



**HAL**  
open science

# Sur la performance des méthodes convexes et non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension en science des données

Yann Traonmilin

► **To cite this version:**

Yann Traonmilin. Sur la performance des méthodes convexes et non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension en science des données. Théorie de l'information et codage [math.IT]. Université de Bordeaux, 2021. tel-03715459

**HAL Id: tel-03715459**

**<https://theses.hal.science/tel-03715459>**

Submitted on 12 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Spécialité : mathématiques appliquées

---

Sur la performance des méthodes convexes et non-convexes  
de reconstruction de modèles de faible dimension en science  
des données

Présentée par :

Yann Traonmilin

le 6 octobre 2021

---

devant le jury composé de:

Jean-François Aujol	Professeur	Université de Bordeaux	(Garant)
Laure Blanc-Féraud	Directrice de recherche	CNRS	(Rapportrice)
Antonin Chambolle	Directeur de recherche	CNRS	(Président du jury)
Caroline Chauv	Chargée de recherche	CNRS	(Examinatrice)
Yohann De Castro	Professeur	École Centrale Lyon	(Rapporteur)
Jérôme Idier	Directeur de recherche	CNRS	(Examineur)
Laurent Jacques	Professeur	Université Catholique de Louvain	(Rapporteur)

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Diriger des recherches . . . . .	5
1.2	Profil scientifique . . . . .	6
1.3	Dans ce manuscrit . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Reconstruction de cônes de faible dimension dans les espaces de Hilbert</b>	<b>9</b>
2.1	Modèle de faible dimension, garanties de performance et isométries restreintes . . . . .	9
2.2	Géométrie de la reconstruction : ensembles de descente et normes atomiques . . . . .	12
2.3	Reconstruction stable et robuste . . . . .	16
2.4	Application à la parcimonie structurée par niveaux . . . . .	19
2.5	Généralité du résultat . . . . .	24
2.6	Perspectives . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Régularisations convexes optimales pour la reconstruction de modèles de faible dimension</b>	<b>26</b>
3.1	Mesures d'adéquation et régularisations optimales . . . . .	26
3.2	Un résultat exact sur un exemple minimal : la reconstruction 1-parcimonieuse en 3D . . . . .	30
3.3	Mesures d'adéquation basées sur la RIP . . . . .	31
3.4	Perspectives . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Géométrie des méthodes non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension</b>	<b>37</b>
4.1	Au delà des espaces de Hilbert : un cadre générique pour l'étude des problèmes inverses . . . . .	37
4.2	Bassins d'attraction explicites des minimiseurs globaux . . . . .	42

4.3	Applications . . . . .	48
4.4	D'une initialisation par projection idéale à une initialisation par projection en pratique : le défi des méthodes non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension ? . . . . .	55
4.5	Perspectives . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Applications en science des données</b>	<b>57</b>
5.1	Apprentissage statistique compressé . . . . .	57
5.2	Estimation rapide d'impulsions sans grille . . . . .	60
5.3	Reconstruction de phase . . . . .	60
5.4	Régularisation pour la super-résolution multi-images . . . . .	61
5.5	Géophysique . . . . .	62
5.6	Perspectives . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Liste des publications</b>	<b>64</b>
6.1	Articles de revues internationales . . . . .	64
6.2	Chapitres de livres . . . . .	65
6.3	Articles de conférences . . . . .	65
6.4	Preprint / Rapport technique . . . . .	66
6.5	Conférence sans actes/Séminaires . . . . .	66
6.6	Thèse . . . . .	68
<b>7</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>69</b>

**Remerciements :**

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis d'aboutir à ce manuscrit : ma famille qui m'a toujours soutenu, toutes les personnes avec qui j'ai travaillé, échangé et qui m'ont permis de progresser et enfin mes amis dont la liberté d'esprit m'a inspiré pour me lancer dans cette carrière qui me passionne. Enfin je remercie les membres du jury, et les rapporteurs en particulier d'avoir accepté de porter un regard sur mes travaux de recherche.

# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce manuscrit, je donne un résumé étendu et consolidé de mes travaux depuis l'obtention de ma thèse. J'essaie de faire ressortir les résultats d'importance que j'ai pu obtenir. C'est aussi l'occasion de décrire mes travaux en français (ce que je n'ai que trop rarement l'occasion de faire !).

Avant de me lancer dans cet exercice, je commence par brièvement expliquer ce qui me pousse à écrire ce manuscrit. Je décris mon profil scientifique puis introduis mes travaux qui sont présentés dans les chapitres suivants.

### 1.1 Diriger des recherches

Depuis que j'ai commencé ma carrière dans le monde académique, mon objectif est de pouvoir mener mes recherches en équipe. Ce qui est synonyme pour moi d'enrichissement mutuel et permet la production de résultats de qualité. Cela a été possible pour moi dans les différents environnements que j'ai connu : à Télécom Paristech en thèse, à l'INRIA Rennes en postdoc et enfin à l'Institut de mathématiques de Bordeaux depuis que je suis chargé de recherche au CNRS. C'est aussi pour cela que je me suis impliqué dans l'encadrement chaque fois que j'ai pu le faire : enseignement, encadrements de stages et projets.

Au fil du temps, mes sujets de recherche se sont affinés. Par la même, les questions ouvertes qui se posent se sont accumulées, me forçant à délaissier des pistes pourtant prometteuses. Certaines de ces pistes sont idéales pour débiter des travaux de thèse. J'ai donc cherché à les financer depuis que je suis titularisé. Après 3 ans de recherche de fonds intensives (et sans succès), j'ai pu commencer fin 2020 la direction de deux thèses (une sur financement de l'école doctorale (voir section (5.1)), et une thèse en entreprise CIFRE sur du traitement vidéo dans le sport amateur, ces deux thèses étant en co-direction avec Jean-François Aujol) grâce à une autorisation à diriger des thèses de l'école doctorale.

J'arrive donc au moment où passer la HDR est nécessaire pour continuer de construire une équipe autour de ces thématiques qui me passionnent. L'obtention d'un financement supplémentaire par l'agence nationale de la recherche dédié aux jeunes chercheurs (Projet ANR JCJC EFFIREG,

ce financement est destiné à encourager la prise de responsabilité des jeunes chercheurs) est le déclencheur final pour me lancer dans l'écriture de ce manuscrit.

## 1.2 Profil scientifique

Depuis mes débuts en recherche et développement en traitement du signal géophysique après mes études d'ingénieur jusqu'à mes travaux de recherche actuels, mes intérêts scientifiques se sont tournés peu à peu vers l'étude de questions principalement théoriques sur les fondements mathématiques des problèmes inverses en science des données.

Par science des données, j'entends essentiellement l'étude de la problématique d'extraire une information d'intérêt à partir de données numériques. Au cours des mes recherches je me suis principalement intéressé au traitement du signal et des images et y ai intégré par la suite des problématiques d'apprentissage automatique.

### 1.2.1 En quelques mots

Mes thèmes de recherche se trouvent à la croisée de la théorie des problèmes inverses et de l'analyse harmonique et variationnelle avec des applications en traitement du signal et des images et en apprentissage. Pour étudier la résolution des problèmes inverse mal posés rencontrés, je fais surtout appel à la théorie de la reconstruction parcimonieuse (reconstruction de modèles de faible dimension). C'est l'appartenance de l'inconnue à un modèle de faible dimension qui permet de garantir le succès de méthodes d'estimation malgré le caractère mal posé des problèmes considérés.

L'élément moteur de mes recherches est d'essayer de répondre aux questions suivantes sur les méthodes de résolution de problèmes inverses :

- Garantir la performance de ces méthodes
- Déterminer des méthodes optimales de résolution
- Garder en vue des applications possibles de mes travaux

### 1.2.2 En quelques équations

En résumé, on cherche à estimer une inconnue  $x_0$  à partir de mesures

$$y = Ax_0 + e \tag{1.1}$$

où  $A$  est un opérateur linéaire mal posé et  $e$  est le bruit. Dans les problèmes que j'ai considéré,  $x_0$  a pu être un signal, une image, une matrice de données, une densité de probabilité, etc ... L'opérateur d'observation (de mesure) peut par exemple être un sous-échantillonnage, un flou ou un opérateur de compression. Il modélise donc une dégradation de  $x_0$ , d'où le caractère mal posé du problème inverse.

Une approche classique est de chercher une estimation sous contrainte (s.c.) de la forme

$$x^* = \arg \min_x R(x) \text{ s.c. } \|Ax - y\| \leq \eta. \quad (1.2)$$

où on appelle  $R$  la fonction de régularisation.

En pratique, cette estimation est souvent effectuée (de manière équivalente, pour le bon  $\lambda$ ) en minimisant la somme de l'attache aux données et la fonction de régularisation  $R$

$$x^* = \arg \min_x \|Ax - y\|^2 + \lambda R(x). \quad (1.3)$$

Pour une méthode de mesure  $A$ , une fonction de régularisation  $R$  et un modèle de faible dimension  $\Sigma$  bien choisis, on cherche des garanties de reconstruction de la forme

$$\|x^* - x_0\| \leq C_1 \|e\| + C_2 d(x_0, \Sigma) \quad (1.4)$$

où  $d(\cdot, \Sigma)$  est une distance au modèle  $\Sigma$  et  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes. L'erreur d'estimation est bornée par un terme de bruit plus une erreur de modélisation. On s'assure ainsi la qualité de la méthode d'estimation : une petite erreur de modélisation et/ou un faible bruit ne produiront pas d'artefacts trop grands dans l'estimation  $x^*$ .

Un modèle de faible dimension est un ensemble qui résume une notion de faible dimension : l'inconnue a une structure particulière qui permet de réduire le nombre de paramètres à estimer et ainsi de garantir la qualité de l'estimation  $x^*$  (si la fonction  $R$  est bien adaptée au modèle). Dans le cas de signaux, on parle de représentations parcimonieuses : dans une certaine base, le signal peut être décrit par un vecteur ayant peu de coordonnées non nulles. Le signal est donc la superposition d'un petit nombre de composantes élémentaires (ex. harmoniques pour le son). Pour les matrices, les représentations de rang faible permettent aussi de modéliser des matrices par des sommes de composantes élémentaires. Par exemple, pour les systèmes de recommandation, on cherche à compléter une matrice quantifiant les affinités de différentes personnes pour différents produits. L'hypothèse de rang faible permet de supposer que ces matrices sont des combinaisons de profils élémentaires.

Les questions que je me pose se résument ainsi :

- Pour quels  $A$ ,  $R$ ,  $\Sigma$  peut-on obtenir de telles garanties ? Dans ces cas là, quelles sont les "meilleures" régularisations  $R$  pour estimer  $x_0$  ?

De multiples notions de "meilleure" régularisation sont possibles. Une partie de mes travaux s'attache donc à expliciter cette notion.

Je n'ai pas explicité les dimensions, espaces et normes ci-dessus volontairement. Un de mes objectifs est de les considérer assez généraux pour rassembler dans le même cadre plusieurs applications. En contrepartie, je n'essaie pas en général de pousser jusqu'à une abstraction qui ne trouverait pas d'application réelle (le cadre le plus général que j'ai pu aborder est celui de signaux dans le contexte d'espaces topologiques localement convexes dans le chapitre 4 qui permet de traiter le cas de la super-résolution d'impulsions sans grille). Cette approche générale permet d'être une source d'inspiration pour la création d'algorithmes pratiques d'estimation performants.



### 1.3 Dans ce manuscrit

Je commence par donner, dans le **chapitre 2**, une méthode générique pour garantir la performance d'une fonction de régularisation pour reconstruire des ensembles de faible dimension dans les espaces de Hilbert et l'applique à une notion généralisée de parcimonie.

Ces résultats amènent à se poser la question de la manière de définir et choisir une régularisation optimale étant donné un modèle de faible dimension. Deux cas sont distingués. Le cas convexe que l'on traite dans le **chapitre 3** et le cas non-convexe qui est abordé dans le **chapitre 4**. Dans le cas convexe, on définit une régularisation optimale comme le supremum d'une fonctionnelle, et on étudie l'optimalité de la régularisation pour les problèmes de reconstruction parcimonieuse et de rang faible. Pour le cas non-convexe que l'on peut considérer optimal, on s'intéresse à la géométrie de l'optimisation sous-jacente.

Enfin je décris dans le **chapitre 5**, les applications en science des données que j'ai étudiées au cours de mes recherches.

Les perspectives de chaque thématique sont discutées à la fin de chaque chapitre. J'essaie de plus d'agrémenter le manuscrit d'un regard *a posteriori* sur mes travaux dans les paragraphes "**Avec du recul...**".

## Chapitre 2

# Reconstruction de cônes de faible dimension dans les espaces de Hilbert

Dans ce chapitre, on précise la notion de modèle de faible dimension que l'on considère dans le reste de ce manuscrit. On introduit les outils de géométrie et d'analyse que l'on utilise pour l'étude de la garantie de performance. On montre alors qu'il est possible de rassembler de nombreux résultats de garantie de performance dans un même cadre qui permet par ailleurs de donner de nouveaux résultats.

*Publications associées :* [YT5, YT16, YT9]

### 2.1 Modèle de faible dimension, garanties de performance et isométries restreintes

Considérons des observations sous-déterminées  $y = Ax_0 + e$  d'un signal  $x_0 \in \mathcal{H}$  ( $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert) par un opérateur linéaire  $A$  à valeur dans un autre espace de Hilbert  $\mathcal{F}$  (qui est en général de dimension finie pour les problèmes pratiques de science des données). Pour espérer estimer  $x_0$  dans ce contexte mal posé, il est nécessaire de faire appel à un modèle de régularité sur  $x_0$ .

La régularité de  $x_0$  peut être définie par le fait que  $x_0 \in \Sigma$ , où  $\Sigma$  est l'ensemble modèle (de régularité). Souvent,  $\Sigma$  contraint  $x_0$  à être de faible complexité : peu de coordonnées non nulles pour les vecteurs parcimonieux, peu de valeurs singulières non nulles pour les matrices de rang faible, etc. On parle alors de modèle de faible dimension. De nombreux autres modèles peuvent être utilisés pour la modélisation de problèmes inverses [10, 39]. Ces modèles sont des unions de sous-espaces. C'est à dire des ensembles homogènes ( $t \cdot z \in \Sigma$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $z \in \Sigma$ ). Dans ce chapitre, on considère le cas plus général des ensembles positivement homogènes ( $t \cdot z \in \Sigma$  pour tout  $t \geq 0$  et  $z \in \Sigma$ ). On pourra ainsi considérer des modèles aussi variés que des modèles généralisés de parcimonie, des nuages de points (en utilisant leur "cônification").

Soit  $R$  une fonction de régularisation (que l'on choisit souvent convexe, pour pouvoir effectuer

l'optimisation). Il a été prouvé que le programme de minimisation sous contrainte (s.c.)

$$\min_{x \in \mathcal{H}} R(x) \text{ s.c. } \|Ax - y\|_2 \leq \epsilon \quad (2.1)$$

permet de retrouver une estimation stable et robuste de  $x_0$  (prenant la forme de l'inégalité (1.4)) pour un certain choix de  $A$ ,  $\Sigma$  et de normes convexes  $R$  [34, 23, 49, 21, 26, 42].

Pour garantir la performance de l'estimation, on se repose sur la propriété d'isométrie restreinte (RIP pour "restricted isometry property"), un outil utile pour l'analyse de la reconstruction uniforme des éléments de  $\Sigma$ . La RIP se définit sur l'ensemble sécant.

**Définition 2.1.1** (Ensemble sécant). *L'ensemble sécant du modèle  $\Sigma$  est défini par  $\mathcal{S}(\Sigma) = \Sigma - \Sigma := \{x - y : x \in \Sigma, y \in \Sigma\}$ . Une sécante est un élément de l'ensemble sécant.*

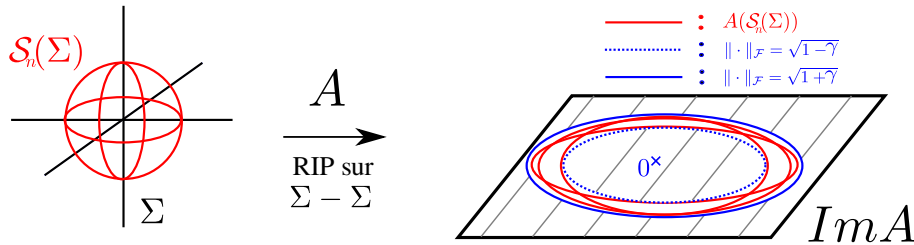
On appelle  $\mathcal{S}_n(\Sigma) := \left\{ z = \frac{y}{\|y\|_{\mathcal{H}}} : y \in (\Sigma - \Sigma) \setminus \{0\} \right\}$  l'ensemble sécant normalisé.

**Définition 2.1.2** (Propriété d'isométrie restreinte (RIP)). *L'opérateur  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$  a la propriété d'isométrie restreinte de constante  $\gamma$  sur  $\mathcal{S}(\Sigma) \subset \mathcal{H}$  si pour tout  $x \in \mathcal{S}(\Sigma)$  :*

$$(1 - \gamma)\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|Ax\|_{\mathcal{F}}^2 \leq (1 + \gamma)\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (2.2)$$

où  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$  sont les normes hilbertiennes associées à  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{F}$ .

On représente sur la figure 2.1 la RIP sur l'ensemble sécant.

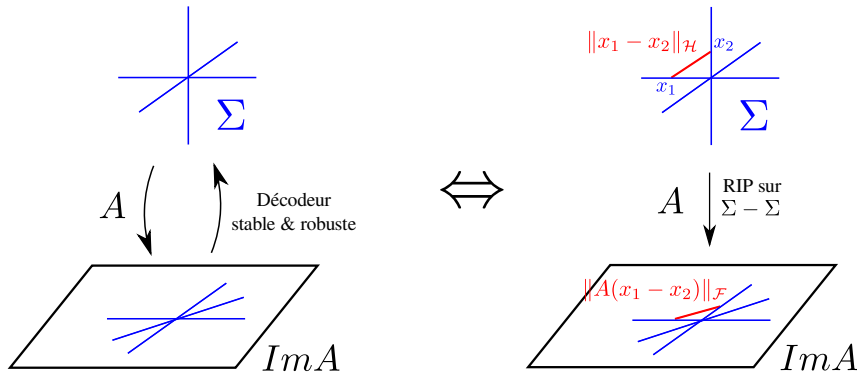


**Figure 2.1:** Une caractérisation de la RIP : la RIP sur l'ensemble sécant normalisé. L'image de cet ensemble doit être à une distance au plus  $\gamma$  de la sphère unité.

Dans de nombreux travaux, la RIP est une condition suffisante pour obtenir des garanties de performance de (2.1). L'exemple le plus classique est le suivant [18]. Pour  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ , une régularisation  $\ell^1$  ( $R = \|\cdot\|_1$ ) et un matrices gaussienne aléatoire  $A$  de taille  $m \times n$ , lorsque  $m \gtrsim K \log(n/K)$ , la matrice  $A$  a la RIP sur l'ensemble  $\Sigma - \Sigma$  des vecteurs  $2K$ -parcimonieux et la minimisation  $\ell^1$  est stable et robuste sur les vecteur  $K$ -parcimonieux. Beaucoup de travaux cherchent à généraliser ce résultat à d'autres modèles [9, 19] ou à améliorer la précision de l'hypothèse. Un exemple de condition suffisante classique est  $\gamma < \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$  [18] pour la minimisation  $\ell^1$ . Ce résultat a été amélioré par plusieurs auteurs [42, Chapter 6]. Cai et Zhang

[16] ont établi que  $\gamma < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$  est suffisant, ce qui est un résultat fin (dans un certain sens) d'après les travaux de Davies et Gribonval [30].

L'utilisation de la RIP est souvent critiquée pour son manque de finesse quantitative dans les garanties de reconstruction : on a besoin d'un nombre de mesures très grand par rapport à ce qui est suffisant en pratique. Cela est dû au fait qu'en pratique, on considère souvent un problème de reconstruction non-uniforme. On cherche à reconstruire un vecteur  $x_0$  à partir de  $Ax_0 + e$ . Pour l'étude de la reconstruction uniforme, c'est-à-dire la reconstruction de tous les  $x_0 \in \Sigma$ , la RIP à gauche est une condition nécessaire pour l'estimation robuste de signaux ayant un modèle arbitraire  $\Sigma$  [13]. La RIP est aussi une condition suffisante pour l'existence d'un décodeur stable et robuste (potentiellement non-convexe). On résume ces faits sur la figure 2.2.



**Figure 2.2:** Une représentation de l'équivalence entre l'existence de décodeurs stables et robustes et la RIP. Les opérateurs satisfaisant la RIP préservent approximativement les distances entre les éléments de  $\Sigma$ .

Cela suggère que la RIP est un bon outil pour étudier théoriquement et qualitativement la reconstruction de modèles de faible dimension. Enfin il a été montré qu'il est toujours possible de construire des observations aléatoires avec un nombre de mesures de l'ordre de la dimensionnalité du modèle et ayant la RIP [36, 33, 48]. Il suffit de montrer que l'ensemble sécant normalisé a un nombre de couverture (nombre de boules au sens de  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  de rayon  $\alpha$  dont l'union contient  $\mathcal{S}_n$ ) qui satisfait

$$N(\mathcal{S}_n, \alpha) \leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^d \quad (2.3)$$

On peut alors construire des observations aléatoires avec  $m \gtrsim d \log(C)$  mesures satisfaisant une RIP avec forte probabilité.

**Avec du recul... 2.1.1.** *Un autre défaut de la RIP est le fait qu'elle ne soit pas homogène. En effet la capacité d'un opérateur  $A$  de préserver l'information de  $\Sigma$  ne dépend pas de sa normalisation : pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda A$  jouit des mêmes garanties de reconstruction. Cette notion de RIP s'est quand même imposée comme une référence dans la littérature. On aurait pu utiliser la notion de conditionnement restreint indifférente à cette normalisation. Pour l'étude des régularisation convexes*

optimales, le choix du conditionnement restreint simplifie l'étude (voir le chapitre 3 pour la définition du conditionnement restreint et sa mise en œuvre).

Le cas non-uniforme avec des mesures aléatoires gaussiennes avec des régularisations par normes atomiques a été étudié par Chandrasekaran *et coll.*[26] et complété par des travaux ultérieurs [3, 47]. Il y dérive des bornes fines de reconstruction en nombre de mesures en utilisant la notion de largeur gaussienne des cônes de descente de la fonction de régularisation aux points du modèles.

L'objectif de ce chapitre est d'obtenir des résultats similaires dans le cas uniforme via l'étude de la propriété d'isométrie restreinte. On y retrouve d'ailleurs des objets géométriques similaires : normes atomiques, cônes de descentes, etc. que l'on détaille dans la section suivante.

## 2.2 Géométrie de la reconstruction : ensembles de descente et normes atomiques

La fonction de régularisation  $R$  est une fonction généralisée de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  finie sur l'ensemble  $\mathcal{H}_R := \text{dom}(R) \subset \mathcal{H}$ . On suppose que  $\Sigma \subset \mathcal{H}_R \cap \mathcal{H}_A$  afin que pour que  $x \in \Sigma$ ,  $R(x) < \infty$  et  $Ax$  est bien défini.

### 2.2.1 Ensembles de descente

Les ensembles de descente jouent un rôle fondamental pour établir une caractérisation des conditions de reconstruction.

**Définition 2.2.1** (Vecteurs de descente). *Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ , l'ensemble des vecteurs de descente de  $R$  en  $x$  est*

$$\mathcal{T}_R(x) := \{z \in \mathcal{H} : R(x+z) \leq R(x)\} \quad (2.4)$$

Dans le cas sans bruit, on cherche à savoir si pour tout  $x \in \Sigma$ ,

$$\{x\} = \underset{\tilde{x} \in \mathcal{H}_A}{\text{argmin}} f(\tilde{x}) \text{ s.c. } A\tilde{x} = Ax. \quad (2.5)$$

Autrement dit on cherche à garantir que  $x$  est l'unique minimiseur de (2.5).

C'est équivalent à  $\ker A \cap \mathcal{T}_R(x) = \{0\}$  pour tout  $x \in \Sigma$ , où  $\ker A := \{z \in \mathcal{H}_A, Az = 0\}$  est le noyau de  $A$ . On définit l'ensemble des vecteurs de descente de  $R$  en  $\Sigma$  par

$$\mathcal{T}_R(\Sigma) := \bigcup_{x \in \Sigma} \mathcal{T}_R(x). \quad (2.6)$$

On cherche donc à établir avec une hypothèse RIP que

$$\ker A \cap \mathcal{T}_R(\Sigma) = \{0\}. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Normes atomiques

Pour obtenir un décodeur convexe on s'intéresse à une famille particulière de fonctions *convexes* : les “normes” atomiques [26] (les guillemets viennent du fait que ce ne sont pas tout le temps des normes). Étant donné un ensemble d'atomes  $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ , la “norme” atomique est construite en utilisant l'enveloppe convexe de  $\mathcal{A}$ .

**Définition 2.2.2** (Enveloppe convexe). *L'enveloppe convexe d'un ensemble  $\mathcal{A}$  est :*

$$\text{conv}(\mathcal{A}) := \left\{ x = \sum_i c_i a_i : a_i \in \mathcal{A}, c_i \in \mathbb{R}_+, \sum_i c_i = 1 \right\} \quad (2.8)$$

On définit ainsi la norme atomique.

**Définition 2.2.3** (Norme atomique). *La “norme” atomique induite par l'ensemble  $\mathcal{A}$  est définie par:*

$$\|x\|_{\mathcal{A}} := \inf \{ t \in \mathbb{R}_+ : x \in t \cdot \overline{\text{conv}}(\mathcal{A}) \} \quad (2.9)$$

où  $\overline{\text{conv}}(\mathcal{A})$  est la fermeture de  $\text{conv}(\mathcal{A})$  dans  $\mathcal{H}$ . Cette “norme” est finie sur

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) := \mathbb{R}_+ \cdot \overline{\text{conv}}(\mathcal{A}) = \{ t \cdot y : t \in \mathbb{R}_+, y \in \overline{\text{conv}}(\mathcal{A}) \} \subset \mathcal{H}. \quad (2.10)$$

On l'étend à  $\mathcal{H}$  en posant  $\|x\|_{\mathcal{A}} = +\infty$  si  $x \notin \mathcal{E}(\mathcal{A})$ .

Les propriétés de  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  dépendent des atomes  $\mathcal{A}$  au travers de l'ensemble convexe  $\mathcal{C} := \overline{\text{conv}}(\mathcal{A})$ . La norme atomique  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  est la jauge associée à l'ensemble convexe  $\mathcal{C}$  [51]. On résume dans le Tableau 2.3 les propriétés de ces jauges [50, 2].

De plus,  $\mathcal{E}(\mathcal{A})$  est continûment inclus dans  $\mathcal{H}$  si  $\mathcal{A}$  est borné (car  $\mathcal{E}(\mathcal{A} \cup -\mathcal{A})$  est continûment inclus dans  $\mathcal{H}$ ) [11, 41]. On suppose donc  $\mathcal{A}$  borné.

Par abus de notation, on définit  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(x) := \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{\mathcal{A}}}(x)$  et  $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\Sigma) = \bigcup_{x \in \Sigma} \mathcal{T}_{\mathcal{A}}(x)$ .

Hypothèses sur $\mathcal{C} := \overline{\text{conv}}(\mathcal{A})$	Propriétés de $\ \cdot\ _{\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}_+ \cdot \mathcal{C}$
Pas d'hypothèses	Positive, semi-continue inférieurement et sous linéaire
$0 \in \mathcal{C}$	Positivement homogène
$0 \in \text{int}\mathcal{C}$	Continue
$\mathcal{C}$ est borné (et fermé par définition)	Coercive ( $\lim_{\ x\ _{\mathcal{H}} \rightarrow +\infty} \ x\ _{\mathcal{A}} = +\infty$ )
$-\mathcal{C} = \mathcal{C}$	Est une norme

**Figure 2.3:** Liens entre  $\mathcal{A}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  en utilisant les propriétés des jauges.

**Avec du recul... 2.2.1.** *Utiliser le terme de norme pour un objet qui n'est pas une norme n'est pas optimal. On a utilisé le vocabulaire de la communauté à laquelle on s'adressait. Utiliser la notion de jauge directement aurait probablement été plus rigoureux.*

### 2.2.3 Exemples de normes atomiques

Comme mentionné dans [26], on s'intéresse à des normes atomiques ayant des atomes d'intérêt. Ces atomes sont souvent *normalisés* (de norme 1). Pour régulariser dans le cadre de modèles de mélanges, les atomes choisis sont souvent les atomes élémentaires du mélange.

- Norme  $\ell^1$  :  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des vecteurs 1-parcimonieux normalisés.
- Norme nucléaire:  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des matrices de rang 1 normalisées.
- Norme  $\ell^1 - \ell^2$  :  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des vecteurs normalisés 1-parcimonieux en groupes.
- Jauge générée par un polytope fini:  $\mathcal{A}$  est composé des sommets du polytope.
- Norme spectrale :  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des matrices orthogonales normalisées.

Toutes ces normes atomiques permettent de reconstruire un modèle  $\Sigma$  de faible de dimension. Ces exemples seront couverts par les garanties RIP générales que l'on propose.

### 2.2.4 Dualité

La norme duale d'une norme atomique définie par

$$\|x\|_{\mathcal{A}}^* := \sup_{\|u\|_{\mathcal{A}}=1} |\langle x, u \rangle| \quad (2.11)$$

est

$$\|x\|_{\mathcal{A}}^* = \sup_{a \in \mathcal{A}} |\langle x, a \rangle|. \quad (2.12)$$

et satisfait la propriété  $\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|x\|_{\mathcal{A}} \cdot \|x\|_{\mathcal{A}}^*$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$ .

### 2.2.5 Norme atomique associée à un cône

Un autre objet géométrique d'intérêt est la norme atomique induite par un modèle. Elle "résume" l'interaction entre le modèle et la convexité. Elle ne permet pas en général de régulariser correctement, mais intervient dans les preuves.

Étant donné un cône  $\Sigma \subset \mathcal{H}$ , la norme associée aux atomes

$$\mathcal{A}(\Sigma) := \Sigma \cap \mathcal{S}(1) \quad (2.13)$$

est la norme atomique induite par le cône  $\Sigma$ . On la note

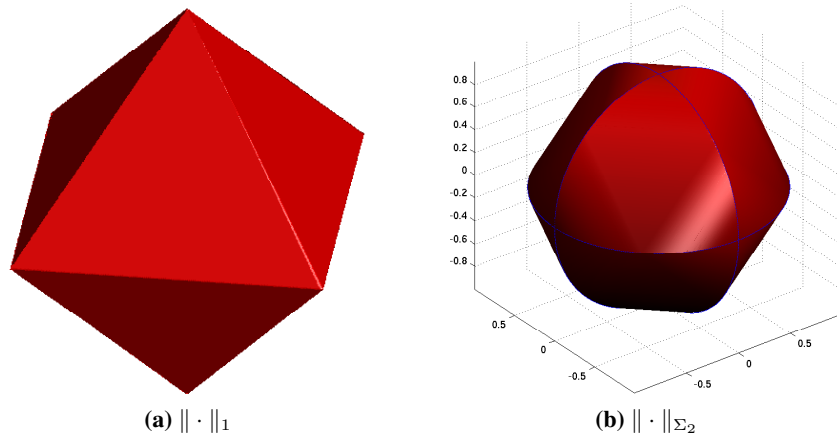
$$\|\cdot\|_{\Sigma} := \|\cdot\|_{\Sigma \cap \mathcal{S}(1)}. \quad (2.14)$$

Cette “norme” a les propriétés suivantes (Tableau 2.3).

**Proposition 2.2.1** (Propriétés de la “norme”  $\|\cdot\|_{\Sigma}$ ). *On a :*

1. Pour tout  $z \in \mathcal{H}$ ,  $\|z\|_{\Sigma} \geq \|z\|_{\mathcal{H}}$ .
2. Pour tout  $x \in \Sigma$ ,  $\|x\|_{\Sigma} = \|x\|_{\mathcal{H}}$ .
3.  $\|\cdot\|_{\Sigma}$  est positive, semi-continue inférieurement, sous linéaire, coercive et positivement homogène.
4. Quand  $\Sigma$  est une union de sous espace (homogène),  $\|\cdot\|_{\Sigma}$  est une vraie norme (car  $\Sigma = -\Sigma$ ).

On représente sur la Figure 2.4 des normes issues de modèles  $k$ -parcimonieux  $\Sigma_k$  en 3D ( $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ ): la norme  $\ell^1 = \|\cdot\|_{\Sigma_1}$  et la “ $k$ -support norm”  $\|\cdot\|_{\Sigma_2}$ .



**Figure 2.4:** La boule unité de  $\|\cdot\|_1$  (gauche) et de  $\|\cdot\|_{\Sigma_2}$  (“ $k$ -support norm”) (droite).

### 2.2.6 Une caractérisation alternative des normes atomiques

On a montré pour nos besoins le résultat intermédiaire suivant qui est d’intérêt particulier. La borne suivante est valide pour les normes induites par des ensembles  $\mathcal{A}$  d’atomes normalisés. Elle permet de faire intervenir une combinaison convexe d’atomes  $u_i$  et une combinaison convexe des normes aux carrés  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$  dans le calcul de  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ . C’est cette propriété qui permet de faire le lien entre la RIP et la norme induite par le modèle dans la preuve de notre théorème de reconstruction.



**Proposition 2.2.2.** *Supposons  $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}(1)$ . On définit*

$$\|x\|'_{\mathcal{A}} := \inf \left\{ \sqrt{\sum \lambda_i \|u_i\|_{\mathcal{H}}^2} : \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum \lambda_i = 1, u_i \in \mathbb{R}_+ \mathcal{A}, x = \sum \lambda_i u_i \right\}. \quad (2.15)$$

Alors pour tout  $x \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ , on a

$$\|x\|_{\mathcal{A}} \geq \lim_{\gamma \rightarrow 0_+} \inf \{ \|\tilde{x}\|'_{\mathcal{A}} : \tilde{x} \in t \cdot \text{conv}(\mathcal{A}), \|\tilde{x} - x\|_{\mathcal{H}} \leq \gamma \}. \quad (2.16)$$

Lorsque  $\text{conv}(\mathcal{A})$  est fermé on obtient  $\|x\|_{\mathcal{A}} = \|x\|'_{\mathcal{A}}$  pour tout  $x$ .

## 2.2.7 Les normes atomiques sont suffisante pour la régularisation convexe

On a montré que si une régularisation convexe (non pathologique) permet la reconstruction de  $\Sigma$ , alors il existe une norme induite par  $\mathcal{A} \subset \Sigma$  (indépendante de  $A$ ) qui permet la reconstruction de  $\Sigma$ . On peut donc se limiter aux normes atomiques lorsque l'on cherche une régularisation convexe (ce résultat est particulièrement utile dans le chapitre suivant).

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $\Sigma$  un cône et  $R$  une fonction propre coercive continue. Supposons qu'il existe  $t > R(0)$  tel que l'ensemble de niveau  $\mathcal{L}(R, t) = \{y \in \mathcal{H} : R(y) \leq t\}$  est un ensemble convexe. Alors il existe  $\mathcal{A} \subset \Sigma$  tel que :*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\Sigma) \subset \mathbb{R}_+^* \cdot \mathcal{T}_R(\Sigma) \quad (2.17)$$

où  $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ .

Les cône de descente de  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  étant inclus dans ceux de  $R$ , si  $R$  permet la reconstruction de  $\Sigma$ , on a

$$\mathcal{T}_R(\Sigma) \cap \ker A = \{0\}, \quad (2.18)$$

et on en déduit

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(\Sigma) \cap \ker A = \{0\}. \quad (2.19)$$

La norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  permet alors la reconstruction de  $\Sigma$ . Il existe toujours une norme atomique (avec atomes inclus dans  $\Sigma$ ) qui se comporte mieux qu'une régularisation convexe. Ce résultat se traduit aussi en terme de constante RIP. C'est une information très importante pour la conception de régularisation convexe que l'on utilise dans le chapitre suivant.

## 2.3 Reconstruction stable et robuste

### 2.3.1 Reconstruction stable

On est maintenant équipé pour donner nos théorèmes de reconstruction. On donne une constante RIP admissible  $\gamma_{\Sigma}(R)$  sur  $\Sigma - \Sigma$  qui garantit la reconstruction stable de  $\Sigma$  avec  $R$  et la minimisation (2.1).

La constante  $\gamma_\Sigma(R)$  ne dépend que du modèle  $\Sigma$  et de la fonction de régularisation  $R$ . Elle est reliée à la géométrie du modèle  $\Sigma$  au travers de la norme atomique  $\|\cdot\|_\Sigma$  induite par le modèle et des vecteurs de descentes de  $R$  aux éléments de  $\Sigma$ . On définit cette constante

$$\gamma_\Sigma(R) := \inf_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \gamma_\Sigma(z) \quad (2.20)$$

où  $\gamma_\Sigma(z) := \sup_{x \in \Sigma} \gamma_\Sigma(x, z)$ . Selon que  $\Sigma$  est une union de sous-espace (UoS pour "Union of subspaces") ou un cône :

$$\gamma_\Sigma(x, z) = \gamma_\Sigma^{UoS}(x, z) := \frac{-\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}{\|x\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\|x+z\|_\Sigma^2 - \|x\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}} \quad (2.21)$$

$$\gamma_\Sigma(x, z) = \gamma_\Sigma^{cone}(x, z) := \frac{-2\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}{\|x+z\|_\Sigma^2 - 2\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}. \quad (2.22)$$

**Théorème 2.3.1** (Condition RIP pour reconstruction stable [YT5]). *Soit  $\Sigma$  un cône. Alors, pour tout  $A$  continue sur  $\mathcal{H}$  satisfaisant la RIP sur  $\Sigma - \Sigma$  avec constante  $\gamma < \gamma_\Sigma(R)$ , on a : pour tout  $x_0 \in \Sigma$ ,  $\|e\|_{\mathcal{F}} \leq \eta \leq \epsilon$ , avec  $x^*$  le résultat de la minimisation (2.1),*

$$\|x^* - x_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_\Sigma(R, \gamma) \cdot (\eta + \epsilon) \quad (2.23)$$

où  $C_\Sigma(R, \gamma) < +\infty$ .

La constante  $C_\Sigma(R, \gamma)$  est explicite et peut être bornée dans les exemples classiques. On montre dans les sections suivantes que ces constantes RIP donnent des résultats fins pour les cas classiques et permettent de donner de nouveaux résultats pour des exemples de parcimonie généralisée.

Le principe de la preuve est une généralisation du résultat RIP fin de Cai et Zhang [16] qui garantit que  $\gamma < \sqrt{1/2}$  sur  $\Sigma - \Sigma$  est suffisant pour la reconstruction stable de vecteurs parcimonieux avec la norme  $\ell^1$  et de matrices de rang faible avec la norme nucléaire. Notre théorème retrouve donc le résultat fin de [16] dans ces deux cas. Ce théorème est fin car pour tout  $\alpha > 0$  il existe une dimension  $N$  pour  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^N$ , un modèle de parcimonie  $\Sigma_k$  et une matrice  $A$  ayant une RIP avec  $\gamma \geq \sqrt{1/2} + \alpha$  et pour laquelle il n'y a pas de possibilité de reconstruction uniforme avec la norme  $\ell^1$  [30].

En quelques mots, pour prouver le théorème, on décompose l'erreur d'estimation  $x^* - x_0$  comme une combinaison linéaire d'éléments de  $\Sigma$  puis on applique la RIP pour tomber sur une borne supérieure faisant intervenir  $\epsilon + \eta$ . La recherche d'une décomposition optimale de l'erreur introduit la norme atomique induite par  $\Sigma$ .

**Avec du recul... 2.3.1.** *Est-ce que ce théorème est le plus fin que l'on puisse produire pour tout  $\Sigma$ ? Comme on l'a vu la notion de finesse retenue pour la parcimonie est une notion au sens d'une collection d'ensembles de faible complexité. A la lumière de résultats ultérieurs, cette constante n'est a priori pas fine quel que soit le modèle (Voir chapitre 3).*

### 2.3.2 Robustesse à l'erreur de modélisation

Il est important de pouvoir ajouter des résultats de robustesse à l'erreur de modélisation. En effet, en pratique le signal observé  $x_0$  n'est pas exactement dans  $\Sigma$ . Il est difficile de donner des résultats de robustesse pour des régularisations  $R$  arbitraires. Une méthode naïve serait d'inclure l'erreur de modélisation dans le bruit d'observation mais il faudrait connaître la distance au modèle  $d(x_0, \Sigma)$  pour régler  $\epsilon$  dans la minimisation (2.1).

On donne un résultat de robustesse qui ne souffre pas de ce problème au prix d'hypothèses supplémentaires sur  $R$ . On commence par donner une borne sur l'erreur de reconstruction dans le Lemme 2.3.1 puis montre dans le Théorème 2.3.2 que cette borne implique la robustesse lorsque  $R$  a certaines propriétés.

Le lemme 2.3.1 utilise la notion de  $M$ -norme [13]: Étant donnée une constante  $C$ , la  $M$ -norme est définie par

$$\|\cdot\|_{M,C} := C \cdot \|M \cdot\|_{\mathcal{F}} + \|\cdot\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.24)$$

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\Sigma$  un cône. Soit  $A$  une application linéaire continue avec la RIP  $\gamma < \gamma_{\Sigma}(R)$  sur  $\Sigma - \Sigma$ . Soit  $\eta \leq \epsilon$ . Soit  $C_{\Sigma} = C_{\Sigma}(R, \gamma)$ . Alors pour tout  $x_0 \in \mathcal{H}$ ,  $e \in \mathcal{F}$ , tel que  $\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \eta \leq \epsilon$ , tout minimiseur  $x^*$  de (2.1) satisfait.*

$$\|x^* - x_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\Sigma} \cdot (\eta + \epsilon) + \inf_{z' \in \mathcal{T}_R(\Sigma)} \|x^* - x_0 - z'\|_{A, C_{\Sigma}}. \quad (2.25)$$

On voit que contrairement au Théorème 2.3.1, l'inconnue  $x_0$  n'est pas restreinte à  $\Sigma$ .

Pour aller plus loin, on doit remplacer la borne avec la  $M$ -norme par une mesure de l'erreur de modélisation. On utilise la distance symétrisée

$$d_R(x_0, \Sigma) = \inf_{\tilde{x} \in \Sigma} \frac{R(x_0 - \tilde{x}) + R(\tilde{x} - x_0)}{2} \quad (2.26)$$

La robustesse est alors une conséquence directe du Lemme 2.3.1 en utilisant la bonne *constante de robustesse*.

**Définition 2.3.1.** *Une constante  $D \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  est une constante de robustesse de  $R$  pour la reconstruction de  $\Sigma$  à partir de mesures par  $A$  si, sous les hypothèses du Lemme 2.3.1, on a : pour tout  $x_0 \in \mathcal{H}$ ,*

$$\inf_{z' \in \mathcal{T}_R(\Sigma)} \|x^* - x_0 - z'\|_{M, C_{\Sigma}} \leq D \cdot d_R(x_0, \Sigma).$$

Le théorème suivant donne une piste générale pour trouver une telle constante en supposant que  $R$  domine la  $M$ -norme.

**Théorème 2.3.2 ([YT5]).** *Soit  $\Sigma$  un cône. Soit  $R$  positivement homogène, positive et convexe telle que  $f(x) < +\infty$  pour  $x \in \Sigma$ . Soit  $A$  une application linéaire continue avec RIP  $\gamma < \gamma_{\Sigma}(R)$  sur  $\Sigma - \Sigma$  et  $\eta \leq \epsilon$ . Soit  $C_{f, M, \Sigma} < \infty$  telle que pour tout*

$u \in \mathcal{H}$ ,  $\|u\|_{M, C_\Sigma} \leq C_{f, M, \Sigma} \cdot f(u)$ . Alors

- $D := 2C_{f, M, \Sigma}$  une constante de robustesse.
- Pour tout  $x_0 \in \mathcal{H}$ ,  $e \in \mathcal{F}$ , tel que  $\|e\|_{\mathcal{H}} \leq \eta \leq \epsilon$ , tout minimiseur  $x^*$  de (2.1) vérifie

$$\|x^* - x_0\|_{\mathcal{H}} \leq C_\Sigma \cdot (\eta + \epsilon) + 2C_{f, M, \Sigma} \cdot d_f(x_0, \Sigma). \quad (2.27)$$

On peut donner des constantes de robustesse dans les cas suivants :

- Soit  $R$  une jauge convexe induite par un ensemble convexe fermé contenant 0 en dimension finie. D'après le tableau de la figure 2.3,  $R$  est positivement homogène, positive, semi-continue inférieurement et coercive. On peut en déduire que  $R$  admet une valeur minimum  $\beta \geq 0$  sur la sphère unité  $S_{\|\cdot\|_{M, C_\Sigma}}(1)$  de  $\|\cdot\|_{M, C_\Sigma}$  et ainsi que  $C_{f, M, \Sigma} = 1/\beta < \infty$ . Ce qui donne que  $D = 2C_{f, M, \Sigma}$  est une constante de robustesse.
- Considérons  $R = \|\cdot\|_1$  et  $\Sigma = \Sigma_k$  l'ensemble des vecteurs  $K$ -parcimonieux en dimension finie. Ici,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_2$ . On peut montrer que  $D := 2 \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma} \cdot C_\Sigma}{\sqrt{k}}$  est une constante de robustesse. On a alors

$$\|x^* - x_0\|_2 \leq C_\Sigma \cdot (\epsilon + \eta) + D \cdot d_{\|\cdot\|_1}(x_0, \Sigma). \quad (2.28)$$

Dans la littérature, la distance  $d_{\|\cdot\|_1}(x_0, \Sigma)$  est souvent notée  $\sigma_k(x_0)_1 = \|x_{0, T^c}\|_1$  (où  $T$  est le support des plus  $k$  plus grandes amplitudes dans  $x$ ), est appelée la meilleure approximation “ $K$ -term” pour la norme  $\ell^1$ . La constante  $D$  est du même ordre  $O(1/\sqrt{K})$  que dans les résultats classiques [42].

- Soit  $R = \|\cdot\|_*$  la norme nucléaire et  $\Sigma = \Sigma_r$  l'ensemble des matrices de rang au plus  $r$ . La norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \|\cdot\|_F$  est la norme de Frobenius. On peut montrer que  $D = 2 \frac{1 + \sqrt{1 + \gamma} \cdot C_\Sigma}{\sqrt{r}}$  est une constante de robustesse. On a alors

$$\|x^* - x_0\|_F \leq C_\Sigma \cdot (\epsilon + \eta) + D \cdot d_{\|\cdot\|_*}(x_0, \Sigma_r). \quad (2.29)$$

Ces résultats sont en dimension finie. En dimension infinie la robustesse est plus délicate à obtenir. Le théorème 2.3.2 peut être utilisé pour obtenir la robustesse dans certains cas tels que la parcimonie structurée par niveaux.

## 2.4 Application à la parcimonie structurée par niveaux

Pour illustrer les possibilités de notre théorème, on cherche des garanties de reconstruction pour la parcimonie structurée par niveaux. C'est une généralisation de la parcimonie classique qui permet de mieux modéliser certains signaux tels que les images médicales.



**Figure 2.5:** Une représentation de la parcimonie structurée en niveaux  $\mathcal{H}$ .

### 2.4.1 Parcimonie structurée ...

On commence par décrire la parcimonie structurée. Dans de nombreuses applications le signal est non seulement parcimonieux dans une base donnée (Fourier, Radon ...), mais aussi concentré en groupes. La parcimonie structurée consiste à supposer que le signal est supporté sur un petit nombre de groupes de coefficients [44, 5, 38]. On s'intéresse au cas des groupes sans recouvrement.

Formellement, on considère que  $\mathcal{H}$  dispose d'une base orthonormale  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  que l'on décompose en une collection finie  $G$  de groupes d'indices sans recouvrement, c'est-à-dire des sous ensembles  $g \subset \mathbb{N}$  avec  $|g| < \infty$  et  $g \cap g' = \emptyset$  pour  $g \neq g'$ . La restriction de  $x \in \mathcal{H}$  au groupe  $g$  est  $x_g := \sum_{i \in g} \langle x, e_i \rangle e_i$ . Un *support de groupe* est un sous-ensemble  $T \subset G$  et la restriction de  $x$  à  $T$  est notée  $x_T := \sum_{g \in T} x_g$ . Le support de groupe  $x \in \mathcal{H}$ , noté  $\text{gsupp}(x)$ , est le plus petit ensemble  $T \subset G$  tel que  $x_T = x$ . La taille de ce support, notée  $|\text{gsupp}(x)|$ , est le nombre d'éléments de  $\text{gsupp}(x)$  (qui n'est pas le nombre de coefficients non-nuls de  $x$ ).

Étant donné un entier  $k$ , le modèle *k-parcimonieux en groupe* est défini par

$$\Sigma_k := \{x \in \mathcal{H}, |\text{gsupp}(x)| \leq k\}. \quad (2.30)$$

Soit  $d$  la taille du plus grand groupe. On a le nombre de couverture de  $\mathcal{S}_n(\Sigma_k)$  suivant :

$$N(\mathcal{S}_n(\Sigma_k), \alpha) \leq \left(\frac{C}{\alpha}\right)^{dk} \quad (2.31)$$

où  $C$  est une constante dépendant de  $d$ .

### 2.4.2 ... en niveaux

Considérons  $J$  espaces orthogonaux  $\mathcal{H}_j \subset \mathcal{H}$  équipés d'un modèle  $k_j$ -parcimonieux en groupe  $\Sigma_{k_j}$  comme défini en (2.30) (chacun exprimé dans une base Hilbertienne et ayant son propre ensemble de  $G_j$  groupes). Comme ces sous-espaces sont orthogonaux, il existe un isomorphisme naturel entre leur somme directe et leur produit cartésien. Il est plus aisé de travailler avec ce dernier. La *parcimonie structurée en niveaux* est associée au modèle (voir aussi la figure 2.5) :

$$\Sigma := \left\{ x \in \mathcal{H}, x = \sum_{j=1}^J x_j, x_j \in \Sigma_{k_j} \right\}, \quad (2.32)$$

qui est identifié au produit cartésien des modèles  $\Sigma_{k_1} \times \Sigma_{k_2} \times \dots \times \Sigma_{k_J}$ .

Deux exemples utiles de ce modèle sont l'imagerie médicale (IRM) et la modélisation parcimonieuse simultanée du signal et du bruit [1, 55], [YT39]:

- Pour l'IRM les différents niveaux sont des échelles de la transformée en ondelette. les images IRM sont plus parcimonieuses dans les échelles fines. On peut ainsi avoir plus de flexibilité dans la modélisation.
- La modélisation simultanée du signal et du bruit est pratique pour la séparation d'un signal et d'un bruit de type outlier. Un signal observé  $y$  est modélisé comme la somme de deux composante,  $y = A_1x_1 + A_2x_2$  où  $A_1x_1$  est le signal d'intérêt,  $x_1$  a son modèle de parcimonie  $\Sigma_{k_1}$ ,  $A_2x_2$  est le bruit avec son propre modèle  $\Sigma_{k_2}$ . Ce modèle est aussi lié à la séparation des signaux transitoire et stationnaires en audio ou à la décomposition cartoon + texture des images [45]. Comme  $y = [A_1 \ A_2]x$  avec  $x = [x_1^T, x_2^T]^T$ , on a un modèle de parcimonie structurée en deux niveaux  $x$ .

Pour la parcimonie structurée en niveaux, on a montré que :

$$\begin{aligned} N(\mathcal{S}_n, \alpha) &\leq N(\mathcal{S}_n(\Sigma_{k_1}, \alpha) \times \dots \times N_n(\mathcal{S}_n(\Sigma_{k_j}), \alpha) \\ &\leq \left(\frac{C_1}{\alpha}\right)^{d_1 k_1} \times \dots \times \left(\frac{C_J}{\alpha}\right)^{d_J k_J} \end{aligned} \quad (2.33)$$

où les  $C_j$  sont des constantes de l'ordre de la dimension de chaque niveau multipliées par la taille maximale  $d_j$  des groupes dans le niveau  $j$ . En enlevant les log la dimension de  $\mathcal{S}_n$  est de l'ordre de  $\sum d_j k_j$ .

### 2.4.3 Régularisations parcimonieuses structurées par niveaux convexes

Pour reconstruire le modèle  $\Sigma = \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_J$ , on considère une régularisation par norme atomique : la norme de groupe par niveaux.

Étant donné le sous-espace  $\mathcal{H}_j$  associé au niveaux  $j$ ,  $\mathcal{S}_j(1) \subset \mathcal{H}_j$  sa sphère unité,  $G_j$  ses groupes et  $\Sigma_{1,j}$  le modèle 1-parcimonieux par groupe, on considère les atomes suivants pour le niveaux  $j$  :

$$\mathcal{A}_j := \Sigma_{1,j} \cap \mathcal{S}_j(1). \quad (2.34)$$

Cette norme est associée à l'espace de dimension finie

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}_j) = \text{span}(\{e_i\}_{i \in \cup_{g \in G_j} g})$$

et est donnée par

$$\|x\|_{\mathcal{A}_j} = \begin{cases} \sum_{g \in G} \|x_g\|_{\mathcal{H}}, & x \in \mathcal{E}(\mathcal{A}); \\ +\infty, & x \notin \mathcal{E}(\mathcal{A}) \end{cases} \quad (2.35)$$

La norme  $\|x\|_{\mathcal{A}_j}$  est appelée *norme de groupe*, *norme structurée* ou bien *norme mixte*  $\ell^1 - \ell^2$  [61].

On définit une régularisation naturelle pour la parcimonie structurée par niveaux dans  $\mathcal{H}_1 \times \dots \times \mathcal{H}_J$  :

$$R_w : (x_1, \dots, x_J) \mapsto w_1 \|x_1\|_{\mathcal{A}_1} + \dots + w_J \|x_J\|_{\mathcal{A}_J} \quad (2.36)$$

avec des poids  $w_j > 0$ .

### 2.4.4 Garanties de reconstruction

On considère donc un modèle  $\Sigma$  de parcimonie structurée en niveaux. On choisit une norme atomique  $R_w$  pondérée définie par (2.36). On montre que  $\gamma_\Sigma(R_w) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  pour  $J = 1$  et

$$\gamma_\Sigma(R_w) \geq \frac{1}{\sqrt{2 + J\kappa_w^2}}$$

pour  $J \geq 2$ , où  $\kappa_w := \max(w_j \sqrt{k_j}) / \min(w_j \sqrt{k_j})$ . En particulier, pour les poids  $w_j = 1/\sqrt{k_j}$ , on a  $\gamma_\Sigma(R_w) \geq \frac{1}{\sqrt{2+J}}$  for  $J \geq 2$ .

En comparaison, Ayaz *et coll.* [4] ont donné un résultat de reconstruction uniforme avec la norme  $\ell^1 - \ell^2$  pour la parcimonie structurée avec une hypothèse RIP. Ils ont montré qu'une constante RIP  $\gamma < \sqrt{2} - 1$  était suffisante. Notre résultat montre qu'on peut l'améliorer à  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Dans [1], le modèle parcimonie en niveaux est introduit : c'est un cas particulier de parcimonie structurée en niveaux avec une parcimonie simple dans chaque niveau. Dans [6], Bastounis *et coll.*, ont montré que quand  $\Sigma$  est un modèle de parcimonie en niveaux  $R(\cdot) = \sum_j \|\cdot\|_{\mathcal{A}_j} = \|\cdot\|_1$  (c-à-d, avec des poids  $w_j = 1$  et  $\kappa_w^2 = \kappa_1^2$  et le rapport maximum des parcimonies dans chaque niveau), alors une RIP avec constante  $\gamma = 1/\sqrt{J(\kappa_1 + 0.25)^2 + 1}$  suffit pour la reconstruction. Cette constante est améliorée par notre constante  $\gamma_\Sigma(R_w) \geq 1/\sqrt{2+J}$  quand on choisit les poids  $w_j = 1/\sqrt{k_j}$ . Notre résultat étend de plus ces résultats à la parcimonie structurée en niveaux. On obtient le théorème suivant en utilisant les meilleurs poids pour notre expression de  $\gamma_\Sigma(R_w)$ .

**Théorème 2.4.1** ([YT5]). *Soit  $\Sigma$  un modèle de parcimonie structurée en niveaux. Soit  $R_w$  la norme atomique définie par (2.36) avec les poids  $w_j = 1/\sqrt{k_j}$ . Soit  $A$  une application linéaire continue ayant une RIP de constante  $\gamma < \gamma_\Sigma(R_w)$  sur l'ensemble sécant  $\Sigma - \Sigma$ . Alors pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $e \in \mathcal{F}$  tels que  $\|e\|_{\mathcal{F}} \leq \epsilon$ , et  $x^*$  le résultat de la minimisation (2.1), on a*

$$\|x^* - x\|_{\mathcal{H}} \leq C_\Sigma(R_w, \gamma)(\|e\|_{\mathcal{F}} + \epsilon) + D_\Sigma(R_w, \gamma) \cdot d_{R_w}(x, \Sigma) \quad (2.37)$$

où :

- Pour  $J = 1$ ,  $\gamma_\Sigma(R_w) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $C_\Sigma(R_w, \gamma) \leq \frac{2\sqrt{1+\gamma}}{1-\gamma\sqrt{2}}$  et  $D_\Sigma(R_w, \gamma) = 2(1 + \sqrt{1+\gamma}C_\Sigma(R_w, \gamma))/\sqrt{k}$ .
- Pour  $J \geq 2$ ,  $\gamma_\Sigma(R_w) = \sqrt{\frac{1}{2+J}}$ ,  $C_\Sigma(R_w, \gamma) \leq \frac{(1+\sqrt{1+J})\sqrt{1+\gamma}}{1-\gamma\sqrt{2+J}}$  et  $D_\Sigma(R_w, \gamma) = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{1+\gamma}C_\Sigma(R_w, \gamma))$ .

Ce résultat donne des résultats de reconstruction classique pour la minimisation  $\ell^1$  et les modèles de parcimonie. Comme  $\gamma_\Sigma(R_w) \geq 1/\sqrt{2+J}$  avec  $J \geq 2$ , on trouve que pour  $\gamma < 1/\sqrt{2+J}$  un nombre de mesures gaussiennes

$$m \geq O \left( J \sum_{j=1}^J \left( k_j d_j + k_j \log \left( \frac{3e|G_j|}{k_j} \right) \right) \right).$$

est suffisant pour garantir la stabilité et la robustesse de la reconstruction avec  $R_w$ .

**Avec du recul... 2.4.1.** *Le saut entre la formule pour  $J = 1$  et  $J$  quelconque tendrait à faire penser que l'on devrait pouvoir améliorer notre résultat et que l'on peut obtenir  $\gamma_{R_w} = \sqrt{\frac{1}{1+J}}$ .*

Le facteur  $J$  semble pessimiste. On l'attribue à la généralité du résultat. En prenant une matrice d'observation structurée  $A$ , de meilleurs résultats peuvent être obtenus. En effet, si  $A$  est diagonale par bloc (un bloc par niveau) on a seulement besoin de vérifier la RIP de chaque bloc avec  $\gamma_j < \frac{1}{\sqrt{2}}$  sur  $\Sigma_j - \Sigma_j$ , ce qui est équivalent à la RIP avec constante  $\gamma < \frac{1}{\sqrt{2}}$  sur  $\Sigma - \Sigma$ .

Pour utiliser le Théorème 2.4.1 en dimension infinie, la régularisation  $R$  doit être étendue en dehors de  $\mathcal{E}(\Sigma)$  en gardant une constante  $D_\Sigma(R, \gamma)$ . On peut le faire au cas par cas. Par exemple, comme Adcock et Hansen dans [1], considérons le cadre suivant:  $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$  avec une base  $(e_i)_{i=1,+\infty}$ . Considérons  $\Sigma$  un modèle de parcimonie par niveaux sur  $(e_1, \dots, e_N)$ . Soit  $R = \|\cdot\|_1$ . alors  $R$  est une extension de  $R_w$  sur  $\mathcal{E}(\Sigma)$  à tout l'espace  $\mathcal{H}$  (avec  $w_j = 1$ ). Dans [1], l'opérateur  $A$  est une collection de mesures de Fourier qui ont une propriété de "strong balancing". Cette propriété impose  $\|A^H A\|_\infty \leq C'$  où  $\|\cdot\|_\infty$  est le max des normes  $\ell^\infty$  des coefficients de  $A^H A$ . On alors, pour tout  $u \in \mathcal{H}$ ,  $\|Au\|_2^2 = |\langle u, A^H Au \rangle| \leq \|A^H Au\|_\infty \|u\|_1 \leq \|A^H A\|_\infty \|u\|_1 \|u\|_1 \leq C' \|u\|_1^2$ . Et ainsi la  $M$ -norm est bornée par la norme  $\ell^1$ :  $\|\cdot\|_{A,C} \leq (1 + C\sqrt{C'}) \|u\|_1$ , ce qui permet d'obtenir une constante de robustesse finie.

**Avec du recul... 2.4.2.** *C'est au moment de paramétriser la fonction de régularisation par des poids, et de rechercher les meilleurs poids possible que l'idée de trouver une régularisation optimale à germé (chapitre suivant). Il faut cependant noter que définir des poids nécessite de connaître la parcimonie du modèle dans chaque niveaux. Comme on l'a mentionné, cette parcimonie a tendance à augmenter pour les échelles plus fines. Il ne serait donc pas difficile d'implémenter cette idée en pratique.*

## 2.4.5 Éléments de calcul $\gamma_\Sigma(R)$

Comme  $\Sigma$  est une union de sous-espaces, on a

$$\gamma_\Sigma(R_w) := \inf_{z \in \mathcal{T}_{R_w}(\Sigma) \setminus \{0\}} \sup_{x \in \Sigma} \gamma_\Sigma(x, z). \quad (2.38)$$

où

$$\gamma_\Sigma(x, z) := \frac{-\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}{\|x\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\|x+z\|_\Sigma^2 - \|x\|_{\mathcal{H}}^2 - 2\mathcal{R}e\langle x, z \rangle}}. \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

On cherche à calculer (ou à borner inférieurement au mieux)  $\gamma_\Sigma(R_w)$ . Une possibilité est de chercher intuitivement un vecteur  $x \in \Sigma$  qui maximise la corrélation avec  $-z$  (tel que  $-\mathcal{R}e\langle x, z \rangle$ )



est maximisé). Pour le modèle de parcimonie structurée en niveaux et  $R_w$  cela revient à choisir  $x = -z_T$  où  $T$  est le support tel que  $z_T \in \Sigma$  et  $z_T$  concentre le plus d'énergie de  $z$ . En notant  $z_{T_c} = z - z_T$ , on montre que

$$\gamma(-z_T, z) \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{\|z_{T_c}\|_{\Sigma}^2}{\|z_T\|_{\mathcal{H}}^2} + 1}} \quad (2.41)$$

En utilisant  $z \in \mathcal{T}_{R_w}(\Sigma)$ , on montre que  $R_w(z_{T_c}) \leq R_w(z_T)$ , qui permet de conclure que  $\|z_{T_c}\|_{\Sigma}^2 / \|z_T\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1 + J$  en utilisant un contrôle de  $\|z_{T_c}\|_{\Sigma}^2$ .

**Avec du recul... 2.4.3.** *Des calculs ultérieurs ont montré que la borne inférieure que l'on a obtenu est en fait la valeur recherchée (voir proposition 3.3.1) :*

$$\gamma_{\Sigma}(R_w) = \inf_{z \in \mathcal{T}_{R_w}(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{1}{\sqrt{\frac{\|z_{T_c}\|_{\Sigma}^2}{\|z_T\|_{\mathcal{H}}^2} + 1}}. \quad (2.42)$$

## 2.5 Généralité du résultat

On a appliqué notre théorème à quelques modèles de faible dimension classiques associés à des régularisations usuelles. On obtient

- $\Sigma =$  sous-espace de dimension  $n$ ,  $R =$  fonction indicatrice  $\iota_{\Sigma}$  ou  $\|\cdot\|_{\Sigma}$ .
  - $\gamma_{\Sigma}(R) = 1$ : cette constante RIP était déjà bien connue, ex. [13].
  - Nombre de mesures suffisant:  $m \gtrsim n$ .
- $\Sigma =$  vecteurs  $k$ -parcimonieux en dimension  $n$ ,  $R =$  norme  $\ell^1$ .
  - $\gamma_{\Sigma}(R) \geq 1/\sqrt{2}$ . C'est la constante fine de Cai *et coll.*[16].
  - Nombre de mesures suffisant:  $m \gtrsim k \log(n)$ .
- $\Sigma =$  Matrices de rang au plus  $r$  en dimension  $n \times n$ ,  $R =$  norme nucléaire.
  - $\gamma_{\Sigma}(R) \geq 1/\sqrt{2}$ . C'est aussi la constante fine de Cai *et coll.*[16].
  - Nombre de mesures suffisant:  $m \gtrsim rn$ .
- $\Sigma =$  Union finie de  $k$  demi-droites avec cohérence  $\mu(\Sigma)$ ,  $R = \|\cdot\|_{\Sigma}$ .
  - $\gamma_{\Sigma}(R) \geq \frac{2(1-\mu(\Sigma))}{3+2\mu(\Sigma)}$ .
  - Nombre de mesures suffisant:  $m \gtrsim \log(k)/\gamma_{\Sigma}(R)^2$ .
- $\Sigma =$  Matrices de permutation de dimension  $n \times n$ ,  $R = \|\cdot\|_{\Sigma}$ .
  - $\gamma_{\Sigma}(R) \geq \frac{2}{3}$ .
  - Nombre de mesures suffisant:  $m \gtrsim n \log(n)$ .

De la même manière que pour la parcimonie structurée par niveaux, on pourrait considérer ces modèles en dimension infinie du moment que l'on peut étendre  $R$  en dehors de  $\mathcal{E}(\Sigma)$  tout en obtenant une constante de robustesse finie.

## 2.6 Perspectives

Dans ce chapitre, on donne des conditions *suffisantes* pour la reconstruction de cônes de faible dimension. Pour certains modèles de parcimonie, on obtient des résultats fins si on cherche une unique constante RIP suffisante pour n'importe quelle parcimonie. Ces résultats mettent un petit frein aux travaux cherchant à améliorer les constantes RIP. Cette question reste cependant intéressante : est-il possible d'améliorer la finesse de ces résultats ? Cette question, bien que peu utile pour déterminer un nombre de mesures réaliste permettant de reconstruire les éléments de  $\Sigma$ , est centrale dans la recherche de régularisations convexes optimales abordée dans le chapitre suivant.

Pour certains modèles de faible dimension, on ne dispose pas encore de garanties de reconstruction uniforme alors que des régularisations convexes fonctionnent en pratique. Par exemple, pour la reconstruction de tenseurs de rang faible, on peut étudier plusieurs régularisations convexes : la norme nucléaire qui n'est pas calculable en pratique ou bien la somme des normes nucléaires des sous matrices (que l'on associe souvent à la notion de multi-rang). La difficulté dans ces cas là est de pouvoir contrôler la norme induite par le modèle  $\Sigma$  qui est un objet complexe dans le cadre des tenseurs de rang faible.

On voit que le cadre des espaces de Hilbert (séparables dans les exemples abordés) revient à travailler en dimension finie en prenant soin du comportement de la régularisation en dehors du sous-espace vectoriel généré par le modèle. Ce modèle implique de discrétiser un domaine (ex. temporel ou fréquentiel) où l'on considère le signal. En général, les modélisations physiques des signaux et images font intervenir des domaines intrinsèquement continus [59]. Par exemple, la super-résolution où on cherche à reconstruire des impulsions de Dirac hors de la grille ne rentre pas dans le cadre des espaces de Hilbert. Il est possible de s'y ramener grâce à des métriques à noyau [43]. On sait déjà qu'un nombre de mesures de Fourier suffisant permet d'effectuer la reconstruction en utilisant l'équivalent de la norme  $\ell^1$  dans ce contexte : la variation totale [31, 20, 35] (voir le chapitre 3). Est-ce que des garanties RIP peuvent garantir le succès de ces méthodes dans ce contexte ? Des travaux préliminaires non-publiés montrent que la constante RIP du théorème 2.3.1 ne donne pas de garanties de reconstruction. On en revient à la question de la finesse du résultat évoqué plus haut.

## Chapitre 3

# Régularisations convexes optimales pour la reconstruction de modèles de faible dimension

On a vu dans le chapitre précédent, qu'étant donné des conditions de reconstruction génériques mettant en jeu une classe d'opérateurs d'observation, un modèle de faible dimension particulier (la parcimonie en niveaux) et une famille de régularisation, on pouvait chercher la meilleure régularisation possible pour ces conditions de reconstruction. Si l'on pouvait atteindre cet objectif pour n'importe quel modèle et l'ensemble des régularisations disponibles, cela voudrait dire que lorsqu'on est confronté à un problème inverse, on pourrait simplement se concentrer sur la *modélisation* des données. La méthode (l'algorithme) de reconstruction à utiliser serait déterminée directement par notre résultat (la fonction de régularisation convexe optimale).

Dans ce chapitre, on formalise cette démarche. On définit des notions de régularisation optimale pour une mesure d'adéquation entre un modèle et une régularisation. Ces notions prennent tout leur sens pour l'étude de régularisations *convexes* optimales. Ces travaux permettent notamment de donner un sens à un concept souvent évoqué mais peu souvent défini : la convexification de régularisations non-convexes associées à modèle de faible dimension.

On commence par définir la notion d'optimalité. On étudie un exemple minimal exact puis on donne des résultats dans les exemples classiques de modèles de faible dimension.

*Publications associées* : [YT12, YT13].

### 3.1 Mesures d'adéquation et régularisations optimales

Dans ce chapitre, on utilise le modèle d'observation sans bruit

$$y = Ax_0 \tag{3.1}$$

où  $A$  est un opérateur linéaire d'observation,  $y \in \mathbb{C}^m$  et  $x_0 \in \mathcal{H} = \mathbb{R}^d$  est l'inconnue appartenant à un modèle  $\Sigma$  qui est une union de sous-espaces. On se limite donc à la dimension finie pour

l'étude de ce problème. On a vu dans le chapitre 2 que, dans le cadre des espaces de Hilbert, le comportement de la régularisation en dehors de l'espace vectoriel  $\mathcal{E}(\Sigma)$  induit par  $\Sigma$  de dimension finie sert essentiellement à étudier la robustesse à l'erreur de modélisation.

Faut-il considérer un problème d'observation bruité ? Supposons que l'on connaisse une régularisation optimale  $R^*$  pour résoudre le problème sans bruit. Considérons maintenant le problème bruité. Deux possibilités existent alors : une régularisation  $R^*$  est aussi optimale pour ce problème ou il n'existe pas de régularisation optimale pour les deux problèmes à la fois. Dans ce deuxième cas, il faudrait affaiblir les capacités de reconstruction de  $R$  pour le problème sans bruit pour améliorer la gestion du bruit. C'est une possibilité si l'application considérée permet de jouer sur le nombre de mesures (dans ces cas là on pourrait reconstruire des signaux moins parcimonieux avec plus de bruit). C'est une piste que l'on n'explore pas dans ce chapitre. On considère la minimisation

$$x^* \in \arg \min_{x \in \mathcal{H}: Ax=y} R(x). \quad (3.2)$$

On a vu que de nombreux travaux garantissent que  $x^* = x_0$  pour des modèles de parcimonie et rang faible [42]. Pour cela, on demande à l'opérateur  $A$  de vérifier certaines propriétés (comme la propriété d'isométrie restreinte (RIP) étudiée extensivement dans le chapitre 2). On cherche donc la "meilleure" fonction de régularisation  $R^*$  pour la reconstruction exacte de  $x_0$ . Idéalement, on aimerait utiliser  $R = \iota_\Sigma$  la fonction caractéristique de  $\Sigma$  ( $\iota_\Sigma(\Sigma) = \{0\}$ ,  $\iota_\Sigma(\Sigma^c) = \{+\infty\}$ ), mais elle est en général non-convexe et difficile à optimiser (on verra cependant dans le chapitre 4 que le décodeur idéal associé à cette fonction de régularisation peut être accessible pour une large classe de modèles). Pour la parcimonie en dimension finie, le calcul du décodeur idéal est combinatoire et NP-difficile. On cherche donc des régularisations convexes optimales. Cela ne garantit pas la calculabilité (des décodeurs convexes sont NP-difficiles à calculer). C'est cependant une première étape vers la recherche de régularisations convexes optimales calculables. On appelle  $\mathcal{C}$  l'ensemble des régularisations convexes d'intérêt (que l'on précise dans les sections suivantes).

D'autres classes de fonctions pourraient être considérées, telles que les fonctions partiellement lisses [58]. Elles interviennent quand on se pose la question suivante : Étant donné une fonction de régularisation, quel modèle de faible dimension est favorisé par la minimisation (3.2) ? La réponse à cette question importante a été apportée par les travaux de Vaiter *et coll.*. Cependant, d'un point de vue pratique, elle ne permet pas de déterminer directement la régularisation à utiliser étant donné un modèle.

### 3.1.1 Mesures d'adéquation entre une régularisation et un modèle

Définir la notion de meilleure régularisation dans  $\mathcal{C}$  n'est pas immédiat. On s'est déjà restreint au cas d'observations sans bruit. Idéalement, il faudrait faire dépendre la régularisation à la fois du modèle  $\Sigma$  et du type d'observations  $A \in \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A}$  est un ensemble d'opérateurs linéaires (si l'on dispose a priori de connaissances sur  $A$ ). Notre objectif serait alors de définir une mesure d'adéquation  $M_{\Sigma, \mathbf{A}}$  entre une fonction de régularisation  $R$  et les paramètres de ces problèmes inverses  $\Sigma, \mathbf{A}$  qui détermine si  $R$  est performante. Le but serait de maximiser  $M_{\Sigma, \mathbf{A}}$ . Une telle maximisation pourrait faire intervenir  $\mathbf{A}$  dans la régularisation optimale  $R^*$  (ex. dans [52, 53, 54], les relaxations continues finies de la régularisation  $\ell^0$  dépendent de  $\mathbf{A}$ ).

On propose de chercher une fonction de régularisation plus *universelle* qui ne dépend pas de  $\mathbf{A}$ .

On cherche donc à définir une mesure d'adéquation  $M_\Sigma(R)$  et à effectuer sa maximisation (lorsque c'est possible)

$$R^* \in \arg \max_{R \in \mathcal{C}} M_\Sigma(R). \quad (3.3)$$

Dans l'exemple de la parcimonie et du rang faible, l'existence de  $R^*$  est vérifiée. Une étude plus générale des conditions sur  $M_\Sigma(R)$  et  $\mathcal{C}$  pour l'existence et la potentielle unicité de ce maximum est une direction intéressante à explorer.

Lorsque l'on étudie une fonction de régularisation  $R$ , deux types de garanties de reconstruction sont généralement utilisées : uniformes et non uniformes.

Comme mentionné dans le chapitre 2, on peut exprimer ces conditions facilement en faisant intervenir la notion de vecteur de descente (voir définition 2.2.1) :

- Reconstruction uniforme : Soit  $A$  une application linéaire. Alors "Pour tout  $x_0 \in \Sigma$ ,  $x^* = x_0$ " est équivalent à  $\mathcal{T}_R(\Sigma) \cap \ker M = \{0\}$ .
- Reconstruction non-uniforme : Soit  $A$  une application linéaire et  $x_0 \in \Sigma$ . Alors  $x^* = x_0$  est équivalent à  $\mathcal{T}_R(x_0) \cap \ker M = \{0\}$ .

On observe donc qu'une fonction de régularisation  $R$  est "bonne" si  $\mathcal{T}_R(\Sigma)$  laisse de l'espace pour que le noyau  $\ker A$  de  $A$  n'ai pas d'intersection (non-triviale) avec lui. En dimension  $n$ , si il n'y a pas d'information a priori sur l'orientation de  $\ker A$  l'espace occupé par les ensemble de descente peut être quantifié par le volume  $\mathcal{T}_R(\Sigma) \cap S(1)$  où  $S(1)$  est la sphère unité pour la norme hilbertienne  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ .

Pour la reconstruction uniforme on définit donc

$$M_\Sigma^U(R) := 1 - \frac{\text{vol}(\mathcal{T}_R(\Sigma) \cap S(1))}{\text{vol}(S(1))}. \quad (3.4)$$

où le volume  $\text{vol}(E)$  d'un ensemble  $E$  est la mesure de  $E$  par rapport à la mesure uniforme sur la sphère  $S(1)$  (c'est-à-dire la mesure de Hausdorff de  $\mathcal{T}_R(\Sigma) \cap S(1)$  de dimension  $n - 1$ ).

Lorsque l'on étudie la reconstruction non-uniforme, on cherche à limiter les volumes  $\frac{\text{vol}(\mathcal{T}_R(x_0) \cap S(1))}{\text{vol}(S(1))}$ . On cherche à optimiser cette probabilité pour tout  $x_0$ . On propose donc la mesure d'adéquation

$$M_\Sigma^{NU}(R) := 1 - \sup_{x \in \Sigma} \frac{\text{vol}(\mathcal{T}_R(x) \cap S(1))}{\text{vol}(S(1))} \quad (3.5)$$

En pratique, on cherche à les borner avec forte probabilité pour des mesures aléatoires (ex. des mesures gaussiennes). Le volume  $\frac{\text{vol}(\mathcal{T}_R(x_0) \cap S(1))}{\text{vol}(S(1))}$  représente la probabilité qu'a un noyau de dimension 1 d'intersecter non-trivialement  $\mathcal{T}_R(x_0)$ . On peut donc faire le lien entre notre cadre déterministe et la notion de largeur gaussienne utilisée dans la théorie de l'acquisition compressée et son cadre aléatoire [26, 3].

**Avec du recul... 3.1.1.** *On a étudié le cas non uniforme seulement dans notre exemple minimal de la section suivante. La difficulté principale repose sur le fait que le calcul des largeurs gaussiennes est difficile à étendre à des fonctions convexes quelconques. Des travaux récents [47] pourraient faciliter ce calcul.*

En dimension infinie, le volume de  $S(1)$  s'annule, ce qui rendrait les mesures précédentes inutiles. Pour gérer ce cadre directement il faudrait donc mesurer les volumes des ensembles de descente dans l'espace de dimension finie  $\mathcal{E}(\Sigma)$ .

On se concentre sur la maximisation de  $M_\Sigma^U$ . On peut donner immédiatement le lemme suivant.

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $R_1, R_2$  deux fonctions de régularisation telles que  $\mathcal{T}_{R_1}(\Sigma) \subset \mathcal{T}_{R_2}(\Sigma)$  alors  $M_\Sigma^U(R_1) \geq M_\Sigma^U(R_2)$ .*

La mesure d'adéquation est donc décroissante par rapport à l'inclusion des ensembles de descente.

D'après le lemme 2.2.1, pour toute fonction convexe propre coercive continue  $R$ , on peut trouver une norme atomique  $R'$  avec atomes inclus dans  $\Sigma$  telle que  $\mathcal{T}_{R'}(\Sigma) \subset \mathcal{T}_R(\Sigma)$ . Pour une fonction convexe l'ensemble de descente à un point  $x$  est un cône. On parle donc de cônes de descente.

Si l'on définit

$$\mathcal{C} = \{\text{fonctions convexes propres coercives continues}\} \quad (3.6)$$

et

$$\mathcal{C}_\Sigma = \{\text{"normes" atomiques } \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \text{ propres coercives continues : } \mathcal{A} \subset \Sigma\}, \quad (3.7)$$

on a le résultat suivant

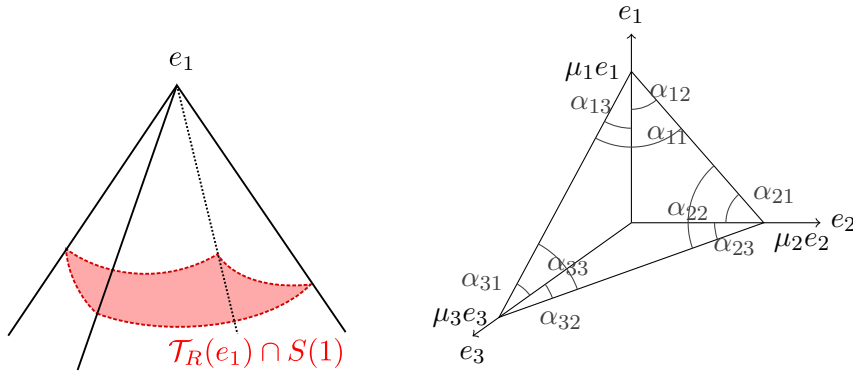
**Théorème 3.1.1.**

$$\arg \max_{R \in \mathcal{C}} M_\Sigma^U(R) \subset \arg \max_{R \in \mathcal{C}_\Sigma} M_\Sigma^U(R). \quad (3.8)$$

Si on cherche une régularisation convexe qui n'est pas trop pathologique (propre coercive continue), on peut restreindre notre recherche de régularisation optimale à l'ensemble des normes atomiques avec atomes inclus dans le modèle. On peut noter qu'utiliser des fonctions de régularisation de  $\mathcal{C}$  garantit la convergence d'un algorithme primal-dual [25] pour la formulation "lagrangienne" (1.3) de la minimisation (3.2).

**Avec du recul... 3.1.2.** *Il semble que la technique de preuve utilisée dans le lemme 2.2.1 se généralise bien pour montrer que les normes atomiques sont aussi optimales avec  $\arg \max_{R \in \mathcal{C}} M_\Sigma^{NU}(R) \subset \arg \max_{R \in \mathcal{C}_\Sigma} M_\Sigma^{NU}(R)$ . Ce qui aidera à l'étude du cas non-uniforme similairement au cas uniforme.*

On commence dans la section 3.2, par étudier un exemple minimal. Lorsque  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ ,  $\Sigma = \Sigma_1$  l'ensemble des vecteurs 1-parcimonieux. On montre que l'on peut calculer le maximum  $M_\Sigma^U(R)$



**Figure 3.1:** Gauche : une représentation de la surface d'intérêt. Droite : paramétrisation des angles d'un tétraèdre.

et  $M_\Sigma^{NU}(R)$  exactement. Ce calcul donne une bonne idée de la géométrie de notre problème. On observe que cette méthode est difficilement extensible à une dimension quelconque. Cela motive l'introduction de mesures d'adéquation approchées et leur maximisation dans la section 3.3.

### 3.2 Un résultat exact sur un exemple minimal : la reconstruction 1-parcimonieuse en 3D

On étudie le cas de la 1-parcimonie en dimension 3. C'est le cas intéressant le plus simple : il est impossible de faire de la reconstruction uniforme de vecteurs 1-parcimonieux en dimension 2 si  $A$  n'est pas inversible. On pose  $\Sigma = \Sigma_1$  et  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ .

Grâce au théorème 3.1.1, on a  $\arg \max_{R \in \mathcal{C}} M_\Sigma^U(R) = \arg \max_{R \in \mathcal{C}_{\Sigma_1}} M_\Sigma^U(R)$ . On s'intéresse plus particulièrement aux normes atomiques symétriques  $\mathcal{C}'_{\Sigma_1}$  pour simplifier les calculs qui suivent. On peut aussi fixer une normalisation arbitraire des normes car multiplier  $R$  par un scalaire ne change pas son adéquation avec  $\Sigma$ .

On se contentera aussi de calculer  $\arg \max_{R \in \mathcal{C}'_{\Sigma_1}} M_\Sigma^{NU}(R)$  même si on n'a pas encore formellement démontré que les normes atomique sont suffisante dans le cas non-uniforme.

On peut facilement caractériser  $\mathcal{C}'_{\Sigma_1}$ . Il s'agit de l'ensemble des normes  $\ell^1$  pondérées

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_{\Sigma_1} &:= \{ \|\cdot\|_w : \|z\|_w = w_1|z_1| + w_2|z_2| + w_3|z_3|, w_i > 0 \} \\ &= \{ \|\cdot\|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} = \{\pm w_i^{-1} e_i\}_{i=1,3}, w_i > 0, \max |w_i| = 1 \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour maximiser  $A_\Sigma^U$  (respectivement  $A_\Sigma^{NU}$ ), on doit calculer la surface de l'intersection de 3 cônes de descente avec la sphère unité  $S(1)$  (respectivement la surface du plus grand cône de descente intersecté avec  $S(1)$ ).

Comme on le voit sur la figure 3.1, avec les symétries on a besoin de calculer la surface de l'intersection de 3 cônes de descentes d'une norme  $\ell^1$  pondérée avec la sphère unité (cette surface est aussi l'angle solide de ces cônes). Ce calcul peut être mené exactement. On donne l'expression

de ces surfaces dans le lemme 3.2.1. On introduit ces quantités pour simplifier les notations Pour  $i \neq j$ , on définit  $\mu_i = w_i^{-1}$ ,  $\beta_{ij}(\mu) = \cos(\alpha_{ij}) = \left(1 + (\mu_j/\mu_i)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$  et  $\beta_{ii} = \prod_{i \neq j} \beta_{ij}$ .

**Lemme 3.2.1.** *Soit  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x \in \mathbb{R}e_i$  un vecteur 1-parcimonieux et  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 0$  des réels positifs. Alors,*

$$\text{vol}(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_w}(x) \cap S(1)) = 4 \tan^{-1} \left( \frac{1}{1 + c_i(\mu)} \right) \quad (3.10)$$

où

$$c_i(\mu) = 1 + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}(\mu) + \prod_{j \neq i} \beta_{ij}(\mu). \quad (3.11)$$

Avec ce lemme 3.2.1, on montre que la norme  $\ell^1$  est la meilleure régularisation pour nos deux mesures d'adéquation.

**Théorème 3.2.1** ([YT13]). *Soit  $\Sigma = \Sigma_1$  l'ensemble des vecteurs 1-parcimonieux dans  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{C}'_{\Sigma_1} = \{\|\cdot\|_w : \|z\|_w = w_1|z_1| + w_2|z_2| + w_3|z_3|, \max |w_i| = 1, w_i > 0\}$ . Alors*

$$\arg \max_{R \in \mathcal{C}'_{\Sigma_1}} A_{\Sigma}^U(R) = \arg \max_{R \in \mathcal{C}'_{\Sigma_1}} A_{\Sigma}^{NU}(R) = \|\cdot\|_1$$

On conjecture un résultat similaire dans  $\mathcal{C}_{\Sigma_1}$  et donc dans  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions convexes (propres coercives continues). Dans le cas d'atomes asymétriques, on aurait besoin de calculer  $6 \times 4$  angles solides. Pour étendre ces calcul au cas général de la  $k$ -parcimonie en dimension  $n$ , il faudrait pouvoir soit calculer les volumes des cônes de descente exactement, soit manipuler les expressions générales de ces volumes, ce qui s'est révélé être très difficile.

On a donc suivi une autre voie : utiliser des mesures d'adéquation approchées.

### 3.3 Mesures d'adéquation basées sur la RIP

Optimiser nos mesures d'adéquation idéales semble une tâche difficile. On propose de chercher un résultat intermédiaire. On troque donc l'objectif :

Trouver une régularisation optimale pour les garanties de reconstruction exacte.

par

Trouver une régularisation optimale pour les *garanties RIP* de reconstruction exacte.



Comme mentionné et montré extensivement dans le chapitre 2, la RIP est une condition suffisante de succès de nombreuses régularisations convexes. C'est aussi une condition nécessaire pour l'existence de décodeurs avec garantie de performance (potentiellement non-convexes).

On peut définir la constante d'isométrie restreinte d'une matrice ainsi :

**Définition 3.3.1** (Constante RIP). *Dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , soit  $\Sigma$  une union de sous-espaces. Soit  $A$  une application linéaire, on définit la constante d'isométrie restreinte (constante RIP) de  $A$  par*

$$\gamma(A) := \inf_{x \in \mathcal{S}(\Sigma)} \left| \frac{\|Ax\|_{\mathcal{H}}^2}{\|x\|_{\mathcal{H}}^2} - 1 \right|. \quad (3.12)$$

*On rappelle que  $\mathcal{S}(\Sigma) = \Sigma - \Sigma$  est l'ensemble sécant (voir définition 2.1.1).*

On a obtenu avec le théorème 2.3.1 une constante  $\gamma_{\Sigma}^{suff}(R)$  qui donne une condition suffisante de reconstruction de  $\Sigma$  pour une régularisation  $R$  donnée. On peut définir théoriquement une constante RIP fine

$$\gamma_{\Sigma}^{sharp}(R) := \inf_{A: \ker A \cap \mathcal{T}_R(\Sigma) \neq \{0\}} \gamma(A). \quad (3.13)$$

C'est la meilleure constante RIP des opérateurs d'observation qui ne permettent pas la reconstruction du modèle. On a donc le théorème immédiat suivant

**Théorème 3.3.1** (Reconstruction exacte avec RIP fine). *Soit  $\Sigma$  une union de sous-espaces. Alors, pour tout  $A$  satisfaisant la RIP sur  $\Sigma - \Sigma$  avec constante  $\gamma < \gamma_{\Sigma}^{sharp}(R)$ , on a : pour tout  $x_0 \in \Sigma$ , avec  $x^*$  le résultat de la minimisation (3.2),*

$$x^* = x_0. \quad (3.14)$$

Une fonction de régularisation optimale au sens des garanties RIP de reconstruction est une fonction

$$R^* \in \arg \max_{R \in \mathcal{C}} \gamma_{\Sigma}^{sharp}(R). \quad (3.15)$$

Ainsi  $R^*$  est la fonction convexe de  $\mathcal{C}$  qui demande la condition RIP la plus faible sur l'opérateur d'observation  $A$ . On remarque aussi immédiatement que  $\gamma_{\Sigma}^{sharp}(R)$  a la même propriété de décroissance par rapport à l'inclusion des cônes de descente. Malheureusement le côté non explicite de sa formulation rend aussi difficile sa maximisation. On se tourne donc vers son approximation par notre constante suffisante.

On considère aussi une mesure basée sur une condition nécessaire inspirée de [30].

$$\gamma_{\Sigma}^{nec}(R) := \inf_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \gamma(I - \Pi_z). \quad (3.16)$$

L'opérateur  $\Pi_z$  est la projection orthogonale sur  $\text{span}(z)$ . Il s'agit donc de la meilleure constante d'opérateurs élémentaires d'observation (les opérateurs les mieux "conditionnés" avec des noyaux de dimension 1 qui peuvent cependant potentiellement ne pas permettre la reconstruction uniforme).

On a la relation

$$\gamma_{\Sigma}^{suff}(R) \leq \gamma_{\Sigma}^{sharp}(R) \leq \gamma_{\Sigma}^{nec}(R). \quad (3.17)$$

Une question ouverte est de savoir si l'inégalité de droite est en fait une égalité.

Dans la suite on donne des résultats d'optimalité pour les membres de gauche et de droite de cette inégalité.

Dans ces deux cas, on préfère s'intéresser de manière équivalente à la notion de conditionnement restreint qui ne dépend pas de la normalisation de  $A$ .

**Définition 3.3.2** (Conditionnement restreint).

$$\beta(A) := \frac{\sup_{x \in (\Sigma - \Sigma) \cap S(1)} \|Ax\|_{\mathcal{H}}^2}{\inf_{x \in (\Sigma - \Sigma) \cap S(1)} \|Ax\|_{\mathcal{H}}^2}. \quad (3.18)$$

On peut montrer que la constante RIP  $\gamma(A)$  est croissante par rapport à  $\beta(A)$  car à une renormalisation de  $A$  près ces notions sont équivalentes avec

$$\beta_{\Sigma}(R) := \frac{1 + \gamma_{\Sigma}(R)}{1 - \gamma_{\Sigma}(R)}. \quad (3.19)$$

Dans les sections suivantes, on donne des résultats d'optimalité pour la  $k$ -parcimonie en dimension  $n$ . On montre que la norme  $\ell^1$  maximise ces notions d'optimalités.

### 3.3.1 Mesure d'adéquation basée sur des conditions RIP nécessaires

Comme on l'a vu, on peut se baser sur le conditionnement restreint ("restricted conditioning" (RC)) pour mesurer l'adéquation entre  $R$  et  $\Sigma$ . On s'intéresse à la mesure

$$M_{\Sigma}^{RC,nec}(R) := \beta_{\Sigma}(R) = \inf_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \beta(I - \Pi_z). \quad (3.20)$$

On suppose  $\Sigma = \Sigma_k$  et  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ . On a donc  $\Sigma - \Sigma = \Sigma_{2k}$  avec  $k \geq 1$  et  $n \geq 3$  (on rappelle que pour  $n < 3$  la reconstruction uniforme n'est pas possible lorsque  $A$  n'est pas inversible).

Pour montrer l'optimalité de la norme  $\ell^1$ , on utilise la caractérisation suivante de  $M_{\Sigma}^{RC,nec}(R)$ .

**Lemme 3.3.1.** Soit  $\Sigma = \Sigma_k$  et  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ . Alors

$$M_{\Sigma}^{RC,nec}(R) = \frac{1}{1 - \inf_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \sup_{x \in (\Sigma - \Sigma) \cap S(1)} \frac{\langle x, z \rangle^2}{\|z\|_{\mathcal{H}}^2}}. \quad (3.21)$$

Le théorème 3.1.1 est valide pour  $M_{\Sigma}^{RC,nec}(R)$ . Il est donc suffisant de calculer

$$\arg \max_{R \in \mathcal{C}_{\Sigma}} M_{\Sigma}^{RC,nec}(R) = \arg \min_{R \in \mathcal{C}_{\Sigma}} \sup_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|z_{T_2^c}\|_2^2}{\|z_{T_2}\|_2^2} = \arg \min_{R \in \mathcal{C}} B_{\Sigma}(R) \quad (3.22)$$

où  $T_2$  est une notation pour un support contenant les  $2k$  plus grandes amplitudes dans  $z$ , c'est-à-dire que pour tout  $i \in T_2, j \in T_2^c$ , on a  $|z_i| \geq |z_j|$ .

Étudier la quantité  $B_\Sigma(R) := \sup_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|z_{T_2^c}\|_2^2}{\|z_{T_2}\|_2^2}$  pour  $R \in \mathcal{C}$  permet de conclure. On se place dans le cas où il est possible de faire de la reconstruction parcimonieuse avec des opérateurs sous-déterminés  $n \geq 2k$ .

**Théorème 3.3.2** ([YT13, YT22]). *Soit  $\Sigma = \Sigma_k$ ,  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ . On suppose  $n \geq 2k$ . Alors quelque soit  $\lambda > 0$ ,*

$$\lambda \|\cdot\|_1 \in \arg \max_{R \in \mathcal{C}} A_\Sigma^{RIP, nec}(R) \quad (3.23)$$

Pour prouver ce théorème, on montre que  $B_\Sigma(R) \geq B_\Sigma(\|\cdot\|_1)$  en utilisant l'expression exacte de  $B_\Sigma(\|\cdot\|_1)$  que l'on peut déduire de [30].

On a montré l'unicité dans le cas des normes  $\ell^1$  à poids.

### 3.3.2 Mesure d'adéquation basée sur des conditions RIP suffisantes

On utilise la constante RIP suffisante  $\gamma_\Sigma^{suff}(R)$  donnée dans le chapitre 2. On peut la caractériser par la proposition suivante.

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\Sigma = \Sigma_k$ . on a*

$$\gamma_\Sigma^{suff}(R) = \frac{1}{\sqrt{\sup_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|z_{T^c}\|_\Sigma^2}{\|z_T\|_2^2} + 1}} \quad (3.24)$$

où  $T$  est un support de  $k$  plus grandes amplitudes dans  $z$  et  $\|\cdot\|_\Sigma$  est la norme atomique induite par  $\Sigma$  (voir section 2.2.2).

On utilise

$$M_\Sigma^{RIP, suff}(R) := \gamma_\Sigma^{suff}(R). \quad (3.25)$$

Similairement à la Proposition 3.3.1, on a

$$\arg \max_{R \in \mathcal{C}_\Sigma} M_\Sigma^{RIP, suff}(R) = \arg \min_{R \in \mathcal{C}_\Sigma} \sup_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|z_{T^c}\|_\Sigma^2}{\|z_T\|_2^2} = \arg \min_{R \in \mathcal{C}_\Sigma} D_\Sigma(R) \quad (3.26)$$

où  $D_\Sigma(R) := \sup_{z \in \mathcal{T}_R(\Sigma) \setminus \{0\}} \frac{\|z_{T^c}\|_\Sigma^2}{\|z_T\|_2^2}$ . L'étude de  $D_\Sigma(R)$  pour  $R \in \mathcal{C}$  permet de conclure.

**Théorème 3.3.3** ([YT13, YT22]). Soit  $\Sigma = \Sigma_k$ ,  $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ . On suppose  $n \geq 2k$ . Alors quelque soit  $\lambda > 0$

$$\lambda \|\cdot\|_1 \in \arg \max_{R \in \mathcal{C}} M_{\Sigma}^{RIP, suff}(R). \quad (3.27)$$

La démonstration suit le même principe que pour le cas nécessaire et l'unicité est obtenue pour les normes  $\ell^1$  à poids.

### 3.3.3 Remarques

Ces deux résultats d'optimalité confirment ce que l'on sait déjà de manière empirique depuis de nombreuses années. La norme  $\ell^1$  est la "meilleure" régularisation convexe qui permet de faire de la reconstruction parcimonieuse. On a montré ce résultat pour la dimension 3. Pour le cas général, on a montré que la norme  $\ell^1$  est la fonction de régularisation qui permet d'avoir les meilleures garanties RIP de reconstruction (dans l'état de nos connaissances actuelles).

On remarque une similitude entre les quantités fondamentales  $D_{\Sigma}(R)$  et  $B_{\Sigma}(R)$  à optimiser pour le cas suffisant et le cas nécessaire. On peut donc conjecturer que les expressions approchées de la mesure d'adéquation basée sur la RIP ne sont pas très éloignée de la RIP idéale.

Une limite de ces résultats réside dans leur preuve. Elle n'est pas constructive. On a exhibé la meilleure fonction (la norme  $\|\cdot\|_1$ ) puis montré qu'elle était optimale. Ce n'est pas une preuve généralisable à n'importe quel modèle.

On peut montrer de la même manière que la norme nucléaire est optimale pour la reconstruction de matrices de rang faibles pour ces deux mesures (preprint à venir [YT22]).

## 3.4 Perspectives

Ces travaux introduisent un formalisme pour l'étude des régularisations convexes optimales. De nombreuses questions restent ouvertes. On peut bien sûr commencer par s'intéresser aux modèles de rang faible et de parcimonie généralisée.

Cependant, la difficulté de cette problématique est qu'elle nécessite des résultats fins à toutes les étapes pour que le résultat final ait du sens. On peut donc s'intéresser à la finesse des encadrements des constantes RIP. On passe par une approche analytique pour démontrer l'optimalité de la norme  $\ell^1$ . Est-il possible d'en avoir une preuve plus géométrique (reposant par exemple sur les symétries et les invariances du problème) ?

On n'a pas mené d'étude théorique des mesures d'adéquation. En toute généralité, on peut se poser la question des hypothèses qui garantissent l'existence et l'unicité d'une fonction de régularisation optimale.

Enfin, et c'est peut-être la piste la plus intéressante (mais pas indépendante des autres), est-il possible de répliquer ces résultats avec des preuves constructive. En effet, confronté à un problème

inverse avec modèle de faible dimension, on ne connaît pas a priori la régularisation convexe optimale. Cette question se résume à trouver les atomes inclus dans le modèle qui correspondent à la norme atomique optimale (ce que l'on a fait en dimension 3).

## Chapitre 4

# Géométrie des méthodes non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension

On a montré dans le chapitre 2 que l'on pouvait donner des garanties de reconstruction étant donné un modèle de faible dimension. Il vient naturellement la question de la fonction de régularisation qui a les meilleures garanties. Si on cherche une régularisation convexe optimale, on peut construire des mesures d'adéquation que l'on s'efforce d'optimiser (chapitre 3).

Si il n'y a pas de contrainte, la fonction optimale est non-convexe et explicite. Le problème est donc de pouvoir optimiser la fonction objectif correspondante en pratique. Dans ce chapitre, on étudie la géométrie de la minimisation pour une classe générique de modèles. Elle permet de considérer dans un même cadre des problèmes aussi différents que la reconstruction de matrices de rang faible, la super-résolution d'impulsions sans grille et l'estimation de mélanges de gaussiennes.

*Publications associées :* [YT4, YT3, YT23, YT11].

### 4.1 Au delà des espaces de Hilbert : un cadre générique pour l'étude des problèmes inverses

Pour pouvoir gérer les exemples mentionnés, on doit d'abord définir un espace plus général dans lequel travailler (les espaces de Hilbert ne conviennent pas a priori pour gérer des distributions de Dirac ou des mesures sur  $\mathbb{R}^d$ ). A partir de  $m$  mesures bruitées  $y \in \mathbb{C}^m$  définies par une projection sur des fonctions  $(\alpha_l)_{1 \leq l \leq m}$  (ex. des mesures de Fourier) :

$$y_l = \langle x_0, \alpha_l \rangle + e_l \quad (4.1)$$

où  $e = (e_l)_{1 \leq l \leq m}$  est un bruit additif d'énergie finie, on cherche à estimer  $x_0$ . On peut utiliser ce modèle général pour les problèmes d'imagerie en traitement du son et des images. Typiquement, la forme linéaire  $x \rightarrow \langle x, \alpha_l \rangle$  modélise la réponse du  $l$ -ième capteur à un signal  $x$ . Soit  $\mathcal{D}$  un espace contenant les fonctions utilisées pour mesurer  $x_0$  (ex. un espace de Banach de fonctions

lisses en dimension infinie où un ensemble de vecteurs en dimension finie). Les mesures décrites par l'équation (4.1) ont du sens (sont bien définies) pour tout  $x_0$  vivant dans l'espace dual  $\mathcal{D}^*$  de  $\mathcal{D}$ . Le produit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est alors le produit (crochet) de dualité entre  $\mathcal{D}^*$  et  $\mathcal{D}$ .

On considère ici que  $\mathcal{D}^*$  est un espace vectoriel topologique localement convexe avec une topologie faible-\* (on rappelle dans la Section 4.2 les outils utiles à notre étude). On peut donc résumer la processus de mesure par

$$y = Ax_0 + e, \quad (4.2)$$

où  $A$  est un opérateur linéaire continu pour la topologie faible-\* de  $\mathcal{D}^*$  dans  $\mathbb{C}^m$  définit, pour  $l = 1, \dots, m$ , par

$$(Ax_0)_l := \langle x_0, \alpha_l \rangle. \quad (4.3)$$

On retombe donc sur l'équation de mesure que l'on retrouve dans les autres chapitres.

La procédure de reconstruction

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in \Sigma} \|Ax - y\|_2^2 \quad (4.4)$$

permet d'estimer  $x_0$  à partir du moment où  $A$  vérifie une propriété d'isométrie restreinte sur l'ensemble sécant  $\Sigma - \Sigma$  [13]. On appelle cette méthode le décodeur idéal.

Dans les applications d'imagerie, on cherche en général à garantir que  $x^*$  est proche de  $x_0$  à une précision donnée. On suppose que l'on peut mesurer l'erreur d'estimation, dans un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  tel que  $\Sigma \subset \mathcal{H}$  (on pourrait se contenter d'un espace métrique, mais tous nos exemples vérifient cette hypothèse).

On se place donc dans un contexte où le nombre  $m$  de mesures (déterministes où aléatoires) garantit une estimation stable de  $x_0$ , en vérifiant une propriété d'isométrie restreinte [13]. On garantit donc

$$\|x^* - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|e\|_2^2, \quad (4.5)$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $e$  et de  $x_0 \in \Sigma$ .

Le décodeur (4.4) n'est pas convexe en général et difficile à optimiser *a priori*. On a exploré la voie convexe dans les chapitres précédents. Les méthodes convexes sont très performantes pour les modèles de parcimonie classique mais rencontrent des problèmes de mise à l'échelle dans d'autres exemples tels que la super-résolution d'impulsions de diracs sans grille. On a aussi vu qu'il n'était pas facile de trouver la régularisation optimale étant donné un modèle de faible dimension.

On prend ici une approche différente : effectuer directement la minimisation (4.4) avec une simple initialisation suivie d'un algorithme de descente dans un espace de paramètres. Cette approche a été proposée pour la reconstruction de matrices de rang faible [62, 8], la déconvolution aveugle [46, 17] et la reconstruction de phase [60].

On propose un cadre unifié qui suit la même idée. On considère un problème inverse où le modèle de faible dimension peut être paramétré dans  $\mathbb{R}^d$  et on propose une étude générale dans l'espace des paramètres.

La première remarque qui vient à l'esprit lorsque l'on décrit ces méthodes est "Comment cela peut-il marcher ? On est dans un contexte NP difficile !". L'explication se trouve dans le fait que l'on étudie une sous-classe de problèmes en réalité beaucoup plus faciles que ce qu'il n'y

paraît : l'opérateur  $A$  a un "conditionnement" (adaptable avec le nombre de mesures) qui permet de fournir une initialisation intéressante et de contrôler la géométrie de la fonction à minimiser.

**Avec du recul... 4.1.1.** *L'origine de ces travaux a été l'étude de ces méthodes non-convexes pour l'estimation d'impulsions sans grille. On ne présente ici que la théorie générale, qui donne des résultats un peu moins fins pour la super-résolution sans-grille, mais permet de traiter le cas des modèles de mélanges de gaussiennes.*

#### 4.1.1 Paramétrisation du modèle $\Sigma$

Soit  $\Sigma \subset \mathcal{D}^*$  une union de sous-espaces et  $x_0 \in \Sigma$ . On considère les problèmes inverses où le modèle de faible dimension peut être décrit par une paramétrisation (possiblement contrainte) de  $\mathbb{R}^d$ .

**Définition 4.1.1** (Paramétrisation de  $\Sigma$ ). *Une paramétrisation de  $\Sigma$  est une fonction  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{D}^*$  telle que  $\Sigma \subset \phi(\mathbb{R}^d) = \{\phi(\theta) : \theta \in \mathbb{R}^d\}$ .*

On étudie le problème d'optimisation (4.4) dans l'espace des paramètres.

**Définition 4.1.2** (Minimum local). *Le paramètre  $\theta \in \mathbb{R}^d$  est un minimum local de  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  si il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\theta' \in \mathbb{R}^d$  tel que  $\|\theta - \theta'\|_2 \leq \epsilon$ , on a  $g(\theta) \leq g(\theta')$ .*

On définit l'image réciproque de  $\Sigma$  dans l'espace des paramètres

$$\Theta := \phi^{-1}(\Sigma); \quad (4.6)$$

et la fonction paramétrée

$$g(\theta) := \|A\phi(\theta) - y\|_2^2. \quad (4.7)$$

On va donc chercher à minimiser

$$\theta^* \in \arg \min_{\theta \in \Theta} \|A\phi(\theta) - y\|_2^2. \quad (4.8)$$

Comme on étudie les algorithmes de descente dans  $\mathbb{R}^d$ , on suppose que  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Cela garantit que le gradient de  $g$  est 0 à  $\theta^*$  même si  $\Theta \subsetneq \mathbb{R}^d$ . On a aussi que  $\phi(\theta^*)$  est un minimiseur de (4.4).

Le modèle que l'on vient de décrire permet de traiter les situations suivantes, que l'on détaillera dans la section 4.3.

- Matrices de rang faible positives semi-définies (PSD). On a  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* = \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $d = p \times r$ ,  $\phi(Z) = ZZ^T$  ( $\Theta$  est identifié avec l'ensemble des matrices  $p \times r$ ,  $\Sigma = \Sigma_r$ , l'ensemble des matrices de rang inférieur à  $r$ ), voir la section 4.3.1.



- Estimation parcimonieuse sans grille. On a que  $\mathcal{D}$  est l'espace  $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^p)$  des fonctions bornées différentiables deux fois sur  $\mathbb{R}^p$  avec des dérivées bornées.  $\mathcal{D}^*$  contient l'espace des distributions à support compact sur  $\mathbb{R}^p$  d'ordre inférieur à 2.  $d = k(p+1)$ ,  $\phi(a, t) = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{t_i}$ ,  $\Sigma = \Sigma_{k, \epsilon}$  est l'ensemble des sommes de  $k$  impulsions  $\epsilon$ -séparées, voir la section 4.3.2.
- Modélisation par mélange de gaussiennes à partir de données compressées. On a que  $\mathcal{D}$  est l'espace  $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^p)$ .  $\mathcal{D}^*$  contient l'ensemble des mesures signées  $\mathbb{R}^p$ ,  $d = k(\frac{p(p+1)}{2} + p + 1)$ ,  $\phi(w, t, \Gamma) = \sum_{i=1}^k w_i \mu_{t_i, \Gamma_i}$  où  $\mu_{t_i, \Gamma_i}$  est la mesure de probabilité gaussienne de moyenne  $t$  et de covariance  $\Gamma_i$ . l'ensemble  $\Sigma = \Sigma_{k, \epsilon, \rho, P}$  est l'ensemble des mélange de  $k$  gaussiennes  $\epsilon$ -séparées (avec la métrique appropriée) avec des covariances bornées par  $(\rho, P)$ . voir la section 4.3.3 .

L'importante propriété que l'on demandera à  $\phi$  est une différentiabilité faible (voir la section 4.2) pour calculer une direction de descente. On fera aussi appel à un comportement Lipschitz local autour du minimum global et des propriétés de bornitude des dérivées.

On remarque que  $\phi$  n'est pas injective en général. La différentielle de  $\phi$  peut donc avoir un noyau non trivial. On a donc eu besoin d'adapter les preuves de convergence traditionnelles à ce contexte générique (voir la Section 4.2.4).

#### 4.1.2 Bassins d'attraction et algorithmes de descente

Pour effectuer la minimisation (4.8), on considère la descente de gradient à pas fixe  $\tau$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \tau \nabla g(\theta_n) \quad (4.9)$$

où  $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$  est l'initialisation. Le choix de cette méthode est essentiellement fait pour simplifier l'analyse mais toute méthode de descente pourrait bénéficier des idées que l'on expose dans ce qui suit.

Comme seulement l'estimation  $x^* \in \Sigma$  nous intéresse, on propose la définition suivante de bassin d'attraction car on travaille dans des conditions où la minimisation de  $g$  donne les garanties de reconstruction (4.5).

**Définition 4.1.3** (Bassin d'attraction). *On dit qu'un ensemble  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $\theta^* \in \Lambda$  si il existe  $\tau_0 > 0$  tel que si  $\theta_0 \in \Lambda$  alors la séquence  $g(\theta_n)$  avec  $\theta_n$  défini par (4.9) converge vers  $g(\theta^*)$  pour tout  $\tau \leq \tau_0$ .*

D'après les résultats classiques d'optimisation (voir par exemple [29]), un ouvert  $\Lambda$  contenant  $\theta^*$  est un  $g$ -bassin d'attraction du minimiseur global  $\theta^*$  si

- $g$  est différentiable à gradient Lipschitz ;
- $g$  est convexe sur  $\Lambda$  ;
- pour tout  $n$ ,  $\theta_n \in \Lambda$ .

Pour gérer l'indétermination de la paramétrisation, on montre dans notre résultat principal que la convexité n'est nécessaire que dans certaines directions entre le point courant et le minimiseur le plus proche (de paramétrisation équivalente).

### 4.1.3 Travaux connexes

Dans ce chapitre, on unifie des résultats sur les algorithmes de descente pour l'optimisation non-convexe en dimension finie et infinie pour les problèmes inverses avec modèles de faibles dimension tels que la reconstruction de matrices de rang faible, la reconstruction de phase et la déconvolution (dont les propriétés communes ont été soulignées par [27]) et la super-résolution d'impulsion de diracs sans grille [YT4]. On choisit le point de vue de l'optimisation dans l'espace des paramètres pour garder la méthode la plus simple possible. Une autre approche est de définir l'algorithme de descente directement sur la variété  $\Sigma \subset \mathcal{D}^*$  [12] ou même sur une version avec un "lifting" de  $\mathcal{D}^*$  [28]. La principale difficulté est de définir le gradient sur la variété car l'espace tangent de  $\Sigma$  peut ne pas appartenir à l'espace ambiant "naturel". Par exemple, pour la reconstruction de diracs, l'espace tangent contient les distributions d'ordre 1 qui ne sont pas des mesures.

On définit un cadre minimal en partant du processus de mesure qui permet d'étudier la minimisation non-convexe (4.4). Ces structures minimales pour les problèmes inverses régularisés dans les espaces de Banach ont été mentionnées dans le cas de l'estimation d'impulsions sans grille [35] et ont été étudiées précisément dans [57]. Comme on ne nécessite pas de métrique particulière pour le processus d'estimation (seulement pour la garantie de performance) dans  $\mathcal{D}^*$ , on peut donner notre résultat avec la topologie faible-\* de  $\mathcal{D}^*$  et la norme utilisée pour mesurer l'erreur dans  $\Sigma$ .

### 4.1.4 Dans ce chapitre

On donne une vision unifiée des méthodes non-convexes pour la résolution de problèmes inverses avec modèle de faible dimension que l'on rencontre fréquemment en science des données en dimension finie et infinie. Pour des modèles de faible dimension qui peuvent être paramétrés de manière lisse dans  $\mathbb{R}^d$ :

- On donne un cadre minimal où on peut décrire la descente de gradient dans l'espace des paramètres.
- On étudie les bassins d'attraction du minimum global et on montre comment leur taille peut être reliée au nombre de mesure avec des hypothèses de régularité sur la fonction de paramétrisation. Ces résultats sont résumés par le théorème 4.2.1 et son corollaire 4.2.1 (que l'on utilise dans nos exemples).
- On applique ce cadre général aux exemples des matrices de rang faible, de la super-résolution de diracs et des modèles de mélange de gaussiennes
- On aborde le sujet de l'initialisation par méthodes de projection et on discute de leur difficulté d'implémentation en pratique.

## 4.2 Bassins d'attraction explicites des minimiseurs globaux

Dans cette section, on précise le cadre théorique dans lequel on se place pour montrer nos résultats. On donne ensuite des conditions qui permettent de donner un contrôle explicite des bassins d'attraction des minimiseurs de (4.8).

### 4.2.1 Définitions

Dans tous nos exemples,  $\mathcal{D}$  est un espace de Banach

**Définition 4.2.1.** Soit  $x_n \in \mathcal{D}^*$ . La séquence  $(x_n)_n$  converge vers  $x \in \mathcal{D}^*$  pour la topologie faible-\* si pour tout  $\alpha \in \mathcal{D}$ ,

$$\langle x_n, \alpha \rangle \rightarrow \langle x, \alpha \rangle. \quad (4.10)$$

On écrit alors  $x_n \xrightarrow{*} x$ .

Par construction de  $\mathcal{D}^*$  et de sa topologie faible-\*, l'opérateur  $A$  définit par (4.3) une application linéaire continue pour la topologie faible-\* sur  $\mathcal{D}^*$ , ce qui implique que pour toute suite  $(x_n)_n$  telle que  $x_n \xrightarrow{*} x$ ,  $Ax_n \rightarrow Ax$ .

Dans nos exemples, les objets considérés ne sont pas tous différentiables au sens de Fréchet. On utilise donc la notion de différentiabilité de Gateaux faible-\* [37], qui est basée sur les dérivées directionnelles.

**Définition 4.2.2** (Différentielle, dérivée directionnelle). Dans  $\mathcal{D}^*$ , une application  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{D}^*$  est Gateaux différentiable pour la topologie faible-\* à  $\theta$  si il existe une application linéaire  $L_\theta(\phi) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{D}^*$  telle que pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\frac{\phi(\theta + hv) - \phi(\theta)}{h} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{*} L_\theta(\phi)v. \quad (4.11)$$

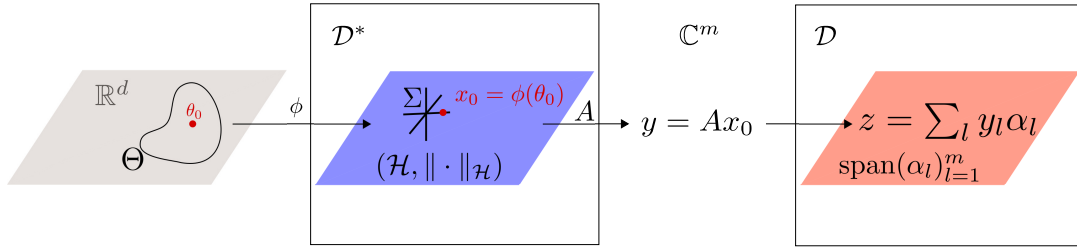
On définit  $\partial_v \phi(\theta) = L_\theta(\phi)v$ , et  $\frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta_i}$  la dérivée dans la direction du  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .

Dans la suite on supposera que  $\phi$  est deux fois Gateaux différentiable pour la topologie faible-\*, c'est-à-dire  $\phi$  est Gateaux différentiable et pour tout  $v$ ,  $\partial_v \phi$  est Gateaux différentiable. On n'aura pas besoins de continuité faible-\* dans notre analyse.

On résume dans la figure 4.1 les objets et structures que l'on utilise dans cet article.

### 4.2.2 Gradient et Hessienne de la fonction objectif

On calcule le gradient et la hessienne de  $g$  dans les deux propositions suivantes.



**Figure 4.1:** Un résumé des objets et structure de ce chapitre. L'union de sous-espaces  $\Sigma$  est un modèle de faible dimension paramétrisé par  $\Theta$ . Les mesures  $y = Ax_0$  peuvent être projetée dans  $\mathcal{D}$  à des fins d'initialisation (la projection idéale  $z$  est décrite dans la section 4.4).

**Proposition 4.2.1.** Soit  $A$  une application linéaire continue faible-\* de  $\mathcal{D}^*$  dans  $\mathbb{C}^m$  et  $\phi$  une fonction Gateaux différentiable faible-\*. Alors pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^d$ ,  $g$  est Gateaux différentiable en  $\theta$  et

$$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_i} = 2\mathcal{R}e \left\langle A \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta_i}, A\phi(\theta) - y \right\rangle \quad (4.12)$$

Dans la suite on note  $\nabla g(\theta) = \left( \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta_i} \right)_{1 \leq i \leq d}$  le gradient de Gateaux.

**Proposition 4.2.2.** Soit  $A$  une application linéaire continue faible-\* de  $\mathcal{D}^*$  dans  $\mathbb{C}^m$  et  $\phi$  une fonction Gateaux différentiable faible-\*. Alors pour tout  $\theta \in \mathbb{R}^d$ ,  $g$  est deux fois Gateaux différentiable en  $\theta$  et

$$H_{i,j} := \frac{\partial^2 g(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = G_{i,j} + F_{i,j} \quad (4.13)$$

où

$$G_{i,j} := 2\mathcal{R}e \left\langle A \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta_i}, A \frac{\partial \phi(\theta)}{\partial \theta_j} \right\rangle \quad (4.14)$$

et

$$F_{i,j} := 2\mathcal{R}e \left\langle A \frac{\partial^2 \phi(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, A\phi(\theta) - y \right\rangle. \quad (4.15)$$

On remarque que la hessienne est composée de deux termes : un terme d'orthogonalité entre les dérivées partielles de  $\phi$  ( $G$ ) et un terme de bruit ( $F$ ).

### 4.2.3 Ensembles sécants généralisés et la RIP

On donne un lemme utile pour faire le lien entre la propriété d'isométrie restreinte et la Hessienne.

On utilise la définition 2.1.1 d'ensemble sécant et la généralise dans la définition suivante.

**Définition 4.2.3** (Ensemble sécant généralisé). *Supposons  $\phi$  Gateaux différentiable faible-\*. Une sécante généralisée est soit une sécante, soit une dérivée directionnelle  $\partial_v \phi(\theta)$  avec  $\phi(\theta) \in \Sigma$ . L'ensemble sécant généralisé  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  est l'ensemble des sécantes généralisées.*

Dans le contexte des variétés, l'ensemble sécant généralisé est lié avec l'espace tangent de la variété  $\Sigma$  : ce dernier contient les dérivées directionnelles de  $\phi$  (un vecteur tangent est une limite de sécantes).

On suppose l'existence d'un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$  tel que  $\Sigma \subset \mathcal{H}$ . On a besoin de l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 4.2.1.** *Pour tout  $x \in \overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  tel que  $x = \partial_v \phi(\theta)$ , on a que  $\left\| \frac{\phi(\theta + |h_n|v) - \phi(\theta)}{|h_n|} \right\|_{\mathcal{H}}$  converge pour tout  $|h_n| \rightarrow 0$  vers une limite qui ne dépend pas de la suite réelle  $h_n$ . Cette limite est notée  $\|\partial_v \phi(\theta)\|_{\mathcal{H}}$ .*

Avec cette hypothèse on peut étendre  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  à  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$ .

Bien que triviale en dimension finie, cette hypothèse doit être considérée avec attention en dimension infinie.

**Avec du recul... 4.2.1.** *On aurait aimé pouvoir utiliser une notion de continuité faible-\* de  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  qui semblerait plus naturelle au lieu de cette notion restreinte. Dans nos exemples en dimension infinie, la question reste ouverte de savoir si c'est possible.*

Grâce à l'hypothèse 4.2.1, on peut étendre la propriété d'isométrie restreinte (définition 2.2) à  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  qui contient les dérivées directionnelles de  $\phi$ .

**Lemme 4.2.1** (RIP sur l'ensemble sécant généralisé). *Supposons que  $A$  a la RIP sur  $\Sigma - \Sigma$  avec constante  $\gamma$  et  $\phi$  est Gateaux différentiable faible-\*. Supposons que  $A$  est continue faible-\*. Supposons que  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  vérifie l'hypothèse 4.2.1. Soit  $\nu \in \overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  alors*

$$(1 - \gamma) \|\nu\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|A\nu\|_2^2 \leq (1 + \gamma) \|\nu\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.16)$$

#### 4.2.4 Indétermination de la paramétrisation

La fonction  $\phi$  n'est pas injective en général, ce qui donne une indétermination de la paramétrisation. On a alors des complications théoriques quand les ensembles de paramètres équivalents

$$\left\{ \tilde{\theta} : \phi(\tilde{\theta}) = \phi(\theta) \right\} \quad (4.17)$$

ne sont pas un ensemble de points isolés. Alors qu'un bassin d'attraction existe,  $g$  peut même ne pas être localement convexe [27] (ex. la reconstruction de matrices de rang faible).

Pour gérer cette indétermination, on étudie la hessienne de  $g$  dans les directions  $u$  utiles à la preuve de convergence de la descente de gradient. Pour cela, on introduit les notations suivantes. Soit  $\theta^*$  un minimiseur de  $g$  sur  $\Theta$ . On définit

$$d(\theta, \theta^*) := \min_{\substack{\tilde{\theta} \in \Theta \\ \phi(\tilde{\theta}) = \phi(\theta^*)}} \|\tilde{\theta} - \theta\|_2, \quad \text{and} \quad p(\theta, \theta^*) := \operatorname{argmin}_{\substack{\tilde{\theta} \in \Theta \\ \phi(\tilde{\theta}) = \phi(\theta^*)}} \|\tilde{\theta} - \theta\|_2 \subset \Theta. \quad (4.18)$$

On étudie les bassins d'attraction de la forme

$$\Lambda_\beta := \{\theta \in \Theta : d(\theta, \theta^*) < \beta\}. \quad (4.19)$$

On remarque que  $\phi^{-1}(\{\phi(\theta^*)\})$  est un sous-ensemble fermé de  $\Theta$  lorsque  $\phi$  est continue faible-\*, ce qui permet de définir  $d(\theta, \theta^*)$  comme un minimum. En effet,  $d(\theta, \theta^*)$  est la distance entre l'ensemble fermé  $\phi^{-1}(\{\phi(\theta^*)\})$  et  $p(\theta, \theta^*)$  est la fonction de projection de  $\theta$  sur  $\phi^{-1}(\{\phi(\theta^*)\})$ . La fonction  $d(\cdot, \cdot)$  n'est pas une vraie mesure de distance. En pratique, dans nos exemples l'ensemble  $p(\theta, \theta^*)$  est composé d'un unique élément dans le bassin d'attraction.

#### 4.2.5 Contrôle de la hessienne avec la propriété d'isométrie restreinte

On commence par donner un contrôle de la hessienne de  $g$  près du minimiseur  $\theta^*$  de (4.8).

**Lemme 4.2.2.** *Supposons que  $A$  est continue faible-\* et a la RIP de constante  $\gamma$  sur  $\mathcal{S}(\Sigma)$ . Supposons  $\phi$  est deux fois Gateaux différentiable faible-\*. Supposons que  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  vérifie l'hypothèse 4.2.1. Soit  $\theta^*$  un minimiseur de  $g$  sur  $\Theta$ . Soit  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble tel que pour tout  $\theta \in \Lambda$ , on a  $\phi(\theta) - \phi(\theta^*) \in \mathcal{S}(\Sigma)$ . Soit  $\theta \in \Lambda$  et  $H$  la hessienne de  $g$  au point  $\theta$ .*

Pour tout  $u \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$u^T H u \geq 2(1 - \gamma) \|\partial_u \phi(\theta)\|_{\mathcal{H}}^2 - 2 \|A \partial_u^2 \phi(\theta)\|_2 (\sqrt{1 + \gamma} \|\phi(\theta) - \phi(\theta^*)\|_{\mathcal{H}} + \|e\|_2) \quad (4.20)$$

$$u^T H u \leq 2 \|A \partial_u \phi(\theta)\|_2^2 + 2 \|A \partial_u^2 \phi(\theta)\|_2 (\sqrt{1 + \gamma} \|\phi(\theta) - \phi(\theta^*)\|_{\mathcal{H}} + \|e\|_2) \quad (4.21)$$

Il est possible de contrôler la hessienne de  $g$  sur un ensemble  $\Lambda$  dans les directions  $u$  intéressantes pour la garantie de convergence avec le lemme 4.2.2. On propose le théorème général suivant pour déterminer qu'un ensemble  $\Lambda_\beta$  (défini dans la section 4.2.4) est un  $g$ -bassin d'attraction.

**Théorème 4.2.1** ([YT23]). *Soit  $A$  une application linéaire continue faible-\* de  $\mathcal{D}^*$  dans  $\mathbb{C}^m$ . Supposons  $A$  a la RIP sur  $\mathcal{S}(\Sigma)$  avec constante  $\gamma$  et  $\phi$  est continue faible-\* et deux fois Gateaux différentiable faible-\*. Supposons que  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  vérifie l'hypothèse 4.2.1. Soit  $\theta^*$  un minimiseur de  $g$  sur  $\Theta$ . Supposons qu'il existe  $\beta > 0$  tel que*

1.  $\theta \in \Lambda_{2\beta}$  implique  $\phi(\theta) \in \Sigma$  (stabilité locale du bassin dans le modèle);

2. il existe une constante  $C_{\phi, \theta^*} > 0$  telle que

$$\forall \theta \in \Lambda_{2\beta}, \quad \|\phi(\theta) - \phi(\theta^*)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\phi, \theta^*} d(\theta, \theta^*); \quad (4.22)$$

3. les dérivées premières de  $A\phi$  sont bornées uniformément sur  $\phi^{-1}(\theta^*)$ :

$$M_1 := \sup_{\theta \in \phi^{-1}(\theta^*)} \sup_{u: \|u\|_2=1} \|A\partial_u \phi(\theta)\|_2 < +\infty; \quad (4.23)$$

4. les dérivées secondes de  $A\phi$  sont bornées uniformément sur  $\Lambda_{2\beta}$ :

$$M_2 := \sup_{\theta \in \Lambda_{2\beta}} \sup_{u, v: \|u\|_2=1, \|v\|_2=1} \|A\partial_v \partial_u \phi(\theta)\|_2 < +\infty; \quad (4.24)$$

5. pour tout  $\theta \in \Lambda_{\beta}$ , il existe  $\tilde{\theta} \in p(\theta, \theta^*)$  tel que

$$\forall z \in [\theta, \tilde{\theta}], \quad \frac{(1-\gamma) \|\partial_{\tilde{\theta}-\theta} \phi(z)\|_{\mathcal{H}}^2}{\sqrt{1+\gamma} \|A\partial_{\tilde{\theta}-\theta}^2 \phi(z)\|_2} \geq C_{\phi, \theta^*} \beta + \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} \|e\|_2. \quad (4.25)$$

Alors  $\Lambda_{\beta}$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $\theta^*$ .

Pour montrer ce théorème, on utilise le lemme 4.2.2 pour montrer la convexité dans les bonnes directions. On utilise les contrôles sur les dérivées pour vérifier le caractère Lipschitz du gradient. On peut alors montrer la stabilité des itérées en utilisant un argument de cocoercivité, puis montrer la convergence des  $g(\theta_n)$ .

Ce théorème donne des propriétés de régularité et de contrôle des dérivées de  $\phi$  dont on a besoin pour s'assurer de la convergence. Le bassin d'attraction n'est pas complètement explicite dans ce cas. On donne le corollaire suivant qui donne une expression plus explicite quand  $p(\theta, \theta^*)$  est composé d'un unique élément quand  $\theta$  est dans le bassin, ce qui est le cas dans tous nos exemples.

**Corollaire 4.2.1.** *Sous les hypothèses du théorème 4.2.1, soit  $\beta_1 > 0$  tel que*

1. pour tout  $\theta \in \Lambda_{2\beta_1}$ , **il existe un unique**  $\tilde{\theta} \in p(\theta, \theta^*)$ ;

2. pour tout  $\theta \in \Lambda_{2\beta_1}$ ,  $\phi(\theta) \in \Sigma$  (stabilité locale du bassin dans le modèle);

3. il existe une constante  $C_{\phi, \theta^*} > 0$  telle que

$$\forall \theta \in \Lambda_{2\beta_1}, \quad \|\phi(\theta) - \phi(\theta^*)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\phi, \theta^*} d(\theta, \theta^*); \quad (4.26)$$

4. les dérivées premières de  $A\phi$  sont bornées uniformément sur  $\phi^{-1}(\theta^*)$ :

$$M_1 := \sup_{\theta \in \phi^{-1}(\theta^*)} \sup_{u: \|u\|_2=1} \|A\partial_u \phi(\theta)\|_2 < +\infty; \quad (4.27)$$

5. les dérivées secondes de  $A\phi$  sont bornées uniformément sur  $\Lambda_{2\beta_1}$ :

$$M_1 := \sup_{\theta \in \Lambda_{2\beta_1}} \sup_{u,v; \|u\|_2=1, \|v\|_2=1} \|A\partial_v\partial_u\phi(\theta)\|_2 < +\infty; \quad (4.28)$$

6. alors on a

$$\beta_2 := \frac{(1-\gamma)}{C_{\phi, \theta^*} \sqrt{1+\gamma}} \inf_{\theta \in \Lambda_{\beta_1}} \inf_{z \in [\theta, \tilde{\theta}]} \left( \frac{\|\partial_{\tilde{\theta}-\theta}\phi(z)\|_{\mathcal{H}}^2}{\|A\partial_{\tilde{\theta}-\theta}^2\phi(z)\|_2} \right) - \frac{1}{C_{\phi, \theta^*} \sqrt{1+\gamma}} \|e\|_2 > 0. \quad (4.29)$$

et  $\Lambda_{\min(\beta_1, \beta_2)}$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $\theta^*$ .

Cette technique d'étude des bassins d'attraction donne des résultats quand on peut garantir

$$\inf_{\theta \in \Lambda_{\beta_1}} \inf_{z \in [\theta, \tilde{\theta}]} \left( \frac{\|\partial_{\tilde{\theta}-\theta}\phi(z)\|_{\mathcal{H}}^2}{\|A\partial_{\tilde{\theta}-\theta}^2\phi(z)\|_2} \right) > 0 \quad \text{où } \tilde{\theta} \in p(\theta, \theta^*) \text{ est unique.} \quad (4.30)$$

On le vérifie dans tous nos exemples. Dans l'exemple de la reconstruction de matrices de rang faible, on contrôle les dérivées dans les directions utiles  $u = \tilde{\theta} - \theta$ . Pour les diracs et l'estimation de mélanges de gaussiennes, la Hessienne peut être bornée uniformément dans toutes les directions.

Les hypothèses de régularité sont sur  $\Lambda_{2\beta_1}$  au lieu de  $\Lambda_{\beta_1}$ . C'est un argument technique pour garantir la stabilité des itérées dans  $\Lambda_{\beta_1}$  dans un théorème général. On pourrait le réduire à une hypothèse sur  $\Lambda_{\beta_1+\eta}$  avec  $\eta$  petit en réduisant le pas de descente. Dans nos exemples (diracs et gaussiennes), on pourrait le réduire à  $\Lambda_{\beta_1}$  en utilisant une preuve de convergence spécifique.

**Avec du recul... 4.2.2.** *On n'aurait pas cette petite perte si on pouvait utiliser des arguments de dualité pour la preuve. Comme on n'a la convexité que dans certaines directions et localement, cela n'est pas possible, à part si on pouvait étendre une fonction convexe définie sur un sous-ensemble à une fonction convexe sur tout l'ensemble.*

En présence de bruit, une hypothèse de bruit faible (liées avec les plus petites "amplitudes" dans  $\phi(\theta^*)$ ) garantit la non négativité de la hessienne avec le lemme 4.2.2. On présente les résultats sans bruit par soucis de clarté dans la section suivante

D'après l'expression de la taille du bassin d'attraction  $\beta_2$ , on observe un comportement général : lorsque la constante RIP décroît (le nombre de mesures augmente), la taille du bassin augmente (possiblement non strictement). Dans les espaces de Hilbert, il a été montré de manière générale qu'il existe des opérateurs ayant la RIP  $\gamma$  avec forte probabilité avec la relation  $m = O(\frac{d}{\gamma^2})$  [48] (en négligeant les termes en logarithme). On a des relations similaires dans les exemples que l'on traite. Cela permet d'expliciter le rôle de  $m$  dans l'expression du bassin au besoin.

Finalement, on donne le corollaire suivant qui donne des garanties d'estimation des itérées de la descente de gradient.



**Corollaire 4.2.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, soit  $\theta_n$  les itérées d'une descente de gradient à pas constant telle que  $g(\theta_n) \rightarrow g(\theta^*)$ . Alors*

$$\|\phi(\theta_n) - x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{4}{1-\gamma} \|e\|_2^2 + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (4.31)$$

## 4.3 Applications

Dans cette section, on applique notre résultat général à trois exemples. On explique les liens avec les résultats existants et comment il permet d'en donner de nouveaux. Bien que sous-optimal pour l'étude des problèmes non-convexes en général, on est capable de donner de nouveaux résultats pour des exemples où une telle étude n'existait pas. Par souci de clarté, on se place dans le cas sans bruit  $\|e\|_2 = 0$ .

### 4.3.1 Reconstruction de matrices de rang faible

On peut donner des bassins d'attraction explicites des minimiseurs globaux dans l'exemple de la reconstruction de matrices PSD de rang faible. Des résultats plus forts étudiant tous les points critiques de la fonction  $g$  permettent d'obtenir des résultats de convergence globale d'algorithmes stochastiques (voir [27] pour une revue exhaustive). Le cadre est le suivant :

- On mesure les matrices avec des projections sur  $\mathbb{R}^m$ , c'est-à-dire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* = \mathbb{R}^{p \times p}$ , le produit de dualité est le produit scalaire associé à la norme de Frobenius qui définit aussi la structure de Hilbert :  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\cdot\|_F^2$ . Le produit scalaire associé est  $\langle X, Y \rangle_F = \text{tr}(X^T Y)$ .
- L'ensemble des matrices PSD de rang au plus  $r$  est  $\Sigma = \Sigma_r = \{ZZ^T : Z \in \mathbb{R}^{p \times r}\}$ .
- On peut simplement paramétriser  $\Sigma$  par  $\phi(\theta) = \phi(Z) = ZZ^T$  où on a identifié le paramètre  $d$ -dimensionnel  $\theta \in \mathbb{R}^d$  ( $d = pr$ ) comme une matrice  $Z \in \mathbb{R}^{p \times r}$ .
- La théorie de l'acquisition compressée (ex. [22]) permet de montrer qu'une application  $A$  aléatoire de loi bien choisie a la RIP de constante  $\gamma$  avec forte probabilité si  $m \geq O\left(\frac{pr}{\gamma^2}\right)$  et donc que  $\phi(\theta^*) = x_0$  (we set  $x_0 = Z_0 Z_0^T$ ).

Dans ce cas la minimisation (4.8) s'écrit

$$\min_{Z \in \mathbb{R}^{p \times r}} \|A(ZZ^T) - y\|_2^2. \quad (4.32)$$

On appelle souvent cette minimisation la méthode de Burer-Monteiro [15].

Pour appliquer notre résultat on a juste besoin de calculer les dérivées directionnelles dans une direction  $U \in \mathbb{R}^{p \times r}$ . On a:

$$\begin{aligned} \partial_U \phi(Z) &= UZ^T + ZU^T \\ \partial_U^2 \phi(Z) &= 2UU^T. \end{aligned} \quad (4.33)$$

On voit que la dérivée  $\partial_U \phi(Z)$  est 0 pour des directions  $U$  non triviales. C'est l'élément qui donne le plus de complications dans l'étude de ce cas. Pour donner un bassin d'attraction de  $\theta^* = Z_0$ , il est montré dans la littérature que les directions intéressante pour étudier la hessienne sont les solutions d'un problème de Procrustes orthogonal. Il suffit de regarder les direction  $U \in \mathbb{R}^{p \times r}$  qu'on peut écrire  $U = Z' H_0 - Z_0$  avec un  $Z'$  arbitraire et avec  $H_0 = \arg \min_{H \in \mathcal{O}(r)} \|Z' H - Z_0\|_F^2$  pour garantir le succès de la descente de gradient [27] ( $\mathcal{O}(r)$  est le groupe orthogonal). Cette idée peut être utilisée dans notre cadre général. Dans notre cas, on utilise les directions  $U = Z_0 H_0 - Z$  où  $H_0 = \arg \min_{H \in \mathcal{O}(r)} \|Z_0 H - Z\|_F^2$  pour  $Z \in \Lambda_\beta$ . On ne peut pas s'attendre à la convexité locale de  $g$  [27] mais une propriété de convexité dans ces directions particulières permet d'utiliser le corollaire 4.2.1.

**Théorème 4.3.1** ([YT23]). *Soit  $A$  une application linéaire sur  $\mathbb{R}^{p \times p}$  avec la RIP sur  $\Sigma_{2r}$  avec constante  $\gamma$ . Supposons  $e = 0$  et soit  $Z_0$  un minimiseur global de (4.32) de rang  $r$ . Soit  $\beta_{LR} := \frac{1}{8} \frac{(1-\gamma)(\sigma_{\min}(Z_0))^2}{(1+\gamma)\sigma_{\max}(Z_0)}$ . Alors  $\Lambda_{\beta_{LR}} := \{Z : \inf_{H \in \mathcal{O}(r)} \|ZH - Z_0\|_F < \beta_{LR}\}$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $Z_0$ .*

On retrouve un résultat similaire à [56] : la taille des bassins dépend de la plus petite valeur singulière de  $\phi(\theta^*)$ . Cette taille a aussi une dépendance explicite au nombre de mesures au travers de la constante RIP. Notre résultat ajoute une dépendance au conditionnement de  $Z_0$ . En retour on ne demande la RIP que sur  $\Sigma_{2r}$  au lieu de  $\Sigma_{6r}$ .

L'algorithme de descente pour la reconstruction de matrices de rang faible appelé "Procrustes flow" dans la littérature utilise le gradient pour le cas où le gradient est obtenu à partir d'une matrice de mesure symétrique. Dans ce cas

$$\partial_U g(Z) = 2\text{Re}\langle A(UZ^T + ZU^T), A\phi(Z) - y \rangle = 4\text{Re}\langle AUZ^T, A\phi(Z) - y \rangle \quad (4.34)$$

Notre analyse utilise la vraie valeur du gradient pour tout opérateur  $A$ .

### 4.3.2 Estimation d'impulsions sans grille

L'estimation d'impulsions sans grille est centrale en traitement du signal [31, 20, 35, 32, 14]. Elle permet aussi de résoudre des problèmes d'apprentissage tels que la classification compressée [YT2]. Nos travaux initiaux d'étude des bassins d'attraction ont été effectués dans ce cadre. On peut largement déduire les résultats de [YT3] de [YT23] (résumés dans cette section).

- Les signaux parcimonieux sans grille à support dans  $\mathbb{R}^p$  sont mesurés par des projections deux fois différentiables avec des dérivées bornées (mesures de Fourier pondérées)  $\alpha_l \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^p) = \mathcal{D}$ . L'espace  $\mathcal{D}^*$  contient l'ensemble des distributions à support compact d'ordre  $\leq 2$  sur  $\mathbb{R}^p$ .
- Pour le modèle de faible dimension, on considère  $\Sigma = \Sigma_{k,\epsilon} := \{\sum_{i=1}^k a_i \delta_{t_i} : \|t_i - t_j\|_2 > \epsilon, t_i \in \mathcal{B}_2(R)\}$ , où  $\mathcal{B}_2(R) := \{t \in \mathbb{R}^p : \|t\|_2 < R\}$ . C'est un sous-ensemble des mesures signées finies sur  $\mathbb{R}^p$ .

- La fonction de paramétrisation est définie pour les paramètres  $\theta = (a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k(p+1)}$  où  $a = (a_1, \dots, a_k)$  sont les amplitudes et  $t = (t_1, \dots, t_k)$  sont les  $k$  positions dans  $\mathbb{R}^p$ . On a alors  $\phi(\theta) = \sum_{i=1}^k a_i \delta_{t_i}$ . Toute paramétrisation est équivalente à une permutation des positions près.
- Dans ce cas la minimisation (4.8) doit être effectuée sur l'ensemble contraint

$$\Theta_{k,\epsilon} = \{(a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k(p+1)} : \|t_i - t_j\|_2 > \epsilon, t_i \in \mathcal{B}_2(R)\}. \quad (4.35)$$

En se plaçant dans les hypothèses du théorème 4.2.1, on garantit que les itérées de la descente de gradient restent dans cet ensemble.

- La structure de Hilbert sur  $\mathcal{D}^*$  est induite par une métrique à noyau définie sur l'espace des mesures signées finies sur  $\mathbb{R}^d$  et est étendue aux distributions d'ordre 2 d'intérêt. Ces métriques prennent la forme suivante sur les diracs :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_i a_i \delta_{t_i} \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \sum_i a_i \delta_{t_i} \right\|_K^2 := \int K(t, s) \left( \sum_i a_i d\delta_{t_i}(t) \right) \left( \sum_j a_j d\delta_{t_j}(s) \right) \\ &= \sum_i a_i a_j K(t_i - t_j) \end{aligned} \quad (4.36)$$

où  $K(t, s) \propto e^{-\frac{\|t-s\|_2^2}{2\sigma^2}}$  est un noyau gaussien de variance  $\sigma^2$  qui définit la précision à laquelle on mesure des distances entre éléments de  $\Sigma$ . On peut montrer que l'hypothèse 4.2.1 est vérifiée.

- On peut considérer des mesures  $A$  de Fourier déterministes uniformes (filtre passe bas) ou des mesures compressées aléatoires. Il a été montré qu'elles ont une RIP de constante  $\gamma$  par rapport à  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  si  $m = O(\frac{k^2 d}{\gamma^2} (\log(k))^2 \log(kd/\epsilon))$  (mesures de Fourier de fréquences gaussiennes aléatoires) ou  $m = O(\frac{1}{\epsilon^d})$  (mesures de Fourier régulières).

On écrit la minimisation (4.8) pour l'estimation d'impulsions sans grille

$$\min_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}; t_1, \dots, t_k \in \mathcal{B}_2(R); \forall i \neq j, \|t_i - t_j\|_2 > \epsilon} \left\| A \left( \sum_{i=1}^k a_i \delta_{t_i} \right) - y \right\|_2^2. \quad (4.37)$$

Les dérivées de  $\phi$  sont données par  $\partial_u \phi(a, t) = \sum_i v_i \delta_{t_i} + a_i \partial_{w_i} \delta_{t_i}$  où  $u = (v, w)$  ( $v$  est la direction de la dérivée par rapport à l'amplitude et  $w$  est la direction de la dérivée par rapport à la position) et  $\partial_{w_i} \delta_{t_i}$  est la dérivée directionnelle d'un dirac au sens des distributions : pour  $\alpha \in \mathcal{D}$ ,  $\langle \partial_{w_i} \delta_{t_i}, \alpha \rangle = -\partial_{w_i} \alpha(t_i)$ .

Dans notre cadre général, le cas des diracs est le plus complexe car les éléments de  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  ne sont pas dans l'espace des mesures signées finies que l'on considère naturellement. On doit donc étendre  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  à  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  qui sont des distributions d'ordre 1. Pour cela, on utilise le caractère lisse du noyau gaussien et le fait que  $\overline{\mathcal{S}(\Sigma)}$  agit sur un domaine borné.

En utilisant un noyau gaussien, on obtient des propriétés qui permettent d'explicitier les bassins d'attraction. Il vérifie les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 4.3.1.** *Un noyau  $K$  vérifie cette hypothèse si*

- $K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ .
- $K$  est symétrique, invariant par translation, c'est à dire qu'on peut écrire  $K(t_1, t_2) = \rho(\|t_1 - t_2\|_2)$  où  $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ .
- $K(t, t) = \rho(0) = 1 = \max_{t \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}^d} |K(t, s)|$ ,  $\rho'(0) = 0$ , et  $\rho''(0) < 0$ .
- il existe une constante  $c_K$  telle que  $0 < c_K \leq \frac{\epsilon}{2}$  et  $\rho(t) \leq 1 - \frac{|\rho''(0)|}{2} t^2$  pour  $t \in [0, c_K]$ .
- il existe une constante  $\mu_K$  telle que, pour deux dipôles  $\epsilon$ -séparés, on a  $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_h \leq \mu_K \|\nu_1\|_K \|\nu_2\|_K$  (cohérence mutuelle).

D'après [YT2], pour  $\epsilon = 1$ , en prenant  $K_0(t, s) = e^{-(t-s)^2/(2\sigma_k^2)}$  avec  $\sigma_k^2 = \frac{1}{2.4 \log(2k-1)+24}$ , on a l'hypothèse 4.3.1 vérifiée avec  $\mu_{K_0} = \frac{3}{4(k-1)}$ . Dans [20], le noyau de Féjer est utilisé pour étudier un échantillonnage régulier déterministe des fréquences. Pour une fréquence maximale de  $2/\epsilon$  sur le tore, avec  $\epsilon = 0.01$ , on vérifie numériquement que  $\mu_h \approx 0.003$ .

On donne la version du théorème obtenue dans nos travaux initiaux sur la super-résolution qui est un peu plus fins que d'appliquer le corollaire 4.2.1.

**Théorème 4.3.2** ([YT4]). *Supposons  $A$  a la RIP de constante  $\gamma$  sur  $\mathcal{S}(\Sigma_{k, \frac{\epsilon}{2}})$  pour la norme  $\|\cdot\|_K$  et  $K$  vérifie l'hypothèse 4.3.1.*

*Soit  $\theta^* = (a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k) \in \Theta_{k, \epsilon}$  le résultat de la minimisation (4.37) tel que  $0 < |a_1| \leq |a_2| \dots \leq |a_k|$ . Alors  $\Lambda_{\beta_{spikes}} := \{\theta : \|\theta - \theta^*\|_2 < \beta_{spikes}\}$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $\theta^*$  avec*

$$\beta_{spikes} := \min \left( c_K, \frac{|a_1|}{2}, C_1 C_2 \right) \quad (4.38)$$

où  $C_1 = \frac{(1-\gamma)(1-(k-1)\mu)}{(d+1)\sqrt{1+\gamma}\sqrt{1+(k-1)\mu}}$  et  $C_2 = \frac{\min(1, |a_1|^2 |\rho''(0)|/4)}{\max(|a_k| \sqrt{m} D_{A,R}, \sqrt{1+\gamma} \sqrt{|\rho''(0)|}) \sqrt{1+2|\rho''(0)|} \|a^*\|_2^2}$  et  $D_{A,R}$  est une borne supérieure des dérivées secondes de  $A\phi(\theta)$ .

On obtient donc une expression explicite d'un bassin d'attraction en fonction des paramètres du problème. Le point le plus remarquable est qu'on peut effectuer une descente de gradient sans contrainte de séparation lorsque l'on est assez proche de la solution ce qui permet de justifier le succès des méthodes gloutonnes continues telles que "continuous orthogonal matching pursuit" [YT14] où une descente sur les paramètres est effectuée après l'ajout de chaque atome.

Si on pouvait garantir que nos itérées sont dans  $\Sigma_{k, \epsilon}$ , on pourrait se limiter à une hypothèse RIP sur  $\mathcal{S}(\Sigma_{k, \frac{\epsilon}{2}})$  au lieu de  $\mathcal{S}(\Sigma_{k, \frac{\epsilon}{2}})$ . Cela nous a poussé à proposer l'algorithme de gradient projeté (voir section 5.2).

On observe une dépendance de la taille du bassin d'attraction au rapport  $\frac{|a_k|}{|a_1|}$  de l'amplitude la plus grande sur l'amplitude la plus petite dans  $\theta^*$  (un "conditionnement" dépendant du signal). On a montré qu'asymptotiquement quand  $\frac{|a_k|}{|a_1|}$  est grand, cette dépendance est nécessaire.

### 4.3.3 Estimation de mélanges de gaussiennes à partir de mesures compressées

Les modèles de mélange de gaussiennes peuvent être utilisés pour modéliser des problèmes de déconvolution aveugle ou même des problèmes de débruitage d'images par patches (voir section 5.1). On peut de plus estimer des mélanges de gaussiennes à partir de mesures compressées pour effectuer de l'apprentissage statistique compressé. Considérons une base de donnée  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^p$  que l'on représente par la mesure de probabilité empirique  $x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ . Soit  $A$  un opérateur de mesure de Fourier aléatoire. Pour  $m < np$ , on obtient une version compressée  $y = Ax$  où  $y$  est appelé un "sketch" de la base de donnée. Il a été montré que les paramètres d'un mélange de gaussiennes (GMM) peuvent être estimés par la minimisation (4.4) avec la conception appropriée de  $A$  [YT14, YT2]. Des garanties de reconstruction ont été données dans le cadre d'une matrice de covariance PSD fixe  $\Gamma$ . Des résultats pratiques ont été obtenus pour des covariances diagonales variables en utilisant une heuristique basée sur "orthogonal matching pursuit" [YT14]. Dans cette méthode gloutonne, une descente de gradient sans contrainte est utilisée dans les itérations pour affiner la solution. On donne une expression explicite d'un bassin d'attraction dans le cas de la covariance fixe et on discute de la manière d'étendre ces résultats à des covariances variables.

- Les mélanges de gaussiennes sur  $\mathbb{R}^d$  sont mesurés par des projection sur des fonctions bornées (mesures de Fourier)  $\alpha_l \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^p) = \mathcal{D}$ . On a donc que  $\mathcal{D}^*$  contient l'ensemble des mesures signées finies sur  $\mathbb{R}^p$ .
- Le modèle de faible dimension est un sous-ensemble des mesures signées finies sur  $\mathbb{R}^p$  défini par  $\Sigma = \Sigma_{k,\epsilon,\Gamma} := \{\sum_{i=1}^k a_i \mu_{t_i} : \|t_i - t_j\|_{\Gamma} > \epsilon, t_i \in \mathcal{B}_2(R)\}$ , où  $d\mu_{t_i}(t) = e^{-\frac{1}{2}\|t-t_i\|_{\Gamma}^2} dt$ ,  $\|u\|_{\Gamma}^2 = u^t \Gamma^{-1} u$  et  $\Gamma$  est la matrice de covariance fixe.
- La fonction de paramétrisation est définie pour  $\theta = (a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{k(p+1)}$  par  $\phi(\theta) = \sum_{i=1}^k a_i \mu_{t_i}$  ( $a = (a_1, \dots, a_n)$  est un vecteur d'amplitudes,  $t = (t_1, \dots, t_n)$  définit les moyennes). Comme pour les diracs, les paramétrisations sont équivalentes à une permutation des moyennes près.
- La minimisation (4.8) est effectuée sur l'espace contraint  $\Theta_{k,\epsilon} \subset \mathbb{R}^{(k+1)d}$ .
- La structure de Hilbert est induite par une norme à noyau  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} := \|\cdot\|_K$  définie sur l'espace des mesures signées finies  $\mathbb{R}^d$  où le noyau est une fonction gaussienne de covariance proportionnelle à  $\Gamma$  qui définit la précision à laquelle on mesure les distances entre éléments de  $\Sigma$ . L'hypothèse 4.2.1 découle du fait que les dérivées directionnelles des mesures gaussiennes sont des mesures signées finies (on les obtient en dérivant leur densité  $\mathcal{C}^{\infty}$ ).
- Avec des mesures de Fourier aléatoires avec des fréquences gaussiennes, la RIP de constante  $\gamma$  par rapport à  $\|\cdot\|_K$  est vérifiée lorsque  $\epsilon \geq O(\sqrt{d(1 + \log(k))})$  et  $m = O(\frac{k^2 d}{\gamma^2} \text{polylog}(k, d))$  [YT2].

Pour l'estimation de GMM, la minimisation (4.8) s'écrit

$$\min_{a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}; t_1, \dots, t_k \in \mathcal{B}_2(R); \forall i \neq j, \|t_i - t_j\|_\Gamma > \epsilon} \left\| A \left( \sum_{i=1}^k a_i \mu_{t_i} \right) - y \right\|_2^2. \quad (4.39)$$

Les dérivées de  $\phi$  sont  $\partial_u \phi(a, t) = \sum_i v_i \mu_{t_i} + a_i \partial_{w_i} \mu_{t_i}$  où  $u = (v, w)$  ( $v$  est la direction de la dérivée par rapport aux amplitudes et  $w$  est la direction de la dérivée par rapport aux moyennes). Comme  $\mu_{t_i}$  a une densité lisse ses dérivées directionnelles  $\partial_{w_i} \mu_{t_i}$  au sens des distributions sont aussi des mesures signées finies de densité

$$t \rightarrow -w_i^T \Gamma^{-1} (t - t_i) e^{-\frac{1}{2} \|t - t_i\|_\Gamma^2}. \quad (4.40)$$

On est donc dans un cadre un peu plus simple que pour les diracs car la métrique à noyau est bien définie.

On a besoin d'un ingrédient supplémentaire pour donner un bassin d'attraction de  $\theta^*$ . On peut montrer que l'hypothèse suivante est vérifiée pour un noyau bien choisi [YT2] (il faut prendre une variance assez petite par rapport à la séparation).

**Hypothèse 4.3.2.** *Le noyau  $K$  suit cette hypothèse si*

- $\|\mu_{t_i}\|_K = 1$ .
- *Il existe une constante  $c_K$  telle que pour toutes moyennes  $(t_i)_{i=1}^k$  qui vérifient : pour  $i \neq j$ ,  $\|t_i - t_j\|_\Gamma > \epsilon$ , on a  $\|\sum_i v_i \mu_{t_i} + a_i \partial_{w_i} \mu_{t_i}\|_K^2 \geq (1 - c_K) \sum_i \|v_i \mu_{t_i} + a_i \partial_{w_i} \mu_{t_i}\|_K^2$ .*

Dans le cas sans bruit, on obtient le bassin d'attraction suivant.

**Théorème 4.3.3** ([YT23]). *Supposons que  $A$  est un opérateur de mesures de Fourier avec la RIP  $\gamma$  sur  $\mathcal{S}(\Sigma_k, \frac{\epsilon}{2}, \Gamma)$ . Supposons  $K$  est un noyau gaussien de covariance proportionnelle à  $\Gamma$  qui respecte l'hypothèse 4.3.2. Supposons  $e = 0$ . Soit  $\theta^* = (a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k) \in \Theta_{k, \epsilon}$  un solution du problème (4.39) telle que  $0 < |a_1| \leq |a_2| \dots \leq |a_k|$ . Soit*

$$\beta_{GMM} = \min \left( \frac{\epsilon \sqrt{\lambda_{\min}(\Gamma)}}{8}, \frac{|a_1|}{2}, \frac{(1 - \gamma)(1 - c_K) \min(1, d_K |a_1|^2)}{8C_{\phi, \theta^*} \sqrt{1 + \gamma} (\sqrt{1 + \gamma} \sqrt{1 + c_K \sqrt{D_K}} + 2|a_k| D'_{A, K})} \right) \quad (4.41)$$

où  $\lambda_{\min}(\Gamma)$  est la plus petite valeur propre de  $\Gamma$ ,  $c_K$ ,  $d_K$  et  $D_K$  sont des constantes qui dépendent du noyau  $K$ ,  $D_{A, K}$  est une constante explicite qui dépend de  $K$  et  $A$  et  $C_{\phi, \theta^*} > 0$ . On suppose de plus que pour tout  $i$ ,  $\|t_i\|_2 \leq R - 2\beta_{GMM}$ .

Alors  $\Lambda_{\beta_{GMM}} := \{\theta : \|\theta - \theta^*\|_2 < \beta_{GMM}\}$  est un  $g$ -bassin d'attraction de  $\theta^*$ .

Avec le théorème 4.3.3, on peut contrôler la positivité de la hessienne dans un voisinage explicite de  $\theta^*$ . L'hypothèse sur la norme des  $t_i$  est technique pour s'assurer de la stabilité des itérées.

Ce n'est pas une hypothèse très forte en pratique car  $\beta_{GMM}$  est petit par rapport à  $R$ . On pourrait s'en passer complètement avec une preuve dédiée de convergence. On remarque le même comportement de la taille du bassin d'attraction par rapport aux paramètres du problème. Elle augmente avec le nombre de mesures (constante RIP) et diminue avec le plus petit poids dans  $x$ .

**Questions ouvertes pour l'extension aux cas des covariances variables avec une contrainte de rang faible** En pratique, on doit estimer les covariances. On peut des fois faire une approximation de rang faible (ex. pour le débruitage d'image). On peut par exemple définir le modèle suivant. On utilise les paramètres  $\theta = (a_1, \dots, a_k, t_1, \dots, t_k, Z_1, \dots, Z_k)$  où les  $Z_i$  sont des matrices  $d \times r$  utilisées pour modéliser les covariances  $\Gamma_i = Z_i Z_i^T + \rho I$ . On a alors

$$\Sigma_{k,\epsilon,r,\rho,P} := \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \mu_{t_i, \Gamma_i} : a_i \in \mathbb{R}, \|t_i - t_j\|_2 > \epsilon, t_i \in \mathcal{B}_2(R), \rho < \lambda_j(\Gamma_i) < P, \text{rank}(\Gamma_i - \rho I) \leq r \right\} \quad (4.42)$$

où  $\mu_{t_i, \Gamma_i}$  est la mesure gaussienne de moyenne  $t_i$  et de covariance  $\Gamma_i$ . Il n'existe pas encore de garanties de reconstruction dans ce cas plus général. Pour cela il faudrait montrer l'existence d'une application linéaire avec une RIP sur  $\mathcal{S}(\Sigma_{k,\epsilon,r,\rho,P})$ .

Pour la super-résolution d'impulsion, on peut utiliser une descente par blocs. On pourrait donc suivre cette voie pour les covariances variables. Il faudrait alors regarder les blocs de la hessienne pour chaque covariance (et sa paramétrisation  $Z_i$ ) [7].

La dérivée directionnelle de  $a_i \mu_{t_i, Z_i Z_i^T + \rho I}$  dans la direction  $(v, w, W)$  a pour densité

$$\sum_i (v_i - a_i w^T \Gamma_i^{-1} (t - t_i) + a_i \frac{1}{2} (t - t_i)^T \Gamma_i^{-1} (Z_i W_i^T + W_i Z_i^T) \Gamma_i^{-1} (t - t_i)) e^{-\frac{1}{2} \|t - t_i\|_{Z_i Z_i^T + \rho I}^2}. \quad (4.43)$$

Trouver une borne inférieure de la norme à noyau est très technique. Pour cela, il faudrait gérer l'indétermination du côté rang faible à la manière de la section 4.3.1. On donne le lemme suivant qui est une première étape pour un bassin d'attraction explicite dans le cas de covariance variable avec modélisation de rang faible. Si la précision du noyau est assez bonne on peut donner une borne de cette norme dans le cas des covariances diagonales.

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $K$  un noyau gaussien avec covariance  $\frac{1}{\lambda} I$ . Supposons  $\Gamma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  est une matrice diagonale positive définie. Soit  $\partial_W \mu_{t, \Gamma}$  la dérivée directionnelle de  $\mu_{t, \Gamma}$  par rapport à  $\Gamma$  dans la direction  $W$  telle que  $\|W\|_F = 1$ . Alors il existe  $L > 0$  tel que si  $\lambda \geq L$ , on a*

$$\|\partial_W \mu_{t, \Gamma}\|_K^2 \geq D_{\lambda, \Gamma} \quad (4.44)$$

où  $D_{\lambda, \Gamma} > 0$  est une constante  $\lambda$  qui ne dépend que de  $\Gamma$ .

**Avec du recul... 4.3.1.** *La démonstration de ce lemme était la plus longue des démonstrations des travaux de ce chapitre ! Obtenir un résultat complet pour les covariances variables avec modélisation de rang faible est donc un défi certain !*

#### 4.4 D'une initialisation par projection idéale à une initialisation par projection en pratique : le défi des méthodes non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension ?

Une approche courante pour l'initialisation de ces méthodes est l'initialisation par des techniques de projection. Une telle initialisation n'est plus vraiment d'intérêt pratique pour la reconstruction de matrices de rang faible car la convergence globale d'algorithmes stochastiques de descente a été prouvée dans ce cas là. Cependant, elle est encore nécessaire pour d'autres modèles tels que les sommes de diracs, les mélanges de gaussiennes et la reconstruction de phase.

Trouver une technique d'initialisation pratique est essentiellement un problème de conception d'heuristiques au cas par cas. On étudie la méthode de projection dans le cas sans bruit  $y = Ax_0$ .

En dimension finie, les techniques de projection reposent sur le fait que la propriété d'isométrie restreinte de  $A$  implique  $\|(A^H A - I)x_0\|_2^2 \leq \gamma$  (où  $A^H$  est l'adjoint de  $A$ ). Dans notre cadre général l'adjoint de  $A$  ne projette pas dans  $\mathcal{D}^*$ , mais dans  $\mathcal{D}$ . On formalise cette idée de projection dans notre contexte.

**Définition 4.4.1** (Projection idéale). *Soit  $y = Ax_0 \in \mathbb{C}^m$ , on définit la projection idéale  $z \in \mathcal{D}$  par*

$$z := \sum_{l=1}^m y_l \alpha_l. \quad (4.45)$$

On a le lemme immédiat suivant (conséquence directe de la RIP)

**Lemme 4.4.1.** *Supposons  $A$  a la RIP avec constante  $\gamma$ . Soit  $z \in \mathcal{D}$  la projection idéale pour les mesures  $y = Ax_0$ . Alors*

$$(1 - \gamma)\|x_0\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle x_0, z \rangle \leq (1 + \gamma)\|x_0\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.46)$$

Ce lemme 4.4.1 montre que la projection idéale préserve (et localise) l'énergie de  $x_0$  (à une constante RIP près). Quand le nombre de mesures croît, il peut être arbitrairement proche de l'optimum global (au travers du produit de dualité). Le défi est d'extraire les paramètres initiaux  $\theta_{init}$  de  $z$ .

Pour la reconstruction de phase [60], on utilise des techniques d'initialisation spectrale consistant à prendre les principales composantes d'une matrice construite à partir d'une combinaison linéaire des projections idéales des mesures individuelles.

Pour la super-résolution, on a proposé une heuristique basée sur un échantillonnage sur une grille de la projection idéale suivie d'une réduction de dimension (voir section 5.2). Des éléments



qualitatifs indiquent qu'un pas de grille suffisamment fin (de l'ordre de la séparation minimale  $\epsilon$ ) permet d'initialiser dans le bassin d'attraction. Une alternative est d'ajouter des diracs avec une méthode gloutonne sans-garantie de convergence dans le cas des diracs pour le moment (on dispose de quelques résultats pour d'autres modèles [40]).

Pour l'estimation de mélanges de gaussiennes il est possible d'imaginer une heuristique basée sur un grille pour l'initialisation, mais c'est une question ouverte de trouver une méthode qui évite la malédiction de la dimension et qui améliore les méthodes gloutonnes [YT14].

## 4.5 Perspectives

On a donné un résultat général qui permet l'étude des bassins d'attractions des méthodes non-convexes de reconstruction de modèles de faible dimension. On a appliqué ce résultat à différents exemples de problème inverses.

Les questions suivantes restent ouvertes.

- La RIP est un outil qualitatif utile, mais ne permet pas de donner des résultats quantitatifs. Est-ce qu'on peut répliquer les idées évoquées dans ce chapitre au cadre non-uniforme qui donne souvent des résultats plus quantitatifs?
- Cela ouvre bien sûr des questions sur la finesse de ces résultats en général. Dans le cas des diracs et des mélanges de gaussiennes, la taille des bassins d'attractions dépend du ratio des amplitudes extrême ce qui est une condition nécessaire. Dans le cas des matrices de rang faible, les résultats de la littérature ne dépendent pas ce ratio. Quelle hypothèse permettrait de se défaire de cette dépendance ?
- Maintenant que l'on comprend bien la géométrie des bassins d'attraction, la difficulté se déporte sur l'initialisation. On peut donner facilement des résultats pour la projection idéale. Est-ce que l'on peut faire de même pour les méthodes spectrales ? Est-il possible d'initialiser en général dans le bassin d'attraction en évitant la malédiction de la dimension ? Est-il possible de donner une preuve complète de convergence d'une méthode non convexe pour la super-résolution et l'estimation de mélanges de gaussiennes?

## Chapitre 5

# Applications en science des données

Dans ce chapitre je décris les applications en science des données que j'étudie ou ai étudié. Ces travaux sont soit des applications, soit une inspiration des problématiques théoriques des chapitres précédents.

Les sections 5.1, 5.2 et 5.3 sont des travaux postérieurs à ma thèse. J'évoque aussi dans les sections 5.4 et 5.5 mes travaux de thèse et même antérieur en tant qu'ingénieur de recherche.

### 5.1 Apprentissage statistique compressé

On cherche ici à effectuer une tâche d'apprentissage (ex. classification, analyse en composante principale (ACP)) à partir d'une version compressée des données dont on dispose. L'objectif final étant d'effectuer l'apprentissage de manière efficace sur de très grandes bases de données. Nous avons montré qu'il était possible d'effectuer cette compression pratiquement pour certaines tâches (estimation des centres de la classification K-means) puis théoriquement (classification, ACP) en utilisant des moments empiriques aléatoires des données ("sketches") pour la compression. C'est la première fois que de telles garanties théoriques sont données pour le cas de la classification (ma participation dans la démonstration de ces résultats a été à borner les nombres de couverture de l'ensemble sécant qui sont nécessaires dans l'obtention de la RIP dans le cas des sommes de diracs.)

Par exemple, on peut effectuer une classification K-means en résolvant un problème de reconstruction de sommes de  $K$  diracs à partir d'observations linéaires (les sketches) de la distribution empirique des données. Ces sommes de  $K$  diracs forment un modèle de faible dimension  $\Sigma$ . La procédure d'apprentissage compressé est la suivante pour effectuer une classification K-means sur des données  $(x_r)_r$ :

1. Compresser ces données en utilisant des moments de Fourier aléatoires :

$$y = \left( \sum_r e^{-j\langle \omega_l, x_r \rangle} \right)_{l=1,m} \quad (5.1)$$

où  $\omega_l$  sont des vecteurs de fréquences dont la distribution est bien choisie.

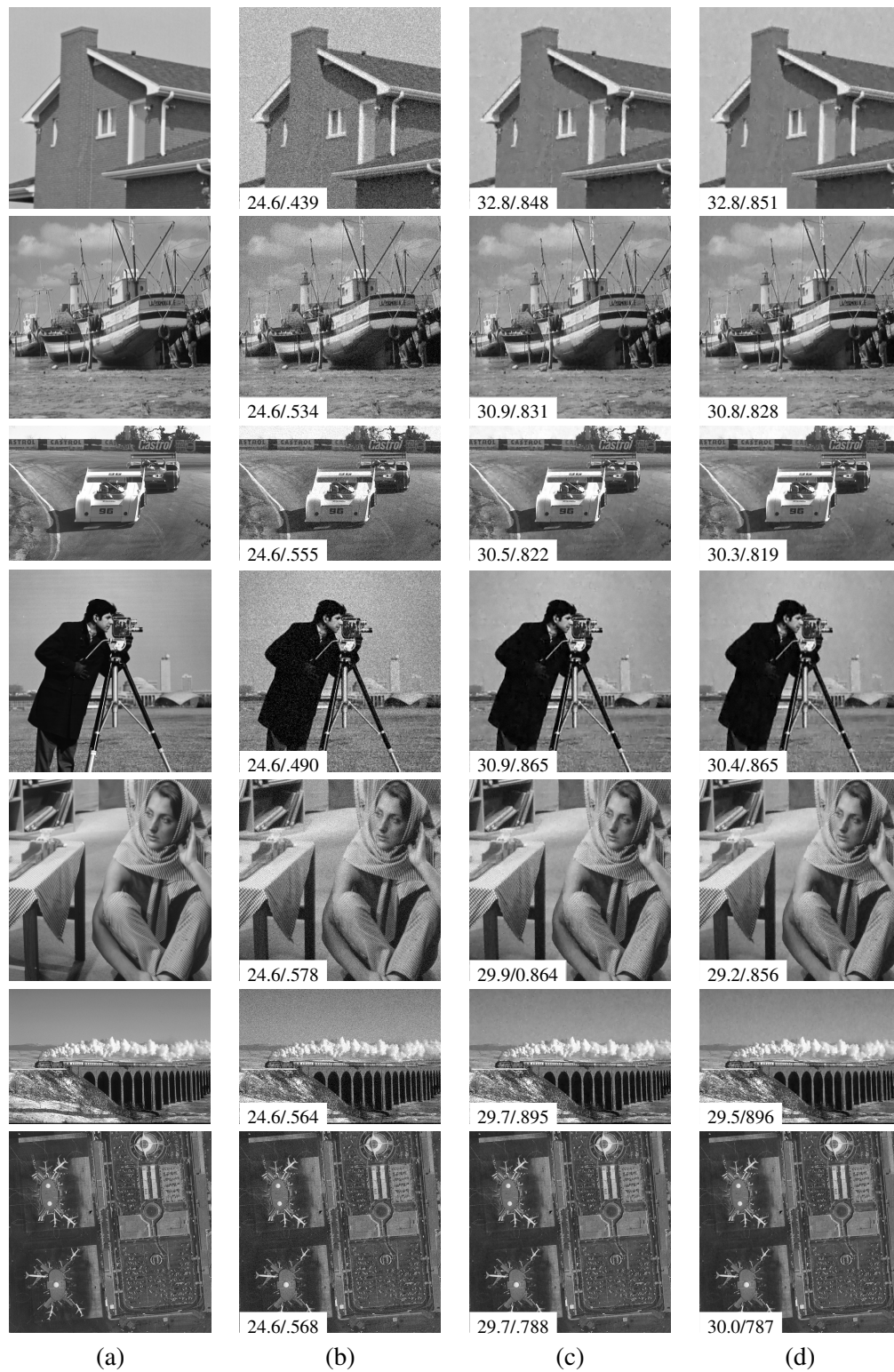
2. Estimer une somme  $\pi = \sum_{l=1, K} a_l \delta_l$  de diracs à partir de  $y$  en utilisant la minimisation (4.8) (approchée par une heuristique) où  $A$  est construit en utilisant les fonctions de Fourier  $\alpha_l(t) = e^{-j\langle \omega_l, t \rangle}$ .
3. Les centres des classes sont les emplacements des diracs estimés.

Cela revient donc à résoudre un problème de super-résolution de sommes d'impulsions de Dirac à partir d'observations de Fourier aléatoires. Nous avons montré qu'il est possible de donner des garanties de performance pour la méthode de décodage idéale donnée par la minimisation (4.8). Dans le cadre de la classification, la taille  $m$  des données compressées  $y$  dépend du nombre de classes dans les données (nombre de paramètres à estimer) mais pas de la taille de la base de données originale. Un point très important de la théorie développée est que les observations de Fourier aléatoires ont une propriété d'isométrie restreinte (RIP).

Dans le cadre du débruitage bayésien d'images avec modèles de mélange de gaussiennes (GMM), les travaux de Hui Shi (dont je suis le directeur de thèse) montrent que l'on peut appliquer pratiquement la méthode de sketching à de grandes bases de données de patches ("imassettes") tout en gardant la possibilité d'estimer des GMM permettant de débruiter des images. Dans ce cas, on implémente pratiquement un modèle de gaussiennes avec covariances de rang faible et on adapte en conséquence l'heuristique continuous OMP. On observe aussi que le sketching fonctionne dans le cas où l'hypothèse de séparation des moyennes n'est pas respectée (on débruite des patches à moyenne nulle).

On montre sur la figure 5.1 la comparaison d'un débruitage utilisant un modèle de GMM issu de la méthode classique EM (Expectation - Maximization) et un débruitage issu d'un modèle estimé à partir d'un sketch compressant la base de données de patches d'un facteur 250.

**Publications associées :** [YT14, YT2, Y1, YT10].



**Figure 5.1:** Débruitage d'images avec des sketches: (a) original, (b) image bruitée, (c) résultat avec EM, (d) résultat avec le sketching avec PSNR/SSIM. On obtient des performances similaires à EM en estimant le modèle GMM à partir de la base de données compressée.

## 5.2 Estimation rapide d'impulsions sans grille

On a montré pratiquement que des observations de fréquences de Fourier aléatoires permettent de mieux reconstruire des sommes de diracs que des observations régulières de basses fréquences (que l'on trouve dans la littérature de la super-résolution d'impulsions de diracs).

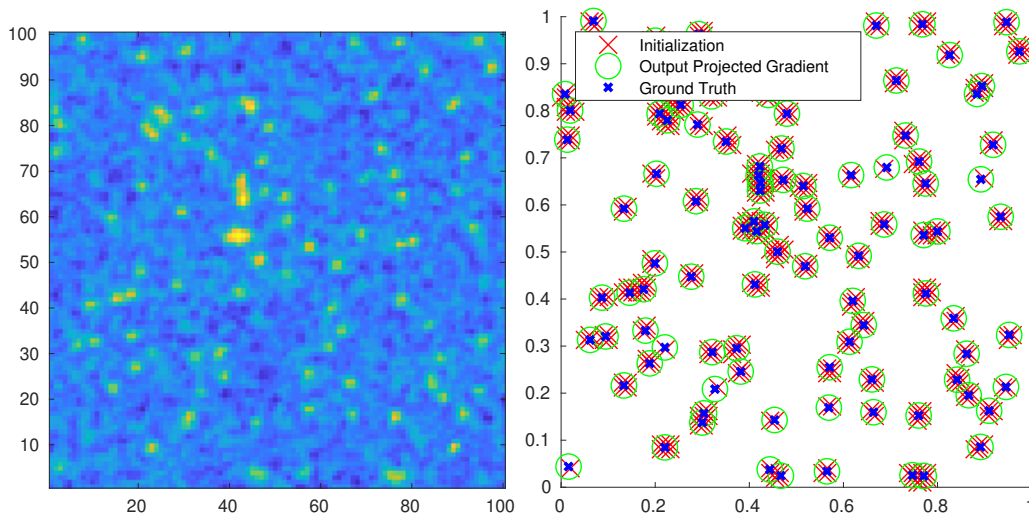
Dans le chapitre 4, on a montré que la taille des bassins d'attraction pour cette application dépend fortement de la séparation minimale entre les impulsions. Cette remarque mène naturellement à étudier un algorithme de gradient projeté pour ce problème :

$$\theta_{n+1} = P_{\Theta_{k,\epsilon}}(\theta_n - \tau_n \nabla g(\theta_n)) \quad (5.2)$$

où  $P_{\Theta_{k,\epsilon}}$  est une projection sur la contrainte de séparation.

On a proposé une heuristique pour effectuer cette projection ainsi qu'une méthode d'initialisation utilisant une projection des mesures sur une grille permettant d'améliorer les temps de calculs d'heuristiques basées sur OMP dans des applications d'imagerie 2d. Les résultats de la figure 5.2, ont été obtenus 6 fois plus rapidement qu'avec COMP (continuous OMP).

*Publications associées : [YT4, YT3, YT11].*



**Figure 5.2:** Résultat pour 100 impulsions 2d. Gauche : Projection des mesures sur une grille. Droite : Initialisation et résultat du gradient projeté.

## 5.3 Reconstruction de phase

Dans une collaboration avec Antoine Deleforge, on étudie un problème de reconstruction de phase avec modèle d'amplitude. Ce problème a un rôle important dans les questions de séparation de sources audios. Il se formule comme un problème non convexe et a des liens étroits avec les problèmes classiques de reconstruction de phase. Nous avons comparé plusieurs méthodes de

résolution de ce problème et montré pratiquement qu’un “lifting” du problème en programme semi-défini positif est la méthode la plus efficace comparée aux méthodes existantes.

*Publication associée :* [YT15].

## 5.4 Régularisation pour la super-résolution multi-images

La super-résolution (SR) multi-images consiste à produire une image de haute résolution (HR) d’une scène à partir de plusieurs acquisitions de basse résolution. L’objet principal de mes travaux de thèse [YT41] a été de déterminer avec quelle force il est nécessaire de régulariser pour résoudre le problème inverse de la super-résolution multi-images dans des contextes de bruits d’énergie finie et de données aberrantes (outliers). En effet, la nécessité même de régulariser n’était pas remise en question dans la littérature. Or, dans le cadre de la super-résolution multi-images, il est souvent possible d’augmenter la quantité de données acquises et donc la quantité d’information disponible pour retrouver l’image HR, rendant la nécessité de la régularisation peu évidente dans certains cas.

On a montré que lorsque le nombre d’images acquises augmente, le problème inverse de SR par minimisation  $\ell^2$  devient parfaitement conditionné avec grande probabilité. Lorsque le problème est contaminé par un bruit d’énergie finie, la vitesse de convergence de l’estimateur peut alors être calculée grâce à l’étude asymptotique du conditionnement du problème. **Ces résultats ont permis de déterminer des paramètres pratiques d’acquisition d’images en vue d’effectuer une super-résolution à grande gamme dynamique (HDR-SR) sans régularisation.**



**Figure 5.3: Résultat de HDR-SR sans régularisation.** (a) Image BR, (b) Résultat de HDR-SR.

On a de plus déterminé (en utilisant la théorie de la reconstruction parcimonieuse [24]) dans quels cas l’interpolation SR par minimisation de la norme  $\ell^1$  permet une reconstruction parfaite lorsque

celle-ci est contaminée par du bruit de type outliers ( $e$  est un bruit parcimonieux, de faible “norme”  $\ell^0$  et d’énergie arbitraire). On a montré que si le ratio d’images contaminées sur le nombre d’images total est inférieur à une constante, alors cette interpolation donne une reconstruction parfaite.

**Avec du recul... 5.4.1.** *C’est à ce moment là que j’ai rencontré la théorie de la reconstruction parcimonieuse qui est resté le fil conducteur de mes recherche !*

On s’est ensuite posé la question suivante: est-ce qu’ajouter une hypothèse de parcimonie sur  $x_0$  augmente le nombre d’images pour lequel l’interpolation SR  $\ell^1$  donne une reconstruction parfaite? Le résultat le plus important à ce sujet est le suivant : la régularisation par variation totale n’augmente pas la robustesse de la SR en général. En effet, si les données aberrantes recouvrent des sauts de l’image (zones où le gradient est non nul), la variation totale ne peut augmenter le nombre de pixels contaminé auquel la SR est robuste. En revanche, si les données aberrantes ne recouvrent pas les sauts du signal, on a déterminé des conditions pour lesquelles l’interpolation SR avec régularisation par variation totale est plus robuste à ces outliers, ainsi que le paramètre de régularisation  $\lambda$  permettant cette robustesse.

*Publications associées : [YT18, YT17, YT7, YT24, YT6]*

## 5.5 Géophysique

Avant d’effectuer ma thèse, j’ai travaillé comme chercheur en traitement du signal géophysique pour l’entreprise CGGVeritas. Mes travaux lors de cette période ont donné lieu à plusieurs méthodes de débruitage et de détection de la structure des données géophysiques.

*Publications associées : [YT8, YT19, YT20]*

## 5.6 Perspectives

Les perspectives applicatives immédiates de mes travaux sont surtout dans la continuité des résultats en traitement des images à l’aide de l’apprentissage compressé et dans le domaine de la super-résolution d’impulsions. Dans ces deux cas, on a donné des preuves de concepts à consolider. Il faut démontrer la robustesse de ces méthodes, étendre à des dimensions supérieures les résultats, ce qui suppose l’optimisation des algorithmes en jeu.

D’autres opportunités applicatives sont possibles en imagerie médicale, où l’étude de régularisation pour nouveaux modèles pourrait être d’un grand intérêt. Spécifiquement, lorsque différents modes d’acquisition sont utilisés, ce qui peut être imagé diffère selon les modes. On se retrouve donc avec une problématique d’intersection de modèles différents.

L’apprentissage par réseaux de neurones profond est devenu incontournable. Ces méthodes peuvent être utilisées pour apprendre des fonctions de régularisation adaptées à une base de données. Les

justifications des méthodes utilisées ne sont pas toujours concordante avec la théorie de la reconstruction des modèles de faibles dimension. Il serait donc intéressant de faire le lien entre les travaux présentés dans ce manuscrit et ces méthodes récentes de régularisation.



# Chapitre 6

## Liste des publications

### 6.1 Articles de revues internationales

- [YT1] R. Gribonval, G. Blanchard, N. Keriven et Y. Traonmilin : Statistical Learning Guarantees for Compressive Clustering and Compressive Mixture Modeling, *Mathematical Statistics and Learning*, accepté pour publication, 2021.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02536818>
- [YT2] R. Gribonval, G. Blanchard, N. Keriven et Y. Traonmilin : Compressive Statistical Learning with Random Feature Moments. *Mathematical Statistics and Learning*, accepté pour publication, 2021.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01469134>
- [YT3] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : Projected gradient descent for non-convex sparse spike estimation. *Signal Processing Letters*, 36 (4), 2020.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02311624>
- [YT4] Y. Traonmilin et J.-F. Aujol : The basins of attraction of the global minimizers of the non-convex sparse spike estimation problem. *Inverse Problems*, 36 (4), 2020.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01938239>
- [YT5] Y. Traonmilin et R. Gribonval : Stable recovery of low-dimensional cones in Hilbert spaces: One RIP to rule them all. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 45 (1), 170-205, 2018.  
URL : <https://hal.inria.fr/hal-01207987>
- [YT6] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : Robust multi-image processing with optimal sparse regularization. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 51(3):413-429, 2015.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00940192>
- [YT7] Y. Traonmilin et C. Aguerrebere : Simultaneous high dynamic range and superresolution imaging without regularization. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 7(3):1624–1644, 2014.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00913620>

- [YT8] Y. Traonmilin et N. Gulunay : Statics-preserving projection filtering. *Geophysical Prospecting*, 61:346–351, 2013.  
URL : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1365-2478.2012.01121.x/abstract>

## 6.2 Chapitres de livres

- [YT9] Y. Traonmilin, G. Puy, R. Gribonval et M. E. Davies : Compressed sensing in Hilbert spaces. Chapitre pour le livre “Matheon book on Compressed sensing and its applications”, 2017.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01469134>

## 6.3 Articles de conférences

### 6.3.1 Avec comité de lecture

- [YT10] H. Shi, Y. Traonmilin et J.-F. Aujol : Sketched learning for image denoising, International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, 2021.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03123805>
- [YT11] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : An algorithm for non-convex off-the-grid sparse spike estimation with a minimum separation constraint, ITWIST, 2020.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03037264>
- [YT12] Y. Traonmilin, R. Gribonval et S. Vaiteer : Is the 1-norm the best convex sparse regularization?. ITWIST, 2018.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01819219>
- [YT13] Y. Traonmilin et S. Vaiteer: Optimality of 1-norm regularization among weighted 1-norms for sparse recovery: a case study on how to find optimal regularizations. NCMIP, 2018 .  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01720871/>
- [YT14] Nicolas Keriven, Nicolas Tremblay, Yann Traonmilin and Rémi Gribonval : Compressive K-means. ICASSP 2017.  
URL : <https://hal.inria.fr/hal-01386077>
- [YT15] Antoine Deleforge et Yann Traonmilin : Phase Unmixing : Multichannel Source Separation with Magnitude Constraints. ICASSP 2017.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01372418>
- [YT16] Y. Traonmilin et R. Gribonval : A framework for low-complexity signal recovery and its application to structured sparsity, 2016 IEEE Information Theory Workshop (ITW), Cambridge, 2016, pp. 156-160.  
URL : <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=7606815&isnumber=7606780>

- [YT17] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : Outlier Removal Power of the L1-Norm Super-Resolution : In Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, vol. 7893 de Lecture Notes in Computer Science, p. 198–209. Springer Berlin Heidelberg, 2013.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00803695/>
- [YT18] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : On the amount of regularization for super-resolution interpolation. 2012 Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), p. 380–384. IEEE, 2012.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00824670>
- [YT19] Y. Traonmilin, G. Lambaré, P. Herrmann, N. Deladerriere et K. Garceran : Multi-dip estimation in n dimensions. 71st EAGE Conference & Exhibition, 2009.  
URL : <http://www.earthdoc.org/publication/publicationdetails/?publication=23692>
- [YT20] Y. Traonmilin et P. Herrmann : Structurally consistent f-x filtering. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 27(1):2642–2646, 2008.  
URL : <http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.3063891>

### 6.3.2 Sans comité de lecture

- [YT21] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : Quantification de la robustesse de la super-résolution par minimisation L1. 23ème Colloque Grets (Grets 2013), Brest : France, 2013.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00835739>

## 6.4 Preprint / Rapport technique

- [YT22] Y. Traonmilin, R. Gribonval et S. Vaiteer : A theory of optimal convex regularization for low-dimensional recovery, preprint à venir, 2021.
- [YT23] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : The basins of attraction of the global minimizers of non-convex inverse problems with low-dimensional models in infinite dimension, Preprint in review, 2020.  
URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02941814>
- [YT24] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : On the amount of regularization for super-resolution reconstruction. Technical Report HAL, 2013.  
URL : <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00763984>

## 6.5 Conférence sans actes/Séminaires

- [YT25] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : A framework for non-convex recovery of low dimensional models in infinite dimension, Journée de GDR MIA, Toulouse, France, 2019.

- [YT26] Y. Traonmilin, N. Keriven, R. Gribonval et G. Blanchard : On the Non-convex Sparse Spike Super-resolution with Random Fourier Sampling, Journées IOPS, Le Teich, France, 2019.
- [YT27] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : Projected gradient descent for non-convex sparse spike estimation, OMS workshop, Toulouse, France, 2019.
- [YT28] Y. Traonmilin, J.-F. Aujol et A. Leclaire : On the non-convex sparse spike estimation problem: explicit basins of attraction of global minimizers, SPARS workshop, Toulouse, France, 2019.
- [YT29] Y. Traonmilin, R. Gribonval et S. Vaïter : Optimal regularizers for low complexity models : a framework and its application to sparse recovery, Séminaire MIP, Toulouse, France, 2018.
- [YT30] Y. Traonmilin, R. Gribonval et S. Vaïter : Is the 1-norm the best convex sparse regularization?, Séminaire IOP, Bordeaux, France, 2018.
- [YT31] Y. Traonmilin, N. Keriven, R. Gribonval et G. Blanchard : Super-résolution d'impulsions de diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire, Séminaire SPOC, Dijon, France, 2017.
- [YT32] Y. Traonmilin, N. Keriven, R. Gribonval et G. Blanchard : Spikes super-resolution with random Fourier sampling, SPARS workshop, Portugal, 2017.
- [YT33] Y. Traonmilin, N. Keriven, R. Gribonval et G. Blanchard : Super-résolution d'impulsions de diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire. Congrès SMAI, France, 2017.
- [YT34] N. Keriven, Y. Traonmilin, R. Gribonval et G. Blanchard : Random Moments for Sketched Mixture Learning, SPARS workshop, Portugal, 2017.
- [YT35] A. Deleforge et Y. Traonmilin : Signal Separation with Magnitude Constraints : a Phase Unmixing Problem, SPARS workshop, Portugal, 2017.
- [YT36] Y. Traonmilin et R. Gribonval : Un cadre pour la reconstruction de signaux de faible complexité et son application à la parcimonie structurée, SMATI, France, Mars 2016.
- [YT37] Y. Traonmilin et R. Gribonval : Un cadre pour la reconstruction de signaux de faible complexité et son application à la parcimonie structurée, Séminaire de Mathématiques Appliquées au Traitement d'Images, France, Janvier 2016.
- [YT38] Y. Traonmilin et R. Gribonval : Un cadre pour la reconstruction de signaux de faible complexité et son application à la parcimonie structurée, GdR ISIS, France, Octobre 2015.
- [YT39] Y. Traonmilin et R. Gribonval : A general low complexity recovery framework and its application to structured sparsity, MissData 2015, Rennes, France, 2015.
- [YT40] Y. Traonmilin, S. Ladjal et A. Almansa : How to Define Signal and Noise Sparsity for Multi-image Processing? 8th International Conference Curves and Surfaces, Paris : France, 2014.

## **6.6 Thèse**

[YT41] Y. Traonmilin : Relations entre le modèle d'image et le nombre de mesures pour une super-résolution fidèle. Thèse, 2014.

URL : <https://yantraonmilin.wordpress.com/thesis/>

## Chapitre 7

# Bibliographie

- [1] B. Adcock, A. Hansen, B. Roman, and G. Teschke. Generalized sampling: stable reconstructions, inverse problems and compressed sensing over the continuum. *Adv. in Imag. and Electr. Phys.*, 182(1):187–279, 2014.
- [2] C. D. Aliprantis and K. C. Border. *Infinite dimensional analysis, A Hitchhiker’s Guide*. Springer, 2006.
- [3] D. Amelunxen, M. Lotz, M. B. McCoy, and J. A. Tropp. Living on the edge: phase transitions in convex programs with random data. *Information and Inference*, 3(3):224–294, 2014.
- [4] U. Ayaz, S. Dirksen, and H. Rauhut. Uniform recovery of fusion frame structured sparse signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 41(2):341–361, 2016.
- [5] R. G. Baraniuk, V. Cevher, M. F. Duarte, and C. Hegde. Model-based compressive sensing. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 56(4):1982–2001, 2010.
- [6] A. Bastounis and A. C. Hansen. On random and deterministic compressed sensing and the restricted isometry property in levels. In *Sampling Theory and Applications (SampTA), 2015 International Conference on*, pages 297–301, 2015.
- [7] A. Beck and L. Tretuashvili. On the convergence of block coordinate descent type methods. *SIAM Journal on Optimization*, 23(4):2037–2060, 2013.
- [8] S. Bhojanapalli, B. Neyshabur, and N. Srebro. Global optimality of local search for low rank matrix recovery. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 3873–3881, 2016.
- [9] T. Blumensath. Sampling and reconstructing signals from a union of linear subspaces. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 57(7):4660–4671, 2011.
- [10] T. Blumensath and M. E. Davies. Sampling Theorems for Signals From the Union of Finite-Dimensional Linear Subspaces. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(4):1872–1882, 2009.
- [11] F. F. Bonsall. A general atomic decomposition theorem and banach’s closed range theorem. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 42(1):9–14, 1991.

- 
- [12] N. Boumal, P.-A. Absil, and C. Cartis. Global rates of convergence for nonconvex optimization on manifolds. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 39(1):1–33, 2018.
- [13] A. Bourrier, M. Davies, T. Peleg, P. Perez, and R. Gribonval. Fundamental performance limits for ideal decoders in high-dimensional linear inverse problems. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 60(12):7928–7946, 2014.
- [14] C. Boyer, Y. De Castro, and J. Salmon. Adapting to unknown noise level in sparse deconvolution. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, 6(3):310–348, 2017.
- [15] S. Burer and R. D. Monteiro. Local minima and convergence in low-rank semidefinite programming. *Mathematical Programming*, 103(3):427–444, 2005.
- [16] T. T. Cai and A. Zhang. Sparse Representation of a Polytope and Recovery of Sparse Signals and Low-Rank Matrices. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 60(1):122–132, 2014.
- [17] V. Cambareri and L. Jacques. Through the haze: a non-convex approach to blind gain calibration for linear random sensing models. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, 8(2):205–271, 2019.
- [18] E. J. Candès. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(9-10):589–592, 2008.
- [19] E. J. Candès, Y. C. Eldar, D. Needell, and P. Randall. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 31(1):59–73, 2011.
- [20] E. J. Candès and C. Fernandez-Granda. Super-resolution from noisy data. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 19(6):1229–1254, 2013.
- [21] E. J. Candès and Y. Plan. Matrix Completion With Noise. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):925–936, 2010.
- [22] E. J. Candes and Y. Plan. Tight oracle inequalities for low-rank matrix recovery from a minimal number of noisy random measurements. *IEEE Transactions on Information Theory*, 57(4):2342–2359, 2011.
- [23] E. J. Candes, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 52(2):489–509, 2006.
- [24] E. J. Candes and T. Tao. Decoding by linear programming. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 51(12):4203–4215, Dec. 2005.
- [25] A. Chambolle and T. Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of mathematical imaging and vision*, 40(1):120–145, 2011.
- [26] V. Chandrasekaran, B. Recht, P. Parrilo, and A. Willsky. The Convex Geometry of Linear Inverse Problems. *Foundations of Computational Mathematics*, 12(6):805–849, 2012.
- [27] Y. Chi, Y. M. Lu, and Y. Chen. Nonconvex optimization meets low-rank matrix factorization: An overview. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 67(20):5239–5269, 2019.

- 
- [28] L. Chizat and F. Bach. On the global convergence of gradient descent for over-parameterized models using optimal transport. *arXiv preprint arXiv:1805.09545*, 2018.
- [29] P. G. Ciarlet, B. Miara, and J.-M. Thomas. *Introduction to numerical linear algebra and optimisation*. Cambridge University Press, 1989.
- [30] M. E. Davies and R. Gribonval. Restricted isometry constants where sparse recovery can fail for. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(5):2203–2214, 2009.
- [31] Y. De Castro and F. Gamboa. Exact reconstruction using Beurling minimal extrapolation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395(1):336–354, 2012.
- [32] Y. De Castro, F. Gamboa, D. Henrion, and J. Lasserre. Exact solutions to super resolution on semi-algebraic domains in higher dimensions. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 63(1):621–630, 2017.
- [33] S. Dirksen. Dimensionality reduction with subgaussian matrices: a unified theory. *Foundations of Computational Mathematics*, 16(5):1367–1396, 2016.
- [34] D. L. Donoho. For most large underdetermined systems of linear equations the minimal  $\ell_1$ -norm solution is also the sparsest solution. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 59(6):797–829, 2006.
- [35] V. Duval and G. Peyré. Exact support recovery for sparse spikes deconvolution. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(5):1315–1355, 2015.
- [36] A. Eftekhari and M. B. Wakin. New analysis of manifold embeddings and signal recovery from compressive measurements. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 39(1):67–109, 2015.
- [37] I. Ekeland and R. Temam. *Convex analysis and variational problems*, volume 28. Siam, 1999.
- [38] Y. C. Eldar, P. Kuppinger, and H. Bolcskei. Block-sparse signals: Uncertainty relations and efficient recovery. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 58(6):3042–3054, 2010.
- [39] Y. C. Eldar and M. Mishali. Robust Recovery of Signals From a Structured Union of Subspaces. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(11):5302–5316, 2009.
- [40] C. Elvira, R. Gribonval, C. Soussen, and C. Herzet. OMP and continuous dictionaries: is k-step recovery possible? In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 5546–5550, 2019.
- [41] H. G. Feichtinger and G. Zimmermann. An exotic minimal banach space of functions. *Mathematische Nachrichten*, 239-240(1):42–61, 2002.
- [42] S. Foucart and H. Rauhut. *A mathematical introduction to compressive sensing*. Springer, 2013.
- [43] A. Gretton. Introduction to rkhs, and some simple kernel algorithms. *Adv. Top. Mach. Learn. Lecture Conducted from University College London*, 2013.



- [44] R. Gribonval and M. Nielsen. Beyond sparsity: Recovering structured representations by  $\ell^1$  minimization and greedy algorithms. *Advances in Computational Mathematics*, 28(1):23–41, 2008.
- [45] G. Kutyniok. Clustered sparsity and separation of cartoon and texture. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 6(2):848–874, 2013.
- [46] S. Ling and T. Strohmer. Regularized gradient descent: a non-convex recipe for fast joint blind deconvolution and demixing. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, 2017.
- [47] M. März, C. Boyer, J. Kahn, and P. Weiss. Sampling rates for  $\ell^1$ -synthesis. *arXiv preprint arXiv:2004.07175*, 2020.
- [48] G. Puy, M. E. Davies, and R. Gribonval. Recipes for stable linear embeddings from hilbert spaces to  $\mathbb{R}^m$ . *Information Theory, IEEE Transactions on*, 63(4):2171–2187, 2017.
- [49] B. Recht, M. Fazel, and P. Parrilo. Guaranteed Minimum-Rank Solutions of Linear Matrix Equations via Nuclear Norm Minimization. *SIAM Review*, 52(3):471–501, 2010.
- [50] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Number 28. Princeton university press, 1970.
- [51] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets. *Variational analysis*, volume 317. Springer Science & Business Media, 2009.
- [52] E. Soubies, L. Blanc-Féraud, and G. Aubert. A continuous exact  $\ell_0$  penalty (cel0) for least squares regularized problem. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 8(3):1607–1639, 2015.
- [53] E. Soubies, L. Blanc-Féraud, and G. Aubert. A unified view of exact continuous penalties for  $\ell_2 - \ell_0$  minimization. *SIAM Journal on Optimization*, 27(3):2034–2060, 2017.
- [54] E. Soubies, L. Blanc-Féraud, and G. Aubert. New insights on the optimality conditions of the  $\ell_2 - \ell_0$  minimization problem. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, pages 1–17, 2019.
- [55] C. Studer and R. G. Baraniuk. Stable restoration and separation of approximately sparse signals. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 37(1):12–35, 2014.
- [56] S. Tu, R. Boczar, M. Simchowitz, M. Soltanolkotabi, and B. Recht. Low-rank solutions of linear matrix equations via procrustes flow. *Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning*, 48:964–973, 2016.
- [57] M. Unser and J. Fageot. Native banach spaces for splines and variational inverse problems. *arXiv preprint arXiv:1904.10818*, 2019.
- [58] S. Vaiteer, M. Golbabaee, J. Fadili, and G. Peyré. Model selection with low complexity priors. *Information and Inference: A Journal of the IMA*, 4(3):230–287, 2015.
- [59] M. Vetterli, P. Marziliano, and T. Blu. Sampling signals with finite rate of innovation. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 50(6):1417–1428, 2002.
- [60] I. Waldspurger. Phase retrieval with random gaussian sensing vectors by alternating projections. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2018.

- [61] M. Yuan and Y. Lin. Model selection and estimation in regression with grouped variables. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 68(1):49–67, 2006.
- [62] T. Zhao, Z. Wang, and H. Liu. A nonconvex optimization framework for low rank matrix estimation. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 559–567, 2015.