

Amélioration des performances de la méthode intégrale de volume circuit pour la simulation des dispositifs d'électronique de puissance

Kouceila Alkama

► To cite this version:

Kouceila Alkama. Amélioration des performances de la méthode intégrale de volume circuit pour la simulation des dispositifs d'électronique de puissance. Energie électrique. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT: 2022GRALT027. tel-03716093

HAL Id: tel-03716093 https://theses.hal.science/tel-03716093

Submitted on 7 Jul2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Génie Électrique

Arrêté ministériel : 25 mai 2006

Présentée par

Kouceila ALKAMA

Thèse dirigée par **Olivier CHADEBEC** et codirigée par **Gérard MEUNIER** et co-encadrée par **Jean-Michel GUICHON**

préparée au sein du Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble dans l'École Doctorale Electronique, Electrotechnique, Automatique, Traitement du Signal (EEATS)

Amélioration des performances de la méthode intégrale de volume circuit pour la simulation des dispositifs d'électronique de puissance

Thèse soutenue publiquement le 1 avril 2022, devant le jury composé de : M. Christian VOLLAIRE Professeur des universités au laboratoire Ampère à Lyon (Président) M. Lionel PICHON Directeur de recherche CNRS au GeePs à Paris (Rapporteur) M. Yvonnick LE MENACH Professeur des universités au L2EP à Lille (Rapporteur) Mme. Édith CLAVEL Professeur des universités au G2Elab à Grenoble (Examinatrice) M. Olivier CHADEBEC Directeur de recherche CNRS au G2Elab (Directeur de thèse) M. Gérard MEUNIER Directeur de recherche émérite CNRS au G2Elab (Co-directeur de thèse) M. Jean-Michel GUICHON Maître de conférences au G2Elab (Invité) M. Enrico VIALARDI Docteur-Ingénieur à Altair Engineering France à Meylan (Invité)



Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de l'équipe MAGE - Modèles, Méthodes et Méthodologies Appliqués au Génie Électrique du Laboratoire de Génie Électrique de Grenoble (G2Elab) et au sein de l'équipe *Modeling capabilities* de la société Altair Engineering France dans le cadre d'une thèse avec financement CIFRE.

Je tiens tout d'abord à remercier vivement les membres du jury de l'intérêt qu'ils ont portés à ce travail : M. Christian VOLLAIRE, Professeur des universités au laboratoire Ampère à Lyon, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de thèse. M. Lionel PI-CHON, Directeur de recherche CNRS au Laboratoire de Génie électrique et électronique de Paris (GeePs), et M. Yvonnick Le MENACH, Professeur des universités au laboratoire d'électrotechnique et d'électronique de puissance (L2EP) de Lille, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, puis Mme. Édith CLAVEL Professeur des universités au G2Elab, pour avoir acceptée d'être examinatrice. Leurs nombreuses questions adressées lors de la soutenance étaient très intéressantes et pertinentes.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude et mes meilleurs sentiments à mes encadrants académiques et industriels pour leur soutien, leur grande disponibilité et pour la confiance qu'ils m'ont accordée durant ma thèse. Ce travail n'aurait jamais été possible sans leur aide et leur soutien indéfectibles.

J'adresse mes meilleurs sentiments à **M. Olivier CHADEBEC**, Directeur de recherche CNRS au G2Elab, mon directeur de thèse qui m'a donné mes premières briques sur les méthodes intégrales ainsi que sur la plateforme de développement MIPSE. Durant ces trois ans de thèse, il m'a donné non seulement des conseils scientifiques précieux mais aussi beaucoup d'encouragements.

Je tiens à remercier sincèrement **M. Gérard MEUNIER**, Directeur de recherche CNRS au G2Elab, mon co-directeur de thèse. Passionné par son travail et ses recherches, il m'a communiqué sa passion pour la modélisation numérique, je ne trouve pas les mots pour exprimer ma gratitude. Sa grande bienveillance, son aide constante et nos discussions professionnelles et amicales m'ont permis de réussir ce projet, mais également de traverser des périodes difficiles survenues pendant la thèse.

Ensuite j'aimerais remercier **M. Jean-Michel GUICHON**, Maître de Conférence à l'Université Grenoble Alpes, mon co-encadrant, pour sa disponibilité durant ma thèse, son

aide et sa bonne humeur. Ses commentaires précieux ont permis d'avancer dans la bonne direction et de tirer des bonnes conclusions. On ne se lasse pas de travailler avec lui.

Mes remerciements s'adressent également en particulier à **M. Bertrand BANN-WARTH**, Ingénieur d'Études au G2Elab, pour sa collaboration, son écoute et son aide tout le long de ma thèse.

Ensuite j'aimerais remercier mes encadrants du coté d'Altair, en commençant par **M**. **Enrico VIALARDI** Senior Technical Lead, qui a accepté d'être dans le jury et d'y représenter Altair, ainsi que pour sa disponibilité pour échanger malgré son emploi du temps chargé. Nos discussions tout au long de la thèse ont permis d'avancer dans la bonne direction.

J'aimerais remercier également **M. Rémy PERRIN-BIT** Senior Solver Development Manager, pour sa présence et son aide, sans oublier sa bonne humeur qu'il sait répandre autour de lui.

Et toujours du coté Altair, je remercie **M. Jonathan SIAU** Senior Software Developer, pour son aide précieuse, sa réactivité et sa force de proposition lors de nos réunions. Cette thèse étant la continuation de la sienne, sa présence dans l'équipe encadrante en a accéléré la progression.

Mes remerciement s'adressent à mon équipe Altairienne "Modeling capabilities" pour leur accueil, leur sympathie et leur bienveillance. Sans oublier **M. David PEDREIRA** Senior Software Developer, et **Mme. Delphine DUPUY** Senior Software Developer, pour leur aide sur la partie communication de l'algorithme du maillage adaptatif avec le solveur Flux.

Je remercie chaleureusement tous mes collègues et mes amis au G2Elab et à Altair pour les excellents moments passés ensemble.

Je voudrais dédier cette thèse à ma famille en Kabylie, en particulier à mes parents et mes sœurs qui n'ont cessé de me soutenir et de m'encourager depuis mon arrivée en France. Toute ma gratitude et mon amour du fond du coeur.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements

IN	TROI	DUCTIC	DN GÉNÉRALE	1		
Ι	Rappels sur la méthode PEEC					
	I.1	Intro	DUCTION	8		
	I.2	État 1	de l'art de la méthode PEEC	8		
		I.2.a	La méthode PEEC structurée	8		
		I.2.b	La méthode PEEC non-structurée	9		
	I.3 Formulations PEEC non-structurées					
		I.3.a	Introduction à la modélisation électromagnétique en basse et moyenne fré-			
			quence	11		
		I.3.b	Équations de Maxwell	12		
			I.3.b-i Le domaine fréquentiel	15		
		I.3.c	Formulation PEEC inductive RLM	16		
			I.3.c-i Cas volumique	16		
			I.3.c-ii Cas des régions minces	19		
			I.3.c-iii Cas avec la condition limite d'impédance de surface (SIBC)	23		
		I.3.d	Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC	25		
		I.3.e	Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC avec matériaux diélec-			
		triques	26			
	I.4	Conclusion				
Π	Sol	VEURS	CIRCUITS, AMÉLIORATION DE LA ROBUSTESSE ET DES PER-			
	FOR	MANCE	es des formulations PEEC RLM et RLMC	31		
	II.1	Intro	DUCTION	32		
	II.2	Solve	urs circuits pour la méthode PEEC	33		
		II.2.a	Approche par nœuds indépendants	35		
		II.2.b	Approche par nœuds indépendants minimale	37		
		II.2.c	Approche par mailles indépendantes minimales	38		
		II.2.d	Quelques remarques	39		
	II.3	3 Techniques de résolution				
	II.4	Compression matricielle				
	II.5	ÉTUDE DE LA FORMULATION PEEC-RLM 42				
		Stratégies d'intégration	44			
	II.5.a-i Outil d'intégration avec points de Gauss adaptatif					

II.5.c Performance de la formulation RLM				52
		II.5.c-i	Intégration numérique : standard versus points de Gauss	
			adaptatif	52
		II.5.c-ii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles in-	
			dépendantes	53
		II.5.c-iii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds in-	
			dépendants	55
		11.5.c-iv	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds in-	56
		II 5 e v	Sana préconditionnement	50 50
	II 5 d	Conclusio	sans preconditionnement	59 60
Цб	п.э.u Éтирі		CORMULATION PEEC-BLMC	61
11.0		Microstri	n sans diélectrique	62
	11.0.a	II 6 a-i	Performance de la formulation PEEC BLMC sans diélectrique	64
		II.6 a-ii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles in-	01
		11.0.0 11	dépendantes	66
		II.6.a-iii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds in-	
			dépendants	67
	$\rm II.6.b$	Microstri	p avec diélectrique	69
		II.6.b-i	Performance de la formulation PEEC RLMC avec diélectrique	70
		II.6.b-ii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles in-	
			dépendantes	71
		II.6.b-iii	Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds in-	
			dépendants	72
	II.6.c	Conclusio	on sur la partie RLMC	72
II.7	CONC	LUSION .		73
IIIFor			DEUDC ET DADENEN(ENT ADADTATE DU MAILLACE	75
		URS D EI	RREURS ET RAFFINEMENT ADAPTATIF DU MAILLAGE	76
111.1 111.0	I INTRO I INTRO	DUCTION		70 76
III.2 III.2	S CALCI	UL DE SOI	AUX ESTIMATEURS D'ERREURS	70 F 77
111.0	III 3 a	Formulat	ion hybride BEM-FEM	77
	III.3 h	Projectio	n du champ électrique sur les arêtes du maillage	78
	III.3.c	Calcul di	\mathbf{E}' avec un post-traitement intégral	79
III.4	LES E	STIMATEI	JRS D'ERBEURS	80
	III.4.a	Estimate	ur par valeurs movennes	80
	III.4.b	Estimate	ur énergétique	81
	III.4.c	Estimate	ur Ligurien	81
III.5	5 Erreu	ur de ré	FÉRENCE SUR UN MAILLAGE	82
III.6	6 Сомр.	ARAISON	ENTRE LES ERREURS ESTIMÉES ET LA RÉFÉRENCE	83
	III.6.a	Calcul de	l'erreur de référence	84
	III.6.b	Estimatio	on de l'erreur	85
		III.6.b-i	Formulation hybride BEM-FEM	85
		III.6.b-ii	Projection du champ électrique sur les arêtes du maillage .	87

	III.6. b-iii Calcul du champ électrique \mathbf{E}' avec un post-traitement in-	
	tégral	88
	III.6.c Temps de calcul et contraintes sur le calcul de \mathbf{E}'	90
	III.6.d Conclusion	90
	III.7 PROCÉDURE DE RAFFINEMENT ADAPTATIF	91
	III.7.a Stratégie de découpage des éléments	92
	III.8 Exemples d'application	93
	III.8.a Problème TEAM Workshop N°7	93
	III.8.b Busbars laminés	96
	III.9 Extension aux régions surfaciques	98
	III.9.a Cas région mince	98
	III.9.b Cas condition d'impédance de surface (SIBC)	99
	III.10 RAFFINEMENT ADAPTATIF DE MAILLAGE VERSUS INTÉGRATION AVEC POINTS	S
	de Gauss adaptatifs	99
	III.10.a Raffinement de maillage des conducteurs 1D	100
	III.10.a-i Écart d'intégration numérique par configuration de maillage	100
	III.10.a-iiÉcart d'intégration numérique de chaque configuration de	
	maillage par rapport à la configuration initiale "1 hexaèdre"	101
	III.10.b L'intégration numérique dans le cas d'un raffinement de maillage tétraédrique	e102
	III.1 ^C ONCLUSION	104
TV.		107
IV	IV 1 INTRODUCTION	107
	IV 2 Préconditionneur muit-cruie céométrique	100
	IV 3 PRINCIPE DU PRÉCONDITIONNEUR RI-CRULE CÉOMÉTRIQUE	110
	IV Λ Application du BLCRILLE AU SOLVEUR À MAILLES INDÉPENDANTES	113
	IV 5 Application du Bl-Grille au solveur à nœuds indépendants	114
	IV 5 a Opérateur de restriction B	114
	IV 5 a-i Potentiel électrique	115
	IV 5 a-ii Courant de branche	116
	IV 5 b. Opérateur de prolongement P	118
	IV 5 h-i Potentiel électrique	118
	IV.5.b-ji Courant de branche	119
	IV.5.c L'étape de lissage	120
	IV.5.d Impact du préconditionnement sur le solveur GMRes principal	121
	IV.6 APPLICATION DU BI-GRILLE AU SOLVEUR À NŒUDS INDÉPENDANTS MINI-	
	MALS	122
	IV.6.a Préconditionnement du système linéaire interne	122
	IV.6.a-i Opérateur de restriction	123
	IV.6.a-ii Opérateur de prolongement	123
	IV.6.b Préconditionnement du système linéaire principal	123
	IV.6.b-i Opérateur de restriction	124
	IV.6.b-ii Opérateur de prolongement	124
	IV.6.c L'étape de lissage	124
	IV.6.d Étude sur les lisseurs	125

IV.7 Conclusion	126
Conclusions et perspectives	129
ANNEXES	133
Annexe : Procédure de raffinement de maillage sur les régions	
SURFACIQUES	133
IV.8 Application aux régions minces	133
IV.8.a Exemple bobine et plaque mince	133
IV.8.b Exemple microstrip	134
IV.9 Application aux régions volumiques avec condition d'impédance	
DE SURFACE SIBC	136
Bibliographie	147
PUBLICATIONS	149

Introduction générale

Contexte

Dans l'industrie de l'automobile, des transports, de l'aéronautique ou de l'énergie, l'électronique de puissance est une technologie clé pour l'amélioration de l'efficacité de la conversion d'énergie électrique : elle permet en effet de réguler de manière optimale le flux d'énergie électrique au sein d'un système et entre systèmes. Les convertisseurs de puissance sont ainsi au cœur de nombreux systèmes mécatroniques : leur conception optimale est devenue essentielle et doit répondre aux contraintes de compatibilité électromagnétique (CEM) afin que ces convertisseurs ne perturbent pas le fonctionnement des autres dispositifs du système, comme par exemple, le réseau d'alimentation et les moteurs électriques.

Les exigences de performances électriques et thermiques demandées à ces convertisseurs sont donc de plus en plus importantes, amenant les concepteurs à introduire des nouvelles technologies pour y faire face; l'utilisation des composants semi-conducteurs à grand gap et des cartes à circuit imprimé (PCB de l'anglais Printed Circuit Board) avec composants enterrés augmente considérablement l'influence des connectiques électriques sur la performance des dispositifs et sur la qualité de l'énergie convertie. Ce terme « connectiques » indique l'ensemble des conducteurs métalliques qui relient les composants électroniques afin de permettre au courant de circuler d'un composant aux autres et pour imposer les bons niveaux de potentiel électrique aux bornes de ces composants. Au niveau PCB, les éléments principaux constituant la connectique sont les pistes, les plans de masse et d'alimentation, et les vias, auxquels il convient d'ajouter les dissipateurs thermiques et le boîtier métallique du convertisseur car des courants induits et des sauts de potentiel se développent en leur sein par couplages électromagnétiques. De plus, l'environnement autour du convertisseur ajoute d'autres éléments de connectique, comme les jeux de barres, les câbles qui amènent le courant, ainsi que la structure du véhicule (carrosserie pour les voitures, fuselage pour les avions, etc.) qui est souvent utilisée comme conducteur de retour. Tous ces éléments, dont la forme et la taille sont très disparates et variées, introduisent un comportement électromagnétique parasite qui a un impact direct sur les performances du convertisseur et sur sa tenue aux contraintes indiquées par les normes de la CEM. Les outils de simulation jouent un rôle essentiel pour comprendre et maîtriser les effets parasites. En outre, les grandeurs physiques globales et locales peuvent être calculées et optimisées, comme les pertes Joule par exemple.

Modélisation et simulation de dispositifs électromagnétiques

La principale raison d'effectuer des simulations et des modélisations numériques dans la recherche et l'industrie est la possibilité de tester des pièces ou des produits avant leur fabrication, afin de garantir la fonctionnalité de leurs systèmes électriques et leur conformité aux réglementations et directives en matière de CEM.

Actuellement dans l'environnement industriel et scientifique du génie électrique, l'une des méthodes les plus populaires pour la résolution des problèmes électromagnétiques en basse fréquence est la méthode des éléments finis (FEM), elle est bien connue et repose sur la forme différentielle des équations de Maxwell. Cette méthode initialement introduite par les mécaniciens a été largement étudiée et optimisée par la communauté scientifique de plusieurs disciplines, notamment celle de l'électromagnétisme, et a permis la résolution de plusieurs types de problèmes électromagnétiques (par exemple : électrostatique, magnétostatique, magnéto quasi-statique, pleine onde). Elle a l'avantage aussi de prendre en compte plusieurs sortes de matériaux électromagnétiques (homogènes et non-homogènes, isotropes et anisotropes, linéaires et non-linéaires). Au-delà de cela, elle offre aussi la possibilité d'être multi-physiques, et permet de faire des cosimulations diverses.

La particularité numérique de la FEM est qu'elle permet de résoudre les types de problèmes cités ci-dessus en ne calculant que les interactions de degrés de liberté (DOF) proches. Elle permet un assemblage rapide du système à résoudre, puisque seules les interactions proches doivent être calculées et stockées dans une matrice creuse. Malgré ses nombreux avantages, la FEM présente des limitations pour l'étude des dispositifs d'électronique de puissance où le volume d'air est généralement prédominant. En effet, la FEM nécessite de discrétiser à la fois les matériaux actifs (conducteurs, diélectriques et magnétiques) et l'air. Ces dispositifs nécessitants généralement une représentation minutieuse en trois dimensions, où des plans de symétries sont rarement présents, le temps requis pour la construction des modèles FEM et leur discrétisation est souvent considérable et nécessite une grande expertise comme sur la Figure 1. De plus, leur résolution devient vite très coûteuse en temps de calcul et lourde en mémoire vive à cause d'un nombre de DOF très élevé.

Pour essayer de contourner le problème de discrétisation de l'air, des méthodes dites de type intégral (ou à interactions globales) ont été développées. Il en existe plusieurs familles, parmi elles, on trouve la méthode des éléments de frontière (*Boundary Element Method* BEM), les méthodes intégrales de volume (*Volume Integral Method* VIM) dont fait partie la méthode basée sur un schéma équivalent à constantes localisées (*Partial Element Equivalent Circuit* PEEC), et la liste n'est pas exhaustive. L'avantage de ces méthodes est que seuls les domaines actifs sont discrétisés, le volume dans le cas de VIM et PEEC, la frontière surfacique dans le cas de BEM. Cependant, le principal inconvénient des méthodes à interactions globales est leur complexité de mise en œuvre et la génération de systèmes d'équations algébriques denses qui souffrent d'une complexité quadratique en termes de stockage en RAM et d'opérations arithmétiques de base, car comme leur nom l'indique, ces méthodes calculent toutes les interactions entre chaque DOF afin de résoudre un problème. Cet inconvénient a été dans le passé un frein majeur pour l'expansion des méthodes intégrales pour des applications complexes, puisque les capacités de calcul des ordinateurs étaient beaucoup plus faibles et plus limitées qu'aujourd'hui. Récemment, un rebond sur



FIGURE 1 – Maillages utilisés sur un module de puissance. (Gauche) Maillage du dispositif, de la boite infinie et de l'air requis pour la FEM (le maillage de l'air est caché pour plus de visibilité). (Droite) Maillage uniquement du dispositif utilisé par la méthode PEEC.

l'utilisation des méthodes intégrales a été observé dans la communauté scientifique, lié notamment au développement de plusieurs techniques de compression matricielle, car elles permettent une réduction importante sur le coût en mémoire et sur les temps de calcul.

On distingue parmi ces techniques de compression matricielle dans le domaine du calcul électromagnétique, la méthode multipolaire rapide (Fast Multipole Method FMM) qui est la plus populaire et la plus ancienne, ainsi que sa version en multi-niveaux adaptative (Adaptive Multi Level Fast Multipole method AMLFMM), qui a une complexité de $O(N \log(N))$, avec N le nombre de DOF. Cela est rendu possible grâce notamment à l'utilisation de solveurs itératifs tels que GMRes qui nécessite seulement des produits matrice-vecteur (A.x) permettant ainsi l'utilisation de ces méthodes de compression des interactions lointaines (pas d'accès explicite aux termes constituant la matrice A). En effet, l'utilisation de solveurs directs n'est pas envisageable en raison de ces matrices pleines, du nombre de degrés de liberté et des temps de calcul qui en découleraient. Des solveurs itératifs sont utilisés dès que le nombre de degrés de liberté devient supérieur à quelques milliers. L'étape de résolution itérative peut être très lourde, de plus le nombre d'itérations est très variable d'un problème à l'autre. D'autre nouvelles méthodes ont récemment été développées, elles sont principalement basées sur une représentation par matrices hiérarchiques couplées à l'approximation en croix adaptative (Adaptive Cross Approximation ACA) ou à l'approximation en croix hybride (Hybrid Cross Approximation HCA). De telles méthodes permettent une réduction considérable de la mémoire vive utilisée, et elles accélèrent considérablement les opérations algébriques, telles que l'assemblage, la multiplication matrice-vecteur, et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

Pour modéliser les effets parasites en basse et moyenne fréquence, on s'intéresse plus particulièrement à la méthode PEEC, qui est une méthode de modélisation d'interconnexion basée sur une formulation intégrale des équations de Maxwell. Chaque partie de la structure modélisée est représentée par une équation intégrale qui peut être interprétée par des composants circuits électriques équivalents. Cette méthode a été étudiée depuis les années 90 au G2ELab dans différents travaux de modélisation de structures d'électronique de puissance. Les premiers travaux ont conduit au développement du logiciel InCa3D implémentant la méthode PEEC, qui a pris le nom de Altair Flux PEEC actuellement. Le logiciel permet de représenter les comportements parasites sous la forme d'un circuit équivalent à constantes localisées composé de résistances, inductances, capacités et mutuelles. Flux PEEC comporte néanmoins des limitations qui restreignent encore son champ d'application, d'une part parce que les technologies utilisées en électronique de puissance ne cessent d'évoluer et d'autre part parce que les logiciels d'ingénierie assistée par ordinateur, notamment les outils de maillage, avec lesquels il doit s'interfacer, offrent aux utilisateurs la possibilité de gérer et manipuler des détails géométriques de plus en plus fins, alors que Flux PEEC demande une simplification avancée de la géométrie pour pouvoir mailler uniquement avec des éléments de type pavé (hexaèdre).

Objectifs de la thèse

Cette thèse propose d'améliorer les modèles et algorithmes du solveur Flux PEEC afin de lever les contraintes actuelles les plus limitantes pour effectuer des simulations électromagnétiques sur des dispositifs aux géométries plus complexes et fonctionnant à des fréquences plus élevées. Pour lever la restriction du maillage de type pavé, la méthode PEEC non-structurée est utilisée, elle introduit les éléments de maillage tétraédriques, triangulaire et autres. Cette méthode est le résultat des travaux de recherche au G2ELab, notamment les thèses de T-T. Nguyen [1] et J. Siau [2], où des fonctions de forme de facette ont été utilisées, permettant ainsi une représentation de circuit PEEC pour tous les types d'éléments de maillage. La disparité des types d'élément de maillage issues de différents types de régions telles que les régions filaires 1D, surfaciques minces 2D et volumiques 3D, crée une difficulté d'intégration numérique des intégrales singulières issues de la méthode PEEC. Cette thèse propose entre autres de développer des stratégies d'intégration afin d'assurer la précision des calculs pour les cas complexes.

De plus, la modélisation électromagnétique doit être de plus en plus soignée et le souci du détail devient important. La discrétisation minutieuse de ces dispositifs nécessite une expertise poussée de l'utilisateur et une connaissance préalable du comportement physique étudié, ce qui n'est généralement pas le cas. Le deuxième objectif de cette thèse est de fournir un outil de maillage adaptatif autonome contrôlé par un estimateur d'erreur qui permettra une discrétisation optimale des dispositifs étudiés. Ce développement a pour objectif de rendre la méthode PEEC beaucoup plus fonctionnelle et attrayante pour la modélisation de dispositifs complexes.

Cette thèse a comme troisième volet d'étudier la façon optimale d'écrire le système d'équations à résoudre et comment le préconditionner. Actuellement sur Flux PEEC, les courants de maille sont utilisés comme inconnues grâce à l'utilisation d'un algorithme de recherche des mailles indépendantes, l'approche est performante pour le traitement des aspects résistifs et inductifs des modèles PEEC. En revanche, la convergence du solveur itératif nécessite beaucoup plus d'itérations, à nombre égal d'inconnues, lorsque le circuit à résoudre contient également des capacités. Nous étudierons donc les performances de plusieurs écritures du système d'équations, et tenterons d'améliorer le conditionnement de ces systèmes par le développement de préconditionneurs adaptés.

- Pour répondre à ces objectifs, ce manuscrit de thèse est organisé en quatre chapitres :
- Le premier chapitre présente un état de l'art de la méthode PEEC à travers un historique des méthodes dites « structurées » et « non structurées ». Il présente un rappel des équations de Maxwell, des hypothèses simplificatrices classiques utilisées dans le domaine des basses et moyennes fréquences ainsi que des formulations PEEC non-structurées permettant la modélisation de dispositifs avec des matériaux conducteurs et diélectriques, volumiques et surfaciques, couplées et connectées à des circuits externes à constantes localisées.
- Le deuxième chapitre présente une étude sur l'amélioration de la précision et des performances des formulations PEEC. Une stratégie d'intégration avec points de Gauss adaptatifs est développée, permettant de réduire les erreurs d'intégration numérique liée aux intégrales singulières. Les performances de ces formulations sont étudiées à travers la présentation et la comparaison de différentes écritures du système d'équations à résoudre associées à différentes matrices de préconditionnement.
- Le troisième chapitre présente une procédure de raffinement adaptatif du maillage. Cette procédure est contrôlée par un critère d'estimation d'erreur sur le maillage liée à la sous-discrétisation. Ce critère repose sur l'écriture de deux solutions complémentaires ou "duales".
- Le quatrième chapitre, exploratoire, présente une technique de préconditionnement en multi-grille géométrique pour la méthode PEEC. La technique est mise en œuvre dans le but d'utiliser les grilles générées par la procédure de raffinement adaptatif du maillage à des fins de préconditionnement.

Chapitre I

Rappels sur la méthode PEEC

Alors que les flux financiers enrichissent certains et en appauvrissent d'autres, les flux de connaissance profitent à tout le monde.

Idriss Aberkane

Résumé

Dans ce chapitre, un état de l'art de la méthode PEEC est présenté à travers un historique des méthodes dites "structurée" et "non-structurée". Il englobe la présentation de formulations permettant de modéliser des matériaux conducteurs, diélectriques et magnétiques. Dans un second temps, les formulations que nous avons utilisées dans le cadre de cette thèse sont détaillées en incluant celles avec hypothèse région mince et celles avec une condition d'impédance de surface.

I.1 Introduction

La méthode PEEC apparaît être une candidate pertinente pour la modélisation des dispositifs d'électronique de puissance en trois dimensions. En sachant que ces dispositifs sont dominés par l'air, le choix de PEEC est justifié par sa capacité à discrétiser uniquement les parties actives du domaine et à les représenter par un circuit électrique équivalent, évitant ainsi le maillage de l'air qui est souvent paralysant lors de l'utilisation de la méthode des éléments finis.

Dans ce chapitre, un état de l'art de la méthode PEEC est présenté à travers un historique des méthodes dites "structurée" et "non-structurée". Il englobe la présentation de formulations permettant de modéliser des matériaux conducteurs, diélectriques et magnétiques. Puis nous détaillerons les formulations que nous avons utilisées dans le cadre de cette thèse.

I.2 État de l'art de la méthode PEEC

La méthode PEEC s'est avérée bien adaptée à l'analyse de nombreux dispositifs électromagnétiques, tels que les jeux de barres, PCB, interconnexions de circuits intégrés et bien d'autres [3, 4, 5]. Elle est une forme particulière de la méthode intégrale de volume, où chaque partie de la structure modélisée est discrétisée puis interprétée par des composants électriques équivalents, ainsi, le problème électromagnétique final est résolu sous forme d'un circuit électrique équivalent et peut éventuellement être connecté à un circuit ou des composants externes.

La méthode PEEC structurée [6] a été la première à être développée. Le nom « structurée » vient du fait que la méthode utilise des maillages de type hexaédrique où chaque élément de maillage ne peut être que parallèle ou perpendiculaire à un autre élément de la même partie connexe. La méthode PEEC non-structurée [7] quant à elle, est plus récente, elle a permis l'utilisation de plusieurs types de maillages (Hexaèdres, tétraèdres, quadrangles, triangles...), ouvrant ainsi un champ d'application plus large.

Pour illustrer la différence de discrétisation des dispositifs entre les méthodes PEEC structurée et non structurée, la Figure I.1 montre un module de puissance avec un maillage de type structuré issu du module PEEC du logiciel Altair **Flux** \bowtie [8], et un maillage de type non structuré tétraédrique.

Ces deux types de méthode seront présentées un peu plus en détail dans les sections suivantes.

I.2.a La méthode PEEC structurée

La méthode PEEC structurée a été introduite dans le début des années 70 par Albert E. Ruehli [6], il avait compris les avantages de décomposer un problème compliqué en petites partitions de base, pour lesquelles les inductances pouvaient être calculées tel qu'il était présenté par Hoer & Love en 1965 [9], ceci afin de modéliser le comportement inductif d'une structure complète, on retrouvait ces inductances sous le nom de « inductances partielles ». Bien qu'initialement la méthode calculait uniquement des inductances partielles propres et mutuelles, elle a été étendue pour le calcul des capacités parasites offrant ainsi un schéma



FIGURE I.1 – Maillage d'un module de puissance, (à gauche) maillage PEEC structuré, (à droite) maillage PEEC non-structuré

RLC complet [10, 11]. En 1990 dans [12], une nouvelle approche pour prendre en compte les capacités parasites avec des coefficients de potentiels a été présentée. Cette nouvelle approche a permis un gain de temps de calcul et en mémoire vive.

Dans la formulation originale, uniquement les matériaux conducteurs sont pris en compte. Une extension pour inclure les matériaux diélectriques a été faite dans [13]. A mesure que les fréquences de fonctionnement augmentent et que les dimensions des appareils diminuent, le besoin d'avoir une formulation en équations de Maxwell pleine onde (*Full-wave Maxwell equations*) est né. La formulation PEEC retardée a été présentée dans [14, 15] pour répondre à ce besoin. Une autre extension pour les matériaux magnétiques a été présentée dans [16, 17] sous hypothèse quasi-statique.

La principale limitation de la méthode PEEC structurée est la discrétisation et l'interpolation utilisées. Uniquement des éléments de type pavé (hexaèdres droits) sont utilisés avec des fonctions de forme d'ordre zéro (courant électrique constant par élément, et potentiel électrique constant par cellule externe pour la partie capacitive). Ces éléments devaient être parallèles ou perpendiculaires les uns aux autres, impliquant au final un maillage structuré (*Manhattan type*) comme présenté sur l'image de gauche de la Figure I.1. Des travaux ont été effectués afin de réduire cette limitation [18, 19, 20], mais elle reste encore très contraignante.

Récemment des chercheurs se sont intéressés à la possibilité de faire autrement que l'utilisation historique d'un maillage structuré. Cela avait permis l'émergence de nouvelles formulations permettant d'utiliser un maillage non-structuré et des fonctions de forme autres que celles d'ordre zéro. On nomme cette nouvelle méthode "PEEC non-structurée".

I.2.b La méthode PEEC non-structurée

Afin de pallier les limitations de la méthode PEEC structurée, et cela dans le but de pouvoir modéliser des dispositifs électromagnétiques de plus en plus complexes. Des avancées considérables ont été faites dans ce sens. En partant des travaux de E. Tonti sur les relations duales entre les variables globales et les éléments d'espace-temps [21], F. Freschi *et Al* ont développé dans [22] une nouvelle formulation PEEC surfacique basée sur une nouvelle technique de discrétisation avec des concepts topologiques de type primal/dual, permettant ainsi l'utilisation des éléments de type triangle et quadrangle. Cette avancée a permis d'utiliser des fonctions de forme d'ordre supérieur, permettant ainsi une meilleure interpolation des inconnues. Dans [23], [7] et [24], une approche généralisée aux éléments volumiques a été développée, elle permet d'utiliser tout type d'éléments de maillage (e.g. tétraèdres, hexaèdres, prismes...), et aussi par conséquent de négliger toute hypothèse géométrique simplificatrice sur la structure étudiée. Dans ces dernières références, la principale inconnue (la densité de courant) est interpolée linéairement avec des éléments de facette du premier ordre [25]. Ces fonctions de forme de facette permettent d'assurer une continuité naturelle de la composante normale de la densité de courant entre les éléments du maillage, et donc la conservation du courant.

D'autres formulations ont été développées, G. Meunier *et Al* ont proposé dans [24, 26] des formulations qui permettent de modéliser les matériaux magnétiques en utilisant une représentation circuit, et également J. Siau *et Al* dans [27, 2] pour la prise en compte des effets capacitifs parasites et des matériaux diélectriques. Plus récemment, R. Torchio dans [28, 29, 30] propose une extension des travaux précédents pour la modélisation en transitoire et aux problèmes électromagnétiques stochastiques.

Dans [31], une formulation permettant de faire une hypothèse de région mince a été proposée pour les matériaux conducteurs et magnétiques. Les effets dynamiques à travers l'épaisseur de la région sont modélisés par une conductivité et une réluctivité complexes équivalentes sur une discrétisation en éléments surfaciques. Elle permet de réduire significativement le nombre de degrés de liberté du système et d'augmenter la précision des calculs par rapport à une modélisation volumique classique dans ce cas. En effet, une description volumique dans le cas d'une plaque de faible épaisseur nécessite un très grand nombre de mailles afin de conserver une qualité de maille suffisante pour une bonne précision de calcul. Dans le cas des plaques avec une épaisseur importante ou des dispositifs avec un volume important, l'article [32] présente une formulation très innovante et prometteuse pour la méthode PEEC non structurée qui intègre le principe de la condition limite d'impédance de surface (Surface Impedance Boundary Condition SIBC). Cette condition permet de discrétiser uniquement les bords du dispositif étudié en éléments surfaciques, mais l'hypothèse reste limitée aux cas avec une épaisseur de peau très faible (i.e. le courant électrique circulant majoritairement sur les bords). Lorsque cette hypothèse est adaptée, l'approche SIBC devient très attractive dans son domaine d'application en termes de performances de calcul par rapport à une discrétisation volumique classique.

I.3 Formulations PEEC non-structurées

Dans cette section, les formulations introduites dans la section précédente dans le contexte de la méthode PEEC non-structurée sont présentées. Compte tenu du choix de ne pas considérer les matériaux magnétiques dans cette thèse, les formulations les prenant en compte ne sont pas présentées. Les effets de retard engendrés par la propagation d'onde sont négligés dans ce qui suit, nous faisons l'hypothèse d'un noyau de Green statique issu de la solution de l'équation de Laplace.

Cette section est divisée en cinq parties, la première fait une introduction à la modélisation électromagnétique en basse et moyenne fréquences. La deuxième présente les équations de Maxwell et des développements permettant de formuler un problème électromagnétique avec des équations de la méthode intégrale de volume. La troisième présente une formulation à très basses fréquences où seuls les effets résistifs et inductifs sont pris en compte, et où par conséquent uniquement les conducteurs sont considérés. La quatrième partie présente un complément à la formulation précédente afin de prendre en compte les effets capacitifs dans le cas des conducteurs. La dernière partie présente une formulation quasi complète (sans propagation) pour prendre en compte les effets résistifs, inductifs et capacitifs avec des matériaux conducteurs et diélectriques.

Commençons donc par une introduction à la modélisation électromagnétique en basse et moyenne fréquences pour les dispositifs d'électronique de puissance.

I.3.a Introduction à la modélisation électromagnétique en basse et moyenne fréquence

Dans la modélisation des dispositifs d'électronique de puissance, des approximations peuvent être faites, telles que, considérer un régime quasi-statique quand la longueur d'onde est bien supérieure devant les dimensions du dispositif, les phénomènes de retard de propagation d'onde au sein des structures sont par conséquent négligés. A faible fréquence, les courants de déplacement dans les matériaux conducteurs tels que le cuivre sont négligés. Cela implique un déplacement instantané des charges électriques.

Par contre, un phénomène nommé "effet de peau" ne doit pas être négligé, car il pousse le courant électrique à circuler à la surface des conducteurs. Cela implique une augmentation de la résistance de ces conducteurs. Ce phénomène dépend de la fréquence, plus elle est élevée, plus l'effet sera important. Dans ce cas, la densité de courant **J** décroît de façon exponentielle à partir de sa valeur \mathbf{J}_S à cette surface en fonction de la profondeur r dans le dispositif par rapport à la surface. **J** est exprimé sous la forme suivante :

$$\mathbf{J}\left(r\right) = \mathbf{J}_{S}e^{-\frac{i}{\delta}} \tag{I.1}$$

avec : δ est l'épaisseur de peau qui est définie comme la distance dans la profondeur d'un conducteur où 63% de la densité de courant circule. Elle peut être calculée par l'expression suivante :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{I.2}$$

Avec :

— ω la pulsation angulaire $2\pi f (rad/s)$

- σ la conductivité électrique du matériau (S/m)
- μ la perméabilité magnétique du matériau (H/m)
- -f la fréquence (Hz)

En modélisation électromagnétique, afin de bien prendre en compte l'effet lié à l'épaisseur de peau, le maillage doit être adapté en conséquence en fonction de la fréquence. Les observations faites là-dessus concluent qu'au minimum une discrétisation avec 2 ou 3 éléments de maillage dans cette épaisseur est nécessaire pour une bonne interpolation à l'ordre 2 ou 1 respectivement en éléments finis.

Pour se positionner et définir une gamme de fréquence où l'hypothèse d'un régime quasi-statique est applicable, la longueur d'onde λ doit être calculée en prenant en compte chaque type de matériau présent dans le dispositif. On présente l'expression de λ telle que :

$$\lambda = \frac{c_0}{f\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{I.3}$$

avec :

 $- c_0$ la vitesse de la lumière dans le vide 3E8 (m/s)

— ϵ_r la permittivité électrique relative du matériau

— μ_r la perméabilité magnétique relative du matériau

Si on prend le cuivre comme exemple, la Table I.1 ci-dessous présente l'évolution de λ et δ en fonction de la fréquence.

Fréquence	$50~\mathrm{Hz}$	$1 \mathrm{~kHz}$	$10 \mathrm{~kHz}$	1 MHz	10 MHz	1 GHz
Longueur d'onde λ	6000 km	$300 \mathrm{km}$	30 km	300 m	30 m	300 mm
Épaisseur de peau δ	9,42 mm	2,1 mm	666,7 $\mu {\rm m}$	66,7 $\mu {\rm m}$	$21 \ \mu m$	$2 \ \mu \mathrm{m}$

TABLE I.1 – L'évolution des ordres de grandeurs de λ et δ du cuivre

La limite de validité du régime quasi-statique est définie par le rapport entre λ et d_{max} (le diamètre de la sphère contenant la structure géométrique d'intérêt) qui doit être supérieur à 10 ($\frac{\lambda}{d_{max}} > 10$) [33], dans ce cas on dit que le dispositif étudié est "électriquement petit (*electrically small*)". A titre d'exemple, un dispositif en cuivre d'une taille de 30 mm ne peut pas être modélisé au-delà de 1 GHz de fréquence avec l'hypothèse quasi-statique, car l'effet de déphasage crée par la propagation doit être pris en considération.

I.3.b Équations de Maxwell

La théorie des champs électromagnétiques et les équations de Maxwell forment la base de tous les phénomènes électriques. Ces équations permettent de décrire complètement le comportement macroscopique des champs électrique et magnétique, des charges, et des courants électriques.

Les équations de Maxwell s'écrivent sous la forme locale suivante :

— Maxwell-Faraday :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{I.4}$$

— Maxwell-Ampère :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{I.5}$$

— Maxwell-Thomson :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{I.6}$$

— Maxwell-Gauss :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{I.7}$$

Avec :

— **E** le champ électrique (V/m)

- **B** l'induction magnétique (T)
- **H** le champ magnétique (A/m)
- J la densité de courant électrique (A/m^2)
- **D** l'induction électrique (C/m^2)
- ho la densité de charge électrique (C/m³)

Ces équations sont complétées par des relations constitutives qui régissent le milieu parcouru par les champs électromagnétiques. Avec l'hypothèse de matériaux non-magnétiques, homogènes, linéaires et isotropes, les relations constitutives s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{I.8}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{I.9}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{I.10}$$

Avec :

- σ la conductivité électrique du milieu (S/m)
- μ la perméabilité magnétique du milieu (H/m)
- ε la permittivité électrique du milieu (F/m)
- **P** la polarisation diélectrique en présence de matériau diélectrique (C/m²)

 σ , μ et ε sont des paramètres constitutifs. Dans le vide, la perméabilité magnétique et la permittivité électrique prennent les valeurs constantes de $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m et $\varepsilon_0 = 8,85418781 \cdot 10^{-12}$ F/m respectivement.

De l'équation (I.5) découle l'équation de conservation de charge suivante :

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \tag{I.11}$$

Il est possible d'introduire des potentiels dont dérivent les champs électromagnétiques. Ils s'expriment à partir d'intégrales limitées aux milieux matériels. On note à partir de l'équation (I.6), que l'induction magnétique **B** dérive d'un potentiel vecteur magnétique **A** telle que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{I.12}$$

Et à partir de l'équation (I.4), on obtient l'équation suivante :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \tag{I.13}$$

Avec V le potentiel scalaire électrique.

Le couple de potentiels (A, V) n'est pas unique. Pour assurer l'unicité du couple, on introduit la jauge de Lorenz qui est sous la forme suivante :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{I.14}$$

Dans un document interne au G2ELab [23], G. Meunier a formulé à l'aide de la jauge (I.14) la solution pour le couple (A, V) comme suit :

— Potentiel vecteur magnétique A :

A partir des équations (I.5), (I.9) et (I.10), on a ce qui suit :

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}\right) = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V\right)$$
$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$
$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

avec en rouge la jauge (I.14) qui est nulle. On arrive à l'équation suivante :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \tag{I.15}$$

— Potentiel scalaire électrique V :

à partir des équations (I.11), (I.10) et (I.13), on a ce qui suit :

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \left(-\nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \left(\nabla V + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)$$

De l'équation (I.14), on a $\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot (\nabla V) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right)$$

On arrive à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \tag{I.16}$$

Les équations (I.15) et (I.16) représentent le système obtenu en considérant la jauge de Lorenz. Les deux potentiels **A** et V sont associés à l'opérateur d'Alembertien $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}$. La résolution générale de cette équation conduit à des solutions faisant intervenir des retards liés à la propagation d'onde $(t + \frac{r}{c})$ dans l'établissement des potentiels. Si on considère comme présenté précédemment que les phénomènes de propagation sont négligeables, les équations (I.15) et (I.16) prennent la forme de l'équation de Poisson, telle que :

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \, \mathbf{J}_P \tag{I.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta V \right) = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{J}_P \tag{I.18}$$

avec $\mathbf{J}_P = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

Considérons une fonction vectorielle $\Psi(x, y, z)$ dans un espace euclidien tridimensionnelle, son Laplacien s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi^x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi^y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi^z}{\partial z^2} = 0 \tag{I.19}$$

La fonction de Green statique est la solution de l'équation de Laplace, elle s'exprime sous la forme suivante :

$$G_0(P,Q) = \frac{1}{4\pi r}$$
(I.20)

avec r la distance entre le point d'intégration Q et le point d'observation P dans l'espace. Par conséquent, les solutions des deux équations (I.17) et (I.18) s'écrivent alors :

$$\mathbf{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_{C+D}} \frac{\mathbf{J}_P(Q)}{r} \mathrm{d}\Omega \tag{I.21}$$

$$\frac{\partial V(P)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega_{C+D}} \mathbf{J}_P(Q) \cdot \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\Omega \tag{I.22}$$

avec Ω_C et Ω_D le domaine conducteur et le domaine diélectrique respectivement.

A noter que l'utilisation de la jauge de Lorenz permet d'atteindre une solution avec deux équations complètement découplées entre elles, il est possible d'utiliser une autre jauge (jauge de Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ par exemple) mais les expressions de \mathbf{A} et V seront plus compliquées et elles seront couplées entre elles.

Les solutions (I.21) et (I.22) permettent de résoudre un problème électrique et diélectrique en les réinjectant dans l'équation (I.13). Par conséquent, il est possible d'écrire une équation intégrale de volume sur Ω_C et Ω_D qui fait intervenir une seule inconnue \mathbf{J}_P , c'est ce que nous présenterons dans la suite du manuscrit.

I.3.b-i Le domaine fréquentiel

Dans ce manuscrit de thèse, les problèmes harmoniques sont considérés. L'ensemble des équations de Maxwell dépendantes de la fréquence est obtenu en utilisant la transformée de Fourrier ce qui permet de remplacer $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ par $(j\omega x)$ ($\omega = 2\pi f$ est la pulsation, f étant la fréquence d'excitation) dans (I.4), (I.5), et (I.11).

Les calculs dans le domaine fréquentiel correspondent à des conditions de régime permanent dans lesquelles les champs instantanés se rapportent à leurs homologues fréquentiels, par exemple, $H(t) = \Re (\mathbf{H}e^{j\omega t})$, et donc tous les champs d'excitation sont sinusoïdaux.

Les équations (I.4), (I.5), (I.11) et (I.13) peuvent donc être réécrites sous la forme suivante :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \tag{I.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} \tag{I.24}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{J} + j\omega \mathbf{D}) = 0 \tag{I.25}$$

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V \tag{I.26}$$

Dans ce qui suit, nous allons passer à la présentation des formulations de la méthode PEEC non-structurée.

I.3.c Formulation PEEC inductive RLM

I.3.c-i Cas volumique

Nous rappelons la formulation inductive qui a été présentée dans la thèse de Thanh-Trung Nguyen [7, 1] en quasi-statique. Le sigle RLM signifie : R pour résistance, L Inductance et M Mutuelle inductance.

Un domaine volumique conducteur et non-magnétique Ω_c est considéré, il est entouré d'air tel que présenté sur la Figure I.2.



FIGURE I.2 – Domaine d'un problème simplifié

En basse fréquence, on suppose qu'il est possible de négliger les courants de déplacement, on peut le démontrer pour simplicité dans le domaine temporel par les expressions suivantes, à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (I.5), sa divergence donne [34] :

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

À partir des relations constitutives (I.8) et (I.10), on a $(\mathbf{J} = \frac{\epsilon}{\sigma} \mathbf{D})$, on remplace cette expression de \mathbf{J} dans l'équation précédente, on obtient par conséquent :

$$\frac{\partial \left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \left(\nabla \cdot \mathbf{D} \right) = 0$$

avec l'équation de Maxwell-Gauss (I.7), on a $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon}\rho = 0$. La solution de cette équation différentielle s'écrit comme suit :

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}t}$$

Pour une fréquence de 50Hz par exemple, la période du signal d'excitation est de 0,02 secondes. La constante de temps $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ est très inférieure à la période pour les conducteurs en basse fréquence, par exemple, pour le cuivre $\tau = 1,50.10^{-19} s \ll 0,02 s$. Le temps d'établissement des charges est très faible, et donc $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ peut être négligé. L'expression de \mathbf{J}_P devient alors :

$$\mathbf{J}_P = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \approx \mathbf{J} \tag{I.27}$$

Et l'équation (I.25) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{I.28}$$

On suppose que la contribution des courants capacitifs peut être négligées (une vérification de cette hypothèse a été faite dans la thèse de J-M Guichon [34]). On impose alors sur les faces du bord du domaine Ω_c que les courants sortants sont nuls de la façon suivante :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{I.29}$$

où ${\bf n}$ est la normale sortante.

On récrit l'équation (I.21) en ne considérant que le domaine Ω_c sous la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{J}}{r} \mathrm{d}\Omega_C \tag{I.30}$$

En introduisant la loi de comportement linéaire (I.8) et l'équation (I.30) dans (I.26), on obtient :

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{J}}{r} \mathrm{d}\Omega_c - \nabla V \tag{I.31}$$

Dans le cas où on a une bobine comme source d'excitation extérieure, on doit rajouter un terme à l'équation (I.31) qui représente un terme de couplage entre le domaine conducteur et le domaine inducteur Ω_0 à travers le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A}_0 , son expression est la suivante :

$$\mathbf{A}_{0} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega_{0}} \frac{\mathbf{J}_{0}}{r} \mathrm{d}\Omega_{0} \tag{I.32}$$

où \mathbf{J}_0 est le courant électrique qui alimente la bobine d'excitation.

Discrétisation

Comme proposé dans [7], la densité de courant \mathbf{J} est discrétisée avec des fonctions de forme de facette du premier ordre, elles permettent une meilleure interpolation des inconnues, et aussi l'utilisation de différents types de maillages. Ce choix est justifié avec l'équation (I.28) qui montre que \mathbf{J} est à flux conservatif. \mathbf{J} s'écrit donc :

$$\mathbf{J} = \sum_{i} \mathbf{w}_{i} \mathbf{I}_{i} \tag{I.33}$$

où \mathbf{w}_i est la fonction de forme de facette et I_i le courant traversant la face i.

Propriétés des fonctions de forme de facettes :

Les fonctions de forme facettes conservent leur composante normale à travers chaque facette du maillage. Nous avons :

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{s_f} \tag{I.34}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \pm \frac{1}{v_e} \tag{I.35}$$

avec **n** le vecteur normal, s_f la superficie de la facette f et v_e le volume de l'élément volumique. Les signes \pm dépendent de l'orientation du vecteur normal **n**.

La Figure I.3 montre le champ vecteur créé par la fonction de forme de facette f.



FIGURE I.3 – Fonction de forme de facette associée à la facette {i,j,k}

En appliquant une procédure de projection standard de Galerkin à (I.31) et en utilisant **w** comme fonctions de projection, le système matriciel suivant est obtenu :

$$([\mathbf{R}] + j\omega [\mathbf{L}]) \{\mathbf{I}\} = \{\mathbf{U}\}$$
(I.36)

Avec :

$$[\mathbf{R}]_{i,j} = \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\sigma} \mathrm{d}\Omega_c \tag{I.37}$$

$$[\mathbf{L}]_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{w}_j}{r} d\Omega_c d\Omega_c$$
(I.38)

$$\{\mathbf{U}\}_i = -\int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i \nabla V \mathrm{d}\Omega_c \tag{I.39}$$

Le système matriciel (I.36) peut être vu comme un système de circuit classique $\mathbf{ZI} = \mathbf{U}$, où une représentation équivalente de circuit électrique est obtenue, dont les branches électriques sont les facettes du maillage, et les nœuds électriques de ces branches sont les barycentres des éléments volumiques, c.-à-d. le circuit électrique équivalent est construit sur le maillage duale, comme le présente la Figure I.4.

Afin de le résoudre le système matriciel (I.36), un solveur circuit est utilisé. Il permet à l'aide des lois des nœuds et des mailles de mettre le système matriciel en équations de circuit électrique, cela à partir des inconnues issues de la base des branches du maillage dual, sur une autre base qui satisfait ces lois de Kirchhoff, et par conséquent satisfaire l'équation (I.11). En plus de ça, l'utilisation d'un solveur circuit permet de faire naturellement un couplage avec des composants de circuit tels que des résistances, capacités, inductances et sources actives. Cette étape de résolution par solveur circuit sera détaillée dans le chapitre II.

Définition de U du système (I.36):

En utilisant le théorème de divergence, l'équation (I.39) devient :

$$-\mathbf{U}_{i} = \int_{\Omega_{c}} \mathbf{w}_{i} \nabla V \mathrm{d}\Omega_{c} = \int_{\Gamma_{c}} \left(\mathbf{w}_{i} \cdot \mathbf{n}\right) V \mathrm{d}\Gamma_{c} - \int_{\Omega_{c}} \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_{i}\right) V \mathrm{d}\Omega_{c}$$
(I.40)

Avec Γ_c le bord du domaine Ω_c . L'équation (I.40) peut être développée en deux cas, le premier est quand on l'applique sur une facette interne du maillage, et le deuxième cas

est quand on l'applique sur une facette du bord Γ_c . Commençons par le premier cas où la facette est interne au maillage, on a :

$$\mathbf{U}_{i} = \int_{\Omega_{c}} \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_{i} \right) V \mathrm{d}\Omega_{c} \tag{I.41}$$

En utilisant la propriété définie par l'équation (I.35), et en sachant que \mathbf{w}_i est partagée par deux éléments volumiques e_1 et e_2 , on trouve :

$$\mathbf{U}_{i} = \int_{e_{1}} \frac{V}{v_{e_{1}}} \mathrm{d}\Omega_{c} - \int_{e_{2}} \frac{V}{v_{e_{2}}} \mathrm{d}\Omega_{c} \tag{I.42}$$

ce qui représente une différence de potentiels moyens entre deux éléments volumiques internes. D'un point de vue circuit, on peut assimiler cela à la tension de la branche électrique qui relie ces deux éléments, comme les lignes noires de la Figure I.4.

Considérant le deuxième cas, la facette n'appartient qu'à un seul élément volumique, noté e par exemple. A partir de l'équation (I.40) et connaissons les propriétés (I.34) et (I.35). On écrit alors :

$$-\mathbf{U}_{i} = \int_{\Gamma_{c}} \frac{V}{s_{f_{i}}} \mathrm{d}\Gamma_{c} - \int_{e} \frac{V}{v_{e}} \mathrm{d}\Omega_{c}$$
(I.43)

qui représente également la différence de potentiel entre une face de bord et son support volumique intérieur, comme le montre les lignes grises sur la Figure I.4.



FIGURE I.4 – Représentation du circuit équivalent en PEEC non-structurée inductive d'une partie du maillage d'une plaque conductrice. (gauche) Le conducteur maillé avec des Prismes. (droite) Le circuit équivalent, où les inductances mutuelles sont cachées.

Pour compléter la définition du second membre du système (I.36), la tension \mathbf{U}_i sur les bords est nulle si la face *i* n'est pas connectée à un circuit externe (source de courant, source de tension, ou composants passifs), ou s'il n'y a pas de prise en compte des effets capacitifs.

I.3.c-ii Cas des régions minces

Dans les dispositifs d'électronique de puissance, on est souvent confronté au cas où les dimensions suivant deux directions (les axes X & Y) sont largement supérieures à celles suivant la troisième (l'axe Z), ce traduisant par des régions conductrices minces, comme les PCB par exemple. Ainsi, l'utilisation d'un maillage volumique pour modéliser ces régions minces conduit à un grand nombre d'éléments afin de réduire les erreurs numériques. De plus, lorsque la fréquence est élevée, l'épaisseur de peau devient beaucoup plus fine que l'épaisseur suivant Z, cela conduit à une augmentation de la taille du maillage nécessaire pour modéliser correctement ce phénomène.

Dans les travaux de Thanh-Trung Nguyen [35, 1], une formulation qui fait l'hypothèse de région conductrice mince a été proposée. Le principe est de remplacer la région par une surface médiane conductrice avec une conductivité complexe. Cela permet de prendre en compte les effets de peau du courant électrique, permettant ainsi une réduction drastique en nombre d'éléments tout en améliorant la précision.

La Figure I.5 présente une région conductrice mince, avec S_1 et S_2 les deux surfaces de bord en contact avec l'air, S la surface médiane de la région, e l'épaisseur de la région, \mathbf{J}_{S_1} et \mathbf{J}_{S_2} la densité de courant sur la surface S_1 et S_2 respectivement, \mathbf{J}_m est la densité de courant moyenne circulant dans la plaque S (surface médiane).



FIGURE I.5 – Exemple de région conductrice mince, les lignes en pointillées représentent le périmètre de la surface médiane S.

On défini \mathbf{J}_m par :

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \mathbf{J}_z \mathrm{d}z \tag{I.44}$$

L'intégral de \mathbf{J} peut donc s'écrire telle que :

$$\int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{J}}{r} \mathrm{d}\Omega \approx e \int_S \frac{\mathbf{J}_m}{r} \mathrm{dS}$$
(I.45)

Deux cas peuvent être identifiés pour calculer la densité de courant moyenne \mathbf{J}_m , ils dépendent de l'épaisseur e et de l'épaisseur de peau δ :

- Le premier cas est celui lorsque l'épaisseur de peau est très grande par rapport à l'épaisseur $e \ (e \ll \delta)$.
- Le second est obtenu lorsque l'épaisseur de peau est comparable ou inférieure à l'épaisseur $e \ (e \ge \delta)$.

Les équations sous hypothèse région mince se présentent comme suit :

1. Cas $e << \delta$:

Ce cas implique que la densité de courant et le champ électrique sont uniformes le long de l'axe Z. L'équation (I.31) devient alors [1, 35] :

$$\frac{\mathbf{J}_m}{\sigma} = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e \int_S \frac{\mathbf{J}_m}{r} \mathrm{dS} - \nabla V_m \tag{I.46}$$

avec $V_m = (V_{S1} + V_{S2})/2$, où V_{S1} et V_{S2} représentent les potentiels électriques sur S1 et S2 respectivement, et V_m le potentiel moyen sur S.

Afin de discrétiser cette formulation, les fonctions de formes de facette présentées dans (I.33) doivent être adaptées à la région mince surfacique.

Discrétisation

En surfacique, la fonction de forme de facette n'est pas associée à une facette du maillage, mais plutôt à une arête comme le montre la Figure I.6. Elle se différencie d'une fonction de forme d'arête à travers une rotation de $\pi/2$ par rapport à cette dernière, on la note $\mathbf{w}_i^{(s)}$, ces fonctions sont connues sous le nom de fonctions RWG.



FIGURE I.6 – Fonction de forme de facette en surfacique :

- (a) fonction associée à l'arête $\{i, j\}$
- (b) fonction associée à l'arête $\{j, k\}$
- (c) fonction associée à l'arête $\{k, i\}$

Propriétés des fonctions de forme de facettes en surfacique :

La dégénérescence de la fonction de forme de facette du volume vers la surface ne lui fait pas perdre sa propriété première de conservation de la composante normale, ce sont juste les équations (I.34) et (I.35) qui changent par :

$$\mathbf{w}^{(s)} \cdot \mathbf{n} = \pm \frac{1}{l_a} \tag{I.47}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^{(s)} = \pm \frac{1}{s_f} \tag{I.48}$$

avec **n** le vecteur normal à l'arête a dans le plan de la facette f, l_a la longueur de a et s_f la superficie de f.

La densité de courant moyenne \mathbf{J}_m est discrétisée à l'aide de $\mathbf{w}^{(s)}$ comme suit

$$\mathbf{J}_m = \frac{1}{e} \sum_i \mathbf{w}_i^{(s)} \mathbf{I}_i^{(s)} \tag{I.49}$$

Avec $\mathbf{I}_{i}^{(s)}$ le courant traversant la face dégénérée *i*. En suivant la même procédure que précédemment, nous appliquons une discrétisation standard de Galerkin avec les fonctions de forme de facettes $\mathbf{w}^{(s)}$, le résultat est le suivant :

$$\left(\mathbf{R}^{(s)} + j\omega\mathbf{L}^{(s)}\right)\mathbf{I}^{(s)} = \mathbf{U}^{(s)}$$
(I.50)

Avec :

$$\mathbf{R}_{i,j}^{(s)} = \int_{S} \frac{\mathbf{w}_{i}^{(s)} \mathbf{w}_{j}^{(s)}}{e\sigma} \mathrm{d}S \tag{I.51}$$

$$\mathbf{L}_{i,j}^{(s)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \mathbf{w}_i^{(s)} \int_S \frac{\mathbf{w}_j^{(s)}}{r} dS \mathrm{d}S$$
(I.52)

$$\mathbf{U}_{i}^{(s)} = -\int_{S} \mathbf{w}_{i}^{(s)} \nabla V_{m} \mathrm{d}S \tag{I.53}$$

Mise à part la multiplication de la conductivité par l'épaisseur, ce système est très similaire à celui obtenu en volumique. Cette écriture a peu d'intérêt dans le cas $e \ll \delta$ car avec un maillage hexaédrique par exemple, un seul élément est suffisant suivant l'épaisseur e. Le second cas $(e \ge \delta)$ permet de montrer la pertinence de cette approche.

2. Cas $e \geq \delta$:

Dans ce cas, la densité de courant n'est plus uniforme suivant l'axe Z, l'effet de peau n'est pas négligeable. Une réécriture de \mathbf{J}_m a été proposée à travers une expression analytique qui prend en compte de l'effet de peau dans l'épaisseur en considérant des plans infinis, avec [1, 35] :

$$\mathbf{J}_m = G \frac{\mathbf{J}_{S_1} + \mathbf{J}_{S_2}}{2} \tag{I.54}$$

où G est :

$$G = \frac{2\delta \tanh\left(\frac{e(1+j)}{2\delta}\right)}{e\left(1+j\right)} \tag{I.55}$$

L'équation (I.46) devient alors :

$$\frac{\mathbf{J}_m}{G\sigma} = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} e \int_S \frac{\mathbf{J}_m}{r} \mathrm{dS} - \nabla V_m \tag{I.56}$$

avec $V_m = (V_{S1} + V_{S2})/2$. En utilisant la même discrétisation (I.49), seule la matrice résistance $\mathbf{R}^{(s)}$ change dans le système (I.50) en prenant la nouvelle forme suivante :

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i,j}^{(s)} = \int_{S} \frac{\mathbf{w}_{i}^{(s)} \mathbf{w}_{j}^{(s)}}{eG\sigma} \mathrm{d}S$$
(I.57)

Ainsi, traiter des conducteurs très minces avec l'une des deux dernières formulations réduit la complexité du problème, les temps de calcul sont moindres car il y a moins d'éléments, et par conséquent, ces formulations fournissent une solution plus efficace. La résolution se fait aussi par un solveur circuit comme en volumique. On complète le système (I.50) par la définition de $\mathbf{U}_i^{(s)}$, elle est équivalente à celle faite précédemment pour le cas volumique, mais présente quelques différences mineures. En utilisant le théorème de divergence sur l'équation (I.53), on a :

$$\mathbf{U}_{i}^{(s)} = -\int_{\Gamma_{c}^{(s)}} \left(\mathbf{w}_{i}^{(s)} \cdot \mathbf{n}\right) V \mathrm{d}\Gamma_{c}^{(s)} + \int_{S} \nabla \cdot \mathbf{w}_{i}^{(s)} V_{m} \mathrm{d}S$$
(I.58)

avec $\Gamma_c^{(s)}$ le bord de la région surfacique S.

Pour le premier cas, l'arête i est une arête interne partagée par deux faces f_1 et f_2 . En utilisant la propriété (I.48), on a :

$$\mathbf{U}_{i}^{(s)} = \int_{f_{1}} \frac{V_{m}}{s_{f_{1}}} \mathrm{d}S - \int_{f_{2}} \frac{V_{m}}{s_{f_{2}}} \mathrm{d}S$$
(I.59)

Pour le deuxième cas, l'arête i est une arête externe qui n'appartient qu'à une seule face f. On a en utilisant (I.47) et (I.48) :

$$\mathbf{U}_{i}^{(s)} = -\int_{i} \frac{V}{l_{i}} \mathrm{d}L + \int_{f} \frac{V_{m}}{s_{f}} \mathrm{d}S \tag{I.60}$$

La représentation des branches et nœuds électriques dans ce cas de région mince est présentée sur la Figure I.7.



FIGURE I.7 – Représentation des branches et des nœuds électriques sur une région mince avec une connexion externe (Nœuds sur le bord : en rouge, nœuds internes : en noir)

Pour compléter la définition du second membre du système (I.50), la tension $\mathbf{U}_i^{(s)}$ sur les bords est nulle si l'arête *i* n'est pas connectée à un circuit externe.

Notons que dans le cas de l'hypothèse région mince, le calcul des pertes en considérant uniquement le champ électrique et la densité de courant n'est pas satisfaisant, le champ magnétique et l'induction magnétique doivent être pris en compte dans ce calcul, comme le montre bien l'article [31].

I.3.c-iii Cas avec la condition limite d'impédance de surface (SIBC)

Les travaux sur la condition limite d'impédance de surface ont été présentés par G. Meunier *et Al* dans l'article [32] pour les matériaux conducteurs. Cette condition permet de discrétiser uniquement les bords des régions du dispositif étudié en éléments surfaciques, dans ce cas l'épaisseur de peau doit être très faible afin de valider l'hypothèse que le courant circule majoritairement sur les bords et non dans le volume, impliquant ainsi une densité de courant tangentielle au bord de Ω_c . La densité de courant tangentielle **J** le long de la direction perpendiculaire (z) de la frontière est exprimée par :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s e^{-(1+j)\frac{z}{\delta}} \tag{I.61}$$

avec \mathbf{J}_s la densité de courant surfacique sur Γ (le bord du domaine Ω_c), et δ l'épaisseur de peau. En intégrant \mathbf{J} suivant (z), on obtient la densité de courant surfacique équivalente \mathbf{K} telle que :

$$\mathbf{K} = \mathbf{J}_s \frac{\delta}{1+j} \tag{I.62}$$

à partir de (I.62), l'équation (I.26) devient alors [32]:

$$\frac{1+j}{2\sigma\delta}\mathbf{K} \approx -\frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \left(\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{K}}{r} \mathrm{d}\Gamma\right) - \nabla V \tag{I.63}$$

Afin de discrétiser Γ , les mêmes fonctions de forme de facette surfacique $\mathbf{w}^{(s)}$ présentées dans (I.49) sont utilisées, on obtient :

$$\mathbf{K} = \sum_{i} \mathbf{w}_{i}^{(s)} \mathbf{I}_{i}^{(s)} \tag{I.64}$$

En appliquant (I.64) sur (I.62), on a :

$$\left(\mathbf{R}^{(s)} + j\omega\mathbf{L}^{(s)}\right)\mathbf{I}^{(s)} = \mathbf{U}^{(s)}$$
(I.65)

Avec

$$\mathbf{R}_{i,j}^{(s)} = \int_{\Gamma} \frac{1+j}{2\delta} \frac{\mathbf{w}_i^{(s)} \mathbf{w}_j^{(s)}}{\sigma} \mathrm{d}\Gamma$$
(I.66)

$$\mathbf{L}_{i,j}^{(s)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{w}_i^{(s)} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{w}_j^{(s)}}{r} d\Gamma d\Gamma$$
(I.67)

$$\mathbf{U}_{i}^{(s)} = -\int_{\Gamma} \mathbf{w}_{i}^{(s)} \nabla V \mathrm{d}\Gamma \tag{I.68}$$

La définition de $\mathbf{U}_i^{(s)}$ est faite uniquement sur les facettes du bord Γ et pas dans le volume. En utilisant le théorème de divergence sur l'équation (I.68), on a :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{w}_{i}^{(s)} \nabla V d\Gamma = \int_{\Gamma} \nabla \cdot \left(\mathbf{w}_{i}^{(s)} V \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_{i}^{(s)} \right) V d\Gamma$$
(I.69)
$$\int_{\Gamma} U \left(\mathbf{w}_{i}^{(s)} V \right) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_{i}^{(s)} \right) V d\Gamma$$
(I.69)

$$= \oint_{C+} V\left(\mathbf{n}_{i+} \cdot \mathbf{w}_{i}^{(s)}\right) \mathrm{d}C - \oint_{C-} V\left(\mathbf{n}_{i-} \cdot \mathbf{w}_{i}^{(s)}\right) \mathrm{d}C + \frac{1}{s-1} \int_{\Gamma^{-}} V \mathrm{d}\Gamma - \frac{1}{s+1} \int_{\Gamma^{+}} V \mathrm{d}\Gamma$$

avec Γ^+ et Γ^- deux éléments qui partagent l'arête i, c+ et c- sont leurs contours respectivement. \mathbf{n}_{i+} et \mathbf{n}_{i-} sont les vecteurs normaux de l'arête i sur Γ^+ , Γ^- respectivement.

I.3.d Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC

Nous rappelons la formulation inductive et capacitive qui a été développée dans la thèse de Jonathan Siau [27]. Le sigle RLMC signifie : R pour résistance, L Inductance, M Mutuelle inductance et C Capacité.

Afin de prendre en compte les effets capacitifs, l'équation (I.29) qui stipulait que le courant sortant des bords du maillage est nul n'est plus valable ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \neq 0$). Des branches circuits externes sont ajoutées à l'ensemble des branches issues du maillage duale comme le présente la Figure I.8 qui reprend la Figure I.4, assumant ainsi qu'un courant peut sortir du volume modélisé.



FIGURE I.8 – Représentation des branches externes capacitives

Les branches capacitives externes ajoutées sont connectées à un nœud de référence commun, noté ici par nœud " ∞ ". Les nœuds circuits représentés en rouge sont les barycentres des éléments surfaciques des bords du maillage.

Le système matriciel (I.36) doit être repris afin de prendre en compte ces nouvelles inconnues traduisant les courants qui circulent dans les branches capacitives. On définit les différences de potentiels $\mathbf{U}^{(\mathbf{ext})}$ entre les nœuds circuits du bord du maillage et le nœud ∞ par :

$$\mathbf{U}_{i}^{(ext)} = V_{\Gamma_{i}} - V_{\infty} \tag{I.70}$$

avec V_{Γ_i} le potentiel de la face *i* du bord. En fixant arbitrairement la tension du nœud $V_{\infty} = 0$, on obtient $\mathbf{U}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{ext})} = V_{\Gamma_i}$, avec :

$$V_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma} \frac{V}{S_i} \mathrm{d}\Gamma \tag{I.71}$$

En reprenant l'équation (I.22), V s'écrit dans Ω_c comme suit :

$$V = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega_c} \mathbf{J} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}\Omega_c \tag{I.72}$$

En considérant l'équation (I.28) et en appliquant le théorème de divergence, on a :

$$V = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}}{r} \mathrm{d}\Gamma$$
(I.73)

avec **n** la normale sur le bord du domaine Ω_c noté Γ .

Donc en reprenant (I.70) et en appliquant une discrétisation en éléments de facette, on a :

$$\mathbf{U}_{i}^{(ext)} = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_{0}} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_{i}} \sum_{j} \left(\int_{\Gamma} \frac{\mathbf{w}_{j} \cdot \mathbf{n}}{r} \mathrm{d}\Gamma \right) \mathbf{I}_{j}^{(ext)} \mathrm{d}\Gamma$$
(I.74)

avec $\mathbf{I}^{(ext)}$ les courants sur les branches capacitives externes. Donc,

$$\mathbf{U}^{(\mathbf{ext})} = \frac{1}{j\omega} \mathbf{P} \mathbf{I}^{(ext)} \tag{I.75}$$

avec

$$\mathbf{P}_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i S_j} \frac{1}{r} \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}\Gamma$$
(I.76)

où $\mathbf{P}_{i,j}$ est la matrice des coefficients partiels de potentiel, elle peut être vue comme l'inverse de la matrice des capacités.

En ajoutant l'équation (I.75) dans le système (I.36), on a :

$$([\mathbf{R}] + j\omega [\mathbf{L}]) \{\mathbf{I}\} + \frac{1}{j\omega} [\mathbf{P}] \left\{ \mathbf{I}^{(ext)} \right\} = \{\mathbf{U}\} + \left\{ \mathbf{U}^{(ext)} \right\}$$
(I.77)

Qui apparaît sur la forme de blocs matriciels suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega \mathbf{L} & 0\\ 0 & \frac{1}{j\omega} \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I}^{(ext)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^{(ext)} \end{bmatrix}$$
(I.78)

La résolution du système (I.77) par un solveur circuit sera détaillée dans le chapitre II. Pour U qui rassemble dans ce cas les tensions des branches électriques internes, la procédure reste exactement la même que celle présentée dans la partie formulation inductive.

Dans le cas d'une modélisation avec hypothèse région mince ou en SIBC, les branches électriques capacitives viennent se connecter aux barycentres des éléments surfaciques.

I.3.e Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC avec matériaux diélectriques

Nous rappelons la formulation inductive et capacitive avec considération des matériaux diélectriques [27, 2].

Dans cette partie, les courants de déplacement ne sont pas négligés, on rappelle donc les relations constitutives qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \text{dans} \quad \Omega_C \qquad (I.79)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad \text{dans} \quad \Omega_D \tag{I.80}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{I.81}$$

 Ω_C et Ω_D sont le domaine conducteur et le domaine diélectrique respectivement, comme le présente la Figure I.9



FIGURE I.9 – Domaine avec matériau conducteur Ω_C et matériau diélectrique Ω_D . Les frontières de Ω_C notées Γ_C sont représentées par des lignes en noir. Les frontières de Ω_D notées Γ_D sont représentées par des lignes discontinues en rouge

Par conséquent, l'équation de Maxwell-Faraday (I.24) se développe vers la forme suivante :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} = \mathbf{J}_P + j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \tag{I.82}$$

avec $\mathbf{J}_P = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{P}$. On réécrit les potentiels en présence de diélectriques comme suit,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}_P}{r} \mathrm{d}\Omega \tag{I.83}$$

$$V = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \mathbf{J}_P \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{I.84}$$

Avec $\Omega = \Omega_C \cup \Omega_D$.

On introduit une nouvelle variable \mathbf{J}_{tot} la densité de courant totale par :

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} + j\omega \mathbf{D} = \sigma^* \mathbf{E} \tag{I.85}$$

Avec $\sigma^* = \sigma + j\omega\epsilon$ est une conductivité complexe équivalente dans Ω , elle a deux variantes telles que :

$$\sigma^* = \sigma + j\omega\epsilon_0 \qquad \text{dans} \quad \Omega_C \qquad (I.86)$$

$$\sigma^* = j\omega\epsilon \qquad \text{dans} \quad \Omega_D \qquad (I.87)$$

En injectant l'équation (I.85) dans (I.26), on retrouve :

$$\frac{\mathbf{J}_{tot}}{\sigma^*} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla V \tag{I.88}$$

A partir des équations (I.82) et (I.85), on déduit :

$$\mathbf{J}_{P} = \frac{\sigma^{*} - j\omega\epsilon_{0}}{\sigma^{*}}\mathbf{J}_{tot}$$
(I.89)

En injectant (I.89) dans (I.83) et dans (I.84), on a :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\sigma^* - j\omega\epsilon_0}{\sigma^*} \frac{\mathbf{J}_{tot}}{r} \mathrm{d}\Omega$$
(I.90)
$$V = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\sigma^* - j\omega\epsilon_0}{\sigma^*} \mathbf{J}_{tot} \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \mathrm{d}\Omega \tag{I.91}$$

Comme présentée dans la section I.3.d, les branches extérieures sont toutes reliées à un nœud commun noté " ∞ ". La procédure de discrétisation reste la même pour \mathbf{J}_{tot} avec l'utilisation des fonctions de forme de facette définies par l'équation (I.33). Considérons les équations (I.70) et (I.71) qui restent valables dans cette configuration en fixant aussi V_{∞} à 0, on obtient :

$$\left(\left[\mathbf{R}_{t}\right]+j\omega\left[\mathbf{L}_{t}\right]\right)\left\{\mathbf{I}\right\}+\frac{1}{j\omega}\left[\mathbf{P}_{t}\right]\left\{\mathbf{I}^{(ext)}\right\}=\left\{\mathbf{U}_{t}\right\}$$
(I.92)

Avec

$$[\mathbf{R}_t]_{i,j} = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\sigma^*} \mathrm{d}\Omega \tag{I.93}$$

$$[\mathbf{L}_t]_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \int_{\Omega} \frac{\sigma^* - j\omega\epsilon_0}{\sigma^*} \frac{\mathbf{w}_j}{r} \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\Omega$$
(I.94)

$$[\mathbf{P}_t]_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Omega} \frac{\sigma^* - j\omega\epsilon_0}{\sigma^*} \mathbf{w}_j \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega$$
(I.95)

avec Γ le bord externe de domaine Ω (sans l'interface entre Ω_C et Ω_D), \mathbf{R}_t une matrice creuse qui représente les effets résistifs dans le conducteur (à travers l'expression (I.86)) et les effets capacitifs dans le diélectrique (à travers l'expression (I.87)), \mathbf{L}_t est une matrice pleine qui représente les effets inductifs, \mathbf{P}_t est une matrice pleine qui représente les effets capacitifs dans l'air, et $\mathbf{U}_t = \mathbf{U} + \mathbf{U}^{(\mathbf{ext})}$ la différence de potentiel de toutes les branches du circuit.

Bien que cette formulation soit générale et permette de modéliser les matériaux conducteurs et diélectriques en prenant en compte les effets capacitifs, le fait d'avoir une dépendance à la fréquence dans les équations (I.86) et (I.87) est un inconvénient majeur. Car cette dépendance se répercute sur le système matriciel (I.92), et cela implique que pour une résolution multifréquences, un assemblage des matrices \mathbf{R}_t , \mathbf{L}_t et \mathbf{P}_t est nécessaire pour chaque fréquence. Dans [27], les auteurs proposent de faire des hypothèses simplificatrices afin de surmonter cet inconvénient. Les auteurs proposent de négliger le courant de déplacement dans les conducteurs, cela est justifié à travers la condition qui suit :

$$\sigma >> \omega \epsilon_0 \tag{I.96}$$

En considérant cette hypothèse dans notre gamme de fréquence, l'équation (I.89) n'est plus adéquate, on la récrit telle que :

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J} \qquad \text{dans} \quad \Omega_C \qquad (I.97)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_{tot} = j\omega \mathbf{D}$$
 dans Ω_D (I.98)

Donc

$$\mathbf{J}_P = \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \qquad \text{dans} \quad \Omega_C \qquad (I.99)$$

$$\mathbf{J}_P = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \qquad \text{dans} \quad \Omega_D \qquad (I.100)$$

L'équation (I.26) s'écrit par conséquent sous la forme suivante :

$$\frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{\sigma}\Big|_{\Omega_C} + \frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{j\omega\epsilon}\Big|_{\Omega_D} + j\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_{\Omega_C}\frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{r}\mathrm{d}\Omega_C + \int_{\Omega_D}\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}\frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{r}\mathrm{d}\Omega_D\right) = -\nabla V \quad (I.101)$$

où $\frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{\sigma}$ et $\frac{\tilde{\mathbf{J}}_{tot}}{j\omega\epsilon}$ correspondent à \mathbf{E} dans Ω_C et Ω_D respectivement.

Afin de prendre en compte les effets capacitifs, une procédure identique à celle mise en place précédemment est appliquée telle que :

$$\mathbf{U}_{i}^{(ext)} = V_{\Gamma_{i}} - 0 = \int_{\Gamma} \frac{V}{S_{i}} \mathrm{d}\Gamma$$
(I.102)

En considérant (I.99) et (I.100), l'équation (I.70) devient comme suit :

$$\mathbf{U}_{i}^{(ext)} = \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_{0}} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_{i}} \left(\int_{\Omega_{C}} \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\Omega_{C} + \int_{\Omega_{D}} \frac{\epsilon - \epsilon_{0}}{\epsilon} \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\Omega_{D} \right) \mathrm{d}\Gamma$$
(I.103)

En utilisant le théorème de divergence, la première intégrale double peut être simplifiée comme suit :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Omega_C} \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\Omega_C \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Gamma_C} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_j} \left(\tilde{\mathbf{J}}_{tot} \cdot \mathbf{n} \right) \frac{1}{r} \mathrm{d}\Gamma_C \mathrm{d}\Gamma$$
(I.104)

 ϵ_j correspond à la permittivité qu'il pourrait y avoir du côté opposé de la face j d'une frontière, c'est-à-dire : si la face j est partagée entre un conducteur et un diélectrique de permittivité ϵ_1 , alors $\epsilon_j = \epsilon_1$.

De plus, en supposant que les diélectriques sont linéaires (ce qui implique $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ dans chaque région du domaine Ω_D), nous pouvons réappliquer le théorème de divergence pour simplifier la deuxième intégrale double :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Omega_D} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \tilde{\mathbf{J}}_{tot} \nabla \frac{1}{r} \mathrm{d}\Omega_D \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Gamma_D} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_0}{\epsilon_1 \epsilon_2} \left(\tilde{\mathbf{J}}_{tot} \cdot \mathbf{n} \right) \frac{1}{r} \mathrm{d}\Gamma_D \mathrm{d}\Gamma \qquad (I.105)$$

Avec **n** la normale sortante du diélectrique 1 vers le diélectrique 2, de permittivité ϵ_1 et ϵ_2 respectivement.

Maintenant on utilise la même discrétisation de (I.33) sur \mathbf{J}_{tot} et on peut écrire d'abord que :

$$\mathbf{U}_{i}^{(ext)} = \frac{1}{j\omega} \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{I}$$
(I.106)

Puis à partir de (I.101), on obtient le système matriciel suivant :

$$\left(\tilde{\mathbf{R}} + j\omega\tilde{\mathbf{L}} + \frac{1}{j\omega}\left(\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{P}}\right)\right)\mathbf{I} = \mathbf{U}$$
(I.107)

Avec :

$$\left[\tilde{\mathbf{R}}\right]_{i,j} = \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\sigma} \mathrm{d}\Omega_C \tag{I.108}$$

$$\left[\tilde{\mathbf{C}}\right]_{i,j} = \int_{\Omega_D} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\epsilon} \mathrm{d}\Omega_D \tag{I.109}$$

$$\left[\tilde{\mathbf{L}}\right]_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \left(\int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{w}_j}{r} \mathrm{d}\Omega_C + \int_{\Omega_D} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \frac{\mathbf{w}_j}{r} \mathrm{d}\Omega_D \right) \mathrm{d}\Omega$$
(I.110)

$$\left[\tilde{\mathbf{P}}\right]_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \left(\int_{\Gamma_C} \frac{1}{S_j} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_j} \frac{1}{r} \mathrm{d}\Gamma_C + \int_{\Gamma_D} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)\epsilon_0}{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{1}{S_j} \frac{1}{r} \mathrm{d}\Gamma_D \right) \mathrm{d}\Gamma_D \tag{I.111}$$

Grâce à ces nouvelles écritures, le principal verrou du système matriciel (I.92) a été surmonté. En effet, les nouvelles matrices $\tilde{\mathbf{R}}$ et $\tilde{\mathbf{C}}$ sont des matrices réelles non-dépendantes de la fréquence, contrairement à $\tilde{\mathbf{R}}_t$ qui est complexe et dépendante de la fréquence, et c'est le même constat pour la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}$.

Afin de simplifier d'avantage le système (I.107), une approximation de type Darwin peut être faite pour les matériaux diélectrique de la façon suivante :

Considérons les termes de la matrice $\tilde{\mathbf{C}}$ et ceux de la partie diélectrique de la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$, on compare les dimensions de ces termes comme suit :

$$\frac{\frac{1}{j\omega}\tilde{\mathbf{C}}_{i,j}}{j\omega\tilde{\mathbf{L}}_{i,j}}\approx dim\left(\frac{1}{\omega^{2}\varepsilon\mu_{0}d^{2}}\right)$$

avec d la dimension caractéristique du domaine étudié. Dans la limite de fréquences pas très élevées on a $\frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu_0 d^2} >> 1$ car $\varepsilon \mu_0$ est de l'ordre de 10^{-14} . L'influence des courants de déplacement sur la répartition des courants dans les milieux conducteurs est faible aux fréquences d'utilisation habituelles. Donc le terme diélectrique de la matrice $\tilde{\mathbf{L}}$ peut être négligé devant le terme inductif mais dans la limite des fréquences suffisamment faibles. Les termes $\tilde{\mathbf{L}}$ du système (I.107) s'écrivent donc par :

$$\left[\tilde{\mathbf{L}}\right]_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \int_{\Omega_C} \frac{\mathbf{w}_j}{r} \mathrm{d}\Omega_C \mathrm{d}\Omega \tag{I.112}$$

I.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un état de l'art des méthodes PEEC structurée et non-structurée est présenté, il donne une vision globale des développements majeurs qui ont été réalisés récemment. Nous avons fait le choix de travailler avec la méthode PEEC non-structurée en raison de la complexité croissante des dispositifs d'électronique de puissance, car cette méthode permet d'utiliser différents types d'éléments de maillage pour la discrétisation de géométries complexes. Nous avons présenté des formulations supposant un régime quasistatique pour la modélisation des matériaux conducteurs avec ou sans matériaux diélectriques, parmi lesquelles on trouve des approches très prometteuses telles que l'approche des régions minces et l'approche des conditions aux limites de l'impédance de surface. Nous avons séparé les formulations précédentes en trois catégories : approche RLM, approche RLMC, et approche RLMC avec diélectrique. Nous avons divisé ces approches selon leurs hypothèses de validité qui dépendent entre autres de la fréquence d'excitation, du matériau et de la longueur d'onde du dispositif.

Chapitre II

Solveurs circuits, amélioration de la robustesse et des performances des formulations PEEC RLM et RLMC

Quand on a choisi un chemin, aussi compliqué soit-il, on le poursuit jusqu'au bout. Sinon, on ne saura jamais ce qu'il nous promet.

Yasmina Khadra

Sommaire

I.1	INTRODUCTION					
I.2	Éтат	de l'art de la méthode PEEC	8			
	I.2.a	La méthode PEEC structurée	8			
	I.2.b	La méthode PEEC non-structurée	9			
I.3	Form	IULATIONS PEEC NON-STRUCTURÉES	10			
	I.3.a	Introduction à la modélisation électromagnétique en basse et moyenne fré-				
		quence	11			
	I.3.b	Équations de Maxwell	12			
	I.3.c	Formulation PEEC inductive RLM	16			
	I.3.d	Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC	25			
	I.3.e	Formulation PEEC inductive et capacitive RLMC avec matériaux diélec-				
		triques	26			
I.4	Conc	CLUSION	30			

Résumé

Dans ce chapitre, une étude approfondie est faite sur l'amélioration de la précision et des performances des formulations PEEC RLM et RLMC. Pour la partie précision, une stratégie d'intégration avec points de Gauss adaptatifs est développée, permettant ainsi de réduire les erreurs d'intégration numérique. Les performances sont étudiées à travers la présentation et la comparaison de différents solveurs circuits associés à différentes matrices de préconditionnement.

II.1 Introduction

Dans le chapitre I, une représentation en éléments circuits des dispositifs d'électronique de puissance a été présentée. Cette représentation consistait à traduire le maillage de la géométrie du dispositif d'intérêt en un réseau de résistances \mathbf{R} , d'inductances propres \mathbf{L} et mutuelles \mathbf{M} , ainsi que des capacités \mathbf{C} . Nous avons montré que les valeurs de ces éléments circuits sont obtenues avec l'exploitation des différentes formulations PEEC nonstructurées qui y sont présentées. Cette représentation circuit permet naturellement des connexions de composants actifs et passifs externes. L'ensemble mène ainsi à un système matriciel sous format d'un système d'équations de circuit électrique $\mathbf{ZI} = \mathbf{U}$. Afin de déterminer les courants et tensions aux bornes de chacun de ces éléments, il est nécessaire de prendre en considération leurs interconnexions. Ces dernières permettent d'appliquer les lois de Kirchhoff (loi des nœuds et loi des mailles). Ainsi il est possible d'écrire un ensemble d'équations indépendantes qui permet la résolution du problème. Dans le travail ici présenté, on distingue 2 grandes familles de solveurs circuits :

- Les solveurs fondés sur un jeu de mailles indépendantes. Dans ce type de solveur, on retrouve a minima comme inconnues les courants des mailles indépendantes.
- Les solveurs fondés sur les nœuds indépendants. Dans ce type de solveur, on retrouve a minima comme inconnues les potentiels de nœuds indépendants.

Naturellement quelle que soit la famille de solveur employée, les lois de Kirchhoff sont utilisées (et donc vérifiées) pour l'écriture d'un jeu d'équations indépendantes.

$$\sum_{I_1 \atop I_1}^{I_2} \sum_{i=1}^n I_i = 0 \qquad \bigcup_{I_1} \bigcup_{U_1}^{U_2} \bigcup_{i=1}^n U_i = 0$$

Afin d'avoir une vue globale de la procédure de résolution des problèmes avec la méthode PEEC, le diagramme ci-dessous présente toutes ses étapes :



Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux trois avant-dernières étapes :

- Présentation et test des solveurs circuits adaptés à la méthode PEEC non-structurée dans le cas RLM et RLMC.
- Brève présentation des techniques de compression matricielle.
- Développements pour l'amélioration de l'intégration numérique avec un compromis entre précision et temps de calcul.
- Accélération de la résolution en étudiant l'impact du préconditionnement et du choix du solveur circuit utilisé.

Cette procédure générale permet au final de modéliser des dispositifs complexes comme celui présenté sur la Figure II.1. En plus des courants et des tensions aux bornes de chaque éléments RLMC, les grandeurs physiques pouvant être calculées sont : les pertes Joule, les courbes d'impédance, les courants dans les composants externes et bien d'autres.



FIGURE II.1 – Modélisation d'un busbars laminés avec des composants circuits externes en utilisant la méthode PEEC non-structurée.

La partie amélioration de la procédure de maillage sera étudiée dans le chapitre III. Dans ce qui suit, nous présentons en premier lieu les solveurs circuits pour la résolution de systèmes issus de la méthode PEEC non-structurée.

II.2 Solveurs circuits pour la méthode PEEC

La détermination des courants et des tensions d'un circuit électrique nécessite d'une part une relation liant le courant et la tension aux bornes d'une branche et d'autre part des équations permettant de décrire les relations électriques entre les branches. La relation liant les courants et les tensions peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{Z}_{b}\mathbf{I}_{b_{Z}} - \mathbf{U}_{induit} = \mathbf{U}_{b_{Z}} \tag{II.1}$$

avec :

- \mathbf{Z}_b : Matrice impédance déterminée à l'aide des formulations vues dans le chapitre précédent, les \mathbf{L} et \mathbf{C} (ou \mathbf{P}) étant multiplié par la pulsation ($2\pi f$, f étant la fréquence).
- \mathbf{I}_{bz} : Courants des branches.
- **U**_{*b_Z*} : Tensions aux bornes des branches.

— \mathbf{U}_{induit} : Tensions induites sur chacune des branches par des champs magnétiques externes au problème (bobines externes, champ d'excitation externe...)

Cette relation est naturellement insuffisante pour résoudre le problème puisqu'il y a \mathbf{U}_{b_Z} et \mathbf{I}_{b_Z} inconnues (donc 2 fois le nombre de branches) et que l'on a un nombre de branche d'équations. Afin de compléter ces équations il faut prendre en considération les connexions entre branches, c'est-à-dire prendre en considération la topologie du circuit. Avant de commencer l'écriture des équations liées à la topologie des circuits, il est important d'indiquer les conventions et les notations qui sont employées. Chaque branche est raccordée à 2 nœuds. Par convention on décide que le courant est compté positivement s'il se déplace du nœud \mathbf{A} vers le nœud \mathbf{B} puis nous décidons d'employer la convention récepteur pour orienter la tension aux bornes de cette branche. La Figure II.3 suivante présente ces conventions :



FIGURE II.2 – Convention utilisée quel que soit le type de branche traité (source, résistance...)

A partir de ces notations et conventions, il est possible de décrire l'ensemble de la topologie du circuit électrique à l'aide d'une matrice incidence donnant les relations entre les nœuds et les branches. En plaçant les nœuds sur les lignes et les branches sur les colonnes, cette matrice est remplie de la façon suivante :

- Si le nœud de la ligne n'a pas de lien avec la branche de la colonne, on place un 0.
- Si le nœud de la ligne est connecté au nœud A de la branche de la colonne, on place un -1 (si le courant sort du nœud on place un -1).
- Si le nœud de la ligne est connecté au nœud B de la branche de la colonne, on place un + 1 (si le courant entre dans le nœud on place un + 1).

La figure suivante présente un exemple simple de circuit et de sa matrice d'incidence nœuds/branches associées.



FIGURE II.3 – Exemple de matrice incidence nœuds/branches

Quelques remarques :

- La description de la topologie ne nécessite pas de connaître la nature de la branche (source, résistance...) puisque le système de convention est indépendant du type de branche.
- La somme des termes de chaque colonne est obligatoirement nulle. Chaque colonne

contient seulement 2 valeurs (+1 et -1) puisqu'une branche a 2 nœuds et que le courant part du nœud A pour aller vers le nœud B.

A partir de ces éléments, il est possible d'écrire des jeux d'équations indépendantes qui permettent la détermination des courants et tensions dans chacune des branches du problème. La suite de ce paragraphe a pour objectif de présenter 3 approches :

- L'approche par nœuds indépendants qui a principalement comme inconnues les courants de branches et les potentiels des nœuds indépendants.
- L'approche par nœuds indépendants minimale qui a principalement les potentiels des nœuds indépendants comme inconnues.
- L'approche par mailles indépendantes minimale qui a principalement les courants de mailles indépendantes comme inconnues.

II.2.a Approche par nœuds indépendants

Cette approche consiste à écrire les équations du circuits issues du schéma électrique initial dans une base de nœuds indépendants. Le principe est que : pour chaque sousensemble indépendant du circuit, on a un nœud de référence avec un potentiel qui est mis à zéro, donc il y a autant de nœuds de référence qu'il y a de circuit indépendant. En effet, si on analyse la matrice nœuds/branches qui traduit la topologie du circuit au travers de la loi des nœuds on peut constater que dans chaque sous-ensemble indépendant, la loi des nœuds entraîne une redondance dans les équations (une loi des nœuds se déduit de toutes les autres).

Afin de traduire cela, il est nécessaire de reprendre la matrice nœuds/branches précédemment présentées afin d'écrire une matrice d'incidence notée \mathbf{M}_{ni} , qui traduit la relation entre les nœuds indépendants et les branches électriques, elle est de dimension [nombre de nœuds indépendants, nombre de branches], elle est construite en suivant les règles suivantes :

- $\mathbf{M}_{ni_{(i,j)}} = 0$ si la branche *j* n'a pas de lien avec le nœud *i*.
- $\mathbf{M}_{ni_{(i,j)}} = 1$ si la branche *j* a une orientation entrante vers le nœud *i*.
- $\mathbf{M}_{ni_{(i,j)}} = -1$ si la branche *j* a une orientation sortante du nœud *i*.

On peut constater que cette matrice est identique à celle présentée précédemment dans laquelle une ligne par sous-ensemble indépendant a été supprimée (les lignes correspondant aux nœuds de référence). A titre d'exemple, la Figure II.4 présente un circuit classique composé d'impédances et d'une source.

On peut construire la matrice d'incidence nœuds indépendants/branches en prenant le nœud N_0 comme nœud de référence par exemple, telle que :

	(B_0	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8)
	N_1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
	N_2	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
М. —	N_3	0	0	1	1	-1	0	0	0	0
$\mathbf{W}_{ni} =$	N_4	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
	N_5	0	0	0	0	0	1	1	0	0
	N_6	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
	$\setminus N_7$	0	0	0	-1	0	0	0	0	1 /



FIGURE II.4 – Circuit comportant des impédances et une source.

Afin de simplifier l'écriture des équations, la matrice d'incidence nœuds indépendants/branches va être découpée en sous matrices en fonction de la nature des branches de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{ni} = (\mathbf{M}_{ni_Z} \mid \mathbf{M}_{ni_U} \mid \mathbf{M}_{ni_I})$$

Avec :

- \mathbf{M}_{ni_Z} : Matrice incidences entre les nœuds indépendants et les branches de type impédance (R, L, M, et C).
- \mathbf{M}_{ni_U} : Matrice incidences entre les nœuds indépendants et les branches de type source de tension.
- \mathbf{M}_{ni_I} : Matrice incidences entre les nœuds indépendants et les branches de type source de courant.

Ce découpage en sous matrices, permet d'écrire les différentes équations suivantes : Relation liant la tension et le courant aux bornes d'un dipôle (éléments RLMC)

$$\mathbf{Z}_b \mathbf{I}_{b_Z} = \mathbf{U}_{b_Z} + \mathbf{U}_{induit}$$

Loi des nœuds :

$$\mathbf{M}_{ni_Z} \cdot \mathbf{I}_{b_Z} + \mathbf{M}_{ni_U} \cdot \mathbf{I}_{b_U} = -\mathbf{M}_{ni_I} \cdot \mathbf{I}_{b_I}$$

Relation liant les potentiels de nœuds indépendants aux tensions de branches (loi des mailles) :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ni_Z}^T \cdot \mathbf{V}_n + \mathbf{U}_{b_Z} = 0\\ \mathbf{M}_{ni_U}^T \cdot \mathbf{V}_n = -\mathbf{U}_{b_U}\\ \mathbf{M}_{ni_I}^T \cdot \mathbf{V}_n + \mathbf{U}_{b_I} = 0 \end{cases}$$

Avec :

- \mathbf{Z}_b : Matrice contenant les éléments RLMC.
- \mathbf{V}_n : Potentiel des nœuds indépendants (différence de potentiel entre les nœuds indépendants et les nœuds de référence).
- $\mathbf{U}_{b_{U}}$: Tensions imposées sur les sources de tension.
- \mathbf{I}_{b_U} : Courants des sources de tension.

— \mathbf{U}_{b_I} : Tensions des sources de courant.

 $- \mathbf{I}_{b_I}$: Courants imposés sur les sources de courant.

On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ni_{Z}} \cdot \mathbf{I}_{b_{Z}} + \mathbf{M}_{ni_{U}} \cdot \mathbf{I}_{bU} = -\mathbf{M}_{ni_{I}} \cdot \mathbf{I}_{b_{I}} \\ \mathbf{M}_{ni_{Z}}^{T} \cdot \mathbf{V}_{n} + \mathbf{Z}_{b} \cdot \mathbf{I}_{b_{Z}} = \mathbf{U}_{induit} \\ \mathbf{M}_{ni_{U}}^{T} \cdot \mathbf{V}_{n} = -\mathbf{U}_{bU} \\ \mathbf{M}_{ni_{I}}^{T} \cdot \mathbf{V}_{n} + \mathbf{U}_{b_{I}} = 0 \end{cases}$$
(II.2)

L'écriture sous forme d'un système linéaire matriciel donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ni_U} \\ \mathbf{Z}_b & \mathbf{M}_{ni_Z}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ni_U}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{ni_I}^T & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{b_Z} \\ \mathbf{V}_n \\ \mathbf{U}_{b_I} \\ \mathbf{I}_{b_U} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{ni_I} \cdot \mathbf{I}_{b_I} \\ \mathbf{U}_{induit} \\ -\mathbf{U}_{b_U} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
(II.3)

Le système peut paraître de taille relativement importante. Toutefois il est rappelé que les matrices d'incidences sont creuses (elles sont constituées essentiellement de 0). Le seul bloc plein est la matrice \mathbf{Z}_b qu'il conviendra de compresser.

II.2.b Approche par nœuds indépendants minimale

Dans le paragraphe précédent, il est possible de constater que l'on a un grand nombre d'inconnues. Entre autres on a \mathbf{I}_{b_Z} et \mathbf{V}_n qui peuvent être de tailles importantes. L'idée de ce paragraphe est de supprimer les inconnues \mathbf{I}_{b_Z} du système. Pour cela on peut réécrire l'équation liant le courant et la tension aux bornes des éléments RLMC de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{b_Z} - \mathbf{I}_{b_Z} = -\mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{U}_{induit}$$

Avec \mathbf{Y}_b la matrice admittance ($\mathbf{Y}_b = \mathbf{Z}_b^{-1}$). Ainsi, il est possible de reprendre le système d'équations (II.2) et de le modifier de la façon suivante :

$$\begin{split} \mathbf{M}_{ni_Z} \mathbf{Y}_b \mathbf{M}_{ni_Z}^T \mathbf{V}_n - \mathbf{M}_{ni_U} \mathbf{I}_{b_U} &= \mathbf{M}_{ni_Z} \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_{induit} + \mathbf{M}_{ni_I} \mathbf{I}_{b_I} \\ \mathbf{M}_{ni_U}^T \mathbf{V}_n &= -\mathbf{U}_{b_U} \\ \mathbf{M}_{ni_I}^T \mathbf{V}_n + \mathbf{U}_{b_I} &= 0 \end{split}$$

L'écriture sous forme d'un système linéaire matriciel donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} \mathbf{Y}_b \mathbf{M}_{ni_Z}^T & 0 & -\mathbf{M}_{ni_U} \\ \mathbf{M}_{ni_U}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{ni_I}^T & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{U}_{b_I} \\ \mathbf{I}_{b_U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_{induit} + \mathbf{M}_{ni_I} \mathbf{I}_{b_I} \\ -\mathbf{U}_{b_U} \\ 0 \end{pmatrix}$$
(II.4)

On peut constater que cette forme d'écriture permet de réduire fortement le nombre d'inconnues puisque les courants \mathbf{I}_{b_Z} n'apparaissent plus d'une façon explicite. La difficulté de cette approche réside dans le fait qu'il est nécessaire de connaître la matrice admittance \mathbf{Y}_b qui est l'inverse de la matrice impédance \mathbf{Z}_b , or pour rappel la matrice \mathbf{Z}_b est pleine. Pour éviter cette inversion, il est possible de mettre en place une résolution interne d'un système linéaire lorsque l'on cherche à effectuer le produit suivant :

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{ni_Z} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{M}_{ni_Z}^T \cdot \mathbf{V}_n$$

On effectue les étapes suivantes :

1. Changement de base du vecteur de potentiel de nœud \mathbf{V}_n pour le placer dans la base des branches :

$$\mathbf{V}_{b_Z} = \mathbf{M}_{ni_Z}^T \cdot \mathbf{V}_n$$

2. Résolution du système linéaire suivant afin de connaître les courants induits par les tensions précédemment calculées :

$$\mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{V}_{b_Z} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{V}_{b_Z} \tag{II.5}$$

3. On replace les courants de branches calculés précédemment dans la base des nœuds indépendants :

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{ni_Z} \cdot \mathbf{J}_{b_Z}$$

On a ainsi effectué le produit désiré sans écrire de façon explicite l'inversion de la matrice (qui est une opération trop coûteuse en temps et place mémoire puisque pour rappel cette matrice doit être compressée).

II.2.c Approche par mailles indépendantes minimales

Dans cette approche, un jeu d'équations indépendant est mis en place en s'appuyant sur un jeu de mailles indépendantes. L'obtention d'un tel jeu de mailles n'est pas décrite dans ce travail. Des travaux antérieurs [36] et [37] présentent par exemple une méthode possible pour obtenir un jeu de mailles indépendantes. Ce jeu de mailles indépendantes étant obtenu, une matrice d'incidence notée \mathbf{M}_{mi} permet de synthétiser les relations entre les mailles indépendantes et les branches. Elle est de dimension [nombre de mailles indépendantes, nombre de branches], elle est peuplée par des 0, 1 et -1, telle que :

— $\mathbf{M}_{mi_{(i,j)}} = 0$ si la branche *j* n'a aucun lien avec la maille *i*.

- $\mathbf{M}_{mi_{(i,j)}} = 1$ si la branche *j* est dans le même sens que la maille *i*.

— $\mathbf{M}_{mi_{(i,j)}} = -1$ si la branche j est dans la maille i avec une orientation opposée.

On note que l'orientation des branches dépend de la convention qui a été choisie au préalable lors de la construction de la topologie du circuit. Nous pouvons reprendre l'exemple précèdent de la Figure II.4 et construire la matrice des mailles indépendantes, telle que :

$$\mathbf{M}_{mi} = \begin{pmatrix} & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ \hline M_{mi_1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ M_{mi_2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Afin de simplifier l'écriture des équations, la matrice d'incidence des mailles indépendantes va être découpée en sous matrices en fonction de la nature des branches de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{mi} = (\mathbf{M}_{mi_Z} | \mathbf{M}_{mi_U} | \mathbf{M}_{mi_I})$$

Avec :

 $- \mathbf{M}_{mi_Z}$: Matrice d'incidence entre les mailles indépendantes et les branches de type impédance (R, LM, et C).

- \mathbf{M}_{mi_U} : Matrice d'incidence entre les mailles indépendantes et les branches de type source de tension.
- $\mathbf{M}_{mi_{I}}$: Matrice d'incidence entre les mailles indépendantes et les branches de type source de courant.

Ce découpage en sous matrices permet d'écrire les différentes équations suivantes : Relation liant le courant et la tension sur un dipôle (éléments RLMC) :

$$\mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{I}_{b_Z} = \mathbf{U}_{b_Z} + \mathbf{U}_{induit}$$

Loi des mailles :

$$\mathbf{M}_{mi_Z} \cdot \mathbf{U}_{b_Z} + \mathbf{M}_{mi_I} \cdot \mathbf{U}_{b_I} = -\mathbf{M}_{mi_U} \cdot \mathbf{U}_{b_U}$$

Relations entre les courants de mailles indépendantes et les courants de branches (loi des nœuds) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mi_{Z}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} + \mathbf{I}_{b_{Z}} = 0 \\ \mathbf{M}_{mi_{U}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} + \mathbf{I}_{b_{U}} = 0 \\ \mathbf{M}_{mi_{I}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} = -\mathbf{I}_{b_{I}} \end{cases}$$

Avec :

- **I**_m : Courants des mailles.
- $\mathbf{U}_{b_{II}}$: Tensions imposées sur les sources de tension.
- $\mathbf{I}_{b_{II}}$: Courants des sources de tension.
- **U**_{b_t} : Tensions des sources de courant.
- \mathbf{I}_{b_I} : Courants imposés sur les sources de courant.

Ainsi on peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{Z}_{b} \cdot \mathbf{M}_{mi_{Z}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} - \mathbf{M}_{mi_{I}} \cdot \mathbf{U}_{b_{I}} = \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{U}_{induit} + \mathbf{M}_{mi_{U}} \cdot \mathbf{U}_{b_{U}} \\ \mathbf{M}_{mi_{U}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} + \mathbf{I}_{b_{U}} = 0 \\ \mathbf{M}_{mi_{I}}^{T} \cdot \mathbf{I}_{m} = -\mathbf{I}_{b_{I}} \end{cases}$$
(II.6)

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{Z}_{b} \cdot \mathbf{M}_{mi_{Z}}^{T} & -\mathbf{M}_{mi_{I}} & 0\\ \mathbf{M}_{mi_{U}}^{T} & 0 & 1\\ \mathbf{M}_{mi_{I}}^{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m}\\ \mathbf{U}_{b_{I}}\\ \mathbf{I}_{b_{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{U}_{induit} + \mathbf{M}_{mi_{U}} \cdot \mathbf{U}_{b_{U}}\\ 0\\ -\mathbf{I}_{b_{I}} \end{pmatrix}$$
(II.7)

II.2.d Quelques remarques

Il n'est pas aisé de prédire l'approche qui est la plus efficace. Toutefois on peut noter que l'approche par mailles indépendantes nécessite de trouver un jeu de mailles indépendantes, or cette étape peut nécessiter du temps. On peut également souligner que dans les possibilités de choix d'un jeu de mailles indépendantes certains sont meilleurs que d'autres car les mailles qui le composent sont plus petites (contiennent moins de branches) et ainsi la matrice d'incidences mailles indépendantes/branches contient naturellement plus de 0 ce qui rendra les opérations algébriques plus rapides et nécessitera un espace mémoire réduit. Concernant l'approche par nœuds indépendants, on constate que soit on utilise la matrice \mathbf{Z}_b mais l'on a un système qui contiendra un grand nombre d'inconnues supplémentaires, soit on travaille avec un système de taille minimale mais il est nécessaire de travailler avec une matrice admittance ce qui dans notre cas rend les calculs plus complexes puisque les formulations présentées au chapitre précédent permettent d'écrire seulement \mathbf{Z}_b .

Enfin une dernière remarque peut être faite sur la constitution de la matrice \mathbf{Z}_b . En effet cette matrice peut être décomposée en fonction des termes qui la composent de la façon suivante :

$$\mathbf{Z}_{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L} & 0\\ 0 & \frac{\mathbf{P}}{j\omega} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I}_{b_{Z}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{b_{RL}}\\ \mathbf{I}_{b_{C}} \end{pmatrix}$$

Cette représentation est utilisée à certains endroits dans la suite de ce document afin d'expliquer des points particuliers qui dépendent de la nature du bloc que l'on traite.

II.3 Techniques de résolution

Pour résoudre les systèmes d'équations construits par les solveurs circuits précédents, deux types de techniques de résolution peuvent être mises en œuvre. La première est la résolution par solveur direct (décomposition LU et autres), cette technique a une complexité en $O(N^3)$ en temps de calcul et en $O(N^2)$ pour la mémoire vive utilisée. Dès que le système atteint quelques milliers d'inconnues, la résolution devient très coûteuse, car comme il a été mentionné précédemment, bien que la matrice résistive **R** soit une matrice creuse, les matrices **L** et **P** sont quant à elles pleines.

Pour contourner cette complexité, la résolution par solveur itératif (GMRes et autres) a été envisagée. Ce type de solveur est adapté pour la résolution de gros systèmes linéaires. Le solveur GMRes [38] dans ce cas arrive toujours à converger (c'est un solveur direct lorsque l'espace de Krylov est complet) mais la rapidité de convergence dépend de plusieurs facteurs (la taille du système et autres). Pour accélérer la convergence des solveurs itératifs, des techniques de préconditionnement [39] sont utilisées. Il est compliqué de construire un bon préconditionneur à moindre coût. Dans les sections suivantes, nous allons essayer de trouver un préconditionneur efficace.

Les solveurs itératifs permettent de réduire la complexité de la résolution, mais la complexité de l'intégration et de l'assemblage des matrices \mathbf{L} et \mathbf{P} reste en $O(N^2)$. Afin de réduire cette complexité, les solveurs itératifs offrent la possibilité d'utiliser des techniques de compressions matricielles, car ils sont fondés sur l'utilisation de produits matrice vecteur $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x})$ où il n'est pas nécessaire de connaître de façon explicite les termes constituant la matrice \mathbf{A} . Dans la section suivante, nous allons faire dans un premier temps un rappel sur les techniques de compressions matricielles, puis dans un second temps, une étude sur les formulations PEEC RLM et RLMC non-structurées.

II.4 Compression matricielle

Les matrices pleines issues de la méthode PEEC ont longtemps représentées une difficulté majeure pour l'utilisation de cette approche. En raison de la complexité parabolique de l'intégration en temps et mémoire, l'utilisation de ces méthodes était limitée à des problèmes de taille réduite (problème faiblement maillé). Les progrès fait dans les machines de calcul et le développement de techniques de compression matricielle ont permis d'élargir le champ d'utilisation de la méthode PEEC. Comme présenté dans l'introduction générale, on distingue parmi ces techniques de compression matricielle, la méthode multipolaire rapide (*Fast Multipole Method* FMM) qui est la plus populaire et la plus ancienne, et l'une de ses variantes dans sa version multi-niveaux adaptative (*Adaptive Multilevel Fast Multipole method* AMLFMM)[40].

D'autres méthodes ont été récemment développées, elles sont principalement fondées sur une représentation avec approximation de bas rang à l'aide de matrices hiérarchiques, comme par exemple : *Adaptive Cross Approximation* ACA [41] notée approximation en croix adaptative en français. De telles méthodes sont capables de faire gagner énormément de place mémoire et d'accélérer considérablement les opérations algébriques, telles que l'assemblage, les multiplications matrice-vecteur, et la résolution de systèmes d'équations linéaires.

La méthode de compression ACA a été mise en œuvre dans le cadre de la thèse de J. Siau [2] pour la méthode PEEC non-structurée. Elle a montré dans cette dernière de bons résultats en termes de temps de calcul par comparaison aux FMM sur un exemple simple en électrostatique [42]. Cette différence de temps de calcul réside dans le temps consacré à l'assemblage de la matrice qui était beaucoup plus long pour ACA, mais qui était compensé par la rapidité de la résolution du système linéaire associé et la possibilité de calculer des décompositions LU approchées qui peuvent être utilisées comme préconditionneur du problème.

Contrairement à ACA, les FMM avaient montré sur cet exemple un temps d'assemblage beaucoup plus rapide mais avec un temps de résolution très long. Cela est dû au stockage uniquement des interactions proches et au calcul des interactions lointaines à la volée pendant la résolution. Cette propriété permet néanmoins d'utiliser moins d'espace mémoire qu'en ACA.

Dans l'optique d'utiliser le moins de mémoire vive possible, le choix est fait dans cette thèse d'utiliser la méthode multipolaire rapide avec multi-niveaux adaptatif AMLFMM. Cette méthode permet de décomposer le dispositif étudié en blocs proches et lointains grâce à l'utilisation de techniques de partitionnement par construction d'un octree adaptatif. Les interactions dans \mathbf{L} et \mathbf{P} entre blocs lointains sont compressées. L'approche mathématique permettant de prendre en considération ces blocs lointains est détaillée dans la thèse de de V. Ardon [43]. Les interactions entre blocs proches se font indépendamment des interactions lointaines, ce calcul des interactions $\mathbf{L}_{i,j}$ et $\mathbf{P}_{i,j}$ est fait en utilisant les intégrales présentées dans le chapitre I ce qui donne des blocs proches pleins.

II.5 Étude de la formulation PEEC-RLM

Dans cette section, la formulation PEEC-RLM en basse fréquence est étudiée. Le but de cette étude est d'observer les performances et de détecter les besoins d'amélioration en précision, en rapidité ou autres.

Du point de vue développement informatique, les méthodes intégrales sont plus complexes à mettre en œuvre par rapport à la méthode des éléments finis par exemple, la principale difficulté étant le calcul du noyau de Green qui peut conduire à des intégrales singulières lorsqu'elles sont calculées numériquement. Par conséquent, seuls quelques outils commerciaux basés sur de telles techniques intégrales sont utilisables dans un environnement industriel complexe, car assurer dans tous les cas leur mise en œuvre robuste ainsi qu'une très bonne précision de calcul reste une tâche difficile.

Dans l'ensemble de cette thèse, sauf indication contraire, nos méthodes sont implémentées dans la suite logiciel "MIPSE" [44], acronyme de "Modeling of Interconnected Power SystEms". MIPSE est une plateforme de simulation numérique principalement développée par le laboratoire de génie électrique de Grenoble (G2ELab) dans le domaine de l'électromagnétisme basse et moyenne fréquence.

La construction de la matrice **R** dans les formulations PEEC ne représente pas une difficulté, car c'est une matrice creuse de type éléments finis. De ce fait, son expression ne comporte qu'une seule intégrale faite numériquement à l'aide de la quadrature de Gauss-Legendre. Nous rappelons les différentes expressions de \mathbf{R} dans le tableau (II.1) ci-dessous.

Types	Interpolation ${\bf J}$	Unité \mathbf{w}_i	Terme $R_{i,j}$
Volumique	$\sum_i \mathbf{w}_i \ \mathbf{I}_i$	m^{-2}	$\int_{\Omega^v} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\sigma} d\Omega$
SIBC	$\sum_i \mathbf{w}_i^s \ \mathbf{I}_i$	m ⁻²	$\int_{\Gamma} \frac{1+j}{2\delta} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{\sigma} d\Gamma$
Surfacique	$rac{1}{e}\sum\limits_i \mathbf{w}^s_i \mathbf{I}_i$	m^{-1}	$\int_{\Omega^s} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{e\sigma^*} d\Omega$
Linéique	$\frac{1}{s}\sum_{i}\mathbf{w}_{i}^{l}\mathbf{I}_{i}$	-	$\int_{\Omega^l} \frac{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j}{s\sigma} d\Omega$

TABLE II.1 – Matrices résistives des régions de type volumique, SIBC, surfacique et linéique

Dans nos formulations, les fonctions de formes de facette \mathbf{w} sont de l'ordre 1, de ce fait, on sait au préalable en fonction du type d'élément de maillage combien de points de Gauss sont nécessaires pour faire l'intégration avec une bonne précision [45], contrairement aux matrices \mathbf{L} et \mathbf{P} où chaque terme a une double intégrale, et un noyau de Green qui tend vers l'infini quand la distance r tend vers zéro. Nous rappelons leurs expressions :

$$\mathbf{L}_{i,j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i \int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{w}_j}{r} d\Omega_c d\Omega_c$$
$$\mathbf{P}_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_i} \int_{\Gamma} \frac{1}{S_j} \frac{1}{r} d\Gamma d\Gamma$$

La matrice \mathbf{L} peut également être construite pour tous types d'éléments, elle est assemblée

telle que :

$$\mathbf{L} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} \mathbf{L}^v & \mathbf{L}^{v,s} & \mathbf{L}^{v,l} \\ \mathbf{L}^{s,v} & \mathbf{L}^s & \mathbf{L}^{s,l} \\ \mathbf{L}^{l,v} & \mathbf{L}^{l,s} & \mathbf{L}^{l} \end{bmatrix} \quad , avec \quad \mathbf{L}_{i,j}^{v,s} = \int_{\Omega_c^v} \mathbf{w}_i^v \int_{\Omega_c^s} \frac{\mathbf{w}_j^s}{r} d\Omega_c^s \mathrm{d}\Omega_c^s \mathrm{d}\Omega_$$

Pour pallier au problème de singularité du noyau de Green dans les intégrales du potentiel vecteur magnétique (I.21) et du potentiel scalaire électrique (I.22), des corrections analytiques [46, 47] ont été mises en œuvre, elles interviennent sur la première intégrale de $\mathbf{L}_{i,j}$ ($\int_{\Omega_c} \frac{\mathbf{w}_j}{r} d\Omega_c$), et également sur celle de $\mathbf{P}_{i,j}$ ($\int_{\Gamma} \frac{1}{S_j} \frac{1}{r} d\Gamma$) dans le cas RLMC. Les termes de cette première intégrale sont nommés par "intégrale sur éléments sources". La deuxième intégrale nommée "intégrale sur éléments cibles" est intégrée numériquement par une méthode de quadrature de Gauss-Legendre. La précision de la deuxième intégrale varie en fonction du nombre de points de Gauss utilisés. Dans le cas d'un noyau de Green, la précision dépend du type et de la taille d'élément source et/ou cible, ainsi que de la distance qui sépare ces deux éléments. A mesure que la distance augmente, on observe qu'un nombre de points de Gauss faible suffit pour avoir une bonne précision. A contrario quand la distance diminue, une sensibilité à la variation du nombre de points de Gauss est observée.

En ce qui concerne le type et la taille d'élément, un simple exemple peut démontrer la difficulté de l'intégration du noyau de Green. Nous prenons un exemple avec deux conducteurs parallèles de type hexaédrique comme le présente la Figure II.5.



FIGURE II.5 – Deux conducteurs parallèles de type hexaédrique.

Le conducteur rouge est plus long que le conducteur noir, et les deux sont proches géométriquement l'un de l'autre. La distribution spatiale du potentiel vecteur magnétique **A** sur l'axe médian du conducteur rouge est tracée sur la Figure II.6. Il est créé par le conducteur noir en considérant qu'il est traversé par un courant de 1 A. Nous observons une forte variation du potentiel le long de l'axe Ox. Elle est due à la différence de tailles des deux conducteurs et également à la faible distance qui les sépare. Pour faire une intégration numérique sur cette courbe avec une bonne précision, un grand nombre de points de Gauss est nécessaire pour capturer ces variations.

Dans cette perspective, une stratégie d'intégration doit être développée pour satisfaire une bonne précision et notamment avec l'adaptation du nombre de points de Gauss, et elle doit être fonctionnelle avec tout type d'élément. Cette stratégie va être présentée dans la section suivante.



FIGURE II.6 – Potentiel vecteur magnétique **A** sur l'axe Ox médian du conducteur rouge créé par le conducteur noir

II.5.a Stratégies d'intégration

Améliorer l'intégration du noyau de Green semble être une opération délicate dans un contexte comportant plusieurs types d'éléments de maillage avec des tailles hétérogènes. Des corrections analytiques pour l'intégrale sur les éléments sources sont utilisées pour chaque type d'élément [48, 49, 46, 47]. On trouve une discussion sur certaines de ces corrections dans la thèse de Ch. Rubeck [50].

En connaissant la propriété de symétrie dans le cas des inductances partielles, on sait que $(\mathbf{L}_{i,j} = \mathbf{L}_{j,i})$, et $(\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{j,i})$ pour les coefficients de potentiels. La séquence d'intégration semi-analytique entre deux éléments peut être optimisée en utilisant cette symétrie :

- En ne calculant que la moitié des termes de la matrice \mathbf{L} et de \mathbf{P} .
- En favorisant un sens de l'intégration, c'est-à-dire que pour l'intégration de l'interaction entre deux éléments, il est préférable d'utiliser le plus grand élément comme "élément source", car dans ce cas le potentiel créé sur l'autre élément (cible) aura moins de variation, par conséquent l'intégration nécessitera moins de points de Gauss pour avoir une bonne précision.

En reprenant l'exemple de la Figure II.5, bien qu'il soit simple, il permettra d'illustrer la différence de variation de \mathbf{A} selon les deux sens d'intégration.

La Figure II.7 montre deux courbes de répartition du potentiel vecteur magnétique, elles sont définies comme suit :

- <u>Courbe noire</u> : elle est obtenue sur l'axe Ox médian du conducteur rouge en prenant le conducteur noir comme l'élément source avec un courant de 1 A.
- <u>Courbe rouge :</u> elle est obtenue sur l'axe Ox médian du conducteur noir en prenant le conducteur rouge comme l'élément source avec un courant de 1 A.

Nous observons pour cet exemple qu'il y a une nette différence de variation entre les deux courbes. En prenant le conducteur le plus long comme élément source, nous obtenons une courbe de **A** qui a beaucoup moins de variation que dans le sens inverse. Cette courbe nécessite moins de points de Gauss pour une intégration numérique avec une bonne précision. Cette intégrale correspond à l'inductance mutuelle partielle entre les deux éléments conducteurs. La valeur de cette inductance mutuelle partielle est étudiée en fonction du nombre de points de Gauss dans la Figure II.8. Deux courbes y sont représentées :

— Une courbe en noir qui correspond au cas où l'élément noir est l'élément source.



FIGURE II.7 – Potentiel vecteur magnétique **A** sur l'axe Ox médian du : (Courbe noire) conducteur rouge créé par le conducteur noir, (Courbe rouge) conducteur noir créé par le conducteur rouge.

— Une courbe en rouge qui correspond au cas où l'élément rouge est l'élément source.



FIGURE II.8 – Valeurs de l'inductance mutuelle partielle en fonction du nombre de points de Gauss pour une précision de ϵ =1e-3. (Courbe noire) l'élément conducteur noir est l'élément source (Courbe rouge) l'élément conducteur rouge est l'élément source

La précision relative ϵ est calculée entre deux itérations d'évaluation de l'inductance mutuelle partielle en utilisant l'expression suivante :

$$\epsilon = \frac{||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC} - \mathbf{L}_{i-1}^{eS,eC}||}{||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC}||}$$
(II.8)

avec :

- -eS, eC: l'élément source et l'élément cible respectivement.
- $\mathbf{L}_{i}^{eS,eC}$: inductance mutuelle partielle entre les éléments eS et eC à l'itération i.
- $\mathbf{L}_{i-1}^{eS,eC}$: inductance mutuelle partielle entre les éléments eS et eC à l'itération précédente.

Pour une précision relative de $\epsilon = 1e-3$, la bonne évaluation de l'inductance mutuelle partielle nécessite un nombre de points de Gauss qui varie beaucoup entre les deux configurations comme le montre la Figure II.8. Le cas où le conducteur rouge est l'élément source est plus favorable pour une bonne intégration numérique, car le potentiel vecteur magnétique généré est quasi-constant sur l'élément cible.

Le besoin de précision est également présent pour l'inductance propre partielle d'un élément conducteur, car elle est également sensible à cette intégration. Comme le montre la Figure II.9, le calcul de l'inductance propre partielle de l'élément conducteur rouge a une erreur de plus de 10% entre la première et la dernière itération.



FIGURE II.9 – Valeur de l'inductance propre partielle en fonction du nombre de points de Gauss pour une précision de $\epsilon = 1e-3$ sur le conducteur rouge.

Un outil d'intégration avec nombre de points de Gauss adaptatifs est développé. Il permet également d'adapter le sens de l'intégration en fonction de la taille et de la distance entre les deux éléments de l'interaction. Cet outil est présenté dans ce qui suit.

II.5.a-i Outil d'intégration avec points de Gauss adaptatif

L'outil d'intégration adaptatif est présenté ci-dessous dans l'algorithme 1. Pour chaque type d'élément de maillage, une table de points de Gauss associée est définie. Un critère relatif de convergence d'une interaction source-cible (eS, eC) est développé comme dans l'équation (II.8). Le critère considère l'erreur relative (ϵ) entre l'itération courante (i) et l'itération précédente (i-1) sur la norme des matrices élémentaires d'inductances partielles. Nous verrons qu'un critère absolu de convergence doit être considéré pour traiter des cas particuliers, comme les zéros numériques.

L'algorithme a deux boucles principales : une sur les éléments cibles et une sur les éléments sources. Pour chaque élément cible, une boucle sur les éléments sources est répétée jusqu'à ce que toutes les interactions source-cible convergent. Pour accélérer l'algorithme à chaque itération, les éléments sources dont la condition de convergence est satisfaite sont retirés de la boucle, et leurs interactions ne sont plus recalculées. Le nombre de points de Gauss est augmenté à chaque itération afin qu'on atteigne la convergence avec la précision souhaitée.

Pour détecter le meilleur sens pour la séquence de l'intégration numérique $((\int eC \int eS)$ ou l'inverse $(\int eS \int eC)$, une étude est faite entre l'élément source et cible en fonction de la taille et de la distance les séparant. Pour inverser le sens de l'intégration, la comparaison doit satisfaire une des deux conditions suivantes : Condition 1:

 $[rayonSphere(eC) > 2 \cdot rayonSphere(eS)]$ && [rayonSphere(eC) > dist2Elements]

- Condition 2 :

[rayonSphere(eC) - rayonSphere(eS)] > dist2Elements

avec :

— rayonSphere(élément) : le rayon de la sphère englobante de "élément".

— *dist2Elements* : distance entre les deux barycentres des éléments source et cible.

Ces deux conditions ont été déduites en effectuant des tests paramétriques géométriques sur deux éléments hexaédriques. Pour la simplicité du code, ces conditions sont utilisées sur les autres types d'éléments, car on suppose que l'étude sur les hexaèdres donne le pire cas de configuration.

La précision relative de l'équation (II.8) peut ne pas être adéquate comme critère de convergence dans certains cas. Par exemple, quand deux éléments conducteurs hexaédriques ou linéiques ont deux directions orthogonales entre elles, l'inductance mutuelle partielle dans ce cas est nulle. Pour ce cas l'équation (II.8) donnera une valeur infinie comme résultat entre deux itérations. Par conséquent, on doit détecter si la valeur de la mutuelle est nulle ou pas. Dans le calcul numérique, nous pouvons avoir un zéro numérique qui n'est pas égale à un zéro "0". Dans ce cas, aucun des deux critères de convergences précédents ne pourra arrêter le calcul. Pour pallier ce problème, un critère de convergence absolu est proposé, il consiste en :

- 1. Faire un pré-calcul approximatif des inductances propres partielles $\hat{\mathbf{L}}$ avec un point de Gauss .
- 2. Calculer pour chaque élément source et cible le critère $\epsilon_{absolu} = \sqrt{\tilde{\mathbf{L}}_{source}} \tilde{\mathbf{L}}_{cible} \times 10^{-6}$

A travers ce critère, la précision sur la valeur d'une inductance mutuelle partielle entre deux éléments est supposée suffisante quand la mutuelle est d'ordre inférieure de 10^{-6} à celui de l'inductance propre de ces deux éléments. Pour une valeur de $||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC} - \mathbf{L}_{i-1}^{eS,eC}||$ inférieure à cet ordre, on considère que la mutuelle a convergé, ce qui justifie l'utilisation du critère ϵ_{absolu} .

 $\begin{array}{l} \text{Donc pour résumer, deux critères de convergence sont mis en place tels que :} \\ -- & \text{Critère relatif entre deux itérations : } \frac{||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC} - \mathbf{L}_{i-1}^{eS,eC}||}{||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC}||} < \text{précision } \epsilon. \\ -- & \text{Critère absolu pour les zéros numériques : } ||\mathbf{L}_{i}^{eS,eC} - \mathbf{L}_{i-1}^{eS,eC}|| < \sqrt{\tilde{\mathbf{L}}_{source}\tilde{\mathbf{L}}_{cible}} \times 10^{-6}. \end{array}$ Le calcul est arrêté lorsqu'il y a vérification d'un des deux critères.

Afin de gagner en temps de calcul, la première boucle "for each" de l'algorithme (1) est parallélisée en calcul multithread CPU. Cet algorithme est également adapté au cas d'utilisation de la compression matricielle AMLFMM. Il est récrit tel que :

Pour l'algorithme (2), la parallélisation du calcul en multithread CPU est faite sur la boucle "for each" des boites d'éléments proches, car cette configuration a une meilleure performance que la précédente.

Algorithm 1 Outil d'intégration adaptatif	
1: procedure INTÉGRATIONADAPTATIVE (ElementsSources, ElementsCibles, précision	$\epsilon)$
2: for each (ElementsCibles : indice eC) do	
3: plusIteration = vrai	
4: $nombrePointsGauss = 1$	
5: while (plusIteration == vrai) do	
6:	
7: for each (ElementsSource : indice eS) do	
8: if (Condition 1 or Condition 2) then	
9: InversionIntegrale (eS, eC) %Inversion de l'intégration source-cible	
10: end if	
11: %Calcul de la double intégrale de l'inductance	
12: $L = CalculDoubleIntegrale(eS, eC, nombrePointsGauss)$	
13: if $(\text{ErreurRelative}(L) < \epsilon$ or $L==0$ or $\text{ErreurAbsolue} < \epsilon_{absolu})$ then	
14: %Assemblage de L dans le matrice globale	
15: AssemblageDansMatrice(L)	
16: else	
17: %Ajout de l'élément eS à la liste des éléments non-convergés	
18: $ListeElementsSourceTemporaire = AjoutElement(eS)$	
19: end if	
20: end for	
21: %Augmentation du nombre de points de Gauss	
22: if (ListeElementsSourceTemporaire $==$ null) then	
23: %Convergence de tous les éléments sources, arrêt de la boucle while	
24: $plusIteration = faux$	
25: else%Nouvelle boucle avec les éléments sources non-convergés	
26: Elements Source = Liste Elements Source Temporaire	
27: AugmentationNombrePointsGauss(nombrePointsGauss)	
28: end if	
29: end while	
30: end for	
31: end procedure	

II.5.b Exemple d'application simple : Plaque et bobine carrée

Un exemple simple est présenté dans la Figure II.10. Il montre un couplage inductif entre une bobine conductrice d'une spire carrée et une région mince conductrice. La bobine est alimentée par une source de tension de 1 V avec une fréquence qui varie de 1 Hz à 10 MHz.

Le dispositif est maillé comme suit :

- Bobine carrée : 4 éléments hexaédriques.
- Plaque mince : 10 000 éléments quadrangulaires (sur-maillée).

Nous voulons observer la densité de courant induite dans la plaque mince par la bobine carrée, ainsi que les pertes Joule. Pour ce faire, la formulation RLM en région mince (I.50) est utilisée avec un solveur circuit en mailles indépendantes.

Algorithm	2	Outil	d	'intégration	adaptatif	$\mathbf{e}\mathbf{n}$	FMM
-----------	----------	-------	---	--------------	-----------	------------------------	-----

1: procedure INTÉGRATIONADAPTATIVEFMM (ElementsSources, ElementsCibles, ϵ)

- 2: %Recherche des éléments géométriquement proches, et répartition par boites
- $3: \qquad {\rm Boites Elements Proches} = {\rm Construction Boites Proches} ({\rm Elements Sources}, {\rm Elements Cibles})$
- 4: **for each** BoitesElementsProches : boite **do**
- 5: %Pour chaque boite, récupération des éléments sources
- 6: ElementsSourcesProches = RecuperationElementsSourcesProches(boite)
- 7: %Pour chaque boite, récupération des éléments cibles
- 8: ElementsCiblesProches = RecuperationElementsCiblesProches(boite)
- 9: %Intégration adaptative avec l'algorithme (1) sur les éléments proches
- 10: IntégrationAdaptative(ElementsSourcesProches,ElementCiblesProches, ϵ)

```
11: end for
```

12: end procedure



FIGURE II.10 – Exemple de couplage inductif entre une plaque mince et une bobine d'une spire

Les régions plaque mince et bobine carrée ont un indice de 1 et 2 respectivement. La matrice d'impédance résultante est de la forme suivante :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} + j\omega \mathbf{L}_{11} & | & j\omega \mathbf{M}_{12} \\ \hline j\omega \mathbf{M}_{21} & | & \mathbf{R}_{22} + j\omega \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

- \mathbf{R}_{11} et \mathbf{R}_{22} : matrices creuses correspondantes aux termes résistifs de la région plaque et de la région bobine respectivement.
- \mathbf{L}_{11} et \mathbf{L}_{22} : matrices pleines correspondantes aux termes inductifs (propres et mutuelles) de la région plaque et de la région bobine respectivement.
- \mathbf{M}_{12} et \mathbf{M}_{21} : matrices pleines correspondantes aux termes de couplages inductifs entre la région plaque et la région bobine.

Afin de voir l'apport de l'outil d'intégration avec points de Gauss adaptatifs, les résultats obtenus avec l'outil sont comparés aux résultats obtenus par une intégration standard. Cette intégration standard est faite avec un nombre de points de Gauss fixes, et le sens de l'intégration source-cible n'est pas interverti.

Le nombre de points de Gauss utilisé pour l'intégration standard est le suivant :

- 4 points pour les éléments de type quadrangle.
- -8 points pour les éléments de type hexaèdre.

La répartition de la partie réelle et la partie imaginaire de la densité de courant est obtenue dans la Figure II.11. Nous observons que des imprécisions apparaissent sur la plaque lors de



FIGURE II.11 – Densité de courant dans la plaque à 1000 Hz créée par une bobine : (gauche) parties réelles, (droite) parties imaginaires. (haut) intégration standard, (bas) intégration adaptative. (Mises à la même échelle).

l'utilisation de l'intégration standard. Ces imprécisions sont liées à une mauvaise intégration numérique des potentiels vecteurs magnétiques sur les éléments de la plaque et également sur ceux de la bobine. En revanche, les résultats obtenus avec l'outil d'intégration adaptatif ne montrent aucune irrégularité.

Concernant le calcul des inductances mutuelles partielles entre la bobine et la plaque, dans ce cas précis, le fait de faire l'intégration dans le bon sens suffit pour avoir une bonne précision, c'est-à-dire les éléments de la bobine comme éléments sources et ceux de la plaque des éléments cibles en raison de l'écart important de leurs tailles. Inversement, si on ne fait pas l'intégration dans le bon sens, même en adaptant le nombre de points de Gauss dans le cas où un élément de la plaque est l'élément source et un de la bobine est l'élément cible, l'intégrale sera imprécise et elle sera coûteuse car l'algorithme va fortement augmenter le nombre de points de Gauss jusqu'à 13 824 voire 1 000 000 pour chaque interaction ! Cela est justifié par la forme du potentiel vecteur magnétique observée sur l'élément de la bobine qui possède des valeurs non nulles très locales (presque un Dirac).

L'observation discutée ci-dessus est faite pour une fréquence de 1 kHz. Bien qu'elle

soit valable pour d'autres fréquences, nous étudierons néanmoins dans ce qui suit le comportement des grandeurs globales (pertes Joule) sur le dispositif en fonction de toutes les fréquences de la simulation.



FIGURE II.12 – Écart relatif sur les pertes Joule entre l'intégration standard et l'intégration adaptative. (Gauche) Pertes dans la plaque, (Droite) Pertes dans la bobine.

La Figure II.12 montre l'écart relatif sur les pertes Joule entre l'intégration standard et l'intégration avec points de Gauss adaptatifs. Cet écart est calculé sur les pertes dans la plaque et aussi dans la bobine. Il est exprimé sous la forme suivante :

$$\epsilon = 100 \times \left| \frac{PJoule_{standard} - PJoule_{adaptative}}{PJoule_{adaptative}} \right|$$
(II.9)

On observe sur la figure qu'en fonction de la nature électrique du problème (résistive ou inductive), l'imprécision sur le calcul des grandeurs globales est plus ou moins impactée par l'imprécision de calcul des termes inductifs $\mathbf{L}_{(i,j)}$. À basse fréquence où le dispositif est de nature résistive, l'écart sur les pertes Joule est beaucoup plus faible qu'aux fréquences plus élevées. On voit à travers la phase de l'impédance (vue par la source) que lorsque le dispositif commence à tendre vers un comportement inductif, l'écart sur les pertes Joule augmente graduellement. Néanmoins, l'écart sur les pertes Joule dans la plaque reste significatif à basse fréquence, elle est d'environ 2 % pour l'intervalle de fréquence entre 1 et 100 Hz. Cela est dû aussi à l'imprécision des calculs des termes croisés des matrices \mathbf{M}_{12} et \mathbf{M}_{21} , car ces termes traduisent les courants induits par la bobine dans la plaque.

La différence des tailles des éléments des deux régions et le faible entrefer entre elles entraînent des difficultés d'intégration. La taille des hexaèdres de la bobine est d'environ 50 fois plus grande que celle des quadrangles de la plaque, d'où l'intérêt de faire l'intégration dans le bon sens. C'est-à-dire, les éléments de grande taille en tant que sources et les éléments de taille plus faible en tant que cibles.

Bien que cet exemple soit simple, on peut retrouver le même comportement en considérant par exemple de longs câbles électriques dans une voiture, un avion ou autre. La modélisation de l'ensemble et en considérant la tôle de véhicules qui est souvent finement discrétisée peut nous confronter à cette difficulté d'intégration du fait de l'hétérogénéité du maillage en type et en taille d'éléments. A l'aide de nos algorithmes, la bonne précision de calcul est assurée pour ce type de modélisation complexe.

II.5.c Performance de la formulation RLM

II.5.c-i Intégration numérique : standard versus points de Gauss adaptatif

L'intégration avec points de Gauss adaptatifs offre une garantie sur la précision des résultats de simulation, nous souhaitons néanmoins connaître son coût en temps de calcul. Les simulations qui sont présentées sont faites avec un solveur itératif GMRes [38] ayant un critère relatif de convergence sur le résidu égal à 1E-8.

Dans le tableau II.2, les temps de calcul sont présentés pour l'intégration avec points de Gauss adaptatifs et l'intégration standard pour l'exemple précédent de la plaque et bobine conductrices. Ces temps sont séparés en deux catégories : temps d'intégration, et temps totaux de la résolution. Nous rappelons que l'intégration de L n'est faite qu'une seule fois dans le cas d'une simulation multifréquences avec maillage constant, car le noyau de Green est statique et ne dépend pas de la fréquence. La simulation a été réalisée sur deux machines de calcul différentes pour voir l'impact de la parallélisation, telles que :

- Machine 1 : Laptop Dell Precision 7520, 4 cœurs, Intel(R) Core(TM) i7-7820HQ CPU @ 2.90GHz, 64 Gb RAM.
- Machine 2 : Station de calcul, 40 cœurs, Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2698 v4 @ 2.20GHz, 256 Gb RAM.

Machine de calcul	Machin	ne 1	Machine 2	
Temps de calcul	Intégration	Totale	Intégration	Totale
Intégration standard	$20 \min$	$127 \min$	33 min	$70 \min$
Intégration adaptative	$33 \min$	$136 \min$	14 min	$46 \min$

TABLE II.2 – Temps de calcul pour l'exemple plaque et bobine conductrice dans les deux cas d'intégration avec deux machines de calcul différentes

Les temps de calcul présentés dans le tableau (II.2) peuvent surprendre. Nous remarquons en premier lieu que le type de machine influe directement sur les temps de calculs des deux types d'intégration. Pour l'intégration avec points de Gauss adaptatifs, la machine 2 accélère grandement l'intégration et la résolution par rapport à l'autre machine. Cela est expliqué par le fait que l'algorithme (1) est parallélisé en multithread en partie, et la machine 2 offre plus de ressources de calcul que la machine 1 dans ce sens. Bien que la machine 2 a dix fois plus de cœurs que l'autre, le temps de calcul ne se divise pas par dix à cause des nombreuses synchronisations d'écriture dans des tableaux présents dans le code, et également à une présence de code séquentiel non-parallélisé.

L'intégration standard quant à elle est vectorisée mais non-parallélisée, les taches sont exécutées en mono-cœur, elle est plus rapide sur la machine 1 en raison de la vitesse du processeur qui est de 3,6 GHz contre 2,7 GHz pour la machine 2. En mono cœur, la vitesse du processeur influe beaucoup sur le temps de calcul. Néanmoins, le temps total de résolution diminue sur la machine 2, car les produits matrice-vecteur sont parallélisés.

Les temps de calcul présentés dans le tableau (II.2) sont réduits en utilisant la compression matricielle AMLFMM, ils sont présentés sur le tableau (II.3).

En conclusion, la procédure d'intégration avec points de Gauss adaptatifs est intéressante du point de vue du gain en précision, nous avons vu que selon la machine de calcul utilisée,

Machine de calcul	Machin	ne 1	Machine 2	
Temps de calcul	Intégration	Totale	Intégration	Totale
Intégration standard	22 s	113 min	25 s	$37 \min$
Intégration adaptative	$2 \min$	109 min	$1 \min 27 s$	$32 \min$

TABLE II.3 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple plaque et bobine conductrices dans les deux cas d'intégration avec deux machines de calcul différentes

l'intégration peut être assez lourde, mais heureusement l'utilisation de la compression matricielle AMLFMM permet un gain important en temps de calcul, sans perdre en précision.

II.5.c-ii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles indépendantes

Les simulations présentées ci-dessus sont faites avec le solveur circuit à mailles indépendantes (II.7). En s'inspirant des résultats de l'article de G. Meunier *et Al.* [26], un préconditionneur basé sur la décomposition LU de la matrice creuse résistive \mathbf{R} est utilisé. Cette stratégie de préconditionnement est notée par "Stratégie R". Le code de la décomposition LU est issu de la bibliothèque MUMPS [51]. Le préconditionneur s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{P_{LU_{MI}}} = LU \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mi_Z} \mathbf{R} \mathbf{M}_{mi_Z}^T & -\mathbf{M}_{mi_I} & 0\\ \mathbf{M}_{mi_I}^T & 0 & 1\\ \mathbf{M}_{mi_U}^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(II.10)

La propriété de matrice creuse de \mathbf{R} est partiellement perdue en faisant le produit $(\mathbf{M}_{mi_Z} \mathbf{R} \mathbf{M}_{mi_Z}^T)$, surtout dans le cas où la matrice \mathbf{M}_{mi_Z} comporte des longues mailles (issues de trous géométriques par exemple), impliquant un coût supplémentaire pour la décomposition LU en temps et en mémoire.

Dépendant de la nature du dispositif, le choix de l'utilisation d'un préconditionneur construit en utilisant exclusivement les termes \mathbf{R} peut ne pas être performant. Nous pouvons voir sur la Figure II.13 que dès que la nature du dispositif tend à devenir inductive, le nombre d'itérations du solveur GMRes augmente à cause de la perte en efficacité du préconditionneur.



FIGURE II.13 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence en compression AMLFMM et sans compression avec le préconditionneur basé sur la matrice résistive \mathbf{R}

Pour tenter de gagner en performance lors de la résolution avec le solveur GMRes, des termes de la matrice inductive sont rajoutés au préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ (II.10). Deux stratégies sont proposées dans le cas avec compression AMLFMM :

- 1. Stratégie R+L : rajouter aux termes résistifs R les termes inductifs correspondants aux inductances propres partielles.
- 2. Stratégie L : rajouter aux termes résistifs **R** tous les termes inductifs issus de bloc des interactions proches de l'AMLFMM.

Dans le cas de la stratégie L, la performance de la décomposition LU de $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ est directement liée au taux de compression obtenu avec l'AMLFMM. Si le taux de compression est faible, la décomposition LU sera très lourde en temps et en ressource mémoire, car du fait de sa complexité cubique, il faut garder à l'esprit que plus il y a de termes dans la matrice, plus c'est lourd. Par conséquent, l'intérêt du préconditionnement sera perdu.

La Figure II.14 montre l'évolution du nombre d'itérations du solveur GMRes pour trois cas de préconditionnement : la stratégie R, la stratégie R+L, et la stratégie L.



FIGURE II.14 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence en compression AMLFMM pour trois cas de préconditionnement : la stratégie R, la stratégie R+L, et la stratégie L

On remarque que le préconditionnement avec la stratégie R+L détériore la convergence du solveur GMRes à partir de 100 kHz, alors que l'objectif premier est de l'améliorer à ces fréquences où l'effet inductif est dominant. En ce qui concerne la stratégie L, la convergence reste globalement la même par comparaison à celle du préconditionnement avec la matrice **R**.

Le nombre d'itérations du solveur GMRes n'est pas le seul facteur à observer. Le temps de calcul est un facteur plus important. Dans le tableau (II.4), les temps de calculs des trois cas de préconditionnement sont présentés, ils sont obtenus avec l'utilisation de la machine 2 (Station de calcul, 40 cœurs, Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2698 v4 @ 2.20GHz, 256 Gb RAM). Le tableau inclut le temps de la décomposition LU pour chaque pas de fréquence et le temps totale de la résolution. Le préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ est reconstruit pour chaque fréquence en raison de sa dépendance à la valeur de la fréquence dans $j\omega \mathbf{L}$, et également dans la matrice \mathbf{R} où une conductivité complexe (I.56) est utilisée en raison de l'hypothèse région mince. Dans le cas où la matrice \mathbf{R} n'est pas dépendante de la fréquence, la décomposition LU de la matrice de préconditionnement avec la stratégie R peut être construite qu'une seule fois pour une résolution multifréquences.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ par fréquence	Résolution totale
$\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ avec la stratégie R	40 s	$32 \min$
$\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ avec la stratégie R+L	43 s	$45 \min$
$\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ avec la stratégie L	$27 \min$	13 h 19 min

TABLE II.4 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple plaque et bobine conductrices pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Le cas $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ avec matrice \mathbf{R} est le plus performant des trois dans ce cas de simulation. L'ajout des termes inductifs à $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ augmente considérablement le temps de calcul sans pour autant gagner en nombre d'itérations du solveur GMRes. Le faible taux de compression causé par les segments longs de la bobine et leurs proximités avec la plaque résulte d'une matrice quasi pleine très lourde à traiter avec la décomposition LU de la stratégie L.

En raison du changement de base effectué de la base des branches à la base des mailles indépendantes, la matrice utilisée pour construire le préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ perd sa propriété de matrice creuse à cause des produits ($\mathbf{M}_{mi_Z} \mathbf{R} \mathbf{M}_{mi_Z}^T$). Dans le cas de l'utilisation du solveur circuit à nœuds indépendants (II.3), il n'y a pas de changement de base à faire sur la matrice \mathbf{R} . Dans ce qui suit, nous allons étudier ce cas de solveur circuit avec les trois stratégies de préconditionnement précédentes.

II.5.c-iii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds indépendants

Dans cette partie, le solveur circuit à nœuds indépendants non minimal (II.3) est utilisé pour la résolution de l'exemple plaque et bobine conductrices précédent. Les trois stratégies de préconditionnement présentées précédemment sont comparées. Nous ne regarderons que le cas d'intégration avec points de Gauss adaptatifs et avec un calcul sur la machine 2.

Comme il a été précisé précédemment dans ce cas de solveur circuit, il y a plus d'inconnues que dans le cas d'un solveur circuit à mailles indépendantes (60 000 inconnues environ contre 20 000 pour l'exemple plaque et bobine conductrices). Par conséquent, nous supposons que le solveur itératif GMRes devra prendre plus d'itérations pour converger. La matrice de préconditionnement dans ce cas change, on l'écrit tel que :

$$\mathbf{P}_{\mathbf{L}\mathbf{U}_{\mathbf{N}\mathbf{I}}} = LU \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ni_{Z}} & 0 & 0 & \mathbf{M}_{ni_{U}} \\ \mathbf{R} & \mathbf{M}_{ni_{Z}}^{T} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ni_{U}}^{T} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ni_{I}}^{T} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(II.11)

La Figure II.15 montre le nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour les deux solveurs circuits pour un préconditionneur avec matrice résistive, ces courbes sont obtenues dans le cas d'une intégration sans compression matricielle.

L'efficacité de préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{NI}}}$ avec stratégie R est observée en basses fréquences. A ces fréquences, nous retrouvons un comportement quasi-identique entre les deux solveurs circuits. Cependant, un écart se creuse entre les deux courbes à partir de 10 kHz, l'efficacité du préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{NI}}}$ diminue impliquant plus de difficultés de convergence du solveur GMRes dans le cas des nœuds indépendants en raison du nombre plus important d'inconnues dans le système linéaire résolu.



FIGURE II.15 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence (sans compression AMLFMM) pour les deux solveurs circuits pour un préconditionneur avec stratégie R.

Malgré ces itérations en plus du solveur GMRes dans le cas des résolutions avec nœuds indépendants, comme le présente le tableau (II.5), les temps de calcul restent largement inférieurs à ceux des résolutions avec les mailles indépendantes. L'absence de changement de base dans le préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{LUNI}}$ permet de garder une structure creuse de la matrice de préconditionnement, impliquant ainsi une décomposition LU moins complexe et plus rapide.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU_{NI}}}$ par fréquence	Résolution totale
$\mathbf{P_{LU_{NI}}}$ avec la stratégie R	1,3 s	13 min
$\mathbf{P_{LU_{NI}}}$ avec la stratégie R+L	$1,75 { m \ s}$	11 min
$\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{NI}}}$ avec la stratégie L	20 s	21 min

TABLE II.5 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple plaque et bobine conductrices pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI

La Figure II.16 montre l'évolution du nombre d'itérations du solveur itératif GMRes pour les trois stratégies de préconditionnement en fonction de la fréquence. Les trois stratégies de préconditionnement donnent presque un comportement identique sur la convergence du solveur GMRes en fonction de la fréquence. Le solveur est également impacté dans ce cas par la nature électrique du dispositif étudié, dès que l'on a un comportement inductif, le préconditionneur perd progressivement en efficacité par comparaison à celui sur l'intervalle avec comportement résistif.

Dans ce qui suit, nous allons tester la performance du solveur circuit à nœuds indépendants minimal qui permet d'écrire le système linéaire à résoudre avec un nombre d'inconnues inférieur au solveur actuel.

II.5.c-iv Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds indépendants minimal

Le solveur circuit à nœuds indépendants minimal (II.4) est utilisé pour refaire les simulations effectuées dans les deux sections précédentes. Les calculs sont faits sur la machine



FIGURE II.16 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour le solveur circuit à nœuds indépendants pour les trois stratégies de préconditionnement.

2 et avec une intégration avec points de Gauss adaptatif. Dans ce cas, le nombre d'inconnues est comparable à celui obtenu avec le solveur circuit à mailles indépendantes (20006 inconnues contre 19705).

Du coté préconditionnement, ce solveur circuit nécessite deux préconditionneurs, car nous rappelons qu'il a deux systèmes linéaires à résoudre, le principal et l'interne. Ce dernier est résolu à chaque itération de résolution du système principal.

Nous rappelons le système linéaire interne comme suit :

$$\mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{V}_{b_Z} \quad = > \quad \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{V}_{b_Z}$$

On peut utiliser sur la matrice \mathbf{Z}_b les trois stratégies de préconditionnement présentées précédemment avec la décomposition LU. Dans ce cas, les matrices d'incidences n'interviennent pas dans le préconditionneur, seuls des termes de \mathbf{Z}_b sont utilisés. C'est à dire, selon la stratégie choisit (R, R+L, ou L), les termes peuvent être uniquement résistifs ou être une combinaison de termes résistifs et inductifs.

Pour le système linéaire principal, le préconditionneur est construit sous la forme suivante :

$$\mathbf{P_{LU_{NI_{min}}}} = LU \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} \ (diag(\mathbf{Z_b}))^{-1} \ \mathbf{M}_{ni_Z}^T & 0 & -\mathbf{M}_{ni_U} \\ \mathbf{M}_{ni_U}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{M}_{ni_I}^T & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La Figure II.17 montre le nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour les trois solveurs circuits (mailles indépendantes, nœuds indépendants et nœuds indépendants minimal) pour un préconditionneur avec la stratégie R (matrice résistive). La stratégie est appliquée sur système interne dans le cas du solveur circuit à nœuds indépendants minimal. Le nombre d'itérations du solveur GMRes pour le système principal du solveur circuit à nœuds indépendants minimal est supérieur à celui des deux autres solveurs circuits sur tout l'intervalle de fréquence étudié. Le temps de calcul sur l'ensemble des fréquences est également très supérieur comme il est présenté sur le tableau II.6.

La résolution du système linéaire interne à chaque itération de résolution du système linéaire principal coûte très cher en temps de calcul, ce qui explique l'écart important avec les



FIGURE II.17 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour les trois solveurs circuits pour un préconditionneur avec matrice résistive.

Solveur circuit	Temps de résolution totale
Mailles indépendantes	$32 \min$
Nœuds indépendants	13 min

TABLE II.6 – Temps de calcul pour l'exemple plaque et bobine conductrice pour les trois solveurs circuits préconditionnés avec la stratégie R avec compression AMLFMM.

temps obtenus avec les deux autres solveurs circuits. Lors du changement de stratégie de préconditionnement du système linéaire interne, la convergence du solveur principal reste inchangée comme présentée sur la Figure II.18, et les temps de calcul ne diminuent pas, bien au contraire comme le montre le tableau II.7.



FIGURE II.18 – Nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour le solveur circuit à nœuds indépendants minimal pour les trois stratégies de préconditionnement

Les temps de calcul sont également élevés dans le cas du préconditionnement avec les deux stratégies R+L et L, le temps de construction du préconditionneur interne est plus long dans ces cas. Nous arrivons à la conclusion que le solveur circuit à nœuds indépendants minimal n'est pas performant dans le cas du préconditionnement LU construit avec les stratégies que nous avons présentées.

Temps de calcul	Résolution totale
Stratégie R	36 heures
Stratégie R+L	6 jours 6 heures
Stratégie L	3 jours 14 heures

TABLE II.7 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple plaque et bobine conductrice pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI minimal.

II.5.c-v Sans préconditionnement

Dans cette section, la convergence des trois solveurs circuits est étudiée dans le cas d'une résolution GMRes sans préconditionneur.

Le solveur circuit à nœuds indépendants minimal n'a pas pu converger dès le premier point de fréquence après 20 000 itérations du solveur GMRes. De ce fait, seuls les solveurs circuits à mailles indépendantes et à nœuds indépendants sont étudiés. La Figure II.19 montre l'évolution du nombre d'itérations du solveur GMRes pour une résolution sans préconditionneur.

Résolution sans préconditionneur



FIGURE II.19 – nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence pour les solveurs circuits à mailles indépendantes et à nœuds indépendants sans préconditionneur.

Les temps de calcul correspondants à chaque résolution sont présentés sur le tableau II.8 ci-dessous.

Solveur circuit	Temps de résolution totale
Mailles indépendantes	3 h 22 min
Nœuds indépendants	3 j 1 h

TABLE II.8 – Temps de calcul pour l'exemple plaque et bobine conductrice pour les solveurs circuits à mailles indépendantes et à nœuds indépendants sans préconditionneur et sans compression AMLFMM.

Le solveur circuit à nœuds indépendants prends énormément d'itérations pour converger sans préconditionneur, et c'est corrélé avec le temps de calcul qui est également conséquent pour un problème avec 60 000 inconnues sur 29 points de fréquences. Les trois stratégies du préconditionneur $\mathbf{P}_{\mathbf{L}\mathbf{U}_{\mathbf{N}\mathbf{I}}}$ s'avèrent efficaces par comparaison à une résolution sans préconditionneur, et cela même quand le nature électrique du dispositif est inductive.

Le solveur circuit à mailles indépendantes est plus performant dans ce cas, la comparaison avec le temps de calcul obtenu avec la stratégie L de préconditionnement (environ 13h) rappelle qu'il est important de bien construire le préconditionneur, car au lieu d'améliorer les temps de calcul cela peut les détériorer.

II.5.d Conclusion sur la partie RLM

Un outil d'intégration avec points de Gauss adaptatifs est proposé en deux algorithmes : un premier sans compression matricielle et un deuxième avec la compression AMLFMM. Cet outil permet d'améliorer la précision sur les calculs du noyau de Green des interactions entre les éléments du maillage. L'impact de cette amélioration est nettement visible dans le cas où la nature électrique du dispositif d'intérêt est inductive. Son utilisation est importante lorsque le maillage est hétérogène (en type et en taille d'élément), quelle que soit la nature du dispositif. La parallélisation en multithread CPU a permis de réduire le coût du calcul itératif des interactions en fonction du nombre de points de Gauss.

La convergence du solveur itératif GMRes lors de la résolution du système linéaire final a été étudiée en fonction de la fréquence d'utilisation. Nous avons montré l'impact du choix du solveur circuit à utiliser sur les temps de calcul. Dans le cas sans préconditionnement, le solveur circuit à mailles indépendantes nécessite moins d'itérations et moins de temps de calcul pour faire converger le solveur GMRes, contrairement au solveur circuit à nœuds indépendants qui prend beaucoup plus d'itérations et de temps de calcul. Dans ce cas, le solveur circuit à nœuds indépendants minimal n'a pas pu converger.

Dans le cas du préconditionnement avec la décomposition LU, trois stratégies de construction de la matrice de préconditionnement LU ont été comparées. La comparaison a montré que le choix des termes de préconditionnement n'est pas simple, car la complexité cubique de la décomposition LU a montré des limitations en augmentant le nombre de termes dans la matrice de préconditionnement sans améliorer la convergence du solveur et cela pour les trois solveurs circuits. Le solveur circuit à nœuds indépendants a montré le meilleur temps de calcul, car la matrice de préconditionnement garde sa forme creuse contrairement au solveur circuit à mailles indépendantes où cette matrice change de base et perd la propriété de matrice creuse. La stratégie d'utilisation de la matrice résistive pour préconditionner semble être la meilleure dans le cas de la formulation RLM. Le solveur circuit à nœuds indépendants minimal est clairement très lent et non performant, son utilisation n'est pas conseillée.

II.6 Étude de la formulation PEEC-RLMC

La montée en fréquence d'excitation des dispositifs d'électronique de puissance a créé un besoin important de modélisation des effets capacitifs résultants. Qu'il s'agisse d'effets parasites ou d'effets recherchés, par expérience, leur prise en compte dans les formulations PEEC non-structurées a tendance à dégrader la résolution du système linéaire résultant, surtout quand le solveur circuit avec l'approche mailles indépendantes (II.7) est utilisé.

Dans ce qui suit, nous allons étudier un exemple de microstrip composé de deux pistes conductrices et un plan de masse en cuivre [33]. Cette étude a pour objectif de comparer les comportements des différents solveurs circuits et les préconditionneurs associés dans un contexte de formulation PEEC RLMC.

L'exemple d'application est présenté dans la Figure II.20 avec les dimensions géométriques qui le caractérisent, ses quatre ports sont connectés comme suit :

- Port 1 : charge $R_1 = 50 \Omega$ en série avec une source de tension de 1 V.
- Port 2 : charge $R_2 = 50 \Omega$.
- Port 3 : charge $R_3 = 50 \Omega$.
- Port 4 : charge $R_4 = 50 \Omega$.



FIGURE II.20 – Exemple d'application microstrip

La piste entre les ports 3 et 4 est la victime du couplage diaphonique, car seule la piste entre les ports 1 et 2 est alimentée.

Compte tenu de la faible épaisseur des pistes et du plan de masse par rapport à la distance qui les sépare, l'hypothèse de région mince peut être utilisée, par conséquent, une comparaison entre des résultats de calcul d'un modèle volumique RLMC et d'un modèle région mince RLMC est intéressante à faire.

Pour rappel, les formulations présentées dans le chapitre I ne prennent pas en compte la propagation d'onde. Pour être dans le domaine de validité de ces formulations, comme présenté dans la section I.3.a, nous devons utiliser des fréquences qui satisfont le rapport $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 10\right)$. Par curiosité scientifique, nous souhaitons aller jusqu'à $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 1\right)$ et comparer les résultats obtenus avec des résultats d'un modèle Maxwell complet "*Full wave*" obtenus avec le logiciel Altair **Feko**TM [52]. Le logiciel utilise une formulation intégrale MoM/MLFMM (Méthode des moments) avec principe d'équivalence surfacique et avec une stabilisation pour les fréquences basses, néanmoins cette formulation reste inadaptée aux basses fréquences. Pour faire la simulation sur le logiciel Feko, nous devons rajouter des fils de connexion de rayon égal à 2,5 μ m pour les 4 ports, qui lient les pistes aux différentes charges et source vers le plan de masse. Les impédances de ces fils rentrent également dans le calcul.



FIGURE II.21 – Exemple d'application microstrip sur le logiciel Altair Feko™

Les fréquences maximales f_{max_1} et f_{max_2} qui valident respectivement $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 10\right)$ et $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 1\right)$ doivent être calculées, connaissant que $d_{max} = 95 \ mm$, on a pour le cas sans matériau diélectrique :

$$f_{max_1} = 315 \text{ MHz} \quad , \quad f_{max_2} = 3,15 \text{ GHz}$$

Pour le cas avec matériau diélectrique $\epsilon_r = 4, 7,$ on a :

$$f_{max_1} = 145 \text{ MHz} \quad , \quad f_{max_2} = 1,45 \text{ GHz}$$

Dans ce qui suit, nous n'allons considérer que l'intégration avec points de Gauss adaptatifs avec une compression matricielle AMLFMM. Dans un premier temps, la simulation est faite sans le matériau diélectrique.

II.6.a Microstrip sans diélectrique

Les simulations dans ce cas sont faites pour des fréquences allant de 1 Hz à 3,15 GHz. Nous allons observer les ratios des tensions aux bornes des résistances sur les ports 3 et 4 avec la tension de la source. La comparaison est faite sur les modules et les phases des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ obtenues avec trois formulations :

- Formulation PEEC RLMC avec hypothèse région mince.
- Formulation PEEC RLMC volumique.

La discrétisation de dispositif est présentée sur la Figure II.22. Le nombre d'éléments est de : 5140 quadrangles dans le cas région mince, et 2350 hexaèdres dans le cas volumique. La résolution est faite avec le solveur circuit à nœuds indépendants.

Les courbes des modules et des phases des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ sont présentées dans la Figure II.23.

Les résultats obtenus par le logiciel Feko sont incorrects entre 1 Hz et 1 MHz, la formulation considère que la phase des deux ratios est égale à 90, alors que les tensions aux bords des charges sur les ports 3 et 4 sont plutôt résistives, cela est dû au fait que dans le modèle Feko considère un matériau parfaitement conducteur PEC ($\rho = 0$). Les courbes obtenues pour la formulation avec hypothèse région mince et la formulation volumique sont quasiment



FIGURE II.22 – Discrétisation de l'exemple d'application diaphonie dans le cas sans diélectrique. (Droite) maillage surfacique, (Gauche) maillage volumique.



FIGURE II.23 – Modules et phases des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ pour les trois formulations dans le cas microstrip sans diélectrique.

identiques, sauf aux fréquences de résonances car le maillage volumique est moins dense que le surfacique qui implique une imprécision du calcul (un élément dans l'épaisseur, et moins d'élément le long des pistes).

Le choix de travailler au-delà de la fréquence $f_{max_1} = 315$ MHz jusqu'à la fréquence $f_{max_2} = 3, 15$ GHz montre des résultats assez étonnants, car les courbes obtenues par les formulations PEEC RLMC sont très proches de celles de Feko. Bien que nos formulations PEEC RLMC négligent le terme prorogatif dans le noyau de Green, il s'avère que les résultats obtenus avec ces formulations peuvent être assez corrects jusqu'à $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 1\right)$, mais peuvent présenter des imprécisions sous forme de résonances numériques inexpliquées. Ces imprécisions peuvent être observées sur la Figure II.24 pour le module et la phase du ratio $\frac{V_3}{V_{source}}$, les deux sont observées au-delà de la fréquence $f_{max_1} = 315$ MHz, la première à 1,78 GHz et la deuxième à 2,8 GHz environs. Ces résonances numériques ont été également observées dans la littérature pour la méthode PEEC structurée sous le nom de "Artefacts". Les auteurs de l'article [53] montrent sur un exemple simple composé de deux pistes conductrices parallèles qu'il peut y avoir trois raisons pour que ces imprécisions
se manifestent :

- Un maillage insuffisant et non-identique dans les deux pistes.
- Des valeurs d'intégration d'éléments partiels imprécises.
- La réduction de la complexité du modèle PEEC (modèle quasi-statique).

Les auteurs concluent que ces singularités sont observées uniquement dans le cas de formulation PEEC quasi-statique, et proposent de discrétiser encore plus la géométrie pour les réduire. Dans notre cas, nous avons discrétisé encore plus finement la géométrie mais sans amélioration des résultats. L'utilisation du modèle quasi-statique présente néanmoins le grand avantage de ne pas réassembler les matrices \mathbf{R} , \mathbf{L} et \mathbf{P} à chaque fréquence. A contrario, le modèle Maxwell complet (*Full wave*) doit réassembler ces matrices, car le noyau de Green utilisé par ce modèle dépend de la fréquence, ce qui nécessite la réintégration à chaque pas. Cependant, cette problématique des "artefacts" reste une question ouverte.



FIGURE II.24 – Résonance numérique dans le module et la phase du ratio $\frac{V_3}{V_{source}}$ dans le cas sans diélectrique.

En considérant une fréquence maximale égale à $f_{max_1} = 315$ MHz pour respecter $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 10\right)$ et pour éviter des résonances numériques, nous observons que dans le cas de cet exemple, les effets capacitifs sont négligeables aux fréquences inférieures à f_{max_1} . Pour argumenter ces propos, une simulation avec une formulation RLM région mince est faite et les résultats des ratios sont comparés à ceux obtenus avec la formulation RLMC région mince. Cette comparaison est présentée sur la Figure II.25.

Nous observons que les ratios des tensions obtenus avec les deux formulations RLM et RLMC respectivement sont quasiment identiques sur l'intervalle de fréquence de 1 Hz à 315 MHz. L'utilisation de la formulation RLMC au-delà de ces fréquences peut donc être justifiée, mais il faut être attentif et critique sur des éventuels résultats non-attendus, comme nous l'avons fait avec les résultats du logiciel Feko entre 1 Hz et 1 MHz.

Dans ce qui suit, les performances de la formulation RLMC sans diélectrique sont étudiées en fonction des stratégies de préconditionnement.

II.6.a-i Performance de la formulation PEEC RLMC sans diélectrique

Nous allons étudier la performance de la formulation PEEC RLMC sans diélectrique sur l'exemple d'application microstrip. Les simulations RLMC sont faites avec les solveurs circuits à mailles indépendantes et à nœuds indépendants. Le solveur circuit à nœuds indépendants minimal n'est pas étudié, car il s'est avéré peu efficace avec ce type de pré-



FIGURE II.25 – Comparaison des résultats des ratio $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ obtenus avec une formulation RLM et une formulation RLMC.

conditionnement par décomposition LU. Le chapitre IV montrera que son application avec un autre type de préconditionnement peut être envisagée.

Pour la partie capacitive, nous avons construit la matrice de préconditionnement de trois différentes manières :

- Matrice identité.
- Diagonale de la matrice $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$.
- Les termes proches AMLFMM (blocs diagonaux) de $\frac{\mathbf{P}}{i\omega}$

Il s'est avéré que seule la dernière est efficace. Nous choisissons de ne pas présenter tous les tests effectués et de prendre directement les termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ comme matrice de préconditionnement pour la partie capacitive et de comparer les trois stratégies de préconditionnement suivantes :

- 1. <u>Stratégie R + P</u>: Matrice **R** + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{i\omega}$.
- 2. <u>Stratégie R + L + P</u>: Matrice **R** + termes inductifs correspondants aux inductances partielles propres $(\mathbf{R}_{i,j} + j\omega \mathbf{L}_{i,j})$ + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{i\omega}$.
- 3. <u>Stratégie L + P</u> : Matrice **R** + tous les termes inductifs des blocs des interactions proches de l'AMLFMM + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{i\omega}$.

Pour cette étude, un scénario avec 32 points de fréquences répartis quasi-uniformément sur une échelle logarithmique sur l'intervalle de 1 Hz à 3,15 GHz est utilisé. La résolution est faite sur la machine 2 présentée précédemment (Station de calcul, 40 cœurs, Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2698 v4 @ 2.20GHz, 256 Gb RAM.).

II.6.a-ii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles indépendantes

Le solveur circuit à mailles indépendantes a montré dans le cas de la formulation RLM qu'il pouvait converger sans préconditionneur plus rapidement que les autres solveurs circuits testés, cependant, une fois préconditionné, ses performances restent inférieures par rapport au solveur circuit à nœuds indépendants.

Dans ce qui suit, nous allons le tester dans le cas de la formulation RLMC avec les trois stratégies de préconditionnement présentés précédemment. La Figure II.26 présente le nombre d'itérations du solveur GMRes sur l'intervalle de fréquence allant de 1 kHz à 3,15 GHz pour l'exemple microstrip surfacique. L'intervalle a été réduit car le solveur n'a pas pu converger à 1 Hz quelle que soit la stratégie de préconditionnement. Le tableau II.9 montre les temps de calcul associés au solveur pour les trois stratégies de préconditionnement.



FIGURE II.26 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip surfacique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Les trois stratégies ont quasiment un comportement identique avant 10 MHz, au-delà la stratégie R + P de préconditionnement est la moins efficace, ce qui justifie la différence significative de temps de calcul par rapport aux deux autres stratégies. Ces courbes de convergences sont également proches de celles obtenues pour l'exemple microstrip en volumique, le solveur n'a pas pu converger à 1 Hz et la "stratégie R + P" a été plus lente à converger au-delà de 10 MHz comme le montre la Figure II.27.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU_{MI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie R $+$ P	22 s	$5~\mathrm{h}$ 48 min
Stratégie R+L+P	26 s	2 h 21 min
Stratégie L+P	29 s	1 h 48 min

TABLE II.9 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip surfacique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Malgré les observations précédentes, nous ne pouvons pas tirer des conclusions claires sur un intervalle de fréquence où le solveur circuit à mailles indépendantes est performant et où il ne l'est pas, car cela dépend du dispositif étudié. Cependant, ce que l'on peut conclure, c'est qu'à très basse fréquence, le solveur a du mal à converger lorsque les effets capacitifs sont inclus dans le modèle. Une solution est d'utiliser la formulation RLM en basse fréquence, mais le problème est que dans ce cas on ne sait pas à partir de quelle



FIGURE II.27 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip volumique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P_{LU_{MI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie R+P	29 s	3 h 43 min
Stratégie R+L+P	48 s	2 h 21min
Stratégie L+P	1 min 49 s	$2~\mathrm{h}~57~\mathrm{min}$

TABLE II.10 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip volumique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

fréquence on doit revenir à la formulation RLMC, ce qui devient contraignant. Nous verrons que dans le cas du solveur circuit à nœuds indépendants, cette contrainte n'apparaît pas.

II.6.a-iii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds indépendants

Le solveur circuit à nœuds indépendants avec préconditionnement a montré un très bon comportement dans le cas de la formulation RLM, dans cette partie, il est également étudié dans le cas de la formulation RLMC avec les trois stratégies de préconditionnement précédentes. La Figure II.28 présente le nombre d'itérations du solveur GMRes par fréquence dans le cas d'un maillage surfacique avec la formulation RLMC région mince, et le tableau II.11 présente les temps de calcul associés.



FIGURE II.28 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip surfacique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P_{LU_{NI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie R+P	$0,38 \mathrm{\ s}$	1 h 08 min
Stratégie R+L+P	$0,56 \mathrm{\ s}$	19 min
Stratégie L+P	4,6 s	23 min

TABLE II.11 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip surfacique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

Les stratégies "R+L+P" et "L+P" ont un impact identique sur la convergence du solveur GMRes, elles sont plus performantes que la "stratégie R+P". On peut tenter d'expliquer ceci par le fait que les matrices issues des stratégies "R+L+P" et "L+P" englobent les trois types d'impédance (**R**, **L**, **C**) permettant d'avoir un vecteur solution à chaque itération de GMRes qui respecte mieux la physique, par conséquent plus cohérent vis-à-vis du vecteur solution finale. Alors que la "stratégie R+P" ne tiens en compte que de **R** et **C** (ou plutôt **P**).

Ce comportement est également observé sur la Figure II.29 dans le cas d'une résolution avec un maillage volumique, mais avec des temps de calcul plus élevés, car il y a 2000 inconnues en plus, mais également les produits matrice-vecteur AMLFMM sont plus lents avec les hexaèdres qu'avec des quadrangles.



FIGURE II.29 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip volumique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{NI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie $R + P$	$0,3 \mathrm{~s}$	5h 19 min
Stratégie R+L+ P	0,7 s	$52 \min$
Stratégie $L + P$	7,2 s	$59 \min$

TABLE II.12 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip volumique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

Récemment des travaux ont été menés au G2ELab par Q-A Phan *et al* [54] pour réduire la complexité de la formulation PEEC RLMC quasi-statique à travers le développement d'un couplage entre la formulation PEEC RLM et une formulation électrostatique intégrale pour la partie capacitive. Cette méthode est basée sur le regroupement de plusieurs éléments de maillage en régions équipotentielles, réduisant ainsi le calcul des interactions capacitives d'élément-élément à un calcul de région-région. Cela permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues et d'accélérer la convergence lors de la résolution. Néanmoins, quand le potentiel varie fortement sur le dispositif, le calcul des interactions région-région revient à un calcul élément-élément, car dans le cas contraire la méthode introduit des erreurs non-négligeables.

II.6.b Microstrip avec diélectrique

Dans cette partie, nous allons considérer un matériau diélectrique entre les deux pistes et le plan de masse. Ce diélectrique est représenté sur la Figure II.20, il a une permittivité relative de $\epsilon_r = 4, 7$. Les simulations dans ce cas sont faites pour des fréquences allant de 1 Hz à 1,45 GHz. La formulation RLMC diélectrique I.3.e est utilisée.

Pour valider les résultats de notre formulation, nous avons assumé que les résultats obtenus avec le logiciel Feko étaient les références, comme on peut le voir sur la Figure II.30 en échelle logarithmique, les résultats de Feko ont été obtenus avec une formulation MoM/MLFMM qui mixe le principe d'équivalence surfacique pour les conducteurs et le principe d'équivalence volumique pour le diélectrique, car le diélectrique est beaucoup plus épais que les conducteurs.



FIGURE II.30 – Modules et phases des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ obtenus avec Feko dans le cas avec substrat diélectrique en échelle logarithmique.

Pour notre modèle, nous avons utilisé une approche région mince surfacique pour les deux pistes conductrices et le plan de masse, et un maillage volumique pour la partie diélectrique comme le présente la Figure II.31. Les résultats obtenus sont proches de ceux de Feko, mais si en regarde en échelle linéaire sur la Figure II.32, un retard est observé entre

les deux modèles probablement dû à l'hypothèse quasi-statique de la formulation PEEC RLMC.



FIGURE II.31 – Maillage de l'exemple microstrip avec substrat diélectrique.



FIGURE II.32 – Modules et phases des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ dans le cas microstrip avec diélectrique en échelle linéaire.

II.6.b-i Performance de la formulation PEEC RLMC avec diélectrique

Nous allons étudier la performance de la formulation PEEC RLMC avec diélectrique sur l'exemple d'application microstrip de la Figure II.31. Les simulations sont faites avec les solveurs circuits à mailles indépendantes et à nœuds indépendants avec un préconditionnement par décomposition LU de matrices issues des trois stratégies utilisées pour la formulation RLMC sans diélectrique, mais en rajoutant les termes de la matrice creuse $\frac{\tilde{C}}{j\omega}$ du système linéaire (I.107). Nous écrivons les stratégies de préconditionnement comme suit :

1. <u>Stratégie R + P + C :</u> Matrice creuse **R** + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ + matrice creuse $\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{j\omega}$.

- 2. <u>Stratégie R + L + P + C</u>: Matrice **R** + termes des inductances propres partielles $(\mathbf{R}_{i,j} + j\omega \mathbf{L}_{i,j})$ + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ + matrice creuse $\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{j\omega}$.
- 3. <u>Stratégie L + P + C :</u> Matrice **R** + tous les termes inductifs des blocs des interactions proches de l'AMLFMM + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ + matrice creuse $\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{j\omega}$.

Le scénario de résolution a 31 points de fréquence dans l'intervalle de 1 Hz à 1,45 GHz.

II.6.b-ii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à mailles indépendantes

Dans cette section, le solveur circuit à mailles indépendantes est utilisé pour la résolution de l'exemple d'application. Ce solveur a montré de faibles performances dans le cas d'une formulation RLMC sans diélectrique, nous allons le tester dans ce cas avec diélectrique. Le système linéaire à résoudre dans ce cas a environ 22 000 inconnues, qui est un nombre assez faible. La Figure II.33 montre le nombre d'itérations du solveur GMRes en fonction de la fréquence et pour chaque stratégie de préconditionnement. Les temps de calcul associés sont présentés sur le tableau II.13.



FIGURE II.33 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip avec substrat diélectrique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU}_{\mathbf{MI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie R+P+C	$05 \min$	07 h 28 min
Stratégie R+L+P+C	$05 \min$	04 h 16 min
Stratégie L+P+C	04 min	03 h 33 min

TABLE II.13 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip avec substrat diélectrique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit MI.

Comme dans le cas du RLMC sans diélectrique, le solveur n'a pas pu converger à la fréquence 1 Hz. Les temps de calcul résultants sont très élevés pour un si petit système avec 30 points de calcul de 1 kHz à 1,45 GHz. Bien que les stratégies "R+L+P+C" et "L+P+C" améliorent les performances, le solveur circuit à mailles indépendantes n'est pas recommandé pour ce type de simulation.

II.6.b-iii Préconditionnement : cas d'un solveur circuit à nœuds indépendants

Le solveur circuit à nœuds indépendants est le plus performant pour la résolution des formulations RLM et RLMC sans diélectrique, la Figure II.34 montre son comportement dans ce cas avec prise en compte du matériau diélectrique pour les trois stratégies de préconditionnement présentées précédemment. Le système à résoudre a environ 45 000 inconnues, les temps de calculs obtenus sont plutôt faibles pour un scénario avec 31 points, comme le présente le tableau II.14.



FIGURE II.34 – nombre d'itérations du solveur GMRes pour l'exemple microstrip avec substrat diélectrique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

Temps de calcul	Construction $\mathbf{P}_{\mathbf{LU_{NI}}}$ par fréquence	Résolution totale
Stratégie R+P+C	$1,5 \mathrm{~s}$	$47 \min$
Stratégie R+L+P+C	$1,5 \mathrm{~s}$	14 min
Stratégie L+P+C	3,4 s	15 min

TABLE II.14 – Temps de calcul avec compression AMLFMM pour l'exemple microstrip avec substrat diélectrique pour les trois cas de préconditionnement avec un solveur circuit NI.

La stratégie (R+L+P+C) est la plus performante des trois comme dans le cas de la formulation RLMC sans diélectrique. Le solveur circuit à nœuds indépendants offre des performances nettement supérieures que celui à mailles indépendantes.

II.6.c Conclusion sur la partie RLMC

L'étude sur la formulation PEEC RLMC avec et sans diélectrique a montré qu'elle pouvait fournir à des fréquences qui vérifient $\left(\frac{\lambda}{d_{max}} > 1\right)$ des résultats de simulation corrects sur le dispositif étudié. Cependant, des résonances numériques ou "Artefacts" peuvent apparaître aux hautes fréquences causées par l'utilisation d'un modèle quasi-statique, néanmoins le modèle présente le grand avantage de ne pas réassembler les matrices **R**, **L** et **P** à chaque fréquence contrairement à un modèle Maxwell complet "Full wave". Nous avons montré que la performance de la formulation RLMC dépend fortement du type de solveur

circuit utilisé et de la matrice de préconditionnement associée. Le préconditionnement avec décomposition LU semble être assez efficace sur des systèmes avec un nombre d'inconnues faible à moyen, la résolution de grands systèmes peut être bloquante à cause de la complexité cubique de la décomposition LU. Sur les tests effectués en surfacique et en volumique, il s'est avéré que le solveur circuit à nœuds indépendants avec un préconditionneur construit à partir de : la matrice \mathbf{R} + termes inductifs correspondants ($\mathbf{R}_{i,j} + j\omega \mathbf{L}_{i,j}$) + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ (+ matrice creuse $\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{j\omega}$ dans le cas avec diélectrique), est la configuration la plus performante. A l'inverse, le solveur circuit à mailles indépendantes a du mal à converger en basse fréquence, avec également des performances très faibles.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons détaillé la mise en pratique des formulations PEEC nonstructurées que nous avons présentées dans le chapitre I. Nous avons abordé les parties qui concernent l'intégration numérique et l'assemblage des matrices d'impédances (R, L, C), la construction du système d'équations par trois solveurs circuits basés sur les lois de Kirchhoff (loi des mailles, et loi des nœuds), ainsi que la partie résolution de ce système pour les formulations RLM, RLMC sans et avec diélectrique.

Des algorithmes d'intégration numérique avec points de Gauss adaptatifs ont été développés afin d'améliorer la précision des calculs d'intégrales de noyau de Green. Ils ont montré de bons résultats en comparaison avec une intégration avec points de Gauss fixes sur deux applications simples. Son utilisation est fortement conseillée dans le cas où le dispositif d'intérêt est discrétisé avec un maillage hétérogène en taille et en type d'élément. La mise en place de la parallélisation multithreads CPU de ces algorithmes a permis d'accélérer considérablement le temps d'intégration et de ne pas dégrader la vitesse du solveur.

Les performances des trois solveurs circuits : à mailles indépendantes, à nœuds indépendants, et à nœuds indépendants minimal ont également été étudiées. Cette étude a montré que le solveur circuit à nœuds indépendants minimal n'est pas performant qu'il soit préconditionné ou non. Pour la formulation RLM, dans le cas où un préconditionneur n'est pas appliqué, le solveur circuit à mailles indépendantes est le plus performant, mais avec l'utilisation d'un préconditionneur basé sur la décomposition LU de matrice choisi, le solveur circuit à nœuds indépendants a montré les meilleures performances. Le choix des termes de construction de la matrice de préconditionnement à partir des termes des matrices **R**, **L** et **P** impacte directement la convergence du solveur. Dans le cas RLM, l'utilisation de la matrice creuse **R** uniquement semble être un choix judicieux, elle offre des comportements de convergence plutôt satisfaisants, mais dans le cas RLMC, il est préférable d'utiliser la matrice creuse **R** + termes inductifs correspondants ($\mathbf{R}_{i,j} + j\omega \mathbf{L}_{i,j}$) + termes proches AMLFMM de $\frac{\mathbf{P}}{j\omega}$ (+ matrice creuse $\frac{\tilde{\mathbf{C}}}{j\omega}$ dans le cas avec diélectrique), car elle offre les meilleurs temps de calculs.

Chapitre III

Estimateurs d'erreurs et raffinement adaptatif du maillage

On ne fait jamais attention à ce qui a été fait, on ne voit que ce qui reste à faire.

Marie Curie Sklodowska

Sommaire

II.1 INTRODUCTION	32
II.2 Solveurs circuits pour la méthode PEEC	33
II.2.a Approche par nœuds indépendants	35
II.2.b Approche par nœuds indépendants minimale	37
II.2.c Approche par mailles indépendantes minimales	38
II.2.d Quelques remarques	39
II.3 Techniques de résolution 4	40
II.4 Compression matricielle 4	11
II.5 ÉTUDE DE LA FORMULATION PEEC-RLM	42
II.5.a Stratégies d'intégration	44
II.5.b Exemple d'application simple : Plaque et bobine carrée	48
II.5.c Performance de la formulation RLM	52
II.5.d Conclusion sur la partie RLM	60
II.6 ÉTUDE DE LA FORMULATION PEEC-RLMC	31
II.6.a Microstrip sans diélectrique	62
II.6.b Microstrip avec diélectrique	69
II.6.c Conclusion sur la partie RLMC	72
II.7 CONCLUSION	73

Résumé

Nous allons présenter une procédure de raffinement adaptatif du maillage. Cette procédure est contrôlée par un estimateur d'erreur. Pour développer ce dernier, une étude a été faite impliquant des développements de techniques permettant le calcul d'une seconde solution dites "duale". Puis nous terminerons avec des tests de validations.

III.1 Introduction

Les dispositifs d'électroniques de puissance sont généralement associés à des géométries complexes. La modélisation des champs électromagnétiques qui est nécessaire dans leur processus de conception peut présenter des erreurs sur la précision plus ou moins importantes, notamment en présence des problèmes de courants de Foucault. En effet, la précision de la solution numérique est cruciale pour interpréter correctement les résultats obtenus. Les erreurs qui peuvent être induites ne sont pas seulement liées aux méthodes numériques elles-mêmes, mais aussi à une mauvaise utilisation de ces méthodes. La plus courante est la sous-discrétisation du domaine qui induit des erreurs d'approximation, notamment pour les problèmes fréquentiels, où la représentation correcte du chemin du courant électrique est très importante afin de capter avec précision les effets de peau et de proximité. Des erreurs numériques sont introduites avec l'utilisation des formulations faibles notamment les relations constitutives du matériau ou la conservation des champs sur le maillage. Dans ce cas, deux grandeurs physiques sont généralement interpolées à l'aide d'un seul espace fonctionnel, alors qu'elles sont respectivement continues dans deux espaces fonctionnels différents, conduisant ainsi à des imprécisions locales.

Dans ce chapitre, nous allons aborder ces problématiques d'erreurs numériques liées à la sous-discrétisation. Pour quantifier ces erreurs, des estimateurs d'erreurs sont proposés. Ces estimateurs seront utilisés dans un but de réduction de ces erreurs d'approximation afin d'améliorer la précision. Cela sera fait à travers le développement d'une technique de raffinement adaptatif du maillage en essayant toutefois de ne pas augmenter excessivement le nombre de degrés de liberté. Ces développements ont pour objectif de rendre la méthode PEEC beaucoup plus fonctionnelle et attrayante pour la modélisation de dispositifs complexes.

III.2 Introduction aux estimateurs d'erreurs

Pour la méthode PEEC, à notre connaissance les estimateurs d'erreur n'ont pas été étudiés dans la littérature, mais ils ont été largement étudiés pour la méthode des éléments finis (FEM). Deux catégories d'estimateur d'erreurs ont été développées : La première est l'estimation d'erreur *a priori*. Elle consiste à évaluer la qualité du maillage en fonction de la forme de ses éléments en détectant ceux de qualité médiocre comme indiqué dans [55] et dans [56]. Ce type d'estimation d'erreur n'est pas adapté aux problèmes fréquentiels car il est entièrement géométrique et suppose que le maillage initial respecte déjà l'épaisseur de peau, ce qui n'est pas nécessairement le cas. La deuxième catégorie est l'estimation d'erreur *a posteriori*. Elle consiste à évaluer la qualité de la solution numérique à l'aide de différentes techniques d'estimation. Une revue rapide et certainement non exhaustive des différentes techniques d'estimation est présentée dans l'introduction de l'article de L. Rondot *et Al* [57]. De nombreux travaux ont été développés pour la FEM magnéto-harmonique comme indiqué dans [58, 59, 60], mais pas encore pour la méthode PEEC non-structurée. Dans ce chapitre, nous concentrons les travaux sur l'estimation d'erreurs *a posteriori*.

L'estimateur d'erreur équilibré [61] est peut-être la technique la plus populaire. Elle consiste à comparer deux solutions complémentaires d'un problème obtenues avec deux formulations duales. Pour les problèmes de courants de Foucault, les deux solutions consistent en :

- Une solution initiale qui conserve la continuité de la composante normale de la densité de courant J sur le maillage.
- Une seconde solution qui conserve la continuité de la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E} sur le maillage, elle est notée \mathbf{E}' .

La seconde solution \mathbf{E}' peut être obtenue en résolvant une formulation duale lorsqu'elle est disponible, ou par d'autres méthodes telle que la méthode de projection et de reconstruction en utilisant des outils numériques appropriés comme il est indiqué dans [61]. Estimer l'erreur dans ce cas consiste à quantifier l'écart entre les deux solutions \mathbf{J} et \mathbf{E}' .

En considérant la loi d'Ohm, nous avons \mathbf{E} le champ électrique et \mathbf{J} la densité de courant qui sont directement liées, or, ces deux grandeurs n'ont pas les mêmes propriétés de continuité sur les interfaces d'un maillage. La continuité de la composante tangentielle de \mathbf{E} est assurée dans un espace fonctionnel d'arêtes, et la continuité de la composante normale de \mathbf{J} est assurée dans un espace fonctionnel de facettes. Pour la formulation PEEC nonstructurée, seule la continuité de la composante normale de \mathbf{J} est assurée. Dans ce cas, la seconde solution \mathbf{E}' doit assurer sa propriété de continuité de la composante tangentielle.

Dans ce qui suit, nous présentons différentes techniques de calcul de la seconde solution en méthode PEEC non-structurée. Puis dans un deuxième temps, des estimateurs d'erreurs sont étudiés en fonction de leurs précisions et de leurs performances.

III.3 Calcul de solutions duales pour la méthode PEEC nonstructurée

La méthode PEEC inductive non-structurée n'a pas à notre connaissance de formulation duale où le champ électrique \mathbf{E} est la principale inconnue. Pour utiliser l'estimateur d'erreur équilibré, il est nécessaire d'évaluer une deuxième solution \mathbf{E}' . Ainsi pour calculer \mathbf{E}' qui assure la continuité de sa composante tangentielle dans le domaine de calcul, trois formulations dites "duales" sont proposées dans cette section.

La formulation hybride BEM-FEM développée dans [62] est utilisée comme première technique de calcul d'une seconde solution. Cette formulation a la propriété de bien représenter la continuité du champ électrique dans l'espace fonctionnel d'arêtes. Pour la deuxième technique, la seconde solution est obtenue en projetant la solution initiale \mathbf{J} et en la reconstruisant dans l'espace fonctionnel d'arêtes comme indiqué dans [61]. La troisième technique consiste à utiliser une méthode intégrale en post-traitement pour calculer le champ électrique \mathbf{E}' à partir de la solution initiale \mathbf{J} .

Dans ce qui suit, nous négligeons les effets capacitifs, nous ne considérons que les formulations PEEC-RLM.

III.3.a Formulation hybride BEM-FEM

Pour les problèmes de courants de Foucault, la formulation hybride BEM-FEM s'est avérée avoir un bon comportement et une bonne précision de calcul [63] notamment dans le cas où le problème consiste en plusieurs régions conductrices et/ou magnétiques. Cette formulation est basée sur le potentiel vecteur magnétique modifié \mathbf{A}^* dans les régions actives, et le potentiel scalaire magnétique réduit φ dans la région air [62].

L'équation du champ électrique (I.26) a été réécrite pour les régions actives en utilisant le potentiel vecteur magnétique modifié \mathbf{A}^* [62]. L'équation de \mathbf{E}' est obtenue telle que :

$$\mathbf{E}' = -j\omega\mathbf{A}^* \tag{III.1}$$

Pour la région air, le champ magnétique **H** est décrit en introduisant le potentiel scalaire magnétique réduit φ qui est associé au champ magnétique produit par la source \mathbf{H}_s , alors :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{S}} - \nabla \varphi \tag{III.2}$$

Un ensemble d'équations intégrales couplées a été obtenu, tel que [62] :

$$-\int_{\Gamma} w_{e} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{s}) d\Gamma = \frac{1}{\mu} \int_{\Omega} (\nabla \times w_{e}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^{*}) d\Omega + j\omega \sigma \int_{\Omega} w_{e} \cdot \mathbf{A}^{*} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times w_{e}) \varphi d\Gamma \quad (\text{III.3})$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_s G_0 d\Gamma = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{\mu_0} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^*) G_0 d\Gamma + \int_{\Gamma} \varphi(\mathbf{n} \cdot \nabla G_0) d\Gamma$$
(III.4)

avec :

- w_e les fonctions de forme d'arêtes.
- **n** la normale sortante sur Γ le bord du maillage.
- G_0 le noyau de Green de l'équation de Laplace en 3D $\frac{1}{4\pi r}$.

La résolution de l'ensemble de ces équations intégrales couplées permet de calculer une seconde solution. Le champ électrique \mathbf{E}' dans ce cas est interpolé dans l'espace fonctionnel d'arête ce qui lui assure une continuité naturelle de la composante tangentielle. Plus de détails sur la formulation hybride BEM-FEM sont disponibles dans les travaux de Phan Anh Quang et Al. à travers l'article [62] et la thèse [63].

Projection du champ électrique sur les arêtes du maillage III.3.b

Dans cette section, la seconde solution \mathbf{E}' est calculée à partir de la solution initiale **J**. Le calcul est fait par une projection des valeurs aux points de Gauss de $\frac{J}{\sigma}$ sur l'espace fonctionnel d'arêtes. La projection est obtenue en résolvant un système linéaire par méthode des éléments finis, tel que :

$$\sum_{j} \int_{\Omega_{e}} w_{e_{i}} \cdot w_{e_{j}} \cdot \mathbf{E}'_{j} d\Omega_{e} = \int_{\Omega_{e}} w_{e_{i}} \cdot \frac{\mathbf{J}}{\sigma} d\Omega_{e}$$
(III.5)

Avec

- w_e : fonctions de forme d'arêtes utilisées pour l'interpolation. $\frac{\mathbf{J}}{\sigma}$: valeurs issues des fonctions de forme de facettes du champ électrique \mathbf{E} aux points de Gauss de chaque élément de maillage.
- Ω_e : domaine du maillage avec l'espace fonctionnel d'arêtes.

La résolution du système linéaire (III.5) donne une seconde solution où la composante tangentielle du champ électrique \mathbf{E}' est continue sur les arêtes du maillage.

Avec l'utilisation de cette méthode, une résolution d'un problème dual complet n'est pas requise. Le système d'éléments finis est limité seulement aux matériaux actifs dans ce cas. La résolution de la matrice creuse obtenue nécessite moins de mémoire par rapport à la résolution initiale avec l'approche PEEC, ce qui en fait une méthode très efficace.

III.3.c Calcul du champ électrique E' avec un post-traitement intégral

Cette approche de calcul est également dépendante de la solution initiale \mathbf{J} . L'idée principale est d'utiliser l'équation de champ électrique (I.26) pour calculer la seconde solution \mathbf{E}' à partir de \mathbf{J} .

Cette méthode est divisée en deux étapes : la première consiste à reconstruire le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , cela est fait avec une méthode intégrale qui considère la densité de courant \mathbf{J} dans les éléments comme sources des champs. La deuxième étape consiste à calculer le gradient du potentiel scalaire électrique V.

Pour la première étape, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est reconstruit comme suit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{J}}{r} \mathrm{d}\Omega$$
(III.6)

Avec A_0 potentiel vecteur magnétique généré par une source externe si disponible.

La deuxième étape est faite à partir de l'équation (I.26) et de la loi d'Ohm. Nous avons :

$$\mathbf{J} = -j\omega\sigma\mathbf{A} - \sigma\,\nabla V \tag{III.7}$$

Connaissant que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, l'équation précédente devient :

$$\nabla \cdot (-j\omega\sigma \mathbf{A} - \sigma \nabla V) = 0 \tag{III.8}$$

Ce qui nous permet d'écrire la relation suivante,

$$\Delta V = \nabla \cdot (-j\omega \mathbf{A}) \tag{III.9}$$

Cette équation finale a une forme d'équation de Poisson. Elle peut être résolue par un système d'éléments finis. Pour ce faire, les fonctions de forme nodales $\nabla \alpha_n$ sont utilisées pour interpoler le potentiel scalaire électrique V.

Nous écrivons par conséquent :

$$\int_{\Omega} \nabla \alpha'_n \cdot \nabla \alpha_n \, V \mathrm{d}\Omega = -j\omega \int_{\Omega} \nabla \alpha'_n \cdot \mathbf{A} \mathrm{d}\Omega \tag{III.10}$$

La résolution de cette équation donne le potentiel scalaire électrique V sur les nœuds du maillage. La solution admissible \mathbf{E}' dans les conducteurs est obtenue en injectant les valeurs de \mathbf{A} et V dans l'équation (I.26).

Avec cette dernière solution, nous avons présenté trois méthodes de calcul de la seconde solution (Formulation hybride BEM-FEM, projection du champ électrique sur les arêtes du maillage, et Calcul du champ électrique avec un post-traitement intégral). Leurs avantages et inconvénients vont être étudiés dans les prochaines sections. Nous présentons en premier lieu les estimateurs d'erreur avec lesquels la seconde solution sera utilisée.

III.4 Les estimateurs d'erreurs

Afin d'estimer l'erreur numérique entre les deux solutions \mathbf{J} et \mathbf{E}' , trois estimateurs ont été développés. Le premier estimateur est basé sur le calcul du carrée de la différence entre les valeurs moyennes de \mathbf{J} et $\sigma \mathbf{E}'$ aux barycentres des éléments. Le deuxième est un critère basé sur le calcul de la différence des énergies par élément obtenues avec les deux solutions complémentaires [64]. Le troisième est basé sur le principe du Ligurien [65], ce principe repose aussi sur la différence des énergies, mais avec des termes \mathbf{J} et $\sigma \mathbf{E}'$ croisés.

III.4.a Estimateur par valeurs moyennes

Une façon d'exprimer la différence entre la solution initiale et sa complémentaire est de comparer des grandeurs intégrées sur chaque élément. Dans le cadre de cet estimateur, les valeurs moyennes de \mathbf{J} et $\sigma \mathbf{E}'$ exprimées aux barycentres des éléments sont utilisées. Pour des éléments de maillage de type simplexe (tétraèdre par exemple), nous savons que :

- La densité de courant interpolée par des fonctions de forme de facettes est constante sur un élément.
- Le champ électrique interpolé par des fonctions de forme d'arêtes varie linéairement sur l'élément.

Par conséquent, si les deux solutions sont proches, l'écart sur les valeurs moyennes de **J** et $\sigma \mathbf{E}'$ aux barycentres doit être très faible. Pour les autres types éléments (hexaèdre par exemple), l'hypothèse peut ne pas être vérifiée. Bien que dans le cas où le maillage est suffisamment fin pour représenter correctement les trajectoires du courant, la densité de courant tend à être constante par élément.

Nous écrivons les valeurs locales de l'erreur estimée par :

$$\eta_{elem} = N \times \frac{\int_{\Omega_E} \left| \mathbf{J}_{moyen} - \sigma \mathbf{E}'_{moyen} \right|^2 \mathrm{d}\Omega_E}{\int_{\Omega} \left| \mathbf{J}_{moyen} \right|^2 \mathrm{d}\Omega}$$
(III.11)

Et nous écrivons l'estimateur d'erreur global tel que :

$$\eta_{global} = \frac{\int_{\Omega} \left| \mathbf{J}_{moyen} - \sigma \mathbf{E}'_{moyen} \right|^2 \mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega} \left| \mathbf{J}_{moyen} \right|^2 \mathrm{d}\Omega}$$
(III.12)

Ou en prenant directement la moyenne des erreurs locales estimées :

$$\eta_{global} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \eta_{elem_i} \tag{III.13}$$

avec :

- \mathbf{J}_{moyen} : densité de courant moyenne par élément issue de la solution initiale.
- $\sigma \mathbf{E}'_{moven}$: densité de courant moyenne par élément issue de la seconde solution.
- Ω_E : élément du maillage du domaine Ω .
- N: nombre d'éléments dans le maillage.

La division par $\left(\int_{\Omega} |\mathbf{J}_{moyen}|^2 d\Omega\right)$ permet d'avoir une erreur relative à une quantité globale, et la multiplication par N permet d'avoir une erreur locale comparable à l'erreur globale. Par conséquent, pour le critère local (III.11), ces opérations permettent de montrer la contribution de l'erreur de chaque élément dans l'erreur globale.

III.4.b Estimateur énergétique

L'estimateur énergétique utilise le calcul de l'énergie stockée dans chaque élément du maillage [64]. Pour mettre en place ce critère, nous devons utiliser comme précédemment des grandeurs intégrées par éléments et non des grandeurs qui dépendent directement de l'espace fonctionnel.

Ce deuxième estimateur calcule la différence par élément de deux valeurs de l'énergie. La première valeur est calculée à l'aide de la solution initiale \mathbf{J} et l'autre à l'aide de la solution admissible \mathbf{E}' . Cet estimateur permet par son principe de voir l'erreur sur le calcul des pertes Joule.

Nous écrivons les valeurs locales de l'erreur estimée par :

$$\eta_{elem} = N \times \left| \frac{\int_{\Omega_E} |\mathbf{J}|^2 \mathrm{d}\Omega_E - \int_{\Omega_E} (|\sigma \mathbf{E}'|)^2 \mathrm{d}\Omega_E}{\int_{\Omega} |\mathbf{J}|^2 \mathrm{d}\Omega} \right|$$
(III.14)

Et nous écrivons l'estimateur d'erreur global tel que :

$$\eta_{global} = \left| \frac{\int_{\Omega} |\mathbf{J}|^2 \mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega} (|\sigma \mathbf{E}'|)^2 \mathrm{d}\Omega}{\int_{\Omega} |\mathbf{J}|^2 \mathrm{d}\Omega} \right|$$
(III.15)

Dans l'équation (III.14), l'estimateur d'erreur local s'écrit de façon normalisée en fonction d'une grandeur globale dans le domaine Ω . Cette normalisation permet de mettre en évidence la contribution de l'erreur locale d'un élément de maillage à l'erreur globale.

III.4.c Estimateur Ligurien

L'estimateur Ligurien a été présenté dans l'article [65] pour le remaillage de problème à courants de Foucault avec la méthode des éléments finis. Cet estimateur a été écrit initialement avec la paire de solutions magnétiques $(\mathbf{H}', \mathbf{B})$ mais peut également s'écrire en $(\mathbf{E}', \mathbf{J})$. Dans cet article, ce critère Ligurien avait montré de bon comportement d'estimation de l'erreur.

Pour pouvoir l'utiliser pour nos formulations PEEC non-structurées, nous écrivons la procédure pour la paire de solutions $(\mathbf{E}', \mathbf{J})$ comme suit :

$$\eta = \left(\mathbf{J} - \sigma \mathbf{E}'\right) \cdot \left(\frac{\overline{\mathbf{J}}}{\sigma} - \overline{\mathbf{E}}'\right) = \left(\mathbf{J} - \mathbf{J}'\right) \cdot \left(\overline{\mathbf{E}} - \overline{\mathbf{E}}'\right)$$
(III.16)

Où $\overline{\mathbf{J}}$, $\overline{\mathbf{E}}$ et $\overline{\mathbf{E}'}$ sont les conjugués complexes de \mathbf{J} , \mathbf{E} et \mathbf{E}' respectivement. En remarquant que $(\mathbf{J} - \mathbf{J}') = \sigma (\mathbf{E} - \mathbf{E}')$, il vient :

$$\eta = \sigma \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}' \right|^2 \tag{III.17}$$

L'estimateur d'erreur local s'écrit d'une manière normalisée par rapport à une grandeur globale comme suit :

$$\eta_{elem} = N \times \frac{\int_{\Omega_E} \sigma \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}' \right|^2 \mathrm{d}\Omega_E}{\int_{\Omega} \sigma |\mathbf{E}|^2 \mathrm{d}\Omega}$$
(III.18)

L'estimateur d'erreur global s'écrit :

$$\eta_{global} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \eta_{elem_i} \tag{III.19}$$

L'estimateur d'erreur global dans ce cas calcule la moyenne des erreurs locales estimées sur les éléments du maillage.

On constate que cet estimateur est différent de l'estimateur énergétique, car ce dernier est axé sur la valeur des pertes Joule, alors que le Ligurien se concentre sur l'intégration de la différence des deux solutions complémentaires en tous points de Gauss des éléments. Si on regarde bien, en considérant qu'un seul point de Gauss (aux barycentres) pour le Ligurien, ça revient à écrire l'estimateur des valeurs moyennes.

A travers cette section, nous avons présenté trois critères d'estimation d'erreur. Ils sont basés sur l'utilisation de deux solutions complémentaires. Afin d'étudier leurs performances et leurs précisions en fonction des trois techniques de calcul de la seconde solution complémentaire, nous devons les comparer avec une cartographie d'erreur de référence. Dans la section suivante, nous allons développer une méthode pour calculer cette référence.

III.5 Erreur de référence sur un maillage

Afin de tester un estimateur d'erreur, nous devons disposer d'une erreur de référence pour pouvoir le valider. Une méthode assez intuitive pour calculer l'erreur de référence est proposée.

Deux maillages du même conducteur volumique parallélépipédique sont utilisés. Le premier est maillé très grossièrement et l'autre finement. Cette méthode s'utilise uniquement si le maillage très fin résulte de divisions dichotomiques suffisantes successives du maillage grossier. Pour illustrer les propos précédents, la Figure III.1 montre un exemple de deux divisions dichotomiques d'un maillage. Nous visons à calculer l'erreur numérique sur le maillage grossier en considérant que l'erreur est presque nulle pour le maillage fin pour une solution d'un problème PEEC non-structuré.



FIGURE III.1 – Gauche : maillage initial. Centre : maillage obtenu après deux divisions dichotomiques du maillage initial. Droite : maillage obtenu après cinq divisions dichotomiques du maillage initial

En supposant que chaque élément du maillage grossier est divisé en N éléments dans le maillage fin, l'erreur locale sur le maillage grossier s'écrit sous la forme énergétique suivante :

$$\varepsilon_{elem} = \left| \frac{\int_{\Omega_{E_{grossier}}} |\mathbf{J}_{grossier}|^2 d\Omega_{E_{grossier}} - \sum_{i}^{N} \int_{\Omega_{E_{ref_i}}} |\mathbf{J}_{ref_i}|^2 d\Omega_{E_{ref_i}}}{\int_{\Omega_{ref}} |\mathbf{J}_{ref}|^2 d\Omega_{ref}} \right|$$
(III.20)

Et l'erreur globale :

$$\varepsilon_{global} = \left| \frac{\int_{\Omega_{grossier}} |\mathbf{J}_{grossier}|^2 d\Omega_{grossier} - \int_{\Omega_{ref}} |\mathbf{J}_{ref}|^2 d\Omega_{ref}|}{\int_{\Omega_{ref}} |\mathbf{J}_{ref}|^2 d\Omega_{ref}} \right|$$
(III.21)

avec :

- $\Omega_{E_{grossier}}$ et $\Omega_{E_{ref}}$ un élément du maillage grossier et de référence respectivement.
- $\Omega_{grossier}$ et Ω_{ref} les domaines globaux du maillage grossier et de référence respectivement.
- $\mathbf{J}_{grossier}$ et \mathbf{J}_{ref} les densités de courant dans le maillage grossier et dans le maillage de référence respectivement.

Dans la section suivante, nous présentons les comparaisons de l'erreur estimée par rapport à l'erreur de référence.

III.6 Comparaison entre les erreurs estimées et la référence

Dans cette partie, les trois formulations dites "duales" sont étudiées afin de montrer leurs performances et leurs faiblesses. L'exemple simple présenté dans la Figure III.2 est utilisé pour cette étude. Il permet de calculer l'erreur de référence en utilisant la méthode introduite dans la section précédente, et cela grâce à son maillage hexaédrique régulier. Ce type de maillage permet de réaliser facilement plusieurs divisions dichotomiques. Cette erreur de référence est comparée aux erreurs estimées obtenues avec les trois estimateurs. La comparaison est faite sur le comportement des erreurs globales ainsi que sur les erreurs locales.

L'erreur globale estimée permet à posteriori d'évaluer la convergence de grandeurs globales telles que les pertes Joule par exemple. Les erreurs locales estimées quant à elles permettent de souligner les éléments de maillage qui présentent le plus d'erreur et qui doivent être raffinés ultérieurement. Une fois que ces éléments avec des erreurs locales importantes sont remaillés, l'erreur globale a tendance à diminuer progressivement.

Sur la Figure III.2, la bobine circulaire en cuivre est alimentée à l'aide d'une source de courant d'une intensité de 1 A à 500 Hz, et la plaque 3D est également en cuivre. Les dimensions sont les suivantes :

- Bobine circulaire non maillée :
 - Rayon 30 mm
 - Section 3, 14 mm²
- Plaque 3D : $100 \times 100 \times 1$ mm
- Entrefer : 0,5 mm (Très proche)

L'épaisseur de peau est égale à 3 mm pour ce cas, la plaque est suffisamment maillée avec quatre éléments selon l'épaisseur (ce qui équivaut à douze éléments dans l'épaisseur de peau) afin d'assurer la qualité de la solution dans ce sens. En pratique, trois éléments dans



FIGURE III.2 – Exemple simple : plaque 3D sous-maillée avec une bobine circulaire

l'épaisseur de peau suffisent pour bien représenter la variation du courant électrique avec une interpolation du premier ordre. Par conséquent, la division dichotomique du maillage de la plaque ne se réalise que dans le plan parallèle à la bobine, car la plaque est sous maillée sur ce plan (un côté d'un élément = 20 cm).

III.6.a Calcul de l'erreur de référence

Afin de calculer l'erreur de référence, il faut trouver un maillage de référence qui suppose que la solution obtenue est suffisamment correcte. Des simulations sont faites pour différents maillages résultants de divisions dichotomiques du maillage présenté sur la Figure III.2. Ces simulations sont faites avec la formulation PEEC-RLM volumique (I.36). Pour chaque maillage, les pertes Joule dans la plaque sont calculées. L'observation de ces valeurs permet de détecter le maillage qui donne une précision suffisante. Pour cela, la Figure III.3 montre l'évolution des pertes Joule en fonction des maillages.



FIGURE III.3 – Pertes Joule en fonction du nombre d'éléments de maillage

Nous observons que les valeurs des pertes Joule commencent à se stabiliser à partir du troisième maillage. La différence entre le quatrième et le cinquième maillage est très faible (0,24%). Par conséquent, le cinquième peut être utilisé comme référence si on considère qu'une erreur inférieure à 0,5% est admise. Les étiquettes de données de la Figure III.3 indiquent les erreurs relatives des autres maillages par rapport au plus fin.

Afin d'étudier les erreurs de références et celles estimées, le maillage comportant 100 éléments hexaédriques est utilisé. La Figure III.4 présente la distribution des erreurs locales de référence pour ce maillage, elles sont calculées avec l'équation (III.20) en prenant le cinquième maillage à 25 600 éléments comme référence.





FIGURE III.4 – La distribution de l'erreur locale de référence sur le maillage grossier de 100 éléments

FIGURE III.5 – Partie réelle de la densité de courant sur la plaque à 500 Hz

On voit que l'erreur locale est plus accentuée sur les quatre éléments où le courant change de trajectoire comme le montre la Figure III.5.

III.6.b Estimation de l'erreur

Dans cette section, nous allons considérer les trois techniques de calcul de la seconde solution présentées dans la section III.3. Pour chaque technique, les trois estimateurs d'erreur sont mis en œuvre sur l'exemple de la Figure III.2, ceci implique neuf configurations de calcul d'erreur.

Une comparaison des résultats des neuf configurations avec l'erreur de référence est faite en termes de précision des erreurs locales et des erreurs globales. Les performances de calcul sont également étudiées. Pour plus de clarté, nous présentons séparément les comparaisons des estimateurs pour chaque technique de calcul de la seconde solution.

III.6.b-i Formulation hybride BEM-FEM

La seconde solution est calculée avec la résolution de la formulation hybride BEM-FEM. La solution \mathbf{E}' obtenue est interpolée sur l'espace fonctionnel d'arête. Nous calculons cette solution pour chaque maillage résultant des divisions dichotomiques successives du maillage initial à 100 éléments. Cela a pour but d'observer l'évolution des erreurs globales estimées et de les comparer avec l'erreur globale de référence.

La Figure III.6 montre les valeurs des erreurs globales en fonction du nombre d'éléments de maillage. Les courbes sont obtenues pour les trois estimateurs avec comme légendes :

- <u>Référence</u> : erreurs de références obtenues avec l'équation (III.21).
- Valeur Moyenne : erreurs estimées obtenues avec les valeurs moyennes (III.12).
- Énergétique : erreurs estimées obtenues avec le critère énergétique (III.15).
- Ligurien : erreurs estimées obtenues avec le critère Ligurien (III.19).

Le critère des valeurs moyennes montre des estimations d'erreur quasi-identiques aux erreurs de référence. Inversement, les deux autres critères surestiment les erreurs globales.





En ce qui concerne les erreurs locales estimées, la Figure III.7 montre que la répartition obtenue avec l'estimateur énergétique est plus proche de celle de l'erreur de référence. En effet, les erreurs locales significatives sont bien représentées et leurs valeurs numériques ne sont pas très éloignées de celles de l'erreur de référence.



FIGURE III.7 – La répartition des erreurs locales estimées pour le cas BEM-FEM. Haut : rappel de l'erreur locale de référence. Bas : Gauche : critère par valeur moyenne, centre : critère énergétique, droite : critère Ligurien

III.6.b-ii Projection du champ électrique sur les arêtes du maillage

La seconde solution est calculée avec la technique de projection de $\left(\frac{\mathbf{J}}{\sigma}\right)$ et sa reconstruction sur les arêtes du maillage, cela en résolvant un système linéaire décrit par l'équation (III.5). Nous appliquons cette technique pour chaque maillage résultant des divisions dichotomiques successives du maillage initial de 100 éléments.

La Figure III.8 montre les valeurs des erreurs globales en fonction du nombre d'éléments de maillage. Les courbes obtenues correspondent aux trois estimateurs et leurs légendes sont les mêmes que celles utilisées précédemment.



FIGURE III.8 – Les erreurs globales estimées en fonction du nombre d'éléments de maillage pour le cas projection et reconstruction du champ électrique

Les deux courbes des critères énergétique et Ligurien sont identiques dans ce cas. Contrairement au cas BEM-FEM, ces deux courbes sont assez proches de l'erreur globale de référence. L'égalité de ces deux courbes peut être démontrée mathématiquement comme suit :

$$\begin{split} \int_{\Omega} \sigma \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}' \right|^2 \mathrm{d}\Omega &= \int_{\Omega} \sigma \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{E}'|^2 - (\mathbf{E}' \overline{\mathbf{E}} + \mathbf{E} \overline{\mathbf{E}'}) \right) \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{E}'|^2 - 2\Re(\mathbf{E}' \overline{\mathbf{E}}) \right) \mathrm{d}\Omega \end{split}$$

Nous avons obtenu \mathbf{E}' suivant : $\int_{\Omega} w_i \mathbf{E}' d\Omega = \int_{\Omega} w_i \mathbf{E} d\Omega$. Ainsi : $\sum_i \left[\int_{\Omega} w_i \mathbf{E}' d\Omega \right] \overline{\mathbf{E}'_i} = \sum_i \left[\int_{\Omega} w_i \mathbf{E} d\Omega \right] \overline{\mathbf{E}'_i}$ Ce qui conduit à :

$$\int_{\Omega} \overline{\mathbf{E}'} \mathbf{E}' d\Omega = \int_{\Omega} \overline{\mathbf{E}} \mathbf{E}' d\Omega = \int_{\Omega} |\mathbf{E}'|^2 d\Omega$$

Par conséquent

$$\int_{\Omega} \sigma \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}' \right|^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{E}'|^2 - 2(|\mathbf{E}'|^2) \right) d\Omega$$
$$\int_{\Omega} \sigma \left| \mathbf{E} - \mathbf{E}' \right|^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sigma \left(|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{E}'|^2 \right) d\Omega$$

Cette dernière équation démontre que les deux estimateurs globaux énergétique et Ligurien sont égaux dans le cas où la seconde solution est issue de la méthode de projection sur les arêtes. Concernant la distribution des erreurs locales estimées, l'observation faite précédemment reste valable pour ce cas, car comme le montre la Figure III.9 la distribution obtenue avec l'estimateur énergétique reste la plus proche de celle de l'erreur de référence. Sur les valeurs importantes de l'erreur, la distribution obtenue par le critère des valeurs moyennes a une assez bonne correspondance par rapport à celle de référence, mais avec une différence significative en termes de valeurs numériques.





Haut : rappel de l'erreur locale de référence. Bas : Gauche : critère par valeur moyenne, centre : critère énergétique, droite : critère Ligurien

III.6.b-iii Calcul du champ électrique E' avec un post-traitement intégral

Dans cette partie, nous reconstituons le champ électrique \mathbf{E}' avec du post-traitement intégral. Cette méthode revient en quelque sorte à résoudre un problème dual en prenant la solution initiale \mathbf{J} par éléments comme sources.

Nous observons sur la Figure III.10 qu'il y a une petite similitude avec le cas BEM-FEM. En effet, les deux courbes correspondantes au critère énergétique et Ligurien surestiment fortement les valeurs des erreurs globales par rapport aux erreurs de référence. Alors que le critère de valeurs moyennes sous-estime dans ce cas l'erreur globale.





Les répartitions des erreurs locales estimées sont présentées sur la Figure III.11. Pour cette technique, les trois critères mettent bien en évidence les éléments avec une erreur de référence importante, mais il y a une différence en termes de valeurs numériques des erreurs locales estimées.



FIGURE III.11 – La répartition des erreurs locales estimées pour le cas post-traitement intégral. **Haut :** rappel de l'erreur locale de référence. **Bas :Gauche :** critère par valeur moyenne, **centre :** critère énergétique, **droite :** critère Ligurien

III.6.c Temps de calcul et contraintes sur le calcul de E'

Dans les différentes configurations étudiées précédemment, bien qu'elles aient un objectif commun qui est l'estimation d'erreur, elles ont des contraintes de modélisation et des temps de calcul différents.

Les temps de calcul des différentes configurations sont présentés sur la Figure III.12. Cette figure est séparée en trois blocs de courbes. Le choix a été de regrouper les temps de calcul selon le type d'estimateur, où chaque bloc représente un critère d'estimation d'erreur et les trois techniques associées pour calculer la seconde solution \mathbf{E}' .



FIGURE III.12 – Temps de calcul des techniques "duales" par estimateur d'erreur. Critères : Haut gauche : par valeurs moyennes, Haut droite : énergétique, bas : Ligurien

Nous observons que dans les trois blocs de courbes, la méthode de projection et de reconstruction de \mathbf{E}' sur les arêtes du maillage est la plus performante, sa complexité est d'environ $\mathbf{O}(N \log(N))$ avec N le nombre d'éléments de maillage. La méthode de post-traitement intégrale suit clairement une loi de complexité en $\mathbf{O}(N^2)$. Elle demeure la plus coûteuse en temps de calcul.

La formulation hybride BEM-FEM est relativement performante, mais présente une contrainte majeure dans les applications PEEC non-structurées. Cette formulation ne permet pas de considérer des connexions de type circuit (composants passifs et actifs). Par ailleurs, elle ne s'applique pas dans le cas de l'utilisation de l'hypothèse région mince (I.50), son champ d'utilisation est donc limité, alors que notre ambition est de modéliser des dispositifs de complexité industrielle.

III.6.d Conclusion

Pour un maillage donné, une résolution par méthode intégrale est plus lourde qu'une résolution locale par la méthode des éléments finis. En plus, l'utilisation des méthodes intégrales pour le calcul de la seconde solution peut présenter des contraintes de modélisation, notamment lors de la résolution du système initial par la formulation PEEC avec l'hypothèse région mince par exemple. Concernant la méthode de projection de \mathbf{E}' sur les arêtes du maillage, les erreurs globales estimées restent très proches des erreurs globales de référence, ainsi que pour la distribution des erreurs locales. Cette méthode est la plus rapide des trois et la plus simple en termes de mise en œuvre sans aucune contrainte sur les hypothèses de modélisation.

Pour les estimateurs associés à cette dernière méthode, les erreurs globales estimées par les critères énergétique et Ligurien restent très proches des erreurs globales réelles, contrairement à l'estimateur de la valeur moyenne. Le critère énergétique reste le meilleur des trois en ce qui concerne la distribution des erreurs locales.

En conséquence dans ce qui suit, le choix s'est porté sur l'utilisation de l'estimateur énergétique associé à la méthode de projection de \mathbf{E}' sur les arêtes du maillage.

III.7 Procédure de raffinement adaptatif

Dans cette section, nous allons présenter une procédure de raffinement de maillage adaptatif qui est contrôlée par les erreurs estimées. Afin de tester l'estimateur d'erreur, nous n'utiliserons pas la stratégie de la montée en ordre d'interpolation (*p-refinement*). C'est-à-dire que l'interpolation en PEEC non-structurée restera à l'ordre 1. L'algorithme de raffinement adaptatif est développé en utilisant un raffinement par découpage d'éléments (*h-refinement*). Ce découpage se fait grâce à un couplage avec le générateur de maillage du solveur éléments finis Altair **Flux**^m [66]. Pour des raisons de contrainte informatique, l'algorithme ne peut être appliqué qu'à un maillage de type tétraédrique (ou triangulaire dans le cas surfacique).

Pour ce faire, nous avons développé une procédure de raffinement de maillage adaptatif qui a la structure générale suivante :

- 1. Résoudre le problème avec un maillage initial grossier qui respecte la géométrie.
- 2. Estimer les erreurs locales et l'erreur globale dans le maillage.
- 3. Si l'erreur globale estimée est acceptable, arrêter le processus. Sinon, les éléments qui ont des erreurs locales supérieures à la condition (III.22) sont sélectionnés pour le raffinement.
- 4. Envoyer les informations de raffinement au logiciel Flux qui effectue le raffinement du maillage et renvoyer le nouveau maillage raffiné.
- 5. Aller à la première étape, remplacer le maillage précédent par le nouveau raffiné, et faire des itérations jusqu'à ce que l'erreur globale converge.

La procédure est exécutée en prenant une condition sur le raffinement, telle que :

Pour qu'un élément soit découpé, son erreur locale estimée doit satisfaire la condition suivante :

$$\eta_{locale_{elem}} \ge \frac{\eta_{globale}}{2} \tag{III.22}$$

où $\eta_{locale_{elem}}$ est l'erreur locale estimée pour un élément de maillage, et $\eta_{globale}$ est l'erreur globale estimée.

Cette condition relative a pour but d'essayer de diviser par deux l'erreur globale estimée puisqu'elle raffine tous les éléments supérieurs à sa moitié, là où les erreurs sont importantes à chaque itération, elle évite donc un raffinement aléatoire dense. La stratégie de découpage des éléments volumiques consiste à n'utiliser que les éléments du maillage surfacique du bord des régions physiques. Ce choix est justifié par le fait que les phénomènes physiques associés aux problèmes traités sont souvent focalisés en périphérie des régions, comme les effets de peau et de proximité. Nous justifions ce choix également en termes de ressources numériques, selon l'expérience des développeurs du solveur Altair **Flux**[™], la découpe directe des éléments volumiques peut rapidement avoir un coût important en termes d'augmentation du nombre d'éléments de maillage contrairement à la découpe surfacique. Ce coût n'est pas anodin dans le cadre d'une méthode PEEC, car l'augmentation importante du nombre d'éléments implique une augmentation importante du besoin en mémoire vive. Une fois que le découpage surfacique est fait, le maillage volumique est reconstruit à l'aide d'un générateur de maillage classique de Voronoi-Delaunay en prenant le maillage surfacique du bord comme point de départ.

III.7.a Stratégie de découpage des éléments

En considérant le maillage surfacique du bord des régions, on doit traduire l'erreur estimée initialement pour un élément volumique vers l'élément surfacique du bord inclus dans cet élément volumique. Pour la traduire, l'ensemble des faces (c'est-à-dire éléments surfaciques) de l'élément volumique sont considérées. On suit la procédure suivante :

- Toutes les superficies (aires) des faces de l'élément volumique sont calculées.
- La face avec la plus grande superficie (superficie_{maximale}) prend une valeur d'erreur égale à l'erreur estimée pour l'élément volumique père.
- Les autres faces prennent des valeurs d'erreurs qui suivent l'expression suivante :

$$\eta_{face} = \frac{\text{superficie}_{face}}{\text{superficie}_{maximale}} \eta_{element_{volumique}}$$

Ce rapport de taille des faces permettra de privilégier le découpage (dans un élément volumique) des grandes faces qui contribuent le plus à l'erreur.

La découpe se fait comme suit : pour chaque élément triangulaire à découper, un nœud est inséré au milieu de chacune de ses trois arêtes. Par conséquent, quatre nouveaux triangles remplacent le triangle initial. En utilisant cette stratégie de découpe, on est obligé de couper également les triangles voisins en deux afin de garder la conformité du maillage, comme le montre la Figure III.13.



FIGURE III.13 – Découpe d'un élément triangulaire (découpe régulière) et de son voisin (découpe de conformité). **Gauche :** deux triangles avant la découpe de celui marqué par une croix blanche. **Droite :** résultat de la découpe, les nouvelles arêtes régulières sont en rouge, l'arête de conformité est en traits jaunes.

L'ajout d'une étape de régularisation et d'optimisation de la qualité du maillage pourrait améliorer la procédure, par exemple en utilisant le "Bubble packing relaxé" [67, 64], mais cette étape n'a pas été mise en œuvre dans cette thèse, elle pourra faire l'objet de travaux futurs.

III.8 Exemples d'application

Des exemples d'application sont présentées dans cette section. Ils incluent un problème de courants de Foucault tel qu'il est proposé dans le problème TEAM Workshop N°7 [68]. Ils comprennent également la simulation d'une application industrielle complexe avec des connexions des composants de type circuit. Cette simulation d'un busbar laminé est faite en courant continu et aussi en alternatif avec une source basse fréquence. Pour faire ces simulations, la formulation PEEC RLM volumique est considérée.

III.8.a Problème TEAM Workshop N°7

Le dispositif du problème est présenté sur la Figure III.14. Il est composé d'une bobine et d'une plaque volumique comportant un trou de périmètre carré. La simulation est faite avec une bobine non maillée alimentée par une source de courant réel de 2742 A-tours. La plaque est maillée avec un maillage initial composé de 380 éléments tétraédriques.



FIGURE III.14 – Géométrie du problème TEAM N°7 (les dimensions sont en mm)

Le scénario proposé consiste à résoudre le problème à 50 Hz et à 200 Hz, puis à comparer les pertes Joule avec les références obtenues dans [7] avec un maillage FEM dense de 2×10^6 éléments.

La procédure de raffinement de maillage adaptatif est exécutée afin de converger vers un maillage final avec une erreur suffisamment faible. L'évolution des pertes Joule dans la plaque au cours des itérations du raffinement adaptatif est représentée sur la Figure III.15. Cette figure représente également les résultats de référence FEM, et ceux obtenus avec un raffinement uniforme en PEEC. Le raffinement uniforme consiste à découper tous les éléments à chaque itération quelles que soient leurs erreurs estimées.



FIGURE III.15 – Pertes Joule dans la plaque en fonction du nombre d'éléments de maillage. Haut : à 50 Hz, Bas : à 200 Hz

Le Tableau III.1 présente un résumé de :

- La comparaison entre les résultats obtenus sur les itérations de raffinement adaptatif et la référence FEM.
- Les temps de calcul de la procédure, mais sans ceux de la simulation FEM car ils ne sont pas publiés dans l'article de référence [7].

Nous observons sur la Figure III.15 que la solution PEEC tend rapidement à converger vers la solution FEM (erreur <6%) même si le maillage de départ à l'itération 0 est grossier comme dans ce cas. Si nous regardons la procédure de raffinement uniforme, la 4^{eme} itération n'a pas pu être résolue avec notre ordinateur par manque de ressources en raison du grand nombre d'éléments (environ 800 000). Dans la Figure III.15 à l'itération 3, la même valeur de pertes Joule est obtenue pour un raffinement uniforme et adaptatif, mais avec une grande différence en termes de nombre d'éléments. Cette différence en termes de

	50Hz			200Hz				
	Éléments	Pertes	Diff	Temps	Éléments	Pertes	Diff	Temps
		Joule(W)		(min)		Joule(W)		(\min)
FEM	2E6	4,70	Ref	/	2E6	9,5	Ref	/
2^{eme} raffine-	6 868	4,63	1,48	2	4 629	8,92	6,08	3
ment PEEC			%				%	
3^{eme} raffine-	33 977	4,70	0,08	12	21 666	9,46	0,44	13
ment PEEC			%				%	

TABLE III.1 – Erreur relative du remaillage adaptatif PEEC par rapport à la solution FEM et les coûts en temps

maillage est illustrée sur la Figure III.16.

En termes de temps de calcul, la différence n'est pas moindre : **12** minutes pour l'adaptatif et **103** minutes pour l'uniforme obtenus avec un ordinateur 4 cœurs Dell Precision 7520, Intel(R) Core(TM) i7-7820HQ CPU @ 2.90GHz. Ce temps de calcul représente le temps consacré à la procédure dès son début avec le maillage de 380 éléments à 50Hz. Si nous augmentons la fréquence (par conséquent l'effet de peau) ou si nous devons traiter une géométrie plus complexe, le raffinement uniforme du maillage devient insoutenable pour la méthode PEEC rendant ainsi la technique du maillage adaptatif plus attractive.



FIGURE III.16 – Le maillage obtenu pour l'itération 3 du raffinement à 50 Hz : **Gauche :** uniforme (112 000 éléments), **droite :** adaptatif (34 000 éléments)

Sur la Figure III.17, une comparaison est faite entre les erreurs globales estimées et l'erreur sur les pertes Joule. Pour ce faire, le maillage final est pris comme référence pour le calcul de ces erreurs relatives sur les pertes Joule. Nous observons que les deux courbes ont la même évolution, mais avec une légère surestimation de l'erreur par l'estimateur. Cela permet de montrer que la technique de calcul de la deuxième solution et l'estimateur d'erreur proposé sont efficaces pour traiter ce type de problème de courants de Foucault.

La Figure III.18 présente une bonne répartition de la partie réelle de la densité de courant à 50 Hz qui suit bien le maillage obtenu par le raffinement adaptatif.

Afin d'illustrer le comportement local de l'estimateur d'erreur, la Figure III.19 montre la distribution des erreurs locales estimées à 50 Hz pour le maillage initial et le final.

 Pour le maillage initial, l'erreur locale semble être plus élevée sur le chemin principal des courants de Foucault qu'il faut raffiner.



FIGURE III.18 – Distribution de la densité FIGURE III.17 – Erreurs globales sur la de courant (A/m^2 partie réelle) à 50 Hz



FIGURE III.19 – Distribution de l'erreur locale estimée à 50 Hz pour le maillage initial et le maillage final

— Pour le maillage final, l'erreur est considérablement réduite sauf sur très peu d'éléments situés sur le coin du maillage où le calcul de la densité de courant est moins précis.

III.8.b Busbars laminés

Dans cette partie, le raffinement du maillage d'un busbars laminés à complexité industrielle présenté sur le Figure III.20 est étudié. Le dispositif comprend plusieurs connexions avec des composants de type circuit (résistances, condensateurs) comme le montre la Figure III.21. L'IGBT et les diodes sont modélisés par leurs résistances internes à l'état fermé. Le circuit est alimenté par une source de tension de 1 V. La modélisation de ce genre de dispositif dans l'industrie permet d'estimer a priori les pertes et aussi de quantifier le déséquilibre qu'il pourrait y avoir sur les courants des composants parallèles, comme par exemple dans notre cas les IGBT ou le bus des condensateurs (C-BUS).

Un maillage initial suffisant décrivant la géométrie est considéré. En choisissant la précision globale à 1% et en considérant la condition locale de découpage (III.22), nous obtenons la distribution de la densité de courant présentée sur la Figure III.21. Elle est obtenue après 3 itérations de la procédure de raffinement à 1 kHz. L'erreur globale estimée et l'erreur sur les pertes Joule évoluent plutôt de la même manière au fil des itérations avec



FIGURE III.20 – Géométrie complète du busbars laminés.

une surestimation visible sur la Figure III.22.



FIGURE III.21 – La densité de courant (A/m^2) sur les busbars laminés alimentés par une source de tension de 1 V à 1 kHz

FIGURE III. 22 – Erreurs globales sur les busbars laminés à 1 kHz

Pour le cas DC, les condensateurs (C-BUS) de la Figure III.21 sont remplacés par des résistances comme indiqué sur la Figure III.23. Dans ce cas, bien qu'il n'y ait pas d'effet de peau, il reste des erreurs numériques liées à la sous-discrétisation de la géométrie et du trajet du courant électrique. Cela peut sous-estimer l'impédance de l'appareil et les pertes qui en résultent.

Après deux itérations de procédure de raffinement, nous remarquons que la valeur des pertes Joule ne varie pas vraiment, cela signifie que le maillage initial était suffisant pour calculer les quantités globales de l'appareil comme le montre la Figure III.24, mais le raffinement a quand même amélioré les quantités locales. Pour les quantités globales, cela est justifié par le fait que les résistances des interconnexions peuvent être masquées par celles des composants qu'elles relient, comme discuté dans l'article de J. Roudet *et al* [69].

A travers ces exemples d'application, l'objectif était de montrer le bénéfice que pourrait apporter la procédure de raffinement adaptatif dans le cadre d'une étude sur un dispositif



FIGURE III.23 – La densité de courant (A/m^2) sur les busbars laminés alimentés par une source de tension de 1 V en DC

FIGURE III.24 – Erreurs globales sur les busbars laminés en DC

complexe ou non, pour une réduction de pertes ou d'inductance par exemple. Un éventuel futur couplage de cette procédure avec un algorithme d'optimisation paramétrique pourrait fournir un outil de simulation efficace et autonome contrôlé par la définition d'une précision de calcul souhaitée.

III.9 Extension aux régions surfaciques

Compte tenu du développement de différentes approches de modélisation avec hypothèse de région mince ou condition d'impédance de surface SIBC, il était naturel d'étendre la procédure de remaillage adaptatif pour ces cas surfaciques.

III.9.a Cas région mince

Dans cette section, la formulation RLM avec l'hypothèse région mince est considérée, la solution initiale est obtenue en résolvant le système linéaire (I.50).

Afin de calculer une seconde solution, la technique de projection et reconstruction du champ électrique \mathbf{E}' sur les arêtes du maillage présentée dans la section III.6.b-ii est utilisée. Le système linéaire résultant est réécrit pour les régions minces [32], tel que :

$$\sum_{j} \int_{S_e} w_{e_i} \cdot w_{e_j} \cdot \mathbf{E}'_{S_{m_j}} dS_e = \int_{S_e} w_{e_i} \cdot \frac{\mathbf{J}_m}{G\sigma} dS_e$$
(III.23)

avec

- \mathbf{J}_m : densité de courant moyenne sur un élément surfacique donnée par la solution initiale.
- \mathbf{E}'_{S_m} : champ électrique surfacique moyen.
- $G\sigma = \frac{2\delta \tanh\left(\frac{e(1+j)}{2\delta}\right)}{e(1+j)}\sigma : \text{ conductivité complexe équivalente.} \\ w_e : \text{ fonctions de forme d'arêtes.}$
- $-S_e$: domaine surfacique avec fonctions de forme d'arêtes.

L'estimateur d'erreur énergétique est réécrit pour l'hypothèse de région mince. Pour les valeurs locales, il est écrit sous la forme suivante :

$$\eta_{elem} = N \times \left| \frac{\int_{S_E} |\mathbf{J}_m|^2 \mathrm{d}S_E - \int_{S_E} |G\sigma \cdot \mathbf{E'}_m|^2 \mathrm{d}S_E}{\int_S |\mathbf{J}_m|^2 \mathrm{d}S} \right|$$
(III.24)

Et nous écrivons l'estimateur de l'erreur globale, tel que :

$$\eta_{global} = \left| \frac{\int_{S} |\mathbf{J}_{m}|^{2} \mathrm{d}S - \int_{S} |G\sigma \cdot \mathbf{E'}_{m}|^{2} \mathrm{d}S}{\int_{S} |\mathbf{J}_{m}|^{2} \mathrm{d}S} \right|$$
(III.25)

III.9.b Cas condition d'impédance de surface (SIBC)

Lorsque la formulation inductive avec condition d'impédance de surface est considérée, la solution initiale est obtenue en résolvant le système linéaire (I.65). Afin de calculer une seconde solution, nous utilisons comme précédemment la technique de projection et reconstruction du champ électrique \mathbf{E}' sur les arêtes du maillage. Le système linéaire résultant est réécrit tel que :

$$\sum_{j} \int_{\Gamma_e} w_{e_i} \cdot w_{e_j} \cdot \mathbf{E}'_{S_j} d\Gamma_e = \int_{\Gamma_e} w_{e_i} \cdot \frac{\mathbf{K}}{\sigma_{equivalent}} d\Gamma_e$$
(III.26)

avec

 $- \mathbf{E}_S$: champ électrique surfacique sur le bord du domaine.

— $\sigma_{equivalent} = \frac{1+j}{2\sigma\delta}$: conductivité complexe équivalente.

- **K** : densité de courant surfacique équivalente obtenue par la solution initiale.

— Γ_e : bord du domaine volumique avec fonctions de forme d'arêtes.

L'estimateur d'erreur est adapté pour cette condition, on l'écrit pour les valeurs locales sous la forme suivante :

$$\eta_{elem} = N \times \left| \frac{\int_{\Gamma_E} |\mathbf{K}|^2 \mathrm{d}\Gamma_E - \int_{\Gamma_E} |\sigma_{equivalent} \cdot \mathbf{E}'|^2 \mathrm{d}\Gamma_E}{\int_{\Gamma} |\mathbf{K}|^2 \mathrm{d}\Gamma} \right|$$
(III.27)

Et nous écrivons l'estimateur de l'erreur globale tel que :

$$\eta_{global} = \left| \frac{\int_{\Gamma} |\mathbf{K}|^2 \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma} |\sigma_{equivalent} \cdot \mathbf{E}'|^2 \mathrm{d}\Gamma}{\int_{\Gamma} |\mathbf{K}|^2 \mathrm{d}\Gamma} \right|$$
(III.28)

L'extension de la procédure de raffinement adaptatif aux régions surfaciques offre un avantage d'efficacité pour la modélisation de dispositifs à moindre coût et avec une bonne précision, mais évidemment dans le cadre de validité des hypothèses liées à ces régions. Les tests associés sont mis en annexe IV.7, notamment la mise en œuvre de la procédure en SIBC pour la modélisation d'une nouvelle cellule de commutation dans le cadre d'une collaboration pour la thèse de Wendpanga Fadel Bikinga [3, 70].

III.10 Raffinement adaptatif de maillage versus intégration avec points de Gauss adaptatifs

La question de la stratégie de l'utilisation de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs versus le raffinement adaptatif de maillage est pertinente à poser. Doit-on utiliser les deux stratégies en même temps ou une à la fois?
Dans cette section, nous tenterons de répondre à cette question. Si le choix d'utiliser les deux stratégies en même temps offre plus de sécurité en termes de précision de calcul, cela peut coûter un peu plus cher en termes de temps de calcul du côté de l'intégration numérique selon la machine de calcul utilisée comme on l'avait présenté dans le tableau II.2. Pour étudier l'impact du raffinement sur des conducteurs 1D, nous allons reprendre l'exemple d'application de la plaque avec une bobine présenté sur la Figure II.10, et puis raffiner les conducteurs hexaédriques de la bobine. Ces conducteurs ont normalement un courant uniforme dans la direction perpendiculaire à leurs sections, mais peuvent varier selon le plan de la section à cause de l'effet de peau.

III.10.a Raffinement de maillage des conducteurs 1D

Dans cette partie, la bobine de l'exemple présenté sur la Figure II.10 est raffinée manuellement. Pour ce genre de conducteur, il n'est pas possible d'utiliser l'estimateur d'erreur présenté précédemment, car des hypothèses de conducteurs filiformes ou PEEC structuré 1D sont généralement utilisées. L'hypothèse filiforme consiste à avoir que des segments comme éléments de maillage (pas de seconde solution complémentaire), et l'approche PEEC structurée 1D n'offre pas une continuité naturelle de la densité de courant sur les éléments.

Nous allons comparer les valeurs des pertes Joule dans la bobine et dans la plaque sur un intervalle de fréquence de 1 Hz à 10 MHz. Les conducteurs de la bobine sont subdivisés dans la direction perpendiculaire à leurs sections comme suit :

- 1. 1 hexaèdre (cas initial étudié dans le chapitre II).
- 2. 10 hexaèdres.
- 3. 20 hexaèdres.
- 4. 40 hexaèdres.
- 5. 60 hexaèdres.

Les hexaèdres définis ici sont des éléments de l'approche PEEC structurée 1D. L'intérêt de cette étude est d'essayer de voir s'il y a un besoin de remailler les conducteurs 1D ou si l'utilisation de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs est suffisante pour une bonne précision de calcul.

III.10.a-i Écart d'intégration numérique par configuration de maillage

La Figure III.25 montre l'écart qu'il y a entre une intégration avec points de Gauss adaptatifs et une intégration avec points de Gauss fixes (4 pour les quadrangles, 8 pour les hexaèdres) sur les pertes Joule pour chaque configuration de maillage. La plaque n'est pas raffinée dans ce cas, car elle est suffisamment maillée.

L'écart des pertes Joules entre les deux intégrations avec et sans points de Gauss adaptatifs s'affaiblit avec l'augmentation des subdivisions pour la plaque. Ce comportement n'est pas observé pour les pertes Joule dans la bobine, car concernant la bobine, il faut prendre garde au découpage et veiller à ce que la dimension des hexaèdres suivant la direction du courant ne soit pas inférieure aux deux autres directions (comme le montre la Figure III.26). Un tel découpage conduit à un calcul imprécis des inductances partielles propres et mutuelles, de par la forme même des éléments (au même titre que ce qu'on obtient pour des éléments trop allongé).



FIGURE III.25 – Écart sur les pertes Joule entre l'intégration avec points de Gauss adaptatifs et celle avec points de Gauss fixes



FIGURE III.26 – Un élément hexaédrique de la bobine résultant du découpage de l'élément hexaédrique initial : (Gauche) division par 40, (droite) division par 60.

III.10.a-ii Écart d'intégration numérique de chaque configuration de maillage par rapport à la configuration initiale "1 hexaèdre"

Dans ce paragraphe, les valeurs de pertes obtenues avec l'intégration avec points de Gauss adaptatifs du cas "1 hexaèdre" sont prises comme référence. Elles sont comparées avec les valeurs obtenues avec intégration à points de Gauss fixes pour toutes les autres configurations. Les résultats sont présentés sur la Figure III.27.

Nous voyons qu'à mesure que la bobine est raffinée, l'écart sur les valeurs des pertes Joule dans la plaque s'affaiblit, ce qui montre que l'intégration avec points de Gauss adaptatifs donne une bonne précision pour le cas de référence sans avoir besoin de raffiner la bobine. Si l'on observe maintenant l'écart sur les pertes Joule dans la bobine, le raffinement dans ce cas crée des erreurs d'intégration au lieu de les réduire, comme argumenté précédemment.

En conclusion pour cette partie, nous avons montré que l'utilisation de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs sur des conducteurs 1D longs suffit pour avoir une bonne précision au lieu de les raffiner dans la direction perpendiculaire à leurs sections, car le courant reste constant sur cette direction.

Dans le plan de la section en revanche, quand il y a de l'effet de peau, le courant n'est pas constant sur ce plan, il a tendance à aller sur les bords. Par conséquent, il est justifié



FIGURE III.27 – Écart sur les pertes Joule entre l'intégration avec points de Gauss adaptatifs de la configuration "1 hexaèdre" avec l'intégration avec points de Gauss fixes sur toutes les configurations.

et intéressant de mailler avec respect de l'épaisseur de peau tel qu'il est fait dans le module **PEEC** du logiciel Altair **Flux**. La Figure III.28 montre un exemple du raffinement pour avoir deux éléments dans l'épaisseur de peau à 50 et 10^7 Hz.



FIGURE III.28 – Maillage dans la section du conducteur 1D pour respecter deux éléments dans l'épaisseur de peau : (**Gauche**) à 50 Hz, (**Droite**) à 10 MHz.

En addition, si le dispositif étudié est discrétisé avec plusieurs types d'éléments de maillage, la non-utilisation de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs peut créer de grosses erreurs numériques, surtout si le maillage comporte des éléments avec des dimensions très variables. L'impact de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs varie aussi en fonction de la physique du problème. Si des forts couplages inductifs ou/et capacitifs sont présents, la précision de calcul des inductances et des coefficients de potentiels est cruciale, d'où l'importance d'utiliser l'intégration avec points de Gauss adaptatifs.

III.10.b L'intégration numérique dans le cas d'un raffinement de maillage tétraédrique

Actuellement par limitation informatique, la procédure de raffinement adaptatif du maillage n'est utilisable qu'avec un maillage tétraédrique dans le cas volumique et triangulaire dans le cas surfacique. Nous effectuons la comparaison dans cette section sur des

maillages tétraédriques raffinés pour avoir une précision inférieure à 1% sur les pertes Joule du dispositif busbars laminés présenté précédemment sur la Figure III.20. Le raffinement adaptatif du maillage est fait en considérant une source de tension de 1 V à 1 kHz, il en résulte trois itérations de raffinement. La Figure III.29 montre le maillage initial et le maillage final à l'itération 3 du dispositif.



FIGURE III.29 – Maillage initial (11 000 éléments) et le maillage final (150 000 éléments) à l'itération 3 du dispositif busbars laminés.

Le temps de calcul obtenus pour chaque itération de raffinement sont présentés sur la Figure III.30. Les deux courbes représentent respectivement une intégration avec points de Gauss adaptatifs, et une intégration avec points de Gauss fixes (4 points). Les temps de calcul sont plus longs en intégration avec points de Gauss adaptatifs qu'en fixe malgré l'utilisation de la compression matricielle ALFMM.





La comparaison est faite pour chaque maillage entre une intégration avec points de Gauss adaptatifs et une intégration fixe avec 4 points de Gauss. Nous observons l'écart des valeurs des pertes Joule sur la Figure III.31, et l'écart des valeurs sur le module d'impédance sur la Figure III.32.



Joule sur le busbars laminés pour une intégration avec et sans points de Gauss adaptatifs

FIGURE III.31 – Écart relatif sur les pertes FIGURE III.32 – Écart relatif sur le module d'impédance sur le busbars laminés pour une intégration avec et sans points de Gauss adaptatifs

L'écart relatif entre les deux types d'intégration diminue au fur et à mesure que l'on raffine les éléments, car la taille des éléments diminue impliquant une variation interne de plus en plus faible du potentiel vecteur magnétique, où 4 points de Gauss suffisent pour bien l'intégrer. Partant de ce constat, on peut conclure dans le cas d'un dispositif où tous ces éléments sont de type simplexe (tétraèdres, triangles), l'utilisation uniquement du raffinement adaptatif du maillage avec intégration à 4 points de Gauss (ou 3 points dans le cas des triangles) est suffisant. Dans les cas où d'autres types d'éléments sont utilisés, l'utilisation de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs est fortement recommandée pour avoir une bonne précision de calcul.

III.11 Conclusion

Dans ce chapitre, l'objectif premier était de développer une technique de raffinement adaptatif pour la méthode PEEC non-structurée. Pour ce faire, nous avons présenté une procédure basée sur un critère d'erreur pour le raffinement. Ce critère d'erreur a pour but de quantifier l'erreur sur la continuité des champs dans le maillage.

Le critère d'erreur développé fait partie de la catégorie des estimateurs d'erreur a posteriori qui sont plus adaptés pour des problèmes fréquentiels. Pour utiliser ce critère, nous avons besoin de deux solutions complémentaires qui assurent chacune la continuité de \mathbf{J} et E respectivement. Pour ce faire, une investigation sur des techniques permettant de calculer une deuxième solution \mathbf{E} est faite. Nous avons montré la pertinence de l'utilisation d'une technique basée sur la projection et la reconstruction du champ électrique à partir de la densité de courant de la solution initiale. Cette technique était la plus performante et la moins contraignante des trois techniques proposées initialement. Pour valider cette technique, nous avons comparé trois critères d'estimation, cela en fonction des erreurs globales et locales. Nous avons opté pour un critère énergétique car il a montré un bon comportement sur les deux aspects de l'estimation.

La procédure de raffinement adaptatif du maillage a été mise en place à l'aide du générateur de maillage du solveur Altair Flux. Elle a été limitée à des maillages de type simplexe par contrainte informatique. La procédure a d'abord été testée avec un exemple de couplage inductif qui est le problème TEAM N°7. Elle avait conduit à des résultats très satisfaisants en comparaison avec une solution connue obtenue par la méthode des éléments finis. La procédure a également été testée avec un busbars laminé couplé circuit. L'exemple a été traité efficacement dans le cas d'une source en basse fréquence et en courant continu, mais avec une légère surestimation de l'erreur.

Pour élargir le cadre d'utilisation de la procédure de raffinement, une extension a été faite pour les approches surfaciques avec hypothèse de région mince et aussi pour la condition d'impédance de surface. L'ensemble des développements sur la procédure a montré un grand potentiel et rend la méthode PEEC non-structurée beaucoup plus fonctionnelle et attrayante pour la modélisation de dispositifs complexes. Dans le cas des conducteurs 1D, nous avons montré qu'une intégration aux points de Gauss adaptatifs suffit pour avoir une bonne précision de calcul au lieu de faire un raffinement de maillage sur la direction perpendiculaire à leurs sections, mais il est préférable d'ajuster le maillage sur leurs sections pour respecter l'épaisseur de peau.

Enfin, nous avons essayé de définir une stratégie d'utilisation ou non de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs dans le cadre du raffinement adaptatif du maillage. Cette stratégie est très difficile à cerner, car selon la nature physique du problème à traiter, l'impact de l'intégration avec points de Gauss adaptatifs est plus ou moins important. Néanmoins, une première réponse a été formulée.

Chapitre IV

Préconditionneur multi-grille géométrique

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Ici, nous avons réuni théorie et pratique : Rien ne fonctionne... et personne ne sait pourquoi!

Albert Einstein

Sommaire

III.1 INTRODUCTION	76
III.2 INTRODUCTION AUX ESTIMATEURS D'ERREURS	76
III.3 CALCUL DE SOLUTIONS DUALES POUR LA MÉTHODE PEEC NON-STRUCTURÉE	<u> </u>
III.3.a Formulation hybride BEM-FEM	77
III.3.b Projection du champ électrique sur les arêtes du maillage	78
III.3.c Calcul du champ électrique \mathbf{E}' avec un post-traitement intégral \hdots	79
III.4 Les estimateurs d'erreurs	80
III.4.a Estimateur par valeurs moyennes	80
III.4.b Estimateur énergétique	81
III.4.c Estimateur Ligurien	81
III.5 Erreur de référence sur un maillage	82
III.6 Comparaison entre les erreurs estimées et la référence	83
III.6.a Calcul de l'erreur de référence	84
III.6.b Estimation de l'erreur	85
III.6.c Temps de calcul et contraintes sur le calcul de \mathbf{E}'	90
III.6.d Conclusion	90
III.7 Procédure de raffinement adaptatif	91
III.7.a Stratégie de découpage des éléments	92
III.8 Exemples d'application	93
III.8.a Problème TEAM Workshop N°7	93
III.8.b Busbars laminés	96
III.9 Extension aux régions surfaciques	98
III.9.a Cas région mince	98
III.9.b Cas condition d'impédance de surface (SIBC)	99
III.10 RAFFINEMENT ADAPTATIF DE MAILLAGE VERSUS INTÉGRATION AVEC POINTS	
DE GAUSS ADAPTATIFS	99
III.10.a Raffinement de maillage des conducteurs 1D	100
III.10.b L'intégration numérique dans le cas d'un raffinement de maillage tétraédrique	102
III.1 ¹ Conclusion	104

Résumé

Dans ce chapitre, nous explorons la possibilité de mettre en place un préconditionneur multi-grille géométrique pour la méthode PEEC non structurée. Cela a été fait en considérant l'approche circuit de la méthode. L'application a été testée sur trois solveurs circuits différents. Une attention particulière sera portée aux lisseurs, ceux-ci étant une étape indispensable pour la mise en place de préconditionneur multi-grille géométrique.

IV.1 Introduction

Afin d'améliorer l'efficacité des méthodes de résolution itérative, il est nécessaire d'employer un préconditionneur [39] comme nous l'avons étudié dans le chapitre II. La mise en place de préconditionneur dans un contexte de compression matricielle est toujours un peu délicate puisque les matrices ne sont pas connues de façon explicite. Ces préconditionneurs spécifiques sont associés à une méthode de compression matricielle ce qui ne les rendent pas génériques (par exemple dans la thèse de J. Siau [2] la compression HCA (Hybrid Cross Approximation) a été étudiée et un préconditionneur fondé sur la décomposition \mathcal{H} -LU a été mis en place). Cela induit des difficultés lorsque le problème est résolu dans une base différente de la base d'intégration. C'est le cas des problèmes que l'on cherche à traiter puisque la résolution s'effectue dans une base de nœuds ou mailles indépendantes et que l'intégration s'effectue dans une base de branches (au sens circuit électrique).

Malgré l'efficacité de la compression matricielle et de son préconditionneur basé sur la décomposition LU, lorsque le nombre de degrés de liberté N devient important (de 50 000 et plus), les temps de construction du préconditionneur deviennent prohibitifs en raison de décompositions LU qui s'effectuent sur des blocs et qui ont une complexité en $O(N^3)$.

Dans ce chapitre, nous présentons une approche différente des préconditionneurs en essayant de sortir de la dépendance actuelle de leurs constructions vis-à-vis de la compression matricielle lorsque l'on veut traiter un problème modélisé par la méthode PEEC. Nous avons choisi d'explorer l'utilisation de préconditionneur multi-grille géométrique. Ce choix a été fait car nous avons des grilles qui sont automatiquement générées grâce au raffinement adaptatif du maillage présenté dans le chapitre précédent, et également car ce type de préconditionneur a montré une complexité "asymptotiquement optimale", c'est-à-dire, la durée de calcul requise pour atteindre une précision fixe est proportionnel au nombre d'inconnues (O(N)) dans la littérature en méthode des éléments finies. L'objectif de ce chapitre est exploratoire. Il a pour but de mettre en évidence les difficultés rencontrés dans une mise en oeuvre pour la méthode PEEC et ainsi évaluer si cette famille de préconditionneur est viable et intéressante pour le type de problème que l'on cherche à traiter.

Dans ce qui suit, le préconditionneur multi-grille géométrique et son principe de fonctionnement sont présentés, puis sa forme la plus simple fondée sur deux grilles uniquement est appliquée à des systèmes matriciels associés à différents solveurs circuits afin de résoudre les difficultés rencontrées dans sa mise en oeuvre pour la méthode PEEC.

IV.2 Préconditionneur multi-grille géométrique

On propose dans ce qui suit d'étudier la possibilité d'utiliser un préconditionneur multigrille géométrique dans le cadre de la méthode PEEC non-structurée. Ce type de préconditionneur repose sur l'utilisation de plusieurs niveaux de calcul. Ils sont populaires dans les domaines de la mécanique des fluides et du solide pour la méthode des éléments finis [71], mais à notre connaissance ils n'ont jamais été utilisés dans le cadre de la méthode PEEC. Le défi majeur de l'utilisation de ce type de préconditionneur dans le cadre de cette méthode provient de la représentation circuit de cette dernière, car les inconnues (typiquement les courants de mailles ou les potentiels de nœuds) sont des entités de circuit et non des entités reliées directement au maillage géométrique. Cette propriété peut nous empêcher de profiter pleinement de ce qui se fait dans la littérature avec la méthode des éléments finis.

L'utilisation de plusieurs niveaux de calcul consiste à avoir plusieurs grilles de maillage avec un nombre d'éléments inférieur graduellement à celui de la grille fine principale. Ces grilles peuvent avoir des éléments imbriqués, et aussi des éléments non-imbriqués [72, 73]. Ce préconditionneur peut être associé à une technique de raffinement adaptatif du maillage, ce qui permettra de créer les différentes grilles automatiquement à partir d'une grille grossière [74], ou inversement à partir de la grille principale fine, avec une technique de grossissement automatique du maillage [75].

Nous présentons dans ce qui suit le principe du préconditionneur multi-grille géométrique. Pour plus de clarté, la variante simplifiée du préconditionneur comportant uniquement deux grilles est présentée en premier, notée "préconditionneur bi-grille géométrique".

IV.3 Principe du préconditionneur bi-grille géométrique

Le préconditionneur bi-grille géométrique utilise deux grilles : une grille avec un maillage grossier notée H et une grille avec un maillage fin notée h qui est la grille principale du système à préconditionner. Sur le maillage fin, le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{A}_h \mathbf{x}_h = \mathbf{b}_h \tag{IV.1}$$

Le système linéaire concernant le maillage grossier a la forme suivante :

$$\mathbf{A}_H \mathbf{x}_H = \mathbf{b}_H \tag{IV.2}$$

à l'aide des informations apportées par ce système, nous allons tenter de résoudre le système (IV.1). Définissons d'abord les opérations et les étapes permettant le transfert d'informations entre deux grilles comme le montre la Figure IV.1. Les opérations sont les suivantes :

- Les opérateurs de restriction R : ils permettent le passage d'un vecteur second membre du maillage fin vers le maillage grossier.
- Les opérateurs de prolongement P : ils permettent le passage d'un vecteur solution du maillage grossier vers le maillage fin.



FIGURE IV.1 – Schéma du préconditionneur bi-grille

Le préconditionneur bi-grille est effectué pour chaque itération du solveur itératif principal qui résout le système (IV.1). Il se décompose en 3 étapes :

1. Le pré-lissage : lors de cette étape, une méthode itérative que l'on nomme *lisseur* L est utilisée afin d'effectuer un nombre fixe d'itérations que l'on note μ_1 . Cette étape permet d'obtenir une première approximation du vecteur solution $\tilde{\mathbf{x}}_h$. Elle se note de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{x}}_h = L(\mathbf{A}_h, \mathbf{b}_h, \mathbf{x}_{h_0}, \mu_1) \tag{IV.3}$$

avec x_{h_0} un vecteur solution initial sur la grille fine. Il est souvent nul car généralement les solveurs itératifs tel que GMRes ne permettent pas de récupérer la solution obtenue à chaque itération. Cette étape est facultative mais nous verrons dans les prochaines sections que son utilisation est bénéfique.

Calcul du résidu :

$$\mathbf{r}_h = \mathbf{b}_h - \mathbf{A}_h \,\tilde{\mathbf{x}}_h \tag{IV.4}$$

L'étape de pré-lissage peut être exclue en mettant $\mathbf{r}_h = \mathbf{b}_h$ directement.

Restriction du résidu : le vecteur résidu \mathbf{r}_h obtenu sur la grille fine est projeté sur la grille grossière à l'aide de l'opérateur de restriction R :

$$\mathbf{r}_H = R(\mathbf{r}_h) \tag{IV.5}$$

2. Calcul de la correction sur la grille grossière : la correction sur la grille grossière que l'on note δx_H est calculée en résolvant le système linéaire suivant :

$$\mathbf{A}_H \,\delta \mathbf{x}_H = \mathbf{r}_H \tag{IV.6}$$

avec $\delta \mathbf{x}_H$ le vecteur de correction obtenu sur la grille grossière.

Prolongement de la correction : projection de $\delta \mathbf{x}_H$ sur la grille fine avec les opérateurs de prolongement P :

$$\delta \mathbf{x}_h = P(\delta \mathbf{x}_H) \tag{IV.7}$$

le vecteur de correction $\delta \mathbf{x}_H$ est projeté sur la grille fine à l'aide de l'opérateur de prolongement P.

Mise à jour du vecteur solution sur la grille fine :

$$\tilde{\mathbf{x}}_h = \tilde{\mathbf{x}}_h + \delta \mathbf{x}_h \tag{IV.8}$$

cette mise à jour permet d'apporter une correction sur le vecteur solution $\tilde{\mathbf{x}}_h$ afin qu'il converge vers le vecteur solution final.

3. Le post-lissage : on applique lors de cette étape μ_2 itérations avec le lisseur L sur $\tilde{\mathbf{x}}_h$, on note :

$$\mathbf{x}_h = L(\mathbf{A}_h, \mathbf{b}_h, \tilde{\mathbf{x}}_h, \mu_2) \tag{IV.9}$$

cette étape permet de réduire les erreurs provenant de la grille grossière lors du prolongement de la correction $P(\delta \mathbf{x}_H)$.

Cette procédure est répétée jusqu'à l'obtention de la précision désirée sur le résidu \mathbf{r}_h .

Le cycle bi-grille peut être étendu à un cycle avec une multitude de grilles. Il existe plusieurs type de cycle, on cite par exemple, le cycle en V, et en W comme le montre la Figure IV.2 pour un cycle de 3 grilles.

- Le cycle en V consiste à descendre de la grille la plus fine vers la grille la plus grossière puis remonter jusqu'à la grille la plus fine.
- Le cycle en W consiste à descendre de la grille la plus fine vers la grille la plus grossière puis remonter vers une grille intermédiaire puis redescendre vers la grille la plus grossière puis remonter jusqu'à la grille la plus fine.



FIGURE IV.2 – Cycles multi-grille : en V (à gauche) , en W (à droite)

Dans un premier temps, afin de simplifier l'approche, nous avons fait le choix d'employer un cycle bi-grille. Pour utiliser cette méthode, nous devons définir les paramètres suivants :

- Le lisseur L (ou les lisseurs) pour l'étape de pré-lissage et de post-lissage.
- Le nombre d'itérations des lisseurs μ_1 et μ_2 .
- Les opérateurs P et R.

Ces paramètres sont variables en fonction du solveur circuit utilisé. On rappelle que nous avons présenté 3 types de solveurs circuits dans le chapitre II :

- Le solveur à mailles indépendantes.
- Le solveur à nœuds indépendants.
- Le solveur à nœuds indépendants minimals.

Commençons donc par étudier la faisabilité et les performances de ce type de préconditionneur pour ces solveurs circuits.

La Figure IV.3 présente l'exemple simple de test pour la mise en place du préconditionneur. Deux niveaux de grilles sont présentés, un maillage grossier avec 100 éléments quadrangulaires et un maillage plus fin avec 400 éléments quadrangulaires.

Les dimensions de la plaque sont de $100 \ge 100 \ge 1$ mm, et la bobine utilisée est celle présentée dans le TEAM Workshop N°7 dans [68]. La bobine et la plaque sont espacées l'une de l'autre de 50 mm.

Nous avons choisi cet exemple afin de simplifier les équations à résoudre, car dans ce cas il n'y a pas de sources de tension ou de courant connectées au circuit, puisque l'excitation est réalisée avec une bobine externe.



FIGURE IV.3 – Exemple avec deux niveaux de grilles en vue 3D (en haut) et vue 2D plan (en bas). Gauche : maillage fin. Droite : maillage grossier.

IV.4 Application du bi-grille au solveur à mailles indépendantes

Le solveur à mailles indépendantes est historiquement celui qui est employé au G2ELab. Il est donc naturel de débuter la tentative de préconditionnement sur ce solveur. Le système linéaire à résoudre dans ce cas est présenté dans la section II.2.c, il est rappelé comme suit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{Z}_{b} \cdot \mathbf{M}_{mi_{Z}}^{T} & -\mathbf{M}_{mi_{I}} & 0\\ \mathbf{M}_{mi_{U}}^{T} & 0 & 1\\ \mathbf{M}_{mi_{I}}^{T} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{m}\\ \mathbf{U}_{b_{I}}\\ \mathbf{I}_{b_{U}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{mi_{Z}} \cdot \mathbf{U}_{induit} + \mathbf{M}_{mi_{U}} \cdot \mathbf{U}_{b_{U}}\\ 0\\ -\mathbf{I}_{b_{I}} \end{pmatrix}$$
(IV.10)

En considérant notre exemple de la Figure IV.3 dans lequel il n y a ni source de courant ni source de tension, puisque l'excitation est réalisée avec une bobine externe, le système linéaire précédent s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{M}_{mi_Z} \, \mathbf{Z}_b \, \mathbf{M}_{mi_Z}^T \, \mathbf{I}_m = \mathbf{M}_{mi_Z} \, \mathbf{U}_{induit} \tag{IV.11}$$

et le vecteur $\mathbf{M}_{mi_Z}^T \mathbf{I}_m$ correspond aux courants de branche \mathbf{I}_{b_Z} .

Avant de définir des opérateurs de prolongement et de restriction, nous voudrions d'abord nous assurer théoriquement de la faisabilité du passage des variables entre les deux maillages grossier et fin. Pour ce faire, commençons par la projection du résidu $(\mathbf{r}_h = \mathbf{M}_{mi_Z} \mathbf{U}_{induit} - \mathbf{M}_{mi_Z} \mathbf{Z}_{b_h} \mathbf{M}_{mi_Z}^T \mathbf{I}_{m_h})$ du maillage fin vers le grossier. Le vecteur résidu r_h correspond à la somme des tensions de mailles, or il n'y a pas de relations simples entre les mailles indépendantes du problème fin et les mailles indépendantes du problème grossier. Il n'est donc pas possible de laisser cette quantité sous cette forme pour effectuer l'étape de projection. Pour réaliser cette étape, il faut passer de la base des mailles à la base des branches, mais le problème qui se pose est qu'en connaissant la somme des tensions de maille, on ne peut pas remonter aux tensions de branche, car il n'y a pas de solution unique.

La procédure n'a pas pu être réalisée, car elle montre dès le début l'existence d'un point bloquant pour l'application du préconditionneur multi-grille géométrique avec un solveur circuit à mailles indépendantes. N'ayant pas de solution concrète pour défaire ce point bloquant, nous avons donc décidé d'utiliser d'autres types de solveurs circuits.

Dans ce qui suit, nous considérons l'application du préconditionneur multi-grille géométrique sur un solveur circuit à nœuds indépendants.

IV.5 Application du bi-grille au solveur à nœuds indépendants

Dans cette section, nous allons tenter d'appliquer le principe du préconditionneur bigrille à la formulation RLM en région mince (I.50) présentée dans le Chapitre I, avec un solveur circuit à nœuds indépendants présenté dans la section II.2.a. Si on se limite à un solveur circuit sans sources de tensions et de courants, mais avec une bobine externe comme source d'excitation du système, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} & 0\\ \mathbf{R} + j\omega \mathbf{L} & \mathbf{M}_{ni_Z}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{b_Z} \\ \mathbf{V}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ \mathbf{U}_{induit} \end{pmatrix}$$
(IV.12)

Le système linéaire (IV.12) a deux types d'inconnues, \mathbf{V}_n les potentiels aux nœuds électriques et \mathbf{I}_{b_Z} les courants qui parcourent les branches électriques. Afin d'appliquer le préconditionneur bi-grille, deux types d'opérateurs de restriction et de prolongement doivent être développés en fonction de la nature des grandeurs à traiter. On rappelle la correspondance entre les entités circuits et le maillage géométrique :

- Les nœuds électriques correspondent aux éléments du maillage (représentés aux barycentres).
- Les branches électriques correspondent aux facettes du maillage.

Afin de définir les opérateurs de restriction et de prolongement, la Figure IV.4 présente une vue d'une partie du circuit du maillage fin et sa correspondance dans le maillage grossier, avec comme légende :

- Nœuds circuits en points bleus.
- Branches circuits représentées par leurs impédances en noir.
- Maillage géométrique en lignes rouges discontinues.

Les nœuds 1, 2, 3 et 4 dans le maillage fin correspondent au nœud A dans le maillage grossier, et pareillement les nœuds 5, 6, 7 et 8 correspondent au nœud B.

IV.5.a Opérateur de restriction R

L'opérateur de restriction doit assurer le bon passage des vecteurs seconds membres du maillage fin vers le maillage grossier.



FIGURE IV.4 – Vue d'une partie du circuit du maillage fin avec sa correspondance dans la maillage grossier (Nœuds circuits en bleu, branches circuits en noir, et maillage principal en lignes rouges discontinues

IV.5.a-i Potentiel électrique

Le potentiel électrique est considéré constant par élément, et sachant que les deux maillages fin et grossier sont complètement imbriqués, on trouve :

$$V_A = \frac{V_1 \, s_1 + V_2 \, s_2 + V_3 \, s_3 + V_4 \, s_4}{s_A} \tag{IV.13}$$

$$V_B = \frac{V_5 s_5 + V_6 s_6 + V_7 s_7 + V_8 s_8}{s_B}$$
(IV.14)

avec V_i et s_i le potentiel et la superficie de l'élément *i* respectivement. Dans le cas volumique, la superficie sera remplacée par le volume de l'élément. On peut donc généraliser le calcul par :

$$\int_{H_e} V_e \mathrm{d}H_e = \sum_{h_{e_k} \subset H_e} \int_{h_{e_k}} V_{e_k} \mathrm{d}h_{e_k}$$
(IV.15)

avec H_e et h_{e_k} un élément du maillage grossier et un élément du maillage fin respectivement, et k représente les indices des éléments h_e inclus dans l'élément H_e .

En considérant à 50 Hz l'exemple de test présenté dans la Figure IV.3, une résolution sur le maillage grossier est faite en considérant la bobine comme source, des courants induits sont observés sur la plaque et la répartition du potentiel électrique associée est présentée sur la Figure IV.5.

Afin de tester la validité de l'opérateur de restriction, une résolution sur le maillage fin est également faite en considérant la bobine comme source, puis une projection de la solution du potentiel électrique obtenue sur maillage fin est faite sur le maillage grossier en utilisant l'opérateur de restriction (IV.15), on obtient la Figure IV.6 pour la répartition du potentiel électrique. Cette projection doit se faire en ayant une correspondance des nœuds de référence du maillage grossier et fin, c'est à dire, si on reprend la Figure IV.4, en considérant que le nœud de référence sur le maillage fin est le nœud circuit **1**, le nœud de





FIGURE IV.5 – Potentiel électrique dans la FIGURE IV.6 – Potentiel électrique sur le plaque sur le maillage grossier à 50 Hz issu maillage grossier à 50 Hz issu de la projecd'une résolution du système linéaire grossier tion du maillage fin vers le grossier

référence sur le maillage grossier doit être le nœud circuit A afin de garder une cohérence sur les valeurs des potentiels.

La distribution du potentiel électrique projeté est la même par rapport à la solution initialement obtenue sur le maillage grossier, ceci valide l'opérateur de restriction (IV.15) pour la projection de \mathbf{V}_n dans le cas de deux grilles surfaciques imbriquées.

IV.5.a-ii Courant de branche

Dans cette partie, la projection des courants des branches d'un maillage fin vers un maillage grossier est présentée. Deux méthodes peuvent être mises en place. La première se fait en recherchant les correspondances des branches du maillage fin et celles du maillage grossier puis en additionnant les courants associés. C'est-à-dire si on reprend la Figure IV.4, pour calculer le courant dans la branche $\{A,B\}$ du maillage fin, seules les branches $\{3,5\}$ et $\{4,6\}$ du maillage grossier sont prises en considération. Les autres branches ont leurs nœuds circuits qui correspondent à un seul nœud circuit du maillage grossier, par exemple les nœuds 1 et 2 de la branche $\{1,2\}$ correspondent au nœud A dans le maillage grossier. La branche $\{1,2\}$ étant incluse dans le nœud A elle n'est pas utilisée pour le passage du maillage fin vers le maillage grossier. Par contre la branche $\{3,5\}$, où le nœud 3 correspond au nœud A, et le nœud 5 correspond au nœud B est prise en considération car elle existe dans le maillage fin et dans la maillage grossier. On a donc le courant dans la branche {A,B} qui s'écrit sous la forme suivante :

$$I_{AB} = I_{35} + I_{46} \tag{IV.16}$$

Sachant que les branches circuits sont des facettes du maillage, la deuxième méthode de projection consiste à utiliser l'espace fonctionnel de facettes et les valeurs aux points de Gauss dans les éléments pour faire la projection à l'aide d'une résolution d'un système d'éléments finis, tel que :

$$\sum_{j} \int_{\Omega_{H_e}} w_{f_i} \cdot w_{f_j} \cdot \mathbf{I}_{projetee_j} d\Omega_{H_e} = \int_{\Omega_{h_e}} w_{f_i} \cdot \mathbf{I}_{pg} d\Omega_{h_e}$$
(IV.17)

avec w_f les fonctions de formes de facettes, $\mathbf{I}_{projetee}$ les courants de branches projetés sur le maillage grossier, et \mathbf{I}_{pg} les valeurs aux points de Gauss des courants de branches dans le maillage fin.

Le système linéaire obtenu avec l'équation (IV.17) est constitué d'une matrice creuse. Afin de le résoudre, une décomposition LU est utilisée car elle présente de bonnes performances. De plus, il est possible de stocker la décomposition LU qui ne change pas d'une itération à l'autre et ainsi se limiter à la résolution des 2 systèmes triangulaires lors de nouvelles itérations.

En considérant à 50 Hz l'exemple de test présenté dans la Figure IV.4, on obtient les deux parties réelle et imaginaire de la densité de courant surfacique sur la maillage grossier. Elles sont présentées sur la Figure IV.7.



FIGURE IV.7 – Densité de courant surfacique sur le maillage grossier à 50 Hz

En projetant la densité de courant du maillage fin sur le maillage grossier en utilisant l'équation (IV.17), on obtient la Figure IV.8.



FIGURE IV.8 – Densité de courant surfacique projetée sur le maillage grossier à 50 Hz

On remarque que la distribution numérique de la densité de courant est identique par rapport à la solution initialement obtenue sur le maillage grossier, ceci valide l'opérateur

de restriction (IV.17) pour la projection de \mathbf{I}_{b_Z} dans le cas de deux grilles surfaciques imbriquées.

Il est rappelé ici que les opérations réalisées ci-dessus pour \mathbf{V}_n et \mathbf{I}_{b_Z} sont à titre illustratif et permettent de valider l'opérateur et sa mise en oeuvre. Dans la mise en place réelle de l'opérateur de restriction, la projection se fait sur le vecteur résidu ($\mathbf{r}_h = \mathbf{b}_h - \mathbf{b}_h$ $\mathbf{A}_h \mathbf{x}_h$) du solveur itératif principal, avec des images de \mathbf{V}_n et \mathbf{I}_{b_z} .

IV.5.b Opérateur de prolongement P

L'opérateur de prolongement doit assurer le bon passage du vecteur solution (correction) du maillage grossier vers le maillage fin.

Potentiel électrique IV.5.b-i

Pour projeter le potentiel du maillage grossier vers le maillage fin, on considère que tous les nœuds circuits du maillage fin qui sont inclus dans un seul élément H_e du maillage grossier ont le même potentiel qui est égale à celui de H_e . Cette méthode peut être employée car le potentiel est constant par élément. Donc, si on reprend la Figure IV.4, on a :

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_A \tag{IV.18}$$

$$V_5 = V_6 = V_7 = V_8 = V_B \tag{IV.19}$$

La Figure IV.9 présente la répartition du potentiel électrique obtenue avec une résolution sur le maillage fin. Nous allons tenter de retrouver la même en utilisant l'opérateur de prolongement. On obtient alors la Figure IV.10.





FIGURE IV.9 – Potentiel électrique dans la FIGURE IV.10 – Potentiel électrique projeté plaque sur le maillage fin à 50 Hz

sur le maillage fin à 50 Hz

On remarque sans surprise que la répartition du potentiel projeté n'est pas du tout identique à celle de la Figure IV.9 mais plutôt à celle de la Figure IV.6. L'utilisation d'une méthode de projection d'un maillage grossier vers un maillage fin entraîne une perte d'information par rapport à une solution obtenue initialement sur le maillage fin, et ce quel que soit la méthode de projection. C'est pour cette raison qu'il est indispensable d'ajouter une étape de post-lissage. Elle permettra à partir de ce vecteur résultat initial d'arriver à une solution plus lisse et proche de la solution définitive.

IV.5.b-ii Courant de branche

Pour projeter les courants de branche du maillage grossier vers le maillage fin, l'équation (IV.17) est utilisée de la même manière que pour l'opérateur de restriction à travers une résolution d'un système éléments finis.

Afin d'avoir une référence, la Figure IV.11 présente la répartition du courant obtenue avec une résolution complète sur le maillage fin.



FIGURE IV.11 – Densité de courant surfacique sur le maillage fin à 50 Hz

Avec le prolongement sur le maillage fin de la solution obtenue sur le maillage grossier (voir la Figure IV.7), on obtient la Figure IV.12.



FIGURE IV.12 – Densité de courant surfacique projetée sur le maillage fin à 50 Hz

On remarque bien que la répartition des courants suit celle du maillage grossier et non pas celle obtenue sur la Figure IV.11 pour le maillage fin. Dans la prochaine section, on essayera avec l'étape de post-lissage de corriger cette répartition.

IV.5.c L'étape de lissage

L'étape de lissage est très importante dans le cas des préconditionneurs multi-grille. Le choix d'un lisseur efficace n'est pas simple pour la résolution des équations de Maxwell. Pour la méthode des éléments finis, on trouve une discussion sur la particularité de ces équations dans la thèse de R. Perrussel [76]. Dans la littérature, le choix de l'utilisation des lisseurs Gauss-Seidel et Jacobi revient souvent à cause de leur efficacité observée [77, 78]. Dans le cas du système linéaire (IV.12), ces lisseurs ne peuvent pas être utilisés, car il y a présence de valeurs nulles sur la diagonale et ce type de lisseurs fait des divisions par ces valeurs. Au-delà de ça, la matrice $j\omega \mathbf{L}$ n'est pas toujours connue explicitement à cause de l'utilisation des techniques de compressions matricielles. On opte alors pour des lisseurs avec des solveurs itératifs tels que GMRes, BiCGStab, ou TFQMR comme proposé dans [79, 73].

L'étape de post-lissage consiste à faire des itérations de résolution sur un vecteur initial \mathbf{x}_0 issue de la projection avec les opérateurs de prolongements. Ce vecteur est censé être à priori proche de la solution recherchée, et donc la norme du résidu est supposée décroître fortement au fil des itérations de lissage. En utilisant un solveur itératif GMRes comme lisseur, nous obtenons l'évolution de sa norme du résidu sur la Figure IV.13 pour l'étape du post-lissage.





FIGURE IV.13 – Norme du résidu du lisseur (GMRes) en post-lissage

Le lisseur n'est pas efficace, puisque nous remarquons une stagnation anormale de la norme du résidu issue du lisseur dans ce cas d'utilisation. Afin d'investiguer la cause probable de cette stagnation, nous avons observé l'évolution des résidus correspondants aux grandeurs \mathbf{V}_n et \mathbf{I}_{b_Z} au fil de ces itérations. Pour ce faire, nous avons pris la valeur maximale des résidus et nous avons obtenu les courbes sur la Figure IV.14.

La Figure IV.14 montre une grande oscillation entre les deux grandeurs \mathbf{V}_n et \mathbf{I}_{b_Z} , avec un écart qui atteint 10⁹ entre deux maximums pour une itération donnée. On peut expliquer cela par le fait que le système (IV.12) doit respecter les équations circuits qui représentent les lois de Kirchhoff à travers les matrices incidences \mathbf{M}_{ni_Z} et $\mathbf{M}_{ni_Z}^T$. Les données transmises sur le maillage fin par l'opérateur de prolongation ne respectent pas ces lois sur ce maillage, ce qui met le solveur itératif en difficulté pour trouver l'équilibre entre les deux grandeurs. On retrouve le même comportement avec les autres lisseurs basés sur des solveurs utilisant des algorithmes de descente. Néanmoins, malgré ces oscillations, nous allons tout de même



FIGURE IV.14 – Maximums des résidus correspondant à \mathbf{V}_n et \mathbf{I}_{b_Z} au fil des itérations en post-lissage

tester ce type de lissage dans la section suivante et voir l'impact du préconditionnement bi-grille sur le solveur GMRes principal.

IV.5.d Impact du préconditionnement sur le solveur GMRes principal

La Figure IV.15 montre l'évolution de la norme du résidu du solveur GMRes principal dans 3 cas, le premier avec un préconditionneur LU comme dans le chapitre II, le second avec le préconditionneur développé dans cette section, et le troisième correspond à une résolution sans préconditionneur.

Le préconditionneur par décomposition LU est fait avec la matrice creuse des termes résistifs \mathbf{R} et les matrice incidences. La matrice de préconditionnement a la forme suivante :

$$LU \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{ni_Z} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{M}_{ni_Z}^T \end{pmatrix}$$
(IV.20)



FIGURE IV.15 – Norme du résidu du solveur GMRes principal en nœuds indépendants

Comme le montrent les courbes de la Figure IV.15, le préconditionneur bi-grille n'est pas efficace, la norme du résidu stagne au début de la résolution pendant une dizaine d'itérations contrairement au préconditionneur LU qui rapidement permet au solveur principal une meilleur convergence, cette inefficacité serait liée au comportement oscillatoire obtenu dans la Figure IV.14.

Trouver un lisseur efficace adapté à notre système reste un point bloquant. Le choix de s'orienter vers un système matriciel différent de celui présenté dans (IV.12) a été mis en avant, et cela dans l'optique d'éviter un système avec deux types d'inconnues étroitement liées.

Dans la section suivante, le solveur circuit à nœuds indépendants minimals est investigué pour une application avec un préconditionneur bi-grille géométrique.

IV.6 Application du bi-grille au solveur à nœuds indépendants minimals

Dans cette section, nous allons tenter d'appliquer cette fois le principe du préconditionneur bi-grille à la formulation RLM en région mince (I.50) présentée précédemment, ceci en utilisant le solveur circuit à nœuds indépendants minimals présenté dans la section II.2.b. Si on se limite à un solveur circuit sans sources de tensions et de courants, mais avec une bobine externe comme source d'excitation du système, on obtient le système linéaire suivant :

$$\mathbf{M}_{ni_{Z}} \mathbf{Y}_{b} \mathbf{M}_{ni_{Z}}^{T} \mathbf{V}_{n} = \mathbf{M}_{ni_{Z}} \mathbf{Y}_{b} \mathbf{U}_{induit}$$
(IV.21)

avec \mathbf{Y}_b la matrice admittance (inverse de la matrice impédance \mathbf{Z}_b^{-1}). L'inversion de \mathbf{Z}_b n'est pas envisageable (temps et place mémoire nécessaire prohibitifs). Une résolution de système linéaire que l'on nomme résolution interne est utilisée pour éviter cette inversion.

On obtient ainsi deux résolutions de systèmes linéaires imbriqués, c'est-à-dire qu'à chaque itération de résolution du système linéaire principal (externe), une résolution complète du système linéaire interne est effectuée. Dans ce cas, si le système linéaire interne nécessite un nombre important d'itérations pour converger, l'impact négatif sur la résolution principale sera important. Il est donc nécessaire de bien préconditionner les deux systèmes linéaires interne et externe.

IV.6.a Préconditionnement du système linéaire interne

Comme présenté précédemment, une résolution d'un système linéaire interne est requise pour le solveur circuit à nœuds indépendants minimals. Elle permet d'éviter une inversion d'une matrice pleine complexe \mathbf{Z}_b qui ne peut être envisageable à cause du coût en temps de calcul et en ressources mémoire. De plus, la matrice \mathbf{Z}_b n'est généralement pas connue explicitement, car une utilisation de la compression matricielle pour la partie inductive par exemple conduit à des matrices dont peu de termes sont connus de façon explicite.

Pour éviter l'inversion la matrice \mathbf{Z}_b , comme il a été présenté dans la section II.2.b, il est possible de mettre en place une résolution interne d'un système linéaire lorsque l'on cherche à effectuer le produit suivant :

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{ni_Z} \cdot \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{M}_{ni_Z}^T \cdot \mathbf{V}_n$$

On effectue les étapes suivantes :

1. Changement de base du vecteur de potentiel de nœud \mathbf{V}_n pour le placer dans la base des branches :

$$\mathbf{V}_{b_Z} = \mathbf{M}_{ni_Z}^T \cdot \mathbf{V}_n$$

2. Résolution du système linéaire suivant afin de connaître les courants induits par les tensions précédemment calculées :

$$\mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{Y}_b \cdot \mathbf{V}_{b_Z} \quad = > \quad \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{J}_{b_Z} = \mathbf{V}_{b_Z} \tag{IV.22}$$

3. On replace les courants de branches calculés précédemment dans la base des nœuds indépendants :

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}_{ni_Z} \cdot \mathbf{J}_{b_Z}$$

cette équation définit le système linéaire interne à résoudre pour chaque itération du solveur principal.

Les produits matrice-vecteur effectués pendant la résolution du système linéaire principal (IV.21) nécessitent l'utilisation de \mathbf{Y}_b , par conséquent pour répondre à cette requête, le système linéaire interne (IV.22) est résolu pour chaque produit afin d'éviter l'inversion de \mathbf{Z}_b . Ainsi, à chaque itération, un vecteur résiduel du vecteur \mathbf{V}_n est transmis du solveur principal vers le solveur interne. Pour préconditionner ce système avec un préconditionneur bi-grille, nous devons transmettre vers la grille grossière un vecteur \mathbf{V}_{n_H} afin d'obtenir une correction sur le vecteur \mathbf{I}_n .

Pour retrouver les correspondances des nœuds circuits et des branches entre les deux grilles fine et grossière, le principe reste exactement le même qu'avec celui présenté dans la section IV.5 pour le solveur circuit à nœuds indépendants.

Dans ce qui suit, nous présenterons les opérateurs de restriction et de prolongement associés à ce système linéaire interne dans le cas d'un cycle à deux grilles.

IV.6.a-i Opérateur de restriction

L'opérateur de restriction (IV.15) des potentiels électriques est applicable dans ce cas, car le transfert du vecteur \mathbf{V}_{n_h} de la grille fine vers la grossière reste le même qu'avec le solveur à nœuds indépendants.

IV.6.a-ii Opérateur de prolongement

L'opérateur de prolongement (IV.17) des courants de branches électriques est aussi applicable dans ce cas, car comme le montre l'équation (IV.22), la solution obtenue avec la résolution du système linéaire interne grossier est un vecteur qui représente des courants de branches. Donc le transfert du vecteur \mathbf{I}_{n_H} de la grille grossière vers la fine reste le même qu'avec le solveur à nœuds indépendants.

IV.6.b Préconditionnement du système linéaire principal

Dans cette partie, nous présentons le préconditionnement du système linéaire principal de solveur circuit à nœuds indépendants minimals.

Dans le second membre du système (IV.21), $\mathbf{M}_{ni_Z} \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_{induit}$ représente des courants électriques entrants aux nœuds circuits (contribution de la boucle créant un champs magnétique entraînant des courants induits dans la plaque). Ce vecteur source est calculé qu'une seule fois au début de la résolution, nous le notons $\mathbf{I}_{n_{RHS}}$.

IV.6.b-i Opérateur de restriction

Dans ce cas, $\mathbf{I}_{n_{RHS_h}}$ est projeté de la grille fine vers la grille grossière en utilisant l'équation suivante :

$$\mathbf{I}_{n_{RHSH_e}} = \sum_{h_{e_k} \subset H_e} \mathbf{I}_{n_{RHSh_{e_k}}}$$
(IV.23)

avec pour chaque élément H_e de la grille grossière, une somme des courants associés aux éléments h_e de la grille fine qui sont inclus dans H_e .

IV.6.b-ii Opérateur de prolongement

Après résolution du système linéaire principal sur la grille grossière, le vecteur \mathbf{V}_{n_H} obtenu est projeté sur la grille fine à l'aide de la règle suivante : Quand l'élément h_e est inclu dans l'élément H_e , on écrit les potentiels :

$$V_{n_{h_e}} = V_{n_{H_e}} \tag{IV.24}$$

car le potentiel est considéré constant sur l'élément H_e tel qu'il a été présenté dans la section IV.5.b-i.

IV.6.c L'étape de lissage

Le lissage dans le cas du solveur circuit à nœuds indépendants minimals doit se faire pour les deux préconditionneurs interne et externe. L'utilisation des compressions matricielles sur \mathbf{Z}_b s'est avérée être un point bloquant pour investiguer et rechercher un lisseur efficace pour nos systèmes linéaires, car seule une partie des matrices est connue, leurs résolutions dans ce cas ne peuvent se faire qu'avec des solveurs itératifs.

Pour le même exemple de test présenté précédemment dans la Figure IV.3, nous avons testé la résolution du système linéaire principal en prenant le solveur GMRes comme solveur principal et également comme lisseur pour les deux systèmes linéaires interne et externe. Les premiers résultats sont les suivants :

Le préconditionneur par décomposition LU est fait sur les deux systèmes interne et principal. Sur le système interne (IV.22), le préconditionnement est fait la matrice creuse des termes résistifs **R**. Sur le système principal, la matrice de préconditionnement est fait à partir de l'inverse des termes diagonaux de $\mathbf{Z}_{\mathbf{b}}$ et la matrice incidence \mathbf{M}_{ni_Z} . La matrice de préconditionnement pour le système principal est sous la forme suivante :

$$LU\left(\mathbf{M}_{ni_{Z}}\left(diag(\mathbf{Z}_{\mathbf{b}})\right)^{-1}\mathbf{M}_{ni_{Z}}^{T}\right)$$

Comme le montre la Figure IV.16, la convergence du solveur linéaire principal semble être efficace avec le préconditionneur bi-grille. Le préconditionneur utilise 2 itérations de lissage pour les étapes de pré et post lissage pour les deux systèmes interne et externe.



FIGURE IV.16 – Norme du résidu du solveur GMRes principal en nœuds indépendants minimals

Mais en termes de temps de calcul, le préconditionneur bi-grille a un temps de calcul équivalent à celui du cas de simulation sans préconditionneur comme indiqué dans le Tableau (IV.1) ci-dessous :

Préconditionneur	Sans préconditionneur	Bi grilles	LU
Temps de calcul (s)	17	17	1

TABLE IV.1 – Temps de résolution du système linéaire principal

Il est à noter que le code dans le cas du préconditionneur bi-grille n'est pas optimisé ce qui peut expliquer en partie la faible performance en temps de calcul malgré l'efficacité en termes de nombre d'itérations.

Les lisseurs semblant être un point particulièrement sensible, le paragraphe suivant présente une investigation concernant cette étape.

IV.6.d Étude sur les lisseurs

Dans cette section, une étude sur différents lisseurs appliqués au préconditionneur bigrille géométrique est présentée. L'étude est uniquement faite sur le système linéaire principal (externe), le système linéaire interne n'est pas considéré car pour cette étude nous avons choisi de calculer directement \mathbf{Z}_b^{-1} . Ce choix est fait afin d'isoler un seul système linéaire et voir l'impact direct des lisseurs.

Connaissant la matrice \mathbf{Z}_{h}^{-1} dans ce cas, les lisseurs utilisés sont les suivants :

- 1. Gauss-Seidel avec la diagonale exacte de (\mathbf{Z}_{b}^{-1}) .
- 2. Jacobi avec la diagonale exacte de $(\mathbf{Z}_b^{-1}).$
- 3. Jacobi avec la diagonale approchée de (\mathbf{Z}_b^{-1}) . La diagonale approchée est obtenue avec l'inversion uniquement des termes diagonaux de (\mathbf{Z}_b) .
- 4. GMRes.

Dans cette étude le nombre d'itérations de lissage μ_1 et μ_2 sont variables.

— Pour le pré-lissage, μ_1 prend trois valeurs : 0, 1 et 2.

— Pour le post-lissage, μ_2 prend cinq valeurs : 1, 2, 3, 4 et 5. Pour cette étape, nous devons faire au moins une itération de lissage, sinon le solveur principal ne convergera pas, car l'utilisation de données directement transmises du maillage grossier vers le fin injectera de grosses erreurs au solveur principal. Une itération de post-lissage permet au moins d'adapter ces données pour le maillage fin.

Dans cette étude, nous comparons l'impact des itérations μ_1 et μ_2 sur le nombre d'itérations du solveur GMRes principal pour qu'il converge avec une précision relative de 1e-8.

Pour plus de clarté, les différentes courbes d'évolution obtenues sont séparées en 3 figures, la première pour le cas de $\mu_1 = 0$, la seconde pour le cas de $\mu_1 = 1$, et la dernière pour le cas de $\mu_1 = 2$. Et dans les trois cas, nous faisons varier μ_2 . Les courbes obtenues sont présentées sur la Figure IV.17.

Nous remarquons que le lisseur "Jacobi avec la diagonale approchée" est le moins efficace en termes de lissage du vecteur solution. Les termes diagonaux approchés perturbent la résolution car les vecteurs lissés obtenus sont loin du vecteur solution du solveur GMRes principal, et donc la technique rajoute de l'erreur au lieu de la réduire. Comme on peut le voir sur les courbes, l'utilisation des termes diagonaux exacts pour le Jacobi aide à améliorer la qualité du lissage, il divise le nombre d'itérations du GMRes principal par environ trois. Le lissage avec Jacobi s'avère être moins efficace que les deux autres techniques de lissages sur ce cas.

Le lissage avec Gauss-Seidel semble être le plus efficace dans ce cas d'après les courbes obtenues, le GMRes a presque une efficacité similaire. Ce résultat est intéressant car GMRes peut être utilisé dans un contexte dans lequel les matrices ne sont pas connue de façon explicite. Pour rappel Gauss-Seidel nécessite la connaissance de la diagonale exacte de \mathbf{Z}_b^{-1} qui est non connue dans un contexte de compression matricielle.

Nous avons montré à travers cette étude que l'efficacité du préconditionnement par un préconditionneur bi-grille géométrique dépend fortement de la technique de lissage utilisée. Actuellement, les performances obtenus avec le lisseur GMRes ne sont pas satisfaisantes, car elles sont comparables à une résolution sans préconditionneur. Des travaux plus approfondis doivent être menés pour développer une technique de lissage efficace.

IV.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un préconditionneur bi-grille géométrique pour la méthode PEEC non-structurée. L'objectif était exploratoire afin d'évaluer l'intérêt et d'identifier les principaux points bloquants de cette approche. Le choix de cette famille de préconditionneur a été motivé pour 3 raisons principales :

- L'indépendance du préconditionneur vis à vis des méthodes de compression matricielle.
- La littérature classique donnant une complexité qui évolue linéairement en fonction du nombre d'inconnues.
- La possibilité d'utiliser le raffinement de maillage adaptatif pour créer automatiquement les grilles grossières et fines du préconditionneur.

L'implémentation numérique de ce préconditionneur s'est avérée être d'une grande complexité, elle est causée en majorité par l'approche circuit de la méthode PEEC. Si une approche par mailles indépendantes est employée, le préconditionneur n'est pas applicable.



FIGURE IV.17 – Nombre d'itérations du solveur GMRes principal en fonction du nombre d'itérations de post-lissage μ_2 . (a) pour $\mu_1 = 0$, (b) pour $\mu_1 = 1$, et (c) pour $\mu_1 = 2$

En effet, les ensembles de mailles indépendantes des deux grilles grossière et fine n'ont aucun lien entre eux, ce qui rend inatteignable la projection des vecteurs d'informations entre les deux grilles. La tentative de convertir les vecteurs de la base des mailles indépendantes à la base des branches circuits n'a pas été concluante car s'il est aisé de passer de la base des mailles indépendantes vers celle des branches, l'inverse n'est pas vrai.

Suite à l'échec de cette première expérience, le choix d'un solveur circuit à nœuds indépendants s'est naturellement posé. L'utilisation de ce type de solveur semble plus simple, car ses inconnues sont portées par des entités de circuit qui ont des correspondances entre les deux grilles grossière et fine, c'est à dire, les nœuds et branches circuits. Des opérateurs de restrictions et de prolongements ont été développés avec succès. Ce solveur présente deux types d'inconnues, les potentiels électriques aux nœuds circuits, et les courants électriques sur les branches circuits, ce qui a impliqué le développement de deux variantes pour chaque opérateur. Les essais du préconditionneur sur ce solveur ont montré de faible performance. La projection des deux types d'inconnues par les opérateurs de prolongement sur la grille fine crée un déséquilibre important qui empêche la vérification des lois de Kirchoff. En effet, les valeurs de courants et des potentiels obtenues ne sont pas lisses sur la grille fine, et le lisseur employé présente d'importantes oscillations d'une itération à l'autre. Cela implique la nécessité d'effectuer un grand nombre d'itérations pour rendre le lisseur efficace. Ce qui induit des durées de lissage élevé rendant le préconditionneur peu efficace d'un point de vue temps de résolution.

Suite aux expériences précédentes, nous avons cherché à éviter l'utilisation de deux types d'inconnues fortement liées. Pour cela, un solveur circuit à nœuds indépendants minimals a été choisi. Ce solveur utilise uniquement les potentiels de nœuds comme inconnues du système linéaire ce qui permet de résoudre les problèmes rencontrés précédemment tout en ayant un lien entre les grilles grossière et fine. Toutefois ce solveur implique l'inversion d'une matrice pleine de taille importante pendant la résolution. Pour éviter l'inversion, une résolution de système linéaire est faite à chaque itération de l'algorithme de résolution principal. Cela implique l'utilisation de deux préconditionneurs : l'un pour le système interne et l'autre pour le système complet externe. Le solveur circuit à nœuds indépendants minimals a montré des performances intéressantes avec le préconditionneur bi-grille géométrique. Afin de les améliorer davantage, une étude sur les techniques de lissage a été réalisée. Cette étude a montré que des comportements différents étaient obtenus selon le lisseur utilisé, sans pour autant disposer d'un lisseur optimal à ce stade.

A l'issu de ce chapitre, on peut conclure que le préconditionneur multi-grille géométrique semble être un bon candidat pour la méthode PEEC non-structurée dans un contexte de maillage adaptatif. Pour cela il faut l'employer en association avec un solveur circuit à nœuds indépendants minimals. La phase de lissage semble être particulièrement critique pour obtenir de bonnes performances. Il serait donc intéressant d'effectuer une exploration plus fine de cette étape afin d'augmenter son efficacité. De plus afin d'améliorer les performances, il serait nécessaire d'améliorer l'efficacité en terme de temps de calcul des opérateurs de projection et de restriction.

Conclusions et perspectives

L'objectif de cette thèse était d'apporter des améliorations aux formulations PEEC nonstructurées en termes de précision, de performance et d'applicabilité. Le besoin croissant de méthodes numériques rapides et efficaces pouvant aider les ingénieurs lors des étapes de conception de nouveaux produits d'électronique de puissance suscite aujourd'hui un intérêt accru pour ces méthodes de calcul. Dans un premier temps nous avons ainsi présenté un état de l'art des méthodes PEEC structurée et non-structurée, donnant une vision globale des développements majeurs qui ont été réalisés récemment en termes de possibilité de modélisation avec ces méthodes.

Cette thèse s'inscrit dans la continuité de travaux effectués au sein du G2ELab et de la société Altair qui ont abouti à l'écriture de formulations PEEC non-structurées très générales en régime harmonique. Ces dernières permettent la modélisation, sur une large gamme de fréquence (hors effets propagatifs), des effets résistifs, inductifs et capacitifs des dispositifs électromagnétiques en présence de matériaux conducteurs, magnétiques ou diélectrique et des circuits électriques externes comportant des sources d'excitation ou des composants passifs à constantes localisés. En pratique le choix de travailler avec la méthode PEEC non-structurée est justifié par sa capacité à utiliser différents types d'éléments de maillage pour la discrétisation de géométries complexes, et cela sans nécessiter le maillage de l'air. Nous avons montré, au cours du premier chapitre, comment les formulations développées permettent, par l'utilisation d'une interpolation de facette des inconnues, la prise en compte conjointe de régions conductrices filaires, minces et volumiques, aboutissant à une représentation circuit de ces régions. En outre, les formulations offrent la possibilité de connecter aisément les circuits externes sur les régions, de tenir compte des effets dynamiques suivant l'épaisseur des régions minces (éléments coques) ou encore d'utiliser les conditions de type impédance de surface pour les régions volumiques. Elles offrent ainsi un large panel d'applicabilité selon leurs hypothèses de validité qui dépendent entre autres de la fréquence d'excitation, des matériaux et de la longueur d'onde du dispositif d'électronique de puissance. Notons enfin que ces formulations ont été écrites avec la possibilité d'utiliser les compressions matricielles (méthodes FMM, HCA) pour les matrices d'interactions inductives ou capacitives, permettant ainsi de ne pas limiter les simulations à des problèmes de tailles modestes.

Les formulations PEEC non structurées aboutissent à l'écriture du problème sous une forme « pur circuit » pour lequel les lois de Kirchhoff des nœuds et des mailles s'appliquent. Nous avons montré, dans le second chapitre, différentes façons d'écrire le système d'équation à résoudre en considérant les deux lois de Kirchhoff pour les circuits électriques. Nous avons ainsi présenté des solveurs circuits reposant soit sur la loi des mailles, soit sur la loi des nœuds. Les résultats de simulations montrent que les solveurs avec le moins d'inconnues ne sont pas forcément les plus performants. Nous avons montré en outre que l'utilisation d'un préconditionneur basé sur la décomposition LU de la matrice des termes résistifs (obtenue par un approche style « éléments finis ») est efficace pour une formulation en présence d'effets résistifs et inductifs sur une large gamme de fréquence. En présence d'un grand nombre d'inconnues, le solveur circuit à mailles indépendantes est pénalisé par le changement de base de la base des branches électriques vers la base des mailles indépendantes, ce qui rend notamment le préconditionnement très lourd et donc moins performant que dans le cas de la base des nœuds indépendants. En fréquence élevée et en présence de capacités, la matrice des termes résistifs est combinée aux termes diagonaux des matrices inductives et capacitives, ou dans le cas d'utilisation de méthodes de compression, aux termes non compressés de ces matrices d'interaction (termes connus). Globalement, le solveur circuit à nœuds indépendants a montré de bonnes performances pour la résolution des formulations résistives, inductives et capacitives.

Toutefois, afin d'améliorer la précision de calcul des intégrales complexes résultant de l'utilisation du noyau de Green dans les formulations PEEC, l'utilisation d'intégrations analytiques combinées à des algorithmes avec points de Gauss adaptatifs ont été développées. Ces algorithmes permettent d'assurer une intégration précise des interactions proches (non-compressées) dans un contexte de maillage hétérogène, résultant ainsi en un code robuste pour la modélisation de dispositifs industriels complexes comprenant des régions volumiques, surfaciques et linéiques, et ceci dans un contexte d'utilisation de la compression matricielle. En fréquence élevée et en présence d'effets capacitifs, des résonances numériques appelées « artefacts » ont été observées à des fréquences au-delà de la limite de validité du modèle quasi-statique défini par le rapport de la longueur d'onde et de la dimension du dispositif. Ces résonances numériques inexpliquées restent une question ouverte.

Si l'intégration des matrices d'interaction est effectuée avec précision grâce à l'utilisation de points de Gauss adaptatifs, il n'en demeure pas moins que le maillage doit être contrôlé, la précision des solutions étant tributaire de l'approximation des inconnues par des fonctions de forme de facette. Ainsi, nous avons présenté, au chapitre 3, un outil de maillage adaptatif autonome contrôlé par un critère d'estimation d'erreur, afin de fournir une discrétisation optimale des dispositifs étudiés, notamment lorsque la géométrie de ces derniers est complexe et difficile à mailler. Le critère d'erreur développé fait partie de la catégorie des estimateurs d'erreur à posteriori. Il est basé sur l'écriture de deux solutions complémentaires qui assurent, dans les régions conductrices, respectivement la conservation de la densité de courant normale et la conservation de la composante tangentielle du champ électrique E. La solution circuit initiale fournissant une solution avec conservation de la densité de courant normale, des investigations sur des techniques permettant de calculer une deuxième solution \mathbf{E} ont été conduites. Nous avons montré la pertinence de l'utilisation d'une technique basée sur la projection et la reconstruction du champ électrique par interpolation d'arêtes, obtenu à partir de la densité de courant de la solution initiale. Pour valider cette technique, nous avons comparé trois critères d'estimation, cela en fonction des erreurs globales et locales. Nous avons opté pour un critère énergétique car il a montré un bon comportement sur les deux aspects de l'estimation. Une procédure de raffinement

131

adaptatif du maillage limitée à des maillages de type simplexe (triangle, tétraèdre) a été mise en place. La procédure a d'abord été testée sur un exemple de couplage inductif, à savoir le problème international TEAM 7. Elle a conduit à des résultats très satisfaisants en comparaison avec une solution convergente obtenue par la méthode des éléments finis. La procédure a également été testée dans le cadre d'un exemple de couplage circuit avec un busbars laminés. L'exemple a mis en évidence de bonnes performances dans le cas d'une source fréquentielle avec effets de peau, mais aussi en courant continu. Pour tenter d'améliorer les temps de calcul et accélérer la convergence des solveurs itératifs lors de la résolution, nous avons exploré, au cours du chapitre 4, la possibilité d'utiliser des préconditionneurs multi-grilles géométriques. Ces derniers ont été largement utilisés avec la méthode des éléments finis mais jamais, à notre connaissance, avec la méthode PEEC. Notre principale motivation était d'utiliser les grilles multi-niveaux générées par la procédure de raffinement de maillage adaptatif permettant ainsi de préconditionner les résolutions sur des maillages fins à l'aide des solutions obtenues sur les maillages grossiers. L'implémentation numérique de ce préconditionneur s'est avérée être d'une grande complexité, causée en majorité par l'approche circuit de la méthode PEEC et la difficulté de transmettre les informations d'un niveau de maillage à un autre. Nous avons toutefois montré que le préconditionneur multi-grille géométrique est un bon candidat pour la méthode PEEC non-structurée lors de l'utilisation d'un solveur circuit à nœuds indépendants minimal, tout en soulignant l'importance de la qualité des lissages qu'il est nécessaire d'effectuer sur les solutions lors des étapes de descentes et remontées des grandeurs entre les niveaux. Ces travaux exploratoires méritent d'être poursuivis pour apporter plus de robustesse et de généralité à cette approche.

Perspectives

Plusieurs travaux abordés au cours de cette thèse méritent d'être approfondis :

Maillage adaptatif

Il serait intéressant de développer et d'ajouter une étape de régularisation et d'optimisation de la qualité du maillage. Cela permettrait d'améliorer la procédure de raffinement adaptatif, par exemple en utilisant la technique de "Bubble packing relaxé", technique usuellement utilisé avec la méthode des éléments finis. Dans le cas où l'hypothèse région mince n'est pas applicable, une extension de la procédure de raffinement aux éléments du type prisme pourrait être une solution pour traiter des problèmes avec faible épaisseur, où le nombre d'éléments selon l'épaisseur serait défini en fonction de la fréquence (épaisseur de peau), et la discrétisation sur le plan de circulation de courant à travers la procédure adaptative. Cette approche éviterait ainsi la création d'éléments tétraédriques plats, susceptibles d'induire des erreurs numériques.

Fréquences élevées

Il serait intéressant d'étudier l'origine des résonances numériques issues de la formulation incluant les effets capacitifs en quasi-statique en haute fréquence, même si ce modèle a déjà montré de très bonnes précisions sur une large gamme de fréquence.

Régions minces diélectriques

Une extension de l'hypothèse région mince aux régions diélectriques serait bienvenue pour la modélisation des PCB multicouches, afin d'avoir un nombre de degrés de liberté moins élevé qu'en approche volumique. Notons qu'il ne s'agit ici que d'une mise en œuvre informatique qui ne pose pas de problème théorique ou de formulation.

Préconditionneur

Des travaux plus poussés sur le préconditionneur multi-grille géométrique dans le cadre de la méthode PEEC sont à envisager. La recherche de techniques de lissage adaptées, l'extension de la méthode à des grilles non-imbriquées et à des maillages non-structurés sont autant de pistes à creuser.

Annexe : Procédure de raffinement de maillage sur les régions surfaciques

IV.8 Application aux régions minces

IV.8.a Exemple bobine et plaque mince

Dans cette section, le critère d'erreur qui a était présenté dans la section III.9.a est testé sur le dispositif plaque mince et bobine présenté dans la section II.10.

Nous rappelons que la procédure de raffinement adaptatif développée est limitée à l'utilisation uniquement des éléments de maillage tétraédrique et triangulaire. Dans ce cas le maillage quadrangulaire de l'exemple II.10 est remplacé par un maillage triangulaire, tel que :



FIGURE IV.18 – Exemple d'application bobine et plaque surfacique

La bobine est alimentée par une source de tension de 1 V à 1000 Hz. La procédure de raffinement adaptatif est exécutée pour une précision de 1% sur les pertes Joule. Nous obtenons le Figure IV.19 ci-dessous.

L'estimation d'erreur a mis en évidence les éléments à raffiner comme on peut le voir sur la Figure IV.20. Les éléments en dessous de la bobine où le courant est le plus dense sont tous remaillés, tandis que les éléments sur le bord de la plaque ne sont pas remaillés, sauf certains lors de la troisième itération de raffinement.

L'exemple étudié dans cette section est assez simple mais il est bien représentatif de l'efficacité de la procédure de raffinement adaptatif.

Dans ce qui suit, un exemple un peu plus compliqué est étudié. Il s'agit de l'exemple microstrip présenté dans la partie II.22.



 $\ensuremath{\mathsf{FIGURE}}$ IV.19 – Pertes Joule dans la plaque en fonction du nombre d'élément de maillage



FIGURE IV.20 – Evolution du maillage au fil des itérations du raffinement adaptatif.
<u>Haut</u>: (gauche) maillage initial, (droite) première itération.
<u>Bas</u>: (gauche) deuxième itération, (droite) troisième itération.

IV.8.b Exemple microstrip

L'exemple microstrip présenté dans la partie II.22 est aussi testé ici dans le cadre d'une formulation RLMC région mince sans diélectrique, nous rappelons les caractéristiques du dispositif ci-dessous :

- Port 1 : charge $R_1 = 50 \Omega$ en série avec une source de tension de 1 V à 1 GHz.
- Port 2 : charge $R_2 = 50 \Omega$.
- Port 3 : charge $R_3 = 50 \Omega$.
- Port 4 : charge $R_4 = 50 \Omega$.



FIGURE IV.21 – Exemple d'application microstrip

La procédure de raffinement adaptatif du maillage est exécutée, la convergence des valeurs des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ est observée au fil des itérations. Nous obtenons les Figures suivantes :



FIGURE IV.22 – Valeurs des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ à 100 MHz au fil des itérations.



La Figure IV.23 montre les écarts relatifs à la dernière itération des modules des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$.

FIGURE IV.23 – Écart des valeurs des ratios $\frac{V_3}{V_{source}}$ et $\frac{V_4}{V_{source}}$ à 100 MHz au fil des itérations par rapport à l'itération finale.

Nous observons un écart important entre la première et la dernière itération : 16% pour $\frac{V_3}{V_{source}}$, et 10% pour $\frac{V_4}{V_{source}}$. Ces écarts ne sont pas négligeables contrairement à ceux
obtenus entre l'avant-dernière et la dernière itération : 0,8% et 0,39% respectivement.

Le maillage initial est maillé finement aux points de connexion des fils mais il est relâché vers le centre du plan de masse, et l'épaisseur de peau n'est pas respectée dans les deux pistes comme le présente la Figure IV.24.



FIGURE IV.24 – Maillages surfaciques du dispositif microstrip à 1 GHz. (Haut) initial, (Bas) final

Le maillage final respecte l'épaisseur de peau sur les deux pistes, essentiellement sur la piste 1 qui comporte une source de tension où sont principalement véhiculés les courants. La piste 2 ne véhicule pas le courant d'une manière symétrique, car l'effet de proximité est prédominant comme on peut le voir sur la figure, elle est remaillée finement sur la périphérie proche de la piste 1. Le plan de masse a eu un raffinement sous les pistes permettant ainsi une meilleure précision sur le calcul des potentiels et des inductances mutuelles.

IV.9 Application aux régions volumiques avec condition d'impédance de surface SIBC

Dans cette partie, le critère d'erreur présenté dans la section III.9.b est testé sur un dispositif volumique en utilisant la condition d'impédance de surface SIBC. Le dispositif est une cellule de commutation modélisée dans le cadre d'une collaboration pour la thèse de Wendpanga Fadel Bikinga [3, 70]. Le dispositif est présenté sur la Figure IV.25.



FIGURE IV.25 – Dispositif cellule de commutation [70]. (Droite) Vue de face avec des trous cylindriques sur le dissipateur de chaleur, (Gauche) vue 3D avec des trous hexaédriques sur le dissipateur de chaleur

Pour arriver à cette géométrie avec trous, des simulations pour optimiser l'inductance ont été réalisées à l'aide de la formulation SIBC inductive PEEC (I.65) et de la procédure de raffinement adaptatif correspondante, en commençant par une géométrie sans trous comme présenté sur la Figure IV.26. Dans ce qui suit, on présente une des simulations faites à une fréquence de 100 MHz avec une source de courant de 1 A avec le dispositif en considérant le dissipateur de chaleur sans trous et le matériau conducteur du PCB.



FIGURE IV.26 – Dispositif cellule de commutation avec dissipateur de chaleur sans trous.

La source de courant est connectée entre les deux surfaces (rouge et bleu) comme indiqué sur la Figure IV.26. La tension aux bornes de la source est observée au fil des itérations de raffinement adaptatif du maillage, et on obtient la Figure IV.27 ci-dessous.

La Figure IV.28 montre l'écart sur la tension obtenue à chaque itération par rapport à l'itération finale. L'écart entre la quatrième et la cinquième itération est très faible (0,2%), montrant ainsi que le maillage de la cinquième offre une précision suffisante. Le maillage



FIGURE IV.27 – Tension aux bornes de la FIGURE IV.28 – Écart sur la tension par rapsource pour chaque itération de raffinement. port à l'itération finale



initial et le final sont présentés sur la Figure IV.29.

FIGURE IV.29 – Maillage du dispositif cellule de commutation avec dissipateur de chaleur sans trous à 100 MHz : (Gauche) Initial, (Droite) Final

Le maillage final montre bien que le raffinement s'est fait principalement sur les bords des volumes suivant les indications de l'estimateur d'erreur comme le présente la Figure IV.30 en échelle log. Cela est dû au fait que le courant circule sur les bords respectant ainsi l'épaisseur de peau.

L'avantage de l'utilisation de la condition d'impédance de surface SIBC est clairement visible sur la Figure IV.31 en termes de nombre d'éléments. Pour chaque itération de raffinement, le nombre d'éléments surfaciques sur les bords des régions utilisées pour la SIBC est comparé au nombre d'éléments volumiques du même maillage. Le nombre d'éléments volumiques augmente considérablement à chaque itération, et la précision est inférieure dans ce cas à l'itération 5 car l'épaisseur de peau n'est pas respectée en volumique.



FIGURE IV.30 – Erreur local estimée sur le maillage initial



 $\ensuremath{\operatorname{FIGURE}}$ IV.31 – Nombre d'éléments volumiques par rapport au nombre d'éléments surfacique SIBC

Bibliographie

- T.-T. Nguyen, "Méthode PEEC inductive par élément de facette pour la modélisation des régions conductrices volumiques et minces," Ph.D. dissertation, 2014. [Online]. Available : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01115779
- [2] J. Siau, "Unstructured PEEC formulations considering resistive, inductive and capacitive effects for power electronics," Ph.D. dissertation, Université Grenoble-Alpes, 2016. [Online]. Available : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01567899/
- [3] W. F. Bikinga, K. Alkama, B. Mezrag, J. M. Guichon, and Y. Avenas, "Implementation of TAPIR Switching Cells with Integrated Direct Air-Cooling for SiC Power Devices," in 2020 22nd Eur. Conf. Power Electron. Appl. (EPE'20 ECCE Eur. IEEE, sep 2020, pp. P.1–P.9. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/9215620/
- [4] J. ROUDET, E. CLAVEL, J.-M. GUICHON, and J.-L. SCHANEN, "Application de la méthode PEEC au câblage d'un onduleur triphasé," *Tech. l'ingénieur Outil. d'analyse* en électronique puissance métrologie, vol. base docum, no. ref. article : d3072, 2004.
- [5] V. Ardon, J. Aime, O. Chadebec, E. Clavel, J. M. Guichon, and E. Vialardi, "EMC modeling of an industrial variable speed drive with an adapted PEEC method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2892–2898, 2010.
- [6] A. E. Ruehli, "Inductance Calculations in a Complex Integrated Circuit Environment," IBM J. Res. Dev., vol. 16, no. 5, pp. 470–481, sep 1972.
- [7] T.-T. Nguyen, G. Meunier, J.-M. Guichon, O. Chadebec, and T.-S. Nguyen, "An Integral Formulation for the Computation of 3-D Eddy Current Using Facet Elements," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, no. 2, pp. 549–552, feb 2014. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/6749118/
- [8] Altair Engineering, "Altair Flux[™]," 2021. [Online]. Available : https://www.altair. com/flux/
- [9] C. Hoer and C. Love, "Exact inductance equations for rectangular conductors with applications to more complicated geometries," J. Res. Natl. Bur. Stand. Sect. C Eng. Instrum., vol. 69C, no. 2, p. 127, apr 1965.
- [10] A. Ruehli and P. Brennan, "Efficient capacitance calculations for three-dimensional multiconductor systems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 21, no. 2, pp. 76–82, 1973.
- [11] A. E. Ruehli, "Equivalent Circuit Models for Three-Dimensional Multiconductor Systems," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 22, no. 3, pp. 216–221, 1974.

- [12] H. Heeb and A. Ruehli, "Approximate Time-Domain Models of Three-Dimensional Interconnects Circuit Representation with Coefficients of Potential," pp. 201–205, 1990.
- [13] A. E. Ruehli and H. Heeb, "Circuit Models for Three-Dimensional Geometrices Including Dielectrics," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 40, no. 7, pp. 1507–1516, 1992.
- [14] H. Heeb, S. Ponnapalli, and A. E. Ruehli, "Frequency domain microwave modeling using retarded partial element equivalent circuits," *Proc. - Des. Autom. Conf.*, pp. 702–706, 1993.
- [15] A. Ruehli and J. Garrett, "Circuit models for 3D structures with incident fields," *IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, pp. 28–32, 1993.
- [16] J. P. Keradec, E. Clavel, J. P. Gonnet, and V. Mazauric, "Introducing linear magnetic materials in PEEC simulations. Principles, academic and industrial applications," *Conf. Rec. - IAS Annu. Meet. (IEEE Ind. Appl. Soc.*, vol. 3, pp. 2236–2240, 2005.
- [17] G. Antonini, M. Sabatini, and G. Miscione, "PEEC modeling of linear magnetic materials," *IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, vol. 1, no. c, pp. 93–98, 2006.
- [18] A. Ruehli, G. Antonini, and A. Orlandi, "Extension of the partial element equivalent circuit method to non-rectangular geometries," in 1999 IEEE Int. Symp. Electromagn. Compatability. Symp. Rec. (Cat. No.99CH36261), vol. 2. IEEE, 1999, pp. 728–733.
 [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/810108/
- [19] A. E. Ruehli, G. Antonini, J. Esch, J. Ekman, A. Mayo, and A. Orlandi, "Nonorthogonal PEEC formulation for time- and frequency-domain EM and circuit modeling," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 45, no. 2, pp. 167–176, 2003.
- [20] A. Musing, J. Ekman, and J. Kolar, "Efficient Calculation of Non-Orthogonal Partial Elements for the PEEC Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1140–1143, mar 2009. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/4787289/
- [21] E. Tonti, "Finite formulation of electromagnetic field," in *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2 I, mar 2002, pp. 333–336. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee. org/document/996090/
- [22] F. Freschi, G. Gruosso, and M. Repetto, "Unstructured PEEC formulation by dual discretization," *IEEE Microw. Wirel. Components Lett.*, vol. 16, no. 10, pp. 531–533, 2006.
- [23] G. Meunier, "Equations de Maxwell et méthodes integrales de type PEEC," 2013.
- [24] G. Meunier, O. Chadebec, and J.-M. Guichon, "A Magnetic Flux–Electric Current Volume Integral Formulation Based on Facet Elements for Solving Electromagnetic Problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, mar 2015. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/7093533/
- [25] A. Bossavit, "Whitney forms : A class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism," *IEE Proc. A Phys. Sci. Meas. Instrumentation. Manag. Educ. Rev.*, vol. 135 pt A, no. 8, pp. 493–500, 1988.
- [26] G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, V. Le-Van, J. Siau, B. Bannwarth, and F. Sirois, "A-T Volume Integral Formulations for Solving Electromagnetic Problems in the Frequency," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 52, no. 3, pp. 1–4, mar 2016.

- [27] J. Siau, G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and R. Perrin-Bit, "Volume Integral Formulation Using Face Elements for Electromagnetic Problem Considering Conductors and Dielectrics," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 58, no. 5, pp. 1587–1594, oct 2016.
- [28] R. Torchio, P. Alotto, P. Bettini, D. Voltolina, and F. Moro, "A DC to HF volume PEEC formulation based on hertz potentials and the cell method," 2018 Int. Appl. Comput. Electromagn. Soc. Symp. Denver, ACES-Denver 2018, no. 4, pp. 1–2, 2018.
- [29] R. Torchio, "A Volume PEEC Formulation Based on the Cell Method for Electromagnetic Problems From Low to High Frequency," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 67, no. 12, pp. 7452–7465, dec 2019. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/8764572/
- [30] —, "Extending the Unstructured PEEC Method to Magnetic, Transient, and Stochastic Electromagnetic Problems," Ph.D. dissertation, 2020.
- [31] G. Meunier, J.-M. Guichon, O. Chadebec, B. Bannwarth, L. Krahenbuhl, and C. Guerin, "Unstructured–PEEC Method for Thin Electromagnetic Media," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 56, no. 1, pp. 1–5, jan 2020. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/8936611/
- [32] G. Meunier, Q.-A. Phan, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and B. Bannwarth, "Unstructured - PEEC Method with the use of Surface Impedance Condition," in 2019 19th Int. Symp. Electromagn. Fields Mechatronics, Electr. Electron. Eng. IEEE, aug 2019, pp. 1–2. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/9096998/
- [33] Paul and Clayton R, Introduction to Electromagnetic Compatibility {Wiley Series in Microwave and Optical Engineering; 2nd Ed.}, 2006.
- [34] J.-M. Guichon, "Modélisation, caractérisation, dimensionnement de jeux de barres," Ph.D. dissertation, Institut national polytechnique Grenoble, 2001. [Online]. Available : http://www.sudoc.fr/061182400
- [35] Thanh-Trung Nguyen, G. Meunier, J.-M. Guichon, and O. Chadebec, "3-D Integral Formulation Using Facet Elements for Thin Conductive Shells Coupled With an External Circuit," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, mar 2015. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/7093539/
- [36] T.-S. Nguyen, J.-M. Guichon, O. Chadebec, G. Meunier, and B. Vincent, "An Independent Loops Search Algorithm For Solving Inductive PEEC Laege Problems," *Prog. Electromagn. Res. M*, vol. 23, no. January 2016, pp. 53–63, 2012. [Online]. Available : http://www.jpier.org/PIERM/pier.php?paper=11111503
- [37] T.-S. Nguyen, "Réduction de modèles issus de la méthode PEEC pour la modélisation électromagnétique des interconnexions électriques," 2012. [Online]. Available : http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00767924
- [38] M. H. Schultz and Y. Saad, "GMRES : A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems," no. 3, pp. 856–869, 1986.
- [39] Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Second Edition," Methods, p. 528, 2003. [Online]. Available : http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag= citeulike09-20{&}amp

- [40] T.-S. Nguyen, T. L. Duc, T.-S. Tran, J.-M. Guichon, O. Chadebec, and G. Meunier, "Adaptive Multipoint Model Order Reduction Scheme for Large-Scale Inductive PEEC Circuits," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, vol. 59, no. 4, pp. 1143–1151, aug 2017. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/7812589/
- [41] S. Börm and L. Grasedyck, "Hybrid cross approximation of integral operators," *Numer. Math.*, vol. 101, no. 2, pp. 221–249, aug 2005. [Online]. Available : http://link.springer.com/10.1007/s00211-005-0618-1
- [42] J. Siau, O. Chadebec, R. Perrussel, and J.-R. Poirier, "Hybrid cross approximation for a magnetostatic formulation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, 2015.
- [43] V. Ardon, "POUR LA PRISE EN COMPTE DES EFFETS CAPACITIFS DANS LA MODÉLISATION CEM DE DISPOSITIFS D ' ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE To cite this version : HAL Id : tel-00502938," 2010.
- [44] G2ELab, "MIPSE : Modeling of Interconnected Power SystEms," 2021. [Online]. Available : https://team-mipse.gricad-pages.univ-grenoble-alpes.fr/pageweb/index. html
- [45] G. Meunier, The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling, G. Meunier, Ed. London, UK : ISTE, jan 2008. [Online]. Available : http://doi.wiley.com/10. 1002/9780470611173
- [46] M. Fabbri, "Magnetic Flux Density and Vector Potential of Uniform Polyhedral Sources," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 1, pp. 32–36, jan 2008. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/4407584/
- [47] —, "Magnetic flux density and vector potential of linear polyhedral sources," *COMPEL - Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 28, no. 6, pp. 1688–1700, nov 2009. [Online]. Available : https://www.emerald.com/insight/content/doi/10. 1108/03321640910999950/full/html
- [48] D. R. Wilton, S. M. RAO, M. A.-B. ALLEN W. GLISSON, DANIEL H. SCHAU-BERT, and C. hi. BUTLER, "Potential Integrals for Uniform and Linear Source Distributions on Polygonal and Polyhedral Domains," *IEEE Trans. ANTENNAS Propag.*, vol. 53, no. 9, pp. 1689–1699, 1984.
- [49] R. Graglia, "On the numerical integration of the linear shape functions times the 3-D Green's function or its gradient on a plane triangle," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 41, no. 10, pp. 1448–1455, 1993. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/247786/
- [50] C. Rubeck, "Calcul hautes performances pour les formulations intégrales en électromagnétisme basses fréquences," Ph.D. dissertation, Université Grenoble-Alpes, 2013.
- [51] M. Technologies, "MUMPS," 2021. [Online]. Available : http://mumps.enseeiht.fr/ index.php?page=home
- [52] Altair Engineering, "Altair Feko"," 2021. [Online]. Available : https://altairengineering.fr/feko/
- [53] J. Ekman and G. Antonini, "On characterizing artifacts observed in PEEC based modeling," *IEEE Int. Symp. Electromagn. Compat.*, vol. 1, no. 4, pp. 251–255, 2004.

- [54] Q.-A. Phan, G. Meunier, O. Chadebec, J.-M. Guichon, and B. Bannwarth, "A New Strategy for Automatic Coupling Between the Inductive PEEC Method and an Integral Electrostatic Formulation," *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, pp. 1–10, 2021. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/9570720/
- [55] F.-X. Zgainski, Y. Marechal, J.-L. Coulomb, M. Vanti, and A. Raizer, "An a priori indicator of finite element quality based on the condition number of the stiffness matrix," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, no. 2, pp. 1748–1751, mar 1997. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/582611/
- [56] J. R. Shewchuk, "What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures," *Eleventh International Meshing Roundtable*, pp. 115–126, 2002.
- [57] L. Rondot, V. G. Mazauric, and P. F. Wendling, "An energy-compliant magnetodynamic error criterion for eddy-current calculations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 6, pp. 2353–2356, 2010.
- [58] Z. Tang, Y. Le Ménach, E. Creusé, S. Nicaise, and F. Piriou, "Residual a posteriori estimator for magnetoharmonic potential formulations with global quantities for the source terms," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 51, no. 3, pp. 15–18, 2015.
- [59] E. Creusé, Y. Le Menach, S. Nicaise, F. Piriou, and R. Tittarelli, "Two guaranteed equilibrated error estimators for Harmonic formulations in eddy current problems," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 77, no. 6, pp. 1549–1562, mar 2019.
 [Online]. Available : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122118304723
- [60] Z. Tang, S. Lou, A. Benabou, E. Creuse, S. Nicaise, J. Korecki, and J.-C. Mipo, "Guaranteed Quantity of Interest Error Estimate Based on Equilibrated Flux Reconstruction," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 9464, no. 1, pp. 1–1, 2021. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/9398695/
- [61] J.-F. Remacle, C. Geuzaine, P. Dular, H. Hedia, and W. Legros, "Error estimation based on a new principle of projection and reconstruction," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, no. 5, pp. 3264–3267, 1998. [Online]. Available : http://ieeexplore.ieee.org/document/717766/
- [62] Q. A. Phan, G. Meunier, O. Chadebec, J. M. Guichon, and B. Bannwarth, "BEM-FEM formulation based on magnetic vector and scalar potentials for eddy current problems," 2019 19th International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, ISEF 2019, no. 10, pp. 2–3, 2019.
- [63] Quang Anh Phan, "Contribution à la modélisation des courants de Foucault par la méthode des équations intégrales de frontière," Ph.D. dissertation, Université Grenoble-Alpes, 2019.
- [64] D. Ladas, V. Mazauric, G. Meunier, O. Chadebec, M. Ebene-Ebene, Y. Maréchal, and P. Wendling, "An energy based approach of electromagnetism applied to adaptive meshing and error criteria," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 1246–1249, 2008.
- [65] Chengjun Li, Zhuoxiang Ren, and A. Razek, "An approach to adaptive mesh refinement for three-dimensional eddy-current computations," *IEEE Transactions* on Magnetics, vol. 30, no. 1, pp. 113–117, 1994. [Online]. Available : http: //ieeexplore.ieee.org/document/272523/

- [66] Altair Engineering, "Altair Flux[™]," 2020. [Online]. Available : https://www.altair. com/flux/
- [67] K. Shimada and D. C. Gossard, "Bubble mesh : Automated triangular meshing of nonmanifold geometry by sphere packing," *Symp. Solid Model. Appl. - Proc.*, pp. 409–419, 1995.
- [68] L. R. Turner, K. Davey, N. Ida, D. Rodger, A. Kameari, A. Bossavit, and C. R. I. Emson, "Workshops and problems for benchmarking eddy current codes," United States, Tech. Rep., 1988. [Online]. Available : http: //inis.iaea.org/search/search.aspx?orig{_}q=RN:20009769
- [69] J. Roudet, E. Clavel, J.-m. Guichon, and J.-l. Schanen, "Apports et conseils sur l' usage de la méthode PEEC en électronique de puissance Apports et conseils sur l' usage de la méthode PEEC en électronique de puissance," vol. 33, no. 0, 2021.
- [70] W.-F. Bikinga, B. Mezrag, Y. Avenas, J.-L. Schanen, J.-M. Guichon, K. Alkama, L. Dupont, V. Bley, and E. Vagnon, "TAPIR (compacT and modulAr Power modules with IntegRated cooling) Technology : Goals and Challenges," in 2021 Third Int. Symp. 3D Power Electron. Integr. Manuf. IEEE, jun 2021, pp. 1–6. [Online]. Available : https://ieeexplore.ieee.org/document/9497263/
- [71] F. Vi, "Methode multigrilles parallèle pour les simulations 3D de mise en forme de matériaux," Ph.D. dissertation, Université de recherche Paris Sciences et Lettres PSL Research University, 2018.
- [72] J. Xu, "The auxiliary space method and optimal multigrid preconditioning techniques for unstructured grids," *Computing*, vol. 56, no. 3, pp. 215–235, sep 1996. [Online]. Available : http://link.springer.com/10.1007/BF02238513
- [73] Y. Feng, D. Perić, and D. Owen, "A non-nested Galerkin multi-grid method for solving linear and nonlinear solid mechanics problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 144, no. 3-4, pp. 307–325, may 1997. [Online]. Available : https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782596011838
- [74] R. Beck and R. Hiptmair, "Multilevel solution of the time-harmonic maxwell's equations based on edge elements," ZIB, Takustr. 7, 14195 Berlin, Tech. Rep. SC-96-51, 1996.
- [75] F. Vi, K. Mocellin, H. Digonnet, E. Perchat, and L. Fourment, "Hybrid parallel multigrid preconditioner based on automatic mesh coarsening for 3D metal forming simulations," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 114, no. 6, pp. 598–618, may 2018. [Online]. Available : http://doi.wiley.com/10.1002/nme.5756
- [76] R. Perrussel, "Méthodes mutiniveau algébriques pour les éléments d'arête. Application à l'électromagnétisme," Ph.D. dissertation.
- [77] D. Braess, "The convergence rate of a multigrid method with Gauss-Seidel relaxation for the poisson equation," in *Multigrid Methods*, W. Hackbusch and U. Trottenberg, Eds. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1982, pp. 368–386.
- [78] D. Braess and W. Hackbusch, "A New Convergence Proof for the Multigrid Method Including the V -Cycle," SIAM J. Numer. Anal., vol. 20, no. 5, pp. 967–975, oct 1983. [Online]. Available : http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0720066

[79] Y. T. Feng, D. Perić, and D. R. J. Owen, "A multi-grid enhanced GMRES algorithm for elasto-plastic problems," Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 42, no. 8, pp. 1441–1462, aug 1998. [Online]. Available : https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10. 1002/(SICI)1097-0207(19980830)42:8{%}3C1441::AID-NME428{%}3E3.0.CO;2-C

Publications

Article de revue internationale

 IEEE
 Transactions
 Error estimation and adaptive mesh refinement for the unstructured inductive PEEC formulation

 Magnetics
 K. Alkama, G. Meunier, O. Chadebec, J-M. Guichon, B. Bannwarth, E. Vialardi, J. Siau, R. Perrin-Bit. December 2021.
 Abs-Abs-Perrin-Bit. December

tract : An adaptive mesh refinement procedure is presented in order to address efficiently low frequencies electromagnetic problems with the unstructured PEEC method. An a posteriori error estimator based on an equilibrated energy criterion is proposed, which means that two dual solutions are necessary. Actually, knowing that there is no dual formulation for the PEEC method, an auxiliary method is proposed in order to calculate a second admissible solution. This method is based on a projection of the PEEC solution from facets to edges function space in order to ensures the continuity of the electric field in the mesh. Two test cases have been treated in order to show the efficiency of the procedure. First, an inductive coupling test case which is the TEAM Workshop problem no °7. Second, a circuit coupling test case which is a laminated busbars, this last one being treated for a low frequency case and also for the DC case. Adaptive mesh refinement procedure has shown great potential and makes the unstructured PEEC method much more functional and attractive for modeling complex devices.

Communications et articles de conférences internationales avec comité de relecture

Compumag 2021 - Cancun MEXICO	 Adaptive Mesh Procedure for the Unstructured Inductive PEEC Formulation K. Alkama, G. Meunier, O. Chadebec, J-M. Guichon, B. Bannwarth, E. Vialardi, J. Siau, R. Perrin-Bit - Poster Session. January 2022.
3D-PEIM, 2021 -	 TAPIR (compacT and modulAr Power modules with Inte-
Osaka JAPAN	gRated cooling) Technology : Goals and Challenges W. F. Bikinga, B. Mezrag, Y. Avenas , J.L. Schanen, J. M. Guichon, K. Alkama, L. Dupont, V. Bley, E. Vagnon - Poster Session. June 2021.
CEFC 2020 - Pisa Italy	Computational Strategies Improvement For The Unstructu- red Inductive PEEC Method K. Alkama , G. Meunier, O. Chadebec, J-M. Guichon, B. Bannwarth, E. Vialardi, R. Perrin-Bit - Poster Session. No- vember 2020.
EPE'20 ECCE	 Implementation of TAPIR Switching Cells with Integrated
Europe 2020 -	Direct Air-Cooling for SiC Power Devices W. F. Bikinga, K. Alkama, B. Mezrag, J. M. Guichon, Y.
Lyon FRANCE	Avenas - Poster Session. September 2020.

Amélioration des performances de la méthode intégrale de volume circuit pour la simulation des dispositifs d'électronique de puissance

Résumé : Les travaux de cette thèse portent sur l'amélioration des performances de la méthode intégrale de volume circuit (PEEC non-structurée) permettant la modélisation des interconnexions électriques dans les dispositifs d'électronique de puissance en régime harmonique. Les formulations PEEC utilisées considèrent une approximation quasi-statique des phénomènes étudiés, où la limite de validité correspond aux fréquences où la taille du dispositif devient comparable à la longueur d'onde des signaux électriques en jeu. Cette méthode permet la traduction du dispositif étudié en un réseau de résistance, d'inductances propres et mutuelles, et de capacités. Ces améliorations consistent entre-autre à trouver une écriture efficace du système d'équations à résoudre par des solveurs itératifs dans un contexte de compression matricielle. Le préconditionnement de ces systèmes est également étudié afin d'améliorer la performance et la vitesse de la convergence du solveur itératif, notamment en utilisant un préconditionneur basé sur une décomposition LU d'une matrice comportant une partie des termes de la matrice du système d'équation, ou en explorant l'utilisation d'un préconditionneur multi-grille géométrique pour la méthode PEEC. Une autre amélioration consiste en la proposition d'une procédure de raffinement adaptatif de maillage. Elle est contrôlée par un critère d'estimation d'erreur de discrétisation permettant ainsi son autonomie complète. La précision de calcul des intégrales du noyau de Green est également améliorée à travers le développement d'algorithmes d'intégration avec points de Gauss adaptatif. Toutes ces améliorations permettent une modélisation d'un ensemble de régions volumiques 3D, surfaciques 2D et filaires 1D avec des matériaux conducteurs et diélectriques en connectant des éléments circuits 0D passifs et actifs externes.

Mots clés : Modélisations électromagnétiques, PEEC, méthodes intégrales de volume circuit, quasi statique, estimation d'erreur, maillage adaptatif.

PERFORMANCE IMPROVEMENT OF THE CIRCUIT VOLUME INTEGRAL METHOD FOR THE SIMULATION OF POWER ELECTRONICS DEVICES

Abstract: The work focuses on the improvement of the performance of the circuit volume integral method (unstructured PEEC) allowing the modeling of electrical interconnections in power electronic devices in harmonic regime. The PEEC formulations used consider a quasi-static approximation of the studied phenomena, where the limit of validity corresponds to the frequencies where the size of the device becomes comparable to the wavelength of the electrical signals computed. This method allows the representation of the studied power electronic device with a network of resistances, self and mutual inductances, and capacitances. These improvements consist, among other things, in finding an efficient writing of the equations system to be solved by iterative solvers in a matrix compression context. The preconditioning of these systems is also studied in order to improve the performance and the convergence speed of the iterative solver, in particular by using a preconditioner based on an LU decomposition of a matrix build with a part of the terms of the matrix of the equations system, or by exploring the use of a geometric multigrid preconditioner for the PEEC method. Another improvement consists in the proposal of an adaptive mesh refinement procedure. It is controlled by a discretization error estimation criterion allowing its complete autonomy. The accuracy of the computation of Green's kernel integrals is also improved through the development of integration algorithms with adaptive Gauss points. All these improvements allow the modeling of a set of 3D volume, 2D surface and 1D wire regions with conductive and dielectric materials by connecting passive and active 0D external circuit elements.

Keywords : PEEC, integral methods, computational electromagnetics, quasi static, error estimation, adaptive mesh, VIM.