de l'instabilité magnétorotationnelle standard est altérée en présence d'un champ toroïdal. L'existence d'une vitesse de phase introduit en effet un décalage de phase entre les champs perturbés. La quadrature de phase entre la composante radiale du champ de vitesse perturbé et les composantes radiale et azimuthale du champ magnétique perturbé, n'est plus observée (Petitdemange et al., 2013). Ce phénomène est illustré en figure 2.14 sur laquelle des coupes 2D de la composante radiale du champ de vitesse perturbé ainsi que des coupes 2D des composantes radiale et azimuthale du champ magnétique perturbé sont comparées entre elles dans les cas d'une SMRI et d'une HMRI.

En résumé, l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale diffère principalement de la forme standard par le fait qu'elle :

- fait intervenir un champ toroïdal qui peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant, modifiant ainsi le taux de croissance de l'instabilité,
- est caractérisée par une propagation des perturbations dans une direction qui dépend du signe de l'hélicité magnétique parce que le champ toroïdal brise la symétrie de réflexion,
- modifie la dépendance de phase entre les différents champs perturbés.

2.3 Couches limites (magnéto)hydrodynamiques

Les couches limites sont une conséquence de la présence de frontières (fluides ou solides) délimitant un domaine fluide. Dans un fluide faiblement visqueux, les propriétés du fluide s'adaptent aux conditions aux limites imposées à la frontière dans une couche d'épaisseur très fine au sein de laquelle les effets visqueux sont aussi importants que les effets inertiels. Nous devons le concept de couche limite à Prandtl (1904) qui, au début du 20^{ème} siècle, introduit ce phénomène dans un papier fondateur qui ne sera traduit que 24 ans plus tard (Prandtl, 1928). Les couches limites interviennent dans de nombreuses applications physiques, que ce soit dans les expériences de laboratoire, les expériences numériques ou plus simplement, dans la nature. Dans les étoiles, l'absence de frontières solides ou d'interfaces gaz/liquide les rend moins pertinentes. On peut néanmoins envisager leur apparition à l'interface entre l'atmosphère peu dense de l'étoile et son intérieur, ou encore à la frontière entre un cœur convectif et une enveloppe radiative (voir par exemple Lara & Rieutord (2013) ou Gagnier & Rieutord (2020)).

Les simulations numériques que nous réalisons font intervenir des frontières rigides qui favorisent le développement de ces couches. Ces dernières peuvent induire une circulation dans le corps du fluide dont l'amplitude dépend alors de la viscosité. Aussi, bien que dans une étoile la viscosité moléculaire soit si faible que l'amplitude d'une telle circulation doit l'être aussi, dans les simulations que nous effectuons, la circulation induite peut jouer un rôle important dans la dynamique de l'écoulement. Nous avons donc été amenés à les reconnaître afin d'éviter tout biais dans l'interprétation des résultats numériques. Pour ce faire, nous avons utilisé des méthodes et résultats sur les couches limites dans les fluides en rotation que nous décrivons dans la suite de cette section. Ces couches ont fait, et font toujours l'objet de nombreux développements théoriques. Elles sont nombreuses, de natures diverses (Barcilon & Pedlosky, 1967b), peuvent parfois s'imbriquer les unes dans les autres (Stewartson, 1966), dépendent de la géométrie du système et sont également susceptibles de devenir singulières au voisinage de points particuliers (Marcotte et al., 2016). Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement aux couches limites d'Ekman, de Stewartson, de Hartmann et de Shercliff, celles-ci étant respectivement décrites dans les sous-sections 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3 et 2.3.4.

2.3.1 Couche d'Ekman

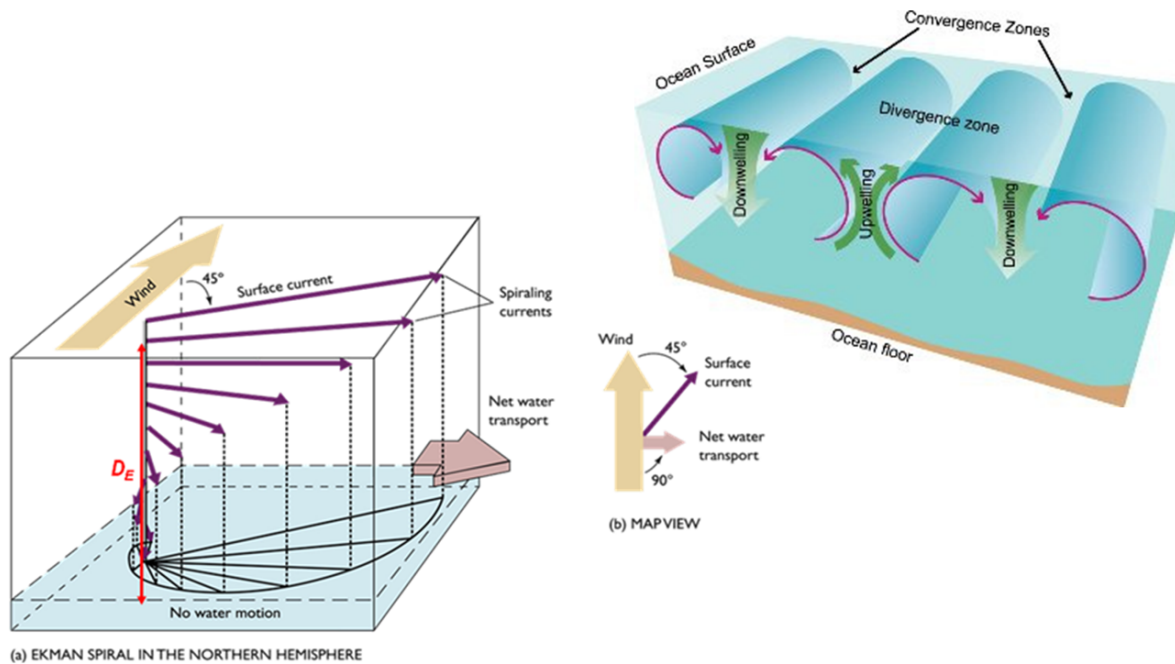


FIGURE 2.15 : Couche limite d'Ekman. Gauche : la contrainte visqueuse exercée par le vent à la surface libre de l'océan induit un courant qui spirale dans une couche limite d'épaisseur D_E , ainsi qu'un transport d'eau dans une direction perpendiculaire au vent, orienté vers la droite dans l'hémisphère Nord. Crédit : <https://www.offshoreengineering.com/education/oceanography/ekman-current-upwelling-downwelling>. Droite : les flux de masses horizontaux sont compensés par des remontées ("upwelling") ou des plongées ("downwelling") d'eau. Crédit : <https://www.redmap.org.au/article/upwelling-and-downwelling-in-the-ocean/>.

C'est entre 1893 et 1896, lors de l'expédition Fram menée dans l'Arctique, que l'océanographe Fridtjof Nansen constate une dérive de la glace à $20^\circ - 40^\circ$ à droite de la direction du vent. Il pose les bases d'un problème qui sera résolu analytiquement par Ekman (1905) à l'aide du concept de couche limite. Comme illustré à gauche de la figure 2.15, la couche limite d'Ekman est le résultat d'une contrainte visqueuse exercée par le vent à la surface libre de l'océan. Cette contrainte donne naissance à une couche d'une épaisseur d'environ $D_E \sim 10$ mètres aux moyennes latitudes. À l'intérieur de la couche, l'hodographe du courant induit par le vent, décrit la "célèbre" spirale (théorique) d'Ekman. Lorsque ce courant est intégré sur l'épaisseur D_E de la couche, on constate qu'il est associé à un transport d'amplitude proportionnelle à la contrainte visqueuse exercée par le vent, et de direction perpendiculaire à celui-ci (à droite dans l'hémisphère Nord). Par ailleurs, les variations spatiales de la vitesse du vent induisent des variations spatiales de la contrainte visqueuse, et donc des flux de masses horizontaux. Ceux-ci doivent nécessairement être compensés par des remontées ou plongées d'eau, ce que l'on appelle respectivement des "upwelling" et "downwelling" (voir figure 2.15). Cette circulation dite circulation d'Ekman, constitue un phénomène important en océanographie, notamment parce que les eaux qui remontent en surface sont généralement riches en nutriments et attirent une grande biodiversité marine.

Revenons au cas des simulations numériques que nous effectuons. Comme nous l'avons mentionné un peu plus tôt, ces simulations font intervenir des frontières solides auxquelles nous imposons des conditions limites que l'écoulement doit venir satisfaire. Ceci peut, par exemple, être une condition d'imperméabilité lorsque la composante du champ de vitesse, perpendiculaire à la paroi, doit s'annuler, une condition de non-glissement lorsque c'est la composante tangentielle qui doit être nulle, ou encore une condition de nullité sur la contrainte tangentielle normale à la paroi lorsque l'on impose que le produit $(\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r) \times \vec{e}_r$, où σ est le tenseur des contraintes, \cdot un produit scalaire et \times un produit vectoriel, soit nul. Dans la plupart des cas, l'écoulement intérieur est incapable de satisfaire la condition qu'on lui prescrit à la limite. Ceci a pour conséquence d'induire une couche limite qui prend ce rôle en charge en lissant la discontinuité à travers des effets visqueux. Afin d'illustrer cela, considérons la configuration

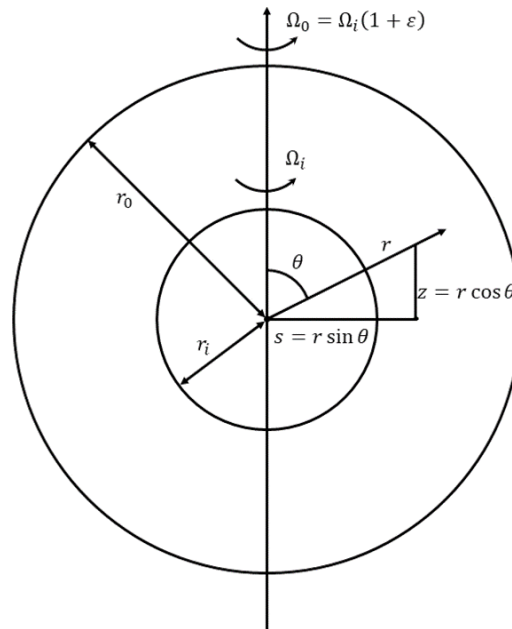


FIGURE 2.16 : Configuration de Couette sphérique considérée par Proudman (1956). Un fluide visqueux de densité uniforme est compris entre deux sphères imperméables. La sphère interne de rayon r_i tourne à la vitesse angulaire Ω_i tandis que la sphère externe de rayon r_0 tourne légèrement plus vite à la vitesse angulaire $\Omega_0 = \Omega_i(1 + \epsilon)$. Le paramètre ϵ est suffisamment petit pour que la dynamique de l'écoulement puisse être considérée comme linéaire. θ , r , s et z désignent respectivement la latitude, le rayon, la coordonnée perpendiculaire à l'axe de rotation et la coordonnée verticale.

de Couette sphérique illustrée sur la figure 2.16, pour laquelle un fluide visqueux de densité uniforme est compris entre deux sphères imperméables tournant à des vitesses fixées, mais différentes. La sphère interne de rayon r_i tourne à la vitesse angulaire Ω_i tandis que la sphère externe, de rayon r_0 , tourne légèrement plus vite à la vitesse angulaire $\Omega_0 = \Omega_i(1 + \epsilon)$, avec $\epsilon \ll 1$ de sorte que la dynamique de l'écoulement est linéaire. Les équations, rendues sans dimension par un choix approprié d'échelles ($L \sim r_0$, $U_r, U_\theta, U_\phi \sim r_0 \epsilon \Omega_i$ et $P \sim \rho_0 r_0^2 \Omega_0 \epsilon \Omega_i$), qui gouvernent la dynamique d'un écoulement stationnaire dans cette configuration de Couette sphérique s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\tilde{U}_\phi \sin \theta = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial r} + E \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Big|_{\vec{e}_r}, \\ -2\tilde{U}_\phi \cos \theta = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \theta} + E \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Big|_{\vec{e}_\theta}, \\ 2\tilde{U}_\theta \cos \theta + 2\tilde{U}_r \sin \theta = E \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Big|_{\vec{e}_\phi}, \\ \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) = 0, \end{array} \right. \quad (2.40)$$

où $\Pi = P/\rho_0$ et $E = \nu/r_0^2 \Omega_0$ est le nombre d'Ekman. Supposons qu'une couche limite apparaisse le long de la sphère externe et/ou de la sphère interne en raison d'un saut sur le taux de rotation, c'est-à-dire que dans le repère tournant à Ω_0 , l'écoulement ne parvient pas à satisfaire les conditions $\delta\Omega(r_0, \theta) = 0$ et $\delta\Omega(r_i, \theta) = -\epsilon\Omega_i$ que l'on impose respectivement aux sphères externe et interne. Il est alors aisé de montrer que la seule couche limite qui peut se développer à ces endroits est une couche d'Ekman. En effet, si l'on conserve uniquement les dérivées radiales d'ordre le plus élevé dans le système (2.40), ce dernier se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\tilde{U}_\phi \sin \theta = -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial r} + E \frac{\partial^2 \tilde{U}_r}{\partial r^2}, \\ -2\tilde{U}_\phi \cos \theta = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \theta} + E \frac{\partial^2 \tilde{U}_\theta}{\partial r^2}, \\ 2\tilde{U}_\theta \cos \theta + 2\tilde{U}_r \sin \theta = E \frac{\partial^2 \tilde{U}_\phi}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial \tilde{U}_r}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) = 0. \end{array} \right. \quad (2.41)$$

Ces équations peuvent à leur tour être combinées sous la forme d'une unique équation portant sur la grandeur \tilde{U}_θ :

$$\begin{aligned} & 4\tilde{r} \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \tilde{U}_\theta}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \tilde{U}_\theta}{\partial r} (1 + \cos^2 \theta) - 8 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \tilde{U}_\theta}{\partial r} \right) + \frac{4 \sin \theta}{\tilde{r}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) \\ & - \frac{8 \cos \theta}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) + E^2 \left[\tilde{r} \frac{\partial^6 \tilde{U}_\theta}{\partial r^6} + 4 \frac{\partial^5 \tilde{U}_\theta}{\partial r^5} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} \left(\frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) \right) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Celle-ci est composée de deux membres : l'un contient des termes d'ordre $O(E^2)$ et l'autre, des termes d'ordre $O(1)$. En ne conservant que la dérivée radiale d'ordre le plus élevé dans chacun de ces deux membres, on aboutit à l'équation générale de couche limite :

$$E^2 \frac{\partial^6 \tilde{U}_\theta}{\partial r^6} + 4 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \tilde{U}_\theta}{\partial r^2} = 0. \quad (2.43)$$

En effectuant maintenant un raisonnement en ordre de grandeur dans lequel nous prenons δ comme échelle spatiale, on voit que le seul équilibre possible dans l'équation (2.43) conduit à une épaisseur de couche limite

$$\delta = \frac{E^{1/2}}{\sqrt{|\cos \theta|}}, \quad (2.44)$$

qui correspond à l'épaisseur de la couche d'Ekman, ici modifiée par la présence d'un facteur géométrique $\sqrt{|\cos \theta|}$ au dénominateur en raison de la configuration sphérique du système. Connaissant désormais l'épaisseur de la couche limite qui se développe le long des sphères externe et interne, nous introduisons une coordonnée étirée adaptée à la description de l'écoulement dans la couche limite et qui, par rapport à la sphère externe, s'écrit $\tilde{\xi} = E^{-1/2} (1 - \tilde{r})$. Dans ce qui suit, nous nous focaliserons désormais sur la couche d'Ekman localisée le long de cette sphère sachant que l'analyse de celle située à la sphère interne peut être reproduite à l'identique en définissant une seconde coordonnée étirée $\tilde{\chi} = E^{-1/2} (\tilde{r} - \tilde{r}_i)$.

Formellement, on décompose la solution en la somme d'une solution intérieure et d'une solution de couche limite :

$$\{\vec{U}, P\} = \{\vec{U}^I(r, \theta), P^I(r, \theta)\} + \{\vec{U}^E(\xi, \theta), P^E(\xi, \theta)\} = \{\vec{0}, 0\}, \quad (2.45)$$

sachant que la solution de couche limite doit être négligeable à l'intérieur, c'est-à-dire que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \vec{U}^E(\xi, \theta) = \vec{0}$ et $\lim_{\xi \rightarrow \infty} P^E(\xi, \theta) = 0$. Chacune de ces solutions est écrite sous la forme d'un développement en puissance du nombre d'Ekman, supposé petit, de sorte que (Barcilon & Pedlosky, 1967a)

$$\tilde{q} = \{\tilde{U}_r, \tilde{U}_\theta, \tilde{U}_\phi, \tilde{\Pi}\} = \tilde{q}^{(0)} + \sqrt{E} \tilde{q}^{(1)} + E \tilde{q}^{(2)} + \dots + \tilde{q}^{E(0)} + \sqrt{E} \tilde{q}^{E(1)} + E \tilde{q}^{E(2)} + \dots \quad (2.46)$$

En substituant ces développements dans le système d'équation (2.41), puis en ne conservant que l'ordre dominant, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\tilde{U}_\phi^{E(0)} \sin \theta = \frac{\partial \tilde{\Pi}^{E(1)}}{\partial \xi}, \\ -2\tilde{U}_\phi^{E(0)} \cos \theta = \frac{\partial^2 \tilde{U}_\theta^{E(0)}}{\partial \xi^2}, \\ 2\tilde{U}_\theta^{E(0)} \cos \theta = \frac{\partial^2 \tilde{U}_\phi^{E(0)}}{\partial \xi^2}, \\ -\frac{\partial \tilde{U}_r^{E(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta^{E(0)}) = 0, \end{array} \right. \quad (2.47)$$

sachant qu'à l'ordre précédent, $\partial \tilde{\Pi}^{E(0)} / \partial \xi = \partial \tilde{U}_r^{E(0)} / \partial \xi = 0$, c'est-à-dire $\tilde{\Pi}^{E(0)} = \tilde{U}_r^{E(0)} = \text{cte}$, avec $\text{cte} = 0$ puisque $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{U}_r^{E(0)}(\xi, \theta) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{P}^{E(0)}(\xi, \theta) = 0$. Ces équations sont celles de la couche d'Ekman et peuvent être résolues pour des conditions aux limites appropriées (voir annexe C.1). Par exemple, dans le présent problème, les sphères étant imperméables, nous aurons $U_r^I(r_0, \theta) + U_r^E(\xi, \theta) = 0$ tandis que, puisque leur taux de rotation est prescrit, une condition limite

compatible sur les composantes horizontales du champ de vitesse est de type non-glissement : $U_\phi^I(r_0, \theta) + U_\phi^E(\xi, \theta) = 0$ dans le repère tournant à Ω_0 , et $U_\theta^I(r_0, \theta) + U_\theta^E(\xi, \theta) = 0$. Au final, tout se passe comme si la couche d'Ekman imposait une relation entre les composantes radiale et azimuthale du champ de vitesse intérieur. À la sphère externe, pour les conditions aux limites susmentionnées, nous montrons en annexe C.1 que dans le repère tournant à la vitesse Ω_0 , cette relation s'écrit :

$$U_r^I(r_0, \theta) = -\frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \sin \theta U_\phi^I(r_0, \theta)}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right). \quad (2.48)$$

Ces couches limites d'Ekman jouent un rôle essentiel dans une configuration de Couette sphérique où elles permettent de déterminer l'expression de la rotation différentielle. Ce problème a été considéré par Proudman (1956). L'expression de la rotation différentielle est établie comme suit : plaçons-nous dans le repère tournant à la vitesse de la sphère interne Ω_i . Pour des conditions aux limites similaires à celles que nous avons choisies jusqu'à présent (c'est-à-dire condition d'imperméabilité pour la composante radiale du champ de vitesse et condition de non-glissement pour les composantes horizontales), la condition (2.48) se réécrit simplement

$$U_r^I(r_0, \theta) = -\frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \sin^2 \theta (\delta\Omega(r_0, \theta) - (\Omega_0 - \Omega_i))}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right), \quad (2.49)$$

tandis qu'à la sphère interne,

$$U_r^I(r_i, \theta) = \frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \sin^2 \theta \delta\Omega(r_i, \theta)}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right). \quad (2.50)$$

Loin des bords, les effets visqueux sont négligeables et l'écoulement est en équilibre géostrophique $2\Omega_0(\vec{e}_z \times \vec{U}) = -\vec{\nabla}P$. Le rotationnel de cette équation conduit à un résultat bien connu que l'on appelle la contrainte de Taylor-Proudman (Proudman, 1916; Taylor, 1917) :

$$\vec{\nabla} \times (2\Omega_0(\vec{e}_z \times \vec{U})) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} = 0, \quad (2.51)$$

et qui montre que les différentes composantes du champ de vitesse sont indépendantes de la coordonnée verticale. L'utilisation de cette contrainte, valable dans le corps du fluide, conjointement aux deux conditions (2.49) et (2.50) vérifiées par l'écoulement intérieur, permet de déterminer la rotation différentielle. Pour cela, on effectue un bilan de masse dans un cylindre coaxial de rayon $s = r \sin \theta$, au sein duquel on impose que le flux de masse quittant la couche d'Ekman à la sphère interne soit égal au flux de masse qui pénètre la couche d'Ekman localisée à la sphère externe :

$$-\iint \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) s^2 (\delta\Omega - (\Omega_0 - \Omega_i))}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds d\phi = \iint \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) s^2 \delta\Omega}{2 \sqrt{|\cos \theta_i|}} \right) ds d\phi. \quad (2.52)$$

En utilisant $\Omega_0 - \Omega_i = \epsilon\Omega_i$, $\cos \theta_0 = \sqrt{1 - (s/r_0)^2}$ et $\cos \theta_i = \sqrt{1 - (s/r_i)^2}$, on obtient alors :

$$\begin{cases} \Omega(s < r_i) = \Omega_0 - \epsilon\Omega_i \left[\frac{(1 - (s/r_0)^2)^{1/4}}{(1 - (s/r_i)^2)^{1/4} + (1 - (s/r_0)^2)^{1/4}} \right], \\ \Omega(s > r_i) = \Omega_0. \end{cases} \quad (2.53)$$

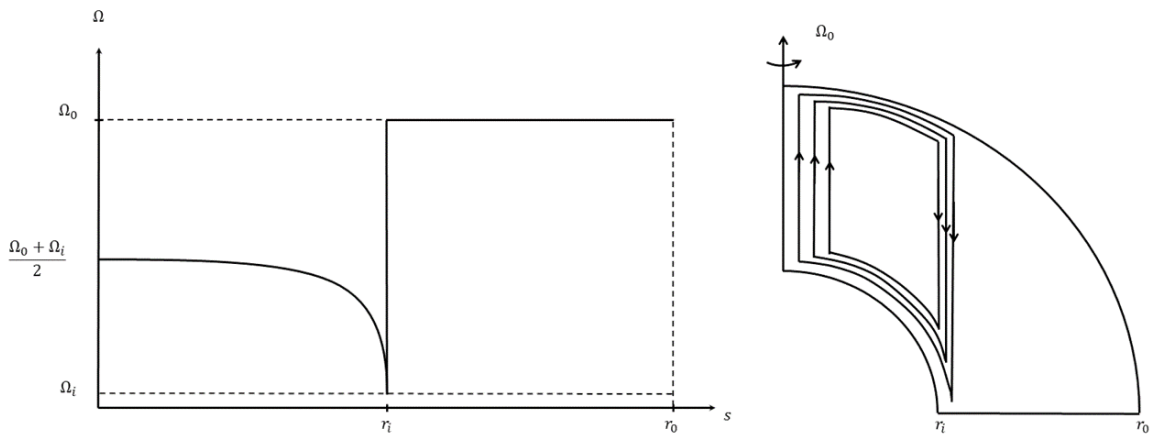


FIGURE 2.17 : Gauche : solution analytique (2.53) de la rotation différentielle en fonction de la coordonnée s . Elle montre que l'écoulement est en rotation solide à l'extérieur du cylindre tangent, et en rotation différentielle à une vitesse intermédiaire entre les taux de rotation des sphères interne et externe, à l'intérieur. La solution est discontinue au passage du cylindre en $s = r_i$. Droite : circulation secondaire induite par les couches d'Ekman. Cette circulation méridienne forme une cellule dont le sens de circulation est horaire. Pour $\epsilon < 0$, le sens de circulation serait inversé.

Cette solution est tracée sur la figure 2.17. Elle montre qu'à l'extérieur du cylindre tangent (le cylindre à la sphère interne centré sur l'axe de rotation) l'écoulement se synchronise à la sphère externe avec laquelle il est en rotation solide. En revanche, à l'intérieur de ce cylindre, il est en rotation quasi-uniforme à une vitesse intermédiaire entre celles des deux sphères comme une conséquence d'un équilibre entre le flux de masse expulsé de la couche limite d'Ekman localisée le long de la sphère interne, et le flux de masse aspiré dans la couche d'Ekman située à la sphère externe. Cette méthode a également permis à Proudman (1956) de déterminer l'expression de la circulation méridienne. Celle-ci est illustrée sur la figure 2.17 où l'on voit qu'elle décrit une cellule au sein du cylindre tangent, dont le sens de circulation est horaire. Pour $\epsilon < 0$, le sens de circulation serait inversé.

La solution (2.53) déterminée par Proudman (1956) est incomplète pour deux raisons. Premièrement, elle présente une discontinuité au passage du cylindre tangent en $s = r_i$. Celle-ci va induire le développement de couches de cisaillement libre le long du cylindre tangent pour permettre un raccord de la solution $\Omega(s < r_i)$ avec celle $\Omega(s > r_i)$. Ces couches, que l'on appelle les couches de Stewartson en référence aux travaux de Stewartson (1957, 1966), ont une structure complexe que nous décrirons dans la sous-section qui suit. Deuxièmement, cette solution ne tient pas compte du facteur $\sqrt{|\cos \theta|}$ au dénominateur de l'équation (2.44) qui indique que la couche d'Ekman s'épaissit au fur et à mesure que l'on s'approche de l'équateur jusqu'à devenir infinie. À cette localisation, une remise à échelle est nécessaire et montre que la couche d'Ekman a une extension radiale $\delta_s = E^{2/5}$ et une extension verticale $\delta_z = E^{1/5}$ (Stewartson, 1966). Si le problème des couches de cisaillement libre a été traité en détail il y a longtemps par Stewartson (1957, 1966), la description de la couche équatoriale et de son raccord avec les couches de Stewartson reste un sujet de recherche (Marcotte et al., 2016).

La solution de l'écoulement de Couette sphérique que nous venons de décrire fait l'hypothèse que le fluide est de densité uniforme. On s'attend à ce que la stratification stable modifie drastiquement cette solution, notamment parce que la force d'Archimède va s'opposer aux mou-

vements de circulation radiaux. [Barcilon & Pedlosky \(1967a\)](#) ont étudié les effets de la stratification stable dans un écoulement de Couette cylindrique (deux cylindres tournent à des vitesses proches mais néanmoins différentes). La stratification en entropie introduit une contrainte sur la composante radiale du champ de vitesse intérieur et sur sa relation avec la rotation différentielle. En effet, d'après l'équation d'équilibre thermique vu en sous-section 2.1.1

$$U_r \frac{d\bar{T}}{dr} = \kappa \vec{\nabla}^2 \Theta' \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Theta'}{\Delta\bar{T}} \sim \frac{r_0}{\kappa} U_r, \quad (2.54)$$

alors que d'après l'équation du vent thermique

$$2s \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \frac{g_0}{r_0 \Omega_0 \bar{T}} \frac{\partial \Theta'}{\partial \theta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Theta'}{\Delta\bar{T}} \sim \left(\frac{\Omega_0}{N_T} \right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}. \quad (2.55)$$

On obtient donc la relation suivante :

$$U_r \sim \left(\frac{\Omega_0}{N_T} \right)^2 \frac{\kappa}{r_0} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}. \quad (2.56)$$

Or, une circulation intérieure induite par la couche d'Ekman aurait une amplitude de l'ordre de $\sim r_0 \Delta\Omega \sqrt{E}$. Une telle circulation ne peut pas être autorisée si son amplitude dépasse ce qui est permis par la stratification dans le corps du fluide, c'est-à-dire si $P_r (N_T/\Omega_0)^2 / \sqrt{E} > 1$. Dans ce cas, la couche d'Ekman n'est plus active au sens où elle n'induit plus de circulation dans l'intérieur du fluide. Comme montré formellement par [Barcilon & Pedlosky \(1967a\)](#), la condition au bord pour la solution intérieure est simplement $\Omega^I = \Omega_{\text{bord}}$. En revanche, si l'amplitude de la circulation induite par la couche d'Ekman est plus faible que ce qui est autorisé par la stratification stable, alors celle-ci peut encore exister et jouer un rôle. Dans ce dernier cas, les fluctuations de température sont d'ordre $(P_r / \sqrt{E}) (\Delta\Omega / \Omega_0)$, c'est-à-dire suffisamment faibles pour que le terme de flottabilité devienne négligeable dans l'équation du vent thermique et que la contrainte de Taylor-Proudman soit vérifiée par Ω .

2.3.2 Couches de Stewartson

Comme nous venons de le voir, le fait de ne considérer que les couches d'Ekman dans la dynamique d'un écoulement de Couette sphérique conduit à une solution analytique incomplète de la rotation différentielle. [Proudman \(1956\)](#) était bien conscient de ce problème et de la nécessité de compléter la description de l'écoulement en tenant compte, notamment, des couches de cisaillement libre localisées le long du cylindre tangent, sans toutefois y parvenir. [Stewartson \(1957\)](#) entreprit d'abord de traiter la question dans une configuration quelque peu simplifiée qui consistait en un écoulement compris entre deux disques coaxiaux en rotation différentielle, avant de considérer le problème plus complet de [Proudman \(1956\)](#) dans un second papier ([Stewartson, 1966](#)). À travers ses travaux, il montre que dans ce type de problème la couche de cisaillement possède une triple structure. Le rôle et la taille de ces sous-couches varient alors en fonction du problème considéré, que ce soit de par la géométrie du système ou des conditions aux limites imposées à l'écoulement. Par exemple, dans la configuration considérée par [Stewartson \(1957\)](#), la couche de cisaillement est constituée d'une première couche d'épaisseur $E^{1/3}$ enchevêtrée entre deux couches d'épaisseur $E^{1/4}$ alors que dans la configuration sphérique de [Proudman \(1956\)](#) et [Stewartson \(1966\)](#), la couche d'épaisseur $E^{1/3}$ se retrouve imbriquée dans une couche d'épaisseur $E^{1/4}$ et une couche d'épaisseur $E^{2/7}$, ces deux dernières n'assurant

plus la même fonction. D'autres configurations dans lesquelles la taille et le rôle de ces couches changent ont été considérées par Moore & Saffman (1969). Bien que Stewartson (1966) apporta une première réponse au problème de Proudman (1956), celle-ci n'en demeurerait pas moins incomplète puisque la question de la région équatoriale n'y était pas traitée.

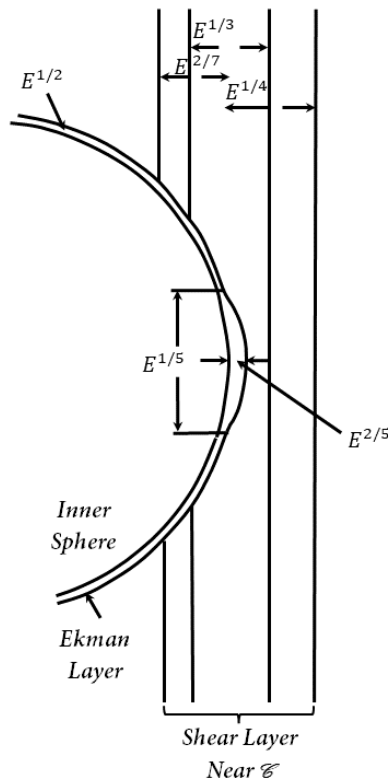


FIGURE 2.18 : Problème de spin-up dans une configuration de couette sphérique. Le long de la sphère interne (mais aussi de la sphère externe qui n'est pas représentée ici) une couche d'Ekman d'épaisseur $E^{1/2} / \sqrt{|\cos \theta|}$ se développe pour accommoder un saut sur le taux de rotation. Cette couche s'épaissit à l'approche de l'équateur où elle donne naissance à la couche équatoriale d'Ekman d'extension radiale $E^{2/5}$ et d'extension verticale $E^{1/5}$. Des couches de cisaillement libre se développent également le long du cylindre tangent. Au nombre de trois, ces couches sont imbriquées les unes dans les autres. Les couches quasi-géostrophiques d'épaisseur $E^{1/4}$ et $E^{2/7}$, permettent respectivement de lisser une discontinuité sur la vitesse angulaire et sa dérivée radiale en levant partiellement la contrainte de Taylor-Proudman. La couche agéostrophique a quant à elle pour fonction de lisser une discontinuité sur la dérivée seconde de la vitesse angulaire et d'assurer la conservation de la masse, en levant entièrement la contrainte de Taylor-Proudman. Crédit : Stewartson (1966).

Les couches de Stewartson constituent un fabuleux exemple de la complexité qui peut résulter d'une analyse de couche limite. Comme illustré en figure 2.18, dans le problème de Couette sphérique que nous considérons, ces trois couches imbriquées les unes dans les autres se développent le long du cylindre tangent. Elles assurent chacune une fonction bien particulière que nous allons maintenant décrire, et qu'elles parviennent à remplir en levant partiellement (couches quasi-géostrophiques) voir totalement (couche agéostrophique) la contrainte de Taylor-Proudman (2.51).

➤ Les couches quasi-géostrophiques :

Elles se développent le long des parois fictives intérieure et extérieure au cylindre tangent, et ont pour principale fonction de lisser une discontinuité sur la vitesse angulaire et sa dérivée première au passage de ce dernier en $s = r_i$. Elles parviennent à remplir cette tâche en levant partiellement la contrainte de Taylor-Proudman, permettant ainsi à la composante verticale du champ de vitesse de dépendre de la coordonnée verticale z au sein des couches ($\partial U_z / \partial z \neq 0$). En équilibrant le flux de pompage avec les contraintes visqueuses, on peut montrer que l'une d'entre elles doit posséder une épaisseur $E^{1/4}$ et se développer le long du bord extérieur du cylindre tangent. En plus de permettre l'accommodation d'un saut $O(1)$ sur la vitesse angulaire au passage du cylindre, elle induit une intensification de la composante verticale du champ de vitesse, celle-ci étant désormais d'ordre $O(E^{1/4})$ alors que dans la solution de Proudman (1956), elle était d'ordre $O(E^{1/2})$. Après remise à échelle de la condition de pompage (2.50) au voisinage de l'équateur, on peut montrer que l'autre couche de cisaillement possède une épaisseur $E^{2/7}$ et se développe le long du bord intérieur au cylindre tangent. Elle apparaît parce que le flux de pompage (2.50) tend vers l'infini au voisinage de l'équateur de la sphère interne et par conséquent, la dérivée première (par rapport à s) de la solution analytique (2.53), déterminée à partir de ce flux, est singulière.

➤ La couche agéostrophique :

Lorsque l'on utilise la même méthode que celle employée en sous-section 2.3.1 afin de déterminer l'épaisseur de la couche d'Ekman, c'est-à-dire que l'on réécrit le système (2.40) en coordonnées cylindriques en ne conservant que les dérivées par rapport à la coordonnée s d'ordre le plus élevé, et que l'on établit ensuite une équation générale portant sur une grandeur (voir par exemple Greenspan et al. (1968) qui a fait ceci pour la pression), on peut montrer qu'une couche de cisaillement d'épaisseur $E^{1/3}$ doit exister, à l'intérieur de laquelle la contrainte de Taylor-Proudman est totalement levée. Dans cette couche, la vitesse angulaire est désormais d'ordre $O(E^{1/6})$. Par conséquent, cette couche n'a pas vocation à accommoder un saut sur le taux de rotation à travers le cylindre contrairement à la couche quasi-géostrophique d'épaisseur $E^{1/4}$ (Stewartson, 1966). En réalité, le raccord progressif effectué jusqu'ici, de part et d'autre du cylindre via les couches quasi-géostrophiques d'épaisseur $E^{1/4}$ et $E^{2/7}$, montre qu'il existe une dernière discontinuité. Celle-ci porte sur la dérivée seconde (toujours par rapport à s) de la vitesse angulaire et provoque un saut sur la composante radiale cylindrique du champ de vitesse et donc sur la fonction de courant. Par suite, la conservation de la masse n'est plus assurée. La couche agéostrophique d'épaisseur $E^{1/3}$ existe donc pour lisser une discontinuité sur la dérivée seconde de la vitesse angulaire et ainsi assurer la continuité du flux de masse.

De manière générale, les couches limites dépendent de la géométrie du problème considéré, mais aussi des conditions aux limites imposées et de la présence ou non d'une sphère interne. En particulier, certains aspects tels que la couche équatoriale ne sont pas encore complètement résolus. Au prochain chapitre, nous retrouverons de nombreuses similitudes entre le problème de Couette sphérique que nous avons décrit jusqu'ici, et le notre. Par exemple, nous aurons, nous aussi, une couche d'Ekman à la sphère externe, tandis qu'un jet de vitesse verticale dirigé vers l'équateur de la sphère interne, où est localisée une couche équatoriale, sera présent le long du cylindre tangent. En particulier, celui-ci jouera un rôle important dans la dynamique de l'écoulement parce qu'il va induire un maximum local dans le taux de rotation. Cependant, les

stratifications en entropie et en densité qui rendent notre problème plus proche des véritables conditions d'une zone radiative stellaire, feront également que celui-ci est significativement différent du problème de Couette classique. Comme nous en avons déjà discuté à la section précédente, la stratification stable a par exemple tendance à inhiber l'influence de la couche d'Ekman sur le corps du fluide.

2.3.3 Couche de Hartmann

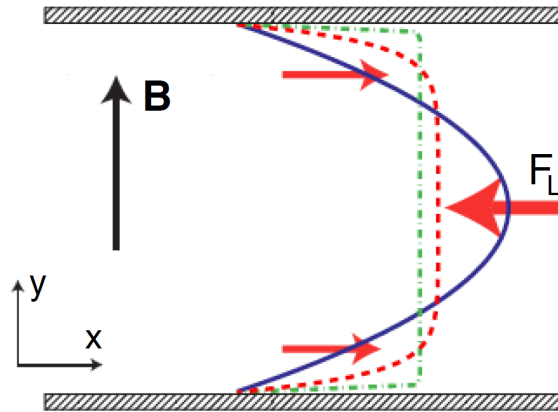


FIGURE 2.19 : Écoulement de vitesse U orienté selon \vec{e}_x , induit par un gradient de pression dP/dx uniforme dans un canal rectangulaire infiniment long dans les directions x et z . En l'absence de champ magnétique, ce problème correspond à l'écoulement de Poiseuille pour lequel, en régime stationnaire et laminaire, le profil de vitesse est parabolique (courbe bleue). Lorsqu'un champ magnétique B_0 est appliqué selon \vec{e}_y , des couches de Hartmann d'épaisseur $\delta = H_a^{-1}$ se développent le long des parois du canal perpendiculaires au champ afin d'accommoder un saut sur la vitesse de l'écoulement et sur le champ magnétique induit. Plus l'intensité du champ magnétique est élevée, plus l'écoulement loin des parois est freiné par la force de Lorentz. Au contraire, dans les couches limites, la force de Lorentz accélère l'écoulement et des gradients de vitesse de plus en plus importants se forment. Crédit : [Dechamps \(2014\)](#).

À la fin des années 40, [Hartmann \(1937\)](#) étudie le problème d'un écoulement de mercure (incompressible et électriquement conducteur) entre deux plaques parallèles, recouvertes d'un revêtement isolant, entre lesquelles un champ magnétique homogène est appliqué. Cette expérience peut être modélisée par la configuration idéalisée représentée en figure 2.19, que l'on peut envisager comme un écoulement de Poiseuille plongé dans un champ magnétique perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Ainsi, on observe en figure 2.19 que si le champ magnétique est nul, le profil de vitesse est parabolique (courbe bleue). En revanche, lorsqu'un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ est appliqué, le mouvement du fluide induit à la fois une composante $b_x \vec{e}_x$ ainsi qu'une force électromotrice $\vec{\mathcal{F}}_{\text{elec}} = \vec{U} \times \vec{B}$ orientée dans la direction z et associée à une densité de courant j_z . Des couches limites magnétohydrodynamiques se forment alors le long des parois afin d'accommoder un saut sur le champ magnétique induit et sur la vitesse de l'écoulement. [Hartmann \(1937\)](#) montre que l'épaisseur de ces couches est proportionnelle à $\delta_{\perp} = H_a^{-1} = \sqrt{\mu_0 \rho_0 \eta \nu} / B_0 h$, où h est la hauteur du canal et H_a est ce que l'on appelle le nombre de Hartmann. Son analyse théorique sera confirmée très peu de temps après, expérimentalement, par [Hartmann & Lazarus \(1937\)](#). Dans le corps du fluide, la force de Lorentz

a donc pour effet de freiner l'écoulement et d'aplatir le profil de vitesse. Comme le montre une comparaison rapide entre les courbes verte et rouge sur la figure 2.19, tracées pour deux nombres de Hartmann différents, celui correspondant à la courbe verte étant plus élevé que celui de la courbe rouge, cette déformation est d'autant plus importante que le nombre de Hartmann est élevé. L'épaisseur de ces couches étant inversement proportionnelle au nombre de Hartmann, plus ce dernier augmente, plus les gradients de vitesse le long des parois deviennent importants.

Considérons maintenant le cas d'un écoulement en rotation plongé dans un champ magnétique poloïdal dans une configuration de Couette sphérique. Des lignes de champ vont traverser les frontières du domaine et ces lignes seront à la fois perpendiculaires aux limites sphériques et à l'écoulement. Par conséquent, des couches de Hartmann devraient se développer le long des parois. Parallèlement, en l'absence de stratification stable et de champ magnétique, nous avons vu dans la sous-section 2.3.1 que pour une telle configuration, des couches d'Ekman sont présentes le long des limites sphériques. On peut donc légitimement se demander si ces couches d'Ekman vont continuer à exister lorsqu'un champ magnétique est introduit, ou simplement être remplacées par des couches de Hartmann. Soit $\Lambda = B_0^2 / \mu_0 \rho_0 \eta \Omega_0$, le nombre d'Elsasser qui compare les effets magnétiques aux effets de la rotation. Dans le cas général où $\Lambda \sim \mathcal{O}(1)$, on peut montrer que l'épaisseur de la couche limite est donnée par $\delta_{EH} = \sqrt{(E / \cos \theta) / (\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + 1})}$ (Desjardins et al., 1999). Lorsque $\Lambda \rightarrow 0$, on retrouve l'épaisseur de la couche d'Ekman : $\delta_{EH} \equiv \delta_E = \sqrt{E} / \sqrt{|\cos \theta|}$. À l'inverse, si $\Lambda \rightarrow \infty$, on obtient $\delta_{EH} \equiv \delta_H = (H_a \cos \theta)^{-1}$, ce qui correspond à l'épaisseur de la couche de Hartmann. La couche d'Ekman-Hartmann est particulièrement pertinente à l'interface du noyau liquide terrestre et du manteau où $\Lambda \sim 0.2$ (Gilman & Benton, 1968). Nous verrons au chapitre suivant que dans nos simulations, nous avons plutôt $\Lambda \gg 1$. Dans ce cas, l'accélération de Coriolis peut être négligée devant la force de Lorentz, et les équations de la couche de Hartmann dans une configuration de Couette sphérique sont simplement (Roberts, 1967; Acheson & Hide, 1973; Dormy et al., 1998) :

$$\begin{cases} \frac{B_r}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial B_\phi^H}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 U_\phi^H}{\partial r^2} = 0 \\ B_r \frac{\partial U_\phi^H}{\partial r} + \eta \frac{\partial^2 B_\phi^H}{\partial r^2} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{\Lambda}{P_m} C \cos \theta \frac{\partial \tilde{B}_\phi^H}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{U}_\phi^H}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{P_m}{E} C \cos \theta \frac{\partial \tilde{U}_\phi^H}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{B}_\phi^H}{\partial r^2} = 0, \end{cases} \quad (2.57)$$

où $P_m = \nu / \eta$ est le nombre de Prandtl magnétique. Ces équations ont été adimensionnalisées en choisissant comme échelle de longueur caractéristique le rayon de la sphère externe r_0 , comme échelle de vitesse caractéristique $r_0 \Omega_0$ où Ω_0 est le taux de rotation de la sphère externe, et comme amplitude caractéristique du champ magnétique, l'amplitude du champ poloïdal imposé B_0 . Nous avons également tenu compte de la géométrie de ce champ à travers un facteur $C \cos \theta$. Par simplicité prenons $C = -1$, et plaçons-nous dans ce qui suit, à la sphère externe. Alors ces équations peuvent être combinées en une unique

$$\frac{\partial^3 \tilde{U}_\phi^H}{\partial r^3} - \frac{\Lambda}{E} \cos^2 \theta \frac{\partial \tilde{U}_\phi^H}{\partial r} = 0, \quad (2.58)$$

qui montre par un simple raisonnement en ordre de grandeur dans lequel on définit δ comme étant l'épaisseur de la couche, qu'elle ne peut être satisfaite que si $\delta = (H_a \cos \theta)^{-1}$ (puisque $H_a = \sqrt{\Lambda/E}$). En annexe C.2, nous résolvons les équations de la couche de Hartmann (2.57) et nous montrons qu'elles imposent aux bords sphériques la relation suivante entre les composantes azimuthales du champ de vitesse et du champ magnétique du corps du fluide :

$$\tilde{U}_\phi^I(1, \theta) = \frac{H_a}{R_m} \tilde{B}_\phi^I(1, \theta) \Leftrightarrow U_\phi^I(r_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} B_\phi^I(r_0, \theta). \quad (2.59)$$

Pour conclure, nous remarquerons que, comme pour la couche d'Ekman, la géométrie sphérique de la configuration se traduit par un épaississement de la couche de Hartmann à l'approche de l'équateur où elle devient infinie. Ici, une remise à échelle est nécessaire et montre que les extensions radiale et verticale de la couche de Hartmann équatoriale sont respectivement $\delta_s = H_a^{-2/3}$ et $\delta_z = H_a^{-1/3}$. Cette couche de Hartmann équatoriale a été étudiée de façon approfondie par [Roberts \(1967\)](#).

2.3.4 Couche de Shercliff

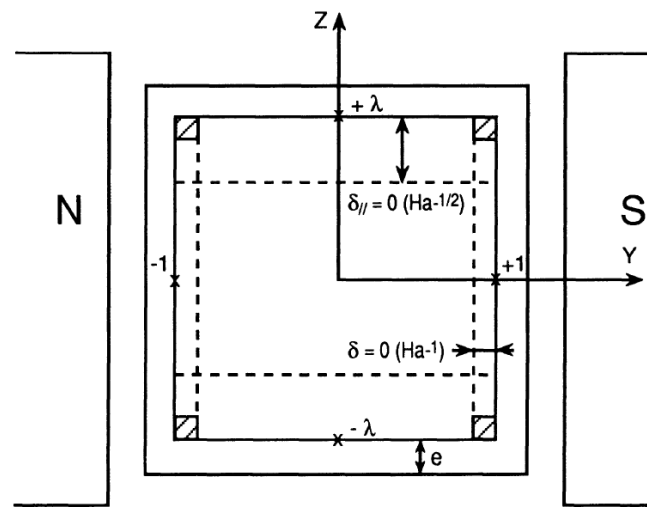


FIGURE 2.20 : Écoulement de [Hartmann \(1937\)](#) reconsidéré par [Shercliff \(1953\)](#) en tenant compte de l'effet des parois localisées en $z = \pm\lambda$, parallèles au champ magnétique imposé dans la direction y . Des couches de cisaillement d'une épaisseur $\delta_{||} \propto H_a^{-1/2}$ se développent le long de ces parois parallèles au champ : les couches de Shercliff. Les couches limites de Hartmann d'épaisseur $\delta_{\perp} \propto H_a^{-1}$, localisées le long des parois perpendiculaires au champ en $y = \pm 1$ sont également représentées. Crédit : [Moreau \(1990\)](#).

En présence d'un champ magnétique, un autre type de couche limite est susceptible d'apparaître : les couches de Shercliff. Ce sont des couches de cisaillement qui se développent généralement entre deux lignes de champ poloïdal qui tournent à des vitesses différentes, pour accommoder un saut sur le taux de rotation ([Hollerbach & Hulot, 2016](#)). Elles peuvent toutefois également apparaître à l'interface d'une paroi isolante (où le champ magnétique est nul) et d'un fluide baigné dans un champ magnétique parallèle à la paroi. C'est d'ailleurs de cette façon qu'elles ont été mises en évidence pour la première fois par [Shercliff \(1953\)](#). Ce dernier reprit la configuration de [Hartmann \(1937\)](#) en tenant compte de l'influence des parois parallèles au champ imposé dans le canal, sur l'écoulement. Rappelons en effet, que le modèle idéalisé de l'expérience de [Hartmann \(1937\)](#) suppose un canal infiniment long dans la direction transverse à l'écoulement et au champ imposé (la direction z sur la figure 2.20). [Shercliff \(1953\)](#) montre que la solution obtenue par [Hartmann \(1937\)](#) n'est plus valide au niveau des parois parallèles

à la fois à l'écoulement et au champ magnétique. Comme indiqué sur la figure 2.20, le long de ces parois ($z = \pm\lambda$), une couche limite d'épaisseur $\delta_{||} \propto H_a^{-1/2}$ se développe afin de lisser une discontinuité sur la vitesse de l'écoulement.

Les couches de Shercliff ont été étudiées dans diverses configurations de fluides en rotation magnétisés. En lien avec les couches d'Ekman et de Stewartson que nous avons précédemment décrites, l'une d'entre elles est celle considérée par Stewartson (1957). Ici, lorsqu'un champ magnétique uniforme aligné avec l'axe de rotation est appliqué, les couches de Stewartson sont graduellement affectées en fonction de l'intensité du champ (Ingham, 1969; Vempaty & Loper, 1975, 1978). Lorsque $\Lambda \ll 1$, leur structure est inchangée. En revanche, si $\Lambda \gg E^{-1/3}$, elles sont remplacées par une unique couche de structure parabolique : la couche de Shercliff. Le cas intermédiaire est plus complexe et fait état de quatre couches imbriquées les unes dans les autres. Le cas de la configuration de Couette sphérique qui nous intéresse plus particulièrement a été étudié par Starchenko (1998). Dans ce problème, l'écoulement est plongé dans un champ magnétique potentiel axial, dipolaire ou quadrupolaire. De plus, la limite des grands nombres d'Elsasser est considérée, ce qui permet de négliger l'accélération de Coriolis devant la force de Lorentz. Puisque la tension magnétique assure qu'une ligne de champ qui se connecte à une frontière reste bloquée avec elle, une ligne de champ qui se connecte uniquement à la sphère externe sera en co-rotation avec cette dernière. Il en est de même pour une ligne qui se connecte uniquement à la sphère interne. En revanche, une ligne connectée à la fois aux sphères interne et externe doit tourner à un taux intermédiaire. Par conséquent, la région localisée entre deux lignes de champ qui ne tournent pas à la même vitesse, parce qu'elles ne se connectent pas de la même manière aux frontières, est le siège d'une rotation différentielle. Ceci est illustré sur

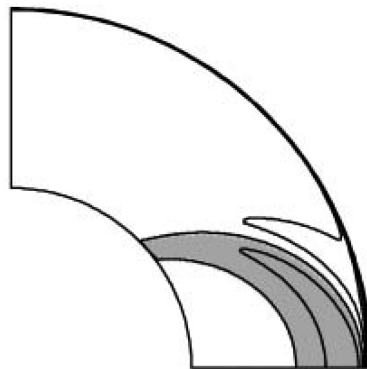


FIGURE 2.21 : Coupe 2D du taux de rotation dans une configuration de Couette sphérique en présence d'un dipôle. La sphère interne tourne à la vitesse Ω_i et la sphère externe est fixe. Une couche de Shercliff d'épaisseur $\sim H_a^{-1/2}$ se développe entre la ligne de champ poloïdal qui se connecte uniquement à la sphère interne et avec laquelle elle est en co-rotation à la vitesse angulaire Ω_i , et la ligne de champ qui se connecte à la fois aux sphères interne et externe et qui tourne ainsi à une vitesse intermédiaire aux taux de rotation de ces dernières, i.e. $\Omega_i/2$. Crédit : Hollerbach (2000).

la figure 2.21 où une telle région se développe entre la ligne de champ uniquement connectée à la sphère interne, et avec laquelle elle est en co-rotation, et la ligne de champ connectée aux deux sphères, qui tourne à une vitesse intermédiaire aux taux de rotation de ces dernières. Le cisaillement dans cette zone induit un champ toroïdal par effet Ω , et finalement une force de Lorentz. Dans cette couche d'épaisseur $\delta_{||} \sim H_a^{-1/2}$, chargée de lisser la discontinuité sur le taux de rotation, l'effet Ω et la force de Lorentz sont alors respectivement équilibrés par les contraintes résistives et visqueuses (Starchenko, 1998).

CHAPITRE 3

ÉTUDE MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE D'UNE ZONE RADIATIVE EN CONTRACTION

Sommaire

3.1	Modélisation d'une zone radiative en contraction	70
3.2	Équations gouvernant la dynamique de l'écoulement	73
3.3	Différents régimes de transport du moment cinétique	79
3.4	Principaux résultats	86
3.4.1	Le cas hydrodynamique	86
3.4.1.1	Régime d'Eddington-Sweet linéaire	86
3.4.1.2	Régime d'Eddington-Sweet non-linéaire	92
3.4.1.3	Un régime de forte stratification stable : le régime visqueux	93
3.4.2	Le cas magnétohydrodynamique	95
3.4.2.1	Effet typique d'un champ magnétique de grande échelle	96
3.4.2.2	Instabilité magnétorotationnelle : vers un scénario expliquant la rotation des sous-géantes.	101
3.5	Résumé de l'étude axisymétrique	106

L'objectif de notre travail consiste, dans un premier temps, à étudier une zone radiative stellaire en cours de contraction en caractérisant les écoulements stationnaires et axisymétriques induits, à savoir la rotation différentielle et la circulation méridienne. Dans un second temps, nous examinons la façon dont ces écoulements interagissent avec un champ magnétique de grande échelle. Ce dernier peut, par exemple, être un vestige des premières phases de l'évolution stellaire ou le produit d'une dynamo qui opérait dans le cœur convectif de l'étoile avant que celui-ci ne disparaisse progressivement pour laisser place à une zone radiative. Pour mener à bien cette investigation, nous avons effectué des simulations numériques axisymétriques dans lesquelles une portion de zone radiative est modélisée par une couche sphérique à la fois stablement stratifiée et en rotation, pouvant de surcroît être plongée dans un champ magnétique de grande échelle, et sujette à une vitesse radiale modélisant la contraction. Cette configuration est exposée en détail dans la section 3.1. Les équations résolues numériquement seront pour leur part explicitées en section 3.2. En section 3.3, nous présenterons les différents régimes possibles de transport du moment cinétique et leur lien avec le contexte stellaire. Les principaux résultats de l'étude seront finalement exposés en section 3.4 avant d'être résumés en section 3.5.

3.1 Modélisation d'une zone radiative en contraction

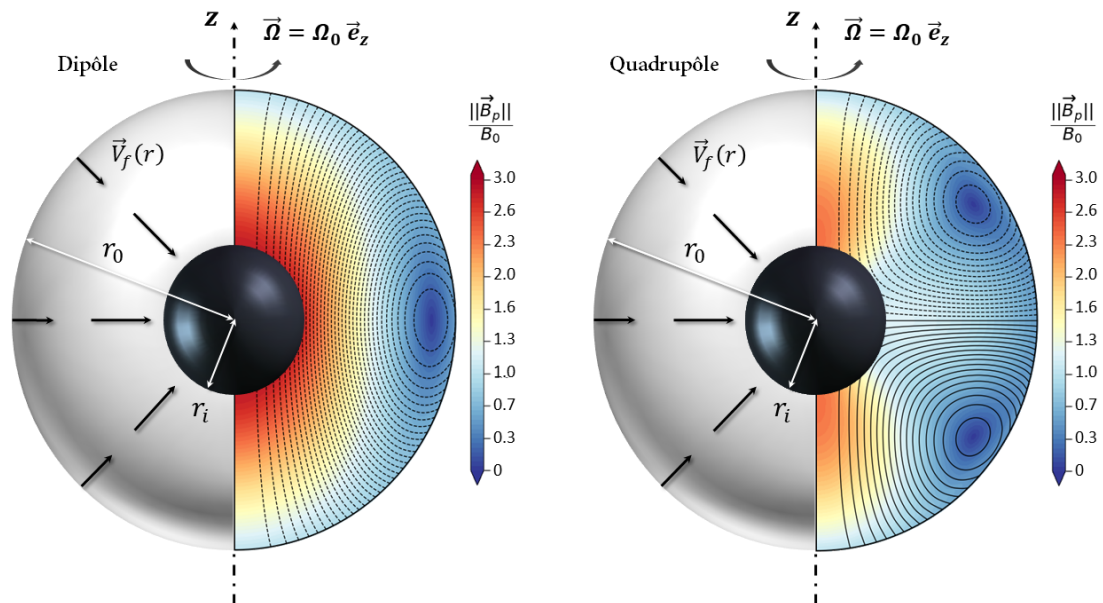


FIGURE 3.1 : Modélisation d'une zone radiative stellaire en cours de contraction en présence d'un champ magnétique de grande échelle. La sphère externe de rayon r_0 tourne à la vitesse angulaire Ω_0 autour de l'axe z . Le taux de rotation Ω_i de la sphère interne de rayon r_i est libre d'évoluer au cours du temps. La contraction de la zone radiative est modélisée à travers l'imposition d'une vitesse radiale $\vec{V}_f(r)$. Le champ magnétique de grande échelle peut soit être un dipôle (gauche) soit être un quadrupôle (droite). Sa topologie est telle que certaines lignes de champ se connectent à la fois aux sphères interne et externe, uniquement à la sphère externe, ou se referment sur elles-mêmes au sein même de la coquille sphérique.

Comme illustré sur la figure 3.1, nous choisissons de modéliser la zone radiative par une coquille sphérique de rayon externe r_0 et de rayon interne $r_i = 0.3 r_0$. Celle-ci est remplie d'un

gaz parfait soumis à sa propre gravitation et sujet à la contraction. Ce fluide est stablement stratifié et peut baigner dans un champ magnétique de grande échelle. Le taux de rotation de la sphère externe noté Ω_0 est fixe et dans ce qui suit, nous nous placerons dans le repère tournant à cette vitesse. Le taux de rotation de la sphère interne, lui, est libre d'évoluer au cours du temps. La contraction est introduite en imposant un flux de masse compatible avec la condition de stationnarité, c'est-à-dire que l'ensemble de la masse fluide pénétrant la surface de la sphère externe est égal à l'ensemble de la masse fluide quittant la surface de la sphère interne. Ceci est réalisé en imposant une vitesse de contraction radiale dans nos équations :

$$\vec{V}_f = V_f(r) \vec{e}_r = -\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^2} \vec{e}_r, \quad (3.1)$$

qui satisfait bien $\vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{V}_f) = 0$. Notons que l'expansion de la zone radiative peut également être modélisée de cette façon, simplement en choisissant $V_f(r) > 0$ ou $V_0 < 0$. D'après (3.1), en l'absence de tout processus physique à même de contrebalancer l'effet de la contraction, le profil de rotation différentielle présent entre les sphères interne et externe à l'état stationnaire sera ainsi proportionnel à $1/r^2$.

Le choix de modéliser la contraction par un flux de masse stationnaire est propre à la présente thèse. À titre d'exemple, dans les codes d'évolution stellaire, la contraction est modélisée à travers une approche Lagrangienne qui consiste à suivre les couches de l'étoile dans leur déplacement. Typiquement, cela se produit lorsque le combustible permettant les réactions nucléaires nécessaires au maintien de l'équilibre thermique de l'étoile est épuisé. Celle-ci se contracte alors dans le but d'ajuster sa structure interne. Les codes multidimensionnels sont eux aussi capables de modéliser la contraction globale du fluide, sur des temps cependant bien plus courts. C'est le cas par exemple des codes Lagrangiens ou Eulériens qui permettent d'étudier la formation des étoiles (voir [Teyssier & Commerçon \(2019\)](#) pour une revue à ce sujet). En ce qui nous concerne, puisque nous sommes uniquement intéressés par la recherche de solutions stationnaires, l'introduction de la contraction en tant que force de volume dans les équations de la dynamique d'un fluide magnétisé est appropriée.

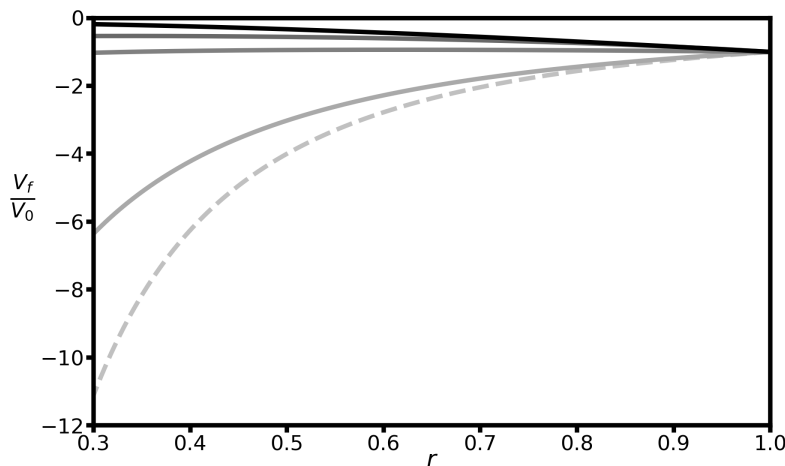


FIGURE 3.2 : Vitesse de contraction V_f , normalisée par sa valeur à la sphère externe V_0 , en fonction du rayon r , pour différents contrastes de densité appliqués entre les sphères interne et externe. La courbe en tirets représente le cas d'une densité uniforme à travers la coquille sphérique (Boussinesq). Les courbes en trait plein correspondent aux contrastes suivants : $\rho_i/\rho_0 = 1.75, 10.8, 20.9$ et 60.2 , respectivement du plus clair au plus foncé.

En figure 3.2 nous montrons la façon dont le profil radial de la vitesse de contraction (3.1) est affecté par la présence d'un contraste de densité entre les sphères interne et externe. À titre de comparaison, nous avons également tracé ce profil lorsque la densité à travers la coquille sphérique est uniforme (courbe en tirets). Dans ce cas, nous observons que la contraction est maximale au niveau de la sphère interne. Pour notre configuration avec $r_i = 0.3 r_0$, la tendance s'inverse dès que $\rho_i/\rho_0 > (r_0/r_i)^2 \approx 11.11$. Alors, la valeur absolue de la vitesse de contraction diminue avec la profondeur. La stratification en densité a donc un effet inhibiteur sur cette vitesse et va ainsi indirectement impacter le profil stationnaire de rotation différentielle.

La stratification initiale en entropie et en densité correspond à la solution hydrostatique, qui sera décrite dans la section suivante, avec des conditions aux bords sur l'entropie, prescrites. Lorsque la densité à travers la coquille est uniforme, c'est la température, plutôt que l'entropie, qui est fixée aux limites du domaine. L'effet dynamique de la stratification est alors caractérisé par la fréquence de Brunt-Väisälä dont l'expression est :

$$N(r) = \sqrt{\frac{g}{C_p} \frac{d\bar{S}}{dr}}, \quad (3.2)$$

où g est la gravité, C_p la capacité thermique du gaz à pression constante et $d\bar{S}/dr$ le gradient d'entropie initial. La stratification stable est donc produite à l'aide d'un gradient d'entropie positif qui dans notre cas sera uniforme. Le champ magnétique de grande échelle dans lequel le fluide peut initialement être plongé est soit un dipôle,

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta, t = 0) = & \frac{3rB_0}{r_0(1 - (r_i/r_0)^4)} \cos \theta \left(1 + \frac{r_i^4}{3r^4} - \frac{4r_0}{3r} \right) \vec{e}_r - \\ & \frac{3rB_0}{2r_0(1 - (r_i/r_0)^4)} \sin \theta \left(3 - \frac{r_i^4}{3r^4} - \frac{8r_0}{3r} \right) \vec{e}_\theta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

soit un quadrupôle

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta, t = 0) = & \frac{rB_0}{2r_0(1 - (r_i/r_0)^5)} \left(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \left(\frac{r_i^5}{r^5} - 1 - 5 \ln \left(\frac{r_0}{r} \right) \right) \vec{e}_r - \\ & \frac{rB_0}{r_0(1 - (r_i/r_0)^5)} \sin \theta \cos \theta \left(1 - \frac{r_i^5}{r^5} - \frac{15}{2} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right) \right) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ces deux configurations magnétiques sont respectivement illustrées à gauche et à droite sur la figure 3.1 et sont telles que la norme du champ aux pôles de la sphère externe vaut B_0 . Finalement, nous prescrivons initialement le profil de rotation. Lorsque la densité à travers la coquille est uniforme, une rotation solide est imposée dans l'ensemble du domaine. En présence d'un contraste de densité, nous imposons par commodité un certain profil de rotation différentielle donné par l'expression

$$\Omega(r, \theta, t = 0) = \frac{\bar{\rho}(r)}{\rho_0} \exp\left(\frac{-(r - r_0)}{\sigma}\right) \Omega_0, \quad (3.5)$$

où σ contrôle l'amplitude initiale de la rotation différentielle entre les sphères interne et externe.

Aux parois de la coquille sphérique, nous imposons que la composante radiale du champ de vitesse totale $\vec{U}_{\text{tot}} = \vec{U} + \vec{V}_f$ soit égale à la vitesse de contraction. Autrement dit, la composante

radiale du champ de vitesse \vec{U} est nulle aux limites du domaine : $U_r(r_0, \theta) = U_r(r_i, \theta) = 0$. En outre, la coquille est également non-conductrice, c'est-à-dire que la composante azimutale du champ magnétique est nulle aux bords, $B_\phi(r_0, \theta) = B_\phi(r_i, \theta) = 0$, tandis que le champ magnétique poloïdal se raccorde continuellement à un champ potentiel \vec{B}_p tel que $\vec{B}_p((r_0, r_i), \theta) = \vec{\nabla}\Phi$. En ce qui concerne la composante horizontale du champ de vitesse, une condition de non-glissement est imposée à la sphère externe $U_\theta(r_0, \theta) = U_\phi(r_0, \theta) = 0$. Cette condition est compatible avec le fait que $\Omega(r_0, \theta) = \Omega_0$ dans le repère fixe. En revanche, la rotation n'est pas prescrite à la sphère interne car nous souhaitons connaître le niveau de rotation différentielle induit par la contraction. Nous imposons par conséquent la nullité de la contrainte tangentielle normale à la paroi :

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r \right) \times \vec{e}_r \Big|_{r=r_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) \Big|_{r=r_i} = 0 \quad \text{et,} \quad \left[\frac{\partial U_r}{\partial \theta} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) \right] \Big|_{r=r_i} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) \Big|_{r=r_i} = 0, \quad (3.6)$$

où \cdot désigne un produit scalaire, \times un produit vectoriel et $\vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes (voir [Rieutord \(2014\)](#) pour son expression en coordonnées sphériques). La simplification du terme entre crochets découle du fait que $U_r(r_i, \theta) = 0$ et par conséquent, $\partial U_r / \partial \theta|_{r=r_i} = 0$.

3.2 Équations gouvernant la dynamique de l'écoulement

Le modèle mathématique décrit dans la section précédente est caractérisé par un ensemble d'équations, les équations de Maxwell, de Navier-Stokes et d'entropie, que nous résolvons à l'aide d'approches "sound-proof". Ce type d'approximation consiste à filtrer les ondes sonores du présent problème, ce qui se justifie par le fait que dans les intérieurs radiatifs que nous considérons, la vitesse du fluide V_{fluide} est très faible devant la vitesse du son c_s . On peut ainsi réaliser un développement limité en puissance du carré du nombre de Mach $\mathcal{M}_a = V_{\text{fluide}}/c_s$ afin d'obtenir un système d'équations simplifié ([Gilman & Glatzmaier, 1981](#)). Ceci constitue la base de l'approximation anélastique, originellement introduite par [Ogura & Phillips \(1962\)](#) dans le cadre de la convection atmosphérique. Lorsque les effets de compressibilité sont de surcroît entièrement négligés, hormis dans le terme de flottabilité pour permettre un couplage des effets dynamique et thermique, nous obtenons un sous-ensemble d'équations qui constituent l'approximation de Boussinesq introduite au début du 20^{ème} siècle par [Boussinesq \(1903\)](#). Quelque soit l'approximation choisie, les équations obtenues décrivent les écarts à une solution hydrostatique de référence. Nous commençons par détailler cet état d'équilibre dans les approximations anélastique et Boussinesq.

Dans ce qui suit, les grandeurs thermodynamiques, densité, pression, température et entropie, caractérisant l'état de référence seront respectivement notées $\bar{\rho}$, \bar{P} , \bar{T} , \bar{S} , et leurs fluctuations associées ρ' , P' , Θ' , S' . Aucune distinction ne sera faite pour la vitesse du fluide U puisque indépendamment de l'approximation faite, l'état de base est au repos ($\bar{U} = 0$). Chacune des grandeurs caractérisant l'écoulement peut donc être décomposée comme la somme d'une grandeur d'état d'équilibre et d'une fluctuation autour de cet état de référence :

$$\rho = \bar{\rho} + \rho', \quad P = \bar{P} + P', \quad T = \bar{T} + \Theta' \quad \text{et} \quad S = \bar{S} + S'. \quad (3.7)$$

Dans l'approximation anélastique l'état de base est celui d'une atmosphère au repos, en équilibre hydrostatique, à la fois stratifiée en entropie et en densité :

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(r), \quad \frac{d\bar{P}}{dr} = -\bar{\rho}(r)g \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{S}}{dr} = \text{cte} > 0. \quad (3.8)$$

En prescrivant l'entropie aux sphères externe et interne $S(r_0, \theta) = S_0$ et $S(r_i, \theta) = S_i$ avec $\Delta\bar{S} = S_0 - S_i > 0$, nous obtenons alors

$$\bar{S} = S_0 + \left(\frac{r - r_0}{r_0 - r_i} \right) \Delta\bar{S}, \quad (3.9)$$

et ainsi, $\text{cte} = \Delta\bar{S} / (r_0 - r_i) > 0$. Comme mentionné dans la section précédente, la stratification stable est donc assurée par un gradient d'entropie positif et uniforme. D'après l'équation d'état des gaz parfaits $P = \rho T C_p (\gamma - 1) / \gamma$, où γ est l'indice adiabatique égal à 5/3 pour un gaz monoatomique, le système est divariant et toute fonction d'état peut ainsi être exprimée à l'aide d'un couple de variables donné. Connaissant désormais le gradient d'entropie de l'état de base, ceci permet de définir les profils de température et de densité de l'état de référence par utilisation de l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\begin{cases} \frac{d\bar{T}}{dr} = \frac{\bar{T}}{C_p} \frac{d\bar{S}}{dr} + \frac{g}{C_p}, \\ \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{d \ln \bar{T}}{dr} - \frac{1}{C_p} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{d\bar{S}}{dr}, \end{cases} \quad (3.10)$$

où l'on remarque que l'on retrouve les relations adiabatiques lorsque $d\bar{S}/dr = 0$.

Dans l'approximation de Boussinesq, l'état de référence est simplement décrit par un fluide de densité uniforme et au repos, en équilibre hydrostatique, conducteur et stablement stratifié :

$$\bar{\rho} = \rho_0, \quad \frac{d\bar{P}}{dr} = -\rho_0 g, \quad \vec{\nabla}^2 \bar{T} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\bar{T}}{dr} > 0, \quad (3.11)$$

où $\vec{\nabla}^2 \bar{T} = 0$ peut de nouveau être facilement résolue pour des températures prescrites aux sphères interne et externe ($T(r_0, \theta) = T_0$, $T(r_i, \theta) = T_i$ avec $\Delta\bar{T} = T_0 - T_i > 0$) :

$$\bar{T} = T_0 - \frac{r_i}{r} \left(\frac{r - r_0}{r_i - r_0} \right) \Delta\bar{T}. \quad (3.12)$$

En négligeant l'effet des réactions nucléaires, et en supposant également que la viscosité cinématique ν , la diffusion thermique κ et la diffusion magnétique η sont toutes trois uniformes, les équations de Maxwell, de Navier-Stokes et d'entropie qui régissent la dynamique des fluctuations décrivant l'évolution d'un écoulement qui dévie de l'état de référence (3.8) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \vec{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\
\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla})(\vec{U} + \vec{V}_f) + 2\Omega_0 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\Pi'}{\bar{\rho}} \right) + \frac{g_0 r_0^2}{C_p r^2} S' \vec{e}_r + \\
\frac{1}{\mu_0 \bar{\rho}} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] + \frac{\nu}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}, \\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times [(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B}] + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \\
\bar{\rho} \bar{T} \left(\frac{\partial S'}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}) S' + (U_r + V_f) \frac{d\bar{S}}{dr} \right) = \kappa \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{T} \vec{\nabla} S') + \nu Q_\nu + \frac{\eta}{\mu_0^2} (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2.
\end{array} \right. \quad (3.13)$$

Dans ces équations, Π' est un terme de pression modifiée par l'accélération centrifuge $\Pi' = P' - (\bar{\rho}/2) (\Omega_0 \vec{e}_z \times \vec{r})^2$, $\nu \vec{\sigma}$ est le tenseur des contraintes et νQ_ν est le terme d'échauffement visqueux représentant la quantité d'énergie dissipée sous forme de chaleur par viscosité et dont l'expression peut par exemple être trouvée dans [Landau & Lifshitz \(1959\)](#). Le profil de gravité choisi est $\propto 1/r^2$ et correspond à un modèle d'enveloppe dans lequel la masse de l'étoile est concentrée en son centre. Il est approximativement valide dans l'enveloppe de l'étoile et prend la forme

$$\vec{g} = -\frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{g_0 r_0^2}{r^2} \vec{e}_r, \quad (3.14)$$

avec G la constante gravitationnelle et M_c la masse au centre de l'étoile. La formulation anélastique adoptée ici est basée sur ce que l'on appelle l'approximation LBR pour Lantz-Braginsky-Roberts ([Lantz, 1992](#); [Braginsky & Roberts, 1995](#); [Lantz & Fan, 1999](#)). Initialement formulée pour les zones convectives, elle consiste d'une part à négliger dans l'équation de quantité de mouvement un terme de la forme $(P'/\bar{\rho} C_p) (d\bar{S}/dr)$, et d'autre part à introduire une diffusion d'entropie plutôt qu'une diffusion de température. Nous reviendrons sur la validité de cette approche pour le présent problème.

Dans l'approximation de Boussinesq, puisque les effets de compressibilité sont négligés, excepté lorsqu'ils produisent un mouvement à travers le terme de flottabilité, nous obtenons une analogie simple entre l'entropie et la température : $dS = (\partial S/\partial T)_P dT = (C_p/T) dT$. La densité peut alors être prise comme étant uniforme, partout où elle apparaît dans le système d'équation (3.13). En outre, puisque la stratification en densité disparaît, l'échauffement visqueux et la dissipation par effet Joule peuvent eux aussi être négligés et on obtient le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l}
\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\
\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla})(\vec{U} + \vec{V}_f) + 2\Omega_0 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \Pi' + g_0 \Theta' \frac{\vec{r}}{r_0} + \\
\frac{1}{\mu_0 \rho_0} [(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}] + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{U}, \\
\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times [(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B}] + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \\
\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}) \Theta' + (U_r + V_f) \frac{d\bar{T}}{dr} = \kappa \vec{\nabla}^2 \Theta',
\end{array} \right. \quad (3.15)$$

décrivant l'évolution d'un écoulement magnétisé, incompressible et stablement stratifié. Le profil de gravité, $\propto r$, correspond cette fois-ci au cas d'une densité uniforme et est mieux adapté aux régions proches du centre d'une étoile

$$\vec{g} = -\frac{4}{3} \pi r \rho_c G \vec{e}_r = -g_0 \frac{r}{r_0} \vec{e}_r, \quad (3.16)$$

où ρ_c est la densité au centre. Dans l'équation de quantité de mouvement, Π' correspond maintenant à une pression modifiée par l'accélération centrifuge, divisée par la densité de l'état de base $\Pi' = P'/\rho_0 - (1/2)(\Omega_0 \vec{e}_z \times \vec{r})^2$.

Grandeur thermodynamique	Échelle caractéristique	
	État de référence	Fluctuation
Vitesse U	–	V_0
Densité ρ	ρ_0	–
Pression P	$\rho_0 g_0 r_0$	$\rho_0 r_0 \Omega_0 V_0$
Température T	T_0 et $\Delta \bar{T}/r_0$ pour le gradient	$\Omega_0 V_0 T_0/g_0$
Entropie S	$\Delta \bar{S}/r_0$ pour le gradient	$C_p \Omega_0 V_0/g_0$
Champ magnétique B	B_0	B_0

Tableau 3.1 : Récapitulatif des différentes échelles caractéristiques utilisées pour adimensionnaliser les grandeurs thermodynamiques qui apparaissent dans les systèmes d'équations (3.13) et (3.15).

L'adimensionnalisation de chacune de ces équations est réalisée en déterminant tout d'abord une échelle de longueur caractéristique que nous choisissons être le rayon de la sphère externe r_0 . En adoptant alors comme échelle caractéristique de vitesse l'amplitude V_0 de la vitesse de contraction imposée à la sphère externe, nous définissons ensuite une échelle de temps caractéristique qui correspond à un temps de contraction $\tau_c = r_0/V_0$. Les variables restantes qui

apparaissent dans les systèmes d'équations (3.13) et (3.15), c'est-à-dire les différentes grandeurs thermodynamiques, sont finalement rendues sans dimension conformément aux échelles caractéristiques que nous avons répertoriées dans le tableau 3.1. Dans ce dernier, l'échelle caractéristique de la pression à l'état de référence est obtenue à partir de l'équation d'équilibre hydrostatique. Les échelles caractéristiques des fluctuations de pression et d'entropie (ou de façon équivalente, de température dans l'approximation de Boussinesq) sont quant à elles respectivement déterminées via les équations d'équilibre géostrophique et du vent thermique que nous avons explicitées dans la partie 2.1.1.2 de la sous-section 2.1.1 du chapitre 2. Une fois adimensionnalisés, les systèmes d'équations (3.13) et (3.15) se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \vec{U}) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ R_0 \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{U} + \vec{V}_f) \right] + 2 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\tilde{\Pi}'}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{\tilde{S}'}{\tilde{r}^2} \vec{e}_r + \\ \qquad \qquad \qquad \left(\frac{L_u E}{P_m} \right)^2 \frac{R_0^{-1}}{\tilde{\rho}} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right] + \frac{E}{\tilde{\rho}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B} \right] + \frac{1}{R_m} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \\ \tilde{\rho} \tilde{T} \left[P_r R_0 \left(\frac{\partial \tilde{S}'}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) \tilde{S}' \right) + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \frac{d\tilde{S}'}{dr} \right] = E \vec{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{T} \vec{\nabla} \tilde{S}') + \\ \qquad \qquad \qquad D_i P e_c E^2 \left[\tilde{Q}_v + P_m^{-1} \left(\frac{L_u E}{P_m R_0} \right)^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 \right], \end{array} \right. \quad (3.17)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ R_0 \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{U} + \vec{V}_f) \right] + 2 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \tilde{\Pi}' + \tilde{\Theta}' \tilde{r} \vec{e}_r + E \vec{\nabla}^2 (\vec{U} + \vec{V}_f), \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B} \right] + \frac{1}{R_m} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \\ P_r R_0 \left[\frac{\partial \tilde{\Theta}'}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) \tilde{\Theta}' \right] + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \frac{d\tilde{T}}{dr} = E \vec{\nabla}^2 \tilde{\Theta}'. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Ces expressions font intervenir divers nombres sans dimension dont le nom, la définition et la signification physique sont donnés dans le tableau 3.2. Les différentes échelles de temps qui y apparaissent sont le temps de rotation $\tau_{\text{rot}} = \Omega_0^{-1}$, le temps visqueux $\tau_v = r_0^2/\nu$, le temps de diffusion thermique $\tau_\kappa = r_0^2/\kappa$, le temps de flottabilité $\tau_b = N_0^{-1}$, le temps de diffusion

Nombre sans dimension	Définition		Signification physique
	Variables	Temps caractéristiques	
Nombre de Rossby R_o basé sur la contraction	$\frac{V_0}{r_0 \Omega_0}$	$\frac{\tau_{rot}}{\tau_c}$	Contraction / Effet Coriolis
Nombre d'Ekman E	$\frac{\nu}{r_0^2 \Omega_0}$	$\frac{\tau_{rot}}{\tau_\nu}$	Effets visqueux / Effet Coriolis
Nombre de Reynolds $Re_c = R_o/E$ basé sur la contraction	$\frac{V_0 r_0}{\nu}$	$\frac{\tau_\nu}{\tau_c}$	Contraction / Effets visqueux
Nombre de Prandtl P_r	$\frac{\nu}{\kappa}$	$\frac{\tau_\kappa}{\tau_\nu}$	Diffusion visqueuse / Diffusion thermique
Nombre de Péclet $Pe_c = P_r Re_c$ basé sur la contraction	$\frac{V_0 r_0}{\kappa}$	$\frac{\tau_\kappa}{\tau_c}$	Contraction / Diffusion thermique
Rapport N_0/Ω_0	$\sqrt{\frac{g_0 \Delta \bar{S}}{C_p r_0 \Omega_0^2}}$	$\frac{\tau_{rot}}{\tau_b}$	Force de flottabilité / Effet Coriolis
Nombre de Lundquist L_u	$\frac{B_0 r_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0} \eta}$	$\frac{\tau_\eta}{\tau_{Ap}}$	Force de Lorentz / Diffusion magnétique
Nombre de Prandtl magnétique P_m	$\frac{\nu}{\eta}$	$\frac{\tau_\eta}{\tau_\nu}$	Diffusion visqueuse / Diffusion magnétique

Tableau 3.2 : Nombres sans dimension apparaissant dans les systèmes d'équations (3.17) et (3.18), accompagnés de leur définition et de leur signification physique.

magnétique $\tau_\eta = r_0^2/\eta$ et le temps d'Alfvén $\tau_{Ap} = r_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0}/B_0$. N_0 correspond à une valeur de référence de la fréquence de Brunt-Väisälä (3.2), prise à la sphère externe : $N_0 = \sqrt{g_0 \Delta \bar{S}/C_p r_0}$. Dans l'approximation de Boussinesq, puisque $dS = (C_p/T) dT$, nous avons simplement

$$N(r) = \sqrt{\frac{g}{T} \frac{dT}{dr}} \quad \Rightarrow \quad N_0 = \sqrt{\frac{g_0}{T_0} \frac{\Delta \bar{T}}{r_0}}. \quad (3.19)$$

Deux autres paramètres sans dimension, propres à l'approximation anélastique, ne sont pas répertoriés dans le tableau 3.2. La raison réside dans le fait qu'ils ne comparent pas deux effets

physiques entre eux. Le premier est le paramètre $\epsilon_s = \Delta\bar{S}/C_p$ et le second, le nombre de dissipation $D_i = g_0 r_0 / T_0 C_p$. Ils interviennent directement dans les équations du système (3.10) qui, une fois adimensionné, se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{T}}{dr} = \epsilon_s \tilde{T} \frac{d\tilde{S}}{dr} - \frac{D_i}{\tilde{r}^2}, \\ \frac{d \ln \tilde{\rho}}{dr} = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{d \ln \tilde{T}}{dr} - \epsilon_s \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{d\tilde{S}}{dr}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Nous observons que le paramètre $\epsilon_s = \Delta\bar{S}/C_p$ contrôle l'amplitude de l'écart à un état d'isentropie (les termes multipliés par $d\tilde{S}/dr$ disparaissent lorsque $\epsilon_s \rightarrow 0$). Sa valeur doit donc être suffisamment faible pour assurer la validité de l'approximation anélastique en justifiant que le terme $(P'/\bar{\rho}C_p)(d\bar{S}/dr)$ soit négligeable. Le nombre de dissipation $D_i = g_0 r_0 / T_0 C_p$, lui, est directement lié à la stratification en densité.

Finalement, nous voyons que dans l'approximation anélastique les équations gouvernant la dynamique d'un écoulement magnétisé dépendent de huit nombres sans dimensions : $\epsilon_s, D_i, Re_c, E, P_r, P_m, L_u$ et N_0^2/Ω_0^2 , alors que seuls les six derniers sont nécessaires dans l'approximation de Boussinesq. En l'absence de champ magnétique, l'espace des paramètres est encore réduit puisque le nombre de Prandtl magnétique et le nombre de Lundquist n'interviennent plus dans la description de l'écoulement.

3.3 Différents régimes de transport du moment cinétique

La contraction transporte du moment cinétique vers l'intérieur de la coquille sphérique. Ce transport peut potentiellement être équilibré dans un état stationnaire par un processus de redistribution. Afin de déterminer les différents régimes de transport possibles, nous commençons par analyser l'équation d'évolution du moment cinétique dans l'approximation anélastique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \underbrace{NL}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{2\Omega_0 U_s}{\mu_0 \bar{\rho}} \left[(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) B_\phi \right]}_{\text{Force de Lorentz}} - \underbrace{\nu \left[D^2 U_\phi + \frac{r}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) \right]}_{\text{Terme visqueux}} = \\ \underbrace{\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi + r^2 \sin \theta \Omega_0)}_{\text{Contraction}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans cette équation, $U_s = \cos \theta U_\theta + \sin \theta U_r$ correspond à la composante radiale cylindrique du champ de vitesse, c'est-à-dire la composante perpendiculaire à l'axe de rotation, $D^2 = (\vec{\nabla}^2 - 1/r^2 \sin^2 \theta)$ est l'opérateur Laplacien vectoriel et NL un terme non-linéaire dont l'expression en coordonnées sphériques prend simplement la forme suivante

$$NL = \frac{U_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi) + \frac{U_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta U_\phi). \quad (3.22)$$

Les échelles de temps caractéristiques sur lesquelles les différents processus de transport du moment cinétique opèrent sont alors définies en équilibrant chacun des termes apparaissant dans l'équation (3.21) avec la dérivée temporelle de la composante azimutale du champ de vitesse.

➤ Temps de contraction :

Lorsque l'on équilibre le terme de contraction avec la dérivée temporelle de la composante azimuthale du champ de vitesse, nous obtenons l'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) = \frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(1 + \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right], \quad (3.23)$$

qui nous permet de définir le temps de contraction dans les approximations anélastique et Boussinesq. Pour ce faire, nous effectuons un raisonnement en ordre de grandeur en prenant r_0 comme échelle spatiale ($r, \partial r \sim r_0$) et $\Delta\Omega = \Omega(r = r_i, \theta) - \Omega(r = r_0, \theta)$ comme amplitude caractéristique de la rotation différentielle $\delta\Omega(r, \theta) = \Omega(r, \theta) - \Omega_0$. La définition de ce temps diffère alors dans les cas où $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ et $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$. En effet, en tenant compte des variations locales de densité nous avons

$$\tau_c^A = \left[\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \tau_c \quad \text{avec} \quad \tau_c = \frac{r_0}{V_0} \quad \text{lorsque} \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \geq 1, \quad (3.24)$$

et

$$\tau_c^{LA} = \left[\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \tau_c^L \quad \text{avec} \quad \tau_c^L = \frac{r_0}{V_0} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \quad \text{lorsque} \quad \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \ll 1. \quad (3.25)$$

L'exposant A différencie l'approximation anélastique de l'approximation de Boussinesq. L'exposant L, lui, permet de distinguer ce que l'on appelle le cas "linéaire" du cas "non-linéaire". En effet, le terme négligé dans l'équation (3.23) lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, est issu du terme d'inertie $(\vec{U}_{\text{tot}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}_{\text{tot}}$, par essence non-linéaire. Ces différentes définitions du temps de contraction correspondent au temps de transport du moment cinétique par l'écoulement de contraction forcé, de la sphère externe à la sphère interne. Ils tiennent compte de l'effet de la stratification en densité sur la vitesse de contraction, tel que nous avons pu l'observer sur la figure 3.2 en section 3.1.

➤ Temps d'Alfvén :

Dans le chapitre 2 nous avons vu qu'en présence d'un champ magnétique, un processus très efficace de redistribution du moment cinétique était assuré par les ondes d'Alfvén. Nous avons alors établi la relation de dispersion de ces ondes (équation (2.14), partie 2.1.2.1 de la sous-section 2.1.2) dans une configuration simplifiée pour laquelle un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ était considéré. Nous avons ensuite montré que toute perturbation transverse à une ligne de champ engendrait irrémédiablement une force de rappel perpendiculairement à cette dernière qui entraînait la propagation d'une onde non-dispersive le long de la ligne à la vitesse $V_{A_p} = \bar{B} / \sqrt{\mu_0 \bar{\rho}}$. Pour un champ magnétique de grande échelle ancré dans l'ensemble d'une zone radiative de rayon R_{rz} , nous avons fini par établir l'échelle de temps caractéristique sur laquelle ces ondes se propagent : $\tau_{A_p} = R_{rz} / V_{A_p}$. Dans notre configuration, $R_{rz} \sim r_0$. Alors en utilisant B_0 comme amplitude caractéristique du champ magnétique poloïdal, puis en tenant compte des variations locales de densité à travers la coquille, nous obtenons

$$\tau_{A_p}^A = \left(\int_{r_i/r_0}^1 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}} d(r/r_0) \right) \tau_{A_p} \quad \text{avec} \quad \tau_{A_p} = \frac{r_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0}}{B_0}, \quad (3.26)$$

où de nouveau l'indice A permet de différencier le cas anélastique du cas Boussinesq. Par conséquent, la stratification en densité ralentit également la propagation des ondes d'Alfvén à travers

la coquille sphérique, modifiant ainsi, comme pour le temps de contraction, le temps de redistribution du moment cinétique.

➤ Temps de spin-up et d'Eddington-Sweet :

Lorsque nous équilibrons le terme de Coriolis avec la dérivée temporelle de la composante azimuthale du champ de vitesse nous obtenons la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) = \frac{2U_s}{r \sin \theta}, \quad (3.27)$$

qui nous permet de définir un temps de redistribution du moment cinétique assuré par une circulation méridienne de grande échelle d'amplitude caractéristique U :

$$\tau_{AM} = \frac{r_0}{U} \left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (3.28)$$

Dans la sous-section 2.3.1 du chapitre 2 nous avons vu que le pompage d'Ekman dans la couche limite du même nom, engendrait une circulation méridienne d'ordre $\mathcal{O}(r_0 \Delta\Omega \sqrt{E})$ (cf. équation (2.48)) dans le corps du fluide non stratifié (ou stratifié faiblement). Dans notre configuration, une couche d'Ekman est localisée le long de la sphère externe où $\Omega = \Omega_0$ est imposé. Par conséquent, lorsque la stratification stable le permet, une circulation d'Ekman se met en place et d'après l'équation (3.28), redistribue du moment cinétique sur une échelle de temps de spin-up :

$$\tau_{AM} = \sqrt{\frac{r_0^2}{\Omega_0 \nu}} = \tau_E. \quad (3.29)$$

Toutefois, comme nous l'avons mentionné dans ce même chapitre, lorsque le milieu est suffisamment stablement stratifié, ce type de circulation est relégué au second plan. Dans ce cas, le transport de moment cinétique est pris en charge par une circulation d'Eddington-Sweet d'ordre $U \sim \mathcal{O}\left(\frac{\kappa}{r_0} \left(\frac{\Omega_0}{N_0}\right)^2 \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}\right)$ (voir partie 2.1.1.2, sous-section 2.1.1 du chapitre 2). D'après l'équation (3.28), cette circulation redistribue alors du moment cinétique sur une échelle de temps caractéristique :

$$\tau_{AM} = \frac{r_0^2}{\kappa} \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 = \tau_{ED}. \quad (3.30)$$

Notons que pour déterminer ces deux échelles de temps, nous avons considéré, en accord avec l'équation de continuité, que $U_r \sim U_\theta \sim U_s \sim U$.

➤ Temps visqueux :

Équilibrons maintenant le terme visqueux avec la dérivée temporelle du champ de vitesse azimuthale. On obtient :

$$\frac{\partial \delta\Omega}{\partial t} = \nu \left[\frac{D^2 (r \sin \theta \delta\Omega)}{r \sin \theta} + \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \frac{\partial \delta\Omega}{\partial r} \right]. \quad (3.31)$$

En procédant comme pour le temps de contraction et en tenant compte du fait que les deux termes entre crochets sont du même ordre de grandeur, de sorte que nous pouvons considérer uniquement le terme de gauche dans notre raisonnement, nous retrouvons l'échelle de temps

visqueuse $\tau_v = r_0^2/\nu$ définie précédemment lors de l'adimensionnalisation des équations gouvernant la dynamique de l'écoulement en section 3.2. Il s'agit de l'échelle de temps sur laquelle les processus visqueux opèrent afin de redistribuer du moment cinétique.

	Étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale	Sous-géantes	
		Zone non-dégénérée	Cœur dégénéré
τ_Ω	$3.5 \cdot 10^{-3} - 4.4 \cdot 10^{-4}$ [1*]	$9.5 \cdot 10^{-3}$ [2*]	
τ_{A_p}	~ 30 ($B_0 \sim 300$ G) [3*]	$\sim 8 \cdot 10^3$ ($B_0 \sim 1$ G) [3*]	
τ_c	$1.2 \cdot 10^6 - 2.3 \cdot 10^7$ [4*]	10^9 [5*]	
τ_E	$1.4 \cdot 10^4 - 1.1 \cdot 10^6$ [†]	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$ [†]	
τ_{ED}	$7.2 \cdot 10^6 - 4.4 \cdot 10^{11}$ [†]	$10^9 - 1.2 \cdot 10^{11}$ [†]	$5.7 \cdot 10^{11}$ – [†] $1.8 \cdot 10^{13}$
τ_η	$\sim 10^9$ [6*]	$10^9 - 10^{11}$ [7*]	
τ_v	$1.7 \cdot 10^{13}$ [8*]	$3.2 \cdot 10^{12} - 3.2 \cdot 10^{13}$ [‡]	$10^{11} - 10^{12}$ [‡]
Régime d'intérêt	Eddington-Sweet		Visqueux

Tableau 3.3 : Estimations en années des échelles de temps caractéristiques, et régimes d'intérêts, dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes. L'ensemble de ces valeurs s'appuient sur les références suivantes. [1*] : (Lamm et al., 2005; Irwin et al., 2006, 2007a; Alecian et al., 2013b) ; [2*] : (Deheuvels et al., 2020) ; [3*] : (Gouhier et al., 2022) ; [4*] : (Maeder, 2008) ; [5*] : (Deheuvels et al., 2020) ; [6*] : (Braithwaite & Spruit, 2017) ; [7*] : (Cantiello et al., 2016) ; [8*] : (Lara & Rieutord, 2013) ; [†] et [‡] : voir corps du texte.

Dans le tableau 3.3 nous avons estimé ces diverses échelles de temps, conjointement aux échelles de temps de rotation τ_Ω et de diffusion magnétique τ_η , dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes, en nous basant sur les références mentionnées en légende. En nous appuyant sur des valeurs typiques dans les intérieurs radiatifs de ces étoiles, nous avons ensuite estimé dans le tableau 3.4 les divers paramètres qui interviennent dans les équations gouvernant la dynamique d'un écoulement stablement stratifié, baigné dans un champ magnétique de grande échelle, et subissant une contraction radiale. Avant de poursuivre notre exposé, quelques commentaires sur ces tableaux s'imposent.

Le nombre de Reynolds basé sur la contraction ([★]) a été déterminé à partir du rapport entre les échelles de temps visqueuse et de contraction. Ce temps varie de façon importante entre les étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et les sous-géantes. Comme nous l'avons vu en section 1.1 du chapitre 1, dans le premier cas l'étoile se contracte sur une échelle de temps de Kelvin-Helmholtz qui correspond à un temps de réajustement thermique. Nous constatons d'ailleurs qu'en prenant $\tau_c \sim \tau_{KH} \sim r_0^2/\kappa$ nous obtenons $Re_c \approx P_r^{-1} = 10^6$, en accord avec la gamme de valeurs indiquée dans le tableau 3.4. En revanche, dans le second cas, l'échelle de temps de Kelvin-Helmholtz n'est pas adaptée car la pression de dégénérescence du cœur de la sous-géante supporte le poids de l'enveloppe et par conséquent, celle-ci se contracte lentement. En utilisant l'échelle de temps d'évolution de la rotation du cœur, sous l'effet de la contraction à symétrie sphérique, nous avons établi en section 1.1 que l'échelle de temps de contraction pour ces étoiles est en moyenne de l'ordre du milliard d'années.

Concernant le temps d'Eddington-Sweet ([†]), celui-ci a simplement été évalué en prenant $\tau_{ED} \approx \tau_{KH} (N_T/\Omega_0)^2$. Afin d'estimer ce temps dans les étoiles de la pré-séquence principale, nous avons utilisé les valeurs indiquées dans le tableau 1.1 de la section 1.1. Pour les sous-géantes, le temps de Kelvin-Helmholtz peut être estimé par $\tau_{KH} \approx \int (C_v T/L) dm$, où C_v est la capacité thermique isochore massique, T la température, L la luminosité et $dm = 4\pi r^2 dr$ la masse contenue dans une couche sphérique de rayon r (Deheuvels et al., 2021). Ce faisant, on obtient une valeur comprise entre 0.11 et 1.3 million(s) d'années. Le temps visqueux ([‡]) a quant à lui été estimé à partir du profil de viscosité d'une sous-géante de $1M_\odot$ et $2R_\odot$, calculé en sommant les contributions radiative et collisionnelle à celle des électrons dégénérés (Garaud et al., 2015).

Pour finir, arrêtons-nous sur le nombre de Lundquist. Ce dernier découle simplement du rapport entre le temps de diffusion magnétique et le temps d'Alfvén et est donc déterminé à travers la connaissance préalable de l'intensité du champ magnétique. Toutefois, comme nous l'avons vu au chapitre 1, notre connaissance de l'intensité des champs magnétiques dans les zones radiatives est restreinte. Nous savons que $\sim 10\%$ des étoiles de Herbig arborent un champ magnétique structuré à grande échelle de l'ordre du kilo-Gauss (cf. sous-section 1.2.2) et que les étoiles qui possédaient un cœur convectif sur la séquence principale sont susceptibles d'abriter un champ magnétique dans leur cœur radiatif (cf. 1.3.2). Dans l'attente de contraintes supplémentaires, nous pouvons, pour le moment, uniquement nous contenter d'estimations. Pour cela, nous supposons qu'un champ magnétique, qu'il soit fossile ou le produit d'une dynamo au cœur sur la séquence principale, doit relaxer vers une configuration d'équilibre dans laquelle il est structuré à grande échelle pour pouvoir lutter contre sa diffusion ohmique. Afin d'estimer le temps d'Alfvén, nous supposons également que ce champ possède une intensité supérieure à 1 G. Au vu des simulations numériques de dynamo au cœur et de ce que nous connaissons du magnétisme des étoiles de Herbig, ceci s'avère être une limite prudente. En partant de ces hypothèses, nous observons, comme indiqué dans le tableau 3.4, que même pour des intensités aussi faibles que le Gauss, le nombre de Lundquist doit être élevé (au moins de l'ordre de 10^5).

Finalement, les valeurs répertoriées dans le tableau 3.3 montrent que l'on aura toujours la hiérarchisation d'échelles de temps suivante dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes :

$$\tau_\Omega \ll \tau_{A_p} \ll \tau_E \ll \tau_c \leq \tau_{ED}, \tau_\eta, \tau_\nu. \quad (3.32)$$

Afin de déterminer le régime de transport hydrodynamique de moment cinétique dominant, il convient de comparer entre elles, les différentes échelles de temps caractéristiques sur lesquelles les divers processus opèrent :

	Étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale	Sous-géantes	
		Zone non-dégénérée	Cœur dégénéré
E	$10^{-17} - 10^{-15}$ [1]		
	$10^{-2} - 10^{-7}$		$10^{-2} - 10^{-5}$
N_T^2 (s ⁻²)	$10^{-7.5} - 10^{-5.8}$ [2]	$10^{-7} - 10^{-6}$ [2]	$10^{-4.5} - 10^{-3}$ [2]
Ω_0 (rad·s ⁻¹)	$9.1 \cdot 10^{-6} - 7.3 \cdot 10^{-5}$ [3]	$3.3 \cdot 10^{-6}$ [4]	
P_r	10^{-6} [5]		10^{-3} [5]
	10^{-1}		
$P_r \left(\frac{N_T}{\Omega_0} \right)^2$	$6.0 \cdot 10^{-6} - 1.9 \cdot 10^{-2}$	$9.0 \cdot 10^{-3} - 9.0 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^3 - 9.0 \cdot 10^4$
	$10^{-1} - 10^{-2}$		$10^2 - 10^4$
P_m	$10^{-3} - 10^{-2}$ [6]		$1 - 10$ [7]
	$10 - 10^3$		
Re_c	$7.4 \cdot 10^5 - 1.4 \cdot 10^7$ [★]	$3.2 \cdot 10^3 - 3.2 \cdot 10^4$ [★]	$10^2 - 10^3$ [★]
	$10^{-2} - 10$		
B_0 (G)	$100 - 300$ (surface) [8]	$10^5 - 10^6$ (théorique + simulations) [9]	
L_u	$3.3 \cdot 10^7$ ($B_0 \sim 300$ G) [★]	$1.3 \cdot 10^5 - 1.3 \cdot 10^8$ ($B_0 \sim 1$ G) [★]	
	$10^4 - 10^5$		$10^3 - 10^5$
Régime d'intérêt	Eddington-Sweet		Visqueux

Tableau 3.4 : Valeurs des différents paramètres qui gouvernent les équations de la dynamique d'un écoulement stablement stratifié plongé dans un champ magnétique de grande échelle, et régimes d'intérêts, dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes. Les valeurs utilisées au cours des simulations sont notées en vert. L'ensemble de ces données s'appuient sur les références suivantes. [1] : (Gouhier et al., 2021) ; [2] : (Talon & Charbonnel, 2008) ; [3] : (Lamm et al., 2005; Irwin et al., 2006, 2007a; Alecian et al., 2013b) ; [4] : (Deheuvels et al., 2020) ; [5] : (Garaud et al., 2015) ; [6] : (Rüdiger et al., 2016) ; [7] : (Rüdiger et al., 2015) ; [8] : (Wade et al., 2005; Alecian et al., 2013a) ; [9] : (Brun et al., 2005; Fuller et al., 2015; Augustson et al., 2016) ; [★] : voir corps du texte.

$$\frac{\tau_{ED}}{\tau_\nu} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2, \quad \frac{\tau_E}{\tau_\nu} = \sqrt{E} \quad \text{et} \quad \frac{\tau_E}{\tau_{ED}} = \frac{\sqrt{E}}{P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2}. \quad (3.33)$$

D'après le tableau 3.4, nous aurons toujours $\sqrt{E} \ll 1$. Trois régimes de transport hydrodynamique de moment cinétique peuvent ainsi être définis :

$$\underbrace{P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll \sqrt{E} \ll 1}_{\text{Taylor-Proudman}}, \quad \underbrace{\sqrt{E} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll 1}_{\text{Eddington-Sweet}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\sqrt{E} \ll 1 \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2}_{\text{Visqueux}}, \quad (3.34)$$

ce qui, en terme de temps caractéristiques se traduit également par

$$\underbrace{\tau_{ED} \ll \tau_E \ll \tau_\nu}_{\text{Taylor-Proudman}}, \quad \underbrace{\tau_E \ll \tau_{ED} \ll \tau_\nu}_{\text{Eddington-Sweet}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\tau_E \ll \tau_\nu \ll \tau_{ED}}_{\text{Visqueux}}. \quad (3.35)$$

Ces régimes sont donc entièrement caractérisés par deux nombres sans dimension, le nombre d'Ekman E et le produit du nombre de Prandtl avec le rapport au carré de la fréquence de Brunt-Väisälä au taux de rotation $P_r (N_0/\Omega_0)^2$. En particulier, d'après la hiérarchisation d'échelles (3.32), seuls les régimes d'Eddington-Sweet et visqueux sont d'intérêts dans les étoiles que nous considérons. Dans ce cas, la différence de comportement de l'écoulement est entièrement gouvernée par le paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, un fait premièrement noté par [Garaud \(2002b\)](#) lorsqu'elle étudia le transport du moment cinétique forcé par un couple barocline induit par l'accélération centrifuge dans les zones radiatives des étoiles de type solaire. Dans son étude, le paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ permettait en effet de définir deux régimes de transport (visqueux ou par une circulation méridienne). Par ailleurs, [Garaud & Brummell \(2008\)](#), [Garaud & Garaud \(2008\)](#), [Garaud & Acevedo-Arreguin \(2009b\)](#), [Wood & Brummell \(2012\)](#), [Acevedo-Arreguin et al. \(2013\)](#) et [Wood & Brummell \(2018\)](#) ont montré que ce paramètre contrôlait également la profondeur de pénétration de la circulation méridienne dans les couches radiatives adjacentes aux régions convectives. En particulier, lorsque $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$ la dynamique de l'écoulement est dominée par la viscosité et la circulation méridienne est supprimée par la stratification stable. Comme nous le verrons, cette situation est similaire à celle que nous avons rencontrée dans le régime visqueux que nous décrirons en 3.4.1.3.

Les valeurs indiquées dans les tableaux 3.3 et 3.4 montrent que le régime d'Eddington-Sweet est probablement rencontré à la fois dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale, et dans les intérieurs radiatifs non dégénérés des sous-géantes. Le régime visqueux semble quant à lui, pertinent uniquement dans le cœur dégénéré des sous-géantes. Bien qu'il soit de moindre importance pour les étoiles que nous considérons, le régime de Taylor-Proudman nous a cependant permis de mieux comprendre le rôle des différentes couches limites qui apparaissent dans nos simulations numériques, sur l'écoulement intérieur.

Pour conclure cette section, en présence d'un champ magnétique de grande échelle ancré dans l'ensemble de la zone radiative d'une étoile en contraction, la redistribution de moment cinétique sera prise en charge par les ondes d'Alfvén parce que ces dernières agissent sur des temps caractéristiques très courts. Si pour une raison ou une autre ces ondes ne sont plus capables d'assurer une telle fonction, le transport de moment cinétique sera endossé soit par une circulation méridienne d'Eddington-Sweet ($P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$), soit par des effets visqueux

$(P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1)$. Les temps caractéristiques de ces deux derniers processus se comparent de la façon suivante avec l'échelle de temps de contraction :

$$\frac{\tau_{\text{ED}}}{\tau_c} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 Re_c \quad \text{et} \quad \frac{\tau_v}{\tau_c} = Re_c. \quad (3.36)$$

La description de l'écoulement fait donc intervenir un paramètre additionnel, le nombre de Reynolds basé sur la contraction Re_c . En particulier, d'après les tableaux 3.3 et 3.4, dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale $\tau_c \ll \tau_{\text{ED}}$, soit $P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c \gg 1$. En revanche, dans la partie non dégénérée et à l'intérieur du cœur dégénéré d'une sous-géante, nous avons respectivement $\tau_c \leq \tau_{\text{ED}}$ et $\tau_c \ll \tau_v$, c'est-à-dire $P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c \geq 1$ et $Re_c \gg 1$.

3.4 Principaux résultats

Rappelons au lecteur que nous cherchons à caractériser les écoulements stationnaires et axisymétriques induits par la contraction d'un fluide magnétisé, ou non, stablement stratifié, pouvant en plus présenter une stratification en densité. Nous donnons ainsi dans cette section, les principaux résultats obtenus lors de cette étude qui a conduit à la rédaction de deux articles (Gouhier et al., 2021, 2022). Ces derniers sont reproduits à la page 185 et contiennent la description détaillée de nos résultats.

Dans ce qui suit, nous commençons par décrire les écoulements stationnaires obtenus en l'absence de champ magnétique dans les régimes d'Eddington-Sweet linéaire (partie 3.4.1.1) et non-linéaire (partie 3.4.1.2), puis dans le régime visqueux (partie 3.4.1.3). Nous nous intéressons ensuite, dans la partie 3.4.2.1, à la façon dont ces écoulements sont modifiés en présence d'un champ magnétique de grande échelle avant de proposer en partie 3.4.2.2, un scénario susceptible d'expliquer l'évolution post-séquence principale des étoiles de faible masse ($\lesssim 2M_\odot$) pendant la phase de sous-géante. Les résultats sont donc exposés dans deux sous-sections distinctes, l'une réunissant d'un côté les résultats hydrodynamiques (sous-section 3.4.1) et l'autre, regroupant les résultats magnétohydrodynamiques (sous-section 3.4.2).

3.4.1 Le cas hydrodynamique

En section 3.3, nous avons déterminé deux régimes pertinents dans les intérieurs radiatifs des étoiles de la pré-séquence principale et des sous-géantes, le régime d'Eddington-Sweet et le régime visqueux, tous deux contrôlés par Re_c et $P_r (N_0/\Omega_0)^2$. Comme nous le verrons, les écoulements stationnaires issus de ces deux régimes sont fondamentalement différents l'un de l'autre. En particulier, l'écoulement obtenu dans le régime d'Eddington-Sweet est, dans nos simulations, fortement influencé par la présence d'une couche d'Ekman à la sphère externe. En ce sens, l'analyse de l'écoulement stationnaire du régime de Taylor-Proudman s'est révélée être un outil précieux pour comprendre les simulations numériques que nous avons effectuées dans le régime d'Eddington-Sweet. Nous entreprenons maintenant de décrire l'ensemble de ces résultats le plus simplement possible, tout détail supplémentaire pouvant être trouvé dans Gouhier et al. (2021).

3.4.1.1 Régime d'Eddington-Sweet linéaire

Dans ce régime, la circulation méridienne d'Eddington-Sweet redistribue le moment cinétique transporté par la contraction sur une échelle de temps caractéristique de l'ordre de τ_{ED} .

Dans ce régime, caractérisé par $\sqrt{E} \ll P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, tant que $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, les effets non-linéaires peuvent être négligés, et des lois d'échelle décrivant l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle sont obtenues. Afin d'analyser ce régime d'Eddington-Sweet linéaire, nous avons réalisé diverses simulations numériques en variant le nombre d'Ekman entre 10^{-7} et 10^{-3} , le produit $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ entre 10^{-2} et 10^{-1} , le nombre de Reynolds basé sur la contraction entre 10^{-2} et 1, et le contraste de densité entre les sphères interne et externe entre 1 (Boussinesq) et 60.2.

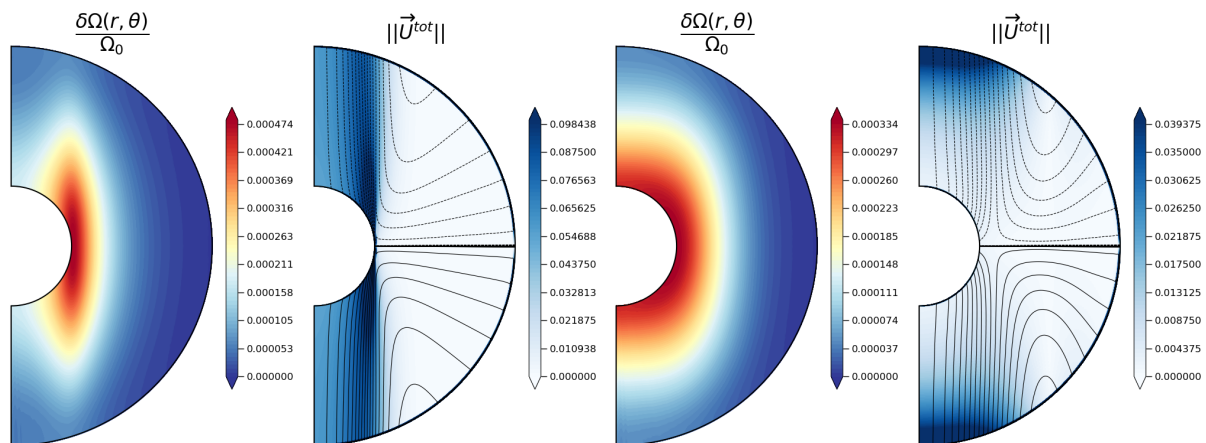


FIGURE 3.3 : Coupes méridiennes de la rotation différentielle (première et troisième coupe) et de la norme du champ de vitesse méridien total $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ (seconde et dernière coupe), lorsque l'état stationnaire est atteint. Les contours noirs tracés sur la seconde et la dernière coupe représentent les lignes de courant de la circulation méridienne totale. À l'extérieur du cylindre tangent, les traits pleins (les tirets) correspondent à une circulation horaire (anti-horaire) tandis qu'à l'intérieur du cylindre, ils font référence à une circulation orientée vers le haut (vers le bas). Les deux premières coupes ont été obtenues sous l'approximation de Boussinesq avec $E = 10^{-6}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et $Re_c = 10^{-2}$ et les deux dernières, sous l'approximation anélastique en utilisant les mêmes paramètres mais en imposant en plus un contraste de densité $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ entre les sphères interne et externe.

En figure 3.3, nous présentons les écoulements stationnaires et axisymétriques typiques de ce régime pour un jeu de paramètres satisfaisant au mieux la condition $\sqrt{E} \ll P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, à savoir $E = 10^{-6}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et $Re_c = 10^{-2}$. Les deux coupes de gauche correspondent à une simulation obtenue sous l'approximation de Boussinesq, les deux dernières, en utilisant l'approximation anélastique avec $\rho_i/\rho_0 = 20.9$. Dans tous les cas, nous observons que la rotation différentielle (première et avant-dernière coupe) possède une dépendance à la fois en rayon et en latitude. Cependant, tandis que l'amplitude maximale de cette rotation différentielle n'est pas très différente entre les cas Boussinesq et anélastique ($\sim 4.74 \cdot 10^{-4}$ dans le premier cas et $\sim 3.34 \cdot 10^{-4}$ dans le second), la structure de cette dernière diffère fortement. On observe en effet dans le cas Boussinesq, la présence d'un maximum local au niveau de l'équateur alors que la stratification en densité rend la distribution de rotation différentielle plus lisse et façonne un profil à prédominance radiale.

Tournons-nous maintenant vers les coupes représentant la norme du champ de vitesse méridien total (seconde et dernière coupe sur la figure 3.3). Nous constatons que le comportement de la circulation méridienne est différent à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre tangent. Si l'on zoome sur ces coupes et que l'on s'appuie sur les lignes de courant (contours noir), on observe en effet qu'une particule fluide initialement localisée au niveau de la sphère externe est

déviée dans une couche d'Ekman en direction des pôles, dans les deux hémisphères. Alors, la suite de son évolution dépend de sa localisation par rapport au cylindre tangent à l'instant où elle pénètre dans l'écoulement intérieur. Si elle se trouve à l'intérieur du cylindre à ce moment, elle s'écoule en direction de la sphère interne, d'autant plus vite qu'elle se trouve au niveau de la paroi latérale de ce cylindre fictif (remarquons le resserrement des lignes de courant à cet endroit). Au contraire, si elle se trouve à l'extérieur, elle forme une cellule en revenant vers la sphère externe. Dans le cas Boussinesq, l'écoulement à l'interface de ces deux régions est le siège d'un puissant jet de vitesse verticale dirigé vers l'équateur de la sphère interne. Ce jet tend cependant à disparaître lorsque la stratification en densité est introduite (voir dernière coupe). Comme nous le verrons, il y a une corrélation très claire entre ce jet de vitesse et le maximum local de rotation différentielle observé dans le cas Boussinesq.

À présent, nous donnons une description plus quantitative de ce régime. L'état stationnaire est caractérisé par un équilibre entre le terme de contraction et l'accélération de Coriolis dans l'équation de conservation du moment cinétique (3.21). Dans le régime linéaire, ceci aboutit à une expression analytique simple de la composante radiale cylindrique du champ de vitesse :

$$U_s = \frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^2} \sin \theta. \quad (3.37)$$

D'après l'équation de continuité, $U_r \sim U_\theta \sim U_s \sim \mathcal{O}(V_f)$ et nous concluons ainsi que la contraction force une circulation méridienne d'ordre $\mathcal{O}(V_f)$. En outre, en advectant l'entropie, la contraction induit également une modification de l'état hydrostatique qu'il est nécessaire de prendre en compte lorsque l'on souhaite analyser nos équations de façon plus approfondie (voir annexe B pour plus de détails). En décomposant alors les fluctuations d'entropie comme la somme d'une contribution à symétrie sphérique induite par la contraction et d'une déviation à cette symétrie $S'(r, \theta) = S_c(r) + \delta S(r, \theta)$, où $S_c(r)$ est solution de l'équation (B.32) (voir annexe B), et après avoir soustrait l'équilibre (B.32) à l'équation d'entropie, l'équation d'équilibre thermique prend la forme suivante :

$$U_r \frac{dS_m}{dr} = \kappa \left[\left(\frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} + \frac{d \ln \bar{T}}{dr} \right) \frac{\partial \delta S}{\partial r} + \bar{\nabla}^2 \delta S \right]. \quad (3.38)$$

où $S_m(r) = \bar{S}(r) + S_c(r)$. Les deux termes entre crochets étant du même ordre de grandeur, nous en déduisons que la circulation forcée par la contraction produit des fluctuations d'entropie d'ordre

$$\frac{\delta S}{\Delta S} \approx \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right)^{-1} \frac{V_0 r_0}{\kappa} = \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right)^{-1} P_r Re_c. \quad (3.39)$$

Par le biais de l'équation du vent thermique (voir sous-section 2.1.1), ces fluctuations d'entropie produisent à leur tour une rotation différentielle. Cette équation relie en effet la composante azimuthale du champ de vitesse aux fluctuations d'entropie :

$$2r\Omega_0 \frac{\partial U_\phi}{\partial z} = \frac{g_0 r_0^2}{C_p r^2} \frac{\partial \delta S}{\partial \theta}. \quad (3.40)$$

Nous concluons alors que l'équilibre entre le transport de moment cinétique assuré par la contraction et celui pris en charge par la circulation d'Eddington-Sweet produit, à l'état sta-

tionnaire et dans un régime linéaire, une rotation différentielle d'ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta\Omega_{ED}^A}{\Omega_0} \approx \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right)^{-1} P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 Re_c = \frac{\tau_{ED}}{\tau_c^A} \quad (\text{cas anélastique}), \\ \frac{\Delta\Omega_{ED}}{\Omega_0} \approx P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 Re_c = \frac{\tau_{ED}}{\tau_c} \quad (\text{cas Boussinesq}). \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Lorsque nous avons souhaité comparer nos résultats numériques à cette prédiction, nous nous sommes confrontés à un problème majeur. En effet, comme nous l'avons mentionné plus tôt, une couche limite d'Ekman du type de celle que nous avons décrite en sous-section 2.3.1 du chapitre 2, se développe le long de la sphère externe à cause d'un saut sur la composante azimuthale du champ de vitesse. Cette couche est chargée de lisser cette discontinuité et ce faisant, modifie la condition limite vue par l'écoulement intérieur à la sphère externe en imposant une relation entre les composantes azimuthale et radiale du champ de vitesse, la condition de pompage/succion (2.48). Ici, comme la composante radiale du champ de vitesse est donnée, cette condition nous fournit l'amplitude du saut du taux de rotation à travers la couche : $\Delta\Omega_{TP} \sim O(\sqrt{E}Re_c\Omega_0)$. En annexe D.2.1, on montre alors que cette rotation différentielle a pour expression dans le régime linéaire et dans le cas Boussinesq :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\Omega_{TP}(s \leq r_i)}{\Omega_0} = \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left[\frac{2r_0^2}{s^2} (\cos\theta_0 - \cos\theta_i) \sqrt{|\cos\theta_0|} \right], \\ \frac{\delta\Omega_{TP}(s > r_i)}{\Omega_0} = \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left[\frac{2r_0^2}{s^2} \cos\theta_0 \sqrt{|\cos\theta_0|} \right]. \end{array} \right. \quad (3.42)$$

Les calculs numériques réalisés sans stratification ont montré que cette solution est une bonne approximation. Dans le cas général, sa contribution d'ordre $O(Re_c\sqrt{E})$ vient s'ajouter à la rotation différentielle d'Eddington-Sweet. Le rapport de leur amplitude est

$$\frac{\Delta\Omega_{ED}}{\Delta\Omega_{TP}} = \frac{P_r(N_0/\Omega_0)^2}{\sqrt{E}}. \quad (3.43)$$

Il existe ainsi des jeux de paramètres, par exemple $E = 10^{-5}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$, pour lesquels ces deux amplitudes deviennent d'ordre comparable et où l'effet de la couche d'Ekman sur le corps du fluide ne peut tout simplement plus être ignoré. Pour cette raison, nous avons systématiquement soustrait la solution (3.42) de nos simulations dans le cas Boussinesq avant de comparer nos résultats entre eux. Dans l'approximation anélastique, où la solution analytique (3.42) n'est plus valable, nous avons plutôt soustrait la solution numérique obtenue en l'absence de stratification stable. Sur la figure 3.4 nous montrons les rotations différentielles stationnaires rescalées par $(P_r(N_0/\Omega_0)^2 Re_c)^{-1}$ avant (coupes de la première colonne) et après (coupes de la seconde colonne) avoir soustrait la solution (3.42) de nos simulations. La rangée du haut présente une simulation obtenue pour $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, et celle du bas pour $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$, le nombre d'Ekman et le nombre de Reynolds basé sur la contraction étant respectivement fixés à 10^{-6} et 10^{-2} . Après avoir retiré l'effet de la couche d'Ekman à la sphère externe, nous retrouvons des niveaux de rotation différentielle rescalée par $(P_r(N_0/\Omega_0)^2 Re_c)^{-1}$ comparables entre les cas effectués à $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et 10^{-2} , alors que les écarts étaient au préalable significatifs. Comme le montrent les coupes de la dernière colonne sur lesquelles la

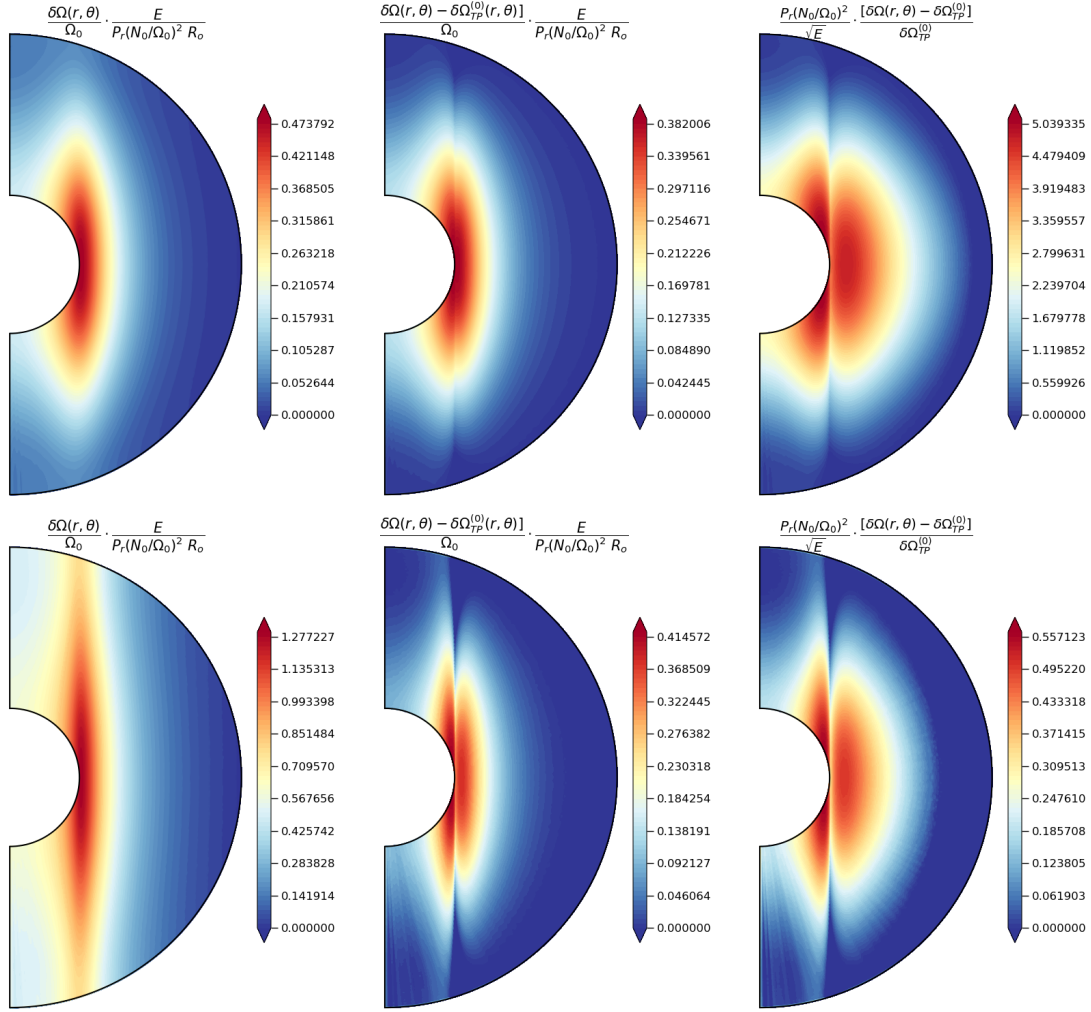


FIGURE 3.4 : Rotation différentielle stationnaire obtenue dans le régime d'Eddington-Sweet, sous l'approximation de Boussinesq, avec $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ (rangée supérieure) et 10^{-2} (rangée inférieure), les nombres d'Ekman et de Reynolds basé sur la contraction étant respectivement fixés à 10^{-6} et 10^{-2} . Dans la première colonne, cette rotation différentielle est simplement rescalée par $E / (P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_o)$. Dans la colonne du milieu, nous lui retirons la solution analytique de Taylor-Proudman (3.42) avant d'effectuer ce rescaling. Dans la dernière colonne, nous présentons des cartes 2D du rapport entre les membres de droite et de gauche de l'équation (3.44).

rotation différentielle de Taylor-Proudman est comparée à celle d'Eddington-Sweet, ceci s'explique par le fait que ces deux contributions interviennent de façon équivalente dans la rotation différentielle totale. Ceci suggère ainsi que la rotation différentielle observée dans nos simulations est bien, à l'ordre dominant, la somme de la rotation différentielle induite par la couche d'Ekman à la sphère externe et de celle produite par la circulation d'Eddington-Sweet :

$$\frac{\delta\Omega_{\text{tot}}}{\Omega_0} = \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left[\frac{\delta\Omega_{\text{TP}}}{\Omega_0} + \frac{P_r(N_0/\Omega_0)^2}{\sqrt{E}} \frac{\delta\Omega_{\text{ED}}}{\Omega_0} \right]. \quad (3.44)$$

En annexe D.2.2, nous montrons la pertinence de cette description de façon rigoureuse. Par ailleurs, la dernière colonne de la figure 3.4, où sont comparés les deux termes entre crochets dans l'équation (3.44), montre également que la solution résiduelle de type Taylor-Proudman n'est jamais totalement négligeable pour nos jeux de paramètres considérés, en particulier à

proximité de la sphère externe.

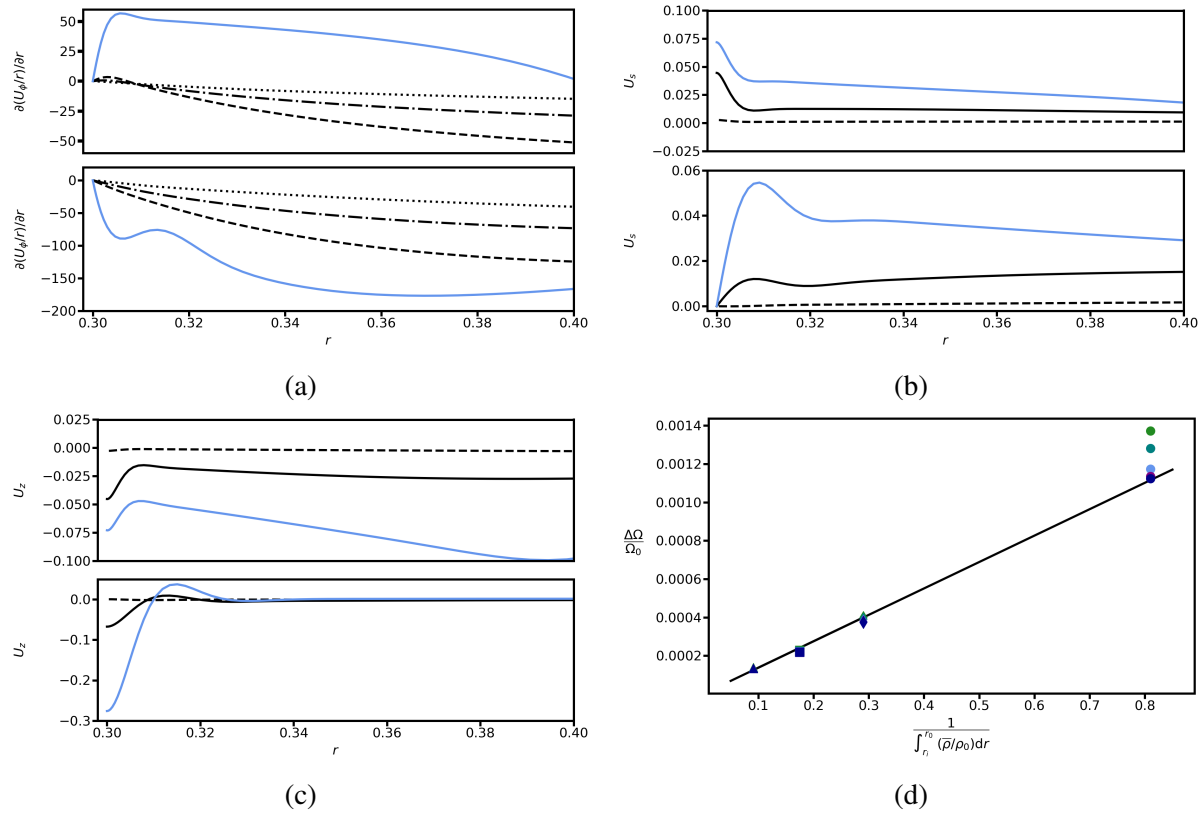


FIGURE 3.5 : Dérivée partielle radiale du rapport de la composante azimuthale du champ de vitesse sur le rayon (figure 3.5a), et composantes radiale cylindrique (figure 3.5b) et verticale (figure 3.5c) du champ de vitesse, tracées en fonction du rayon. Chacune de ces figures est subdivisée en deux sous-figures. Celles du haut sont obtenues à la latitude $\pi/4$ et celles du bas à l'équateur, hormis pour la composante verticale du champ de vitesse qui, étant nulle à cette localisation, est tracée proche de cet endroit, à une latitude faisant un angle de 85° avec l'axe vertical. Les courbes bleues correspondent à un cas Boussinesq avec $E = 10^{-5}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et $Re_c = 10^{-2}$. Les courbes en noir sont obtenues pour les mêmes paramètres mais en variant progressivement le contraste de densité entre les sphères interne et externe, avec $\rho_i/\rho_0 = 10.8$ (tirets), 20.9 (tirets pointillés) et 60.2 (pointillés) sur la figure 3.5a, et $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ (trait plein) et 20.9 (tirets) sur les figures 3.5b et 3.5c. Sur la figure 3.5d, l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle, obtenue après lui avoir numériquement retiré la solution équivalente sans stratification en entropie, est tracée en fonction de l'inverse de l'intégrale du profil de densité de base pour différents contrastes de densité entre les sphères interne et externe : $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ (cercle), 10.8 (losange), 20.9 (carré) et 60.2 (triangle), ainsi que pour différentes latitudes : $\theta = \pi/2$ (vert), $\pi/4$ (cyan), $\pi/8$ (bleu clair), $\pi/16$ (violet) et $\pi/32$ (bleu).

Afin de clore la description du régime d'Eddington-Sweet linéaire, notons que la quantité $\partial(U_\phi/r)/\partial r$ ne satisfait pas non plus la condition limite imposée à la sphère interne. De nouveau, ceci induit le développement d'une couche limite d'Ekman le long de la sphère. Celle-ci devient singulière à l'approche de l'équateur et, comme dans la configuration de Couette sphérique, cela se traduit par un fort jet vertical en direction de l'équateur de la sphère interne à l'origine du maximum local de rotation différentielle observé dans le cas Boussinesq. Toutefois, comme illustré sur les figures 3.5a, 3.5b et 3.5c, nous constatons que la stratification en

densité tend à régulariser les discontinuités sur les différents champs $\partial(U_\phi/r)/\partial r$, U_s et U_z à l'équateur de la sphère interne. Ceci explique l'absence de jet et de maximum local dans les simulations anélastiques présentées en figure 3.3. En fin de compte, la loi d'échelle (3.41) devient entièrement indépendante de la latitude au fur et à mesure que l'amplitude de la stratification en densité augmente, comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.5d.

3.4.1.2 Régime d'Eddington-Sweet non-linéaire

Lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim 1$, c'est-à-dire lorsque $P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c \sim 1$, la loi d'échelle (3.41) n'est plus valide car les effets non-linéaires ne sont plus négligeables. Ils contribuent alors eux aussi à redistribuer le moment cinétique, réduisant ainsi le niveau de rotation différentielle maximum prédit par les lois d'échelle (3.41). Bien que nous n'ayons pu explorer complètement ce régime non-linéaire, les simulations étant numériquement très difficiles, nous avons tout de même été capables d'approcher des contrastes de rotation différentielle de l'ordre de l'unité en variant le nombre de Reynolds basé sur la contraction entre 1 et 10. Le résultat est montré en figure

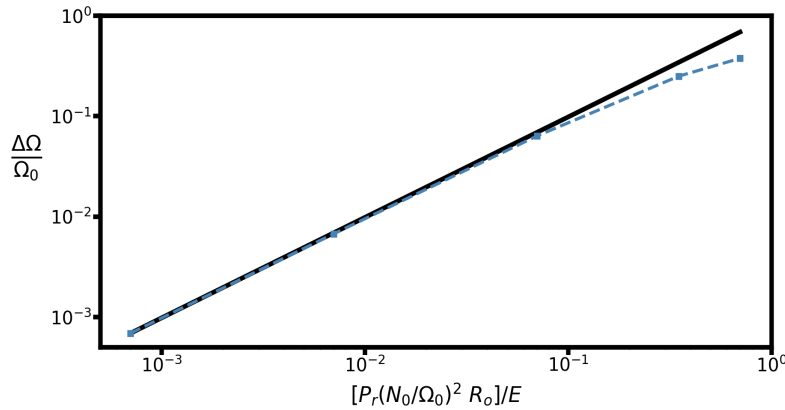


FIGURE 3.6 : Amplitude caractéristique de la rotation différentielle équatoriale, comme une fonction de $P_r (N_0/\Omega_0)^2 R_0/E$, dans l'approximation de Boussinesq. Dans chaque cas, le paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ et le nombre d'Ekman sont respectivement fixés à 10^{-1} et 10^{-6} alors que le nombre de Rossby basé sur la contraction varie entre 10^{-8} et 10^{-5} , permettant ainsi de varier Re_c de 10^{-2} à 10.

3.6 sur laquelle nous avons tracé dans le cas Boussinesq, le contraste maximum de rotation différentielle entre les sphères interne et externe, à l'équateur, comme une fonction de la loi d'échelle déterminée en (3.41). Nous observons très clairement que lorsque ce contraste approche l'unité, la courbe bleue obtenue pour $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-6}$ et R_0 variant entre 10^{-8} à 10^{-5} ou de façon équivalente pour Re_c variant entre 10^{-2} et 10, dévie progressivement d'une relation linéaire avec $P_r (N_0/\Omega_0)^2 R_0/E$. Alors la loi d'échelle (3.41) n'est plus capable de correctement prédire le contraste de rotation différentielle à l'état stationnaire. Nous pouvons néanmoins extrapoler nos résultats.

Pour connaître la rotation différentielle maximale que la contraction peut forcer, on considère le cas extrême où aucun processus de transport du moment cinétique n'est capable de contrebalancer la contraction. L'état stationnaire se traduit alors par l'équation d'équilibre suivante

$$\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^3} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \Omega_0 \left(1 + \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right) \right] = 0, \quad (3.45)$$

qui peut être résolue pour donner (voir annexe D.1) :

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{r_0^2}{r^2} - 1. \quad (3.46)$$

Il existe donc une valeur maximale du contraste de rotation différentielle qui dans notre configuration, avec $r_i = 0.3r_0$, vaut $\Delta\Omega_{\max}/\Omega_0 \approx 10.1$. Nous concluons donc que l'augmentation progressive du nombre de Reynolds basé sur la contraction va conduire à des déviations de plus en plus importantes du contraste de rotation différentielle obtenu, vis-à-vis de la loi d'échelle (3.41). Ce contraste devrait finalement tendre vers une valeur dont la borne supérieure est donnée par $\Delta\Omega_{\max}/\Omega_0$.

3.4.1.3 Un régime de forte stratification stable : le régime visqueux

Lorsque $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$, le seul processus viable de redistribution du moment cinétique est la viscosité. Afin d'analyser ce régime visqueux, nous avons varié le nombre d'Ekman entre 10^{-2} et 10^{-5} , le produit $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ entre 10^2 et 10^4 , le nombre de Reynolds basé sur la contraction entre 10^{-2} et 10 , et le contraste de densité entre les sphères interne et externe entre 1 à 60.2 .

Sur la figure 3.7 nous présentons les écoulements stationnaires et axisymétriques typiques de ce régime. Les coupes méridiennes de la rangée du haut correspondent à deux simulations effectuées sous l'approximation de Boussinesq et celles du bas, à deux runs réalisés sous l'approximation anélastique ($\rho_i/\rho_0 = 20.9$). Les deux premières colonnes illustrent une situation pour laquelle $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ ($E = 10^{-5}$ et $Re_c = 10^{-2}$), alors que dans les deux dernières, $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$ ($E = 10^{-4}$ et $Re_c = 10$). Dans chaque cas, nous observons un profil de rotation différentielle (première et troisième colonne) purement radial dont le gradient à travers la coquille sphérique est d'autant plus faible que la stratification en densité est importante. L'amplitude caractéristique de cette rotation différentielle est fortement dépendante du paramètre Re_c puisque multiplier ce dernier par un facteur 10^3 , a provoqué une augmentation du niveau de rotation différentielle d'un facteur similaire dans les cas Boussinesq et anélastique. Il y a aussi une influence importante de la stratification en densité puisque les niveaux de rotation différentielle obtenus pour un même jeu de paramètres sont grosso-modo divisés par un facteur deux lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$, voire quatre quand $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, entre les cas Boussinesq et anélastique.

La circulation méridienne totale (seconde et dernière colonne) est elle aussi très différente de celle rencontrée dans le régime d'Eddington-Sweet. Nous remarquons en effet, qu'elle se retrouve ici totalement dominée par la vitesse de contraction radiale $V_f(r)$. Ainsi, si nous retirions la contribution de cette dernière, nous observerions une circulation confinée dans des couches limites localisées le long des sphères interne et externe. Ceci est dû à l'effet inhibiteur de la stratification stable sur cette circulation. De nouveau, nous notons la forte influence de la stratification en densité sur la vitesse de contraction. Comme discuté en section 3.1, alors que celle-ci est maximale à la sphère interne lorsque la densité est homogène à travers la coquille sphérique, ce n'est plus le cas lorsqu'un contraste de densité suffisamment important est appliqué entre les sphères interne et externe.

Puisque les effets visqueux constituent le seul moyen capable de redistribuer le moment cinétique apporté par la contraction, l'état stationnaire est obtenu en équilibrant les termes représentant ces deux processus dans l'équation (3.21) :

$$\nu \left[D^2 \left(r \sin \theta \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + r \sin \theta \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right] = - \frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right). \quad (3.47)$$

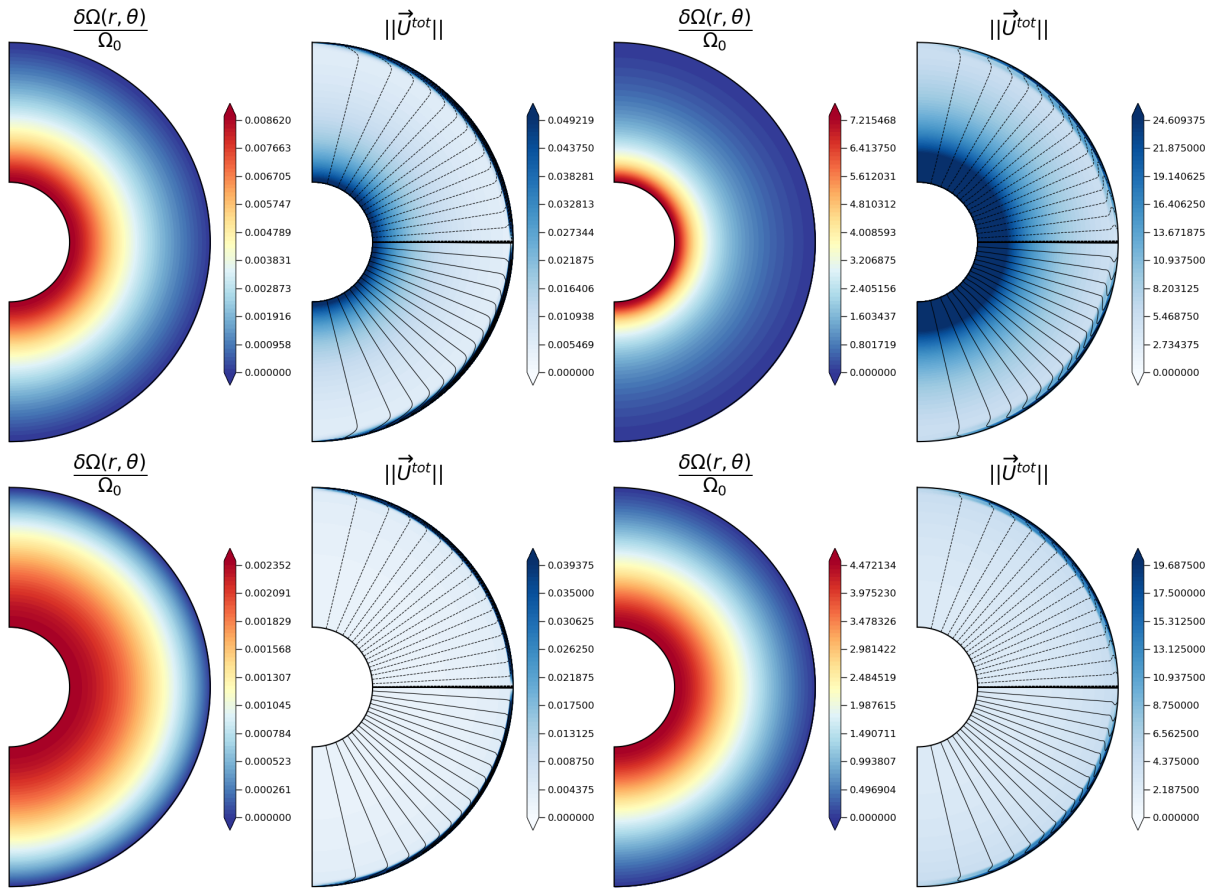


FIGURE 3.7 : Écoulements stationnaires et axisymétriques dans le régime visqueux lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ (deux premières colonnes) et lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$ (deux dernières colonnes). La rangée supérieure correspond à des simulations effectuées sous l'approximation de Bousinesq, avec $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^5$ et $Re_c = 10^{-2}$ pour les deux premières coupes, et $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^4$ et $Re_c = 10$ pour les deux dernières. La rangée inférieure correspond à des simulations anélastiques réalisées avec les mêmes paramètres mais pour un contraste de densité $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ à travers la coquille. Dans la première et la troisième colonne nous montrons la rotation différentielle. Dans la seconde et la dernière, c'est la norme du champ de vitesse méridien total $\vec{U}_p^{tot} = (U_r + V_f)\vec{e}_r + U_\theta\vec{e}_\theta$ que nous présentons, avec en noir les lignes de courant associées à la circulation méridienne totale. Les tirets illustrent alors une circulation dirigée vers le bas tandis que les traits pleins, représentent une circulation orientée vers le haut.

Cette équation peut être résolue en utilisant le fait que, d'après les simulations numériques, la rotation différentielle est à symétrie sphérique. Alors, bien que dans l'approximation anélastique, lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$, l'équation (3.47) nécessite d'être résolue numériquement, dans tous les autres cas de figure nous sommes capables d'obtenir une solution analytique (voir équations (D.43), (D.45) et (D.57) de l'annexe D.2.3). Lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, ces solutions prennent les formes simples suivantes

$$\begin{cases} \frac{\delta\Omega_v^L}{\Omega_0} = Re_c \int_1^{r/r_0} \left[\frac{(r_i/r_0)^2 - (r/r_0)^2}{(r/r_0)^4} \right] d\left(\frac{r}{r_0}\right) = Re_c \left[\frac{r_i^2}{3r_0^2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) + \left(\frac{r_0}{r} - 1\right) \right], \\ \frac{\delta\Omega_v^A}{\Omega_0} = Re_c \int_1^{r/r_0} \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\Omega_v^L}{\Omega_0} \right) d\left(\frac{r}{r_0}\right) = Re_c \int_1^{r/r_0} \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \left[\frac{(r_i/r_0)^2 - (r/r_0)^2}{(r/r_0)^4} \right] d\left(\frac{r}{r_0}\right), \end{cases} \quad (3.48)$$

et sont tracées sur la figure 3.8 en fonction du rayon où elles sont ensuite comparées aux résultats des simulations numériques pour une latitude donnée ($\theta = \pi/8$). Nous observons que l'accord entre les solutions analytiques et numériques est parfait. En particulier, nous retrouvons bien, tel que montré par les solutions (3.48), que tant que $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle suit une relation linéaire avec le nombre de Reynolds basé sur la contraction, ce qui est confirmé par le rescaling des différentes courbes avec Re_c . Il est également intéressant de constater que la solution analytique du cas anélastique correspond à la dérivée radiale de la rotation différentielle dans le cas Boussinesq, pondérée par l'inverse du profil de densité de base. Ainsi, comme observé sur la figure 3.8, plus le contraste de densité entre les sphères interne et externe augmente, plus le niveau de rotation différentielle diminue, ce qui s'explique par l'influence importante de la stratification en densité sur la vitesse de contraction. Finalement, dans le cas où $Re_c \gg 1$, la solution analytique (D.45) déterminée dans le cas Boussinesq, mais aussi celle évaluée numériquement à partir de l'équation (3.47) dans l'approximation anélastique sous l'hypothèse d'une rotation différentielle à symétrie sphérique, montrent un très bon accord avec les résultats numériques. C'est là une différence importante avec le régime d'Eddington-Sweet : dans le régime visqueux, quelque soit la valeur de Re_c , et donc l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle, nous sommes capables de caractériser l'écoulement stationnaire et axisymétrique, forcé par la contraction.

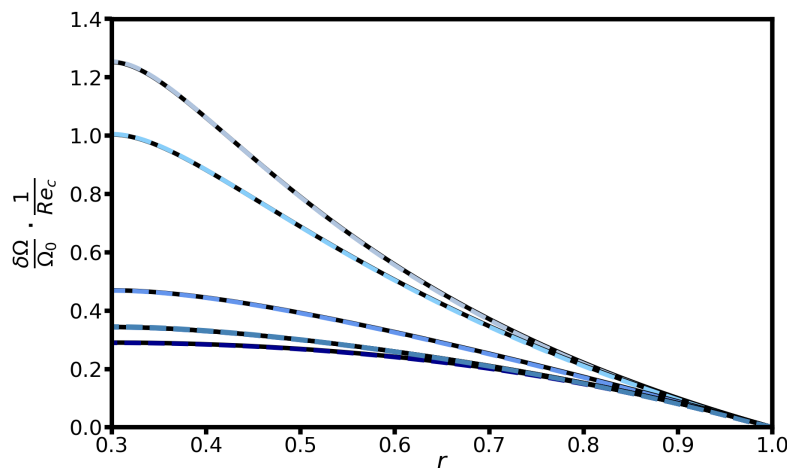


FIGURE 3.8 : Rotation différentielle rescalée par Re_c , en fonction du rayon, à la latitude $\theta = \pi/8$. Du plus clair au plus foncé, nous avons $\rho_i/\rho_0 = 1$ (Boussinesq), 1.75, 10.8, 20.9 et 60.2. Les solutions analytiques correspondantes (3.48) sont tracées en noir et montrent un accord parfait avec les solutions numériques. Les autres paramètres sont $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10^{-1}$ et 10^{-2} .

3.4.2 Le cas magnétohydrodynamique

La distinction des régimes d'Eddington-Sweet et visqueux identifiés lors de l'étude hydrodynamique, nous a été utile pour mener à bien l'étude magnétohydrodynamique. En effet, au cours de celle-ci, nous avons fixé les paramètres E et $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ afin de clairement être dans l'un de ces deux régimes. Cela nous a permis de réduire l'espace des paramètres, et donc de faciliter notre analyse en ne variant que le nombre de Lundquist entre $5 \cdot 10^3$ et 10^5 , et le nombre de Reynolds basé sur la contraction entre 10^{-1} et 5. Le nombre de Prandtl magnétique, lui, était fixé à 10^2 . Cette valeur élevée du P_m permet d'éviter une diffusion trop rapide du champ magnétique. Nous aurions pu maintenir artificiellement le champ magnétique constant afin d'éviter un

tel problème mais dans ce cas, il aurait été impossible de prendre en compte sa modification par la contraction, la circulation méridienne ou d'éventuelles instabilités. Toutefois, dans le but de mieux cerner les effets de l'advection du champ magnétique par la contraction, nous avons réalisé des simulations dans lesquelles le terme de contraction était supprimé de l'équation d'induction.

Nous avons étudié deux topologies magnétiques différentes, un dipôle puis un quadrupôle centrés sur l'axe de rotation. Lorsqu'un tel champ est introduit, un nouveau type de transport du moment cinétique est possible. Ce dernier, pris en charge par les ondes d'Alfvén, s'effectue sur un temps caractéristique bien plus court que les temps des autres processus dont nous avons discuté jusqu'ici. Par conséquent, les écoulements résultants sont fondamentalement différents de ceux décrits jusqu'à présent. Nous commençons cette sous-section avec le cas du dipôle axial tel que représenté à gauche de la figure 3.1. Nous verrons plus loin que la complexité de la topologie magnétique introduite par le quadrupôle (à droite sur la figure 3.1), rend la situation instable.

3.4.2.1 Effet typique d'un champ magnétique de grande échelle

Lorsque la contraction force une rotation différentielle aussi faible soit-elle, celle-ci interagit avec le champ magnétique en étirant et en enroulant les lignes de champ poloidal. Ce processus que l'on nomme l'effet Ω (cf. partie 2.1.2.2), permet la production d'une composante toroïdale dont l'amplitude croît linéairement au cours du temps. Après approximativement un temps d'Alfvén, la force de Lorentz est suffisamment importante pour rétroagir sur l'écoulement en s'opposant à tout effet Ω supplémentaire : l'énergie magnétique toroïdale sature. Cette rétroaction magnétique a alors pour effet d'exciter des ondes d'Alfvén (cf. partie 2.1.2.1) qui se propagent le long des lignes de champ. Parce que la vitesse de phase de ces ondes est différente selon ces lignes, elles se déphasent au fur et à mesure qu'elles se propagent et se réfléchissent aux frontières. Ce déphasage, croissant au fil du temps, finit par produire des gradients de champ toroïdal et de rotation différentielle sur des échelles si petites que la diffusion ohmique peut agir localement, beaucoup plus vite qu'un temps de diffusion magnétique à l'échelle du rayon de l'étoile, afin de dissiper efficacement ces gradients. Ce processus que l'on nomme le mélange de phase (cf. partie 2.1.2.3), supprime ainsi toute rotation différentielle pouvant exister entre les lignes de champ. Le seul écoulement stationnaire possible est par conséquent celui d'un état de quasi-isorotation le long des lignes tel que décrit dans la partie 2.1.2.2 du chapitre 2. Toutefois, le transport du moment cinétique par ondes d'Alfvén n'est pas un processus viable dans toutes les régions de l'étoile. Ainsi, dans les zones mortes que nous avons décrites en partie 2.1.2.4, la force de Lorentz n'est plus capable d'imposer sa propre dynamique. Ici, le transport du moment cinétique par ondes d'Alfvén devient en effet plus lent qu'un processus de transport hydrodynamique et la dynamique de l'écoulement s'en trouve modifiée.

Les écoulements quasi-stationnaires¹ et axisymétriques typiques qui découlent du transport conjoint de moment cinétique par ondes d'Alfvén et des effets visqueux ou d'une circulation méridienne d'Eddington-Sweet, sont présentés en figure 3.9. Sur cette dernière, nous représentons les solutions quasi-stationnaires du taux de rotation et du champ toroïdal dans les régimes visqueux (rangée supérieure) et d'Eddington-Sweet (rangée inférieure), avec ou sans contraction agissant sur le champ magnétique, dans les approximations de Boussinesq et anélastique. Dans chaque configuration, l'écoulement quasi-stationnaire se traduit par la présence de deux régions magnétiquement découplées : une région de rotation quasi-solide et une zone morte

1. Dans ce qui suit nous préférons parler d'état "quasi-stationnaire" plutôt que d'état "stationnaire" parce que la diffusion magnétique produit un réajustement continu de l'écoulement.

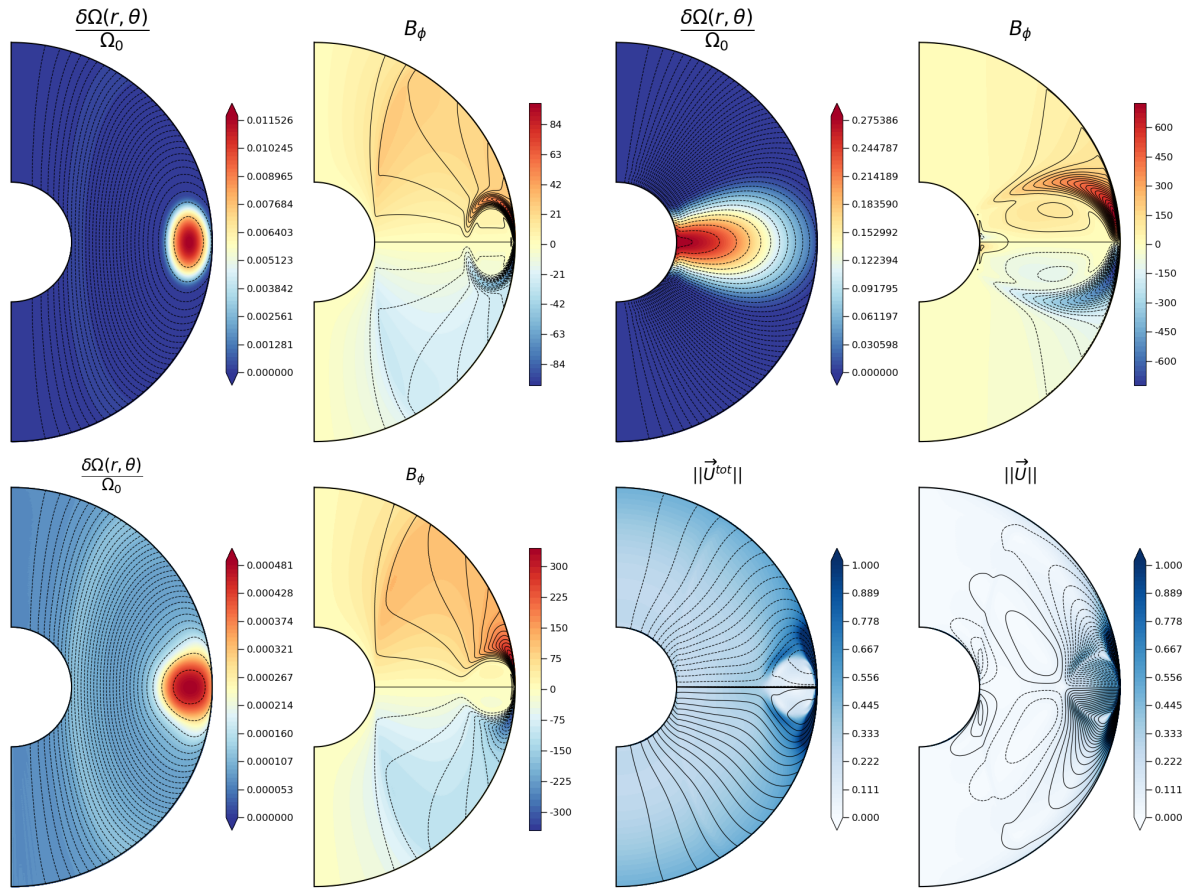


FIGURE 3.9 : Écoulements quasi-stationnaires et axisymétriques obtenus dans les régimes visqueux (rangée supérieure) et d'Eddington-Sweet (rangée inférieure) en présence d'un dipôle axial tel que défini par l'équation (3.3) et illustré sur la figure 3.1. Rangée supérieure : coupes méridiennes de la rotation différentielle (première et troisième coupe) et du champ toroïdal (seconde et dernière coupe) lorsque l'on interdit (deux premières coupes) ou autorise (deux dernières coupes) l'advection des lignes de champ par la contraction. Rangée inférieure : coupes méridiennes de la rotation différentielle (première coupe), du champ toroïdal (seconde coupe), de la norme du champ de vitesse méridien total \vec{U}_p^{tot} (troisième coupe) et de la norme du champ de vitesse méridien $\vec{U}_p = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ (quatrième coupe), lorsque l'advection du champ magnétique par la contraction est permise. Sur les coupes de rotation différentielle, les contours noirs illustrent les lignes de champ poloïdal. Sur les coupes de champ toroïdal et de la norme du champ de vitesse méridien, ils représentent les lignes de courant associées à la fonction de courant-électrique (dans le premier cas) ou à la circulation méridienne (dans le second cas). Les traits pleins (tirets) illustrent une circulation électrique (premier cas) ou fluide (second cas) horaire (anti-horaire). Sur la coupe de la norme du champ de vitesse méridien total, les lignes de courant en trait plein (en tirets) noir(s) décrivent une circulation ascendante (descendante). Dans le cas visqueux, les paramètres sont $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$ et $L_u = 5 \cdot 10^4$ (deux premières coupes) ou 10^4 (deux dernières coupes). Dans le régime d'Eddington-Sweet, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-5}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$, $L_u = 10^5$ et $\rho_i/\rho_0 = 20.9$.

dans laquelle un niveau significatif de rotation différentielle subsiste. En comparant la première coupe avec la troisième dans la rangée supérieure de la figure 3.9, il apparaît clairement que la taille et la localisation de la zone morte impactent fortement le niveau de rotation différentielle

puisque dans un cas, l'amplitude maximale de cette dernière atteint $\sim 30\%$ du taux de rotation de la sphère externe (troisième coupe) alors que dans l'autre, elle ne représente que $\sim 1\%$ de ce taux (première coupe). En observant les coupes de champ toroïdal, nous constatons également que dans les deux régimes, la zone morte est entourée d'une région de forte amplitude de champ toroïdal. Il s'agit de la couche de Shercliff que nous avons décrite en sous-section 2.3.4 et qui permet d'accommoder un saut sur le taux de rotation entre la région de rotation quasi-solide, et celle en rotation différentielle. Dans le cas où la zone morte ne se connecte pas à la sphère interne et reste localisée proche de la sphère externe, nous notons la présence d'une seconde couche de Shercliff, à peine visible, entre la sphère interne et la sphère externe. Cette seconde couche existe parce que, comme nous le verrons, la région de rotation quasi-solide est en rotation différentielle avec la sphère externe et par conséquent, les lignes de champ qui se connectent à la fois aux sphères externe et interne ne tournent pas à la même vitesse que celles qui sont uniquement connectées à la sphère externe. Elle est à peine visible, parce que l'amplitude de la rotation différentielle entre la sphère externe et la région de rotation quasi-solide est très faible et par conséquent, la discontinuité à lisser aussi. Dans le régime d'Eddington-Sweet, où l'advection du champ magnétique par la contraction est autorisée, la dernière coupe de la rangée inférieure sur la figure 3.9 montre la présence d'une circulation méridienne à l'intérieur de la zone morte qui tend à disparaître loin de celle-ci. Comme le montre l'avant-dernière coupe de cette même rangée, cette circulation s'oppose à l'advection des lignes de champ par la contraction, empêchant ainsi le déplacement de la zone morte en direction de la sphère interne par contraste avec le cas visqueux. Caractérisons maintenant la dynamique des écoulements dans les deux régions magnétiquement découplées.

➤ Région de rotation quasi-solide :

En dehors de la zone morte, les termes de contraintes de Maxwell et de contraction sont dominants dans l'équation de conservation du moment cinétique (3.21). Par ailleurs, puisque dans cette région la rotation différentielle est très faible, le terme de contraction peut être simplifié, tout comme nous l'avons fait en section 3.3 afin de définir les temps de contraction τ_c^L et τ_c^L . Alors, la configuration quasi-stationnaire est simplement caractérisée par l'équilibre suivant entre la force de Lorentz et le terme de contraction réduit :

$$\left(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}\right) B_\phi = -2\mu_0\rho_0 \sin\theta\Omega_0 \frac{V_0 r_0^2}{r^2}. \quad (3.49)$$

On en déduit que pour maintenir cet équilibre, la lente diffusion magnétique du champ poloïdal au cours du temps doit être compensée par une augmentation lente et continue de l'amplitude du champ toroïdal. En supposant que la diffusion magnétique a peu agi sur la composante poloïdale du champ, nous avons $B_r \sim B_\theta \sim B_0$ et, indépendamment de la présence d'une stratification en densité dans le domaine, en choisissant une échelle de longueur caractéristique représentative de cette région, disons $r \sim r_0$, il vient :

$$\frac{B_\phi}{B_0} \approx \left(\frac{P_m}{L_u}\right)^2 \frac{Re_c}{E}. \quad (3.50)$$

Il s'agit de l'amplitude caractéristique de la composante toroïdale du champ magnétique nécessaire à un équilibre entre le transport du moment cinétique par la contraction et par les contraintes de Maxwell. Comme ce champ n'est pas capable de satisfaire de façon naturelle la condition de vide que l'on impose à la sphère externe ($B_\phi(r_0, \theta) = 0$), une couche de Hartmann, de la même nature que celle décrite en sous-section 2.3.3, se développe pour permettre un tel raccord. Ceci induit un saut sur le taux de rotation qui, d'après l'équation (2.59) reliant les

composantes azimuthales du champ de vitesse intérieur et du champ magnétique intérieur entre elles, doit être de l'ordre de $\Delta\Omega/\Omega_0 \approx \sqrt{P_m} Re_c/L_u$. De ce fait, la région de rotation quasi-solide est en rotation différentielle avec la sphère externe. Finalement, en dehors de la zone morte, la présence d'une vitesse de contraction invalide la loi d'isrotation de Ferraro le long des lignes de champ. Dans notre problème, la circulation méridienne est négligeable dans cette partie de l'écoulement, soit parce qu'elle est inhibée par la stratification stable (régime visqueux) soit parce que même si la diffusion thermique permet son existence, c'est le champ magnétique qui l'inhibe (régime d'Eddington-Sweet). Dans tous les cas, nous avons donc

$$(\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \delta\Omega = V_f(r) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\phi}{s} \right) - \frac{B_\phi}{s} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right]. \quad (3.51)$$

En utilisant de nouveau $B_r \sim B_\theta \sim B_0$ et $r \sim r_0$, ainsi que l'estimation (3.50), on en déduit l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle le long d'une ligne de champ dans les approximations anélastique et Boussinesq :

$$\underbrace{\frac{\Delta\Omega_{\text{pol}}^A}{\Omega_0} \approx \left[\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]^{-1} \left(\frac{Re_c P_m}{L_u} \right)^2}_{\text{Anélastique}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{\Delta\Omega_{\text{pol}}}{\Omega_0} \approx \left(\frac{Re_c P_m}{L_u} \right)^2}_{\text{Boussinesq}}. \quad (3.52)$$

Il existe donc une très faible rotation différentielle le long des lignes de champ qui est de l'ordre de 10^{-4} voire $4 \cdot 10^{-6}$ pour les simulations visqueuses présentées en figure 3.9, et dont l'amplitude est affectée par la présence d'un contraste en densité entre les sphères interne et externe ($\Delta\Omega_{\text{pol}}^A/\Omega_0 \sim 1.8 \cdot 10^{-7}$ pour la simulation effectuée dans le régime d'Eddington-Sweet avec $\rho_i/\rho_0 = 20.9$, et présentée sur la même figure). Toutes ces estimations que nous venons de faire à propos des amplitudes caractéristiques du champ toroïdal et de la rotation différentielle en dehors de la zone morte, sont en bon accord avec les résultats de nos simulations.

➤ Zone morte :

Dans la zone morte, la force de Lorentz n'est plus capable de s'opposer efficacement au transport du moment cinétique par la contraction. Alors, un autre processus de transport prend le relais, soit les effets visqueux, soit une circulation méridienne d'Eddington-Sweet. Physiquement, ceci s'explique par le fait qu'à proximité du point neutre (i.e. la localisation dans la zone morte où la force de Lorentz est nulle), l'amplitude du champ poloïdal devient de plus en plus faible et localement, le temps d'Alfvén augmente jusqu'à devenir comparable aux autres temps caractéristiques des processus de redistribution du moment cinétique. Dès lors, contrairement à la région de rotation quasi-solide, une rotation différentielle peut exister dans ces zones particulières. Cette rotation différentielle est produite de la même façon que décrite en sous-section 3.4.1. Ainsi, si l'amplitude de la stratification stable est faible, la diffusion thermique permet l'existence d'une circulation méridienne d'Eddington-Sweet dans la zone morte sinon, cette dernière est inhibée et laisse place aux effets visqueux. Cependant, comme nous l'avons mentionné plus tôt, la taille et la localisation de la zone morte influent fortement sur l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle de sorte que les lois d'échelle que nous avons déterminées en sous-section 3.4.1 ne fournissent plus nécessairement une bonne estimation de l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle dans la zone morte.

Dans le régime visqueux, la contraction tend à advecter le champ magnétique poloïdal et donc à déplacer la zone morte. Cette dernière se connecte ainsi à la sphère interne, comme illustré sur la troisième coupe (rangée supérieure) de la figure 3.9. Dans l'approximation de

Boussinesq, l'équilibre entre les termes de contraction et visqueux s'écrit alors

$$\nu \left[r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{3 \cot \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right] = - \frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \left(1 + \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right), \quad (3.53)$$

duquel nous pourrions déduire, comme en 3.4.1.3, que l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle dans la zone morte est de l'ordre de Re_c . Toutefois, ce raisonnement n'est pas complet car l'équilibre (3.53) est désormais satisfait dans une plus petite portion de la coquille sphérique. Nous observons en effet que si l'advection du champ magnétique n'est pas permise (première coupe de la rangée supérieure sur la figure 3.9), la zone morte est plus petite, localisée proche de la sphère externe, et le niveau de rotation différentielle y est environ cent fois plus faible que prédit par la loi d'échelle hydrodynamique ($\sim 0.01 Re_c$). Aussi, afin de tenir compte de la taille de cette zone, nous introduisons l'échelle de longueur caractéristique L_{DZ} qui, dans le cas où le champ poloidal n'est pas advecté par la contraction, est approximativement de l'ordre de $\sim 0.1 r_0$. De même, pour tenir compte de sa localisation, nous définissons une amplitude caractéristique de contraction $V_{f_{DZ}}$ qui, en l'absence d'advection du champ magnétique, est de l'ordre de $\sim 0.1 V_0$. En utilisant ces échelles caractéristiques, nous retrouvons alors, à partir de l'équilibre (3.53), que $\Delta\Omega_{v_{DZ}}/\Omega_0 \approx Re_c (L_{DZ}/r_0) (V_{f_{DZ}}/V_0) = 0.01 Re_c$. Dans le but de vérifier la validité de ce raisonnement, nous avons résolu l'équation (3.53) dans un domaine conique représentatif de la zone morte, sous l'approximation de Boussinesq, en supposant à la fois que l'écoulement à l'extérieur de ce domaine est en rotation solide, et que $\Delta\Omega_{v_{DZ}}/\Omega_0 \ll 1$, c'est-à-dire que le terme de contraction peut être simplifié. Tous les détails des calculs sont donnés dans l'annexe D.3 et conduisent aux solutions approximatives suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta\Omega_v^{\text{NAdv}}(r, \theta)}{\Omega_0} = Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \sin \left(\left(\frac{n\pi}{\ln \left(\frac{r_{iDZ}}{r_0} \right)} \right) \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \cos \left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0} \right) \theta \right), \\ \frac{\delta\Omega_v^{\text{Adv}}(r, \theta)}{\Omega_0} = Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\mu_n} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \cos \left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0} \right) \theta \right). \end{array} \right. \quad (3.54)$$

où les indices NAdv et Adv signifient respectivement que la zone morte n'a pas/a été advectée par la vitesse de contraction. Ces solutions sont tracées sur la figure 3.10 où elles sont comparées aux résultats des simulations numériques obtenus pour des Reynolds de contraction allant de 10^{-1} à 5 et différents nombres de Lundquist variant entre $5 \cdot 10^3$ et $5 \cdot 10^4$. Les figures 3.10a et 3.10b correspondent respectivement aux cas où la zone morte n'a pas/a été advectée par la vitesse de contraction. Bien qu'elles soient approximatives, ces solutions montrent un accord plutôt bon avec les simulations numériques. Par ailleurs, nous retrouvons le fait que les solutions numériques sont indépendantes de l'amplitude initiale du champ magnétique (les courbes tracées pour deux nombres de Lundquist différents se superposent), ce qui indique bien que dans la zone morte, la force de Lorentz n'entre plus en considération dans la détermination du niveau de rotation différentielle. De même, on observe clairement que ce niveau est fortement dépendant de la taille et de la localisation de la zone morte, ce qui signifie que l'effet du champ magnétique se fait ressentir uniquement à travers sa topologie. Finalement, on retrouve également que lorsque l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle est faible, typiquement lorsque la zone morte n'est pas advectée (figure 3.10a), celle-ci suit une relation linéaire avec le nombre de Reynolds basé sur la contraction (les courbes tracées pour divers Re_c se superposent), ce qui n'est plus vrai dès lors que $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim 1$ (voir figure 3.10b). Dans l'approximation

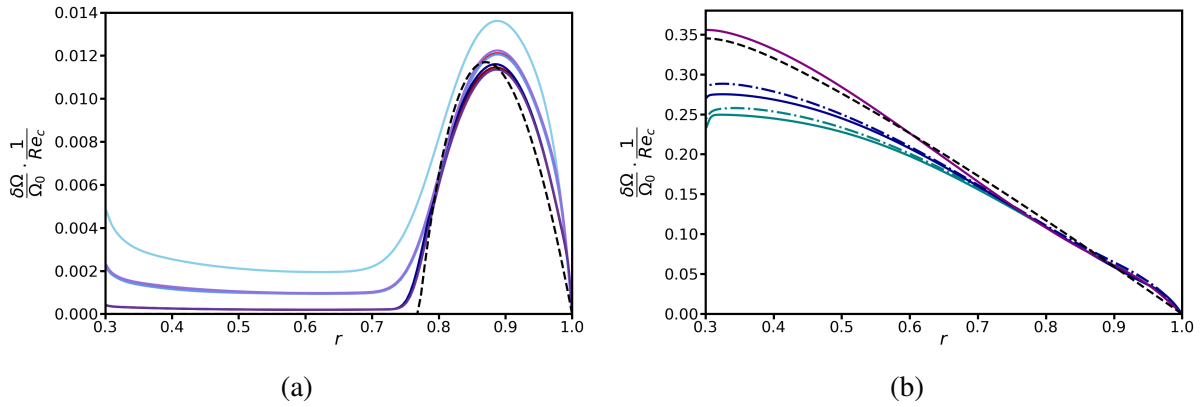


FIGURE 3.10 : Rotation différentielle équatoriale dans l’approximation de Boussinesq, rescalée par Re_c puis tracée en fonction du rayon r , lorsque la zone morte n’est pas advectée par la contraction (figure 3.10a) et lorsqu’elle l’est (figure 3.10b). Les solutions analytiques (3.54) sont tracées en tirets noirs puis comparées aux résultats des simulations numériques en couleur. Sur la figure 3.10a, les courbes rouges, bleues et violettes correspondent respectivement à des cas où $Re_c = 10^{-1}$, 1 et 5. Pour chacune de ces couleurs nous avons, du plus clair au plus foncé, $L_u = 5 \cdot 10^3$, 10^4 et $5 \cdot 10^4$. Sur la figure 3.10b, les courbes vertes, bleues et violettes sont associées à des simulations pour lesquelles $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$, 1 et 2. Les courbes en trait plein sont alors obtenues pour $L_u = 10^4$, et celles tracées en alternance de tirets et pointillés, pour $L_u = 5 \cdot 10^3$. Pour chacune de ces deux figures, les paramètres restants sont fixés comme suit : $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$ et $P_m = 10^2$.

anélastique, nous montrons également que les niveaux de rotation différentielle peuvent être retrouvés avec un très bon accord en multipliant simplement l’amplitude obtenue pour le même jeu de paramètres dans l’approximation de Boussinesq, par l’inverse du profil de densité de base

$$\int_1^{r_i/r_0} (\rho_0/\bar{\rho}) d(r/r_0).$$

Dans le régime d’Eddington-Sweet, où nous n’avons effectué que des simulations anélastiques, la circulation forcée par la contraction s’oppose à l’advection de la zone morte. Par conséquent, cette dernière se retrouve confinée proche de la sphère externe et la présence d’une stratification en densité à travers la coquille n’entre plus en considération dans la détermination d’une loi d’échelle. On montre alors que l’amplitude caractéristique de la rotation différentielle dans la zone morte peut grossièrement être estimée par

$$\frac{\Delta\Omega_{EDZ}}{\Omega_0} \approx P_r \left(\frac{\Omega_0}{N_0} \right)^2 Re_c \left(\frac{L_{DZ}}{r_0} \right)^2, \quad (3.55)$$

avec $L_{DZ} = 0.1 r_0$.

3.4.2.2 Instabilité magnétorotationnelle : vers un scénario expliquant la rotation des sous-géantes.

Que se passe-t-il lorsque la topologie du champ magnétique devient plus complexe ? C’est la question à laquelle nous avons souhaité répondre en introduisant le champ quadrupolaire présenté plus tôt en section 3.1. On s’attend en effet à ce que dans les zones radiatives, les modes dipolaires ne soient pas les seuls capables de survivre sur des échelles de temps séculaires et donc, que les modes quadrupolaires ou encore octupolaires puissent eux aussi subsister.

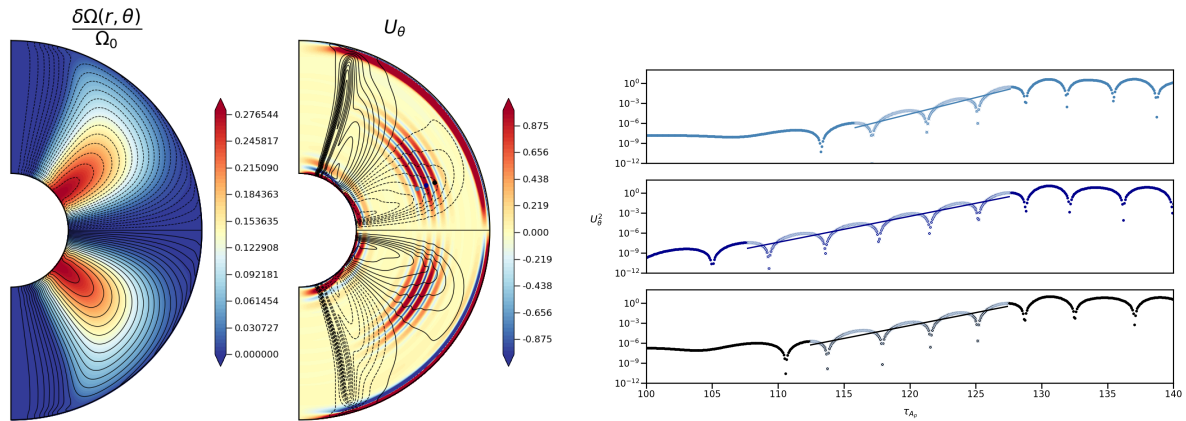


FIGURE 3.11 : Coupes méridiennes de la rotation différentielle (première coupe) et de la composante latitudinale du champ de vitesse (seconde coupe). Sur ces coupes sont tracées, en noir, les lignes de champ poloïdal (première coupe) et les contours du cisaillement latitudinal $\partial \ln \Omega / \partial \theta$ (seconde coupe). Les tirets (respectivement les traits pleins) représentent un cisaillement négatif (respectivement positif). La dernière figure montre l'évolution temporelle (en fonction du temps d'Alfvén) du carré de la composante latitudinale du champ de vitesse, aux localisations mises en évidence sur la seconde coupe par des points noir, bleu clair et bleu. Les paramètres de la simulation sont $P_r (N_0 / \Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$ et $L_u = 10^4$.

Comme pour le dipôle, après une phase instationnaire impliquant la propagation d'ondes d'Alfvén et le mélange de phase, l'écoulement évolue, après un temps de contraction, vers une configuration quasi-stationnaire caractérisée par la présence de deux régions magnétiquement découplées. Toutefois, la rotation différentielle accumulée dans les zones mortes au cours de cette période, produit désormais un cisaillement négatif, i.e. $\partial \ln \Omega / \partial \theta < 0$ (respectivement positif, i.e. $\partial \ln \Omega / \partial \theta > 0$), dans l'hémisphère Nord (Sud) capable de déclencher une puissante instabilité axisymétrique. Cette dernière est illustrée sur la figure 3.11 où nous montrons sur la coupe de gauche, la configuration quasi-stationnaire obtenue après un temps de contraction et sur la coupe du milieu, le développement, très peu de temps après, de perturbations axisymétriques au niveau des zones mortes. Comme le montrent les contours noirs du cisaillement latitudinal $\partial \ln \Omega / \partial \theta$ tracés sur cette même coupe, ces perturbations axisymétriques croissent là où le cisaillement en latitude est négatif (pointillés) dans l'hémisphère Nord et positif (trait plein) dans l'hémisphère Sud. En raison de l'amplitude élevée de la stratification stable, elles sont radialement confinées et se développent préférentiellement sous forme de cellules aplaties dans la direction latitudinale. Sur la dernière figure, nous avons tracé l'évolution temporelle du carré de la composante latitudinale du champ de vitesse, aux localisations sélectionnées sur la coupe du milieu (points noirs, bleu clair et bleu foncé), en fonction du temps d'Alfvén. Nous pouvons observer que l'énergie cinétique des perturbations s'amplifie exponentiellement au cours du temps pour saturer après une vingtaine de temps d'Alfvén. L'instabilité possède donc un temps de croissance rapide au cours duquel l'énergie cinétique (adimensionnée) des perturbations passe de 10^{-9} à 1. Par ailleurs, le taux de croissance de cette instabilité s'avère proportionnel à $|\partial \ln \Omega / \partial \theta|$ tandis qu'un champ poloïdal d'intensité trop élevée stabilise l'écoulement. Puisque nous constatons que l'instabilité a bien lieu dans les régions où la rotation décroît en s'éloignant de l'axe, le long d'une isentrope, l'ensemble des propriétés que nous venons de citer nous permettent d'affirmer que l'instabilité présentée ici est une instabilité de type magnétorotationnel telle que décrite en sous-section 2.2.2.

Au cours de notre étude, nous avons également mis en exergue d'autres caractéristiques

plus subtiles de l'instabilité. Tout d'abord, et comme nous en avons discuté en 2.2.2.1, la stratification stable affecte le taux de croissance de sorte que celui-ci est bien plus faible que celui prédit originellement par Balbus & Hawley (1991), d'un facteur de l'ordre de 10^2 dans nos simulations. En effet, l'analyse locale réalisée par Balbus & Hawley (1994) se place dans une configuration idéalisée dans laquelle, asymptotiquement, le nombre d'onde dans la direction latitudinale est pris comme étant égal à zéro. Cette situation extrême, permet de négliger entièrement l'effet de la force de flottabilité sur les perturbations car la force d'Archimède n'a pas d'effet sur les mouvements purement horizontaux. Ceci conduit à la détermination d'un taux de croissance maximum qui, inévitablement, surestime la réalité. En effet, dans un cas réel, l'échelle caractéristique du gradient de rotation a une valeur finie dans la direction latitudinale et par conséquent, la longueur d'onde de la perturbation associée au taux de croissance maximum ne peut pas excéder cette valeur. Ceci apparaît de façon très claire lorsque l'on observe la coupe méridienne de la composante latitudinale du champ de vitesse en figure 3.11, sur laquelle nous voyons le développement des perturbations. Nous pouvons observer que ces dernières possèdent une longueur d'onde finie dans la direction latitudinale de l'ordre de $\pi/2$, de sorte que le nombre d'onde possédera lui aussi une valeur finie ($k_\theta = 2\pi/\lambda_\theta$) dans cette direction. Il s'ensuit que l'effet de la stratification stable sur les perturbations ne peut pas être ignoré.

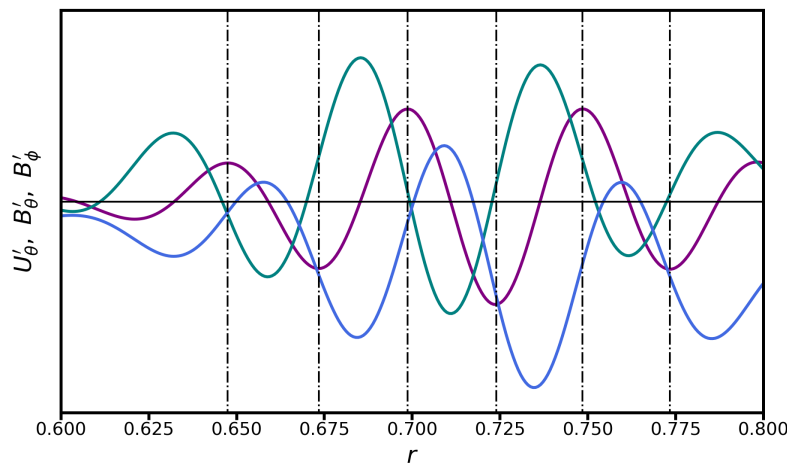


FIGURE 3.12 : Illustration de l'altération de la dépendance de phase entre les quantités perturbées, en raison de la présence d'un champ toroïdal d'amplitude non-négligeable. La composante latitudinale du champ de vitesse perturbé est représentée en violet et celle du champ magnétique poloïdal perturbé, en vert turquoise. Le champ toroïdal perturbé est quant à lui tracé en bleu.

Un autre effet subtil provient de la configuration mixte de notre champ magnétique de grande échelle. La présence d'une composante toroïdale, d'amplitude non-négligeable par rapport à sa contrepartie poloïdale, modifie le comportement de l'instabilité. Nous ne sommes plus face à une instabilité magnétorotationnelle standard mais face à une instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale telle que décrite en 2.2.2.2. Le principal effet associé à la présence de ce champ toroïdal dans nos simulations est de stabiliser l'écoulement. Nous observons en effet que le taux de croissance est non seulement proportionnel à $|\partial \ln \Omega / \partial \theta|$, mais également inversement proportionnel à l'amplitude du champ toroïdal, diminuant ainsi lorsque celle-ci augmente. Nous retrouvons également d'autres caractéristiques propres à l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale. Ainsi, comme illustré sur la figure 3.11 de droite, nous pouvons remarquer un comportement oscillant très clair de l'énergie cinétique des perturbations qui montre que ces dernières se propagent au sein de l'écoulement. En particulier, leur vitesse de phase, bien qu'affectée par

la vitesse de contraction², augmente avec l'amplitude du champ toroïdal. Finalement, la présence d'une composante azimuthale de champ magnétique affecte également la dépendance de phase entre les différents champs perturbés. Comme illustré sur la figure 3.12, la composante latitudinale du champ de vitesse perturbé (violet) n'est jamais en exacte quadrature de phase avec le champ toroïdal perturbé (bleu) et la composante latitudinale du champ poloïdal perturbé (vert turquoise), tandis que ces deux derniers ne sont jamais en exacte opposition de phase, alors que c'est le cas pour l'instabilité magnétorotationnelle standard (Petitdemange et al., 2008).

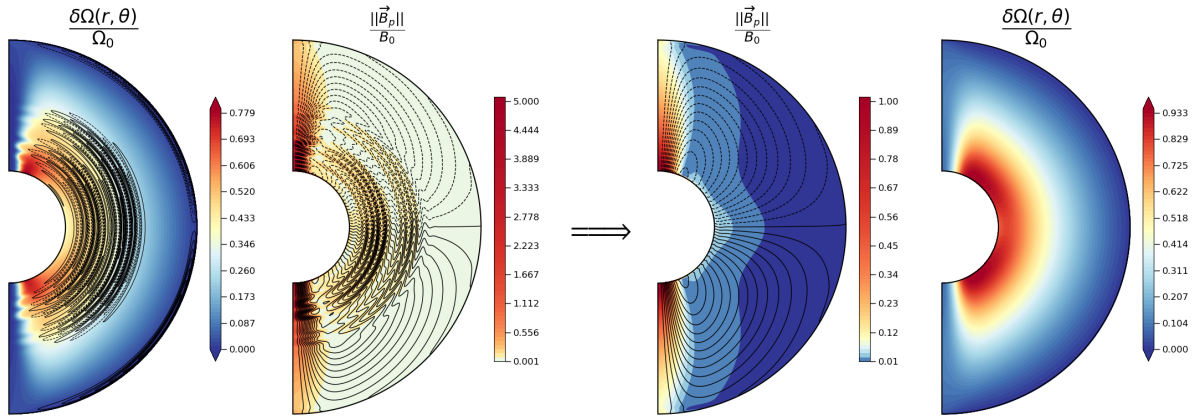


FIGURE 3.13 : Évolution non-linéaire de l'instabilité (deux premières coupes) et reconfiguration de l'écoulement (deux dernières coupes). La première et la dernière coupe illustrent la rotation différentielle. Sur la première sont en plus représentées les lignes de courant associées à la circulation méridienne, avec des tirets pour une circulation anti-horaire et des traits pleins pour une circulation horaire. La seconde et la troisième coupe montrent la norme (couleur) et les lignes (noir) du/de champ poloïdal. Les deux premières coupes sont prises à $t \sim 3\tau_c$ et les deux dernières, à $t \sim 3.5\tau_c$. Les paramètres sont les mêmes que sur la figure 3.11.

La nature de l'instabilité étant dévoilée, nous pouvons maintenant étudier ses conséquences à long terme sur l'écoulement. Comme illustré sur la figure 3.11, après la phase de croissance exponentielle, l'instabilité sature et laisse place à une évolution désormais non-linéaire. Sur la figure 3.13, nous montrons deux étapes caractéristiques de cette évolution. Les deux premières coupes, obtenues à $t \sim 3\tau_c$, présentent en couleur, la rotation différentielle et la norme du champ poloïdal (première et seconde coupe), ainsi que les lignes de courant de la circulation méridienne (première coupe) et les lignes de champ (second coupe) en noir. Les deux dernières coupes montrent quant à elles, la norme du champ poloïdal et ses lignes de courant (respectivement en couleur et en noir ; première des deux coupes), ainsi que la rotation différentielle (seconde des deux coupes), à un temps ultérieur $t \sim 3.5\tau_c$. Une caractéristique frappante de cette évolution non-linéaire est qu'elle agit de façon globale sur l'écoulement, alors que les régions où l'instabilité s'est déclenchée étaient bien plus localisées (voir figure 3.11). On observe ainsi que le champ poloïdal est advecté et mélangé tel un scalaire passif par une circulation méridienne multi-cellulaire confinée dans la direction radiale. Comme le montre la seconde coupe de la figure 3.13, ce processus crée rapidement de petites échelles sur lesquelles la diffusion magnétique peut agir de façon très efficace afin de dissiper le champ poloïdal. Nous voyons en effet que partout où l'instabilité procède à travers la circulation multi-cellulaire, l'amplitude du champ poloïdal devient rapidement très faible. Il y a deux conséquences à cela. Premièrement, puisque le champ poloïdal est dissipé, sa contrepartie toroïdale ne peut plus être régénérée

2. L'amplitude de la vitesse de phase dépend aussi du nombre de Reynolds basé sur la contraction.

par effet Ω et ne peut qu'être, elle aussi, sujette à la diffusion magnétique. Deuxièmement, la force de Lorentz ne peut plus rétroagir sur l'écoulement et imposer une rotation solide. Ceci est parfaitement visible sur les deux dernières coupes de la figure 3.13 où nous voyons que la dissipation du champ poloïdal est associée à une reconfiguration de l'écoulement : désormais la rotation différentielle existe dans la majeure partie de la coquille sphérique comme conséquence d'un équilibre entre contraction et effets visqueux.

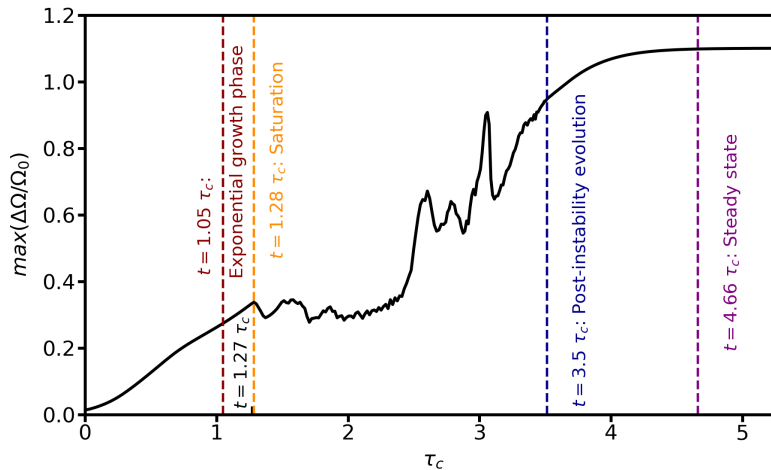


FIGURE 3.14 : Évolution temporelle de l'amplitude maximale de la rotation différentielle, en fonction du temps de contraction. Les étapes essentielles sont mises en évidence par différentes couleurs : les tirets rouges marquent le déclenchement de l'instabilité à $t \sim 1.05 \tau_c$. Les perturbations s'amplifient alors de façon exponentielle jusqu'à saturation au temps $t \sim 1.28 \tau_c$ (tirets orange). La période subséquente constitue l'évolution non-linéaire de l'instabilité. Celle-ci se poursuit jusqu'au temps $t \sim 3.5 \tau_c$ qui marque le début de l'évolution post-instabilité (tirets bleus). L'écoulement évolue ensuite progressivement vers l'état stationnaire hydrodynamique décrit en 3.4.1.3, ici atteint lorsque $t \sim 4.66 \tau_c$ (tirets violets).

L'ensemble de ces résultats nous a permis de proposer un scénario, évoqué en sous-section 1.3.1 du chapitre 1, pouvant potentiellement rendre compte de l'évolution des étoiles de faible masse pendant la phase de sous-géante. Ce scénario est le suivant : durant approximativement un temps de contraction de l'ordre du milliard d'années, compatible avec le temps de contraction déterminé par Deheuvels et al. (2020) dans ce type d'étoiles (voir section 1.1 du chapitre 1), un champ magnétique de grande échelle maintient une rotation quasi-solide dans le cœur de la sous-géante. Ce champ pourrait provenir d'une dynamo qui opérait dans le cœur convectif de l'étoile durant la séquence principale, ou même être de nature fossile. Comme illustré sur la figure 3.14, au cours de cette période la rotation différentielle s'accumule progressivement dans des régions particulières, les zones mortes, comme conséquence de la contraction. Alors, après un temps de contraction, le cisaillement construit dans ces zones est devenu suffisamment important pour déclencher une puissante instabilité axisymétrique de type magnétorotationnel (étape rouge sur la figure 3.14). Cette dernière agit de façon globale sur l'écoulement, advecte et mélange le champ poloïdal entraînant par suite, sa dissipation à petite échelle, et détruisant finalement sa structure à grande échelle (étape qui débute au trait orange sur la figure 3.14). Alors, la contraction permet à nouveau d'accélérer le cœur et de produire un niveau significatif de rotation différentielle tel que requis par l'astérosismologie (Deheuvels et al., 2012, 2014). Ce scénario est compatible avec l'étude de Spada et al. (2016) qui montre que forcer artificiellement une rotation solide durant un milliard d'années après la fin de la séquence principale,

permet de reproduire les taux de rotation des sous-géantes tels que mesurés par l'astérosismologie. Cette étude fut confirmée par [Eggenberger et al. \(2019a\)](#), puis soutenue par [Deheuvels et al. \(2020\)](#) qui ont observé de jeunes sous-géantes en rotation quasi-solide. Ce scénario ne concerne pas les étapes plus avancées de la post-séquence principale, où un autre processus de transport du moment cinétique doit prendre le relais afin d'expliquer les taux de rotation mesurés par astérosismologie dans les sous-géantes plus âgées et les géantes rouges, par exemple, un transport turbulent induit par des instabilités magnétohydrodynamiques non-axisymétriques.

Comme nous en avons discuté en section 3.3, les régimes d'intérêts au sein des sous-géantes sont les régimes visqueux et d'Eddington-Sweet, respectivement dans, et en dehors du cœur dégénéré de l'étoile. Ici, nous avons présenté le développement d'une instabilité axisymétrique magnétorotationnelle hélicoïdale dans le cas visqueux. Il n'a alors pas été possible de mettre en évidence la présence d'une telle instabilité dans le régime d'Eddington-Sweet car les contraintes numériques nous empêchent de produire des cisaillements dans les zones mortes qui soient suffisamment importants pour déclencher l'instabilité. Néanmoins, puisque dans ce régime la rotation différentielle est proportionnelle à $P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c$, des simulations effectuées à plus grand Re_c pourraient permettre d'obtenir des cisaillements dans les zones mortes capables de surpasser l'effet stabilisant de la tension magnétique. Cette extrapolation de nos résultats reste cependant à confirmer car dans ce cas, les effets non-linéaires doivent aussi être pris en compte (cf. partie 3.6). Toutefois, puisque l'instabilité est susceptible d'exister dans le régime d'Eddington-Sweet, elle pourrait non seulement se développer en dehors du cœur dégénéré d'une sous-géante, mais également se manifester dans les étoiles de Herbig et ainsi rendre compte de la dichotomie magnétique entre les fortes intensités de champ observées dans les Ap/Bp et le très faible magnétisme des étoiles de type Vega (cf. sous-section 1.2.2 du chapitre 1). En effet, dans le scénario proposé par [Aurière et al. \(2007\)](#) pour expliquer le désert magnétique, l'instabilité doit être capable de détruire la structure à grande échelle du champ magnétique poloïdal. C'est justement le cas de l'instabilité magnétorotationnelle hélicoïdale axisymétrique que nous mettons en évidence ici. Jusque là, les instabilités magnétohydrodynamiques non-axisymétriques observées dans les simulations, plus locales, ne se traduisaient pas par la destruction du champ poloïdal axisymétrique (voir par exemple [Jouve et al. \(2015, 2020\)](#)).

3.5 Résumé de l'étude axisymétrique

Au cours de ce travail, nous avons étudié la dynamique axisymétrique d'une zone radiative stellaire durant les phases rapides d'évolution, à savoir la pré-séquence principale et la phase sous-géante, en caractérisant les écoulements stationnaires induits par la contraction de l'étoile. Pour ce faire, nous avons modélisé la portion d'un intérieur stablement stratifié par une couche sphérique en rotation, puis modélisé la contraction de cette couche en imposant une vitesse radiale dirigée vers le centre du domaine sphérique. La contraction engendre alors un transport de moment cinétique dirigé vers l'intérieur, sur une échelle de temps de l'ordre de $\tau_c = r_0/V_0$ où r_0 et V_0 sont respectivement le rayon de la sphère externe et la valeur de la vitesse de contraction à la sphère externe, et pouvant potentiellement être équilibré dans un état stationnaire par un processus de redistribution. Afin de modéliser de façon plus réaliste une zone radiative stellaire, nous avons ensuite introduit l'effet de la stratification en densité à travers l'approximation anélastique. Finalement, en admettant l'existence d'un champ magnétique de grande échelle, "gelé" dans la zone radiative et provenant des phases antérieures de l'évolution stellaire, nous avons également étudié les effets d'un dipôle et d'un quadropôle sur la dynamique de l'écoulement en contraction.

Dans un premier temps, nous avons étudié les écoulements en l'absence de champ ma-

gnétique. Ce faisant, nous avons montré l'existence de deux régimes pertinents dans les zones radiatives stellaires en contraction. Ces régimes sont entièrement contrôlés par un paramètre, le produit du nombre de Prandtl et du rapport au carré de la fréquence de Brunt-Väisälä au taux de rotation : $P_r (N_0/\Omega_0)^2$. Lorsque $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, la diffusion thermique permet l'existence d'une circulation méridienne d'Eddington-Sweet qui redistribue le moment cinétique apporté par la contraction sur une échelle de temps $\tau_{ED} = (r_0^2/\kappa) (N_0/\Omega_0)^2$. Au contraire, lorsque $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$, cette circulation est inhibée et la redistribution du moment cinétique est assurée par des effets visqueux sur une échelle de temps $\tau_v = r_0^2/\nu$. En estimant le paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ dans les intérieurs radiatifs en contraction, nous avons conclu que le régime d'Eddington-Sweet devrait être pertinent à la fois dans l'enveloppe radiative des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale, ainsi que dans la zone radiative située en dehors du cœur dégénéré des sous-géantes, tandis que le régime visqueux, lui, devrait être approprié pour décrire le cœur dégénéré de ces dernières. Nous avons alors caractérisé les écoulements induits par la contraction, à savoir la rotation différentielle et la circulation méridienne associée, dans chacun de ces deux régimes.

Dans le régime d'Eddington-Sweet, et en l'absence de stratification en densité, la rotation différentielle stationnaire qui résulte de l'équilibre entre le transport de moment cinétique par la contraction et la circulation méridienne, présente une dépendance à la fois en rayon et en latitude. Tant qu'elle reste faible, son amplitude caractéristique peut être déterminée à partir de la loi d'échelle $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim \tau_{ED}/\tau_c = P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c$. En revanche, lorsqu'elle devient trop importante, les effets non-linéaires entrent en scène et cette loi d'échelle n'est plus valide. Les non-linéarités contribuent, elles aussi, efficacement à la redistribution du moment cinétique et l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle devient inévitablement plus faible que prédite par la loi d'échelle. Toutefois, elle ne peut pas dépasser une valeur maximale donnée par $\Delta\Omega_{\max}/\Omega_0 = (r_0/r_i)^2 - 1$. La circulation méridienne elle, est du même ordre de grandeur que l'écoulement de contraction par lequel elle est forcée. La circulation totale résultante se comporte alors différemment à l'extérieur et à l'intérieur du cylindre tangent. À l'extérieur, cette circulation forme une cellule tandis qu'à l'intérieur, elle est systématiquement dirigée vers la sphère interne. L'interface de ces deux régions est le siège d'un jet de vitesse verticale qui tend à disparaître lorsque des simulations anélastiques sont effectuées. Alors, le profil de rotation différentielle devient préférentiellement radial et la loi d'échelle qui permet de déterminer son amplitude caractéristique doit être pondérée par l'inverse de l'intégrale du profil de densité de l'état de référence.

Dans le régime visqueux, et lorsque la densité à travers la couche sphérique est homogène, le profil de rotation différentielle stationnaire qui découle de l'équilibre entre le transport du moment cinétique par la contraction et les effets visqueux, présente une symétrie sphérique. Tant que l'amplitude de cette rotation différentielle n'est pas trop importante, elle peut être décrite par une solution analytique relativement simple, ou être approchée par une loi d'échelle de la forme $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim \tau_v/\tau_c = Re_c$. De nouveau, lorsque l'amplitude de la rotation différentielle devient trop importante, des déviations du contraste de rotation vis-à-vis de cette loi d'échelle sont observées. Toutefois, contrairement au régime d'Eddington-Sweet, le niveau de rotation différentielle peut encore être décrit à l'aide d'une solution analytique. Dans ce régime de forte stratification stable, la circulation méridienne est maintenant confinée dans des couches limites d'Ekman localisées le long des sphères interne et externe du domaine tandis que dans le corps du fluide, elle est totalement inhibée. Lorsqu'un contraste en densité est introduit, le gradient de rotation différentielle à travers la couche sphérique devient plus faible et l'amplitude de la rotation différentielle est pondérée par l'inverse du profil de densité de base. Là encore, si cette amplitude est faible, une solution analytique est disponible.

Dans un second temps, nous avons étudié l'effet d'un champ magnétique de grande échelle, soit dipolaire, soit quadrupolaire, sur la dynamique de l'écoulement dans les deux régimes susmentionnés, pertinents pour les zones radiatives stellaires en contraction. Nous avons supposé qu'un tel champ pourrait être le vestige des premières phases de l'évolution stellaire ou être issu d'une dynamo qui opérait dans le cœur convectif de l'étoile à une étape antérieure de son existence. Nous constatons que, quelque soit le régime considéré à travers l'imposition du paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, la dynamique de l'écoulement est profondément affectée et se caractérise par la présence de deux régions magnétiquement découplées. Dans l'une d'elles, les contraintes de Maxwell s'opposent à la fois à la contraction et à la rotation différentielle induite et ce faisant, excitent des ondes d'Alfvén qui redistribuent rapidement le moment cinétique le long des lignes de champ sur une échelle de temps de l'ordre de $\tau_{Ap} = r_0 \sqrt{\mu_0 \bar{\rho}} / B_0$. Ces ondes imposent alors un état de quasi-isorotation le long des lignes champ et la rotation différentielle qui subsiste est à peine perceptible. Perpendiculairement aux lignes de champ, la rotation différentielle qui pouvait exister est très vite dissipée par un processus que l'on nomme le mélange de phase et ce, en seulement quelques temps d'Alfvén. Le résultat final est l'établissement d'une région en rotation quasi-solide qui occupe la majeure partie de la couche sphérique. Dans la seconde région, que l'on nomme la zone morte, l'amplitude du champ poloïdal est si faible que l'échelle de temps d'Alfvén devient comparable aux autres échelles de temps de transport de moment cinétique possibles. Ici, la force de Lorentz n'est plus capable d'imposer sa dynamique et une rotation différentielle s'accumule au fil de la contraction. Si un état stationnaire est atteint, il résulte finalement d'un équilibre entre cette contraction et une circulation méridienne d'Eddington-Sweet ($P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$) ou des effets visqueux ($P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$), comme dans le cas hydrodynamique. La dynamique de l'écoulement dans la zone morte est ainsi semblable à celle décrite en l'absence de champ magnétique à l'exception près qu'il est maintenant nécessaire de prendre en compte que cette région ne constitue plus qu'une portion de la couche sphérique et qu'elle ait pu être advectée par la contraction. L'amplitude de la rotation différentielle s'en retrouve alors fortement affectée.

Lorsque l'on considère une topologie magnétique plus complexe, comme nous l'avons fait avec le quadrupôle, la rotation différentielle qui s'accumule dans la zone morte au fil du temps produit un cisaillement susceptible de déclencher une puissante instabilité axisymétrique de type magnétorotationnel. Cette dernière modifie alors profondément l'évolution de l'écoulement. En effet, si l'amplitude du champ magnétique n'est pas trop importante, l'instabilité se développe à l'endroit où le cisaillement est négatif (positif) dans l'hémisphère Nord (Sud) avec un taux de croissance proportionnel à l'amplitude de ce cisaillement. Ce faisant, elle donne naissance à une circulation méridienne multi-cellulaire confinée dans la direction radiale, qui advecte ce champ poloïdal, puis provoque sa dissipation à petite échelle, engendrant par suite, une reconfiguration de l'écoulement à grande échelle. La configuration résultante est finalement caractérisée par l'existence d'une rotation différentielle dans la majeure partie de la couche sphérique où la force de Lorentz est devenue négligeable et ne peut plus contrebalancer la contraction. Ceci nous a permis d'établir un scénario pouvant potentiellement rendre compte de l'évolution du taux de rotation des étoiles de faible masse de la post-séquence principale et dont la viabilité va être examinée un peu plus loin. Par ailleurs, la dissipation de la structure à grande échelle du champ magnétique s'avère également prometteuse pour expliquer la dichotomie observée entre le fort magnétisme des étoiles Ap/Bp et le faible magnétisme des étoiles de type Vega, ce que l'on nomme le désert magnétique (Lignières et al., 2014).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, nous avons étudié la dynamique d'une zone radiative stellaire en cours de contraction pouvant abriter un champ magnétique structuré à grande échelle. Pour ce faire, nous avons déterminé puis caractérisé les écoulements forcés par la contraction à l'aide de simulations numériques axisymétriques dans les approximations de Boussinesq et anélastique. En l'absence de champ magnétique, nous déterminons deux régimes pertinents, entièrement gouvernés par le paramètre $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, où P_r est le nombre de Prandtl, N_0 la fréquence de Brunt-Väisälä et Ω_0 le taux de rotation. Le premier est un régime dans lequel l'effet de la stratification stable est faible. Caractérisé par $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, nous l'appelons le régime d'Eddington-Sweet. Dans celui-ci, une circulation méridienne redistribue le moment cinétique transporté vers l'intérieur de l'étoile par la contraction, et la rotation différentielle stationnaire présente une dépendance à la fois en rayon et en latitude. En régime linéaire, son amplitude est donnée par la loi d'échelle $\Delta\Omega_{\text{ED}}/\Omega_0 \propto \tau_{\text{ED}}/\tau_c$ où τ_{ED} et τ_c sont respectivement les échelles de temps d'Eddington-Sweet et de contraction. Le second est un régime pour lequel la stratification stable agit fortement sur l'écoulement. Il est caractérisé par $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$ et nous l'appelons le régime visqueux. Ici, la circulation méridienne est fortement inhibée par la stratification stable et la redistribution du moment cinétique est prise en charge par des effets visqueux. La rotation différentielle stationnaire possède un profil à symétrie sphérique et en régime linéaire, son amplitude peut être estimée par le rapport τ_v/τ_c où τ_v est l'échelle de temps visqueuse.

Afin de comprendre de quelle façon la dynamique de ces écoulements pouvait être affectée par la présence d'un champ magnétique, nous avons réalisé des simulations numériques dans ces deux régimes en considérant le cas d'un dipôle et d'un quadrupôle. Nous montrons qu'après une phase instationnaire au cours de laquelle le champ toroïdal croît linéairement par effet Ω , sature, puis conduit à la propagation d'ondes d'Alfvén le long des lignes de champ (qui sont à leur tour rapidement dissipées à travers le mélange de phase), une configuration quasi-stationnaire est établie. Celle-ci est caractérisée par la présence de deux régions magnétiquement découplées. Dans l'une d'elles, la force de Lorentz impose une rotation quasi-solide. Dans l'autre, que l'on appelle la zone morte, la tension magnétique est au contraire trop faible pour imposer sa dynamique, et une rotation différentielle s'instaure comme le résultat d'un équilibre entre le transport de moment cinétique assuré par la contraction et un processus de redistribution qui dépend de l'amplitude de la stratification stable : une circulation méridienne (régime d'Eddington-Sweet) ou des effets visqueux (régime visqueux). Pour une topologie quadrupolaire et après approximativement un temps de contraction, le cisaillement latitudinal présent dans ces régions déclenche une puissante instabilité axisymétrique de type magnétorotationnel qui conduit à la destruction de la configuration magnétique à grande échelle, puis à une reconfiguration de l'écoulement.

Dans ce qui suit, nous discutons les implications astrophysiques de nos résultats, exposons

les limitations de notre modèle puis présentons les perspectives de ce travail de thèse.

Implications astrophysiques :

Commençons par les implications des résultats qui découlent de notre étude hydrodynamique. Nous avons montré que dans l'intérieur radiatif des étoiles de la pré-séquence principale et en dehors du cœur dégénéré des sous-géantes, nous avons toujours $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$. L'estimation du rapport τ_{ED}/τ_c indique que le régime d'Eddington-Sweet non-linéaire est adapté à la description de la structure à grande échelle de l'écoulement dans ces régions. Nous prédisons ainsi qu'un certain niveau de rotation différentielle puisse être produit dans la zone radiative par la contraction. Ceci est compatible avec les modèles à deux régions de [Gallet & Bouvier \(2013, 2015\)](#) destinés à reproduire la rotation de surface des T Tauri. La distribution spatiale de cette rotation différentielle montre qu'elle dépend à la fois de la latitude et du rayon. À terme, nous pourrions ainsi tester le modèle de [Zahn \(1992\)](#) à l'aide de simulations non-axisymétriques afin d'étudier la possibilité qu'une instabilité hydrodynamique (par exemple, une instabilité de cisaillement) se déclenche, induise un transport turbulent de moment cinétique, et finalement réduise la rotation différentielle en latitude. Nous reviendrons sur ce point plus loin dans cette section.

Dans le cœur dégénéré des sous-géantes, nous trouvons que $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$. Par ailleurs, même si la pression de dégénérescence supporte le poids de l'enveloppe et que le temps de contraction est long (cf. section 1.1 du chapitre 1), le rapport τ_r/τ_c est $\gg 1$. Par conséquent, le régime visqueux non-linéaire s'applique. Nous prévoyons donc que la rotation différentielle soit essentiellement radiale, la circulation méridienne étant inhibée par la stratification stable.

Tournons-nous maintenant du côté des résultats issus de nos simulations magnétohydrodynamiques. L'instabilité axisymétrique magnétorotationnelle mise en évidence au cours de ce travail nous a permis d'élaborer un scénario susceptible d'expliquer l'évolution rotationnelle des étoiles de faible masse au cours de la phase de sous-géante. Dans ce scénario, nous supposons qu'un champ structuré à grande échelle soit présent dans la zone radiative de ces étoiles après la fin de la séquence principale. Celui-ci peut établir une rotation quasi-solide dans l'ensemble de l'étoile en accord avec les mesures de [Deheuvels et al. \(2020\)](#). Passé une durée de l'ordre d'un temps de contraction, une instabilité axisymétrique détruit la structure à grande échelle du champ magnétique et entraîne une reconfiguration de l'écoulement. Ceci permettrait à la rotation différentielle d'exister comme le suggèrent les mesures astérosismiques de sous-géantes évoluées, réalisées par [Deheuvels et al. \(2014\)](#). Toutefois, pour que ce scénario puisse s'appliquer, il est nécessaire que l'instabilité soit capable de se développer. Ceci implique que la tension magnétique ne soit pas trop élevée, ce qui se traduit par un critère sur l'intensité du champ poloïdal. Ce critère d'instabilité s'écrit ([Balbus & Hawley, 1998](#)) :

$$B_r < \frac{\lambda_r \Omega}{\sqrt{2}\pi} \sqrt{\left| \frac{d \ln \Omega}{d \ln s} \right|} \sqrt{\mu_0 \rho}. \quad (3.56)$$

où s est le rayon perpendiculaire à l'axe de rotation, B_r est la composante radiale du champ poloïdal, λ_r l'échelle de longueur radiale des perturbations, Ω le taux de rotation, μ_0 la perméabilité du vide et ρ la densité de l'étoile. Nous appliquons maintenant ce critère à KIC 5955122, une étoile étudiée par [Deheuvels et al. \(2020\)](#). Il s'agit d'une sous-géante de $1.1 M_\odot$ et $2R_\odot$ dont la zone radiative occupe 74% de l'étoile et le cœur dégénéré environ 6% de la zone radiative. Celle-ci se trouve encore durant la phase de rotation quasi-solide. Le taux de rotation moyen de son cœur est de $3.1 \cdot 10^{-6} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. À partir d'un code d'évolution stellaire, on peut montrer que

la densité moyenne typique dans la zone radiative d'une sous-géante est d'environ $8.8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ tandis que dans le cœur dégénéré, elle est de $\sim 2.1 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Supposons que le cisaillement $|q|$ soit d'ordre $O(1)$. En assimilant l'échelle de longueur radiale des perturbations au rayon du cœur dégénéré ou de la zone radiative non dégénérée, nous obtenons respectivement en dehors et à l'intérieur du cœur dégénéré de la sous-géante, des intensités magnétiques seuils de $6.9 \cdot 10^5 \text{ G}$ et $3.0 \cdot 10^5 \text{ G}$. Le champ critique est certainement inférieur à ces valeurs puisque l'échelle de longueur radiale est d'abord contrainte par la stratification stable. Une autre façon d'estimer ce champ critique est de s'appuyer sur nos simulations numériques. Dans le régime visqueux, nous trouvons en effet que la configuration magnétique devient stable pour un nombre de Lorentz critique $L_o = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0} r_0 \Omega_0 \sim 10^{-2}$. En utilisant les valeurs précédentes, nous obtenons un champ critique de $\sim 10^4 \text{ G}$. Excepté le nombre d'Ekman, les paramètres utilisés lors de ces simulations sont proches des valeurs stellaires. Par conséquent, si la viscosité ne joue pas de rôle dans l'instabilité, cette intensité pourrait être du bon ordre de grandeur. En dehors du cœur dégénéré, le régime d'Eddington-Sweet s'applique. Nos paramètres sont plus éloignés des valeurs stellaires (par exemple, le nombre de Prandtl magnétique dans ces simulations vaut 10^2 alors qu'il devrait être de 10^{-2} voir 10^{-3}). On peut néanmoins envisager que puisque la stratification stable est moins importante que dans le régime visqueux, alors de plus grandes échelles de longueur radiale λ_r devraient être autorisées, et l'intensité du champ critique pourrait être plus élevée. Des simulations supplémentaires sont nécessaires pour confirmer cette hypothèse.

L'instabilité magnétorotationnelle axisymétrique qui se développe en présence d'une configuration magnétique quadrupolaire pourrait aussi, potentiellement expliquer la dichotomie observée entre le fort magnétisme des Ap/Bp et le faible magnétisme des étoiles de type Vega. L'idée est qu'une telle instabilité se manifeste au cours de la pré-séquence principale lorsqu'une rotation différentielle est forcée par la contraction. Alors, les champs magnétiques détectés dans $\sim 10\%$ des étoiles de Herbig seraient des champs stables dont l'intensité est supérieure à une valeur seuil en dessous de laquelle, la configuration magnétique devient instable vis-à-vis de l'instabilité magnétorotationnelle axisymétrique. Contrairement aux instabilités magnétorotationnelles non-axisymétriques qui n'affectent pas la composante axisymétrique du champ poloidal (Jouve et al., 2015; Gaurat et al., 2015; Jouve et al., 2020), cette instabilité est capable de détruire la structure à grande échelle du champ. Par conséquent, les petites échelles résultantes, aux polarités opposées, devraient fortement diminuer l'amplitude du champ longitudinal une fois intégrées sur la surface visible de l'étoile. Dans cette hypothèse, une partie des étoiles de Herbig pour lesquelles aucun champ magnétique n'est détecté pourraient en réalité posséder un champ similaire à celui de Vega, c'est-à-dire à la fois complexe et de faible intensité. Dans le cadre de ce scénario, déterminer l'intensité seuil du champ magnétique au-dessus de laquelle l'instabilité magnétorotationnelle axisymétrique ne peut plus se déclencher serait de prime intérêt puisqu'elle pourrait être comparée aux mesures observationnelles et en particulier, à l'intensité minimum du champ magnétique des Ap/Bp qui est de l'ordre de 300 G (Aurière et al., 2007).

Limitations et discussion de notre modèle :

Les hypothèses et limitations de notre modèle sont maintenant discutées à travers plusieurs points. Le premier concerne les aspects mêmes de notre modélisation d'une étoile en contraction. Nous avons en effet choisi de modéliser cette dernière par une coquille sphérique dans laquelle la contraction est modélisée par un flux de masse radial et stationnaire. Ce choix nous oblige à imposer des conditions aux limites aux parois sphériques. Par exemple, à la sphère externe nous imposons que le taux de rotation est uniforme ce qui n'est pas nécessairement le cas.

Dans une étoile, la zone convective qui surplombe la zone radiative pourrait en effet imposer une rotation différentielle en latitude (voir par exemple [Garaud \(2002a\)](#)). Par ailleurs, la condition de non-glissement prescrite à la sphère externe induit une couche d'Ekman qui, comme nous l'avons vu en [3.4.1.1](#), peut avoir un effet important sur le corps du fluide. De même, à la sphère interne, bien qu'une condition de nullité de la contrainte tangentielle normale à la paroi soit imposée, une couche d'Ekman se développe et engendre une couche équatoriale. Dans le cas Boussinesq, la conséquence est un jet de vitesse verticale le long du cylindre tangent dirigé vers l'équateur de la sphère interne et donc, un maximum local sur le taux de rotation qui ne doit son existence qu'à la présence de cette sphère. Une façon de contourner ces problèmes associés aux conditions aux limites, serait de modéliser la contraction du fluide de façon globale comme dans les codes d'effondrement gravitationnel CoCoNut ([Dimmelmeier et al., 2002, 2005](#); [Cerdá-Durán et al., 2008](#)) ou RAMSES ([Teyssier, 2002](#)). Nous notons cependant que l'échelle de temps caractéristique de l'effondrement gravitationnel d'une étoile s'accomplit sur une échelle de temps de chute libre (de l'ordre d'une seconde pour l'effondrement du cœur de fer d'une étoile de $15M_{\odot}$ ([Maeder, 2008](#))). C'est bien plus court que l'échelle de temps de réajustement thermique (temps de Kelvin-Helmholtz) qui est de l'ordre de 38.9 millions d'années pour une étoile de masse solaire, elle-même plus courte que l'échelle de temps de contraction d'une sous-géante qui en moyenne est de l'ordre du milliard d'années (cf. section [1.1](#) du chapitre [1](#)). Cette disparité des temps caractéristiques de contraction fait qu'il serait difficile de suivre l'évolution de notre modèle sur des échelles de temps aussi longues. Nous pourrions aussi contourner l'inconvénient des couches limites associées à la présence d'une sphère interne en modélisant une sphère pleine, ce qui est désormais possible avec MagIC. Ceci pourrait être important lorsque les simulations sont effectuées sous l'approximation de Boussinesq où les couches limites jouent un rôle essentiel. Par ailleurs, nous ne pouvons pas exclure que ces couches puissent devenir instables lors des simulations non-axisymétriques comme cela peut être le cas dans un problème de Couette sphérique ([Hollerbach et al., 2004](#)). Pour finir sur l'aspect modélisation, nous aurions pu prendre en compte l'accélération du taux de rotation du cadre de référence sous l'effet de la contraction comme cela a été fait par [Rieutord & Beth \(2014\)](#) ou [Hypolite & Rieutord \(2014\)](#). Pour ce faire, on pourrait introduire un terme de la forme $\vec{\Omega}_0 \times \vec{r}$ dans l'équation de quantité de mouvement, où $\dot{\Omega}_0 = d\Omega_0/dt > 0$ avec Ω_0 le taux de rotation de la sphère externe, que l'on appelle l'accélération d'Euler. Cependant, dans un milieu stratifié en densité celui-ci devrait être négligeable par rapport au terme de contraction. En effet, considérons le problème de [Hypolite & Rieutord \(2014\)](#) dans lequel l'accélération de la sphère interne sous l'effet de la contraction est analysée. En comparant les termes d'Euler et de contraction entre eux, ces auteurs définissent le nombre sans dimension suivant : $\dot{\omega} = \dot{\Omega}r_0/2\Omega_iV_0$ où r_0 est le rayon de la sphère externe, V_0 l'amplitude caractéristique de la contraction et Ω_i le taux de rotation de la sphère interne. Celui-ci compare le temps de contraction $\tau_c = r_0/V_0$ au temps d'accélération de la sphère interne $\tau_{acc} = \Omega_i/(d\Omega_i/dt)$. En estimant la variation du moment cinétique due au flux de masse traversant la sphère interne et aux contraintes visqueuses qui s'appliquent à la surface de cette dernière, [Hypolite & Rieutord \(2014\)](#) montrent que $\dot{\omega} = 9\rho_0r_0/4\rho_i r_i$ où ρ_i est la densité de la sphère interne, ρ_0 celle de la sphère externe et $\rho_i > \rho_0$. Par conséquent, dans un milieu stratifié en densité l'accélération d'Euler devrait être négligeable et nous nous attendons à ce que la prise en compte de l'accélération du cadre de référence sous l'effet de la contraction ne modifie pas les conclusions de notre travail.

Le second point concerne le choix de l'approximation anélastique que nous avons utilisée pour effectuer des simulations plus réalistes dans lesquelles la stratification en densité de la zone radiative est prise en compte. Nous utilisons en effet le formalisme LBR qui repose sur deux approximations. La première consiste à négliger un terme dans l'équation de quantité de

mouvement de la forme $(P'/\bar{\rho}C_p)d\bar{S}/dr$, ce qui est par exemple justifié dans une atmosphère adiabatique où $d\bar{S}/dr = 0$. En revanche, ceci n'est pas vrai dans les intérieurs radiatifs et afin d'assurer la validité de cette hypothèse dans nos simulations, nous prenons $\epsilon_s = \Delta\bar{S}/C_p \ll 1$ pour que ce terme soit négligeable et que la déviation vis-à-vis d'un état d'isotropie soit faible. Pour vérifier la validité de cette approche, il convient de comparer ce terme au gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement. Cela donne :

$$\left| \frac{\frac{P}{\bar{\rho}C_p} \frac{d\bar{S}}{dr}}{-\vec{\nabla} \left(\frac{P}{\bar{\rho}} \right)} \right| = \frac{\left| \frac{P}{\bar{\rho}C_p} \frac{d\bar{S}}{dr} \right|}{\left| -\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} P + \frac{P}{\bar{\rho}^2} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \right|} \approx \frac{\left| \frac{P}{\bar{\rho}C_p} \frac{d\bar{S}}{dr} \right|}{\left| \frac{P}{\bar{\rho}^2} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \right|} = \frac{\left| \frac{d \ln \Theta}{dr} \right|}{\left| \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right|} = \frac{h_p}{h_\Theta}. \quad (3.57)$$

Autrement dit, négliger le terme $(P'/\bar{\rho}C_p)d\bar{S}/dr$ dans l'équation de quantité de mouvement revient à supposer que l'échelle de hauteur de densité est petite devant l'échelle de hauteur de température potentielle. Bien que cette condition soit approximativement remplie dans l'atmosphère terrestre (Vallis, 2017), ce n'est pas nécessairement le cas dans les étoiles. Par exemple, à partir d'un code d'évolution stellaire, on peut montrer que ceci n'est pas satisfait en dehors du cœur dégénéré d'une sous-géante. Il existe d'autres formalismes anélastiques mais comme souligné par Brown et al. (2012), ces derniers ont aussi leurs propres problèmes. Une autre hypothèse de l'approche LBR est qu'elle repose sur une formulation de l'équation de l'énergie dans laquelle la diffusion de température est remplacée par une diffusion turbulente d'entropie. Bien que ceci puisse être justifié dans une zone convective, cela l'est plus difficilement dans une zone radiative. Toutefois, les simulations numériques que nous avons effectuées dans MagIC avec de la diffusion de température ont conduit à de sérieuses difficultés numériques et à des solutions non-physiques. En principe (Gastine et al., 2020), ces problèmes pourraient être contournés en assurant un fort couplage du champ de vitesse avec le champ de pression, que ce soit par l'utilisation de grilles décalées (Harlow & Welch, 1965) ou encore à travers une méthode d'interpolation (Rhie & Chow, 1983). Il s'agit d'une question à approfondir de manière générale pour la communauté scientifique qui effectue des simulations anélastiques d'intérieurs radiatifs.

Le troisième point concerne les contraintes numériques qui limitent les régimes de paramètres que nous sommes capable d'explorer. Par exemple, les nombres d'Ekman sont loin d'être réalistes puisque dans nos simulations, ils sont au mieux de 10^{-7} contre 10^{-15} (voir 10^{-17}) dans les étoiles. C'est la raison pour laquelle les couches limites localisées le long des frontières du domaine peuvent encore avoir un effet sur la dynamique de l'écoulement dans le corps du fluide. Hormis le nombre d'Ekman, les paramètres que nous utilisons dans le régime visqueux sont plutôt réalistes. En revanche, dans le régime d'Eddington-Sweet il existe des écarts importants entre nos simulations axisymétriques et les valeurs stellaires. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le nombre de Prandtl magnétique est de 10^2 alors que dans un intérieur non dégénéré il devrait être de l'ordre de 10^{-2} voire 10^{-3} . Il en est de même pour le nombre de Reynolds basé sur la contraction qui vaut tout au plus 10 dans nos simulations, contre $\sim 10^7$ dans la zone radiative d'une étoile de la pré-séquence principale. Ceci s'avère problématique pour les T Tauri et les étoiles de Herbig car ces contraintes numériques nous empêchent d'explorer le régime non-linéaire d'Eddington-Sweet, pertinent pour ces étoiles. Ceci pose également problème en dehors du cœur dégénéré des sous-géantes où le produit $Re_c P_r (N_0/\Omega_0)^2$ peut être de $\mathcal{O}(10^3)$. Autrement dit, les régimes explorés sont représentatifs dans le cœur dégénéré des sous-géantes, mais moins pertinents en dehors du cœur dégénéré de ces dernières et pour décrire la dynamique des zones radiatives des étoiles de la pré-séquence principale.

Le quatrième point concerne la stabilité de nos écoulements. Les simulations axisymétriques que nous avons effectuées ne nous permettent pas d'observer le développement d'instabilités non-axisymétriques. Par conséquent, des simulations non-axisymétriques sont nécessaires pour déterminer la stabilité des écoulements vis-à-vis de perturbations non-axisymétriques. Nous développons ce point dans la partie "perspectives" qui suit.

Perspectives :

Nous achevons maintenant ce manuscrit en exposant différentes perspectives qui pourraient être explorées à la suite de ce travail. À court terme, une suite logique de la présente thèse serait d'analyser la stabilité de nos écoulements hydrodynamiques. Comme nous l'avons expliqué plus tôt, un des intérêts de l'étude hydrodynamique axisymétrique est d'avoir mis en évidence une étape intermédiaire du modèle de Zahn (1992), pour laquelle la structure à grande échelle d'un écoulement faiblement stratifié révèle qu'une rotation différentielle en latitude est présente. Il serait donc particulièrement intéressant d'étudier la stabilité de nos écoulements afin de déterminer si une instabilité peut se manifester et produire une rotation différentielle essentiellement radiale à travers un transport turbulent de moment cinétique. Concernant les simulations numériques effectuées en présence d'un champ magnétique, une étude non-axisymétrique permettrait éventuellement de mettre en évidence des instabilités magnétohydrodynamiques non-axisymétriques et de déterminer si ces dernières sont susceptibles d'expliquer la rotation quasi-constante du cœur des étoiles de faible masse au cours de leur ascension sur la branche des géantes rouges (Mosser et al., 2012b; Gehan et al., 2018). Cela permettrait de compléter le scénario que nous avons décrit plus haut, impliquant une instabilité magnétohydrodynamique axisymétrique pour expliquer l'évolution rotationnelle des étoiles de faible masse durant la phase de sous-géante.

Stabilité des écoulements :

Nos simulations numériques hydrodynamiques 2D ont montré que nos écoulements étaient stables vis-à-vis de perturbations axisymétriques. En effet, nos simulations sont effectuées sur des échelles de temps suffisamment longues par rapport au temps de développement de ces instabilités pour que ces dernières puissent être observées si jamais elles devaient se manifester. Le fait que ces écoulements restent stables vis-à-vis de l'instabilité centrifuge n'a rien d'étonnant puisque le moment cinétique croît avec le rayon. En l'absence d'inhomogénéités chimiques, la seule instabilité qui aurait pu se manifester est donc l'instabilité GSF. En accord avec le critère (2.25), les grands $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ avec lesquels nous travaillons dans le régime visqueux, stabilisent l'écoulement. Dans le régime d'Eddington-Sweet, lorsque l'on applique ce critère, qui rappelons-le n'est valable qu'à l'équateur, nous trouvons que l'écoulement devrait être instable. Ceci montre que l'analyse locale effectuée par Goldreich & Schubert (1967), Fricke (1968) et Acheson (1978) fait un certain nombre d'approximations qui ne s'appliquent pas à notre cas. Il pourrait être intéressant de réaliser des simulations axisymétriques dans lesquelles les inhomogénéités chimiques sont prises en compte. Ceci permettrait de voir si les écoulements axisymétriques sont sujets à l'instabilité ABCD. Toujours dans le cadre de simulations axisymétriques, d'autres configurations magnétiques pourraient être étudiées : le mélange d'un dipôle et d'un quadrupôle, un dipôle incliné par rapport à l'axe de rotation ou encore une configuration mixte poloïdal/toroïdal comme celles étudiées par Braithwaite & Spruit (2004) ou Braithwaite & Nordlund (2006) qui constituent de véritables configurations d'équilibres.

La stabilité des écoulements déterminés au cours de ce travail vis-à-vis de perturbations non-axisymétriques doit aussi être étudiée. Différentes instabilités non-axisymétriques peuvent se manifester. Parmi elles, il y a l'instabilité barocline adiabatique et les instabilités de cisaillement. Le mécanisme de développement de l'instabilité barocline adiabatique est similaire à celui de l'instabilité ABCD excepté le fait que, puisque la perturbation est non-axisymétrique, deux particules fluides peuvent échanger du moment cinétique et donc, l'instabilité ne nécessite plus l'aide de la diffusion thermique pour se développer. Il s'agit ainsi d'une instabilité dynamique. Cependant, [Spruit & Knobloch \(1983\)](#) ont montré que pour un rotateur lent, le temps de croissance de cette instabilité est sans doute trop long tandis que pour un rotateur rapide, les instabilités de cisaillement ont une plus grande probabilité de se manifester. Ces dernières se divisent en deux catégories.

La plus étudiée est l'instabilité de cisaillement verticale, c'est-à-dire le cas où le gradient de vitesse est dans la même direction que la gravité. [Miles \(1961\)](#) et [Howard \(1961\)](#) ont d'abord établi la condition de stabilité suivante pour un écoulement cisailé verticalement : $R_i > 1/4$ où $R_i = (N / (dU/dz))^2$ est le nombre de Richardson avec N la fréquence de Brunt-Väisälä et U la vitesse du fluide. Comme le montre [Lignières \(2021\)](#), si l'on suppose que l'échelle de longueur caractéristique du gradient de rotation est de l'ordre du rayon stellaire, le nombre de Richardson peut s'écrire $R_i \sim (N/\Omega)^2$. Dans ce cas, les valeurs répertoriées dans le tableau 3.4 (section 3.3, chapitre 3) indiquent que nous aurons toujours $R_i > 1$ dans les étoiles que nous considérons. Par conséquent, les écoulements déterminés au cours de cette étude devraient rester stables vis-à-vis de ce type d'instabilité. Cependant, en lissant les fluctuations de température sur de petites échelles, la diffusion thermique peut encore permettre à cette instabilité de se développer dans une zone radiative. Le critère de stabilité devient $R_i Pe > 1/4$ où $Pe = UL/\kappa$ désigne le nombre de Péclet ([Zahn, 1974](#)). Si on considère des échelles de longueur suffisamment petites, une instabilité peut donc se développer.

Le second type d'instabilité de cisaillement est celle qui est produite par un cisaillement horizontal. Bien qu'elle ait été moins étudiée, elle connaît aujourd'hui un regain d'intérêt (voir par exemple [Park et al. \(2019\)](#), [Garaud \(2020\)](#) ou [Park et al. \(2021\)](#)). Elle peut être due à la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse ([Deloncle et al., 2007](#)) ou être la conséquence d'un déséquilibre entre le gradient de pression et la force inertielle ([Arobone & Sarkar, 2012](#); [Park et al., 2019](#)). Dans un intérieur radiatif, c'est surtout cette seconde forme qui est susceptible de se manifester ([Park et al., 2021](#)).

Nous concluons que les instabilités de cisaillement vertical et horizontal sont de bonnes candidates dans le régime d'Eddington-Sweet pour produire un transport turbulent de moment cinétique et conduire à un profil de rotation différentielle essentiellement radial tel que supposé dans le modèle de [Zahn \(1992\)](#). Concernant le régime visqueux, puisque la structure à grande échelle de l'écoulement montre que le profil de rotation est principalement radial, nous prévoyons que seule l'instabilité de cisaillement vertical puisse se déclencher.

Lorsqu'un champ magnétique est présent, des instabilités magnétohydrodynamiques non-axisymétriques peuvent se manifester. Dans une zone radiative en rotation différentielle, celles-ci peuvent être principalement de deux types : l'instabilité magnétorotationnelle et l'instabilité de Tayler ([Tayler, 1973](#)), l'instabilité de flottaison magnétique étant fortement limitée par la stratification stable et nécessitant par conséquent, un champ magnétique beaucoup plus fort pour se développer ([Spruit, 1999](#)). Concernant le premier type, si la configuration magnétique mixte possède des composantes poloïdale et toroïdale d'amplitudes comparables, alors la forme classique peut se déclencher ([Masada et al., 2006](#)). Si en revanche le champ toroïdal domine la configuration magnétique, c'est l'instabilité magnétorotationnelle azimuthale (AMRI) qui est susceptible de se développer ([Ogilvie & Pringle, 1996](#); [Rüdiger et al., 2007](#)). Les simula-

tions numériques 3D effectuées par [Jouve et al. \(2020\)](#) montrent que cette instabilité peut se manifester dans des régions stablement stratifiées. Toutefois, notre configuration magnétique post-instabilité ne possède plus de cisaillement en latitude susceptible de déclencher ce type d'instabilité, ce qui rend le développement d'une instabilité magnétorotationnelle azimuthale beaucoup plus difficile dans un cas stablement stratifié.

Nous nous tournons donc du côté de l'instabilité de Tayler. [Acheson \(1978\)](#) a établi une relation de dispersion prenant en compte les effets diffusifs et en supposant que la diffusion thermique est plus élevée que la diffusion magnétique. En appliquant cette relation dans une région localisée au niveau des pôles, [Spruit \(1999\)](#) a établi un critère d'instabilité qui s'écrit :

$$\frac{\omega_{A_\phi}}{\Omega} > \left(\frac{N}{\Omega}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{1/4} \left(\frac{\eta}{\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{\nu}{r^2\Omega}\right)^{1/4} \quad \text{et} \quad \omega_{A_\phi} \ll \Omega, \quad (3.58)$$

où $\omega_{A_\phi} = B_\phi/r \sqrt{\mu_0\rho}$ est la fréquence d'Alfvén toroïdale. Dans nos simulations, une fois que la configuration à grande échelle du champ magnétique est détruite, la nouvelle configuration est caractérisée par la présence de deux lobes de champ toroïdal localisés au niveau des pôles. Nous avons donc appliqué le critère (3.58) pour savoir si cette nouvelle configuration était potentiellement instable. En accord avec ce dernier, nous trouvons que le rapport ω_{A_ϕ}/Ω est trop faible pour qu'une instabilité de Tayler ne se déclenche car la rotation a tendance à fortement stabiliser la configuration magnétique. Des simulations non-axisymétriques permettraient de confirmer, ce résultat.

Autres perspectives :

D'autres perspectives, à plus long terme, peuvent être envisagées. Une des plus importantes serait de parvenir à explorer le régime non-linéaire d'Eddington-Sweet. Ceci est indispensable si l'on souhaite étudier la possibilité que le désert magnétique observé sur la séquence principale, soit produit par une instabilité magnétohydrodynamique qui tire son énergie du cisaillement induit par la contraction au cours de la pré-séquence principale. En effet, l'étude du régime non-linéaire pourrait permettre d'obtenir un cisaillement suffisamment important dans les zones mortes pour que l'instabilité magnétorotationnelle axisymétrique se déclenche. Dans ce cas, les simulations numériques pourraient nous permettre de déterminer l'intensité seuil du champ poloïdal au-dessus de laquelle la configuration magnétique reste stable. Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette valeur pourrait ensuite être directement comparée au champ critique des Ap/Bp. Par ailleurs, le régime d'Eddington-Sweet non-linéaire est particulièrement intéressant si l'on souhaite analyser la stabilité des écoulements hydrodynamiques et tester l'hypothèse de [Zahn \(1992\)](#). En effet, les instabilités de cisaillement précédemment décrites sont favorisées par la rotation différentielle. Or, cette dernière pourrait être plus importante dans le régime non-linéaire.

Un autre aspect intéressant à étudier à long terme, serait de réussir à modéliser simultanément la contraction du cœur radiatif et l'expansion de l'enveloppe radiative, situés de part et d'autre de la couche de brûlage d'hydrogène. Ceci permettrait de compléter notre étude sur les sous-géantes en ayant une idée du niveau de rotation différentielle présent entre les zones radiative et convective lorsque la structure du champ à grande échelle est détruite par l'instabilité magnétorotationnelle axisymétrique.

Pour terminer, nous suggérons deux autres pistes à explorer. La première porte sur l'amélioration des codes numériques pour pouvoir effectuer des simulations anélastiques dans lesquelles la diffusion de température est introduite dans l'équation d'énergie à la place de la diffusion tur-

bulente d'entropie. La deuxième concerne la question du couplage entre les zones radiative et convective par l'intermédiaire d'un champ magnétique. Supposons par exemple, qu'un champ magnétique soit présent dans la zone radiative et que certaines lignes de champ traversent la zone convective. Une rotation différentielle forcée dans la zone radiative (par exemple par la contraction) va rapidement produire du champ toroïdal puis exciter des ondes d'Alfvén qui à leur tour, vont imposer une co-rotation de cette région avec la zone convective (cf. parties [2.1.2.2](#) et [2.1.2.3](#) du chapitre 2). Donc si une rotation différentielle en latitude est présente dans la zone convective, celle-ci va s'imprégner dans la zone radiative et par conséquent, hors des zones mortes, l'écoulement ne devrait plus être en rotation solide.

ANNEXES

ANNEXE A

LE CODE MAGIC

MagIC, pour "Magnetic Inner Core", est un code pseudo-spectral Eulérien complètement documenté et en accès libre (<https://github.com/magic-sph/magic>). Il permet d'effectuer des simulations numériques axisymétriques et non-axisymétriques d'un fluide au sein d'une coquille sphérique en rotation. Ce dernier peut être magnétisé, stablement (zones radiatives) ou instablement (zones convectives) stratifié, et sa composition chimique peut également être prise en compte. MagIC permet ainsi de résoudre un ensemble d'équations, les équations de Navier-Stokes, d'entropie ou de température, d'induction et de composition chimique, en utilisant des approches "sound-proof" : l'approximation de Boussinesq (Wicht, 2002) ou l'approximation anélastique basée sur le formalisme LBR (Gastine & Wicht, 2012). La résolution d'un tel ensemble d'équations requiert des ressources considérables et des temps de calcul particulièrement importants. À titre d'exemple, plus de 200 simulations ont été effectuées au cours de cette thèse pour un total de $\sim 750\,000$ heures CPUs sur le supercalculateur Olympe du méso-centre de calcul intensif CALMIP ("Calcul en Midi-Pyrénées") situé dans l'Espace Clément Ader à Toulouse (voir <https://www.calmip.univ-toulouse.fr/> pour plus d'informations).

➤ Parallélisation :

MagIC utilise une parallélisation hybride qui consiste à combiner une parallélisation explicite (MPI) avec une parallélisation (semi-)implicite (OpenMP). Prenons l'exemple du supercalculateur Olympe à l'aide duquel nous avons effectué nos simulations. Ce dernier est composé d'un certain nombre de nœuds (374 pour être précis), chacun constitué de deux processeurs regroupant à leur tour 18 cœurs physiques. Lorsque MagIC est exécuté, le programme peut être vu comme la combinaison de différents processus qui exécutent leur code respectif, indépendamment les uns des autres. Ces différents processus peuvent donc être répartis à travers les cœurs disponibles qui seront chacun chargés de traiter une tâche spécifique. Bien entendu, ces processus ont besoin de communiquer entre eux de façon régulière. Ceci se fait de façon explicite par l'utilisateur à l'aide de procédures MPI ("Message Passing Interface"). On peut donc voir la chose comme suit. Imaginons un garage où différentes tâches doivent être accomplies : réparer une voiture, faire la comptabilité etc... Il est difficile d'imaginer qu'une seule personne puisse prendre l'ensemble de ces fonctions en charge de façon efficace, ou cela lui prendrait un temps considérable. Cependant, si cette personne embauche du personnel et que chaque membre de ce personnel accomplit une tâche indépendamment des autres, le gain de temps sera

sans nul doute considérable. Les employés doivent néanmoins communiquer de façon régulière afin d'éviter tout malentendu comme ré-effectuer une tâche déjà réalisée. Revenons à MagIC, chaque processus exécute des instructions qui peuvent à leur tour être parallélisées. On parle alors de parallélisation à mémoire partagée car le processus a déjà une mémoire qui lui est allouée dans laquelle le bloc parallélisé pioche ce dont il a besoin. La communication entre les différents blocs se fait alors de façon automatique et est dite "implicite" : c'est la parallélisation OpenMP ("Open Multi-Processing"). Dans l'exemple du garage, ceci revient à imaginer deux employés travaillant sur la réparation d'une même voiture.

➤ Méthode numérique :

Comme nous l'avons mentionné en début de section, MagIC est un code pseudo-spectral. Ceci signifie que la majorité des termes impliqués dans les équations citées plus haut sont évalués dans l'espace spectral tandis que les termes non-linéaires et l'accélération de Coriolis sont traités dans l'espace physique. Nous reviendrons sur l'utilité d'avoir deux représentations séparées.

MagIC utilise ce que l'on appelle une décomposition poloïdale-toroïdale des différents champs vectoriels. En effet, le produit de la masse volumique et du champ de vitesse, ainsi que le champ magnétique, sont des champs solénoïdaux en vertu de $\vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho}\vec{U}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Ils peuvent donc être écrits en fonction d'un potentiel vecteur comme suit

$$\bar{\rho}\vec{U} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_1 \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_2. \quad (\text{A.1})$$

Les potentiels vecteurs \vec{A}_1 et \vec{A}_2 peuvent à leur tour être exprimés comme la somme d'un potentiel scalaire poloïdal et d'un potentiel scalaire toroïdal. Les deux champs solénoïdaux, peuvent donc être représentés par la décomposition poloïdale-toroïdale suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\vec{U} &= \vec{P} + \vec{T} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\mathcal{W}\vec{e}_r)) + \vec{\nabla} \times (\mathcal{Z}\vec{e}_r), \\ \vec{B} &= \vec{B}_p + B_\phi\vec{e}_\phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times (\mathcal{G}\vec{e}_r)) + \vec{\nabla} \times (\mathcal{H}\vec{e}_r). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Cette manipulation permet de passer de six inconnues à quatre, tout en conservant la condition de solénoïdalité :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(U_r, U_\theta, U_\phi) &= \left(-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial \phi^2}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \phi}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \theta} \right), \\ (B_r, B_\theta, B_\phi) &= \left(-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \phi^2}, \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial r \partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Les potentiels scalaires \mathcal{W} , \mathcal{Z} , \mathcal{G} et \mathcal{H} sont ensuite développés sur la base des polynômes de Tchebychev dans la direction radiale, et sur la base des harmoniques sphériques dans les directions latitudinale et azimuthale.

Les polynômes de Tchebychev, sont les fonctions propres du problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{dC_n(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{-n^2}{\sqrt{1-\xi^2}} C_n(\xi), \quad (\text{A.4})$$

et sont définis par $C_n(\xi) = \cos(n \arccos(\xi))$, où $\xi \in [-1; 1]$ et n est le degré du polynôme. Ces derniers sont orthogonaux entre eux sur l'espace de Hilbert $\mathcal{L}_w^2[-1; 1]$ muni de la fonction poids

$w(\xi) = 1/\sqrt{1-\xi^2}$:

$$\int_{-1}^1 \frac{C_m(\xi)C_l(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = 0 \quad \text{si } m \neq l, \quad \pi \quad \text{si } m = l = 0 \quad \text{et } \frac{\pi}{2} \quad \text{si } m = l \neq 0. \quad (\text{A.5})$$

La représentation spectrale d'une fonction $W_1(r)$ est alors donnée par

$$W_1(r) = \sum_{n=0}^N A_n C_n(\xi) \quad \text{avec,} \quad A_n = \frac{\langle W_1, C_n \rangle}{\langle C_n, C_n \rangle} = \frac{2}{\pi(1+\delta_{0n})} \int_{-1}^1 \frac{W_1(\xi)C_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi. \quad (\text{A.6})$$

L'intégrale est évaluée à l'aide d'une méthode de quadrature : la quadrature de Gauss-Lobatto

$$\int_{-1}^1 \frac{W_1(\xi)C_n(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \approx \sum_{j=0}^N W_1(\xi_j)C_n(\xi_j)w_j, \quad (\text{A.7})$$

où les ξ_j sont les points de collocation, c'est-à-dire les points sur lesquels les poids de la quadrature w_j ainsi que les fonctions $W_1(\xi_j)$ et les polynômes $C_n(\xi_j)$ sont évalués :

$$\xi_j = \cos\left(\frac{(j-1)\pi}{N-1}\right) \quad \text{avec } j = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.8})$$

La spécificité de ces points de collocation est qu'ils ne sont pas uniformément répartis à travers $[-1, 1]$. En particulier ils sont plus nombreux à proximité des frontières ce qui permet une meilleure résolution numérique en présence de couches limites. Par définition, les valeurs des polynômes de Tchebychev en ces points sont données par

$$C_n(\xi_j) = \cos\left(\frac{n(j-1)\pi}{N-1}\right). \quad (\text{A.9})$$

Les poids w_j de la quadrature sont quant à eux définis par

$$w_1 = w_N = \frac{\pi}{2N} \quad \text{et} \quad w_j = \frac{\pi}{N} \quad \text{pour } j = 2, \dots, N-1. \quad (\text{A.10})$$

Finalement, un mapping est nécessaire pour faire correspondre l'espace de Tchebychev à la grille définissant la coquille sphérique :

$$\xi(r) = 2\left(\frac{r-r_i}{r_0-r_i}\right) - 1. \quad (\text{A.11})$$

Notons que la méthode des différences finies peut aussi être utilisée pour représenter les variations spatiales des différentes inconnues dans la direction radiale.

Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur Laplacien. En effet, l'équation de Laplace d'une fonction $\Psi(r, \theta, \phi)$ s'écrit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Cette équation peut être résolue par séparation des variables. En posant $\Psi(r, \theta, \phi) = F(r, \theta)g(\phi)$ et en introduisant la constante de séparation λ , on obtient alors deux équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2 g(\phi)}{d\phi^2} + \lambda g(\phi) = 0, \\ \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} \right) - \lambda F(r, \theta) = 0. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

La première de ces équations est aisément résolue pour aboutir aux fonctions propres $g(\phi) = A_m \sin(\sqrt{\lambda_m} \phi) + B_m \cos(\sqrt{\lambda_m} \phi)$. En utilisant les conditions de périodicité $g(0) = g(2\pi)$ et $g'(0) = g'(2\pi)$ on montre que les valeurs propres sont $\lambda_m = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit qu'en introduisant la nouvelle séparation de variables $F(r, \theta) = f(r)h(\theta)$ avec la constante de séparation Γ , l'équation (A.12) peut être réécrite sous la forme

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - \Gamma f = 0, \\ \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dh}{d\theta} \right) + \left(\Gamma \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) h = 0. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

En posant $x = \cos \theta$, la seconde équation se réécrit

$$(1 - x^2) \frac{d^2 h(x)}{dx^2} + 2x \frac{dh(x)}{dx} + \left[\Gamma - \frac{m^2}{(1 - x^2)} \right] h(x) = 0, \quad (\text{A.15})$$

qui est l'équation de Legendre associée (pour $m = 0$ on retrouve l'équation de Legendre). Les solutions de l'équation de Legendre présentent des singularités en $x = 1$ et -1 , c'est-à-dire en $\theta = 0$ et π , pour des valeurs générales de la constante de séparation Γ . Pour l'équation de Legendre associée on doit donc avoir $\Gamma = l(l + 1)$ pour des solutions qui ne tendent pas à l'infini en ces points particuliers, avec en plus $|m| \leq l$. Les solutions correspondantes sont les polynômes de Legendre associés

$$h(x) = P_l^m(\cos \theta), \quad (\text{A.16})$$

et sont les fonctions propres de l'équation de Legendre associée avec pour valeurs propres $l(l + 1)$ où $l = 0, 1, 2, \dots$ et telles que $|m| \leq l$. Finalement, la première équation de (A.14) est facilement résolue. Il s'agit d'un problème d'Euler dont la solution est $f(r) = C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}$. Par conséquent, la solution de l'équation de Laplace (A.12) s'écrit

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) (E_m \exp(im\phi) + F_m \exp(-im\phi)) P_l^m(\cos \theta), \quad (\text{A.17})$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(G_{l,m} r^l + \frac{H_{l,m}}{r^{l+1}} \right) \exp(im\phi) P_l^m(\cos \theta). \quad (\text{A.18})$$

Ce que l'on appelle harmoniques sphériques correspond à la partie angulaire de cette solution, à savoir

$$Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad \text{avec} \quad l \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad -l \leq m \leq l. \quad (\text{A.19})$$

Il s'agit des fonctions propres de l'opérateur :

$$\mathcal{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Le nom "harmonique sphérique" découle donc directement du fait que ces fonctions propres sont les solutions de la partie sphérique du Laplacien (rappelons qu'une fonction dont le laplacien est nul est appelée fonction harmonique), c'est-à-dire les solutions de l'équation aux valeurs propres $\mathcal{L}^2 (Y_l^m(\theta, \phi)) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi)$. Puisque les polynômes de Legendre sont orthogonaux et que les fonctions $\exp(im\phi)$ le sont aussi, les harmoniques sphériques sont orthogonaux et constituent une base de fonctions propres sur laquelle peut être développée la partie angulaire des différentes grandeurs. Ces fonctions n'étant pas naturellement normalisées, ceci peut se faire via leur produit scalaire hermitien

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_l^m(\theta, \phi) (Y_{l'}^{m'})^*(\theta, \phi) d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.21})$$

où l'indice * désigne le complexe conjugué. Ceci implique que

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi), \quad (\text{A.22})$$

forment désormais une base orthonormée. La représentation spectrale d'une fonction $W_2(\theta, \phi)$ est alors donnée par :

$$W_2(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l B_{lm} Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.23})$$

où

$$B_{lm} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi W_2(\theta, \phi) (Y_l^m)^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (\text{A.24})$$

De nouveau, cette double intégrale doit être évaluée à l'aide d'une méthode de quadrature. Dans MagIC, ceci se fait en deux étapes. On a :

$$B_{lm} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W_2(\theta, \phi) \exp(-im\phi) d\phi \right] P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (\text{A.25})$$

L'intégrale entre crochet est d'abord évaluée à l'aide d'une transformée de Fourier rapide. Alors l'intégrale restante, c'est-à-dire

$$B_{lm} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi W_{2m}(\theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (\text{A.26})$$

est à son tour évaluée à l'aide d'une méthode de quadrature de Gauss-Legendre

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi W_{2m}(\theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \approx \frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} W_{2m}(\theta_j) P_l^m(\cos \theta_j) w_j, \quad (\text{A.27})$$

où θ_j sont les points de collocation sur lesquels les fonctions W_{2_m} et les polynômes de Legendre sont évalués, et w_j sont les poids de la quadrature. Pour une quadrature de degré N_θ , les θ_j correspondent aux racines des polynômes de Legendre $P_{N_\theta}(\cos \theta)$. Les poids sont quant à eux définis par

$$w_j = \frac{2}{(1 - \cos^2(\theta_j))(P'_{N_\theta}(\cos \theta_j))^2} = \frac{2}{(N_\theta + 1)^2} \left(\frac{\sin \theta_j}{P_{N_\theta+1}(\cos \theta_j)} \right)^2, \quad (\text{A.28})$$

où le prime désigne la dérivée première. Notons que grâce à la bibliothèque SHTns (<https://nschaeff.bitbucket.io/shtns/>) développée par Schaeffer (2013), il est possible dans MagIC, d'effectuer des transformées en harmoniques sphériques de façon optimisée pour passer d'une représentation physique à une représentation spectrale.

L'utilisation d'une représentation spectrale exceptée pour les termes non-linéaires et le terme de Coriolis qui sont évalués dans l'espace physique, permet un découplage de l'ensemble des modes des harmoniques sphériques et d'augmenter la vitesse de calcul. Les équations résolues par cette méthode dite "pseudo-spectrale" sont finalement intégrées en temps à l'aide d'un mélange implicite et explicite de schémas temporels. La raison de ce mixte est similaire à celle qui pousse à l'utilisation d'une représentation physique pour les termes non-linéaires et le terme de Coriolis. L'utilisation de schémas temporels entièrement implicites induit un couplage de l'ensemble des modes des harmoniques sphériques à travers les termes non-linéaires. De même, l'accélération de Coriolis produit un couplage des modes (l, m) avec les modes $(l + 1, m)$ et les modes $(l - 1, m)$, ainsi qu'un couplage entre les potentiels poloïdal \mathcal{W} et toroïdal \mathcal{Z} . Pour cette raison, les termes non-linéaires et de Coriolis sont intégrés en temps à l'aide d'un schéma temporel explicite : le schéma d'Adams-Bashford. Les autres termes sont intégrés à l'aide d'un schéma implicite (de type Crank-Nicolson) qui offre une plus grande stabilité que le schéma explicite et permet l'utilisation de pas de temps plus importants :

$$\begin{cases} \left(\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \right)_{\mathcal{E}} = \frac{3}{2} \mathcal{E}(x, t) - \frac{1}{2} \mathcal{E}(x, t - \delta t), \\ \left(\frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t} \right)_{\mathcal{I}} = -\alpha \mathcal{I}(x, t + \delta t) - (1 - \alpha) \mathcal{I}(x, t), \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

où \mathcal{E} et \mathcal{I} désignent respectivement les termes traités explicitement et implicitement, et où α est le poids du nouveau pas de temps.

➤ La gymnastique MagIC :

L'adimensionnalisation des équations dans MagIC n'est pas identique à celle que nous avons effectuée en section 3.2. Il convient donc de faire le lien entre les deux formulations lorsque l'on compare nos résultats analytiques aux résultats des simulations numériques. Par exemple, l'échelle de longueur caractéristique est l'épaisseur de la coquille sphérique $L \sim d = r_0 - r_i$ tandis que l'échelle de temps caractéristique utilisée dans MagIC est un temps visqueux $t \sim d^2/\nu$ construit à partir de cette épaisseur. Les échelles caractéristiques restantes sont répertoriées dans le tableau A.1.

Grandeur thermodynamique	Échelle caractéristique	
	État de base	Fluctuation
Vitesse U	–	ν/d
Densité ρ	ρ_0	–
Pression P	–	$\rho\nu^2/d^2$
Température T	$\Delta\bar{T}$	$\Delta\bar{T}$
Entropie S	$\Delta\bar{S}$	→ entropie prescrite aux frontières
	$(d\bar{S}/dr)d$	→ flux d'entropie prescrit aux frontières
Champ magnétique B	$\sqrt{\mu_0\rho_0\nu}/d$	→ Repère fixe
	$\sqrt{\mu_0\rho_0\eta\Omega_0}$	→ Repère en rotation

Tableau A.1 : Échelles caractéristiques utilisées pour adimensionnaliser les équations dans MagIC.

ANNEXE B

L'ÉTAT HYDROSTATIQUE INDUIT PAR LA CONTRACTION

La vitesse radiale \vec{V}_f avec laquelle nous modélisons la contraction de la zone radiative, induit un champ de température à symétrie sphérique que nous noterons $T'(r)$ dans ce qui suit. Ce champ de température est à l'origine d'un second état hydrostatique qu'il est nécessaire de soustraire de nos équations avant d'analyser ces dernières.

Les fluctuations de température $\Theta'(r, \theta)$ qui apparaissent dans le système d'équations (3.15) peuvent se décomposer comme la somme d'un champ de température à symétrie sphérique et d'une déviation à cette symétrie sphérique :

$$\Theta'(r, \theta) = T'(r) + \delta\Theta(r, \theta), \quad (\text{B.1})$$

avec

$$T'(r) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \Theta'(r, \theta) \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_0^\pi \delta\Theta(r, \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (\text{B.2})$$

L'équation d'évolution de la température (dernière équation du système (3.15)) peut alors se réécrire en utilisant la décomposition de l'équation (B.1) comme :

$$\frac{\partial \delta\Theta}{\partial t} + ((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}) \delta\Theta + (U_r + V_f) \cdot \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right) = \kappa \vec{\nabla}^2 \delta\Theta + \kappa \vec{\nabla}^2 T'. \quad (\text{B.3})$$

À l'état stationnaire et dans la limite linéaire, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}) \delta\Theta}{(U_r + V_f) \cdot \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right)} \ll 1, \quad (\text{B.4})$$

l'équation (B.3) se simplifie pour donner :

$$(U_r + V_f) \cdot \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right) = \kappa \vec{\nabla}^2 \delta\Theta + \kappa \vec{\nabla}^2 T'. \quad (\text{B.5})$$

La moyenne latitudinale de cette équation donne alors

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right) \int_0^\pi U_r \sin \theta d\theta + V_f \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right) = \frac{\kappa}{2} \int_0^\pi \vec{\nabla}^2 \delta\Theta \sin \theta d\theta + \kappa \vec{\nabla}^2 T'. \quad (\text{B.6})$$

L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradski combiné à l'équation de continuité nous permet d'écrire la relation :

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) d\mathcal{V} = \oiint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Le choix de la surface fermée est une sphère. On a donc

$$\oiint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U_r r^2 \sin \theta d\phi d\theta = \pi r^2 \int_0^\pi U_r \sin \theta d\theta, \quad (\text{B.8})$$

et de l'équation (B.7) on en déduit :

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi U_r \sin \theta d\theta = 0. \quad (\text{B.9})$$

Par ailleurs,

$$\frac{\kappa}{2} \int_0^\pi \vec{\nabla}^2 \delta\Theta \sin \theta d\theta = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi \delta\Theta \sin \theta d\theta \right) \right] + \frac{\kappa}{r^2} \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \delta\Theta}{\partial \theta} \right) d\theta \right]. \quad (\text{B.10})$$

Par définition de (B.2), le premier terme du membre de droite est nul. La deuxième intégrale est nulle aussi puisque la fonction sinus s'annule en π et en 0. On en déduit :

$$V_f \left(\frac{d\bar{T}}{dr} + \frac{dT'}{dr} \right) = \kappa \vec{\nabla}^2 T'. \quad (\text{B.11})$$

Le gradient de \bar{T} est obtenu après résolution de l'équation de conduction $\vec{\nabla}^2 \bar{T} = 0$ qui, pour les conditions aux limites $\bar{T}(r = r_0) = T_0$ et $\bar{T}(r = r_i) = T_i$, donne la solution (3.12)

$$\bar{T}(r) = T_0 - \Delta\bar{T} \frac{r_i}{r} \left(\frac{r - r_0}{r_i - r_0} \right), \quad (\text{B.12})$$

où $\Delta\bar{T} = T_0 - T_i > 0$. On a ainsi,

$$\frac{d\bar{T}}{dr} = \frac{-r_i r_0}{r^2 (r_i - r_0)} \Delta\bar{T}. \quad (\text{B.13})$$

Afin de déterminer le champ de température à symétrie sphérique induit par la contraction, nous devons donc résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T'}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(2 + \frac{V_0 r_0^2}{\kappa r} \right) \frac{dT'}{dr} = \frac{V_0 r_0^3 r_i}{\kappa r^4 (r_i - r_0)} \Delta\bar{T}. \quad (\text{B.14})$$

Pour ce faire, on résout d'abord l'équation sans second membre. En posant $X = dT'/dr$ il vient

$$\frac{dX}{dr} + \frac{1}{r} \left(2 + \frac{V_0 r_0^2}{\kappa r} \right) X = 0, \quad (\text{B.15})$$

ce qui aboutit à la solution

$$X = \frac{C_1 \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right)}{r^2}. \quad (\text{B.16})$$

On utilise ensuite la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière. Puisque

$$\frac{dX}{dr} = \frac{C_1'(r)}{r^2} \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) - \frac{C_1(r)}{r^4} \left(2r + \frac{V_0 r_0^2}{\kappa}\right) \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right), \quad (\text{B.17})$$

en remplaçant dans l'équation (B.14), on obtient

$$C_1'(r) = \frac{V_0 r_0^3 r_i}{r^2 \kappa (r_i - r_0)} \exp\left(\frac{-V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) \Delta \bar{T}. \quad (\text{B.18})$$

En posant $u_1 = -V_0 r_0^2 / \kappa r \Rightarrow du_1 = V_0 r_0^2 / \kappa r^2$, on a alors

$$\begin{aligned} C_1(r) &= \int \frac{V_0 r_0^3 r_i}{r^2 \kappa (r_i - r_0)} \exp\left(\frac{-V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) \Delta \bar{T} dr \\ &= \int \frac{r_0 r_i}{(r_i - r_0)} e^{u_1} \Delta \bar{T} du_1 = \frac{r_0 r_i}{(r_i - r_0)} \Delta \bar{T} \exp\left(\frac{-V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) + C_2. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Donc :

$$X = \frac{C_2 \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right)}{r^2} + \frac{r_0 r_i}{r^2 (r_i - r_0)} \Delta \bar{T}. \quad (\text{B.20})$$

Avec la substitution $u_2 = V_0 r_0^2 / \kappa r \Rightarrow du_2 = -V_0 r_0^2 / \kappa r^2$, cette équation s'intègre de la même manière pour aboutir à la solution recherchée :

$$T'(r) = \frac{-C_2 \kappa}{V_0 r_0^2} \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) - \frac{r_0 r_i \Delta \bar{T}}{r (r_i - r_0)} + C_3. \quad (\text{B.21})$$

Les constantes C_2 et C_3 sont finalement déterminées à l'aide des conditions aux bords $T'(r_0) = T'(r_i) = 0$. En utilisant $T'(r_0) = 0$, on obtient

$$C_3 = C_2 \frac{\kappa}{V_0 r_0^2} \exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa}\right) + \frac{r_i}{(r_i - r_0)} \Delta \bar{T}. \quad (\text{B.22})$$

En injectant cette expression dans l'équation (B.21) puis en utilisant la seconde condition limite, il vient

$$C_2 = \frac{-V_0 r_0^2}{\kappa} \Delta \bar{T} \left[\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa}\right) - \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\kappa r}\right) \right]^{-1}, \quad (\text{B.23})$$

d'où,

$$\frac{T'(r)}{\Delta \bar{T}} = \frac{r_i}{r} \left(\frac{r - r_0}{r_i - r_0} \right) - \left[\frac{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right) - 1}{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r_i} - 1 \right) \right) - 1} \right]. \quad (\text{B.24})$$

Finalement, le champ de température à symétrie sphérique total $T_m(r) = \bar{T}(r) + T'(r)$ s'écrit :

$$T_m(r) = T_0 - \Delta \bar{T} \left[\frac{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)\right) - 1}{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r_i} - 1\right)\right) - 1} \right], \quad (\text{B.25})$$

et

$$\frac{dT_m}{dr} = \frac{V_0 r_0}{\kappa} \frac{r_0}{r^2} \Delta \bar{T} \left[\frac{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)\right)}{\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\kappa} \left(\frac{r_0}{r_i} - 1\right)\right) - 1} \right]. \quad (\text{B.26})$$

En pratique, lorsque $Re_c \leq 1$, le profil de température $\bar{T}(r)$ est à peine modifié par $T'(r)$ de sorte que $\bar{T}(r) \approx T_m(r)$. En revanche, pour $Re_c \gg 1$, la contribution provenant de $T'(r)$ n'est plus négligeable et le profil de température total $T_m(r)$ diffère fortement de $\bar{T}(r)$. Dans ce cas, l'état hydrostatique induit par la contraction doit être retiré des équations gouvernant la dynamique de l'écoulement. Après avoir soustrait l'équilibre thermique induit par la contraction, l'équation d'évolution de la température se réécrit :

$$\frac{\partial \delta \Theta}{\partial t} + [(\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}] \delta \Theta + U_r \frac{dT_m}{dr} = \kappa \vec{\nabla}^2 \delta \Theta. \quad (\text{B.27})$$

De même, après avoir retiré l'état hydrostatique

$$\frac{dP_c}{dr} = \frac{g_0 r}{r_0} \frac{T'(r)}{\bar{T}(r)}, \quad (\text{B.28})$$

forcé par l'écoulement de contraction, on obtient

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + [(\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} (\vec{U} + \vec{V}_f)] + 2\Omega_0 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \delta \Pi + \frac{g_0 r}{r_0} \frac{\delta \Theta}{\bar{T}(r)} \vec{e}_r + \nu \vec{\nabla}^2 (\vec{U} + \vec{V}_f). \quad (\text{B.29})$$

où $\delta \Pi = \Pi' - P_c$.

Le même type d'analyse peut être effectué dans le cas anélastique. La contraction du fluide va en effet induire un champ d'entropie à symétrie sphérique de sorte que les fluctuations d'entropie dans le système d'équation (3.13) peuvent se décomposer de la façon suivante :

$$S'(r, \theta) = S_c(r) + \delta S(r, \theta), \quad (\text{B.30})$$

où de nouveau :

$$S_c(r) = \frac{1}{2} \int_0^\pi S'(r, \theta) \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_0^\pi \delta S(r, \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (\text{B.31})$$

Donc l'équilibre suivant, dont $S_c(r)$ est solution, est induit par la contraction :

$$\frac{d^2 S_c}{dr^2} + \frac{1}{r} \left[2 + \frac{d \ln \bar{\rho}}{d \ln r} + \frac{d \ln \bar{T}}{d \ln r} + \frac{r V_f(r)}{\kappa} \right] \frac{d S_c}{dr} = \frac{V_f(r)}{\kappa} \frac{d \bar{S}}{dr}. \quad (\text{B.32})$$

Celui-ci peut être soustrait de l'équation d'évolution d'entropie qui se réécrit finalement

$$\bar{\rho} \bar{T} \left[\frac{\partial \delta S}{\partial t} + [(\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}] \delta S + U_r \frac{dS_m}{dr} \right] = \kappa \vec{\nabla} (\bar{\rho} \bar{T} \vec{\nabla} \delta S), \quad (\text{B.33})$$

où $S_m(r) = \bar{S}(r) + S_c(r)$. Alors, comme précédemment, après avoir retiré l'état hydrostatique

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{P_c}{\bar{\rho}} \right) = \frac{g_0 r_0^2}{C_p r^2} S_c(r). \quad (\text{B.34})$$

forcé par la contraction, l'équation de quantité de mouvement devient

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + [(\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla}] (\vec{U} + \vec{V}_f) + 2\Omega_0 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\delta \Pi}{\bar{\rho}} \right) + \frac{g_0 r_0^2}{C_p r^2} \delta S \vec{e}_r + \frac{\nu}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{B.35})$$

où de nouveau, $\delta \Pi = \delta \Pi' - P_c$. Notons que nous n'avons pas déterminé la solution analytique de S_c . Toutefois, ceci n'a que peu d'importance puisque nous souhaitons uniquement retirer l'état hydrostatique que ce champ induit afin d'analyser nos équations pour en déduire des lois d'échelles.

ANNEXE C

DESCRIPTION ANALYTIQUE DES COUCHES LIMITES

Reprenons le problème de Couette sphérique décrit dans la sous-section 2.3.1 du chapitre 2. Dans nos simulations (pour lesquelles $\Omega_i > \Omega_0$), les couches d'Ekman et de Hartmann localisées le long de la sphère externe ont une influence sur le corps du fluide. Pour cette raison, nous avons été amenés à les analyser. Dans cette annexe, nous résolvons les équations de ces couches limites en commençant par la couche d'Ekman.

C.1 Couche d'Ekman

Dans notre problème, une couche d'Ekman se développe le long de la sphère externe car le champ de vitesse n'est pas capable de satisfaire les conditions aux limites qu'on lui a prescrit. Les équations de la couche d'Ekman sont données par le système (2.47). Sous forme dimensionnelle, la seconde et la troisième équation de ce système s'écrivent :

$$\begin{cases} -2\Omega_0 \cos \theta U_\phi^E = \nu \frac{\partial^2 U_\theta^E}{\partial r^2}, \\ 2\Omega_0 \cos \theta U_\theta^E = \nu \frac{\partial^2 U_\phi^E}{\partial r^2}, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où l'indice E désigne la solution de couche limite. En introduisant la coordonnée étirée $\xi = \sqrt{r_0^2 \Omega_0 / \nu} (r_0 - r)$ adaptée à la description de l'écoulement dans la couche d'Ekman localisée à la sphère externe, le système d'équations (C.1) se réécrit :

$$\begin{cases} -2 \cos \theta U_\phi^E = r_0^2 \frac{\partial^2 U_\theta^E}{\partial \xi^2}, \\ 2 \cos \theta U_\theta^E = r_0^2 \frac{\partial^2 U_\phi^E}{\partial \xi^2}. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

Dans notre problème, nous imposons une condition d'imperméabilité sur la composante radiale du champ de vitesse et des conditions de non-glissement sur les composantes latitudinale et azimuthale. Sachant que la solution de couche limite doit être négligeable dans l'écoulement intérieur, dans le repère tournant à Ω_0 , ces conditions se traduisent par

$$\left\{ \begin{array}{l} U_r^I(r_0, \theta) + U_r^E(0, \theta) = 0, \\ U_\theta^I(r_0, \theta) + U_\theta^E(0, \theta) = 0, \\ U_\phi^I(r_0, \theta) + U_\phi^E(0, \theta) = 0, \\ U_r^E(\xi \rightarrow \infty, \theta) = U_\theta^E(\xi \rightarrow \infty, \theta) = U_\phi^E(\xi \rightarrow \infty, \theta) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{C.3})$$

où l'indice I désigne la solution intérieure. Pour résoudre le système d'équations (C.2), il convient d'introduire la variable complexe $X = U_\phi^E + iU_\theta^E$ puis de combiner ces équations sous la forme d'une unique équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2} + \frac{2i \cos \theta}{r_0^2} X = 0, \quad (\text{C.4})$$

dont la solution est

$$\begin{aligned} X(\xi, \theta) = & C_1 \exp\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \left[\cos\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) - i \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \right] + \\ & C_2 \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \left[\cos\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) + i \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

D'après la condition d'évanescence (dernière équation du système (C.3)), $C_1 = 0$. Par identification des parties réelle et imaginaire on obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\theta^E(\xi, \theta) = C_2 \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right), \\ U_\phi^E(\xi, \theta) = C_2 \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \cos\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right). \end{array} \right. \quad (\text{C.6})$$

D'après la condition de non glissement sur le champ de vitesse azimutale, $C_2 = -U_\phi^I(r_0, \theta)$. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\theta^E(\xi, \theta) = -\text{sgn}(\cos \theta) U_\phi^I(r_0, \theta) \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right), \\ U_\phi^E(\xi, \theta) = -\text{sgn}(\cos \theta) U_\phi^I(r_0, \theta) \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \cos\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right). \end{array} \right. \quad (\text{C.7})$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la composante radiale du champ de vitesse à l'aide de l'équation de continuité (dernière équation du système (2.47)). Sous forme dimensionnelle, celle-ci s'écrit, à l'aide de la coordonnée dilatée :

$$-\sqrt{\frac{r_0^2 \Omega_0}{\nu}} \frac{\partial U_r^E}{\partial \xi} + \frac{1}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta U_\theta^E) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Ainsi,

$$U_r^E(\xi, \theta) = - \int \frac{\sqrt{\nu/r_0^2 \Omega_0}}{r_0 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sgn}(\cos \theta) \sin \theta U_\phi^1(r_0, \theta) \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \right) d\xi. \quad (\text{C.9})$$

Après avoir déterminé la constante d'intégration à l'aide de la condition $U_r^E(\xi \rightarrow \infty, \theta) = 0$, nous obtenons la solution

$$U_r^E(\xi, \theta) = \frac{\sqrt{\nu/r_0^2 \Omega_0}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\operatorname{sgn}(\cos \theta) \sin \theta U_\phi^1(r_0, \theta) \exp\left(-\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \left(\cos\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) + \sin\left(\sqrt{|\cos \theta|} \frac{\xi}{r_0}\right) \right) / 2 \sqrt{|\cos \theta|} \right]. \quad (\text{C.10})$$

Finalement, en utilisant la première condition du système (C.3), nous voyons que la couche d'Ekman impose la relation suivante entre les composantes radiale et azimuthale du champ de vitesse du corps du fluide :

$$U_r^1(r_0, \theta) = - \frac{\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta) \sin \theta U_\phi^1(r_0, \theta)}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right). \quad (\text{C.11})$$

C.2 Couche de Hartmann

Lorsque l'on applique un champ magnétique poloïdal dans une configuration de couette sphérique, une couche de Hartmann peut se développer le long de la sphère externe pour accommoder un saut sur le champ magnétique toroïdal et sur la composante azimuthale du champ de vitesse. Comme nous l'avons expliqué dans la sous-section 2.3.3 du chapitre 2, si le nombre d'Elsasser, qui compare l'importance de la force de Lorentz à l'accélération de Coriolis, est de l'ordre de l'unité, alors la couche de Hartmann coexiste avec la couche d'Ekman pour donner la couche limite d'Ekman-Hartmann. Dans nos simulations, nous avons toujours $\Lambda \gg 1$ de sorte que l'effet de l'accélération de Coriolis peut être négligé devant celui de la force de Lorentz. Dans ce cas, les équations de la couche de Hartmann sont données par le système (2.57) que nous avons établi en sous-section 2.3.3 du chapitre 2.

Pour la configuration dipolaire utilisée au cours de cette thèse, $B_r(r_0, \theta) = -B_0 \cos \theta$. Dans tout ce qui suit, nous nous placerons dans l'hémisphère Nord. En introduisant la coordonnée dilatée $\xi = H_a (r_0 - r)$ adaptée à la description de la couche de Hartmann, où H_a est le nombre d'Hartmann, localisée le long de la sphère externe, le système d'équations (2.57) se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \frac{\partial B_\phi^H}{\partial \xi} = -r_0 \sqrt{\frac{\nu}{\eta}} \frac{\partial^2 U_\phi^H}{\partial \xi^2}, \\ \sqrt{\mu_0 \rho_0} \cos \theta \frac{\partial U_\phi^H}{\partial \xi} = -r_0 \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} \frac{\partial^2 B_\phi^H}{\partial \xi^2}. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

où l'indice H désigne la solution de couche limite. Concernant la composante azimuthale du champ de vitesse, la même condition limite que précédemment s'applique (i.e. non-glissement).

Dans notre problème, les sphères externe et interne sont isolantes. Puisque la solution de couche limite doit disparaître dans l'écoulement intérieur, les conditions aux limites associées au système d'équations (C.12) sont :

$$\begin{cases} U_{\phi}^I(r_0, \theta) + U_{\phi}^H(0, \theta) = 0, \\ B_{\phi}^I(r_0, \theta) + B_{\phi}^H(0, \theta) = 0, \\ B_{\phi}^H(\xi \rightarrow \infty, \theta) = U_{\phi}^H(\xi \rightarrow \infty, \theta) = 0, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

où de nouveau, l'indice I désigne la solution intérieure. Après avoir dérivé la seconde équation du système (C.12) et l'avoir combinée à la première, nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^3 B_{\phi}^H}{\partial \xi^3} - \frac{\cos^2 \theta}{r_0^2} \frac{\partial B_{\phi}^H}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{C.14})$$

qui admet pour solution

$$B_{\phi}^H(\xi, \theta) = C_1 + \frac{C_2 r_0}{\cos \theta} \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right) + \frac{C_3 r_0}{\cos \theta} \exp\left(\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right). \quad (\text{C.15})$$

En utilisant la condition d'évanescence (c'est-à-dire $B_{\phi}^H(\xi \rightarrow \infty, \theta) = 0$), nous obtenons $C_1 = C_3 = 0$. Alors, de la seconde condition du système (C.13) nous avons $C_2 = -(\cos \theta / r_0) B_{\phi}^I(r_0, \theta)$. Nous en déduisons :

$$B_{\phi}^H(\xi, \theta) = -B_{\phi}^I(r_0, \theta) \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right). \quad (\text{C.16})$$

En intégrant la seconde équation du système (C.12) après lui avoir substitué l'expression de $\partial^2 B_{\phi}^H / \partial \xi^2$ grâce à la solution (C.16), il vient :

$$U_{\phi}^H(\xi, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} B_{\phi}^I(r_0, \theta) \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right) + C_4. \quad (\text{C.17})$$

La condition d'évanescence donne $C_4 = 0$. Donc, d'après la première condition du système (C.13), nous obtenons la relation suivante entre le champ toroïdal et la composante azimuthale du champ de vitesse du corps du fluide :

$$U_{\phi}^I(r_0, \theta) = \sqrt{\frac{\eta}{\mu_0 \rho_0 \nu}} B_{\phi}^I(r_0, \theta). \quad (\text{C.18})$$

ANNEXE D

SOLUTIONS ANALYTIQUES DE LA ROTATION DIFFÉRENTIELLE

Dans cette annexe sont regroupées les différentes solutions analytiques de la rotation différentielle stationnaire obtenues au cours de ce travail.

D.1 Rotation différentielle maximale

Lorsque la contraction est si forte qu'aucun processus de redistribution du moment cinétique n'est capable de la contrebalancer, la rotation différentielle est maximale et ce, indépendamment du niveau de stratification en densité. Dans ce cas l'équation du moment cinétique (3.21) s'écrit, à l'état stationnaire,

$$\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^3} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \Omega_0 \left(\frac{\delta \Omega}{\Omega_0} + 1 \right) \right) \right] = 0, \quad (\text{D.1})$$

ou encore :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta \Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{2}{r} \frac{\delta \Omega}{\Omega_0} = \frac{-2}{r}. \quad (\text{D.2})$$

La résolution est quasi-immédiate. Posons $Y = \delta \Omega / \Omega_0$. L'équation homogène associée s'écrit

$$\frac{dY_h}{dr} + \frac{2}{r} Y_h = 0, \quad (\text{D.3})$$

ce qui donne immédiatement

$$Y_h = \frac{C_1}{r^2}. \quad (\text{D.4})$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante pour trouver la solution particulière, on obtient

$$C_1(r) = \int -2r = -r^2 + C_2, \quad (\text{D.5})$$

d'où,

$$Y = \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{C_2}{r^2} - 1. \quad (\text{D.6})$$

De la condition limite à la sphère externe $\delta\Omega(r = r_0)/\Omega_0 = 0$ il vient alors :

$$\boxed{\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{r_0^2}{r^2} - 1} \quad (\text{D.7})$$

Il s'agit de la valeur seuil du niveau de rotation différentielle qui ne peut pas être excédée. Dans notre configuration où le rayon de la sphère interne vaut $r_i = 0.3 r_0$ avec r_0 le rayon de la sphère externe, cette valeur vaut $\Delta\Omega_{\max}/\Omega_0 \approx 10.1$.

D.2 Rotation différentielle dans le cas hydrodynamique

Lorsque l'amplitude de la contraction est suffisamment faible, le système peut se réajuster en réponse à l'écoulement de contraction. Dans ce cas, le moment cinétique est redistribué, soit par une circulation méridienne, soit par des effets visqueux. Dans ce qui suit, nous donnons les solutions analytiques de la rotation différentielle stationnaire qui résulte de l'équilibre entre le transport du moment cinétique assuré par la contraction, et le processus de redistribution dominant, en l'absence de champ magnétique. Nous commençons par le régime de Taylor-Proudman dans lequel la circulation d'Ekman prend en charge la redistribution du moment cinétique.

D.2.1 Régime de Taylor-Proudman

Lorsque l'écoulement n'est pas stratifié, ou qu'il l'est très faiblement ($P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll \sqrt{E}$), la circulation d'Ekman domine le transport du moment cinétique. Dans ce cas, l'équation de conservation du moment cinétique (3.21) stationnaire et linéaire, résulte en un équilibre entre l'accélération de Coriolis et la force de contraction. Dans l'approximation de Boussinesq et dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, cet équilibre s'écrit (sous forme adimensionnée) :

$$\tilde{U}_s = \frac{\sin \theta}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{s}}{(\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}}, \quad (\text{D.8})$$

où $\tilde{s} = \tilde{r} \sin \theta$ et $\tilde{z} = \tilde{r} \cos \theta$. Soit la fonction de courant Ψ telle que

$$\tilde{U}_s = \frac{-1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_z = \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{z}}. \quad (\text{D.9})$$

Alors, d'après l'équation (D.8) on obtient :

$$\tilde{\Psi}(s, z) = \frac{-\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2}} + \tilde{f}(s). \quad (\text{D.10})$$

On en déduit

$$\tilde{U}_z = \frac{\tilde{z}}{(\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} = \frac{\cos \theta}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}}. \quad (\text{D.11})$$

L'utilisation des relations entre systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique nous donne

$$U_r = U_s \sin \theta + U_z \cos \theta \quad \text{et} \quad U_\theta = U_s \cos \theta - U_z \sin \theta. \quad (\text{D.12})$$

Ainsi,

$$\tilde{U}_r = \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \cos \theta \quad \text{et} \quad \tilde{U}_\theta = -\frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \sin \theta. \quad (\text{D.13})$$

D'après la condition d'imperméabilité à la sphère interne ($\tilde{U}_r(r_i, \theta) = 0$), on a :

$$\left. \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \right|_{\theta \in [0; \pi/2]} = \frac{-1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \right|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} = \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}. \quad (\text{D.14})$$

En outre, par symétrie, $\tilde{U}_z = 0$ à l'équateur. Cela implique que $\tilde{f}'(s)/\tilde{s} = 0$ lorsque $\tilde{r} > \tilde{r}_i$. On en déduit les solutions analytiques du champ de vitesse méridien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} = \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} = \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_r(s > r_i, z) = \frac{1}{\tilde{r}^2}, \\ \tilde{U}_\theta(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} = \frac{\sin \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \quad \text{et} \quad \tilde{U}_\theta(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} = -\frac{\sin \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_\theta(s > r_i, z) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{D.15})$$

où $\cos \theta_i = \sqrt{1 - (\tilde{s}/\tilde{r}_i)^2}$. Par ailleurs, en intégrant l'équation (D.14), on obtient également l'expression de la fonction de courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} = -\cos \theta + \cos \theta_i + \text{cte}, \\ \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} = -\cos \theta - \cos \theta_i + \text{cte}. \end{array} \right. \quad (\text{D.16})$$

Comme cette fonction est nulle aux pôles, on en déduit que $\text{cte} = 0$. Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires pour déterminer la rotation différentielle.

La conservation de la masse impose la relation suivante

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) dV = \iint_S \vec{U} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (\text{D.17})$$

c'est-à-dire, en coordonnées sphériques :

$$\iint \tilde{U}_r \tilde{r} d\theta \tilde{r} \sin \theta d\phi + \iint \tilde{U}_\theta dr \tilde{r} \sin \theta d\phi = 0. \quad (\text{D.18})$$

Comme nous l'avons montré en annexe C.1, la couche d'Ekman localisée le long de la sphère externe impose une relation entre les composantes radiale et azimuthale du champ de vitesse intérieur (cf. équation (C.11)). Sous forme adimensionnée, cette relation s'écrit :

$$\tilde{U}_r(r = 1, \theta) = \frac{-\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \sin \theta \tilde{U}_\phi^I(r = 1, \theta)}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right). \quad (\text{D.19})$$

Par ailleurs, nous disposons également de la relation

$$\tilde{U}_\theta = \frac{-1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} = \frac{-\cos \theta}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z}. \quad (\text{D.20})$$

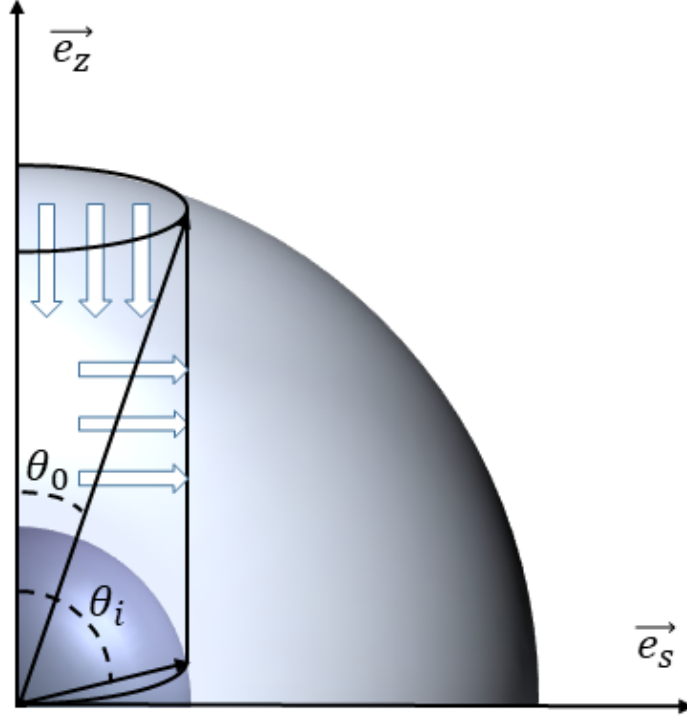


FIGURE D.1 : Illustration du cylindre coaxial de rayon $s = r \sin \theta$ compris entre $z_0 = r_0 \sqrt{1 - (s/r_0)^2}$ et $z_i = r_i \sqrt{1 - (s/r_i)^2}$, à l'intérieur duquel est effectué le bilan de flux de masse donné par l'équation (D.21).

En utilisant la contrainte de Taylor-Proudman¹ $\partial \tilde{U}_\phi / \partial z$ valable dans le corps du fluide, conjointement aux équations (D.19) et (D.20), nous pouvons déterminer la solution analytique de la rotation différentielle en effectuant un bilan de masse entre le flux de masse qui quitte la couche d'Ekman localisée à la sphère externe pour pénétrer dans un cylindre coaxial de rayon $s = r \sin \theta$ tel qu'illustré sur la figure D.1, et le flux de masse qui quitte ce cylindre :

$$- \iint \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds d\phi = \iint \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} dz d\phi. \quad (\text{D.21})$$

Soit \tilde{Q}_s le flux de masse adimensionné quittant ce cylindre. En utilisant (D.16), nous avons :

$$\tilde{Q}_s = 2\pi \int_{\tilde{z}_i}^{\tilde{z}_0} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} dz = -2\pi (\cos \theta_0 - \cos \theta_i), \quad (\text{D.22})$$

où $\tilde{z}_0 = \sqrt{1 - \tilde{s}^2}$ et $\tilde{z}_i = \tilde{r}_i \sqrt{1 - (\tilde{s}/\tilde{r}_i)^2}$. De même, soit \tilde{Q}_z le flux de masse adimensionné qui pénètre à l'intérieur du cylindre. Alors :

1. Nous employons le terme de "contrainte de Taylor-Proudman" bien que strictement parlant, celle-ci implique que toutes les composantes du champ de vitesse soient indépendantes de la coordonnée verticale (cf. équation (2.51) de la sous-section 2.3.1 du chapitre 2), ce qui n'est pas le cas ici où seule $\partial U_\phi / \partial z = 0$.

$$\tilde{Q}_z = -2\pi \sqrt{E} \int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds = -2\pi \sqrt{E} \frac{\tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}}. \quad (\text{D.23})$$

Donc d'après l'équation (D.21), il vient la relation

$$2\pi (\cos \theta_0 - \cos \theta_i) = 2\pi \sqrt{E} \frac{\tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}}, \quad (\text{D.24})$$

à partir de laquelle nous trouvons la solution (3.42) donnée sous forme dimensionnelle dans la partie 3.4.1.1 du chapitre 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \tilde{\Omega}_{\text{TP}}(s \leq r_i) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{2}{\tilde{s}^2} (\cos \theta_0 - \cos \theta_i) \sqrt{|\cos \theta_0|} \right] \\ \delta \tilde{\Omega}_{\text{TP}}(s > r_i) = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{2}{\tilde{s}^2} \cos \theta_0 \sqrt{|\cos \theta_0|} \right] \end{array} \right. \quad (\text{D.25})$$

D.2.2 Particularité du régime d'Eddington-Sweet

Comme nous en avons discuté dans la partie 3.4.1.1 du chapitre 3, en raison de la complexité de l'écoulement, nous n'avons pas pu déterminer de solution analytique de la rotation différentielle dans ce régime. Toutefois, l'analyse de nos résultats numériques a montré qu'il était nécessaire de prendre en compte le rôle de la couche d'Ekman localisée à la sphère externe sur le corps du fluide. Dans cette annexe, nous montrons que cette couche modifie la rotation différentielle qui se comporte alors comme la somme d'une solution de type Eddington-Sweet, à laquelle s'ajoute la solution de Taylor-Proudman (D.25).

Dans l'approximation de Boussinesq, les équations de quantité de mouvement, de température et de continuité, axisymétriques, stationnaires et linéaires, s'écrivent sous forme adimensionnée :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \sin \theta \tilde{U}_\phi = -\frac{\partial \delta \tilde{\Pi}}{\partial r} + \delta \tilde{\Theta} \tilde{r} + E \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Big|_{\vec{e}_r}, \\ -2 \cos \theta \tilde{U}_\phi = -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \delta \tilde{\Pi}}{\partial \theta} + E \vec{\nabla}^2 \vec{U} \Big|_{\vec{e}_\theta}, \\ 2 \cos \theta \tilde{U}_\theta + 2 \sin \theta \tilde{U}_r - \frac{2 \sin \theta}{\tilde{r}^2} = E \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{U}_\phi, \\ P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \tilde{U}_r \frac{d\tilde{T}_m}{dr} = E \vec{\nabla}^2 \delta \tilde{\Theta}, \\ \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{r}^2 \tilde{U}_r) + \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) = 0. \end{array} \right. \quad (\text{D.26})$$

Formellement, on décompose alors la solution comme la somme d'une solution intérieure et d'une solution de couche limite :

$$\{\vec{U}, P, \delta \Theta\} = \{\vec{U}^I(r, \theta), P^I(r, \theta), \delta \Theta^I(r, \theta)\} + \{\vec{U}^E(\xi, \theta), P^E(\xi, \theta), \delta \Theta^E(\xi, \theta)\} = \{\vec{0}, 0, 0\}, \quad (\text{D.27})$$

où, comme dans la sous-section 2.3.1 du chapitre 2, $\tilde{\xi} = E^{-1/2} (1 - \tilde{r})$ désigne la coordonnée étirée adaptée à la description de l'écoulement dans la couche d'Ekman située à la sphère externe, et où la solution de couche limite doit être négligeable dans le corps du fluide, c'est-à-dire $\lim_{\tilde{\xi} \rightarrow \infty} \vec{U}^E(\tilde{\xi}, \theta) = \vec{0}$, $\lim_{\tilde{\xi} \rightarrow \infty} P^E(\tilde{\xi}, \theta) = 0$ et $\lim_{\tilde{\xi} \rightarrow \infty} \delta\Theta^E(\tilde{\xi}, \theta) = 0$. Nous supposons maintenant le développement asymptotique suivant pour l'écoulement intérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{U}_\phi^I = \frac{P_r (N_0/\Omega_0)^2}{E} \tilde{U}_\phi^{I(0)} + \frac{1}{\sqrt{E}} \tilde{U}_\phi^{I(1)}, \\ \tilde{U}_r^I = \tilde{U}_r^{I(0)}, \\ \tilde{U}_\theta^I = \tilde{U}_\theta^{I(0)}, \\ \delta\tilde{\Theta}^I = \frac{P_r (N_0/\Omega_0)^2}{E} \delta\tilde{\Theta}^{I(0)}, \end{array} \right. \quad (\text{D.28})$$

avec $E^{-1/2} \ll P_r (N_0/\Omega_0)^2 / E$. En substituant ce développement dans le système d'équations (D.26), on obtient à l'ordre dominant :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial \tilde{U}_\phi^{I(0)}}{\partial z} = \frac{\partial \delta\tilde{\Theta}^{I(0)}}{\partial \theta}, \\ \tilde{U}_s^{I(0)} = \frac{\sin \theta}{\tilde{r}^2}, \\ \tilde{U}_r^{I(0)} \frac{d\tilde{T}_m}{dr} = \vec{\nabla}^2 \delta\tilde{\Theta}^{I(0)}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{U}^{I(0)} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{D.29})$$

La première équation est l'équilibre du vent thermique que nous avons rencontré pour la première fois dans ce manuscrit dans la partie 2.1.1.2 du chapitre 2. La seconde est l'équilibre entre l'accélération de Coriolis et le terme de contraction. Comme dans le régime de Taylor-Proudman, une circulation U_s est forcée par l'écoulement de contraction et son amplitude est du même ordre de grandeur que l'amplitude de la vitesse de contraction. La troisième équation est l'équilibre thermique dont nous avons également discuté en 2.1.1.2 et la dernière, l'équation de continuité.

Comme nous l'avons fait précédemment dans l'annexe D.2.1, puisque l'on connaît l'expression de $\tilde{U}_s^{I(0)}$ (seconde équation du système (D.29)), on peut déterminer la fonction de courant à une fonction de s près, puis la composante verticale du champ de vitesse. En utilisant ensuite la condition d'imperméabilité $\tilde{U}_r^{I(0)}(\tilde{r}_i, \theta) = 0$, puis la condition de symétrie à l'équateur sur la vitesse verticale et enfin les relations entre système de coordonnées cylindrique et sphérique (équation (D.12)), on peut en déduire $\tilde{U}_r^{I(0)}$. On suppose alors que $\delta\tilde{\Theta}^{I(0)}$ admet une solution qui peut être déterminée à l'aide de l'équation d'équilibre thermique et des conditions aux limites $\delta\tilde{\Theta}^{I(0)}(1, \theta) = \delta\tilde{\Theta}^{I(0)}(\tilde{r}_i, \theta) = 0$. De même, la composante azimuthale du champ de vitesse est déterminée à l'aide de l'équation du vent thermique et des conditions aux limites $\tilde{U}_\phi^{I(0)}(1, \theta) = 0$ et $\partial(\tilde{U}_\phi^{I(0)}/\tilde{r})/\partial r \Big|_{r=\tilde{r}_i} = 0$.

Néanmoins, comme l'écoulement intérieur n'est pas capable de satisfaire les conditions aux limites qu'on lui a prescrite, une couche d'Ekman apparaît à la sphère externe pour accommoder un saut d'ordre $E^{-1/2}$ sur la composante azimuthale du champ de vitesse, ainsi qu'un saut $O(1)$ sur les composantes radiale et latitudinale du champ de vitesse. En insérant le développement limité (D.28) dans le système d'équations (D.26) et en s'arrêtant cette fois-ci à l'ordre $E^{-1/2}$, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{U}_\phi^{I(1)}}{\partial z} = 0. \quad (\text{D.30})$$

On peut montrer que cette solution est celle du régime de Taylor-Proudman (i.e. (D.25)). En effet, les équations de la couche d'Ekman sont données par le système (2.47) établi en sous-section 2.3.1 du chapitre 2. La seconde et la troisième des équations de ce système sont résolues pour aboutir aux solutions (C.7) pour les composantes azimuthale et latitudinale du champ de vitesse, tandis que la dernière est intégrée pour aboutir à la condition de pompage (C.11). Donc en utilisant cette condition, conjointement à la contrainte de Taylor-Proudman (D.30) et à la solution de la composante latitudinale du champ de vitesse intérieur (déterminée de la même façon que $\tilde{U}_r^{I(0)}$), on obtient après avoir effectué un bilan de masse dans un cylindre axial de rayon s , la solution (D.25). Par conséquent, la solution intérieure de la composante azimuthale du champ de vitesse s'écrit comme :

$$\tilde{U}_{\phi_{\text{tot}}}^I = \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\tilde{U}_{\phi_{\text{TP}}}^I + \frac{P_r (N_0/\Omega_0)^2}{\sqrt{E}} \tilde{U}_{\phi_{\text{ED}}}^I \right]. \quad (\text{D.31})$$

Elle montre que plus le rapport $P_r (N_0/\Omega_0) / \sqrt{E}$ est élevé, plus la contribution de Taylor-Proudman devient négligeable. Dans nos simulations, les régimes de paramètres sont tels que ce rapport peut être proche de 1 (par exemple pour $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$ et $E = 10^{-5}$, ce rapport vaut ~ 3.16) et donc que la contribution de Taylor-Proudman joue un rôle important sur la dynamique de l'écoulement intérieur. Il est ainsi nécessaire de soustraire la solution (D.25) à la solution numérique pour s'affranchir de cette contribution. Par ailleurs, proche de la sphère externe, celle-ci ne peut jamais être entièrement négligée car la solution d'Eddington-Sweet $U_{\phi_{\text{ED}}}^I$ satisfait la condition de non-glissement et disparaît à cet endroit.

D.2.3 Régime Visqueux

Lorsque l'amplitude de la stratification stable est élevée ($P_r (N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$), les effets visqueux dominent le transport du moment cinétique. Dans ce cas, l'équation de conservation du moment cinétique (3.21) stationnaire et linéaire, résulte en un équilibre entre les contraintes visqueuses et le terme de contraction.

D.2.3.1 Cas Boussinesq

Dans l'approximation de Boussinesq, cet équilibre s'écrit :

$$-\frac{V_0 r_0^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \sin \theta \Omega_0 \left(\frac{\delta \Omega}{\Omega_0} + 1 \right) \right] = \nu \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \frac{\delta \Omega}{\Omega_0}. \quad (\text{D.32})$$

Cette équation est maintenant résolue à l'aide des conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\delta \Omega(r_0, \theta)}{\Omega_0} = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta \Omega(r, \theta)}{\Omega_0} \right) \right|_{r=r_i} = 0. \quad (\text{D.33})$$

Plaçons-nous tout d'abord dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$. Alors l'équation (D.32) se simplifie pour donner

$$-2 \sin \theta \frac{V_0 r_0^2}{r^2} = \nu \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) r \sin \theta \frac{\delta\Omega}{\Omega_0}, \quad (\text{D.34})$$

ce qui en explicitant chaque terme se met sous la forme

$$\frac{-2}{r} \frac{V_0 r_0^2}{\nu} = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + 4r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + 3 \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right). \quad (\text{D.35})$$

Les résultats des simulations numériques effectuées dans le régime visqueux montrent que la rotation différentielle est essentiellement radiale. Donc l'équation (D.35) se simplifie pour donner :

$$r^3 \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + 4r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) = \frac{-2V_0 r_0^2}{\nu}. \quad (\text{D.36})$$

Afin de résoudre cette équation, on pose $X = \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right)$. Alors :

$$r^3 \frac{dX}{dr} + 4r^2 X = \frac{-2V_0 r_0^2}{\nu}. \quad (\text{D.37})$$

Commençons par la résolution de l'équation sans second membre :

$$r^3 \frac{dX_h}{dr} + 4r^2 X_h = 0. \quad (\text{D.38})$$

On obtient aisément

$$X_h = \frac{C_1}{r^4}. \quad (\text{D.39})$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante on a alors

$$X_h = \frac{C_1(r)}{r^4} \Rightarrow \frac{dX_h}{dr} = \frac{C_1'(r)}{r^4} - \frac{4C_1(r)}{r^5}, \quad (\text{D.40})$$

ce qui en injectant dans l'équation (D.37) donne

$$C_1'(r) = \frac{-2V_0 r_0^2 r}{\nu} \Rightarrow C_1(r) = \frac{-V_0 r_0^2 r^2}{\nu} + C_2, \quad (\text{D.41})$$

et finalement,

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) = \frac{C_2}{r^4} - \frac{-V_0 r_0^2}{\nu r^2} \Rightarrow \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = -\frac{C_2}{3r^3} + \frac{-V_0 r_0^2}{\nu r} + C_3. \quad (\text{D.42})$$

En utilisant les conditions aux limites (D.33) on obtient la solution recherchée

$$\boxed{\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{V_0 r_0}{\nu} \left[\frac{r_i^2}{3r_0^2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) + \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right]} \quad (\text{D.43})$$

valable tant que $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$.

Lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$, le terme de contraction (membre de gauche de l'équation (D.32)) ne peut plus être simplifié et l'on doit considérer la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$r^3 \frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + r \left(4r + \frac{V_0 r_0^2}{\nu} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{2V_0 r_0^2}{\nu} \frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{-2V_0 r_0^2}{\nu}. \quad (\text{D.44})$$

Cette équation peut être résolue à l'aide d'un solveur avec les conditions aux limites (D.33) pour donner la solution :

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{\left[\frac{2r^2}{r_0^2} \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right) - \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r}\right) \right) + \frac{V_0 r_i}{\nu} \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r_i}\right) \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right) + 2\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right) \right]}{r^2 \left[\frac{r_i}{r_0} \left(\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right)^2 + \frac{2V_0 r_0}{\nu} + 2 \right) \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r_i}\right) - 2 \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} + \frac{r_i}{r_0} \right) \exp\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right) \right]} \quad (\text{D.45})$$

Nous pouvons vérifier que cette solution est correcte en réalisant un développement limité en $V_0 r_0/\nu$ jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}((V_0 r_0/\nu)^3)$ pour le numérateur et l'ordre $\mathcal{O}((V_0 r_0/\nu)^2)$ pour le dénominateur. Nous devons en effet retomber sur la solution (D.43) dans la limite $V_0 r_0/\nu \ll 1$. Prenons le premier membre du numérateur :

$$\begin{aligned} \frac{2r^2}{r_0^2} \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right) - \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r}\right) \right) &\approx \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^3 \left(\frac{r_i r^2}{3r_0^3} - \frac{r_i}{3r} + \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right) + \\ &\left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^2 \left(\frac{2r^2}{r_0^2} - \frac{2r}{r_0} + \frac{r_i r^2}{r_0^3} - \frac{r_i}{r_0} \right) + \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right) \left(\frac{2r_i r^2}{r_0^3} - \frac{2r r_i}{r_0^2} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (\text{D.46})$$

De même, nous avons pour le second membre :

$$\begin{aligned} \frac{V_0 r_i}{\nu} \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r_i}\right) \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right) + 2\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right) &\approx \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^3 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} + \frac{r}{r_i} - \frac{r^2}{r_i r_0} \right) + \\ \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^2 \left(\frac{r_i}{r_0} - \frac{r_i r^2}{r_0^3} + \frac{2r}{r_0} - \frac{2r^2}{r_0^2} \right) &+ \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right) \left(\frac{2r r_i}{r_0^2} - \frac{2r_i r^2}{r_0^3} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

En sommant les deux termes nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{2r^2}{r_0^2} \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(\exp\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right) - \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r}\right) \right) + \frac{V_0 r_i}{\nu} \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r_i}\right) \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right) + 2\frac{r}{r_0} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right) & \\ \approx \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^3 \frac{r_i r^2}{r_0 r_0^2} \left[\frac{r_i}{3r_0} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) + \frac{r_0}{r_i} \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right] + \mathcal{O}\left(\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right)^4\right). \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

Finalement, le développement limité du dénominateur donne

$$\frac{r^2}{r_0^2} \left[\frac{r_i}{r_0} \left(\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right)^2 + \frac{2V_0 r_0}{\nu} + 2 \right) \exp\left(\frac{V_0 r_0^2}{\nu r_i}\right) - 2 \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} + \frac{r_i}{r_0} \right) \exp\left(\frac{V_0 r_0}{\nu}\right) \right] \approx \left(\frac{V_0 r_0}{\nu} \right)^2 \left(\frac{r_0}{r_i} \right) \frac{r^2}{r_0^2}. \quad (\text{D.49})$$

En regroupant le numérateur et le dénominateur, nous retrouvons ainsi la solution donnée par l'équation (D.43).

D.2.3.2 Cas anélastique

Intéressons-nous maintenant au cas anélastique où la stratification en densité doit être prise en compte. L'équation (D.32) se réécrit

$$-\frac{V_0\rho_0r_0^2}{\bar{\rho}r^3}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\sin\theta\Omega_0\left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}+1\right)\right]=\nu\left[\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}+\frac{r\sin\theta}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}\right)\right]. \quad (\text{D.50})$$

Comme précédemment, dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ cette expression se simplifie pour donner

$$\bar{\rho}r^3\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}\right)+r^2\left[4\bar{\rho}+r\frac{d\bar{\rho}}{dr}\right]\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}\right)=\frac{-2V_0\rho_0r_0^2}{\nu}, \quad (\text{D.51})$$

où nous avons encore supposé que la rotation différentielle était à symétrie sphérique en accord avec les résultats de nos simulations numériques. En posant $Y(r) = d(\delta\Omega/\Omega_0)/dr$, on se ramène à une équation différentielle du premier ordre dont l'équation homogène associée s'écrit

$$\frac{dY_h(r)}{dr} = \frac{-4}{r} - \frac{d\ln\bar{\rho}}{dr}, \quad (\text{D.52})$$

ce qui après intégration donne

$$Y_h(r) = \frac{C_1}{\bar{\rho}r^4}. \quad (\text{D.53})$$

De nouveau, avec la méthode de variation de la constante il s'ensuit que

$$C_1(r) = \frac{-V_0\rho_0r_0^2r^2}{\nu} + C_2, \quad (\text{D.54})$$

ce qui aboutit à

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0}\right) = \frac{C_2}{\bar{\rho}r^4} - \frac{V_0r_0^2\rho_0}{\bar{\rho}r^2\nu}. \quad (\text{D.55})$$

Alors la condition limite portant sur la dérivée permet de déterminer la constante C_2 :

$$C_2 = \frac{V_0\rho_0r_i^2r_0^2}{\nu}. \quad (\text{D.56})$$

On en déduit la solution finale

$$\boxed{\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{V_0r_0}{\nu} \int_1^{r_i/r_0} \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \left[\frac{(r_i/r_0)^2 - (r/r_0)^2}{(r/r_0)^4} \right] d\left(\frac{r}{r_0}\right)} \quad (\text{D.57})$$

Dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$, nous ne pouvons pas déterminer de forme analytique exacte et la résolution de l'équation (D.50) se fait numériquement.

D.3 Rotation différentielle dans les zones mortes en régime visqueux

Dans cette annexe, nous déterminons une solution analytique approximative de la rotation différentielle dans la zone morte lorsque celle-ci n'est pas advectée par la contraction, et lorsqu'elle l'est. Pour ce faire, nous résolvons l'équation (D.32) dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ et dans un domaine conique représentatif de la zone morte. L'ensemble des calculs est mené sous forme adimensionnelle.

Dans la limite $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, l'équation (D.32) s'écrit :

$$\tilde{r} \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \delta\tilde{\Omega}}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cot \theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \delta\tilde{\Omega}}{\partial \theta} = \frac{-2}{E\tilde{r}^2}. \quad (\text{D.58})$$

Dans ce qui suit, nous négligeons le terme $(3\tilde{r} \cot \theta) (\partial \delta\tilde{\Omega} / \partial \theta)$, son influence étant négligeable en comparaison des autres termes. Donc l'équation (D.58) se réécrit :

$$\tilde{r} \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \delta\tilde{\Omega}}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} = \frac{-2}{E\tilde{r}^2}. \quad (\text{D.59})$$

La méthode de résolution de cette équation est tirée d'un cours du Ira A. Fulton College of Engineering and Technology de la Brigham Young University (<https://www.et.byu.edu/~vps/ME505/IEM/0802.pdf>). Les grandes lignes de cette méthode sont maintenant résumées.

- Premièrement, nous construisons une base de fonctions qui sera utilisée pour construire la solution sous la forme d'un développement en série infinie.
- Ces fonctions sont obtenues en recherchant des solutions séparables du problème aux valeurs propres

$$\tilde{r}^3 \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}_h}{\partial r^2} + 4\tilde{r}^2 \frac{\partial \delta\tilde{\Omega}_h}{\partial r} + \tilde{r} \frac{\partial^2 \delta\tilde{\Omega}_h}{\partial \theta^2} = \tilde{\lambda} \tilde{r} \delta\tilde{\Omega}_h. \quad (\text{D.60})$$

- Elles satisfont les conditions aux limites homogènes suivantes

$$\delta\Omega(r_0, \theta) = \delta\Omega(r_{i_{DZ}}, \theta) = \delta\Omega(r, \theta_0) = \left. \frac{\partial \delta\Omega(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad (\text{D.61})$$

lorsque la zone morte ne se connecte pas en bas du domaine, ou

$$\delta\Omega(r_0, \theta) = \left. \frac{\partial \delta\Omega(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=r_i} = \delta\Omega(r, \theta_0) = \left. \frac{\partial \delta\Omega(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad (\text{D.62})$$

lorsqu'elle se connecte à la sphère interne.

- Après avoir exprimé la solution sous forme d'un développement en série, l'expression obtenue est substituée dans l'équation (D.59) et une solution générale est déterminée par utilisation des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres.

D.3.1 Pas d'effet de la contraction sur les lignes de champ

Commençons par résoudre l'équation (D.59) lorsque les lignes de champ poloïdal ne sont pas advectées par la contraction. Dans ce cas, la zone morte est réduite à un domaine confiné proche de la sphère externe et les conditions aux limites satisfaites par la solution sont données par l'équation (D.61). La zone morte peut être assimilée à un domaine conique que nous noterons \mathcal{D} tel que représenté sur la figure D.2 et défini par

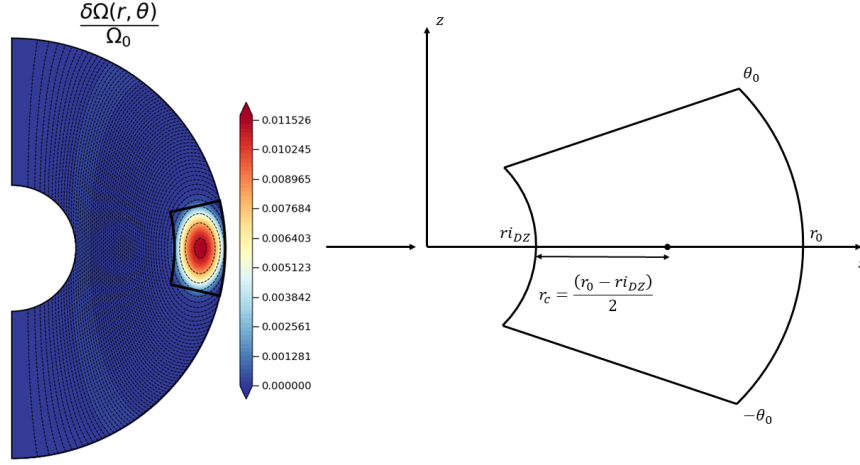


FIGURE D.2 : Illustration du domaine conique choisi pour représenter la zone morte lorsque les lignes de champ ne sont pas advectées par la contraction. Le domaine conique est délimité par des traits noirs sur la coupe méridienne de gauche et défini par : $r \in [r_{i_{DZ}}; r_0]$ et $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ avec $r_{i_{DZ}} = 0.77r_0$, $\theta_0 \approx \pi/14$ et $-\theta_0 \approx -\pi/14$ (ou de façon équivalente en terme de colatitude, $\theta \in [3\pi/7; 4\pi/7]$).

$$\mathcal{D} = \{r_{i_{DZ}} \leq r \leq r_0 ; -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\}, \quad (\text{D.63})$$

avec $r_{i_{DZ}} = 0.77r_0$ et la latitude $\theta_0 = \pi/14$ (donc $-\theta_0 = -\pi/14$). Des solutions séparables $\delta\tilde{\Omega}_h = \tilde{g}(\theta)\tilde{f}(r)$ de l'équation (D.60) doivent vérifier

$$\frac{\tilde{r}^2 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r}\tilde{f}'(\tilde{r})}{\tilde{f}(r)} + \frac{\tilde{g}''(\theta)}{\tilde{g}(\theta)} = \tilde{\lambda}, \quad (\text{D.64})$$

avec les conditions aux limites suivantes pour les fonctions propres :

$$g(\theta_0) = g'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(r_0) = f(r_{i_{DZ}}) = 0. \quad (\text{D.65})$$

Le problème se ramène ainsi à la résolution des deux sous-problèmes aux valeurs propres suivants :

$$\tilde{g}''(\theta) - \tilde{\nu}\tilde{g}(\theta) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{r}^2 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r}\tilde{f}'(r) - \tilde{\mu}\tilde{f}(r) = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\nu} + \tilde{\mu} = \tilde{\lambda}. \quad (\text{D.66})$$

Les valeurs propres ν , associées aux fonctions propres $g(\theta)$, sont déterminées en résolvant un problème de Sturm-Liouville tandis que les valeurs propres μ , associées aux fonctions propres $f(r)$, sont obtenues après résolution d'un problème d'Euler. Nous commençons par traiter le problème de Sturm-Liouville.

L'équation caractéristique associée à l'équation du problème de Sturm-Liouville prend la forme simple suivante

$$\tilde{\chi}^2 - \tilde{\nu} = 0. \quad (\text{D.67})$$

Nous devons donc considérer les différentes valeurs possibles de ν . Si la valeur propre est nulle, le discriminant de l'équation caractéristique est nul aussi, et la solution s'écrit :

$$\tilde{g}(\theta) = K_1\theta + K_2. \quad (\text{D.68})$$

D'après la première condition limite donnée par l'équation (D.65), on a alors $K_2 = -K_1\theta_0$, d'où

$$\tilde{g}(\theta) = K_1(\theta - \theta_0). \quad (\text{D.69})$$

De la seconde condition limite il vient immédiatement $K_1 = 0$, ce qui conduit à la solution triviale $\tilde{g}(\theta) = 0$ par laquelle nous ne sommes pas intéressés puisque nous recherchons uniquement des solutions non-triviales.

Si les valeurs propres sont strictement positives, le discriminant de l'équation caractéristique est positif et la solution s'écrit

$$\tilde{g}(\theta) = A \exp(\sqrt{\tilde{\nu}}\theta) + B \exp(-\sqrt{\tilde{\nu}}\theta). \quad (\text{D.70})$$

La dérivée de cette expression donne

$$\tilde{g}'(\theta) = A \sqrt{\tilde{\nu}} \exp(\sqrt{\tilde{\nu}}\theta) - B \sqrt{\tilde{\nu}} \exp(-\sqrt{\tilde{\nu}}\theta). \quad (\text{D.71})$$

En appliquant la condition limite portant sur la dérivée, on en déduit que $A = B$, d'où

$$\tilde{g}(\theta) = B \left[\exp(\sqrt{\tilde{\nu}}\theta) + \exp(-\sqrt{\tilde{\nu}}\theta) \right] = 2B \cosh(\sqrt{\tilde{\nu}}\theta). \quad (\text{D.72})$$

La seconde condition limite aboutit à la relation

$$2B \cosh(\sqrt{\tilde{\nu}}\theta_0) = 0, \quad (\text{D.73})$$

et comme nous recherchons une solution non-triviale, ceci exclut la possibilité que $B = 0$. Nous obtenons alors

$$\sqrt{\tilde{\nu}}\theta_0 = i \left(k\pi - \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \quad \text{et } i \in \mathbb{C}, \quad (\text{D.74})$$

autrement dit,

$$\tilde{\nu}_k = - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0} \right)^2 < 0 \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{D.75})$$

et donc les valeurs propres < 0 conduisent à des solutions non physiques.

Finalement, si les valeurs propres sont strictement négatives, le discriminant de l'équation caractéristique est négatif et la solution prend la forme suivante

$$\tilde{g}(\theta) = A \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta) + B \sin(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta). \quad (\text{D.76})$$

Donc la dérivée s'écrit :

$$\tilde{g}'(\theta) = -A \sqrt{|\tilde{\nu}|} \sin(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta) + B \sqrt{|\tilde{\nu}|} \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta). \quad (\text{D.77})$$

D'après la condition limite portant sur la dérivée il s'ensuit que $B = 0$, d'où :

$$\tilde{g}(\theta) = A \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta). \quad (\text{D.78})$$

De la seconde condition limite, puisqu'une solution non-triviale implique nécessairement $A \neq 0$, il vient :

$$\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta_0 = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.79})$$

On conclut que

$$\tilde{\nu}_k = -\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 < 0 \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{D.80})$$

sont les valeurs propres recherchées et sont associées aux fonctions propres :

$$\tilde{g}_k(\theta) = A_k \cos\left(\sqrt{|\tilde{\nu}|}\theta\right). \quad (\text{D.81})$$

Intéressons-nous maintenant au problème d'Euler. Comme précédemment, nous devons considérer toutes les valeurs propres μ possibles. Si, $\mu = 0$ alors l'équation à résoudre est simplement

$$\tilde{r}^2 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r} \tilde{f}'(r) = 0, \quad (\text{D.82})$$

dont la solution est directement

$$\tilde{f}(r) = \frac{K_1}{\tilde{r}^3} + K_2. \quad (\text{D.83})$$

La condition limite en $r = r_0$ aboutit à $K_1 = -K_2$. On a alors :

$$\tilde{f}(r) = K_2 \left(1 - \frac{1}{\tilde{r}^3}\right). \quad (\text{D.84})$$

La seconde condition limite aboutit à $K_2 = 0$, ce qui conduit à la solution triviale $\tilde{f}(r) = 0$ par laquelle nous ne sommes pas intéressés.

On recherche maintenant une solution de la forme $\tilde{f}(r) = \tilde{r}^{\tilde{\mathcal{Y}}}$, ce qui en remplaçant dans le problème d'Euler donne

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\tilde{\mathcal{Y}} - 1) + 4\tilde{\mathcal{Y}} - \tilde{\mu} = 0. \quad (\text{D.85})$$

Dans le cas où les valeurs propres sont strictement positives, on a

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \frac{-1}{2} \left(3 \pm \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}}\right), \quad (\text{D.86})$$

et donc la solution

$$\tilde{f}(r) = C\tilde{r}^{-\left(3 + \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}}\right)/2} + D\tilde{r}^{-\left(3 - \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}}\right)/2}. \quad (\text{D.87})$$

La condition $\tilde{f}(1) = 0$ conduit à $C = -D$, d'où

$$\tilde{f}(r) = D \left[\tilde{r}^{-\left(3 + \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}}\right)/2} - \tilde{r}^{-\left(3 - \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}}\right)/2} \right], \quad (\text{D.88})$$

ce qui se réécrit également

$$\tilde{f}(r) = \frac{D}{\tilde{r}^{3/2}} \left[\exp\left(\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}} \ln(\tilde{r})\right) - \exp\left(\frac{-1}{2} \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}} \ln(\tilde{r})\right) \right] = \frac{2D}{\tilde{r}^{3/2}} \sinh\left(\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{D.89})$$

En excluant la solution triviale obtenue pour $D = 0$, la seconde condition limite conduit à

$$\frac{1}{2} \sqrt{9 + 4\tilde{\mu}} \ln(\tilde{r}_{i_{DZ}}) = in\pi \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mu} = \frac{-9}{4} - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})} \right)^2 < 0 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{D.90})$$

et par conséquent, les valeurs propres strictement positives conduisent à des solutions non physiques.

Dans le cas où $\mu \in]-9/4 ; 0[$, nous retombons sur la solution (D.87) et on arrive de nouveau à la conclusion que les solutions obtenues ne sont pas physiques. De même, si $\mu = -9/4$, la solution du problème d'Euler est simplement

$$\tilde{f}(r) = \frac{3}{2} (C + D \ln(\tilde{r})), \quad (\text{D.91})$$

et tandis que la condition $f(1) = 0$ donne $C = 0$, la condition $f(r_{i_{DZ}}) = 0$ conduit à $D = 0$, et donc à la solution triviale $f(r) = 0$ par laquelle nous ne sommes pas intéressés.

Finalement, si les valeurs propres sont $< -9/4$, alors la solution s'écrit :

$$\tilde{f}(r) = C\tilde{r}^{-\left(3 + i\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|}\right)/2} + D\tilde{r}^{-\left(3 - i\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|}\right)/2} \quad \text{où } i \in \mathbb{C}. \quad (\text{D.92})$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$\tilde{f}(r) = \frac{C}{\tilde{r}^{3/2}} \cos\left(\frac{-1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|} \ln(\tilde{r})\right) + \frac{D}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{-1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{D.93})$$

De la condition $\tilde{f}(1) = 0$ il vient $C = 0$, et

$$\tilde{f}(r) = \frac{D}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{-1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{D.94})$$

De la seconde condition limite, on obtient (en excluant la solution triviale obtenue pour $D = 0$),

$$\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|} \ln(\tilde{r}_{i_{DZ}}) = n\pi \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.95})$$

On conclut donc que

$$\tilde{\mu}_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right)^2 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{D.96})$$

sont les valeurs propres recherchées et sont associées aux fonctions propres

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{D_n}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(\tilde{r})}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right). \quad (\text{D.97})$$

Ayant déterminé les fonctions propres, nous pouvons désormais développer en série notre solution. Ceci donne :

$$\delta\tilde{\Omega}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) \quad \text{avec } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.98})$$

Cette expression est injectée dans l'équation (D.59). Pour cela nous devons obtenir les différentes dérivées partielles (première et seconde) de la rotation différentielle. Celles-ci s'écrivent :

$$\frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{5/2}} \left[\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})} \cos\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) - \frac{3}{2} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \right] \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right), \quad (\text{D.99})$$

$$\frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{7/2}} \left[\left(\frac{15}{4} - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})} \right)^2 \right) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) - \frac{4n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})} \cos\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \right] \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right), \quad (\text{D.100})$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0} \right) \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \sin\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right), \quad (\text{D.101})$$

$$\frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0} \right)^2 \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right). \quad (\text{D.102})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (D.59), on obtient alors la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk} \tilde{\lambda}_{nk}}{\sqrt{\tilde{r}}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) = \frac{-2}{E}, \quad (\text{D.103})$$

où

$$\tilde{\lambda}_{nk} = \tilde{\nu}_k + \tilde{\mu}_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right)^2 - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 \quad \text{avec } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.104})$$

Le coefficient A_{nk} est finalement déterminé à l'aide des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres. Pour cela, nous multiplions chaque membre par $r^{-1/2} f(r) g(\theta)$, puis nous intégrons l'expression résultante sur le domaine \mathcal{D} , ce qui donne :

$$\tilde{A}_{nk} \tilde{\lambda}_{nk} \int_{\tilde{r}_{i_{DZ}}}^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin^2\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos^2\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) d\theta dr = \frac{-2}{E} \int_{\tilde{r}_{i_{DZ}}}^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sqrt{\tilde{r}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) d\theta dr. \quad (\text{D.105})$$

Comme

$$\int_{\tilde{r}_{i_{DZ}}}^1 \sin^2\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) dr = \frac{2(1 - \tilde{r}_{i_{DZ}}) n^2 \pi^2}{4n^2 \pi^2 + (\ln(\tilde{r}_{i_{DZ}}))^2}, \quad (\text{D.106})$$

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos^2\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) d\theta = \theta_0, \quad (\text{D.107})$$

$$\int_{\tilde{r}_{i\text{DZ}}}^1 \sqrt{\tilde{r}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) d\tilde{r} = \frac{4n\pi \ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}) \left((-1)^n \tilde{r}_{i\text{DZ}}^{3/2} - 1\right)}{4(n\pi)^2 + 9(\ln \tilde{r}_{i\text{DZ}})^2}, \quad (\text{D.108})$$

et

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) d\theta = \frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k. \quad (\text{D.109})$$

On obtient :

$$\tilde{A}_{nk} = \left(\frac{4n^2\pi^2 + (\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}))^2}{E\tilde{\lambda}_{nk}(\tilde{r}_{i\text{DZ}} - 1)(n\pi)^2\theta_0} \right) \left(\frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k \right) \left(\frac{4n\pi \ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}) \left((-1)^n \tilde{r}_{i\text{DZ}}^{3/2} - 1\right)}{4(n\pi)^2 + 9(\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}))^2} \right), \quad (\text{D.110})$$

d'où la solution finale

$$\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} = \text{Re}_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\left((2n\pi)^2 + \left(\ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right) \right)^2 \right)}{\lambda_{nk} \left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0} - 1 \right) (n\pi)^2 \theta_0} \left(\frac{4n\pi \ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right) \left((-1)^n \left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0} \right)^{3/2} - 1 \right)}{(2n\pi)^2 + \left(3 \ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right) \right)^2} \right) \right] \left(\frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) \quad (\text{D.111})$$

avec $n, k \in \mathbb{Z}$.

D.3.2 Effet de la contraction sur les lignes de champ

Lorsque la contraction agit sur le champ magnétique et advecte les lignes de champ poloïdal, la zone morte se connecte à la sphère interne et l'équation (D.59) doit être résolue avec les conditions aux limites (D.62). La résolution du problème de Sturm-Liouville est identique au cas où il n'y a pas d'effet de la contraction sur les lignes de champ. Concernant le problème d'Euler, les conditions aux limites modifient les fonctions propres. Ainsi, nous trouvons toujours que les valeurs propres doivent être strictement inférieures à $-9/4$ et donc, nous avons à nouveau la solution

$$\tilde{f}(r) = C\tilde{r}^{-\left(3 + i\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|}\right)/2} + D\tilde{r}^{-\left(3 - i\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|}\right)/2} \quad \text{où } i \in \mathbb{C}. \quad (\text{D.112})$$

De la condition $f(1) = 0$, on obtient $C = 0$ et donc :

$$\tilde{f}(r) = \frac{D}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{D.113})$$

Cependant, en dérivant cette expression et en lui appliquant la condition de nullité de la contrainte tangentielle normale à la sphère interne, nous obtenons que les valeurs propres μ sont solutions de l'équation transcendante :

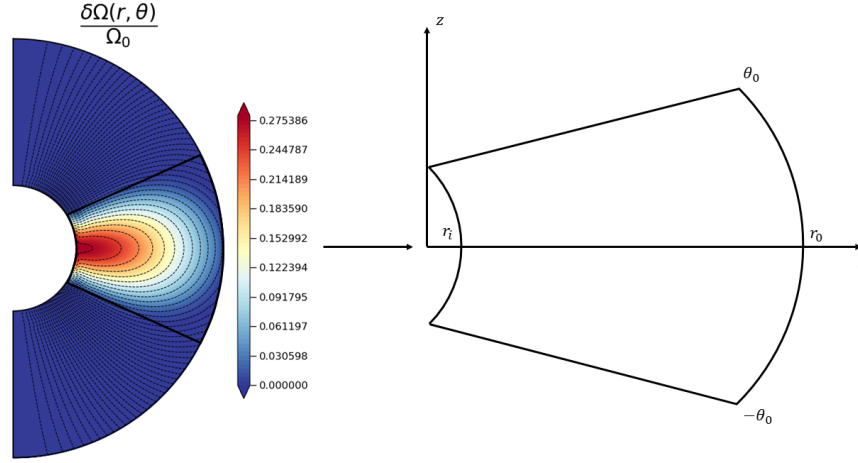


FIGURE D.3 : Illustration du domaine conique choisi pour représenter la zone morte lorsque les lignes de champ sont advectées par la contraction et que celle-ci se connecte à la sphère interne. Le domaine conique est délimité par des traits noirs sur la coupe méridienne de gauche et défini par : $r \in [r_i; r_0]$ et $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ avec $\theta_0 \approx 4\pi/23$ et $-\theta_0 \approx -4\pi/23$ (ou de manière équivalente en terme de colatitude, $\theta \in [15\pi/46; 31\pi/46]$).

$$3 \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i)\right) - \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} = 0. \quad (\text{D.114})$$

Cette équation peut uniquement être résolue numériquement. Ce faisant, on obtient le nombre de valeurs propres que l'on souhaite et ces dernières sont ensuite utilisées afin d'obtenir la solution finale. À titre d'exemple, les dix premières valeurs propres sont

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{1 \rightarrow 10} = & -5.73519668, -19.88164397, -47.22258472, -88.10954788, -142.59448915, \\ & -210.68966356, -292.39904446, -387.72421656, -496.66590925, \\ & -619.22449531. \end{aligned} \quad (\text{D.115})$$

Celles-ci sont représentées en figure D.4 et sont associées aux fonctions propres

$$\tilde{f}_{1 \rightarrow 10}(r) = \frac{D_{1 \rightarrow 10}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_{1 \rightarrow 10}|} \ln \tilde{r}\right). \quad (\text{D.116})$$

Comme précédemment, connaissant les fonctions propres des problèmes de Sturm-Liouville et d'Euler, la solution générale peut être développée sous la forme d'une série infinie :

$$\delta\tilde{\Omega}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) \quad \text{avec } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{D.117})$$

Les différentes dérivées partielles de cette expression donnent alors :

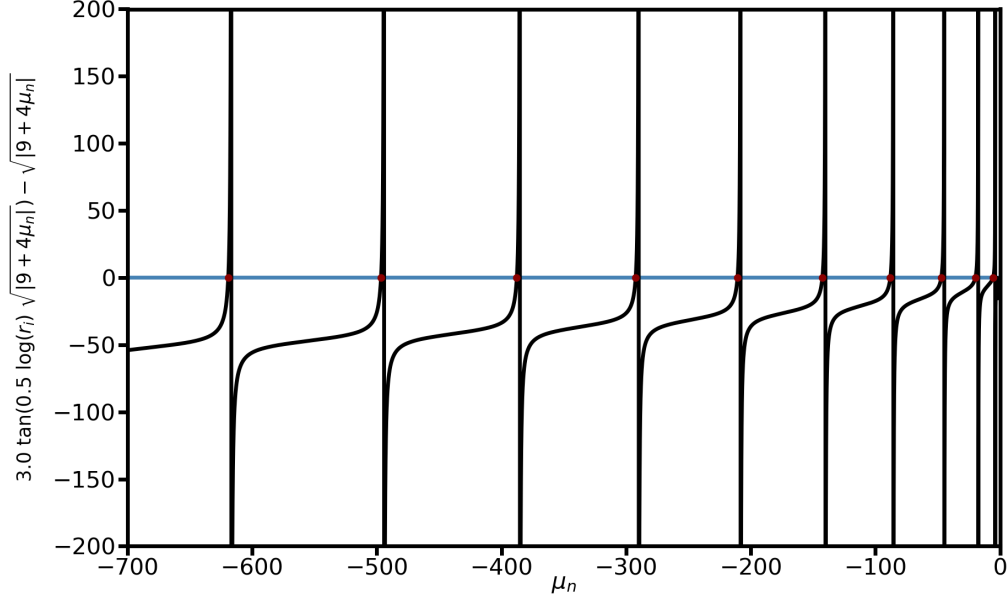


FIGURE D.4 : Fonction transcendante $\tilde{f}(\mu_n) = 3 \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i)\right) - \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|}$. Les dix premières solutions de l'équation transcendante (D.114) sont représentées en rouge.

$$\frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{2\tilde{r}^{5/2}} \left[\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln \tilde{r}\right) - 3 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln \tilde{r}\right) \right] \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right), \quad (\text{D.118})$$

$$\frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{4\tilde{r}^{7/2}} \left[(15 - |9 + 4\tilde{\mu}_n|) \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) - 8 \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \right] \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right), \quad (\text{D.119})$$

$$\frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \sin\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right), \quad (\text{D.120})$$

$$\frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right). \quad (\text{D.121})$$

En remplaçant dans l'équation (D.59), on obtient la relation suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\sqrt{\tilde{r}}} \underbrace{\left[\tilde{\mu}_n - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 \right]}_{\tilde{\lambda}_{nk}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln \tilde{r}\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) = \frac{-2}{E}. \quad (\text{D.122})$$

Comme précédemment, nous multiplions chaque membre par $\sqrt{\tilde{r}}\tilde{f}(r)\tilde{g}(\theta)$ avant d'intégrer l'expression résultante sur le domaine \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{nk}\tilde{\lambda}_{nk} \int_{\tilde{r}_i}^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln\tilde{r}\right) \cos^2\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) d\theta dr = \\ \frac{-2}{E} \int_{\tilde{r}_i}^1 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \sqrt{\tilde{r}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln\tilde{r}\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) d\theta dr. \end{aligned} \quad (\text{D.123})$$

De nouveau, nous avons

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos^2\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) d\theta = \theta_0, \quad (\text{D.124})$$

et

$$\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) d\theta = \frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k. \quad (\text{D.125})$$

Cependant, nous devons aussi calculer deux nouvelles intégrales :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{r}_i}^1 \sin^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r})\right) dr = \frac{1}{2(1+|9+4\tilde{\mu}_n|)} \left[|9+4\tilde{\mu}_n|(1-\tilde{r}_i) + \right. \\ \left. \tilde{r}_i \left(\cos\left(\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) + \sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \sin\left(\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) - 1 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.126})$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{r}_i}^1 \sqrt{\tilde{r}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r})\right) dr = \frac{1}{(|9+4\tilde{\mu}_n|+9)} \\ \left[2\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \left(\tilde{r}_i^{3/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) - 1 \right) - 6\tilde{r}_i^{3/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.127})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{nk} = \frac{16(1+|9+4\tilde{\mu}_n|)\theta_0(-1)^k}{E(2k-1)\pi\tilde{\lambda}_{nk}(9+|9+4\tilde{\mu}_n|)\theta_0} \\ \frac{\left[2\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \left(\tilde{r}_i^{3/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) - 1 \right) - 6\tilde{r}_i^{3/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) \right]}{\left[|9+4\tilde{\mu}_n|(1-\tilde{r}_i) + \tilde{r}_i \left(\cos\left(\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) + \sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \sin\left(\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\ln(\tilde{r}_i)\right) - 1 \right) \right]}. \end{aligned} \quad (\text{D.128})$$

La solution finale s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} &= Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16 (1 + |9 + 4\mu_n|) \theta_0 (-1)^k}{(2k-1) \pi \lambda_{nk} (9 + |9 + 4\mu_n|) \theta_0} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \\
&\sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) \\
&\left[2 \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \left(\left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{3/2} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right) - 1\right) - 6 \left(\frac{r_i}{r_0}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right) \right] \\
&\left[|9 + 4\mu_n| \left(1 - \frac{r_i}{r_0}\right) + \frac{r_i}{r_0} \left(\cos\left(\sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right) + \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \sin\left(\sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)\right) - 1\right) \right]
\end{aligned}$$

(D.129)

avec $n, k \in \mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE

- Acevedo-Arreguin, L., Garaud, P., & Wood, T. S. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434, 720
- Acheson, D. & Hide, R. 1973, *Reports on Progress in Physics*, 36, 159
- Acheson, D. J. 1978, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 289, 459
- Alecian, E., Catala, C., Wade, G., et al. 2009, *EAS Publications Series*, 39, 121
- Alecian, E., Catala, C., Wade, G., et al. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385, 391
- Alecian, E., Wade, G., Catala, C., et al. 2013a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 1001
- Alecian, E., Wade, G., Catala, C., et al. 2013b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 1027
- Alfvén, H. 1942, *Nature*, 150, 405
- Allain, S. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 333, 629
- Amard, L., Palacios, A., Charbonnel, C., Gallet, F., & Bouvier, J. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 587, A105
- Andereck, C. D., Liu, S., & Swinney, H. L. 1986, *Journal of Fluid Mechanics*, 164, 155
- Arobone, E. & Sarkar, S. 2012, *Journal of Fluid Mechanics*, 703, 29
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2016, *The Astrophysical Journal*, 829, 92
- Aurière, M., Wade, G., Lignières, F., et al. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 523, A40
- Aurière, M., Wade, G., Silvester, J., et al. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 475, 1053
- Baglin, A., Auvergne, M., Boisnard, L., et al. 2006, in *36th COSPAR Scientific Assembly*, Vol. 36, 3749
- Balbus, S. A. 1995, *The Astrophysical Journal*, 453, 380

-
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1991, *The Astrophysical Journal*, 376, 214
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1992, *The Astrophysical Journal*, 392, 662
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1994, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 266, 769
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1998, *Reviews of Modern Physics*, 70, 1
- Barcilon, V. & Pedlosky, J. 1967a, *Journal of Fluid Mechanics*, 29, 1
- Barcilon, V. & Pedlosky, J. 1967b, *Journal of Fluid Mechanics*, 29, 609
- Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55
- Belkacem, K., Marques, J., Goupil, M., et al. 2015b, *Astronomy & Astrophysics*, 579, A31
- Belkacem, K., Marques, J., Goupil, M., et al. 2015a, *Astronomy & Astrophysics*, 579, A30
- Bell, C. P., Naylor, T., Mayne, N., Jeffries, R., & Littlefair, S. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434, 806
- Blazère, A., Petit, P., Lignières, F., et al. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 586, A97
- Böhm, T. & Catala, C. 1995, *Astronomy & Astrophysics*, 301, 155
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977
- Boussinesq, J. 1903, *Théorie analytique de la chaleur : mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*, Vol. 2 (Gauthier-Villars)
- Bouvier, J. 2007, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 3, 231
- Bouvier, J. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 489, L53
- Braginsky, S. I. & Roberts, P. H. 1995, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 79, 1
- Braithwaite, J. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 449, 451
- Braithwaite, J. & Cantiello, M. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 428, 2789
- Braithwaite, J. & Nordlund, Å. 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 450, 1077
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, *Nature*, 431, 819
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2017, *Royal Society Open Science*, 4, 160271
- Brown, B. P., Vasil, G. M., & Zweibel, E. G. 2012, *The Astrophysical Journal*, 756, 109
- Brun, A. S., Browning, M. K., & Toomre, J. 2005, *The Astrophysical Journal*, 629, 461
- Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 650, A53
- Busse, F. H. 1981, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 17, 215
- Busse, F. H. 1982, *The Astrophysical Journal*, 259, 759

-
- Cally, P. 1991, *Journal of Plasma Physics*, 45, 453
- Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, *The Astrophysical Journal*, 824, 14
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *The Astrophysical Journal*, 788, 93
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 555, A54
- Cerdá-Durán, P., Font, J. A., Antón, L., & Müller, E. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 492, 937
- Chabrier, G. & Baraffe, I. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 327, 1039
- Chandrasekhar, S. 1960, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 46, 253
- Charbonneau, P. & MacGregor, K. 1993, *The Astrophysical Journal*, 417, 762
- Charbonnel, C., Decressin, T., Amard, L., Palacios, A., & Talon, S. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 554, A40
- Charbonnel, C. & Talon, S. 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 351, 635
- Christensen-Dalsgaard, J. 2002, *Reviews of Modern Physics*, 74, 1073
- Christensen-Dalsgaard, J., Aguirre, V. S., Cassisi, S., et al. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 635, A165
- Couette, M. 1890, PhD thesis, Faculté des sciences de Paris, France
- Cowling, T. 1945, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 105, 166
- Dechamps, X. 2014, PhD thesis, TU Ilmenau, Germany
- Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A117
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M., et al. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 564, A27
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W., et al. 2012, *The Astrophysical Journal*, 756, 19
- Deheuvels, S., Gouhier, B., Lignières, F., & Jouve, L. 2021, private communication
- Deloncle, A., Chomaz, J.-M., & Billant, P. 2007, *Journal of Fluid Mechanics*, 570, 297
- Desjardins, B., Dormy, E., & Grenier, E. 1999, *Nonlinearity*, 12, 181
- Di Mauro, M., Ventura, R., Cardini, D., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 817, 65
- Dimmelmeier, H., Font, J. A., & Müller, E. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 388, 917
- Dimmelmeier, H., Novak, J., Font, J. A., Ibáñez, J. M., & Müller, E. 2005, *Physical Review D*, 71, 064023

-
- Donati, J.-F., Bouvier, J., Walter, F., et al. 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 412, 2454
- Donati, J.-F., Gregory, S., Alencar, S., et al. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425, 2948
- Donati, J.-F., Gregory, S., Alencar, S., et al. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436, 881
- Donati, J.-F. & Landstreet, J. 2009, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 47, 333
- Donati, J.-F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D., & Cameron, A. C. 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 291, 658
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1998, *Earth and Planetary Science Letters*, 160, 15
- Eddington, A. S. 1925, *The Observatory*, 48, 73
- Eggenberger, P., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2019a, *Astronomy & Astrophysics*, 621, A66
- Eggenberger, P., den Hartogh, J., Buldgen, G., et al. 2019b, *Astronomy & Astrophysics*, 631, L6
- Eggenberger, P., Lagarde, N., Miglio, A., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 599, A18
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 544, L4
- Ekman, V. W. 1905, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 2, 1
- Ferraro, V. C. 1937, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 97, 458
- Finkenzeller, U. 1985, *Astronomy and Astrophysics*, 151, 340
- Folsom, C., Wade, G., Kochukhov, O., et al. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391, 901
- Fricke, K. 1968, *Zeitschrift für Astrophysik*, 68, 317
- Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., García, R. A., & Bildsten, L. 2015, *Science*, 350, 423
- Fuller, J., Lecoanet, D., Cantiello, M., & Brown, B. 2014, *The Astrophysical Journal*, 796, 17
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 485, 3661
- Gagnier, D. & Rieutord, M. 2020, *Journal of Fluid Mechanics*, 904
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 556, A36
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 577, A98
- Galtier, S. 2013, *Magnétohydrodynamique : des plasmas de laboratoire à l'astrophysique – Cours & exercices corrigés : licence 3 et master physique fondamentale & écoles d'ingénieurs (Vuibert)*
- Garaud, P. 2002a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 329, 1

-
- Garaud, P. 2002b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335, 707
- Garaud, P. 2020, *The Astrophysical Journal*, 901, 146
- Garaud, P. & Acevedo-Arreguin, L. 2009a, *The Astrophysical Journal*, 704, 1
- Garaud, P. & Acevedo-Arreguin, L. 2009b, *The Astrophysical Journal*, 704, 1
- Garaud, P. & Bodenheimer, P. 2010, *The Astrophysical Journal*, 719, 313
- Garaud, P. & Brummell, N. 2008, *The Astrophysical Journal*, 674, 498
- Garaud, P. & Garaud, J.-D. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391, 1239
- Garaud, P., Medrano, M., Brown, J., Mankovich, C., & Moore, K. 2015, *The Astrophysical Journal*, 808, 89
- García, R. A. & Ballot, J. 2019, *Living Reviews in Solar Physics*, 16, 1
- Gastine, T., Lignières, F., Jouve, L., & Gouhier, B. 2020, private communication
- Gastine, T. & Wicht, J. 2012, *Icarus*, 219, 428
- Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 580, A103
- Gehan, C., Mosser, B., Michel, E., Samadi, R., & Kallinger, T. 2018, *Astronomy & Astrophysics*, 616, A24
- Gilman, P. A. & Benton, E. R. 1968, *The Physics of Fluids*, 11, 2397
- Gilman, P. A. & Glatzmaier, G. A. 1981, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 45, 335
- Goldreich, P. & Schubert, G. 1967, *The Astrophysical Journal*, 150, 571
- Gough, D. & McIntyre, M. 1998, *Nature*, 394, 755
- Gouhier, B., Jouve, L., & Lignières, F. 2022, arXiv preprint arXiv :2201.02645
- Gouhier, B., Lignières, F., & Jouve, L. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 648, A109
- Greenspan, H. P. et al. 1968, *The Theory of Rotating Fluids* (CUP Archive)
- Harlow, F. H. & Welch, J. E. 1965, *The Physics of Fluids*, 8, 2182
- Hartmann, J. 1937, *Det Kgl. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, 15
- Hartmann, J. & Lazarus, F. 1937, *Det Kgl. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, 15
- Hekker, S. & Christensen-Dalsgaard, J. 2017, *The Astronomy and Astrophysics Review*, 25, 1
- Herbig, G. H. 1960, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 4, 337
- Herbst, W., Bailer-Jones, C., & Mundt, R. 2001, *The Astrophysical Journal Letters*, 554, L197
- Herbst, W., Bailer-Jones, C., Mundt, R., Meisenheimer, K., & Wackermann, R. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 396, 513

-
- Herron, I. & Soliman, F. 2006, *Applied Mathematics Letters*, 19, 1113
- Heyvaerts, J. & Priest, E. 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 117, 220
- Hollerbach, R. 2000, in *Physics of Rotating Fluids* (Springer), 295–316
- Hollerbach, R. & Fournier, A. 2004, *AIP Conference Proceedings*, 733, 114
- Hollerbach, R., Futterer, B., More, T., & Egbers, C. 2004, *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 18, 197
- Hollerbach, R. & Hulot, D. 2016, *Comptes Rendus Mécanique*, 344, 502
- Hollerbach, R. & Rüdiger, G. 2005, *Physical Review Letters*, 95, 124501
- Howard, L. N. 1961, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 509
- Howell, S. B., Sobek, C., Haas, M., et al. 2014, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 126, 398
- Hypolite, D. & Rieutord, M. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 572, A15
- Ingham, D. 1969, *The Physics of Fluids*, 12, 389
- Irwin, J., Aigrain, S., Hodgkin, S., et al. 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 370, 954
- Irwin, J. & Bouvier, J. 2008, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 4, 363
- Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., et al. 2008a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 384, 675
- Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., et al. 2008b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383, 1588
- Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., et al. 2007a, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377, 741
- Irwin, J., Irwin, M., Aigrain, S., et al. 2007b, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 375, 1449
- Jermyn, A. S. & Cantiello, M. 2020, *The Astrophysical Journal*, 900, 113
- Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 575, A106
- Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A13
- Julien, K. & Knobloch, E. 2010, *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 368, 1607
- Karakas, A. I. & Lattanzio, J. C. 2014, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 31
- Kippenhahn, R., Weigert, A., & Weiss, A. 2012, *Stellar Structure and Evolution*, Vol. 192 (Springer)

-
- Kirillov, O. N. & Stefani, F. 2010, *The Astrophysical Journal*, 712, 52
- Kirillov, O. N. & Stefani, F. 2012, *Acta Applicandae Mathematicae*, 120, 177
- Kirillov, O. N., Stefani, F., & Fukumoto, Y. 2014, *Journal of Fluid Mechanics*, 760, 591
- Knobloch, E. & Spruit, H. 1982, *Astronomy & Astrophysics*, 113, 261
- Knobloch, E. & Spruit, H. C. 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 125, 59
- Königl, A. 1991, *The Astrophysical Journal*, 370, L39
- Lamm, M., Mundt, R., Bailer-Jones, C., & Herbst, W. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 430, 1005
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. 1959, *Fluid Mechanics*, Vol. 6 (Pergamon Press Oxford, UK)
- Lantz, S. & Fan, Y. 1999, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 121, 247
- Lantz, S. R. 1992, PhD thesis, Cornell University, United States
- Lara, F. E. & Rieutord, M. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 552, A35
- Larson, R. B. 2003, *Reports on Progress in Physics*, 66, 1651
- Lignières, F. 2021, in *Multi-Dimensional Processes In Stellar Physics (EDP Sciences)*, 111–140
- Lignières, F., Catala, C., & Mangeney, A. 1996, *Astronomy & Astrophysics*, 314, 465
- Lignières, F., Petit, P., Aurière, M., Wade, G. A., & Böhm, T. 2014, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 9, 338
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., & Aurière, M. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 500, L41
- Liu, W., Goodman, J., Herron, I., & Ji, H. 2006, *Physical Review E*, 74, 056302
- Lynden-Bell, D. 1969, *Nature*, 223, 690
- MacGregor, K. & Brenner, M. 1991, *The Astrophysical Journal*, 376, 204
- Maeder, A. 2008, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars (Springer)*
- Maeder, A. & Meynet, G. 2000, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38, 143
- Maeder, A. & Meynet, G. 2001, *Astronomy & Astrophysics*, 373, 555
- Maeder, A. & Meynet, G. 2012, *Reviews of Modern Physics*, 84, 25
- Maeder, A. & Zahn, J.-P. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 334, 1000
- Makidon, R. B., Rebull, L. M., Strom, S. E., Adams, M. T., & Patten, B. M. 2004, *The Astronomical Journal*, 127, 2228
- Marcotte, F., Dormy, E., & Soward, A. 2016, *Journal of Fluid Mechanics*, 803, 395
- Marques, J., Goupil, M., Lebreton, Y., et al. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 549, A74

-
- Masada, Y., Sano, T., & Takabe, H. 2006, *The Astrophysical Journal*, 641, 447
- Mathis, S., Bugnet, L., Prat, V., et al. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 647, A122
- Mathis, S., Palacios, A., & Zahn, J.-P. 2004, *Astronomy & Astrophysics*, 425, 243
- McKee, C. F. & Ostriker, E. C. 2007, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 45, 565
- Menou, K. & Le Mer, J. 2006, *The Astrophysical Journal*, 650, 1208
- Mestel, L. 1968, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 138, 359
- Mestel, L., Moss, D., & Tayler, R. 1988, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 231, 873
- Mestel, L. & Spruit, H. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 226, 57
- Mestel, L. & Weiss, N. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 226, 123
- Miles, J. W. 1961, *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 496
- Moore, D. W. & Saffman, P. G. 1969, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 264, 597
- Moreau, R. J. 1990, *Magnetohydrodynamics*, Vol. 3 (Springer)
- Moss, D. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 226, 297
- Mosser, B., Belkacem, K., Pinçon, C., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 598, A62
- Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012a, *Astronomy & Astrophysics*, 537, A30
- Mosser, B., Goupil, M., Belkacem, K., et al. 2012b, *Astronomy & Astrophysics*, 548, A10
- Nornberg, M. D., Ji, H., Scharfman, E., Roach, A., & Goodman, J. 2010, *Physical Review Letters*, 104, 074501
- Ogilvie, G. & Pringle, J. 1996, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 279, 152
- Oglethorpe, R. & Garaud, P. 2013, *The Astrophysical Journal*, 778, 166
- Ogura, Y. & Phillips, N. A. 1962, *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19, 173
- Palla, F. & Stahler, S. W. 1990, *The Astrophysical Journal*, 360, L47
- Park, J., Prat, V., & Mathis, S. 2019, in *APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*, L13–004
- Park, J., Prat, V., Mathis, S., & Bugnet, L. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 646, A64
- Parker, E. 1991, *The Astrophysical Journal*, 376, 355
- Petit, P., Lignières, F., Aurière, M., et al. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 532, L13
- Petit, P., Lignières, F., Wade, G., et al. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 523, A41

-
- Petitdemange, L., Dormy, E., & Balbus, S. 2013, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 223, 21
- Petitdemange, L., Dormy, E., & Balbus, S. A. 2008, *Geophysical Research Letters*, 35
- Pinçon, C., Belkacem, K., & Goupil, M. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 588, A122
- Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M., & Marques, J. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 605, A31
- Pinzón, G., Hernández, J., Serna, J., et al. 2021, *The Astronomical Journal*, 162, 90
- Pitts, E. & Tayler, R. 1985, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 216, 139
- Prandtl, L. 1904, *Verhandl. III, Internat. Math.-Kong., Heidelberg*, Teubner, Leipzig, 1904, 484
- Prandtl, L. 1928, *NACA Translation No. 452*
- Priede, J., Grants, I., & Gerbeth, G. 2007, *Physical Review E*, 75, 047303
- Pringle, J. E. 1981, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 19, 137
- Proudman, I. 1956, *Journal of Fluid Mechanics*, 1, 505
- Proudman, J. 1916, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 92, 408
- Randers, G. 1941, *The Astrophysical Journal*, 94, 109
- Randers, G. 1942, *The Astrophysical Journal*, 95, 454
- Rayleigh, L. 1917, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93, 148
- Réville, V., Brun, A. S., Matt, S. P., Strugarek, A., & Pinto, R. F. 2015, *The Astrophysical Journal*, 798, 116
- Rhie, C. & Chow, W. L. 1983, *AIAA journal*, 21, 1525
- Rieutord, M. 2014, *Fluid Dynamics : an Introduction* (Springer)
- Rieutord, M. & Beth, A. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 570, A42
- Roberts, P. 1967, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 300, 94
- Rodriguez-Ledesma, M. V., Mundt, R., & Eisloffel, J. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 502, 883
- Roxburgh, I. W. 1964, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 128, 157
- Rüdiger, G., Gellert, M., Hollerbach, R., Schultz, M., & Stefani, F. 2018, *Physics Reports*, 741, 1
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 573, A80

-
- Rüdiger, G., Hollerbach, R., Schultz, M., & Elstner, D. 2007, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377, 1481
- Rüdiger, G., Schultz, M., & Kitchatinov, L. 2016, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456, 3004
- Salaris, M., Cassisi, S., & Weiss, A. 2002, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 114, 375
- Schaeffer, N. 2013, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 14, 751
- Schönberg, M. & Chandrasekhar, S. 1942, *Astrophysical journal*, 96, 161
- Schou, J., Antia, H., Basu, S., et al. 1998, *The Astrophysical Journal*, 505, 390
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. 1973, *Astronomy & Astrophysics*, 24, 337
- Shaw, R., Andereck, C. D., Reith, L., & Swinney, H. L. 1982, *Physical Review Letters*, 48, 1172
- Shercliff, J. A. 1953, in *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 49, Cambridge University Press, 136–144
- Sisan, D. R., Mujica, N., Tillotson, W. A., et al. 2004, *Physical Review Letters*, 93, 114502
- Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 589, A23
- Spada, F., Lanzafame, A., & Lanza, A. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 404, 641
- Spiegel, E. & Zahn, J.-P. 1992, *Astronomy & Astrophysics*, 265, 106
- Spruit, H. 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 349, 189
- Spruit, H. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 381, 923
- Spruit, H. 2013, arXiv preprint arXiv :1301.5572
- Spruit, H. C. & Knobloch, E. 1983, *Astronomy & Astrophysics*, 132, 89
- Starchenko, S. V. 1998, *Physics of Fluids*, 10, 2412
- Stassun, K. G., Mathieu, R. D., Mazeh, T., & Vrba, F. J. 1999, *The Astronomical Journal*, 117, 2941
- Stefani, F., Gellert, M., Kasprzyk, C., et al. 2018, in *Magnetic Fields in the Solar System (Springer)*, 125–152
- Stefani, F., Gerbeth, G., Gundrum, T., et al. 2009, *Physical Review E*, 80, 066303
- Stefani, F., Gundrum, T., Gerbeth, G., et al. 2006, *Physical Review Letters*, 97, 184502
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., García, R. A., & Huber, D. 2016a, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 33
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., et al. 2016b, *Nature*, 529, 364

-
- Stewartson, K. 1957, *Journal of Fluid Mechanics*, 3, 17
- Stewartson, K. 1966, *Journal of fluid mechanics*, 26, 131
- Strom, S., Strom, K., Yost, J., Carrasco, L., & Grasdalen, G. 1972, *The Astrophysical Journal*, 173, 353
- Sweet, P. 1950, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 110, 548
- Talon, S. & Charbonnel, C. 1998, *Astronomy & Astrophysics*, 335, 959
- Talon, S. & Charbonnel, C. 2008, *Astronomy & Astrophysics*, 482, 597
- Talon, S. & Zahn, J.-P. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 317, 749
- Talon, S., Zahn, J.-P., Maeder, A., & Meynet, G. 1997, *Astronomy & Astrophysics*, 322, 209
- Taylor, R. 1973, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 161, 365
- Taylor, G. I. 1917, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93, 99
- Taylor, G. I. 1923, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 223, 289
- Teyssier, R. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 385, 337
- Teyssier, R. & Commerçon, B. 2019, *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 6, 51
- Thé, P., de Winter, D., & Perez, M. 1994, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, 104, 315
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., & Toomre, J. 2003, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41, 599
- Triana, S. A., Corsaro, E., De Ridder, J., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 602, A62
- Trypsteen, M. F. & Walker, R. 2017, *Spectroscopy for Amateur Astronomers : Recording, Processing, Analysis and Interpretation* (Cambridge University Press)
- Turck-Chieze, S., Palacios, A., Marques, J., & Nghiem, P. 2010, *The Astrophysical Journal*, 715, 1539
- Vallis, G. K. 2017, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge University Press)
- Velikhov, E. P. 1959, *Soviet Physics JETP*, 36, 995
- Vempaty, S. & Loper, D. E. 1975, *The Physics of Fluids*, 18, 1678
- Vempaty, S. & Loper, D. E. 1978, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 29, 450
- Vogt, H. 1925, *Astronomische Nachrichten*, 223, 229
- Von Zeipel, H. 1924, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 84, 665

-
- Wade, G. A., Drouin, D., Bagnulo, S., et al. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 442, L31
- Waters, L. & Waelkens, C. 1998, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 36, 233
- Wicht, J. 2002, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 132, 281
- Wolff, S., Strom, S., & Hillenbrand, L. 2004, *The Astrophysical Journal*, 601, 979
- Wood, T. S. & Brummell, N. H. 2012, *The Astrophysical Journal*, 755, 99
- Wood, T. S. & Brummell, N. H. 2018, *The Astrophysical Journal*, 853, 97
- Yu, L., Donati, J.-F., Grankin, K., et al. 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489, 5556
- Zahn, J.-P. 1974, in *Symposium-International Astronomical Union, Vol. 59*, Cambridge University Press, 185–195
- Zahn, J. P. 1975, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 8, 31
- Zahn, J.-P. 1992, *Astronomy & Astrophysics*, 265, 115
- Zahn, J.-P., Brun, A., & Mathis, S. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 474, 145
- Zahn, J.-P., Ledoux, P., Noels, A., & Rodgers, A. 1974, in *IAU Symp, Vol. 59*, 185

TABLE DES FIGURES

- 1.1 Échelle de temps d'évolution de la rotation du cœur sous l'effet de la contraction radiale $\tau_{DR} = \Omega_{\text{cœur}} / (d\Omega_{\text{cœur}}/dt)$, où $\Omega_{\text{cœur}}$ est le taux de rotation moyen du cœur, en fonction du logarithme décimal de la gravité effective, entre la fin de la séquence principale et un point arbitraire de la branche des géantes rouges, pour deux étoiles de faible masse. La courbe en rouge (bleu) correspond à KIC 8524425 (5955122), une jeune sous-géante de $1.113M_{\odot}$ ($1.218M_{\odot}$) et $1.797R_{\odot}$ ($2.099R_{\odot}$) qui possédait un cœur radiatif (convectif) sur la séquence principale. Les lignes en pointillés marquent le début de la phase des géantes rouges. Crédit : [Deheuvels et al. \(2020\)](#). 9
- 1.2 Distribution des périodes de rotation de T Tauri mesurées dans la nébuleuse d'Orion (Orion Nebula Cluster, ONC) (en haut à gauche), âgée de 1 million d'années, par [Stassun et al. \(1999\)](#) et [Herbst et al. \(2001, 2002\)](#), dans l'amas ouvert NGC 2264 (en bas à gauche), âgé de 2 millions d'années, par [Makidon et al. \(2004\)](#) et [Lamm et al. \(2005\)](#), dans l'amas ouvert NGC 2362 (en haut à droite), âgé de 5 millions d'années, par [Irwin et al. \(2008a\)](#), et dans l'amas ouvert NGC 2547 (en bas à droite), âgé de 40 millions d'années, par [Irwin et al. \(2008b\)](#), en fonction de la masse de l'étoile. Les lignes tracées en tirets bleus permettent de distinguer les T Tauri entièrement convectives ($M \lesssim 0.4M_{\odot}$) de celles qui développent un cœur radiatif au cours de la pré-séquence principale ($0.4M_{\odot} \leq M < 2M_{\odot}$). Figure adaptée de [Irwin & Bouvier \(2008\)](#). 10
- 1.3 Gauche : projection de la vitesse de rotation v (v_e sur le présent schéma) sur l'axe de visée (c'est-à-dire la droite théorique reliant l'œil de l'observateur au point observé à travers l'instrument) incliné d'un angle i par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Crédit : [Trypsteen & Walker \(2017\)](#). Droite : spectre d'une étoile sous l'influence de la rotation. Dans cet exemple, les raies d'absorption de silicium ionisé sont élargies par effet Doppler, avec un élargissement d'autant plus important que la vitesse de rotation de l'étoile est élevée. Crédit : <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Spectre-vitesse-rotation-etoile.xml>. 12

-
- 1.4 Distribution des vitesses rotationnelles projetées des T Tauri localisées dans l'amas σ Orionis (triangle), des étoiles de Herbig situées dans l'association OB1 d'Orion (carrés noirs) et des étoiles de Herbig étudiées par [Alecian et al. \(2013b\)](#) (symboles gris), en fonction de la masse. La ligne tracée en tirets noirs, en $M_*/M_\odot = 2$, sépare les T Tauri des étoiles de Herbig. La valeur médiane de la vitesse rotationnelle projetée des T Tauri est $\langle v \sin i \rangle = 21 \pm 9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, celle des étoiles de Herbig localisées dans l'association OB1 d'Orion, $\langle v \sin i \rangle = 115 \pm 9 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, et celle des étoiles de Herbig étudiées par [Alecian et al. \(2013b\)](#), de $\sim 100 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Crédit : [Pinzón et al. \(2021\)](#). 13
- 1.5 Désert magnétique illustrant la dichotomie qui existe entre le magnétisme des étoiles de type Ap/Bp et celui des étoiles de type Vega. Crédit : [Lignières et al. \(2014\)](#). 14
- 1.6 Diagramme de propagation d'une étoile de faible masse ($M = 1M_\odot$ et $R = 7R_\odot$) se trouvant sur la branche des géantes rouges. Les modes mixtes se comportent comme des modes de pression dans la cavité acoustique illustrée en orange ($\omega > S_l$ et $\omega > N$, où ω est la fréquence d'oscillation du mode, S_l la fréquence de Lamb et N la fréquence de Brunt-Väisälä), et comme des modes de gravité dans celle illustrée en bleu ($\omega < S_l$ et $\omega < N$). La cavité des modes acoustiques est délimitée par des tirets pour les modes dipolaires ($l = 1$) et par une alternance de tirets et de pointillés pour les modes quadrupolaires ($l = 2$). Plus le degré l d'un mode est élevé, plus la région évanescence (illustrée en blanc) devient épaisse et plus le couplage entre les cavités acoustique et de gravité est faible. Les modes mixtes sont observés dans la gamme de fréquences délimitée par la bande rouge centrée autour de la fréquence ν_{max} correspondant à l'amplitude maximale des oscillations. Crédit : [Christensen-Dalsgaard et al. \(2020\)](#). 16
- 1.7 Figure 1.7a : taux de rotation moyen (divisé par 2π) du cœur radiatif (en rouge) et de l'enveloppe convective (en bleu) de deux sous-géantes évoluées (A et B) et de quatre jeunes géantes rouges (C, D, E et F), en fonction du logarithme décimal de la gravité effective. La gravité effective est un proxy du stade évolutif de l'étoile, donc A est l'étoile la moins évoluée et F, l'étoile la plus évoluée. Crédit : [Deheuvels et al. \(2014\)](#). Figure 1.7b : "splitting" rotationnel moyen du cœur de géantes rouges de masse $\leq 1.4M_\odot$, en fonction de la densité de modes mixtes (voir [Gehan et al. \(2018\)](#) pour une définition). $\delta\nu$ est un proxy de la rotation du cœur, et la densité de modes mixtes \mathcal{N} , un proxy du stade évolutif de l'étoile. Plus ce nombre est élevé, plus l'étoile est évoluée sur la branche des géantes rouges. Crédit : [Gehan et al. \(2018\)](#). 17
- 1.8 Comparaison du profil de rotation obtenu avec un code d'évolution stellaire tenant compte du mélange rotationnel induit par la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement (trait plein), avec les taux de rotation du cœur radiatif et de l'enveloppe convective (tirets clairs et foncés respectivement) de KIC 7341231, une étoile de faible masse ($0.77-0.88M_\odot$) étudiée par [Deheuvels et al. \(2012\)](#), localisée à la base de la branche des géantes rouges. Les mesures astérosismiques montrent que le taux de rotation du cœur est de $\sim 0.71 \mu\text{Hz}$. C'est approximativement 2 ordre de grandeur plus faible que ce qui est prédit par le code d'évolution stellaire prévoyant un taux de rotation de $\sim 33 \mu\text{Hz}$. Crédit : [Ceillier et al. \(2013\)](#). 20
-

2.1	Illustration de la circulation méridienne d’Eddington-Sweet induite par l’accélération centrifuge. Les équipotentielles (contours noirs en trait plein) sont déformées par cette dernière et se retrouvent d’autant plus resserrées que l’on approche des pôles. Par conséquent, à cette localisation, la gravité effective et donc le flux radiatif, sont maximums. Ceci produit un chauffage différentiel le long d’une équipotentielle (rouge pour le chaud, bleu pour le froid) et entraîne un déséquilibre thermique. Une circulation méridienne (contours noirs en tirets) est alors générée et tente de rétablir une situation d’équilibre.	28
2.2	Ligne de champ magnétique dans un système de coordonnées curvilignes. \vec{e}_\perp et \vec{e}_\parallel sont respectivement les vecteurs normal et tangent à la ligne de champ. s est la coordonnée curviligne.	32
2.3	Excitation d’ondes d’Alfvén via la force de Lorentz (en bleu) en réponse à la déformation des lignes de champ magnétique (en noir) par une perturbation de vitesse \vec{U} (en gris). Figure inspirée de Galtier (2013)	33
2.4	Illustration de l’effet Ω . Les lignes de champ poloïdal sont représentées en noir et l’intensité de la rotation à une latitude donnée est fixée par la taille des flèches bleues. Dans cette situation, le taux de rotation est donc plus important à l’équateur qu’au niveau des pôles. Cette rotation différentielle latitudinale étire puis enrôle les lignes de champ poloïdal permettant ainsi, la production d’une composante toroïdale.	35
2.5	Illustration de la propagation d’ondes d’Alfvén excitées par la force de Lorentz lorsque cette dernière rétroagit sur l’écoulement en s’opposant à l’effet Ω . La figure de gauche est une coupe méridienne du champ magnétique initialement présent dans l’écoulement en rotation différentielle. Il s’agit d’un dipôle dont la norme est donnée en couleur et les lignes de champ associées sont représentées en noir. Différents points fixes sont sélectionnés sur des lignes de champ poloïdal suffisamment voisines les unes des autres. Les évolutions temporelles du champ toroïdal produit par effet Ω (en haut à droite) et de la rotation différentielle (en bas à droite) sont suivies sur une vingtaine de temps d’Alfvén, en ces points fixes. La propagation des ondes d’Alfvén est alors illustrée par les oscillations au cours du temps, des amplitudes du champ toroïdal et de la rotation différentielle aux points fixes.	37
2.6	Illustration du vent stellaire d’une étoile de type solaire plongée dans un champ magnétique dipolaire. Les lignes fléchées correspondent aux lignes de champ magnétique. On distingue deux régions, la zone de vent où les lignes de champ sont ouvertes, et la zone morte délimitée par la première ligne de champ qui se referme sur elle-même et dans laquelle le vent ne peut pas circuler. S_A désigne la surface d’Alfvén au delà de laquelle le vent n’est plus contraint magnétiquement et en deçà de laquelle le plasma est canalisé le long des lignes de champ. Crédit : Mestel & Spruit (1987)	38

- 2.7 Haut : configurations d'un champ magnétique poloïdal dipolaire dans une zone radiative stellaire. La limite entre les zones convective et radiative est indiquée par des lignes en tirets. Dans les configurations D1 et D2 certaines lignes de champ traversent la zone convective, couplant ainsi le cœur radiatif à l'enveloppe convective. Le nombre de lignes traversant la région convective est plus élevé dans la configuration D1 que D2. Dans les configurations D3 et D4, l'ensemble des lignes se referment sur elles-mêmes au sein de la zone radiative. La différence entre ces deux topologies dipolaires est que certaines lignes de champ traversent une couche limite visqueuse localisée à la base de l'enveloppe convective dans le cas D3 mais pas dans la configuration D4. Bas : rotation différentielle moyenne entre les zones convective et radiative en fonction du temps, pour les quatre topologies magnétiques illustrées en haut, et pour une intensité du dipôle de 1 G. La rotation différentielle est estimée par $\Delta\Omega(t) = (2/3R_{\text{CE}}^3) \int_0^\pi \int_0^{R_{\text{CE}}} [(\Omega(r, \theta, t) - \Omega_{\text{CE}}(t)) / \Omega_{\text{CE}}(t)] r^2 \sin\theta dr d\theta$, où R_{CE} est le rayon de la zone radiative qui s'étend jusqu'à la base de la zone convective, Ω le taux de rotation et Ω_{CE} le taux de rotation de l'enveloppe convective. Crédit : [Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#). 39
- 2.8 Anneau fluide en rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire Ω . Une particule fluide (point rouge) initialement localisée à une distance r de l'axe de rotation, tourne autour de celui-ci à la vitesse U_ϕ . Elle est ainsi soumise à une accélération centrifuge $\vec{\mathcal{F}}_{\text{cent}}$ contrebalancée par un gradient de pression centripète $-\partial P / \partial r \vec{e}_r$ 41
- 2.9 Gauche : illustration du dispositif de Taylor-Couette. R_1 est le rayon du cylindre intérieur et R_2 , celui du cylindre extérieur. Droite : diagramme de stabilité obtenu par [Taylor \(1923\)](#). L'abscisse correspond au taux de rotation du cylindre extérieur et l'ordonnée à celui du cylindre intérieur. La courbe pleine correspond à la courbe théorique obtenue par l'analyse de stabilité linéaire réalisée par [Taylor \(1923\)](#). Les points correspondent aux mesures expérimentales. Remarquons l'accord parfait entre théorie et résultats expérimentaux. La courbe en tirets correspond à la ligne de Rayleigh obtenue lorsque l'effet de la viscosité est négligé. Crédit : [Kirillov & Stefani \(2012\)](#). 42
- 2.10 Représentation des régimes dynamiques observés dans un dispositif de Taylor-Couette. R_0 caractérise ici, la rotation du cylindre extérieur et R_1 , celle du cylindre intérieur. Une valeur négative de R_0 correspond à une contra-rotation, une valeur positive à une co-rotation. Crédit : [Andereck et al. \(1986\)](#). 43
- 2.11 Mécanisme de développement de l'instabilité de Goldreich-Schubert-Fricke. Les surfaces de moment cinétique spécifique \mathcal{J} (Q sur la présente illustration) constant font un angle Γ avec l'axe de rotation de l'étoile. Une particule fluide qui se déplace dans la région décrite par l'angle Γ dans la direction de la flèche en trait plein, présentera dans sa nouvelle position un excès de moment cinétique par rapport à son environnement et subira une accélération centrifuge amplifiant son mouvement initial. Crédit : [Knobloch & Spruit \(1982\)](#). 44

2.12 Principe de l'instabilité magnétorotationnelle dans un disque d'accrétion en orbite autour d'une jeune étoile magnétisée. Deux particules fluides (en bleu) associées à une même ligne de champ (en noir) sont déplacées de leur position d'équilibre, l'une vers l'intérieur du disque, l'autre vers l'extérieur. Si le champ magnétique est suffisamment faible, il peut permettre le développement d'une instabilité linéaire comme suit : la particule fluide déplacée vers l'intérieur du disque doit accélérer par conservation du moment cinétique alors que celle déplacée vers l'extérieur doit décélérer. La ligne de champ est donc cisailée ce qui produit une tension magnétique qui freine la particule déplacée vers l'intérieur du disque et accélère celle déplacée vers l'extérieur. Par conservation du moment cinétique, la première va chuter sur une orbite plus rapide et la seconde, être éjectée sur une orbite plus lente. La perturbation de départ s'accroît ainsi au fil du temps (ligne de champ allant du plus foncé au plus clair) et l'écoulement est linéairement instable.	48
2.13 Illustration de l'expérience PROMISE. Crédit : Stefani et al. (2018)	50
2.14 Effet d'un champ toroïdal sur la dépendance de phase entre les différents champs perturbés. Pour une SMRI (coupes du haut), la composante radiale du champ magnétique perturbé est en exacte opposition de phase avec la composante toroïdale, tandis que ces dernières sont en exacte quadrature de phase avec la composante radiale du champ de vitesse perturbé. Cette dépendance de phase est modifiée pour une HMRI (coupes du bas) où la quadrature de phase entre la composante radiale du champ de vitesse perturbé et les composantes radiale et azimuthale du champ magnétique perturbé, n'est plus exactement observée. Crédits : Petitdemange et al. (2008) (coupes du haut) et Petitdemange et al. (2013) (coupes du bas).	53
2.15 Couche limite d'Ekman. Gauche : la contrainte visqueuse exercée par le vent à la surface libre de l'océan induit un courant qui spirale dans une couche limite d'épaisseur D_E , ainsi qu'un transport d'eau dans une direction perpendiculaire au vent, orienté vers la droite dans l'hémisphère Nord. Crédit : https://www.offshoreengineering.com/education/oceanography/ekman-current-upwelling-downwelling . Droite : les flux de masses horizontaux sont compensés par des remontées ("upwelling") ou des plongées ("downwelling") d'eau. Crédit : https://www.redmap.org.au/article/upwelling-and-downwelling-in-the-ocean/	55
2.16 Configuration de Couette sphérique considérée par Proudman (1956) . Un fluide visqueux de densité uniforme est compris entre deux sphères imperméables. La sphère interne de rayon r_i tourne à la vitesse angulaire Ω_i tandis que la sphère externe de rayon r_0 tourne légèrement plus vite à la vitesse angulaire $\Omega_0 = \Omega_i (1 + \epsilon)$. Le paramètre ϵ est suffisamment petit pour que la dynamique de l'écoulement puisse être considérée comme linéaire. θ , r , s et z désignent respectivement la latitude, le rayon, la coordonnée perpendiculaire à l'axe de rotation et la coordonnée verticale.	56

- 2.17 Gauche : solution analytique (2.53) de la rotation différentielle en fonction de la coordonnée s . Elle montre que l'écoulement est en rotation solide à l'extérieur du cylindre tangent, et en rotation différentielle à une vitesse intermédiaire entre les taux de rotation des sphères interne et externe, à l'intérieur. La solution est discontinue au passage du cylindre en $s = r_i$. Droite : circulation secondaire induite par les couches d'Ekman. Cette circulation méridienne forme une cellule dont le sens de circulation est horaire. Pour $\epsilon < 0$, le sens de circulation serait inversé. 60
- 2.18 Problème de spin-up dans une configuration de couette sphérique. Le long de la sphère interne (mais aussi de la sphère externe qui n'est pas représentée ici) une couche d'Ekman d'épaisseur $E^{1/2} / \sqrt{|\cos \theta|}$ se développe pour accommoder un saut sur le taux de rotation. Cette couche s'épaissit à l'approche de l'équateur où elle donne naissance à la couche équatoriale d'Ekman d'extension radiale $E^{2/5}$ et d'extension verticale $E^{1/5}$. Des couches de cisaillement libre se développent également le long du cylindre tangent. Au nombre de trois, ces couches sont imbriquées les unes dans les autres. Les couches quasi-géostrophiques d'épaisseur $E^{1/4}$ et $E^{2/7}$, permettent respectivement de lisser une discontinuité sur la vitesse angulaire et sa dérivée radiale en levant partiellement la contrainte de Taylor-Proudman. La couche agéostrophique a quant à elle pour fonction de lisser une discontinuité sur la dérivée seconde de la vitesse angulaire et d'assurer la conservation de la masse, en levant entièrement la contrainte de Taylor-Proudman. Crédit : Stewartson (1966). 62
- 2.19 Écoulement de vitesse U orienté selon \vec{e}_x , induit par un gradient de pression dP/dx uniforme dans un canal rectangulaire infiniment long dans les directions x et z . En l'absence de champ magnétique, ce problème correspond à l'écoulement de Poiseuille pour lequel, en régime stationnaire et laminaire, le profil de vitesse est parabolique (courbe bleue). Lorsqu'un champ magnétique B_0 est appliqué selon \vec{e}_y , des couches de Hartmann d'épaisseur $\delta = H_a^{-1}$ se développent le long des parois du canal perpendiculaires au champ afin d'accueillir un saut sur la vitesse de l'écoulement et sur le champ magnétique induit. Plus l'intensité du champ magnétique est élevée, plus l'écoulement loin des parois est freiné par la force de Lorentz. Au contraire, dans les couches limites, la force de Lorentz accélère l'écoulement et des gradients de vitesse de plus en plus importants se forment. Crédit : Dechamps (2014). 64
- 2.20 Écoulement de Hartmann (1937) reconsidéré par Shercliff (1953) en tenant compte de l'effet des parois localisées en $z = \pm\lambda$, parallèles au champ magnétique imposé dans la direction y . Des couches de cisaillement d'une épaisseur $\delta_{//} \propto H_a^{-1/2}$ se développent le long de ces parois parallèles au champ : les couches de Shercliff. Les couches limites de Hartmann d'épaisseur $\delta_{\perp} \propto H_a^{-1}$, localisées le long des parois perpendiculaires au champ en $y = \pm 1$ sont également représentées. Crédit : Moreau (1990). 66

-
- 2.21 Coupe 2D du taux de rotation dans une configuration de Couette sphérique en présence d'un dipôle. La sphère interne tourne à la vitesse Ω_i et la sphère externe est fixe. Une couche de Shercliff d'épaisseur $\sim H_a^{-1/2}$ se développe entre la ligne de champ poloïdal qui se connecte uniquement à la sphère interne et avec laquelle elle est en co-rotation à la vitesse angulaire Ω_i , et la ligne de champ qui se connecte à la fois aux sphères interne et externe et qui tourne ainsi à une vitesse intermédiaire aux taux de rotation de ces dernières, i.e. $\Omega_i/2$. Crédit : [Hollerbach \(2000\)](#). 67
- 3.1 Modélisation d'une zone radiative stellaire en cours de contraction en présence d'un champ magnétique de grande échelle. La sphère externe de rayon r_0 tourne à la vitesse angulaire Ω_0 autour de l'axe z . Le taux de rotation Ω_i de la sphère interne de rayon r_i est libre d'évoluer au cours du temps. La contraction de la zone radiative est modélisée à travers l'imposition d'une vitesse radiale $\vec{V}_f(r)$. Le champ magnétique de grande échelle peut soit être un dipôle (gauche) soit être un quadrupôle (droite). Sa topologie est telle que certaines lignes de champ se connectent à la fois aux sphères interne et externe, uniquement à la sphère externe, ou se referment sur elles-mêmes au sein même de la coquille sphérique. 70
- 3.2 Vitesse de contraction V_f , normalisée par sa valeur à la sphère externe V_0 , en fonction du rayon r , pour différents contrastes de densité appliqués entre les sphères interne et externe. La courbe en tirets représente le cas d'une densité uniforme à travers la coquille sphérique (Boussinesq). Les courbes en trait plein correspondent aux contrastes suivants : $\rho_i/\rho_0 = 1.75, 10.8, 20.9$ et 60.2 , respectivement du plus clair au plus foncé. 71
- 3.3 Coupes méridiennes de la rotation différentielle (première et troisième coupe) et de la norme du champ de vitesse méridien total $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ (seconde et dernière coupe), lorsque l'état stationnaire est atteint. Les contours noirs tracés sur la seconde et la dernière coupe représentent les lignes de courant de la circulation méridienne totale. À l'extérieur du cylindre tangent, les traits pleins (les tirets) correspondent à une circulation horaire (anti-horaire) tandis qu'à l'intérieur du cylindre, ils font référence à une circulation orientée vers le haut (vers le bas). Les deux premières coupes ont été obtenues sous l'approximation de Boussinesq avec $E = 10^{-6}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et $Re_c = 10^{-2}$ et les deux dernières, sous l'approximation anélastique en utilisant les mêmes paramètres mais en imposant en plus un contraste de densité $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ entre les sphères interne et externe. 87
- 3.4 Rotation différentielle stationnaire obtenue dans le régime d'Eddington-Sweet, sous l'approximation de Boussinesq, avec $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ (rangée supérieure) et 10^{-2} (rangée inférieure), les nombres d'Ekman et de Reynolds basé sur la contraction étant respectivement fixés à 10^{-6} et 10^{-2} . Dans la première colonne, cette rotation différentielle est simplement rescalée par $E / (P_r (N_0/\Omega_0)^2 R_0)$. Dans la colonne du milieu, nous lui retirons la solution analytique de Taylor-Proudman (3.42) avant d'effectuer ce rescaling. Dans la dernière colonne, nous présentons des cartes 2D du rapport entre les membres de droite et de gauche de l'équation (3.44). 90
-

- 3.5 Dérivée partielle radiale du rapport de la composante azimuthale du champ de vitesse sur le rayon (figure 3.5a), et composantes radiale cylindrique (figure 3.5b) et verticale (figure 3.5c) du champ de vitesse, tracées en fonction du rayon. Chacune de ces figures est subdivisée en deux sous-figures. Celles du haut sont obtenues à la latitude $\pi/4$ et celles du bas à l'équateur, hormis pour la composante verticale du champ de vitesse qui, étant nulle à cette localisation, est tracée proche de cet endroit, à une latitude faisant un angle de 85° avec l'axe vertical. Les courbes bleues correspondent à un cas Boussinesq avec $E = 10^{-5}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ et $Re_c = 10^{-2}$. Les courbes en noir sont obtenues pour les mêmes paramètres mais en variant progressivement le contraste de densité entre les sphères interne et externe, avec $\rho_i/\rho_0 = 10.8$ (tirets), 20.9 (tirets pointillés) et 60.2 (pointillés) sur la figure 3.5a, et $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ (trait plein) et 20.9 (tirets) sur les figures 3.5b et 3.5c. Sur la figure 3.5d, l'amplitude caractéristique de la rotation différentielle, obtenue après lui avoir numériquement retiré la solution équivalente sans stratification en entropie, est tracée en fonction de l'inverse de l'intégrale du profil de densité de base pour différents contrastes de densité entre les sphères interne et externe : $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ (cercle), 10.8 (losange), 20.9 (carré) et 60.2 (triangle), ainsi que pour différentes latitudes : $\theta = \pi/2$ (vert), $\pi/4$ (cyan), $\pi/8$ (bleu clair), $\pi/16$ (violet) et $\pi/32$ (bleu). 91
- 3.6 Amplitude caractéristique de la rotation différentielle équatoriale, comme une fonction de $P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_0/E$, dans l'approximation de Boussinesq. Dans chaque cas, le paramètre $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ et le nombre d'Ekman sont respectivement fixés à 10^{-1} et 10^{-6} alors que le nombre de Rossby basé sur la contraction varie entre 10^{-8} et 10^{-5} , permettant ainsi de varier Re_c de 10^{-2} à 10. 92
- 3.7 Écoulements stationnaires et axisymétriques dans le régime visqueux lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ (deux premières colonnes) et lorsque $\Delta\Omega/\Omega_0 \geq 1$ (deux dernières colonnes). La rangée supérieure correspond à des simulations effectuées sous l'approximation de Boussinesq, avec $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^5$ et $Re_c = 10^{-2}$ pour les deux premières coupes, et $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^4$ et $Re_c = 10$ pour les deux dernières. La rangée inférieure correspond à des simulations anélastiques réalisées avec les mêmes paramètres mais pour un contraste de densité $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ à travers la coquille. Dans la première et la troisième colonne nous montrons la rotation différentielle. Dans la seconde et la dernière, c'est la norme du champ de vitesse méridien total $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ que nous présentons, avec en noir les lignes de courant associées à la circulation méridienne totale. Les tirets illustrent alors une circulation dirigée vers le bas tandis que les traits pleins, représentent une circulation orientée vers le haut. . . 94
- 3.8 Rotation différentielle rescalée par Re_c , en fonction du rayon, à la latitude $\theta = \pi/8$. Du plus clair au plus foncé, nous avons $\rho_i/\rho_0 = 1$ (Boussinesq), 1.75, 10.8, 20.9 et 60.2. Les solutions analytiques correspondantes (3.48) sont tracées en noir et montrent un accord parfait avec les solutions numériques. Les autres paramètres sont $E = 10^{-4}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10^{-1}$ et 10^{-2} 95

- 3.9 Écoulements quasi-stationnaires et axisymétriques obtenus dans les régimes visqueux (rangée supérieure) et d'Eddington-Sweet (rangée inférieure) en présence d'un dipôle axial tel que défini par l'équation (3.3) et illustré sur la figure 3.1. Rangée supérieure : coupes méridiennes de la rotation différentielle (première et troisième coupe) et du champ toroïdal (seconde et dernière coupe) lorsque l'on interdit (deux premières coupes) ou autorise (deux dernières coupes) l'advection des lignes de champ par la contraction. Rangée inférieure : coupes méridiennes de la rotation différentielle (première coupe), du champ toroïdal (seconde coupe), de la norme du champ de vitesse méridien total \vec{U}_p^{tot} (troisième coupe) et de la norme du champ de vitesse méridien $\vec{U}_p = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ (quatrième coupe), lorsque l'advection du champ magnétique par la contraction est permise. Sur les coupes de rotation différentielle, les contours noirs illustrent les lignes de champ poloïdal. Sur les coupes de champ toroïdal et de la norme du champ de vitesse méridien, ils représentent les lignes de courant associées à la fonction de courant-électrique (dans le premier cas) ou à la circulation méridienne (dans le second cas). Les traits pleins (tirets) illustrent une circulation électrique (premier cas) ou fluide (second cas) horaire (anti-horaire). Sur la coupe de la norme du champ de vitesse méridien total, les lignes de courant en trait plein (en tirets) noir(s) décrivent une circulation ascendante (descendante). Dans le cas visqueux, les paramètres sont $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$ et $L_u = 5 \cdot 10^4$ (deux premières coupes) ou 10^4 (deux dernières coupes). Dans le régime d'Eddington-Sweet, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-5}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$, $L_u = 10^5$ et $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ 97
- 3.10 Rotation différentielle équatoriale dans l'approximation de Boussinesq, rescalée par Re_c puis tracée en fonction du rayon r , lorsque la zone morte n'est pas advectée par la contraction (figure 3.10a) et lorsqu'elle l'est (figure 3.10b). Les solutions analytiques (3.54) sont tracées en tirets noirs puis comparées aux résultats des simulations numériques en couleur. Sur la figure 3.10a, les courbes rouges, bleues et violettes correspondent respectivement à des cas où $Re_c = 10^{-1}$, 1 et 5. Pour chacune de ces couleurs nous avons, du plus clair au plus foncé, $L_u = 5 \cdot 10^3$, 10^4 et $5 \cdot 10^4$. Sur la figure 3.10b, les courbes vertes, bleues et violettes sont associées à des simulations pour lesquelles $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$, 1 et 2. Les courbes en trait plein sont alors obtenues pour $L_u = 10^4$, et celles tracées en alternance de tirets et pointillés, pour $L_u = 5 \cdot 10^3$. Pour chacune de ces deux figures, les paramètres restants sont fixés comme suit : $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$ et $P_m = 10^2$ 101
- 3.11 Coupes méridiennes de la rotation différentielle (première coupe) et de la composante latitudinale du champ de vitesse (seconde coupe). Sur ces coupes sont tracées, en noir, les lignes de champ poloïdal (première coupe) et les contours du cisaillement latitudinal $\partial \ln \Omega / \partial \theta$ (seconde coupe). Les tirets (respectivement les traits pleins) représentent un cisaillement négatif (respectivement positif). La dernière figure montre l'évolution temporelle (en fonction du temps d'Alfvén) du carré de la composante latitudinale du champ de vitesse, aux localisations mises en évidence sur la seconde coupe par des points noir, bleu clair et bleu. Les paramètres de la simulation sont $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $Re_c = 1$, $P_m = 10^2$ et $L_u = 10^4$ 102

3.12	Illustration de l'altération de la dépendance de phase entre les quantités perturbées, en raison de la présence d'un champ toroïdal d'amplitude non-négligeable. La composante latitudinale du champ de vitesse perturbé est représentée en violet et celle du champ magnétique poloïdal perturbé, en vert turquoise. Le champ toroïdal perturbé est quant à lui tracé en bleu.	103
3.13	Évolution non-linéaire de l'instabilité (deux premières coupes) et reconfiguration de l'écoulement (deux dernières coupes). La première et la dernière coupe illustrent la rotation différentielle. Sur la première sont en plus représentées les lignes de courant associées à la circulation méridienne, avec des tirets pour une circulation anti-horaire et des traits pleins pour une circulation horaire. La seconde et la troisième coupe montrent la norme (couleur) et les lignes (noir) du/de champ poloïdal. Les deux premières coupes sont prises à $t \sim 3\tau_c$ et les deux dernières, à $t \sim 3.5\tau_c$. Les paramètres sont les mêmes que sur la figure 3.11.104	104
3.14	Évolution temporelle de l'amplitude maximale de la rotation différentielle, en fonction du temps de contraction. Les étapes essentielles sont mises en évidence par différentes couleurs : les tirets rouges marquent le déclenchement de l'instabilité à $t \sim 1.05\tau_c$. Les perturbations s'amplifient alors de façon exponentielle jusqu'à saturation au temps $t \sim 1.28\tau_c$ (tirets orange). La période subséquente constitue l'évolution non-linéaire de l'instabilité. Celle-ci se poursuit jusqu'au temps $t \sim 3.5\tau_c$ qui marque le début de l'évolution post-instabilité (tirets bleus). L'écoulement évolue ensuite progressivement vers l'état stationnaire hydrodynamique décrit en 3.4.1.3, ici atteint lorsque $t \sim 4.66\tau_c$ (tirets violets).	105
D.1	Illustration du cylindre coaxial de rayon $s = r \sin \theta$ compris entre $z_0 = r_0 \sqrt{1 - (s/r_0)^2}$ et $z_i = r_i \sqrt{1 - (s/r_i)^2}$, à l'intérieur duquel est effectué le bilan de flux de masse donné par l'équation (D.21).	142
D.2	Illustration du domaine conique choisi pour représenter la zone morte lorsque les lignes de champ ne sont pas advectées par la contraction. Le domaine conique est délimité par des traits noirs sur la coupe méridienne de gauche et défini par : $r \in [r_{iDZ}; r_0]$ et $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ avec $r_{iDZ} = 0.77r_0$, $\theta_0 \approx \pi/14$ et $-\theta_0 \approx -\pi/14$ (ou de façon équivalente en terme de colatitude, $\theta \in [3\pi/7; 4\pi/7]$).	150
D.3	Illustration du domaine conique choisi pour représenter la zone morte lorsque les lignes de champ sont advectées par la contraction et que celle-ci se connecte à la sphère interne. Le domaine conique est délimité par des traits noirs sur la coupe méridienne de gauche et défini par : $r \in [r_i; r_0]$ et $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ avec $\theta_0 \approx 4\pi/23$ et $-\theta_0 \approx -4\pi/23$ (ou de manière équivalente en terme de colatitude, $\theta \in [15\pi/46; 31\pi/46]$).	156
D.4	Fonction transcendante $\tilde{f}(\mu_n) = 3 \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{ 9 + 4\tilde{\mu}_n } \ln(\tilde{r}_i)\right) - \sqrt{ 9 + 4\tilde{\mu}_n }$. Les dix premières solutions de l'équation transcendante (D.114) sont représentées en rouge.	157

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Valeur du temps de Kelvin-Helmholtz et de la durée de la pré-séquence principale en fonction de la masse de l'étoile. D'après Maeder (2008)	6
3.1	Récapitulatif des différentes échelles caractéristiques utilisées pour adimensionnaliser les grandeurs thermodynamiques qui apparaissent dans les systèmes d'équations (3.13) et (3.15).	76
3.2	Nombres sans dimension apparaissant dans les systèmes d'équations (3.17) et (3.18), accompagnés de leur définition et de leur signification physique.	78
3.3	Estimations en années des échelles de temps caractéristiques, et régimes d'intérêts, dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes. L'ensemble de ces valeurs s'appuient sur les références suivantes. [1*] : (Lamm et al., 2005 ; Irwin et al., 2006, 2007a ; Alecian et al., 2013b) ; [2*] : (Deheuvels et al., 2020) ; [3*] : (Gouhier et al., 2022) ; [4*] : (Maeder, 2008) ; [5*] : (Deheuvels et al., 2020) ; [6*] : (Braithwaite & Spruit, 2017) ; [7*] : (Cantiello et al., 2016) ; [8*] : (Lara & Rieutord, 2013) ; [†] et [‡] : voir corps du texte.	82
3.4	Valeurs des différents paramètres qui gouvernent les équations de la dynamique d'un écoulement stablement stratifié plongé dans un champ magnétique de grande échelle, et régimes d'intérêts, dans les zones radiatives des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale et des sous-géantes. Les valeurs utilisées au cours des simulations sont notées en vert. L'ensemble de ces données s'appuient sur les références suivantes. [1] : (Gouhier et al., 2021) ; [2] : (Talon & Charbonnel, 2008) ; [3] : (Lamm et al., 2005 ; Irwin et al., 2006, 2007a ; Alecian et al., 2013b) ; [4] : (Deheuvels et al., 2020) ; [5] : (Garaud et al., 2015) ; [6] : (Rüdiger et al., 2016) ; [7] : (Rüdiger et al., 2015) ; [8] : (Wade et al., 2005 ; Alecian et al., 2013a) ; [9] : (Brun et al., 2005 ; Fuller et al., 2015 ; Augustson et al., 2016) ; [★] : voir corps du texte.	84
A.1	Échelles caractéristiques utilisées pour adimensionnaliser les équations dans MagIC.	127

PUBLICATIONS

Axisymmetric investigation of differential rotation in contracting stellar radiative zones

B. Gouhier, F. Lignières, and L. Jouve

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP), Université de Toulouse, 14 Avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France

e-mail: bgouhier@irap.omp.eu; flignieres@irap.omp.eu; ljouve@irap.omp.eu

Received 24 August 2020 / Accepted 11 November 2020

ABSTRACT

Context. Stars experience rapid contraction or expansion at different phases of their evolution. Modelling the transport of angular momentum and the transport of chemical elements occurring during these phases remains an unsolved problem.

Aims. We study a stellar radiative zone undergoing radial contraction and investigate the induced differential rotation and meridional circulation.

Methods. We consider a rotating spherical layer crossed by an imposed radial velocity field that mimics the contraction, and numerically solve the axisymmetric hydrodynamical equations in both the Boussinesq and anelastic approximations. An extensive parametric study is conducted to cover regimes of contraction, rotation, stable stratification, and density stratification that are relevant for stars.

Results. The differential rotation and the meridional circulation result from a competition between the contraction-driven inward transport of angular momentum and an outward transport dominated by either viscosity or an Eddington–Sweet-type circulation, depending on the value of the $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ parameter, where P_r is the Prandtl number, N_0 the Brunt–Väisälä frequency, and Ω_0 the rotation rate. Taking the density stratification into account is important to study more realistic radial contraction fields, and also because the resulting flow is less affected by unwanted effects of the boundary conditions. In these different regimes and for a weak differential rotation we derive scaling laws that relate the amplitude of the differential rotation to the contraction timescale.

Key words. hydrodynamics – methods: numerical – stars: rotation

1. Introduction

The transport of angular momentum (AM) and chemical elements in stars strongly affects their evolution, from pre-main sequence (PMS) to evolved stages. These processes are particularly crucial in the stellar radiative zones, but their modelling remains an open question. In standard evolution models, these stably stratified zones are assumed to be motionless despite early works pointing out the lack of a static solution in uniformly rotating stars (Von Zeipel 1924) and a related large-scale meridional circulation driven by the centrifugal acceleration (Eddington 1925; Sweet 1950). A more complete formalism was then introduced by Zahn (1992) including a self-consistent meridional flow and models of the turbulent transport driven by hydrodynamical instabilities. The importance of additional processes such as internal waves (e.g., Talon & Charbonnel 2005) and magnetic fields (Spruit 2002) has also been investigated. Zahn’s formalism successfully explained a number of observed stellar properties, such as the nitrogen abundances at the surface of red supergiants or the observed blue-to-red supergiant ratio in the Small Magellanic Cloud (Maeder & Meynet 2001). The dynamics of internal gravity waves could possibly explain the flat rotation profile of the solar radiative zone (Talon et al. 2002 and Charbonnel & Talon 2005) inferred through helioseismology (Schou et al. 1998), as well as the lithium dip in solar-like stars (Charbonnel & Talon 2005). Despite these early encouraging results many stellar observations remain unexplained, especially the internal rotation rates revealed by asteroseismology in evolved stars and in intermediate-mass main sequence stars (see

Aerts et al. 2019 for a review). The current theoretical understanding of the structure of the differential rotation in stellar radiative zones, crucial for the development of instabilities and thus for the related turbulent transport, is still largely incomplete. In particular, the assumption that the differential rotation is mostly radial, rather than radial and latitudinal, is at the base of Zahn’s formalism, but the validity of this assumption has never been thoroughly tested. In this paper we are particularly interested in the differential rotation and the large-scale meridional flows generated in periods of the stellar life when contraction, expansion, or both processes occur. This is the case for example for PMS stars which are gravitationally contracting before starting their core nuclear reactions, or for subgiant and giant stars which undergo contraction of their core and expansion of their envelope. Within these stars a strong redistribution of AM is expected to happen, producing differential rotation and thus potentially unstable shear flows.

Solar-like PMS stars such as T Tauri stars contract during their evolution up to the main sequence (MS). The increase in the rotation rate due to this contraction can be estimated using AM conservation and assuming uniform rotation. For example, taking typical rotation rates from Gallet & Bouvier (2013), a star rotating at 8% of the break-up velocity at 1 Myr that experiences a decrease in radius from $2.58 R_\odot$ to $0.9 R_\odot$ (while the moment of inertia goes from $19.6 I_\odot$ to $1.03 I_\odot$, where $I_\odot = 6.41 \cdot 10^{53} \text{ g}\cdot\text{cm}^2$ is the moment of inertia of the present Sun) would rotate at 32% of the break-up velocity at the zero age main sequence (ZAMS). The observation of stars in young open clusters instead indicates that their surface typically rotates at only 10% of their break-up

velocity, showing the need to add other processes like AM exchanges with a circumstellar disk and AM extraction through a magnetised stellar wind (Bouvier et al. 1986). Interestingly, simple models of the internal AM transport, where a coupling time between a uniformly rotating outer convective zone and a uniformly rotating radiative core determines the surface rotation, strongly suggest that a certain level of radial differential rotation is present in the interior of these contracting young solar-type stars (Gallet & Bouvier 2013).

Another stellar class of interest for our purpose are the more massive Herbig Ae/Be stars. Just like the T Tauri stars, these objects experience a contraction during the PMS phase which should lead them to spin up to the MS. Using typical values from Böhm & Catala (1995) and assuming uniform rotation, we can estimate that a $2 M_{\odot}$ star rotates beyond its break-up velocity on the ZAMS while a $3 M_{\odot}$ star should rotate at around 65% of its break-up velocity and a $5 M_{\odot}$ at around 52% break-up. Again, observations indicate lower surface rotation rates on the ZAMS, corresponding to 30% break-up for a $2 M_{\odot}$ star and around 40% for the 3 and $5 M_{\odot}$ stars (Alecian et al. 2013a). These data would be compatible either with a $\propto 1/r^2$ inner differential rotation and no AM losses or with wind-driven AM losses and smoother radial gradients. An additional interest of the Herbig Ae/Be stellar class is the small fraction of Herbig Ae/Be stars that are known to be strongly magnetic (Wade et al. 2005; Alecian et al. 2013b) because the contraction-driven AM transport in their radiative envelope would surely be affected by these magnetic fields.

When studying AM transport, red giant stars and particularly early red giants and subgiants are objects of particular interest. Asteroseismology puts constraints on the rotation rates of both the core and the envelope of these stars, and was able to show for the first time that a significant differential rotation exists in a stellar radiative zone (Deheuvels et al. 2012; Beck et al. 2012). By studying a sample of six *Kepler* stars at different evolutionary stages, Deheuvels et al. (2014) also showed that the level of differential rotation increases with the stellar age. During the subgiant phase the combination of core contraction and envelope expansion indeed tends to produce a strong radial differential rotation. However, up-to-date hydrodynamical models based on Zahn’s formalism predict core rotation rates that are two or three orders of magnitude higher than observed (Eggenberger et al. 2012; Marques et al. 2013; Ceillier et al. 2013), thus showing that some model assumptions are not valid or that additional processes extract the AM from the core. Internal gravity waves (Pinçon et al. 2017) or magnetic fields (Fuller et al. 2019; Eggenberger et al. 2019; den Hartogh et al. 2020) have been invoked as possible candidates.

In this work we investigate the large-scale flows induced by a steady mass flux through a stably stratified radiative zone, thus modelling the contraction of the star either during the PMS or the subgiant and giant phases. More specifically, we describe the structure of the steady axisymmetric solutions (i.e. the differential rotation and the meridional circulation) in the different physical regimes relevant for stars undergoing contraction. To our knowledge, such studies are scarce. In Hypolite & Rieutord (2014), the effect of the gravitational contraction was studied in a linear regime without stratification or assuming an approximate treatment of the stable stratification proposed by Rieutord (2006). The expansion was considered with a similar approach by Rieutord & Beth (2014). The differential rotation induced by the contraction can in principle give rise to various kinds of instabilities that would in turn affect the AM distribution. In this context our present work on steady axisymmetric solutions can be

viewed as a first step towards a future study on the instabilities of contraction-driven flows and their role on the AM transport in stars.

The paper is organised as follows. In Sect. 2 the mathematical model is presented. In Sect. 3 we discuss the different physical timescales. After shedding light on the values of the relevant parameters in stars in Sect. 4, the numerical method is presented in Sect. 5. The results under the Boussinesq and anelastic approximations are then respectively described in Sects. 6 and 7. Finally, a summary and a conclusion are given in Sect. 8.

2. Mathematical formulation

In this work we model the contraction of a portion of stellar radiative zone. To this end, the fluid dynamics equations are solved numerically using one of two different approaches, either the Boussinesq approximation or the anelastic approximation. These two approximations are based on a sound-proof approach where the acoustic waves are filtered out. The Boussinesq case is studied to analyse the response to contraction of an incompressible fluid, without losing the effects of buoyancy. Then the anelastic approximation is introduced to study the effects of the density stratification. In this section we first present the dimensionless Boussinesq and anelastic equations then discuss the reference state and the choice of the forcing velocity field that mimics the contraction of the stellar radiative zone.

2.1. Governing equations

To model a stellar radiative zone we consider a spherical shell of inner radius r_i and outer radius r_0 filled with a self-gravitating ideal gas subject to a forced radial velocity field intended to mimic the stellar contraction. In the following the non-dimensional form of the governing equations in a rotating frame is obtained using the radius of the outer sphere r_0 as the reference length, the value of the contraction velocity field at the outer sphere V_0 as a characteristic velocity, and the contraction timescale $\tau_c = r_0/V_0$ as the reference timescale. The frame rotates at Ω_0 , the rotation rate of the outer sphere. All the thermodynamics variables are expanded as background plus fluctuations, the background variables being identified with an overbar and the fluctuations with a prime. The background density and temperature field are non-dimensionalised respectively by the outer sphere density ρ_0 and temperature T_0 , while the background gradients of temperature and entropy fields are adimensionalised using the temperature and entropy difference $\Delta\bar{T}$ and $\Delta\bar{S}$ between the two spheres. The pressure fluctuations are non-dimensionalised by $\rho_0 r_0 \Omega_0 V_0$ and the entropy fluctuations by $C_p \Omega_0 V_0 / g_0$, where C_p is the heat capacity and g_0 the gravity at the outer sphere. Hereafter, all dimensionless variables are identified with a tilde. Under these conditions, the dimensionless form of the governing equations for conservation of mass, momentum, and entropy is given by (Jones et al. 2011; Gastine & Wicht 2012; Wicht et al. 2018; Dietrich & Wicht 2018)

$$\nabla \cdot \left[\tilde{\rho} \left(\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r \right) \right] = 0, \quad (1)$$

$$R_o \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \left(\left(\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r \right) \cdot \nabla \right) \left(\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r \right) \right] + 2\mathbf{e}_z \times \left(\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r \right) = -\nabla \left(\frac{\tilde{\Pi}'}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{\tilde{S}'}{\tilde{r}^2} \mathbf{e}_r + \frac{E}{\tilde{\rho}} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho} \tilde{T} \left[P_r R_o \left(\frac{\partial \tilde{S}'}{\partial t} + \left((\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \right) \tilde{S}' \right) \right. \\ & \quad \left. + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \left(\tilde{U}_r + \tilde{V}_f(r) \right) \frac{d\tilde{S}'}{dr} \right] \\ & = E \nabla \cdot \left(\tilde{\rho} \tilde{T} \nabla \tilde{S}' \right) + D_i P_e E^2 \tilde{Q}_v, \end{aligned} \quad (3)$$

where $V_f(r)$ is the mass-conserving contraction velocity field whose expression is given in Sect. 2.3. The dimensionless momentum equation Eq. (2) was derived using the Lantz-Braginsky-Roberts (LBR) approximation (Lantz 1992; Braginsky & Roberts 1995) and assuming that the kinematic viscosity ν is uniform. The dimensionless equation of entropy evolution Eq. (3) was obtained using the formalism described by Braginsky & Roberts (1995) and Clune et al. (1999) to introduce the diffusion of entropy instead of the diffusion of temperature. The thermal diffusivity κ is assumed to be uniform. In the above equations $\tilde{\sigma}_{ij}$ is the dimensionless stress tensor and \tilde{Q}_v is the dimensionless viscous heating. Furthermore, the gravity model assumes that the mass of the star is concentrated in the centre:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM_c}{r^2} \mathbf{e}_r = -g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (4)$$

Here G is the gravitational constant and M_c is the mass at the centre.

In Eqs. (1)–(3) R_o is a Rossby number based on the amplitude of the contraction velocity field $R_o = V_0/\Omega_0 r_0$, E is the Ekman number $E = \nu/\Omega_0 r_0^2$, P_r is the Prandtl number $P_r = \nu/\kappa$, and N_0 is a reference value of the Brunt–Väisälä frequency defined in Sect. 2.2. It gives a mean measure of the magnitude of the stable stratification. The ratio of the Rossby number to the Ekman number allows us to define the contraction Reynolds number Re_c , from which we define the Péclet number associated with the contraction $Pe_c = P_r Re_c$. In Eq. (3) a parameter related to the density stratification appears, namely the dissipation number:

$$D_i = \frac{g_0 r_0}{T_0 C_p}. \quad (5)$$

The Boussinesq approximation is then found in the limit where the effects of compressibility are neglected, except in the buoyancy term of the momentum equation. In this case the temperature fluctuations are adimensionalised using $\Omega_0 V_0 T_0/g_0$ as the temperature scale. The dimensionless governing equations for continuity, momentum evolution, and temperature evolution become

$$\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} R_o \left[\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \left((\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \right) (\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) \right] \\ + 2\mathbf{e}_z \times (\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) \\ = -\nabla \tilde{\Pi}' + \tilde{\Theta}' \tilde{\mathbf{r}} + E \nabla^2 (\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_r R_o \left[\frac{\partial \tilde{\Theta}'}{\partial t} + \left((\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{V}_f(r) \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \right) \tilde{\Theta}' \right] \\ + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f(r)) \frac{d\tilde{T}'}{dr} = E \nabla^2 \tilde{\Theta}'. \end{aligned} \quad (8)$$

In Eq. (7) we use a gravity profile corresponding to a uniform fluid density ρ_c :

$$\mathbf{g} = -\frac{4}{3} \pi r \rho_c G \mathbf{e}_r = -g_0 \frac{r}{r_0} \mathbf{e}_r. \quad (9)$$

To conclude this section we note that when the anelastic approximation is used the parameter space is defined by six dimensionless numbers: ϵ_s (defined in Sect. 2.2), D_i , Re_c , E , P_r , and N_0^2/Ω_0^2 . Instead, only the last four are necessary in the Boussinesq approximation.

2.2. Background state

In the anelastic approximation we use a non-adiabatic reference state which enables us to prescribe a profile for the background entropy gradient. We simply use a uniform positive entropy gradient to produce a stable stratification. The uniform background entropy gradient $d\bar{S}/dr$ is related to the Brunt–Väisälä frequency through

$$N(r) = \sqrt{\frac{g}{C_p} \frac{d\bar{S}}{dr}}, \quad (10)$$

from which we define a reference Brunt–Väisälä frequency:

$$N_0 = \sqrt{\frac{g_0}{C_p} \frac{\Delta \bar{S}}{r_0}}. \quad (11)$$

For the anelastic approximation to remain valid, we nonetheless need to ensure that the deviation to the isentropic state is small. The magnitude of this deviation is controlled by the parameter ϵ_s :

$$\epsilon_s = \frac{\Delta \bar{S}}{C_p}. \quad (12)$$

This parameter, together with the dissipation number, sets the temperature profile and the magnitude of the density stratification.

Finally, the prescribed background gradient of entropy $d\bar{S}/dr$, the dissipation number D_i , and the ϵ_s parameter give the background temperature profile through the equation

$$\frac{d\tilde{T}'}{dr} = \epsilon_s \tilde{T}' \frac{d\bar{S}}{dr} - \frac{D_i}{\tilde{r}^2}, \quad (13)$$

as well as the background density profile

$$\frac{d \ln \tilde{\rho}'}{dr} = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) \frac{d \ln \tilde{T}'}{dr} - \epsilon_s \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{d\bar{S}}{dr}, \quad (14)$$

where γ is the adiabatic index that is equal to 5/3 for a monatomic gas. When the Boussinesq approximation is used, the background temperature \bar{T} is the solution of the conduction equation

$$\nabla^2 \bar{T} = 0 \quad (15)$$

for prescribed temperatures at the spherical boundaries:

$$\bar{T} = \bar{T}(r = r_0) - \Delta \bar{T} \frac{r_i}{r} \left(\frac{r - r_0}{r_i - r_0} \right). \quad (16)$$

Here $\Delta\bar{T} = \bar{T}(r = r_0) - \bar{T}(r = r_i) > 0$, again ensuring stable stratification. The background temperature gradient $d\bar{T}/dr$ is then related to the Brunt–Väisälä frequency through the relationship

$$N(r) = \sqrt{\frac{g}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}}{dr}}, \quad (17)$$

from which the reference Brunt–Väisälä frequency is defined as

$$N_0 = \sqrt{\frac{g_0}{T_0} \frac{\Delta\bar{T}}{r_0}}. \quad (18)$$

2.3. Contraction velocity field

The specificity of our model is to introduce a contraction process that will force large-scale flows inside the stably stratified stellar layer. We assume here that the contraction is produced by a steady mass flux oriented towards the centre of the star. In other words, a fixed radial velocity field V_f is added to the flow velocity, and this forcing velocity field is chosen to be radial and directed towards the centre of the star. In order for this additional velocity field to conserve mass, we need to ensure that $\nabla \cdot (\bar{\rho} V_f) = 0$. In the anelastic case the contraction velocity field thus simply reads:

$$V_f = V_f(r) \mathbf{e}_r = -\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^2} \mathbf{e}_r. \quad (19)$$

Under the Boussinesq approximation, since the background density is uniform, this velocity field simplifies into

$$V_f = V_f(r) \mathbf{e}_r = -\frac{V_0 r_0^2}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (20)$$

We would like to point out that to model stellar expansion, this forcing velocity field $V_f(r)$ can be chosen to be positive.

3. Timescales of physical processes

In this section we use the equation of AM conservation to derive the timescales of the physical processes acting on the differential rotation. This allows us to distinguish a priori the parameter regimes where each process dominates.

In its dimensional form, the equation of AM conservation reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \text{NL} + \underbrace{2\Omega_0 U_s}_{\text{Coriolis term}} - \underbrace{\nu D^2 U_\phi}_{\text{Viscous term}} \\ = \underbrace{\frac{V_0 r_0^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi + r^2 \sin \theta \Omega_0)}_{\text{Contraction}}, \end{aligned} \quad (21)$$

where $D^2 = (\nabla^2 - 1/r^2 \sin^2 \theta)$ is the azimuthal component of the vector Laplacian operator, $U_s = \cos \theta U_\theta + \sin \theta U_r$ is the cylindrical velocity field, and NL denotes the non-linear advection term. By considering the balance between the partial derivative of azimuthal velocity field and the contraction term, we recover the contraction timescale defined in Sect. 2.1, namely $\tau_c = r_0/V_0$, when $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 1$, or its linear version $\tau_c^L = (r_0/V_0)(\Delta\Omega/\Omega_0)$, when $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ so that $rU_\phi \ll r^2 \sin \theta \Omega_0$.

From the balance with the viscous and Coriolis terms, we now define three additional timescales for the AM transport. The first is the viscous timescale, which characterises a redistribution of AM by viscous processes:

$$\tau_v = \frac{r_0^2}{\nu}. \quad (22)$$

The two other timescales are related to the AM transport by meridional flows. In the linear regime the timescale of AM redistribution by the meridional motions is

$$\tau = \frac{r_0}{U_s} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}, \quad (23)$$

and thus it depends on the nature of the circulation through its velocity scale U_s . We now consider two well-known types of circulation, the Eddington–Sweet and the Ekman circulations, that will be relevant to analyse our simulation results. In this paper the steady-state Eddington–Sweet circulation debated by Busse (1981) or Busse (1982), is consistent with the conservation of AM (see Sect. 8).

In a stably stratified medium, large-scale meridional motions are efficiently prevented as the increasing buoyancy content of rising (or sinking) fluid elements produces strong restoring buoyancy forces. However, by diminishing the amplitude of temperature fluctuations, and thus of the fluid element buoyancy, thermal diffusion enables the Eddington–Sweet-type circulation. To derive its characteristic timescale we use the thermal wind balance, obtained by taking the curl of Eq. (A.17) projected in the azimuthal direction:

$$2 \frac{\partial U_\phi}{\partial z} = \frac{g_0}{\Omega_0 r_0 \bar{T}(r)} \frac{\partial \delta\Theta}{\partial \theta}. \quad (24)$$

We then use the steady linear dimensional form of the thermal balance Eq. (A.16)

$$U_r \frac{dT_m}{dr} = \kappa \nabla^2 \delta\Theta, \quad (25)$$

where $T_m(r) = \bar{T}(r) + T'(r)$ and the temperature deviations $\delta\Theta(r, \theta) = \Theta'(r, \theta) - T'(r)$ are respectively the mean spherically symmetric temperature field and the associated fluctuations obtained by taking the additional radial thermal background $T'(r)$ induced by the contraction field into account (for details, see Appendix A).

Accordingly, the characteristic amplitudes of the differential rotation $\Delta\Omega$, the temperature deviations $\delta\Theta$, and the radial velocity field U_r are related as

$$\delta\Theta \approx \frac{\Omega_0^2}{N_0^2} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \Delta\bar{T}, \quad (26)$$

$$U_r \approx \frac{\kappa}{r_0} \frac{\delta\Theta}{\Delta\bar{T}}, \quad (27)$$

from which we get the following relationship between the radial velocity field and the level of differential rotation:

$$U_r \approx \frac{\kappa}{r_0} \frac{\Omega_0^2}{N_0^2} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}. \quad (28)$$

Then, from the continuity equation, we have $U_\theta \approx U_r \approx U_s$, and by injecting the expected order of magnitude of U_s in Eq. (23), we obtain the Eddington–Sweet timescale:

$$\tau_{\text{ED}} = \frac{r_0^2}{\kappa} \frac{N_0^2}{\Omega_0^2}. \quad (29)$$

In an unstratified medium, the Ekman pumping mechanism produces a large-scale circulation controlled by the boundary layers. The mismatch between boundary conditions applied at spherical surfaces and the inviscid interior flow solutions leads to thin viscous boundary layers that in practice modify the boundary conditions seen by the interior flow. For example, the no-slip boundary conditions at the outer sphere induce an Ekman layer that imposes the following relationship between the azimuthal and the radial velocity fields,

$$U_r(r_0, \theta) = \frac{-\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\operatorname{sgn}(\cos \theta) \sin \theta U_\phi^l(r_0, \theta)}{2\sqrt{|\cos \theta|}} \right), \quad (30)$$

as the boundary condition satisfied by the interior flow at the outer sphere. A well-known example of Ekman circulation is the classical unstratified spherical Couette flow where the necessary jumps in rotation rate between the interior and the spherical boundaries, denoted $\Delta\Omega_L$, force a meridional circulation of the order of $U_r \sim \sqrt{E}L\Delta\Omega_L$ that extends over the whole domain (L is the characteristic length in the Couette problem). From Eq. (23), the associated timescale for the AM transport, also called the Ekman spin-up timescale, is

$$\tau_E = \sqrt{\frac{r_0^2}{\Omega_0 \nu}}. \quad (31)$$

For a stably stratified medium, Ekman layers can still exist at the boundaries because the buoyancy force has a negligible effect on motions of very small radial extent, although they are not expected to drive a large-scale global circulation (Barcilon & Pedlosky 1967). As we discuss later, an Ekman layer is present at the outer sphere of our numerical simulations to connect the interior circulation to the prescribed boundary condition, and because the Ekman number is small but finite this has a non-negligible effect on the resulting differential rotation.

The ratios that compare the relative importance of these three AM transport processes,

$$\frac{\tau_{ED}}{\tau_\nu} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2; \quad \frac{\tau_E}{\tau_\nu} = \sqrt{E}; \quad \frac{\tau_E}{\tau_{ED}} = \frac{\sqrt{E}}{P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2}, \quad (32)$$

are controlled by two dimensionless numbers, the Ekman number E and the $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ parameter. As we are interested in cases with low Ekman numbers, $\sqrt{E} \ll 1$, we can thus define three regimes of interest, namely

$$P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll \sqrt{E} \ll 1; \quad \sqrt{E} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll 1; \quad (33)$$

$$\sqrt{E} \ll 1 \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2.$$

The actual differential rotation will result from a competition between the forcing associated with the contraction and these three AM transport processes. The corresponding timescale ratios are as follows:

$$\frac{\tau_\nu}{\tau_c} = \frac{R_o}{E} = Re_c; \quad \frac{\tau_{ED}}{\tau_c} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \frac{R_o}{E}; \quad \frac{\tau_E}{\tau_c} = \frac{R_o}{\sqrt{E}}. \quad (34)$$

This introduces an additional parameter, either R_o or Re_c , which will have a direct impact on the level of differential rotation. In our numerical study this parameter is varied to explore the linear

regime, $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, and the beginning of the non-linear regime, $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 1$.

A non-linear regime is indeed expected if the contraction is the dominant transport process. In this case, the steady state of the AM conservation Eq. (21) reads

$$\frac{V_0 r_0^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \delta\Omega(r)) + 2\Omega_0 V_0 \frac{r_0^2}{r^2} = 0, \quad (35)$$

which can be solved to obtain

$$\frac{\delta\Omega(r)}{\Omega_0} = \frac{r_0^2}{r^2} - 1. \quad (36)$$

Thus, for our set-up with $r_i = 0.3 r_0$, the maximum value of the differential rotation is

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{\delta\Omega(r_i)}{\Omega_0} = \frac{\Omega(r_i) - \Omega(r_0)}{\Omega_0} \approx 10.1, \quad (37)$$

which is clearly in the non-linear regime. We thus expect to reach this regime when the timescale ratios Eq. (34) are higher than one, while a linear regime $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ should exist when these timescale ratios are low enough.

4. Estimate of the relevant physical parameters in stars

In this section we estimate the Ekman number E , the $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ parameter, and the contraction Reynolds number Re_c in stars undergoing contraction.

4.1. Pre-main sequence stars

Among PMS stars, low-mass stars are characterised by a bimodal distribution of their rotational period ($P_{\text{rot}} \approx 8$ days for those experiencing a disk-locking phase and $P_{\text{rot}} \approx 1$ day for the others; Maeder 2008), while intermediate- and high-mass stars are rather rapid rotators ($P_{\text{rot}} \approx 1$ day) except when they are magnetised ($P_{\text{rot}} \approx 1.6$ –4.3 days) (Alecian et al. 2013a).

Stellar models of a $3 M_\odot$ Population I PMS star (Talon & Charbonnel 2008) show that the thermal part of the Brunt–Väisälä frequency varies from $N_T^2 = 10^{-7.5} \text{ s}^{-2}$ at the beginning of the PMS to $N_T^2 = 10^{-5.8} \text{ s}^{-2}$ at the ZAMS. The Prandtl number is very low in non-degenerate stellar interiors, typically $P_r \approx 10^{-6}$ (Garaud et al. 2015). We thus obtain the orders of magnitude of $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ in PMS stars listed in Table 1.

Another relevant parameter is the contraction Reynolds number Re_c . Since this number can be expressed as the ratio of the contraction timescale to the viscous timescale ($Re_c = \tau_\nu/\tau_c$), a rough estimate can be derived by replacing the contraction timescale by the Kelvin–Helmholtz timescale $\tau_\kappa = r_0^2/\kappa$. In this case $Re_c \approx P_r^{-1}$, thus $\tau_{ED}/\tau_c = Re_c P_r(N_0/\Omega_0)^2 \approx (N_0/\Omega_0)^2$ is always greater than one for PMS stars, regardless of their evolutionary status or rotation period.

The Ekman number is always very small in stellar interiors. According to Lara & Rieutord (2013), at the ZAMS the radiative viscosity in stellar radiative zones ranges from $\nu \approx 8 \cdot 10^1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ in the core to $\nu \approx 5 \cdot 10^2 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ in the middle of the envelope for a $3 M_\odot$ star, while its value remains approximately constant between the core and the middle of the envelope for a $7 M_\odot$ or a $10 M_\odot$ star (around $\nu \approx 10^3 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$). During the PMS, the radius of a star varies a great deal. As an example, for a solar-mass star, the radius ranges from $2.6 R_\odot$ during the

Table 1. Estimates of $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ in PMS stars.

Status \ Period	1 day	8 days
$N_T^2 = 10^{-7.5} \text{ s}^{-2}$ (Beginning of the PMS)	$5.98 \cdot 10^{-6}$	$3.83 \cdot 10^{-4}$
$N_T^2 = 10^{-5.8} \text{ s}^{-2}$ (End of the PMS)	$3.00 \cdot 10^{-4}$	$1.91 \cdot 10^{-2}$

early PMS phase to $0.9 R_\odot$ for more advanced stages of the PMS (Maeder 2008; Gallet & Bouvier 2013). During the PMS evolution of more massive stars, the radius can decrease from $8 R_\odot$ to $3.4 R_\odot$ for a $7 M_\odot$ star, and from $4.5 R_\odot$ to $2.3 R_\odot$ for a $3 M_\odot$ star (Alecian et al. 2013b). For such values, the Ekman number is indeed always very small, varying from $E = 10^{-15}$ to $E = 10^{-17}$. We thus conclude that the dominant parameter regime for PMS stars is the non-linear Eddington–Sweet regime defined by

$$\sqrt{E} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll 1 \quad \text{and} \quad Re_c P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \gg 1. \quad (38)$$

4.2. Subgiants

In the degenerate cores of subgiants, the Prandtl number increases to $\sim 10^{-3}$ due to the degeneracy of electrons (Garaud et al. 2015). Meanwhile, the Brunt–Väisälä frequency in these dense cores is quite large, its value varying between $N_T^2 = 10^{-4.5} \text{ s}^{-2}$ at the beginning of the subgiant phase to $N_T^2 = 10^{-3} \text{ s}^{-2}$ at a more advanced stage (Talon & Charbonnel 2008). Asteroseismology puts strong constraints on the core rotation rate of these stars (Deheuvels et al. 2014). Considering a typical value of $\Omega_{\text{core}} = 3.34 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, we find that the degenerate core is characterised by very large values of the parameter $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ up to $\sim 10^5$.

Outside the degenerate core, typical $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ are 10^{-3} , much smaller than one, as in PMS stars. Given the small Ekman numbers, we find that the non-linear viscous regime is the relevant one inside the degenerate core of the subgiants,

$$\sqrt{E} \ll 1 \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \quad \text{and} \quad Re_c \gg 1, \quad (39)$$

whereas outside the degenerate core the non-linear Eddington–Sweet regime dominates:

$$\sqrt{E} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll 1 \quad \text{and} \quad Re_c P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \gg 1. \quad (40)$$

5. Numerical method

In order to study numerically the hydrodynamical steady states obtained in the various regimes described above, we carry out numerical simulations using the pseudo-spectral code MagIC. MagIC is based on a Chebyshev discretisation in the radial direction and spherical harmonic discretisation for the latitudinal and azimuthal directions. MagIC is a fully documented, publicly available code¹ which solves the (magneto-)hydrodynamical equations in a spherical shell. An axisymmetric version of Wicht (2002) for the Boussinesq approximation and of

Gastine & Wicht (2012) for the anelastic approximation is used to solve Eqs. (2) and (3) as well as Eqs. (7) and (8) numerically. The solenoidal condition of Eqs. (1) and (6) is ensured by a poloidal–toroidal decomposition of the mass flux. Our domain extent is $r \in [r_i = 0.3; r_0 = 1.0]$ and $\theta \in [0; \pi]$.

For all simulations we impose stress-free conditions at the inner sphere for the latitudinal and azimuthal velocity fields, and impermeability condition for the radial velocity field:

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) = 0 \quad \text{at} \quad r = r_i. \quad (41)$$

At the outer sphere we impose an impermeability condition on the radial velocity field, a no-slip condition on the latitudinal velocity field, and uniform rotation:

$$U_r = U_\theta = 0 \quad \text{and} \quad \Omega = \Omega_0 \quad \text{at} \quad r = r_0. \quad (42)$$

The boundary conditions for Θ' (respectively S') are set to zero at the top and bottom of the domain in the Boussinesq (respectively anelastic) case. Initially we impose a uniform rotation in the whole domain $\Omega(r, \theta, t = 0) = \Omega_0$ in the Boussinesq case and a fixed level of differential rotation

$$\Omega(r, \theta, t = 0) = \bar{\rho}(r) \Omega_0 \exp\left(\frac{-(r - r_0)}{\sigma} \right) \quad (43)$$

in the anelastic case, where σ controls the magnitude of the rotation contrast.

For most of the simulations the grid resolution is $N_r \times N_\theta = 193 \times 256$. The large number of points in the radial direction is necessary because we also aim to characterise the different boundary layers and their potential roles. When the Ekman number becomes very small (typically 10^{-7}), the resolution is sometimes increased to $N_r \times N_\theta = 217 \times 288$. We always ensure that the number of radial grid cells in the Ekman layer is non-negligible. Thus, for the best resolved cases the number of radial grid cells in the Ekman layer ranges from 5 grid cells in the $E = 10^{-7}$ case to 12 grid cells in the $E = 10^{-5}$ case.

6. Results in the Boussinesq case

The analysis of the different transport mechanisms performed in Sect. 3 led to define three different regimes depending on the Ekman number and the $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ parameter. A third parameter, Re_c or Ro , appears to control the level of differential rotation, and thus whether the non-linear terms play a role. The numerical investigation presented below has been carried out by varying these parameters and the results are analysed with the guidance of the timescale analysis of Sect. 3.

6.1. Taylor–Proudman regime

We find that the differential rotation is near cylindrical when $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll \sqrt{E} \ll 1$. According to the thermal wind balance Eq. (24), such a regime is possible if the buoyancy force is weak enough. In the following the regimes of cylindrical rotation are called Taylor–Proudman regimes, although strictly speaking the Taylor–Proudman theorem states that all the velocity components must be cylindrical.

The meridional cut in the left panel of Fig. 1 shows the structure of the flow for a simulation in this regime ($E = 10^{-4}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-4}$, $Re_c = 10^{-2}$). The differential rotation exhibits a cylindrical profile, the rotation rate being highest near the tangent cylinder. For this particular simulation,

¹ <https://github.com/magic-sph/magic>

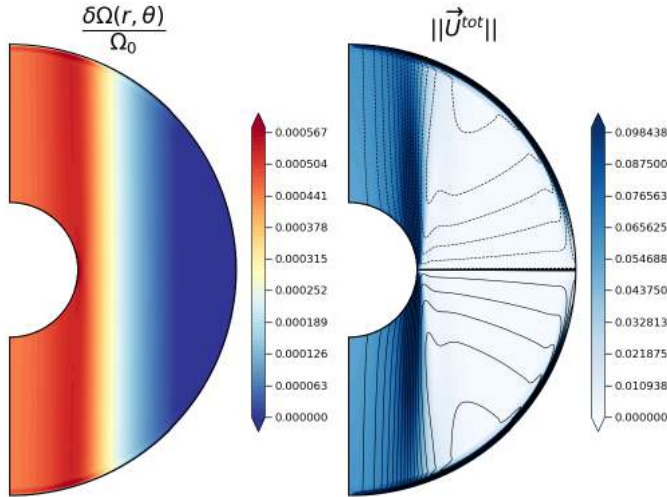


Fig. 1. Steady axisymmetric flow in the Taylor–Proudman regime. In the *left panel*, the coloured contours represent the differential rotation $\delta\Omega(r, \theta) = \Omega(r, \theta) - \Omega_0$ normalised to the rotation rate of the outer sphere Ω_0 while in the *right panel*, we show the norm and the streamlines of the total meridional velocity field $\vec{U}^{tot} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$. The parameters of the simulation are $E = 10^{-4}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-4}$ and $Re_c = 10^{-2}$ (simulation 1.3 in Table 2). The black lines show the streamlines of the total meridional circulation i.e. taking the effect of the contraction into account. Outside the tangent cylinder, the dashed lines correspond to an anticlockwise circulation and the solid lines to a clockwise one while inside the tangent cylinder, the dashed lines represent a downward circulation and the full ones, an upward circulation.

Table 2. Parameters of the simulations carried out in the Taylor–Proudman regime.

Simulation	E	$P_r(N_0/\Omega_0)^2$	Re_c
1.1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}
1.2	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}
1.3	10^{-4}	10^{-4}	10^{-2}
1.4	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}
1.5	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
2.1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-1}
2.2	10^{-5}	10^{-4}	1
2.3	10^{-5}	10^{-4}	10
3.1	10^{-6}	10^{-4}	10^{-1}
3.2	10^{-6}	10^{-4}	1
3.3	10^{-6}	10^{-4}	10

the maximum amplitude of the normalised differential rotation $(\Omega(r, \theta) - \Omega_0)/\Omega_0$ is barely 0.001, which thus corresponds to a linear case. The right panel of the same figure displays the norm and the streamlines of the total meridional flow $\vec{U}^{tot} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$. We see that a fluid particle initially located at the outer sphere is deflected into the Ekman layer towards the pole before it enters into the interior flow. From then on, if the particle is outside the tangent cylinder, it goes back towards the outer sphere thus forming a cell. On the contrary, if the particle is inside the tangent cylinder, it goes towards the inner sphere. A remarkable feature is the strong vertical jet directed towards the equator of the inner sphere.

In order to characterise this regime we performed several simulations for a range of Ekman and contraction Reynolds

numbers, $E = 10^{-2} - 10^{-6}$, $Re_c = 10^{-2} - 10$, as listed in Table 2. These numerical results are compared with an analytical solution that can be obtained in the linear and low Ekman number regime. Considering the balance between the contraction term and the Coriolis term in the linear inviscid steady equation of AM evolution Eq. (21), we first get the cylindrical radial component of the velocity field:

$$U_s = V_0 \frac{r_0^2}{r^2} \sin \theta. \quad (44)$$

The full inviscid meridional flow is then determined using the $U_r = 0$ condition at the inner sphere. This solution does not fulfil the boundary conditions at the outer sphere; this is done through an Ekman boundary layer, which comes with a jump in the rotation rate. Then, using the Ekman pumping condition Eq. (30) as a boundary condition for the interior flow, it is possible to express a mass budget inside a cylinder of radius $s = r \sin \theta$, which involves the inward flow from the Ekman layer and the outward flow through the cylinder. The inward and the outward mass fluxes are obtained by integrating Eqs. (30) and (44), respectively. After some algebra (see details in Appendix B) we obtain the following²:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega_{TP}(s \leq r_i)}{\Omega_0} &= \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left[\frac{2r_0^2}{s^2} (\cos \theta_0 - \cos \theta_i) \sqrt{|\cos \theta_0|} \right], \\ \frac{\delta\Omega_{TP}(s > r_i)}{\Omega_0} &= \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left[\frac{2r_0^2}{s^2} \cos \theta_0 \sqrt{|\cos \theta_0|} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

This solution can be interpreted as follows. At leading order the contraction forces a global meridional circulation that is unable to match the boundary conditions at the outer sphere. This is done in an Ekman boundary layer, which in turn produces a certain level of differential rotation determined by the Ekman pumping relation for the prescribed interior radial field Eq. (30). This differential rotation is communicated to the bulk of the flow through the Taylor–Proudman constraint $\partial U_\phi / \partial z = 0$.

The analytical solution scaled by R_o/\sqrt{E} is plotted with a black dashed line in the left panel of Fig. 2 and compared with numerical solutions obtained for different Ekman and Rossby numbers. It shows that the flow behaves differently inside and outside the tangent cylinder. The rotation rate is highest on the tangent cylinder. At this location the analytical inviscid solution is not differentiable and the vertical velocity is also discontinuous because it tends to minus infinity when the tangent cylinder is approached from the left. In low Ekman number flows such discontinuities are expected to produce boundary layers whose thickness decreases with the Ekman number. This is visible in Fig. 2, which also shows, as expected, that the agreement with the analytical solution improves for smaller Ekman numbers. The right panel further shows that for low enough Ekman numbers and in the linear regime the global differential rotation between the inner and the outer spheres taken along a given radius scales as

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \propto \frac{R_o}{\sqrt{E}}. \quad (46)$$

Finally, the existence of the Taylor–Proudman regime in a stably stratified atmosphere where $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll \sqrt{E}$ can

² Outside the tangent cylinder (i.e. for $s > r_i$) this analytical solution is similar to the expression derived by Hypolite & Rieutord (2014) up to a factor related to the aspect ratio.

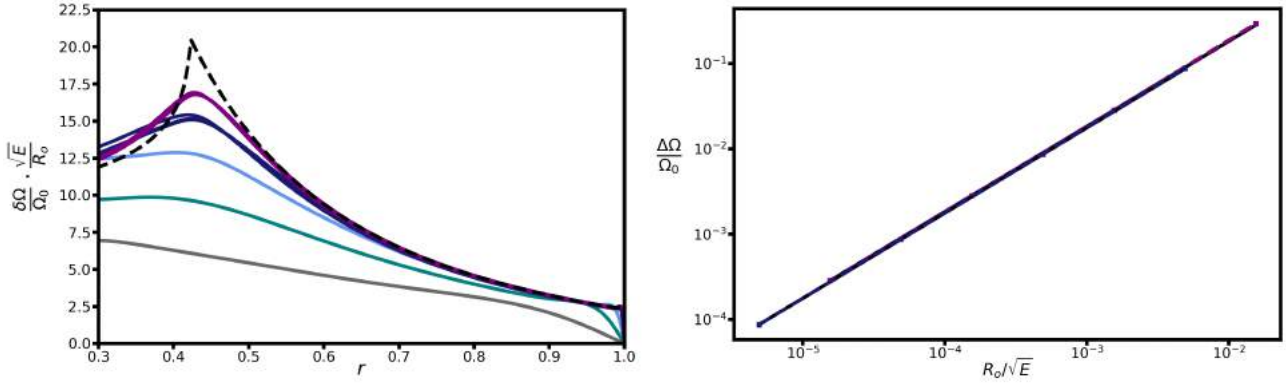


Fig. 2. Axisymmetric steady solutions of the differential rotation as a function of radius at the latitude $\theta = \pi/4$ in the Taylor–Proudman regime. *Left panel:* analytical solution Eq. (45) is plotted in black dashed lines and compared with the numerical simulations obtained for fixed $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ parameter (10^{-4}) and contraction Reynolds number Re_c (10^{-2}) with various Ekman numbers: 10^{-2} (in grey), 10^{-3} (in cyan), 10^{-4} (in light blue), 10^{-5} (in dark blue), and 10^{-6} (in purple) respectively for runs 1.1–1.5 in Table 2. For $E = 10^{-5}$ and $E = 10^{-6}$, additional contraction Reynolds numbers are studied, namely 10^{-1} (runs 2.1 and 3.1 in Table 2), 1 (runs 2.2 and 3.2 in Table 2), and 10 (runs 2.3 and 3.3 in Table 2). All curves are rescaled by \sqrt{E}/R_0 . *Right panel:* differential rotation between the inner and outer spheres $\Delta\Omega = \Omega(r_i) - \Omega(r_0)$ at the same latitude and normalised with the rotation rate taken at the outer sphere Ω_0 , now plotted as a function of R_0/\sqrt{E} . The previous numerical solutions obtained for $E = 10^{-5}$ (runs 1.4 and 2.1–2.3 in Table 2) are plotted in dark blue, while the simulations performed for $E = 10^{-6}$ (runs 1.5 and 3.1–3.3 in Table 2) are plotted in purple.

be explained as follows. From Eq. (44) we see that $U_r \approx V_0$. Thus, according to the thermal balance Eq. (25), $\delta\Theta \approx P_r (N_0/\Omega_0)^2 E^{-1} V_0$, while according to Eq. (30), $U_\phi \approx E^{-1/2} V_0$. The ratio of these two quantities is $U_\phi/\delta\Theta \approx \sqrt{E}/P_r (N_0/\Omega_0)^2$. As a consequence, in the regime $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll \sqrt{E}$, the effect of the buoyancy forces in the thermal wind equation Eq. (24) is too weak and the Taylor–Proudman constraint $\partial U_\phi/\partial z = 0$ holds.

6.2. Viscous regime

According to the timescale analysis of Sect. 3, the viscous transport of AM dominates when $1 \ll P_r (N_0/\Omega_0)^2$. To investigate this regime, numerical simulations have been performed for values of $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ varying between 10^2 and 10^4 . The different runs characterised by the three parameters, $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, E , Re_c , are listed in Table 3.

In this parameter range we find that the stationary differential rotation is mostly radial and that the level of differential rotation increases with Re_c . This is illustrated in the first and third panels in Fig. 3 where the differential rotation is shown for two runs with equally high $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$ and different Re_c . The differential rotation is closely radial in both cases, while the rotation contrast between the outer and the inner spheres goes from $\sim 10^{-2}$ for $Re_c = 10^{-2}$ to ~ 8 as the contraction rate is increased to $Re_c = 10$. The other two panels display the total meridional velocity field, through its norm and streamlines, showing that it is clearly dominated by the imposed radial contraction flow. Subtracting this contribution, we would see a meridional circulation confined into boundary layers at the outer and inner spheres, the confinement being stronger for smaller Ekman numbers.

The results of the numerical simulations are now compared with the analytical solution that can be derived by neglecting the Coriolis and the non-linear advection terms in the AM conservation Eq. (21). The steady balance between the contraction and viscous terms indeed reads

$$-v \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) U_\phi = \frac{V_0 r_0^2}{r^3} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi + r^2 \sin \theta \Omega_0) \right), \quad (47)$$

Table 3. Parameters of performed simulations in the viscous regime.

Simulation	E	$P_r (N_0/\Omega_0)^2$	Re_c
1.1	10^{-2}	10^2	10^{-2}
1.2	10^{-3}	10^2	10^{-2}
1.3	10^{-4}	10^2	10^{-2}
1.4	10^{-5}	10^2	10^{-2}
2.1	10^{-2}	10^3	10^{-2}
2.2	10^{-3}	10^3	10^{-2}
2.3	10^{-4}	10^3	10^{-2}
2.4	10^{-5}	10^3	10^{-2}
3.1	10^{-2}	10^4	10^{-2}
3.2	10^{-3}	10^4	10^{-2}
3.3	10^{-4}	10^4	10^{-2}
3.4	10^{-5}	10^4	10^{-2}
4.1	10^{-4}	10^4	10^{-1}
4.2	10^{-4}	10^4	1
4.3	10^{-4}	10^4	10
5.1	10^{-5}	10^4	1

whose solution is given by the following expression:

$$\frac{\delta\Omega_v(r)}{\Omega_0} = Re_c \left[2 \left(Re_c + \frac{r_i}{r_0} \right) \left(\exp(Re_c) - \exp\left(Re_c \frac{r_0}{r} \right) \right) + \frac{Re_c r_i}{r} \exp\left(Re_c \frac{r_0}{r_i} \right) \left(Re_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \frac{r_0}{r} + 2 \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \right) \right] \left[\frac{r_i}{r_0} \left(Re_c^2 + 2Re_c + 2 \right) \exp\left(Re_c \frac{r_0}{r_i} \right) - 2(Re_c + 1) \exp(Re_c) \right]. \quad (48)$$

If the differential rotation $\delta\Omega_v(r)/\Omega_0$ is less than one, the forcing term in Eq. (47) is reduced to $(2\Omega_0 \sin \theta V_0 r_0^2)/r^2$, and the analytical solution for the differential rotation simplifies into

$$\frac{\delta\Omega_v^L(r)}{\Omega_0} = Re_c \left[\frac{r_i^2}{3r_0^2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) + \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right) \right], \quad (49)$$

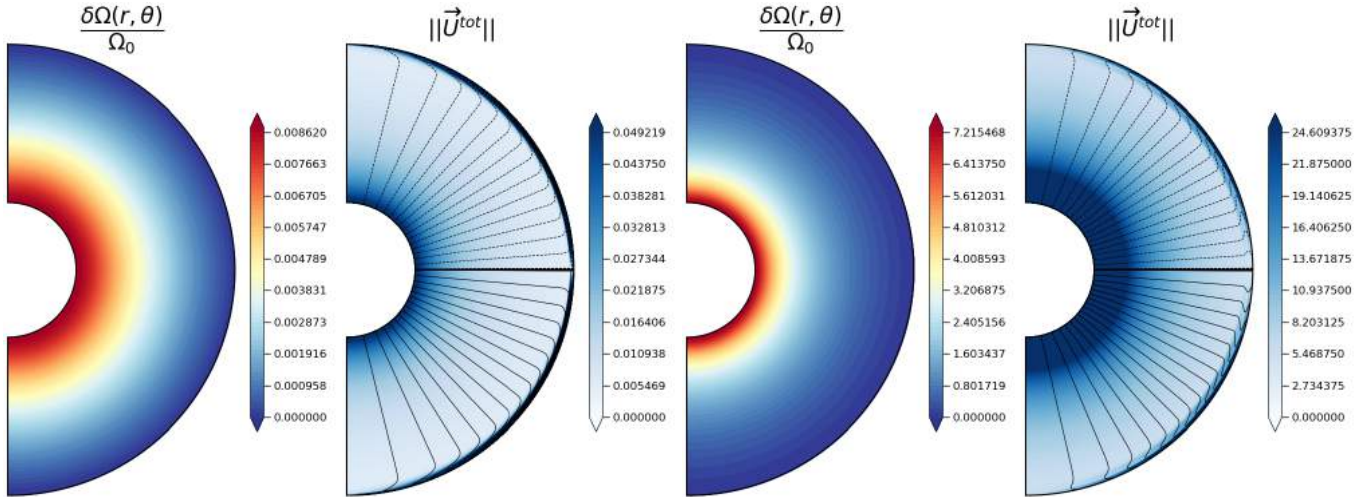


Fig. 3. Differential rotation normalised to the rotation rate of the outer sphere $\delta\Omega(r, \theta)/\Omega_0$ in the viscous regime (*first and third panels*) and norm of the total meridional velocity field $\mathbf{U}^{\text{tot}} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$ (*second and fourth panels*) with the streamlines of the associated total meridional circulation (in black). In the *two left panels* the parameters of the simulation are $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10^{-2}$, and $E = 10^{-5}$ (run 3.4 in Table 3), and in the *two right panels* the parameters are $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10$, and $E = 10^{-4}$ (run 4.3 in Table 3). In the *second and fourth panels* the black solid lines represent the streamlines of an ascending and inwardly directed circulation, while the black dashed lines correspond to a descending and inwardly directed one.

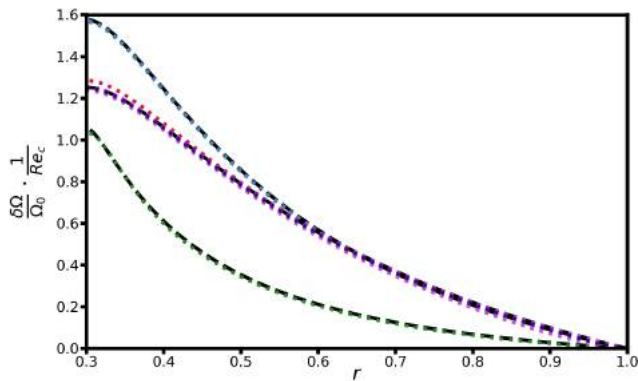


Fig. 4. Differential rotation in the viscous regime scaled by Re_c as a function of radius at the latitude $\theta = \pi/8$. The analytical solution Eq. (48) (black dashed lines) is compared with the numerical results. Low Reynolds number runs (1.1–4.1 in Table 3, with $Re_c = 10^{-2}$ – 10^{-1}) are plotted with violet dotted lines and are all very close to the low Reynolds number version of the analytical solution, Eq. (49). Simulations at $Re_c = 1$ (runs 4.2 and 5.1 in Table 3) and $Re_c = 10$ (run 4.3 Table 3) are also in agreement with the analytical solution.

which implies that this approximate solution should be valid for low Reynolds numbers Re_c .

The analytical solution is compared with the numerical solutions in Fig. 4. The agreement is very good showing that the viscous term indeed dominates the transport in the regime $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \geq 10^2$ considered. We also find that the linear relation $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto Re_c = \tau_r/\tau_c$ valid for low Re_c still provides a good order of magnitude estimate of the differential rotation between the inner and the outer spheres up to the highest Re_c considered.

In this subsection we show that for high enough $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \geq 10$ stable stratification is so strong that the meridional circulation is inhibited and the effect of the contraction is balanced by the viscous transport of AM. An analytical solution of the resulting radial differential rotation is available.

6.3. Eddington–Sweet regime

When the stratification is not too strong, $\sqrt{E} \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, we expect that the transport of AM is dominated by an Eddington–Sweet type meridional circulation.

The meridional cut displayed in the left panel of Fig. 5 shows the typical flow structure obtained in this regime. The differential rotation exhibits a dependence on both latitude and radius. Thus, contrary to the Taylor–Proudman and viscous regimes, it is neither cylindrical nor spherical. Meanwhile the total meridional circulation (right panel) is similar to the one already described in the Taylor–Proudman case with an inward flow concentrated inside the tangent cylinder and more particularly in a vertical jet towards the equator of the inner sphere. To understand what determines the level and distribution of the differential rotation in the Eddington–Sweet regime, we performed a parametric study where E , $P_r(N_0/\Omega_0)^2$, and Re_c were varied; the values of these parameters are listed in Table 4.

Owing to the flow complexity, we were not able to find an analytical solution for the azimuthal velocity field. We instead compare our numerical results with a scaling relation for the amplitude of differential rotation, which we derive as follows. Assuming a linear regime, the balance between the Coriolis term and the contraction term in the AM evolution equation Eq. (21) implies that the circulation velocities scale as the imposed contraction radial velocity field:

$$U_r \approx U_\theta \approx V_0. \quad (50)$$

Then the thermal wind balance Eq. (24) and the thermal balance Eq. (25) provide an estimate for the radial velocity amplitude given by Eq. (28). Injecting Eq. (50) in Eq. (28), we obtain

$$V_0 \approx \frac{\kappa}{r_0} \frac{\Omega_0^2}{N_0^2} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0}, \quad (51)$$

which is equivalent to

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \approx \frac{\tau_{\text{ED}}}{\tau_c} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \frac{R_o}{E}. \quad (52)$$

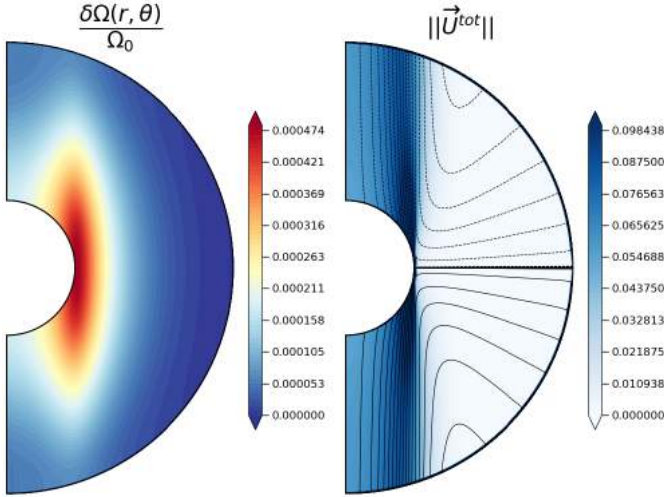


Fig. 5. Steady differential rotation (*left panel*) normalised to the top value, and norm and streamlines of the total meridional velocity field $\vec{U}^{\text{tot}} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$ (*right panel*). The parameters of the simulation (run 1.4 in Table 4) are $E = 10^{-6}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, and $Re_c = 10^{-2}$. Outside the tangent cylinder the black dashed lines represent the streamlines of an anticlockwise circulation, and the solid lines those of a clockwise circulation. Inside the tangent cylinder the dashed lines simply correspond to the streamlines of a downward circulation, while the solid lines are for an upward circulation.

Table 4. Parameters of the simulations in the Eddington–Sweet regime.

Simulation	E	$P_r(N_0/\Omega_0)^2$	Re_c
1.1	10^{-3}	10^{-1}	10^{-2}
1.2	10^{-4}	10^{-1}	10^{-2}
1.3	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}
1.4	10^{-6}	10^{-1}	10^{-2}
2.1	10^{-5}	10^{-2}	10^{-2}
2.2	10^{-6}	10^{-2}	10^{-2}
2.3	10^{-7}	10^{-2}	10^{-2}
3.1	10^{-6}	10^{-1}	10^{-1}
3.2	10^{-6}	10^{-2}	10^{-1}
4.1	10^{-6}	10^{-1}	1
4.2	10^{-6}	10^{-2}	1
5.1	10^{-6}	10^{-1}	5
5.2	10^{-6}	10^{-2}	5
6.1	10^{-6}	10^{-1}	10

Physically, it says that the steady differential rotation is determined by the balance between the inward transport of AM forced by the contraction with timescale τ_c^{\downarrow} , and the outward transport of AM by the Eddington–Sweet circulation with timescale τ_{ED} .

Coming back to the numerical results, the left panel in Fig. 5 shows that the differential rotation taken between the inner and the outer spheres depends on the latitude considered at the inner sphere, and that it is greatest at the equator. Figure 6 displays the differential rotation between the equator of the inner sphere and the outer sphere for simulations performed at various R_o , considering two different $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ and 10^{-2} , and a fixed low Ekman number $E = 10^{-6}$.

This figure first shows that a linear regime exists as long as $\Delta\Omega/\Omega_0$ is low enough. The differential rotation is clearly lin-

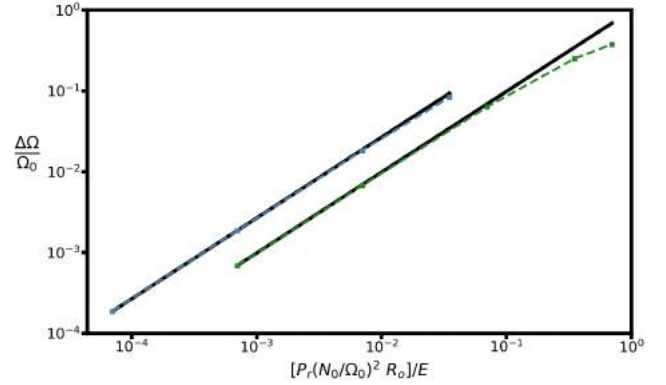


Fig. 6. Differential rotation between the inner equator and the outer sphere normalised to the outer value of the rotation rate Ω_0 in the Eddington–Sweet regime, plotted as a function of $P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_o/E$. The Rossby number R_o is varied to encompass the linear and non-linear regimes. The Ekman number is fixed to $E = 10^{-6}$. The green curve corresponds to simulations with $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ (runs 1.4, 3.1, 4.1, 5.1, and 6.1 in Table 4) and the blue curve to simulations with $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$ (runs 2.2, 3.2, 4.2, and 5.2 in the same table).

early dependent on R_o until $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 10^{-1}$, where it starts to deviate. The differential rotation then falls below the linear relation because the non-linear advection terms, both in the momentum and temperature equations, increase the efficiency of the AM redistribution.

This figure also shows that the scaling Eq. (52) does not reproduce the differential rotation amplitude because the curves corresponding to the two different $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ do not collapse. The numerical results would be better reproduced by a relation of the form $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \sqrt{P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_o/E}$.

However, we now argue that Eq. (52) should still be approximately valid for the very low stellar Ekman numbers by showing that the observed discrepancy is due to the relatively high Ekman numbers of our simulations. We find that our results are best described by a model where the differential rotation is the superposition of two terms,

$$\frac{\delta\Omega_{\text{tot}}(r, \theta)}{\Omega_0} = \frac{R_o}{\sqrt{E}} \left(\frac{\delta\Omega_{\text{TP}}^{(0)}(r, \theta)}{\Omega_0} + \frac{P_r(N_0/\Omega_0)^2}{\sqrt{E}} \frac{\delta\Omega_{\text{ED}}^{(0)}(r, \theta)}{\Omega_0} \right), \quad (53)$$

the first term being a by-product of the Ekman layer induced by the mismatch between the inviscid contraction-driven interior circulation (Eqs. (B.8) and (B.9)) and the boundary condition $U_r = 0$ at the outer sphere. This term is actually close to the unstratified Taylor–Proudman solution described in Sect. 6.1 that shows a $O(1/\sqrt{E})$ jump in differential rotation across the $O(\sqrt{E})$ outer Ekman layer. The second term scales with $P_r(N_0/\Omega_0)^2/E$ and is of the Eddington–Sweet type. It connects smoothly to the outer sphere boundary condition, that is $\delta\Omega_{\text{ED}}(r_0, \theta) = 0$. Therefore, the Eddington–Sweet term is dominant in the interior for small enough $\sqrt{E}/P_r(N_0/\Omega_0)^2$, whereas the first term is never fully negligible close to the outer sphere. In this model the interior meridional circulation velocities and temperature fluctuations scale as Eqs. (50) and (26), respectively (for details, see Appendix D).

As illustrated in Fig. 7, our numerical results are consistent with this model. Considering flows in the linear regime for two different $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ and 10^{-2} , and the same Ekman number $E = 10^{-6}$, we test the relevance of the Eddington–Sweet scaling given by Eq. (52) when applied to

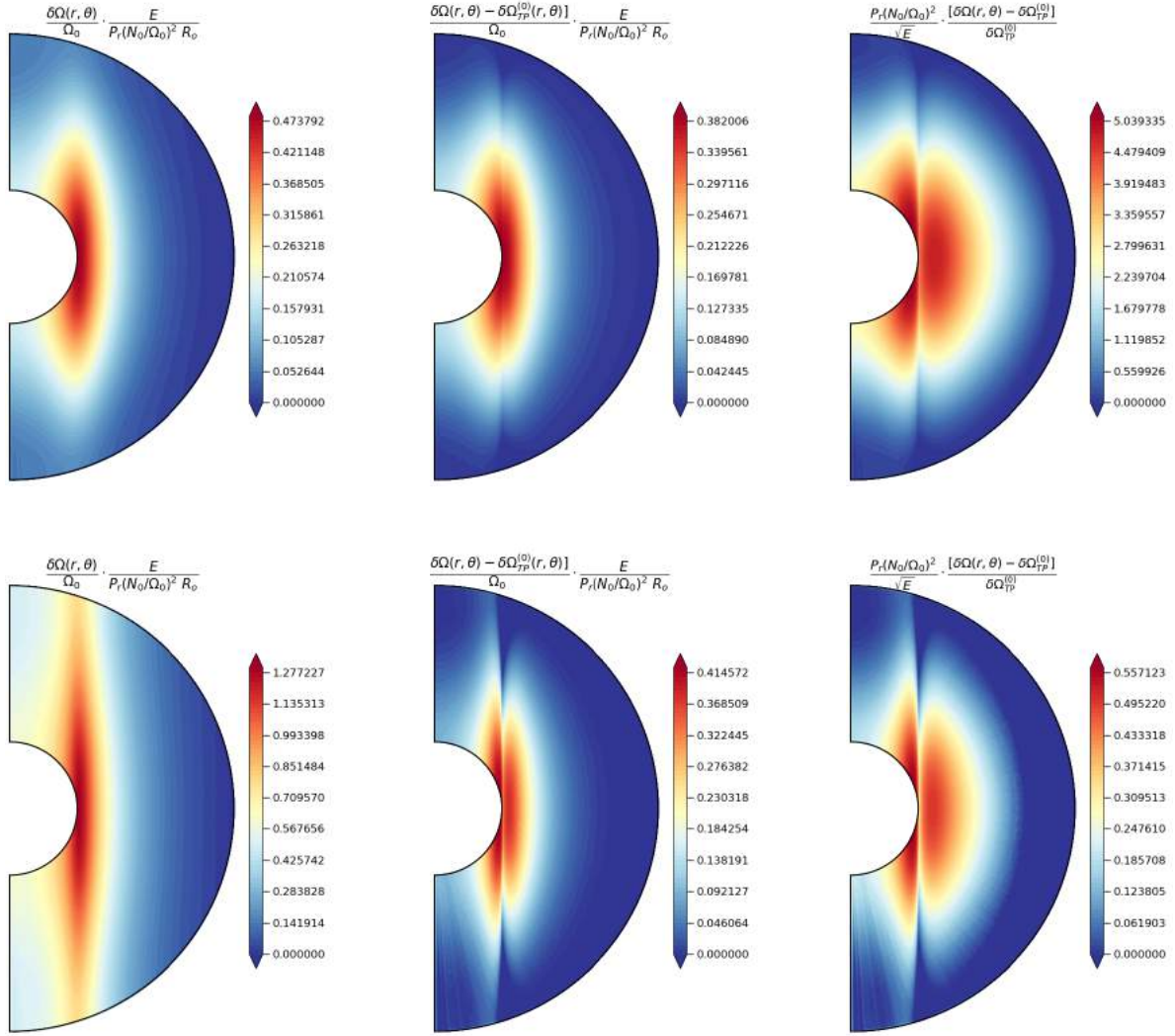


Fig. 7. Differential rotation in the Eddington–Sweet linear regime for $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ (top panel) and 10^{-2} (bottom panel), the other two parameters $E = 10^{-6}$ and $Re_c = 10^{-2}$ being identical (runs 1.4 and 2.2 in Table 4). The coloured contours are normalised to the rotation rate of the outer sphere Ω_0 . *Left column:* differential rotation $\delta\Omega(r, \theta)/\Omega_0$ rescaled by $E (P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_o)^{-1}$. *Middle column:* differential rotation $(\delta\Omega - \delta\Omega_{\text{TP}}^{(0)})/\Omega_0$ obtained after subtracting the unstratified Taylor–Proudman solution given by Eq. (45) and rescaling by $E (P_r(N_0/\Omega_0)^2 R_o)^{-1}$ (see Eq. (53)). *Right column:* ratio $(P_r(N_0/\Omega_0) / \sqrt{E}) \cdot [(\delta\Omega - \delta\Omega_{\text{TP}}^{(0)}) / \delta\Omega_{\text{TP}}^{(0)}]$.

the full differential rotation on the one hand, and to the field obtained after subtracting the unstratified solution Eq. (45) on the other. In this second case we observe that the distribution and amplitude of the rescaled differential rotations are very similar, whereas significant amplitude differences persist when the unstratified solution is not subtracted before rescaling. The fact that the scaling Eq. (52) is not accurate for the full differential rotational thus appears to be due to the non-negligible contribution of the $\propto 1/\sqrt{E}$ term. This is confirmed by the comparison of the two terms of Eq. (53) displayed in the right column of Fig. 7. This comparison clearly shows that $\sqrt{E}/P_r(N_0/\Omega_0)^2$ has to be as low as 10^{-2} and that one has to consider layers away from the outer sphere for the Eddington–Sweet term to clearly dominate over the Taylor–Proudman term.

Runs performed at other Ekman numbers confirm the relevance of this description. In particular, as expected from the expression Eq. (53), simulations with the same ratio

$\sqrt{E}/P_r(N_0/\Omega_0)^2$ (such as runs 1.3 and 2.3 in Table 4) have similar scaled differential rotation $(\delta\Omega_{\text{ED}}/\Omega_0)(E/P_r(N_0/\Omega_0)^2)$.

While the Eddington–Sweet scaling and its $O(\sqrt{E}/P_r(N_0/\Omega_0)^2)$ Taylor–Proudman correction provide a global description of the differential rotation, additional physics is required to describe regions close to boundary layers. This involves the $O(E^{1/2})$ Ekman layer at the outer sphere, the free shear layer that smooths the vertical velocity jump across the tangent cylinder, and also the Ekman layer at the inner sphere induced by the mismatch between the interior flow and the boundary conditions there. As for the classical spherical Couette flow, the Ekman layer at the inner sphere is stronger (i.e. more extended and with higher amplitudes) near the equator than at higher latitudes. As can be observed in Fig. 7, we find that the thicknesses of the layer along the tangent cylinder and of the equatorial layer decrease with E and $P_r(N_0/\Omega_0)^2$, although determining their exact scaling with these non-dimensional

Table 5. Density contrasts between the inner and outer spheres investigated in the anelastic approximation, and their associated parameters.

ϵ_s	D_i	ρ_i/ρ_0
0.1	0.1	1.75
0.1	1.0	10.8
0.1	1.7	20.9
1.0	1.0	60.2

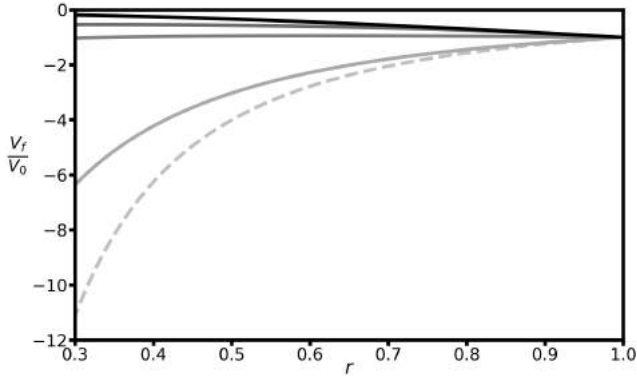


Fig. 8. Contraction radial velocity field V_f , Eq. (19), normalised to the top value V_0 and plotted as a function of radius r . The lines (from light to dark) show the weakest to the strongest density contrasts between the inner and outer spheres, which are respectively $\rho_i/\rho_0 = 1.75, 10.8, 20.9$, and 60.2 . The contraction radial velocity field in the Boussinesq case given by Eq. (20) (i.e. corresponding to a density ratio of 1) is plotted as a dashed line as a reference.

numbers might be tricky and is beyond the scope of the present study.

7. Effect of the density stratification: The anelastic case

In this section we analyse the effects of the density stratification using the anelastic approximation. To this end, the magnitude of the background density contrast between the inner and the outer spheres, ρ_i/ρ_0 , is varied from 1.75 to 60.2. Table 5 lists the different density contrasts considered together with the associated parameters of the background state, the dissipation number D_i , and the ϵ_s parameter (see Eqs. (13) and (14)).

The first effect of the density stratification is to modify the profile of the contraction velocity field (see Eqs. (19) and (20)). Figure 8 shows that for a density contrast of 1.75 the absolute value of the contraction velocity at the inner sphere is twice as small as in the Boussinesq case. For stronger contrasts (i.e. when $\rho_i/\rho_0 > (r_0/r_i)^2 \approx 11.11$) the absolute value of the contraction velocity field even decreases with depth.

7.1. Anelastic Taylor–Proudman regime

We first study the effects of the density stratification in the regime $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll \sqrt{E} \ll 1$ where the Boussinesq simulations have shown that the rotation is cylindrical because the buoyancy force has a negligible effect on the dynamics. The Ekman number, the $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ parameter, and the contraction Reynolds number are fixed to 10^{-5} , 10^{-4} , and 10^{-2} , respectively, while the density contrast between the inner and outer spheres is varied from 1.75 to 60.2. Two additional simulations have been

Table 6. Parameters of the simulations in the anelastic Taylor–Proudman regime.

Simulation	E	$P_r(N_0/\Omega_0)^2$	Re_c	ρ_i/ρ_0
1.1	10^{-4}	10^{-4}	10^{-2}	20.9
2.1	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}	1.75
2.2	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}	10.8
2.3	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}	20.9
2.4	10^{-5}	10^{-4}	10^{-2}	60.2
3.1	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}	20.9

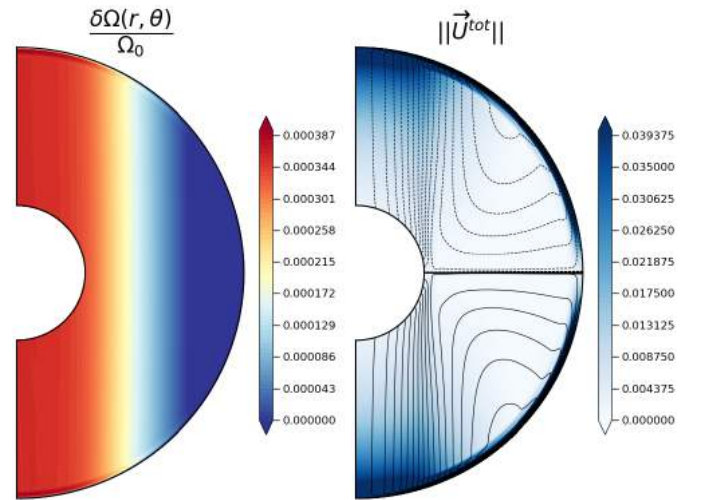


Fig. 9. Meridional cuts showing the coloured contours of the steady differential rotation normalised to the top value in the *left panel*, and the norm of the total meridional velocity field $\mathbf{U}^{\text{tot}} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$ with its associated streamlines (in black) in the *right panel*, in the Taylor–Proudman regime. As previously, outside the tangent cylinder the solid lines describe a clockwise circulation, and the dashed lines an anticlockwise circulation; inside the tangent cylinder the solid lines represent an upward meridional flow and the dashed lines a downward flow. The parameters of the simulation are $E = 10^{-4}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-4}$, $Re_c = 10^{-2}$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (run 1.1 in Table 6).

also performed at $E = 10^{-4}$ and $E = 10^{-6}$, the other parameters being fixed. The different runs and their associated parameters are summarised in Table 6.

Figure 9 shows the steady flow obtained for a density contrast $\rho_i/\rho_0 = 20.9$. It can be compared to the Boussinesq simulation displayed in Fig. 1, a simulation performed with the same non-dimensional numbers but without density stratification. As we can see, the differential rotation is still cylindrical and its amplitude is similar to the Boussinesq case. This property is confirmed at other density ratios (not shown). The main difference in the AM distribution involves the local maximum of the rotation rate along the tangent cylinder, which is present in the Boussinesq case but absent in the anelastic case. The differences in the meridional circulation are more striking because, in the density stratified case, the circulation is no longer characterised by a strong vertical jet towards the inner equator.

We first interpret the fact that the amplitude of the differential rotation appears to be independent of the density contrast between the two spheres. As in the Boussinesq case, we expect the AM conservation to drive a meridional circulation that balances the effect of the imposed contraction field. In Appendix C

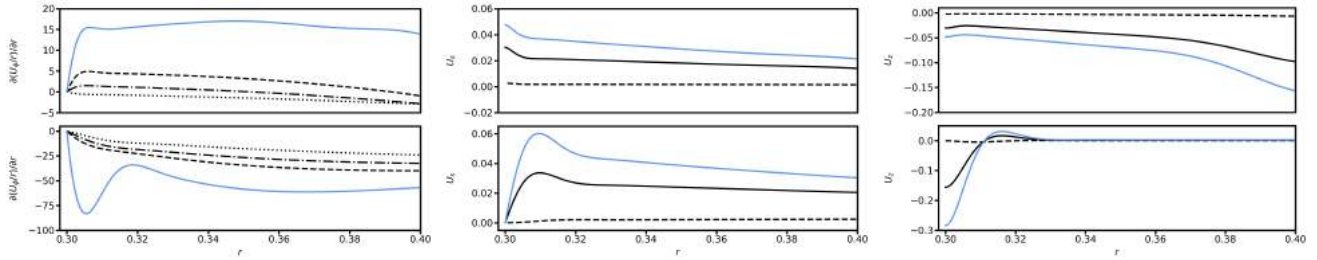


Fig. 10. Radial partial derivative of the ratio of the azimuthal velocity field U_ϕ to the radius r (left panel), cylindrical radial velocity field $U_s = U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta$ (middle panel), and vertical velocity field $U_z = U_r \cos \theta - U_\theta \sin \theta$ (right panel) as a function of radius. In each panel the top row corresponds to the latitude $\theta = \pi/4$. In the left and middle panels the bottom row corresponds to the equator, but since the vertical velocity field U_z is zero at the equator, the bottom right panel is obtained close to this location, at about 85-degree angle with the vertical axis. In each case $E = 10^{-5}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-4}$ and $Re_c = 10^{-2}$. In all panels the plain blue curve corresponds to the Boussinesq case (run 1.4 in Table 2), while the other curves are obtained by varying the density contrast between the inner and outer spheres. Shown in the left panel are $\rho_i/\rho_0 = 10.8$ (dashed lines), 20.9 (dash-dotted lines), and 60.2 (dotted lines), corresponding to runs 2.2 to 2.4 in Table 6; in the middle and right panels the two black curves are respectively obtained for $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ (plain curve) and $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (dashed lines), corresponding to runs 2.1 and 2.3 in Table 6.

a linear and inviscid solution of such meridional flow is given. As in the Boussinesq case, this circulation does not satisfy the boundary conditions at the outer sphere, and an Ekman boundary layer takes charge of it. This induces a differential rotation across the Ekman layer, which is determined by the relation Eq. (30) between the azimuthal velocity jump and the interior radial velocity field. As the meridional velocity field near the outer sphere should not depend on the density contrast, the jump in rotation rate is not affected either. This differential rotation is then communicated to the rest of the flow through the Taylor–Proudman constraint $\partial U_\phi / \partial z = 0$. This reasoning explains why the amplitude of the differential rotation is not affected by the density stratification and why its value is similar to the Boussinesq case.

We further show in Appendix C that the analytical solution found in the Boussinesq case for the differential rotation is also a solution in the anelastic case. Away from the tangent cylinder this solution indeed provides a good approximation to the numerical results. However, the lack of a local maximum along the tangent cylinder observed in the anelastic numerical simulations makes it less relevant than in the Boussinesq case.

The marked difference between the meridional flows in the Boussinesq and anelastic cases is first due to the dependence of the imposed contraction field on the density stratification, with radial velocities decreasing inwards for high enough density ratios. The linear and inviscid solution of the induced meridional circulation (see Appendix C) shows the same behaviour, thus explaining the global distribution of the total velocity observed in the right panel of Fig. 9. We also find that the equatorial boundary layer is practically suppressed at high density-stratification, which in turn explains the lack of a strong vertical jet near the equator. The behaviour close to the inner sphere of three different fields (the radial gradient of angular velocity $\partial \Omega(r, \theta) / \partial r$, and the cylindrical and vertical velocity fields) is displayed in Fig. 10. In the Boussinesq case we observe that an equatorial boundary layer is present and, as in the classical spherical Couette flow, it is associated with a strong vertical jet along the tangent cylinder. However, when the density contrast increases, the jumps of the three fields near the inner sphere are practically suppressed together with the vertical jet.

The absence of the equatorial boundary layer could be explained by the fact that the inviscid interior solution connects in a smoother way to the boundary conditions at the inner sphere. This is indeed the case for the cylindrical radial velocity because the mismatch at the inner equator falls from $\Delta U_s \approx 11.1$ for the Boussinesq inviscid solution to $\Delta U_s \approx 0.18$ when $\rho_i/\rho_0 = 60.2$.

Table 7. Parameters of the simulations in the anelastic viscous regime.

Simulation	E	$P_r (N_0/\Omega_0)^2$	Re_c	ρ_i/ρ_0
1.1	10^{-4}	10^4	10^{-2}	1.75
1.2	10^{-4}	10^4	10^{-2}	10.8
1.3	10^{-4}	10^4	10^{-2}	20.9
1.4	10^{-4}	10^4	10^{-2}	60.2
2.1	10^{-4}	10^4	10^{-1}	1.75
2.2	10^{-4}	10^4	10^{-1}	10.8
2.3	10^{-4}	10^4	10^{-1}	20.9
2.4	10^{-4}	10^4	10^{-1}	60.2
3.1	10^{-4}	10^4	1	1.75
3.2	10^{-4}	10^4	1	10.8
3.3	10^{-4}	10^4	1	20.9
3.4	10^{-4}	10^4	1	60.2
4.1	10^{-4}	10^4	10	1.75
4.2	10^{-4}	10^4	10	10.8
4.3	10^{-4}	10^4	10	20.9
5.1	10^{-3}	10^4	10^{-2}	20.9
5.2	10^{-5}	10^4	10^{-2}	20.9
6.1	10^{-3}	10^3	10^{-2}	20.9
6.2	10^{-4}	10^3	10^{-2}	20.9
6.3	10^{-5}	10^3	10^{-2}	20.9

7.2. Anelastic viscous case

In this section we study, in the viscous regime, the modification to the differential rotation and the meridional flow induced by the introduction of a varying density across the shell. Simulations are performed for the various density contrasts and contraction Reynolds numbers Re_c listed in Table 7.

Figure 11 shows the coloured contours of the rotation rate Ω and the streamlines of the meridional circulation in the steady state for two anelastic simulations with $\rho_i/\rho_0 = 20.9$. The other parameters are the same as those used in the Boussinesq cases (see Fig. 3). Similar to the Boussinesq case, the differential rotation profile is still radial and the amplitude of differential rotation still increases with Re_c (first and third panels of Fig. 11). However, the amplitude of the differential rotation is decreased compared to the Boussinesq case. For $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ the maximum value of the rotation contrast between the inner and the outer spheres is nearly four times smaller than in the Boussinesq case when

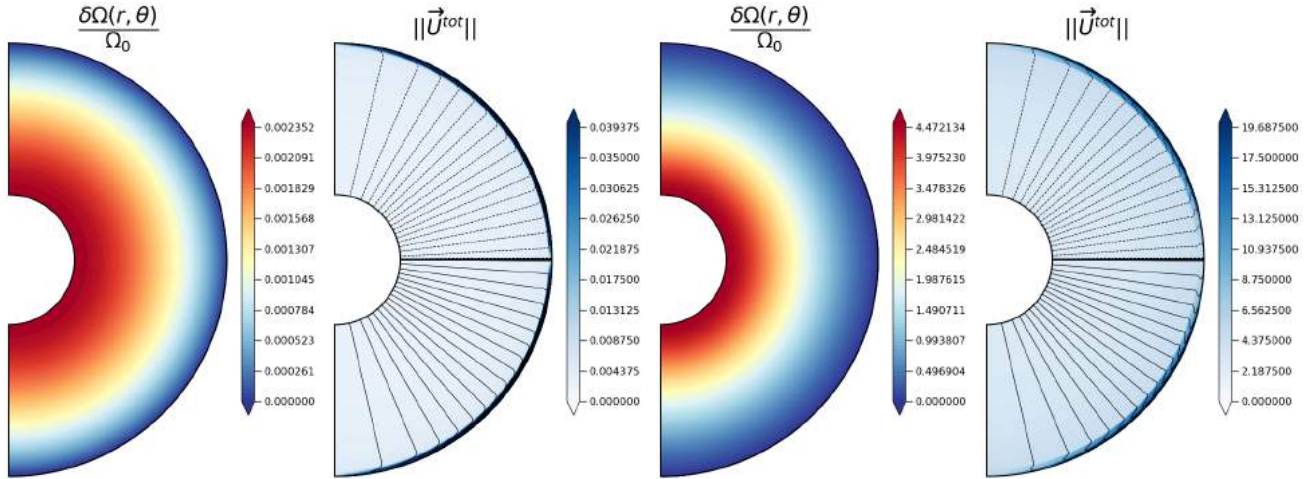


Fig. 11. Stationary differential rotation $\delta\Omega(r, \theta)/\Omega_0$ (first and third panels) and norm of the total meridional velocity field $\mathbf{U}^{\text{tot}} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$ (second and fourth panels) with its associated streamlines in black, in the viscous anelastic regime. The parameters of the simulation shown in the two left panels are $E = 10^{-5}$, $Pr(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10^{-2}$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (run 5.2 in Table 7), and in the two right panels $E = 10^{-4}$, $Pr(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 10$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (run 4.3 in Table 7). In the first and third panels, the coloured contours are normalised to the top value Ω_0 .

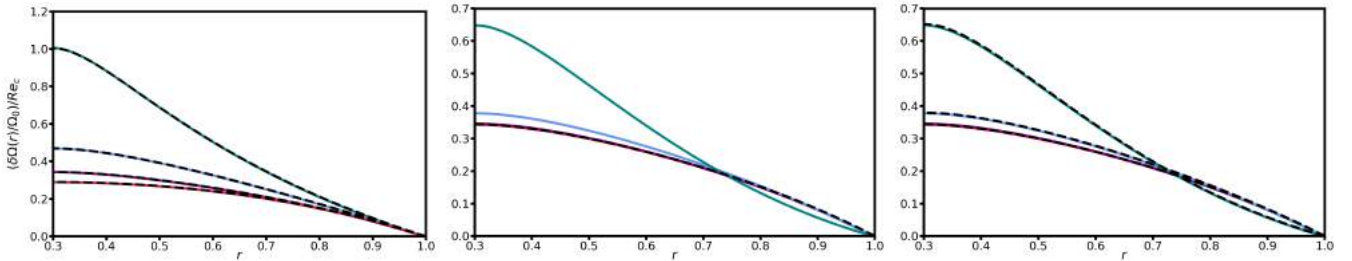


Fig. 12. Differential rotation normalised to the rotation rate of the outer sphere $\delta\Omega/\Omega_0$, rescaled with Re_c and plotted at the latitude $\theta = \pi/8$ as a function of radius. In each case $E = 10^{-4}$ and $Pr(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$. *Left panel:* analytical solution Eq. (56) is represented by dashed lines and numerical solutions (runs 1.1–1.4 in Table 7) as solid coloured lines for the linear regime $Re_c = 10^{-2}$. The colours green, blue, purple, and red correspond respectively to the values of the density contrasts between the inner and outer spheres $\rho_i/\rho_0 = 1.75, 10.8, 20.9,$ and 60.2 . *Middle panel:* numerical solutions are now represented for $Re_c = 10^{-2}, 10^{-1}, 1,$ and 10 (red, purple, blue, and green, respectively) for $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (runs 1.3, 2.3, 3.3, and 4.3 in Table 7). *Right panel:* same, but when $Re_c \geq 1$ the solution in dashed lines is numerically estimated by taking the full contraction term in Eq. (55) into account.

$Re_c = 10^{-2}$, and almost twice as small as when $Re_c = 10$. The total meridional circulation, visible in the second and fourth panels of Fig. 11, is dominated by the radial contraction field. As in the Boussinesq case, a circulation confined in a thin layer close to the outer boundary can be seen when the forced radial flow is subtracted. However, the circulation at the inner sphere boundary is virtually suppressed by the density stratification.

We now derive an analytical expression of the differential rotation in the linear regime $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$ that clearly shows how the density stratification lowers the level of differential rotation compared to the Boussinesq case. In the anelastic approximation the AM equation reads

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \text{NL} + \underbrace{2\Omega_0 U_s}_{\text{Coriolis term}} - \underbrace{\nu \left[D^2 U_\phi + \frac{r}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) \right]}_{\text{Viscous term}} \\ = \underbrace{\frac{V_0 r_0^2 \rho_0}{\bar{\rho} r^3} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi + r^2 \sin \theta \Omega_0) \right)}_{\text{Contraction}}, \end{aligned} \quad (54)$$

where D^2 is the vector Laplace operator in the azimuthal direction $D^2 = (\nabla^2 - 1/r^2 \sin^2 \theta)$. When the Coriolis and the non-

linear advection terms are neglected in Eq. (54), and when the differential rotation is sufficiently weak (i.e. $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, and thus the first part of the contraction term can be neglected), the steady balance is the linear equation

$$-\nu \left[D^2 U_\phi + \frac{r}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) \right] = 2\Omega_0 \sin \theta \frac{V_0 r_0^2 \rho_0}{\bar{\rho} r^2}, \quad (55)$$

whose solution is

$$\frac{\delta\Omega_v(r)}{\Omega_0} = Re_c \int_1^{r/r_0} \frac{\rho_0}{\bar{\rho}(r)} \left[\frac{(r_i/r_0)^2 - (r/r_0)^2}{(r/r_0)^4} \right] d(r/r_0). \quad (56)$$

It simply corresponds to the Boussinesq linear viscous solution Eq. (49) weighted by the inverse of the background density profile.

In Fig. 12 we show the agreement between the analytical expression (56) and the numerical simulations. In all panels of this figure the profiles of the differential rotation found in the numerical calculations for various values of the parameters are plotted at a particular latitude (here $\theta = \pi/8$) as a function of radius. We also overplot in dashed lines the analytical profile found by solving Eq. (55). In the left panel the linear regime (with $Re_c = 10^{-2}$) is represented at different density contrasts. In

the other panels the density contrast between the inner and outer spheres is fixed to $\rho_i/\rho_0 = 20.9$, but Re_c is increased. It is quite clear from the left panel that the agreement between the numerical and analytical solutions is perfect for the low Reynolds number cases. When the Reynolds number is increased, a departure from the analytical solution appears, as observed in the middle panel of Fig. 12 where the profile of Eq. (56), scaled with Re_c , is shown in dashed lines. In this case the level of differential rotation becomes comparable to Ω_0 and the first part of the contraction term $(V_0 r_0^2 \rho_0 / \bar{\rho} r^3) \partial(rU_\phi) / \partial r$ in Eq. (54) is no longer negligible, leading to a correction to Eq. (56). When this correction is applied, the agreement between the numerical solutions at higher Re_c and the new analytical expression (not given here) is recovered, as shown in the last panel of Fig. 12.

To summarise, we find that in the anelastic viscous regime the presence of a density stratification leads to a weaker differential rotation between the inner and outer spheres. In the linear regime, $\Delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$, the differential rotation is given by Eq. (56), i.e. the analytical solution previously derived in the Boussinesq case but weighted by the inverse of the background density.

7.3. Anelastic Eddington–Sweet regime

The role of the density stratification is now studied in the regime $\sqrt{E} \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$ where the transport of AM is dominated by an Eddington–Sweet type meridional circulation. The density ratios ρ_i/ρ_0 considered together with the other parameters in the simulations are listed in Table 8. The parameters E , $P_r(N_0/\Omega_0)^2$, and Re_c being defined in the same way and covering the same range as in the Boussinesq case (see Table 4), we are able to simply compare the anelastic simulations to the Boussinesq ones.

The meridional cut displayed in the left panel of Fig. 13 shows, as in the Boussinesq case, that the differential rotation profile is neither radial nor cylindrical. However, a comparison of Fig. 13 to its Boussinesq counterpart in Fig. 5 reveals clear differences between the two simulations that only differ in their density stratification. Firstly, the amplitude of the rotation contrast taken between the inner and outer spheres is smaller in the anelastic case. Secondly, the distribution of the differential rotation within the spherical shell is smoother overall and predominantly radial; in particular, the region of high rotation rates localised at the inner sphere close to the equator that was clearly visible in the Boussinesq case is now absent. Quantitatively, along the inner sphere, the rotation rates of the equator and the pole only differ by 11%, while this contrast was 67% in the Boussinesq case. From the right panel of Fig. 13 it is obvious that the meridional flow in the anelastic case is also smoother and not focused towards the equator at the inner sphere. This comes as no surprise since the meridional flow is similar in the Eddington–Sweet and Taylor–Proudman regimes, and we have already found in the anelastic Taylor–Proudman case that the circulation is weighted by the inverse of the background density profile and is no longer affected by an equatorial boundary layer.

We have computed the overall differential rotation between the inner and the outer spheres for different density ratios, and we propose a scaling relation to describe how it decreases with higher density ratios. As in Sect. 6.3 we estimate the dominant terms in the governing equations, but we pay attention to the effects of the density stratification. In particular, in determining the contraction timescale we take into account that the con-

Table 8. Parameters of the simulations in the Eddington–Sweet regime under the anelastic approximation.

Simulation	E	$P_r(N_0/\Omega_0)^2$	Re_c	ρ_i/ρ_0
1.1	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}	1.75
1.2	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}	10.8
1.3	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}	20.9
1.4	10^{-5}	10^{-1}	10^{-2}	60.2
2.1	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	1.75
2.2	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	10.8
2.3	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	20.9
2.4	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	60.2
3.1	10^{-5}	10^{-1}	1	1.75
3.2	10^{-5}	10^{-1}	1	10.8
3.3	10^{-5}	10^{-1}	1	20.9
3.4	10^{-5}	10^{-1}	1	60.2
4.1	10^{-5}	10^{-1}	10	1.75
4.2	10^{-5}	10^{-1}	10	10.8
4.3	10^{-5}	10^{-1}	10	20.9
5.1	10^{-5}	10^{-2}	10^{-2}	1.75
5.2	10^{-5}	10^{-2}	10^{-2}	10.8
5.3	10^{-5}	10^{-2}	10^{-2}	20.9
5.4	10^{-5}	10^{-2}	10^{-2}	60.2
6.1	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	1.75
6.2	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10.8
6.3	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	20.9
6.4	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	60.2
7.1	10^{-5}	10^{-2}	1	1.75
7.2	10^{-5}	10^{-2}	1	10.8
7.3	10^{-5}	10^{-2}	1	20.9
7.4	10^{-5}	10^{-2}	1	60.2
8.1	10^{-5}	10^{-2}	10	1.75
8.2	10^{-5}	10^{-2}	10	10.8
8.3	10^{-5}	10^{-2}	10	20.9
8.4	10^{-5}	10^{-2}	10	60.2
9.1	10^{-6}	10^{-2}	10^{-2}	20.9
9.2	10^{-6}	10^{-2}	10^{-1}	20.9
9.3	10^{-6}	10^{-2}	1	20.9
9.4	10^{-6}	10^{-2}	10	20.9
10.1	10^{-3}	10^{-1}	10^{-2}	20.9
10.2	10^{-4}	10^{-1}	10^{-2}	20.9
10.3	10^{-6}	10^{-1}	10^{-2}	20.9

traction velocity field is weighted by the inverse of the density. This allows us a more accurate determination of the contraction timescale:

$$\tau_c^A = \int_{r_0}^{r_i} \frac{dr}{V_f(r)} \approx \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d\tilde{r} \right) \tau_c. \quad (57)$$

Here the superscript ‘A’ stands for anelastic, and differentiates this contraction timescale from $\tau_c = r_0/V_0$ used in the Boussinesq case. The second expression is obtained using the definition of $V_f(r)$ and assuming that $r \sim r_0$.

Another specificity of the anelastic equations is the presence of an additional term in the thermal balance,

$$U_r \frac{d\bar{S}}{dr} = \kappa_T \left[\left(\frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} + \frac{d \ln \bar{T}}{dr} \right) \frac{\partial \delta S}{\partial r} + \nabla^2 \delta S \right], \quad (58)$$

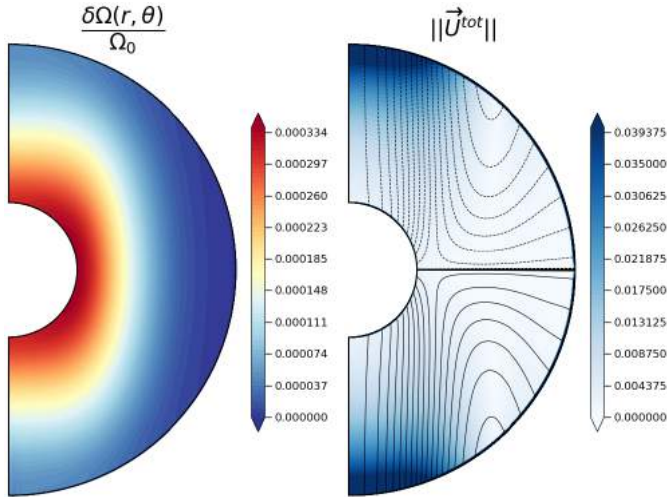


Fig. 13. Steady differential rotation (*left panel*) and norm of the total meridional velocity field $\mathbf{U}^{\text{tot}} = (U_r + V_f(r))\mathbf{e}_r + U_\theta\mathbf{e}_\theta$ with the associated streamlines in black (*right panel*), in the Eddington–Sweet regime obtained for $E = 10^{-6}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $Re_c = 10^{-2}$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.9$ (run 10.3 in Table 8). In the *left panel* the coloured contours are normalised to the rotation rate of the outer sphere Ω_0 . In the *right panel* the streamlines are as follows: outside the tangent cylinder the dashed lines describe an anticlockwise circulation and the solid lines a clockwise one; inside the tangent cylinder the dashed lines correspond to a downward meridional flow and the solid lines to an inward flow.

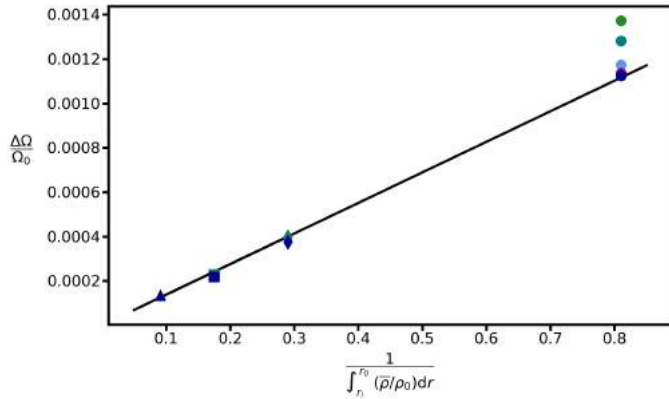


Fig. 14. Differential rotation between the inner and outer spheres $\Delta\Omega = \Omega(r_i) - \Omega(r_0)$ normalised to the top value Ω_0 obtained after subtracting the numerical Taylor–Proudman contribution, plotted as a function of the inverse of the integral of the background density profile $\bar{\rho}(r)$ normalised to the outer sphere value ρ_0 for different latitudes: $\theta = \pi/2$, $\pi/4$, $\pi/8$, $\pi/16$, and $\pi/32$ shown respectively in green, cyan, light blue, purple, and blue. The parameters are $E = 10^{-5}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, and $Re_c = 10^{-2}$. The symbols, circles, diamonds, squares, and triangles, respectively correspond to the different density contrasts between the inner and outer spheres $\rho_i/\rho_0 = 1.75$, 10.8, 20.9, and 60.2 (runs 1.1–1.4 in Table 8).

namely the first term in the brackets. However, in our simulations we found that this term is of the same order as the second term, so we can use only this second term to derive a scaling relation. This scaling relation takes the form

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \approx \frac{\tau_{\text{ED}}}{\tau_c^{\text{A}}} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \frac{R_0}{E} \left(\int_{r_i/r_0}^1 \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0} \right) d\tilde{r} \right)^{-1} \quad (59)$$

and provides a reasonable approximation for the differential rotation between the inner and outer spheres obtained in the anelastic

Eddington–Sweet regime. However, as for the Boussinesq case, we found that the agreement is better when the contribution of the outer Ekman layer is taken away by subtracting the numerical Taylor–Proudman solution. This is done in Fig. 14 which shows that the global differential rotation scales approximately with the inverse of the integral of the density between the two spheres. It also shows that the rotation contrast is practically independent of the latitude except for the lowest density ratio $\rho_i/\rho_0 = 1.75$.

The latitudinal variation of the inner sphere rotation rate found at $\rho_i/\rho_0 = 1.75$ is also found in the Boussinesq simulations and is a manifestation of the local rotation rate maximum found near the equator in these simulations. This local maximum seems to be related to the strong vertical jet which advects AM towards the equator, this jet being in turn associated with the presence of an equatorial boundary layer. Figure 15 shows the radial profiles of the gradient of the angular velocity together with the cylindrical radial and vertical velocity fields (respectively left, middle, and right panels) near the inner sphere at $\theta = \pi/4$ and at the equator (respectively top and bottom rows), both for the Boussinesq (blue curve) and anelastic cases (black curves). As in the Taylor–Proudman regime, we observe that the strong equatorial boundary layer and the vertical jet that are present in the Boussinesq case nearly disappear in the anelastic simulations. Thus, contrary to the Boussinesq case, the meridional flow is no longer focused towards the equator. The different AM advections between the Boussinesq and anelastic cases thus appear to explain the smoother, more radial differential rotation observed in the anelastic case.

8. Summary and conclusions

In this paper we have presented the results of our extensive parametric study of an axisymmetric rotating spherical layer undergoing contraction, mimicking a stellar radiative zone during a rapid contraction phase. Our goal was to understand the motions induced by the contraction, in particular the amplitude and the spatial distribution of the differential rotation and of the meridional circulation. The contraction, modelled through an imposed mass-conserving radial velocity field V_f , produces an inward transport of AM that is balanced, in a stationary state, by an outward viscous or advective transport of AM. The full compressible gas dynamics has been approximated using either the Boussinesq or the anelastic equations.

We show that the parameter $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ controls the amplitude and the distribution of the differential rotation. When $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \gg 1$, the buoyancy force inhibits the circulation and the viscosity dominates the AM transport. For a weak differential rotation $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$, the amplitude of the differential rotation is proportional to the ratio between the viscous and the contraction timescales and its purely radial profile can be derived analytically. This regime is relevant in the core of contracting subgiants. If $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$, an Eddington–Sweet-type circulation dominates the AM transport. Then, for a weak differential rotation and in the absence of density stratification, the amplitude of the differential rotation is approximately the ratio of the Eddington–Sweet timescale to the contraction timescale. In the anelastic simulations this amplitude decreases approximately as the inverse of the integral of the background density across the layer. The rotation is neither cylindrical nor radial, but when the density stratification is taken into account it tends to be predominantly radial and smoothly distributed. This regime holds for PMS stars and outside the degenerate core of subgiants.

Although less relevant for stars, a third regime of weak stratification $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \leq \sqrt{E}$ was studied to understand the effects

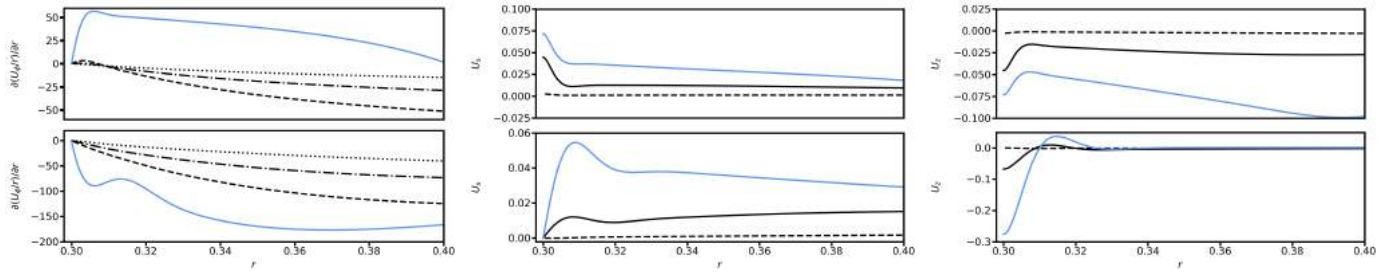


Fig. 15. Same as Fig. 10, but for the Eddington–Sweet regime with parameters $E = 10^{-5}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, and $Re_c = 10^{-2}$. The plain blue curve corresponds to the Boussinesq case (run 1.3 in Table 4), while the other curves are obtained by varying the density contrast between the inner and outer spheres in the same way as previously, but for runs 1.2–1.4 in Table 8 in the *left panel*, and for cases 1.1 and 1.3 in Table 8 in the *middle and right panels*.

of the small though finite Ekman numbers in our simulations. It enabled us to understand the effects of the boundary layers formed at the inner and outer limits of the numerical domain. In particular, we found that in the Boussinesq simulations the presence of an equatorial boundary layer and of an associated vertical jet along the tangent cylinder produces a localised region of high rotation rates near the equator. This equatorial layer and the vertical jet are absent from the more realistic density stratified anelastic simulations leading to a smoother distribution of the differential rotation. This is at odds with the conclusions of [Hypolite & Rieutord \(2014\)](#) where such jets are invoked as a way to connect the core and the convective envelope of the contracting subgiants.

In this study we have been mostly concerned with the weak differential rotation regime, although the limits of this linear regime $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim 1$ have been exceeded in various cases. It would be interesting to further investigate the non-linear regime, although this may be numerically challenging even for axisymmetric studies. In our set-up the rotation of the frame of reference has been kept constant, while we expect it to increase as the star contracts. This effect could be introduced by adding a Euler term that describes the time evolution of rotating frame of reference (e.g., [Hypolite & Rieutord 2014](#)). However, in density stratified cases we expect that this temporal variation is slow compared to the contraction time in most parts of the domain.

We also want to note two important points about the anelastic approximation. Firstly, our formulation of the momentum equation Eq. (2) neglects the $(P'/\bar{\rho}C_p)d\bar{S}/dr$ term; this is the LBR approximation ([Lantz 1992](#); [Braginsky & Roberts 1995](#); [Lantz & Fan 1999](#)). Physically, it means that the density scale height is smaller than the potential temperature scale height, which is approximately satisfied in the Earth’s atmosphere ([Vallis 2017](#)). This hypothesis is ensured in our simulations by keeping a low deviation from isentropy ($\epsilon_s \ll 1$). The legitimate question is, what is the validity of this approximation for a stellar interior? For a convective zone this assumption is obviously correct since $d\bar{S}/dr \approx 0$. For a radiative interior a model of subgiant computed with the stellar evolution code MESA shows that outside the degenerate core the ratio of the potential temperature to density scale heights (h_θ/h_ρ) is only four during the evolution of the subgiant up to the red giant branch (RGB). Inside the core, the condition $h_\rho \ll h_\theta$ can be satisfied at the terminal age main sequence (TAMS) and at the base of the RGB, but never during the subgiant phase where h_θ and h_ρ are of the same order. Nevertheless, using a sound-proof approach other than the LBR approximation would lead to problems associated with the non-conservation of energy ([Brown et al. 2012](#)).

Secondly, in the thermal balance equation, we used the entropy diffusion term instead of the temperature diffusion because temperature diffusion leads to numerical difficulties with the code MagIC. In principle, these numerical difficulties could be relaxed by ensuring a strong coupling between the pressure and velocity fields, either by using staggered grids ([Harlow & Welch 1965](#)) or through an interpolation method ([Rhie & Chow 1983](#)).

In this work we present the Eddington–Sweet regime as a possible axisymmetric steady state in a contracting stellar radiative zone. This might seem at odds with previous studies that questioned the existence of an Eddington–Sweet meridional circulation ([Busse 1981, 1982](#)), but as we discuss now there is actually no contradiction between these studies and the present one. [Busse \(1981\)](#) showed that for an inviscid baroclinic stably stratified rotating fluid the only possible steady state is a purely zonal flow and that any meridional motions should be only transients. A stationary meridional flow would indeed produce an uncompensated advection in the AM equation. Consequently, if an Eddington–Sweet circulation initially existed, it would be modified on a rotation timescale ([Busse 1982](#)) because of the lack of AM conservation. Such a system would then evolve thermally so that the divergence of the heat flux balances the temperature advection leading, after an Eddington–Sweet timescale, to a steady state where the meridional circulation and the divergence of the heat flux are both zero. Our work does not disagree with these results since we introduce a contraction term in the AM equation which compensates for the advection by a steady meridional flow, thus ensuring AM conservation. We then get a meridional flow whose amplitude is of the order of the forcing amplitude and whose timescale corresponds to the Eddington–Sweet timescale.

The existence of the axisymmetric states described in this paper can also be debated against potential hydrodynamical instabilities. Axisymmetric instabilities like the centrifugal instability ([Zahn 1974](#)) or the Goldreich–Schubert–Fricke instability ([Goldreich & Schubert 1967](#)) are unlikely because they should have been observed in our numerical simulations. However, the differentially rotating solutions might still be subject to non-axisymmetric instabilities either barotropic instabilities driven by the radial ([Lignières et al. 1999](#)) or the horizontal shear ([Deloncle et al. 2007](#)), or to baroclinic instabilities that occur because of the non-coincidence of the isobaric and isentropic surfaces ([Spruit & Knobloch 1984](#)).

In addition to the hydrodynamical stability of the axisymmetric steady states described in this work, contracting radiative zones could also potentially trigger magneto-hydrodynamical instabilities ([Spruit 1999](#)). The AM transport associated with the

development of such instabilities tends to decrease the level of differential rotation imposed by the contraction such as required by subgiant seismic data (Deheuvels et al. 2012, 2014). For example, Fuller et al. (2019) propose a revised mechanism for the saturation of the Tayler instability that reproduces fairly well the core rotation rates along the red giant branch during the red clump and up to the white dwarf phase. The magneto-rotational instability (MRI; Rüdiger et al. 2015; Jouve et al. 2020) could also be at play in contracting radiative zones.

In intermediate-mass PMS stars, such instabilities have also been invoked as a way to explain the observed dichotomy between the magnetism of Ap/Bp stars and the weak complex magnetic fields discovered on bright A and Am stars (Lignières et al. 2014; Gaurat et al. 2015).

Acknowledgements. The authors acknowledge the developers of MagIC (<https://github.com/magic-sph/magic>) for the open-source code thanks to which the simulations were performed. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP supercomputing center under the allocation P1118. The authors also wish to thank Sébastien Deheuvels for providing us with stellar parameters from the stellar evolution code MESA. L. J. acknowledges funding by the Institut Universitaire de France.

References

- Aerts, C., Mathis, S., & Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, 57, 35
- Alecian, E., Wade, G., Catala, C., et al. 2013a, *MNRAS*, 429, 1001
- Alecian, E., Wade, G., Catala, C., et al. 2013b, *MNRAS*, 429, 1027
- Barcilon, V., & Pedlosky, J. 1967, *J. Fluid Mech.*, 29, 1
- Beck, P. G., Montalbán, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55
- Böhm, T., & Catala, C. 1995, *A&A*, 301, 155
- Bouvier, J., Bertout, C., Benz, W., & Mayor, M. 1986, *A&A*, 165, 110
- Braginsky, S. I., & Roberts, P. H. 1995, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 79, 1
- Brown, B. P., Vasil, G. M., & Zweibel, E. G. 2012, *ApJ*, 756, 109
- Busse, F. 1981, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 17, 215
- Busse, F. 1982, *ApJ*, 259, 759
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R., & Mathis, S. 2013, *A&A*, 555, A54
- Charbonnel, C., & Talon, S. 2005, *Science*, 309, 2189
- Clune, T. C., Elliott, J., Miesch, M., Toomre, J., & Glatzmaier, G. A. 1999, *Parallel Comput.*, 25, 361
- Deheuvels, S., García, R., Chaplin, W., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M., et al. 2014, *A&A*, 564, A27
- Deloncle, A., Chomaz, J.-M., & Billant, P. 2007, *J. Fluid Mech.*, 570, 297
- den Hartogh, J., Eggenberger, P., & Deheuvels, S. 2020, *A&A*, 634, L16
- Dietrich, W., & Wicht, J. 2018, *Front. Earth Sci.*, 6, 189
- Eddington, A. 1925, *Observatory*, 48, 73
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, 544, L4
- Eggenberger, P., den Hartogh, J., Buldgen, G., et al. 2019, *A&A*, 631, L6
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, *MNRAS*, 485, 3661
- Gallet, F., & Bouvier, J. 2013, *A&A*, 556, A36
- Garaud, P., Medrano, M., Brown, J., Mankovich, C., & Moore, K. 2015, *ApJ*, 808, 89
- Gastine, T., & Wicht, J. 2012, *Icarus*, 219, 428
- Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, *A&A*, 580, A103
- Goldreich, P., & Schubert, G. 1967, *ApJ*, 150, 571
- Harlow, F. H., & Welch, J. E. 1965, *Phys. Fluids*, 8, 2182
- Hypolite, D., & Rieutord, M. 2014, *A&A*, 572, A15
- Jones, C., Boronski, P., Brun, A., et al. 2011, *Icarus*, 216, 120
- Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, *A&A*, 641, A13
- Lantz, S. R. 1992, PhD thesis, Dissertation Abstracts International, 52-12, 6460, Cornell University, USA
- Lantz, S., & Fan, Y. 1999, *ApJS*, 121, 247
- Lara, F. E., & Rieutord, M. 2013, *A&A*, 552, A35
- Lignières, F., Califano, F., & Mangeney, A. 1999, ArXiv e-prints [arXiv:astro-ph/9908184]
- Lignières, F., Petit, P., Auriere, M., Wade, G. A., & Böhm, T. 2014, *Proc. Int. Astron. Union*, 9, 338
- Maeder, A. 2008, *Physics Formation and Evolution of Rotating Stars* (Springer Science & Business Media)
- Maeder, A., & Meynet, G. 2001, *A&A*, 373, 555
- Marques, J., Goupil, M., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, 549, A74
- Pinçon, C., Belkacem, K., Goupil, M., & Marques, J. 2017, *A&A*, 605, A31
- Rhie, C., & Chow, W. L. 1983, *AIAA J.*, 21, 1525
- Rieutord, M. 2006, *A&A*, 451, 1025
- Rieutord, M., & Beth, A. 2014, *A&A*, 570, A42
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *A&A*, 573, A80
- Schou, J., Antia, H., Basu, S., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390
- Spruit, H. 1999, Arxiv e-prints [arxiv:astro-ph/9907138]
- Spruit, H. 2002, *A&A*, 381, 923
- Spruit, H. C., & Knobloch, E. 1984, *A&A*, 132, 89
- Sweet, P. 1950, *MNRAS*, 110, 548
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2005, *A&A*, 440, 981
- Talon, S., & Charbonnel, C. 2008, *A&A*, 482, 597
- Talon, S., Kumar, P., & Zahn, J.-P. 2002, *ApJ*, 574, L175
- Vallis, G. K. 2017, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge University Press)
- Von Zeipel, H. 1924, *MNRAS*, 84, 665
- Wade, G. A., Drouin, D., Bagnulo, S., et al. 2005, *A&A*, 442, L31
- Wicht, J. 2002, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 132, 281
- Wicht, J., French, M., Stellmach, S., et al. 2018, *Magnetic Fields in the Solar System*, (Springer), 7
- Zahn, J. P. 1974, *Symposium-International Astronomical Union* (Cambridge University Press), 59, 185
- Zahn, J.-P. 1992, *A&A*, 265, 115

Appendix A: Hydrostatic state forced by the contraction

In order to derive the different timescales of AM transport in Sect. 3, we subtract the hydrostatic state forced by the contraction velocity field from our equations.

We first decompose the temperature fluctuations as the sum of a spherical contribution and a deviation to the spherical symmetry,

$$\Theta'(r, \theta) = T'(r) + \delta\Theta(r, \theta), \quad (\text{A.1})$$

where

$$T'(r) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \Theta'(r, \theta) \sin \theta \, d\theta \quad (\text{A.2})$$

and

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \delta\Theta(r, \theta) \sin \theta \, d\theta = 0. \quad (\text{A.3})$$

We now rewrite Eq. (8) by using the decomposition of Eq. (A.1), where $T'(r)$ is adimensionalised in the same way as $\bar{T}(r)$, and $\delta\Theta(r, \theta)$ is non-dimensionalised as $\Theta'(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} Pe_c P_r R_o \left[\frac{\partial \delta\tilde{\Theta}}{\partial t} + ((\tilde{U} + \tilde{V}_f) \cdot \nabla) \delta\tilde{\Theta} \right] \\ + Pe_c P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \left(\frac{d\tilde{T}}{dr} + \frac{d\tilde{T}'}{dr} \right) \\ = Pe_c E \nabla^2 \delta\tilde{\Theta} + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \nabla^2 \tilde{T}'. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

If $R_o \ll (N_0/\Omega_0)^2$, the steady case of the foregoing equation reads

$$\begin{aligned} Pe_c P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \left(\frac{d\tilde{T}}{dr} + \frac{d\tilde{T}'}{dr} \right) \\ = Pe_c E \nabla^2 \delta\tilde{\Theta} + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \nabla^2 \tilde{T}'. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Using both Ostrogradsky's theorem and the continuity equation, we can write

$$\oint_S \pm \tilde{U} \cdot dS \, e_r = \iiint_V (\nabla \cdot \tilde{U}) \, dV = 0, \quad (\text{A.6})$$

which then allows us to deduce

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \tilde{U}_r \sin \theta \, d\theta = 0. \quad (\text{A.7})$$

Furthermore,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi \nabla^2 \delta\tilde{\Theta} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\tilde{r}^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi \delta\tilde{\Theta} \sin \theta \, d\theta \right) \right] \\ + \frac{1}{\tilde{r}^2} \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \delta\tilde{\Theta}}{\partial \theta} \right) d\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

According to Eq. (A.3) the first integral in brackets is zero. Since the last integral is also zero, we conclude the following:

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \nabla^2 (\delta\tilde{\Theta}) \sin \theta \, d\theta = 0. \quad (\text{A.9})$$

Consequently, the latitudinal mean of Eq. (A.5) gives

$$Pe_c \tilde{V}_f \left(\frac{d\tilde{T}}{dr} + \frac{d\tilde{T}'}{dr} \right) = \nabla^2 \tilde{T}'. \quad (\text{A.10})$$

The radial derivative of \tilde{T} is given by solving $\nabla^2 \tilde{T} = 0$ and leads to

$$\frac{d\tilde{T}}{dr} = \frac{-\tilde{r}_i}{\tilde{r}^2 (\tilde{r}_i - 1)}. \quad (\text{A.11})$$

Finally, $\tilde{T}'(r)$ is derived by solving

$$\frac{d^2 \tilde{T}'}{dr^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \left(\frac{Pe_c}{\tilde{r}} + 2 \right) \frac{d\tilde{T}'}{dr} = \frac{Pe_c \tilde{r}_i}{\tilde{r}^4 (\tilde{r}_i - 1)} \quad (\text{A.12})$$

using the boundary conditions $\tilde{T}'(1) = \tilde{T}'(\tilde{r}_i) = 0$. The analytical solution is readily

$$\tilde{T}'(r) = \frac{\tilde{r}_i (\tilde{r} - 1)}{\tilde{r} (\tilde{r}_i - 1)} - \left[\frac{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}} - 1 \right) \right) - 1}{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}_i} - 1 \right) \right) - 1} \right]. \quad (\text{A.13})$$

We thus define

$$\tilde{T}_m(r) = \tilde{T}(r) + \tilde{T}'(r) = \tilde{T}(1) - \left[\frac{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}} - 1 \right) \right) - 1}{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}_i} - 1 \right) \right) - 1} \right], \quad (\text{A.14})$$

and likewise

$$\frac{d\tilde{T}_m}{dr} = \frac{d \left(\tilde{T} + \tilde{T}' \right)}{dr} = \frac{-Pe_c}{\tilde{r}^2} \left[\frac{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}} - 1 \right) \right)}{\exp \left(Pe_c \left(\frac{1}{\tilde{r}_i} - 1 \right) \right) - 1} \right]. \quad (\text{A.15})$$

After subtracting the spherically symmetric temperature field $\tilde{T}'(r)$ induced by the contraction velocity field, the evolution equation of temperature fluctuations finally reads

$$\begin{aligned} P_r R_o \left[\frac{\partial \delta\tilde{\Theta}}{\partial t} + ((\tilde{U} + \tilde{V}_f) \cdot \nabla) \delta\tilde{\Theta} \right] + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \tilde{U}_r \frac{d\tilde{T}_m}{dr} \\ = E \nabla^2 \delta\tilde{\Theta}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

while the momentum equation Eq. (7) becomes

$$\begin{aligned} R_o \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + ((\tilde{U} + \tilde{V}_f) \cdot \nabla) (\tilde{U} + \tilde{V}_f) \right] + 2e_z \times (\tilde{U} + \tilde{V}_f) \\ = -\nabla \delta\tilde{\Pi} + \delta\tilde{\Theta} \tilde{r} + E \nabla^2 (\tilde{U} + \tilde{V}_f), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

in which we have subtracted the hydrostatic state induced by the radial contraction

$$\frac{d\tilde{P}_c(r)}{dr} = \frac{\tilde{T}'(r)}{\tilde{T}(r)} \tilde{r} \quad (\text{A.18})$$

with $\delta\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}' - \tilde{P}_c$, and where \tilde{P}_c is the contraction-induced hydrostatic pressure non-dimensionalised with the hydrostatic pressure scale $r_0 \rho_0 g_0$.

Appendix B: Analytical solution for the differential rotation in the Taylor–Proudman regime (Boussinesq case)

In this appendix we seek an analytical solution for the differential rotation in the Taylor–Proudman regime under the Boussinesq approximation.

The linear steady inviscid AM equation Eq. (21) provides a balance between the Coriolis and contraction terms. This balance allows us to derive an analytical solution for the cylindrical radial velocity field

$$\tilde{U}_s = \frac{\sin \theta}{\tilde{r}^2} = \frac{\tilde{s}}{(\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}}, \quad (\text{B.1})$$

where $\tilde{s} = \tilde{r} \sin \theta$ and $\tilde{z} = \tilde{r} \cos \theta$. In cylindrical coordinates the steady axisymmetric velocity field reads

$$\tilde{U}(r, \theta) = \left(\frac{-1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}(s, z)}{\partial z}, \tilde{s} \delta \tilde{\Omega}(s, z), \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}(s, z)}{\partial s} \right), \quad (\text{B.2})$$

where $\tilde{\Psi}$ is the dimensionless stream function. By using Eq. (B.1) we can then derive an analytical solution for $\tilde{\Psi}$,

$$\tilde{\Psi}(s, z) = \frac{-\tilde{z}}{\sqrt{\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2}} + \tilde{f}(s), \quad (\text{B.3})$$

while the use of Eq. (B.2) allows us to determine the vertical velocity field:

$$\tilde{U}_z = \frac{\cos \theta}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} = \frac{\tilde{z}}{(\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}}. \quad (\text{B.4})$$

By using the classical relations between the cylindrical and spherical coordinates, we deduce

$$\tilde{U}_r = \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \cos \theta, \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{U}_\theta = -\frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \sin \theta. \quad (\text{B.6})$$

The no-slip condition at the inner sphere $\tilde{U}_r(r = \tilde{r}_i, \theta) = 0$ leads to

$$\frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} = \frac{-1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}; \quad \frac{\tilde{f}'(s)}{\tilde{s}} \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} = \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}. \quad (\text{B.7})$$

By symmetry, $\tilde{U}_z = 0$ at the equator, which means that when $\tilde{r} > \tilde{r}_i$, $\tilde{f}'(s)/\tilde{s} = 0$. This allows us to find the analytical solutions of the meridional velocity fields:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= \frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= \frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\tilde{U}_r(s > r_i, z) = \frac{1}{\tilde{r}^2},$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\theta(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= \frac{\sin \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_\theta(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= -\frac{\sin \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\tilde{U}_\theta(s > r_i, z) = 0.$$

By integrating Eq. (B.7), we deduce the stream function (up to a constant):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= -\cos \theta + \cos \theta_i + \text{cte}, \\ \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= -\cos \theta - \cos \theta_i + \text{cte}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Since the stream function $\tilde{\Psi}$ is zero at the poles, we deduce that $\text{cte} = 0$.

The mass conservation leads to the relationship

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \tilde{U}) dV = \iint_S \tilde{U} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (\text{B.11})$$

which gives in spherical coordinates:

$$\iint \tilde{U}_r \tilde{r} d\theta \tilde{r} \sin \theta d\phi + \iint \tilde{U}_\theta dr \tilde{r} \sin \theta d\phi = 0. \quad (\text{B.12})$$

From the analysis of the Ekman layer located at the outer sphere, we obtain the non-dimensional form of the Ekman condition:

$$\tilde{U}_r(r = 1, \theta) = \frac{-\sqrt{E}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \sin \theta \tilde{U}_\phi^I(r = 1, \theta)}{2 \sqrt{|\cos \theta|}} \right). \quad (\text{B.13})$$

We now rewrite Eq. (B.13) in cylindrical coordinates using the Taylor–Proudman constraint and by noting that $\cos \theta = \sqrt{1 - (\tilde{s}/\tilde{r})^2}$, which leads to $\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \tilde{s}^2}$ at the outer sphere:

$$\tilde{U}_r = \frac{-\sqrt{E}}{\tilde{s}} \cos \theta \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right). \quad (\text{B.14})$$

In addition,

$$\tilde{U}_\theta = \frac{-1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial r} = \frac{-\cos \theta}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z}; \quad (\text{B.15})$$

thus, with the following substitutions $\tilde{r} \cos \theta d\theta = ds$ and $dz = \cos \theta dr$, the relationship Eq. (B.12) becomes

$$-\iint \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds d\phi = -\iint \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} dz d\phi. \quad (\text{B.16})$$

The choice of the closed surface is a cylinder of radius $s = r \sin \theta$ between $z_0 = r_0 \sqrt{1 - (s/r_0)^2}$ and $z_i = r_i \sqrt{1 - (s/r_i)^2}$ (see Fig. B.1).

By noting \tilde{Q}_s the dimensionless outward mass flux crossing this cylinder, we have

$$\tilde{Q}_s = -2\pi \int_{z_i}^{z_0} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} dz = 2\pi (\cos \theta_0 - \cos \theta_i). \quad (\text{B.17})$$

Likewise, with \tilde{Q}_z the inward dimensionless mass flux crossing the cylinder, we obtain

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_z &= -2\pi \sqrt{E} \int_0^{\tilde{s}} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds \\ &= -2\pi \sqrt{E} \frac{\tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}}, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Finally, from Eq. (B.16) we get

$$2\pi (\cos \theta_0 - \cos \theta_i) = 2\pi \sqrt{E} \cdot \frac{\tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}}, \quad (\text{B.19})$$

from which we conclude

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Omega}_{\text{TP}}(s \leq r_i) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{2}{\tilde{s}^2} (\cos \theta_0 - \cos \theta_i) \sqrt{|\cos \theta_0|} \right], \\ \delta \tilde{\Omega}_{\text{TP}}(s > r_i) &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left[\frac{2}{\tilde{s}^2} \cos \theta_0 \sqrt{|\cos \theta_0|} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

which can then be rewritten under dimensional form to lead to the solution Eq. (45).

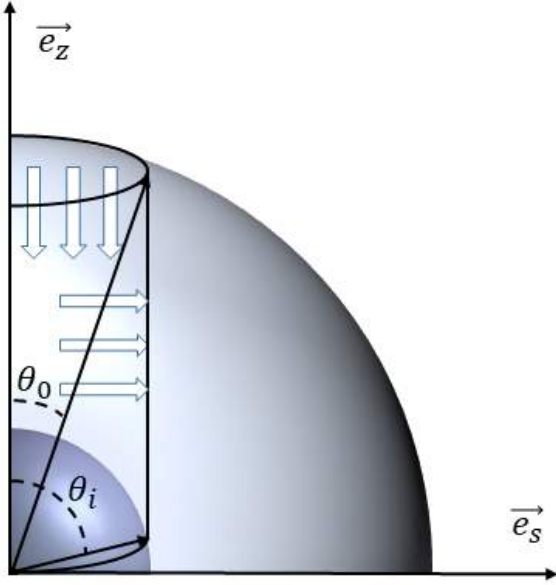


Fig. B.1. Sketch of a mass–flux balance inside a cylinder of radius $s = r \sin \theta$ between $z_0 = r_0 \sqrt{1 - (s/r_0)^2}$ and $z_i = r_i \sqrt{1 - (s/r_i)^2}$.

Appendix C: Analytical solution for the differential rotation in the Taylor–Proudman regime (anelastic case)

We now show that the analytical solution previously derived, namely Eq. (B.20), is still valid independently of the amplitude of the density contrast applied between the inner and outer spheres.

In the anelastic approximation, the dimensionless balance between the Coriolis and contraction terms now provides

$$\tilde{U}_s = \frac{\sin \theta}{\tilde{\rho} \tilde{r}^2} = \frac{\tilde{s}}{\tilde{\rho} (\tilde{s}^2 + \tilde{z}^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.1})$$

The poloidal-toroidal decomposition now relates the stream function to the meridional velocity fields as

$$\tilde{\rho} \tilde{U}_s = \frac{-1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}(s, z)}{\partial z}; \quad \tilde{\rho} \tilde{U}_z = \frac{1}{\tilde{s}} \frac{\partial \tilde{\Psi}(s, z)}{\partial s}, \quad (\text{C.2})$$

which is equivalent to

$$\tilde{\rho} \tilde{U}_r = \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}(r, \theta)}{\partial \theta}; \quad \tilde{\rho} \tilde{U}_\theta = \frac{-1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\Psi}(r, \theta)}{\partial r}. \quad (\text{C.3})$$

From these relationships, it is obvious that all the analytical solutions derived for the meridional fields will be identical to the Boussinesq case except that they will now be weighted by the inverse of the background density profile:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_z(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\cos \theta}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \right), \\ \tilde{U}_z(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\cos \theta}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \right), \\ \tilde{U}_z(s > r_i, z) &= \frac{\cos \theta}{\tilde{\rho} \tilde{r}^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} - \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \right), \\ \tilde{U}_r(s \leq r_i, z) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} + \frac{\cos \theta}{\tilde{r}_i^2 \cos \theta_i} \right), \\ \tilde{U}_r(s > r_i, z) &= \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r}^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\theta(\tilde{s} \leq \tilde{r}_i, \tilde{z}) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= \frac{\sin \theta}{\tilde{\rho} \tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_\theta(\tilde{s} \leq \tilde{r}_i, \tilde{z}) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= \frac{-\sin \theta}{\tilde{\rho} \tilde{r}_i^2 \cos \theta_i}, \\ \tilde{U}_\theta(\tilde{s} > \tilde{r}_i, \tilde{z}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Instead, the previous analytical solution derived for the stream function is unmodified:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [0; \pi/2]} &= -\cos \theta + \cos \theta_i, \\ \tilde{\Psi}(r, \theta) \Big|_{\theta \in [\pi/2; \pi]} &= -\cos \theta - \cos \theta_i. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

In the anelastic approximation, Eq. (B.11) is rewritten as follows:

$$\iiint_V (\nabla \cdot (\tilde{\rho} \tilde{U})) dV = \iint_S (\tilde{\rho} \tilde{U}) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Since the Ekman condition Eq. (B.13) is given in $\tilde{r} = 1$, and the background density profile at this location is such that $\tilde{\rho}(r = 1) = 1$, we obtain the following relationship:

$$-\iint \sqrt{E} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{s}^2 \delta \tilde{\Omega}(s)}{2 \sqrt{|\cos \theta_0|}} \right) ds d\phi = -\iint \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial z} dz d\phi. \quad (\text{C.9})$$

In other words, this is the same dimensional analytical solution for the differential rotation as in the Boussinesq case, namely Eq. (B.20) (or under dimensional form Eq. (45)).

Appendix D: Solution in the Boussinesq Eddington–Sweet regime

In this appendix we show, in the Eddington–Sweet regime, that a solution for the differential rotation can be expressed as the sum of an Eddington–Sweet-type solution plus a Taylor–Proudman solution. The second term comes from the Ekman boundary layer at the outer sphere and cannot be entirely neglected near this boundary even at very small Ekman numbers.

The dimensionless linear axisymmetric steady equations of momentum, temperature, and continuity read

$$\begin{aligned} -2 \sin \theta \tilde{U}_\phi &= -\frac{\partial \delta \tilde{\Pi}}{\partial r} + \delta \tilde{\Theta} \tilde{r} + E \nabla^2 \tilde{U} \Big|_{e_r}, \\ -2 \cos \theta \tilde{U}_\phi &= -\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \delta \tilde{\Pi}}{\partial \theta} + E \nabla^2 \tilde{U} \Big|_{e_\theta}, \\ 2 \cos \theta \tilde{U}_\theta + 2 \sin \theta \tilde{U}_r - \frac{2 \sin \theta}{\tilde{r}^2} &= E \left(\nabla^2 - \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{U}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \tilde{U}_r \frac{d\tilde{T}_m}{dr} &= E \nabla^2 \delta \tilde{\Theta}, \\ \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{r}^2 \tilde{U}_r) + \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_\theta) &= 0. \end{aligned}$$

For small Ekman numbers, solutions are sought as the sum of an interior inviscid solution and a boundary layer solution, that is

$\tilde{\mathbf{U}}(r, \theta) = \tilde{\mathbf{U}}_I(r, \theta) + \tilde{\mathbf{U}}_E(\xi, \theta)$, where by construction the boundary layer solution must vanish in the interior. For an $E^{1/2}$ wide boundary layer at the outer sphere, a dimensionless stretched coordinate $\xi = E^{-1/2}(1 - \tilde{r})$ is introduced and the previous condition reads $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{U}}_E(\xi, \theta) = 0$.

For the interior solution we assume the expansion

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\phi_I} &= \frac{P_r(N_0/\Omega_0)^2}{E} \tilde{U}_{\phi_I}^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{E}} \tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}, \\ \tilde{U}_{r_I} &= \tilde{U}_{r_I}^{(0)}, \\ \tilde{U}_{\theta_I} &= \tilde{U}_{\theta_I}^{(0)}, \\ \delta\tilde{\Theta}_I &= \frac{P_r(N_0/\Omega_0)^2}{E} \delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

where $E^{-1/2} \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2/E$. Substitution of this expansion in Sys. (D.1) yields at the dominant order the following system:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \tilde{U}_{\phi_I}^{(0)}}{\partial z} &= \frac{\partial \delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}}{\partial \theta}, \\ \tilde{U}_{s_I}^{(0)} &= \frac{\sin \theta}{\tilde{r}^2}, \\ \tilde{U}_{r_I}^{(0)} \frac{d\tilde{T}_m}{dr} &= \nabla^2 \delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_I^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

From the expression of $\tilde{U}_{s_I}^{(0)}$, the radial velocity field $\tilde{U}_{r_I}^{(0)}$ can be determined using mass conservation and the boundary condition $\tilde{U}_{r_I}^{(0)}(r = \tilde{r}_i, \theta) = 0$. Then we assume that the system of equations for the remaining unknowns $\tilde{U}_{\phi_I}^{(0)}$ and $\delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}$ admits a solution for the full boundary conditions ($\tilde{U}_{\phi_I}^{(0)}(r = 1, \theta) = 0$, $\partial(U_{\phi_I}^{(0)}/\tilde{r})/\partial r = 0$ in $r = \tilde{r}_i$, and $\delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}(r = 1, \theta) = \delta\tilde{\Theta}_I^{(0)}(r = \tilde{r}_i, \theta) = 0$).

However, the meridional flow $\tilde{U}_{r_I}^{(0)}$, $\tilde{U}_{\theta_I}^{(0)}$ does not satisfy the no-slip condition at the outer sphere. An Ekman layer is therefore needed to correct the $O(1)$ jump on this field and this will induce the $E^{-1/2}\tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}$ term. Inserting the expansion Sys. (D.2) in Sys. (D.1), we see at $O(E^{-1/2})$ order that such a term must satisfy

$$\frac{\partial \tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}}{\partial z} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Meanwhile, within the Ekman layer, the boundary layer solution must be of the following order to compensate the $O(1)$ meridional velocity jump:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\phi_E} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \tilde{U}_{\phi_E}^{(0)}, \\ \tilde{U}_{r_E} &= \tilde{U}_{r_E}^{(1)}, \\ \tilde{U}_{\theta_E} &= \frac{1}{\sqrt{E}} \tilde{U}_{\theta_E}^{(0)}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

By rewriting Sys. (D.1) with the stretched coordinate ξ and by inserting the previous expressions, the boundary layer equations read as follows:

$$\begin{aligned} -2 \cos \theta \tilde{U}_{\phi_E}^{(0)} &= \frac{\partial^2 \tilde{U}_{\theta_E}^{(0)}}{\partial \xi^2}, \\ 2 \cos \theta \tilde{U}_{\theta_E}^{(0)} &= \frac{\partial^2 \tilde{U}_{\phi_E}^{(0)}}{\partial \xi^2}, \\ -\frac{\partial \tilde{U}_{r_E}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{U}_{\theta_E}^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

The boundary condition $\tilde{U}_{\phi} = 0$ leads to $\tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}(r = 1, \theta) + \tilde{U}_{\phi_E}^{(0)}(\xi = 0, \theta) = 0$ at the order $E^{-1/2}$. Together with the other boundary condition $\tilde{U}_{\theta_E}^{(0)}(\xi = 0, \theta) = 0$ and the evanescent condition when $\xi \rightarrow \infty$, the first two equations are solved to give

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{\theta_E}^{(0)}(\xi, \theta) &= -\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}(1, \theta) \exp(-\sqrt{|\cos \theta|} \xi) \cdot \\ &\quad \sin(\sqrt{|\cos \theta|} \xi), \\ \tilde{U}_{\phi_E}^{(0)}(\xi, \theta) &= -\text{sgn}(\cos \theta) \tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}(1, \theta) \exp(-\sqrt{|\cos \theta|} \xi) \cdot \\ &\quad \cos(\sqrt{|\cos \theta|} \xi). \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Then, integrating the last equation of Sys. (D.6) and using both the evanescent condition and the boundary condition $\tilde{U}_{r_I}^{(0)}(r = 1, \theta) + \tilde{U}_{r_E}^{(1)}(\xi = 0, \theta) = 0$ leads to the Ekman pumping condition Eq. (B.13) in its dimensionless form. From this condition on the interior flow, one can show, as in Appendix B, that $\tilde{U}_{\phi_I}^{(1)}$ is the Taylor–Proudman solution. In the interior, its contribution to the total differential rotation decreases as $P_r(N_0/\Omega_0)^2/\sqrt{E}$ increases. However, near the outer sphere its contribution can never be neglected because the Eddington–Sweet term vanishes there ($\tilde{U}_{\phi_I}^{(0)}(r = 1, \theta) = 0$).

Angular momentum transport in a contracting stellar radiative zone embedded in a large-scale magnetic field

B. Gouhier,¹ L. Jouve,¹ and F. Lignières¹

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (IRAP), Université de Toulouse, 14 Avenue Edouard Belin, 31400 Toulouse, France
e-mail: [bgouhier, ljouve, flignieres]@irap.omp.eu

Received 22 June 2021 / Accepted 7 January 2022

ABSTRACT

Context. Some contracting or expanding stars are thought to host a large-scale magnetic field in their radiative interior. By interacting with the contraction-induced flows, such fields may significantly alter the rotational history of the star. They thus constitute a promising way to address the problem of angular momentum transport during the rapid phases of stellar evolution.

Aims. In this work, we aim to study the interplay between flows and magnetic fields in a contracting radiative zone.

Methods. We performed axisymmetric Boussinesq and anelastic numerical simulations in which a portion of the radiative zone was modelled by a rotating spherical layer, stably stratified and embedded in a large-scale (either dipolar or quadrupolar) magnetic field. This layer is subject to a mass-conserving radial velocity field mimicking contraction. The quasi-steady flows were studied in strongly or weakly stably stratified regimes relevant for pre-main sequence stars and for the cores of subgiant and red giant stars. The parametric study consists in varying the amplitude of the contraction velocity and of the initial magnetic field. The other parameters were fixed with the guidance of a previous study.

Results. After an unsteady phase during which the toroidal field grew linearly and then back-reacted on the flow, a quasi-steady configuration was reached, characterised by the presence of two magnetically decoupled regions. In one of them, magnetic tension imposes solid-body rotation. In the other, called the dead zone, the main force balance in the angular momentum equation does not involve the Lorentz force and a differential rotation exists. In the strongly stably stratified regime, when the initial magnetic field is quadrupolar, a magnetorotational instability is found to develop in the dead zones. The large-scale structure is eventually destroyed and the differential rotation is able to build up in the whole radiative zone. In the weakly stably stratified regime, the instability is not observed in our simulations, but we argue that it may be present in stars.

Conclusions. We propose a scenario that may account for the post-main sequence evolution of solar-like stars, in which quasi-solid rotation can be maintained by a large-scale magnetic field during a contraction timescale. Then, an axisymmetric instability would destroy this large-scale structure and this enables the differential rotation to set in. Such a contraction-driven instability could also be at the origin of the observed dichotomy between strongly and weakly magnetic intermediate-mass stars.

Key words. instabilities – magnetohydrodynamics (MHD) – methods: numerical – stars: magnetic field – stars: rotation – stars: interiors

1. Introduction

Rotation is ubiquitous at every stage of stellar evolution. Yet, it is still often considered as a second order effect in stellar evolution models. A full description necessarily entails a thorough study of differential rotation and meridional circulation induced by rotation, how they interact with other physical processes (e.g. magnetic field or internal gravity waves), and the ensuing potential instabilities. In his seminal work, Zahn (1992) proposed a model for the transport of chemical elements and angular momentum (AM) (without a magnetic field and internal gravity waves) that was later implemented in state-of-the-art stellar evolution codes. One of the strong assumptions is that the differential rotation in radiative zones is close to shellular (i.e. constant on an isobar) because of the anisotropic turbulence induced by shear instabilities in stably stratified conditions. This formalism has been successful at explaining a large number of stellar observations (see Maeder (2008) for a review). However, a growing body of evidence shows that additional AM transport mechanisms are still needed. This is particularly true for contracting stars. During the pre-main sequence (PMS) or post-MS evolution, a spin-up of

stellar cores is naturally produced. However, observations of surface rotation of stars in young clusters (Gallet & Bouvier 2013) as well as asteroseismic studies of red giant stars (Eggenberger et al. 2012; Ceillier et al. 2013; Marques et al. 2013) tend to show that rotation rates are in fact strongly overestimated in models. In order to improve this formalism, the first thing to ask is what kind of flows are really expected in those contracting stars.

In a previous work (Gouhier et al. 2021), we investigated the differential rotation and meridional circulation produced in a modelled contracting stellar radiative zone. This axisymmetric study included the effects of stable stratification and was conducted both under the Boussinesq and the anelastic approximations, but the effects of a magnetic field were ignored. We showed that a radial differential rotation should be expected only in strongly stably stratified radiative zones such as the degenerate cores of subgiants. Indeed, any meridional circulation is inhibited by the strong buoyancy force, and the characteristic amplitude of the differential rotation in the linear regime is found to be proportional to the ratio of the viscous to contraction timescales $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \tau_v/\tau_c$. In conditions relevant for the outside of the degenerate cores of subgiants and for PMS stars

though, thermal diffusion weakens the stable stratification and allows a meridional circulation to exist, with a typical amplitude of the order of the contraction speed. The differential rotation profile then exhibits both a dependence in latitude and radius and its characteristic amplitude in the linear regime is found to be $\Delta\Omega/\Omega_0 \propto \tau_{\text{ED}}/\tau_c$, where τ_{ED} is the Eddington–Sweet timescale associated with the AM transport by the meridional flow. Both estimates, assuming a contraction timescale comparable to the Kelvin–Helmholtz timescale, tend to indicate that the amplitude of the differential rotation can be quite strong and that another process of AM transport should be invoked to reproduce the rotation rates of pre-MS and post-MS stars.

The presence of a large-scale magnetic field in such contracting radiative zones can drastically modify this picture. It is commonly agreed that radiative zones can host such fields (see Braithwaite & Spruit (2017) for a review). Magnetic fields with surface intensities of a few hundred Gauss have indeed been detected in a fraction of intermediate-mass PMS stars (Alecian et al. 2013). These stars are most probably the progenitors of the MS chemically peculiar Ap/Bp stars that host large-scale mostly dipolar fields with intensities ranging from 300 G to 30 kG (Donati & Landstreet 2009). Meanwhile, a distinct population of MS intermediate-mass stars, including the A-type star Vega and the Am-type stars Sirius, β Ursae Majoris and θ Leonis, exhibits much weaker (~ 1 G) multi-polar magnetic fields (Lignières et al. 2009; Petit et al. 2010, 2011; Blazère et al. 2016). This magnetic dichotomy could be explained if, during the PMS, contraction forces a differential rotation that destroys pre-existing large-scale weak magnetic fields through magnetohydrodynamic (MHD) instabilities (Aurière et al. 2007; Lignières et al. 2014; Jouve et al. 2015, 2020).

Unlike PMS stars, the radiative zone of post-MS stars is overlaid by a large convective envelope preventing any direct measurement of a magnetic field in the convectively stable regions. Recently, asteroseismology revealed a class of red giants exhibiting dipolar oscillation modes with a very weak visibility (Mosser et al. 2012). This phenomenon has been attributed to the presence of an internal magnetic field modifying the angular structure of the dipole waves, thus leading to their trapping in the radiative core (Fuller et al. 2015). This so-called greenhouse effect, supported by other authors (Stello et al. 2016a,b; Cantiello et al. 2016) is, however, seriously questioned because these modes preserve their mixed character at odds with Fuller’s scenario (Mosser et al. 2017). In parallel, the possibility to detect magnetic fields through their effect on the oscillation frequencies is under investigation (see e.g. Bugnet et al. (2021)). Awaiting observational evidence, theoretical work strongly supports the presence of magnetic fields in stars that possess a convective core (MS stars with $M \gtrsim 1.2M_\odot$). The numerical simulations of core-dynamos of MS A- and B-type stars (Brun et al. 2005; Augustson et al. 2016) indicate that magnetic fields with intensities ranging from 0.1 – 1.0 MegaGauss can indeed be generated. Such a magnetic field could then relax into a large-scale stable configuration in the radiative interior of the post-MS stars where it would be buried for the rest of its evolution (Braithwaite & Spruit 2004).

Large-scale magnetic fields are able to impose a quasi-solid rotation on very short timescales, even for very weak intensities (Ferraro 1937; Mestel & Weiss 1987). Besides, enforcing a quasi-solid rotation during ~ 1 Gyr after the end of the MS enabled Spada et al. (2016) to reproduce the rotation rates of subgiants, as measured by asteroseismology (Deheuvels et al. 2014). This result was also obtained by Eggenberger et al. (2019) and an observational support was then provided by Deheuvels

et al. (2020) who measured a near solid rotation in two young subgiants. Interestingly, the efficiency of the AM transport then seems to decrease up to the tip of the red giant branch (RGB) before increasing again (Spada et al. 2016; Eggenberger et al. 2019; Deheuvels et al. 2020). Those works suggest a scenario broken down into several key phases. First, a quasi-solid rotation is maintained for some time through an efficient AM transport mechanism (possibly magnetic tension imposed by a large-scale field). Then, this mechanism would become inefficient and differential rotation would build up again before another AM transport mechanism, such as turbulent transport induced by MHD instabilities (Spruit 2002; Rüdiger et al. 2015; Fuller et al. 2019; Jouve et al. 2020) takes over.

In this work, we intend to study the flows induced by a contracting radiative zone in the presence of a large-scale magnetic field, through axisymmetric MHD simulations. In particular, we focus on the structure of the steady-states differential rotation and on the ability of the magnetic field to transport AM. The paper is organised as follows: in Sect. 2 we present the mathematical model, then in Sect. 3, the different timescales involved in our problem. The initial and boundary conditions as well as the numerical method are described in Sects. 4 and 5 respectively. In Sect. 6 we provide the reader with the relevant timescales in the stellar context and the consequences for our numerical study. The results of the simulations in the viscous and Eddington–Sweet regimes are finally given in Sect. 7, and are then summarised in Sect. 8 where the astrophysical implications are also discussed.

2. Mathematical formulation

In our previous work (Gouhier et al. 2021), we investigated the differential rotation and meridional flows produced in a contracting stellar radiative zone. In this follow-up work, we add the effect of an initial large-scale magnetic field. To do so, we numerically solve the Boussinesq or anelastic magnetohydrodynamical (MHD) equations in a spherical shell filled with a stably-stratified fluid subject to a radial contraction and embedded in a magnetic field. In this section we present the governing equations that we numerically solve in the two aforementioned approximations.

In this study, the fluid contraction is modelled using a mass-conserving contraction velocity field defined by

$$\vec{V}_f = V_f(r) \vec{e}_r = -\frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^2} \vec{e}_r, \quad (1)$$

where r is the radius and $\bar{\rho}$ the background density, r_0 and ρ_0 their respective values at the outer sphere and V_0 is the amplitude of the contraction velocity at the outer sphere. Using the Lantz–Braginsky–Roberts (LBR) approximation (Lantz (1992), Braginsky & Roberts (1995)), assuming a uniform kinematic viscosity ν , thermal diffusion κ , magnetic diffusion η , and neglecting the centrifugal effects and local sources of heat, the dimensionless axisymmetric anelastic equations of a magnetised fluid (Jones et al. 2011) undergoing contraction read

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\frac{\vec{\rho}}{\bar{\rho}} \left(\vec{U} + \vec{V}_f \right) \right] = 0 \quad \text{and} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$R_o \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{U} + \vec{V}_f) \right] + 2 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \left(\frac{\tilde{\Pi}}{\tilde{\rho}} \right) + \frac{\tilde{S}'}{\tilde{r}^2} \vec{e}_r + \frac{E}{\tilde{\rho}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\sigma}} + \left(\frac{L_u E}{P_m} \right)^2 \frac{R_o^{-1}}{\tilde{\rho}} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B} \right] + \frac{1}{R_m} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \tilde{T} \left[P_r R_o \left(\frac{\partial \tilde{S}'}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) \tilde{S}' \right) + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \frac{d\tilde{S}'}{dr} \right] \\ = E \vec{\nabla} \cdot \left(\tilde{\rho} \tilde{T} \vec{\nabla} \tilde{S}' \right) + D_i P_e E^2 \left[\tilde{Q}_v + P_m^{-1} \left(\frac{L_u E}{P_m R_o} \right)^2 (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

where the diffusion of entropy is introduced in the energy equation instead of the diffusion of temperature (Braginsky & Roberts (1995); Clune et al. (1999)). The non-dimensional form (identified by the tilde variables) of these equations is obtained using the radius of the outer sphere r_0 as the reference length-scale, the value of the contraction velocity field at the outer sphere V_0 as a characteristic velocity, and $\tau_c = r_0/V_0$ as the reference timescale of the contraction. The frame rotates at Ω_0 , the rotation rate of the outer sphere and all the thermodynamics variables are expanded as a background value plus fluctuations, respectively denoted with an overbar and a prime. The background density and temperature field are non-dimensionalised respectively by the outer sphere density ρ_0 and temperature T_0 , while the background gradients of temperature and entropy fields are adimensionalised using the temperature and entropy difference $\Delta\bar{T}$ and $\Delta\bar{S}$ between the two spheres. The pressure fluctuations are non-dimensionalised by $\rho_0 r_0 \Omega_0 V_0$ and the entropy fluctuations by $C_p \Omega_0 V_0 / g_0$, where C_p is the heat capacity and g_0 the gravity at the outer sphere. Finally, we use the value of the surface poloidal field at the poles B_0 as the reference scale for the magnetic field.

In Eqs. (2), (3), (4), and (5), \vec{U} is the velocity field, $\tilde{\sigma}_{ij}$ is the dimensionless stress tensor, \tilde{Q}_v is the dimensionless viscous heating and the gravity profile is $\propto r^{-2}$. The reference state is non-adiabatic and a uniform positive entropy gradient is used to produce a stable stratification. It is related to the Brunt-Väisälä frequency defined by:

$$N_0 = \sqrt{\frac{g_0 \Delta\bar{S}}{C_p r_0}}, \quad (6)$$

and which controls the amplitude of this stable stratification. The magnitude of the deviation to the isentropic state is controlled by the parameter $\epsilon_s = \Delta\bar{S}/C_p$, chosen sufficiently small to ensure the validity of the anelastic approximation. With the dissipation number $D_i = g_0 r_0 / T_0 C_p$, it sets the background temperature and density profiles (see Gouhier et al. (2021)).

These anelastic equations involve six independent dimensionless numbers, a Rossby number based on the amplitude

of the contraction velocity $R_o = V_0/\Omega_0 r_0$, the Ekman number $E = \nu/\Omega_0 r_0^2$, the Prandtl number $P_r = \nu/\kappa$, the ratio between the reference Brunt-Väisälä frequency and the rotation rate of the outer sphere N_0/Ω_0 , the magnetic Prandtl number $P_m = \nu/\eta$, and the Lundquist number $L_u = B_0 r_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0 \eta}$ where μ_0 is the vacuum permeability. From these dimensionless numbers, three additional parameters can then be defined: a contraction Reynolds number $Re_c = R_o/E$, a Péclet number $Pe_c = P_r Re_c$, and a magnetic Reynolds number $R_m = P_m Re_c$.

When the compressibility effects are neglected, except in the buoyancy term of the momentum equation, the Boussinesq approximation is recovered. In that case, using $\Omega_0 V_0 T_0 / g_0$ as the scale of the temperature deviations Θ' , the dimensionless governing equations read

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} + \vec{V}_f) = 0 \quad \text{and} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$R_o \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{U} + \vec{V}_f) \right] + 2 \vec{e}_z \times (\vec{U} + \vec{V}_f) = -\vec{\nabla} \tilde{\Pi}' + \tilde{\Theta}' \vec{r} + E \vec{\nabla}^2 (\vec{U} + \vec{V}_f) + \left(\frac{L_u E}{P_m} \right)^2 R_o^{-1} \left[(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B} \right], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[(\vec{U} + \vec{V}_f) \times \vec{B} \right] + \frac{1}{R_m} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (9)$$

$$P_r R_o \left[\frac{\partial \tilde{\Theta}'}{\partial t} + \left((\vec{U} + \vec{V}_f) \cdot \vec{\nabla} \right) \tilde{\Theta}' \right] + P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 (\tilde{U}_r + \tilde{V}_f) \frac{d\tilde{T}}{dr} = E \vec{\nabla}^2 \tilde{\Theta}', \quad (10)$$

where the gravity profile is now $\propto r$, the reference Brunt-Väisälä frequency is defined using the correspondence $\Delta\bar{S}/C_p = \Delta\bar{T}/r_0$ in Eq. (6), and the contraction velocity field Eq. (1) is simplified using $\tilde{\rho} = \rho_0$.

To conclude this section, we note that when the anelastic approximation is used the parameter space is defined by eight dimensionless numbers: ϵ_s , D_i , Re_c , E , P_r , P_m , L_u and N_0^2/Ω_0^2 . Instead, only the last six are necessary in the Boussinesq approximation. In this study, only Re_c , L_u and the product $P_r (N_0/\Omega_0)^2$ will be varied.

3. Timescales of physical processes

In this section, we describe the various timescales involved in the transport of AM in our problem. We start by briefly recalling the relevant hydrodynamical timescales (see Gouhier et al. (2021)), then we introduce two timescales associated with the presence of a magnetic field.

In this work, the dimensional form of the AM equation under the Boussinesq approximation reads

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial t} + \text{NL} + \underbrace{2\Omega_0 U_s}_{\text{Coriolis term}} - \underbrace{\frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) B_\phi}_{\text{Lorentz force}} - \underbrace{\nu D^2 U_\phi}_{\text{Viscous term}} = \underbrace{\frac{V_0 r_0^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\phi + r^2 \sin \theta \Omega_0)}_{\text{Contraction}}, \quad (11)$$

where D^2 is the azimuthal component of the vector Laplacian operator, $U_s = \cos \theta U_\theta + \sin \theta U_r$ is the component of the velocity field, perpendicular to the rotation axis, and NL denotes the non-linear advection term. By balancing the partial time derivative with the contraction term in Eq. (11), we recover the contraction timescale used to non-dimensionalise the governing equations in Sect. 2

$$\tau_c = \frac{r_0}{V_0}, \quad (12)$$

as well as its linear form

$$\tau_c^L = \frac{r_0}{V_0} \frac{\Delta \Omega_0}{\Omega_0}, \quad (13)$$

when $\Delta \Omega / \Omega_0 \ll 1$. In the anelastic approximation, the contraction term in Eq. (11) is multiplied by $\rho_0 / \bar{\rho}$ and the resulting timescale is then weighted by the background density profile

$$\tau_c^A = \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right) \tau_c \quad \text{or} \quad \tau_c^{LA} = \left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right) \tau_c^L, \quad (14)$$

where τ_c^{LA} denotes the linear version. The AM transport by contraction can be balanced either by the viscous processes on a viscous timescale $\tau_v = r_0^2 / \nu$, or by a meridional circulation of Eddington–Sweet type, in which case it redistributes the AM on the following timescale

$$\tau_{ED} = \frac{r_0^2}{\kappa} \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2. \quad (15)$$

Ekman layers tend to develop at the spherical boundaries to accommodate the interior flow to the boundary conditions. In unstratified flows, they drive a global circulation. In stars, the stable stratification efficiently opposes this global flow although it can still exist in numerical simulations because the Ekman numbers can not reach stellar values. It then transports the AM on a spin-up timescale defined by

$$\tau_E = \sqrt{\frac{r_0^2}{\Omega_0 \nu}}. \quad (16)$$

The relative importance of these AM redistribution processes is given by the ratio of the above timescales, namely:

$$\frac{\tau_{ED}}{\tau_v} = P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2; \quad \frac{\tau_E}{\tau_v} = \sqrt{E}; \quad \frac{\tau_E}{\tau_{ED}} = \frac{\sqrt{E}}{P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2}. \quad (17)$$

Two main dimensionless numbers thus appear, the Ekman number E and the $P_r (N_0 / \Omega_0)^2$ parameter. As first noticed by Garaud (2002), the latter is of prime interest since it controls the flow dynamics. Thus, at fixed P_r and N_0 , the author shows that depending on the rotation rate value these parameters defines two rotation regimes (slow or fast). More in line with our work, Garaud & Brummell (2008); Garaud & Garaud (2008); Garaud & Acevedo-Arreguin (2009); Wood & Brummell (2012); Acevedo-Arreguin et al. (2013); Wood & Brummell (2018) have shown that it also controls the efficiency of the burrowing of the meridional circulation in radiative layers adjacent to convective regions. In particular, when $P_r (N_0 / \Omega_0)^2 \gg 1$, this circulation is suppressed by the stable stratification, a situation similar to the one that we encountered in the viscous regime described in Gouhier et al. (2021). In our case, E and $P_r (N_0 / \Omega_0)^2$ allow us to distinguish three regimes of interest:

$$P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll \sqrt{E} \ll 1; \quad \sqrt{E} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2 \ll 1; \quad (18)$$

$$\sqrt{E} \ll 1 \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2.$$

As discussed in Gouhier et al. (2021), the two last regimes, namely the Eddington–Sweet regime $\tau_E \ll \tau_{ED} \ll \tau_v$, and the viscous regime $\tau_E \ll \tau_v \ll \tau_{ED}$, are the most relevant for stars. We thus focus on them for the magnetic study.

The magnetic field introduces two new timescales: the magnetic diffusion timescale

$$\tau_\eta = \frac{r_0^2}{\eta}, \quad (19)$$

and the Alfvén timescale

$$\tau_{Ap} = \frac{r_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0}}{B_0}. \quad (20)$$

When the density contrast is taken into account (anelastic approximation), a new Alfvén timescale can be defined as

$$\tau_{Ap}^A = \left(\int_{r_i/r_0}^1 \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}} d(r/r_0) \right) \tau_{Ap}. \quad (21)$$

4. Initial and boundary conditions

Initially, we impose a dipolar or a quadrupolar poloidal magnetic field. In both cases, the radial distribution of the magnetic field is such that the azimuthal current density does not depend on r , ($\partial j_\phi / \partial r = 0$), to avoid possible numerical instabilities resulting from strong current sheets at the boundaries. For the dipole topology (left panel in Fig. 1), the initial field reads

$$\vec{B}(r, \theta, t = 0) = \frac{3rB_0}{r_0(1 - (r_i/r_0)^4)} \cos \theta \left(1 + \frac{r_i^4}{3r^4} - \frac{4r_0}{3r} \right) \vec{e}_r - \frac{3rB_0}{2r_0(1 - (r_i/r_0)^4)} \sin \theta \left(3 - \frac{r_i^4}{3r^4} - \frac{8r_0}{3r} \right) \vec{e}_\theta. \quad (22)$$

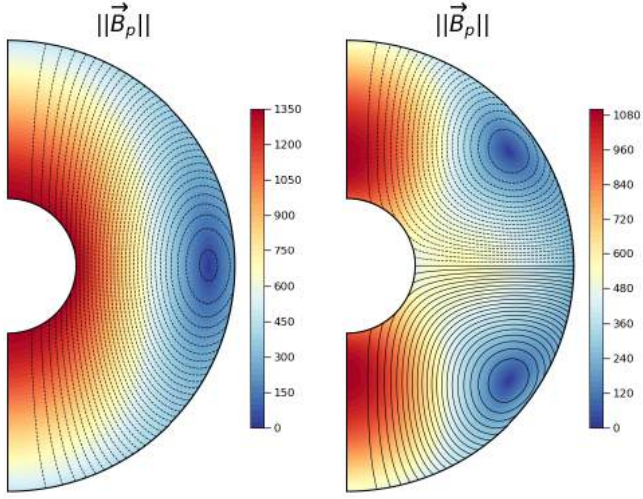


Fig. 1: Meridional cuts of the norm of the initial magnetic field (colour) for the dipole Eq. (22) (left), and the quadrupole Eq. (23) (right). The black lines show the poloidal field lines.

For the quadrupole topology (right panel in Fig. 1), it takes the following form

$$\begin{aligned} \vec{B}(r, \theta, t = 0) &= \frac{rB_0}{2r_0(1 - (r_i/r_0)^5)} \cdot (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &\left(\frac{r_i^5}{r^5} - 1 - 5 \ln \left(\frac{r_0}{r} \right) \right) \vec{e}_r - \frac{rB_0}{r_0(1 - (r_i/r_0)^5)} \sin \theta \cos \theta \\ &\left(1 - \frac{r_i^5}{r^5} - \frac{15}{2} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right) \right) \vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Figure 1 shows that some field lines connect to the inner and outer boundaries while others are only connected to the outer boundary, or even loop-back on themselves inside the domain. In both configurations, the norm of the magnetic field at the poles and at the outer sphere is B_0 .

Insulated boundary conditions are imposed at the inner and outer spheres. For our axisymmetric setup, these conditions translate into

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \Phi \quad \text{and} \quad B_\phi = 0 \quad \text{at} \quad r = r_i, r_0, \quad (24)$$

where Φ is a potential field.

The rotation rate is chosen to be initially uniform $\Omega(r, \theta, t = 0) = \Omega_0$ in the Boussinesq approximation. In the anelastic case, the initial profile is

$$\Omega(r, \theta, t = 0) = \bar{\rho}(r) \Omega_0 \exp\left(\frac{-(r - r_0)}{\sigma}\right), \quad (25)$$

where σ controls the amplitude of the differential rotation.

For all simulations, we impose stress-free conditions at the inner sphere for the latitudinal and azimuthal components of the velocity field, and impermeability condition for the radial component of the velocity field:

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\phi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U_\theta}{r} \right) = 0 \quad \text{at} \quad r = r_i. \quad (26)$$

At the outer sphere, we impose an impermeability condition on the radial component of velocity field, and no-slip conditions on the latitudinal and azimuthal components of the velocity field:

$$U_r = U_\theta = U_\phi = 0 \quad \text{at} \quad r = r_0, \quad (27)$$

the rotation rate of the outer sphere being thus fixed to Ω_0 . The boundary layers induced by these conditions in the absence of magnetic field were analysed in Gouhier et al. (2021).

Finally, in the Boussinesq approximation the temperature is prescribed at the inner and outer spheres, and the initial temperature field is the purely radial solution of the conduction equation. In the anelastic case, the entropy is also fixed at the boundaries. The initial stably stratified background density and temperature profiles are displayed in Gouhier et al. (2021).

5. Numerical method

The numerical study was carried out using the fully documented, publicly available code MagIC¹ to solve the set of axisymmetric magneto-hydrodynamical equations in a spherical shell under the anelastic approximation (Gastine & Wicht 2012) (Eqs. (3), (4) and (5)), or under the Boussinesq approximation (Wicht 2002) (Eqs. (8), (9) and (10)). The solenoidal condition of Eqs. (2) and (7) is ensured by a poloidal–toroidal decomposition for the mass flux and the magnetic field. Then, the different fields are expanded on the basis of the spherical harmonics for the horizontal direction, and on the set of the Chebyshev polynomials for the radial direction. In particular, the Chebyshev discretisation guarantees a better resolution near the boundaries. The extent of the spherical shell can be reduced to a two-dimensional domain such as $\mathcal{D} = \{r_i = 0.3 \leq r \leq r_0 = 1.0; 0 \leq \theta \leq \pi\}$.

In the viscous regime, most of the simulations were performed with $N_r \times N_\theta = 127 \times 256$, while for the most resolved cases $N_r \times N_\theta = 193 \times 512$. In the Eddington–Sweet regime, a higher resolution was needed and for most of the simulations $N_r \times N_\theta = 193 \times 512$, where N_r could be increased when the boundary layers needed to be carefully resolved.

6. Space of parameters

In this section, we estimate the relevant timescales in stars in order to constrain the regime of parameters of our numerical study.

6.1. The stellar context

The magnetic fields considered in this paper are large-scale fossil fields. They can be remnants of the proto-stellar phase, or the product of a core-dynamo buried in the radiative zone. At large scales, the ohmic diffusion timescale is around one Gyr (Braithwaite & Spruit 2017), that is longer than the MS lifetime of the intermediate mass-stars. Dynamic processes such as the Alfvén waves propagation occur over much shorter timescales, and we will always have

$$\tau_{A_p} \ll \tau_\eta. \quad (28)$$

Typical magnetic Prandtl numbers in stellar plasmas are $\sim 5 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$ (Rüdiger et al. 2016) so that $\tau_\eta \ll \tau_v$. There is an exception though in the core of subgiants where the electrons are

¹ <https://github.com/magic-sph/magic>

partially or fully degenerate. In that case, the Prandtl and magnetic Prandtl numbers increase because the thermal and magnetic diffusivities as well as the kinematic viscosity are dominated by the electron conduction (Garaud et al. 2015). The magnetic Prandtl number then ranges from 0.1 to 10 (Cantiello & Braithwaite 2011; Garaud et al. 2015; Rüdiger et al. 2015) and consequently, $\tau_\eta \leq \tau_\nu$ or $\tau_\nu \leq \tau_\eta$.

In Gouhier et al. (2021), we already found that contracting stars (PMS or subgiant stars) always lie in the regime

$$\tau_c \ll \tau_\nu, \tau_{ED}. \quad (29)$$

In addition, we showed that the Eddington–Sweet regime is relevant for PMS stars and outside the degenerate core of subgiants. We thus have $P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll P_m \ll 1$, or $\tau_{ED} \ll \tau_\eta \ll \tau_\nu$, in these cases. By contrast, the degenerate cores of subgiants experience a viscous regime with higher P_m , such that $1 \sim P_m \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2$, that is $\tau_\nu \sim \tau_\eta \ll \tau_{ED}$.

We can now wonder how the Alfvén time compares to the contraction time in stars. We lack precise information about the magnetic field intensities within stars, but we can get some insight from the spectropolarimetric data of Herbig stars, or from the asteroseismology of red giant stars combined to numerical simulations. On the one hand, high-resolution spectropolarimetric surveys show that a small fraction of HAeBes hosts large-scale dipolar fields stronger than a hundred Gauss (Wade et al. 2005; Alecian et al. 2013). For a typical Herbig star of $3M_\odot$ and $3R_\odot$ hosting a magnetic field of 300 G, the Alfvén poloidal timescale, computed using the mean density of the star, would be of the order of a few tens of years. For these PMS stars, the mass is between $2M_\odot$ and $5M_\odot$ and the Kelvin–Helmholtz timescale τ_{KH} typically ranges from 23 to 1.2 Myr (Maeder 2008). Then, assuming $\tau_c \approx \tau_{KH}$, implies that $\tau_{Ap} \ll \tau_c$.

On the other hand, the recent discovery of depressed dipole oscillation modes in red giants (Mosser et al. 2012) has been assigned to a greenhouse effect resulting from a strong magnetic field ~ 1 MG trapping the gravity waves in the radiative core (Fuller et al. 2015). Although this scenario is controversial (see e.g. Mosser et al. (2017)), the three-dimensional MHD simulations of convective core dynamos of Brun et al. (2005); Augustson et al. (2016) also point towards magnetic field intensities of the order of $10^5 - 10^6$ G. Such intensities again lead to an Alfvén timescale much smaller than the contraction timescale. Even for a 1 G magnetic field in a subgiant such as KIC 5955122, which is a $1.1M_\odot$ star of $2R_\odot$ with a radiative interior extending to $0.74R_*$, we get an Alfvén timescale of $8 \cdot 10^3$ years. According to Deheuvels et al. (2020), the instantaneous contraction time defined as $\Omega_{\text{core}} / (d\Omega_{\text{core}}/dt)$, where Ω_{core} is the mean rotation rate of the core, varies between 100 Myr and 3 Gyr in the subgiant phase. Its average value during this phase is ~ 1 Gyr, thus much higher than the Alfvén timescale corresponding to a 1 G field.

6.2. The numerical study

We intend to perform numerical simulations in the timescale regimes thought to exist in stars. However, the regime $\tau_c \ll \tau_\nu, \tau_{ED}$ is strongly non-linear and too challenging numerically (Gouhier et al. 2021). The ratio $\tau_\nu/\tau_c = Re_c$ will instead vary in the range 0.1 – 5 which will allow us to study the viscous regime in the linear and non-linear regimes, while the Eddington–Sweet regime will be studied in the linear and weakly non-linear regimes as $\tau_{ED}/\tau_c = P_r(N_0/\Omega_0)^2 Re_c$ varies between 10^{-3} and 0.5.

The fact that $\tau_\nu/\tau_c \sim 1$ also constrains the magnetic Prandtl number. Indeed, to avoid a significant dissipation of the initial poloidal field during the simulation, the diffusion time τ_η must exceed the timescale $\tau_c \sim \tau_\nu$ for the establishment of the stationary flow, which implies that P_m has to be larger than one. Such magnetic Prandtl numbers are expected in the degenerate cores of subgiants but are not realistic in the radiative envelope of subgiants or PMS stars. As in Charbonneau & MacGregor (1993), to prevent the diffusion of the poloidal field, an alternative option would have been to fix it. This is however not suited for the present problem where at large-scale, the field topology is modified by the contraction.

Finally, simulations were run for $\tau_\Omega/\tau_c = Re_c E$, $\tau_\Omega/\tau_\nu = E$, and $\tau_\Omega/\tau_{ED} = E/P_r(N_0/\Omega_0)^2$ far from typical stellar values since realistic Ekman numbers are numerically unreachable. However, as shown in Gouhier et al. (2021), the flow dynamics do not critically depend on these ratios and we thus expect the model associated with our numerical simulations to remain valid for stars. Indeed, the first important parameter is $\tau_{ED}/\tau_\nu = P_r(N_0/\Omega_0)^2$ which determines if we are in the Eddington–Sweet or viscous regime. Realistic values can be used for this parameter. Another important ratio is $\tau_\nu/\tau_c = Re_c$ which governs the level of differential rotation. Realistic values for this last parameter are more difficult to reach numerically but we come back on the implications of this discrepancy in Sect. 8.

To conclude, all the simulations performed in the viscous regime fulfil the following conditions:

$$\tau_\Omega \ll \tau_{Ap} \ll \tau_c \leq \tau_\nu \ll \tau_\eta \ll \tau_{ED}, \quad (30)$$

or in terms of dimensionless numbers

$$E \ll \left(\frac{L_u}{P_m}\right)^{-1} \ll Re_c^{-1} \leq 1 \ll P_m \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0}\right)^2. \quad (31)$$

For the Eddington–Sweet regime, we shall have

$$\tau_\Omega \ll \tau_{Ap} \ll \tau_{ED} < \tau_c \ll \tau_\nu \ll \tau_\eta, \quad (32)$$

or equivalently

$$E \ll \left(\frac{L_u}{P_m}\right)^{-1} \ll P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0}\right)^2 < Re_c^{-1} \ll 1 \ll P_m. \quad (33)$$

7. Numerical results

We are mostly interested in the steady state differential rotation produced by the contracting flow in the stably stratified magnetised layer. We shall investigate separately the viscous regime $\sqrt{E} \ll 1 \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2$ and the Eddington–Sweet regime $\sqrt{E} \ll P_r(N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$. For the initial magnetic field we consider either a dipole or a quadrupole, and we include, or not, the effect of the density stratification. For each configurations we vary the Lundquist and the contraction Reynolds numbers to study the effect of the amplitudes of the initial poloidal field and of the contraction. To help understand physically our numerical results we also performed simulations where the contraction term is artificially removed from the induction equation, thus preventing the advection of the magnetic field by the contraction velocity field. All the relevant simulations and their associated parameters are listed in Table 1.

7.1. Unsteady evolution

Before we focus on the steady states, we start with a brief description of the unsteady phase. Figure 2 illustrates for a particular run, the typical evolution of the toroidal field B_{ϕ_c} (middle panel) and of the normalised differential rotation $\delta\Omega_c = (\Omega_c - \Omega_0)/\Omega_0$ (right panel) at some fixed locations in the domain (black points in the left panel). The run corresponds to a dipolar field in a viscous regime without advection of the field lines (run D5 in Table 1). We observe that as soon as the contraction produces a differential rotation, the initially zero toroidal field linearly grows by the Ω -effect. After $\sim 1\tau_{A_p}$, it saturates because the amplification of the toroidal field produces a Lorentz force that back-reacts on the differential rotation, thus counteracting further Ω -effect. This leads to the propagation of Alfvén waves along the poloidal field lines, illustrated by the oscillations of the control points in Fig. 2. As these waves oscillate independently from each other, they quickly get out of phase. This builds gradients of the toroidal magnetic field and of the differential rotation on sufficiently small scales so that they can be efficiently dissipated by the diffusion processes: this is the so-called phase mixing mechanism (see Heyvaerts & Priest (1983) or Cally (1991)). In the absence of a process forcing the differential rotation, this would lead to a uniformly rotating steady state.

7.2. Steady state in the viscous regime with a dipolar field

In this section we investigate, in the viscous regime and for an initial dipolar field, the steady states obtained after the Alfvén waves have dissipated and the contraction has imposed some level of differential rotation. These states are actually quasi-steady because the initial poloidal field continues to slowly decrease through magnetic diffusion. Three parameters are fixed $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, and $P_m = 10^2$, while the contraction Reynolds number Re_c varies between 10^{-1} to 5, and the Lundquist number between 10^3 and $5 \cdot 10^4$ (see details in Table 1). The anelastic simulations were performed with a density contrast $\rho_i/\rho_0 = 20.85$.

Representative results are displayed in Fig. 3, for a case without advection of the field lines at $Re_c = 1$ and $L_u = 5 \cdot 10^4$ (first two panels, run D5 of Table 1), and for a case with advection at $Re_c = 1$ and $L_u = 10^4$ (last two panels, run D13 of Table 1). From this figure we clearly distinguish two magnetically decoupled regions with different levels of differential rotation. In the first region, the poloidal field lines are connected to the outer sphere and the flow is in quasi-solid rotation. In the second region, either the poloidal field lines loop-back on themselves inside the spherical shell (case without advection of the field lines) or they loop-back on the inner sphere (case with advection of the field lines). As in Charbonneau & MacGregor (1993), we shall refer to these particular regions as the 'dead zone' (DZ). The level of differential rotation is always significant in the DZs. With contraction of the field lines, the maximum differential rotation $\max(\delta\Omega(r, \theta)/\Omega_0) = \max((\Omega(r, \theta) - \Omega_0)/\Omega_0)$ is 30%, while it is reduced to $\sim 1\%$ in the other case. The snapshots of the toroidal magnetic field (second and fourth panels in Fig. 3), show the presence of two anti-symmetric lobes of toroidal field in both hemispheres due to the Ω -effect acting on the dipolar poloidal field. Interestingly, the DZs are surrounded by a region of strong toroidal field. This corresponds to a Shercliff boundary layer (Shercliff 1956) that develops between two magnetic regions that are forced to rotate at different rates. Indeed, in our simulations the first poloidal line delimiting the DZ and the neighbouring lines connected to the outer sphere are forced to rotate differen-

tially and a layer involving strong toroidal fields accommodates this jump in rotation rate. We verified that, as expected (Roberts 1967), the thickness of this Shercliff boundary layer scales with the inverse of the square root of the Hartmann number defined by $H_a = L_u/\sqrt{P_m}$. When we prevent the advection of the field lines (first panel in Fig. 3), a second Shercliff layer is visible at the separation between the region where the field lines are connected to both the outer and inner spheres, and the region where they are connected to the outer sphere only.

To give a more detailed description of the dynamics outside and inside the DZ, we compare in Fig. 4 the relative amplitudes of the different terms of the AM balance Eq. (11). From the first two panels of this figure, we see that outside the DZ, the quasi-steady configuration is characterised by a balance between the contraction term and the Lorentz force, that is:

$$-2 \sin \theta \Omega_0 \frac{V_0 r_0^2}{r^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left[\frac{B_\theta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) + \frac{B_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right]. \quad (34)$$

On the contrary, the last two panels of Fig. 4 show that inside the DZ the viscous term balances the contraction term, thus leading to

$$\nu \left[r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + 4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) + \frac{3 \cot \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right] = \frac{-2V_0 r_0^2}{r^2}, \quad (35)$$

where only the linear part of the contraction term has been retained, an approximation only valid if $\delta\Omega/\Omega_0 \ll 1$. In the following two sub-sections, the differential rotation resulting from these two different balances is analysed.

7.2.1. Region outside the dead zone

Although at first glance the flow seems to be in solid rotation outside the DZ, there is a rotation rate jump across a boundary layer at the outer sphere as well as a residual differential rotation along the poloidal field lines.

By rescaling the colour range of Fig. 3, the top panel of Fig. 5 indeed shows that outside the DZ, the differential rotation between the interior flow and the outer sphere $(\Omega(r, \theta) - \Omega_0)/\Omega_0$ is $\sim 6 \cdot 10^{-4}$. In order to understand that value, we first estimate the toroidal field amplitude outside the DZ using Eq. (34). Assuming $B_r \sim B_\theta \sim B_0$ and $r \sim r_0$, we get

$$\frac{B_\phi}{B_0} \approx \frac{r_0 \mu_0 \rho_0 V_0 \Omega_0}{B_0^2} = \left(\frac{P_m}{L_u} \right)^2 \frac{Re_c}{E}. \quad (36)$$

This estimate is confirmed in Fig. 6 where B_ϕ/B_0 determined at a particular location, $\theta = \pi/6$, $r = 0.65 r_0$, is compared with the right-hand side of Eq. (36) for the runs D1 to D7.

This toroidal field is however unable to naturally match the vacuum condition imposed at the outer sphere ($B_\phi = 0$ at $r = r_0$). This is done across a H_a^{-1} thickness magnetic boundary layer known as an Hartmann boundary layer. This layer is analysed in Appendix B and the conclusion is that the $O(P_m^2 Re_c / EL_u^2)$ jump

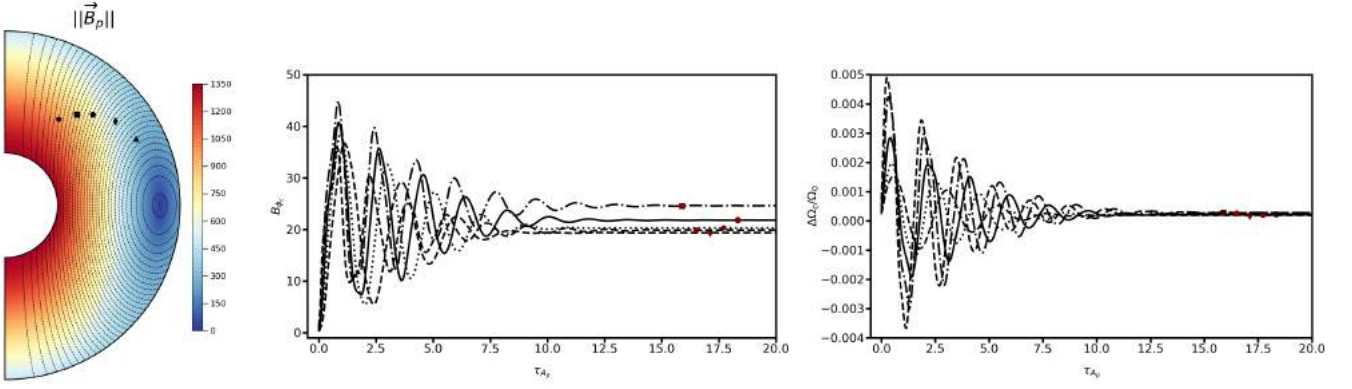


Fig. 2: Illustration of the unsteady phase. Left panel: meridional cut of the norm of the poloidal magnetic field. The black dots show the position of 5 control points located on different field lines. In the other two panels, the temporal evolution of these points is followed during $20 \tau_{Ap}$, both for the toroidal field B_ϕ (middle panel) and the normalised differential rotation $\Delta\Omega_c/\Omega_0$ (right panel). The parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^4$, and $P_m = 10^2$ (run D5 of Table 1).

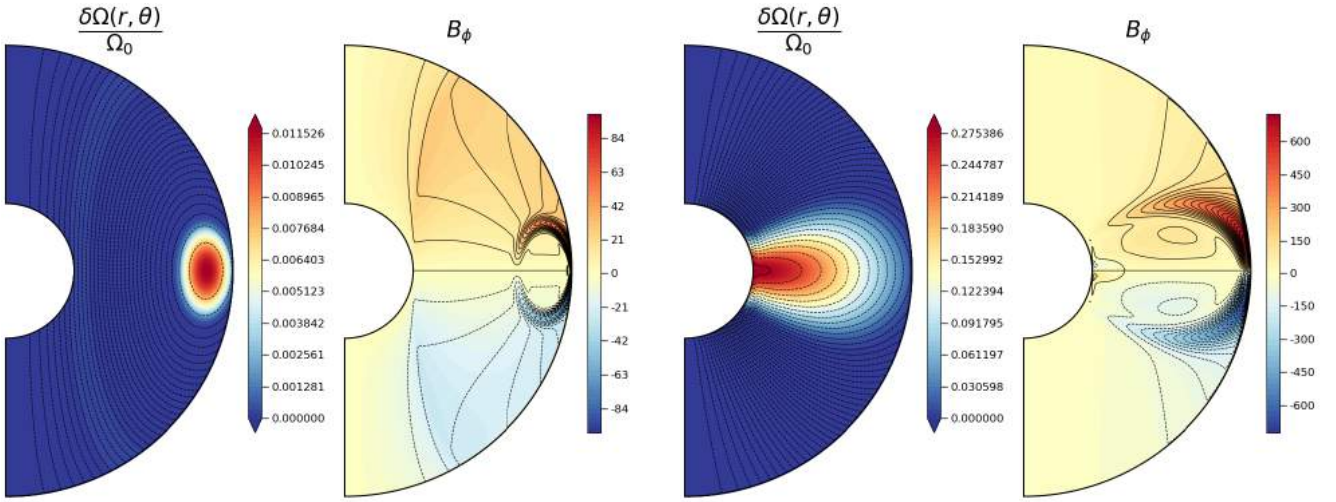


Fig. 3: Meridional cuts of the rotation rate normalised to the value at the outer sphere (first and third panels) and toroidal field (second and fourth panels), in the quasi-steady state. In black lines are also represented the poloidal field lines (first and third panels) and the streamlines associated with the electrical-current function defined in Appendix A (second and fourth panels). The dotted (solid) lines then correspond to an anticlockwise (clockwise) current circulation. In the first two panels, the contraction does not advect the poloidal field lines and the quasi-steady state is achieved after $\sim 0.04 \tau_c$ (i.e. $\sim 20 \tau_{Ap}$, see Fig. 2). In the last two panels such an advection is allowed and the quasi-steady configuration is reached after $\sim 1 \tau_c$ (i.e. after $\sim 100 \tau_{Ap}$ for this simulation). For these two cases, the Lundquist numbers are respectively $L_u = 5 \cdot 10^4$ and $L_u = 10^4$ (runs D5 and D13). The other parameters are identical, namely $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $Re_c = 1$, and $P_m = 10^2$.

on B_ϕ/B_0 , induces a $O(\sqrt{P_m Re_c/L_u})$ jump on the differential rotation $\Delta\Omega/\Omega_0$ across the layer. This last scaling is confirmed in Fig. 7 by computing $\Delta\Omega/\Omega_0$ at a particular location for the runs D1 to D7.

Figure 5b shows a zoom on the zone delimited in black lines in Fig. 5a. It illustrates the residual differential rotation that exists along each poloidal field lines. We note it as $\Delta\Omega_{pol}/\Omega_0$. Such a contrast of differential rotation is at odds with Ferraro's law of isorotation (Ferraro 1937) requiring a constant angular velocity along each poloidal field line. Ferraro's isorotation state is indeed found in our cases with no contraction in the induction equation. However, taking field advection into account, the Ω -

effect term can be balanced by the radial advection term in the induction equation, that is:

$$V_f(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) = \sin \theta (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \delta\Omega. \quad (37)$$

Using the order of magnitude of the toroidal field derived in Eq. (36) together with Eq. (37), we end up with an estimate of this differential rotation

$$\frac{\Delta\Omega_{pol}}{\Omega_0} \approx \left(\frac{Re_c P_m}{L_u} \right)^2 = \left(\frac{\tau_{Ap}}{\tau_c} \right)^2. \quad (38)$$

Figure 8 shows the differential rotation taken between two ends of a poloidal field line as a function of the right-hand side of Eq.

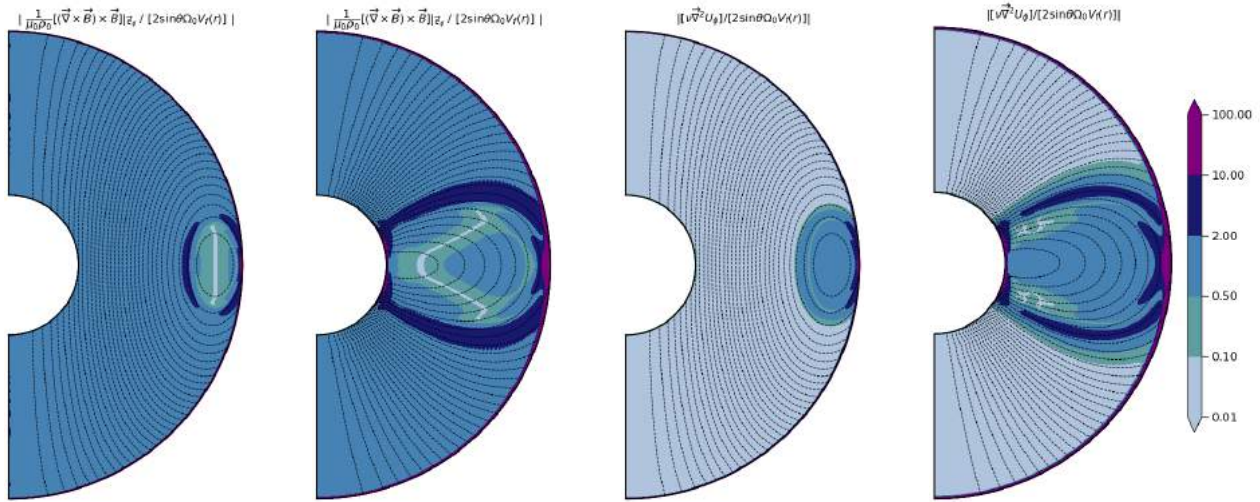


Fig. 4: 2D maps comparing the relative importance of different azimuthally projected quantities: the Lorentz force with the contraction (first two panels) and the viscous term with the contraction (last two panels). The runs where the contraction term has been removed from the induction equation are presented in the first and third panels. In the other two, the effect of the contraction on the magnetic field is taken into account. The parameters are the same to those of Fig. 3.

(38), for various Re_c and L_u respectively ranging from 10^{-1} to 2 and from $5 \cdot 10^3$ to 10^4 . We can see that the level of differential rotation along a field line is indeed consistent with our estimate.

Another consequence of the force balance Eq. (34) is that the toroidal field amplitude slowly increases over time. Figure 9 illustrates this by showing that in order to counteract the magnetic diffusion of the poloidal field (blue curve) and maintain this balance (black curve), the toroidal field amplitude is forced to increase (green curve). A similar situation was reported by Charbonneau & MacGregor (1993) where the magnetic stresses were in their case balanced by a wind torque.

7.2.2. Dead zone

We now turn to investigate the dynamics of the DZ. We already found that in this region, the dominant balance is between the contraction and the viscous effects, and is given by Eq. (35) in the linear regime $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$. This implies that the order of magnitude of the differential rotation in the DZ, denoted $\Delta\Omega_{\text{DZ}}/\Omega_0$, is $\sim L_{\text{DZ}}V_f(r)/\nu$, where L_{DZ} is a typical lengthscale of the DZ. While the magnetic field does not explicitly enter in this expression, it is of prime importance because its interaction with the contraction determines the shape and the location of the DZ.

The differences observed in Fig. 3 concerning the level of differential rotation between the simulations with and without contraction of the field lines can thus be explained by the location and size of the DZ. Indeed, in the case without field line contraction, the DZ is smaller and located closer to the outer sphere, that is in a area where the contraction velocity is weaker, which leads to a smaller level of differential rotation. Another difference between these two cases is the time taken to reach the stationary solution. As this time is the viscous time based on the size of the DZ, it is not surprising that the stationary state is reached much more rapidly when the DZ occupies a small fraction of the spherical shell. We note that in the case with contraction of the field lines, the viscous time is of the same order as the contraction time τ_c because we are in the regime $\Delta\Omega/\Omega \sim 1$.

It is also possible to obtain a more precise determination of the DZ differential rotation, by deriving an approximate analytical solution of Eq. (35). To this end, the DZ is first assimilated to a conical domain, $r \in [r_{\text{iDZ}}, r_0]$, $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$, outside of which the flow is in solid rotation. In the case where the domain connects to the inner sphere, we adopt a stress-free condition on the azimuthal component of the velocity field at $r = r_i$. We then neglect the last term of the left-hand side in Eq. (35) as we found in our simulations that its contribution is small, particularly at low latitude. The homogeneous problem, which is separable in two radial and latitudinal eigenvalue sub-problems, allows us to construct a basis of orthogonal eigenfunctions that satisfy the boundary conditions on the conical domain. The details of the method are provided in Appendices C.1 and C.2.

In the case where the contraction does not advect the field lines, the approximate analytical solution takes the following form

$$\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} = Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right), \quad (39)$$

wherein the expression of the coefficient A_{nk} can be found in Appendix C.1. This solution, computed for a chosen conical domain, is compared in Fig. 10 with the results of the numerical simulations performed at various Re_c and L_u respectively ranging from 10^{-1} to 5 and from $5 \cdot 10^3$ to $5 \cdot 10^4$. A good agreement is found between the numerical and analytical solutions. The differential rotation scales as Re_c and this was expected because the condition $\delta\Omega/\Omega \ll 1$ for the linear approximation of the contraction term is fulfilled in the simulations. We also find that the differential rotation is almost independent of the initial

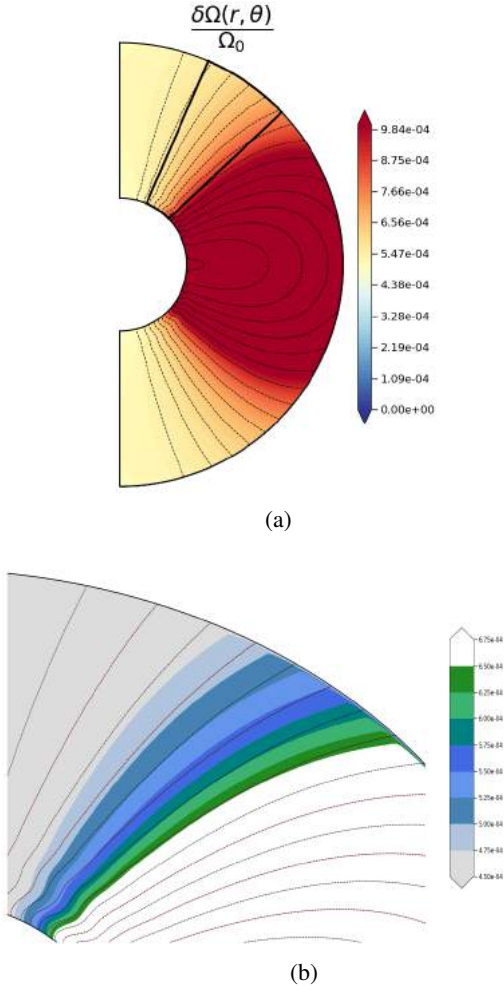


Fig. 5: Normalised rotation rate in the quasi-steady state. Top panel (5a): this is the third panel of Fig. 3 presented on a smaller rotation rate scale. As a result, the DZ is saturated in colour. Bottom panel (5b): enlargement of the black-delimited zone displayed in the top panel. In each panels, the poloidal field lines are also represented (black lines). For the sake of clarity, every other field line is plotted in red in the bottom panel. The parameters are the same as in Figs. 3 and 4.

amplitude of the magnetic field: an increase of L_u of one order of magnitude causes only a small change on $\Delta\Omega_{\text{DZ}}/\Omega_0$. This is consistent with the fact that, in the regime considered here, the shape and location of the DZ do not depend on the magnetic field. We rather observe that a higher magnetic field affects the rotation rate outside the DZ, or equivalently the differential rotation outside the DZ. Again this is expected as the jump in rotation rate across the outer sphere Hartmann layer decreases with the field amplitude.

When the contraction term is introduced in the induction equation, the solution of Eq. (35) becomes

$$\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} = Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right),$$

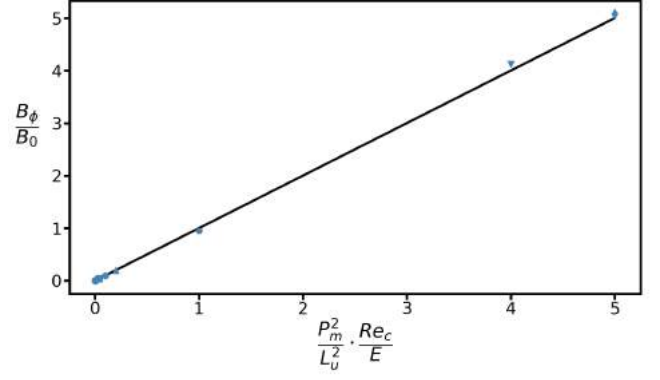


Fig. 6: Toroidal field B_ϕ normalised to the initial amplitude of the poloidal field B_0 , as a function of $(P_m/L_u)^2 Re_c/E$ and at the particular location $\theta = \pi/6$ and $r = 0.65 r_0$. The different symbols correspond to the different runs D1 to D7 of Table 1 (no contraction term in induction equation) namely, $Re_c = 10^{-1}$, $L_u = 10^4$ (circle); $Re_c = 10^{-1}$, $L_u = 5 \cdot 10^4$ (square); $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^3$ (hexagon); $Re_c = 1$, $L_u = 10^4$ (up triangle); $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^4$ (pentagon); $Re_c = 5$, $L_u = 10^4$ (down triangle) and $Re_c = 5$, $L_u = 5 \cdot 10^4$ (diamond). The other parameters are fixed to $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$.

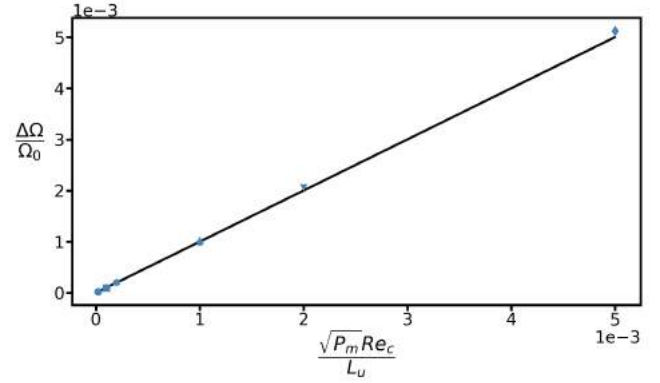


Fig. 7: Normalised differential rotation between a point outside the DZ and the outer sphere, $\Delta\Omega/\Omega_0 = (\Omega(r = 0.65 r_0, \theta = \pi/12) - \Omega_0)/\Omega_0$, plotted as a function of $\sqrt{P_m} Re_c/L_u$ for the runs D1 to D7. The symbols are the same as in Fig. 6.

(40)

where the expressions of the coefficients A_{nk} and μ_n are given in Appendix C.2. This solution, computed for a chosen conical domain, is compared in Fig. 11 with the numerical results obtained at various Re_c and L_u . As previously, the initial amplitude of the magnetic field causes only small changes on the level of differential rotation. However, some discrepancies are visible. First of all, the numerical curves obtained at different Re_c do not overlap, which indicates that for these higher levels of differential rotation ($\delta\Omega/\Omega_0 \sim 30\%$) the contraction term can no longer be linearised, a necessary condition to derive the analytical solution. A second limitation is the assumed conical shape of the DZ. This shape is indeed more representative of the actual DZ for run D14 performed at $Re_c = 2$, where we can observe that the analyti-

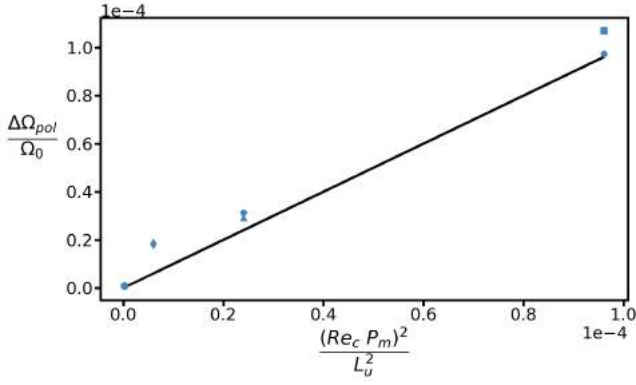


Fig. 8: Normalised differential rotation along a poloidal field line $\Delta\Omega_{\text{pol}}/\Omega_0$ as a function of $(Re_c P_m / L_u)^2$. This quantity is estimated between two sufficiently separated points along a field line for the runs D8 and, D10 to D14 of Table 1. The correspondences between parameters and symbols are as follows: Circle: $Re_c = 10^{-1}$, $L_u = 10^4$; Triangle: $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$, $L_u = 5 \cdot 10^3$; Diamond: $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$, $L_u = 10^4$; Square: $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^3$; Pentagon: $Re_c = 1$, $L_u = 10^4$; Hexagon: $Re_c = 2$, $L_u = 10^4$. The other parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$.

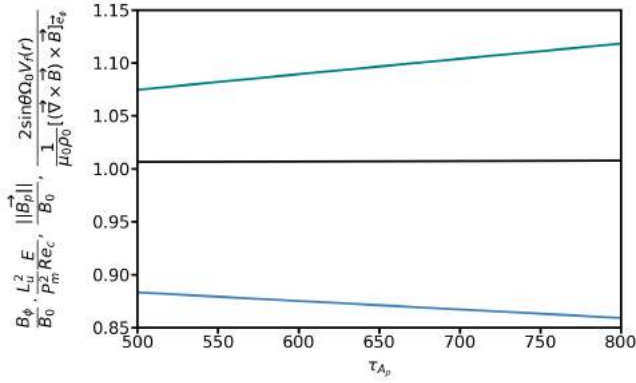


Fig. 9: Temporal evolution of different quantities followed over a period of $300 \tau_{A_p}$: the toroidal field normalised to the initial amplitude of the poloidal field and rescaled by $L_u^2 E / P_m^2 Re_c$ (green), the norm of the poloidal field normalised to the initial amplitude of the poloidal field (blue), and the ratio between the linear contraction term $(2 \sin \theta \Omega_0 V_f(r))$ and the Lorentz force projected into the azimuthal direction (black). These quantities are evaluated at a particular location ($\theta = \pi/6$ and $r = 0.65 r_0$). For this simulation the contraction term has been removed from the induction equation but the results are exactly the same when it is included. The parameters are $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^4$, $P_m = 10^2$, $E = 10^{-4}$, and $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$ (run D5 of Table 1).

cal solution tends to reproduce the expected differential rotation, than for simulations D10 to D13 obtained at $Re_c = 0.5$ and 1.

7.2.3. Effect of the density stratification

We have performed simulations in the anelastic approximation for a fixed density contrast $\rho_i/\rho_0 = 20.85$. Two typical results are presented in Fig. 12 at $Re_c = 1$, $L_u = 10^5$ and $Re_c = 5$,

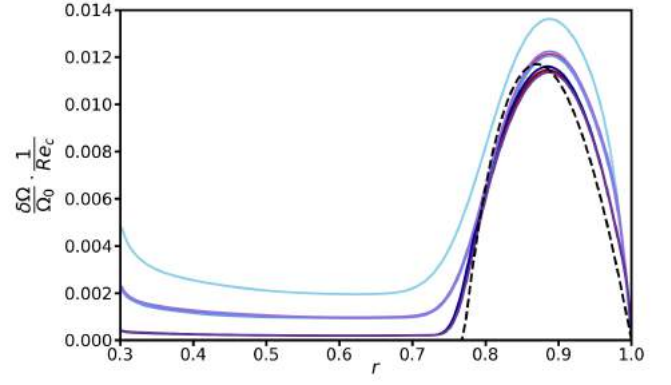


Fig. 10: Equatorial differential rotation as a function of radius when the contraction term is removed from the induction equation. Numerical solutions (runs D1 to D7) are plotted in colour at $Re_c = 10^{-1}$ (red), $Re_c = 1$ (blue), and $Re_c = 5$ (purple), for various Lundquist numbers ranging from 10^4 to $5 \cdot 10^4$ (from the lightest to the darkest). For $Re_c = 1$, an additional simulation is presented at $L_u = 5 \cdot 10^3$. The curves are rescaled by Re_c then compared to the analytical solution Eq. (39) displayed in black dashed lines. The other parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$.

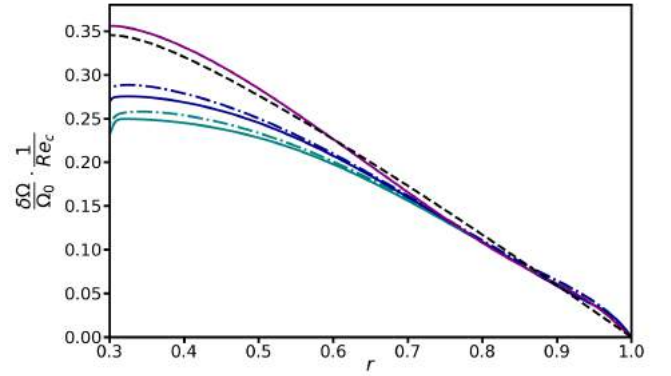


Fig. 11: Same as Fig. 10 but for cases where contraction acts on the field lines. The simulations presented here are the runs D10 to D14 of Table 1 performed at $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$ (green), $Re_c = 1$ (blue), and $Re_c = 2$ (purple). For all these cases $L_u = 10^4$, but for $Re_c = 5 \cdot 10^{-1}$ and 1, additional simulations are shown at $L_u = 5 \cdot 10^3$ in dash-dot lines. The analytical solution Eq. (40) is displayed in black dashed lines.

$L_u = 5 \cdot 10^4$ (left and right panels respectively). For these runs where the contraction advects the field lines, we find again two separate regions, with a differential rotation still mostly located in the DZ. This zone is now more extended in latitude compared to the Boussinesq case and the main difference between the calculations at two different Re_c lies in the level of differential rotation in the DZ. Indeed, when this level in the left panel is compared to its Boussinesq counterpart in the third panel of Fig. 3, we notice that it has been divided by a factor ~ 3 . This is explained by the density stratification effect on the contraction velocity field. Indeed, as we already found in (Gouhier et al. 2021), the normalised differential rotation $\Delta\Omega_{\text{DZ}}/\Omega_0$ resulting from the

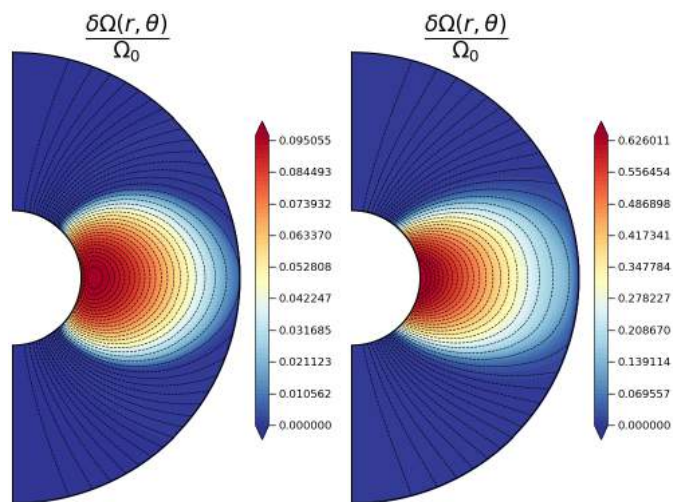


Fig. 12: Meridional cuts of the normalised rotation rate in two anelastic cases with $\rho_i/\rho_0 = 20.85$. The poloidal field lines are represented in black lines. For these simulations the contraction term is included in the induction equation. In the first panel, $Re_c = 1$ and $L_u = 10^5$ (run D18 of Table 1). In the second one, $Re_c = 5$ and $L_u = 5 \cdot 10^4$ (run D20 of Table 1). The other parameters are $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $E = 10^{-4}$, and $P_m = 10^2$.

balance between the viscous and contraction effects is weighted by the inverse of the background density profile:

$$\frac{\Delta\Omega_{DZ}^A}{\Omega_0} \approx \left(\int_1^{r_i/r_0} \frac{\rho_0}{\rho} d(r/r_0) \right) \frac{\Delta\Omega_{DZ}^B}{\Omega_0}, \quad (41)$$

where the index A stands for 'anelastic' and B for 'Boussinesq'. For $\rho_i/\rho_0 = 20.85$ and $r \in [r_i = 0.3; r_0 = 1]$, using the characteristic amplitude of the differential rotation given in the third panel of Fig. 3, we obtain $\Delta\Omega_{DZ}^A/\Omega_0 = 0.095$, in agreement with the rotation rate shown in the left panel of Fig. 12. A good estimate of the rotation rate displayed in the right panel is then readily obtained by multiplying this result by Re_c .

7.3. Quadrupolar field in the viscous regime

We now consider an initial quadrupolar magnetic field as given by Eq. (23) and displayed in the right panel of Fig. 1. The outcome will be completely different as the differential rotation resulting from the contraction is subject to an instability that will be discussed in detail below.

Figure 13 displays typical states obtained after a contraction timescale. The two left panels show a case without contraction of the field lines while the two right panels correspond to simulations where contraction is included in the induction equation. At this stage, the similarities with the dipolar case are striking. First, we observe the quasi-solid rotation region outside the DZs. When the advection of the field lines is prevented, these DZs are located near the outer sphere while they connect to the inner sphere when contraction is present. In addition, for a given set of parameters, when the dipolar and quadrupolar cases are compared with each other, the same levels of differential rotation are found. For the runs presented here, the maximum amplitude of the normalised differential rotation inside the DZs is again $\sim 30\%$ when the contraction acts on the field lines, and falls to

$\sim 1\%$ otherwise, similar to the cases presented in Fig. 3. By observing the second and fourth panels of Fig. 13, we note, again, the presence of magnetic boundary layers namely, the Shercliff layers separating the poloidal field lines constrained to rotate at different rates, and the Hartmann layer at the outer sphere. However, compared to the dipolar case, after $\sim 1\tau_c$ the quadrupolar configuration is the seat of an axisymmetric instability.

The evolution of the maximum differential rotation is shown in Fig. 14 where the different steps that will be described thereafter are highlighted. In particular, the differential rotation first builds up before an instability starts to kick in at $t \sim 1\tau_c$ (red dashed lines). Between $\sim 1\tau_c$ and $\sim 3.5\tau_c$ (blue dashed lines), the instability grows, saturates and strongly modifies the flow and field as we shall see later. Finally, after $3.5\tau_c$, the configuration evolves more smoothly until a final steady state is reached at $\sim 4.7\tau_c$ (purple dashed lines).

7.3.1. Description of the instability

Figure 15 shows, in colour, the structure of the unstable modes when the contraction does not act on the field lines (first panel) and when it acts on them (second panel). In these meridional cuts are also represented, in black, the contours of the latitudinal shear $\partial \ln \Omega / \partial \theta$. Dashed (solid) lines represent negative (positive) values of this gradient. Contrary to the dipolar case, we now have a region of negative shear in the northern hemisphere and positive shear in the south. As can be observed, this is precisely at these locations that the perturbations grow. We already note that this instability is not of the centrifugal type because the shear in these regions is not strong enough, that is $|\partial \ln \Omega / \partial \ln s| < 2$. Figure 15 also shows that the unstable modes are characterised by small radial length scales and large horizontal length scales, which implies that the meridional motions are predominantly horizontal. The last panel of Fig. 15 displays the local evolution of the square of the latitudinal component of the velocity field at the fixed points marked on the second panel (in light blue, blue and black). We can see that the kinetic energy of the perturbations grows exponentially for about $\sim 20\tau_{Ap}$ before saturation occurs. This time interval corresponds to the linear phase of the instability. The oscillating behaviour that adds to the exponential growth is due to the fact that the perturbations propagate.

Growth rates have been determined from these plots. Their values, normalised by the product of the surface-averaged shear parameter $\langle q \rangle = 1/S \iint (\partial \ln \Omega / \partial \theta) dS$ to the mean local rotation rate, are listed in Table 2. We observe that when the contraction Reynolds number is multiplied by two, the shear rate and the growth rate are both doubled. This shows that the growth rate of the instability seems to be proportional to the shear rate. Moreover, for the simulation Q5 performed at higher $L_u = 5 \cdot 10^4$, the instability is not triggered, clearly indicating that a strong enough poloidal field has a stabilising effect. Finally, while runs Q4, Q10 and Q11 carried out for $L_u = 10^4$ are unstable, runs Q1 and Q8 performed for the same L_u , but at lower Re_c , are stable. This shows that, at a lower shear rate, a lower poloidal field is required to stabilise the flow. These findings, namely the requirement that the rotation decreases away from the rotation axis, and the facts that the growth rates are proportional to the shear and that stabilisation occurs above a certain magnetic tension, are all in agreement with an MRI-type instability (Balbus & Hawley 1991).

Our numerical results also exhibit more subtle effects that are not accounted for in the local WKB approach of the stan-

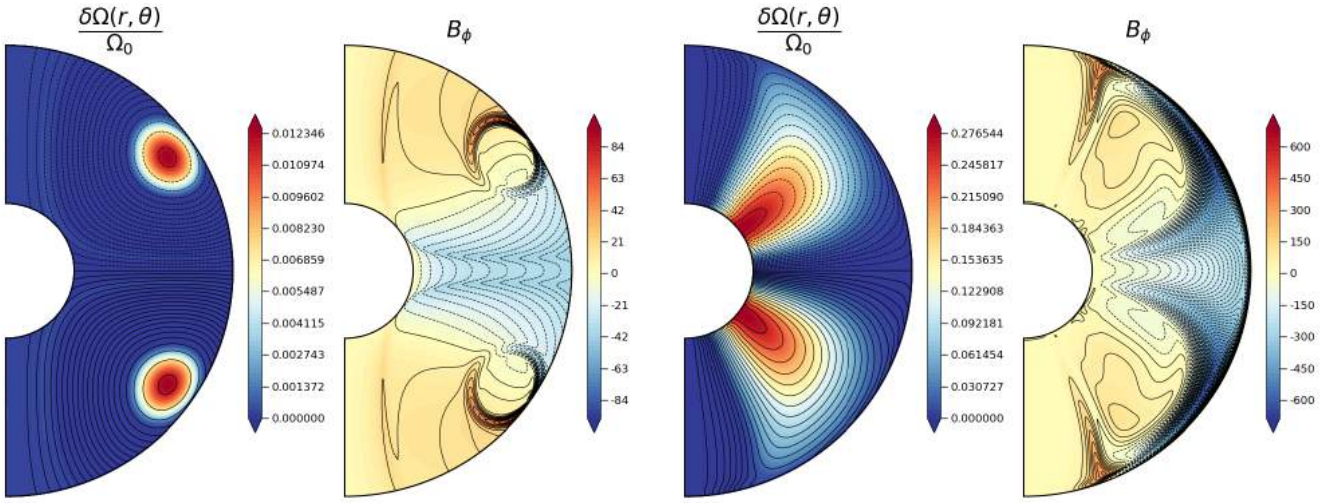


Fig. 13: Same as Fig. 3, but for the initially quadrupolar magnetic field. In the first two panels $L_u = 5 \cdot 10^4$, while $L_u = 10^4$ in the last two. The other parameters are $Re_c = 1$, $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$ (runs Q2 and Q10 of Table 1).

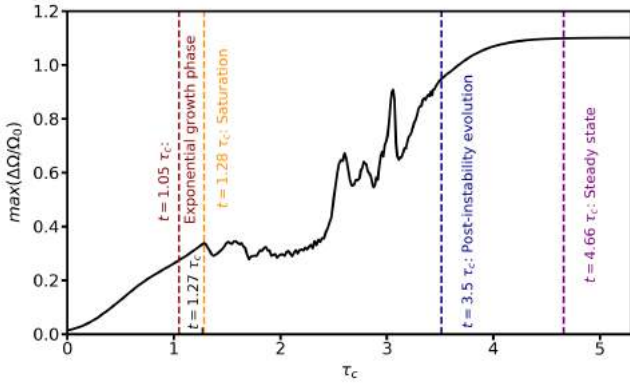


Fig. 14: Maximum value of the normalised differential rotation $\max(\Delta\Omega/\Omega_0)$ as a function of the contraction timescale as defined in Eq. (12). The main evolution steps are highlighted by coloured dashed lines: the red dashed lines corresponds to the start of the exponential growth phase and orange, to the time at which the instability saturates, thus marking the beginning of the non-linear evolution. Then, blue marks the start of the post-instability evolution and finally, purple denotes the time at which the hydrodynamic steady state is reached. The parameters are $Re_c = 1$, $L_u = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$ (run Q10 of Table 1, contraction term in induction equation).

standard MRI (SMRI) (Balbus & Hawley 1991, 1994; Menou et al. 2004). First, the growth rates determined in Table 2 are significantly lower than the maximum growth rate $\sigma_{\max} = |q|\Omega/2$, where $q = d \ln \Omega / d \ln s$, predicted by these studies (e.g. Balbus & Hawley (1994)). Second, a comparison between runs Q9 and Q10 shows that the growth rate increases with L_u whereas the predicted σ_{\max} does not depend on the poloidal field. Finally, as noted earlier, the perturbations propagate in the domain while the phase velocity of the modes is zero in the SMRI.

We now argue that these differences are due to the effect of the stable stratification and to the presence of a toroidal field. In Balbus & Hawley (1994), the maximum growth rate is determined by assuming a zero latitudinal wavenumber. This avoids

any stabilising effect of the stratification because the buoyancy force has no effect on purely horizontal motions. It follows that the most unstable radial scale is inversely proportional to the poloidal field amplitude and does not depend on the stable stratification. Even if the unstable motions found in our simulations are predominantly horizontal, assuming a zero latitudinal wavenumber is too extreme because our background flow is not uniform in latitude, so that the perturbation must have, and indeed, has a finite wavelength in this direction. As a consequence, the stable stratification is expected to play a role in determining the most unstable radial lengthscale and the associated maximum growth rate. We indeed found that the radial wavenumbers of the unstable modes are always larger the theoretical value from Balbus & Hawley (1994) and that it is very little dependent on the amplitude of the poloidal field. The effect of the stable stratification may thus potentially explain why the growth rates found in our simulations are significantly smaller than σ_{\max} . We note that the thermal diffusion must be taken into account to consider the effect of the stable stratification. Indeed, we estimated that the thermal diffusion time scale $\tau_k^* = \kappa^{-1} / (k_r^2 + k_\theta^2)$ associated with the observed unstable modes is about one order of magnitude smaller than the buoyancy time scale $\tau_B^* = \left(\sqrt{k_r^2 + k_\theta^2} / k_\theta \right) N^{-1}$, which implies that thermal diffusion will play an important role in determining the amplitude of the buoyancy force (e.g. Lignières et al. (1999)).

To interpret the increase of the growth rate with L_u (runs Q9 and Q10), we first recall that in the context of the SMRI the toroidal field is assumed to be zero. This is not the case in our simulations where, according to Eq. (34), the amplitude of the stationary toroidal field decreases when the initial poloidal field (and thus L_u) increases. As reviewed in Rüdiger et al. (2018), introducing a toroidal field leads to the so-called helical MRI (HMRI) (Hollerbach & Rüdiger 2005). Following the dispersion relation derived by Kirillov et al. (2014), the toroidal field can be either stabilising or destabilising depending on the sign of $V_{A_\phi}/s = B_\phi / (r \sin \theta \sqrt{\mu_0 \rho_0})$. Moreover, the HMRI differs from the SMRI through the non-vanishing phase velocity of the unstable modes and a different phase shift between the perturbed fields. This phenomenon has been mentioned for the first time by Knobloch (1992), then found experimentally by Stefani

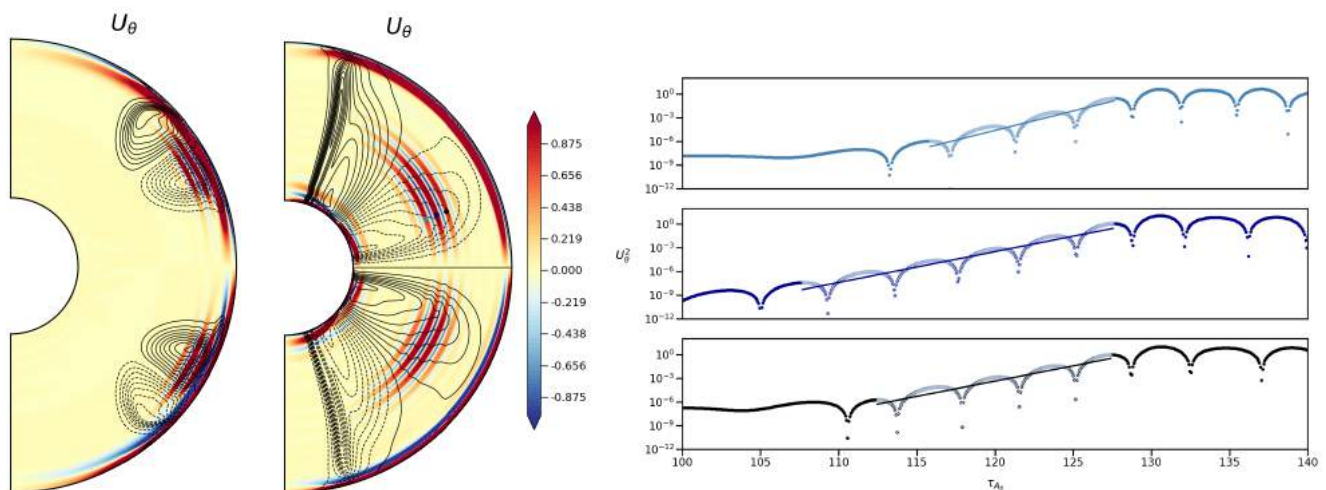


Fig. 15: Axisymmetric instability in the viscous regime when the quadrupolar field given by Eq. (23) and illustrated in Fig. 1, is initially imposed. First two panels: snapshots of the latitudinal component of the velocity field U_θ taken during the developing of the instability, at $t = 14.1 \tau_{A_p}$ when the contraction does not act on the field lines (first panel) and at $t = 127.4 \tau_{A_p}$ when it does (second panel). In these cuts are also represented the contours of the latitudinal shear $\partial \ln \Omega / \partial \theta$ in black, with dashed lines corresponding to a negative shear and full lines to a positive one. In the second panel, three control points (in light blue, blue and black) are chosen at the location where the instability grows. Third panel: temporal evolution of the square of the latitudinal component of the velocity field at these selected points (with the same colour code), as a function of the Alfvén poloidal time. In each subplot, a coloured straight line is also presented as the result of a linear regression used to deduce a growth rate associated with the instability. The parameters are those of the runs Q4 and Q10 of Table 1 namely, $Re_c = 5$ (first panel) and $Re_c = 1$ (two last panels), with $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $P_m = 10^2$, and $L_u = 10^4$.

et al. (2006) and in numerical simulations by Pettidemange et al. (2013).

In our simulations, the quantity V_{A_θ}/s changes sign in the region where the instability is triggered so that the WKB-type analysis of Kirillov et al. (2014) is not directly conclusive. Our results nevertheless would imply that the toroidal field has a stabilising effect since the growth rate increases when the intensity of B_ϕ decreases. As noted earlier, we did observe that the perturbations propagate in our simulations. Their phase velocity V_{phase} , normalised by the contraction velocity field, are listed in Table 3. As expected, comparing the runs Q9 and Q10, we observe that the phase velocity is higher when the toroidal field is higher.

Moreover, contrary to a SMRI, we observe neither exact phase quadrature between the latitudinal velocity perturbation and the latitudinal and azimuthal magnetic perturbations, nor exact opposition phase between the perturbed latitudinal and toroidal magnetic fields (Pettidemange et al. 2013). This is visible in Fig. 16 where the different perturbed quantities, the latitudinal velocity (purple) as well as the latitudinal (green) and azimuthal (blue) magnetic fields, are plotted as a function of the radius.

We conclude that the instability triggered in the DZ of the quadrupole is of the MRI-type and that its full description would require a detailed modelling of the effects of the stable stratification and of the toroidal field.

7.3.2. Non-linear evolution

After the exponential growth phase, the evolution becomes non-linear and the instability saturates. Figure 17 displays the flow structure obtain at $\sim 3 \tau_c$ for the run Q10 ($Re_c = 1$, $L_u = 10^4$), through the rotation rate (colour) and the meridional circulation (black) in the left panel, as well as the norm of the poloidal field (colour) and its associated field lines (black) in the right panel.

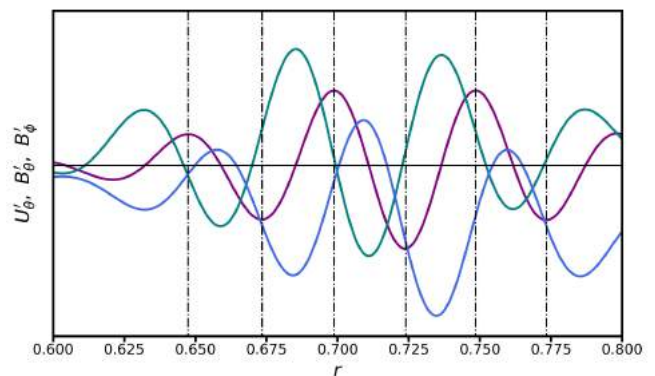


Fig. 16: Perturbed fields: latitudinal component of the velocity field (purple), and latitudinal (green) and azimuthal (blue) components of the magnetic field, as a function of radius at $\theta \approx 2\pi/5$ (i.e. at latitude $\pi/10$). The parameters are $Re_c = 1$, $L_u = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$ (run Q10 of Table 1).

We observe that the instability proceeds via a multi-cellular meridional circulation, radially confined by the stable stratification and latitudinally extended in both hemispheres. From Fig. 17, we see that the poloidal field lines (right panel) are dragged around by this meridional circulation everywhere it is present (left panel), and then warped. The poloidal field thus behaves like a passive scalar advected and mixed by the multi-cellular circulation. This process creates small scales on which the magnetic diffusion can efficiently act to dissipate the poloidal field.

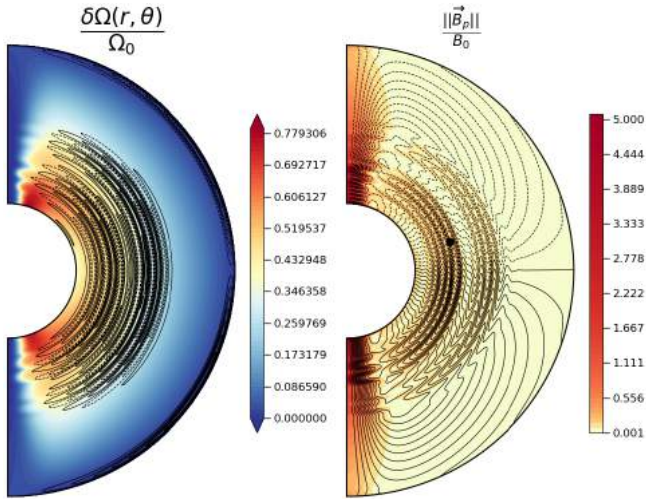


Fig. 17: Structure of the flow and of the magnetic field during the non-linear evolution. Left panel: meridional cut of the normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ (colour) with the streamlines associated with the meridional circulation $\vec{U} = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ (black contours). The dashed (solid) lines correspond to an anticlockwise (clockwise) circulation. Right panel: meridional cut of the normalised norm of the poloidal magnetic field $\|\vec{B}_p\|/B_0$ (colour) and its associated field lines (in black). The fixed point, located at $r = 0.47 r_0$ and $\theta \approx 2\pi/5$, corresponds to the location where the norm of the poloidal field is plotted in Fig. 18 for a stable and an unstable case. These snapshots have been taken at $t = 3\tau_c$. The parameters are $Re_c = 1$, $L_u = 10^4$, $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$ (run Q10 of Table 1).

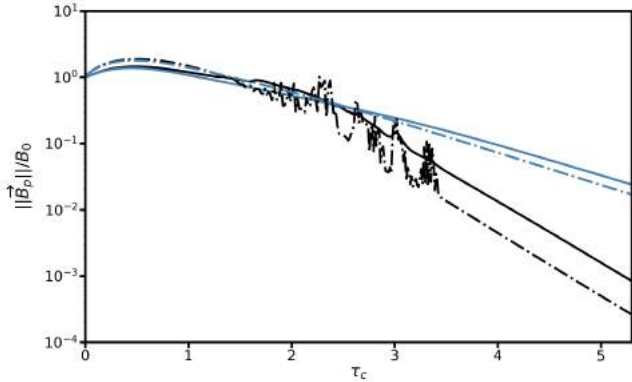


Fig. 18: Temporal evolution of the norm of the poloidal magnetic field normalised to B_0 , as a function of the contraction timescale τ_c . Plain curves represent a volume-averaged evolution and dashed-dotted ones, a local evolution at the fixed point displayed in black in Fig. 17 ($r = 0.47 r_0$ and $\theta \approx 2\pi/5$). The stable and unstable configurations, $Re_c = 0.5$ and 1, are respectively distinguished by their blue and black colours. The other parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $P_m = 10^2$, and $L_u = 10^4$ (runs Q8 and Q10 of Table 1).

In Fig. 18, we compare the evolution of the norm of the poloidal field in an unstable case (in black) and in a stable case (in blue). The field norm is determined either through a volume average (solid line) or at a fixed point (displayed in black in Fig. 17) in the middle of the unstable region (dashed lines). The slope

of these curves enables us to estimate a diffusion rate, and so a diffusion lengthscale, of the poloidal field. For the unstable configuration, this rate is determined during the saw-tooth evolution ranging from $\sim 2.25 \tau_c$ to $\sim 3.5 \tau_c$. By denoting $\omega_{\text{stab}} = \eta/L_{\text{stab}}^2$ and $\omega_{\text{unst}} = \eta/L_{\text{unst}}^2$ the diffusion rates of the stable and unstable runs respectively, we obtain $\omega_{\text{unst}}/\omega_{\text{stab}} \approx 42$, hence a diffusion of the poloidal field 42 times faster in the unstable case. In other words, the motions driven by the instability induce an effective diffusion at a lengthscale 6.5 smaller than the diffusion acting in the stable case ($L_{\text{stab}}/L_{\text{unst}} = 6.5$).

Although we shall see below that the differential rotation increases as a result of the instability, the toroidal field does not grow through the Ω -effect because the poloidal field is too weak in this phase. Then, the toroidal field experiences a diffusive-like decay, similar to the poloidal field.

7.3.3. Post-instability description

By destroying the poloidal field, the instability allowed a reconfiguration of the flow structure. This is shown at $t = 3.5 \tau_c$ in the first two panels of Fig. 19, then at $t = 4.66 \tau_c$ in the last two. From the first panel, we observe that the maximum level of differential rotation is now three times higher than before the instability. The reason is as follows: from a DZ to another, the large-scale structure of the poloidal field has been destroyed by the instability. As a result, even if a significant level of toroidal field still exists in this region, as displayed in the second panel of Fig. 19, the Lorentz force remains weak between the two DZs. The domain within which the contraction is balanced by the viscous effects thus becomes larger and, as expected, the differential rotation increases. By contrast, the poloidal field amplitude is still significant near the rotation axis and the Lorentz force imposes a very weak differential rotation $O((Re_c P_m / L_u)^2)$ (see Sect. 7.2.1) in this region.

Coming back to the numerical results presented in Fig. 19. The first two panels show that the magnetic topology has also completely changed after the development of the instability. A comparison between the third panel of Fig. 13 and the first panel of Fig. 19 shows that the field lines which looped back on themselves before the instability have now been moved towards the poles. In addition, the toroidal field is now very weak close to the outer sphere. An Hartmann layer is thus no longer needed to connect to the vacuum condition at the outer sphere. Likewise, the Shercliff layers have been removed with the dissipation of the poloidal field. Interestingly, we note that the new magnetic configuration, characterised by its positive lobe of toroidal field located near the rotation axis in both hemispheres, is from now on likely to be unstable to a non-axisymmetric instability of Tayler-type (see e.g. Spruit (1999)).

After $\sim 4.66 \tau_c$, the third panel of Fig. 19 shows that the differential rotation is mostly radial and occupies the whole shell. As a consequence, its amplitude further increased. In Fig. 20, we plotted in black dashed line the analytical solution corresponding to the balance on the full sphere between the viscous and contraction terms of Eq. (11). This solution, derived in Gouhier et al. (2021), perfectly matches the numerical solution in blue, thus showing that the hydrodynamic steady state is recovered. In conclusion, the magnetic field now has a negligible effect on the flow dynamics as supported by the fourth panel of Fig. 19 where we can see that the amplitude of the toroidal field has been divided by more than 10.

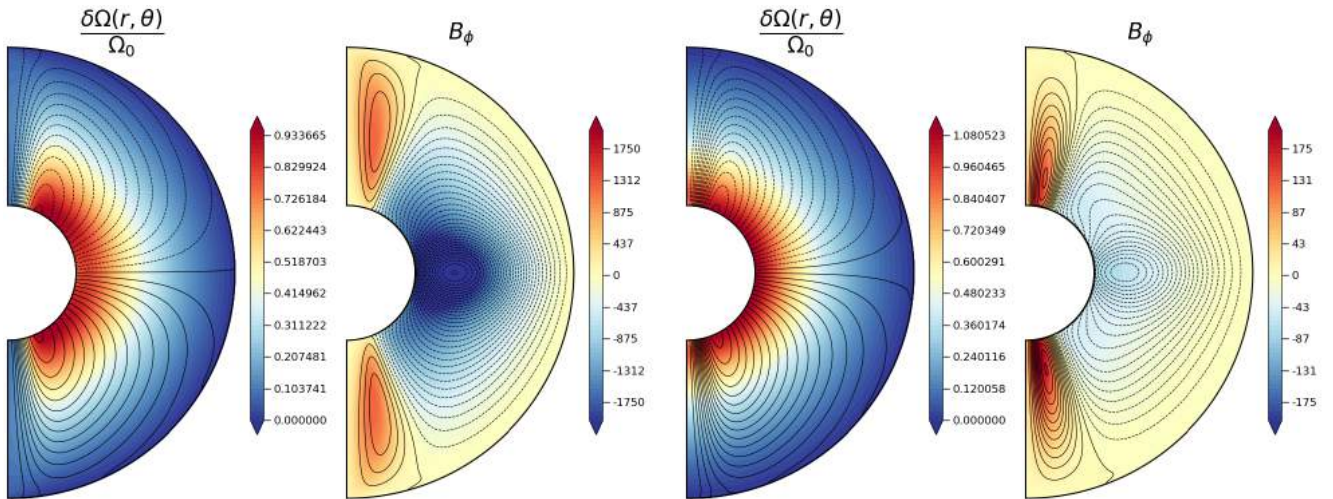


Fig. 19: Meridional cuts of the normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ and of the toroidal field B_ϕ , obtained during the post-instability evolution at $\sim 3.5 \tau_c$ (first two panels), and when the hydrodynamic steady state is reached at $\sim 4.66 \tau_c$ (last two panels). Black contours represent either the poloidal field lines (first and third panels) or the streamlines associated with the electrical-current function (second and fourth panels). The parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, $P_m = 10^2$, $Re_c = 1$, and $L_u = 10^4$ (run Q10 of Table 1).

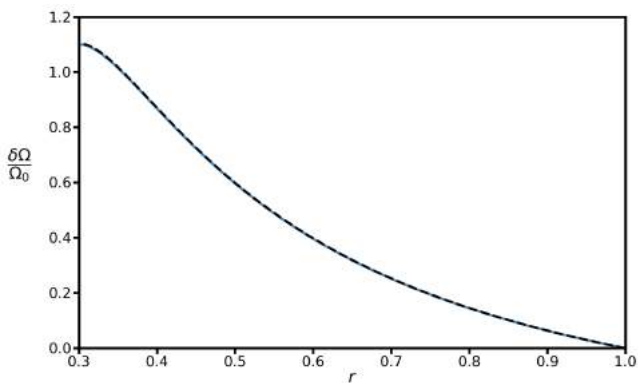


Fig. 20: Normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ as a function of radius. The analytical solution derived by solving the balance between the viscous and contraction terms in Eq. (11), is plotted in black dashed lines. It is compared to the numerical solution obtained at $4.66 \tau_c$ and plotted in blue solid line. The parameters used are the same as in Fig. 19.

7.4. Steady state in the Eddington–Sweet regime

We now focus on the Eddington–Sweet regime ($\sqrt{E} \ll P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$) considering a dipolar or a quadrupolar field as the pre-existing field. All simulations were performed in the anelastic approximation and included the contraction term in the induction equation. The contrast of density between the inner and the outer spheres was fixed to 20.85, and the Ekman and magnetic Prandtl numbers were respectively equal to 10^{-5} and 10^2 . Our parametric study in this regime study consists in varying Re_c from 10^{-1} to 5 and L_u from $5 \cdot 10^3$ to 10^5 for $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$ and 10^{-1} (see details in Table 1).

We basically found three types of steady states. The first one is characterised, as in the viscous case, by two magnetically decoupled regions, one of them including a DZ where the contraction enforces a certain level of differential rotation. This state is

the most relevant in a stellar context because it is obtained for the lowest values of τ_{Ap}/τ_{ED} and τ_{Ap}/τ_c , and these ratios are a priori very small in magnetic contracting stars as discussed in Sect. 6.1. As we increase these ratios, we find another type of solution where the differential rotation and the meridional circulation are no longer confined within the DZ while the field topology is unchanged (for higher τ_{Ap}/τ_{ED}), and finally a state where the advection of the poloidal field destroys the DZ and significantly reconfigures the magnetic field and the rotation profile (for higher τ_{Ap}/τ_c). In the following, these last two solutions will be described briefly as they are thought to be less relevant for our purpose, although physically interesting.

7.4.1. Meridional circulation and differential rotation confined to the dead zone

Figure 21 displays the typical structure of the quasi-steady flows and fields obtained for a dipolar (top row) or a quadrupolar (bottom row) initial field. These simulations were performed at $Re_c = 1$, $L_u = 10^5$ and $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$ (runs D28 and Q13 of Table 1), and thus satisfy $\tau_{Ap}/\tau_{ED} = 10^{-2}$ and $\tau_{Ap}/\tau_c = 10^{-3}$. There are many similarities with the viscous case. From the panels of the first column, we again observe two regions that are magnetically decoupled. One occupies the major part of the spherical shell and is in quasi-solid rotation while the other, the DZ, exhibits a certain level of differential rotation. The amplitude of this differential rotation is similar for the dipolar and quadrupolar cases. We also note the presence of magnetic boundary layers: the Hartmann layer at the outer sphere, and the Shercliff layers wherever adjacent poloidal field lines are forced to rotate differently, namely along the tangent cylinder and around the DZ. As in the viscous case, the toroidal field is characterised by a strong amplitude at these locations, as indicated by the panels of the second column.

We also see major differences with the viscous regime. First, although the contraction of the field lines is allowed, the DZ is confined near the outer sphere, whether a dipolar or quadrupolar field is initially imposed. This can be compared to the third

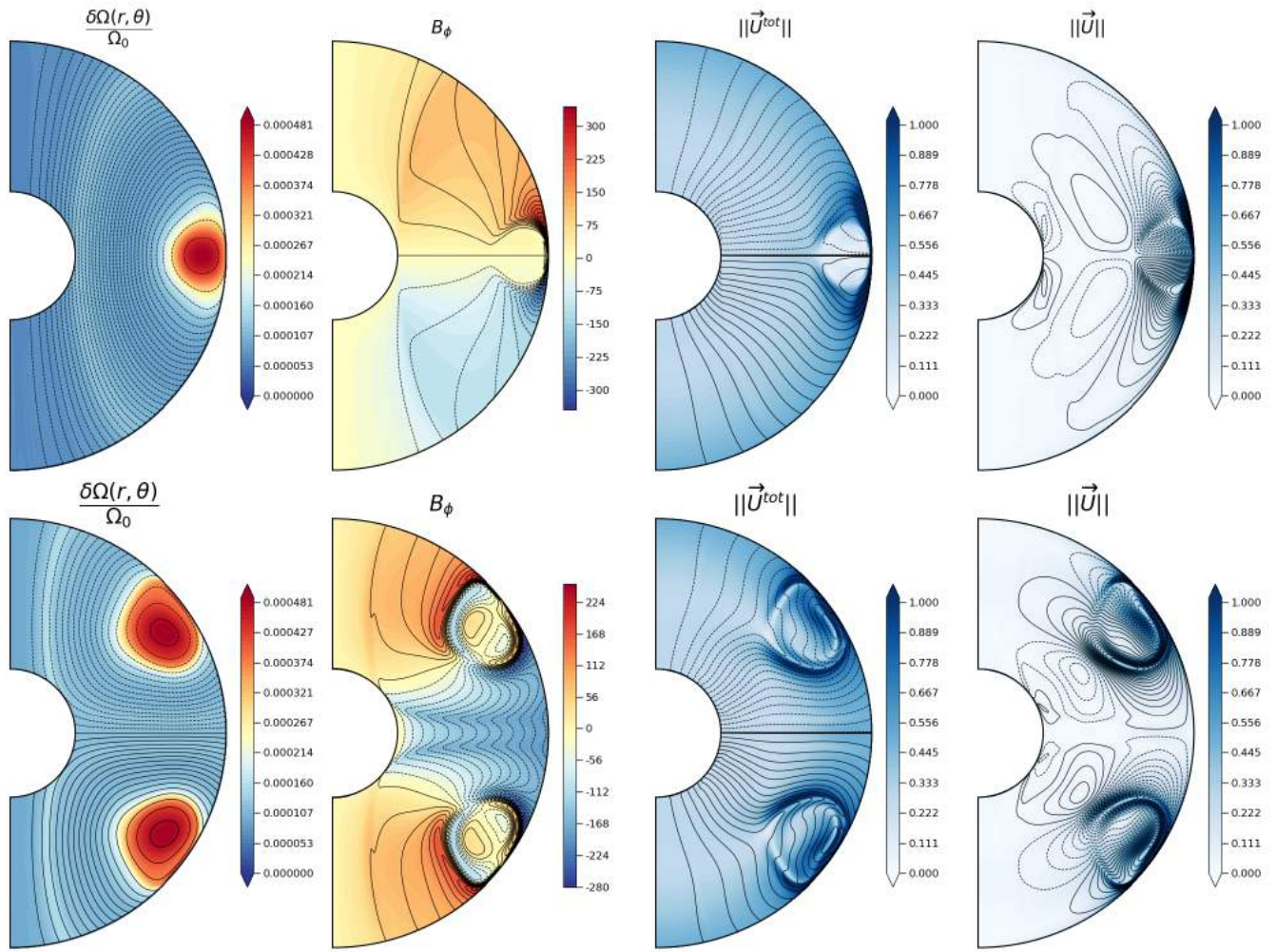


Fig. 21: Quasi-steady axisymmetric flow in the Eddington–Sweet regime when a dipolar (top row) or quadrupolar (bottom row) field is initially imposed. Panels of the first column: rotation rate normalised to the top value (colour) and poloidal field lines (black). Panels of the second column: toroidal field (colour) with the streamlines of the electrical-current function (black). Panels of the third column: norm (colour) and streamlines (black) of the total meridional circulation $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$. Panels of the fourth column: norm (colour) and streamlines (black) of the contraction-induced meridional circulation $\vec{U}_p = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$. The dashed lines represent an anticlockwise electrical (panels of the second column) or fluid (panels of the third and fourth columns) circulation while the solid lines correspond to a clockwise direction. The parameters are $E = 10^{-5}$, $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $P_m = 10^2$, $Re_c = 1$, $L_u = 10^5$ and $\rho_i/\rho_0 = 20.85$ (runs D28 and Q13 of Table 1).

panels of Figs. 3 and 13 in the viscous regime where the DZ was clearly advected towards the inner sphere. This difference is attributed to the effect of the contraction-induced meridional flow which now plays a significant role in the DZ advection. This flow is illustrated in the fourth column of Fig. 21 displaying the norm (colour) and the streamlines (black) of the poloidal velocity field $\vec{U}_p = U_r \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$. For an initial dipolar field, this circulation is characterised by the presence of one cell of anticlockwise (clockwise) circulation in the northern (southern) hemisphere. This contraction-induced flow contributes to the total meridional circulation $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ displayed in the third column. As seen in the two top right panels, the induced flow inside the DZ tends to oppose contraction and the resulting total circulation becomes very weak, thus preventing the inward advection of the DZ. Outside the DZ, the total meridional flow is approximately parallel to the poloidal field lines close to the outer sphere, where the contraction velocity is maximum. In

the deeper regions close to the inner sphere, the advection of poloidal field lines by the weaker contraction field is balanced by magnetic diffusion.

For an initial quadrupolar field, we observe a strong circulation around the DZ while inside the DZ the flow is predominantly vertical, downwards (upwards) in the northern (southern) hemisphere. Again, away from the DZ, the contraction-induced meridional flow has only a negligible contribution to the total meridional circulation. Finally, in contrast to the viscous regime, for the parameters numerically reachable in this study, the quadrupolar configurations are stable with respect to MRI because the shear built in the DZs is not strong enough to counteract the stabilising effect of the poloidal field. By comparison, the contrast of differential rotation in run Q5 of the viscous regime is ~ 130 times larger and is not even unstable despite a weaker L_u of $5 \cdot 10^4$.

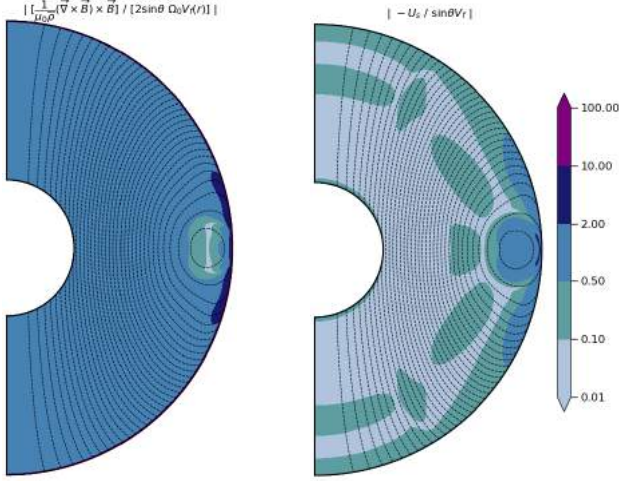


Fig. 22: 2D maps comparing the relative importance of the Lorentz (left panel) and Coriolis (right panel) forces to the contraction, in the presence of a dipolar field. In each panel the poloidal field lines are plotted in black. The parameters are the same as in Fig. 21.

In order to understand the flow dynamics inside and outside the DZ, we now examine the force balance in the AM equation Eq. (11), as was done in the viscous regime. The force amplitudes are analysed in the 2D maps of Fig. 22 where we display the ratio of the Lorentz force (left panel) and of the Coriolis force (right panel) to the contraction. We can observe that inside the DZ, the contraction is now balanced by the Coriolis force because the toroidal component of the magnetic field tends to zero and the Lorentz force becomes negligible accordingly (see right panel of Fig. 22). This implies that

$$U_s = \sin \theta \frac{V_0 \rho_0 r_0^2}{\bar{\rho} r^2}. \quad (42)$$

Here, contrary to the viscous case, the thermal diffusion weakens the stable stratification and enables a contraction-driven meridional circulation to exist. Inside the DZ, we also find that the thermal balance

$$U_r \frac{dS_m}{dr} = \kappa \left[\left(\frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} + \frac{d \ln \bar{T}}{dr} \right) \frac{\partial \delta S}{\partial r} + \bar{\nabla}^2 \delta S \right], \quad (43)$$

and the thermal wind balance

$$2r\Omega_0 \frac{\partial U_\phi}{\partial z} = \frac{g_0 r_0^2}{C_p r^2} \frac{\partial \delta S}{\partial \theta}, \quad (44)$$

are both satisfied. In these expressions, $S_m(r) = \bar{S}(r) + S_c(r)$ where $S_c(r) = 1/2 \int_0^\pi S'(r, \theta) \sin \theta d\theta$ is the spherically symmetric entropy field induced by the contraction, and $\delta S(r, \theta) = S'(r, \theta) - S_c(r)$ (see Gouhier et al. (2021) for details). According to Eq. (42), contraction then drives a meridional circulation $U_s \sim O(V_f)$ which redistributes AM on an Eddington–Sweet timescale. We note that the circulation timescale τ_c can be quite different from the Eddington–Sweet timescale. Indeed,

as stated in Sect. 3, the ratio τ_{ED}/τ_c is measured by the dimensionless quantity $Re_c P_r (N_0/\Omega_0)^2$. In this numerical study of the Eddington–Sweet regime, $\tau_{ED} \ll \tau_c$ because $P_r (N_0/\Omega_0)^2 \ll 1$ and because large contraction Reynolds numbers are too difficult to reach numerically.

Outside the DZ, the timescale of AM transport by the Alfvén waves is much shorter than the Eddington–Sweet timescale, and the Alfvén waves impose their dynamics. The left panel of Fig. 22 thus shows that the Lorentz force balances the contraction and Eq. (34) holds, as in the viscous regime. In this case, a quasi-isorotation state along the field lines is obtained, verifying:

$$V_f(r) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\phi}{r} \right) - \frac{B_\phi}{r} \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr} \right] = \sin \theta (\vec{B}_p \cdot \vec{\nabla}) \delta \Omega. \quad (45)$$

As a result, the estimate of the characteristic amplitude of the differential rotation along the field lines Eq. (38) still holds, except that it must be weighted by $\left(\int_{r_i/r_0}^1 \frac{\bar{\rho}}{\rho_0} d(r/r_0) \right)^{-1}$ accounting for the effect of the density stratification in the domain.

In the hydrodynamical case (Gouhier et al. 2021), we showed that the characteristic amplitude of the steady differential rotation resulting from the balance between the inward AM transport by the contraction and the AM redistribution by the Eddington–Sweet circulation should be $O\left(P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c \left(\int_{r_i/r_0}^1 (\bar{\rho}/\rho_0) d\bar{r} \right)^{-1}\right)$. This global analysis does not apply directly in the present situation where the DZ is reduced to a small fraction of the spherical shell, confined near the outer sphere. As in Sect. 7.2.2, and following Oglethorpe & Garaud (2013), to account for the DZ size and its effect on the differential rotation induced by the Eddington–Sweet circulation, we introduce the lengthscale $L_{DZ} = 0.1 r_0$. Because of the density stratification, the contraction velocity is not very different between the outer and inner spheres. Thus, after using Eq. (42) and the continuity equation, we have $U_r \approx V_0$. Then, from Eq. (43) we get $\delta S \approx (V_0 L_{DZ}^2 / \kappa) (dS_m/dr)$. Injecting this estimate in Eq. (44) yields finally to $\Delta \Omega_{DZ} / \Omega_0 \approx (g(r)/C_p) (dS_m/dr) (V_0 r_0 / \kappa \Omega_0^2) (L_{DZ}/r_0)^2 \approx P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c (L_{DZ}/r_0)^2$, thus enabling us to recover the level of differential rotation inside the DZ up to a factor two.

In Fig. 23, we plotted the maximum amplitude of the differential rotation inside the DZ as a function of $P_r (N_0/\Omega_0)^2 Re_c$, for the runs D21-24 and D27-30 of Table 1 performed with Re_c ranging from 10^{-1} to 2 (identified with symbols) and L_u from $5 \cdot 10^4$ (light blue) to 10^5 (blue). The other parameters are fixed to $P_r (N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-5}$, $P_m = 10^2$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.85$. As expected, the maximum contrast of differential rotation follows a linear relation with Re_c . Moreover, we also observe that this level is almost independent of the Lundquist number, consistent with the balance Eq. (42) inside the DZ. However, for the highest contraction Reynolds number $Re_c = 2$, we observe a clear discrepancy between runs performed at $L_u = 5 \cdot 10^4$ and $L_u = 10^5$. This deviation can be attributed to the fact that, in the lower L_u case, the magnetic tension no longer prevents the advection of the magnetic field by the meridional flows. As shown in Fig. 24, this produces a significant deformation of the DZ geometry and a related expulsion of the magnetic flux outside the DZ. This phenomenon is discussed in more details below.

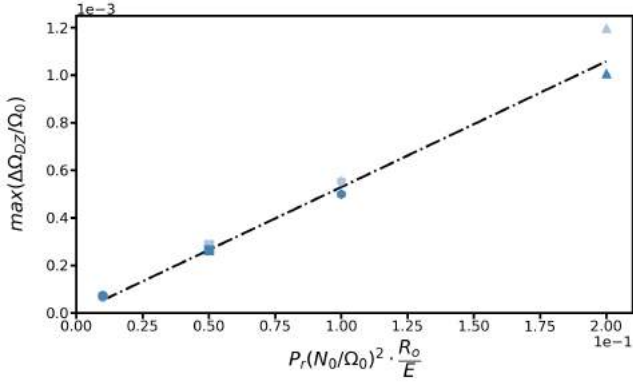


Fig. 23: Maximum contrast of differential rotation inside the DZ as a function of $P_r(N_0/\Omega_0)^2 Re_c$. The different symbols circle, square, hexagon and triangle respectively correspond to the simulations performed at $Re_c = 10^{-1}$, $5 \cdot 10^{-1}$, 1, and 2. Runs carried out at $L_u = 5 \cdot 10^4$ are presented in light blue, and those at $L_u = 10^5$, in blue. The other parameters are $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-5}$, $P_m = 10^2$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.85$ (runs D21-24 and D27-30 of Table 1).

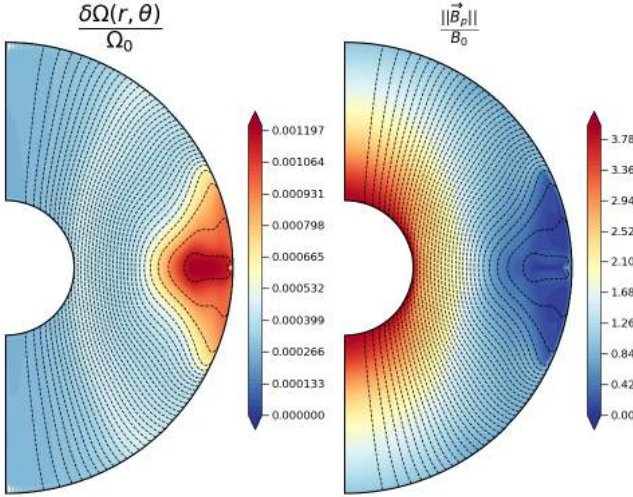


Fig. 24: Meridional cuts of the normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ (left panel) and of the normalised norm of the poloidal field $\|\vec{B}_p\|/B_0$ (right panel). In black are also plotted the poloidal field lines to highlight the DZ. The parameters are $Re_c = 2$, $L_u = 5 \cdot 10^4$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $E = 10^{-5}$, $P_m = 10^2$, and $\rho_i/\rho_0 = 20.85$ (run D38 of Table 1).

7.4.2. Meridional circulation and differential rotation not confined to a dead zone

Simulations carried out at a smaller $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ parameter (runs D32-D39 of Table 1) or at higher Re_c (runs D38, Q14, Q16 and Q17 of Table 1), that is at higher values of τ_{A_p}/τ_{ED} and τ_{A_p}/τ_c , exhibit different features. In the former case (smaller $P_r(N_0/\Omega_0)^2$), the differential rotation is no longer confined to the DZ as an AM redistribution by the Eddington–Sweet circulation occurs outside the DZ. In the second case (higher Re_c), the amplitude of the meridional circulation is strong enough to warp the DZ and expel the magnetic flux there. These two phenomena are now discussed.

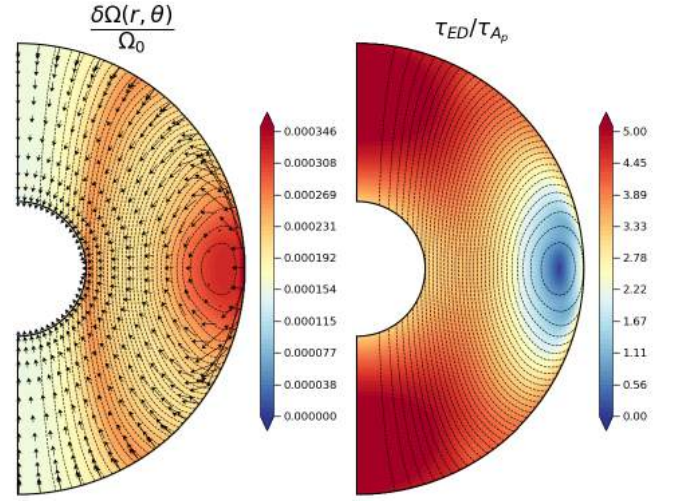


Fig. 25: Meridional cut of the normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ (left panel) and 2D map comparing the Eddington–Sweet time to the Alfvén time (right panel). This one is locally estimated such as $\tau_{A_p} = r_0 \sqrt{\mu_0 \bar{\rho}} / \|\vec{B}_p\|$. In these two panels, the poloidal field lines are also plotted in black. In addition, in the left panel, the vector lines of the total meridional velocity field $\vec{U}_p^{\text{tot}} = (U_r + V_f) \vec{e}_r + U_\theta \vec{e}_\theta$ are plotted as black arrows. The parameters are $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^4$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$, $E = 10^{-5}$, $P_m = 10^2$ and $\rho_i/\rho_0 = 20.85$ (run D36 of Table 1).

The left panel of Fig. 25 displays a meridional cut of the quasi-steady differential rotation (in colour) obtained for $Re_c = 1$, $L_u = 5 \cdot 10^4$, and $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-2}$ (run D36 of Table 1), on which are represented the vector lines of the total meridional velocity field as arrows and the poloidal field lines (in black). Compared to the simulation shown in Fig. 21, the ratio τ_{A_p}/τ_{ED} has been increased by a factor 20 (from 10^{-2} to $2 \cdot 10^{-1}$). Actually, if local values of this ratio are considered, a value of order 1 can be reached, in particular in the vicinity of the DZ. This is shown in the right panel of Fig. 25 that displays the distribution of the ratio of the Eddington–Sweet time to the local Alfvén time. In this regime, the differential rotation and the meridional circulation have spread out away from the DZ while the poloidal field lines, and thus the DZ, have not been affected by the circulation flow.

As presented in Fig. 26, another regime is encountered at sufficiently high Re_c . The left panel of this figure displays the differential rotation in colour with the streamlines of the meridional circulation in black. The right panel shows, in colour, the norm of the poloidal field with the poloidal field lines in black. We observe that this meridional circulation significantly warps the DZ, thus leading to a reconfiguration of the magnetic field and the differential rotation. Compared to the simulation shown in the top panel of Fig. 21, the ratio τ_{A_p}/τ_c has been increased by a factor of 6 (from 10^{-3} to $6 \cdot 10^{-3}$). This is apparently sufficient for the Lorentz force not to be able to confine the circulation in the DZ. The magnetic field is then advected and partly dissipated in the vicinity of the original DZ. The dissipation process is reminiscent of the phenomenon of magnetic flux expulsion studied by Weiss (1966), whereby an eddy advects the magnetic field to such small scales that magnetic diffusion is efficient. We indeed observe that the magnetic flux ends up being expelled from the regions where the meridional circulation exists, and the poloidal

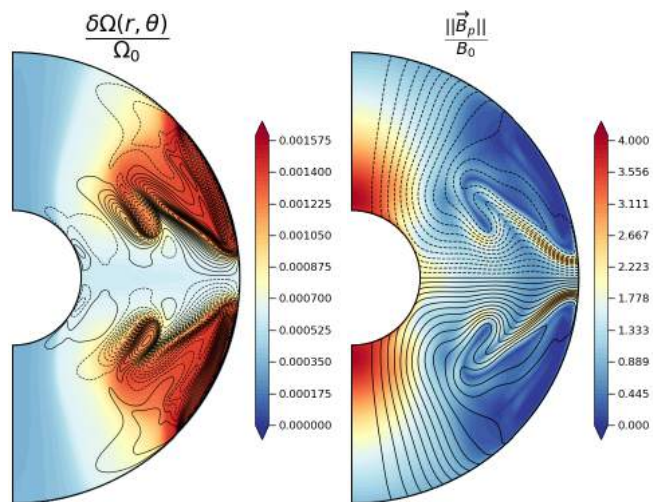


Fig. 26: Structure of the flow and of the magnetic field after $\sim 2\tau_{\text{ED}}$. Left panel: coloured contours of the differential rotation normalised to the top value and streamlines (in black) of the meridional flow. Right panel: norm of the poloidal field normalised to its initial value at the pole of the outer sphere in colour with the poloidal field lines in black. The parameters are $E = 10^{-5}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^{-1}$, $\rho_i/\rho_0 = 20.85$, $P_m = 10^2$, $Re_c = 3$ and $L_u = 5 \cdot 10^4$ (run Q16 of Table 1).

field is found concentrated in free layers separating the quasi-solid rotation region from the one in differential rotation.

8. Summary and conclusions

In this work, we investigated the dynamics of a contracting radiative spherical layer embedded in a large-scale magnetic field. The aim was to determine the differential rotation that results from the combined effects of contraction and magnetic fields. The contraction was modelled through an imposed radial velocity field \vec{V}_f and the gas dynamics was modelled using either the Boussinesq or the anelastic approximations. The parametric study was guided by the results obtained without magnetic field (Gouhier et al. 2021) highlighting two hydrodynamical regimes, namely the viscous regime in the strongly stratified cases and the Eddington–Sweet regime in the weakly stratified cases.

We find that the contracting layer first evolves towards a quasi-steady configuration characterised by two magnetically decoupled regions. In the first region, all the poloidal field lines connect to the outer sphere. The rotation is quasi-uniform in this region because the contraction only allows very small deviations from Ferraro’s isorotation law along the field lines and the outer sphere rotates uniformly. The second region, called the DZ, is decoupled from the first one as the poloidal field lines loop-back on themselves or connect to the inner sphere. In addition, the poloidal field amplitude vanishes at some point within the DZ. A significant level of differential rotation can be produced in these DZs, the inward AM transport by the contraction being balanced either by a viscous transport or by an Eddington–Sweet circulation. The exact amplitude of the differential rotation also depends on the size, the shape and the location of the DZ.

In a second step, after a time of the order of the contraction time, the shear built in the DZ can trigger a powerful axisymmetric instability that profoundly modifies the subsequent evolution of the flow. Indeed, for an initial quadrupolar field in

the viscous regime, we observe that if the field strength is low enough, an MRI-type instability grows and produces a multicellular meridional circulation organised at small scales in the radial direction. This flow advects and eventually enables to efficiently dissipate the magnetic energy. The new field configuration is strongly modified, and the differential rotation which is no longer constrained to the DZ spreads to most of the spherical layer while its amplitude increases. This instability has not been observed for the quadrupolar field in the Eddington–Sweet regime because numerical limitations did not allow us to reach significant levels of differential rotation. However, we anticipate that for realistic contraction Reynolds numbers and Lundquist numbers, the differential rotation in the DZ of the quadrupolar field will also trigger an instability in the Eddington–Sweet regime. By contrast, the dipolar field configuration does not lead to an instability. Indeed, in this case, the DZ is symmetric with respect to the equator and the contraction produces maximum rotation rates along the equator. The latitudinal differential rotation thus increases away from the rotation axis which implies stability with respect to the MRI. We note that the same configuration in an expanding layer would lead to minimum rotation rates along the equator and thus to differential rotations potentially unstable to MRI.

If we intend to extrapolate to a more complex geometry of the initial poloidal field, the dipolar topology with a single equatorially symmetric DZ appears exceptional. Thus, we expect that generically negative latitudinal gradients of the rotation rate, potentially unstable to the MRI, are present in DZs. Rather than the topology of the poloidal field, what can prevent the MRI to develop is its intensity. Indeed, according to Balbus & Hawley (1998), the magnetic tension stabilises the flow if the perturbation length scales λ_r are smaller than $(B_r/\Omega) \cdot (\sqrt{2\pi}/\sqrt{\mu_0\rho}|q|)$. Applying this criteria to the degenerate core of a typical subgiant of $1.1M_\odot$ and $2R_\odot$, we find that, assuming a $O(1)$ shear $|q|$, a rotation rate $\Omega = 3.1 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ and a mean core density $\bar{\rho}_c = 2.1 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, fields higher than $3 \cdot 10^5 \text{ G}$ will stabilise all the perturbations smaller than the degenerate core size of $0.06R_\odot$. In practice, the radial wavelength of the unstable modes is constrained by the stable stratification rather than by the core size and thus even lower field intensities will be stabilising. For example, in our simulations λ_r is ~ 44 times smaller than the outer radius of the spherical layer. The critical field in our numerical simulations is reached for a Lorentz number $L_o = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}r_0\Omega_0$ equal to $\sim 10^{-2}$. For the subgiant core rotation and density given above, this corresponds to a $\sim 10^4 \text{ G}$ critical field strength. As $P_r(N_0/\Omega_0)^2$ and P_m of the simulations are not too far from realistic values in subgiant cores, and the shear should remain limited to $O(1)$ even for more realistic contraction Reynolds numbers, this critical field extrapolated from the simulations might be of the right order of magnitude. To be more precise, a closer look at the MRI driven by a negative rotation latitudinal gradient in a radiative zone will be necessary.

Our numerical study thus points towards the following scenario: during a first period of the order of the contraction timescale, a contracting radiative layer embedded in a large-scale poloidal field tends to rotate uniformly, except in localised DZs where the contraction induces a significant differential rotation. If the field is weak enough and not purely dipolar, the development of a powerful axisymmetric MRI reconfigures the field and diminishes its intensity. The magnetic coupling then becomes inefficient in the major part of the radiative layer and the contraction can force the differential rotation there.

Such a scenario could potentially explain the evolution of the rotation of the subgiants between the end of the MS and the tip of the RGB. As mentioned in the introduction, the asteroseismic data can be reproduced by assuming a uniform rotation during a first period after the end of the MS followed by a second period where the contraction is left free to enforce differential rotation (Spada et al. 2016). This is consistent with the two young subgiants in near solid-body found by Deheuvels et al. (2020). At their age, the post-MS contraction should have increased their core rotation by a factor of four which means that the period of uniform rotation should last at least a contraction timescale. This timescale is compatible with our scenario.

Our simulations are nevertheless far to describe the full complexity of a magnetic and contracting subgiant. In particular, an expanding layer and boundary conditions mimicking the effect of a convective envelope should be added. The role of non-axisymmetric instabilities should also be considered, especially in the magnetic configuration that results from the axisymmetric instability. Non-axisymmetric MRI or Tayler instability might indeed be present and take part to the AM transport particularly along the giant branch as already invoked (Cantiello et al. 2014; Fuller et al. 2019).

As far as intermediate-mass stars are concerned, the occurrence of a powerful contraction-driven instability could help explain the dichotomy between Ap/Bp and Vega-like magnetisms. Indeed, strong Ap/Bp-like magnetic fields are expected to survive the instability during the PMS while below a certain field intensity, the axisymmetric MRI would change the pre-existing large-scale field into a small-scale field of smaller amplitude, thus leading to Vega-like magnetism. This is in line with the scenario proposed by Aurière et al. (2007), except that the instability invoked in this paper was a non-axisymmetric instability produced during the initial winding-up of the poloidal field by the differential rotation. Numerical investigations of this process confirmed the presence of such instabilities but not their ability to profoundly modify the pre-existing poloidal field (Jouve et al. 2015, 2020). By contrast, the axisymmetric MRI found in the present paper has a very strong impact on the initial poloidal field, destroying its large-scale structure and even diminishing its amplitude. To test this scenario, the threshold field strength that separates MRI stable and from MRI unstable configurations is crucial because it should be compatible with the observed 300 G lower bound of Ap/Bp surface magnetic fields. Again, this calls for further numerical and theoretical investigations of the critical field of the MRI driven by rotation latitudinal gradients in radiative zones.

Part of the above discussion is based on extrapolations of our numerical results to stellar conditions. Our simulations are indeed a simplified version of a contracting star. Among the simplifications, the ratio between the contraction time and the rotation time is larger in stars than in our simulations ($\tau_c/\tau_\Omega \sim 3.4 \cdot 10^8 - 1.1 \cdot 10^{11}$ in stars while this ratio is comprised between 10^3 and $5 \cdot 10^5$ in our simulations). However, the physical model derived from our simulation does not depend critically on this ratio. Indeed, by running our simulations for 5 – 6 contraction times, we observed that, after a contraction time, a powerful axisymmetric MHD instability develops. This leads to a complete reconfiguration of the initial magnetic field and to the subsequent development of differential rotation in most part of the spherical shell. This process should not be affected by increasing the ratio τ_c/τ_Ω to stellar values. In the same spirit, the ratio τ_Ω/τ_v , the Ekman number, is much lower in stars than in numerical simulations. But as shown in Gouhier et al. (2021), the hydrodynamical AM transport is not affected when this ra-

tio is decreased by various orders of magnitude. Thus, despite the simplifications inherent to numerical simulations, the physical model derived from these simulations seems robust enough to apply to stars, especially in the viscous regime where the MRI has been observed. A question that remains to be addressed in future works concerns the occurrence of the MRI in more realistic Eddington–Sweet regimes which will require to explore the strongly non-linear regime corresponding to very large ratio τ_c/τ_v .

Acknowledgements. The authors acknowledge the developers of MagIC (<https://github.com/magic-sph/magic>) for the open-source code thanks to which the simulations were performed. This work was granted access to the HPC resources of CALMIP supercomputing center under the allocation P1118. LJ acknowledges funding by the Institut Universitaire de France. The authors wish to thank Sébastien Deheuvels for very fruitful discussions.

References

- Acevedo-Arreguin, L., Garaud, P., & Wood, T. S. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 434, 720
- Acheson, D. & Hide, R. 1973, *Reports on Progress in Physics*, 36, 159
- Alecian, E., Wade, G., Catala, C., et al. 2013, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 429, 1001
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2016, *The Astrophysical Journal*, 829, 92
- Aurière, M., Wade, G., Silvester, J., et al. 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 475, 1053
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1991, *The Astrophysical Journal*, 376, 214
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1994, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 266, 769
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1998, *Reviews of Modern Physics*, 70, 1
- Blazère, A., Petit, P., Lignières, F., et al. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 586, A97
- Braginsky, S. I. & Roberts, P. H. 1995, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 79, 1
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, *Nature*, 431, 819
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2017, *Royal Society Open Science*, 4, 160271
- Brun, A. S., Browning, M. K., & Toomre, J. 2005, *The Astrophysical Journal*, 629, 461
- Bugnet, L., Prat, V., Mathis, S., et al. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 650, A53
- Cally, P. 1991, *Journal of Plasma Physics*, 45, 453
- Cantiello, M. & Braithwaite, J. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 534, A140
- Cantiello, M., Fuller, J., & Bildsten, L. 2016, *The Astrophysical Journal*, 824, 14
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, *The Astrophysical Journal*, 788, 93
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R., & Mathis, S. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 555, A54
- Charbonneau, P. & MacGregor, K. 1993, *The Astrophysical Journal*, 417, 762
- Clune, T. C., Elliott, J., Miesch, M., Toomre, J., & Glatzmaier, G. A. 1999, *Parallel Computing*, 25, 361
- Deheuvels, S., Ballot, J., Eggenberger, P., et al. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A117
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M., et al. 2014, *Astronomy & Astrophysics*, 564, A27
- Donati, J.-F. & Landstreet, J. 2009, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 47, 333
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1998, *Earth and Planetary Science Letters*, 160, 15
- Eggenberger, P., Deheuvels, S., Miglio, A., et al. 2019, *Astronomy & Astrophysics*, 621, A66
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 544, L4
- Ferraro, V. C. 1937, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 97, 458
- Fuller, J., Cantiello, M., Stello, D., García, R. A., & Bildsten, L. 2015, *Science*, 350, 423
- Fuller, J., Piro, A. L., & Jermyn, A. S. 2019, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 485, 3661
- Gallet, F. & Bouvier, J. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 556, A36
- Garaud, P. 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 335, 707
- Garaud, P. & Acevedo-Arreguin, L. 2009, *The Astrophysical Journal*, 704, 1
- Garaud, P. & Brummell, N. 2008, *The Astrophysical Journal*, 674, 498
- Garaud, P. & Garaud, J.-D. 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 391, 1239

- Garaud, P., Medrano, M., Brown, J., Mankovich, C., & Moore, K. 2015, *The Astrophysical Journal*, 808, 89
- Gastine, T. & Wicht, J. 2012, *Icarus*, 219, 428
- Gouhier, B., Lignières, F., & Jouve, L. 2021, *Astronomy & Astrophysics*, 648, A109
- Heyvaerts, J. & Priest, E. 1983, *Astronomy and Astrophysics*, 117, 220
- Hollerbach, R. & Rüdiger, G. 2005, *Physical Review Letters*, 95, 124501
- Jones, C., Boronski, P., Brun, A., et al. 2011, *Icarus*, 216, 120
- Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 575, A106
- Jouve, L., Lignières, F., & Gaurat, M. 2020, *Astronomy & Astrophysics*, 641, A13
- Kirillov, O. N., Stefani, F., & Fukumoto, Y. 2014, *Journal of Fluid Mechanics*, 760, 591
- Knobloch, E. 1992, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 255, 25P
- Lantz, S. R. 1992, PhD thesis, Cornell University, United States
- Lignières, F., Califano, F., & Mangeney, A. 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 349, 1027
- Lignières, F., Petit, P., Aurière, M., Wade, G. A., & Böhm, T. 2014, *Proceedings of the International Astronomical Union*, 9, 338
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., & Aurière, M. 2009, *Astronomy & Astrophysics*, 500, L41
- Maeder, A. 2008, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars* (Springer Science & Business Media)
- Marques, J., Goupil, M., Lebreton, Y., et al. 2013, *Astronomy & Astrophysics*, 549, A74
- Menou, K., Balbus, S. A., & Spruit, H. C. 2004, *The Astrophysical Journal*, 607, 564
- Mestel, L. & Weiss, N. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 226, 123
- Mosser, B., Belkacem, K., Pinçon, C., et al. 2017, *Astronomy & Astrophysics*, 598, A62
- Mosser, B., Elsworth, Y., Hekker, S., et al. 2012, *Astronomy & Astrophysics*, 537, A30
- Oglethorpe, R. & Garaud, P. 2013, *The Astrophysical Journal*, 778, 166
- Petit, P., Lignières, F., Aurière, M., et al. 2011, *Astronomy & Astrophysics*, 532, L13
- Petit, P., Lignières, F., Wade, G., et al. 2010, *Astronomy & Astrophysics*, 523, A41
- Petitdemange, L., Dormy, E., & Balbus, S. 2013, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 223, 21
- Roberts, P. 1967, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 300, 94
- Rüdiger, G., Gellert, M., Hollerbach, R., Schultz, M., & Stefani, F. 2018, *Physics Reports*, 741, 1
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *Astronomy & Astrophysics*, 573, A80
- Rüdiger, G., Schultz, M., & Kitchatinov, L. 2016, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 456, 3004
- Shercliff, J. 1956, *Journal of Fluid Mechanics*, 1, 644
- Spada, F., Gellert, M., Arlt, R., & Deheuvels, S. 2016, *Astronomy & Astrophysics*, 589, A23
- Spruit, H. 1999, *Astronomy & Astrophysics*, 349, 189
- Spruit, H. 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 381, 923
- Stefani, F., Gundrum, T., Gerbeth, G., et al. 2006, *Physical Review Letters*, 97, 184502
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., García, R. A., & Huber, D. 2016a, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 33
- Stello, D., Cantiello, M., Fuller, J., et al. 2016b, *Nature*, 529, 364
- Wade, G. A., Drouin, D., Bagnulo, S., et al. 2005, *Astronomy & Astrophysics*, 442, L31
- Weiss, N. O. 1966, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 293, 310
- Wicht, J. 2002, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 132, 281
- Wood, T. S. & Brummell, N. H. 2012, *The Astrophysical Journal*, 755, 99
- Wood, T. S. & Brummell, N. H. 2018, *The Astrophysical Journal*, 853, 97
- Zahn, J.-P. 1992, *Astronomy and Astrophysics*, 265, 115

Case	Topology	Contraction in induction equation	E	$P_r \left(\frac{N_0}{\Omega_0} \right)^2$	Re_c	L_u	$\frac{\rho_i}{\rho_0}$
D1	Dipole	No	10^{-4}	10^4	10^{-1}	10^4	1
D2	Dipole	No	10^{-4}	10^4	10^{-1}	$5 \cdot 10^4$	1
D3	Dipole	No	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^3$	1
D4	Dipole	No	10^{-4}	10^4	1	10^4	1
D5	Dipole	No	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^4$	1
D6	Dipole	No	10^{-4}	10^4	5	10^4	1
D7	Dipole	No	10^{-4}	10^4	5	$5 \cdot 10^4$	1
D8	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	10^{-1}	10^4	1
D9	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	10^3	1
D10	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^3$	1
D11	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	10^4	1
D12	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^3$	1
D13	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	10^4	1
D14	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	2	10^4	1
D15	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^3$	20.85
D16	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	10^4	20.85
D17	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^4$	20.85
D18	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	1	10^5	20.85
D19	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	5	10^4	20.85
D20	Dipole	Yes	10^{-4}	10^4	5	$5 \cdot 10^4$	20.85
D21	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	$5 \cdot 10^4$	20.85
D22	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	10^{-1}	10^5	20.85
D23	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^4$	20.85
D24	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	$5 \cdot 10^{-1}$	10^5	20.85
D25	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	$5 \cdot 10^3$	20.85
D26	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	10^4	20.85
D27	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	$5 \cdot 10^4$	20.85
D28	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	10^5	20.85
D29	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	2	$5 \cdot 10^4$	20.85
D30	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	2	10^5	20.85
D31	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	5	10^5	20.85
D32	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	$5 \cdot 10^4$	20.85
D33	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	10^5	20.85
D34	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^4$	20.85
D35	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-1}$	10^5	20.85
D36	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	1	$5 \cdot 10^4$	20.85
D37	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	1	10^5	20.85
D38	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	2	$5 \cdot 10^4$	20.85
D39	Dipole	Yes	10^{-5}	10^{-2}	2	10^5	20.85
Q1	Quadrupole	No	10^{-4}	10^4	1	10^4	1
Q2	Quadrupole	No	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^4$	1
Q3	Quadrupole	No	10^{-4}	10^4	5	$5 \cdot 10^3$	1
Q4	Quadrupole	No	10^{-4}	10^4	5	10^4	1
Q5	Quadrupole	No	10^{-4}	10^4	5	$5 \cdot 10^4$	1
Q6	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	10^3	1
Q7	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^3$	1
Q8	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	$5 \cdot 10^{-1}$	10^4	1
Q9	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	1	$5 \cdot 10^3$	1
Q10	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	1	10^4	1
Q11	Quadrupole	Yes	10^{-4}	10^4	2	10^4	1
Q12	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	$5 \cdot 10^4$	20.85
Q13	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	1	10^5	20.85
Q14	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	2	$5 \cdot 10^4$	20.85
Q15	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	2	10^5	20.85
Q16	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	3	$5 \cdot 10^4$	20.85
Q17	Quadrupole	Yes	10^{-5}	10^{-1}	5	$5 \cdot 10^4$	20.85

 Table 1: Parameters of the simulations performed at $P_m = 10^2$ in the viscous and Eddington–Sweet regimes.

Case	Contraction in induction equation	Re_c	L_u	$\frac{\sigma_1}{ \langle q \rangle \Omega}$	$\frac{\sigma_2}{ \langle q \rangle \Omega}$	$\frac{\sigma_3}{ \langle q \rangle \Omega}$	$\frac{\sigma}{ \langle q \rangle \Omega}$
Q3	No	5	$5 \cdot 10^3$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$	$2.2 \cdot 10^{-2}$
Q4	No	5	10^4	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-2}$
Q9	Yes	1	$5 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$8.1 \cdot 10^{-3}$	$9.2 \cdot 10^{-3}$
Q10	Yes	1	10^4	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$
Q11	Yes	2	10^4	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$

Table 2: Ratio between the growth rate $\sigma_{i=1,2,3}$ of the instability and the product of the absolute value of the surface-averaged shear parameter $|\langle q \rangle|$ by the local rotation rate Ω . The $\sigma_{i=1,2,3}$ are the growth rates associated with the different control points visible in the first panel of Fig. 15 for the cases Q3 and Q4, and in the second panel for the runs Q9 to Q11. The surface-averaged value of the shear parameter is obtained by taking a surface enclosing the location of the instability, then by calculating a surface integral such as $\langle q \rangle = 1/S \iint (\partial \ln \Omega / \partial \ln \theta) dS$. From these ratios, an arithmetic mean is determined and denoted by $\overline{(\sigma/|\langle q \rangle |\Omega)}$ in the present Table. The parameters $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, E , and P_m are respectively fixed to 10^4 , 10^{-4} , and 10^2 for each run.

Case	Contraction in induction equation	Re_c	L_u	$\frac{V_{\text{phase}_1}}{V_{f_1}}$	$\frac{V_{\text{phase}_2}}{V_{f_2}}$	$\frac{V_{\text{phase}_3}}{V_{f_3}}$	$\frac{\overline{V_{\text{phase}}}}{\overline{V_f}}$	$\frac{\overline{V_{B_\phi}}}{\overline{V_f}}$
Q3	No	5	$5 \cdot 10^3$	0.28	0.33	0.35	0.32	-0.68
Q4	No	5	10^4	0.07	0.09	0.11	0.09	-0.91
Q9	Yes	1	$5 \cdot 10^3$	1.78	2.12	2.49	2.13	1.13
Q10	Yes	1	10^4	1.52	1.77	2.20	1.83	0.83
Q11	Yes	2	10^4	2.00	2.00	2.34	2.11	1.11

Table 3: Ratio of the phase velocity $V_{\text{phase}_{i=1,2,3}}$ and the local contraction velocity field $V_{f_{i=1,2,3}}$, estimated at a given control point as explained in Table 2. An arithmetic mean is obtained from these ratios and denoted by $\overline{V_{\text{phase}}/V_f}$. We also have listed the arithmetic mean of the ratio between the velocity field caused by the addition of the toroidal field, and the contraction velocity field. The parameters E , $P_r (N_0/\Omega_0)^2$, and P_m are respectively 10^{-4} , 10^4 , and 10^2 .

Appendix A: Electrical-current function

In this appendix, we determine the stream function that is constant along the streamlines of the poloidal component of the current density \mathbf{j}_p . The toroidal component of the magnetic field is related to \mathbf{j}_p through

$$\mathbf{j}_p = \nabla \times (B_\phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \mathbf{e}_\theta. \quad (\text{A.1})$$

As the divergence of the curl is zero and the problem is axisymmetric, we can define a vector potential χ as

$$j_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \chi); \quad j_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \chi), \quad (\text{A.2})$$

from which we define the electrical-current stream function $\mathcal{J}_p = r \sin \theta \chi$:

$$j_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \theta}; \quad j_\theta = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial r}. \quad (\text{A.3})$$

We thus obtain a relationship between the toroidal field and the electrical-current stream function:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial \theta}; \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) = \frac{-1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{J}_p}{\partial r}. \quad (\text{A.4})$$

By integrating the first equation we have

$$\mathcal{J}_p = r \int \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta B_\phi) d\theta = r \sin \theta B_\phi + f(r), \quad (\text{A.5})$$

and substituting in the second equation we deduce

$$\frac{f'(r)}{-r \sin \theta} = 0 \quad \implies \quad f(r) = \text{cte}. \quad (\text{A.6})$$

As the electrical-current stream function is zero at the poles, we conclude that $\text{cte} = 0$ hence:

$$\mathcal{J}_p = r \sin \theta B_\phi. \quad (\text{A.7})$$

Appendix B: Hartmann boundary layer equations

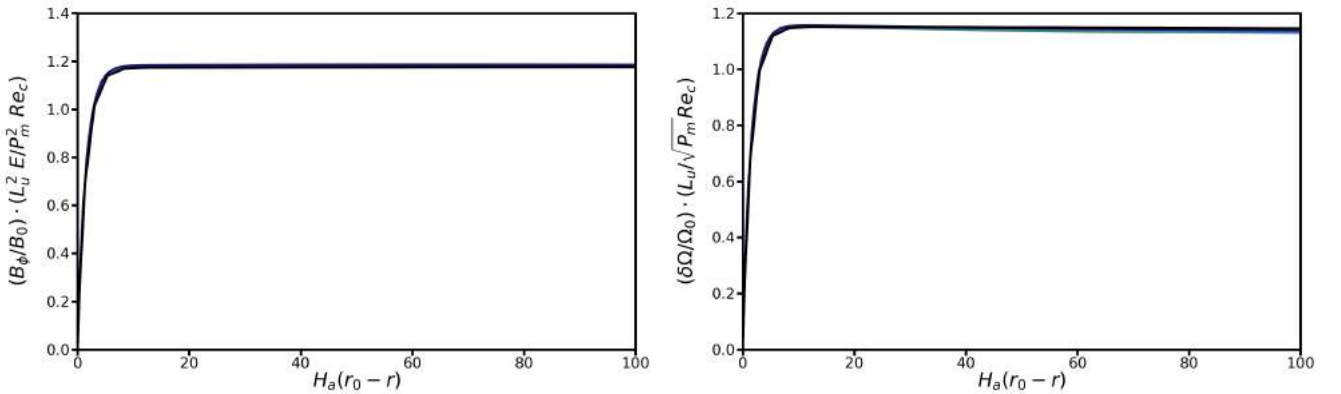


Fig. B.1: Toroidal field normalised to B_0 (left panel) and differential rotation normalised to Ω_0 (right panel), respectively rescaled by $L_u^2 E / P_m^2 Re_c$ and $L_u / \sqrt{P_m} Re_c$, as a function of the stretched coordinate $\xi = H_a(r_0 - r)$. The curves are plotted at $\theta = \pi/4$ for various Re_c and L_u with no contraction term in the induction equation. We thus have $Re_c = 1, L_u = 5 \cdot 10^3$ in green, $Re_c = 1, L_u = 10^4$ in light blue, $Re_c = 1, L_u = 5 \cdot 10^4$ in blue, $Re_c = 5, L_u = 10^4$ in purple, and $Re_c = 5, L_u = 5 \cdot 10^4$ in black. The other parameters are $E = 10^{-4}$, $P_r(N_0/\Omega_0)^2 = 10^4$, and $P_m = 10^2$ (runs D3 to D7 of Table 1).

In the present appendix, the Hartmann boundary layer equations are derived with the aim of relating the jump of the toroidal field across the layer with the differential rotation jump. The Hartmann layer occurs at the electrically insulating outer boundary where the azimuthal velocity is fixed and a magnetic field perpendicular to the flow is present. When the contraction term is removed from

the induction equation, the governing equations for the azimuthal flow and the toroidal field component in the steady linear limit read:

$$2\Omega_0 \left(U_s - \sin \theta \frac{V_0 r_0^2}{r^2} \right) = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left[\frac{B_\theta}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} B_\theta B_\phi + B_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{B_r B_\phi}{r} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U_\phi}{\partial \theta} - \frac{U_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (\text{B.1})$$

$$U_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} - B_r \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{B_\theta}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \theta} + U_\phi \left(\frac{B_r}{r} + \frac{\cot \theta B_\theta}{r} \right) - B_\phi \left(\frac{U_r}{r} + \frac{\cot \theta U_\theta}{r} \right) = \eta \left[\frac{\partial^2 B_\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\phi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} - \frac{B_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right]. \quad (\text{B.2})$$

Since in our simulations the Elsasser number $\Lambda = B_0^2 / \mu_0 \rho_0 \Omega_0 \eta$ is $\gg 1$, the Coriolis term becomes negligible with respect to the Lorentz force (Acheson & Hide 1973), then, assuming $U_r \ll U_\phi$ and conserving the highest radial derivatives in each term, we get the Hartmann boundary layer equations (see also reviews by Roberts (1967); Acheson & Hide (1973); Dormy et al. (1998)):

$$\frac{B_r}{\mu_0 \rho_0} \frac{\partial B_\phi^H}{\partial r} = -\nu \frac{\partial^2 U_\phi^H}{\partial r^2}, \quad B_r \frac{\partial U_\phi^H}{\partial r} = -\eta \frac{\partial^2 B_\phi^H}{\partial r^2}, \quad (\text{B.3})$$

where the index H denotes a boundary layer flow. As $B_r(r_0, \theta) = -B_0 \cos \theta$ (see Eq. (22)), then after introducing the stretched coordinate $\xi = (B_0 r_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0 \eta \nu}) (r_0 - r)$, Sys. (B.3) is rewritten as:

$$\frac{\cos \theta}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \frac{\partial B_\phi^H}{\partial \xi} = -r_0 \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} \frac{\partial^2 U_\phi^H}{\partial \xi^2}, \quad \sqrt{\mu_0 \rho_0} \cos \theta \frac{\partial U_\phi^H}{\partial \xi} = -r_0 \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} \frac{\partial^2 B_\phi^H}{\partial \xi^2}. \quad (\text{B.4})$$

By deriving the second of these two equations, U_ϕ^H can be eliminated to yield:

$$\frac{\partial^3 B_\phi^H}{\partial \xi^3} - \frac{\cos^2 \theta}{r_0^2} \frac{\partial B_\phi^H}{\partial \xi} = 0, \quad (\text{B.5})$$

whose the solution is

$$B_\phi^H(\xi, \theta) = C_1 + \frac{C_2 r_0}{\cos \theta} \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right) + \frac{C_3 r_0}{\cos \theta} \exp\left(\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right). \quad (\text{B.6})$$

From the evanescent condition when $\xi \rightarrow \infty$, $C_1 = C_3 = 0$, and from the vacuum condition at the outer sphere $B_\phi^H(0, \theta) + B_\phi^I(r_0, \theta) = 0$, $C_2 = -(\cos \theta / r_0) B_\phi^I(r_0, \theta)$, hence:

$$B_\phi^H(\xi, \theta) = -B_\phi^I(r_0, \theta) \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right). \quad (\text{B.7})$$

This time, the index I stands for interior flow. We now integrate the second equation of Sys. (B.4):

$$U_\phi^H(\xi, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} B_\phi^I(r_0, \theta) \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right) + C_4. \quad (\text{B.8})$$

Again, from the evanescent equation when $\xi \rightarrow \infty$, we readily get $C_4 = 0$. Then, as $U_\phi^H(\xi, \theta) + U_\phi^I(r_0, \theta) = 0$ at the outer sphere, we obtain the following relationship between the interior flows:

$$U_\phi^I(r_0, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}} B_\phi^I(r_0, \theta), \quad (\text{B.9})$$

and,

$$U_\phi^H(\xi, \theta) = -U_\phi^I(r_0, \theta) \exp\left(-\cos \theta \frac{\xi}{r_0}\right). \quad (\text{B.10})$$

Thus, using the estimate Eq. (36), we deduce from Eq. (B.9) the order of magnitude of the jump on the differential rotation across the Hartmann layer

$$U_{\phi}^I(r_0, \theta) \approx O\left(\frac{r_0 \mu_0 \rho_0 V_0 \Omega_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0} B_0} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}}\right) \Rightarrow \frac{\Delta \Omega^I(r_0, \theta)}{\Omega_0} \approx O\left(\frac{\sqrt{\mu_0 \rho_0} V_0}{B_0} \sqrt{\frac{\eta}{\nu}}\right) = O\left(\frac{\sqrt{P_m} Re_c}{L_u}\right). \quad (\text{B.11})$$

In Fig. B.1, we plotted the normalised toroidal field B_{ϕ}/B_0 (left panel) and the normalised differential rotation $\delta\Omega/\Omega_0$ (right panel) as a function of the stretched coordinate ξ at the particular location $\theta = \pi/4$. This was done for runs obtained at various L_u ranging from $5 \cdot 10^3$ to $5 \cdot 10^4$, both for $Re_c = 1$ and 5 (runs D3 to D7 of Table 1). These quantities have been rescaled with their characteristic amplitude as given by Eqs. (36) and (B.11). We can observe that the different curves overlap and are of $O(1)$ after rescaling. This enables us to conclude that the $O(r_0 \mu_0 \rho_0 V_0 \Omega_0 / B_0)$ jump on the toroidal magnetic field at the outer sphere induces a $O(r_0 \sqrt{\mu_0 \rho_0} V_0 \Omega_0 \sqrt{\eta} / B_0 \sqrt{\nu})$ jump on the azimuthal component of the velocity field across the Hartmann layer or equivalently, a $O(\sqrt{\mu_0 \rho_0} V_0 \sqrt{\eta} / B_0 \sqrt{\nu})$ jump on the normalised differential rotation. As a result, the quasi-solid rotation region is in differential rotation with the outer sphere and the characteristic amplitude of this differential rotation is given by Eq. (B.11).

Appendix C: Approximate solutions of differential rotation in the dead zone

Appendix C.1: Case 1 - No effect of the contraction on the field lines

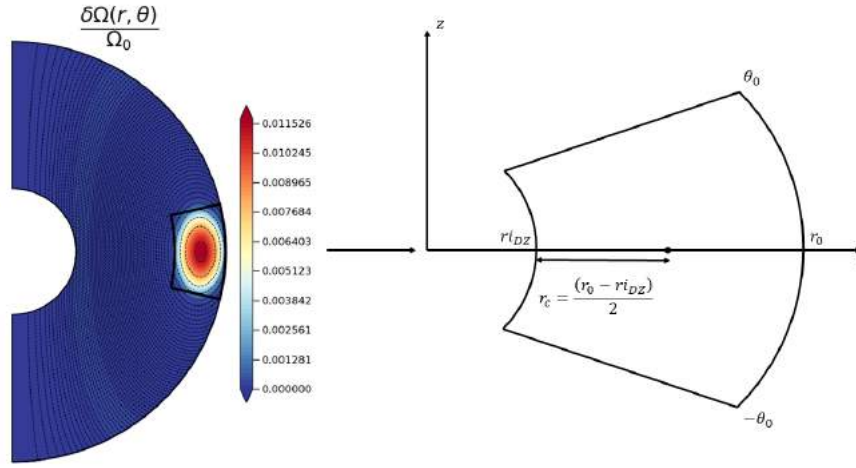


Fig. C.1: Sketch of the conical domain chosen to represent the DZ when the field lines are not advected by the contraction. The displayed meridional cut of the normalised rotation rate is the same as in the first panel of Fig. 3. The conical domain, delimited by thick black lines on the meridional cut, is defined by $r \in [r_{iDZ}; r_0]$ and $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$, with $r_{iDZ} = 0.77 r_0$, $\theta_0 \approx \pi/14$, and $-\theta_0 \approx -\pi/14$ or equivalently, in terms of colatitude, $\theta \in [3\pi/7; 4\pi/7]$.

This appendix is intended to solve in the DZ the viscous balance Eq. (35), whose dimensionless form reads

$$\tilde{r} \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial r^2} + 4 \frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial r} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} + \frac{3 \cot \theta}{\tilde{r}} \frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta} = \frac{-2}{E \tilde{r}^2}. \quad (\text{C.1})$$

To do so, the DZ is assimilated to a conical domain as sketched in Fig. C.1. This domain, denoted \mathcal{D} , is such that:

$$\mathcal{D} = \{r_{iDZ} \leq r \leq r_0; -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0\}, \quad (\text{C.2})$$

where $r_{iDZ} = 0.77 r_0$ and the latitude θ_0 is $\approx \pi/14$. In addition, we assume that the term $(3 \cot \theta / \tilde{r}) \partial \delta \tilde{\Omega} / \partial \theta$ is negligible as compared to the others. This assumption has been verified a posteriori. Thus, Eq. (C.1) is rewritten as follows:

$$\tilde{r}^3 \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial r^2} + 4 \tilde{r}^2 \frac{\partial \delta \tilde{\Omega}}{\partial r} + \tilde{r} \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}}{\partial \theta^2} = \frac{-2}{E}. \quad (\text{C.3})$$

Outside the domain \mathcal{D} , the flow is assumed to be in solid rotation and symmetrical with respect to the equatorial plane so that we adopt the following homogeneous boundary conditions:

$$\delta \Omega(r_0, \theta) = \delta \Omega(r_{iDZ}, \theta) = \delta \Omega(r, \theta_0) = \left. \frac{\partial \delta \Omega(r, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0. \quad (\text{C.4})$$

The method for solving Eq. (C.3) was excerpted from a lecture of the Ira A. Fulton College of Engineering and Technology at Brigham Young University². The broad lines are now given. We first build a set of basis functions that will be used to express the solution. These are obtained by looking for separable solutions of the eigenvalue problem

$$\tilde{r}^3 \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}_h}{\partial r^2} + 4\tilde{r}^2 \frac{\partial \delta \tilde{\Omega}_h}{\partial r} + \tilde{r} \frac{\partial^2 \delta \tilde{\Omega}_h}{\partial \theta^2} = \tilde{\lambda} \tilde{r} \delta \tilde{\Omega}_h, \quad (\text{C.5})$$

satisfying the boundary conditions Eq. (C.4). We finally determine a general solution using the orthogonality properties of the basis functions.

Separable solutions, $\delta \tilde{\Omega}_h = \tilde{g}(\theta) \tilde{f}(r)$, of Eq. (C.5) must verify:

$$\tilde{r}^3 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r}^2 \tilde{f}'(r) + \tilde{r} \tilde{g}''(\theta) = \tilde{\lambda} \tilde{r} \tilde{g}(\theta) \tilde{f}(r) \implies \frac{\tilde{r}^2 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r} \tilde{f}'(r)}{\tilde{f}(r)} + \frac{\tilde{g}''(\theta)}{\tilde{g}(\theta)} = \tilde{\lambda}, \quad (\text{C.6})$$

with the boundary conditions

$$g(\theta_0) = g'(0) = 0 \quad \text{and} \quad f(r_0) = f(r_{\text{DZ}}) = 0. \quad (\text{C.7})$$

The problem thus reduces to the solving the two following sub-eigenvalue problems:

$$\tilde{g}''(\theta) - \tilde{\nu} \tilde{g}(\theta) = 0 \quad \text{and} \quad \tilde{r}^2 \tilde{f}''(r) + 4\tilde{r} \tilde{f}'(r) - \tilde{\mu} \tilde{f}(r) = 0 \quad \text{with} \quad \tilde{\nu} + \tilde{\mu} = \tilde{\lambda}. \quad (\text{C.8})$$

The differential equation in θ is a classical Sturm-Liouville problem while the differential equation in r is known as the Euler's problem. We first deal with the Sturm-Liouville problem.

In order to avoid unphysical solutions, the eigenvalues must be strictly negative. The solution then reads

$$\tilde{g}_k(\theta) = \tilde{A}_k \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta) + \tilde{B}_k \sin(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta). \quad (\text{C.9})$$

Its latitudinal derivative is readily

$$\tilde{g}'_k(\theta) = -\tilde{A}_k \sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \sin(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta) + \tilde{B}_k \sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta). \quad (\text{C.10})$$

From the condition of symmetry, $\tilde{B}_k = 0$ and $\tilde{g}_k(\theta) = \tilde{A}_k \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta)$. Besides, $\tilde{g}_k(\theta_0) = \tilde{A}_k \cos(\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta_0) = 0$. Since we are looking for a non-trivial solution (i.e. $\tilde{A}_k \neq 0$) we obtain

$$\sqrt{|\tilde{\nu}_k|} \theta_0 = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{with} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.11})$$

thus concluding that

$$\tilde{\nu}_k = -\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 \quad \text{with} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.12})$$

are the sought eigenvalues and are associated with the eigenfunctions

$$\tilde{g}_k(\theta) = \tilde{A}_k \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) \quad \text{with} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.13})$$

We are now going to solve the Euler's problem. Here the eigenvalues must be $< -9/4$ to avoid unphysical solutions. In that case, the solution reads:

$$\tilde{f}_n(r) = \tilde{C}_n \tilde{r}^{-\left(3+i\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\right)/2} + \tilde{D}_n \tilde{r}^{-\left(3-i\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|}\right)/2}, \quad (\text{C.14})$$

which can be rewritten as

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{\tilde{C}_n}{\tilde{r}^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) + \frac{\tilde{D}_n}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{C.15})$$

From the condition $\tilde{f}_n(1) = 0$ we have $\tilde{C}_n = 0$, and

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{\tilde{D}_n}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{|9+4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{C.16})$$

² <https://www.et.byu.edu/~vps/ME505/IEM/0802.pdf>

The second boundary condition leads to

$$\frac{\tilde{D}_n}{\tilde{r}_{i\text{DZ}}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})\right) = 0. \quad (\text{C.17})$$

Excluding the non-trivial solution $\tilde{D}_n = 0$ we obtain

$$\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}) = n\pi \quad \text{with } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.18})$$

The sought eigenvalues are thus

$$\tilde{\mu}_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right)^2 \quad \text{with } n \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.19})$$

and are associated with the eigenfunctions

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{\tilde{D}_n}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{n\pi \ln(\tilde{r})}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \quad \text{with } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.20})$$

The general solution $\delta\Omega(r, \theta)$ is now expanded over the basis of the eigenfunctions satisfying the boundary conditions Eq. (C.7):

$$\delta\tilde{\Omega}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) \quad \text{with } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.21})$$

Thus, this solution verifies the boundary conditions Eq. (C.4). We now need to find the A_{nk} coefficients. These are determined using the orthogonality properties of the eigenfunctions. After determining the different partial derivatives of the function $\delta\Omega(r, \theta)$ and after substituting their expressions in Eq. (C.3), we obtain the following relationship:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\sqrt{\tilde{r}}} \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right)^2 - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2 \right] \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) = \frac{-2}{E}. \quad (\text{C.22})$$

As

$$\tilde{\lambda}_{nk} = \left[\underbrace{-\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right)^2}_{|\tilde{\mu}_n|} - \underbrace{\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2}_{|\tilde{\nu}_k|} \right] \quad \text{with } n, k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.23})$$

Eq. (C.22) is rewritten as follows

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk} \tilde{\lambda}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) = \frac{-2}{\tilde{r}E}. \quad (\text{C.24})$$

Multiplying each members of this relationship by $\tilde{r}^{-1/2} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}\right) \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right)$, then integrating over the domain \mathcal{D} the resulting relationship, we obtain the coefficients A_{nk} :

$$\tilde{A}_{nk} = \left(\frac{4(n\pi)^2 + (\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}))^2}{E \tilde{\lambda}_{nk} (\tilde{r}_{i\text{DZ}} - 1) (n\pi)^2 \theta_0} \right) \left(\frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k \right) \left(\frac{4n\pi \ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}})}{4(n\pi)^2 + 9(\ln(\tilde{r}_{i\text{DZ}}))^2} [(-1)^n \tilde{r}_{i\text{DZ}}^{3/2} - 1] \right) \quad \text{with } n, k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.25})$$

and the final solution, which reads under dimensional form

$$\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} = \text{Re} e_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{(2n\pi)^2 + \left(\ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)\right)^2}{\lambda_{nk} \left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0} - 1\right) (n\pi)^2 \theta_0} \right) \left(\frac{-4\theta_0}{(2k-1)\pi} (-1)^k \right) \left(\frac{4n\pi \ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)}{(2n\pi)^2 + \left(3 \ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)\right)^2} \left((-1)^n \left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)^{3/2} - 1 \right) \right) \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \sin\left(\left(\frac{n\pi}{\ln\left(\frac{r_{i\text{DZ}}}{r_0}\right)}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right) \theta\right) \quad \text{with } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.26})$$

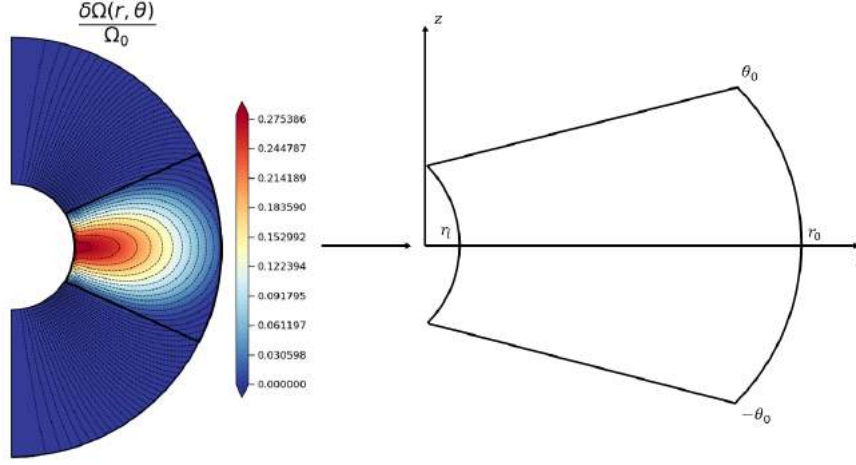


Fig. C.2: Sketch of the conical domain chosen to represent the DZ when the field lines are advected by the contraction. The displayed meridional cut of the normalised rotation rate is the same as in the third panel of Fig. 3. The conical domain, delimited by thick black lines on the meridional cut, is defined by $r \in [r_i; r_0]$ and $\theta \in [-\theta_0; \theta_0]$, where $\theta_0 \approx 4\pi/23$ and $-\theta_0 \approx -4\pi/23$ or equivalently, in terms of colatitude, $\theta \in [15\pi/46; 31\pi/46]$.

Appendix C.2: Case 2 - Advection of the field lines by the contraction

When the contraction term is introduced in the induction equation, the poloidal field lines are advected and the DZ connects to the inner sphere (see Fig. C.2). This modifies the boundary conditions Eq. (C.4) since at the inner sphere, the azimuthal component of the velocity field now satisfies a stress-free condition hence:

$$\delta\Omega(r_0, \theta) = \frac{\partial\delta\Omega(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = \delta\Omega(r, \theta_0) = \frac{\partial\delta\Omega(r, \theta)}{\partial\theta} \Big|_{\theta=0} = 0. \quad (\text{C.27})$$

Thus, the solution of the Sturm-Liouville problem is unchanged and the sought eigenvalues are again Eq. (C.12) and are associated with the eigenfunctions Eq. (C.13). For the Euler's problem, the eigenvalues must still be $< 9/4$ to avoid unphysical solutions. By taking Eq. (C.15), and after using the condition $\tilde{f}_n(1) = 0$, we have

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{\tilde{D}_n}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right). \quad (\text{C.28})$$

By deriving this expression to apply the stress-free condition to it, we get the transcendental equation

$$3 \tan\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i)\right) - \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} = 0. \quad (\text{C.29})$$

After numerically solving this equation, we obtain the eigenvalues μ_n . The general solution $\delta\Omega(r, \theta)$ of Eq. (C.3) is then expanded on the basis of the eigenfunctions satisfying the boundary conditions Eq. (C.27) on the domain \mathcal{D}

$$\delta\tilde{\Omega}(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\tilde{r}^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) \quad \text{with } n, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{C.30})$$

As previously, after determining the different partial derivatives of the function $\delta\Omega(r, \theta)$, and after substituting them in Eq. (C.3), we get:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{A}_{nk}}{\sqrt{\tilde{r}}} \underbrace{\tilde{\mu}_n - \left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)^2}_{\tilde{\lambda}_{nk}} \sin\left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r})\right) \cos\left(\left(\frac{(2k-1)\pi}{2\theta_0}\right)\theta\right) = \frac{-2}{E}. \quad (\text{C.31})$$

Again, using the orthogonality properties enables us to determine the A_{nk} coefficients

$$\tilde{A}_{nk} = \frac{\left[2 \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \left(\tilde{r}_i^{3/2} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i) \right) - 1 \right) - 6 \tilde{r}_i^{3/2} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i) \right) \right]}{\left[|9 + 4\tilde{\mu}_n| (1 - \tilde{r}_i) + \tilde{r}_i \left(\cos \left(\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i) \right) + \sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \sin \left(\sqrt{|9 + 4\tilde{\mu}_n|} \ln(\tilde{r}_i) \right) - 1 \right) \right]} \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{16 (1 + |9 + 4\tilde{\mu}_n|) (-1)^k}{E \tilde{\lambda}_{nk} (2k - 1) (9 + |9 + 4\tilde{\mu}_n|) \pi},$$

and so the final solution which, under dimensional form, reads as follows:

$$\frac{\delta\Omega(r, \theta)}{\Omega_0} = Re_c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[2 \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \left(\left(\frac{r_i}{r_0} \right)^{3/2} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \right) - 1 \right) - 6 \left(\frac{r_i}{r_0} \right)^{3/2} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \right) \right]}{\left[|9 + 4\mu_n| \left(1 - \frac{r_i}{r_0} \right) + \frac{r_i}{r_0} \left(\cos \left(\sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \right) + \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \sin \left(\sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln \left(\frac{r_i}{r_0} \right) \right) - 1 \right) \right]} \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{16 (1 + |9 + 4\mu_n|) (-1)^k}{\lambda_{nk} (2k - 1) (9 + |9 + 4\mu_n|) \pi} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3/2} \sin \left(\frac{1}{2} \sqrt{|9 + 4\mu_n|} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \right) \cos \left(\left(\frac{(2k - 1) \pi}{2\theta_0} \right) \theta \right),$$

where $n, k \in \mathbb{Z}$.

Author: Bastien Gouhier

Title: Dynamics of stellar radiative zones in differential rotation

Abstract

Stars experience contraction and/or expansion phases at different stages of their existence. Seismic measurements of internal rotation have shown the need to improve the physical description of transport processes of angular momentum and chemical elements during these rapid phases of evolution. In addition, spectropolarimetric surveys suggest a strong-fields/weak-fields dichotomy among the intermediate-mass stars. Understanding how these fields interact with the differential rotation forced by the contraction could help us to address the origin of the magnetism of these stars.

This thesis aims at making progress on the issue of the angular momentum transport induced by the contraction of a magnetised, or non-magnetised, stellar radiative zone. For this purpose, we perform axisymmetric (magneto)hydrodynamical simulations of a stably stratified rotating spherical layer undergoing contraction, having or not, a large-scale magnetic field. Contraction is modelled by a steady radial mass flux and simulations are carried out in the Boussinesq and anelastic approximations. An extensive parametric study is conducted to cover the different regimes of rotation, contraction, stable stratification and magnetic field that are appropriate for stars.

In the absence of magnetic field, we determine two relevant regimes: the Eddington-Sweet regime in which the meridional circulation dominates the angular momentum transport, and the viscous regime where the viscosity plays a leading role. The Eddington-Sweet regime, relevant for pre-main sequence stars and outside the degenerate core of subgiants, naturally results in a differential rotation, both in latitude and radius. The viscous regime, relevant in the degenerate core of subgiants, leads to a spherically symmetric rotation profile. In both cases, we derive a scaling law which enables us to estimate the amplitude of the differential rotation. When a magnetic field is applied, the flow is characterised by the presence of two magnetically decoupled regions. In one of them, magnetic tension imposes solid-body rotation while in the other, called the dead zone, the Lorentz force becomes negligible and a differential rotation exists. In some cases, we show that the latitudinal shear built in the dead zones triggers a powerful axisymmetric instability able to destroy the large-scale structure of the magnetic field and to result in a flow reconfiguration. We propose that this could potentially explain the rotational evolution of subgiants as well as the observed dichotomy between strong-fields/weak-fields of intermediate-mass stars.

Key words: stars – rotation – astrophysical fluid dynamics – magnetohydrodynamics (MHD) – instabilities – numerical simulations

Auteur : Bastien Gouhier

Titre : Dynamique des zones radiatives stellaires en rotation différentielle

Directeurs de thèse : Laurène Jouve & François Lignières

Lieu et date de soutenance : Toulouse, le 19 janvier 2022

Résumé

Les étoiles expérimentent des phases de contraction et/ou d'expansion à différentes étapes de leur existence. Les mesures sismiques de la rotation interne ont montré la nécessité d'améliorer la description physique des processus de transport du moment cinétique et des éléments chimiques durant ces phases d'évolution rapide. Par ailleurs, les relevés spectropolarimétriques indiquent une dichotomie champs forts/champs faibles parmi les étoiles de masse intermédiaire. Comprendre comment ces champs interagissent avec la rotation différentielle forcée par la contraction peut nous aider à élucider l'origine du magnétisme de ces étoiles.

L'objectif de cette thèse est de progresser sur la question du transport du moment cinétique induit par la contraction d'une zone radiative stellaire magnétisée, ou non. À cette fin, nous réalisons des simulations axisymétriques (magnéto)hydrodynamiques d'une couche sphérique d'un fluide stablement stratifié en rotation et en contraction, possédant, ou non, un champ magnétique à grande échelle. La contraction est modélisée par un flux de masse radial stationnaire et les simulations sont effectuées dans les approximations de Boussinesq et anélastique. Une étude paramétrique étendue est menée afin de couvrir les différents régimes de rotation, contraction, stratification stable et champ magnétique, appropriés dans les étoiles considérées.

En l'absence de champ magnétique, nous déterminons deux régimes pertinents : le régime d'Eddington-Sweet, dans lequel la circulation méridienne domine le transport de moment cinétique, et le régime visqueux où la viscosité joue un rôle prépondérant. Le régime d'Eddington-Sweet, pertinent pour les étoiles de la pré-séquence principale et dans les sous-géantes en dehors de leur cœur dégénéré, aboutit naturellement à une rotation différentielle à la fois en rayon et en latitude. Le régime visqueux, correspondant au cœur dégénéré des sous-géantes, conduit quant à lui à un profil de rotation à symétrie sphérique. Dans les deux cas, nous obtenons une loi d'échelle qui permet d'estimer l'amplitude de la rotation différentielle. Lorsqu'un champ magnétique est imposé, l'écoulement est caractérisé par deux régions magnétiquement découplées. Dans l'une d'elles la tension magnétique impose une rotation solide alors que dans l'autre, que l'on appelle la zone morte, la force de Lorentz devient passive et une rotation différentielle existe. Dans certains cas, nous montrons que le cisaillement en latitude présent dans les zones mortes déclenche une puissante instabilité axisymétrique capable de détruire la structure à grande échelle du champ magnétique et d'entraîner une reconfiguration de l'écoulement. Nous proposons que ceci puisse potentiellement expliquer l'évolution rotationnelle des sous-géantes ainsi que la dichotomie observée entre champ forts/champ faibles des étoiles de masse intermédiaire.

Mots-clés : étoiles – rotation – dynamique des fluides astrophysique – magnétohydrodynamique (MHD) – instabilités – simulations numériques

Discipline administrative : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie – 14, avenue Edouard Belin – 31400
Toulouse – FRANCE