



**HAL**  
open science

# Contrôle en temps fini de systèmes vibratoires hybrides couplant équations aux dérivées partielles et équations aux dérivées ordinaires : les cas du tom et du câble pesant

Marc Wijnand

► **To cite this version:**

Marc Wijnand. Contrôle en temps fini de systèmes vibratoires hybrides couplant équations aux dérivées partielles et équations aux dérivées ordinaires : les cas du tom et du câble pesant. Acoustique [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2021. Français. NNT : 2021SORUS456 . tel-03722379

**HAL Id: tel-03722379**

**<https://theses.hal.science/tel-03722379>**

Submitted on 13 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE SORBONNE UNIVERSITÉ

Spécialité  
**Acoustique et automatique**

École doctorale Sciences Mécaniques, Acoustique,  
Électronique et Robotique de Paris

Présentée par  
**Marc Wijnand**  
Équipe S3AM, STMS Lab  
(Ircam – Sorbonne Université – CNRS)  
ANR Finite4SoS

Pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE SORBONNE UNIVERSITÉ

**Contrôle en temps fini de systèmes vibratoires hybrides couplant  
équations aux dérivées partielles et équations aux dérivées ordinaires :  
les cas du tom et du câble pesant**

Soutenue le 5 juillet 2021  
devant le jury composé de

M. Yann Le Gorrec	FEMTO-ST, Besançon	<i>Rapporteur</i>
M. Cyril Touzé	ENSTA, Paris	<i>Rapporteur</i>
M. Pascal Morin	Sorbonne Université, Paris	<i>Examineur</i>
M. Andrey Polyakov	Inria, Lille	<i>Examineur</i>
Mme. Brigitte d'Andréa-Novel	Sorbonne Université, Paris	<i>Directrice de thèse</i>
M. Thomas Hélie	CNRS, Paris	<i>Encadrant</i>
M. Lionel Rosier	Université du Littoral Côte d'Opale, Calais	<i>Encadrant</i>
M. David Roze	CNRS, Paris	<i>Encadrant</i>



## RÉSUMÉ

---

Une première contribution de cette thèse concerne une combinaison d'une loi de commande en temps fini (pour l'efficacité) avec la passivité (pour garantir la robustesse, par exemple, face à une mauvaise identification des paramètres du modèle), dans le cas d'un système EDO du deuxième ordre. Cette loi de commande est utilisée pour le contrôle d'un haut-parleur dans une application d'absorbeur électroacoustique. Ensuite, une méthode numérique passive résolvant un problème de raideur intrinsèque chez des systèmes EDO stabilisés en temps fini est proposée. Finalement, une deuxième application au contrôle d'une corde non linéaire par suivi de trajectoire en temps fini est proposée.

Une deuxième contribution concerne le contrôle en temps fini de systèmes hybrides sous la forme d'une EDP hyperbolique couplée à une EDO. Deux cas de systèmes vibratoires concrets sont développés : un tom (instrument de percussion augmenté par rétroaction sur un haut-parleur), et un chariot avec câble pesant (modèle pour le mouvement 2D dans une grue de construction ou un pont roulant). Un observateur-régulateur pour cas du tom est construit par une approche modale et est implémenté sur un prototype pour une évaluation expérimentale. Une stabilisation en temps fini du modèle 2D de la grue a été obtenue en mettant à profit un théorème existant sur le contrôle en temps fini à la frontière d'une EDP hyperbolique.

## ABSTRACT

---

*Finite-time control of hybrid vibratory systems coupling PDEs to ODEs: the cases of the tom-tom drum and the overhead crane*

The first contribution of this PhD thesis consists of the combination of a finite-time control law (for efficiency) with passivity (in order to guarantee robustness against, for example, a bad identification of the model parameters), for the case of a second order ODE. This control law is used to control a loudspeaker in order to achieve an electroacoustic absorber. Next, a passive numerical method is proposed that is able to cope with the intrinsic stiffness present in ODEs controlled in finite-time. Finally, a second application concerning the control of a nonlinear string using finite-time tracking control is proposed.

The second contribution is concerned with the finite-time control of hybrid systems coupling a hyperbolic PDE to an ODE. Two specific cases of vibratory systems are developed: a tom-tom drum (percussion instrument that has been augmented by a feedback on a loudspeaker) and a moving platform to which a heavy cable is attached (a model for the 2D movement present in a construction or overhead crane). An observer-regulator is designed for the tom-tom drum using a modal approach, that is implemented on a prototype for an experimental assessment. A finite-time stabilization of the 2D crane model is achieved based on an existing theorem for the finite-time boundary control of a hyperbolic PDE.



## PUBLICATIONS

---

Des résultats de cette thèse sont apparus dans les publications suivantes.

### *Article de journal*

[W9] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel and L. Rosier. **Finite-time stabilization of an overhead crane with a flexible cable submitted to an affine tension.** Accepté pour publication dans ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations.

### *Articles de conférence*

[W8] M. Wijnand, T. Hélie, and D. Roze. **Finite-time tracking control of a nonlinear string to reference dynamics.** 10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC), 2022, Lyon. Accepté.

[W7] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, T. Hélie, and D. Roze. **Active control of the axisymmetric vibration modes of a tom-tom drum using a modal-based observer-regulator.** EAA e-Forum Acusticum, 2020, Lyon.

[W6] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, B. Fabre, T. Hélie, L. Rosier, and D. Roze. **Active control of the axisymmetric vibration modes of a tom-tom drum.** IEEE 58th Conference on decision and Control (CDC), 2019, Nice, pp. 6887-6892.

[W5] T. Lebrun, M. Wijnand, T. Hélie, D. Roze, and Brigitte d'Andréa-Novel. **Electroacoustic absorbers based on passive finite-time control of loudspeakers : a numerical investigation.** Proceedings of the First International Dynamics Conference (NODYCON, 2019, Rome), Volume II – Nonlinear dynamics and Control, 2020, pp. 23-31, Springer-Cham.

[W4] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, T. Hélie, et D. Roze. **Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie.** Congrès Français d'Acoustique (CFA), 2018, Le Havre, pp. 1369-1375.

### *Posters*

[W3] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, T. Hélie, et D. Roze. **Contrôle actif des fréquences d'une membrane de tom : implémentation expérimentale.** Congrès des Jeunes Chercheurs en Mécanique (Méca-J), 2021, en ligne.

[W2] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, B. Fabre, T. Hélie, L. Rosier, et D. Roze. **Contrôle actif des modes axisymétriques d'un tom : Système Hamiltonien à Ports et perspectives.** Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio (JJCAAS), 2019, Le Mans.

[W1] M. Wijnand, B. d'Andréa-Novel, T. Hélie, et D. Roze. **Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie.** Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio (JJCAAS), 2018, Brest.



GRRRyRrRrRg  
GRRrRRgRRgRGR

— Chewbacca dans *Le réveil de la force (La guerre des étoiles)* de George Lucas (2015)

---

*Ech héiren eppes*

— D'Maus Ketti dans *D'Maus Ketti* d'Auguste Liesch (1936)

*Noe valle d'ch toch d'n sjeun oet, este dat huurs*

— dans *Nuits* du recueil *Zal iech uuch ins get vertèlle...* de Pol Brounts (1986)

*Ma qué ? ... Ma qué sé passe-t-il maintenant ? ... Cette brouit bizarre ! ... Diavolo ! ...  
Jé mé demande ... Ouné pistoné ? ... Ouné soupapé ? ...*

— Arturo Cartoffoli dans *L'affaire Tournesol (Tintin)* d'Hergé (1956)

*Wie erklären wir das ?*

— Priorin Jadwiga dans *Der Teufel vom Chiemsee* d'Ina May (2017)

---

*Meten is weten  
(Mesurer, c'est savoir)*

*Ein Buchfink und ein Bücherwurm  
bestiegen einen Aussichtsturm  
und hofften, nicht zu scheitern,  
durch freien Blick ins weite Land  
den angelesenen Wissensstand  
erheblich zu erweitern.*

*Nach dem gelungenen Versuch  
verfassten sie ein schlaues Buch,  
das von dem Thema handelt,  
wie sich aus ganz verschied'ner Sicht,  
nach Standort, Perspektive, Licht,  
der Horizont verwandelt.*

*Da staunten alle Leseratten,  
die davon keine Ahnung hatten.*

— Günter Nehm

## REMERCIEMENTS

---

Merci aux encadrants, Brigitte, Thomas, David et Lionel, de m'avoir guidé le long de cette thèse. Vos expertises diverses m'ont permis de travailler sur un sujet assez large combinant l'automatique et l'acoustique, de la théorie en passant par la simulation à une implémentation expérimentale. J'ai appris beaucoup et c'était un plaisir de travailler avec vous et de participer à de belles aventures.

Merci aux rapporteurs, Cyril Touzé et Yann Le Gorrec, pour leur retour constructif et bienveillant sur le manuscrit.

Merci à l'ensemble du jury (Pascal Morin, Andrey Polyakov en plus de ces 6 personnes) pour examiner mon travail lors de la soutenance à l'Ircam.

Merci également à Cyril et Pascal pour les discussions en tant que comité de suivi de thèse pour Sorbonne Université.

Merci à Charlotte Vallin pour la gestion administrative de l'ED SMAER, et à sa direction, Djimédo Kondo et Faiz Ben Amar.

Merci au projet ANR Finite4SoS porté par Wilfrid Perruquetti d'avoir financé cette thèse, et à Catherine Drouet et Malika Larcher du Laboratoire Jacques-Louis Lions de Sorbonne Université pour sa gestion administrative.

Merci à Camille, Emmanuel et Arnaud (équipe PIP) et Djellal, Tristan et Robert (équipe S3AM) au laboratoire STMS pour leur support technique lors des expériences sur le tom.

Merci à Thomas et son équipe S3AM (permanents : Joël, Henri, René, Brigitte, Robert, David ; non-permanents : Quentin, Djellal ; doctorants : Marguerite, Damien, Tristan, Rémy, Pierre, Victor, Judy, Alexis, Colette, Loïc ; et tous les stagiaires) de m'avoir soutenu pendant ma thèse. C'était un privilège de pouvoir faire partie d'une équipe si motivée et sympathique. On a bien travaillé mais aussi bien ri, bien mangé, bien voyagé\* et joué de la musique (même du funk!).

Merci à tous les collègues du laboratoire STMS et de l'Ircam pour la bonne ambiance, y compris pendant de multiples activités de midi comme la course à pied à la tour Eiffel et l'atelier de tricot. Merci aussi aux forces administratives (Anne-Marie, Viktoriya, Carole, Sylvie, Ghislaine) pour résoudre mes problèmes efficacement.

Merci aux multiples collègues de ma mission d'enseignement à Sorbonne Université, pilotée par Farouk. C'était une expérience enrichissante de pouvoir transmettre de la matière et d'interagir avec les étudiants.

Merci aux organisateurs et participants du projet français ANR Finite4SoS (porté par Wilfrid Perruquetti) et du projet franco-allemand ANR-DFG INFIDHEM (porté par Birgit Jacob et Bernhard Maschke) pour les échanges autour de la commande en temps fini et des SHPs.

Merci aux organisateurs et participants des écoles d'été sur les SHPs (Wuppertal, 2018 & Chiemsee, 2019 ; ANR-DFG INFIDHEM) et de l'école d'été sur la dynamique non linéaire (Fréjus, 2018 ; GDR DYNOLIN).

Merci aux organisateurs et participants des Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio (Brest, 2018 ; Le Mans, 2019) et du Congrès des Jeunes Chercheurs en Mécanique (en ligne, 2021).

Merci à ceux qui m'ont donné une astuce ou une référence bibliographique. En particulier, Emmanuel Bernuau pour une discussion concernant la loi de commande de Bhat & Bernstein pour un intégrateur d'ordre  $n$ , Henrik Anfinsen pour une discussion concernant son livre co-écrit avec Ole Morte Aamo et la mise à disposition d'un code

MATLAB, et Roland Badeau, Olivier Derrien et Mathieu Lagrange pour quelques détails concernant l'utilisation de la boîte à outils DESAM.

Merci à la Cité Internationale Universitaire de Paris, aux directions de la Fondation Biermans–Lapôte (Belgique–Luxembourg) et du Collège d'Espagne ainsi qu'aux résidents.

Merci à l'Orchestre Symphonique Inter-Universitaire de Paris, à mon professeur d'orgue Jean Galard, et à Geert De Praetere, qui m'a fait découvrir l'Ircam et quelques logiciels dans ses cours d'harmonie au conservatoire il y a un moment.

Merci à tous mes amis sportifs/musicaux/autres.

Merci beaucoup à ma famille pour toutes les formes de soutien.

---

\*Aperçu des voyages pendant la thèse :



Ce document a été rédigé utilisant le template *A Classic Thesis Style* (André Miede et Ivo Pletikosić, 2018).





## TABLE DES MATIÈRES

**I INTRODUCTION**

1	SITUATION DU SUJET	3
1.1	Contexte	3
1.1.1	Projet ANR sur le contrôle en temps fini	3
1.1.2	Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son	4
1.2	Contributions de cette thèse	4
1.2.1	Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports	4
1.2.2	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO	4
2	CONTRÔLE ACTIF D'INSTRUMENTS DE MUSIQUE	7
2.1	Topologie	7
2.1.1	Topologie 1 : musicien humain non contrôlé	7
2.1.2	Topologie 2 : musicien humain contrôlé	8
2.1.3	Topologie 3 : musicien non humain non contrôlé	8
2.1.4	Topologie 4 : musicien non humain contrôlé	10
2.1.5	Topologie hybride : deux boucles de rétroaction	11
2.2	But du contrôle actif d'instruments de musique	12
2.2.1	Modification du son d'un instrument de musique	12
2.2.2	Suppression d'un phénomène indésirable dans un instrument de musique	13
2.2.3	Étude de la physique d'un instrument de musique	13
2.3	Architecture de la boucle de contrôle et composants utilisés	13
2.3.1	Capteurs	13
2.3.2	Contrôleur	15
2.3.3	Actionneurs	16

**II OUTILS**

3	RAPPEL EN THÉORIE DU CONTRÔLE	21
3.1	Introduction	21
3.2	Modélisation	22
3.2.1	Classes de systèmes dynamiques	22
3.2.2	Stabilité d'un point d'équilibre	25
3.3	Simulation	27
3.4	Contrôle	27
3.4.1	Transformation de similarité	27
3.4.2	Commandabilité	27
3.4.3	Observabilité	29
3.4.4	Remarques	30
4	SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS	31
4.1	Modèle	31
4.1.1	Modèle de dimension finie	31
4.1.2	Modèle de dimension infinie	34
4.2	Méthode de simulation	36
4.3	Méthodes de contrôle	36
4.3.1	Remodelage d'énergie	37
4.3.2	IDA-PBC	37
5	CONTRÔLE EN TEMPS FINI	39
5.1	Introduction	39
5.1.1	Exemple introductif	39
5.1.2	Définition	40
5.1.3	Avantages et inconvénients du contrôle en temps fini	41
5.2	Contrôle en temps fini d'équations aux dérivées ordinaires	41

5.2.1	Méthodes de construction de lois de commande . . . . .	41
5.2.2	Quelques lois de commande pour des EDOs . . . . .	43
5.3	Contrôle en temps fini d'équations aux dérivées partielles . . . . .	49
5.4	Autres types de commande non-asymptotique . . . . .	49
<b>III VERS LE CONTRÔLE PASSIF EN TEMPS FINI D'UN SYSTÈME EDO DANS LE FORMALISME DES SYSTÈMES HAMILTONIENS À PORTS</b>		
6	CONTRÔLE PASSIF EN TEMPS FINI DU DOUBLE INTÉGRATEUR AVEC UNE APPLICATION . . . . .	53
6.1	Modèle SHP d'un système masse-ressort-amortisseur . . . . .	53
6.1.1	Modèle linéaire . . . . .	53
6.1.2	Modèle non linéaire . . . . .	55
6.2	Loi de commande passive en temps fini . . . . .	55
6.2.1	Commande asymptotique par remodelage d'énergie et réallocation d'amortissement (IDA-PBC) . . . . .	55
6.2.2	Commande en temps fini . . . . .	56
6.2.3	Obtention d'une loi passive en temps fini . . . . .	58
6.2.4	Simulation . . . . .	59
6.3	Application au contrôle d'un haut-parleur comme absorbeur électroacoustique . . . . .	61
6.3.1	Contexte . . . . .	63
6.3.2	Modèle électroacoustique . . . . .	63
6.3.3	Conception de la loi de commande . . . . .	64
6.3.4	Simulation numérique . . . . .	66
6.4	Perspectives . . . . .	68
7	MÉTHODES DE SIMULATION POUR DES EDOS STABILISÉES EN TEMPS FINI RAIDES . . . . .	69
7.1	Méthodes existantes . . . . .	69
7.1.1	Méthode de simulation d'Euler explicite/implicite . . . . .	69
7.1.2	Méthode de simulation préservant la stabilité en temps fini . . . . .	70
7.2	Méthode avec une linéarisation locale . . . . .	70
7.2.1	Linéarisation locale et la méthode d'Euler explicite . . . . .	71
7.2.2	Perspective : linéarisation locale et la méthode du gradient discret . . . . .	73
8	CONTRÔLE ACTIF D'UNE CORDE NON LINÉAIRE PAR UN SUIVI DE TRAJECTOIRE EN TEMPS FINI . . . . .	75
8.1	Contexte . . . . .	75
8.1.1	Contrôle actif d'une corde . . . . .	75
8.1.2	Contrôle actif d'une corde musicale . . . . .	76
8.2	Modèle . . . . .	76
8.2.1	Modèle EDP . . . . .	76
8.2.2	Reformulation comme un SHP . . . . .	77
8.2.3	Projection modale et réduction d'ordre . . . . .	77
8.3	Commande en temps fini vers un comportement cible . . . . .	78
8.3.1	But du contrôle . . . . .	78
8.3.2	Obtention de la loi de commande . . . . .	78
8.4	Simulation d'une suppression du glissement fréquentiel dans un mode . . . . .	79
8.5	Perspective : vers une commande passive en temps fini par suivi de trajectoire . . . . .	80
<b>IV CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'UN SYSTÈME HYBRIDE (EDP-EDO) : LE CAS DU TOM</b>		
9	CONTRÔLE ACTIF DU TOM : MODÈLE ET CONTRÔLE MODAL . . . . .	85
9.1	Contexte . . . . .	86
9.1.1	Membranophones . . . . .	86
9.1.2	Contrôle actif de membranophones . . . . .	86

9.1.3	Contrôle actif de tom visé . . . . .	87
9.2	Acoustique des membranophones . . . . .	88
9.2.1	Vibration d'une membrane circulaire . . . . .	88
9.2.2	Vibration d'une membrane circulaire couplée à une cavité . . . . .	94
9.2.3	Déviations du modèle pour la vibration transverse d'une membrane circulaire attachée au bord couplée à une cavité . . . . .	98
9.3	Modèle . . . . .	101
9.3.1	Modèle physique . . . . .	101
9.3.2	Modèle SHP : modèle hybride . . . . .	104
9.3.3	Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride . . . . .	108
9.3.4	Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre . . . . .	109
9.3.5	Représentation d'état . . . . .	111
9.4	Contrôle modal . . . . .	113
9.4.1	Régulateur en temps fini . . . . .	115
9.4.2	Observateur en temps fini . . . . .	119
9.4.3	Vers une implémentation pratique . . . . .	123
9.5	Conclusion . . . . .	125
10	LE TOM : IMPLÉMENTATION EXPÉRIMENTALE . . . . .	127
10.1	Identification . . . . .	127
10.1.1	Montage . . . . .	127
10.1.2	Cavité . . . . .	127
10.1.3	Haut-parleur . . . . .	129
10.1.4	Membrane . . . . .	139
10.1.5	Conclusion . . . . .	162
10.2	Dispositif de contrôle . . . . .	163
10.2.1	Composants . . . . .	163
10.2.2	Dispositif expérimental complet . . . . .	166
10.2.3	Système de frappe reproductible . . . . .	167
10.3	Évaluation du contrôle . . . . .	173
10.3.1	Méthode numérique régularisant . . . . .	173
10.3.2	Changement de fréquence . . . . .	177
10.4	Conclusion et perspectives . . . . .	187
V	CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'UN SYSTÈME HYBRIDE (EDP-EDO) : LE CAS DU CÂBLE PESANT	
11	LE CÂBLE PESANT . . . . .	191
11.1	Contexte : stabilisation de systèmes hybrides EDP-EDO . . . . .	192
11.2	Introduction . . . . .	192
11.2.1	Mouvement 2D . . . . .	192
11.2.2	Modèle hybride 2D du câble pesant . . . . .	192
11.2.3	But du contrôle . . . . .	195
11.2.4	Stabilisation en temps fini de systèmes hyperboliques $2 \times 2$ . . . . .	196
11.2.5	Stabilité en temps fini d'un système d'évolution abstrait . . . . .	197
11.2.6	Structure du présent chapitre . . . . .	198
11.3	Obtention de la forme d'un système quasi hyperbolique $2 \times 2$ . . . . .	198
11.3.1	Première transformation . . . . .	198
11.3.2	Deuxième transformation . . . . .	199
11.4	Stabilisation en temps fini de l'EDP . . . . .	199
11.4.1	Système cible . . . . .	200
11.4.2	Transformation de coordonnées de type <i>backstepping</i> . . . . .	202
11.4.3	Calcul des noyaux de transformation . . . . .	203
11.4.4	Loi de commande à la frontière de l'EDP . . . . .	205
11.5	Stabilisation en temps fini du système hybride EDP-EDO . . . . .	205
11.5.1	Conception de la loi de commande . . . . .	206

11.5.2	Preuve de stabilité en temps fini du système hybride . . . . .	208
11.6	Simulation . . . . .	209
11.6.1	Calcul numérique des noyaux de transformation . . . . .	210
11.6.2	Simulation de l'évolution temporelle du système contrôlé . . . . .	210
11.7	Conclusions et perspectives . . . . .	221
11.7.1	Conclusions . . . . .	221
11.7.2	Perspectives . . . . .	222
<b>VI CONCLUSION</b>		
12	CONCLUSION ET PERSPECTIVES . . . . .	225
12.1	Conclusion . . . . .	225
12.1.1	Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	225
12.1.2	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom . . . . .	226
12.1.3	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant . . . . .	226
12.2	Perspectives . . . . .	226
12.2.1	Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	226
12.2.2	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom . . . . .	226
12.2.3	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant . . . . .	227
<b>Appendix</b>		
A	BASES DE MATHÉMATIQUES . . . . .	231
A.1	Algèbre . . . . .	231
A.2	Analyse . . . . .	231
A.3	Équations aux dérivées partielles . . . . .	232
B	CROCHETS . . . . .	235
C	CONTRÔLE ACTIF DU TOM : MODÈLE ET CONTRÔLE MODAL . . . . .	237
C.1	Acoustique des membranophones . . . . .	237
C.1.1	Fonctions de Bessel et propriétés . . . . .	237
C.2	Modèle . . . . .	239
C.2.1	Modèle SHP : modèle hybride . . . . .	239
C.2.2	Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride . . . . .	241
C.2.3	Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre . . . . .	245
C.2.4	Représentation d'état . . . . .	266
C.3	Contrôle modal . . . . .	270
C.3.1	Régulateur en temps fini . . . . .	270
C.3.2	Observateur en temps fini . . . . .	273
D	LE TOM : IMPLÉMENTATION EXPÉRIMENTALE . . . . .	277
D.1	Identification . . . . .	277
D.1.1	Haut-parleur . . . . .	277
D.1.2	Membrane . . . . .	278
D.2	Dispositif de contrôle . . . . .	280
D.2.1	Composants . . . . .	280
D.2.2	Système de frappe reproductible . . . . .	280
D.3	Évaluation du contrôle . . . . .	282
D.3.1	Changement de fréquence . . . . .	282
D.4	Données constructeur . . . . .	285
D.5	Dans les coulisses . . . . .	300
E	LE CÂBLE PESANT . . . . .	303

E.1	Stabilisation en temps fini du système hybride EDP-EDO . . . . .	303
E.1.1	Conception de la loi de commande . . . . .	303
E.1.2	Preuve de stabilité en temps fini du système hybride . . . . .	306
BIBLIOGRAPHIE		313

---

## TABLE DES FIGURES

FIGURE 1.1	Deux systèmes hybrides EDP–EDO considérés . . . . .	5
FIGURE 2.1	Topologie 1 : Musicien humain non contrôlé . . . . .	8
FIGURE 2.2	Topologie 2 : Musicien humain contrôlé . . . . .	9
FIGURE 2.3	Topologie 3 : Musicien non humain non contrôlé . . . . .	9
FIGURE 2.4	Topologie 4 : Musicien non humain contrôlé . . . . .	10
FIGURE 2.5	Topologie 5 : Topologie hybride avec deux boucles de rétroaction agissant sur le même instrument de musique . . . . .	11
FIGURE 2.6	Représentation schématique des composants utilisés dans l’implémentation d’une boucle de contrôle. . . . .	13
FIGURE 2.7	Quelques capteurs typiques utilisés en contrôle actif d’instruments de musique . . . . .	14
FIGURE 2.8	Le Coala, un contrôleur temps-réel . . . . .	15
FIGURE 2.9	Quelques actionneurs typiques utilisés en contrôle actif d’instruments de musique . . . . .	16
FIGURE 3.1	Un avion contrôlé par le pilote automatique . . . . .	22
FIGURE 3.2	Système entrée-sortie avec état interne . . . . .	22
FIGURE 3.3	Système masse-amortisseur-ressort linéaire . . . . .	23
FIGURE 3.4	Point d’équilibre stable et point d’équilibre attractif . . . . .	25
FIGURE 4.1	Système masse-ressort-amortisseur . . . . .	33
FIGURE 4.2	Corde . . . . .	34
FIGURE 4.3	Principe de la méthode de contrôle par remodelage d’énergie . . . . .	37
FIGURE 5.1	Trajectoires du système $\dot{x}(t) = u(t)$ pour différentes lois de contrôle . . . . .	40
FIGURE 5.2	Loi de commande (5.4) avec paramètres $k = 1$ et différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	44
FIGURE 5.3	Trajectoires de la boucle fermée (5.5) d’après l’Équation (5.6) pour plusieurs combinaisons de conditions initiales et paramètres de contrôle . . . . .	45
FIGURE 5.4	Influence de l’état initial $x_0$ et des paramètres de contrôle $(k, \alpha)$ sur le temps d’établissement $T(x_0)$ . . . . .	46
FIGURE 6.1	Système masse-ressort-amortisseur . . . . .	54
FIGURE 6.2	Contrôle du système linéaire : évolution de la position dans le temps pour plusieurs points cibles et plusieurs lois de commande. . . . .	60
FIGURE 6.3	Contrôle du système linéaire : évolution dans l’espace des états. . . . .	60
FIGURE 6.4	Contrôle du système linéaire : évolution de l’erreur de position dans le temps . . . . .	60
FIGURE 6.5	Contrôle du système non linéaire : évolution de la position dans le temps . . . . .	62
FIGURE 6.6	Contrôle du système non linéaire : évolution dans l’espace des états . . . . .	62
FIGURE 6.7	Contrôle du système linéaire : évolution de l’erreur de position dans le temps . . . . .	62
FIGURE 6.8	Propagation d’ondes planes dans un tube semi-infini. Un piston plan à $z = 0$ représente le modèle de haut-parleur. . . . .	63
FIGURE 6.9	Schéma-bloc de l’architecture de contrôle proposée . . . . .	65
FIGURE 6.10	Simulations dans le domaine temporel de la pression reflétée $p^-(t)$ à la membrane du haut-parleur pour une entrée $p_{ac}(t)$ à 94dB, pour les deux lois de commande. . . . .	67

FIGURE 6.11	Coefficient d'absorption en fonction de la fréquence pour les deux lois de commande et pour des pressions d'entrée à 94dB et 106dB . . . . .	68
FIGURE 7.1	Simulation d'un double intégrateur contrôlé en temps fini par les méthodes d'Euler explicite et implicite (à titre indicatif, on voit aussi une solution par la méthode du gradient discret standard).	70
FIGURE 7.2	Simulation d'un double intégrateur contrôlé en temps fini par la méthode préservant la stabilité en temps fini (à titre indicatif, on voit aussi une solution par un solveur numérique standard odeint) . . . . .	71
FIGURE 7.3	Approximation linéaire des non-linéarités autour de l'origine dans la loi de commande en temps fini (7.1). . . . .	72
FIGURE 7.4	Simulation d'un système masse-ressort-amortisseur contrôlé en temps fini par la méthode avec linéarisation locale autour de l'origine pour plusieurs tailles d'intervalle $\sigma$ . . . . .	72
FIGURE 7.5	Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple : $H_K''(x)$ . . . . .	74
FIGURE 7.6	Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple : $H_K'(x)$ . . . . .	74
FIGURE 7.7	Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple : $H_K(x)$ . . . . .	74
FIGURE 8.1	Modèle de corde non linéaire . . . . .	77
FIGURE 8.2	Architecture du contrôleur de suivi de trajectoire . . . . .	79
FIGURE 8.3	Simulation du système $\{S\}$ non contrôlé et du système cible $\{S^*\}$	80
FIGURE 8.4	Simulation du système $\{S\}$ contrôlé et du système cible $\{S^*\}$ . Un suivi de trajectoire est réalisé pour le mode $W_1(t)$ . . . . .	81
FIGURE 8.5	Comparaison des spectres des deux modes du système $\{S\}$ pour le cas sans et avec contrôle. Le glissement fréquentiel est enlevé dans le mode 1 par l'action du contrôle. . . . .	81
FIGURE 9.1	Quelques exemples d'instruments de percussion de type membranophone couplant une membrane à une cavité. . . . .	87
FIGURE 9.2	Système constitué d'un tom avec un haut-parleur . . . . .	88
FIGURE 9.3	Aire élémentaire de la membrane exécutant un déplacement transverse . . . . .	89
FIGURE 9.4	Membrane circulaire attachée au bord . . . . .	89
FIGURE 9.5	Quelques modes propres $\Psi_{nm}(r, \theta)$ de la membrane circulaire attachée au bord. . . . .	91
FIGURE 9.6	Cercles nodaux et lignes nodales pour quelques modes propres $nm$ de la membrane circulaire attachée au bord. À comparer avec la Figure 9.5. . . . .	91
FIGURE 9.7	Évolution des premières fréquences propres de la membrane circulaire en fonction de la tension de membrane $T$ . . . . .	92
FIGURE 9.8	Évolution des premières fréquences propres de la membrane circulaire en fonction du rayon de la membrane $a$ . . . . .	93
FIGURE 9.9	Membrane circulaire attachée au bord, couplée à une cavité . . . . .	94
FIGURE 9.10	Changement de volume de cavité suite à la vibration de la membrane . . . . .	95
FIGURE 9.11	Vibration prise en compte dans le modèle de la membrane couplée à une cavité . . . . .	96
FIGURE 9.12	Comparaison des formes spatiales des premiers modes axisymétrique de la membrane circulaire avec et sans couplage à un volume $V_0$ . . . . .	96
FIGURE 9.13	Évolution des fréquences des modes axisymétriques d'une membrane circulaire couplée à une cavité de volume $V_0$ variable. . . . .	97

FIGURE 9.14	Évolution des fréquences des modes axisymétriques d'une membrane circulaire couplée à une cavité de volume $V_0$ variable. Superposition des fréquences des modes non axisymétriques. . . . .	98
FIGURE 9.15	Évolution des fréquences des modes (non) axisymétriques d'une membrane circulaire couplée à une cavité, pour un changement du rayon de la membrane. . . . .	99
FIGURE 9.16	Évolution des fréquences des modes (non) axisymétriques d'une membrane circulaire couplée à une cavité, pour un changement de la tension. . . . .	99
FIGURE 9.17	Modèle mathématique ad hoc pour une distribution de tension dans une membrane de tom circulaire de rayon $a = 0.1778$ : cas d'étude avec un désaccordage extrême . . . . .	100
FIGURE 9.18	Possibles déformations de cercles et lignes modaux sous l'influence d'une tension inhomogène . . . . .	101
FIGURE 9.19	Modèle du système . . . . .	102
FIGURE 9.20	Simulation du système non contrôlé, avec $N = 2$ modes : évolution du déplacement au milieu de la membrane $\tilde{y}(0, \tilde{t})$ et son contenu fréquentiel. . . . .	113
FIGURE 9.21	Simulation du système non contrôlé, avec $N = 2$ modes : évolution de l'état entier et du Hamiltonien. . . . .	114
FIGURE 9.22	Disposition du contrôleur : mesure de la pression dans la cavité $p_c(t)$ et évolutions temporelles des modes de la membrane $z_i(t)$ comme entrée, et courant du haut-parleur $i_1(t)$ comme sortie. . . . .	115
FIGURE 9.23	Structure du régulateur . . . . .	118
FIGURE 9.24	Simulation du système à $N = 2$ modes contrôlé. Le spectre pour le cas sans contrôle (cf. Fig. 9.20) est indiqué en gris pour comparaison. . . . .	118
FIGURE 9.25	Simulation du modèle à $N = 1$ mode avec activation du contrôleur à $\tilde{t} = 15$ . . . . .	119
FIGURE 9.26	Disposition du contrôleur : mesure de la pression dans la cavité $p_c(t)$ comme entrée et courant du haut-parleur $i_1(t)$ comme sortie. . . . .	120
FIGURE 9.27	Structure de l'observateur-régulateur . . . . .	120
FIGURE 9.28	Simulation du système à $N = 2$ modes contrôlé par l'observateur-régulateur. L'observation de $\tilde{y}(0, \tilde{t})$ est dessinée en gris. . . . .	124
FIGURE 9.29	Structure de l'observateur-régulateur avec filtre passe-bas pour réduire le <i>spillover</i> d'observation . . . . .	125
FIGURE 9.30	Simulation du système à 7 modes sans contrôle (gris) et contrôle par l'observateur-régulateur considérant seulement les premiers 2 modes. . . . .	126
FIGURE 10.1	Montage du tom et du haut-parleur dans une enceinte . . . . .	128
FIGURE 10.2	Volume de la cavité : contributions cylindrique et conique . . . . .	130
FIGURE 10.3	Structure d'un haut-parleur électrodynamique . . . . .	130
FIGURE 10.4	Dispositif d'identification du haut-parleur : schéma . . . . .	132
FIGURE 10.5	Dispositif d'identification du haut-parleur : le capteur laser monté au-dessus de la membrane du haut-parleur . . . . .	133
FIGURE 10.6	Mesures pour l'identification des paramètres du haut-parleur . . . . .	134
FIGURE 10.7	Fonctions de transfert calculées à partir des signaux mesurés : $H_{V/I}$ et $H_{X/V}$ . . . . .	135
FIGURE 10.8	Fonctions de transfert calculées à partir des signaux mesurés : $H_{X/I}$ . . . . .	136
FIGURE 10.9	Détermination de la fréquence de résonance $f_0$ du haut-parleur . . . . .	137
FIGURE 10.10	Ajustement de courbe obtenu : le cas de $H_{V/I}(s)$ . . . . .	138
FIGURE 10.11	Définition de la surface équivalente $S_1$ du haut-parleur décrit comme un piston plan . . . . .	139
FIGURE 10.12	Détail de la condition aux limites de la membrane . . . . .	140

FIGURE 10.13	Membrane du tom . . . . .	141
FIGURE 10.14	Pièce de membrane rectangulaire . . . . .	142
FIGURE 10.15	Dispositif d'accordage de la membrane : schéma et principe . .	143
FIGURE 10.16	Dispositif d'accordage de la membrane : marteau d'impact et microphone . . . . .	144
FIGURE 10.17	Dispositif d'accordage de la membrane : mesures de force et son obtenues à deux endroits de la membrane pendant la procédure d'accordage . . . . .	145
FIGURE 10.18	Dispositif d'accordage de la membrane : spectres de mesures de la pression au-dessus de plusieurs endroits de la membrane, pour la membrane à son accordage final . . . . .	146
FIGURE 10.19	Dispositif d'identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : schéma . . . . .	148
FIGURE 10.20	Dispositif d'identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : le laser et le poids sur la membrane . . . . .	148
FIGURE 10.21	Mesure de la hauteur du dessus du poids dans le temps . . . . .	149
FIGURE 10.22	Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par le haut-parleur interne) : schéma. . . . .	150
FIGURE 10.23	Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : schéma. . . . .	151
FIGURE 10.24	Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : le pot vibrant et la membrane vibrant selon le mode 21. . . . .	152
FIGURE 10.25	Fonctionnement du pot vibrant . . . . .	152
FIGURE 10.26	Figures de Chladni du mode 11 . . . . .	153
FIGURE 10.27	Figures de Chladni du mode 21 . . . . .	154
FIGURE 10.28	Figures de Chladni du mode 02 . . . . .	155
FIGURE 10.29	Identification de la tension de la membrane $T$ : ajustement des fréquences du modèle aux plages de fréquences des figures de Chladni . . . . .	158
FIGURE 10.30	Représentation schématique des régimes dans le son d'un coup sur la membrane du tom . . . . .	160
FIGURE 10.31	Sélection du régime linéaire dans cinq sons de frappe : signaux temporels . . . . .	160
FIGURE 10.32	Sélection du régime linéaire dans cinq sons de frappe : HR-ogramme d'un des cinq signaux . . . . .	161
FIGURE 10.33	Approximation d'un signal $p_e(t)$ par un modèle EDS à 4 paires de pôles par la méthode ESPRIT . . . . .	161
FIGURE 10.34	Dispositif de contrôle utilisant un microphone comme capteur, le Coala pour implémenter l'algorithme de contrôle, et le haut-parleur comme actionneur . . . . .	164
FIGURE 10.35	Dispositif de contrôle : microphone dans la cavité comme capteur de pression. . . . .	165
FIGURE 10.36	Commande à distance de la boucle temps-réel du Coala depuis une page web . . . . .	167
FIGURE 10.37	Dispositif expérimental complet : schéma . . . . .	168
FIGURE 10.38	Microphone au-dessus de la membrane qui sera utilisé pour évaluer l'effet du contrôle au point milieu de la membrane, en outre du microphone dans la cavité utilisé comme capteur dans la boucle de contrôle. . . . .	169
FIGURE 10.39	Dispositif expérimental complet : installation en chambre anéchoïque . . . . .	169
FIGURE 10.40	Support-baguettes monté dans le dispositif expérimental dans le but d'obtenir une frappe reproductible au milieu de la membrane	170
FIGURE 10.41	Système de frappe reproductible . . . . .	171

FIGURE 10.42	Efficacité du support-baguette. Condition non anéchoïque. . . .	172
FIGURE 10.43	Évaluation de la méthode numérique : variables internes du Coala (mesure de pression, état de l'observateur, loi de commande en courant puis en tension) pour un calcul par la méthode d'Euler explicite . . . . .	174
FIGURE 10.44	Évaluation de la méthode numérique : variables internes du Coala (mesure de pression, état de l'observateur, loi de commande en courant puis en tension) pour un calcul par la méthode d'Euler explicite avec une linéarisation locale autour de l'origine . . . . .	175
FIGURE 10.45	Évaluation de la méthode numérique : comparaison d'une partie de l'évolution temporelle de l'estimation de $\tilde{z}_1$ de l'observateur calculée par la méthode d'Euler explicite, avec/sans linéarisation locale. . . . .	176
FIGURE 10.46	Comparaison des signaux de pression extérieure $p_e$ pour deux ensembles de paramètres de placement de pôles, et le cas sans contrôle. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition non anéchoïque. . . . .	178
FIGURE 10.47	Densité spectrale de puissance pour un nombre de mesures de $p_e$ avec des paramètres de placement de pôles différents. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition non anéchoïque. . . . .	179
FIGURE 10.48	Détail de la Figure 10.47. Les plages fréquentielles des modes expérimentalement observés par les figures de Chladni sont indiquées en gris. . . . .	180
FIGURE 10.49	Détails des HR-ogrammes pour une mesure de $p_e$ sans contrôle, avec un premier contrôle et un deuxième contrôle . . . . .	181
FIGURE 10.50	Densité spectrale de puissance pour un nombre de mesures de $p_e$ avec des paramètres de placement de pôles différents. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition anéchoïque. . . . .	183
FIGURE 10.51	Détail de la Figure 10.50. Les plages fréquentielles des modes expérimentalement observés par les figures de Chladni sont indiquées en gris. . . . .	184
FIGURE 10.52	Détail des densités spectrales de puissance pour le cas non contrôlé et deux cas contrôlés. Condition anéchoïque. . . . .	185
FIGURE 10.53	Détails des HR-ogrammes correspondants à la Fig. 10.52 . . . . .	186
FIGURE 10.54	Propagation des ondes sonores à l'intérieur de la cavité . . . . .	187
FIGURE 11.2	Schéma du modèle de grue . . . . .	193
FIGURE 11.3	Contribution linéaire importante dans $d(s)$ pour le cas avec $m = 2\text{kg}, \rho = 2\text{kg/m}^2, g = 9.81\text{m/s}^2$ . . . . .	194
FIGURE 11.4	But du contrôle . . . . .	195
FIGURE 11.5	Représentation schématique de l'EDP comme sous-système du système hybride EDP-EDO . . . . .	200
FIGURE 11.6	Schéma du système de deux EDPs de type advection . . . . .	201
FIGURE 11.7	Évolution temporelle d'un système de type advection avec condition aux limites transparente : tout devient zéro . . . . .	202
FIGURE 11.8	Domaine triangulaire $\mathcal{T}$ . . . . .	204
FIGURE 11.9	Domaine triangulaire $\mathcal{T}$ avec grille de discrétisation uniforme . . . . .	205
FIGURE 11.10	Représentation schématique du système hybride EDP-EDO . . . . .	206
FIGURE 11.11	Noyaux directs $K$ . Les bords dessinés en rouge indiquent les conditions aux limites à $(x, 0)$ et $(x, x)$ du système de Goursat (11.35). Les bords dessinés en vert correspondent à des gains de contrôle évalués à $(1, \xi)$ et utilisés dans la loi de commande (11.38). . . . .	210

FIGURE 11.12	Noyaux inverses $L$ . Les bords dessinés en rouge indiquent les conditions aux limites à $(x, 0)$ et $(x, x)$ du système de Goursat (11.36). Les bords dessinés en vert correspondent à des gains de contrôle évalués à $(1, \zeta)$ et utilisés dans la loi de commande (11.51) ainsi que dans les Équations (11.41) et (11.48). . . . .	211
FIGURE 11.13	Gains de contrôle $L(1, \zeta)$ utilisés dans la loi de commande (11.51) et dans les Équations (11.41) et (11.48). . . . .	211
FIGURE 11.14	Simulation de l'évolution temporelle de la variable auxiliaire $\varphi(t)$ et $\dot{\varphi}(t)$ . . . . .	216
FIGURE 11.15	Simulation de l'évolution temporelle de $\beta(x, t)$ et $\alpha(x, t)$ , affichée pour $x = 0$ et $x = 1$ . . . . .	217
FIGURE 11.16	Simulation de l'évolution temporelle de $\beta(x, t)$ et $\alpha(x, t)$ , affichée pour tout $x$ . . . . .	218
FIGURE 11.17	Simulation de l'évolution temporelle de la position de la plateforme $X_p(t)$ et la position du câble $y(s, t)$ à $s = 0$ et $s = 1$ . . . . .	219
FIGURE 11.18	Simulation de l'évolution temporelle de la position du câble $z(x, t) = y(s, t)$ . . . . .	220
FIGURE 11.19	Aperçu du mouvement du système dans l'espace. Le maillage spatial dans la coordonnée $s(x)$ curviligne le long du câble est représenté par des points. La position du câble est affichée pour un nombre de temps équidistant et sa couleur varie du rouge au pourpre puis au bleu pendant le mouvement. . . . .	221
FIGURE A.1	Fonction de Heaviside . . . . .	232
FIGURE C.1	Graphe des premières fonctions de Bessel de première espèce . . . . .	238
FIGURE D.1	Figures de Chladni de quelques modes plus élevés . . . . .	279
FIGURE D.2	Câblage du Coala . . . . .	280
FIGURE D.3	Conception de la pièce d'ajustement de diamètre . . . . .	281
FIGURE D.4	Impression 3D de la pièce d'ajustement de diamètre . . . . .	281
FIGURE D.5	Montage du support-baguette . . . . .	281
FIGURE D.6	Dispositif concernant le déphasage dans la cavité : schéma . . . . .	283
FIGURE D.7	Mesures concernant le déphasage dans la cavité : signaux mesurés	284
FIGURE D.8	Mesures concernant le déphasage dans la cavité : fonctions de transfert . . . . .	284
FIGURE D.9	Détail de la figure de Chladni à 275Hz . . . . .	300
FIGURE D.10	Figure de Chladni à 792Hz . . . . .	300
FIGURE D.11	Chambre anéchoïque . . . . .	301
FIGURE D.12	Son et lumière . . . . .	302

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 5.1	Détails des trois lois de commande. Calculs pour le cas $x(t) > 0$ .	39
Tableau 5.2	Temps d'établissement correspondant aux trajectoires de la Figure 5.3. . . . .	46
Tableau 9.1	Ratio des fréquences propres de quelques modes propres de la membrane circulaire attachée au bord . . . . .	92
Tableau 9.2	Liste des variables et constantes physiques du modèle de tom . . . . .	105
Tableau 9.3	Liste des états du modèle de tom . . . . .	105
Tableau 9.4	Adimensionnement des variables et constantes . . . . .	109
Tableau 10.1	Liste des paramètres physiques à identifier . . . . .	129
Tableau 10.2	Dispositif d'identification du haut-parleur : liste des instruments	133
Tableau 10.3	Dispositif d'accordage de la membrane : liste des instruments . . . . .	144

Tableau 10.4	Dispositif d'identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : liste des instruments . . . . .	148
Tableau 10.5	Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par le haut-parleur interne) : liste des instruments . . . . .	151
Tableau 10.6	Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : liste des instruments . . . . .	152
Tableau 10.7	Estimation de la tension avec la 2 <sup>ème</sup> méthode d'après les fréquences des figures de Chladni . . . . .	157
Tableau 10.8	Approximation par un modèle EDS à 4 paires de pôles du signal de la Figure 10.33 : fréquences et amortissements . . . . .	162
Tableau 10.9	Liste des paramètres physiques identifiés . . . . .	162
Tableau 10.10	Dispositif expérimental complet en chambre anéchoïque : liste des instruments . . . . .	167
Tableau C.1	Premiers zéros des premières fonctions de Bessel de première espèce . . . . .	238
Tableau D.1	Comparaison entre les valeurs identifiées du haut-parleur et les valeurs constructeur. . . . .	278
Tableau D.2	Dispositif concernant le déphasage dans la cavité : liste des instruments . . . . .	282

## ACRONYMES

---

**EDO** Équation aux Dérivées Ordinaires

**EDP** Équation aux Dérivées Partielles

**SHP** Système Hamiltonien à Ports

Première partie

INTRODUCTION



## SITUATION DU SUJET

---

Cette thèse s’inscrit dans des recherches menées dans un projet ANR sur le contrôle en temps fini et a eu lieu dans le Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son (Section 1.1).

Le contenu de cette thèse s’articule en deux parties (Section 1.2). Elle apporte d’abord une contribution concernant une combinaison d’une loi de commande en temps fini (pour l’efficacité) avec la passivité (pour garantir la robustesse face à, par exemple, une mauvaise estimation des paramètres du modèle), dans le cas d’un système EDO du deuxième ordre. Cette loi de commande est utilisée pour le contrôle d’un haut-parleur dans une application d’absorbeur électroacoustique. Ensuite, une méthode numérique passive résolvant un problème de raideur intrinsèque chez des systèmes EDO stabilisés en temps fini est proposée et une deuxième application au contrôle actif d’une corde non linéaire par suivi de trajectoire en temps fini est proposée.

Dans un deuxième temps, cette thèse s’intéresse au développement de lois de commande en temps fini pour le cas de deux systèmes hybrides (EDP–EDO) vibratoires concrets, le tom et le câble pesant, où le contrôleur du tom sera également implémenté sur un prototype pour une évaluation expérimentale.

---

### TABLE DES MATIÈRES

1.1	Contexte . . . . .	3
1.1.1	Projet ANR sur le contrôle en temps fini . . . . .	3
1.1.2	Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son . . . . .	4
1.2	Contributions de cette thèse . . . . .	4
1.2.1	Vers un contrôle passif en temps fini d’un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	4
1.2.2	Contrôle en temps fini d’un système hybride EDP–EDO . . . . .	4

---

### 1.1 CONTEXTE

#### 1.1.1 *Projet ANR sur le contrôle en temps fini*

Cette thèse a été financée par le projet ANR Finite4SoS (« Finite time control and estimation for systems of systems »<sup>1</sup>). Le programme de ce projet ANR s’inspire du fait que notre société contient de plus en plus de systèmes interconnectés (*systems of systems*) qui communiquent entre eux et qui ont besoin d’être contrôlés en garantissant de la robustesse et la prise en compte de contraintes de temps, pour des raisons de sécurité ou de productivité. Des exemples comme des systèmes embarqués dans des outils de ménage, d’industrie ou de transport et des robots de service ou médicaux sont mentionnés.

Les systèmes interconnectés peuvent être de natures différentes et contenir des modèles dynamiques et logiques. Dans le projet ANR, on se focalise sur quatre types de modèles dynamiques spécifiques :

- des équations aux dérivées ordinaires (EDO, dynamiques à variables localisées)
- des équations aux dérivées partielles (EDP, dynamiques à variables spatialement distribuées)

---

1. Projet sur la commande et estimation en temps fini pour les systèmes de systèmes, porté par Wilfrid Perruquetti de l’École Centrale de Lille, <https://anr.fr/Projet-ANR-15-CE23-0007>.

- des inclusions différentielles (permettant des dynamiques non uniques, correspondant à des sauts dans la dynamique)
- des systèmes à retard (prenant en compte des latences de communication).

### 1.1.2 Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique et du Son

Le Laboratoire des Sciences et Technologies de la Musique (UMR STMS<sup>2</sup>) est hébergé à l'Ircam (Institut de recherche et de coordination acoustique/musique<sup>3</sup>) à Paris. Cette thèse a été effectuée au sein de l'équipe S<sub>3</sub>AM (Systèmes et signaux sonores : Audio/acoustique, instruments<sup>4</sup>), qui s'intéresse à l'étude de systèmes multiphysiques comme les instruments de musique, et développe des modèles physiques, des méthodes de simulation numérique et des algorithmes de contrôle.

## 1.2 CONTRIBUTIONS DE CETTE THÈSE

Après une introduction du sujet de cette thèse et de son contexte dans la Partie I et des rappels concernant les outils utilisés dans la Partie II, les contributions de cette thèse sont les suivantes.

### 1.2.1 Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports

Dans un premier temps, cette thèse s'intéresse à une réinterprétation de lois de commande en temps fini existantes pour des EDOs dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP), dans le but d'ajouter la propriété de passivité. Si la commande en temps fini permet d'atteindre une cible de manière efficace, la passivité garantira en plus une robustesse dans le cas, par exemple, d'une mauvaise identification des paramètres du modèle. La passivité d'une loi de commande en temps fini pour un système EDO du deuxième ordre est obtenue, qui est appliquée au contrôle d'un haut-parleur électrodynamique fonctionnant comme absorbeur.

Ensuite, une méthode numérique passive est proposée, qui réalise une linéarisation locale autour du point cible, où le système EDO contrôlé en temps fini est infiniment raide (lois non linéaires qui sont non Lipschitz continues à l'origine). Cette méthode numérique offrira en effet une solution au problème de *chattering* (oscillations numériques) rencontré lors d'une implémentation expérimentale de la loi passive en temps fini pour l'EDO du deuxième dans le cadre du contrôle de tom mentionné ci-dessous.

Finalement, une application au contrôle d'une corde non linéaire par suivi de trajectoire par une loi de commande en temps fini (non passif) est étudiée.

Une perspective de ce travail serait de généraliser ce résultat au cas du contrôle passif en temps fini d'une EDO d'ordre  $n$  quelconque, permettant de contrôler des systèmes appartenant à la classe des systèmes physiques plats.

*Cette contribution est détaillée dans la Partie III.*

### 1.2.2 Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO

Dans un deuxième temps, on s'intéresse au contrôle en temps fini de systèmes hybrides constitués d'une partie EDP couplée à une partie EDO. Deux applications à des systèmes vibratoires concrets sont traitées (Fig. 1.1) : un tom (instrument de percussion augmenté par rétroaction sur un haut-parleur), et un chariot avec câble pesant (modèle pour le mouvement 2D dans une grue de construction ou un pont

2. <https://www.stms-lab.fr>

3. <https://www.ircam.fr>

4. <https://www.stms-lab.fr/team/systemes-et-signaux-sonores-audioacoustique-instruments>

roulant). Ces deux systèmes vibratoires sont traités avec des approches spécifiques distinctes, décrites ci-dessous.

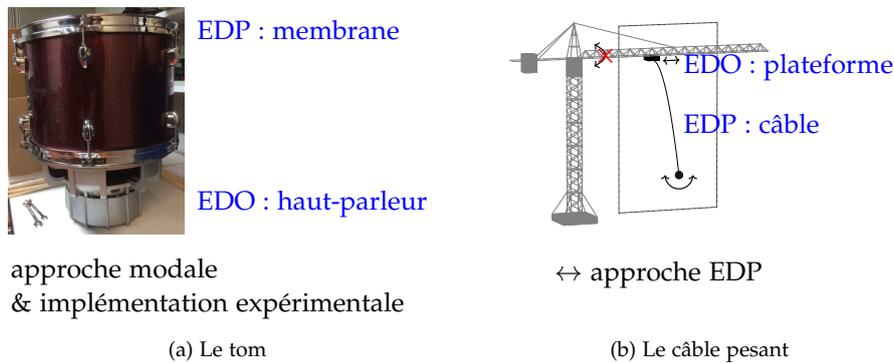


FIGURE 1.1 – Deux systèmes hybrides EDP-EDO considérés

### 1.2.2.1 Le tom

**MODÉLISATION** Dans cette application acoustique, le système est un instrument de percussion qui consiste d'une membrane (EDP) couplée à un haut-parleur (EDO) à travers d'une cavité. D'abord, une projection modale avec troncature est appliquée à cette dynamique hybride afin d'obtenir une dynamique à  $N$  modes (EDO pure), qui est considérée par la suite.

**CONTRÔLE** On veut construire une loi de commande en temps fini pour le courant du haut-parleur qui a pour but de modifier le comportement vibratoire de la membrane supérieure du tom.

Dans un premier temps, la loi de commande est nourrie par une mesure de la pression dans la cavité et d'une mesure du mouvement de la membrane supérieure. À partir de ces quantités, la loi de commande réalise un suivi de trajectoire qui est censé rapprocher le comportement vibratoire de (quelques modes de) la membrane vers un comportement cible. Ainsi, des fréquences et/ou amortissements de certains modes pourront être modifiés et, avec eux, le son produit par l'instrument lorsqu'il est frappé par un musicien.

Dans un deuxième temps, un observateur temps-fini est ajouté dans la boucle de contrôle, ce qui permet de supprimer le capteur de déplacement de la membrane, une mesure qui serait difficilement réalisable en pratique.

Certains aspects pratiques de la loi de commande proposée sont mentionnés : le phénomène de *spillover* introduit par la troncature modale du modèle de membrane, et des effets numériques (*chattering*) attendus dus à la raideur de la loi en temps fini. Le problème de *chattering* sera traité par la suite par la méthode numérique avec une linéarisation locale déraidissante mentionnée dans la première partie.

**IDENTIFICATION** En vue d'une implémentation expérimentale de la loi de commande, une identification des paramètres physiques du système considéré est effectuée. Il s'agit de la mise en pratique de méthodes standard pour l'estimation de paramètres supposés constants dans le temps et dans l'espace.

**ÉVALUATION EXPÉRIMENTALE DU CONTRÔLEUR** Un dispositif expérimental est développé, incorporant un microcontrôleur adapté au contrôle actif d'instruments de musique (le Coala, qui sera introduit plus bas), et un système de frappe reproductible. D'abord, des problèmes de raideur numérique dans le calcul du microcontrôleur sont résolus. Ensuite, on montre que l'on est capable de modifier des fréquences dans la vibration de la membrane supérieure, mais qu'il reste un écart significatif avec le

modèle, ce qui souligne la nécessité d'affiner le modèle utilisé dans le contrôleur.

*Cette contribution est détaillée dans la Partie IV.*

#### 1.2.2.2 Le câble pesant

Dans cette application, un câble flexible (EDP) portant une masse est attaché à une plateforme qui exécute une translation horizontale (EDO) et qui est contrôlée en force. Cette dynamique peut être trouvée dans une grue de construction ou un pont roulant.

On souhaite stabiliser la dynamique du système hybride EDP–EDO en temps fini, cette fois-ci sans procéder à une projection modale. On met à profit un théorème existant (sur le contrôle en temps fini à la frontière d'une EDP hyperbolique) pour concevoir la loi de commande qui produit la force à appliquer à la plateforme pour stabiliser le système hybride complet.

Le calcul de la loi de commande et la simulation de la dynamique en boucle fermée sont effectués en appliquant des méthodes de simulation récentes.

Pour une implémentation plus réaliste de la loi de commande, il serait nécessaire d'ajouter un observateur en temps fini qui se base sur une mesure à l'extrémité supérieure du câble. De plus, un mouvement 3D au lieu de 2D pourrait être considéré.

*Cette contribution est détaillée dans la Partie V.*

Une partie de cette thèse se situe dans le domaine du *contrôle actif d'instruments de musique*, qui consiste à ajouter une boucle de contrôle artificielle à un instrument de musique acoustique, dans le but d'en influencer la vibration.

Dans le présent chapitre, nous donnons des informations générales concernant la topologie considérée, le but du contrôle, et les composants typiquement utilisés pour son implémentation. De la bibliographie plus spécifique pour les cas considérés sera mentionnée dans les chapitres correspondants (Section 8.1 pour la corde et Sous-section 9.1.2 pour la membrane).

---

## TABLE DES MATIÈRES

2.1	Topologie . . . . .	7
2.1.1	Topologie 1 : musicien humain non contrôlé . . . . .	7
2.1.2	Topologie 2 : musicien humain contrôlé . . . . .	8
2.1.3	Topologie 3 : musicien non humain non contrôlé . . . . .	8
2.1.4	Topologie 4 : musicien non humain contrôlé . . . . .	10
2.1.5	Topologie hybride : deux boucles de rétroaction . . . . .	11
2.2	But du contrôle actif d'instruments de musique . . . . .	12
2.2.1	Modification du son d'un instrument de musique . . . . .	12
2.2.2	Suppression d'un phénomène indésirable dans un instrument de musique . . . . .	13
2.2.3	Étude de la physique d'un instrument de musique . . . . .	13
2.3	Architecture de la boucle de contrôle et composants utilisés . . . . .	13
2.3.1	Capteurs . . . . .	13
2.3.2	Contrôleur . . . . .	15
2.3.3	Actionneurs . . . . .	16

---

### 2.1 TOPOLOGIE

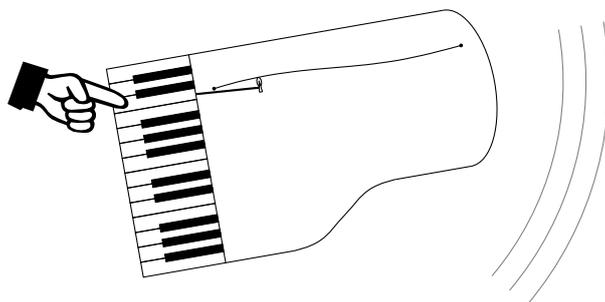
Nous énumérons ici plusieurs cas où un instrument de musique acoustique est joué. On peut discerner plusieurs topologies selon la présence d'un être humain et d'un contrôle. Finalement, la topologie hybride qui est considérée dans cette thèse, est présentée.

#### 2.1.1 Topologie 1 : musicien humain non contrôlé

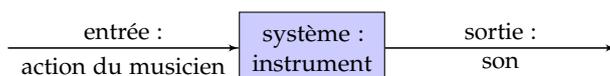
Avant tout, un instrument de musique peut être considéré comme un système dynamique (Fig. 2.1). Le musicien applique une action sur l'instrument, qui est l'entrée au système. Suite à cette entrée, l'état interne de l'instrument (le système) change selon les lois physiques qui le régissent. Ensuite, le son résultant que génère l'instrument peut être vu comme un signal de sortie quittant le système.

Dans la Figure 2.1(a), on évoque l'exemple d'un pianiste qui appuie sur une touche du piano. La force qu'il exerce se traduit par la mécanique interne en un mouvement d'un marteau qui vient frapper une corde. La corde se met à vibrer, une vibration qui se transmet sur la table d'harmonie et se propage ensuite dans l'air. Le musicien fait abstraction de la physique interne de l'instrument et se l'approprie véritablement comme un système entrée-sortie. Sans réfléchir à ce qui se passe physiquement à

l'intérieur de l'instrument, il observe qu'une certaine force appliquée sur une touche se traduit en un certain son. S'il appuie ensuite plus ou moins fort sur une autre touche, le son produit sera différent en conséquence.



(a) Exemple concret : le piano



(b) Schéma-bloc

FIGURE 2.1 – Topologie 1 : Musicien humain non contrôlé

### 2.1.2 Topologie 2 : musicien humain contrôlé

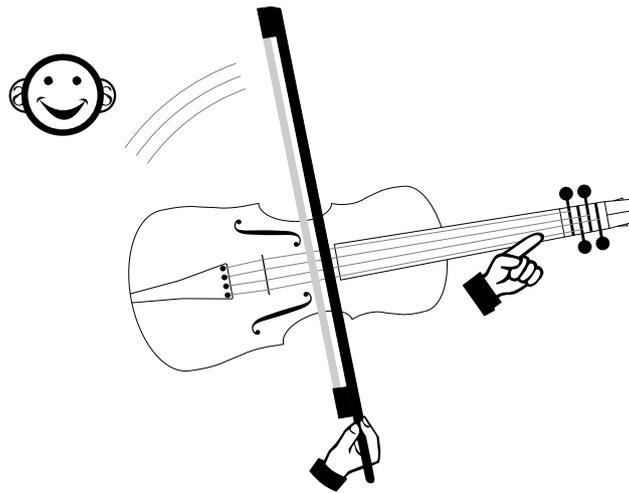
Dans la Topologie 1, nous avons négligé le fait qu'un musicien expérimenté incorpore de manière naturelle une certaine forme de contrôle dans son jeu (2.2). Un exemple est un violoniste qui frotte une corde avec l'archet qu'il tient dans sa main droite, et raccourcit la corde en question avec la main gauche, ce qui influence la fréquence du son obtenu. Pendant qu'il joue, il écoute le son. Si le son ne correspond pas à l'intention sonore du musicien, il peut l'influencer : déplacer la main gauche pour rectifier l'intonation, ajouter du vibrato, modifier la pression ou la position de l'archet, etc.

Cette boucle de contrôle de type rétroaction est représentée dans la Figure 2.2(b). On y voit que l'oreille du musicien agit comme un capteur avec lequel le musicien s'informe du signal de sortie du système. Dans son cerveau, il compare le son écouté avec son attente sonore (correspondant à son intention, potentiellement en fonction d'une partition écrite qu'il exécute). En fonction de l'écart entre ces deux signaux, le musicien va adapter l'action qu'il applique sur l'instrument en temps réel dans le but d'approcher le son obtenu de la cible sonore.

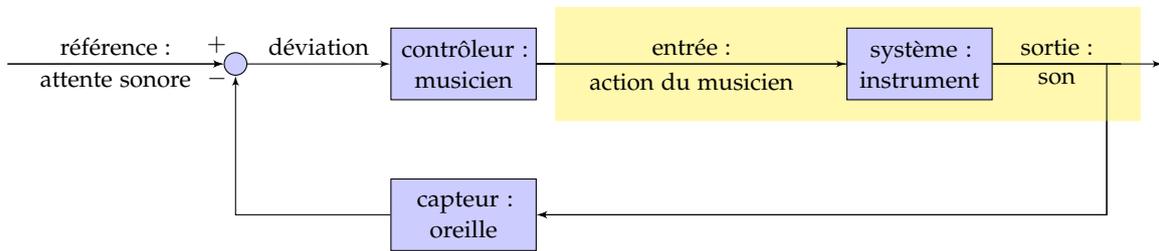
### 2.1.3 Topologie 3 : musicien non humain non contrôlé

On peut imaginer des dispositifs où l'on se passe complètement du musicien. Des instruments autonomes (ne contenant pas de contrôle mais fonctionnant en boucle ouverte) existent depuis longtemps, appelés parfois des automates musicaux. Pensons p.ex. à la boîte à musique, l'horloge musicale, le piano mécanique reproducteur, l'orgue de barbarie ou l'orgue de foire.

Dans la Figure 2.3(a), le cas d'un carillon autonome est schématisé. Un tambour métallique exécute une rotation grâce à un moteur électrique. Le tambour contient un maillage de trous dans lesquels des petites barres métalliques (« picots ») peuvent être placées, représentant la musique à jouer. Pendant la rotation, les barres passent sous un mécanisme qui est relié aux cloches dans la tour et les actionne selon les instructions reçues.



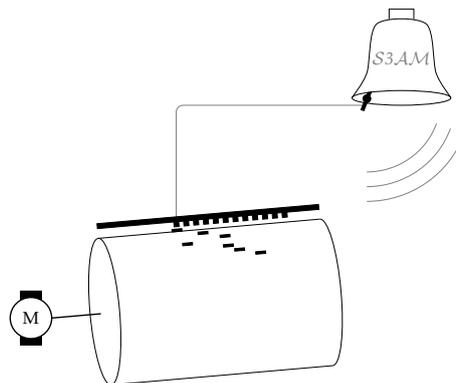
(a) Exemple concret : le violon



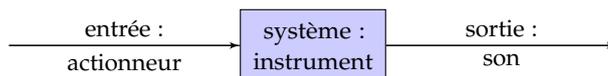
(b) Schéma-bloc

FIGURE 2.2 – Topologie 2 : Musicien humain contrôlé

Cette topologie, montrée Figure 2.3(b), correspond tout à fait à celle de la Figure 2.1(b) sans boucle de rétro-action, à la seule différence que le musicien a été remplacé par un actionneur mécanique.



(a) Exemple concret : le carillon autonome



(b) Schéma-bloc

FIGURE 2.3 – Topologie 3 : Musicien non humain non contrôlé

On remarque qu’une telle topologie n’a qu’une expressivité limitée. Il s’agit souvent de machines exécutant de manière automatique une représentation limitée de la musique, même si l’on a développé des manières d’incorporer un certain degré

d'expressivité<sup>1</sup>. De plus, il n'est pas possible de rectifier l'influence de facteurs externes comme la température sur le son, ce qui sera le cas pour la Topologie 4.

#### 2.1.4 Topologie 4 : musicien non humain contrôlé

Il est également possible d'ajouter une boucle de contrôle artificielle dans un dispositif jouant automatiquement d'un instrument de musique. De ce fait, il sera possible de rectifier le résultat sonore vers une cible prédéfinie, ce qui n'est pas le cas pour la Topologie 3 en boucle ouverte.

L'exemple du contrôle de la fréquence d'une flûte à coulisse est illustré Figure 2.4(a). Chez cet instrument, la position de la coulisse détermine la fréquence du son produit. Ici, un microphone mesure le son produit. Si la fréquence de jeu ne correspond pas exactement à la fréquence souhaitée, le contrôleur donne une instruction au moteur pour rectifier la position de la coulisse en temps réel.

La topologie correspondante est représentée dans le schéma-bloc 2.4(b). Il est pareil au schéma-bloc 2.2, à la différence que toutes les fonctions du musicien humain ont été remplacées par une machine.

Il existe plusieurs exemples d'instruments robotisés<sup>2</sup> comme le piano automatique avec contrôle du volume [106] et la flûte à coulisse robotisée [278, 279, 283] (dispositif très similaire au cas traité ci-dessus). Des robots humanoïdes jouant d'un instrument de musique à corde, à vent, de percussion, ou le piano ont aussi été développés (MPR pour *Musical Performance Robot*, [50, 127, 232]).

#### 2.1.5 Topologie hybride : deux boucles de rétroaction

Dans le cas du contrôle actif du tom développé dans cette thèse, nous considérons une topologie hybride avec un musicien *et* un contrôleur artificiel agissant sur un même instrument de musique. L'exemple de la Figure 2.5(a) reprend le violoniste qui joue maintenant d'un violon augmenté : un contrôleur agit sur la table d'harmonie à l'aide d'un capteur et un actionneur piézoélectriques (voir Section 2.3) dans le but d'en influencer les vibrations. On remarque qu'il s'agit donc d'une combinaison de deux boucles de rétroaction : on combine une première boucle de rétroaction humaine et une deuxième boucle de rétroaction artificielle, agissant toutes les deux sur un même instrument de musique (Fig. 2.5(b)).

On peut s'intéresser à plusieurs aspects de cette topologie. Nous nous focalisons dans le présent travail sur le tom explicitement sur le développement de la boucle de contrôle artificielle en fonction de l'acoustique de l'instrument sous considération et le but du contrôle recherché. Des questions portant par exemple sur l'expressivité

1. D'une part, on a cherché à augmenter les capacités de la représentation de la musique. Pour le cas de carillons et orgues autonomes dont la musique est représentée sur un cylindre, on peut citer le travail de « tonotechnie » de Joseph Engramelle datant du 18<sup>ème</sup> siècle, où il est déjà question d'articulation et d'ornementations [80, 248].

D'autre part, on peut quand même ajouter une action d'un musicien pour influencer le jeu, même si la majorité de la production du son reste confiée à une machine. Une personne pourrait faire varier la vitesse à laquelle une carte perforée passe dans une orgue de barbarie manuelle et influencer ainsi le tempo, par exemple. Un piano mécanique reproducteur utilise également une carte perforée pour reproduire une pièce par un actionnement mécanique ou pneumatique des touches. Plusieurs variantes de ce principe ont vu le jour dès le 19<sup>ème</sup> siècle (dont le célèbre *Pianola* aux États-Unis et le *Pleyela* développé par Gustave Lyon de la maison Pleyel à Paris [158] pour lequel ils ont entre autres enregistré Igor Stravinsky, avant que ce dernier ne se soit intéressé aux gramophones [32]). Chez ces instruments, il était possible d'influencer la vitesse et la dynamique manuellement pendant l'exécution automatique d'une pièce. Un autre exemple est le piano mécanique reproducteur allemand *Welte Mignon* utilisé entre autres par Maurice Ravel et qui permettait déjà une reproduction plus fidèle des caractéristiques de jeu du musicien comme le tempo, la dynamique et l'articulation grâce à un mécanisme plus complexe [148]. On note qu'il existe des systèmes plus récents comme le *Disklavier* de la marque Yamaha utilisant des bobines, capables de réaliser une reproduction fidèle du jeu expressif du musicien [96].

2. Si le robot joue d'un instrument de musique sans avoir besoin d'un musicien humain, il existe cependant des cas d'interaction entre un musicien humain jouant d'un instrument de musique et un robot autonome jouant d'un autre ou du même instrument de musique, comme p.ex. [18, 189, 255-258].

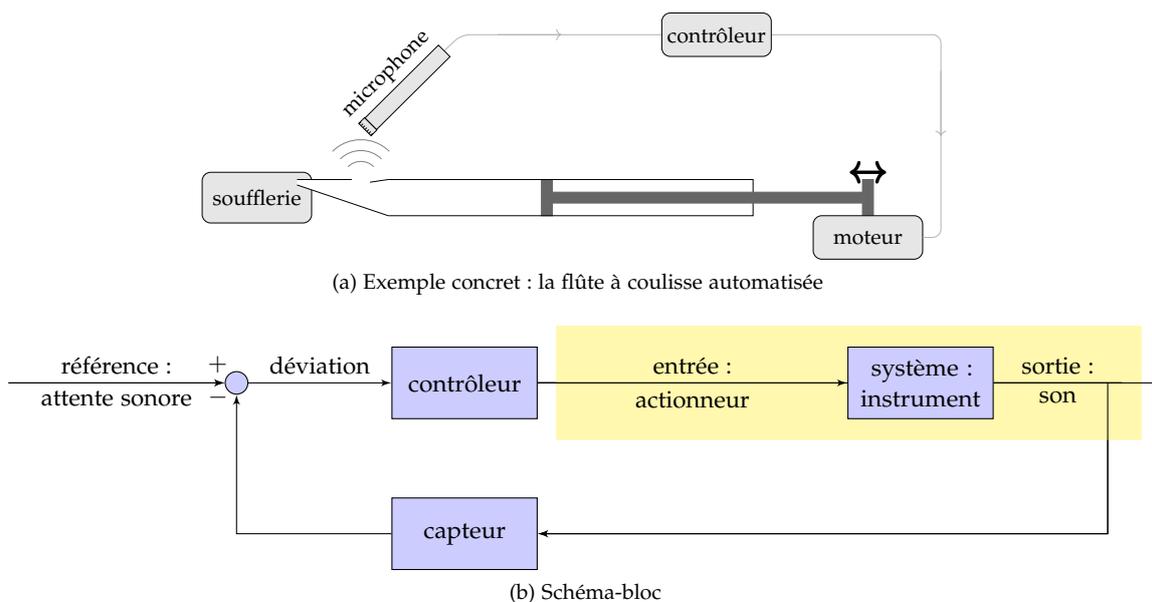


FIGURE 2.4 – Topologie 4 : Musicien non humain contrôlé

du musicien lors d'une interaction homme-machine [150, 151, 246, 256] ou une étude perceptive des sons produits ne sont pas abordées ici.

## 2.2 BUT DU CONTRÔLE ACTIF D'INSTRUMENTS DE MUSIQUE

Nous discutons maintenant plus en détail l'utilité de la topologie hybride introduite dans la section précédente. Le fait d'ajouter une boucle de contrôle (souvent électronique) à un instrument de musique acoustique avait été imaginé à la fin du dernier millénaire [34-36]. Pour insister sur le fait qu'une boucle de contrôle artificielle soit ajoutée, permettant d'influencer le son produit par l'instrument pendant qu'il est joué [27], on parle souvent de « *contrôle actif* d'instruments de musique »<sup>3</sup>. On parle parfois aussi d'« instruments de musique augmentés » ou encore « hybrides ». De plus, dans certains cas, une communication entre l'instrument de musique et d'autres appareils est prévu et on parle d'« instruments de musique intelligents (*smart instruments*) » [245].

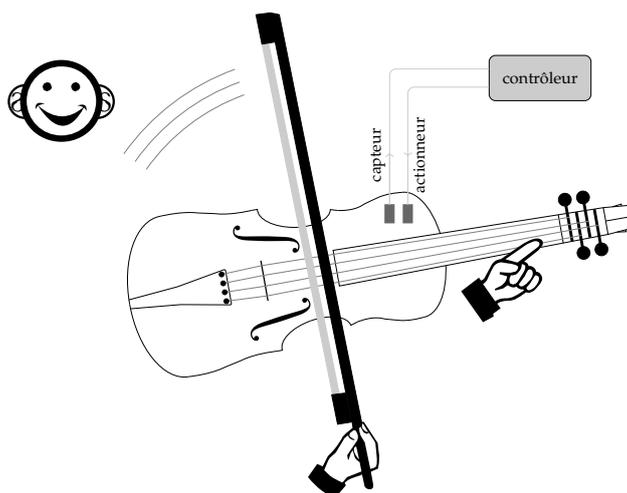
Le contrôle actif d'instruments de musique est un cas spécifique du contrôle actif de vibration [78, 90]. Contrairement à beaucoup de cas d'étude en industrie ou en transport ou encore le casque anti-bruit, où l'on cherche souvent à réduire des vibrations qui sont sources de perte de temps ou provoquent des nuisances sonores et dégradations mécaniques, dans le cas du contrôle actif de vibration d'instruments de musique, on ne cherche souvent pas à atténuer le son, mais plutôt à changer ses caractéristiques.

En regardant les cas d'étude du contrôle actif de vibration d'instrument de musique, on peut discerner trois types d'applications, mentionnés ci-dessous.

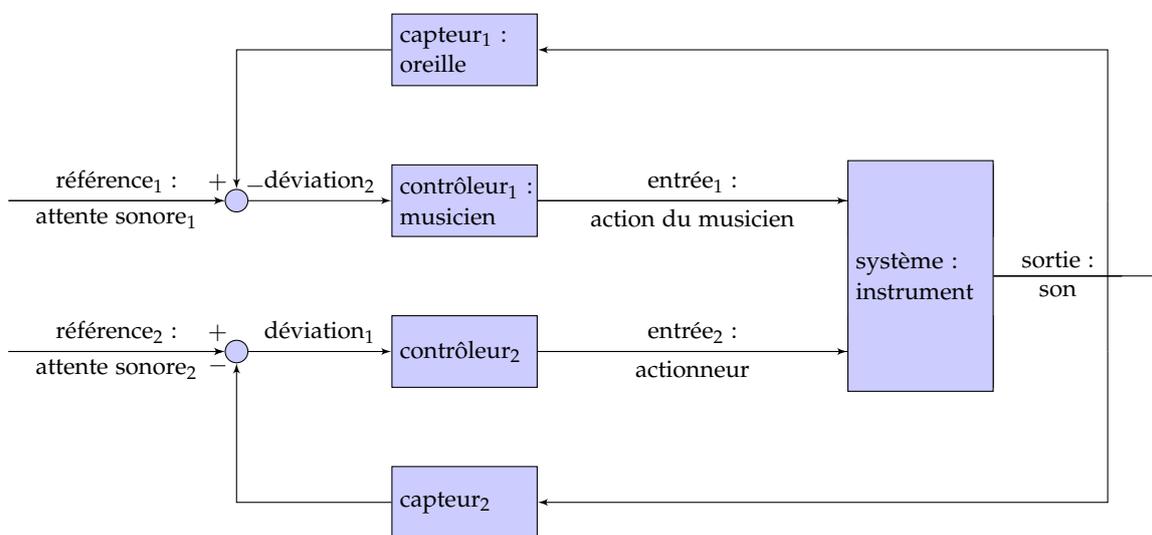
### 2.2.1 Modification du son d'un instrument de musique

La plupart des applications de contrôle actif d'instruments de musique visent à influencer le son produit à des fins artistiques. On peut par exemple changer des fréquences et amortissements respectifs du son produit (« contrôle modal », [92, 201]) : par exemple pour des cordes couplées à une table d'harmonie [22] ou pour un tube de clarinette [164]. Un exemple plus développé serait le fait de faire sonner un violon comme s'il était produit en un autre type de bois (qui coûte éventuellement plus

3. On souligne que cette terminologie n'a pas de lien avec le concept de *contrôle passif* qui sera discuté dans la Sous-section 6.2.3 dans le cadre de la théorie de contrôle. Il s'agit de deux notions séparées, et non pas de deux cas contraires d'une même notion.



(a) Exemple concret : le violon augmenté



(b) Schéma-bloc

FIGURE 2.5 – Topologie 5 : Topologie hybride avec deux boucles de rétroaction agissant sur le même instrument de musique

cher, [104]), voire une transition continue entre deux types de bois pendant le jeu du musicien. D'autres applications ajoutent des effets comme la réverbération ou une modulation d'amplitude (p.ex. [190] dans le cas de la cymbale).

On trouve des applications dans toutes les familles d'instruments : les bois (p.ex. le tube de clarinette [163, 164]), les cuivres (p.ex. des sourdines actives de trompette et trombone [11, 55, 56, 163]), les cordes (p.ex. la corde de guitare [28], le chevalet du violon [44, 45], le violoncelle [95]), les percussions (p.ex. la grosse caisse [149], la conga [249], la lame de xylophone [44, 46], la cymbale [190], la plaque métallique d'un gong d'opéra chinois [121-123]), et autres (p.ex. le piano [160]). Des prototypes expérimentaux de mesure sont parfois utilisés en concert (p.ex. [149]<sup>4</sup> et [206]). Il existe aussi quelques produits commercialisés comme le *Sensus Smart Guitar* (MIND Music Labs) [245] et le *Smart Acoustic Guitar* (HyVibe)<sup>5</sup>.

Le contrôle actif d'instruments de musique permet ainsi d'élargir la palette sonore de l'instrument, et ceci en préservant l'ergonomie de l'instrument et l'expressivité du

4. « Gran Cassa and the interactive instrument Feed-Drum », Centro Ricerche Musicali, Rome, [https://www.youtube.com/watch?v=chxK\\_RhZIk](https://www.youtube.com/watch?v=chxK_RhZIk), <https://www.youtube.com/watch?v=G41JGAYsgsg>.

5. Smart Acoustic Guitar, HyVibe, Paris, <https://www.hyvibeguitar.com/>.

musicien. D'autres formes de musique utilisant de l'électronique nécessitent souvent d'autres ergonomies (codage sur ordinateur, interfaces graphiques, capteurs tactiles, capteurs de mouvement, etc. [94, 199, 238]) et connaissent d'autres formes d'expressivité. On peut aussi mentionner l'existence de la musique mixte (remontant aux années '60, [19]), où des haut-parleurs diffusent des sons en temps différé ou réel autour de l'instrument acoustique. Dans cette configuration, il y a une certaine séparation spatiale entre l'instrument acoustique et les haut-parleurs, tandis que dans le cas du contrôle actif d'un instrument de musique comme décrit ci-dessus, on agit directement sur la vibration de l'instrument de musique, donc il y a une source sonore unique.

### 2.2.2 Suppression d'un phénomène indésirable dans un instrument de musique

Quelques cas ont été décrits, où l'on cherche à supprimer des phénomènes indésirables. Dans [95, 177], on se sert d'un contrôle actif pour atténuer la « note du loup » (« *wolf tone* ») du violoncelle, qui est une résonance par sympathie parasite de la table d'harmonie. Dans [163], on arrive à pallier un problème de mauvaise jouabilité de certaines notes sur le trombone quand on utilise une sourdine droite insérée dans le pavillon (*straight mute*).

### 2.2.3 Étude de la physique d'un instrument de musique

Dans le cas décrit dans [23], on propose le contrôle actif comme méthode expérimentale pour étudier des phénomènes physiques vibratoires en détail. On s'intéresse en particulier à l'étude de l'interaction entre les cordes de la guitare et la table d'harmonie.

## 2.3 ARCHITECTURE DE LA BOUCLE DE CONTRÔLE ET COMPOSANTS UTILISÉS

L'architecture typique d'une boucle de contrôle rencontrée dans le contrôle actif d'un instrument de musique est schématisée dans la Figure 2.6. Avec un *capteur*, l'état actuel de l'instrument de musique est mesuré. Cette mesure s'exprime comme une tension électrique analogique qui entre dans le *contrôleur* en passant par un convertisseur analogique-numérique (CAN). Un microcontrôleur ( $\mu\text{C}$ ) effectue ensuite des calculs selon un algorithme de contrôle préalablement développé et programmé dessus. Le résultat numérique de ces calculs passe par un convertisseur numérique-analogique (CNA) de sorte qu'une instruction sous forme d'une tension électrique analogique est délivrée à l'*actionneur* qui agira sur l'instrument de musique.

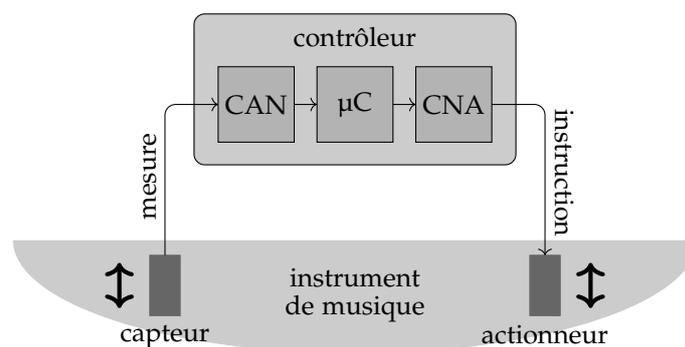


FIGURE 2.6 – Représentation schématique des composants utilisés dans l'implémentation d'une boucle de contrôle. (CAN : convertisseur analogique-numérique;  $\mu\text{C}$  : microcontrôleur; CNA : convertisseur numérique-analogique.)

Dans la présente section, des informations générales concernant les capteurs, contrôleurs et actionneurs sont données. Le choix détaillé des composants à utiliser dépendra

de l'application spécifique considérée, comme p.ex. le cas du tom qui sera implémenté dans le Chapitre 10.

### 2.3.1 Capteurs

Le contrôleur a besoin de capteurs pour être informé de l'état du système à contrôler. Ces capteurs se fondent sur des principes physiques permettant de traduire une quantité comme une pression ou un déplacement en une tension électrique : on les appelle des « transducteurs ». Un nombre de capteurs que l'on peut utiliser en contrôle actif d'instruments de musique sont mentionnés ci-dessus (Fig. 2.7).

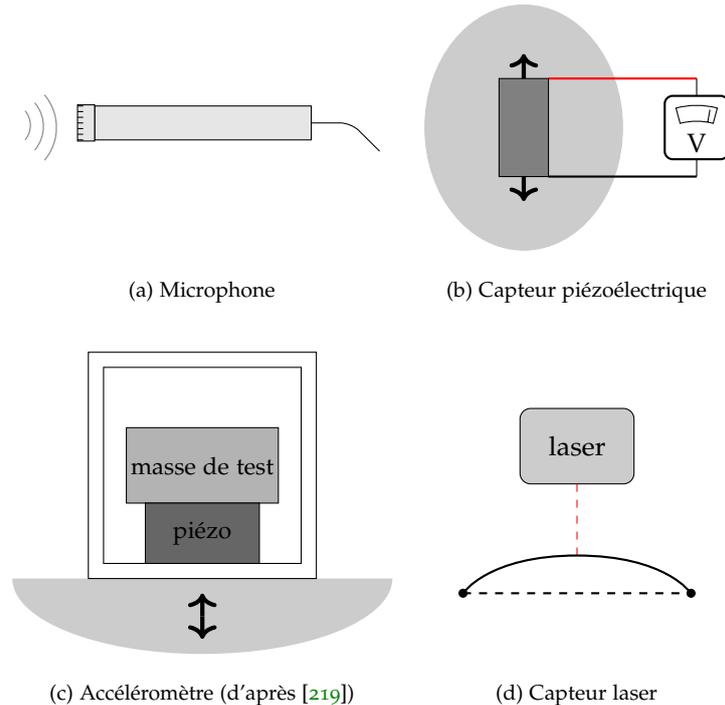


FIGURE 2.7 – Quelques capteurs typiques utilisés en contrôle actif d'instruments de musique

(a) *Microphone* – Un microphone transforme une pression acoustique en une tension électrique. Il existe plusieurs types de microphones [219, §§10.1–10.8], dont le *microphone dynamique* qui fonctionne selon le principe inverse du haut-parleur (détaillé ci-dessous), le *microphone piézoélectrique*, le *microphone à électret*, ou le *microphone à condensateur* où l'onde sonore incidente fait varier la distance entre deux armatures d'un condensateur. Le choix du type de microphone dépend de l'application visée : il faut entre autres considérer sa taille et sa directivité.

(b) *Capteur piézoélectrique* – Un capteur piézoélectrique est doté d'un matériau cristallin présentant le phénomène piézoélectrique direct : lorsqu'il est déformé (suite aux vibrations de l'objet auquel il est attaché), il génère une tension électrique proportionnelle. On retrouve ce phénomène par exemple chez le quartz, et chez des piézocéramiques (PZT pour *titano-zirconates de plomb*, d'après LZT pour *lead zirconate titanate*) ou encore des polymères (PVDF pour *polyfluorure de vinylidène*). Pour plus de détails, voir [44, §1.3.2 et les références s'y trouvant].

(c) *Accéléromètre* – L'accéléromètre [219, §10.14] est un petit objet à coller sur la surface d'une structure vibrante. À l'intérieur se trouve une masse de test sur un support piézoélectrique. L'accéléromètre vibre avec la structure vibrante, et grâce à l'élément piézoélectrique, on peut mesurer la force (et donc l'accélération) subie. Par intégration temporelle, on obtient la vitesse puis le déplacement en le point de la structure vibrante considéré. Il faut être conscient que le fait d'ajouter une masse sur une structure puisse en influencer le mode de vibration.

(d) *Capteur laser* – Un laser (originellement de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) génère un faisceau de lumière monochromatique et directionnelle. Il est reflété sur la surface en mouvement et permet d’en déduire la hauteur dans le temps en un point. L’avantage de ce système est qu’il n’y a pas de contact entre le capteur et l’instrument de musique.

Il existe aussi des techniques plus avancées de vibrométrie laser basées sur l’effet Doppler. On peut ainsi mesurer la vibration d’un objet sur un maillage spatial de points, permettant de visualiser les modes de vibration (voir [75], appliqué p.ex. à des mesures de vibration du violon dans [101]). Cependant, il s’agit ici surtout d’une méthode de mesure expérimentale, plutôt qu’un capteur à utiliser dans une application pratique de contrôle actif d’instrument de musique.

### 2.3.2 *Contrôleur*

#### 2.3.2.1 *Algorithme de contrôle*

Dans une grande partie des applications décrites, on a implémenté un régulateur linéaire tel que le régulateur Proportionnel (p.ex. [149]), ou le régulateur PID (Proportionnel-Intégral-Dérivé) (p.ex. [27, 35]), éventuellement avec l’ajout d’un terme anticipateur (*feedforward*) (p.ex. [213]). Si nécessaire, il est également possible d’utiliser un contrôleur non linéaire (p.ex. [25]).

Certaines applications intègrent également un observateur pour reconstruire des grandeurs physiques non mesurées, comme un observateur linéaire de Luenberger (p.ex. [23, 123]). Parfois, il est nécessaire d’utiliser un observateur non linéaire (p.ex. [282]).

Dans le cas du tom présenté dans les Chapitres 9-10, un contrôle composé d’un observateur en temps fini (non linéaire) et un contrôleur en temps fini (non linéaire) sera développé.

#### 2.3.2.2 *Microcontrôleur*

L’algorithme de contrôle est implémenté sur un microcontrôleur, qui peut être vu comme un ordinateur embarqué avec des entrées et sorties, de la mémoire et un processeur, permettant des calculs en temps réel. Pour atteindre ce but, une petite latence de calcul est nécessaire [159], mais aussi une cadence régulière entre deux temps d’échantillonnage.

En outre de l’importance d’une fréquence d’échantillonnage élevée pour la stabilité numérique des algorithmes de contrôle discrétisés, le retard numérique a une influence sur la perception du son. Des tests sur le retour de musique dans les oreilles de l’auditeur ont notamment montré une détection de délais de 42ms, pouvant descendre à 1.4ms, par l’homme [145]. Ces tests suggèrent le besoin d’avoir une période d’échantillonnage inférieure à la milliseconde [161]. Quelques exemples de microcontrôleurs de petite latence utilisés dans des applications audio sont donnés dans [159, 161, 170].

**LE COALA** Dans le cas du tom implémenté Chapitre 10, nous utiliserons le Coala<sup>6</sup> (Fig. 2.8), un microcontrôleur conçu à l’Ircam [191] pour le contrôle modal d’instruments de musique avec une très petite latence, de l’ordre de 50-100  $\mu$ s selon la complexité du calcul, mais pouvant descendre à environ 20  $\mu$ s dans certains cas décrits dans [21].

Ce contrôleur a été utilisé en recherche pour contrôler une table d’harmonie couplée à des cordes [21, 22], un tube de clarinette [164], le gong d’opéra chinois xiaoluo [121-123] et une plaque métallique rectangulaire [65]. Il a également été utilisé dans des compositions comme<sup>7</sup> *Waiting – 4 rêveries* de Nicolas Mondon (2015) pour violon

6. Le nom est inspiré du fait que le contrôleur s’attache à un instrument de musique comme un coala à un arbre.

7. Base de documentation sur la musique contemporaine, Ircam, Paris, <http://brahms.ircam.fr/>.

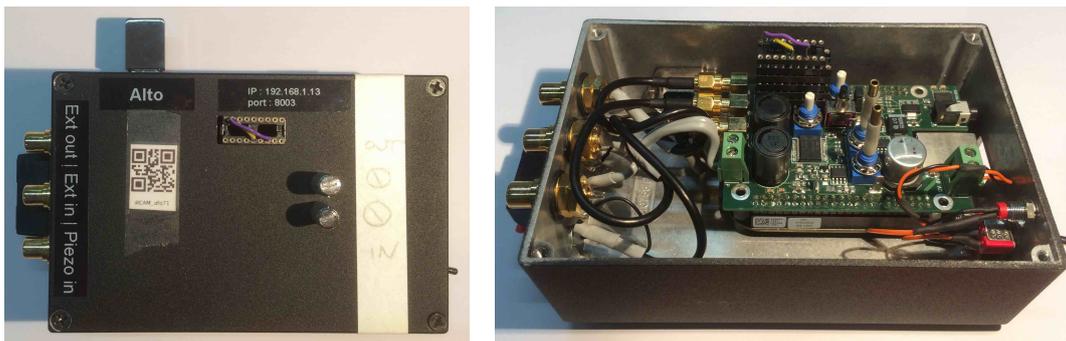


FIGURE 2.8 – Le Coala, un contrôleur temps-réel

augmenté<sup>8</sup>, *Notturmo sulle corde vuote* de Francesco Filidei (2016) pour quatuor à cordes augmenté avec 4 Coalas<sup>9</sup>, *Hauteurs* de Tomás Bordalejo (2016) pour guitare augmentée avec un Coala bleu (version 2)<sup>10</sup>, *Inside-out* de Carmine-Emanuele Cella (2017) pour piano et 3 percussionnistes où 3 Coalas agissent sur une grosse caisse, un gong et une plaque tonnerre<sup>11</sup>. Actuellement, un successeur de ce microcontrôleur est commercialisé par HyVibe<sup>12</sup>.

Plus de détails techniques concernant l'utilisation du Coala seront donnés dans le Chapitre 10.

### 2.3.3 Actionneurs

Les actionneurs servent à transmettre des instructions du contrôleur au système considéré. À cet effet, ils traduisent une tension électrique en une autre quantité physique comme une pression ou une force. Comme les capteurs, il s'agit donc de transducteurs, mais cette fois-ci fonctionnant selon des principes inverses. Deux actionneurs typiques que l'on peut utiliser en contrôle actif d'instruments de musique sont mentionnés ci-dessous (Fig. 2.9).

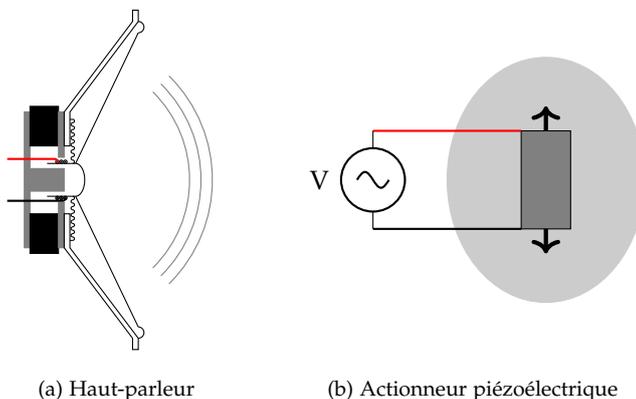


FIGURE 2.9 – Quelques actionneurs typiques utilisés en contrôle actif d'instruments de musique

(a) *Haut-parleur* – Le type de haut-parleur le plus commun est le *haut-parleur dynamique*. Il comporte une bobine plongée dans un champ magnétique d'un aimant. Lorsque la bobine est parcourue par un courant électrique, une force de Laplace est générée qui cause un mouvement de la membrane attachée à une suspension

8. Vidéo : Ircam, Paris, <https://medias.ircam.fr/xf34410>.

9. Vidéo : Images d'une œuvre n° 20, Philippe Langlois & Véronique Caye, Ircam, Paris, <https://medias.ircam.fr/x589030>.

10. Vidéo : Ircam, Paris, <https://medias.ircam.fr/xe959cf>.

11. Vidéo : Ircam, Paris, <https://medias.ircam.fr/xc6dcde>.

12. HyVibe, Paris, <https://www.hyvibe.audio/>.

mobile. Il s'agit donc d'un transducteur électro-magnéto-mécano-acoustique dont le fonctionnement sera détaillé dans les Chapitres 9-10.

Un haut-parleur peut être utilisé pour générer du son qui interagira avec du son généré par l'instrument de musique (cf. casque anti-bruit). Il est aussi possible de démonter le HP de sa membrane et de coller l'équipage mobile restant sur une structure (p.ex., une table d'harmonie d'un violon) qui sera par conséquent mise en vibration, faisant office de membrane.

(b) *Actionneur piézoélectrique* – Il s'agit ici du phénomène piézoélectrique indirect, l'inverse de ce qui se passe pour le capteur piézoélectrique : ici, le fait d'appliquer une tension variable engendre une déformation du cristal et par la suite de la structure de l'instrument de musique à laquelle l'actionneur est collé. Un avantage de ce type d'actionneur est sa possibilité d'appliquer une action répartie sur la structure vibrante [44, §1.3.2]. Des informations sur la localisation optimale de cet actionneur peuvent être trouvées dans [70].

À travers l'exemple de ces deux actionneurs, on remarque que le contrôleur peut agir de deux façons sur un instrument de musique [44]. Dans le cas du *contrôle acoustique*, le contrôle agit sur un fluide. Un exemple est l'utilisation d'un haut-parleur afin de créer de l'interférence destructive dans l'air pour annuler du son. Dans le cas de *contrôle structurel*, le contrôle agit directement sur un solide, par exemple en utilisant des actionneurs piézoélectriques collés sur un instrument, ou encore le haut-parleur sans membrane.



Deuxième partie

OUTILS



Dans ce chapitre, des notions élémentaires de la théorie du contrôle sont rappelées. Ces notions sont préliminaires pour la compréhension du formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (Chapitre 4) et des lois de commande en temps fini (Chapitre 5), et seront utilisées dans la suite de la thèse.

## TABLE DES MATIÈRES

3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Modélisation . . . . .	22
3.2.1	Classes de systèmes dynamiques . . . . .	22
3.2.2	Stabilité d'un point d'équilibre . . . . .	25
3.3	Simulation . . . . .	27
3.4	Contrôle . . . . .	27
3.4.1	Transformation de similarité . . . . .	27
3.4.2	Commandabilité . . . . .	27
3.4.3	Observabilité . . . . .	29
3.4.4	Remarques . . . . .	30

## 3.1 INTRODUCTION

La *théorie du contrôle* étudie comment on peut développer un contrôleur qui influence l'évolution d'un système dynamique donné afin d'obtenir un comportement cible. Un exemple simplificateur est montré dans la Figure 3.1. On y a affaire à un avion qui est un *système dynamique* : son *état* (ici : position) peut varier dans le temps. Avant tout, on peut développer un *modèle* mathématique qui prédit le comportement de l'avion suite à une *entrée* de commande donnée par le pilote humain. Dans un deuxième temps, on peut développer un pilote automatique qui agit comme un *contrôleur* sur le système : il a des *capteurs* pour se renseigner de l'état actuel du système, il effectue des calculs selon une *loi de commande* préalablement conçue dans le but de rapprocher le système contrôlé d'un comportement *cible*, et à cette fin, il donne des instructions à des *actionneurs* agissant sur le système contrôlé. Dans l'exemple, des capteurs dans l'avion détectent la position de l'avion dans le ciel. Admettons que l'on ait demandé au pilote automatique de piloter l'avion tout droit. Dès qu'il détecte que l'avion dévie de sa trajectoire de référence (p.ex. à cause d'un vent variable), il donne automatiquement une instruction à des actionneurs hydrauliques dans les ailes qui adapteront la position des volets afin de rectifier la position de l'avion.

On retrouve de telles boucles de commande partout : d'une régulation basique de température dans l'industrie alimentaire ou un bras robotique de soudage de carrosserie de voiture, à des systèmes de contrôle plus haut-niveau comme chez des robots et transports autonomes.

Certaines notions élémentaires de la théorie du contrôle sont mentionnées dans le présent chapitre.

- MODÉLISATION – Un modèle est une représentation mathématique du comportement du système sous considération. En fonction de la complexité du système, on peut avoir affaire à un modèle linéaire, non linéaire, contenant des délais, de dimension possiblement très large, à constantes localisées ou distribuées, etc.

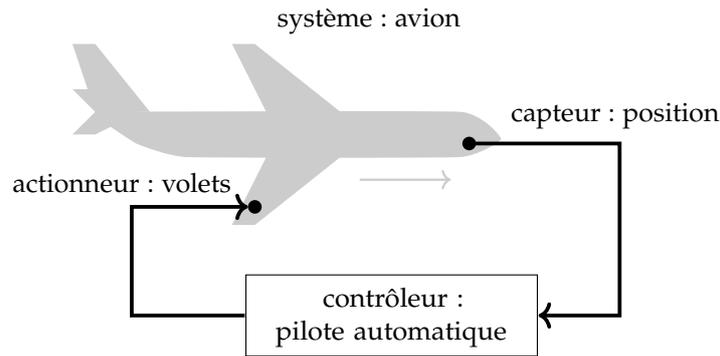


FIGURE 3.1 – Un avion contrôlé par le pilote automatique

Ayant construit un modèle, on peut prédire le comportement du système suite à l'application d'une entrée.

- SIMULATION – Souvent, le calcul analytique de l'évolution du modèle n'est pas possible. On a alors besoin de méthodes de simulation pour pouvoir la calculer numériquement.
- CONTRÔLE – Étant donné la complexité du modèle (représentant le système considéré) et d'une cible définie par l'application (stabilisation vers un point d'équilibre constant, suivi d'une trajectoire, ...), il existe plusieurs méthodes de conception d'une loi de commande. On regarde avant tout la notion de la *stabilité* du système contrôlé, mais aussi des potentielles propriétés additionnelles comme la *passivité* et des différentes formes de *robustesse*. De plus, il existe des *observateurs* qui permettent de reconstruire des informations que l'on ne peut mesurer directement.
- IDENTIFICATION – Si la loi de commande utilise explicitement un modèle du système contrôlé, on a besoin de méthodes d'identification qui permettent d'estimer les valeurs des paramètres physiques y figurant.

À défaut d'une citation spécifique, les principes élémentaires mentionnés ci-dessous sont empruntés d'ouvrages de référence tels que [124, 128, 178, 277]. Le lecteur est invité à s'y rendre pour plus de détails formels et plus d'exemples.

## 3.2 MODÉLISATION

### 3.2.1 Classes de systèmes dynamiques

Il existe plusieurs classes de systèmes dynamiques. Dans le présent chapitre, on considère le cas des systèmes à constantes localisées, c'est-à-dire, des systèmes représentés par des équations aux dérivées ordinaires (EDO). Un système peut être linéaire ou non linéaire. On modélise des systèmes à temps continu, mais il existe aussi des systèmes à temps discret (intrinsèquement, ou après discrétisation temporelle d'un modèle à temps continu).

En outre de l'entrée et de la sortie du système, on peut définir son état (Fig. 3.2).

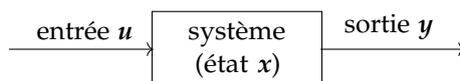


FIGURE 3.2 – Système entrée-sortie avec état interne

**Définition 3.1** (État d'un système dynamique). *L'état  $x(T)$  d'un système dynamique à un instant  $T$  est l'information dont il faut disposer, en outre des entrées  $u(t \geq T)$ , afin de pouvoir déterminer de manière unique sa future trajectoire.*

L'état représente en quelque sorte des effets de mémoire du système. Dans le cas d'un système mécanique, les positions et vitesses de ses composantes constituent l'état : il faut les connaître afin de déterminer la réaction du système à une force d'entrée.

Il est possible de formuler le modèle d'un système dans l'espace des états. On parlera alors d'une représentation d'état, que nous explicitons maintenant.

### 3.2.1.1 Système linéaire

#### TEMPS CONTINU

**Définition 3.2** (Représentation d'état d'un système linéaire à temps continu). *Un système linéaire à temps continu peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

avec

- l'état  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  (l'espace d'état)
- l'entrée  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  (l'espace des commandes)
- la sortie  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$  (l'espace des sorties)
- la matrice d'état  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- la matrice de commande  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$
- la matrice d'observation  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$
- la matrice d'action directe  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ .

Ici, les matrices de système ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ ) sont constantes mais plus généralement, elles pourraient dépendre du temps ou d'un autre paramètre (système linéaire non invariant dans le temps ou LPV (*linear parameter-varying*)).

**EXEMPLE : LE SYSTÈME MASSE-AMORTISSEUR-RESSORT LINÉAIRE** On considère le système mécanique représenté Figure 3.3. Si l'on dénote la position verticale de la masse par  $x$ , on peut écrire le bilan des forces

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f_{\text{ext}}(t)$$

avec la masse  $m$ , l'amortissement  $c$ , la raideur  $k$ , et la force extérieure  $f_{\text{ext}}(t)$  appliquée sur la masse.

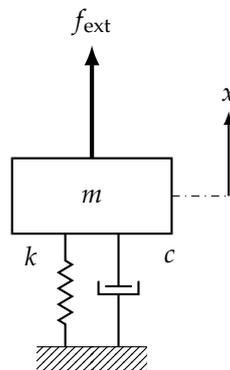


FIGURE 3.3 – Système masse-amortisseur-ressort linéaire

Choissant position et vitesse de la masse comme état :

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix},$$

on obtient la représentation d'état de la Définition 3.2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t),$$

ou l'entrée  $u(t) \triangleq f_{\text{ext}}(t)$ .

Si l'on a par exemple un capteur de position de la masse, la deuxième équation devient

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

**TEMPS DISCRET** Chez un système à temps discret, on n'a plus affaire à une dynamique décrite par une EDO comme dans la Définition 3.2, mais à une dynamique décrite par une équation de récurrence entre le temps  $k$  et le temps  $k + 1$ , espacés de la période (ici constante)  $T$  [s].

**Définition 3.3** (Représentation d'état d'un système linéaire à temps discret). *Un système linéaire à temps discret peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{cases}$$

avec

- l'état  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  (l'espace d'état)
- l'entrée  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  (l'espace des commandes)
- la sortie  $\mathbf{y}_k \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$  (l'espace des sorties)
- la matrice d'état  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- la matrice de commande  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$
- la matrice d'observation  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$
- la matrice d'action directe  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$ .

Ici, les matrices de système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  sont à nouveau supposées constantes.

### 3.2.1.2 Système non linéaire

**TEMPS CONTINU**

**Définition 3.4** (Système non linéaire à temps continu). *Un système non linéaire à temps continu peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

avec

- l'état  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  (l'espace d'état)
- l'entrée  $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  (l'espace des commandes)
- la sortie  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$  (l'espace des sorties)
- $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$  et  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$  deux fonctions non linéaires (mais ne dépendant ici pas du temps ou d'un autre paramètre externe).

## TEMPS DISCRET

**Définition 3.5** (Système non linéaire à temps discret). *Un système non linéaire à temps discret peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \end{cases}$$

avec

- l'état  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  (l'espace d'état)
- l'entrée  $\mathbf{u}_k \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^p$  (l'espace des commandes)
- la sortie  $\mathbf{y}_k \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^q$  (l'espace des sorties)
- $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$  et  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$  deux fonctions non linéaires (mais ne dépendant ici pas du temps ou d'un autre paramètre externe).

## 3.2.2 Stabilité d'un point d'équilibre

## 3.2.2.1 Définition

Étant donné un modèle de système, on peut étudier sa stabilité à un point d'équilibre appelé souvent 0 (après un changement de coordonnées, si besoin).

On note le système dynamique

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{3.1}$$

pouvant représenter soit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

dans le cas du système non contrôlé, soit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

dans le cas du système contrôlé par une loi de commande  $\mathbf{u}$  (à concevoir). Le flot  $\Phi_t(\mathbf{x}(0))$  représente la trajectoire que suit le système dynamique (3.1) à partir d'un état initial  $\mathbf{x}(0)$ . On peut définir les propriétés de stabilité suivantes.

**Définition 3.6** (Notions de stabilité d'un système non linéaire [276]). *Le point d'équilibre  $\mathbf{0}$  d'un système dynamique (3.1) sur un ouvert  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est*

- stable si pour tout voisinage  $U$  de  $\mathbf{0}$  il existe un voisinage  $U_0$  de  $\mathbf{0}$  t.q. pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $U_0$ ,  $\Phi_t(\mathbf{x})$  est défini et appartient à  $U$  pour tout  $t \geq 0$  (l'état reste proche du point d'équilibre, Fig. 3.4(a));
- asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe un voisinage  $U$  de  $\mathbf{0}$  ayant la propriété suivante : pour tout  $\mathbf{x}$  dans  $U$ ,  $\Phi_t(\mathbf{x})$  tend vers  $\mathbf{0}$ , lorsque  $t \rightarrow +\infty$  (l'état converge vers le point d'équilibre qui est un point attractif, Fig. 3.4(b));
- instable s'il n'est pas stable.

Ces propriétés de stabilité peuvent être valables *localement* (dans une zone autour du point d'équilibre) ou *globalement* (dans tout l'espace d'état  $\mathcal{X}$ ).

## 3.2.2.2 Lemmes de stabilité

On mentionne quelques lemmes pouvant être utilisés pour prouver la stabilité d'un point d'équilibre pour un système donné.

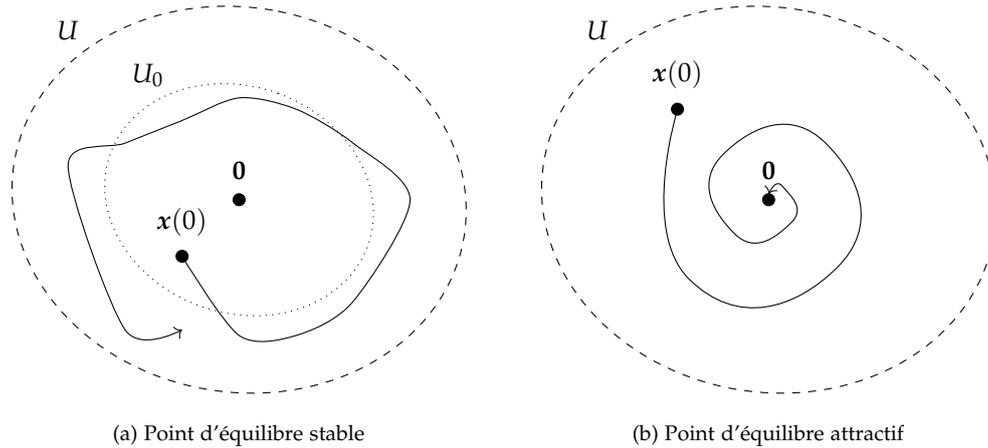


FIGURE 3.4 – Point d'équilibre stable et point d'équilibre attractif (dessins d'après [276])

**SYSTÈME LINÉAIRE** On considère le cas d'un système linéaire

$$\dot{x} = F(x) = Ax. \tag{3.2}$$

**Lemme 3.1** (Stabilité asymptotique d'un système linéaire [276]). *Soit A dans (3.2) une matrice réelle carrée de taille n avec des valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ .*

*Si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement négative,*

$$\Re(\lambda_j) < 0 \quad \forall j,$$

*le système dynamique (3.2) est asymptotiquement stable.*

**SYSTÈME NON LINÉAIRE** On prend

$$\dot{x} = F(x) = f(x, 0) \tag{3.3}$$

et suppose que le champ de vecteurs  $f(\cdot, \cdot) \in C^1$ .

**Définition 3.7** (Fonction de Lyapunov [276]). *On définit une fonction de Lyapunov comme une fonction V de  $M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^1$ , si*

- *V est définie positive ( $V(x) > 0$  sauf en  $x = 0$  où  $V(0) = 0$ )*
- *la dérivée directionnelle V dans la direction du champ f est semi-définie positive :*

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0.$$

**Lemme 3.2** (Stabilité asymptotique d'un système non linéaire [276]). *S'il existe une fonction de Lyapunov V pour le champ de vecteurs f au voisinage du point d'équilibre 0, alors 0 est stable.*

*Si en plus,  $\dot{V} < 0$ , il s'agit d'une stabilité asymptotique.*

Pour un système donné, il n'est pas toujours facile de trouver une fonction de Lyapunov, mais dans le cas de systèmes physiques, on peut souvent s'inspirer de la fonction d'énergie du système (cf. aussi le Hamiltonien dans le Chapitre 4.)

**Lemme 3.3** (Stabilité asymptotique d'un système non linéaire : Théorème de LaSalle [276]). *Soient F le champ de vecteurs de (3.3) sur un ouvert  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  et V une fonction différentiable  $C^1$  à dérivées continues d'un ouvert U de M dans  $[0, +\infty[$  telle que*

- *V est propre ( $\{x \in U \mid V(x) \leq R\}$  est compact pour tout  $R > 0$ , ce qui est le cas lorsque V est définie sur  $\mathbb{R}^n$  et que  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\|x\| \rightarrow +\infty$ )*

- la dérivée directionnelle de  $V$  dans la direction du champ  $F$  est négative :

$$\dot{V}(x) \leq 0.$$

Si  $I$  est le plus grand sous-ensemble de  $\{x, \dot{V}(x) = 0\}$  qui soit invariant par le flot de (3.3), alors toute trajectoire du système (3.3) est bornée et attirée par  $I$  au sens où, pour tout  $x$  dans  $M$ , on a

$$\Phi_t(x) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} I$$

(c'est-à-dire

$$\text{dist}(\varphi_t(x), I) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0).$$

Ce lemme peut être utilisé pour obtenir la stabilité asymptotique dans certains cas où l'on a que  $\dot{V} \leq 0$ , ce qui ne permet pas d'utiliser le Lemme 3.2.

Dans le cas d'un système linéaire, une fonction de Lyapunov quadratique peut être définie, qui est de la forme [276]

$$V(x) = x^T P x,$$

avec la matrice  $P = P^T \succ 0$  étant la solution de l'équation de Lyapunov

$$A^T P + P A + Q = 0,$$

avec  $Q = Q^T \succ 0$  une matrice au choix.

### 3.3 SIMULATION

Dans certains cas simples, une solution analytique de la trajectoire  $\Phi_t(x_0)$  peut être obtenue, comme, pour le système linéaire,

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau.$$

En général, pour une loi de commande  $u(x(t))$  non linéaire ou un système non linéaire, la trajectoire du système doit être calculée numériquement.

### 3.4 CONTRÔLE

On peut utiliser les lemmes mentionnés ci-dessus pour concevoir des contrôleurs stabilisant un point d'équilibre d'un système (non) linéaire donné asymptotiquement. Dans ce cas, on considère le champ de vecteurs

$$\dot{x} = F(x) = f(x, u(x(t))),$$

où  $u(x(t))$  est la loi de commande obtenue.

Dans la présente section, on spécifie seulement les concepts de commandabilité et observabilité d'un système linéaire, après avoir mentionné la transformation de similarité dont on a besoin.

#### 3.4.1 Transformation de similarité

Étant donné un système linéaire

$$\Sigma_1 \triangleq \begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ y = C_1 x, \end{cases}$$

on peut obtenir une équivalence avec un deuxième système linéaire d'état  $\xi = P\mathbf{x}$ , la matrice  $P$  correspondant à un changement de coordonnées inversible, et de sortie  $\zeta = \mathbf{y}$ ,

$$\Sigma_2 \triangleq \begin{cases} \dot{\xi} = A_2\xi + B_2\mathbf{u} \\ \zeta = C_2\xi, \end{cases}$$

si les matrices des systèmes satisfont

$$\begin{cases} A_2 = PA_1P^{-1} \\ B_2 = PB_1 \\ C_2 = C_1P^{-1}. \end{cases}$$

On parle d'une transformation de similarité entre les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

### 3.4.2 Commandabilité

#### 3.4.2.1 Définition

**Définition 3.8** (Commandabilité d'un système linéaire [276]). *Un système linéaire est commandable si pour tout couple de vecteurs  $(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_a)$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un temps  $T$  fini et une commande  $\mathbf{u}$  définie sur  $[0, T]$  tels que, lorsque l'on applique la commande  $\mathbf{u}$ , la solution  $\mathbf{x}(t)$  du système partant de  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_d$  vérifie  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_a$ .*

#### 3.4.2.2 Critère de Kalman de commandabilité

**Lemme 3.4** (Critère de Kalman de commandabilité). *Si la matrice de commandabilité*

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

*est de rang  $n$  alors le système (« le pair  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ») est commandable.*

#### 3.4.2.3 Forme canonique commandable

Si un pair  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  est commandable, il existe une transformation de similarité avec la matrice de transformation  $P$  t.q.

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}, \quad \mathbf{B}_c = \mathbf{P}\mathbf{B},$$

avec  $\mathbf{A}_c$  et  $\mathbf{B}_c$  de la forme

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdot & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

où les coefficients  $a_i$  correspondent au polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$ ,

$$\chi_A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n.$$

On appelle cette forme la forme canonique commandable, ou la forme compagnon commandable.

Plus spécifiquement [276],

$$P \triangleq \begin{bmatrix} L \\ LA \\ \vdots \\ LA^{n-1} \end{bmatrix}$$

avec

$$L \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1}.$$

#### 3.4.2.4 Régulateur par placement de pôles

Pour un système linéaire commandable, on peut définir un bouclage d'état linéaire

$$u(t) = -Kx(t), \quad (3.4)$$

où la matrice  $K$  peut être définie de sorte à placer les modes propres de la matrice  $A - BK$  de la boucle fermée,

$$\dot{x} = (A - BK)x,$$

arbitrairement, influençant les fréquences et amortissements de la dynamique du système [3].

#### 3.4.3 Observabilité

Selon l'application envisagée, il peut être cher ou difficile d'utiliser des capteurs pour chaque variable d'état qui est utilisée dans la loi de commande conçue. Pour cette raison, on peut parfois remplacer un certain capteur par un observateur d'état qui reconstitue la partie de l'état non mesurée à partir de la mesure, si l'on a la propriété d'observabilité.

##### 3.4.3.1 Définition

**Définition 3.9** (Observabilité d'un système linéaire [276]). *Un système linéaire est observable si pour tout vecteur  $x_d$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un temps  $T$  fini et une commande  $u$  définie sur  $[0, T]$  tels que, si  $x(0) = x_d$  et que l'on applique  $u$ , alors la connaissance de la trajectoire de  $y$  sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  permet de déterminer  $x_d$*

##### 3.4.3.2 Critère de Kalman d'observabilité

**Lemme 3.5** (Critère de Kalman d'observabilité). *Si la matrice d'observabilité*

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

*est de rang  $n$  alors le système (« le pair  $(A, C)$  ») est observable.*

##### 3.4.3.3 Forme canonique observable

Si un pair  $(A, C)$  est observable, il existe une transformation de similarité avec la matrice de transformation  $P$  t.q.

$$A_0 = P^{-1}AP, \quad C_0 = CP,$$

avec  $A_0$  et  $C_0$  de la forme

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les coefficients  $a_i$  correspondent au polynôme caractéristique de  $A$ ,

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n.$$

On appelle cette forme la forme canonique observable, ou la forme compagnon observable.

Plus spécifiquement [276],

$$P \triangleq \begin{bmatrix} H & AH & \dots & A^{n-1}H \end{bmatrix}$$

avec

$$H = \mathcal{O}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

#### 3.4.3.4 Observateur par placement de pôles

Si le système est observable, il est possible de construire un observateur asymptotique linéaire appelé observateur de Luenberger, qui sera mentionné dans la Sous-section 9.4.2 (Éq. (9.33)). Ici, comme pour le régulateur (3.4), on peut aussi utiliser un placement de pôles pour imposer la dynamique de l'observateur.

Il se trouve que les notions de commandabilité et d'observabilité sont duales. De plus, pour un système linéaire et une loi de commande linéaire, on peut concevoir le contrôleur et l'observateur séparément puisque l'on a une propriété de superposition. Dans le cas général d'un système non linéaire, ceci n'est plus le cas.

#### 3.4.4 Remarques

- À partir de la stabilité asymptotique (Déf. 3.6) d'un point d'équilibre (stationnaire)  $\mathbf{0}$ , on peut définir des lois de commande stabilisant un système donné vers un point d'équilibre. Il est aussi possible de définir la stabilité autour d'une trajectoire de référence, et des lois de commande sont conçues dans le but de stabiliser un système donné vers une telle trajectoire de référence. On parle dans ce cas d'un *suivi de trajectoire* (*tracking*).
- Dans le Chapitre 5, une notion de stabilité plus forte que la stabilité asymptotique sera considérée : la *stabilité en temps fini*.
- Si des lois de commande peuvent être développées à partir de modèles pour un système physique donné, elles ont pour but d'être appliquées au vrai système physique. En outre de la stabilité du modèle contrôlé, on peut étudier des propriétés de *robustesse* du contrôleur pour améliorer son comportement en pratique.

Il existe plusieurs types de robustesse, dont la robustesse en présence de perturbations extérieures dans le système et de bruits de mesure dans les capteurs utilisés,

la présence potentielle de régimes ou comportements du système pas (suffisamment) pris en compte par le modèle, une mauvaise identification des paramètres physiques du système dont on a besoin pour calculer la loi de commande, etc.



Dans ce chapitre, le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP) est introduit. C'est une manière de modéliser un système physique basé sur ses échanges énergétiques (Section 4.1). Dans ce formalisme, à partir du modèle, on peut définir des méthodes de simulation stables (Section 4.2) et des méthodes de contrôle robustes (Section 4.3).

## TABLE DES MATIÈRES

4.1	Modèle . . . . .	31
4.1.1	Modèle de dimension finie . . . . .	31
4.1.2	Modèle de dimension infinie . . . . .	34
4.2	Méthode de simulation . . . . .	36
4.3	Méthodes de contrôle . . . . .	36
4.3.1	Remodelage d'énergie . . . . .	37
4.3.2	IDA-PBC . . . . .	37

## 4.1 MODÈLE

Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP) a été développé à partir des années '90 [155] et connaît à ce jour une bibliographie riche. Dans ce chapitre, seulement les éléments utilisés dans la thèse sont mentionnés. Pour plus d'informations concernant entre autres les fondamentaux mathématiques rigoureux et les applications diverses, se référer à [204, 284] et les références y figurant.

Dans ce formalisme, la modélisation se fonde sur une vision énergétique du système physique. Dans un système physique, trois types de transfert d'énergie peuvent avoir lieu : des composants internes du système peuvent stocker de l'énergie, dissiper de l'énergie, et participer à des échanges d'énergie avec des composants extérieurs au système considéré, à travers des ports. Le modèle prend ce bilan d'énergie explicitement en compte dans sa structure. Aussi, il est possible de coupler plusieurs systèmes physiques, pouvant appartenir à des domaines physiques différents (systèmes multiphysiques : mécanique, électro(n)ique, thermique, chimique, etc.)<sup>1</sup>.

Une formulation classique d'un modèle SHP est introduite ci-dessous, pour le cas d'un état de dimension finie puis de dimension infinie. On remarquera dans les définitions ci-dessus que l'on obtient une sorte de représentation d'état comme dans la Section 3.2, mais qui est plus structurée (structure physique). La formulation permet également d'utiliser une écriture similaire pour les cas d'un système (non) linéaire et de dimension (in)finie.

## 4.1.1 Modèle de dimension finie

**Définition 4.1** (SHP de dimension finie). *Une formulation classique d'un Système Hamiltonien à Ports (SHP) en dimension finie  $n \geq 1$ , d'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , est*

$$\begin{cases} \dot{x} = (J - R)\nabla H(x) + Gu \\ y = G^T \nabla H(x), \end{cases} \quad (4.1)$$

<sup>1</sup>. Cf. aussi les *bond graphs* [93], un formalisme plus ancien se basant également sur les transferts d'énergie d'un système physique

pour laquelle :

- (i)  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$  est l'entrée de dimension  $q \geq 1$ ,
- (ii)  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$  est la sortie associée à l'entrée (différente de la sortie mesurée  $\mathbf{y}_m$ ),
- (iii)  $H(\mathbf{x}) \succ 0$  est la fonction hamiltonienne qui fournit l'énergie totale  $E$  stockée dans le système en fonction de son état,
- (iv)  $\mathbf{J} = -\mathbf{J}^\top$  est une matrice antisymétrique ( $n \times n$ ) exprimant les échanges entre les composants stockants,
- (v)  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^\top \succeq 0$  est une matrice symétrique ( $n \times n$ ) dont la positivité traduit la dissipation,
- (vi)  $\mathbf{G}$  est une matrice ( $n \times q$ ).

Les matrices peuvent dépendre de l'état  $\mathbf{x}$ , de l'entrée  $\mathbf{u}$  ou de paramètres constants ou variant dans le temps.

REMARQUE 1 La propriété fondamentale d'un SHP est de vérifier un bilan de puissance : la nullité de

$$B \triangleq \frac{dE}{dt} + P_{\text{dissip}} - P_{\text{ext}}$$

où la variation d'énergie est

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H(\mathbf{x})^\top \dot{\mathbf{x}},$$

la puissance dissipée

$$P_{\text{dissip}} = \nabla H(\mathbf{x})^\top \mathbf{R} \nabla H(\mathbf{x}) \geq 0$$

est positive d'après (v) et la puissance extérieure est

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{y}^\top \mathbf{u}.$$

En effet, d'après (4.1),

$$B = \underbrace{\nabla H(\mathbf{x})^\top \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{x})}_{= 0 \text{ d'après (iv)}} + \underbrace{\nabla H(\mathbf{x})^\top \mathbf{G} \mathbf{u}}_{\mathbf{y}^\top \mathbf{u}} - \mathbf{y}^\top \mathbf{u} = 0.$$

REMARQUE 2 Dans la Définition 4.1, il s'agit de la formulation classique (*input-state-output*) d'un SHP [285]. Des variantes de cette formulation, et une formulation plus générale (algèbre-différentielle) sont définies dans [285].

EXEMPLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE Nous considérons le modèle d'un système masse-ressort-amortisseur linéaire (Figure 4.1) dont la dynamique obéit l'EDO

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{\text{ext}},$$

avec

$x$	la position verticale de la masse	[m]
$m$	la masse	[kg]
$c$	le coefficient d'amortissement	$\left[ \frac{\text{Ns}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}} \right]$
$k$	la constante de raideur	$\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2} \right]$
$f_{\text{ext}}$	la force extérieure	$\left[ \text{N} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ ,

avec des conditions initiales en position et vitesse. (Dans ce modèle, l'influence de la pesanteur n'est pas considérée.)

Dans ce système, la masse et le ressort échangent de l'énergie ; l'amortisseur en dissipe. La force extérieure apporte de l'énergie au système à travers le port "(force sur la masse, vitesse de la masse)".

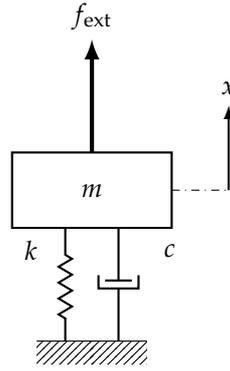


FIGURE 4.1 – Système masse-ressort-amortisseur

Pour l'écriture du modèle SHP, on définit l'état comme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} x \\ p \end{bmatrix},$$

où  $p$  est la quantité de mouvement :  $p = m\dot{x}$  [kg·m/s].

Le système étant linéaire, on a un Hamiltonien quadratique

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2m}p^2, \quad (4.2)$$

qui représente l'énergie du système en fonction de son état  $\mathbf{x}(t)$ . Il est constitué de l'énergie potentielle du ressort qui est allongé et comprimé, et l'énergie cinétique de la masse qui est en mouvement.

On calcule que le gradient du Hamiltonien vaut

$$\nabla H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_x H(\mathbf{x}) \\ \partial_p H(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ \frac{p}{m} \end{bmatrix}.$$

Le modèle SHP s'écrit finalement comme

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans la première équation matricielle, la première équation représente l'égalité des vitesses et la deuxième équation représente l'égalité des forces. L'écriture satisfait les conditions de la Définition 4.1 avec notamment la matrice  $\mathbf{R}$  qui est semi-définie positive puisque ses valeurs propres sont  $\{0, c > 0\}$ .

Nous observons que si nous contrôlons la masse en force ( $u \triangleq f_{\text{ext}}$ ), la sortie  $y = \frac{1}{m}x_2 = \dot{x}$  est la vitesse de la masse, la variable conjuguée dans le sens que leur produit

$$uy = f_{\text{ext}}\dot{x} \quad \left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = \text{W} \right]$$

représente la puissance externe apportée au système. Cette sortie a un autre sens que la sortie  $y_{\text{mes}}$  qui correspond à la mesure, en fonction des capteurs utilisés (cf. l'exemple du masse-ressort-amortisseur dans la Sous-section 3.2.1.1, où l'on a en plus pris un autre état).

**EXEMPLE D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE** Un cas d'un système non linéaire sera considéré dans la Section 6.1.2. Il s'agit d'un système masse-ressort-amortisseur avec un ressort raidissant. La forme SHP du modèle sera la même que le modèle (4.3), mais dans lequel l'expression pour l'énergie potentielle du ressort qui apparaît dans le Hamiltonien ne sera plus quadratique.

#### 4.1.2 Modèle de dimension infinie

**Définition 4.2** (SHP de dimension infinie). Une formulation classique d'un Système Hamiltonien à Ports (SHP) d'état  $\mathbf{x}$  de dimension infinie est [71, 108]

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{x} = (\mathcal{J} - \mathcal{R})\delta_x \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{G}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathcal{G}^* \delta_x \mathcal{H}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.4)$$

pour laquelle

- $\mathbb{X}$  est l'espace des états énergétiques,
- $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  sont l'entrée et sa sortie associée,
- un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{X}}$  et norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$  sont définis,
- la fonction Hamiltonienne est définie comme

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{X}}^2,$$

- l'opérateur  $\delta_x$  est la dérivée variationnelle [251],
- l'opérateur  $\mathcal{J}$  est formellement anti-auto-adjoint (skew-symmetric) et l'opérateur  $\mathcal{R}$  est non-négatif symétrique, par rapport au produit scalaire,
- $\mathcal{G}$  est un opérateur et  $\mathcal{G}^*$  son opérateur adjoint.

**Définition 4.3** (Opérateur anti-auto-adjoint (skew-symmetric) [251]). Un opérateur  $\mathcal{J}$  est anti-auto-adjoint si

$$\langle \mathcal{J}v_1, v_2 \rangle = -\langle v_1, \mathcal{J}v_2 \rangle.$$

avec  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire défini sur la géométrie du système considéré.

**EXEMPLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE** Un modèle linéaire pour la vibration transverse  $w(z, t)$  d'une corde est considérée (Fig. 4.2) [110, 111]. Il s'agit de l'EDP

$$\partial_{tt}w(z, t) + \mu\partial_t w(z, t) - \partial_{zz}w(z, t) = u(z, t).$$

Ici,  $u(z, t)$  représente une force linéique distribuée définie sur  $(z, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Omega = [0, 1]$  et  $\mu$  est un coefficient représentant de l'amortissement visqueux. La corde est fixée aux extrémités (condition de Dirichlet) et a une position et vitesse données comme conditions initiales.

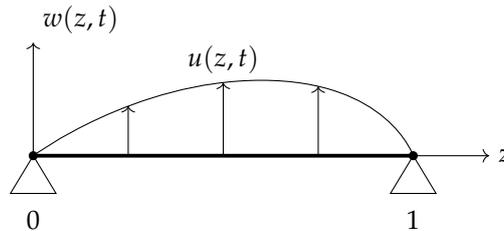


FIGURE 4.2 – Corde

Pour l'écriture du SHP, on définit l'état comme

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q(z, t) \\ p(z, t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \partial_z w(z, t) \\ \partial_t w(z, t) \end{bmatrix}.$$

Le système étant linéaire, le Hamiltonien a un intégrande quadratique, qui est intégré sur le domaine spatial  $\Omega$  de la corde :

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(z, t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [p^2(z, t) + q^2(z, t)] \, dz.$$

Les densités d'énergie quadratiques correspondent aux densités d'énergie potentielle et cinétique d'un point élémentaire de la corde. Dans ce cas, la dérivée variationnelle correspond à [251]

$$\delta_{\mathbf{x}} \mathcal{H}(\mathbf{x}(z, t)) = \begin{bmatrix} \delta_q \mathcal{H} \\ \delta_p \mathcal{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}.$$

Le modèle SHP s'écrit comme

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \partial_t q \\ \partial_t p \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Cette écriture satisfait les conditions de la Définition 4.2. Nous démontrons ici que l'opérateur

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{bmatrix}$$

est formellement anti-auto-adjoint. Soient deux vecteurs d'état

$$\mathbf{x}_I(z, t) \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} (z, t)$$

$$\mathbf{x}_{II}(z, t) \triangleq \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} (z, t),$$

zéro aux bords. Il faut prouver que

$$\langle \mathcal{J} \mathbf{x}_I, \mathbf{x}_{II} \rangle = -\langle \mathbf{x}_I, \mathcal{J} \mathbf{x}_{II} \rangle \quad (4.6)$$

avec

$$\langle \mathbf{x}_I, \mathbf{x}_{II} \rangle = \int_0^1 \begin{bmatrix} q_1 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \, dz.$$

Le membre gauche de (4.6) vaut

$$\langle \mathcal{J} \mathbf{x}_I, \mathbf{x}_{II} \rangle = \int_0^1 \begin{bmatrix} \partial_z p_1 & \partial_z q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \, dz = \int_0^1 [\partial_z p_1 \cdot q_2 + \partial_z q_1 \cdot p_2] \, dz$$

et le membre droit

$$\langle \mathbf{x}_I, \mathcal{J} \mathbf{x}_{II} \rangle = \int_0^1 [q_1 \cdot \partial_z p_2 + p_1 \cdot \partial_z q_2] \, dz.$$

Par une intégration par parties, on a que

$$\int_0^1 \partial_z p_1 \cdot q_2 \, dz = \int_{z=0}^{z=1} q_2 \, dp_1 = p_1 q_2 \Big|_0^1 - \int_{z=0}^{z=1} p_1 \, dq_2 = - \int_0^1 p_1 \cdot \partial_z q_2 \, dz$$

et, pareillement, que

$$\int_0^1 \partial_z q_1 \cdot p_2 \, dz = - \int_0^1 \partial_z q_1 \cdot p_2 \, dz,$$

ce qui prouve l'Équation (4.6).

Finalement, puisque le SHP (4.5) est contrôlé par une force  $u(z, t)$ , la sortie duale est  $y = p(z, t) = \partial_t w(z, t)$ , la vitesse, de sorte que  $\int_{\Omega} uy \, dz = \int_{\Omega} u(z, t) \partial_t w(z, t) \, dz$  représente la puissance externe apportée au système.

**EXEMPLE D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE** L'exemple d'une corde avec une non-linéarité due à une modulation de tension sera traité dans le Chapitre 8.

#### 4.2 MÉTHODE DE SIMULATION

Étant donné un modèle SHP, contrôlé ou non, on peut calculer son évolution temporelle par une méthode numérique. Dans le cas d'un SHP de dimension infinie, on applique d'abord une discrétisation spatiale [204, Section 5] afin d'obtenir un SHP de dimension finie pour la simulation.

La méthode numérique sert à simuler la trajectoire du système en temps discret : il s'agit de calculer l'état  $x(k+1)$  étant donné l'état  $x(k)$ . En fonction du modèle et de la commande, on a affaire à un calcul explicite ou implicite.

Pour une méthode de simulation passive (stable), on veut discrétiser les équations du système en préservant le bilan de puissance : on remplace la dérivée temporelle  $\dot{x}$  par  $\frac{\delta x}{\delta t}$ , et le gradient  $\nabla H(x)$  par le gradient discret  $\nabla^d H(x, \delta x)$  [82, 119, 241]. Dans le cas d'un Hamiltonien à variables séparées ( $H(x) = \sum_i^n H_i(x_i)$ ), le gradient discret  $\nabla^d H(x, \delta x)$  est défini par les composants

$$[\nabla^d H(x, \delta x)]_i = \begin{cases} \frac{H_i(x_i + \delta x_i) - H_i(x_i)}{\delta x_i} & \text{si } \delta x_i \neq 0 \\ H'_i(x_i) & \text{si } \delta x_i = 0. \end{cases}$$

**CALCUL EXPLICITE** Dans le cas d'un système bouclé linéaire, il existe une méthode explicite [241] pour le calcul de la différence d'état  $\delta x(k) \triangleq x(k+1) - x(k)$ . On peut écrire le Hamiltonien comme la forme quadratique  $H(x) = 1/2 x^T W x$ , avec  $W = W^T > 0$ . Avec le gradient discret  $\nabla^d H(x(k), \delta x(k)) = W(x(k) + \delta x(k)/2)$ , et la notation  $M \triangleq (J - R)W$ , on peut retrouver l'expression suivante pour  $\delta x$  :

$$\delta x = (I_n - \delta t/2 \cdot M)^{-1} (M x_k + G_k u_k) \delta t.$$

**CALCUL IMPLICITE** Dans le cas plus général, on obtient un système implicite (non linéaire) en  $x(k+1)$  après discrétisation, qu'il faut résoudre itérativement, par exemple par la méthode de Newton-Raphson [266].

#### 4.3 MÉTHODES DE CONTRÔLE

Il existe plusieurs méthodes de contrôle à partir d'une structure SHP, à la fois pour des SHP de dimension finie [181] et infinie [204, Sections 4.1-4.3]. Ici, nous mentionnons deux méthodes pour le cas des SHP de dimension finie [179, 180, 182].

## 4.3.1 Remodelage d'énergie

Le Hamiltonien  $H(x)$  du système non contrôlé est une fonction de Lyapunov qui a un minimum à un point d'équilibre. La méthode de contrôle par remodelage d'énergie [179] consiste à construire un nouveau Hamiltonien  $H_d(x)$  qui a un minimum à un autre point d'équilibre vers lequel on veut contrôler le système (comme illustré dans la Figure 4.3).

**Théorème 4.1** (Condition de correspondance pour le contrôle par remodelage d'énergie [179]). *Considérons un SHP en boucle ouverte de forme (4.1) avec un Hamiltonien  $H(x) \succ 0$ . Pour obtenir un SHP en boucle fermée avec un Hamiltonien  $H_d(x) \succ 0$ , la commande utilisée doit satisfaire la condition de correspondance*

$$\nabla H_d(x)^\top \dot{x} = -y^\top u, \quad (4.7)$$

où  $H_d(x) \triangleq H_d(x) - H(x) \succeq 0$ , sous l'hypothèse que

$$R \nabla H_d(x) = 0.$$

La preuve est basée sur les bilans de puissance du système en boucle ouverte et en boucle fermée [179].

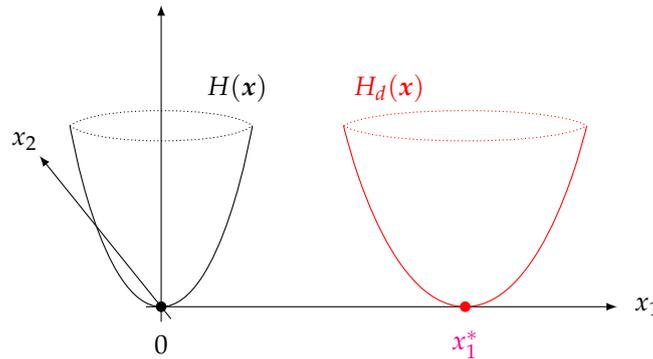


FIGURE 4.3 – Principe de la méthode de contrôle par remodelage d'énergie

## 4.3.2 IDA-PBC

La méthode IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*, [182]) consiste à associer le remodelage d'énergie ( $H_d(x)$ ) à un changement des matrices d'interconnexion ( $J_d$ ) et de dissipation ( $R_d$ ). Le système (4.1) est ainsi remplacé par le système cible

$$\dot{x} = (J_d - R_d) \nabla H_d(x) \quad (4.8)$$

par l'action du contrôle.

La méthode IDA-PBC répond à deux besoins :

- certains systèmes ne peuvent être contrôlés avec un remodelage d'énergie seul, par exemple lorsqu'il y a un transfert infini d'énergie au point d'équilibre (*dissipation obstacle*, cf. [269]),
- on veut améliorer la performance du contrôle.

Nous définissons les différences  $H_a(\mathbf{x})$  comme avant, et  $\mathbf{J}_a \triangleq \mathbf{J}_d - \mathbf{J}$ ,  $\mathbf{R}_a \triangleq \mathbf{R}_d - \mathbf{R}$ . L'entrée qui effectue ceci peut être obtenue par la condition de correspondance suivante.

**Théorème 4.2** (Condition de correspondance pour l'IDA-PBC [182]). *Considérons un SHP en boucle ouverte de forme (4.1) avec un Hamiltonien  $H(\mathbf{x}) \succ 0$  et matrices  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{R}$ . Par l'action du contrôle, nous voulons obtenir un SHP (4.8) avec un Hamiltonien  $H_d(\mathbf{x}) \succ 0$  et matrices  $\mathbf{J}_d$  et  $\mathbf{R}_d$ . Les Hamiltoniens et matrices doivent satisfaire la condition de correspondance*

$$-\mathbf{g}^\perp (\mathbf{J}_a - \mathbf{R}_a) \nabla H(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^\perp [(\mathbf{J} + \mathbf{J}_a) - (\mathbf{R} + \mathbf{R}_a)] \nabla H_a(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{g}^\perp$  est un annihilateur à gauche au choix (qui satisfait  $\mathbf{g}^\perp \mathbf{g} = 0$ ). La commande correspondante est

$$\mathbf{u} = (\mathbf{g}^\top \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^\top [(\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d) \nabla H_d(\mathbf{x}) - (\mathbf{J} - \mathbf{R}) \nabla H(\mathbf{x})].$$

Cette condition de correspondance suit de l'égalité entre les équations dynamiques du système en boucle ouverte et en boucle fermée.

En fonction des éléments imposés dans cette équation, on a affaire à une méthode de résolution différente. La référence [182] offre plus d'informations à ce sujet et propose une version plus générale de la condition de correspondance.

Dans ce chapitre, le contrôle en temps fini est introduit. Dans la Section 5.1, on définit la stabilité en temps fini et explique pourquoi cette propriété peut être utile. La Section 5.2 est consacrée aux lois de commande (non linéaires) pour la stabilisation en temps fini d'EDOs, tandis que le cas des EDPs est mentionné dans la Section 5.3. Finalement, en Section 5.4, on mentionne des informations supplémentaires concernant le contrôle non asymptotique dont le contrôle en temps fini fait partie.

## TABLE DES MATIÈRES

5.1	Introduction . . . . .	39
5.1.1	Exemple introductif . . . . .	39
5.1.2	Définition . . . . .	40
5.1.3	Avantages et inconvénients du contrôle en temps fini . . . . .	41
5.2	Contrôle en temps fini d'équations aux dérivées ordinaires . . . . .	41
5.2.1	Méthodes de construction de lois de commande . . . . .	41
5.2.2	Quelques lois de commande pour des EDOs . . . . .	43
5.3	Contrôle en temps fini d'équations aux dérivées partielles . . . . .	49
5.4	Autres types de commande non-asymptotique . . . . .	49

## 5.1 INTRODUCTION

Le contrôle en temps fini concerne le fait d'atteindre un état d'équilibre en un temps fini, et non pas asymptotiquement, comme c'est souvent le cas avec des méthodes de contrôle plus standard. La question du contrôle en temps fini d'une EDO a été posée pour la première fois en 1966 par Roxin [221] puis en 1986 par Haimo [103], mais la recherche sur le temps fini s'intensifie dès les années 2000 [39]. Dans la présente section, on commence par un exemple introductif pour illustrer la stabilité en temps fini, avant d'en donner la définition mathématique et l'utilité.

## 5.1.1 Exemple introductif

On considère le système  $\dot{x}(t) = u(t)$  avec un état initial  $x_0 > 0$ . On veut concevoir la loi de commande  $u$  pour que l'état  $x(t)$  atteigne 0 en un temps fini  $T$ . Nous comparons trois différentes lois de commande dont les trajectoires résultantes respectives sont montrées dans la Figure 5.1 et dont les détails sont listés dans le Tableau 5.1.

Il s'agit des trois lois de commande suivantes.

1) RÉGULATEUR P Une commande « P » (proportionnelle, [10]) génère une trajectoire exponentiellement décroissante, qui n'atteint 0 jamais exactement mais s'en approche éternellement (stabilité asymptotique).

2) CONTRÔLE « TOUT OU RIEN » (« bang-bang ») La commande appliquée égale une constante  $U_{\text{cst}}$  multipliée par le signe de l'état. La trajectoire est alors une droite décroissante. En  $x(t) = 0$ , on applique l'entrée  $u(t) = 0$ . En réalité, à cause de la pente (vitesse) non nulle au moment où  $x(t) = 0$ , l'état deviendra légèrement négatif. Le contrôle repoussera l'état vers zéro mais il dépassera à nouveau dans le domaine positif,

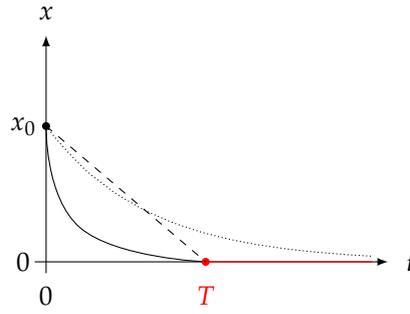


FIGURE 5.1 – Trajectoires du système  $\dot{x}(t) = u(t)$  pour différentes lois de contrôle

Tableau 5.1 – Détails des trois lois de commande. Calculs pour le cas  $x(t) > 0$ .

contrôle	commande	trajectoire	$T$
régulateur P	$u(t) = -Kx(t)$	$x(t) = x_0 e^{-Kt}$	$+\infty$
bang-bang	$u(t) = -\text{sign}(x(t))U_{\text{cst}}$	$x(t) = x_0 - U_{\text{cst}}t$	$\frac{x_0}{U_{\text{cst}}}$
temps fini	$u(t) = -\text{sign}(x(t)) x(t) ^\alpha, \alpha \in ]0, 1[$	$x(t) = x_0^{1-\alpha} \sqrt[1-\alpha]{1 - \frac{1-\alpha}{x_0^{1-\alpha}} t}$	$\frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

et ainsi de suite... Ceci résulte en un mouvement de zig-zag (*chattering*, [147]) qui est indésiré dans une application réelle.

3) **CONTRÔLE EN TEMPS FINI** Nous voulons donc obtenir une trajectoire qui arrive en 0 avec une pente nulle. Il se trouve que c'est par exemple le cas avec la loi

$$u(t) = -\text{sign}(x(t))|x(t)|^\alpha \triangleq -[x(t)]^\alpha, \alpha \in ]0, 1[.$$

Nous observons que cette loi est non linéaire, contient une puissance fractionnaire et est non Lipschitz continue à l'origine [103]. On verra dans la suite que la condition  $\alpha \in ]0, 1[$  correspond à une condition d'homogénéité, qui garantit la stabilité en temps fini. Pour le cas  $\alpha = 0$ , on retrouve une loi de commande discontinue de type bang-bang, et pour le cas  $\alpha = 1$ , une trajectoire asymptotique.

Dans la suite de la présente section, après la définition formelle de la stabilité en temps fini, nous montrons comment de telles commandes peuvent être construites. Nous mentionnons ici déjà qu'il n'y a pas unicité de la loi en temps fini.

### 5.1.2 Définition

**Définition 5.1** (Stabilité en temps fini de l'origine [39]). *Soit un système  $\dot{x} = f(x)$ . Soit  $\Phi_t(x_0)$  l'évolution de l'état dans le temps étant donné un état initial  $x_0$  à  $(t = 0)$ .*

*L'origine dudit système est **stable en temps fini** sur un voisinage ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  si*

1. (*Convergence en temps fini*) *Il existe une fonction  $T : U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tout  $x_0 \in U \setminus \{0\}$ , l'évolution  $\Phi_t(x_0)$  est définie et unique sur  $[0, T(x_0)[$  et*

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} \Phi_t(x_0) = 0.$$

*On appelle  $T(\cdot)$  la fonction de temps d'établissement (settling time) du système.*

2. (*Stabilité au sens de Lyapunov*) Il existe une fonction  $\delta \in \mathcal{K}$  telle que pour tout  $x_0 \in U$ ,  $\|\Phi_t(x_0)\| \leq \delta(\|x_0\|)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Si  $U = \mathbb{R}^n$ , on appelle le système **globalement stable en temps fini**. Si seulement la propriété (1) est satisfaite, l'origine est dite **attractive en temps fini**.

On voit que la propriété de stabilité en temps fini est plus stricte que la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov (cf. la Définition 3.6).

### 5.1.3 Avantages et inconvénients du contrôle en temps fini

Voici quelques remarques sur le contrôle en temps fini, avec lequel une cible (point d'équilibre ou trajectoire de référence) peut être atteinte dans un temps fini.

#### 5.1.3.1 Avantages

- Le contrôle en temps fini est utile pour des applications avec des contraintes de temps.
- Il y a certains résultats qui montrent que le contrôle en temps fini a des propriétés de robustesse supérieures par rapport à d'autres types de contrôle comme le contrôle asymptotique et exponentielle (p.ex. dans [39] concernant le rejet de perturbations).

#### 5.1.3.2 Inconvénients

- Il n'y a souvent pas d'expression analytique pour le temps d'établissement  $T$  (mais parfois on a une borne supérieure). De ce fait, la méthode de conception d'un contrôleur pour un  $T$  donné par une application n'est pas toujours évidente.
- Le système contrôlé en temps fini n'est pas Lipschitz continu à l'état cible. De ce fait, le système devient de plus en plus raide lorsque l'état se rapproche du point d'équilibre. Cette propriété peut mener à des difficultés numériques lors d'une simulation ou implémentation sur un microcontrôleur (voir plus bas).

## 5.2 CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES ORDINAIRES

Dans la présente section, on énonce des méthodes de construction de lois de commande en temps fini pour des EDOs (Sous-section 5.2.1), et on donne quelques exemples de lois de commande ainsi obtenues (Sous-section 5.2.2).

### 5.2.1 Méthodes de construction de lois de commande

Étant donné la définition de la stabilité en temps fini, nous plusieurs méthodes de conception de lois en temps fini pour un système EDO donné ont été développées.

#### 5.2.1.1 Fonctions de Lyapunov strictes

Si l'on peut trouver une commande  $u(x, t)$  et une fonction de Lyapunov de contrôle  $V(x(t), u(t))$  associée, qui satisfasse

$$\dot{V}(x(t), u(t)) \leq -k [V(x(t), u(t))]^\alpha, \quad (5.1)$$

avec  $k > 0$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , alors cette loi stabilise le système en temps fini [12, 39, 40]. La difficulté est qu'il n'est pas toujours facile de trouver une telle fonction de Lyapunov. Des exemples de lois construites avec cette méthode sont [117, 120, 267, 270].

Il existe aussi un théorème inverse : chaque système stabilisé en temps fini admet une fonction de Lyapunov stricte.

## 5.2.1.2 Homogénéité

On définit d'abord la notion d'homogénéité dont on a besoin.

**Définition 5.2** (Homogénéité d'une fonction et d'un champ de vecteurs [112]). *Soient  $\lambda > 0$  un nombre réel strictement positif et  $\mathbf{r}$  un vecteur de  $n$  poids  $r_i > 0$  strictement positifs. Soit l'opérateur de dilatation  $\Lambda_{\mathbf{r}}$  tel que*

$$\Lambda_{\mathbf{r}}\mathbf{x} \triangleq \left[ \dots \quad \lambda^{r_i} x_i \quad \dots \right]^T.$$

— Une fonction  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est homogène si l'on peut l'écrire comme

$$f(\Lambda_{\mathbf{r}}\mathbf{x}) = \lambda^v f(\mathbf{x}).$$

— Un champ de vecteurs  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est homogène si l'on peut l'écrire comme

$$\mathbf{f}(\Lambda_{\mathbf{r}}\mathbf{x}) = \lambda^v \Lambda_{\mathbf{r}}\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

L'exposant  $v \in \mathbb{R}$  s'appelle le degré d'homogénéité.

*Remarque 1* – Le degré d'homogénéité  $v$  est fixé à un facteur multiplicatif strictement positif près, puisque l'on peut multiplier les composantes du vecteur de poids  $\mathbf{r}$  par un même facteur multiplicatif.

*Remarque 2* – Dans [196, Section 3.1], on utilise une définition alternative d'homogénéité « généralisée », qui est équivalente à la Définition 5.2 et sera utilisée dans la Sous-sous-section 11.6.2.1. Cette définition est la suivante.

**Définition 5.3** (Homogénéité généralisée d'une fonction et d'un champ de vecteurs [196, Déf. 3.6]).

— Une fonction  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathbf{d}$ -homogène si l'on peut l'écrire comme

$$f(\mathbf{d}(s)\mathbf{x}) = e^{vs} f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall s \in \mathbb{R}.$$

— Un champ de vecteurs  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est homogène si l'on peut l'écrire comme

$$\mathbf{f}(\mathbf{d}(s)\mathbf{x}) = e^{vs} \mathbf{d}(s)\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Ici,  $\mathbf{d}(s)$  est une dilatation [196, Déf. 3.1] comme la dilatation uniforme

$$\mathbf{d}_1(s) \triangleq e^s \mathbf{I}_n$$

ou la dilatation pondérée

$$\mathbf{d}_2(s) \triangleq \text{diag}(e^{r_1 s}, e^{r_2 s}, \dots, e^{r_n s}), \quad r_i > 0.$$

*Remarque 3* – Si un système non linéaire est homogène, certaines propriétés locales peuvent devenir globales [12, 196].

La propriété d'homogénéité est utilisée pour la construction de lois de commande selon le lemme suivant.

**Lemme 5.1** (Stabilité en temps fini d'un système homogène à degré d'homogénéité strictement négatif [12, 216]). *Si un système EDO est asymptotiquement stable, et homogène à degré d'homogénéité strictement négatif, alors le système est aussi stable en temps fini.*

Si l'on peut construire une commande  $u(t)$  qui rend le champ de vecteurs

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t))$$

homogène d'un degré d'homogénéité  $v$  strictement négatif, la stabilité asymptotique est donc une condition suffisante pour la stabilité en temps fini. (On note que l'on peut parfois aussi construire une approximation homogène autour du point de l'équilibre pour obtenir une stabilisation en temps fini locale [8].)

## 5.2.1.3 Fonctions de Lyapunov implicites

Cette méthode n'est pas précisée ici. Se référer à [197, 198].

## 5.2.2 Quelques lois de commande pour des EDOs

5.2.2.1 Loi additive pour un intégrateur d'ordre  $n$ 

INTÉGRATEUR SIMPLE Considérons l'intégrateur simple

$$\dot{x}(t) = u(t) \quad (5.3)$$

avec l'état  $x \in \mathbb{R}$ . La stabilité en temps fini de l'origine peut être obtenue avec la loi de commande décrite dans le lemme suivant.

**Lemme 5.2** (Contrôle en temps fini de l'intégrateur simple). *L'origine 0 est un point d'équilibre stable en temps fini pour l'intégrateur simple (5.3) contrôlé par la loi de commande*

$$u(t) = -k[x(t)]^\alpha \quad (5.4)$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $k > 0$  et

$$[x(t)]^\alpha \triangleq \text{sign}(x(t))|x(t)|^\alpha.$$

La loi de commande définie par (5.4) est illustrée dans la Figure 5.2 pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . On note à nouveau que pour la limite  $\alpha \rightarrow 1$ , on retrouve un contrôleur linéaire  $u(t) = -kx(t)$ , et pour la limite  $\alpha \rightarrow 0$ , on retrouve un contrôleur discontinu  $u(t) = -k\text{sign}(x(t))$ .

Dans l'Annexe B, des règles de calcul pour les crochets figurant dans cette loi sont énoncées.

*Démonstration.* L'intégrateur simple (5.3) contrôlé par la loi de commande (5.4) correspond au système en boucle fermée

$$\dot{x}(t) = -k[x(t)]^\alpha. \quad (5.5)$$

On définit la fonction de Lyapunov<sup>1</sup>

$$V(x(t)) \triangleq \frac{x^2}{2} > 0.$$

On calcule que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \partial_{x(t)} V(x(t)) \dot{x}(t) = x(t) \cdot (-k[x(t)]^\alpha) \\ &= -k[x]^\alpha [x(t)]^\alpha = -k|x(t)|^{\alpha+1} < 0, \end{aligned}$$

puisque  $k > 0$ . D'après la 1<sup>ère</sup> méthode de Lyapunov (cf. Lemme 3.2), l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable du système (5.5).

On montre que le champ de vecteurs  $f(x)$  du système en boucle fermée (5.5) est homogène. La condition (5.2) se traduit en

$$\begin{aligned} -k[\lambda^{r_1} x(t)]^\alpha &= -\lambda^v \lambda^{r_1} k[x(t)]^\alpha \quad \text{avec } \lambda > 0, r_1 > 0 \\ -k\lambda^{r_1 \alpha} [x(t)]^\alpha &= -k\lambda^{v+r_1} [x(t)]^\alpha \\ v &= (\alpha - 1)r_1. \end{aligned}$$

Pour un choix du vecteur de poids

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

1. On pourrait aussi utiliser la fonction de Lyapunov  $V(x) = |x|$ .

on obtient un degré d'homogénéité

$$\nu = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Ce degré d'homogénéité est strictement négatif pour des valeurs du paramètre  $\alpha \in ]0, 1[$ .

En utilisant le Lemme 5.1, on conclut que l'origine est un point d'équilibre stable en temps fini du système (5.5).  $\square$

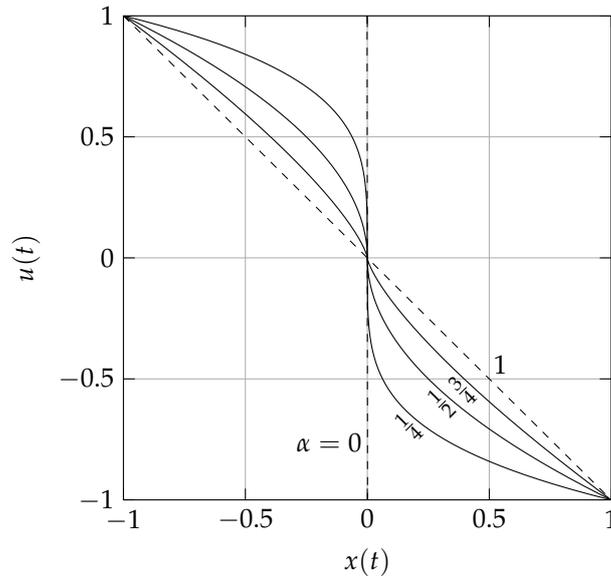


FIGURE 5.2 – Loi de commande (5.4) avec paramètres  $k = 1$  et différentes valeurs de  $\alpha$

**Expression analytique pour la trajectoire et le temps d'établissement** Dans le cas de l'intégrateur simple (5.3) contrôlé par la loi de commande (5.4), il est possible d'obtenir une expression analytique pour la trajectoire du système bouclé (5.5), ainsi qu'une expression analytique pour le temps d'établissement  $T(x_0)$ .

Calcul de la trajectoire à partir d'une condition initiale  $x_0 = x(0)$ .

– Pour  $x_0 > 0, x(t) > 0$ , on a que  $[x(t)]^\alpha = x(t)^\alpha$  et on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -kx(t)^\alpha \\ \int_{x_0}^{x(t)} x(t)^{-\alpha} dx(t) &= - \int_0^t k dt \\ \frac{x(t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x_0}^{x(t)} &= (-kt) \Big|_0^t \\ x(t) &= \sqrt[1-\alpha]{x_0^{1-\alpha} - (1-\alpha)kt}. \end{aligned}$$

La trajectoire atteint zéro quand le radical vaut zéro, c'est-à-dire, pour un temps

$$t = \frac{x_0^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}.$$

On l'appelle le temps d'établissement  $T(x_0)$  (ici dans le cas  $x_0 > 0$ ).

– Pour  $x_0 = 0$ , on a  $x(t) = 0$  avec un temps d'établissement  $T(x_0) = 0$ .

– Pour  $x_0 < 0, x(t) < 0$ , on a que  $[x(t)]^\alpha = -|x(t)|^\alpha$  et on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= +k |x(t)|^\alpha \\ \int_{x_0}^{x(t)} |x(t)|^{-\alpha} dx(t) &= \int_0^t k dt \\ \frac{\text{sign}(x(t)) |x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_{x_0}^{x(t)} &= (kt)|_0^t \\ |x(t)| &= \sqrt[1-\alpha]{|x_0|^{1-\alpha} - (1-\alpha)kt} \\ x(t) &= - \sqrt[1-\alpha]{|x_0|^{1-\alpha} - (1-\alpha)kt}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le temps d'établissement vaut  $T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}$ .  
 – En conclusion, on obtient la trajectoire

$$x(t) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \sqrt[1-\alpha]{|x_0|^{1-\alpha} - (1-\alpha)kt} & \text{si } t < T(x_0) \\ 0 & \text{si } t \geq T(x_0), \end{cases} \tag{5.6}$$

avec le temps d'établissement

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}. \tag{5.7}$$

L'évolution temporelle des trajectoires de la boucle fermée (5.5) selon l'Équation (5.6) est affichée dans la Figure 5.3, pour deux conditions initiales et différentes paires de paramètres de contrôle  $(k, \alpha)$ . Les temps d'établissement correspondants calculés avec l'Eq. (5.7) sont montrés dans le Tableau 5.2.

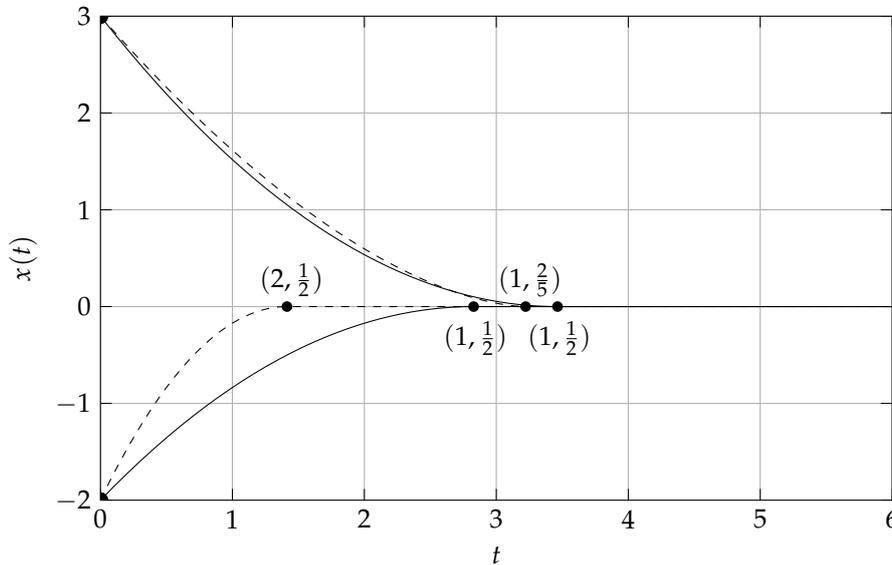


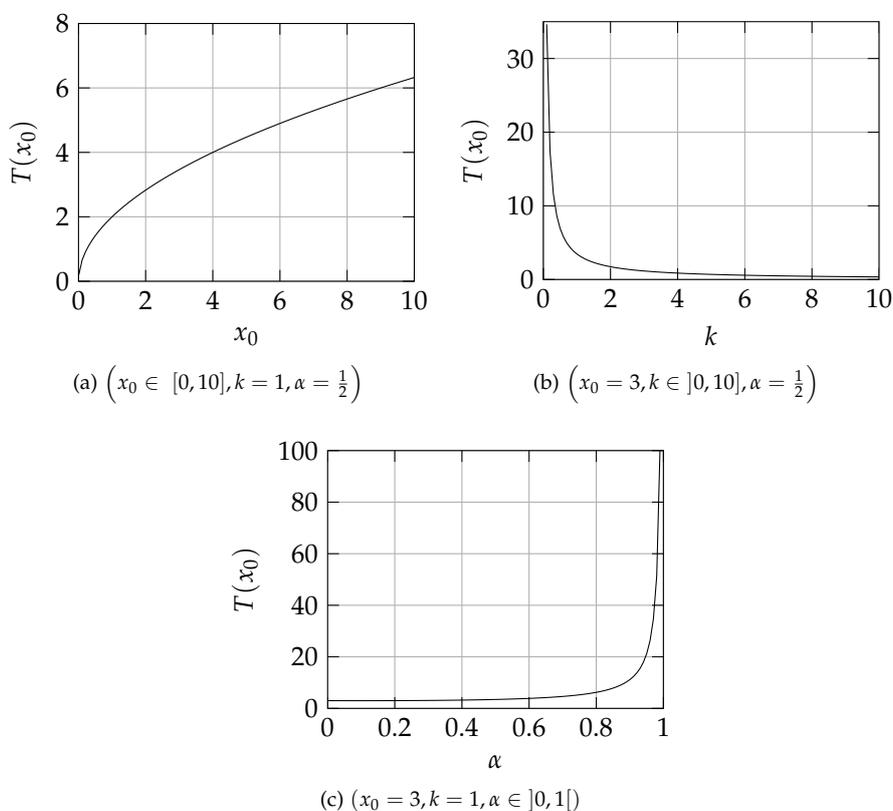
FIGURE 5.3 – Trajectoires de la boucle fermée (5.5) d'après l'Équation (5.6) pour conditions initiales  $x_0 \in \{3, -2\}$  et différentes paires de paramètres de contrôle  $(k, \alpha)$  indiquées sur la Figure. Les points indiquent les états initiaux et les moments où un état atteint zéro.

L'influence de l'état initial  $x_0$  et des paramètres de contrôle  $(k, \alpha)$  sur le temps d'établissement  $T(x_0)$  selon l'Éq. (5.7) est montrée graphiquement dans la Figure 5.4. Dans le cas de l'intégrateur simple, pour une application avec un état initial  $x_0$  connu et un temps d'établissement désiré, on est capable de concevoir les paramètres de la

Tableau 5.2 – Temps d'établissement correspondant aux trajectoires de la Figure 5.3.

$x_0$	$k$	$\alpha$	$T(x_0)$
3	1	$\frac{1}{2}$	3.464
3	1	$\frac{2}{5}$	3.222
-2	1	$\frac{1}{2}$	2.828
-2	2	$\frac{1}{2}$	1.414

loi de commande  $(k, \alpha)$ . Dans le cas d'autres lois de commande en temps fini, on ne dispose pas d'une relation analytique entre les paramètres de contrôle et le temps d'établissement, donc il faut utiliser des méthodes de simulation pour choisir leurs valeurs.

FIGURE 5.4 – Influence de l'état initial  $x_0$  et des paramètres de contrôle  $(k, \alpha)$  sur le temps d'établissement  $T(x_0)$ 

**INTÉGRATEUR DOUBLE** Après l'intégrateur simple, considérons maintenant l'intégrateur double

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \quad (5.8)$$

avec l'état  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ . La stabilité en temps fini de l'origine peut être obtenue avec la loi de commande décrite dans le lemme suivant.

**Lemme 5.3** (Contrôle en temps fini de l'intégrateur double [39]). *L'origine  $\mathbf{0}$  est un point d'équilibre stable en temps fini pour l'intégrateur double (5.8) contrôlé par la loi de commande*

$$u(t) = -k_1 [x_1(t)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [x_2(t)]^\alpha \quad (5.9)$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $k_1, k_2 > 0$ .

*Démonstration.* La preuve repose sur la fonction de Lyapunov [31]

$$V(\mathbf{x}) = k_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{x_2^2}{2} > 0. \quad (5.10)$$

On calcule que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x})^\top \dot{\mathbf{x}} \\ &= k_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} x_2 + x_2 \left( -k_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [x_2]^\alpha \right) \\ &= -k_2 [x_2]^{\alpha+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Cette expression vaut 0 pour tout  $\mathbf{x} = [x_1 \ 0]^\top$  donc elle est semi-définie négative. La stabilité asymptotique du double intégrateur contrôlé par la loi de commande (5.9) est obtenue d'après le Lemme de LaSalle (3.3) :  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \implies x_2 = 0 \implies \dot{x}_2 = 0 \xrightarrow{(5.8)} x_1 = 0$ .

Par construction, la loi de commande (5.9) rend le double intégrateur en boucle fermée (5.8) homogène. La condition (5.2) se traduit en

$$\begin{bmatrix} \lambda^{r_2} \\ -k_1 [\lambda^{r_1} x_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [\lambda^{r_2} x_2]^\alpha \end{bmatrix} = \lambda^\nu \begin{bmatrix} \lambda^{r_1} x_2 \\ \lambda^{r_2} \left( -k_1 [x_1]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [x_2]^\alpha \right) \end{bmatrix},$$

donc

$$\begin{cases} r_2 = \nu + r_1 \\ r_1 \frac{\alpha}{2-\alpha} = \nu + r_2 \\ r_2 \alpha = \nu + r_2. \end{cases}$$

Ce système est sous-déterminé. Pour un choix du vecteur de poids

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{2-\alpha}{2} \end{bmatrix},$$

on obtient un degré d'homogénéité

$$\nu = \frac{\alpha - 1}{\alpha}.$$

Ce degré d'homogénéité est strictement négatif pour des valeurs du paramètre  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Dans le cas d'un degré d'homogénéité strictement négatif, le système en boucle fermée asymptotiquement stable est aussi stable en temps fini (Lemme 5.1).  $\square$

### Remarques

– Une version alternative de la loi de commande avait été proposée dans [103] :

$$u(t) = -k_1 [x_1(t)]^\beta - k_2 [x_2(t)]^\alpha,$$

avec  $\beta > \frac{\alpha}{2-\alpha}$ , tandis que dans la loi de commande ci-dessus [39],  $\beta = \frac{\alpha}{2-\alpha}$ .

– La loi de commande (5.9) est un cas spécifique de la loi de Bhat & Bernstein (5.13) pour le cas  $n$  général mentionnée ci-dessous.

– Il existe d'autres fonctions de Lyapunov pour le double intégrateur (5.8)-(5.8).

On peut citer la fonction de Lyapunov stricte [275, Théorème 3.4]

$$V(x) = k_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{x_2^2}{2} + \varepsilon |x_1|^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

Il existe un  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\forall \varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$ ,

$$\dot{V} \leq -c(\varepsilon) V^{\frac{\alpha+1}{2}},$$

avec  $c(\varepsilon) > 0$ .

Dans [183], on introduit une fonction de Lyapunov locale ad hoc de la forme

$$V(x) = k_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{x_2^2}{2} + \kappa_1 x_1 x_2 |x_2| + \kappa_1 \kappa_2 |x_1|^{\frac{4-\alpha}{2(2-\alpha)}} \text{sign}(x_1) x_2 |x_2|^\alpha + 2\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 x_1^3 x_2 |x_2|^{\frac{\alpha}{2}} + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 x_1^5 x_2, \quad (5.11)$$

avec  $\kappa_i$  des constantes positives satisfaisant certaines inégalités.

– Une autre loi de commande pour le double intégrateur a été présentée par Bhat & Bernstein dans [38]. Elle a été développée en utilisant la théorie des modes glissants.

Loi :

$$u(x) = -|x_2|^\alpha - \left[ x_1 + \frac{1}{2-\alpha} |x_2|^{2-\alpha} \right]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x) = \frac{2-\alpha}{3-\alpha} \left| x_1 + \frac{1}{2-\alpha} |x_2|^{2-\alpha} \right|^{\frac{3-\alpha}{2-\alpha}} + s \left( x_1 + \frac{1}{2-\alpha} |x_2|^{2-\alpha} \right) x_2 + \frac{r}{3-\alpha} |x_2|^{3-\alpha},$$

avec  $r$  et  $s$  positifs.

#### INTÉGRATEUR D'ORDRE $n$

Les lois de commande additifs pour le simple et double intégrateur peuvent être généralisées de la manière suivante.

##### • Une approche par continuité [40]

**Théorème 5.1** (Contrôle en temps fini d'un intégrateur d'ordre  $n$  (Bhat & Bernstein [40])). Soient  $k_1, \dots, k_n$  tels que le polynôme  $s^n + k_n s^{n-1} + \dots + k_2 s + k_1$  est Hurwitz, et soit le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u. \end{cases} \quad (5.12)$$

Il existe un  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que, pour tout  $\alpha \in ]1-\varepsilon, 1[$ , l'origine est globalement stabilisée en temps fini pour le système (5.12) contrôlé par

$$u = \chi_\alpha(x_1, \dots, x_n) = -k_1 |x_1|^{\alpha_1} - \dots - k_n |x_n|^{\alpha_n} \quad (5.13)$$

où les  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  satisfont

$$\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i \alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1} - \alpha_i}, \quad i = 2, \dots, n,$$

avec  $\alpha_{n+1} = 1$  et  $\alpha_n = \alpha$ .

L'inconvénient de ce résultat est, contrairement au cas du simple et double intégrateur étudiés ci-dessus, que l'on ne connaît pas de fonction de Lyapunov et que l'on ne connaît pas la borne inférieure de l'intervalle pour  $\alpha$ . Dans la thèse d'Emmanuel Moulay [173], on conjecture que la plus petite valeur pour  $\alpha$  serait  $\frac{1}{n}$ , mais ce n'est pas prouvé<sup>2</sup>.

#### 5.2.2.2 D'autres lois de commande

Pour un intégrateur d'ordre  $n$ , on a aussi d'autres approches, différentes de la loi de commande additive mentionnée ci-dessus.

- **Une approche géométrique** de Praly [200]
- **Des méthodes récursives** de Hong [116] et d'Andréa-Novel, Coron & Perruquetti [275] qui permettent d'obtenir des lois de commande et des fonctions de Lyapunov pour un système d'ordre  $n$  de façon itérative supposant qu'un sous-système d'ordre  $n - 1$  est contrôlé en temps fini avec une loi de commande et une fonction de Lyapunov connues.
- **Une méthode utilisant des inégalités matricielles** de Zimenko, Polyakov, Efimov & Perruquetti [271].

### 5.3 CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Le contrôle en temps fini d'EDPs est un sujet de recherche actif. On peut mentionner des résultats comme [6, 81, 162, 195] et le cas de [69] qui sera utilisé dans le Chapitre 11.

### 5.4 AUTRES TYPES DE COMMANDE NON-ASYMPTOTIQUE

La stabilité *en temps fini* (*finite-time stability*) décrite dans ce chapitre est une forme de stabilité non asymptotique, où le temps d'établissement dépend de l'état initial. Il existe d'autres variantes de stabilité non asymptotique, comme la stabilité *en temps fixe* (*fixed-time stability*, [193]), où il existe une borne supérieure sur le temps d'établissement, pour n'importe quel état initial, et la stabilité *en temps prescrit* (*prescribed-time stability*, [234]), une stabilité à temps fixe où la borne supérieure sur le temps d'établissement peut être imposée par construction.

On mentionne aussi qu'en *temps discret*, il existe le *dead beat control*, qui réalise une stabilisation en temps fini quand la matrice d'état en boucle fermée est nilpotente : pour le cas d'un système linéaire  $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$  avec  $u_k = -Kx_k$ , si

$$\exists k^* : (A - BK)^{k^*} = 0 \quad \implies \quad x_{k^*} = (A - BK)^{k^*} x_0 = 0.$$

---

2. Je remercie Emmanuel Bernuau pour une discussion concernant ces lois de commande en temps fini.



Troisième partie

VERS LE CONTRÔLE PASSIF EN TEMPS FINI D'UN  
SYSTÈME EDO DANS LE FORMALISME DES SYSTÈMES  
HAMILTONIENS À PORTS



## CONTRÔLE PASSIF EN TEMPS FINI DU DOUBLE INTÉGRATEUR AVEC UNE APPLICATION À UN HAUT-PARLEUR COMME ABSORBEUR ÉLECTROACOUSTIQUE

Ce chapitre est concerné avec l'interprétation d'un double intégrateur contrôlé en temps fini comme un Système Hamiltonien à Ports (SHP) dans le but d'obtenir une version passive de la loi de commande, permettant de garantir de la robustesse contre une mauvaise estimation des paramètres physiques du modèle. Dans la Section 6.1, le modèle SHP d'un système masse-ressort-amortisseur (non) linéaire est donné. À partir de cet exemple d'un système EDO du deuxième ordre qui sera contrôlé en temps fini, on montre comment obtenir une version passive de cette loi de commande (Section 6.2). Dans la Section 6.3, la loi passive sera utilisée pour contrôler la position d'un haut-parleur dans une application d'absorbeur électroacoustique. Une perspective serait d'essayer de généraliser la loi de commande passive en temps fini au cas d'un système d'ordre  $n$  quelconque (Section 6.4).

*Ce chapitre reprend les informations des articles [W4] et [W5].*

### TABLE DES MATIÈRES

6.1	Modèle SHP d'un système masse-ressort-amortisseur . . . . .	53
6.1.1	Modèle linéaire . . . . .	53
6.1.2	Modèle non linéaire . . . . .	55
6.2	Loi de commande passive en temps fini . . . . .	55
6.2.1	Commande asymptotique par remodelage d'énergie et réallocation d'amortissement (IDA-PBC) . . . . .	55
6.2.2	Commande en temps fini . . . . .	56
6.2.3	Obtention d'une loi passive en temps fini . . . . .	58
6.2.4	Simulation . . . . .	59
6.3	Application au contrôle d'un haut-parleur comme absorbeur électroacoustique . . . . .	61
6.3.1	Contexte . . . . .	63
6.3.2	Modèle électroacoustique . . . . .	63
6.3.3	Conception de la loi de commande . . . . .	64
6.3.4	Simulation numérique . . . . .	66
6.4	Perspectives . . . . .	68

### 6.1 MODÈLE SHP D'UN SYSTÈME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR

#### 6.1.1 Modèle linéaire

##### 6.1.1.1 EDO et représentation d'état

Considérons un oscillateur mécanique linéaire amorti (masse-amortisseur-ressort) de masse  $m$ , d'amortissement  $c$  et de raideur  $k$ , excité par une force extérieure  $f_{ext}$  (Figure 6.1). Cet oscillateur est décrit par l'équation différentielle ordinaire

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_{ext}$$

où la position de la masse est repérée par rapport à l'équilibre ( $x = 0$  au repos).

Ce système d'entrée  $u = f_{ext}$  admet la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -k & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (6.1)$$

dans laquelle l'état  $x \triangleq [x_1 \ x_2]^T$  est défini par  $x_1 \triangleq x$  (position),  $x_2 \triangleq p = m\dot{x}$  (quantité de mouvement) et initialisé par  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ .

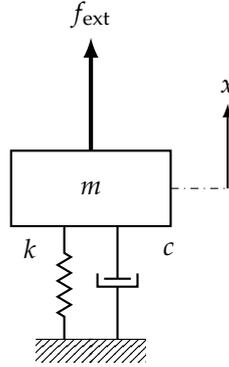


FIGURE 6.1 – Système masse-ressort-amortisseur

En fonction des capteurs à disposition, nous définissons la sortie mesurée

$$y_{mes} = Cx. \quad (6.2)$$

#### 6.1.1.2 Modèle SHP

Dans l'oscillateur considéré ici, on a un échange d'énergie entre la masse et le ressort, une dissipation d'énergie à travers l'amortissement, et l'apport d'une énergie externe à travers le port formé par la force extérieure qui travaille selon la vitesse produite par le système.

Son énergie est composée de l'énergie potentielle du ressort ( $kx^2/2$ ) et de l'énergie inertielle de la masse ( $p^2/(2m)$ ). Le Hamiltonien est donc donné par

$$H(x) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2m}x_2^2. \quad (6.3)$$

Comme montré dans la Sous-section 4.1.1, à partir de l'équation dynamique (6.1) et suivant la Définition 4.1, nous obtenons le modèle sous forme SHP :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kx_1 \\ \frac{1}{m}x_2 \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (6.4)$$

On peut remarquer que  $\nabla H(x)$  isole les lois constitutives des composants stockants, que la première ligne décrit l'égalité des vitesses pour la masse et du ressort, et que la seconde exprime un bilan de forces : ces deux lignes expriment en fait une connexion rigide entre les composants.

La matrice  $J$  représente l'échange d'énergie entre le ressort et la masse, et la matrice  $R$  représente la dissipation d'énergie par l'amortisseur.

On remarque également que l'on ne peut choisir la signification physique de la sortie du modèle SHP : elle est impliquée par le choix de l'entrée. L'entrée étant la force extérieure, la sortie doit être la vitesse de son point de contact pour que leur produit exprime la puissance apportée au système par ce point de contact (port d'interconnexion).

### 6.1.2 Modèle non linéaire

Le formalisme des SHP nous permet de faire une extension immédiate du contrôle à un système non linéaire. Nous considérons le cas d'un ressort raidissant, avec la loi constitutive

$$F_r = kL \sinh\left(\frac{x_1}{L}\right),$$

avec  $L$  l'élongation critique.

Cet oscillateur peut être modélisé comme un SHP de forme (6.4), avec les mêmes matrices  $J$  et  $R$  que dans le cas du ressort linéaire, mais avec le Hamiltonien

$$H(x) = kL^2 \left[ \cosh\left(\frac{x_1}{L}\right) - 1 \right] + \frac{1}{2m} x_2^2.$$

## 6.2 LOI DE COMMANDE PASSIVE EN TEMPS FINI

Dans la présente section, on applique deux méthodes de commande différentes dans le but de stabiliser l'oscillateur passif linéaire sur un état d'équilibre cible qui sont examinées, comparées, puis associées.

La première approche repose sur le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (systèmes passifs admettant un bilan de puissance équilibré) et une méthode de contrôle s'appuyant sur la passivité, par remodelage d'énergie et réallocation d'amortissement (méthode dite IDA-PBC, Sous-section 6.2.1). Cette méthode s'appuie sur une fonction de Lyapunov, qui correspond à une énergie physique naturelle du système.

La seconde approche repose sur une représentation d'état standard du système et une méthode de contrôle non linéaire, permettant d'atteindre un point d'équilibre en un temps fini (Sous-section 6.2.2), propriété utile pour des applications avec des contraintes de temps. Cette méthode s'appuie sur une analyse par fonction de Lyapunov homogène.

Dans la Sous-section 6.2.3 on montre alors que cette méthode de contrôle en temps fini admet une reformulation passive de type SHP, à partir de la fonction de Lyapunov et une interprétation comme un contrôle IDA-PBC.

Enfin, dans la Sous-section 6.2.4 on effectue une simulation du système original ((non) linéaire) et du système bouclé (non linéaire).

### 6.2.1 Commande asymptotique par remodelage d'énergie et réallocation d'amortissement (IDA-PBC)

Le formalisme des SHP nous permet de construire des lois de commande basées sur l'énergie. Dans cet article, le but est de contrôler le système vers l'origine et vers un autre point d'équilibre non nul

$$x^* \triangleq \begin{bmatrix} x_1^* & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Nous appliquons deux méthodes : le remodelage d'énergie (Sous-sous-section 6.2.1.1) et l'IDA-PBC (Sous-sous-section 6.2.1.2).

#### 6.2.1.1 Remodelage d'énergie

Le Hamiltonien  $H(x)$  (Éq. 6.1) a un minimum au point d'équilibre  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ . C'est une fonction de Lyapunov du système sans contrôle, pour lequel l'état évolue vers ce point d'équilibre.

La méthode par remodelage d'énergie consiste à construire un nouveau Hamiltonien  $H_d(x)$  qui a un minimum à un autre point d'équilibre vers lequel on veut contrôler le système.

Ici, nous définissons un Hamiltonien cible d'équilibre  $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ 0]^\top$  :

$$H_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(k+K)(x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2m}x_2^2 + \kappa, \quad (6.5)$$

avec  $K > 0$  une raideur positive au choix. La constante  $\kappa$  est choisie pour assurer la positivité de  $H_a$ . Les calculs conduisent à

$$\kappa = x_1^{*2} \frac{k(k+K)}{2K}.$$

La condition de correspondance de la Sous-section 4.3.1 et le modèle en SHP (6.4) conduisent à la loi de commande

$$u = -K(x_1 - x_1^*) + kx_1^*.$$

Ainsi, cette méthode génère des lois à partir d'une énergie cible, qui conduit ici à un simple régulateur proportionnel.

#### 6.2.1.2 IDA-PBC

La méthode IDA-PBC (*Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control*, [182]) consiste à associer le remodelage d'énergie ( $H_d(\mathbf{x})$ ) à un changement des matrices d'interconnexion ( $J_d$ ) et de dissipation ( $R_d$ ). Le système d'origine  $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J} - \mathbf{R})\nabla H(\mathbf{x})$  est remplacé par le système cible

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}_d - \mathbf{R}_d)\nabla H_d(\mathbf{x}) \quad (6.6)$$

par l'action du contrôle. L'entrée qui effectue ceci peut être obtenue par la condition de correspondance de la Sous-section 6.2.1.2.

Nous imposons le Hamiltonien  $H_d(\mathbf{x})$  (Éq. 6.5) et calculons les conditions sur les matrices  $J_a$  et  $R_a$  (supposées constantes), issues de la condition de correspondance et du fait que  $J_a = -J_a^\top$  et  $R_a = R_a^\top \succeq 0$ .

Nous obtenons les matrices

$$J_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

avec  $D \geq 0$ , et la commande

$$u = -Kx_1 + (k+K)x_1^* - D\frac{x_2}{m}.$$

On a affaire à la commande obtenue précédemment par le remodelage d'énergie à laquelle est ajoutée une injection d'amortissement  $D$ ; ou encore à un régulateur proportionnel-différentiel.

#### 6.2.2 Commande en temps fini

Dans la sous-section précédente, nous avons introduit un contrôle linéaire (de type PID), pour lequel le système connaît une évolution exponentielle dans le temps. L'état se rapproche donc en permanence de l'état cible. Dans la présente section, nous voulons appliquer un contrôle en temps fini, où l'état atteint l'état cible dans un temps fini.

On utilisera la loi de commande en temps fini pour le double intégrateur suivante (cf. la Sous-sous-section 5.2.2.1).

**Lemme 6.1** (Contrôle en temps fini du double intégrateur [39]). *La commande*

$$v = -k_1 [z_1]^{2-\alpha} - k_2 [z_2]^\alpha$$

avec  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  et  $\alpha \in ]0, 1[$  rend l'origine du double intégrateur

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v \end{cases}$$

globalement stable en temps fini. Nous avons utilisé la notation  $[x]^\alpha \triangleq \text{sign}(x)|x|^\alpha$ .

Afin de pouvoir utiliser cette commande, nous transformons le système masse-ressort-amortisseur (6.1) en un double intégrateur, à l'aide du lemme de Brunovský.

**Lemme 6.2** (Forme normale de Brunovský [52, 124, 208]). *Soit un système linéaire en représentation d'état*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , qui est commandable, c'est-à-dire qui a une matrice de commandabilité

$$\mathbf{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

de rang  $n$ .

Il existe un changement d'état  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$  ( $\mathbf{T}$  inversible) et une entrée  $v$  satisfaisant le changement  $\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{z} + \mathbf{F}v$  ( $\mathbf{F}$  inversible) tels que les équations du système dans les nouvelles variables  $(\mathbf{z}, v)$  s'écrivent sous la forme de  $q$  chaînes d'intégrateurs d'ordre  $\rho_i \geq 1$ ,  $\sum_{i=1}^q \rho_i = n$  de la forme suivante :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \dots & z_{1,\rho_1} & \dots & z_{q,\rho_q} \end{bmatrix}^\top,$$

avec

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= z_{i,j+1} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq \rho_i - 1, \\ z_{i,\rho_i} &= v_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Le système (6.1) est commandable. Le lemme de Brunovský nous permet de trouver le changement d'état entre  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{x}$  :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et le bouclage

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}\mathbf{z} + \mathbf{F}v = \begin{bmatrix} k & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + m \cdot v.$$

Après le changement d'état inverse, on trouve la commande

$$\mathbf{u} = kx_1 + \frac{c}{m}x_2 - m \left( k_1 [x_1]^{2-\alpha} + k_2 \left[ \frac{x_2}{m} \right]^\alpha \right). \quad (6.7)$$

Le système (6.1), contrôlé en temps fini vers l'origine par (6.7), s'écrit comme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = -m \left( k_1 [x_1]^{2-\alpha} + k_2 \left[ \frac{x_2}{m} \right]^\alpha \right). \end{cases} \quad (6.8)$$

Après un changement d'état, on obtient la commande suivante pour la régulation en un point stationnaire non nul  $\mathbf{x}^* = [x_1^* \ 0]^\top$  :

$$\mathbf{u} = kx_1 + \frac{c}{m}x_2 - m \left( k_1 [x_1 - x_1^*]^{2-\alpha} + k_2 \left[ \frac{x_2}{m} \right]^\alpha \right).$$

### 6.2.3 Obtention d'une loi passive en temps fini

#### 6.2.3.1 Interprétation comme SHP

Afin d'obtenir une version passive de la loi de commande en temps fini, le système bouclé est réinterprété comme un SHP.

Avec un Hamiltonien défini comme suit :

$$H_d(x) \triangleq mk_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{1}{2m} x_2^2 \succ 0,$$

par analogie avec la fonction de Lyapunov (5.10), le système contrôlé (6.8) peut être réécrit comme un SHP

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (J_d - R_d) \nabla H_d(x) \\ &= \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} mk_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \\ \frac{x_2}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

La matrice  $R_d$  dépend de l'état  $x$  et est singulière en  $x_2 = 0$ . Elle est semi-définie positive car ses valeurs propres 0 et  $mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1}$  sont positives.

#### 6.2.3.2 Lien avec la méthode IDA-PBC

Nous souhaitons réinterpréter le contrôle en temps fini sous la forme d'un asservissement de type IDA-PBC. D'après le calcul de ses quantités caractéristiques (cf. la Sous-section 4.3.2), le système d'asservissement n'est pas passif :  $R_a$  n'est pas semi-définie positive et  $H_a(x)$  n'est pas borné inférieurement. Nous proposons de modifier le système d'asservissement de sorte qu'il réalise toujours un contrôle en temps fini et soit passif (SHP). Ce système est obtenu pour le système cible suivant :

$$\begin{aligned} R_d &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mk_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^{\alpha-1} + \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma > c, \\ H_d(x) &\triangleq mk_1 \frac{2-\alpha}{2} |x_1 - x_1^*|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{\beta}{2} (x_1 - x_1^*)^2 + \frac{1}{2m} x_2^2, \quad \beta > k. \end{aligned}$$

La commande pour ce contrôle passif en temps fini est

$$u = kx_1 - \beta(x_1 - x_1^*) + \frac{c-\gamma}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1 - x_1^*|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right).$$

L'intérêt de cette version passive de la loi de commande en temps fini réside dans sa robustesse dans le cas d'une mauvaise estimation de paramètres. Dans le cas de la loi non passive, les termes  $\pm kx_1$  et  $\pm cx_2/m$  ne s'annuleraient pas exactement, menant à la présence des différences ( $k_{\text{physique}}x_1 - k_{\text{identifié}}x_1$ ) etc., ce qui pourrait causer une perte de performance du contrôleur voire une instabilité. En ajoutant les termes  $\beta x_1$  et  $\gamma x_2/m$ , avec  $\beta > k$  et  $\gamma > c$ , on réalise une marge de robustesse.

**REMARQUE** On rappelle que le double intégrateur contrôlé en temps fini par la loi du Lemme 6.1 s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = -m \left( k_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right). \end{cases} \quad (6.10)$$

La stabilité en temps fini avait été prouvée dans le Chapitre 5 en utilisant le Lemme 5.1 : la loi rend le système asymptotiquement stable et (par construction) homogène d'un degré d'homogénéité strictement négatif, donc le système est aussi stable en temps fini.

Dans le cas du double intégrateur contrôlé par la loi de commande passive en temps fini,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m} \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \frac{\gamma}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1|^{2-\alpha} + k_2 \left[ \frac{x_2}{m} \right]^\alpha \right), \end{cases} \quad (6.11)$$

l'homogénéité est brisée à cause de la présence des termes  $-\beta x_1$  et  $-\gamma/m x_2$  dans le champ de vecteurs. Toutefois, la stabilité en temps fini est préservée puisque ces termes aident à converger plus vite vers zéro que dans le cas du système non passif (6.10) qui était déjà stable en temps fini, donc (6.11) est aussi stable en temps fini.

#### 6.2.4 Simulation

##### 6.2.4.1 Méthode numérique

La simulation du système bouclée est effectuée par la méthode du gradient discret mentionnée dans la Section 4.2.

Après la discrétisation en substituant  $\frac{\delta x}{\delta t}$  et  $\nabla^d H(x, \delta x)$  dans les équations du système, nous obtenons un système de deux équations soit explicites soit implicites (non linéaires) en  $x_1(k+1)$  et  $x_2(k+1)$ . Dans ce deuxième cas, à chaque pas temporel, ce système est résolu itérativement par la méthode de Newton-Raphson (tolérance  $10^{-10}$ , max.  $10^6$  itérations).

##### 6.2.4.2 Système linéaire

Nous simulons le système masse-amortisseur-ressort avec  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1\frac{\text{kg}}{\text{s}}$ ,  $k = 3\frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Pour une lecture facile, nous omettrons les unités ici. Nous calculons l'évolution de l'état initial  $\begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^\top$  vers l'origine sans contrôle, avec injection d'amortissement ( $u = -Dx_2/m$ ,  $D = 3$ ), avec un contrôle en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ) et avec un contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 2$ ). Ensuite le même état initial est contrôlé vers l'état  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^\top$  par remodelage d'énergie ( $K = 2$ ), le contrôle IDA-PBC ( $K = 2$ ,  $D = 4$ ), le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ) et le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 2$ ).

Les simulations pour le contrôle (passif) en temps fini sont effectuées par calcul implicite ( $\delta t = 10^{-3}$ ). Les autres simulations sont effectuées par calcul explicite.

L'évolution de l'état est montrée dans les Figures 6.2-6.3. Pour le cas du contrôle vers le point  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix}^\top$ , l'évolution de l'erreur logarithmique de la position par rapport à la position cible est montrée dans la Figure 6.4. Sans contrôle, le système est en régime pseudo-périodique, ce qui se traduit par un comportement oscillatoire. Avec une injection d'amortissement, l'état évolue selon une exponentielle, donc l'erreur logarithmique est une droite décroissante. Le contrôle (passif) en temps fini est caractérisé par une décroissance de l'erreur qui tend théoriquement vers  $-\infty$ , mais qui est bornée par la précision numérique dans ces simulations.

##### 6.2.4.3 Système non linéaire

On répète la conception des différentes lois de commande pour le cas du système masse-ressort-amortisseur avec un ressort raidissant.

REMODELAGE D'ÉNERGIE Nous définissons le Hamiltonien

$$H_d = (K + k)L^2 \cosh \frac{x_1 - x_1^*}{L} + \kappa + \frac{1}{2m}x_2^2. \quad (6.12)$$

Les valeurs de  $\kappa$  et  $K$  sont choisies telles que le Hamiltonien du contrôleur  $H_d$  soit définie positive.

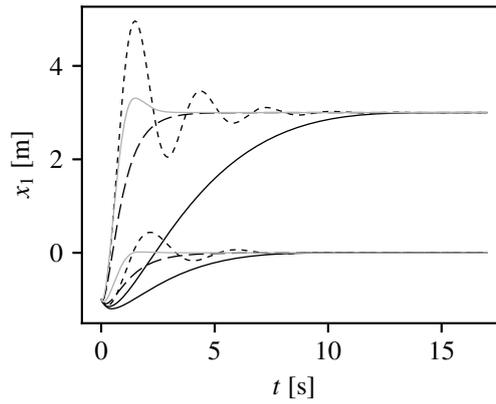


FIGURE 6.2 – Contrôle du système linéaire : évolution de la position dans le temps. Trajectoires vers l'origine sans contrôle (----), avec injection d'amortissement (-.-.-), en temps fini (—) et avec la méthode passive en temps fini (.....). Trajectoires vers [3 0] avec le contrôle par remodelage d'énergie (.....), l'IDA-PBC (-.-.-), le contrôle en temps fini (—) et avec le contrôle passif en temps fini (—).

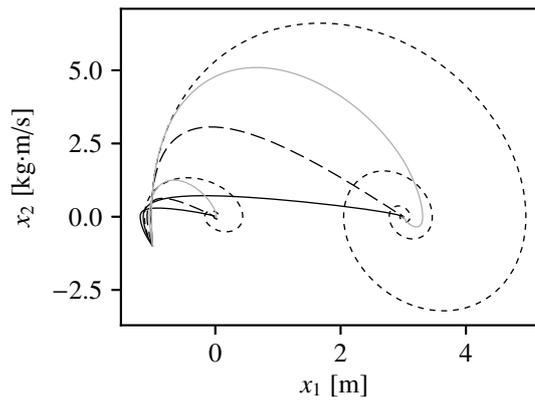


FIGURE 6.3 – Contrôle du système linéaire : évolution dans l'espace des états. Même légende que la Figure 6.2.

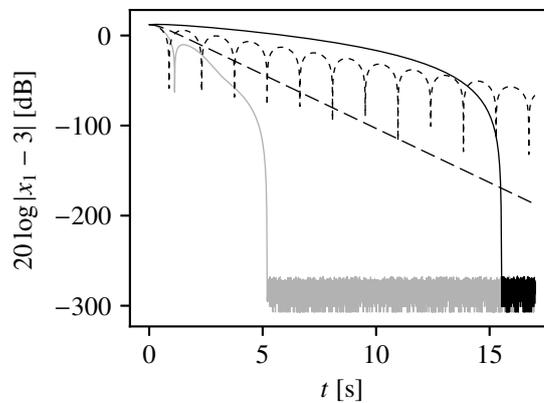


FIGURE 6.4 – Contrôle du système linéaire : évolution de l'erreur de position dans le temps, correspondant au contrôle vers 3 par remodelage d'énergie (.....), l'IDA-PBC (-.-.-), le contrôle en temps fini (—) et le contrôle passif en temps fini (—).

De la condition de compatibilité (Théorème 4.1), nous obtenons

$$u = -(K + k)L \sinh \frac{x_1 - x_1^*}{L} + kL \sinh \frac{x_1}{L}.$$

IDA-PBC Nous imposons le Hamiltonien  $H_d$  (Éq. 6.12) dans le Théorème 4.2 et obtenons les mêmes matrices  $J_a$  et  $R_a$  que dans le cas linéaire, ce qui correspond à la superposition d'une injection d'amortissement et de la commande obtenue par remodelage d'énergie :

$$u = -(K + k)L \sinh \frac{x_1 - x_1^*}{L} + kL \sinh \frac{x_1}{L} - D \frac{x_2}{m}.$$

CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'après les mêmes calculs que dans le cas linéaire, la commande pour le contrôle en temps fini est

$$u = kL \sinh \frac{x_1}{L} + \frac{c}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right).$$

Le système bouclé est égal au système (6.8).

CONTRÔLE PASSIF EN TEMPS FINI De façon analogue au cas du système linéaire (Sous-section 6.2.3), nous construisons la commande

$$u = kL \sinh \frac{x_1}{L} - \beta L \sinh \frac{x_1 - x_1^*}{L} + \frac{c - \gamma}{m} x_2 - m \left( k_1 |x_1 - x_1^*|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha \right), \quad \text{avec } \gamma > c, \beta > k.$$

SIMULATION Nous simulons le système masse-ressort-amortisseur avec  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ , et un ressort raidissant avec  $k = 3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  et  $L = 1\text{m}$ . Nous calculons l'évolution de l'état initial  $[-1 \quad -1]^\top$  vers l'origine sans contrôle, avec injection d'amortissement ( $D = 3$ ), avec le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6$ ) et avec le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6, \beta = 6, \gamma = 2$ ). Ensuite le même état initial est contrôlé vers l'état  $[3 \quad 0]^\top$  avec le remodelage d'énergie ( $K = 58$ ), l'IDA-PBC ( $K = 58, D = 20$ ), le contrôle en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6$ ) et le contrôle passif en temps fini ( $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha = 0,6, \beta = 6, \gamma = 2$ ).

Toutes les simulations sont effectuées par calcul implicite ( $\delta t = 10^{-3}$ ).

L'évolution de l'état est montrée dans les Figures 6.5-6.6. Pour le cas du contrôle vers l'état cible  $[3 \quad 0]^\top$ , l'évolution de l'erreur logarithmique de la position est montrée dans la Figure 6.7. De nouveau, dans le cas du contrôle (passif) en temps fini, l'erreur tend théoriquement vers  $-\infty$  mais elle est bornée par la précision numérique dans ces simulations.

### 6.3 APPLICATION AU CONTRÔLE D'UN HAUT-PARLEUR COMME ABSORBEUR ÉLECTROACOUSTIQUE

Dans la présente section, une collaboration avec Tristan Lebrun est décrite. Il s'agit d'appliquer la loi de commande passive en temps fini pour un système masse-amortisseur-ressort à un haut-parleur qui sera commandé dans une application d'absorption actif du son. Le contrôle du haut-parleur est basé sur une mesure de la vitesse et de la pression acoustique à la membrane et permettrait d'après une simulation une absorption du son efficace en basse-fréquence.

*Le texte est repris de [W5].*

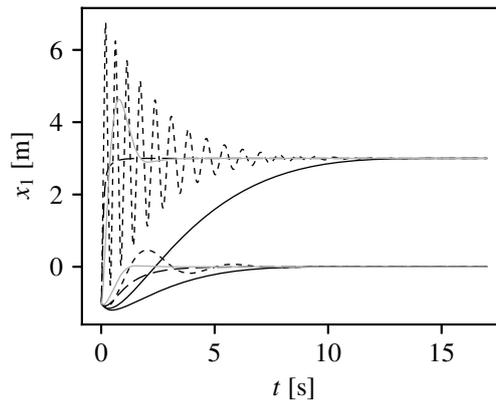


FIGURE 6.5 – Contrôle du système non linéaire : évolution de la position dans le temps. Même légende que la Figure 6.2.

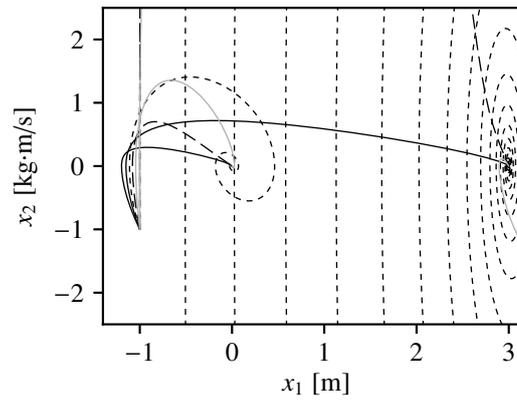


FIGURE 6.6 – Contrôle du système non linéaire : évolution dans l'espace des états. Même légende que la Figure 6.2.

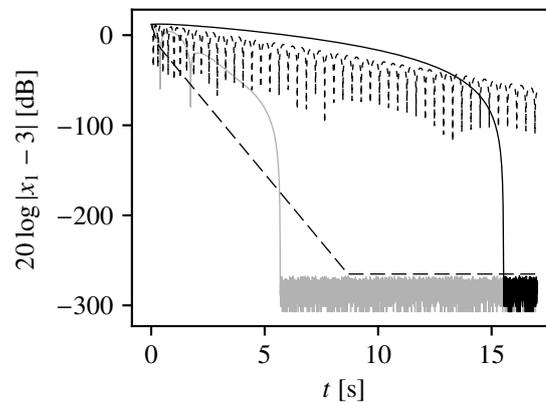


FIGURE 6.7 – Contrôle du système linéaire : évolution de l'erreur de position dans le temps, correspondant au contrôle vers 3. Même légende que la Figure 6.4. La ligne décroissante sature pour des raisons numériques.

### 6.3.1 Contexte

Des absorbeurs acoustiques passives ne sont pas efficaces pour des fréquences basses en raison de la largeur de matériau nécessaire à ces longueurs d'onde. C'est la raison pour laquelle des haut-parleurs commandés ont été utilisés comme absorbeurs acoustiques en pour des basses fréquences.

Une approche possible consiste en la commande des caractéristiques du haut-parleur dans le but de les faire correspondre à l'impédance acoustique caractéristique de l'air dans le tube. Dans ce cas, le système se comporte comme une ligne de transmission acoustique [42] et absorbe le son.

Plus spécifiquement, un absorbeur actif utilisant un haut-parleur commandé en courant, se basant sur un retour d'état à partir de la pression ou la vitesse a été proposé dans [212]. Il était capable de fournir une absorption sur une large plage fréquentielle.

Dans la présente contribution, le même modèle et principe de correspondance d'impédance que dans [212] sont utilisés. Une loi de commande non linéaire (passive en temps fini, Sous-section 6.2.3) est appliqué au modèle, et son efficacité est évaluée par une simulation numérique.

### 6.3.2 Modèle électroacoustique

Le modèle consiste d'un tube dans lequel des ondes planes se propagent (Sous-sous-section 6.3.2.1) couplé à un haut-parleur électrodynamique contrôlé en courant (Sous-sous-section 6.3.2.2).

#### 6.3.2.1 Modèle de propagation d'ondes planes dans un tube

On considère un tube semi-infini avec un haut-parleur monté à  $z = 0$ , dont la membrane est modélisé comme un piston plan (Fig. 6.8, cf. le modèle de Thiele & Small qui sera introduit dans la Sous-sous-section 9.3.1.3 et dans la Sous-section 10.1.3). Une propagation en ondes planes est supposée, de sorte que le champ de pression peut être décomposé en des ondes progressives  $p^+(t - z/c)$  et  $p^-(t + z/c)$ , où  $c$  est la vitesse du son. À  $z = 0$ , la vitesse des particules de l'air égale celle du piston plan, ce qui donne la relation suivante entre le champ de pression  $p_{ac}(t)$  à  $z = 0$  et la vitesse du piston plan  $\dot{\xi}(t)$  :

$$p_{ac}(t) = 2p^+(t) - \rho c \dot{\xi}(t), \quad (6.13)$$

où  $\rho$  est la densité massique volumétrique de l'air.

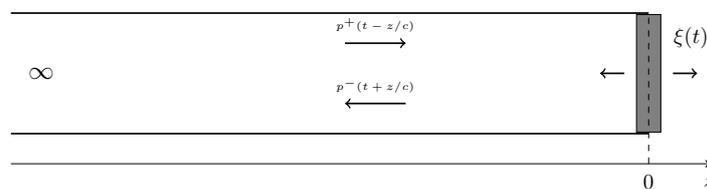


FIGURE 6.8 – Propagation d'ondes planes dans un tube semi-infini. Un piston plan à  $z = 0$  représente le modèle de haut-parleur. [Figure de Tristan Lebrun]

#### 6.3.2.2 Modèle de haut-parleur commandé en courant

**MODÈLE PHYSIQUE** Le haut-parleur est monté dans une enceinte. Selon le modèle de Thiele & Small, sa membrane est représentée comme un piston plan qui est un oscillateur mécanique de déplacement  $\xi(t)$  et de quantité de mouvement  $\mathfrak{p}(t) = M_m \dot{\xi}(t)$ , où  $M_m$  est la masse en mouvement. L'oscillateur est excité par la force de

Lorentz  $Bl i(t)$  et la force due à la pression acoustique  $S_d p_{ac}(t)$ , de sorte que sa dynamique est représentée par la balance des forces :

$$K_m \zeta(t) + R_m \dot{\zeta}(t) + \dot{p}(t) + Bl i(t) = S_d p_{ac}(t), \quad (6.14)$$

où  $K_m$  [N/m] est la raideur associée avec la suspension et l'enceinte,  $R_m$  [Ns/m] est le coefficient d'amortissement mécanique,  $Bl$  [N/A] le facteur de couplage électromécanique, et  $i$  le courant électrique (entrée du système). Puisque le haut-parleur est commandé en courant, le comportement électrique du haut-parleur (résistance  $R_e$  [ $\Omega$ ] et induction  $L_e$  [H] de la bobine) ne doit pas être pris en compte.

**MODÈLE SHP** Le modèle de haut-parleur de l'Éq. (6.14) peut être reformulé comme un SHP avec la fonction Hamiltonienne

$$\mathcal{H}(\zeta, p) = \frac{K_m \zeta^2}{2} + \frac{p^2}{2M_m}, \quad (6.15)$$

représentant la somme des énergies potentielle et cinétique. Définissant l'état et l'entrée du système par

$$\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \zeta(t) : \text{déplacement} \\ p(t) : \text{qté. de mvt.} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) \triangleq \begin{bmatrix} i(t) : \text{courant électrique} \\ p_{ac}(t) : \text{pression acoustique} \end{bmatrix},$$

le SHP s'écrit

$$\{\mathcal{S}\} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_J - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_m \end{bmatrix}}_R \right) \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \underbrace{\begin{bmatrix} G_i & G_p \end{bmatrix}}_G \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_i^T \\ G_p^T \end{bmatrix}}_{G^T} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (6.16)$$

avec  $J$  antisymétrique,  $R$  semi-défini positive,  $G_i = \begin{bmatrix} 0 & -Bl \end{bmatrix}^T$  et  $G_p = \begin{bmatrix} 0 & S_d \end{bmatrix}^T$ . Les sorties sont définies comme les quantités énergétiques duales

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e(t) : \text{tension de la force contre-électromotrice} \\ v_{ac}(t) : \text{vitesse acoustique} \end{bmatrix}.$$

### 6.3.3 Conception de la loi de commande

Dans la présente sous-section, un contrôleur est conçu qui fournit le courant d'entrée  $i^*(t)$  étant donné

1. un mouvement de membrane cible  $(\zeta^*(t), \dot{\zeta}^*(t))$  et
2. la mesure de la pression acoustique  $p_{ac}(t)$  et la vitesse  $\dot{\zeta}(t)$  à la membrane du haut-parleur.

La vitesse cible de la membrane peut être déduite de la mesure de la pression selon

$$\dot{\zeta}^*(t) = \frac{p_{ac}(t)}{\rho c} \quad (6.17)$$

de sorte que l'impédance acoustique à la membrane égale l'impédance acoustique caractéristique  $\rho c$ .

## 6.3.3.1 Loi de commande en temps fini

Le modèle du haut-parleur est un système du deuxième ordre de la forme d'un masse-ressort-amortisseur linéaire. Par identification avec la loi de commande en temps fini du double intégrateur (Lemme 6.1), on trouve la loi de commande en temps fini

$$i^*(t) = \frac{S_d p_{ac}(t) - K_m \zeta(t) - R_m \dot{\zeta}(t) + M_m \left( k_1 [\zeta(t) - \zeta^*(t)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k_2 [\dot{\zeta}(t) - \dot{\zeta}^*(t)]^\alpha \right)}{Bl}. \quad (6.18)$$

## 6.3.3.2 Loi de commande passive en temps fini

**PRINCIPE** Le but de l'utilisation de la loi de commande passive en temps fini est de garantir

1. la convergence vers la dynamique cible  $\zeta^*(t)$  et
2. la stabilité dans le cas d'une mauvaise estimation des paramètres physiques du système.

Dans ce but, on exige que le contrôleur ait la structure SHP suivante :

$$\{\mathcal{C}\} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = (\mathbf{J}_c - \mathbf{R}_c) \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_c) + \mathbf{G}_c \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{G}_c^\top \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_c), \end{cases} \quad (6.19)$$

avec  $\mathbf{J}_c$  anti-symétrique et  $\mathbf{R}_c$  semi-positive définie. Une interconnexion préservant la puissance (*power-preserving interconnection*, cf. [180]) de  $\{\mathcal{C}\}$  avec  $\{\mathcal{S}\}$  est obtenue par (cf. Fig. 6.9)

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \mathbf{u}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \mathbf{y}_c(t) \end{bmatrix}, \quad (6.20)$$

permettant d'écrire le système en boucle fermée comme le SHP

$$\{\mathcal{S} + \mathcal{C}\} : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{G}_i \mathbf{G}_c^\top \\ \mathbf{G}_c \mathbf{G}_i^\top & \mathbf{J}_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{O}_{2 \times 2} \\ \mathbf{O}_{2 \times 2} & \mathbf{R}_c \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_c) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p \\ \mathbf{O}_{2 \times 1} \end{bmatrix} p_{ac} \\ v_{ac} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_p^\top & \mathbf{O}_{1 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_c) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.21)$$

Dans la suite, on utilise les mêmes états pour le système et le contrôleur :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ .

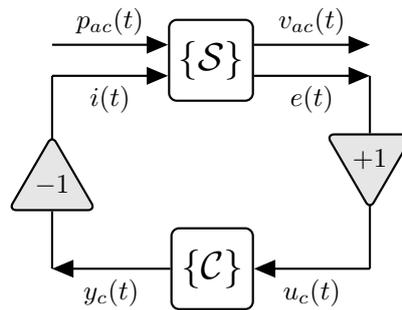


FIGURE 6.9 – Schéma-bloc de l'architecture de contrôle proposée. [Figure de Tristan Lebrun]

Ensuite, on modifie l'énergie totale  $\mathcal{H}_{s+c}(\mathbf{x})$  du système bouclé ainsi que les matrices d'interconnexion dans (6.21), ce qui correspond à la méthode de commande IDA-PBC ([182], cf. la Sous-section 6.2.1).

Le contrôleur  $\{\mathcal{C}\}$  est alors conçu suivant les étapes suivantes.

1. On choisit une énergie  $\mathcal{H}_{s+c}(\mathbf{x}) \geq 0$  par le système en boucle fermé qui ait un minimum à un état cible  $\mathbf{x}^*$ , pour que l'état converge vers cet état cible  $\mathbf{x}^*$ .

2. On en déduit l'énergie du contrôleur selon

$$\mathcal{H}_c(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{s+c}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}) \geq 0.$$

3. La loi de commande est fournie par la deuxième ligne de l'Éq. (6.19) :

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{G}_c^T \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}).$$

APPLICATION À LA LOI DE COMMANDE PROPOSÉE L'énergie de la boucle fermée est choisie comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{s+c}(q, \mathbf{p}) = & M_m k_1 \frac{2-\alpha}{2} |\zeta - \zeta^*|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{M_m k_2}{R_m} \frac{1}{\alpha+1} \left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}^*}{M_m} \right|^{\alpha+1} \\ & + \frac{\beta}{2} (\zeta - \zeta^*)^2 + \frac{\gamma}{2M_m} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^2. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Cette énergie a un minimum à  $\zeta = \zeta^*$  et  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ , donc on peut l'utiliser pour concevoir le contrôleur permettant de contrôler l'état du système bouclé  $\{\mathcal{S} + \mathcal{C}\}$  vers les cibles  $(\zeta^*, \mathbf{p}^*)$ . L'énergie du contrôleur est déduite en soustrayant (6.15) de (6.22), ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c(q, \mathbf{p}) = & M_m k_1 \frac{2-\alpha}{2} |\zeta - \zeta^*|^{\frac{2}{2-\alpha}} + \frac{M_m k_2}{R_m} \frac{1}{\alpha+1} \left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}^*}{M_m} \right|^{\alpha+1} \\ & + \frac{\beta}{2} (\zeta - \zeta^*)^2 + \frac{\gamma}{2M_m} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^2 - \frac{1}{2M_m} \mathbf{p}^2 - \frac{K_m}{2} \zeta^2, \end{aligned} \quad (6.23)$$

où  $\beta > K_m$  et  $\gamma > 1$  garantissent que  $\mathcal{H}_c(\zeta, \mathbf{p})$  est inférieurement bornée. Finalement, en imposant la structure SHP

$$\{\mathcal{C}\} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J_c} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{R_c} \right) \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}) + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{Bl} \\ \frac{R_m}{Bl} \end{bmatrix}}_{G_c} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{Bl} & \frac{R_m}{Bl} \end{bmatrix}}_{G_c^T} \nabla \mathcal{H}_c(\mathbf{x}_c), \end{cases} \quad (6.24)$$

la sortie du contrôleur s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_c = & \frac{1}{Bl} \left[ M_m k_1 |\zeta - \zeta^*|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} + M_m k_2 \left[ \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}^*}{M_m} \right]^\alpha - K_m \zeta - R_m \frac{\mathbf{p}}{M_m} \right. \\ & \left. + \gamma R_m \left( \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}^*}{M_m} \right) + \beta (\zeta - \zeta^*) \right]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Cette loi de commande (6.25) est une version passive de la loi (6.18), quelles que soient les valeurs des paramètres de contrôle  $\beta > K_m$  et  $\gamma > 1$ .

### 6.3.4 Simulation numérique

*Cette simulation a été effectuée par Tristan Lebrun.*

Deux lois de commande différentes sont utilisées dans le but d'atténuer une excitation en pression  $p_{ac}(t)$  en forme de chirp allant de 20Hz à 300Hz à des niveaux sonores de 94dB et 106dB.

**Loi 1 : la loi de commande passive en temps fini proposée (6.25).** La loi est évaluée en simulant le système en boucle fermée  $\{\mathcal{S} + \mathcal{C}\}$  en utilisant la méthode numérique du gradient discret [82, 241].

**Loi 2 : proposée dans [212].** Cette loi se base sur la modification des propriétés électromécaniques du haut-parleur, et prend la forme d'une fonction de transfert entre la pression acoustique mesurée et le courant électrique :

$$I^*(s) = \frac{S_d \rho c - sM_m(1 - \mu) - R_m - \frac{K_m}{s}(1 - \mu)}{Bl \left( \mu s \frac{M_m}{S_d} + \rho c + \mu \frac{K_m}{s S_d} \right)} P(s), \quad (6.26)$$

où  $P(s)$  et  $I^*(s)$  sont les transformées de Laplace de respectivement  $p_{ac}(t)$  et  $i^*(t)$ , et  $\mu \in [0, 1]$  est un paramètre de contrôle qui modifie la largeur de bande de l'absorption.

Des simulations sont effectuées prenant la pression acoustique totale  $p_{ac}(t)$  comme entrée et donnant le courant électrique généré par une loi de commande donnée ainsi que la vélocité de la membrane comme sorties. Ensuite, la pression réflétee à la membrane est calculée comme

$$p^-(t) = \frac{p_{ac}(t) - \rho c \dot{\xi}(t)}{2}. \quad (6.27)$$

On a utilisé les paramètres de contrôle  $k_1 = 750000$ ,  $k_2 = 50$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $\beta = 1.1K_m$ ,  $\gamma = 1.1$ ,  $\mu = 0.15$  et les mêmes paramètres du modèle de haut-parleur que ceux dans [212]. La fréquence d'échantillonnage de la simulation est  $f_s = 44100\text{Hz}$ .

La simulation dans le domaine temporel de la pression réflétee  $p^-(t)$  à la membrane du haut-parleur pour une entrée  $p_{ac}(t)$  à 94dB est montrée Figure 6.10. L'amplitude réduite de la pression réflétee  $p^-(t)$  comparée à la pression totale  $p_{ac}(t)$  montre une absorption du son efficace pour les deux lois de commande.

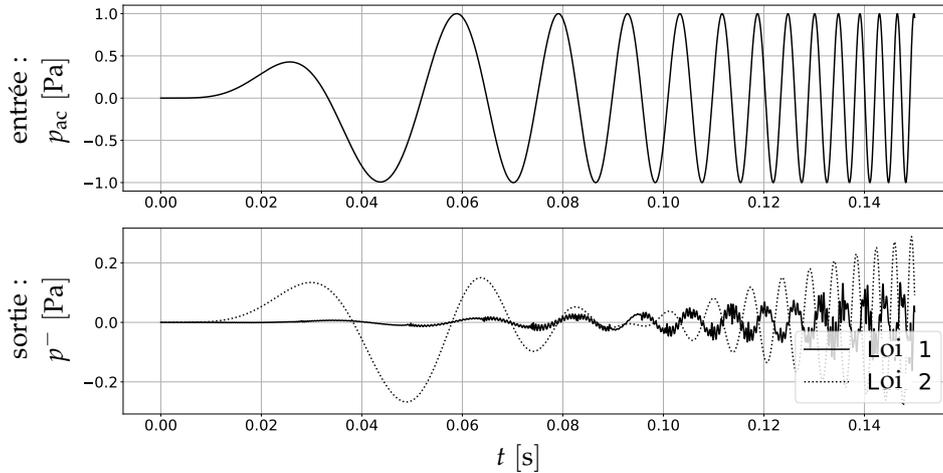


FIGURE 6.10 – Simulations dans le domaine temporel de la pression réflétee  $p^-(t)$  à la membrane du haut-parleur pour une entrée  $p_{ac}(t)$  à 94dB, pour les deux lois de commande.

L'efficacité d'absorption est aussi évaluée dans le domaine fréquentiel en calculant le coefficient d'absorption comme une fonction de la fréquence, qui est définie comme

$$\alpha(f) = 1 - \left| \frac{Z(f) - \rho c}{Z(f) + \rho c} \right|^2, \quad (6.28)$$

où  $Z(f) = P(f)/V(f)$ , et  $P(f)$  et  $V(f)$  sont respectivement les transformées de Fourier du signal de pression  $p_{ac}(t)$  et du signal de vitesse  $\dot{\xi}(t)$ .

Le coefficient  $\alpha(f)$  est montré Figure 6.11. On note que la **Loi 2** obtient sa meilleure absorption du son ( $\alpha$  très proche de 1) autour de la fréquence de résonance du haut-parleur (84Hz). La **Loi 1** proposée est particulièrement efficace à des fréquences plus basses que la fréquence de résonance, et a une largeur de bande un peu plus grande.

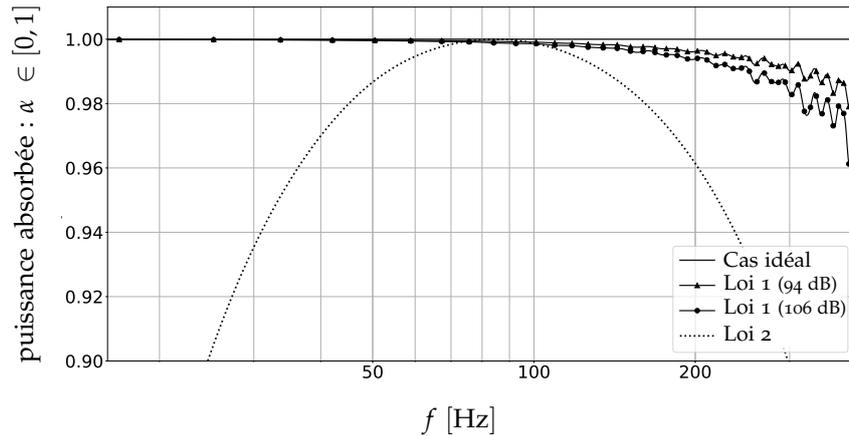


FIGURE 6.11 – Coefficient d’absorption en fonction de la fréquence pour les deux lois de commande et pour des pressions d’entrée à 94dB et 106dB. La **Loi 1** (non linéaire) a été appliquée à deux niveaux sonores de pression d’entrée, tandis que la **Loi 2** (linéaire) ne dépend pas de l’amplitude de la pression d’entrée.

On note au passage que la boucle fermée consistant du modèle linéaire du haut-parleur (6.16) et du contrôleur non linéaire (6.25) est non linéaire. Pour cette raison, son comportement varie avec l’amplitude de la pression d’entrée, comme c’est visible sur la Figure 6.11 pour  $p_{ac}(t)$  aux niveaux sonores de 94dB et 106dB.

#### 6.4 PERSPECTIVES

Dans ce chapitre, on a montré comment établir une loi de commande passive en temps fini pour un système physique du deuxième ordre, où la passivité sert à obtenir une robustesse contre une mauvaise estimation des paramètres.

On pourrait essayer de généraliser cette approche au contrôle passif en temps fini d’EDOs d’ordre  $n$  quelconque. Ce résultat pourrait être combiné avec une approche par platitude afin de pouvoir contrôler la classe des systèmes physiques plats en temps fini.

La difficulté pour le cas des ordres supérieurs à 2 consiste en le fait qu’il faut être capable de réécrire le système contrôlé en temps fini (p.ex. avec l’une des lois mentionnés dans la Sous-section 5.2.2) comme un SHP.

De plus, si l’on arrive à réécrire un système d’ordre  $n$  comme un SHP, on peut aussi généraliser la méthode numérique par le gradient discret avec une linéarisation locale déraidissante qui a été mentionnée pour l’ordre 1 en Sous-section 7.2.2.

## MÉTHODES DE SIMULATION POUR DES EDOS STABILISÉES EN TEMPS FINI RAIDES

---

Ce chapitre mentionne les méthodes existantes pour la simulation numérique d'une EDO stabilisée en temps fini, qui est nécessairement infiniment raide à l'origine (Section 7.1). Ensuite, on propose une méthode de simulation avec une linéarisation locale autour de l'origine pour des buts d'implémentation sur un microcontrôleur, et qui peut aussi être incorporée dans la méthode de simulation d'un Système Hamiltonien à Ports par le gradient discret (Section 7.2).

---

### TABLE DES MATIÈRES

7.1	Méthodes existantes . . . . .	69
7.1.1	Méthode de simulation d'Euler explicite/implicite . . . . .	69
7.1.2	Méthode de simulation préservant la stabilité en temps fini . . . . .	70
7.2	Méthode avec une linéarisation locale . . . . .	70
7.2.1	Linéarisation locale et la méthode d'Euler explicite . . . . .	71
7.2.2	Perspective : linéarisation locale et la méthode du gradient discret . . . . .	73

---

### 7.1 MÉTHODES EXISTANTES

Comme illustrée dans le Chapitre 5, un système EDO stabilisé en temps fini est nécessairement non Lipschitz continue au point d'équilibre (l'origine) [103, 174]. Le champ de vecteurs  $y$  devient infiniment raide, ce qui peut poser des problèmes numériques lors d'une simulation ou implémentation sur de la loi de commande sur un microcontrôleur.

La question de la simulation numérique d'un système EDO stabilisé en temps fini n'a pas obtenu beaucoup d'attention jusqu'à récemment. Après l'étude de l'utilisation des méthodes d'Euler explicite et implicite (Sous-section 7.1.1), une méthode de discrétisation a été développée pour des systèmes homogènes, qui préserve la stabilité en temps fini en utilisant une transformation basée sur l'homogénéité (Sous-section 7.1.2).

#### 7.1.1 Méthode de simulation d'Euler explicite/implicite

En 2016-2017, Efimov, Polyakov, Levant et Perruquetti [76, 77] ont étudié l'utilisation des méthodes de discrétisation d'Euler explicite/implicite pour la simulation d'un système EDO stabilisé en temps fini. Ils ont montrés que des approximations acceptables de la solution vers une petite région autour de l'origine peuvent être obtenues par la méthode d'Euler explicite, qui s'améliorent si le pas temporel devient plus petit. La méthode d'Euler implicite permet d'atteindre l'origine, mais nécessite un calcul implicite (itératif).

**EXEMPLE** À titre illustratif, le double intégrateur contrôlé en temps fini,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 |x_1|^{2-\alpha} - k_2 |x_2|^\alpha, \end{cases}$$

avec  $\alpha = 0,6$  et  $k_1 = k_2 = 1$ , est simulé par la méthode d'Euler explicite, ce qui donne la relation explicite

$$\begin{cases} \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{\delta t} = x_2(k) \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{\delta t} = -k_1 [x_1(k)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [x_2(k)]^\alpha, \end{cases}$$

et par la méthode d'Euler implicite, ce qui donne la relation implicite

$$\begin{cases} \frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{\delta t} = x_2(k+1) \\ \frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{\delta t} = -k_1 [x_1(k+1)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2 [x_2(k+1)]^\alpha. \end{cases}$$

Le résultat pour  $\delta t = 10^{-3}$ s est montré Figure 7.1, où la relation implicite de la méthode d'Euler implicite a été résolue par la méthode de Newton-Raphson (erreur d'itération de  $10^{-6}$ ).

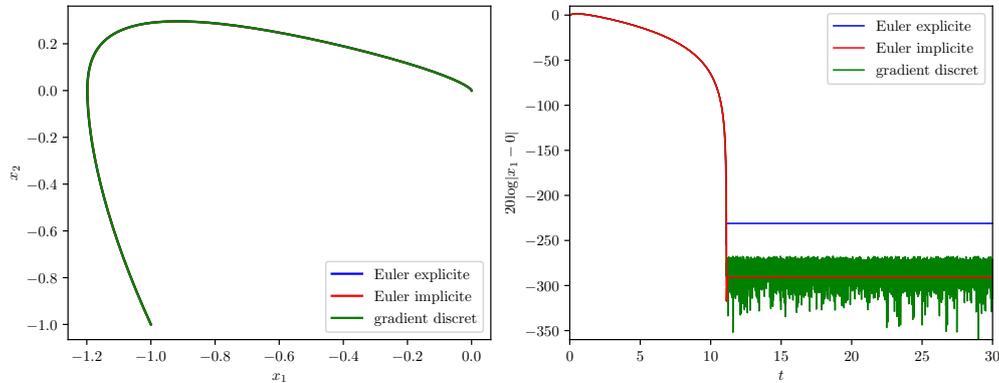


FIGURE 7.1 – Simulation d'un double intégrateur contrôlé en temps fini par les méthodes d'Euler explicite et implicite (à titre indicatif, on voit aussi une solution par la méthode du gradient discret standard).

### 7.1.2 Méthode de simulation préservant la stabilité en temps fini

En 2019, Polyakov, Efimov et Brogliato [196] ont établi une méthode de simulation dédiée pour un système bouclé homogène, permettant de préserver la stabilité en temps fini lors de la discrétisation.

Plus précisément, ils utilisent l'homogénéité du système considéré pour définir une transformation d'état non linéaire vers un nouvel état dans lequel ils peuvent garantir que la discrétisation par la méthode d'Euler implicite (calcul itératif) préserve la stabilité en temps fini. Par la transformation d'état inverse, on obtient ainsi la simulation de la trajectoire dans les coordonnées d'origine.

**EXEMPLE** Plus de détails concernant l'utilisation de cette méthode seront donnés dans la Sous-sous-section 11.6.2.1, où elle est appliquée à la simulation du double intégrateur, dont le résultat de la simulation est montrée Figure 7.2 pour le cas  $\alpha = 1/2$  et  $\delta t = 10^{-4}$ . Contrairement à la figure précédente, ici, on obtient en effet une simulation qui atteint zéro en un temps fini.

## 7.2 MÉTHODE AVEC UNE LINÉARISATION LOCALE

Le fait que les lois de commande en temps fini soient très raides autour de l'origine, l'expression non linéaire  $[x]^\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , n'étant pas Lipschitz continue à  $x = 0$ , peut

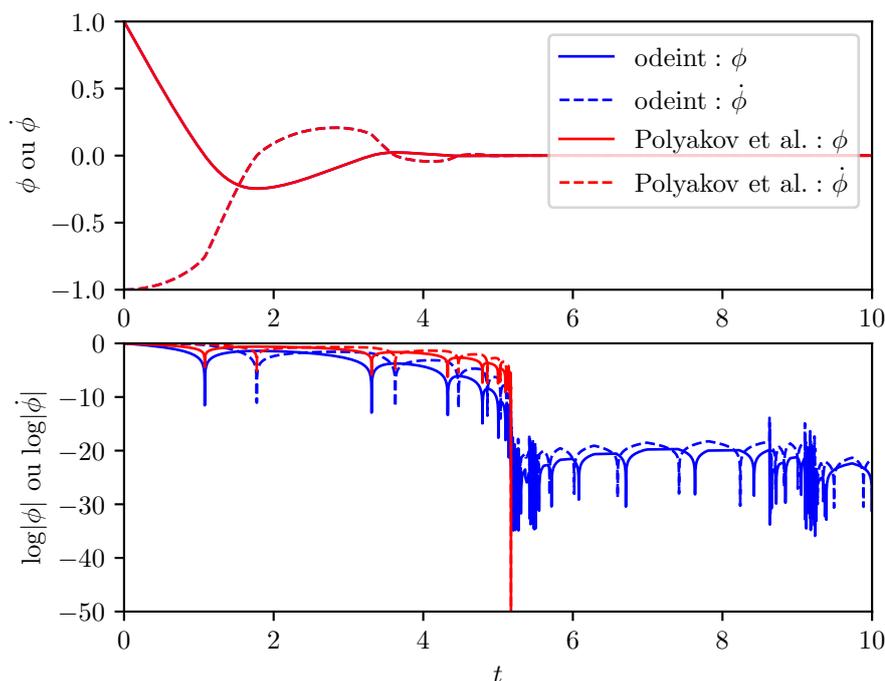


FIGURE 7.2 – Simulation d’un double intégrateur contrôlé en temps fini par la méthode préservant la stabilité en temps fini (à titre indicatif, on voit aussi une solution par un solveur numérique standard odeint)

poser des problèmes lors d’une implémentation numérique. Dans la Sous-section 7.2.1, on propose de remplacer l’expression non linéaire par une loi linéaire dans une petite zone arbitraire autour de l’origine. Dans la Sous-section 7.2.2, on mentionne que l’on peut incorporer cette méthode dans la méthode du gradient discret dans le formalisme des SHPs.

### 7.2.1 Linéarisation locale et la méthode d’Euler explicite

On se place dans l’exemple du système masse-ressort-amortisseur (6.1), contrôlée par la loi de commande

$$u = m \left( \underbrace{k_1 |x_1|^{2-\alpha}}_{(NL1)} + \underbrace{k_2 \left| \frac{x_2}{m} \right|^\alpha}_{(NL2)} \right) + kx_1 + \frac{c}{m}x_2, \quad (7.1)$$

qui contient deux contributions non linéaires (non Lipschitz continues), (NL1) et (NL2). On propose de définir des zones autour de l’origine,

$$x_1 \in \mathcal{D}_1 = ]-\sigma_1, \sigma_1[$$

$$\frac{x_2}{m} \in \mathcal{D}_2 = ]-\sigma_2, \sigma_2[,$$

de taille  $2\sigma_i$  arbitraire (petite), dans lesquelles les expressions non linéaires sont remplacées par des interpolations linéaires, comme indiqué dans la Figure 7.3, enlevant la partie la plus raide du champ de vecteurs du système (voire infiniment raide à 0).

Cette méthode de simulation « déraidissante » ne préserve pas la propriété de stabilité en temps fini. Elle remplace une loi de commande en temps fini, comme (7.1), par une loi de commande « quasi temps-fini » : le système convergera en temps fini vers une

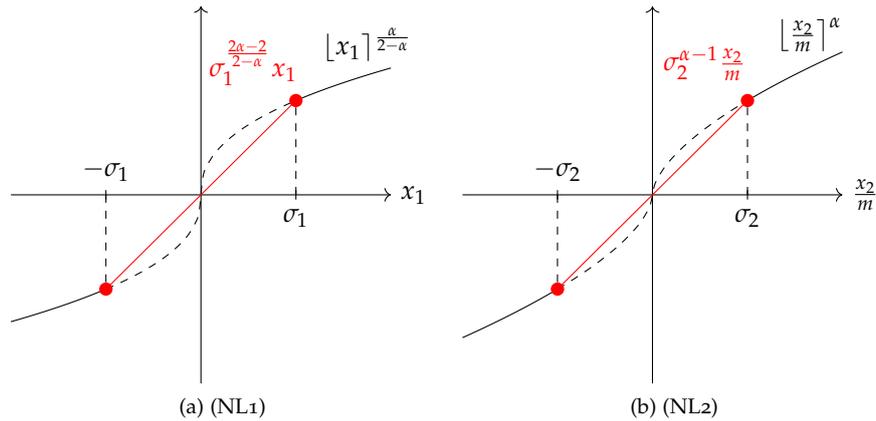


FIGURE 7.3 – Approximation linéaire des non-linéarités autour de l’origine dans la loi de commande en temps fini (7.1).

(petite) zone autour de l’origine, puis continuera à converger asymptotiquement vers l’origine.

EXEMPLE Le système masse-ressort-amortisseur (6.1) avec  $m = 1, c = 1, k = 3$ , contrôlé par la loi (7.1) avec  $\alpha = 0,6, k_1 = 1, k_2 = 2$  est simulée pour plusieurs tailles d’intervalle  $\sigma \triangleq \sigma_1 \triangleq \sigma_2$  (Fig. 7.4). On remarque que l’erreur logarithmique suit une courbe de stabilisation en temps fini (qui terminerait par une pente infinie en théorie lorsque l’origine est atteinte), et s’en détache à un moment d’autant plus tard que  $\sigma$  est petit.

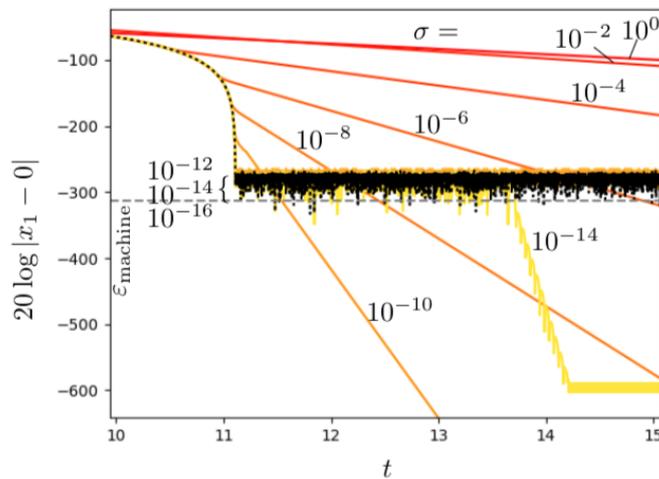


FIGURE 7.4 – Simulation d’un système masse-ressort-amortisseur contrôlé en temps fini par la méthode avec linéarisation locale autour de l’origine pour plusieurs tailles d’intervalle  $\sigma$

IMPLÉMENTATION EXPÉRIMENTALE Dans la Sous-section 10.3.1, lors d’une implémentation sur un microcontrôleur d’une loi de commande en temps fini pareille avec un calcul par la méthode d’Euler explicite dans le contexte du contrôle actif du tom, la méthode numérique avec linéarisation locale autour de l’origine a été utilisée avec succès pour enlever un phénomène numérique de *chattering*.

## 7.2.2 Perspective : linéarisation locale et la méthode du gradient discret

La méthode de simulation utilisant une linéarisation locale pour enlever la zone problématique raide, introduite dans la sous-section précédente, peut être interprétée dans le formalisme des SHPs. On montre ici pour le cas d'un simple intégrateur contrôlé en temps fini que l'on peut incorporer la linéarisation locale dans la méthode de simulation numérique par le gradient discret en agissant sur la fonction hamiltonienne.

Une perspective<sup>1</sup> serait d'étendre cet exemple à une méthode de simulation par gradient discret déraidissante pour le cas général d'une loi de commande d'un système EDO d'ordre  $n$  quelconque.

**EXEMPLE** Système : intégrateur simple contrôlé en temps fini

$$\dot{x} = u = -|x|^\alpha, \alpha \in ]0, 1[.$$

Forme SHP du modèle :

$$\dot{x} = (0 - 1)\nabla H(x)$$

avec

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{\alpha + 1} |x|^{\alpha+1} \\ H'(x) &= |x|^\alpha \\ H''(x) &= \alpha |x|^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Il faut limiter  $H''(x)$  qui atteint une valeur  $+\infty$  en  $x = 0$ . On propose de saturer  $H''(x)$  à l'intersection avec la fonction constante  $K$  (dont la valeur est à choisir). Les points d'intersection sont

$$x_K^* \triangleq \left(\frac{\alpha}{K}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

donc

$$H_K''(x) \triangleq \begin{cases} K & \text{si } |x| \leq x_K^* \\ \alpha |x|^{\alpha-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est dessinée Figure 7.5.

Pour  $H'(x)$ , ça donne

$$\begin{aligned} H_K'(x) &\triangleq \begin{cases} Kx & \text{si } |x| \leq x_K^* \\ Kx_K^* + x^\alpha - x_K^{*\alpha} & \text{si } x > x_K^* \\ -Kx_K^* - |x|^\alpha + x_K^{*\alpha} & \text{si } x < -x_K^* \end{cases} \\ &= \begin{cases} Kx & \text{si } |x| \leq x_K^* \\ |x|^\alpha + (Kx_K^* - x_K^{*\alpha})\text{sgn}(x) & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette fonction est dessinée Figure 7.6.

Pour  $H(x)$ , ça donne

$$H_K(x) = \begin{cases} \frac{K}{2}x^2 & \text{si } |x| \leq x_K^* \\ (Kx_K^* - x_K^{*\alpha})x + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{K}{2}x_K^{*2} + \frac{\alpha}{\alpha+1}(x_K^*)^{\alpha+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est dessinée Figure 7.7.

1. L'extension au cas 2D se fait immédiatement avec la loi de commande du double intégrateur (5.9) pour laquelle on a une fonction de Lyapunov qui peut être utilisée comme fonction hamiltonienne, comme montré dans la Sous-section 6.2.3, mais pour des dimensions plus larges, il n'est pas clair si une écriture d'un système contrôlé sous forme SHP est possible (cf. les lois de commande en haute dimension mentionnées dans la Sous-section 5.2.2).

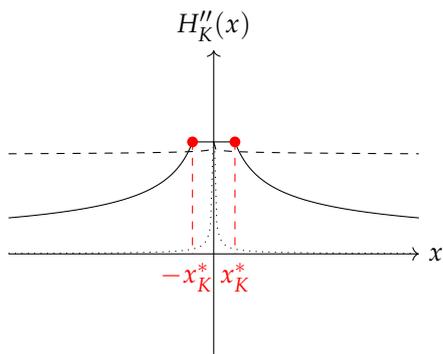


FIGURE 7.5 – Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple :  $H_K''(x)$  avec  $\alpha \rightarrow 0$  (ligne pointillée),  $\alpha = 0,5$  (ligne pleine),  $\alpha \rightarrow 1$  (ligne tiretée)

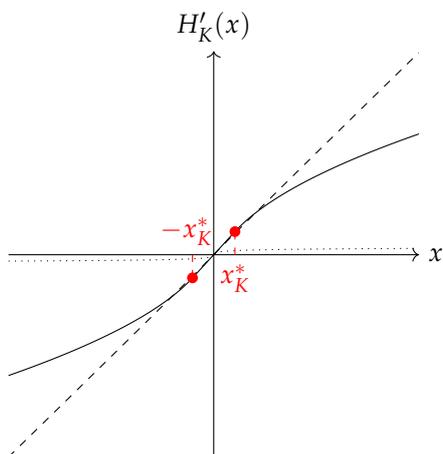


FIGURE 7.6 – Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple :  $H_K'(x)$  avec  $\alpha \rightarrow 0$  (ligne pointillée),  $\alpha = 0,5$  (ligne pleine),  $\alpha \rightarrow 1$  (ligne tiretée)

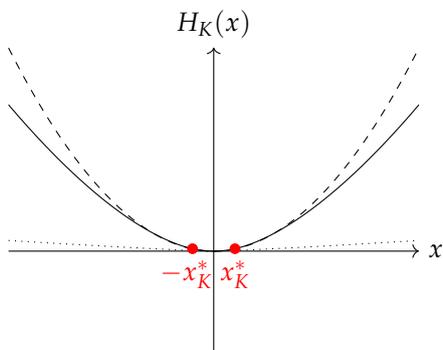


FIGURE 7.7 – Méthode de simulation par gradient discret déraidissante, le cas de l'intégrateur simple :  $H_K(x)$  avec  $\alpha \rightarrow 0$  (ligne pointillée),  $\alpha = 0,5$  (ligne pleine),  $\alpha \rightarrow 1$  (ligne tiretée)

## CONTRÔLE ACTIF D'UNE CORDE NON LINÉAIRE PAR UN SUIVI DE TRAJECTOIRE EN TEMPS FINI

---

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une application de contrôle actif d'une corde (Section 8.1). Dans la Section 8.2, le modèle de la corde non linéaire considéré est introduit, qui présente un glissement fréquentiel. Dans la section 8.3, on montre comment on peut commander ce système en temps fini vers une trajectoire cible, correspondant à un système hypothétique ayant d'autres paramètres physiques (amortissement  $\mu$  ou facteur  $\varepsilon$  de l'importance de la contribution non linéaire). Une simulation du cas où le glissement fréquentiel est supprimé dans un mode de la corde est montrée dans la Section 8.4. La perspective de ce travail serait une étude de la passivité du contrôleur de suivi de trajectoire en temps fini (Section 8.5).

*Ce chapitre vise à énoncer de manière sommaire les étapes de la démarche suivie. Une version plus complète de cette contribution sera publiée sous la forme de l'article [W8].*

---

### TABLE DES MATIÈRES

8.1	Contexte . . . . .	75
8.1.1	Contrôle actif d'une corde . . . . .	75
8.1.2	Contrôle actif d'une corde musicale . . . . .	76
8.2	Modèle . . . . .	76
8.2.1	Modèle EDP . . . . .	76
8.2.2	Reformulation comme un SHP . . . . .	77
8.2.3	Projection modale et réduction d'ordre . . . . .	77
8.3	Commande en temps fini vers un comportement cible . . . . .	78
8.3.1	But du contrôle . . . . .	78
8.3.2	Obtention de la loi de commande . . . . .	78
8.4	Simulation d'une suppression du glissement fréquentiel dans un mode . . . . .	79
8.5	Perspective : vers une commande passive en temps fini par suivi de trajectoire . . . . .	80

---

### 8.1 CONTEXTE

On s'intéresse au développement d'un contrôleur de la corde non linéaire dans le contexte du contrôle actif d'instruments de musique.

#### 8.1.1 Contrôle actif d'une corde

Il existe une quantité considérable de résultats concernant la suppression de vibration de la corde, utilisant des modèles linéaires ou des modèles pouvant inclure plusieurs types de non-linéarités. La corde peut être actionnée aux limites ou dans son domaine, parfois en prenant en compte des interactions avec des systèmes dynamiques de type EDO couplés à la corde. Une grande variété de méthodes de conception de contrôle a été appliquée, et les résultats ont été validés en simulation et expérimentalement.

En particulier, le contrôle par suivi de trajectoire a été utilisé dans [175, 224] où une commande à la frontière d'une corde a été conçue pouvant faire suivre une position de référence par une masse attachée à la corde. Dans des applications concernant des cordes se déplaçant horizontalement, un suivi de vitesse a aussi été utilisé [268].

### 8.1.2 Contrôle actif d'une corde musicale

Dans un contexte musical, le but du contrôle actif et d'influencer la vibration de cordes présentes dans des instruments tels le violon, le piano, la guitare, etc. qui sont produites d'une variété de matériaux comme le nylon et le métal. Des capteurs de déplacement de corde peuvent être électromagnétiques [184], piézoélectriques [88] ou optiques (par exemple [144, 259]). Pour actionner une corde, on peut utiliser un principe électromagnétique (par exemple avec l'*EBow* [107] qui est produit commercialement, ou l'alternative [26], dans le cas d'une corde métallique, ou l'utilisation d'un aimant attaché à une corde non magnétique [259]), ou encore un actionneur piézoélectrique [74].

Concernant le contrôle d'une corde isolée, les résultats suivants ont été rapportés. Dans [29], les principes d'un contrôle PID d'une corde ont été discutées, utilisant un capteur et un actionneur colocalisés, et permettant de modifier la fréquence de résonance et l'amortissement. Plusieurs dispositifs expérimentaux pour le contrôle de la corde ont été développés. Dans [28], une corde de guitare métallique d'une longueur de 24cm accordée à 248Hz a été amortie utilisant un capteur optique et un actionneur électromécanique [26]. Dans [62], les cinq premiers modes d'une corde de guitare ont été amorties utilisant un retour d'état à partir d'une mesure du déplacement de la corde par un laser, et avec un actionneur électromagnétique. Finalement, dans [74], le dispositif consistait d'une corde de guitare métallique de 50cm accordée à 220Hz, un capteur de déplacement optique et un actionneur piézoélectrique à une extrémité de la corde. Basé sur des concepts de commande d'ondes progressives, un amortissement actif est obtenu, et des non-linéarités peuvent être injectées, menant à des effets timbraux.

Le contrôle actif d'autres parties d'instruments couplées à la corde vibrante est aussi possible, comme le chevalet d'un violon [44] ou la table d'harmonie d'un monochorde, guitare acoustique ou violoncelle [20]. Dans [160], la construction d'un piano avec contrôle actif est décrite, avec un capteur piézoélectrique sur la table d'harmonie, et des électro-aimants au-dessus des 88 unités d'actionneurs de corde. Il est possible d'obtenir un son perpétuel (*infinite sustain*), un crescendo sur une note, et plusieurs effets timbraux. Finalement, un système de contrôle embarqué utilisant plusieurs capteurs et actionneurs peut être trouvé dans quelques instruments commercialement disponibles comme le *Sensus Smart Guitar* (MIND Music Labs) [245] et le *Smart Acoustic Guitar* (HyVibe<sup>1</sup>).

## 8.2 MODÈLE

Le modèle EDP de la corde non linéaire (Sous-section 8.2.1) est réécrite comme un SHP (Sous-section 8.2.2), et projeté sur une base modale (Sous-section 8.2.3). En imposant ici une forme spécifique à l'entrée  $u$  du système, une réduction d'ordre exacte est obtenue.

### 8.2.1 Modèle EDP

Un modèle de Kirchoff adimensionné pour la vibration transverse d'une corde non linéaire est considéré ([130, 223], Fig. 8.1) :

$$\partial_{tt}w(z,t) + \mu\partial_t w(z,t) - \left(1 + \varepsilon \left[ \int_{\Omega} (\partial_z w(z,t))^2 dz \right]\right) \partial_{zz}w(z,t) = u(z,t), \quad (8.1)$$

avec  $u$  la force distribuée définie sur  $(z,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ ,  $\Omega = [0,1]$ ,  $\mu$  un coefficient positif représentant l'amortissement visqueux et  $\varepsilon$  représentant l'importance relative de la non-linéarité due à la variation de tension exprimée par l'intégrale  $\int_{\Omega} (\partial_z w(z,t))^2 dz$ .

1. Smart Acoustic Guitar, HyVibe, Paris, <https://www.hyvibeguitar.com/>.

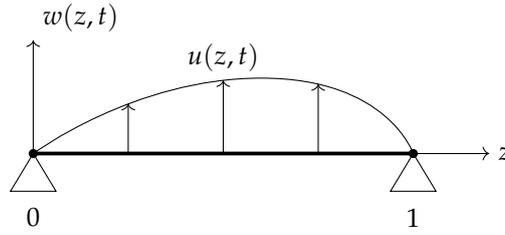


FIGURE 8.1 – Modèle de corde non linéaire

La corde est fixée aux deux extrémités et initialement au repos (conditions à la frontière de Dirichlet) :

$$\begin{aligned} u(z=0, t) &= 0 & u(z=1, t) &= 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(z, t=0) &= 0 & \partial_t u(z, t=0) &= 0 & \forall z \in \Omega. \end{aligned}$$

### 8.2.2 Reformulation comme un SHP

Comme montré dans [111], la corde non linéaire (8.1) peut être réécrite sous la forme d'un SHP de dimension infinie d'état

$$\mathbf{x}(z, t) \triangleq \begin{bmatrix} q(z, t) \\ p(z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_z w(z, t) \\ \partial_t w(z, t) \end{bmatrix},$$

et avec une fonction hamiltonienne non quadratique

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(z, t)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ p^2(z, t) + T(q(z, t)) q^2(z, t) \right] dz, \quad (8.2)$$

où

$$T(q) = 1 + \varepsilon \left[ \int_{\Omega} (q(z, t))^2 dz \right].$$

On retrouve le SHP suivant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \partial_t q \\ \partial_t p \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \partial_z \\ \partial_z & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \delta_q \mathcal{H} \\ \delta_p \mathcal{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_q \mathcal{H} \\ \delta_p \mathcal{H} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (8.3)$$

L'entrée  $u(z, t)$  étant la force distribuée appliquée à la corde, on obtient que la sortie associée  $y(z, t) = \partial_t w(z, t)$  est sa vitesse transverse. L'expression  $\int_{\Omega} u(z, t) y(z, t) dz$  représente ainsi la puissance externe instantanée transférée à la corde.

### 8.2.3 Projection modale et réduction d'ordre

Ce modèle SHP est projeté sur les modes propres de la corde fixée aux deux extrémités :

$$e_m(z) = \sqrt{2} \sin(m\pi z), \quad m > 0$$

et une réduction d'ordre exacte à  $K$  modes est effectuée :

$$w(z, t) \approx \sum_{m=1}^K e_m(z) W_m(t).$$

D'après un calcul précisé dans [111], on obtient l'état

$$x(z,t) \approx \begin{bmatrix} \partial_z e_1(z) \dots \partial_z e_K(z) & \mathbf{O}_{1 \times K} \\ \mathbf{O}_{1 \times K} & e_1(z) \dots e_K(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \partial_t \mathbf{W}(t) \end{bmatrix} \triangleq \Phi^\top(z) \mathbf{X}(t),$$

et le Hamiltonien

$$H(\mathbf{X}(t)) = \frac{1}{2} \mathbf{X}^\top(t) \mathbf{L}_K \mathbf{X}(t),$$

avec

$$\mathbf{L}_K = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_K^2 (1 + \varepsilon \mathbf{X}^\top(t) \mathbf{N} \mathbf{X}(t)) & \mathbf{O}_{K \times K} \\ \mathbf{O}_{K \times K} & \mathbf{I}_{K \times K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_K^2 & \mathbf{O}_{K \times K} \\ \mathbf{O}_{K \times K} & \mathbf{O}_{K \times K} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_K^2 = \pi^2 \text{diag}(1, 2^2, \dots, K^2).$$

Le modèle SHP du système projeté (de dimension finie) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \left( \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{K \times K} & \mathbf{I}_{K \times K} \\ -\mathbf{I}_{K \times K} & \mathbf{O}_{K \times K} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{K \times K} & \mathbf{O}_{K \times K} \\ \mathbf{O}_{K \times K} & \mu \mathbf{I}_{K \times K} \end{bmatrix} \right) \nabla H(\mathbf{X}) + \mathbf{G} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{G}^\top \nabla H(\mathbf{X}), \end{cases} \quad (8.4)$$

avec  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{1 \times K} & \mathbf{I}_{1 \times K} \end{bmatrix}^\top$ .

**HYPOTHÈSE SUR L'ENTRÉE** Nous considérons ici le cas où la loi de commande  $u(z,t)$  du système de dimension finie ne contient seulement des contributions selon les  $K$  premiers modes  $e_m(z)$ , par exemple de la forme

$$u(z,t) = \sum_{m=1}^K e_m(z) U(t). \quad (8.5)$$

**RÉDUCTION D'ORDRE EXACTE** Sous cette hypothèse sur l'entrée, une réduction d'ordre exacte est obtenue dans le modèle (8.4).

### 8.3 COMMANDE EN TEMPS FINI VERS UN COMPORTEMENT CIBLE

#### 8.3.1 But du contrôle

L'architecture de contrôle considéré est schématisé dans la Figure 8.2.

On définit une dynamique cible  $\{\mathcal{S}^*\}$  d'une corde non linéaire avec des paramètres cibles  $(\mu^*, \varepsilon^*)$ . Si l'on applique une entrée donnée  $v$  à ce système cible, une trajectoire de référence cible est générée.

On veut contrôler un système physique  $\{\mathcal{S}\}$  ayant des paramètres  $(\mu, \varepsilon)$  de sorte qu'il suive la trajectoire de référence cible pour une même entrée  $v$ , comme s'il avait les paramètres physiques  $(\mu^*, \varepsilon^*)$  du système cible  $\{\mathcal{S}^*\}$ .

À ce but, un contrôleur  $\{\mathcal{C}\}$  est conçu, effectuant un suivi de trajectoire en temps fini.

**HYPOTHÈSE SUR LES CAPTEURS** On suppose ici que l'état entier de la corde non linéaire  $\{\mathcal{S}\}$  est connu.

#### 8.3.2 Obtention de la loi de commande

Le modèle SHP projeté (8.4) du système considéré  $\{\mathcal{S}\}$  contient  $K$  oscillateurs non linéaires couplés, ayant chacun un état

$$\begin{bmatrix} W_m(t) \\ \dot{W}_m(t) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq m \leq K.$$

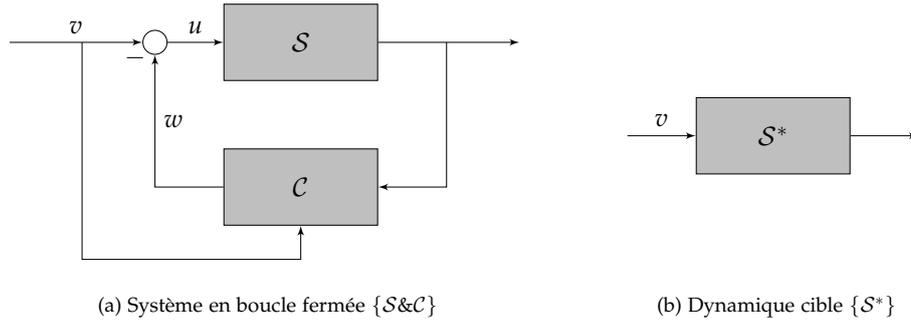


FIGURE 8.2 – Architecture du contrôleur de suivi de trajectoire

Pareillement, le système cible  $\{S^*\}$  peut être représenté par le modèle SHP projeté (8.4) et contient  $K$  oscillateurs non linéaires couplés, ayant chacun un état

$$\begin{bmatrix} W_m^*(t) \\ \dot{W}_m^*(t) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq m \leq K.$$

Ici, l'évolution des oscillateurs  $(W_m^*, \dot{W}_m^*)$  peut être calculée numériquement pour une entrée donnée  $v$ .

On définit une erreur

$$e_L(t) \triangleq W_L(t) - W_L^*(t),$$

pour le  $L^{\text{ème}}$  mode (au choix). Si l'on est capable d'imposer une dynamique en temps fini pour cette erreur :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_L(t) \\ \dot{e}_L(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_L(t) \\ -l_1 [e_L(t)]^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - l_2 [\dot{e}_L(t)]^\alpha \end{bmatrix}, \quad (8.6)$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $l_1, l_2 > 0$ , on aura que le  $L^{\text{ème}}$  mode du système considéré  $\{S\}$  est contrôlé en temps fini vers le  $L^{\text{ème}}$  mode du système cible  $\{S^*\}$  :

$$W_L(t) \xrightarrow{\text{en temps fini}} W_L^*(t)$$

$$\dot{W}_L(t) \xrightarrow{\text{en temps fini}} \dot{W}_L^*(t).$$

En utilisant l'architecture de la Figure 8.2 et le modèle SHP projeté pour le système contrôlé  $\{S\}$  et le système cible  $\{S^*\}$ , on peut calculer la loi de commande modale  $U(t)$  réalisant la dynamique de l'erreur 8.6.

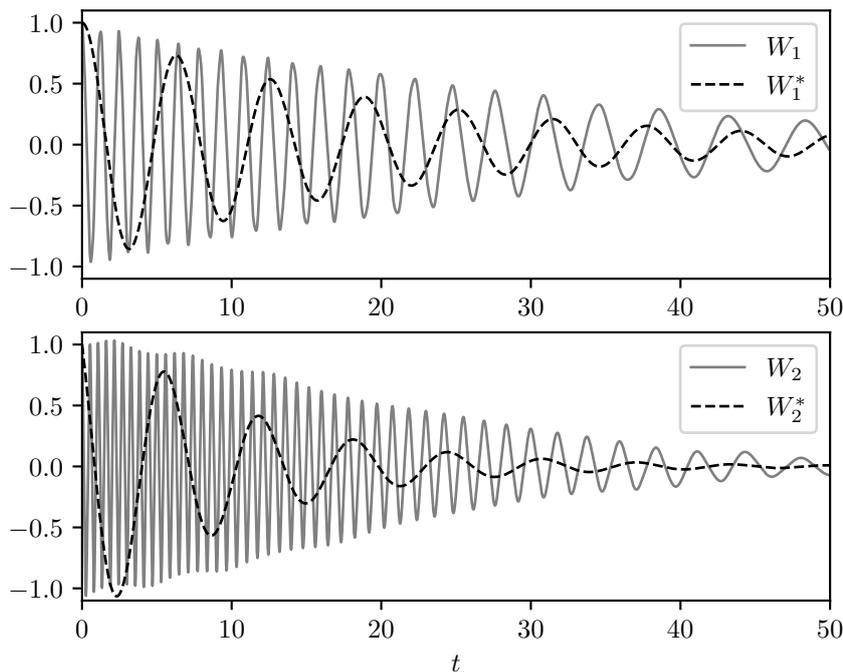
Ensuite, d'après (8.5), on peut remonter à la loi de commande  $u(z, t)$ . Pour l'hypothèse sur l'entrée (8.5) utilisée ici, il se trouve que l'on peut seulement contrôler un mode à la fois.

#### 8.4 SIMULATION D'UNE SUPPRESSION DU GLISSEMENT FRÉQUENTIEL DANS UN MODE

**SYSTÈME NON CONTRÔLÉ** Le cas d'une corde non linéaire (8.5) à deux modes est simulé. Le système  $\{S\}$  est caractérisé par les paramètres  $(\mu = 1, \varepsilon = 9,74)$ , et le système cible  $\{S^*\}$  par les paramètres  $(\mu^* = 1, \varepsilon^* = 0)$ . Une simulation de l'évolution des deux systèmes à partir d'une condition initiale

$$W_1^{(*)}(0) = 1, \quad \dot{W}_1^{(*)}(0) = 0, \quad W_2^{(*)}(0) = 1, \quad \dot{W}_2^{(*)}(0) = -1,$$

obtenue avec la méthode d'Euler explicite à un pas temporel de  $\delta t = 10^{-3}$  est montrée Figure 8.3. On observe un glissement fréquentiel très prononcé : au début de la simulation, la fréquence des deux modes est nettement plus élevée que sa valeur du régime linéaire qu'elle atteindra à des amplitudes plus petites.

FIGURE 8.3 – Simulation du système  $\{S\}$  non contrôlé et du système cible  $\{S^*\}$ 

**SYSTÈME CONTRÔLÉ** La loi de commande en temps fini basée sur l'erreur  $e_1(t)$  est calculée et appliquée au système  $\{S\}$ . Puisque l'on simule la trajectoire de référence d'un système cible  $\{S^*\}$  avec  $\varepsilon^* = 0$ , l'application de la loi de commande au système  $\{S\}$  devrait faire disparaître le glissement fréquentiel dans le premier mode.

La simulation de l'évolution temporelle est montrée Figure 8.4, pour des paramètres de contrôle  $\alpha = 0.6$ ,  $k_1 = 8$ ,  $k_2 = 1,5$ , où l'on voit le suivi de trajectoire pour le premier mode. En représentation fréquentielle (Fig. 8.5), on voit qu'il n'y a plus de glissement fréquentiel dans le premier mode pour le cas contrôlé. Les simulations montrent également l'effet de la commande sur le deuxième mode, une influence que l'on ne peut éviter (système couplé et hypothèse sur la loi de commande (8.5)).

#### 8.5 PERSPECTIVE : VERS UNE COMMANDE PASSIVE EN TEMPS FINI PAR SUIVI DE TRAJECTOIRE

À travers l'exemple montré ci-dessus, nous avons illustré que l'on peut utiliser une loi de commande en temps fini pour contrôler un système dynamique vibratoire vers une dynamique cible.

Comme dans la Sous-section 6.2.3, on peut s'intéresser à une étude de la passivité de telles lois de commande, en les réinterprétant comme un contrôle IDA-PBC.

Le lien entre un suivi de trajectoire et l'IDA-PBC a été considéré dans le passé [89, 134]. La trajectoire cible  $y$  est une fonction temporelle  $f(t)$  prescrite, p.ex. une lévitation magnétique qui laisse une masse métallique suivre un sinus dans le temps, et non pas une trajectoire produite par un système physique cible (simulé).

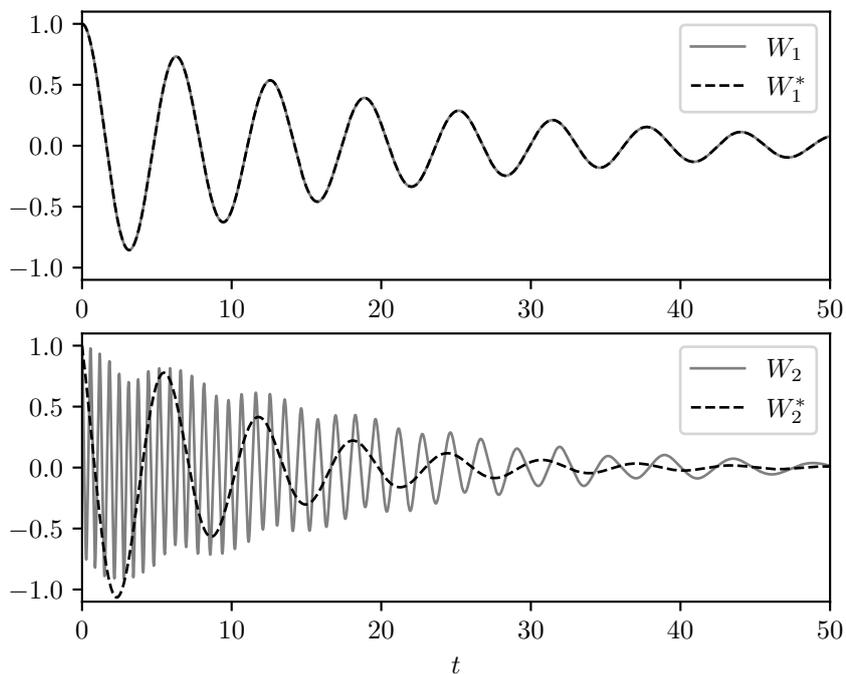


FIGURE 8.4 – Simulation du système  $\{S\}$  contrôlé et du système cible  $\{S^*\}$ . Un suivi de trajectoire est réalisé pour le mode  $W_1(t)$ .

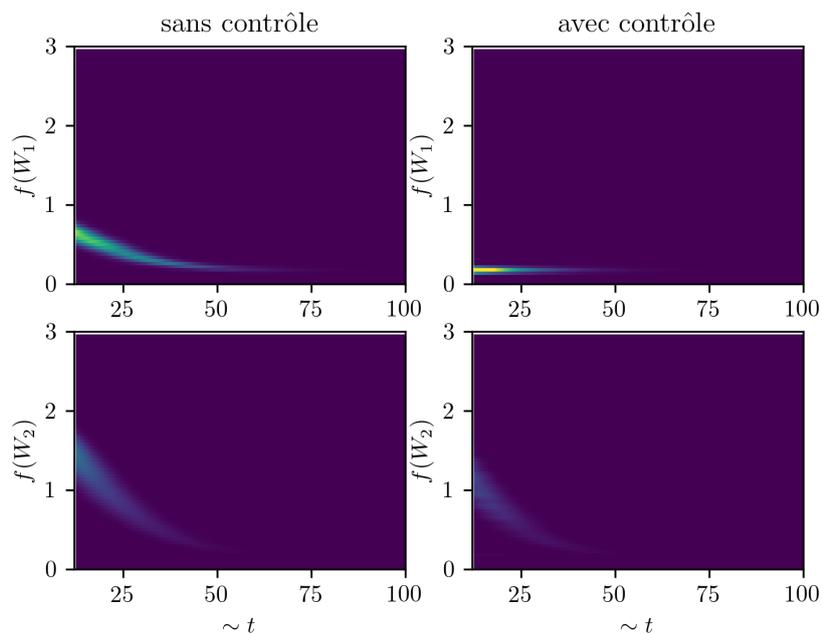


FIGURE 8.5 – Comparaison des spectres des deux modes du système  $\{S\}$  pour le cas sans et avec contrôle. Le glissement fréquentiel est enlevé dans le mode 1 par l'action du contrôle.



Quatrième partie

CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'UN SYSTÈME HYBRIDE  
(EDP-EDO) : LE CAS DU TOM



Ce chapitre est consacré au développement du contrôle actif d'un tom, qui est pourvu d'un haut-parleur. Le contrôle a pour but de modifier des fréquences des modes de vibration de la membrane supérieure de l'instrument lorsqu'elle est frappée par le musicien.

Dans un premier temps, l'acoustique des membranophones avec un couplage membrane-cavité est récapitulée, avec une attention particulière à l'influence de la présence de la cavité sur les fréquences des modes propres axisymétriques de la membrane circulaire.

Ensuite, un modèle physique pour le tom est établi, incorporant le couplage membrane-cavité-haut-parleur. Ce modèle hybride couplant une EDP à une EDO est réinterprété comme un Système Hamiltonien à Ports (SHP), adimensionné, et une projection modale et réduction d'ordre sont effectuées, menant à un modèle EDO pur.

Finalement, un observateur-régulateur est développé, fournissant une loi de commande en courant pour le haut-parleur. D'abord, le régulateur en temps-fini est développé sous l'hypothèse de disposer d'une mesure de la pression dans la cavité et d'une mesure de la vibration de la membrane supérieure. Ensuite, un observateur temps-fini est construit afin d'estimer la vibration de la membrane supérieure pour laquelle nous ne disposons pas de capteur direct. Le fonctionnement de l'observateur-régulateur est illustré en simulation, et des remarques envers une implémentation pratique sont données.

*Des parties de ce chapitre reprennent les informations des articles [W6] et [W7].*

## TABLE DES MATIÈRES

9.1	Contexte . . . . .	86
9.1.1	Membranophones . . . . .	86
9.1.2	Contrôle actif de membranophones . . . . .	86
9.1.3	Contrôle actif de tom visé . . . . .	87
9.2	Acoustique des membranophones . . . . .	88
9.2.1	Vibration d'une membrane circulaire . . . . .	88
9.2.2	Vibration d'une membrane circulaire couplée à une cavité . . . . .	94
9.2.3	Déviations du modèle pour la vibration transverse d'une membrane circulaire attachée au bord couplée à une cavité . . . . .	98
9.3	Modèle . . . . .	101
9.3.1	Modèle physique . . . . .	101
9.3.2	Modèle SHP : modèle hybride . . . . .	104
9.3.3	Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride . . . . .	108
9.3.4	Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre . . . . .	109
9.3.5	Représentation d'état . . . . .	111
9.4	Contrôle modal . . . . .	113
9.4.1	Régulateur en temps fini . . . . .	115
9.4.2	Observateur en temps fini . . . . .	119
9.4.3	Vers une implémentation pratique . . . . .	123
9.5	Conclusion . . . . .	125

## 9.1 CONTEXTE

Le travail décrit concerne le contrôle actif d'un tom, un exemple d'un instrument de percussion de type membranophone caractérisé par un couplage membrane-cavité. Dans la présente section, le tom est introduit comme membre de la famille des membranophones (Sous-section 9.1.1). Ensuite, des résultats existants sur le contrôle actif de membranophones sont énoncés dans la Sous-section 9.1.2, avant de préciser dans la Sous-section 9.1.3 la cible du contrôle de tom visé dans le présent chapitre.

### 9.1.1 Membranophones

Il existe une grande variété d'instruments de percussion, dont une partie peut être qualifiée de « membranophones », c'est-à-dire, des instruments dont le son est essentiellement produit par une membrane. Quelques exemples sont montrés dans la Figure 9.1. Parmi les membranophones, on s'intéresse ici particulièrement aux instruments ayant une membrane, frappée par le musicien, qui est couplée à un fût ou une cavité contenant un volume d'air. La présence de cette cavité améliore le rendement de rayonnement de l'instrument [60, Chapitre 14], et influence l'harmonicité des modes de vibration de la membrane, comme précisé dans la Sous-section 9.2.2 ci-dessous.

Les membranophones peuvent être catégorisés [143, 252, 253] selon la façon de laquelle la membrane est excitée : en frappant la membrane directement par une mailloche ou la main (p.ex. le tom), en tirant une corde<sup>1</sup> attachée à la membrane (p.ex. le *gubguba* indien), en frottant la peau (p.ex. le *bodhrán* irlandais), par sympathie au chant (p.ex. le kazoo), etc. De plus, on peut distinguer une variété de formes de fût, comme un fût cylindrique (p.ex. le tom), conique (p.ex. le *timbal* brésilien), en forme de chaudron (p.ex. les timbales d'orchestre), en forme de sablier (le *tama* ou « tambour parlant » africain).

**LE TOM** Le tom (*tom-tom drum*) (Fig. 9.1(a)) est un instrument à membrane directement frappée. Il est constitué d'une paroi cylindrique avec une membrane supérieure (*batter head*) qui est excitée par le musicien et une membrane inférieure (*resonant head*) qui résonne par sympathie.

Le son du tom est caractérisé comme étant « sans hauteur déterminée » ou encore ayant « une hauteur moins bien définie » [233]. Il se trouve dans une position ambiguë entre des instruments à hauteur bien définie comme la timbale (Fig. 9.1(e)) et des instruments sans hauteur comme la grosse caisse (Fig. 9.1(b)).

Il existe différentes tailles de tom. Dans un dispositif standard de batterie, on retrouve typiquement un tom basse (*floor tom* ou *low tom*) qui est plus grand, accordé plus bas et a des pattes, ainsi que deux toms plus petits, souvent montés sur la grosse caisse. Il existe également un dispositif comportant plusieurs toms de tailles différentes qui peuvent être portés par un musicien de fanfare les jouant en défilant. Finalement, on peut mentionner l'existence du rototom, un tom sans cavité.

### 9.1.2 Contrôle actif de membranophones

Plusieurs cas de contrôle actif d'instruments de percussion avec un couplage membrane-cavité ont été reportés. Dans [213], on a contrôlé quatre modes d'une peau de tambour utilisant quatre accéléromètres sur la membrane comme capteurs et quatre haut-parleurs agissant sur la cavité comme actionneurs. Un contrôleur PID s'est avéré instable en pratique, et il a été remplacé par un contrôleur anticipateur (*feedforward*). Une *grosse caisse* [149] a été contrôlée par un retour d'état négatif, utilisant un capteur piézo-céramique attaché au bord pour mesurer la déflexion de la membrane, et un seul haut-parleur comme actionneur. On a attaché un microphone de contact à une

1. On peut argumenter qu'il s'agit ici plutôt d'un chordophone, comme le cas du banjo.

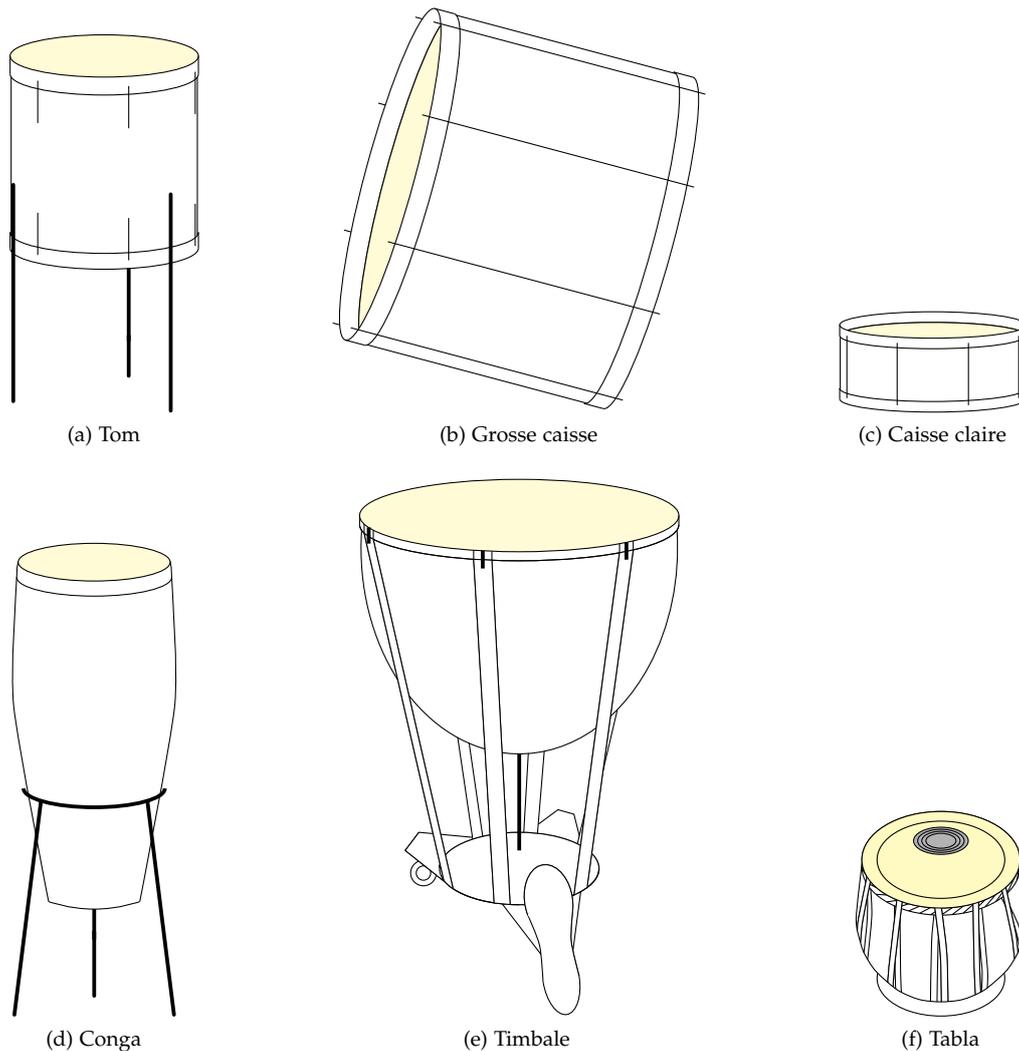


FIGURE 9.1 – Quelques exemples d’instruments de percussion de type membranophone couplant une membrane à une cavité. [Dessins reproduits d’après [30, 165]]

membrane de *conga* [249] en guise de capteur et mis un haut-parleur dans la cavité comme actionneur, permettant d’altérer la réponse en fréquence de l’instrument. Un retour d’état à partir d’un capteur piézoélectrique placé sur la membrane supérieure d’un *tom* [100] a été appliqué à la membrane inférieure en utilisant un actionneur électromagnétique. Un microphone dynamique agissant comme capteur a été placé à l’intérieur d’un actionneur électromagnétique attaché à la membrane inférieure d’une *grosse caisse* dans [206]. Récemment, une *caisse claire* [261] a été contrôlé par un capteur optique sur la membrane supérieure, et en utilisant plusieurs actionneurs : deux transducteurs tactiles sur la membrane supérieure, et un haut-parleur supplémentaire monté sur un support à l’intérieur de la cavité.

### 9.1.3 Contrôle actif de tom visé

Le projet décrit consiste à appliquer un contrôle à un tom, dont la membrane inférieure est remplacée par une planche en bois dans laquelle un haut-parleur est monté, cf. la Fig. 9.2). Une boucle de contrôle est conçue, qui mesure la pression à l’intérieur de la cavité et calcule une loi de commande pour le courant<sup>2</sup> du haut-parleur.

2. Dans le chapitre 10 suivant, une loi de commande pour la tension électrique sera implémentée.

Le but est de modifier la pression qui agit sur l'EDP de la membrane supérieure sur laquelle frappe le musicien, en influençant ainsi ses modes axisymétriques de vibration, en en changeant par exemple une (des) fréquence(s) ou amortissement(s).



FIGURE 9.2 – Système constitué d'un tom avec un haut-parleur

## 9.2 ACOUSTIQUE DES MEMBRANOPHONES

Dans cette section, on rappelle la théorie de la vibration d'une membrane circulaire seule attachée au bord (Sous-section 9.2.1) et montre l'influence du couplage de cette membrane à une cavité (Sous-section 9.2.1), en vue de la modélisation du dispositif de tom considéré (Fig. 9.2) dans la Section 9.3. Finalement, quelques déviations de la théorie sont mentionnées dans la Sous-section 9.2.3, en vue de l'identification des paramètres physiques du dispositif qui sera précisée dans le chapitre suivant.

### 9.2.1 Vibration d'une membrane circulaire

**DÉRIVATION DE L'EDP** On commence par l'étude de la vibration transverse d'une membrane circulaire dans le vide attachée au bord (reprise d'après [129, §4.2]-[99]). On suppose une membrane mince de densité massique surfacique  $\sigma$  [kg/m<sup>2</sup>], qui subit une tension uniforme (force linéique  $T$  [N/m]), et effectue de petits déplacements transverses  $y(x, z, t)$ ,  $x$  et  $z$  étant les deux coordonnées cartésiennes.

On considère une aire élémentaire  $dS = dx dz$  (Fig. 9.3). La force linéique  $T$  agit sur les bords de l'aire, ce qui se traduit selon une approximation de premier ordre en une force transverse composée des contributions : celle de la force  $T dz$ ,

$$T dz \left[ \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \right] \approx T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx dz, \quad (9.1)$$

et celle de la force  $T dx$ ,

$$T dx \left[ \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_{z+dz} - \left. \frac{\partial y}{\partial z} \right|_z \right] \approx T \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dx dz. \quad (9.2)$$

L'aire a une masse  $\sigma dS$  et une accélération transverse  $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , de sorte que le bilan des forces dans la direction transverse peut être écrit comme

$$T \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) dx dz = \sigma \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx dz.$$

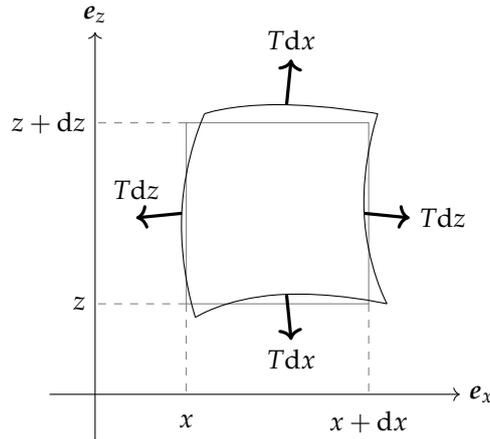


FIGURE 9.3 – Aire élémentaire de la membrane exécutant un déplacement transverse [figure d’après [129, §4.2]]

Avec la vitesse des ondes dans la membrane

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

et l’opérateur Laplacien  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , on retrouve l’équation des ondes 2D :

$$\Delta y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{9.3}$$

SOLUTION DE L’EDP Pour simuler la vibration d’une membrane circulaire de rayon  $a$  (Fig. 9.4), on considère l’EDP (9.3), exprimée en coordonnées polaires, avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \tag{9.4}$$

La membrane est attachée au bord, ce qui se traduit par la condition

$$y(r = a, \theta, t) = 0. \tag{9.5}$$

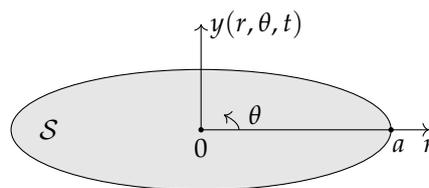


FIGURE 9.4 – Membrane circulaire attachée au bord

L’EDP est résolue par la méthode de séparation des variables. On pose

$$y(r, \theta, t) \triangleq R(r)\Theta(\theta)T(t),$$

dont la substitution dans l’EDP (9.3) donne

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} \triangleq C, \tag{9.6}$$

où  $R' = dR(r)/dr$  etc. La partie gauche de l’Éq. (9.6) dépend de  $r$  et  $\theta$ , et la partie droite de  $t$ . C’est la raison pour laquelle on peut les mettre égales à une constante  $C$ , dont il s’avère qu’une valeur négative

$$C \triangleq -\lambda^2$$

mène à une fonction temporelle périodique

$$T(t) = C_1 \cos \lambda ct + C_2 \sin \lambda ct, \quad (9.7)$$

d'après la partie droite de (9.6).

De la même manière, la partie gauche peut aussi se séparer en une partie dépendant de  $r$  et une partie dépendant de  $\theta$  :

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 \lambda^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} \triangleq D.$$

Supposant à nouveau une fonction périodique pour  $\Theta$ , puisque  $y(r, \theta = 2\pi, t) = y(r, \theta = 0, t)$ , on obtient que

$$D \triangleq n^2$$

correspond à

$$\Theta(\theta) = C_3 \cos n\theta + C_4 \sin n\theta. \quad (9.8)$$

Finalement, il reste encore

$$\begin{aligned} r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R &= 0 \\ \iff (\lambda r)^2 \frac{d^2 R}{d(\lambda r)^2} + \lambda r \frac{dR}{d(\lambda r)} + (\lambda^2 r^2 - n^2) R &= 0, \end{aligned}$$

appelée l'équation différentielle de Bessel [2, Chapitre 9]. Cette ODE du deuxième ordre admet deux solutions : la fonction de Bessel<sup>3</sup> de première espèce d'ordre  $n$ ,  $J_n(\lambda_{nm}r)$ , et la fonction de Neumann (appelée encore la fonction de Bessel de deuxième espèce) d'ordre  $n$ ,  $Y_n(\lambda_{nm}r)$ . La fonction de Neumann atteint une valeur infinie en  $r = 0$ . Cette singularité n'ayant pas de sens dans une membrane circulaire<sup>4</sup>, seules les contributions des fonctions de Bessel de première espèce sont retenues dans la solution :

$$R_{nm}(r) = J_n(\lambda_{nm}r), \quad (9.9)$$

où la condition à la frontière (9.5) détermine la valeur des  $\lambda_{nm}$  qui peuvent être calculés en fonction des zéros  $\lambda_{nm}$  de la fonction de Bessel en question,

$$J_n(\lambda_{nm}a) = 0,$$

numérotés  $m = 1, \dots, +\infty$ , et que l'on peut calculer numériquement ou retrouver dans des tableaux (cf. le Tableau C.1 de l'Annexe C).

En somme, combinant les contributions (9.7)-(9.8)-(9.9), la solution de (9.3)-(9.5) s'écrit comme une décomposition modale

$$y(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} J_n(\lambda_{nm}r) [C_3 \cos n\theta + C_4 \sin n\theta] [C_1 \cos \lambda ct + C_2 \sin \lambda ct],$$

où les coefficients  $C_i$  dépendent des conditions initiales considérées.

On peut aussi grouper les modes propres par deux en écrivant [60, Chapitre 3]

$$\begin{aligned} y(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{J_n(\lambda_{nm}r) \cos n\theta}_{\triangleq \Psi_{nm}(r, \theta)} (A_{nm} \cos \omega_{nm}t + B_{nm} \sin \omega_{nm}t) \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{J_n(\lambda_{nm}r) \sin n\theta}_{\triangleq \tilde{\Psi}_{nm}(r, \theta)} (\tilde{A}_{nm} \cos \omega_{nm}t + \tilde{B}_{nm} \sin \omega_{nm}t) \right]. \end{aligned}$$

3. Voir la Sous-section C.1.1 de l'Annexe C pour plus d'informations.

4. Par contre, les fonctions de Neumann sont présentes dans le cas d'une membrane annulaire, comme p.ex. chez le tambour annulaire [97].

Ici, on a nommé les modes propres spatiaux

$$\begin{cases} \Psi_{nm}(r, \theta) \triangleq J_n(\lambda_{nm}r) \cos n\theta \\ \hat{\Psi}_{nm}(r, \theta) \triangleq J_n(\lambda_{nm}r) \sin n\theta, \end{cases}$$

et on dénote  $\psi_{nm}(r) \triangleq J_n(\lambda_{nm}r)$ .

**FORME DES MODES PROPRES** Un nombre de modes propres  $\Psi_{nm}(r, \theta)$  sont dessinés dans la Figure 9.5. On voit que les modes avec  $n = 0$  sont axisymétriques (par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la membrane au repos  $y = 0$ , à  $r = 0$ ), et que les modes avec  $n > 0$  (entier) ne le sont pas.

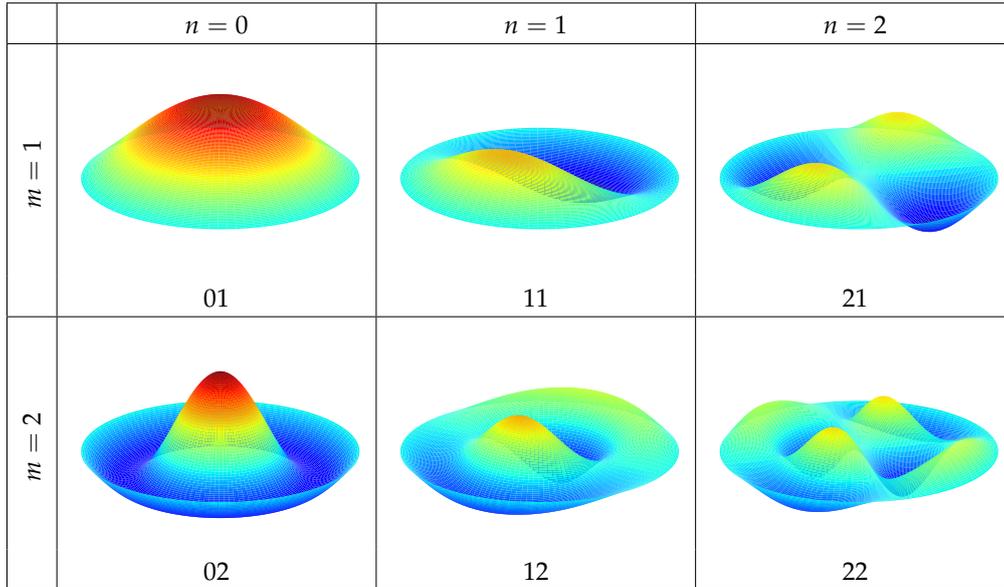


FIGURE 9.5 – Quelques modes propres  $\Psi_{nm}(r, \theta)$  de la membrane circulaire attachée au bord. On les dénote par  $nm$ , comme indiqué sous les figures.

En regardant l'intersection des modes propres  $\Psi_{nm}(r, \theta)$  avec le plan  $y = 0$ , on retrouve ce que l'on appelle des cercles nodaux et lignes nodales (Fig. 9.6). Ce sont des lieux géométriques immobiles : leur position transverse reste à  $y = 0$  au cours de la vibration de la membrane selon le mode concerné.

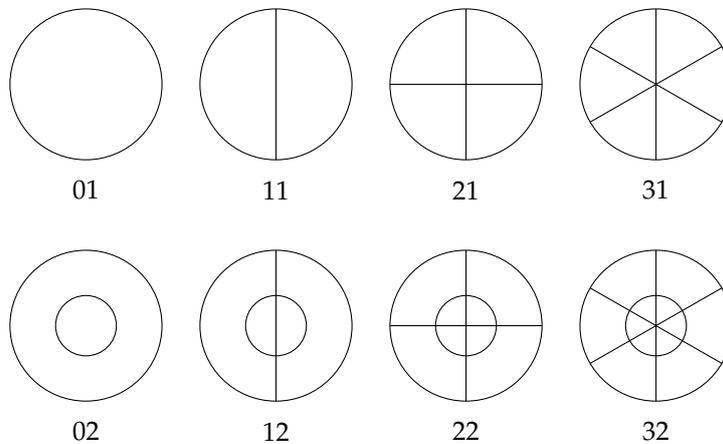


FIGURE 9.6 – Cercles nodaux et lignes nodales pour quelques modes propres  $nm$  de la membrane circulaire attachée au bord. À comparer avec la Figure 9.5.

Tableau 9.1 – Ratio des fréquences propres de quelques modes propres de la membrane circulaire attachée au bord

$f_{01}$	$f_{11} = 1.59f_{01}$	$f_{21} = 2.14f_{01}$
$f_{02} = 2.30f_{01}$	$f_{12} = 2.92f_{01}$	$f_{22} = 3.50f_{01}$
$f_{03} = 3.60f_{01}$	$f_{13} = 4.23f_{01}$	$f_{23} = 4.83f_{01}$

Il s'avère qu'un mode propre  $\Psi_{nm}(r, \theta)$  a  $m$  cercles nodales et  $n$  lignes nodaux, où  $m$  ne peut être zéro puisqu'il y a toujours au moins le cercle nodal à  $r = a$ , où la membrane est attachée.

– FRÉQUENCES DES MODES PROPRES Comme montré ci-dessus, la forme spatiale des composantes de la vibration de la membrane circulaire est décrite par des fonctions de Bessel  $J_n(\lambda_{nm}r)$ . Par identification, on a que les pulsations  $\omega_{nm} = \lambda_{nm}c$ , ou les fréquences [129, Chapitre 4] :

$$f_{nm} = \frac{\lambda_{nm}c}{2\pi}. \quad (9.10)$$

Un calcul direct nous montre que le rapport des fréquences propres (Tableau 9.1) est indépendant du rayon  $a$  de la membrane circulaire. Cependant, contrairement à la corde linéaire p.ex., ici, les fréquences partielles ne forment pas de série harmonique, où les fréquences seraient des multiples entiers de la fréquence fondamentale  $f_{01}$ . On étudiera dans la Sous-section 9.2.2 l'influence de la charge d'air et d'un couplage avec une cavité sur les fréquences propres.

En faisant varier la tension  $T$  (Fig. 9.7) ou le rayon  $a$  (Fig. 9.8), on peut faire évoluer les fréquences propres de la membrane circulaire (calculées avec (9.10)), maintenant toujours les rapports indiqués dans le Tableau 9.1.

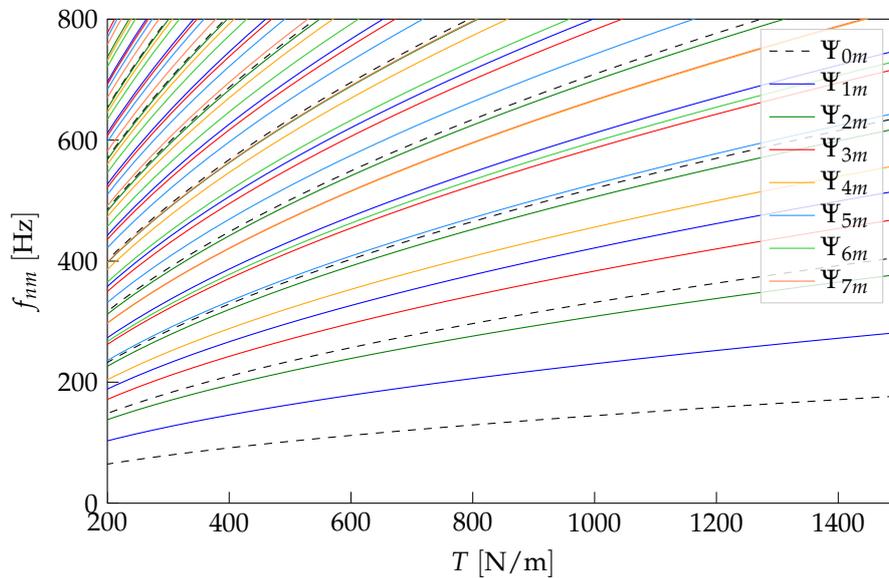


FIGURE 9.7 – Évolution des premières fréquences propres de la membrane circulaire en fonction de la tension de membrane  $T$ . (Constantes physiques utilisées :  $a = 0.162\text{m}$ ,  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ .)

– REMARQUES 1. *Modes axisymétriques* – Les modes axisymétriques, c'est-à-dire symétriques par rapport à l'axe passant par le milieu de la membrane et perpendiculaire au champ au repos de la membrane (Fig. 9.4), correspondent au cas où la position

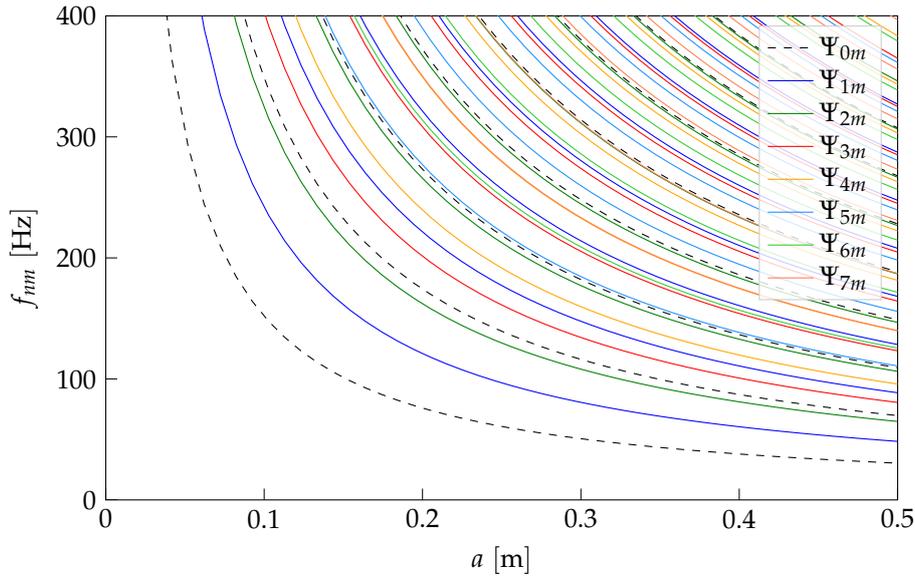


FIGURE 9.8 – Évolution des premières fréquences propres de la membrane circulaire en fonction du rayon de la membrane  $a$ . (Constantes physiques utilisées :  $T = 420\text{N/m}$ ,  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ .)

transverse  $y$  n'a pas de dépendance en  $\theta$ . Dans ce cas, le Laplacien (9.4) s'écrit sans le terme en  $\partial^2/\partial\theta^2$  et on ne retrouve pas de contribution  $\Theta(\theta)$  dans la solution. Les modes axisymétriques sont nommés  $0m$  (cf. les Figs. 9.5-9.6).

2. *Charge d'air* – Dans les dérivations ci-dessus, on a considéré une membrane dans le vide. Un modèle pour l'influence d'une charge d'air, exerçant une pression distribuée sur la membrane, est développé dans [87, Chapitre 18]. L'effet de la charge d'air varie avec la fréquence. En basse-fréquence, elle a pour effet d'augmenter les fréquences, et dès ca. 500Hz, son influence est négligeable. (Des références d'études concernant l'influence du rayonnement sur l'harmonicité chez des instruments concrets comme la timbale ou le tabla seront données plus bas.)

En basse-fréquence, on peut approximer la charge d'air comme si elle correspondait à la masse d'un disque d'air du rayon de la membrane et d'une épaisseur de [87, Chapitre 18]

$$\frac{8a}{3\pi} \approx 0,85a.$$

C'est la raison pour laquelle, dans le modèle présenté en Section 9.3, nous utiliserons l'approximation grossière consistant à considérer une influence de la charge d'air indépendamment de la fréquence sous la forme d'un terme s'ajoutant à la densité massique de la membrane  $\sigma$  (dans le vide) :

$$\sigma_m \triangleq \sigma + 0,85a\rho_{\text{air}} \quad (\text{charge d'un côté de la membrane})$$

$$\sigma_m \triangleq \sigma + 2 \cdot 0,85a\rho_{\text{air}} \quad (\text{charge des deux côtés de la membrane}),$$

avec  $\rho_{\text{air}}$  la densité massique volumétrique de l'air.

3. *Amortissement* – On peut ajouter un amortissement fluide dans l'EDP (9.3), qui devient

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t},$$

avec  $\mu$  [kg/m<sup>2</sup>s] un coefficient de frottement fluide. Procédant de la même manière que ci-dessus, on obtient l'équation

$$T'' + \mu T' + \lambda^2 c^2 T = 0.$$

La présence du terme  $\mu T'$  a deux effets.

1.  $T(t)$  est maintenant exponentiellement amorti par  $e^{-\frac{\mu}{2}t}$ .
2. La fréquence  $\omega = \lambda c$  devient  $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$ .

On remarque dans [129, Chapitre 4] qu'en réalité, les coefficients  $\mu/2$  sont fonction de la fréquence. Il y a des pertes associées avec la déflexion de la membrane qui augmentent avec la fréquence, et des pertes associées avec la radiation du son qui décroissent avec la fréquence. Souvent, l'effet net est que les modes haute-fréquence sont amortis plus vite que les modes basse-fréquence.

Dans ce chapitre, l'influence de ce type d'amortissement sur les fréquences propres de la membrane a été négligée. On considère seulement l'influence sur les fréquences due au couplage avec une cavité, comme étudiée dans la sous-section suivante.

### 9.2.2 Vibration d'une membrane circulaire couplée à une cavité

**DÉRIVATION DE L'EDP** La membrane circulaire attachée au bord est couplée à une cavité de volume  $V_0$  au repos comme montré Figure 9.9.

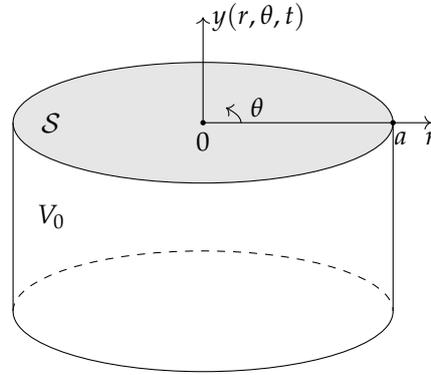


FIGURE 9.9 – Membrane circulaire attachée au bord, couplée à une cavité

À cause du couplage entre la membrane et la cavité, une pression nette non nulle peut agir sur la membrane pendant sa vibration. Selon la loi des gaz parfaits et en supposant que le gaz dans la cavité n'a pas de dynamique (discuté plus en détail dans la Section 9.3), cette pression nette  $\Delta p(t)$  est le résultat instantané de changement net du volume  $\Delta V(t)$  de la cavité. On peut distinguer deux cas, selon le fait si un mode (non) axisymétrique est excité (Fig. 9.10).

Pour le cas d'un *mode non axisymétrique*, le changement de volume net est toujours nul. De ce fait, la pression nette appliquée sur la membrane par la cavité est aussi nulle. On retrouve donc l'EDP de la membrane seule (9.3), et les modes propres non axisymétriques du cas avec cavité, nommés  $\Phi_{nm}(r, \theta)$ ,  $n > 0$ , sont égaux aux modes propres non axisymétriques du cas sans cavité, nommés  $\Psi_{nm}(r, \theta)$ ,  $n > 0$  :

$$\begin{cases} \Phi_{nm}(r, \theta) = \Psi_{nm}(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm}r) \cos n\theta, & n > 0, \\ \hat{\Phi}_{nm}(r, \theta) = \hat{\Psi}_{nm}(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm}r) \sin n\theta, & n > 0, \end{cases}$$

avec les conditions au bord

$$\varphi_{nm}(a) \triangleq \psi_{nm}(a) = J_n(\lambda_{nm}a) = 0.$$

Pour le cas des *modes axisymétriques*, où le changement de volume net n'est pas nul, on peut procéder de la manière suivante. D'après [99] et en suivant un développement comme ci-dessus, on peut formuler l'équation des ondes avec une source de pression  $\Delta p(t)$  comme

$$T\Delta y(r, t) + \Delta p(t) = \sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(r, t).$$

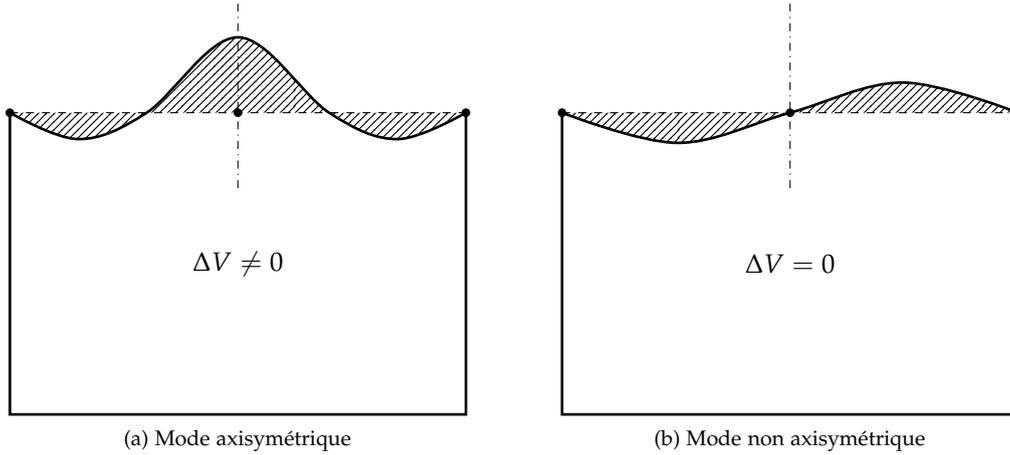


FIGURE 9.10 – Changement de volume de cavité suite à la vibration de la membrane

Selon la loi des gaz parfaits (cf. (9.14) ci-dessous), on peut calculer la pression nette  $\Delta p(t)$  comme

$$\Delta p(t) = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \Delta V(t),$$

où  $p_0$  est la pression atmosphérique,  $\gamma$  l'indice adiabatique, et  $\Delta V(t)$  le changement de volume, hachuré dans la Fig. 9.10(a), qui peut être calculé comme

$$\Delta V(t) = \int_S y(r, t) \, dS(r).$$

En somme, on obtient l'EDP suivante :

$$c^2 \Delta y(r, t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(r, t) = \frac{\gamma p_0}{\sigma V_0} \int_S y(r, t) \, dS(r). \quad (9.11)$$

On rappelle que  $\sigma$  peut être remplacé par  $\sigma_m$  si l'on veut prendre en compte l'influence de la charge d'air, comme indiqué ci-dessus.

– SOLUTION DE L'EDP Dans [171], il est démontré que l'Équation (9.11), admet des solutions axisymétriques

$$\Phi_{0m}(r, \theta) \triangleq \varphi_{0m}(r) \triangleq [J_0(\lambda_m r) - J_0(\lambda_m a)].$$

Par construction, la condition aux limites en  $r = a$  est satisfaite. En substituant ces fonctions propres dans l'EDP (9.11), on obtient que les  $\lambda_m$  satisfont la condition implicite<sup>5</sup> [171]

$$\lambda_m^2 a^2 J_0(\lambda_m a) = - \underbrace{\frac{\pi a^4 \gamma p_0}{TV_0}}_{\triangleq B} J_2(\lambda_m a), \quad (9.12)$$

dans laquelle la grandeur sans dimension  $B$  peut être interprétée comme le rapport entre la force de rappel appliquée par l'air dans la cavité et la tension de la membrane [129].

REMARQUE On souligne que dans ce modèle, la vibration du bord du fût<sup>6</sup> et la vibration de l'air dans le fût ne sont pas prises en compte (Fig. 9.11).

5. Dans les simulations ci-dessous, les solutions de cette équation implicite sont obtenues par un algorithme numérique utilisant un développement en série de Chebyshev [48].

6. Une mesure des modes du fût est effectuée dans [220] pour le cas d'une caisse claire, par interférométrie holographique.

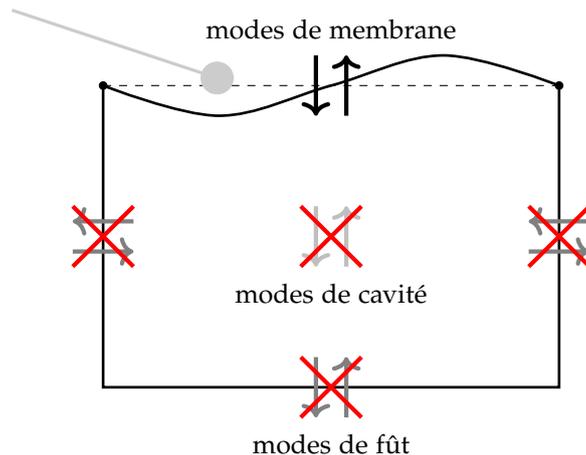


FIGURE 9.11 – Vibration prise en compte dans le modèle de la membrane couplée à une cavité [Dessin d’après [207]]

– FORME DES MODES PROPRES Les trois premiers modes propres  $\Phi_{0m}(r, \theta)$  de la membrane circulaire couplée à une cavité sont dessinés dans la Figure 9.12. On remarque que leur forme est similaire aux modes propres  $\Psi_{0m}(r, \theta)$  de la membrane sans cavité, et que l’influence de la cavité est la plus grande pour la fréquence la plus basse.

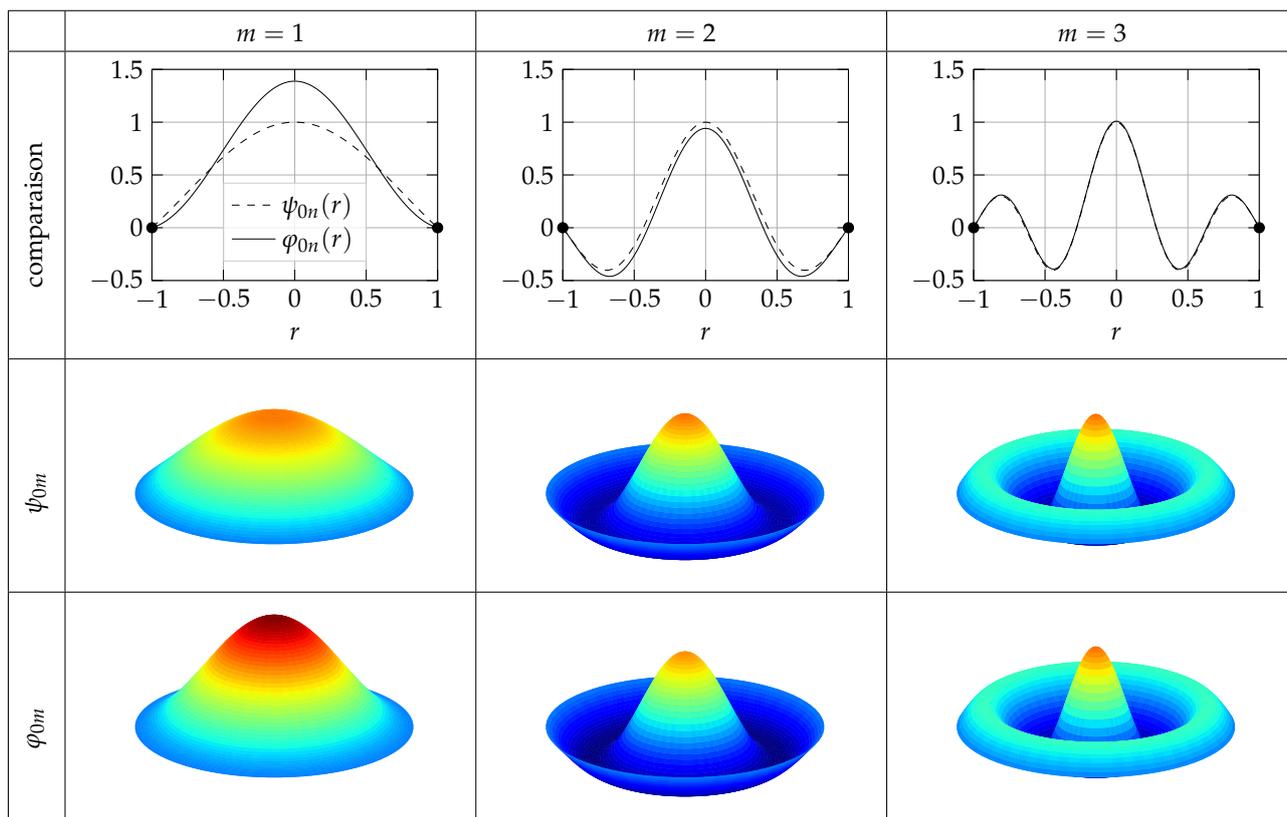


FIGURE 9.12 – Comparaison des formes spatiales des premiers modes axisymétrique de la membrane circulaire avec et sans couplage à un volume  $V_0$ . (Valeurs physiques utilisées :  $a = 1\text{m}, B = 11$ .)

– FRÉQUENCES DES MODES PROPRES Sur la Figure 9.13, on montre l'évolution des fréquences des modes axisymétriques de la membrane circulaire couplée à une cavité en fonction du volume  $V_0$ . On observe que les fréquences montent pour un petit volume, et que la plage d'influence est la plus grande en basse-fréquence. En regardant la condition (9.12), on peut quantifier ce comportement.

- Pour un volume  $V_0 \rightarrow +\infty$ , la condition devient  $J_0(\lambda_m a) = 0$ , donc on retrouve les modes propres axisymétriques du cas de la membrane sans cavité. Si le volume est grand devant le changement de volume induit par le mouvement de la membrane, la pression nette agissant sur la membrane sera petite.
- Pour un volume  $V_0 \rightarrow 0$  (dans la limite que c'est géométriquement possible), la condition devient  $J_2(\lambda_m a) = 0$ , donc les fréquences des modes axisymétriques  $\varphi_{0m}(r)$  se rapprochent des fréquences des modes non axisymétriques  $\varphi_{2m} = \psi_{2m} = J_2(\lambda_m r)$ .

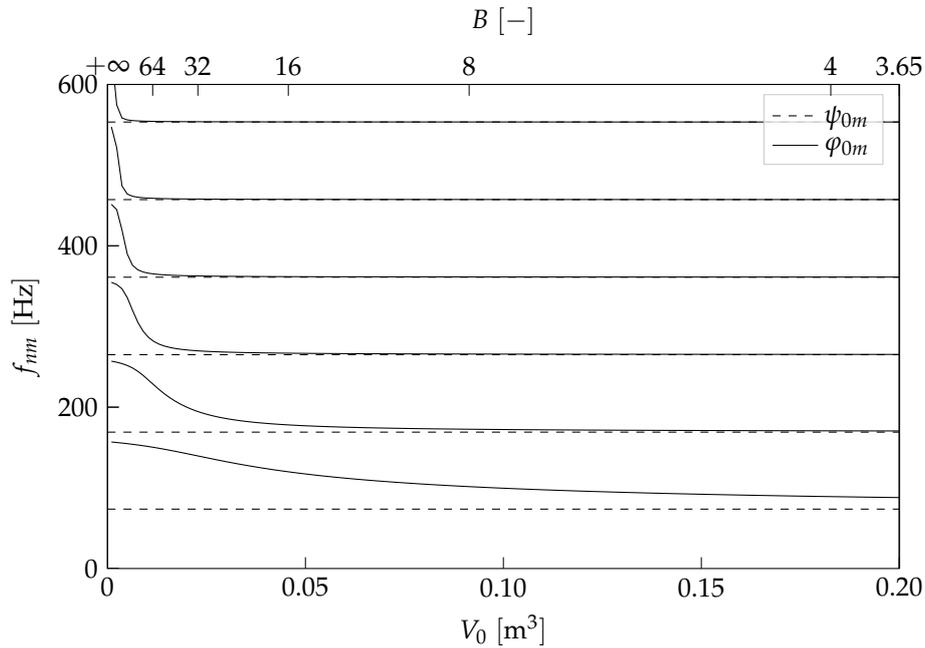


FIGURE 9.13 – Évolution des fréquences des modes axisymétriques d’une membrane circulaire couplée à une cavité de volume  $V_0$  variable. (Constantes physiques utilisées :  $a = 0.162\text{m}$ ,  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ ,  $T = 420\text{N/m}$ .)

Pour un volume  $V_0$  bien choisi, on peut rendre les modes  $\Phi_{n1}$ ,  $n > 0$ , harmoniques, ce qui est fait chez la timbale (*timpani* ou *kettledrum*)<sup>7</sup> pour obtenir une sensation de hauteur tonale [60, 129]. De plus, sur la Figure 9.14, on voit que l’on peut faire varier les fréquences des modes axisymétriques  $\Phi_{0m}$  tellement, qu’ils croisent les fréquences des modes non axisymétriques  $\Phi_{nm}$ ,  $n > 0$  (non influencées par le volume), changeant ainsi l’ordre fréquentiel des modes.

L’évolution des fréquences des modes en fonction du rayon  $a$  de la membrane est montrée Figure 9.15.

- Pour un rayon  $a \rightarrow 0$ , la condition (9.12) devient  $J_0(\lambda_m a) = 0$ .

7. On ne détaille pas ici d’autres phénomènes physiques intervenant lors de ce couplage entre l’air de la cavité, la membrane en vibration, et l’air autour de l’instrument lors du rayonnement, qui peuvent contribuer à rapprocher cette série de fréquences d’un rapport  $2f : 3f : 4f : 5f$  par rapport à une fondamentale  $f$  absente [24, 60, 129]. En plus, on mentionne dans [60, Chapitre 14] que la note perçue a la fréquence  $2f$ , et non pas celle de la fondamentale  $f$  absente (ambiguïté d’octave).

Pour une étude plus détaillée de la timbale, regarder [66, 91] utilisant des fonctions de Green, et [209] utilisant des éléments finis.

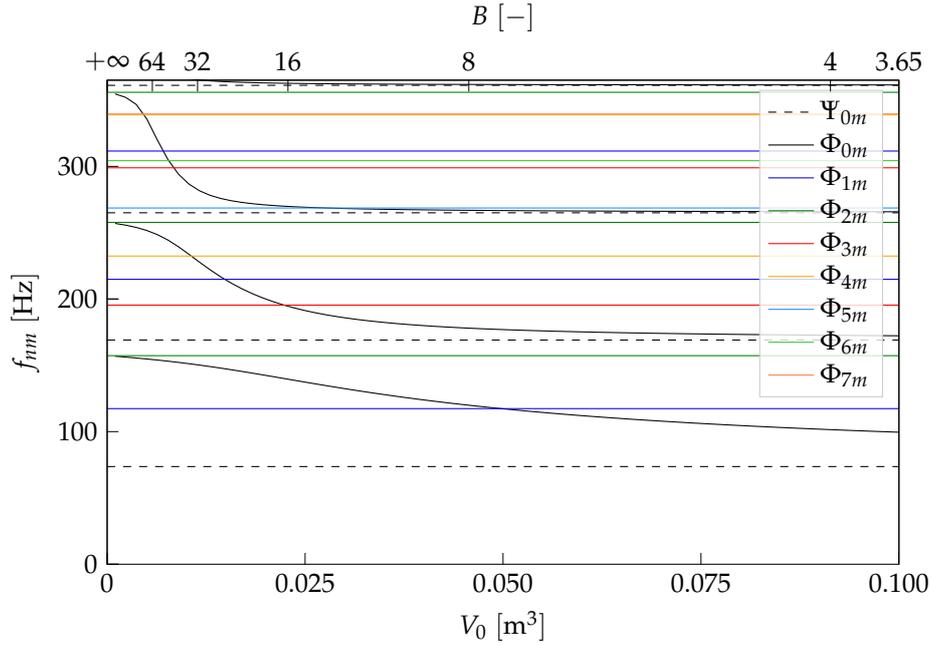


FIGURE 9.14 – Évolution des fréquences des modes axisymétriques d’une membrane circulaire couplée à une cavité de volume  $V_0$  variable. Superposition des fréquences des modes non axisymétriques. (Constantes physiques utilisées :  $a = 0.162\text{m}$ ,  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ ,  $T = 420\text{N/m}$ .)

- Pour un rayon  $a \rightarrow +\infty$ , la condition devient  $J_2(\lambda_m a) = 0$ . Les fréquences des modes axisymétriques  $\varphi_{0m}(r)$  se rapprochent des fréquences des modes non axisymétriques  $\varphi_{2m}(r) = \psi_{2m}(r) = J_2(\lambda_m r)$ .

Plus la surface  $S = \pi a^2$  de la membrane est grande pour un même volume  $V_0$ , plus le changement relatif de volume (et donc de pression) suite au mouvement de la membrane peut être grand. Ici, des croisements de fréquence sont également possibles.

En revanche, si l’on modifie  $a$  et  $V_0$  en même temps de sorte que le rapport  $a^4/V_0$  reste constant,  $B$  reste constant dans la condition (9.12) et on ne modifie pas les fréquences des modes axisymétriques  $\varphi_{0m}$ , tandis que les fréquences des modes non axisymétriques  $\varphi_{nm}$ ,  $n > 0$  varient avec  $a$  (et ne sont pas influencées par  $V_0$ ) [129, Chapitre 4].

Dans la Figure 9.16, on voit l’influence d’un changement de tension de la membrane sur les fréquences propres. Comme pour un changement de volume  $V_0$  ou de rayon  $a$ , la condition (9.12) peut se rapprocher de  $J_0(\lambda_m a) = 0$  ou  $J_2(\lambda_m a) = 0$ , et des croisements de fréquence sont possibles.

### 9.2.3 Déviations du modèle pour la vibration transverse d’une membrane circulaire attachée au bord couplée à une cavité

On peut identifier plusieurs déviations du modèle pour la vibration transverse d’une membrane circulaire attachée au bord couplée à une cavité spécifié ci-dessus, que l’on peut rencontrer chez un vrai instrument de percussion : l’influence d’une densité massique surfacique inhomogène, d’une tension inhomogène, et d’une modulation de tension suite à une excitation forte.

– DENSITÉ MASSIQUE SURFACIQUE INHOMOGÈNE Si un nombre d’instruments utilise une membrane à densité massique surfacique homogène, comme le tom et la caisse claire, la densité massique surfacique peut varier considérablement d’un point de la membrane à un autre chez des instruments comme le *tabla* (Fig. 9.1(f)) et

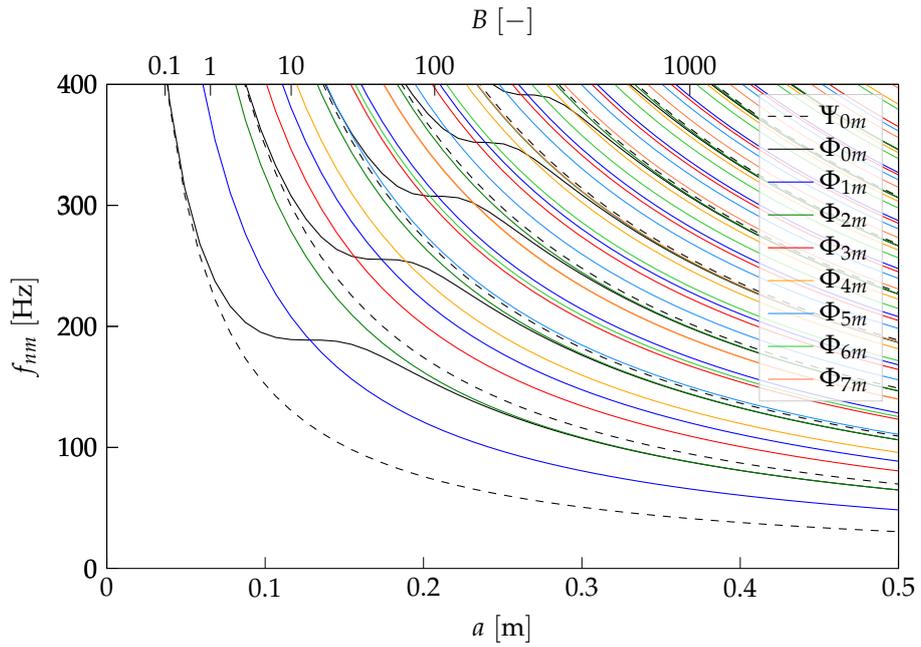


FIGURE 9.15 – Évolution des fréquences des modes (non) axisymétriques d’une membrane circulaire couplée à une cavité, pour un changement du rayon de la membrane. (Constantes physiques utilisées :  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ ,  $T = 420\text{N/m}$ ,  $V_0 = 0.0195\text{m}^3$ .)

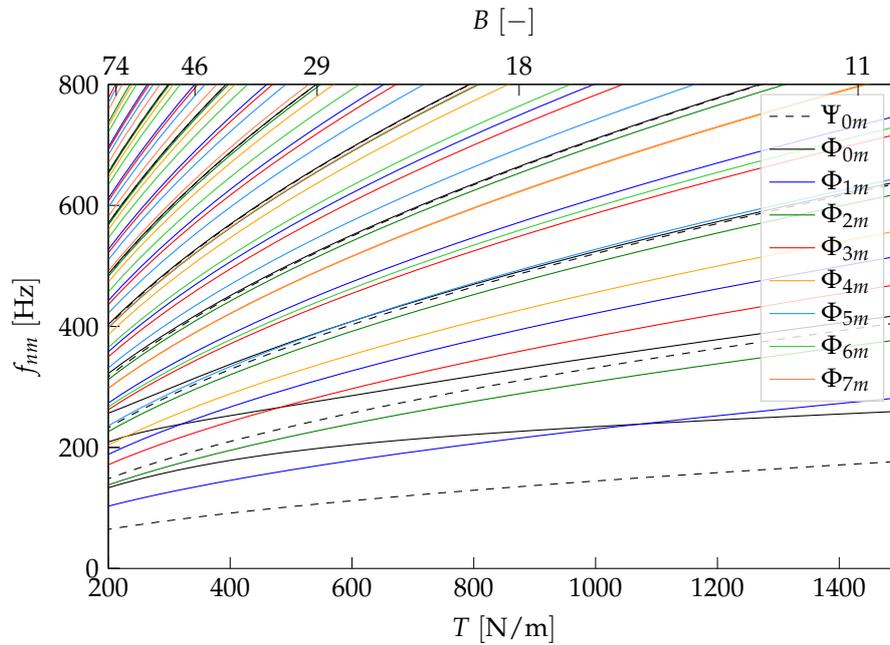
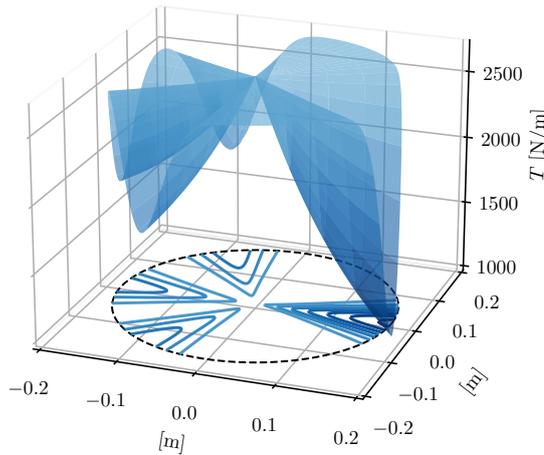


FIGURE 9.16 – Évolution des fréquences des modes (non) axisymétriques d’une membrane circulaire couplée à une cavité, pour un changement de la tension. (Constantes physiques utilisées :  $a = 0.162\text{m}$ ,  $\sigma = 0.267\text{kg/m}^2$ ,  $V_0 = 0.0195\text{m}^3$ .)

*mridanga* indiens, ou encore chez le *pat wain* birman, suite à la méthode de production (application de pâte). On peut s'en servir pour accorder<sup>8</sup> les modes basse-fréquence selon une série harmonique [15, 157, 226, 227].

– TENSION INHOMOGÈNE Un cercle est la forme géométrique se prêtant le mieux à obtenir une tension homogène dans le domaine de la membrane, contrairement à d'autres formes comme un carré ou rectangle.

Toutefois, certains mécanismes d'accordage des instruments de musique impliquent une tension qui sera intrinsèquement légèrement non homogène. Pour le cas du tom (schématisé dans la Fig. 10.15), on utilise 6 vis d'accordage. Même si l'on accorde ces vis de sorte à ce qu'elles fournissent toutes une même tension dans leur environnement direct, une baisse de tension s'installe naturellement entre deux vis. Un modèle mathématique ad hoc pour ce phénomène [226] est illustré Figure 9.17.



Distribution de tension :

$$T(\tilde{r}, \tilde{\theta}) = d_0 T_0 + [d(\tilde{r}) - d_0] b(\tilde{\theta}) T_0,$$

avec rayon  $\tilde{r} \in [0, 1]$ , angle  $\tilde{\theta} \in [0, 2\pi]$ ,  $T_0 = 2700 \text{ N/m}$ ,  $d_0 = 1$ ,  $d_1 = 1/3$ ,  $q = \pi/16$ ,  $N = 6$ ,  $B_0 = B_6 = 1$ ,  $B_2 = B_3 = B_4 = 1/2$ ,  $B_1 = B_5 = 0$  et

$$d(\tilde{r}) = d_0 \left[ \frac{d_1}{d_0} \right]^{\tilde{r}}$$

$$b(\tilde{\theta}) = \sum_{n=0}^N B_n e^{-\frac{(\tilde{\theta} - 2\pi n/N)^2}{2q^2}}.$$

FIGURE 9.17 – Modèle mathématique ad hoc pour une distribution de tension dans une membrane de tom circulaire de rayon  $a = 0.1778$  : cas d'étude avec un désaccordage extrême [226]

La tension inhomogène se manifeste sous la forme de dédoublements de pics (*peak doublings* ou *mode splitting*) : un pair de modes non axisymétriques

$$\begin{cases} \Psi_{nm}(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm} r) \cos n\theta \\ \hat{\Psi}_{nm}(r, \theta) = J_n(\lambda_{nm} r) \sin n\theta, \end{cases}$$

ayant théoriquement la même fréquence, obtiennent des fréquences légèrement différentes, ce qui mène à des battements [263]-[60, Chapitre 14].

Avec le modèle de tom décrit de la Figure 9.17, on obtient des écarts allant jusqu'à 21,4Hz en simulation [226], et on observe en effet des écarts de 2 à 28Hz dans la mesure expérimentale chez un tom décrite dans [263].

En outre de l'influence sur la fréquence, l'inhomogénéité de la tension peut déformer les lignes et cercles nodaux (p.ex. [7], et observé utilisant un type d'interférométrie dans [263]). Deux cas sont montrés Fig. 9.18.

– MODULATION DE TENSION (GLISSEMENT FRÉQUENTIEL) Lorsqu'une membrane est frappée considérablement fort de sorte à obtenir des déplacements transverses plus importants, on peut obtenir un glissement fréquentiel (*pitch glide*) [217]-[210, §2.2.7]-[243]. Chez ce phénomène non linéaire, la tension est augmentée, ce qui résulte en des fréquences modales plus élevées en début de vibration, qui décroissent ensuite jusqu'à retrouver leurs valeurs constantes correspondantes au régime linéaire (que l'on pourrait obtenir directement sans glissement fréquentiel dans le cas avec une excitation moins

8. Comme déjà mentionné, il y a une influence aditionnelle du rayonnement sur l'harmonicité de la vibration de la membrane, par exemple chez le *tabla* [242] et le *mridanga* [37].

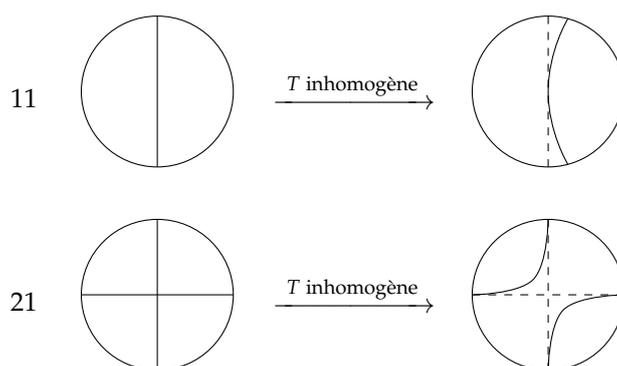


FIGURE 9.18 – Possibles déformations de cercles et lignes modaux sous l'influence d'une tension inhomogène

forte). Ce phénomène serait plus facilement réalisable dans le cas d'une membrane accordée à une faible tension, où l'on a besoin de relativement moins de force pour augmenter la tension de la membrane [210, §2.2.7].

Pour le cas d'un tom de 32 – 33cm de diamètre, une augmentation de fréquence de 8 – 10% (plus qu'un demi-ton) a été mentionnée dans [43, 214]. Dans [73], on mentionne même un glissement fréquentiel de 20Hz (presque 4 demi-tons) en basse-fréquence en frappant fort sur un tom. On mentionne que pour cet instrument, perceptivement, ce phénomène pourrait être partiellement masqué par la présence de beaucoup de composants haute-fréquence (à fort impact) dont la fréquence est beaucoup moins influencée par un changement de tension. Dans [53, 86], le cas d'une grosse caisse est considéré, où l'on mentionne des changements de fréquence de 6 – 10% en la frappant fort (ca. 3,5Hz ou un ton, dans le cas d'un déplacement transverse typique de 6mm).

### 9.3 MODÈLE

Dans cette section, un modèle physique pour le dispositif montré dans la Figure 9.2 est développé (Sous-section 9.3.1) à partir du modèle de membrane couplée à une cavité mentionné dans la Section précédente. Le modèle physique obtenu sera ensuite réécrit sous la forme d'un Système Hamiltonien à Ports (Sous-section 9.3.2). Après un adimensionnement (Sous-section 9.3.3), l'ordre du modèle à dimension infinie est réduit à  $N$  modes de vibration grâce à une projection modale (Sous-section 9.3.4). Finalement, une représentation alternative en espace d'état est donnée dans la Sous-section 9.3.5 ainsi qu'une simulation de la dynamique non contrôlé du modèle.

#### 9.3.1 Modèle physique

##### 9.3.1.1 Configuration

Le modèle est schématisé dans la Figure 9.19 dont les variables seront introduites ci-dessous. Nous observons le couplage membrane–cavité–haut-parleur.

##### 9.3.1.2 Hypothèses

Lors de l'établissement des équations du modèle physique, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices sont faites. Bien que ces hypothèses limitent la capacité du modèle d'être représentatif du comportement physique détaillé du système, le modèle résultant est considéré en premier lieu comme « modèle de contrôle » utilisé pour la conception d'une loi de commande<sup>9</sup>.

9. Après une évaluation de l'implémentation expérimentale de la loi de commande basée sur le présent modèle physique, ce qui sera fait dans le Chapitre 10, on pourrait décider d'adapter le modèle physique ainsi que le la loi de commande et de refaire un test expérimental.

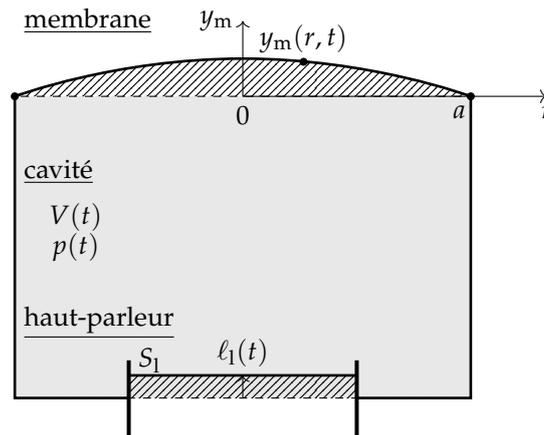


FIGURE 9.19 – Modèle du système

Les hypothèses prises dans l'établissement du modèle physique sont les suivantes.

### 1 – MEMBRANE

**(H1a)** La membrane exécute de petites déplacements transverses et sa tension est uniforme.

**(H1b)** La vibration transverse de la membrane ne contient que des modes axisymétriques<sup>10</sup>.

**(H1c)** Le rayonnement du son produit par la membrane dans l'air de la pièce dans laquelle se trouve l'instrument est modélisé approximativement en ajoutant  $0,85a\rho_{\text{air}}$  à la densité massique surfacique de la membrane [129],  $a$  étant le rayon de la membrane et  $\rho_{\text{air}}$  la densité massique volumétrique de l'air.

### 2 – CAVITÉ

**(H2a)** La pression à l'intérieur de la cavité est uniforme (modèle à paramètres concentrés sans propagation).

**(H2b)** L'air à l'intérieur de la cavité se comporte comme un gaz idéal subissant une compression adiabatique.

**(H2c)** Au repos, la pression à l'intérieur de la cavité égale la pression atmosphérique à l'extérieur. Ceci est réalisé automatiquement par des petits trous présents dans la paroi cylindrique<sup>11</sup>.

### 3 – HAUT-PARLEUR

**(H3a)** Le haut-parleur est modélisé comme un piston plan.

**(H3b)** Le haut-parleur fonctionne au-dessus de sa fréquence de résonance.

10. Des modes avec des lignes nodales ne sont pas considérées dans le modèle parce qu'il n'y a pas d'influence nette de la cavité comme mentionné ci-dessus : de par leur symétrie par rapport au plan au repos de la membrane, à tout moment, un même volume monte et descend du plan au repos. Cette hypothèse signifie en pratique que le musicien frappe la membrane au milieu, n'excitant que les modes axisymétriques.

11. Ce trou fonctionne comme la trompe d'Eustache dans l'oreille humaine [84, Chapitre 3]. On argumente dans [60, Chapitre 14] chez l'exemple de la timbale qu'un tel trou (*vent hole*) n'a pas d'effet sur l'acoustique de l'instrument vu sa petite dimension devant les longueurs d'onde des fréquences d'intérêt, la timbale n'ayant peu d'énergie au-dessus de 1kHz (34cm). On peut supposer que c'est aussi le cas pour le tom. Toujours chez la timbale, des expériences comparant les cas avec trou ouvert et bouché par du caoutchouc ont démontré que le trou n'a très peu voire pas d'influence acoustique [218].

### 9.3.1.3 Modèle physique

Le modèle physique du système sous les hypothèses énoncées ci-dessus est maintenant établi. Il consistera de trois parties : la membrane (EDP) et le haut-parleur (EDO), qui sont couplés à travers la cavité (relation statique), comme illustré Figure 9.19.

1. MEMBRANE Sous les hypothèses **(H1a)**-**(H1b)**, on peut formuler l'équation des ondes avec une source de pression comme [99]

$$T\Delta y_m(r, t) + p_c(t) = \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} y_m(r, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} y_m(r, t), \quad (9.13)$$

où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$  en coordonnées polaires,  $y_m(r, t)$  est le déplacement transverse de la membrane [m],  $T$  est la tension [N/m],  $\sigma_m = \sigma + 0,85a\rho_{\text{air}}$  est la densité massique surfacique équivalente [kg/m<sup>2</sup>] correspondant à **(H1c)**,  $\mu$  est un coefficient de frottement fluide<sup>12</sup> [kg/m<sup>2</sup>s] et  $p_c$  est la pression nette [Pa] appliquée sur la membrane. La vitesse d'onde dans la membrane est  $c = \sqrt{T/\sigma_m}$ .

La condition à la frontière de l'EDP (9.13) correspondant à une membrane attachée au bord  $r = a$  est

$$y_m(a, t) = 0.$$

La condition initiale représentant un coup avec une baguette<sup>13</sup> est

$$\frac{\partial y}{\partial t}(r, 0) = -V_0 \mathbb{I}_\varepsilon \delta_0,$$

d'amplitude  $V_0$  [ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ],  $\mathbb{I}_\varepsilon(r)$  étant une fonction lisse variant entre une valeur 1 à  $r = 0$  et 0 à  $r \geq \varepsilon$ , et  $\delta_0$  la fonction  $\delta$  de Dirac à  $t = 0$ .

2. CAVITÉ Les hypothèses **(H2a)**-**(H2b)** correspondent à une valeur constante de  $pV^\gamma$ , avec  $p$  la pression totale,  $V$  le volume total et  $\gamma$  l'indice adiabatique de l'air<sup>14</sup>. En dérivant cette relation,

$$\begin{aligned} d(pV^\gamma) &= V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0, \\ \iff \frac{dp}{p} &= -\gamma \frac{dV}{V}, \end{aligned}$$

et, en approximant les différentielles par des différences et en utilisant les quantités acoustiques  $p_c$  et  $V_c$ , qui sont les déviations de la pression et le volume par rapport aux valeurs  $p_0$  et  $V_0$  au repos,

$$\begin{cases} p_c \triangleq p - p_0 \\ V_c \triangleq V - V_0, \end{cases}$$

on obtient la relation approximative (d'ordre 1)

$$\frac{p_c}{p_0} = -\gamma \frac{V_c}{V_0}. \quad (9.14)$$

Il y a deux contributions au changement de volume  $V_c$ , qui sont hachurées dans la Figure 9.19. Le volume change à cause du mouvement transverse de la membrane

12. Dissipation qui ne dépend pas de la fréquence. Une dissipation qui dépend de la fréquence est  $\eta \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial t} y_m(r, t)$  qui est p.ex. prise en compte dans le modèle de timbale de [91, 209] etc.

13. Pour une discussion plus précise sur le contact entre mailloche et membrane dans le cas de la timbale, regarder [61, 209].

14. L'indice adiabatique du gaz parfait, ou coefficient de Laplace, est définie comme le rapport  $\gamma = C_P/C_V$  entre les capacités thermiques isobare et isochore. Pour l'air, qui contient surtout les gaz diatomiques diazote  $N_2$  et dioxygène  $O_2$ , on utilise une valeur de 1,4 à une température de 20°C.

supérieure et à cause de la position de la membrane du haut-parleur, qui est modélisé par un piston plan de position verticale  $\ell_1$  et de surface effective  $S_1$ . Ainsi,

$$V_c(t) = \int_{\mathcal{S}} y_m(r, t) \, d\mathcal{S}(r) - S_1 \ell_1(t), \quad (9.15)$$

avec  $d\mathcal{S}(r) = 2\pi r \, dr$ ,  $r \in [0, a]$ . Après substitution de (9.15) dans (9.14), on obtient

$$p_c(t) = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \left[ \int_{\mathcal{S}} y_m(r, t) \, d\mathcal{S}(r) - S_1 \ell_1(t) \right]. \quad (9.16)$$

**3. HAUT-PARLEUR** D'après l'Hypothèse du piston plan (**H3a**), le haut-parleur est modélisé comme un disque rigide de surface effective  $S_1$ . La balance des forces sur ce disque correspond à

$$m_1 \ddot{\ell}_1(t) + c_1 \dot{\ell}_1(t) + k_1 \ell_1(t) = -S_1 p_c(t) + B l i_1(t). \quad (9.17)$$

Le membre gauche de cette expression représente les forces d'un système masse-amortisseur-ressort standard avec une masse  $m_1$ , un amortissement  $c_1$  et une raideur  $k_1$  équivalents. La pression dans la cavité applique une force  $-S_1 p_c(t)$  sur le haut-parleur (force de réaction correspondant à  $p_c$  qui est la pression des parois sur le gaz). Le courant  $i_1(t)$  est commandé. Elle induit une force de Laplace  $B l i_1(t)$ , avec  $B$  le champ magnétique [T] et  $l$  [m] la longueur de la bobine du haut-parleur à l'intérieur du champ magnétique. Plus d'informations concernant ce modèle<sup>15</sup> à paramètres concentrées de Thiele & Small [230, 231, 239, 240] seront données dans la Section 10.1.3 du chapitre prochain.

### 9.3.2 Modèle SHP : modèle hybride

**MODÈLE HYBRIDE (EDP-EDO)** En combinant les Équations (9.13)-(9.16)-(9.17), on obtient un modèle hybride (EDP-EDO) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T \Delta y_m(r, t) + p_c(t) = \sigma_m \frac{\partial^2}{\partial t^2} y_m(r, t) + \mu \frac{\partial}{\partial t} y_m(r, t) \\ p_c(t) = -\gamma \frac{p_0}{V_0} \left[ \int_{\mathcal{S}} y_m(r, t) \, d\mathcal{S}(r) - S_1 \ell_1(t) \right] \\ m_1 \ddot{\ell}_1(t) + c_1 \dot{\ell}_1(t) + k_1 \ell_1(t) = -S_1 p_c(t) + B l i_1(t), \end{array} \right.$$

dont les variables et constantes physiques sont récapitulées dans le Tableau 9.2.

On propose de réécrire ce modèle sous la forme d'un Système Hamiltonien à Ports (SHP) hybride, combinant des états de dimension infinie (EDP) et des états de dimension finie (EDO). À cette fin, les éléments de la Définition 4.2 (Sous-section 4.1.2) sont énoncés, avant de formuler le modèle SHP.

#### 9.3.2.1 État

Soit  $\Omega \triangleq (0, a)$ . On définit l'état comme

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} \pi_m(r, t) \\ \varepsilon_m(r, t) \\ V_c(t) \\ \pi_1(t) \\ \ell_1(t) \end{bmatrix},$$

contenant les variables définies dans le Tableau 9.3

<sup>15</sup> Pour plus d'informations sur les différents phénomènes non linéaires présents dans les haut-parleurs et comment les inclure dans un modèle à paramètres localisés de type Thiele & Small, voir [125, 131, 141, 205]-[83], et les références y figurant]. Il existe aussi des modèles de haut-parleur EDP prenant en compte la dépendance spatiale du mouvement de la membrane (p.ex. [202] pour le cas d'un modèle non linéaire).

Tableau 9.2 – Liste des variables et constantes physiques du modèle de tom

<b>Variables indépendantes</b>			
$r$	[m]	coordonnée radiale de la membrane supérieure	
$t$	[s]	temps	
<b>Variables dépendantes</b>			
$y_m(r, t)$	[m]	déplacement transversal de la membrane	
$p_c(t)$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$	pression incrémentale dans la cavité	
$\ell_1(t)$	[m]	position verticale du haut-parleur	
$i_1(t)$	[A]	courant du haut-parleur	
<b>Constantes</b>			
$T$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$	tension dans la membrane supérieure	
$\sigma_m$	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$	densité surfacique de la membrane supérieure équivalente	$\sigma_m = \sigma + 0,85a\rho_{\text{air}}$
$c$	$\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	vitesse d'onde dans la membrane supérieure	$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma_m}}$
$a$	[m]	rayon de la membrane supérieure	
$S$	[m <sup>2</sup> ]	surface de la membrane supérieure	$S = \pi a^2$
$\gamma$	[–]	indice adiabatique de l'air	
$p_0$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$	pression initiale dans la cavité	
$V_0$	[m <sup>3</sup> ]	volume initiale de la cavité	
$S_1$	[m <sup>2</sup> ]	surface du haut-parleur (piston plan)	
$m_1$	[kg]	masse du haut-parleur	
$c_1$	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right]$	amortissement du haut-parleur	
$k_1$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$	raideur du haut-parleur	
$Bl$	$\left[\frac{\text{N}}{\text{A}}\right]$	facteur de la force de Laplace	

Tableau 9.3 – Liste des états du modèle de tom

<b>Variables d'état</b>			
$\pi_m(r, t)$	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right]$	quantité de mouvement surfacique de la membrane supérieure	$\pi_m = \sigma_m \frac{\partial y_m}{\partial t}$
$\varepsilon_m(r, t)$	[–]	déformation de la membrane supérieure	$\varepsilon_m = \nabla y_m = \frac{\partial y_m}{\partial r}$
$V_c(t)$	[m <sup>3</sup> ]	volume incrémental de la cavité	
$\pi_1(t)$	$\left[\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	quantité de mouvement de la membrane du haut-parleur	$\pi_1 = m_1 \dot{\ell}_1$
$\ell_1(t)$	[m]	position verticale de la membrane du haut-parleur	

L'espace d'état est l'espace de Hilbert

$$\mathbb{X} \triangleq H_0^1(\Omega, \mathbb{R}; 2\pi r \, dr) \times H^1(\Omega, \mathbb{R}; 2\pi r \, dr) \times \mathbb{R}^3,$$

muni du produit scalaire  $\langle x, y \rangle_{\mathbb{X}}$  qui est défini à partir du Hamiltonien, comme introduit ci-dessous.

### 9.3.2.2 Énergie

La fonction hamiltonienne  $\mathcal{H}(x(t))$  du système représente son énergie en fonction de l'état  $x(t)$ . Cette énergie est la somme des 5 contributions suivantes.

— L'énergie cinétique de la membrane :

$$E_{m,c} = \frac{1}{2} \int_S \frac{\pi_m^2}{\sigma_m} dS(r).$$

— L'énergie élastique de la membrane :

$$E_{m,e} = \frac{1}{2} \int_S T \varepsilon_m^2 dS(r).$$

— L'énergie de compression adiabatique de l'air dans la cavité : à partir de  $E_c = \int_0^{V_c} (-p_c) dV_c$  et en utilisant la relation (9.14), on obtient

$$E_c = \frac{\gamma p_0 V_0}{2} \left( \frac{V_c}{V_0} \right)^2 = \frac{E_0}{2} \left( \frac{V_c}{V_0} \right)^2, \quad (9.18)$$

avec  $E_0 \triangleq \gamma p_0 V_0$ .

*Remarque – Interprétation de l'énergie de compression comme un Hamiltonien « décalé » (en fonction d'un variable de déviation)* L'énergie de compression du gaz dans la cavité peut être interprétée d'une autre manière. L'énergie de compression d'un gaz à volume  $V$  peut aussi être obtenue comme

$$E_{\text{gaz}} = E_{\text{gaz},0} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma},$$

par rapport à l'énergie au repos  $E_{\text{gaz},0} = \frac{C_v}{R} p_0 V_0$ . Prenant cette énergie comme hamiltonien  $\tilde{H}(V)$  en fonction du volume  $V = V_0 + V_c$ , on peut définir un hamiltonien « décalé »<sup>16</sup>  $H(V_c)$  en fonction de la déviation de volume  $V_c$  par rapport au volume au repos  $V_0$  comme

$$\begin{aligned} H(V_c) &= \tilde{H}(V) - \left[ \tilde{H}(V_0) + \left. \frac{d\tilde{H}}{dV} \right|_{V=V_0} \cdot V_c \right] \\ &= E_{\text{gaz},0} \left( 1 + \frac{V_c}{V_0} \right)^{1-\gamma} - \left[ E_{\text{gaz},0} + E_{\text{gaz},0} (1-\gamma) \frac{V_c}{V_0} \right] \\ &= E_{\text{gaz},0} \left[ \left( 1 + \frac{V_c}{V_0} \right)^{1-\gamma} - 1 - (1-\gamma) \frac{V_c}{V_0} \right] \end{aligned}$$

Son approximation quadratique, de laquelle la loi linéarisée gouvernant la pression découle, est donnée par le développement limité en série binomiale à l'ordre 2 :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \mathcal{O}(x^3).$$

On obtient

$$\begin{aligned} H(V_c) &\approx E_{\text{gaz},0} \left[ \cancel{1} + (1-\gamma) \frac{V_c}{V_0} + \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \left( \frac{V_c}{V_0} \right)^2 - \cancel{1} - (1-\gamma) \frac{V_c}{V_0} \right] \\ &= E_{\text{gaz},0} \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} \left( \frac{V_c}{V_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Substituant  $E_{\text{gaz},0}$ , et sachant que  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  et  $R = C_p - C_v$ , on obtient

$$H(V_c) = \frac{\gamma p_0 V_0}{2} \left( \frac{V_c}{V_0} \right)^2,$$

<sup>16</sup>. Shifted Hamiltonian, [167, Éq. 7].

comme l'expression de l'Éq. (9.18).

La dérivée de l'énergie  $E_c$  par rapport au variable d'état  $V_c$ , dont on aura besoin plus bas, est

$$\frac{dE_c}{dV_c} = \gamma \frac{p_0}{V_0} V_c \stackrel{(9.14)}{=} -p_c.$$

— L'énergie cinétique du haut-parleur :

$$E_{l,c} = \frac{1}{2} \frac{\pi_1^2}{m_1}.$$

— L'énergie élastique du ressort du haut-parleur :

$$E_{l,e} = \frac{1}{2} k_1 \ell_1^2.$$

### 9.3.2.3 Produit scalaire et fonction hamiltonienne

On définit le produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbb{X}} \triangleq \int_{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} x_1(r) & x_2(r) \end{bmatrix} \mathbf{L}_m \begin{bmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \end{bmatrix} d\mathcal{S}(r) + \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \mathbf{L}_{c\&l} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \quad (9.19)$$

avec

$$\mathbf{L}_m = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_m}, T \right) \succ 0, \mathbf{L}_{c\&l} = \text{diag} \left( \frac{E_0}{V_0^2}, \frac{1}{m_1}, k_1 \right) \succ 0.$$

Avec ce produit scalaire, la fonction hamiltonienne

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{X}} = E_{m,c} + E_{m,e} + E_c + E_{l,c} + E_{l,e}$$

correspond à l'énergie totale du système.

### 9.3.2.4 Dérivée de la fonction hamiltonienne

Nous avons affaire à un PHS mixte qui combine une partie de dimension finie et une partie de dimension infinie. De ce fait, on peut définir la dérivée  $D_x \mathcal{H}(\mathbf{x})$  qui contient à la fois des dérivées variationnelles, pour les variables d'état de dimension infinie, et des gradients, pour les variables d'état de dimension finie :

$$D_x \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \delta_{x_m} \mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \nabla_{x_{c\&l}} \mathcal{H}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \mathcal{L} \mathbf{x}.$$

On remarque que

$$\mathcal{L} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\pi_m}{\sigma_m} & T\varepsilon & \left| \frac{E_0}{V_0^2} V_c (= -p_c) & \frac{\pi_1}{m_1} & k_1 \ell_1 \right|^T,$$

qui représente respectivement la vitesse de la membrane, la projection radiale de la force de tension de la membrane (pour des petits déplacements), la densité d'énergie de la cavité (= - la pression dans la cavité), la vitesse du haut-parleur et la force élastique sur le haut-parleur.

9.3.2.5 *Modèle SHP*

On obtient le modèle SHP

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{x} = (\mathcal{J} - \mathcal{R}) D_x \mathcal{H}(\mathbf{x}) + \mathcal{G} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathcal{G}^* \delta_x \mathcal{H}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

où la première équation correspond à

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \pi_m \\ \varepsilon_m \\ V_c \\ \pi_1 \\ \ell_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \text{div} & -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ \text{grad} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_S \cdot dS & 0 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\pi_m}{\sigma_m} \\ T\varepsilon \\ \frac{E_0}{V_0^2} V_c \\ \frac{\pi_1}{m_1} \\ k_1 \ell_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Bl \\ 0 \end{bmatrix} i_1 \quad (9.20)$$

et la deuxième à

$$\mathbf{y} = Bl \hat{\ell}_1. \quad (9.21)$$

Dans la première équation,  $\mathbb{1}$  représente l'opérateur unitaire. L'opérateur (matrice)  $\mathcal{R} = \text{diag}(\mu \geq 0, 0, 0, c_1 \geq 0, 0)$  est semi-définie positive. L'opérateur  $\mathcal{J}$  a comme domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}) = H_0(\text{grad}) \times H(\text{div}) \times \mathbb{R}^3,$$

où  $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r}$  et  $\text{div} = \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)$  dans des coordonnées polaires, en prenant en compte la Hypothèse **(H1b)** qui implique qu'il n'y a pas de variation dans la direction angulaire. Par une intégration par parties, on prouve que l'opérateur  $\mathcal{J}$  est formellement anti-auto-adjoint (Lemme C.1 de l'Annexe C).

La deuxième équation du modèle SHP, (9.21), représente la force électromotrice. Ainsi, le produit entre entrée  $i_1$  et sortie  $u_1$  représente la puissance électrique apportée au haut-parleur du système. Cette deuxième équation ne sera pas considérée explicitement dans la suite des développements.

9.3.3 *Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride*

Nous procédons ensuite à une mise à l'échelle du modèle SHP (9.20)-(9.21). Ce procédé consiste à remplacer chaque variable (in)dépendante  $v$  par sa version adimensionnée  $\tilde{v}$  selon

$$\tilde{v} \triangleq \frac{v - v_0}{v_{\text{ref}}}. \quad (9.22)$$

Ici,  $v_0$  est une valeur qui sert à déplacer le zéro ( $v_0 = 0$  dans la suite) et  $v_{\text{ref}}$  est une valeur de référence à préciser. Puisque les grandeurs  $v$ ,  $v_0$  et  $v_{\text{ref}}$  ont la même unité physique,  $\tilde{v}$  est une grandeur sans dimension.

On commence par substituer les variables par (9.22) dans le modèle (9.20)-(9.21) et par appliquer la règle de dérivation en chaîne. Ensuite, on obtient des relations algébriques entre les valeurs de référence  $v_{\text{ref}}$ . Finalement, on peut choisir un certain nombre de valeurs de référence au choix et les autres valeurs de référence en découlent<sup>17</sup>. Pour les valeurs de références au choix, on prend souvent des grandeurs caractéristiques du problème physique sous considération (p.ex. une distance [m] d'un objet, etc.)<sup>18</sup>.

Ici, la mise à l'échelle du modèle SHP est effectuée afin de réduire le nombre de constantes physiques présentes dans la suite des calculs<sup>19</sup>. Des groupes adimensionnées

17. Pour plus d'infos sur l'analyse dimensionnelle et le nombre de groupes adimensionnées, voir le Théorème de Buckingham-Pi ([41, 265, 272] avec de nombreux exemples).

18. Dans [138], la procédure de mise à l'échelle est appliquée à plusieurs EDOs et EDPs typiques.

19. Dans d'autres contextes, une remise à l'échelle peut aussi remédier à des problèmes numériques présents quand les différentes variables du modèle ont des ordres de grandeurs très différents. Après une mise à l'échelle, on peut les faire varier toutes dans l'intervalle  $[0, 1]$  par exemple [138].

apparaîtront, que l'on peut soit donner la valeur 1 par un choix judicieux des valeurs de référence, soit renommer par une lettre.

Après un calcul qui est explicité dans la Section C.2.2 en Annexe, on obtient le modèle SHP adimensionné suivant :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & (\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}}) & -\alpha \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \int_{\tilde{S}} \cdot d\tilde{S} & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{t}_1 \quad (9.23)$$

où  $d\tilde{S} = 2\pi\tilde{r} d\tilde{r}$ ,  $\tilde{r} \in \tilde{\Omega} = [0, 1]$  et les formules d'adimensionnement sont données dans le Tableau 9.4.

Tableau 9.4 – Adimensionnement des variables et constantes

$\tilde{r} = \frac{r}{a}$	$\tilde{t} = \frac{c}{a} t$	$\tilde{S} = \frac{S}{a^2}$
$\tilde{\pi}_m = \frac{\pi_m}{a^{-1} \sqrt{\sigma_m \gamma p_0 V_0}}$	$\tilde{\varepsilon}_m = \frac{\varepsilon_m}{a^{-1} \sqrt{\gamma p_0 V_0 T^{-1}}}$	$\tilde{V}_c = \frac{V_c}{V_0}$
$\tilde{\pi}_1 = \frac{\pi_1}{\sqrt{m_1 \gamma p_0 V_0}}$	$\tilde{\ell}_1 = \frac{\ell_1}{\sqrt{k_1^{-1} \gamma p_0 V_0}}$	$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{H}}{\gamma p_0 V_0}$
$\tilde{i}_1 = \frac{i_1}{c(aBl)^{-1} \sqrt{m_1 \gamma p_0 V_0}}$	$\zeta = \frac{ac_1}{cm_1}$	$\zeta = \frac{\mu a}{c\sigma_m}$
$\alpha = \frac{a^2}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\sigma_m V_0}}$	$\beta_1 = \frac{aS_1}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{m_1 V_0}}$	$\beta_2 = \frac{a}{c} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$
$\tilde{p}_c = \frac{p_c}{p_0}$	$\tilde{y}_m = \frac{y_m}{a}$	$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n$
$\tilde{z}_n = \frac{z_n}{a}$	$\tilde{\lambda}_n = a\lambda_n$	$\tilde{f} = \frac{a}{c} f$

### 9.3.4 Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre

#### 9.3.4.1 Choix de la base modale

Nous procédons à une projection modale du modèle SHP sur une base modale orthonormale au choix. Le résultat sera tronqué à  $N$  modes et ainsi, une réduction d'ordre approximative est obtenue, remplaçant le modèle hybride EDP-EDO par un modèle purement EDO, qui sera utilisé plus tard pour la conception de la loi de commande.

Pour effectuer la projection modale d'une variable  $\tilde{v}(\tilde{r}, \tilde{t})$  sur une fonction de la base  $\tilde{w}(\tilde{r})$ , le produit scalaire suivant est défini, en version adimensionnée comme

$$\langle \tilde{v}(\tilde{r}, \tilde{t}), \tilde{w}(\tilde{r}) \rangle_P \triangleq \int_{\tilde{S}} \tilde{v}(\tilde{r}, \tilde{t}) \tilde{w}(\tilde{r}) d\tilde{S} = 2\pi \int_0^1 \tilde{v}(\tilde{r}, \tilde{t}) \tilde{w}(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r},$$

où en version redimensionnée comme

$$\langle v(r, t), \bar{w}(r) \rangle_P \triangleq \frac{1}{a^2} \int_S v(r, t) \bar{w}(r) dS = \frac{2\pi}{a^2} \int_0^a v(r, t) \bar{w}(r) r dr.$$

(Ici,  $\bar{w}(r)$  indique une fonction de la base modale (encore à définir), et  $\tilde{w}$  sa version adimensionnée.)

Une possibilité serait de construire une base modale composée des modes propres axisymétriques de la membrane circulaire encastrée au bord (cf. la Sous-section 9.2.1), grâce au lemme suivant.

**Lemme 9.1.** *Les fonctions*

$$\left\{ \bar{\psi}_n(r) \triangleq \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) \right\},$$

avec  $\lambda_n$  t.q.  $J_0(\lambda_n a) = 0$ , forment une base orthonormale.

*Démonstration.* En Sous-section C.2.3 de l'Annexe C. □

Nous choisissons d'utiliser une base modale composée des modes propres axisymétriques de la membrane circulaire encastrée au bord *couplée à une cavité* (cf. la Sous-section 9.2.2), selon le lemme suivant.

**Lemme 9.2.** *Les fonctions*

$$\left\{ \bar{\varphi}_n(r) \triangleq \frac{1}{w_n} [J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n a)] \right\},$$

avec  $\lambda_n$  qui satisfait (9.12) et les poids

$$w_n = \lambda_n a |J_0(\lambda_n a)| \sqrt{2\pi \left( \frac{a^4 \lambda_n^4}{8B^2} - \frac{a^2 \lambda_n^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right)},$$

forment une base orthonormale.

*Démonstration.* En Sous-section C.2.3 de l'Annexe C. □

On souligne que pour les  $\lambda_n$  satisfaisant la condition (9.12) qui sont utilisés dans le Lemme 9.2, on a que  $J_0(\lambda_n a) \neq 0$ , contrairement au cas de la membrane seule (Lemme 9.1).

**ADIMENSIONNEMENT DE LA BASE MODALE** On prend  $\bar{\varphi}_n^{\text{ref}} \triangleq 1$ , de sorte que  $\tilde{\varphi}(\tilde{r}) = \bar{\varphi}(\tilde{r})$ . La base modale s'écrit alors

$$\left\{ \tilde{\varphi}_n(r) = \frac{1}{w_n} [J_0(\tilde{\lambda}_n \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_n)] \right\},$$

et la condition implicite des fréquences (9.12) devient

$$\tilde{\lambda}_n^2 J_0(\tilde{\lambda}_n) = -B J_2(\tilde{\lambda}_n). \quad (9.24)$$

### 9.3.4.2 Projection modale du SHP et troncation à $N$ modes

**PROCÉDURE** La projection modale correspond à

$$y_m(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\varphi}_n(r) z_n(t),$$

où les fonctions spatiales  $\bar{\varphi}_n(r)$  de la base modale sont définies dans le Lemme 9.2 et où les évolutions temporelles  $z_n(t)$  sont inconnues et seront obtenues par une simulation du modèle.

Une troncature à  $N$  modes est effectuée :

$$y_m(r, t) \approx \sum_{n=1}^N \bar{\varphi}_n(r) z_n(t).$$

On note que les modes des ordres les plus bas sont les plus importants pour le son produit [129]. De plus, ce sont ces modes qui sont le plus influencés par la cavité [171], comme illustré dans la Figure 9.12.

Alternativement, en variables adimensionnées, on note

$$\tilde{y}_m(\tilde{r}, \tilde{t}) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{\varphi}_n(\tilde{r}) \tilde{z}_n(\tilde{t}).$$

SHP PROJÉTÉ ET TRONQUÉ Après les calculs détaillés en Sous-section C.2.3, un SHP de dimension finie (EDO pure) est obtenu. Pour  $N = 2$  modes, par exemple, il s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cccc|ccc} \kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{II,1}^2}{\lambda_{I,1}^2} & -\frac{\kappa^2}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa^2}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & \kappa^2 \tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{II,2}^2}{\lambda_{I,2}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{I}_1, \quad (9.25)$$

où  $\text{sign}_i \triangleq \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i))$  et

$$\begin{cases} \kappa \triangleq a \sqrt{T(\gamma p_0 V_0)^{-1}} \\ \chi_{I,i} \triangleq \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} \\ \chi_{II,i} \triangleq \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{1}{B}}. \end{cases}$$

Ce SHP tronqué contient  $2N + 3$  équations, pour un nombre de modes axisymétriques de la membrane  $N$  au choix :  $2N$  équations pour les  $N$  modes de la membrane, une équation pour la cavité, et 2 équations pour le haut-parleur.

Les SHP projetés pour les cas  $N = 1$  et  $N = 3$  sont également explicités dans la Sous-section C.2.3.

### 9.3.5 Représentation d'état

La  $(2N + 1)^{\text{me}}$  ligne du modèle SHP tronqué (9.25) représente la version projetée

$$-\tilde{V}_c = \frac{1}{\gamma} \tilde{p}_c(\tilde{t}) = \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{\pi\alpha\kappa}}{B\chi_{I,i}} \tilde{\lambda}_i \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \tilde{z}_i(\tilde{t}) + \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{\ell}_1(\tilde{t}) \quad (9.26)$$

de l'équation statique de la cavité (9.16). Cette relation algébrique est instantanée, et, du point de vue de l'automatique, redondante. Elle peut être enlevée du SHP (9.25) qui peut alors être réécrit comme une représentation en espace d'état classique

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx. \end{cases} \quad (9.27)$$

Dans cette écriture, l'état  $x \in \mathbb{R}^{2N+2}$  correspond à l'état utilisé dans (9.25) mais dont la variable du volume  $\tilde{V}_c$  (reliée à la pression  $\tilde{p}_c$ ) a été enlevée. Cet état ne contient alors plus que des véritables degrés de liberté. L'entrée du système  $u(\tilde{t})$  est le courant du haut-parleur  $\tilde{i}(\tilde{t})$ , et la sortie du système  $y(\tilde{t})$  est la mesure physique de la pression dans la cavité  $\tilde{p}_c(\tilde{t})$ .

Pour le cas  $N = 2$ , la forme (9.27) correspond à

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{I,1}^2}{\lambda_{I,1}^2} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \lambda_{I,1}^2} \tilde{\lambda}_1^2 & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\zeta & 0 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\sqrt{\pi \alpha}}{k B \lambda_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \lambda_{I,1} \lambda_{I,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{I,2}^2}{\lambda_{I,2}^2} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \lambda_{I,2}^2} \tilde{\lambda}_2^2 & 0 & -\zeta & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\sqrt{\pi \alpha}}{k B \lambda_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \\ -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \lambda_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \lambda_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 & -\zeta & -\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{i}_1$$

$$y = \begin{bmatrix} \gamma \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \lambda_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & \gamma \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \lambda_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \frac{\beta_1}{\beta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix},$$

où l'abréviation  $\text{sign}_i \triangleq \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i))$  est utilisée. Les cas  $N = 1$  et  $N = 3$  sont explicités dans la Sous-section C.2.4.

Par la suite, la représentation (9.27) sera utilisée pour la conception de la loi de commande.

**SIMULATION 1** Dans le présent chapitre, la simulation du modèle de tom (9.27) est revisitée à plusieurs reprises, avec un état initial zéro à l'exception des vitesses modales  $\partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_i = -0.001$ , et avec  $B = 5.54$ ,  $\kappa = 0.171$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\alpha = 1.33$ ,  $\beta_1 = 0.768$ ,  $\beta_2 = 0.353$ ,  $\zeta = 0.0923$ ,  $\xi = 0.1$  comme paramètres physiques du modèle. L'évolution temporelle du modèle est simulée en utilisant une méthode numérique standard (Adams/BDF avec détection automatique de raideur numérique et commutation [113], avec un pas temporel  $\Delta \tilde{t} = 0.001$ ).

Une première simulation concerne le cas du modèle à  $N = 2$  modes sans contrôle (Fig. 9.20). On remarque que la simulation du déplacement de la membrane à son milieu,

$$\tilde{y}(\tilde{r} = 0, \tilde{t}) = J_0(0) \tilde{z}_1(\tilde{t}) + J_0(0) \tilde{z}_2(\tilde{t}),$$

contient trois fréquences : les deux fréquences correspondant aux deux modes de membrane axisymétriques modélisés, et une petite contribution basse-fréquence qui est la fréquence de résonance du haut-parleur, qui oscille librement par sympathie à travers le couplage membrane-cavité-haut-parleur.

L'évolution de l'état entier du SHP est montrée Figure 9.21. Ici, la variable  $\tilde{V}_c$ , ne faisant pas partie de la reformulation (9.27) qui a été simulée, est calculée avec la

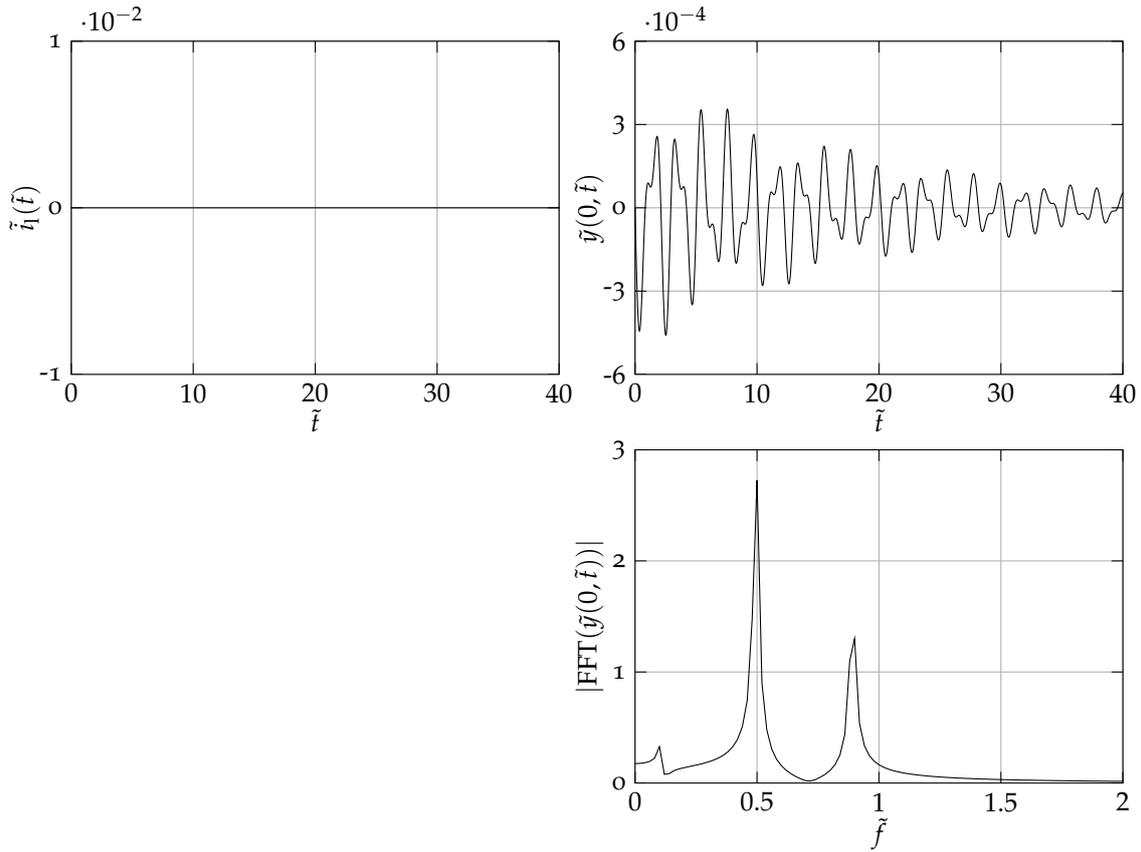


FIGURE 9.20 – Simulation du système non contrôlé, avec  $N = 2$  modes : évolution du déplacement au milieu de la membrane  $\tilde{y}(0, \tilde{t})$  et son contenu fréquentiel.

relation statique (9.26). Dans la même figure, on voit aussi l'évolution temporelle du Hamiltonien du système discrétisé, calculé comme

$$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t})) = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 & z_2 & \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 & \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 & \tilde{V}_c & \tilde{\pi}_1 & \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c} & \\ \hline \tilde{W} & \\ \hline & 1 \\ & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ z_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix},$$

où la matrice  $\tilde{W}$  est définie par l'Équation (C.25) en Annexe C. Au début de la simulation, une énergie initiale est apportée au système sous la forme des conditions initiales représentant un coup de mailloche. Ensuite, au cours de la vibration de l'instrument, cette énergie est dissipée dans la membrane supérieure ( $\mu$ ) et dans l'amortisseur (équivalent) du haut-parleur ( $c_1$ ), ce qui correspond à un Hamiltonien décroissant.

#### 9.4 CONTRÔLE MODAL

Un observateur-régulateur est développé qui a pour but de changer des fréquences (et/ou amortissements) des premiers  $N$  modes axisymétriques de la membrane ( $\tilde{z}_i$ ), utilisant le modèle tronqué à  $N$  modes (9.25). D'abord, le régulateur temps-fini est conçu sous l'hypothèse que tout l'état est connu (Sous-section 9.4.1), et ensuite, l'obser-

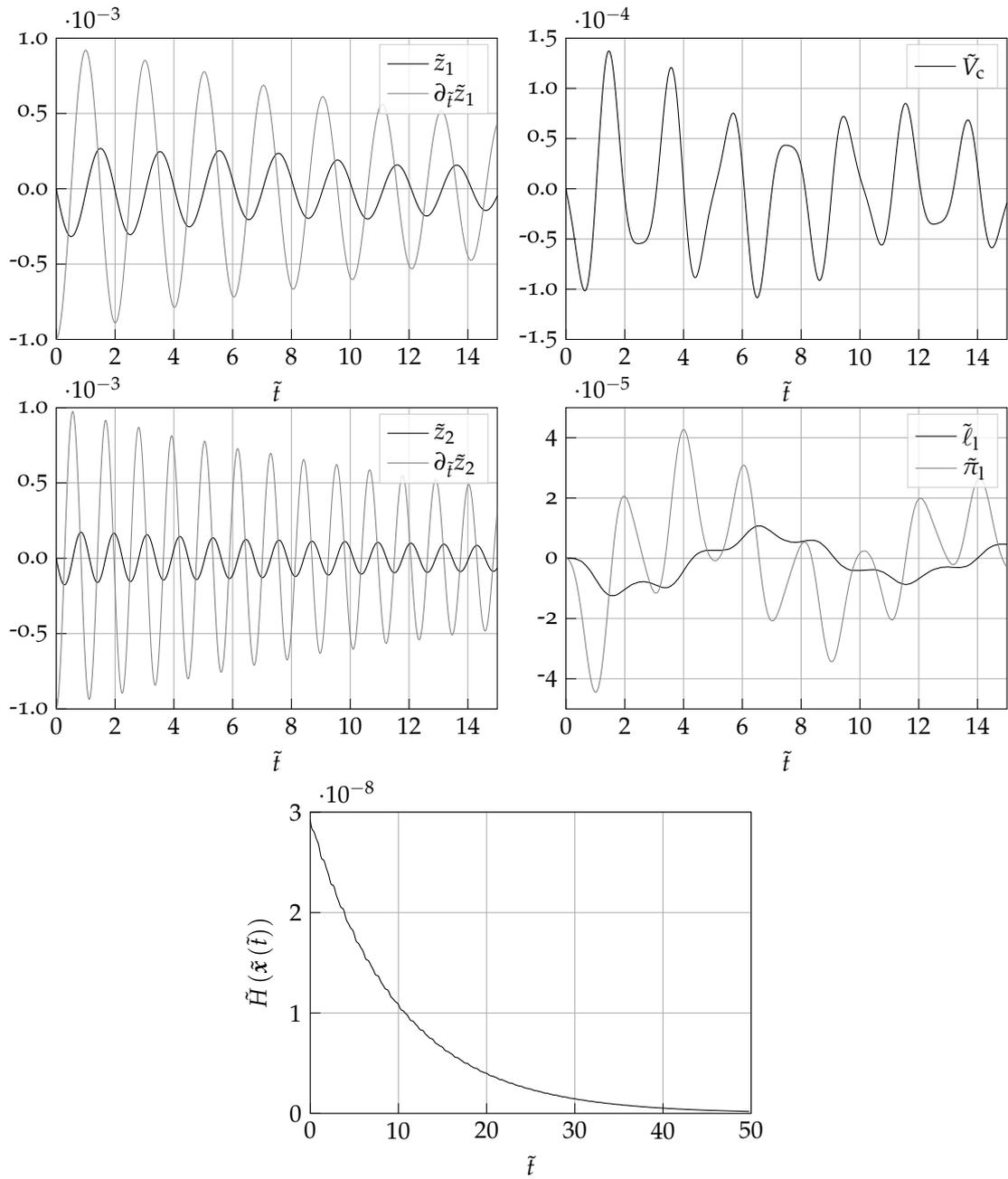


FIGURE 9.21 – Simulation du système non contrôlé, avec  $N = 2$  modes : évolution de l'état entier et du Hamiltonien.

vateur temps fini est ajouté (Sous-section 9.4.2). Finalement, dans la Sous-section 9.4.3, quelques remarques envers une implémentation pratique sont données.

#### 9.4.1 Régulateur en temps fini

Dans cette sous-section, une loi de commande pour le courant du haut-parleur  $\tilde{i}_1$  est développée, supposant la connaissance de la pression  $\tilde{p}_c$  dans la cavité et les évolutions temporelles  $\tilde{z}_i$  des  $N$  premiers modes. En changeant la position verticale du haut-parleur, le volume et donc la pression de la cavité sont changés. Cette pression agit sur la membrane supérieure du tom, influençant ainsi son comportement vibratoire. Ce dispositif est schématisé dans la Figure 9.22.

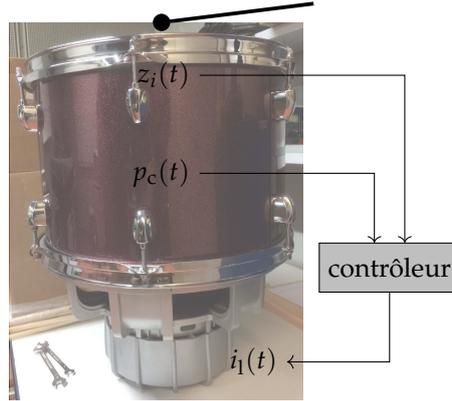


FIGURE 9.22 – Disposition du contrôleur : mesure de la pression dans la cavité  $p_c(t)$  et évolutions temporelles des modes de la membrane  $z_i(t)$  comme entrée, et courant du haut-parleur  $i_1(t)$  comme sortie.

La conception de la loi de commande basée sur le modèle projeté à  $N$  modes (9.27) consiste en trois étapes : un placement de pôles sur la membrane, l'utilisation du couplage entre les trois sous-systèmes, et un contrôle de position du haut-parleur en temps fini.

##### 9.4.1.1 Étape 1 : Contrôle de la membrane par un placement de pôles

Les premières  $2N$  équations du modèle (9.25) représentent le sous-système de la membrane :  $N$  modes axisymétriques soumis à une pression uniforme  $\tilde{p}_c$  que l'on considère ici comme une entrée intermédiaire (même si on ne la contrôle pas directement). On peut réécrire ce sous-système comme un système linéaire contrôlé par la pression

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A}_m \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \mathbf{B}_m \tilde{p}_c(\tilde{t}), \quad (9.28)$$

où les matrices  $A_m$  et  $B_m$  sont spécifiées dans la Section C.3.1 de l'Annexe C pour les cas  $N = 1, 2, 3$ . Pour le cas  $N = 2$ , ce système s'écrit

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{1}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\zeta & 0 \\ \frac{1}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\chi_{II,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \end{bmatrix} \tilde{p}_c \quad (9.29)$$

On montre également dans la Sous-section C.3.1 que le système (9.28) est commandable. Il est alors possible de définir une loi de commande

$$\tilde{p}_c^*(\tilde{t}) = -\sum_{i=1}^K \left[ k_{i,a} \tilde{z}_i(\tilde{t}) + k_{i,b} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \right] = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (9.30)$$

qui réalise un placement de pôles, de sorte à obtenir le système bouclé

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_m - \mathbf{B}_m \mathbf{K}) \begin{bmatrix} \vdots \\ \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{z}_i(\tilde{t}) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (9.31)$$

où le vecteur  $\mathbf{K}$  contient les constantes  $k_{i,a}$  et  $k_{i,b}$  qui sont choisies de telle manière à obtenir des fréquences et amortissements désirés pour la dynamique des  $N$  modes en boucle fermée.

Notons que dans le vrai système du tom, on n'est pas capable de piloter la pression  $\tilde{p}_c$  directement. On utilisera la « commande » (9.30) comme valeur désirée dans la suite (indiquée avec un astérisque) : le but est maintenant de faire en sorte que la pression dans la cavité  $\tilde{p}_c$  est contrôlée vers la pression cible  $\tilde{p}_c^*$  (9.30).

#### 9.4.1.2 Étape 2 : Couplage statique entre les sous-systèmes

La  $(2N + 1)^{\text{me}}$  ligne du modèle (9.25) nous donne une relation statique entre les évolutions temporelles  $\tilde{z}_i(\tilde{t})$  des premiers  $N$  modes de la membrane, la pression  $\tilde{p}_c(\tilde{t})$  dans la cavité et la position  $\ell_1(\tilde{t})$  du haut-parleur (Éq. (9.26)) :

$$\frac{1}{\gamma} \tilde{p}_c(\tilde{t}) = \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{\pi\alpha\kappa}}{B\chi_{I,i}} \tilde{\lambda}_i \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \tilde{z}_i(\tilde{t}) + \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{\ell}_1(\tilde{t}).$$

- Si l'on substitue des mesures des  $z_i^m(\tilde{t})$  ("m" pour "mesuré") et de la pression  $\tilde{p}_c^m(\tilde{t})$  dans cette relation statique, on obtient une mesure (implicite) de la position du haut-parleur :

$$\tilde{\ell}_1(\tilde{t}) \triangleq \tilde{\ell}_1^m(\tilde{t}).$$

(Une mesure directe de la position du haut-parleur par un capteur de position dans l'instrument serait difficile à implémenter.)

- Si l'on substitue des mesures des  $z_i^m(\tilde{t})$  et la pression cible  $p_c^*(\tilde{t})$  (9.30), on obtient une référence pour la position du haut-parleur :

$$\tilde{\ell}_1(\tilde{t}) \triangleq \tilde{\ell}_1^*(\tilde{t}).$$

De cette manière, une erreur de pression

$$\tilde{p}_c^m(\tilde{t}) - \tilde{p}_c^*(\tilde{t})$$

est réécrite comme une erreur de position

$$\tilde{\ell}_1^m(\tilde{t}) - \tilde{\ell}_1^*(\tilde{t}),$$

qui sera utilisée pour la conception d'un contrôle de position de la membrane du haut-parleur en temps fini dans l'étape suivante.

#### 9.4.1.3 Étape 3 : Contrôle en temps fini du haut-parleur vers une dynamique cible

Il a été montré dans la Sous-section 6.2.3 comment une loi de commande en temps fini pour un double intégrateur peut être utilisée pour formuler une loi de commande passive pour le courant d'un haut-parleur dans le but de contrôler sa position  $\ell_1^m(\tilde{t})$  vers une position cible  $\ell_1^*(\tilde{t})$  dans un temps fini.

L'avant-dernière équation du modèle (9.25) représente l'ODE du haut-parleur (9.17) (adimensionnée) et peut être réécrite comme

$$\frac{1}{\beta_2} \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \tilde{\ell}_1 + \frac{\zeta}{\beta_2} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1 + \beta_2 \tilde{\ell}_1 = -\frac{\beta_1}{\gamma} \tilde{p}_c + \tilde{\imath}_1.$$

Par identification, on trouve que la loi de commande passive en temps fini correspondante est la suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\imath}_1 = & \frac{\beta_1}{\gamma} \tilde{p}_c^m + \beta_2 \tilde{\ell}_1^m + \frac{\zeta}{\beta_2} \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1^m - \bar{k}_3 (\tilde{\ell}_1^m - \tilde{\ell}_1^*) - \bar{k}_4 \left( \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1^m - \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1^* \right) \\ & - \frac{1}{\beta_2} \left( \bar{k}_1 |\tilde{\ell}_1^m - \tilde{\ell}_1^*|^{\frac{\bar{\alpha}}{2-\bar{\alpha}}} + \bar{k}_2 \left| \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1^m - \frac{d}{d\tilde{t}} \tilde{\ell}_1^* \right|^{\bar{\alpha}} \right), \quad (9.32) \end{aligned}$$

avec des paramètres de contrôle  $\bar{k}_1, \bar{k}_2 > 0$ ,  $\bar{\alpha} \in ]0, 1[$ ,  $\bar{k}_3 > \beta_2$ ,  $\bar{k}_4 > \frac{\zeta}{\beta_2}$ . Les signaux  $\ell_1^m(\tilde{t})$  et  $\ell_1^*(\tilde{t})$  définis dans l'Étape 2 sont substitués dans cette loi de commande. (Une dérivation numérique est nécessaire pour calculer les dérivées temporelles de ces signaux.)

**STABILITÉ DE LA STRUCTURE EN CASCADE** En appliquant la loi de commande (9.32), la pression cible  $\tilde{p}_c^*(\tilde{t})$  dans la cavité peut être obtenue, réalisant le contrôle par placement de pôles de la membrane supérieure. Cette structure du régulateur est montrée dans la Figure 9.23.

Le système global peut être considéré au sens d'une perturbation singulière. La membrane contrôlée par la pression (9.31) peut être interprétée comme un sous-système lent, stabilisé exponentiellement, tandis que le haut-parleur peut être interprété comme un sous-système vite, contrôlé en temps fini par le courant électrique du haut-parleur. Le système global est alors stabilisé exponentiellement selon le Théorème de Tikhonov (cf. par exemple [262, Théorème A.11]).

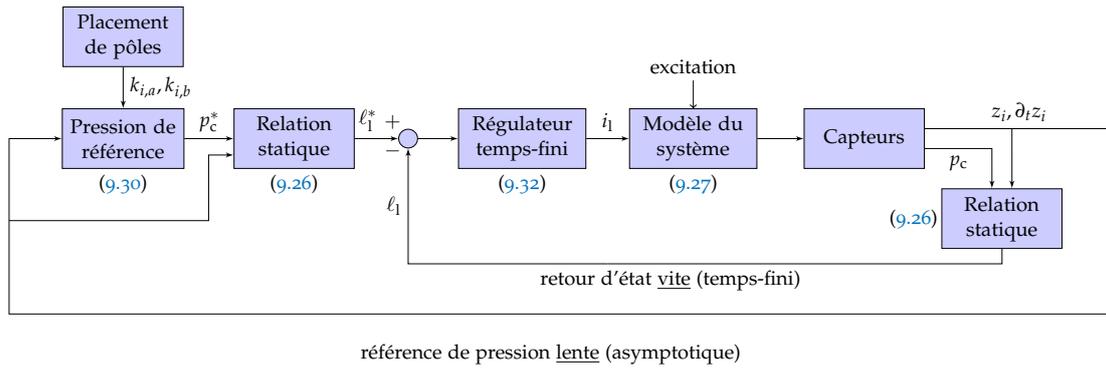


FIGURE 9.23 – Structure du régulateur. Les équations correspondantes sont indiquées.

**SIMULATION 1 (CONTINUÉE)** La loi de commande (9.32) avec les paramètres  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 10$ ,  $\bar{k}_3 = 2\beta_2$ ,  $\bar{k}_4 = 2\zeta/\beta_2$ ,  $\bar{\alpha} = 0.9$  est appliquée au système avec  $N = 2$  modes. Il est supposé que l'état entier est connu. Le but du contrôle était d'obtenir un ratio de fréquences de  $\tilde{f}_2 : \tilde{f}_1 = 2 : 1$  pour les deux modes de membrane, correspondant aux paramètres de contrôle  $k_{1a} = 0.3$ ,  $k_{2a} = -0.7$ ,  $k_{1b} = k_{2b} = 0$ . Les changements de fréquence sont observés dans la simulation (Fig. 9.24).

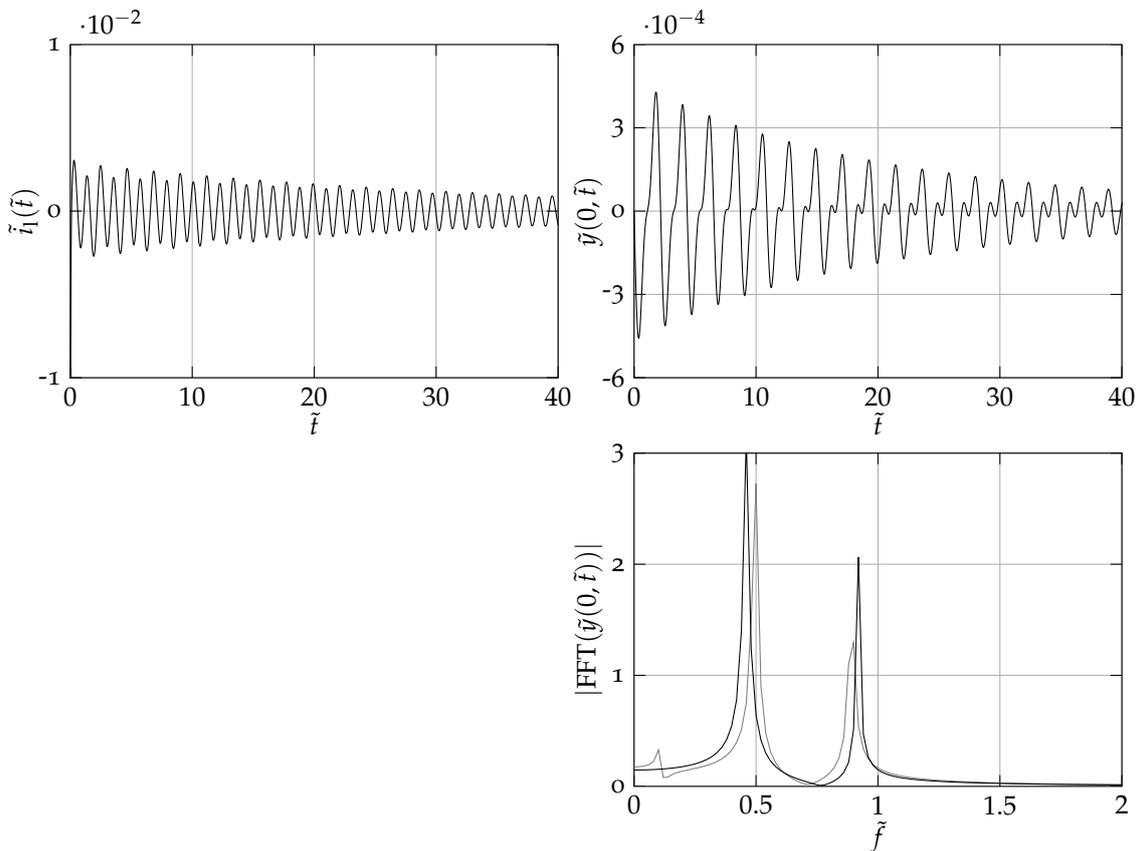


FIGURE 9.24 – Simulation du système à  $N = 2$  modes contrôlé. Le spectre pour le cas sans contrôle (cf. Fig. 9.20) est indiqué en gris pour comparaison.

**SIMULATION 2** Un deuxième cas est simulé, avec activation de la loi de commande après un temps  $\tilde{t} = 15$ . Ici, seulement un mode a été considéré. Contrairement aux autres simulations dans ce chapitre, la méthode numérique du gradient discret (cf. Section 4.2) a été utilisée, avec un pas temporel  $\delta\tilde{t} = 0.01$ .

Paramètres du modèle : état initial zéro sauf  $\partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 = -1$ ,  $B = 5.54$ ,  $\tilde{\lambda}_1 = 3.08$ ,  $\kappa = 0.171$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $\alpha = 1.33$ ,  $\beta_1 = 0.768$ ,  $\beta_2 = 0.353$ ,  $\zeta = 0.0923$ ,  $\xi = 0.1$ . Paramètres de contrôle :  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 0.0005$ ,  $\bar{\alpha} = 0.8$ ,  $\bar{k}_1 = 10$ ,  $\bar{k}_2 = 10$ ,  $\bar{k}_3 = 2\beta_2$ ,  $\bar{k}_4 = 2\zeta/\beta_2$ .

L'évolution temporelle correspondante de l'état est montrée Figure 9.25 ainsi que le périodogramme de  $\tilde{z}_1$  pour les cas (non) contrôlé. La simulation confirme que le contrôleur est capable de modifier la fréquence du mode  $\tilde{z}_1$ . On observe à nouveau que le pic basse-fréquence de résonance du haut-parleur est présent dans le cas non contrôlé.

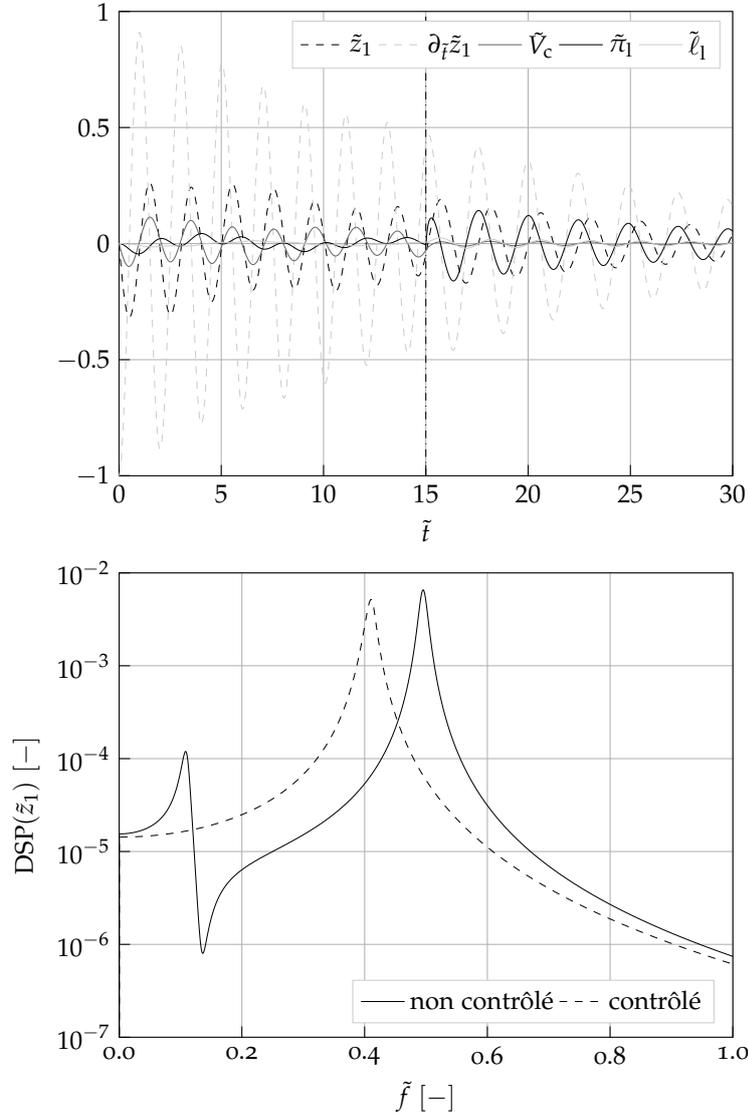


FIGURE 9.25 – Simulation du modèle à  $N = 1$  mode avec activation du contrôleur à  $\tilde{t} = 15$ . (DSP : densité spectrale de puissance)

#### 9.4.2 Observateur en temps fini

**PRINCIPE** La loi de commande (9.32) utilise les mesures de la pression dans la cavité  $\tilde{p}_c$  et des déplacements modaux  $\tilde{z}_i$  de la membrane. La mesure de la pression  $\tilde{p}_c$  dans la cavité est facile à obtenir avec un microphone. Une mesure de la partie temporelle  $\tilde{z}_i$  de la vibration transversale de la membrane, en utilisant un capteur

optique, piézoélectrique ou autre semble être plus difficile<sup>20</sup>. C'est la raison pour laquelle nous proposons de développer un observateur qui reconstruit les  $\hat{z}_i$  à partir de l'unique mesure de la pression  $\tilde{p}_c$  et en utilisant le modèle tronqué à  $N$  modes (9.25), qui est observable (cf. la Sous-section C.3.2 de l'Annexe C). Cette disposition est schématisée dans la Figure 9.26, et précisée dans la Figure 9.27.

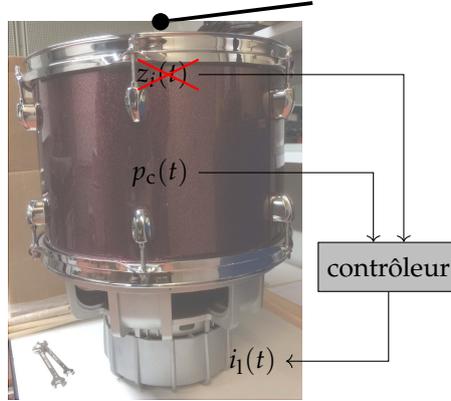


FIGURE 9.26 – Disposition du contrôleur : mesure de la pression dans la cavité  $p_c(t)$  comme entrée et courant du haut-parleur  $i_1(t)$  comme sortie.

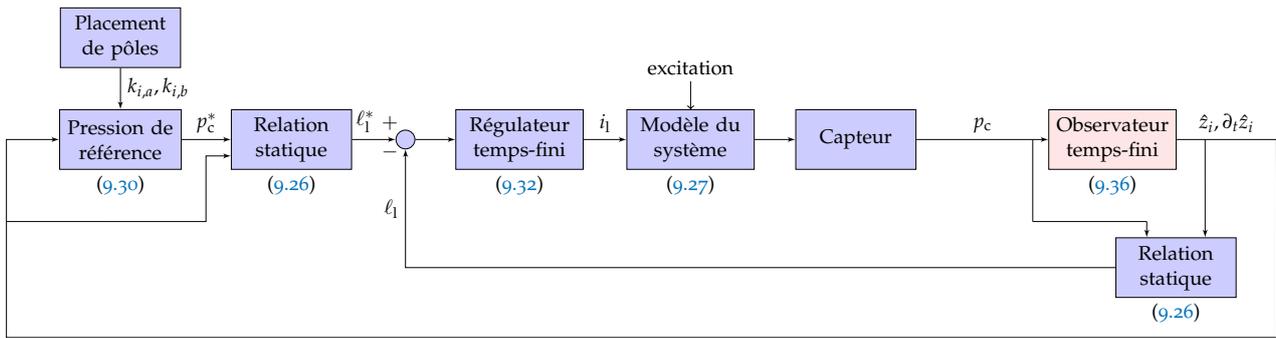


FIGURE 9.27 – Structure de l'observateur-régulateur. Les équations correspondantes sont indiquées.

### 9.4.2.1 L'observateur en temps fini

Pour un système linéaire comme 9.27, un observateur *linéaire* standard est l'observateur de Luenberger [276] :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \tag{9.33}$$

où l'estimation de l'état  $\hat{x}$  converge vers le vrai état  $x$  (inconnu) en copiant la dynamique du système de base et en corrigeant l'erreur entre la sortie mesurée du système  $y$  et la sortie estimée  $C\hat{x}$ . La matrice de poids  $L$  est choisie en effectuant un compromis entre la vitesse de convergence et la robustesse de l'observateur contre du bruit de mesure.

Dans la présente contribution, nous avons opté pour l'utilisation d'un observateur *en temps fini* (non linéaire), qui est présenté dans le lemme suivant.

**Lemme 9.3** (Observateur temps-fini [188]). *Soit un système non linéaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{9.34}$$

20. Il faudrait vérifier si la présence d'un capteur de contact ne perturbe pas trop la vibration de la membrane, et en plus, on souhaite exciter et mesurer au milieu de la membrane. Une imagerie par vibrométrie laser 3D [33, 236] pourrait nous fournir les  $\hat{z}_i$ , mais est difficile à mettre en pratique sur ce prototype.

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , qui est localement observable et suppose l'existence d'une transformation de coordonnées locale qui transforme le système en sa forme canonique observable

$$\begin{cases} \dot{z} = A^\circ z + f(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) \\ y = C^\circ z \end{cases}$$

avec

$$A^\circ = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C^\circ = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

et un nouvel état  $z \in \mathbb{R}^n$ . Alors, il existe un nombre  $\varepsilon \in [1 - \frac{1}{n-1}, 1[$  tel que le système

$$\dot{\hat{z}} = A^\circ \hat{z} + f(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) + \begin{bmatrix} h_1 [y - C^\circ \hat{z}]^{\theta_1} \\ \vdots \\ h_n [y - C^\circ \hat{z}]^{\theta_n} \end{bmatrix} \quad (9.35)$$

avec les paramètres  $\theta_i = i\theta - (i-1)$ ,  $\theta \in ]1 - \varepsilon, 1[$  et gains  $h_i$  tels que la matrice

$$\begin{bmatrix} -h_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -h_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -h_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

est Hurwitz<sup>21</sup>, est un observateur en temps fini du système (9.34).

Dans le cas du système linéaire (9.27), on a que  $f(y, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)}) = Bu$ . On exprime maintenant l'observateur temps-fini (9.35) dans les coordonnées d'origine du système linéaire (9.27).

**Lemme 9.4** (Transformation vers les coordonnées d'origine). *L'observateur temps-fini (9.35) défini dans le Lemme 9.3 est exprimé dans les coordonnées d'origine comme*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + PQ \begin{bmatrix} h_1 [y - C\hat{x}]^{\theta_1} \\ \vdots \\ h_n [y - C\hat{x}]^{\theta_n} \end{bmatrix}. \quad (9.36)$$

Cette formule contient deux matrices de transformation d'état :

$$P = [H \ AH \ \dots \ A^{n-1}H],$$

où

$$H = O^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

21. Une matrice dont les valeurs propres ont toutes une partie réelle strictement négative.

est la dernière colonne de l'inverse de la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

du système linéaire (9.27), et

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Démonstration.* On peut transformer le système d'origine (9.27) d'état  $x$  en un système d'état  $z$  utilisé dans le Lemme 9.3 par deux transformations de similarité<sup>22</sup> :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \xrightarrow{P} \begin{cases} \dot{\xi} = A^1 \xi + B^1 u \\ y = C^1 \xi \end{cases} \xrightarrow{Q} \begin{cases} \dot{z} = A^\circ z + B^\circ u \\ y = C^\circ z. \end{cases}$$

(1) La transformation de similarité exprimée par la matrice  $P$  définie dans l'énoncé du lemme permet d'effectuer un changement d'état  $x = P\xi$  menant à une écriture sous la forme canonique observable suivante [276] :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A^1 \xi + B^1 u \\ y = C^1 \xi, \end{cases} \quad (9.37)$$

avec

$$A^1 = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix},$$

où le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$\chi_A(s) = \det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n$$

et

$$B^1 = P^{-1}B,$$

$$C^1 = CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Le système (9.37) d'état  $\xi$  est sous une forme canonique observable, différente de la forme canonique observable alternative utilisée dans le Lemme 9.3 à une permutation près, exprimée par une deuxième transformation de similarité  $\xi = Qz$ , où  $Q$  est la matrice de permutation définie dans l'énoncé du lemme.

22. (cf. la Sous-section 3.4.1)

On peut appliquer les transformations inverses  $Q^{-1}$  puis  $P^{-1}$  sur l'observateur temps-fini (9.35) du Lemme 9.3 d'état  $z$  afin de pouvoir l'exprimer dans l'état d'origine  $x$  :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{z}} &= A^\circ \hat{z} + B^\circ u + \begin{bmatrix} \vdots \\ h_i [y - C^\circ \hat{z}]^{\theta_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ (Q^{-1} \dot{\hat{\xi}}) &= (Q^{-1} A^1 Q) (Q^{-1} \hat{\xi}) + (Q^{-1} B^1) u + \begin{bmatrix} \vdots \\ h_i [y - (C^1 Q) (Q^{-1} \hat{\xi})]^{\theta_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{\xi}} &= A^1 \hat{\xi} + B^1 u + Q \begin{bmatrix} \vdots \\ h_i [y - C^1 \hat{\xi}]^{\theta_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ (P^{-1} \dot{\hat{x}}) &= (P^{-1} A P) (P^{-1} \hat{x}) + (P^{-1} B) u + Q \begin{bmatrix} \vdots \\ h_i [y - (C P) (P^{-1} \hat{x})]^{\theta_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \dot{\hat{x}} &= A \hat{x} + B u + P Q \begin{bmatrix} \vdots \\ h_i [y - C \hat{x}]^{\theta_i} \\ \vdots \end{bmatrix},\end{aligned}$$

ce qui correspond à l'Éq. (9.36).  $\square$

On peut remarquer que l'application de l'observateur temps-fini à un système linéaire (9.27) revient à une structure similaire à l'observateur linéaire classique de Luenberger (9.33), mais où le terme de correction  $L(y - C\hat{x})$  a été remplacé par une expression non linéaire. C'est cette expression non linéaire qui garantit la convergence en temps fini de l'observateur, au lieu d'une convergence asymptotique.

**SIMULATION 1 (CONTINUÉE)** Le contrôleur de la simulation précédente est reconsidéré, où l'état présent dans la loi de commande est maintenant observé à partir de la mesure de pression dans la cavité  $\tilde{p}_c^m$ . Les paramètres de l'observateur sont  $\theta = 0.95$  et

$$[h_1 \ \dots \ h_6] = [13.5 \ 73.75 \ 208.125 \ 319 \ 250.875 \ 78.75].$$

Comme montré dans la Fig. 9.28, après une transitoire initiale à cause de la convergence de l'observateur, on obtient les mêmes fréquences  $\tilde{f}_1$  et  $\tilde{f}_2$  que dans la simulation de la Figure 9.24 (sans observateur).

### 9.4.3 Vers une implémentation pratique

La présentation du contrôleur combinant un observateur temps-fini et un régulateur temps-fini est conclue par deux réflexions en vue de l'implémentation dans le chapitre prochain : le *chattering* et le *spillover*.

#### 9.4.3.1 Chattering

Comme mentionné dans le Chapitre 5, les lois de commande non linéaires sont nécessairement non Lipschitz continues quand la cible est atteinte. Cette raideur peut

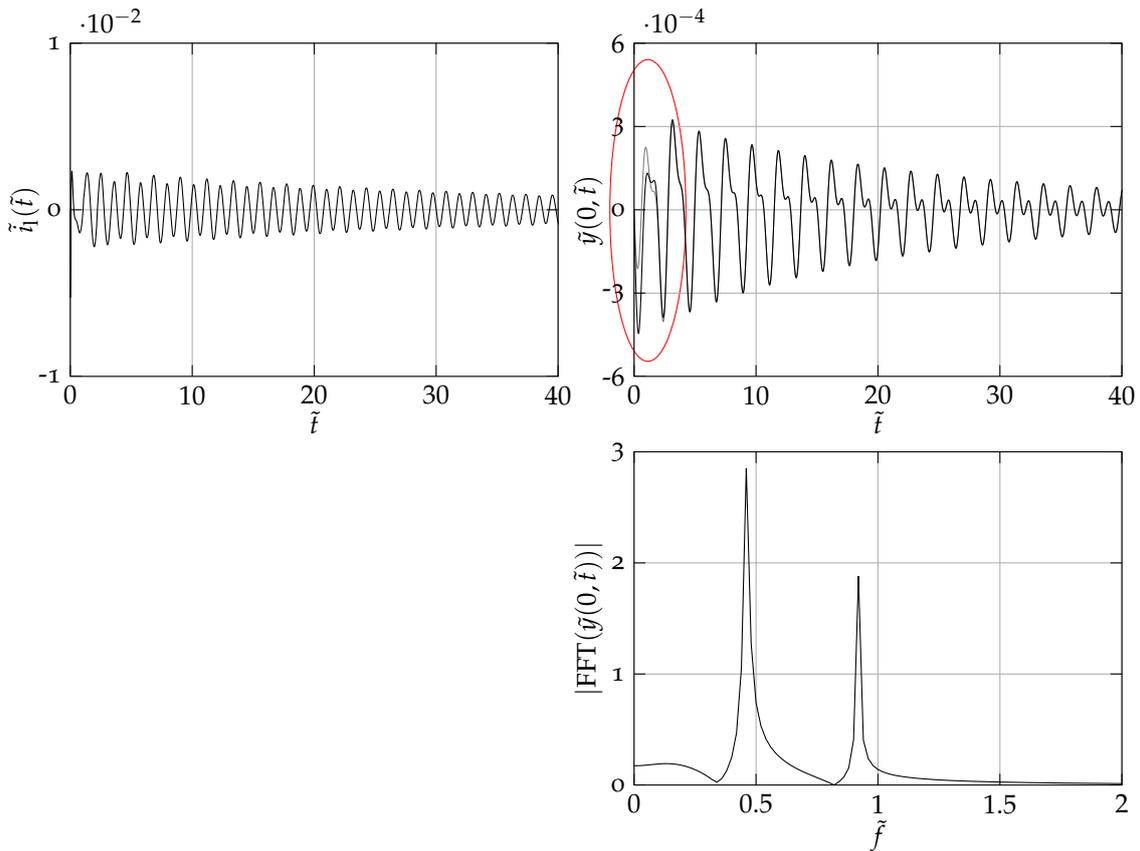


FIGURE 9.28 – Simulation du système à  $N = 2$  modes contrôlé par l’observateur-régulateur. L’observation de  $\tilde{y}(0, \tilde{t})$  est dessinée en gris.

poser des problèmes numériques lors d’un calcul sur un micro-contrôleur, ce qui sera en effet observé dans l’implémentation rapportée dans le Chapitre 10. Une possible solution pratique est d’utiliser la méthode localement déraidissante introduite en Sous-section 7.2.1 : il s’agit de remplacer à la fois l’observateur temps-fini et le régulateur temps fini par des expressions linéaires dans une petite zone autour de la cible, évitant la zone la plus raide qui pose des problèmes numériques.

Cette méthode numérique sera utilisée avec succès chez l’implémentation expérimentale du contrôleur-régulateur du tom dans le chapitre suivant.

#### 9.4.3.2 Spillover

Dans notre approche modale, un observateur-régulateur a été développé basé sur un modèle à  $N$  modes (au choix). La loi de commande résultante sera appliquée au système physique contenant théoriquement une infinité de modes. De ce fait, deux types de *spillover* peuvent avoir lieu.

- *Spillover* de commande : la loi de commande peut exciter des modes d’ordre supérieur, ce qui pourrait mener à une instabilité.
- *Spillover* d’observation : la mesure de la sortie du système contient des contributions de modes d’ordre supérieur, ce qui influence le fonctionnement de l’observateur.

On mentionne deux réponses que l’on peut apporter à ces phénomènes, basées sur une approche linéaire locale.

- *Spillover* de commande : il faut prouver que l’énergie des modes non-contrôlés (d’ordres élevés) est bornée [17].
- *Spillover* d’observation : on peut ajouter un filtre passe-bas après la mesure (indiqué dans la Figure 9.29) [16]. De cette manière, seulement les basses fréquences correspon-

dant aux  $N$  premiers modes considérés dans l'observateur-régulateur seront prises en compte et réinjectées dans le système.

Une étude plus détaillée des effets de *spillover* (dont aussi des phénomènes non linéaires) et de leur influence sur l'aspect temps-fini du système en boucle fermée n'est pas effectuée ici.

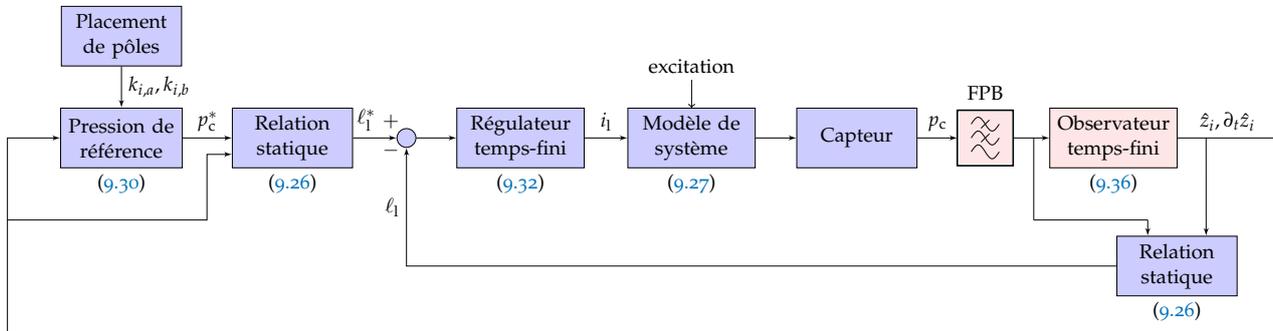


FIGURE 9.29 – Structure de l'observateur-régulateur avec filtre passe-bas (FPB) pour réduire le *spillover* d'observation. Les équations correspondantes sont indiquées.

**SIMULATION 1 (CONTINUÉE)** L'observateur-régulateur, précédemment simulé en se basant sur les  $N = 2$  premiers modes, est maintenant appliquée au modèle (9.27) avec les 7 premiers modes, introduisant alors des effets de *spillover* à cause de la présence de plusieurs modes haute-fréquence. Le modèle a des conditions initiales nulles sauf  $\partial_t \hat{z}_i = -0.001$  pour tous les 7 modes.

Le résultat est comparé au cas sans contrôle dans la Figure 9.30. Dans cet exemple, les effets de *spillover* n'ont pas provoqué d'instabilité du système en boucle fermée. Néanmoins, le filtre passe-bas mentionné pourrait toujours être ajouté à la boucle de commande afin de réduire une détérioration de l'action de contrôle à cause de la présence de modes haute-fréquence non modélisés. Dans ce cas, il faut faire attention au retard de groupe du filtre, qui pourrait aussi causer une instabilité du système bouclé.

## 9.5 CONCLUSION

Après une récapitulation de l'influence d'une cavité couplée à une membrane circulaire encastrée au bord sur les modes propres de vibration de cette dernière, un modèle physique pour un tom muni d'un haut-parleur a été développé. Il s'agit d'un modèle hybride (EDP-EDO) qui a été réinterprété comme un Système Hamiltonien à Ports (SHP).

Le modèle à dimension infinie a été adimensionné et projeté sur une base modale constituée des modes propres de la membrane circulaire encastrée au bord couplée à une membrane, dans le but d'effectuer une réduction d'ordre, menant à un modèle purement EDO.

Basé sur ce modèle, un contrôleur contenant un observateur temps-fini et un régulateur temps-fini a été développé, dont le but est de modifier les fréquences de  $N$  modes de vibration axisymétriques de la membrane de tom, utilisant seulement une mesure de la pression dans la cavité. Quelques aspects concernant l'implémentation pratique ont été évoqués.

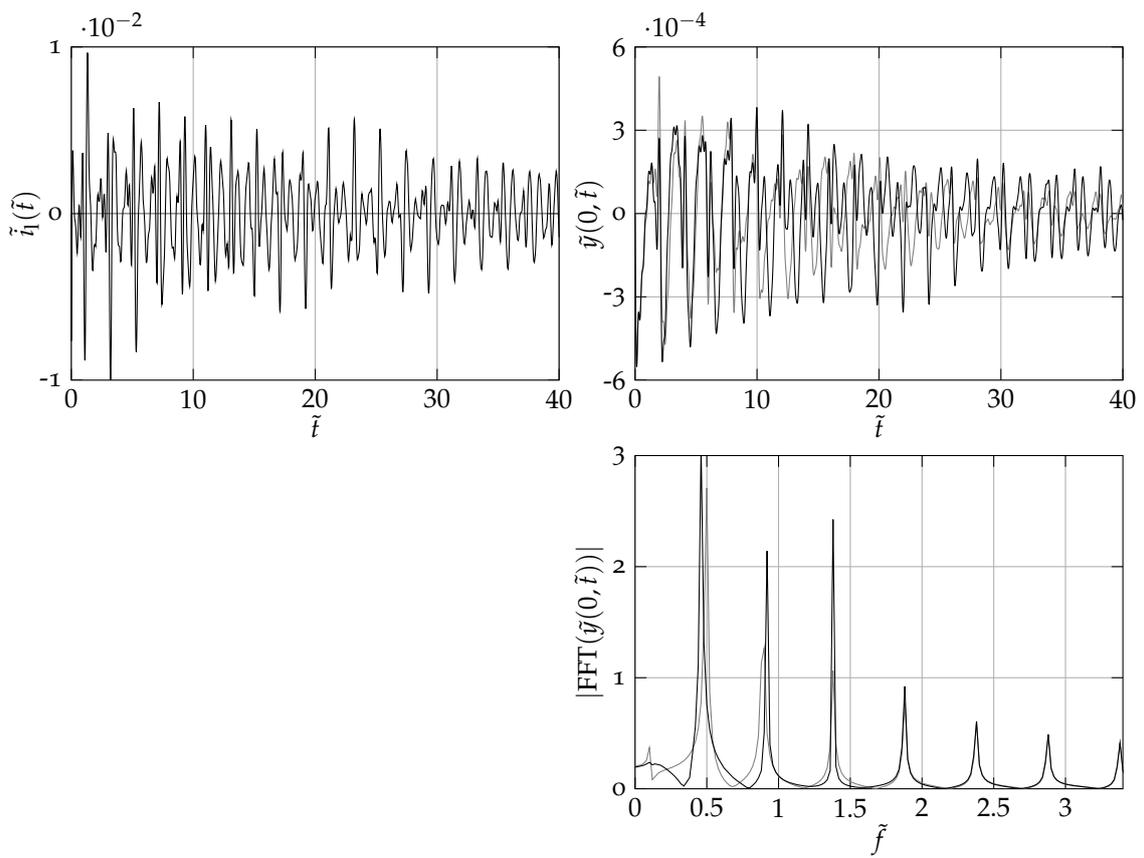


FIGURE 9.30 – Simulation du système à 7 modes sans contrôle (gris) et contrôle par l'observateur-régulateur considérant seulement les premiers 2 modes.

Le contrôleur développé dans le chapitre précédent est implémenté sur un prototype expérimental. D’abord, les paramètres physiques du modèle figurant dans la loi de commande sont identifiés à partir de mesures sur le système physique dans la Section 10.1. Ensuite, le capteur et l’actionneur sont sélectionnés, le contrôleur est implémenté sur un microcontrôleur, et un système de frappe reproductible est monté (Section 10.2). Finalement, l’influence du contrôleur sur le système physique est mesurée dans la Section 10.3 et une conclusion est donnée dans la Section 10.4.

---

## TABLE DES MATIÈRES

10.1	Identification . . . . .	127
10.1.1	Montage . . . . .	127
10.1.2	Cavité . . . . .	127
10.1.3	Haut-parleur . . . . .	129
10.1.4	Membrane . . . . .	139
10.1.5	Conclusion . . . . .	162
10.2	Dispositif de contrôle . . . . .	163
10.2.1	Composants . . . . .	163
10.2.2	Dispositif expérimental complet . . . . .	166
10.2.3	Système de frappe reproductible . . . . .	167
10.3	Évaluation du contrôle . . . . .	173
10.3.1	Méthode numérique régularisant . . . . .	173
10.3.2	Changement de fréquence . . . . .	177
10.4	Conclusion et perspectives . . . . .	187

---

### 10.1 IDENTIFICATION

Dans cette section, les paramètres physiques du système sous considération (Tableau 10.1) sont identifiés. Ces paramètres apparaissent dans l’expression de l’observateur-régulateur, qui sera implémenté plus tard.

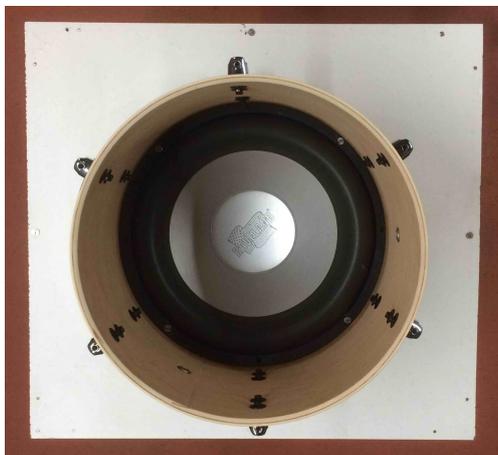
#### 10.1.1 Montage

Le tom<sup>1</sup>, montré Figure 9.2 dans le chapitre précédent, est maintenant dépourvu de ses deux membranes, de sorte à isoler la paroi cylindrique. Le cylindre est monté sur un support en bois dans lequel un haut-parleur basse-fréquence est placé à la position de la face inférieure du cylindre. Le support en bois est fermé de tous les côtés, faisant office d’enceinte du haut-parleur. Ce montage est montré dans la Figure 10.1.

La membrane du tom ne sera ajoutée qu’en Sous-Section 10.1.4, après avoir identifié les paramètres géométriques de la cavité et du haut-parleur.

---

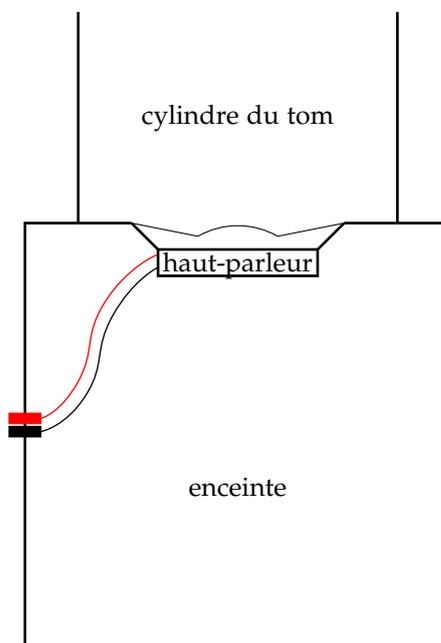
1. Modèle : tom 1309T, Pearl drums, Japon, <https://pearldrum.com>.



(a) Vue de dessus



(b) Vue de face



(c) Schéma de la vue de face

FIGURE 10.1 – Montage du tom et du haut-parleur dans une enceinte

Tableau 10.1 – Liste des paramètres physiques à identifier

membrane	$a$	rayon	[m]
	$\sigma$	densité massique	[kg/m <sup>3</sup> ]
	$T$	tension	[N/m]
	$\mu$	coefficient de frottement	[1/s]
cavité	$V_0$	volume au repos	[m <sup>3</sup> ]
haut-parleur	$m_1$	masse équivalente	[kg]
	$c_1$	amortissement équivalent	[kg/s]
	$k_1$	raideur équivalente	[N/m]
	$Bl$	facteur de la force de Laplace	[T · m = N/A]
	$R$	résistance électrique	[Ω]
	$L$	inductance électrique	[H]
	$S_1$	surface équivalente	[m <sup>2</sup> ]

### 10.1.2 Cavité

#### 10.1.2.1 Volume $V_0$

Le volume  $V_0$  de la cavité au repos est composé d'une contribution cylindrique du tom et un petit volume supplémentaire en haut de la membrane du haut-parleur (Fig. 10.2). Avec un mètre-ruban, on mesure que l'intérieur du cylindre a un diamètre  $d_{\text{cyl}} = 31,3\text{cm}$  et une hauteur  $h_{\text{cyl}} = 22,7\text{cm}$ . La forme de la contribution de volume du haut-parleur peut être approximée par un cône de diamètre  $d_{\text{cône}} = 31,3\text{cm}$  et de hauteur  $h_{\text{cône}} = 8\text{cm}$ . On calcule que

$$\begin{aligned}
 V_0 = V_{\text{cyl}} + V_{\text{cône}} &= \pi \left( \frac{d_{\text{cyl}}}{2} \right)^2 h_{\text{cyl}} + \frac{\pi}{3} \left( \frac{d_{\text{cône}}}{2} \right)^2 h_{\text{cône}} \\
 &= 0,0175\text{m}^3 + 0,00205\text{m}^3,
 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{V_0 = 0,0195\text{m}^3}.$$

### 10.1.3 Haut-parleur

Un haut-parleur<sup>2</sup> de type caisson de basses (*subwoofer*) d'un diamètre nominal extérieur de 320mm est utilisé. Nous procédons à l'identification expérimentale des paramètres du modèle Thiele & Small linéaire, qui peuvent différer des données constructeur en fonction de la production, du montage spécifique, et d'effets de vieillissement.

#### 10.1.3.1 Modèle de Thiele & Small linéaire

Une représentation schématique de la structure d'un haut-parleur électrodynamique est donnée dans la Figure 10.3. Comme mentionné avant, il s'agit d'un convertisseur électro-magnéto-mécano-acoustique. Une tension électrique alternée est appliquée

2. Modèle : AXX 1212, Raveland, États-Unis. Les données constructeur sont données en Section D.4 de l'Annexe D.

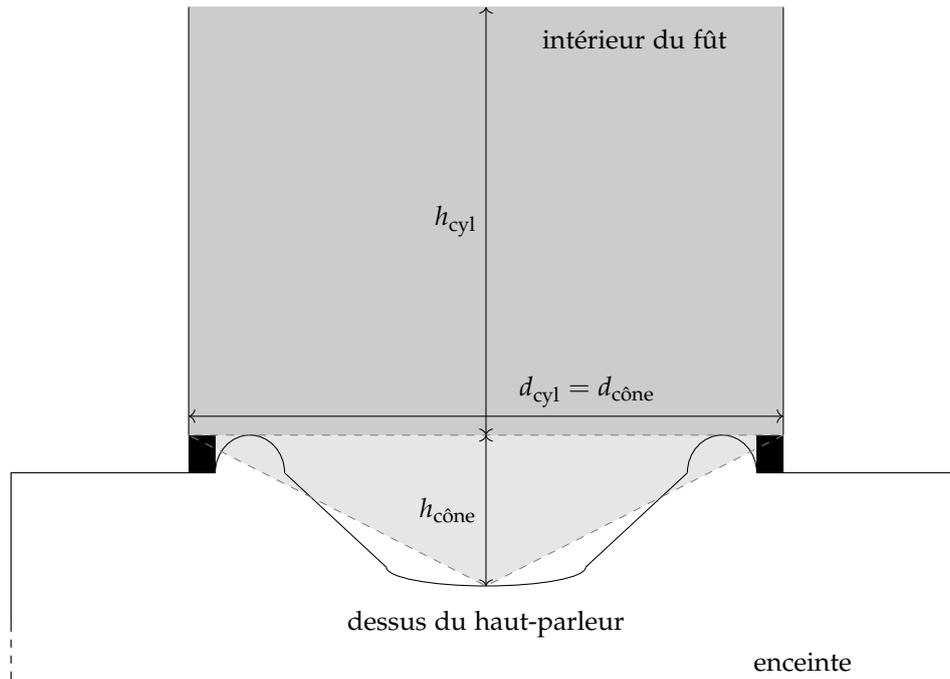


FIGURE 10.2 – Volume de la cavité : contributions cylindrique et conique

aux bornes du haut-parleur, suite à quoi un courant parcourt le circuit électrique contenant une bobine placée sur un équipement mobile. La bobine se trouve dans le champ magnétique d'un aimant permanent, ce qui induit une force de Laplace agissant sur l'équipage mobile. L'équipage mobile étant attaché à un système mécanique contenant une suspension (*spider*) et la membrane, le tout est mis en vibration. Finalement, une onde sonore est créée, qui se propage dans l'air. En modulant l'amplitude et la fréquence de la tension électrique appliquée, on peut ainsi générer du son de parole, de la musique, etc.

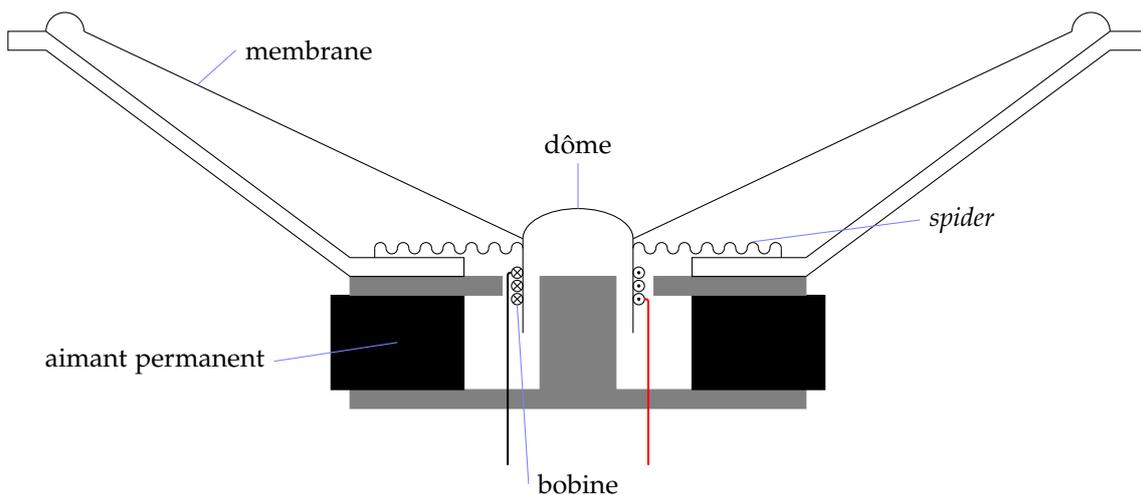


FIGURE 10.3 – Structure d'un haut-parleur électrodynamique

Comme mentionné dans la Sous-section 9.3.1, on considère le modèle linéaire de Thiele & Small [230, 231, 239, 240], qui néglige notamment la dépendance spatiale du mouvement de la membrane, en la remplaçant par un piston plan de position

verticale notée (ici)  $x_1(t)$ . On peut écrire le bilan des forces sur la membrane, comme dans l'Équation (9.17) (mais sans influence d'une cavité ici),

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = B i_1, \quad (10.1)$$

complété par le bilan des tensions dans le circuit électrique équivalent,

$$v_1 = R i_1 + L \frac{d}{dt} i_1 + B l \dot{x}_1, \quad (10.2)$$

où  $v_1$  est la tension appliquée aux bornes du haut-parleur, et  $R$  et  $L$  respectivement la résistance et l'inductance du circuit électrique.

Il existe plusieurs méthodes d'identification du modèle de Thiele & Small. Pour le modèle linéaire, comme ci-dessus, on a des méthodes dans le domaine temporel [133] et dans le domaine fréquentiel [132]. Pour le cas de l'identification de paramètres non linéaires, se référer à [47, 51, 142] et autres. De plus, des caractéristiques du haut-parleur peuvent varier en fonction de la température [136], d'où l'intérêt de développer des méthodes d'identification en ligne (*online*) [186] capables de suivre leur évolution, pour une utilisation dans des algorithmes de contrôle de haut-parleur raffinés.

Ici, une méthode linéaire dans le domaine fréquentiel standard (*offline*) est appliquée.

### 10.1.3.2 Méthode fréquentielle d'identification des paramètres linéaires de Thiele & Small

Dénnotant les transformations de Laplace comme

$$\begin{cases} v_1(t) \leftrightarrow V(s) \\ i_1(t) \leftrightarrow I(s) \\ x_1(t) \leftrightarrow X(s), \end{cases}$$

avec  $s = j\omega = j(2\pi f)$  la variable de Laplace, à la fréquence  $f$ , la transformation des Équations (10.1)-(10.2) s'écrit comme

$$(m_1 s^2 + c_1 s + k_1) X(s) = B I I(s)$$

$$V(s) = (R + Ls) I(s) + B L s X(s).$$

On peut donc définir les fonctions de transfert suivantes :

$$H_{X/I}(s) = \frac{X(s)}{I(s)} = \frac{Bl}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1}$$

$$H_{V/I}(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{B^2 l^2 s}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} + Ls + R$$

$$H_{X/V}(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{Bl}{B^2 l^2 s + (Ls + R)(m_1 s^2 + c_1 s + k_1)}.$$

On peut effectuer une mesure où l'on applique au haut-parleur une tension sinusoïdale dont la fréquence augmente dans le temps (*chirp* ou *sweep*) :

$$v_1(t) = A \cos(2\pi f(t) \cdot t),$$

où  $A$  [V] est une amplitude choisie et  $f(t)$  [Hz] une fréquence augmentant p.ex. linéairement ou logarithmiquement dans la plage fréquentielle d'intérêt. Ainsi, on excite le système à ces fréquences, en mesurant le courant  $i_1(t)$  et le déplacement  $x_1(t)$  correspondants.

À partir de ces mesures, on peut estimer les paramètres linéaires du modèle de Thiele & Small par un ajustement de courbe des fonctions de transfert  $H_{X/I}$ ,  $H_{V/I}$  et  $H_{X/V}$  théoriques aux versions calculées à partir des mesures, selon une procédure spécifiée ci-dessous.

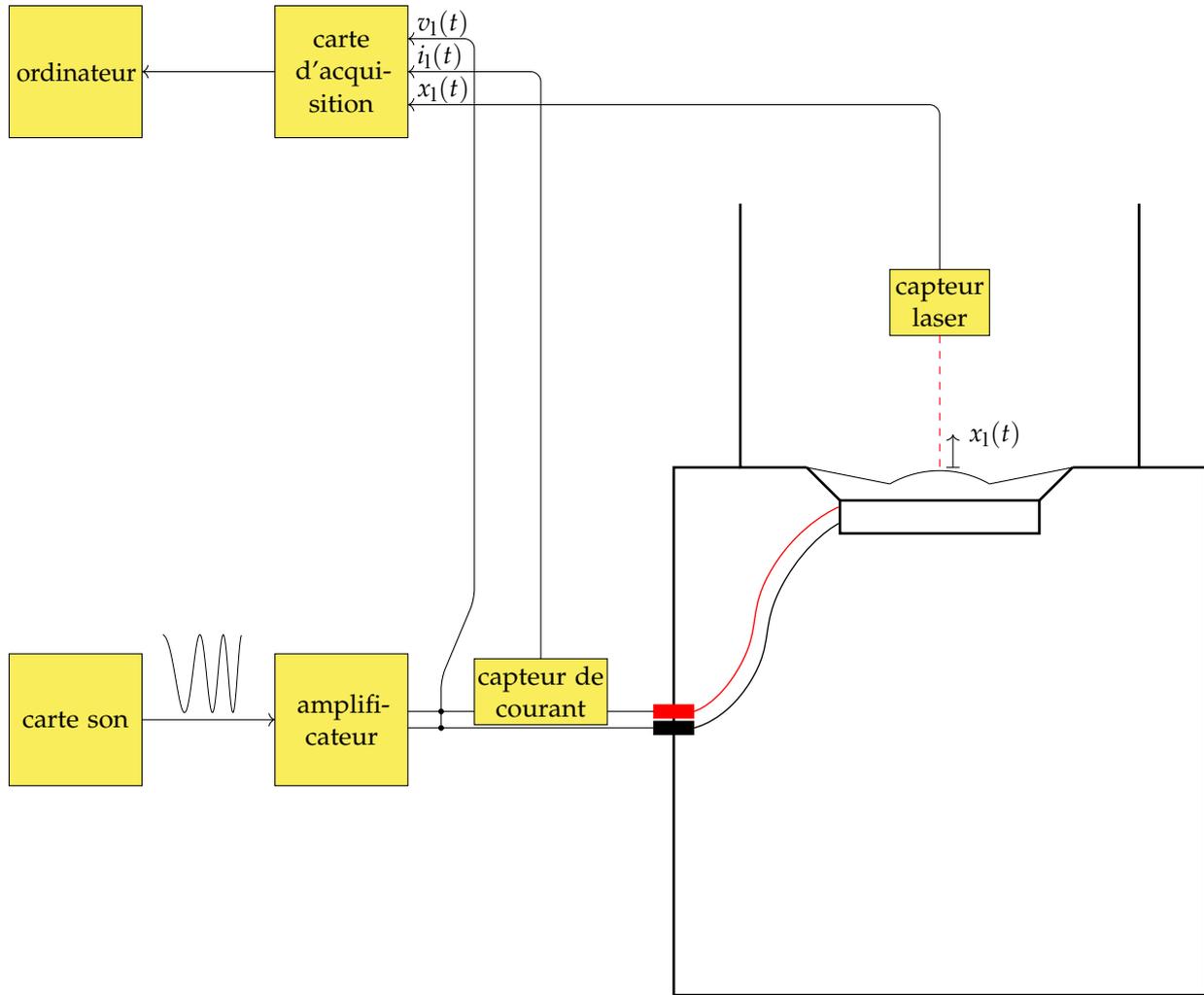


FIGURE 10.4 – Dispositif d'identification du haut-parleur : schéma

### 10.1.3.3 Dispositif de mesure

On utilise un banc de mesure qui avait été développé dans [142] par Tristan Lebrun (Figures 10.4-10.5, Tableau 10.2). Un fichier son contenant un sweep logarithmique entre 0,1Hz et 2000Hz pendant 10s (avec *fade in* et *fade out*), fournit, après amplification, le signal de tension appliquée. Le courant est mesuré avec un capteur de courant, et le déplacement du milieu de la membrane avec un capteur laser. On mentionne que le script d'acquisition de données fourni [142] compense un délai connu du capteur laser, afin d'aligner les mesures correctement dans le temps.

Tableau 10.2 – Dispositif d'identification du haut-parleur : liste des instruments

Amplificateur de puissance	Newton4th Ltd LPA05
Capteur de courant	Newton4th Ltd HF003
Capteur laser	Keyence LK-H050
Carte d'acquisition	National Instruments 9234

Les mesures pour  $(v_1, i_1, x_1)$  ainsi obtenues sont montrés dans la Figure 10.6. On y observe l'effet passe-bas de la carte son en basse-fréquence, où l'amplitude est plus

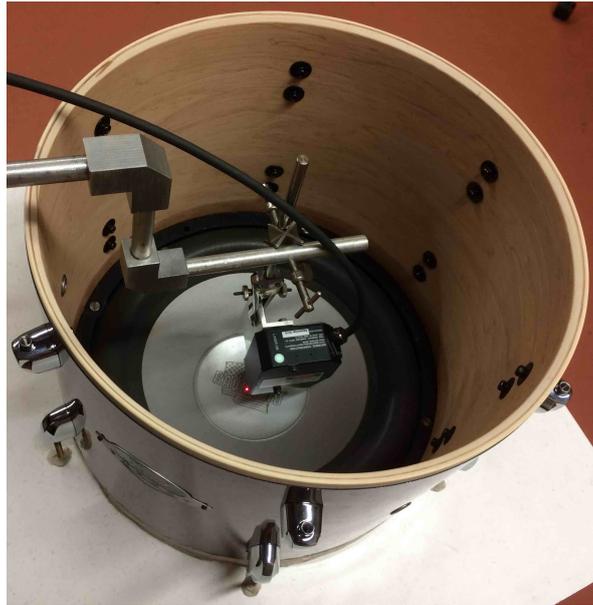


FIGURE 10.5 – Dispositif d'identification du haut-parleur : le capteur laser monté au-dessus de la membrane du haut-parleur

petite, et la résonance électrique au moment que le courant devient temporairement plus petit.

#### 10.1.3.4 Identification des paramètres de Thiele & Small ( $m_1, c_1, k_1, Bl, R, L$ )

Les fonctions de transfert des mesures sont calculés avec la FFT et montrées Figures 10.7-10.8.

On applique ensuite la procédure d'estimation des paramètres par d'ajustement de courbe utilisée dans la thèse de Tristan Lebrun [142].

**1. FRÉQUENCE DE RÉSONANCE MÉCANIQUE** À la fréquence de résonance mécanique  $f_0$ , la fonction de transfert  $H_{X/I}$  est maximale, et la phase passe par 0. On trouve une fréquence de  $f_0 = 35,425\text{Hz}$  (Fig. 10.9). La pulsation correspondante est

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}.$$

**2. AJUSTEMENT DE COURBE À LA FONCTION DE TRANSFERT  $H_{X/I}$**  On réécrit les fonctions de transfert comme

$$H_{X/I}(s) = \frac{X(s)}{I(s)} = \frac{Bl}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} \triangleq \frac{A}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$H_{V/I}(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{B^2 l^2 s}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} + Ls + R \triangleq R \left( 1 + \frac{\tau_e}{2\pi} s + \frac{CA s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \right),$$

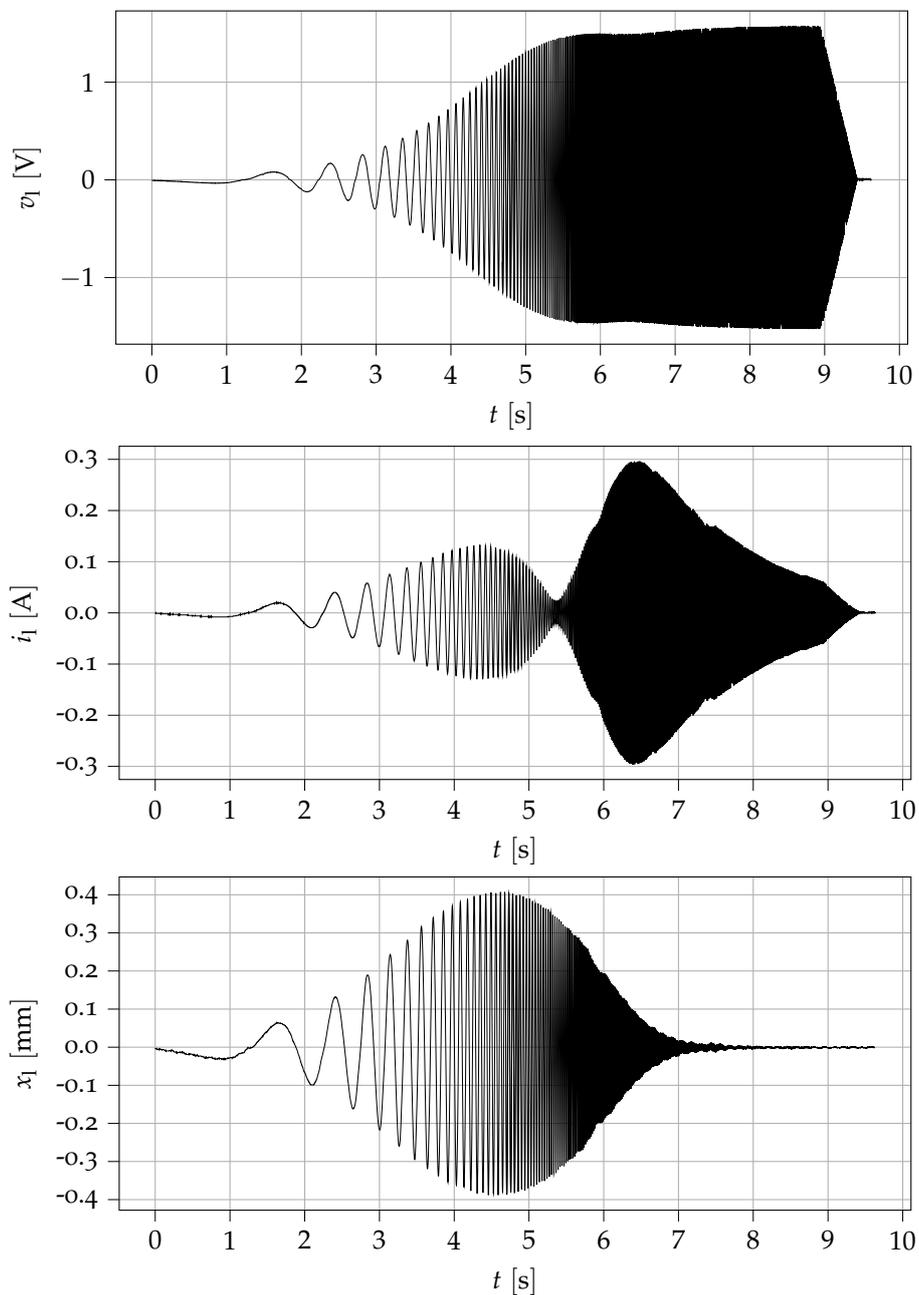


FIGURE 10.6 – Mesures pour l'identification des paramètres du haut-parleur

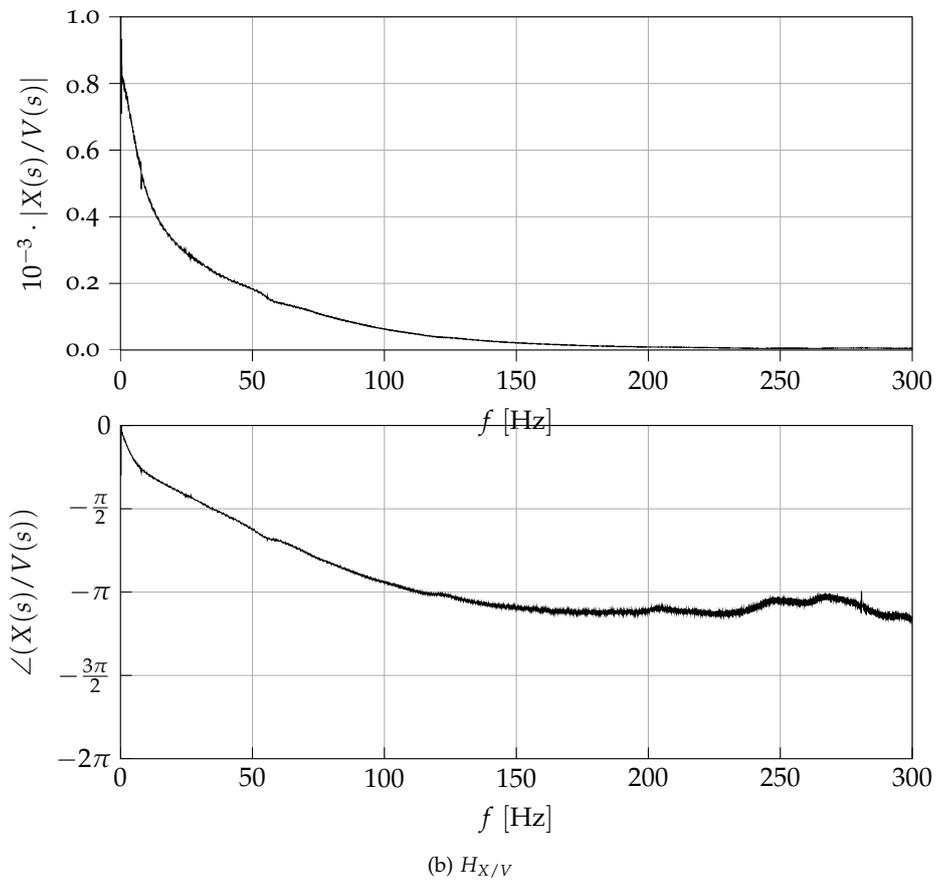
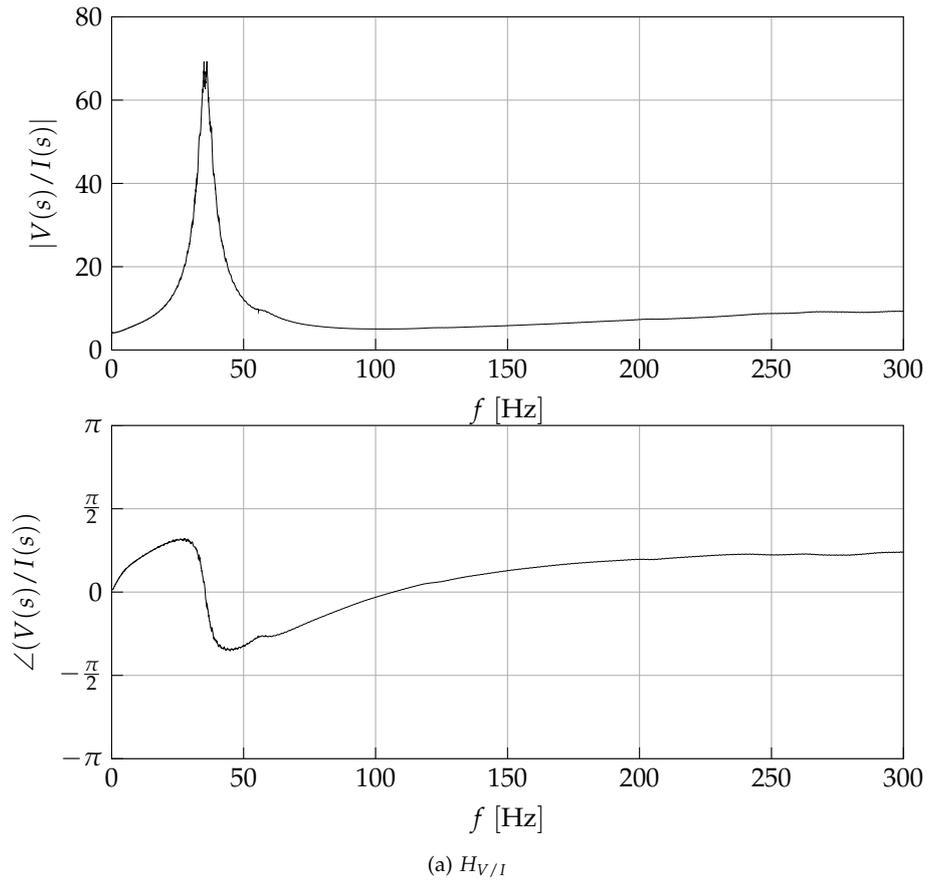


FIGURE 10.7 – Fonctions de transfert calculées à partir des signaux mesurés :  $H_{V/I}$  et  $H_{X/V}$

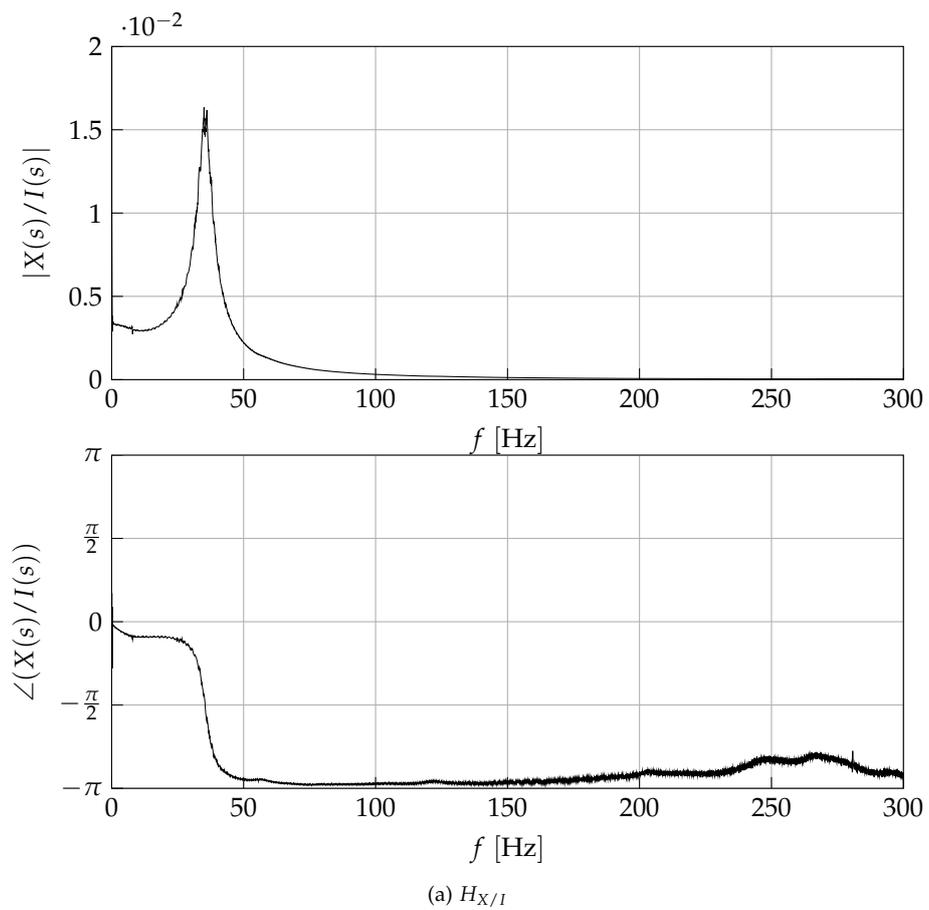


FIGURE 10.8 – Fonctions de transfert calculées à partir des signaux mesurés :  $H_{X/I}$

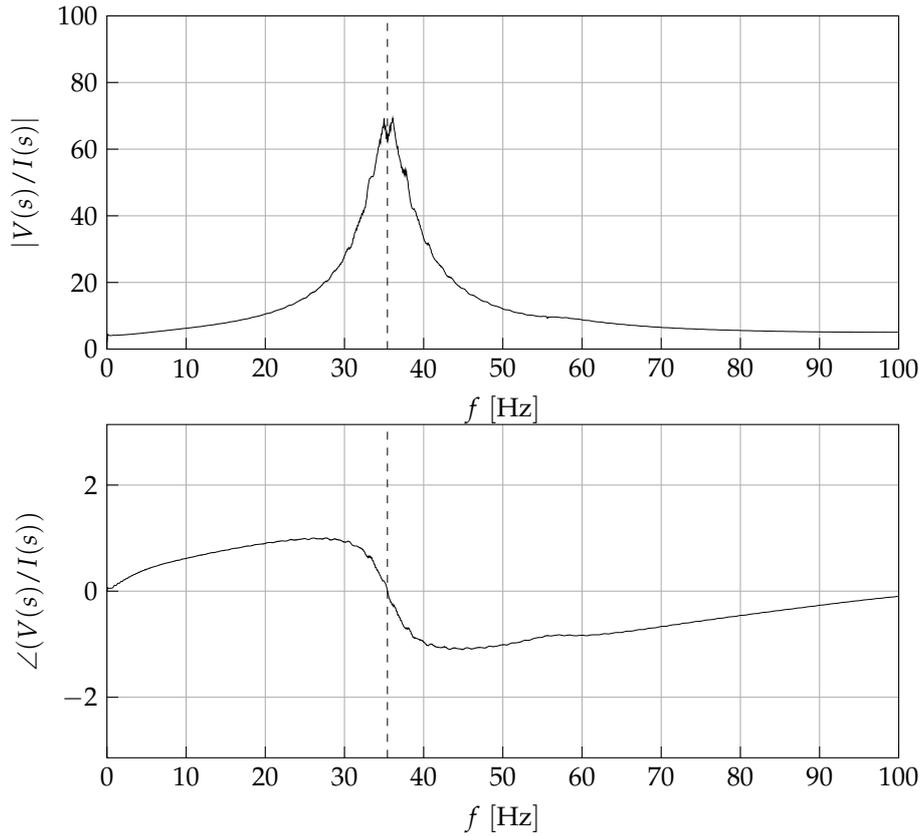


FIGURE 10.9 – Détermination de la fréquence de résonance  $f_0$  du haut-parleur

où l'on a défini les variables réduites

$$\begin{cases} A = \frac{Bl}{m_1} \\ \zeta = \frac{c_1}{2\sqrt{k_1 m_1}} \\ R = R \\ \tau_e = 2\pi \frac{L}{R} \\ D = \frac{Bl}{R} \end{cases}$$

On effectue maintenant un ajustement de courbe à la fonction de transfert  $H_{X/I}$  sur la plage fréquentielle  $[0, 500]$  Hz, par une méthode numérique des moindres carrés non linéaire<sup>3 4</sup> et en précisant que les paramètres recherchés  $(A, \zeta)$  sont positifs. On obtient ainsi une première estimation

$$\left( \hat{A}^{(1)}, \hat{\zeta}^{(1)} \right).$$

3. AJUSTEMENT DE COURBE À LA FONCTION DE TRANSFERT  $H_{U/I}$  De la même façon, on effectue un ajustement de courbe à la fonction de transfert  $H_{U/I}$ , en utilisant les estimations préalables

$$\left( \hat{A}^{(1)}, \hat{\zeta}^{(1)} \right).$$

3. « Trust Region Reflective » [49]  
 4. On note que dans [142], on a utilisé un algorithme de minimisation d'une fonction de coût, pondérant les fréquences de manière logarithmique.

Des estimations

$$\left( \hat{R}^{(1)}, \hat{\tau}_e^{(1)}, \hat{D}^{(1)} \right)$$

sont obtenues.

4. AJUSTEMENT DE COURBE CONJOINT AUX FONCTIONS DE TRANSFERT  $H_{X/I}$  ET  $H_{U/I}$  On procède à un ajustement de courbe conjoint aux deux fonctions de transfert  $H_{X/I}$  et  $H_{U/I}$ , en utilisant les premières estimations des Étapes 2-3,

$$\left( \hat{A}^{(1)}, \hat{\zeta}^{(1)}, \hat{R}^{(1)}, \hat{\tau}_e^{(1)}, \hat{D}^{(1)} \right),$$

comme valeurs initiales de l'algorithme. Le résultat de ce dernier ajustement de courbe est montré Fig. 10.10.

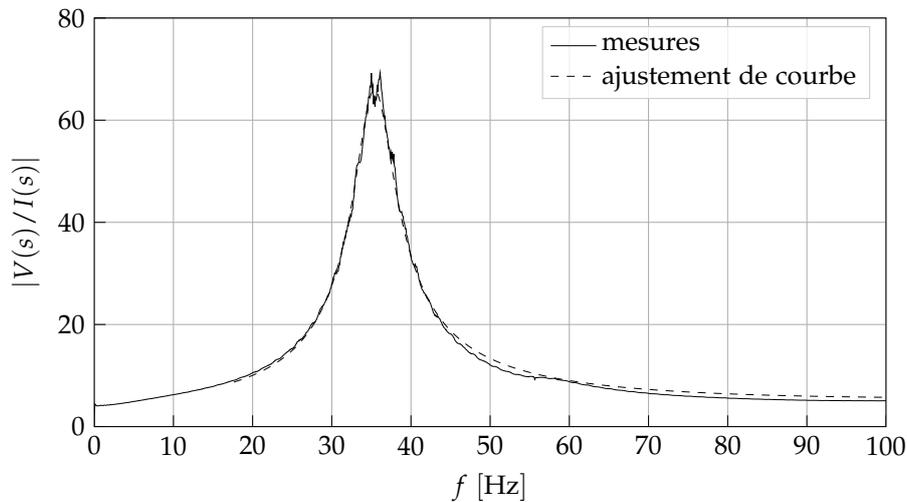


FIGURE 10.10 – Ajustement de courbe obtenu : le cas de  $H_{V/I}(s)$

Dans l'Étape 4, on obtient une mise à jour des estimations des paramètres, ce qui donne les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 5,52\Omega \\ L = R\tau_e = 4,37\text{mH} \\ Bl = CR = 17,4\text{T} \cdot \text{m} \\ m_1 = R \frac{C}{A} = 157\text{g} \\ c_1 = 2\zeta\omega_0 R \frac{C}{A} = 4,87 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ k_1 = 7,80\text{kN}. \end{array} \right.$$

VÉRIFICATION En Sous-section D.1.1, une comparaison de ces valeurs avec les données constructeur est donnée.

#### 10.1.3.5 Surface équivalente

La surface équivalente  $S_1$  du haut-parleur peut être définie à partir d'un rayon  $a_1$  entre le point milieu et la moitié de la suspension au bord (Fig. 10.11).

On mesure avec un mètre-ruban que le diamètre effectif du haut-parleur vaut  $d_1 = 2a_1 = 25,6\text{cm}$ , ce qui correspond à une surface équivalente de

$$S_1 = 0,0515\text{m}^2.$$

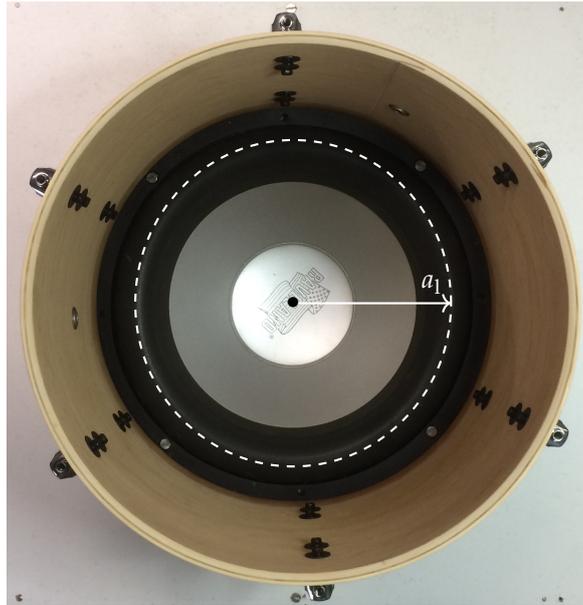


FIGURE 10.11 – Définition de la surface équivalente  $S_1$  du haut-parleur décrit comme un piston plan

VÉRIFICATION Cette valeur correspond à la valeur de  $0,05147\text{m}^2$  indiquée dans les données constructeur (cf. Section D.4).

#### 10.1.4 Membrane

À présent, la membrane est montée sur la paroi cylindrique tu tom. Il s'agit d'une membrane de la marque Remo<sup>5</sup> de diamètre nominal de 13", ou un rayon nominal de 16,51cm.

##### 10.1.4.1 Rayon effectif $a$

Le détail de la configuration au bord est montrée dans la Figure 10.12. Un bord métallique est baissée à l'aide de 6 vis d'accordage (dont les écrous sont attachés à la paroi extérieure du fût, comme on peut le voir dans la vue de dessus dans la Figure 10.1a). De ce fait, l'intérieur de la paroi cylindrique en bois détermine le rayon effectif de la partie vibrante de la membrane. On mesure avec un mètre-ruban que ce diamètre effectif vaut 32,4cm, ce qui correspond à un rayon effectif de

$$a = 16,2\text{cm}.$$

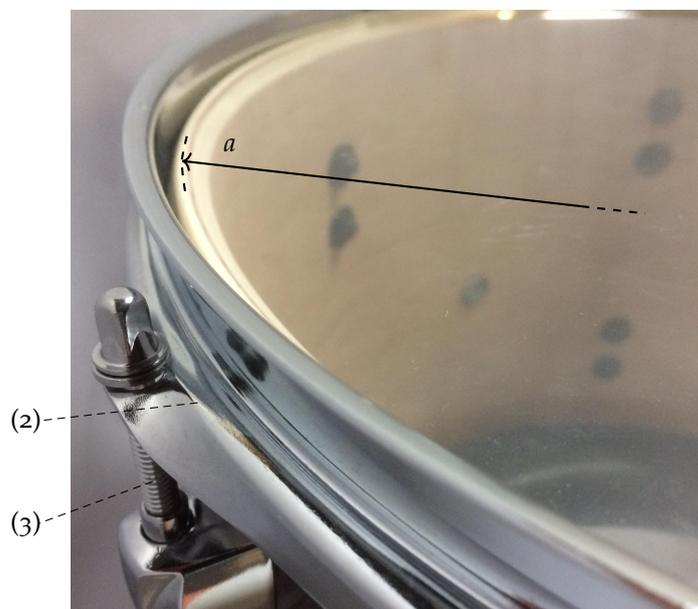
##### 10.1.4.2 Densité massique $\sigma$

Jadis, des peaux d'animaux étaient utilisées pour fabriquer des membranes, comme des peaux de chèvre [33] et de veau ou d'autres animaux<sup>6</sup> chez la timbale. Aujourd'hui, beaucoup de membranes sont fabriquées en Mylar<sup>®7</sup>, qui offre des caractéristiques plus homogènes, est moins sensible aux changements d'humidité et de température, et a une plus grande résistance en traction [33, 60]. Dans [60], on indique que sa densité massique surfacique est dans l'ordre de grandeur de  $0,1\text{kg}/\text{m}^2$ .

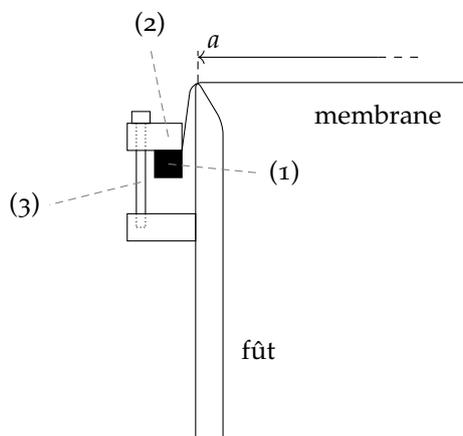
5. Remo Inc., États-Unis, [www.remo.com](http://www.remo.com)

6. Dans [105], on mentionne aussi des références à l'utilisation de peaux d'âne, cheval, chien, mouton et loup. De plus, une référence du 17<sup>ème</sup> siècle [235] propose d'étaler de l'ail et de l'eau-de-vie sur la peau, que l'on laisse ensuite sécher au soleil ou à côté d'un feu, ce qui améliorerait le son (mais pas l'odeur [105]).

7. Le polyester polythéréphtalate d'éthylène,  $(\text{C}_{10}\text{H}_8\text{O}_4)_n$



(a) Photo



(b) Schéma

FIGURE 10.12 – Détail de la condition aux limites de la membrane. La membrane circulaire est posée sur le bord en bois du fût. Un anneau en métal (1) est attaché à la membrane, qui est descendu par l'action d'un deuxième anneau (2) dont la position verticale est imposée par les 6 vis d'accordage (3).

La membrane utilisée, à diamètre nominal 13" = 33,0cm, a une épaisseur « 10-mil », c'est-à-dire  $10 \cdot 1/1000 \cdot 1" = 0,254\text{mm}$ <sup>(8)</sup>. Plus de données constructeur ne sont pas disponibles.



FIGURE 10.13 – Membrane du tom

Nous observons que la membrane plastique est attachée à un bord en métal. De plus, même s'il n'y avait pas de bord en métal, le rayon effectif  $a$  de la membrane encastrée est plus petite, comme expliqué ci-dessus. Afin de déterminer la densité massique surfacique  $\sigma$  de la membrane, on est donc obligé de d'en découper une partie (rectangulaire, Fig. 10.14a). Cette partie mesure 19,5cm  $\times$  25,0cm et pèse 13,00g (Fig. 10.14b). Ceci correspond à une densité massique surfacique de

$$\sigma = 0,267 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}.$$

**VÉRIFICATION** Dans [209], la même procédure est appliquée à une membrane de timbale et une densité massique surfacique de  $0,262\text{kg/m}^2$  est obtenue.

#### 10.1.4.3 Tension $T$

La tension que subit la membrane dépend de la position des six vis d'accordage (dont on en peut voir une sur la Figure 10.12(a)). Dans la littérature, on mentionne p.ex. les cas de valeurs entre 1000 et 2800N/m pour le cas d'un tom [226] et entre 3100 et 3770N/m pour le cas d'une timbale [209]. On rappelle également que la non-uniformité spatiale de la tension de la membrane aura un dédoublement des fréquences des modes non axisymétriques comme conséquence (cf. Sous-section 9.2.3).

On commence par l'accordage de la membrane, avant d'appliquer deux méthodes d'identification de tension.

**ACCORDAGE DE LA MEMBRANE** Nous proposons d'utiliser ici un accordage de membrane à faible tension, supposant que les fréquences de premiers modes seront plus facilement à influencer par le contrôleur dans ce cas que dans le cas d'une membrane avec une plus haute tension. Afin d'obtenir une tension la plus homogène

8. Avec un pied à coulisse, nous mesurons une épaisseur de 0,78mm pour 4 membranes, soit 0,195mm pour une membrane.



FIGURE 10.14 – Pièce de membrane rectangulaire

possible, pour correspondre le mieux au modèle développé dans le chapitre précédent, la méthode d'accordage suivante est proposée (indiquée dans les Figures 10.15-10.16 et le Tableau 10.3, similaire à [211]).

1. *Accord* – Une des six vis est ajustée.
2. *Impact* – On frappe la membrane dans l'environnement de la vis ajustée à une distance d'environ  $r = a/2$ , avec un marteau d'impact (mesurant la force  $F(t)$  [N]), et on mesure le son (pression extérieure  $p_e(t)$  [Pa]).
3. *Analyse* – La partie du son en oscillation libre est isolée (dès que le signal de force  $F(t)$  est redevenu zéro). Deux exemples d'un paire de mesures<sup>9</sup> ( $F(t)$ ,  $p_e(t)$ ) sont montrés dans la Figure 10.17, où l'on remarque dans le cas de la Figure 10.17(a) des battements dans le son, causés par des modes dédoublés. Ensuite, une analyse fréquentielle de cette partie est effectuée par la méthode FFT. On regarde dans le spectre (p.ex. Fig. 10.18 plus bas), où l'on observe notamment plusieurs pics proches aux alentours de 100Hz d'un premier mode<sup>10</sup>. On décide de se baser sur ces pics et d'essayer de les rapprocher le plus possible les uns des autres, sachant que l'annulation des dédoublements de pics est en effet utilisé en pratique pour accorder une peau (*clearing the drumhead*, [60, Chapitre 14]-[211]). Dans ce but, la procédure est répétée pour la même vis. Ensuite, on passe à une autre vis, et ceci non pas dans l'ordre circulaire (vis 1-2-3-4-5-6), mais selon un ordre « en étoile » (vis 1-4-2-5-3-6, par exemple).

Après quelques essais, on voit que l'on est en effet capable de rapprocher les pics de ce premier mode (dans la limite de la résolution de la FFT<sup>11</sup>). Toutefois, il s'avère que ce n'est pas une tâche facile pour une personne inexpérimentée en la question : il n'est

9. Dans ces mesures, l'amplitude de la pression  $p_e(t)$  n'est pas importante puisqu'on s'intéresse seulement à son contenu fréquentiel. Cette amplitude sera différente selon l'amplitude de la force de frappe appliquée et selon la distance entre le microphone et le point d'impact pour la mesure donnée. Pour cette raison, la mesure peut être multipliée par une constante au choix (voire normalisée). Quand une mesure n'est pas représentée dans son unité physique, mais qu'un facteur multiplicatif arbitraire a été omis, on l'indique par  $\sim$  sur l'axe verticale dans le présent chapitre.

10. On verra plus bas qu'il ne s'agit pas du premier mode 01 de membrane, mais du mode 11!

11. Il existe des méthodes haute-résolution, nous permettant d'obtenir une meilleure résolution que la FFT. On peut par exemple mentionner des méthodes fréquentielles par interpolation et ajustement de courbe (p.ex. [237] appliquée au cas de la timbale), des méthodes temporelles basées sur des propriétés d'invariance de sous-espaces (telles ESPRIT [13, 222], qui sera utilisée plus bas) ou encore le *Snail* [109], complétant la FFT par une interpolation et une démodulation de phase.

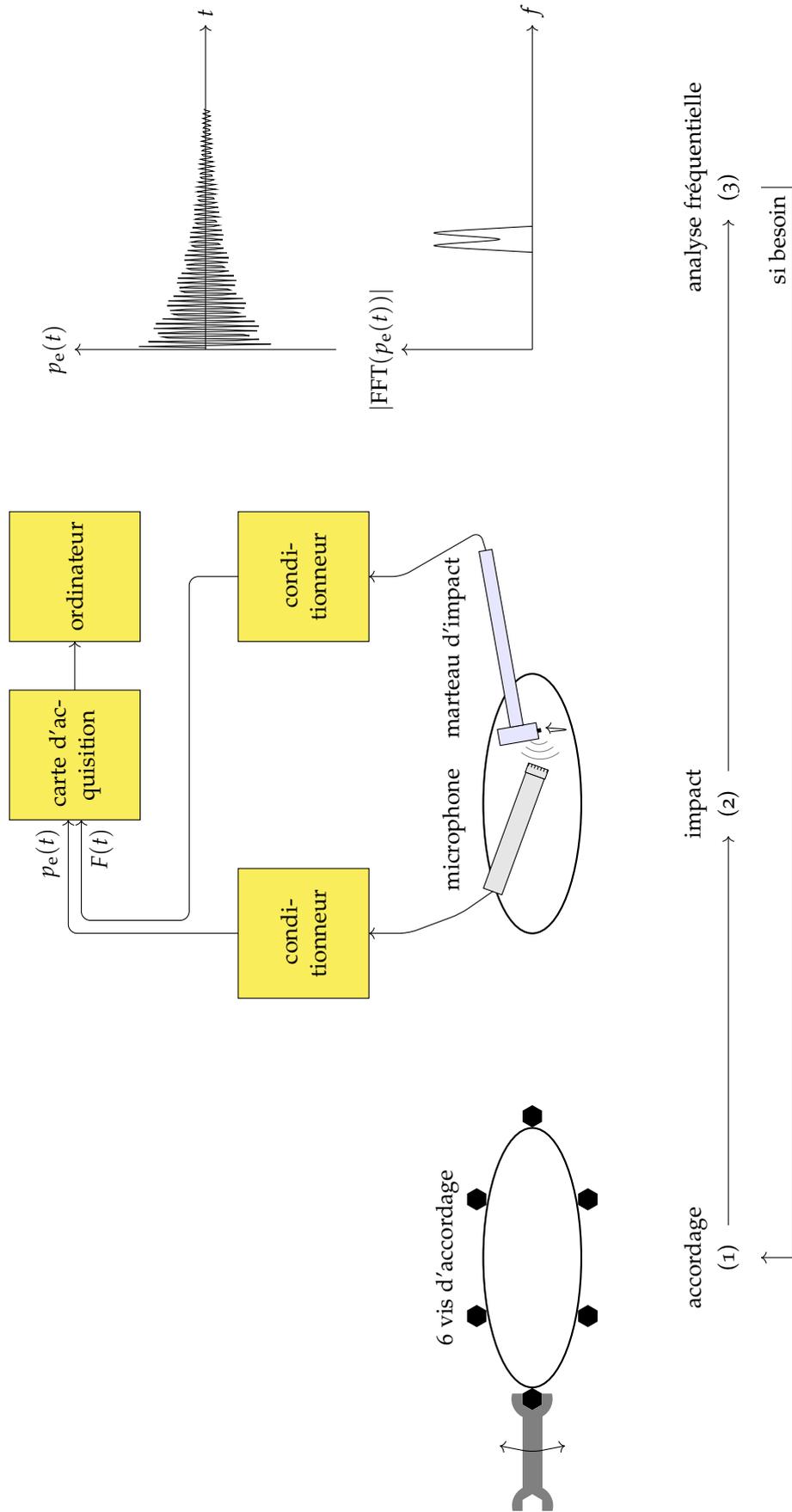


FIGURE 10.15 – Dispositif d'accordage de la membrane : schéma et principe



FIGURE 10.16 – Dispositif d'accordage de la membrane : marteau d'impact et microphone

Tableau 10.3 – Dispositif d'accordage de la membrane : liste des instruments

Microphone	Bruel & Kjør 4190
Conditionneur de microphone	Nexus 2690
Marteau d'impact	Dytran 5800SL
Amplificateur de marteau d'impact	MMF M32
Carte d'acquisition	National Instruments 9234

pas clair a priori sur quel mode se baser, et également quelle vis utiliser pour rectifier le contenu fréquentiel. En plus, on a aussi essayé de caler des pics à une autre fréquence, ce qui a désaccordé le premier pic. C'est la raison pour laquelle on a choisi de raccorder le premier pic le mieux possible avec la FFT, ce qui n'a pas pu enlever les battements à tous les endroits de la membrane, et de garder cet accordage pour l'ensemble des mesures à suivre. Une étude plus approfondie de méthodes d'accordage [210, Chapitre 3], et un échange avec un musicien professionnel pourraient permettre d'obtenir un meilleur accordage, avec une pression plus uniforme.

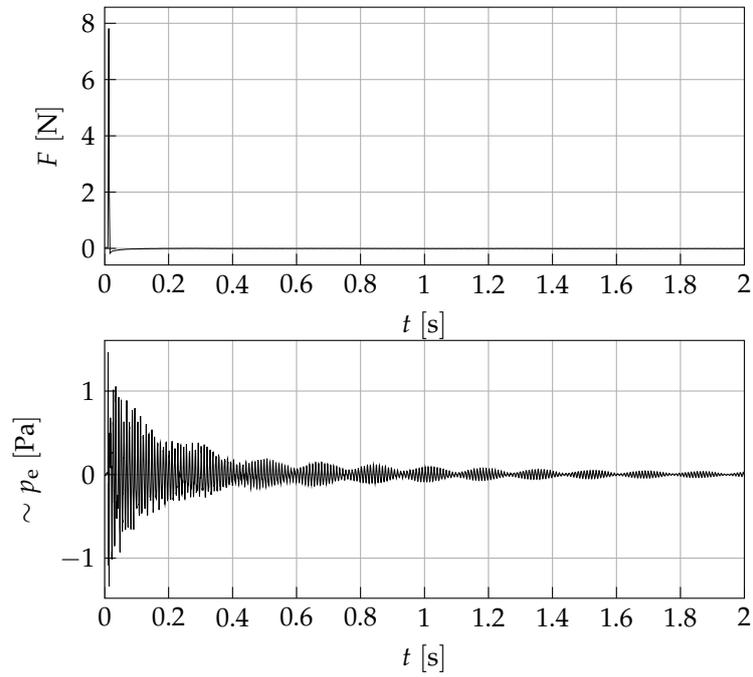
Pour l'accordage final, les spectres obtenus pour des frappes au milieu et à plusieurs endroits à une distance  $r \approx a/2$  sont montrés Figure 10.18, dans le but de discerner quels modes sont axisymétriques et lesquels ne le sont pas. Dans la Figure (a), on observe notamment une petite contribution de la fréquence de résonance du haut-parleur à 42Hz. En ce qui concerne la membrane, même s'il y a des différences claires entre les Figures (a) et (b), il est difficile de formuler une conclusion sur ce point. Est-ce que le pic à 100Hz lors de la frappe au milieu de la membrane est le mode 01 ?<sup>12</sup> Quel autre pic correspond véritablement à un mode, et lequel ? On visualisera pour la deuxième méthode d'estimation les figures de Chladni, pour clarifier ce contenu fréquentiel.

Étant donné cet accordage, il faut appliquer une méthode d'estimation de tension de la membrane. En regardant dans la littérature, on apprend qu'il n'est pas facile de la déterminer expérimentalement. Dans [58, 60], on propose deux méthodes<sup>13</sup> classiques pour l'identification de la tension  $T$  [N/m] supposée uniforme d'une membrane

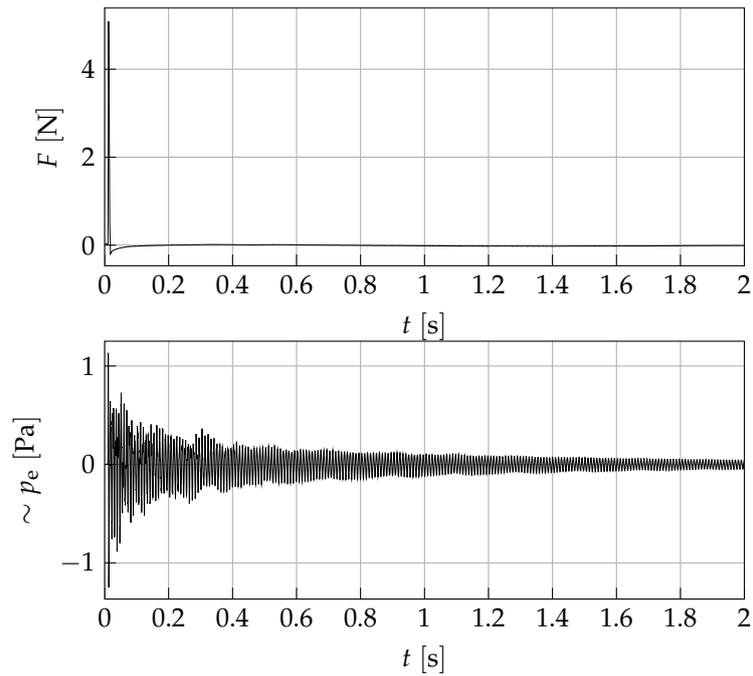
À ce point, on s'est contenté d'utiliser la méthode FFT. Pour une étude plus détaillée de l'accordage, dans le but d'obtenir une distribution de tension plus homogène dans la membrane, une telle méthode d'analyse devrait être utilisée.

12. Non : on verra que c'est le mode 11, plus prononcé dans la Figure (b), mais qui est aussi excité en frappant au milieu, à cause de la non-uniformité/non-symétrie de la tension dans la membrane.

13. On peut noter qu'une troisième méthode est proposée dans [7], où la tension est estimée d'après les contributions des moments exercés par les vis d'accordage, mesurés par une clé dynamométrique. Toutefois, on y remarque que cette méthode est encore moins précise que la méthode mécanique avec le poids ajouté,

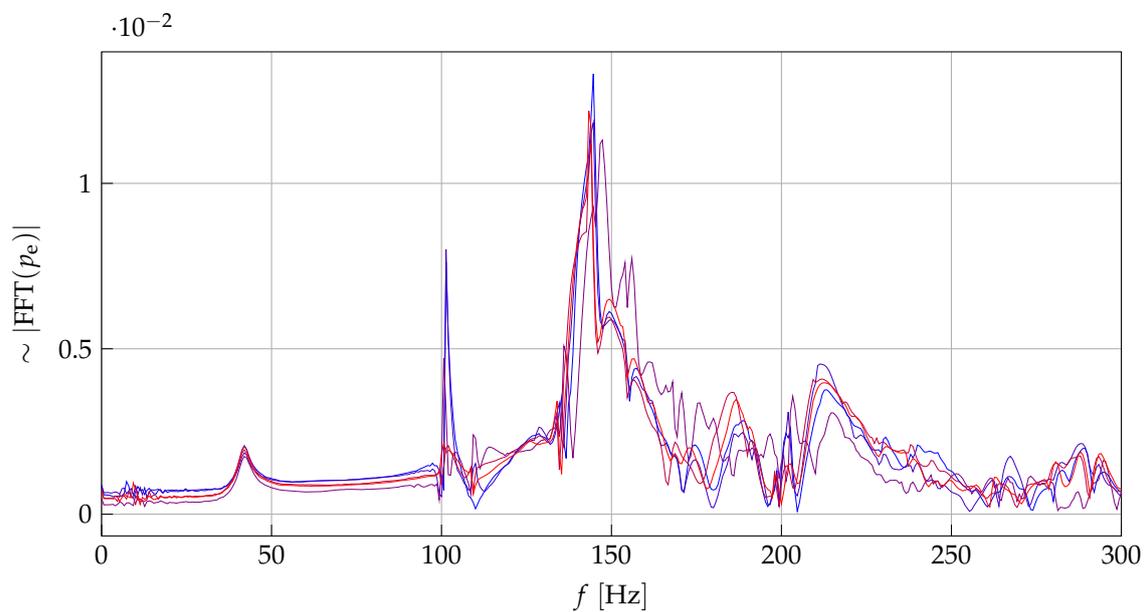


(a) Battement prononcé



(b) Pas de battement prononcé

FIGURE 10.17 – Dispositif d'accordage de la membrane : mesures de force et son obtenues à deux endroits de la membrane pendant la procédure d'accordage



(a) Spectre de 5 coups au milieu de la membrane

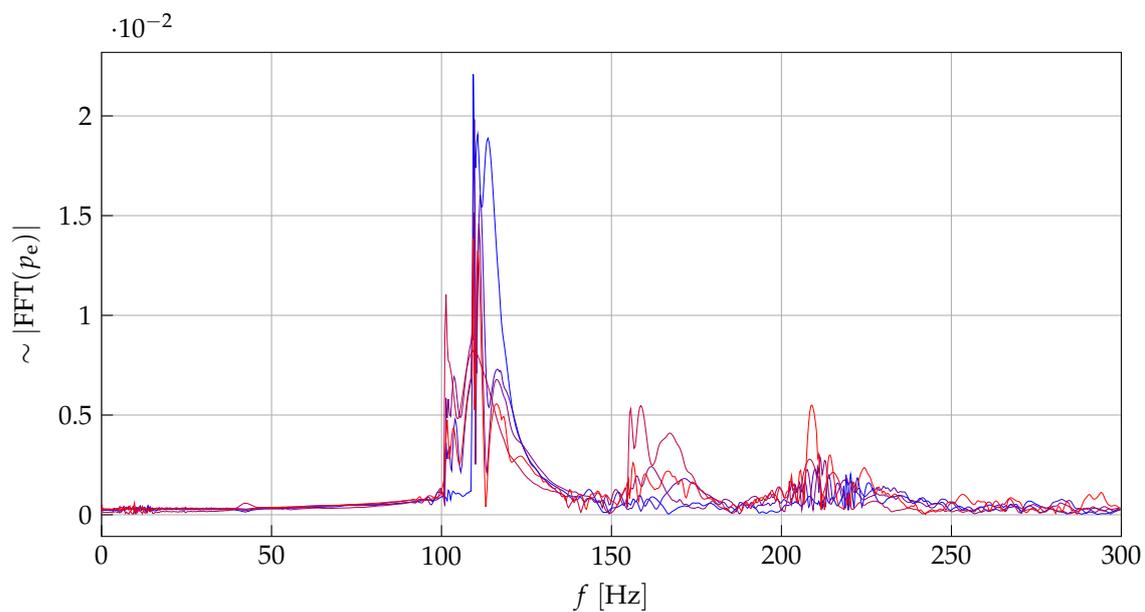
(b) Spectre de 5 coups à des endroits différents à une distance de la moitié du rayon ( $r = \frac{a}{2}$ ) du centre de la membrane

FIGURE 10.18 – Dispositif d'accordage de la membrane : spectres de mesures de la pression au-dessus de plusieurs endroits de la membrane (représentées dans des couleurs différentes), pour la membrane à son accordage final

circulaire : une méthode mécanique se basant sur la déflexion statique d'un poids mis sur la membrane, qui est moins précise, et une méthode basée sur le contenu fréquentiel du son, qui est plus précise. Ces deux méthodes sont maintenant appliquées au tom.

**1. MÉTHODE MÉCANIQUE : DÉPLACEMENT TRANSVERSE STATIQUE DE LA MEMBRANE SOUMISE À UNE MASSE** Cette méthode d'identification de la tension  $T$  se base sur le déplacement transverse statique de la membrane lorsqu'un poids est mis dessus. Dans [58, 172], on explique que ce déplacement transverse  $\eta$  de la membrane circulaire de rayon  $a$  soumise à une force de gravité  $F = Mg$  causé par un cylindre de base de rayon  $b$  et de poids  $M$  en son centre peut être approximé comme

$$\eta(b) \approx \frac{Mg}{2\pi T} \ln \frac{a}{b}. \quad (10.3)$$

Ici, on suppose que  $b \ll a$  pour se rapprocher d'une force ponctuelle, et un régime linéaire, ce qui implique un déplacement  $\eta$  limité, et qui selon [58] correspond à

$$\frac{1}{2} \left( \frac{Mg}{2\pi T b} \right)^2 \ll 1,$$

ce qui limite le poids de  $M$  que l'on peut utiliser. (Dans le cas non linéaire, la tension dépendrait du déplacement : la tension linéaire serait multipliée par un facteur

$$\left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 \right]$$

d'après [58]).

Il y est encore mentionné qu'en outre de la limite sur le poids de  $M$ , une précision sur la mesure du déplacement transverse d'au moins égale à 0,1mm est nécessaire pour le un cas concret d'une timbale, ce qui est possible mais long et coûteux à réaliser.

Dans [220], cette méthode est appliquée à une caisse claire. Pour plus de précision, on y répète la mesure pour plusieurs masses incrémentant de 20g, et on effectue une extrapolation pour en déduire la tension à une déflexion nulle.

Pour mesurer le déplacement  $\eta$ , on peut procéder de la manière suivante. On connaît la hauteur du poids qui est un solide indéformable. Si l'on mesure consécutivement la position verticale de la membrane au repos et ensuite la position verticale du dessus du poids une fois posé au milieu de la membrane, on peut en déduire le déplacement vertical net de la membrane suite à l'action du poids. Toutefois, la petite plage dans laquelle le capteur laser peut mesurer une position verticale ne permet pas de faire ces deux mesures de position verticale sans devoir déplacer le laser. C'est la raison pour laquelle nous proposons une procédure alternative, moins précise, qui est la suivante (Figures 10.19-10.20 et Tableau 10.4).

1. Le poids se trouve initialement en dehors de la plage du capteur laser avant d'être descendu vers la membrane.
2. Le poids est tenu dans les mains de sorte à toucher la membrane sans pour autant la baisser.
3. Le poids est lâché et la position verticale au milieu de la membrane se stabilise à une certaine hauteur.

L'évolution de la position verticale du dessus du poids dans le temps est affichée Figure 10.21, dans laquelle ces trois phases sont indiquées. On peut en déduire graphiquement que le milieu de la membrane a subi un déplacement vertical  $\eta$  d'environ 2,71mm.

---

dont on verra qu'elle n'est pas très précise. C'est la raison pour laquelle cette dernière méthode ne sera pas implémentée.

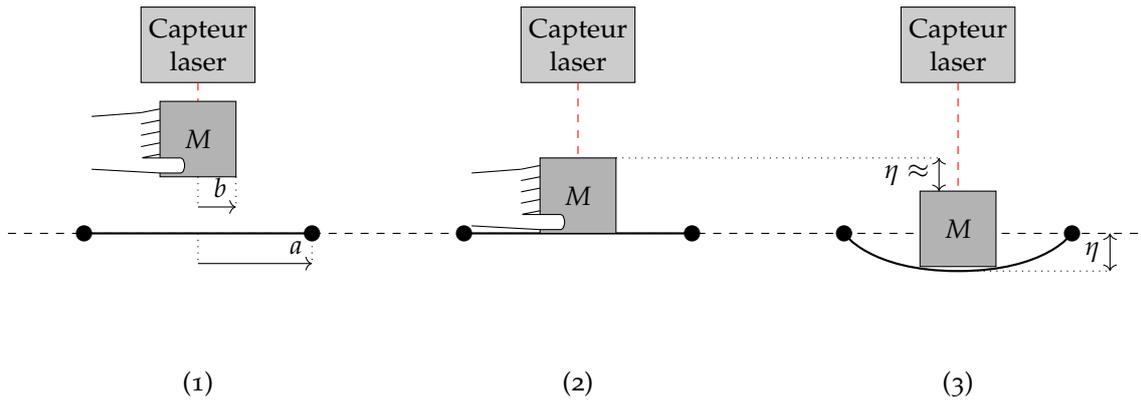


FIGURE 10.19 – Dispositif d’identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : schéma



FIGURE 10.20 – Dispositif d’identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : le laser et le poids sur la membrane

Tableau 10.4 – Dispositif d’identification de la tension de la membrane (méthode mécanique) : liste des instruments

Capteur laser	Keyence LK-H050
Carte d’acquisition	National Instruments 9234

De l’Équation (10.3), avec une masse  $M = 0,94847\text{kg}$ ,  $g = 9,81\text{m/s}^2$ ,  $a = 0,162\text{m}$ ,  $b = 0,0265\text{m}$  (rayon d’un cercle ayant le même aire que le rectangle du poids utilisé), on calcule une tension

$$T = 932,6\text{N/m.}$$

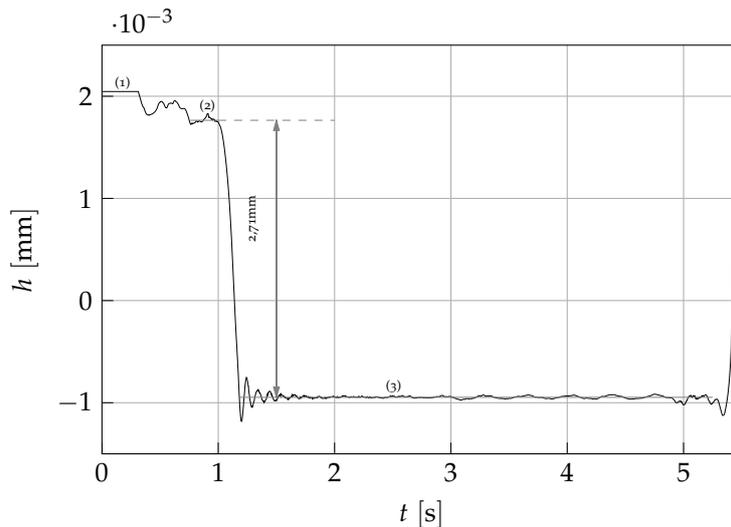


FIGURE 10.21 – Mesure de la hauteur du dessus du poids dans le temps

Toutefois, vu la précision limitée de la méthode et de notre implémentation, on ne retiendra pas cette valeur, dont on verra chez la 2<sup>me</sup> Méthode (acoustique) qu'il s'agit d'une surestimation.

**2. MÉTHODE ACOUSTIQUE : ANALYSE DU SIGNAL DE PRESSION** Une deuxième méthode d'estimation de la tension de la membrane, décrite dans [58], effectue un ajustement des fréquences théoriques de la membrane circulaire de tension inconnue (sans cavité et avec une charge d'air) à un enregistrement du son produit par la membrane. Cette méthode devrait être plus précise que la 1<sup>re</sup> Méthode (mécanique).

Pour pouvoir appliquer cette méthode, il faut d'abord être capable d'identifier clairement les fréquences des premiers modes de vibration de la membrane, ce qui n'est pas évident (cf. la discussion de la Figure 10.18). Pour cette raison, nous proposons de réaliser des figures de Chladni<sup>14</sup>, afin de compléter cette information<sup>14</sup>.

Des figures de Chladni<sup>15</sup> sont obtenus quand on met une substance granulaire comme du sel ou du sable sur une structure vibrante que l'on met en vibration à une fréquence précise. Quand la fréquence d'excitation correspond à une fréquence d'un mode propre de la structure, la structure vibre selon ce mode, et les grains s'accumulent sur les courbes nodales correspondantes (cercles et lignes pour le cas de la membrane circulaire) qui restent stationnaires pendant la vibration. Ainsi, en excitant la structure aux fréquences des pics du spectre précédemment obtenu, on peut visualiser la forme modale correspondante et être sûr de quel mode il s'agit.

Des figures de Chladni ont été obtenus avec succès chez la timbale [85, 218], le tabla [203], le tambour sur cadre [264], et le tom (membrane supérieure d'un tom à deux membranes dans [210, Annexe B]).

Dans l'expérience décrite ici, du sel mélangé avec des paillettes bleues a été utilisé. La poudre est distribuée de manière uniforme sur la membrane. Ensuite, la membrane est mise en vibration à l'aide du haut-parleur interne (Figure 10.22 et Tableau 10.5) ou d'un pot vibrant monté au-dessus de la membrane (Figures 10.23-10.24 et Tableau 10.6).

Comme le haut-parleur, le pot vibrant (*shaker*) contient une bobine dans le champ magnétique d'un aimant permanent. En y appliquant une tension sinusoïdale, un

14. Des méthodes alternatives sont p.ex. l'utilisation d'un microphone pour scanner la surface et l'affichage des figures de Lissajous composées par cette mesure en fonction de l'excitation de la membrane [7], ou encore l'interférométrie [263].

15. Dans son livre de 1787 [63, 64], des figures « de Chladni » de plaques, barres et membranes sont dessinées.

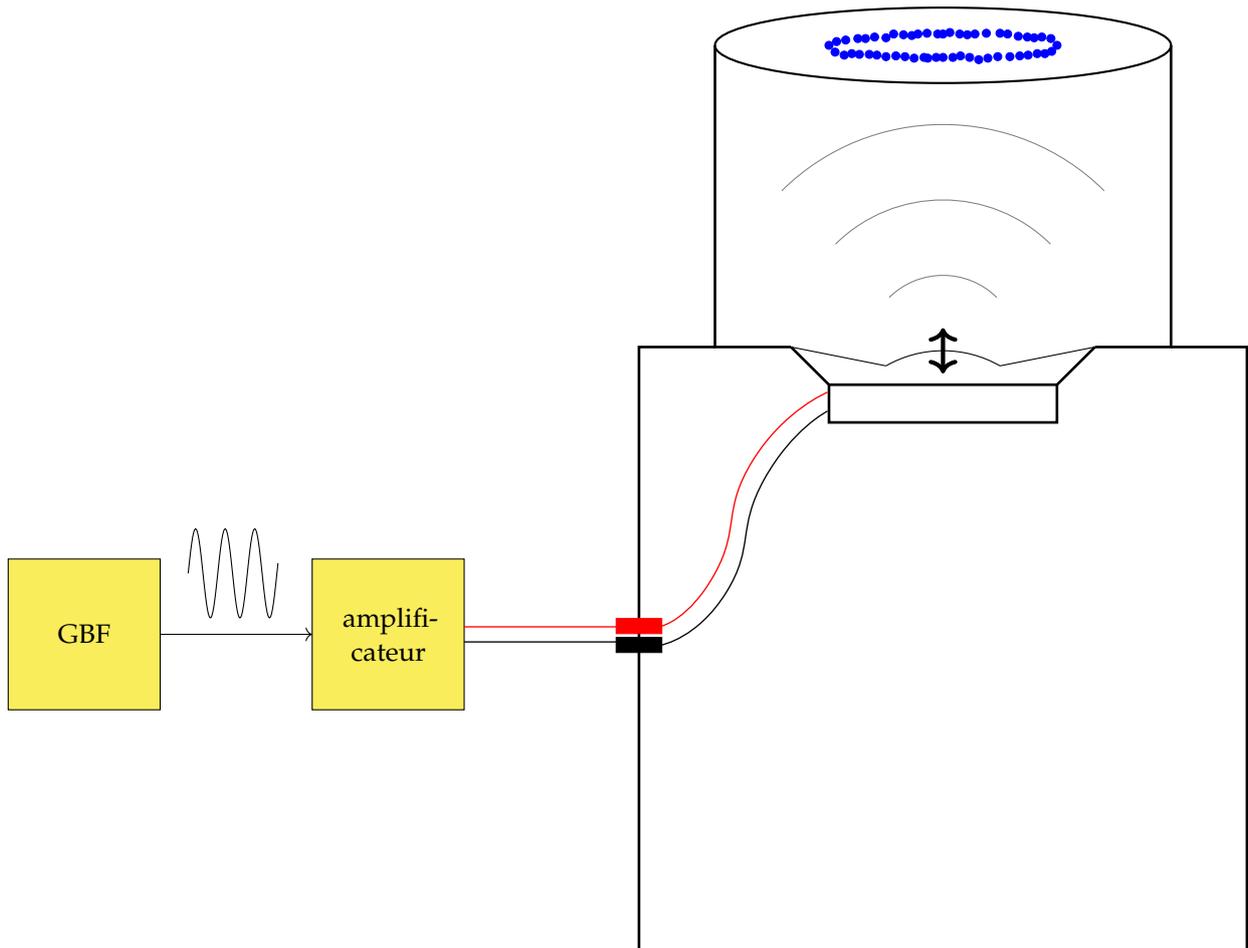


FIGURE 10.22 – Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par le haut-parleur interne) : schéma.

courant sinusoïdal parcourt la bobine, créant une force de Laplace sinusoïdale, causant le mouvement périodique d'un bâton, qui peut être utilisé pour mettre en vibration la membrane, cf. la Figure 10.25.

On suppose que le contact avec le bâton du pot vibrant et la présence des graines n'ont pas une grande influence sur les modes de vibration de la membrane à l'étude. On a aussi vérifié que la membrane du tom soit à l'horizontale. De plus, on aurait pu avoir ajouté un amortissement artificiel<sup>16</sup> contre la paroi extérieure du tom, pour minimiser une éventuelle influence de ses modes de vibration sur ceux de la membrane supérieure (Cf. Fig. 9.11).

Les figures de Chladni en basse-fréquence ainsi obtenues sont montrés dans les Figures 10.26 (mode 11), 10.27 (mode 21) et 10.28 (mode 20). Quelques modes à des fréquences plus élevées sont montrés en Sous-section D.1.2.

<sup>16</sup>. Dans [220], on utilise des sacs avec du sable chez une caisse claire pendant des mesures sur sa membrane supérieure.

Tableau 10.5 – Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par le haut-parleur interne) : liste des instruments

Générateur basse-fréquence	TTi TG2000
Amplificateur	Newtons4th Ltd LPA05
Haut-parleur	Raveland AXX 1212

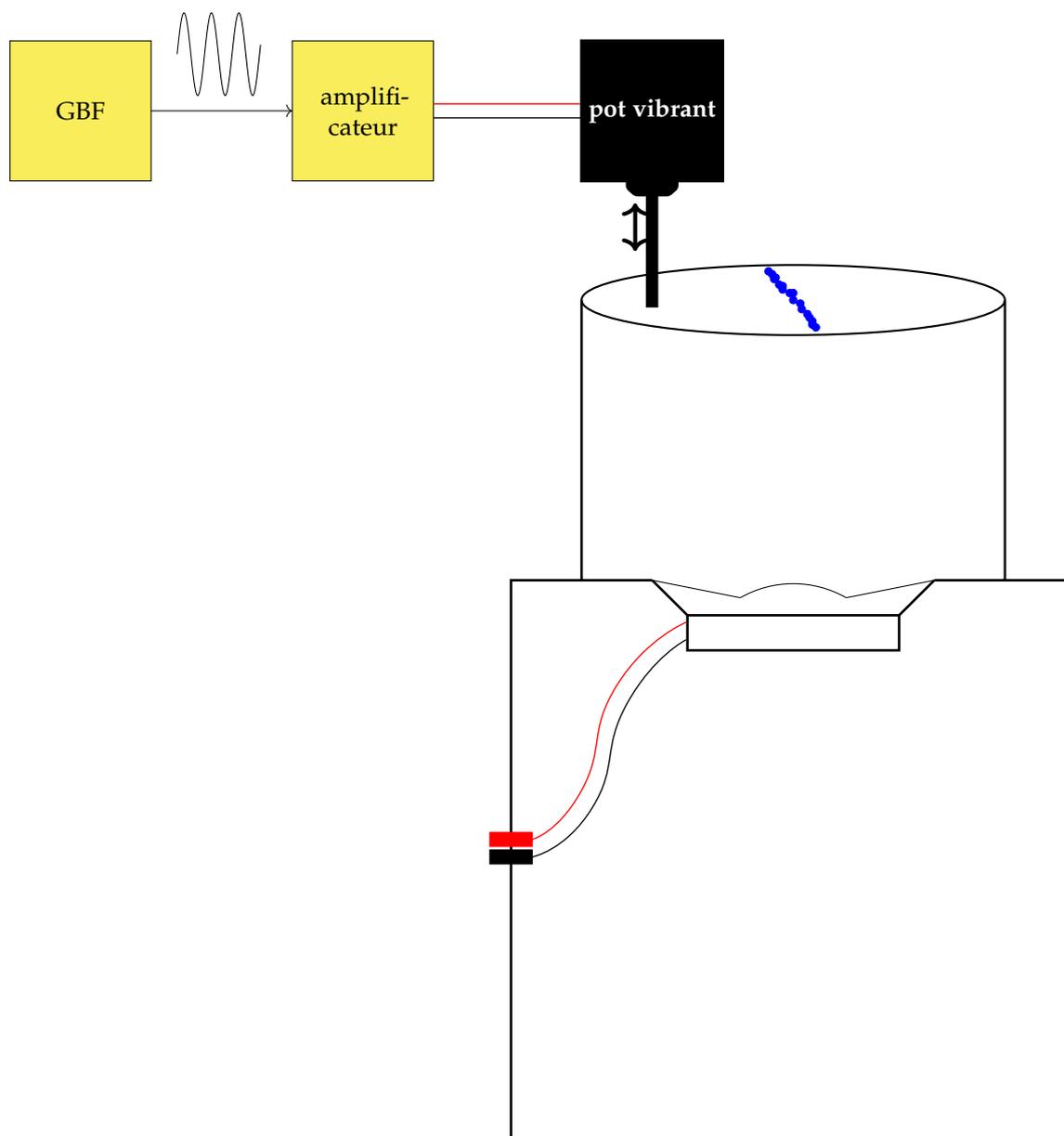


FIGURE 10.23 – Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : schéma.

Tableau 10.6 – Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : liste des instruments

Générateur basse-fréquence	TTi TG2000
Amplificateur	ILP Electronics US1 Power slave
Pot vibrant	Bruel & Kjaer 4810



FIGURE 10.24 – Dispositif pour les figures de Chladni (excitation par un pot vibrant externe) : le pot vibrant et la membrane vibrant selon le mode 21.

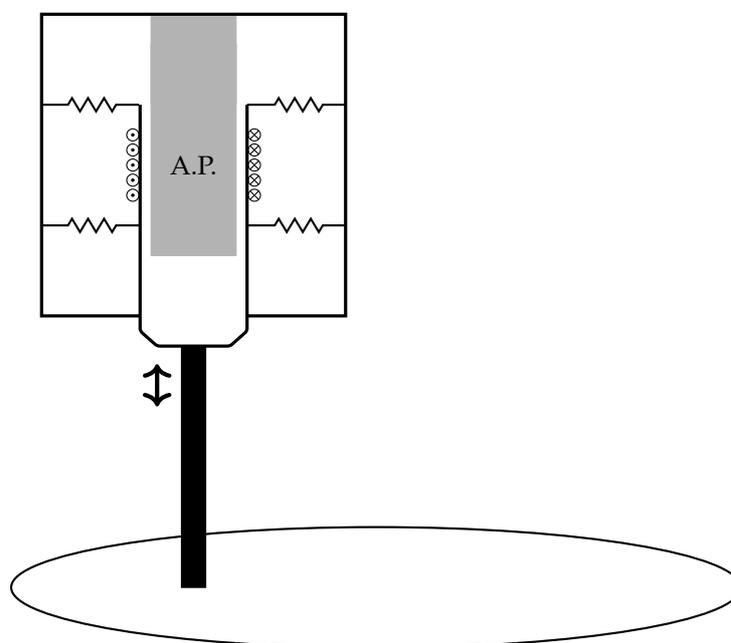


FIGURE 10.25 – Fonctionnement du pot vibrant. (A.P. : aimant permanent).

Premièrement, si l'on a observé clairement les modes 11, 21 et 02, on n'a pas retrouvé la figure de Chladni du mode 01, qui consisterait seulement en le cercle nodal extérieur, qui est présent chez tous les modes<sup>17</sup>.

17. On calculera plus bas dans la Figure 10.29 qu'ici, à cause du choix de la tension de la membrane suite à son accordage, un croisement des fréquences des modes 01 et 11 a eu lieu, le mode 01 étant à une fréquence

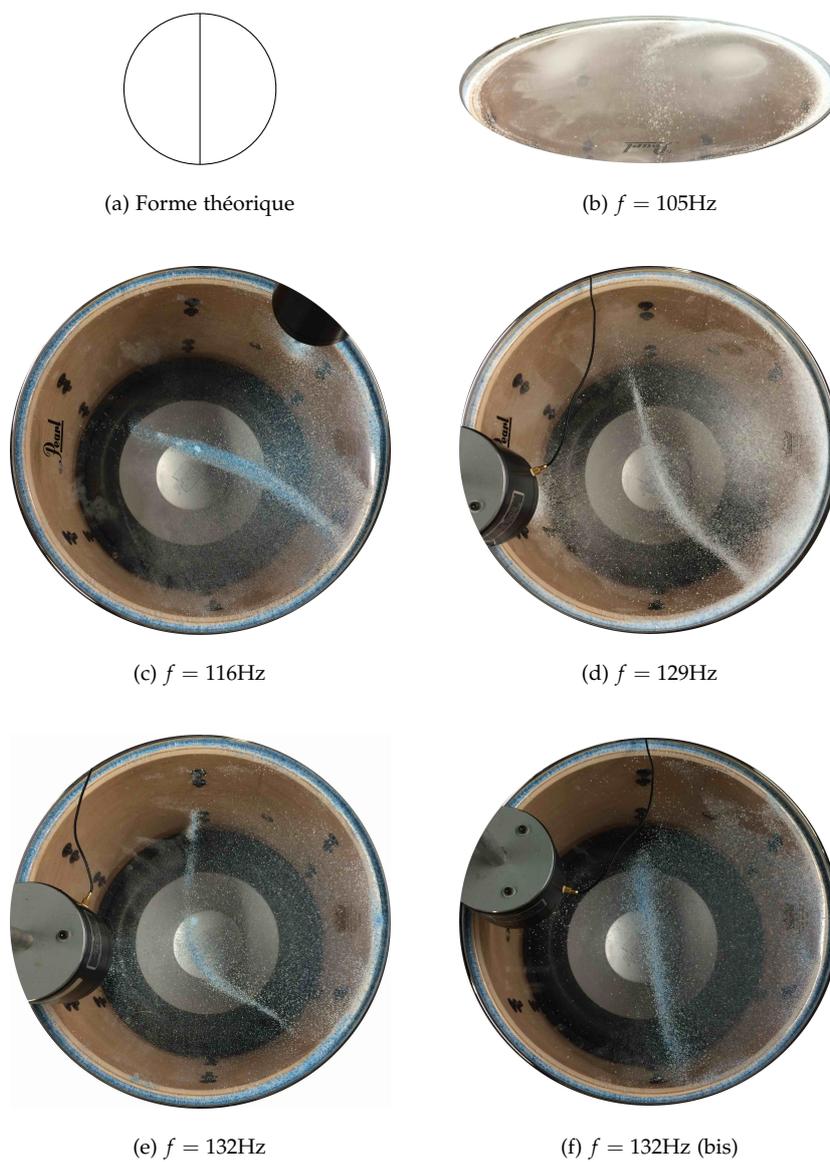
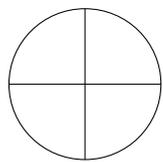


FIGURE 10.26 – Figures de Chladni du mode 11. La fréquence d'excitation est indiquée.



(a) Forme théorique



(b)  $f = 146\text{Hz}$



(c)  $f = 158\text{Hz}$

FIGURE 10.27 – Figures de Chladni du mode 21. La fréquence d'excitation est indiquée.

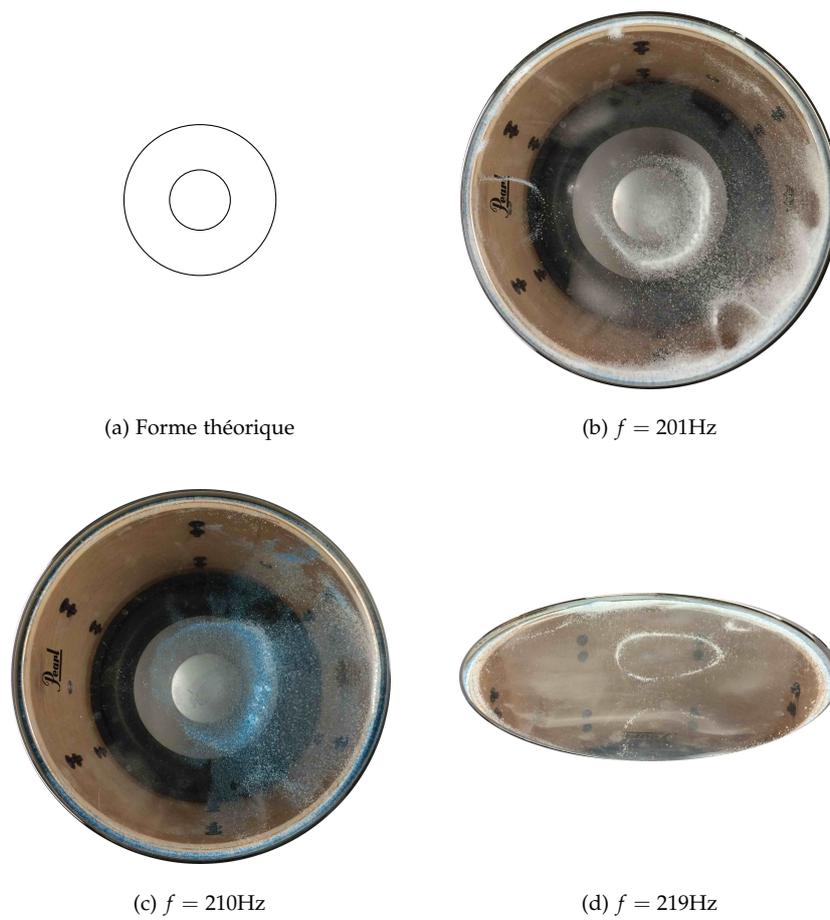


FIGURE 10.28 – Figures de Chladni du mode 02. La fréquence d'excitation est indiquée.

Deuxièmement, on constate que les figures de Chladni obtenues dévient de la forme théorique<sup>18</sup> à cause de la non-uniformité de la tension de la membrane. On pourrait en fait essayer de modifier la position des vis d'accordage dans le but d'obtenir des figures de Chladni plus symétriques, mais on décide de ne pas le faire ici.

**ESTIMATION DE LA TENSION** Une fois les fréquences des premiers modes connues, on peut suivre la méthode d'estimation décrite dans [58], qui néglige l'influence sur la fréquence de la cavité (qui est pourtant importante en basse-fréquence, donc on ne considère pas les modes  $f_{0m}$  pour l'identification dans la suite) et du couplage de la membrane avec l'air extérieur. La procédure se décline comme suivant.

- On considère un mode propre à fréquence  $f_{nm}$ , dans l'intervalle  $[0, 1]$ kHz.
- On estime la célérité des ondes de flexion comme

$$c_F(\omega_{nm}) = \frac{\omega_{nm}}{\lambda_{nm}},$$

où  $\lambda_{nm}$  satisfait  $J_n(\lambda_{nm}a) = 0$ .

- On obtient une estimation de la tension  $T$  d'après l'équation de dispersion (couplage entre onde élastique et acoustique [209], supposant une célérité des ondes de flexion  $c_F$  inférieure à la célérité des ondes acoustiques dans l'air  $c_a$ ) :

$$T = c_F^2(\omega) \left[ \sigma + \frac{2\rho_{\text{air}}}{\omega \sqrt{\frac{1}{c_F^2(\omega)} - \frac{1}{c_a^2}}} \right],$$

avec  $\rho_{\text{air}}$  la densité de l'air et  $\sigma$  la densité massique surfacique de la membrane. (On note que pour des hautes fréquences, la célérité des ondes de flexion  $c_F(\omega)$  se rapproche de la célérité des ondes de flexion transverses dans le vide,  $c_f = \sqrt{T/\sigma}$ .)

Finalement, on prend la moyenne des estimations de tension pour les modes considérés, sauf ceux qui sont axisymétriques ( $f_{0m}$ ). Dans [58], cette méthode est appliquée au cas d'une timbale et par comparaison à un modèle numérique [209], on voit que l'erreur sur l'estimation est de 4%.

En appliquant la méthode aux plages fréquentielles des modes 11 et 21 obtenues par les figures de Chladni, on obtient les estimations listées dans le Tableau 10.7. En moyennant leurs estimations, on obtient une estimation de la tension de

$$\underline{335,6\text{N/m}}. \tag{10.4}$$

**VÉRIFICATION** La tension de la membrane vient d'être estimée avec la 2me méthode (acoustique), qui utilise une modélisation plus raffinée pour le rayonnement, contrairement à la relation constante dans notre modèle :

$$\sigma_m = \sigma + 0,85a\rho_a. \tag{10.5}$$

En même temps, l'influence de la cavité sur les fréquences axisymétriques  $f_{0m}$  n'a pas été prise en compte, qui correspondent aux solutions de la condition implicite (9.12).

Pour cette raison, même si l'estimation (10.4) vise à se rapprocher au mieux de la réalité physique, nous proposons de remplacer cette estimation par un ajustement ad hoc des fréquences de notre modèle aux fréquences des figures de Chladni, sachant que la valeur de la tension estimée sera utilisée dans l'implémentation du contrôleur basé sur ce modèle (simplifié).

plus élevée et le mode 11 devenant la fréquence fondamentale. De plus, il semble que dans nos observations, le mode 01 était masqué par le mode 21 qui a une fréquence proche et que l'on a observé clairement.

18. Les figures de Chladni en basse-fréquence obtenues en [210, Annexe B] pour le tom sont plus symétriques, donc un meilleur accord à tension plus uniforme y a été obtenu. De plus, il se trouve que le mode 01 y a la fréquence la plus basse, ce qui n'est pas le cas chez nous ici (à détailler plus bas).

Tableau 10.7 – Estimation de la tension avec la 2<sup>ème</sup> méthode d’après les fréquences des figures de Chladni

$nm$	$f_{nm}$ [Hz]	$\lambda_{nm}a$ [-]	$c_F(f_{nm})$ [m/s]	$T$ [N/m]
11	101	3,832	26,8	265,4
	132		35,1	453,6
21	146	5,136	28,9	287,1
	158		31,3	336,3
02	201	5,520	37,1	464,1
	219		40,4	551,1

Comme dans le chapitre précédent, on peut tracer l’évolution des modes 01, 02, 11 et 21 en fonction de la tension  $T$  (utilisant ici l’expression pour  $\sigma_m$  (10.5), Fig. 10.29) et on compare ces fréquences aux plages de fréquences des figures de Chladni. La meilleure correspondance est obtenue pour la valeur

$$T = 420 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Cette valeur est retenue comme estimation de la tension  $T$  supposée constante de la membrane.

On voit dans la Figure 10.29 qu’à cette faible tension, un croisement de fréquences a eu lieu, et la fréquence du mode 01 (premier mode axisymétrique) est devenue plus élevée que celle du mode 11. De plus, la fréquence du mode 01 est proche de la plage du mode 21, donc le mode 01 peut avoir été masqué par ce dernier mode, d’où le fait que nous l’avons pas observé expérimentalement.

De ce dernier fait, on propose d’étudier pour l’implémentation de la loi de commande ci-dessous sa capacité de déplacer la fréquence du deuxième mode axisymétrique 02, qui, quant à lui, a été observé clairement expérimentalement.

#### 10.1.4.4 Coefficient de frottement $\mu$

**MÉTHODE HR ESPRIT** Dans notre modèle, le coefficient de frottement  $\mu$  [1/s] correspond à la décroissance exponentielle du signal  $y_m(r,t)$  dans le temps, qui ne dépend pas de la fréquence. Ce coefficient a été identifié de plusieurs manières dans le passé. Dans [59] par exemple, pour le cas d’une barre de xylophone, on excite la structure, coupe l’excitation, et étudie le temps de décroissance du son<sup>19</sup>.

Ici, nous proposons d’utiliser la méthode d’analyse haute résolution (HR) ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, [13, 222]). Dans ce contexte, le signal à analyser  $y(t)$  est modélisé comme un mélange de sinusoides exponentiellement amorties (EDS pour *Exponentially Damped Sinusoids*). Dans un premier temps, on l’écrit comme

$$y(t) = \sum_{p=1}^N \alpha_p z_p^t,$$

<sup>19</sup>. (avec la méthode *matrix pencil* [139], qui est liée à la méthode haute-résolution que nous utiliserons ci-dessous)

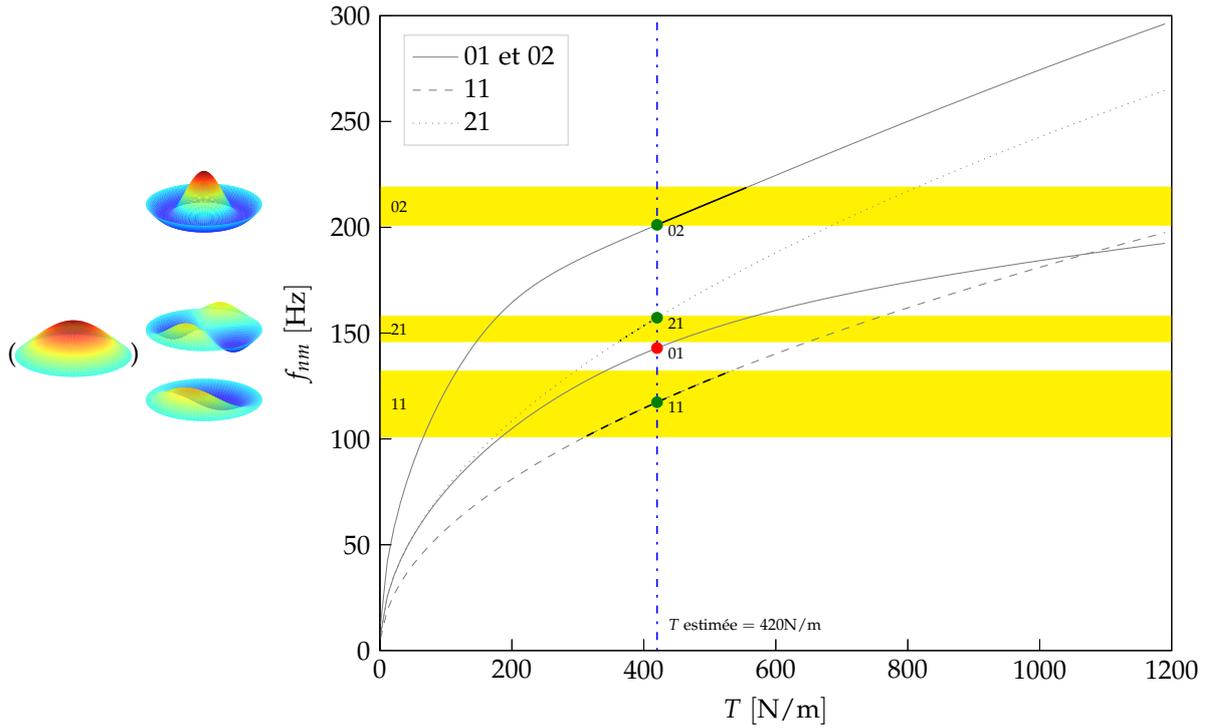


FIGURE 10.29 – Identification de la tension de la membrane  $T$  : ajustement des fréquences du modèle (affichées en gris en fonction de la tension inconnue  $T$ ) aux plages de fréquences des figures de Chladni (zones jaunes).

où  $\alpha_p = a_p e^{j\varphi_p}$  est une amplitude complexe sous forme polaire contenant l'amplitude  $a_p$  et la phase  $\varphi_p$  et  $z_p = e^{\delta_p} e^{j2\pi f_p}$  un pôle complexe contenant le facteur d'amortissement  $\delta_p$  et la fréquence  $f_p$ . La transformation inverse est

$$\begin{cases} \delta_p = \ln(|z_p|) \\ f_p = \frac{1}{2\pi} \angle(z_k) \\ a_p = |\alpha_p| \\ \varphi_p = \angle(\alpha_p). \end{cases}$$

Après substitution, on obtient alors

$$y(t) = \sum_{p=1}^N a_p e^{\delta_p t} e^{j(2\pi f_p t + \varphi_p)}.$$

Dans le cas d'un signal réel  $y(t)$ , on a un nombre pair de pôles avec à chaque fois

$$\begin{cases} a_p = a_{p+1} \triangleq \frac{a}{2} \\ \delta_p = \delta_{p+1} \triangleq \delta \\ f_p = -f_{p+1} \triangleq f \\ \varphi_p = -\varphi_{p+1} \triangleq \varphi, \end{cases}$$

de sorte à pouvoir recombinaer les contributions complexes deux à deux :

$$\begin{aligned} & a_p e^{\delta_p t} e^{j(2\pi f_p t + \varphi_p)} + a_{p+1} e^{\delta_{p+1} t} e^{j(2\pi f_{p+1} t + \varphi_{p+1})} \\ &= a e^{\delta t} \frac{e^{j(2\pi f t + \varphi)} + e^{-j(2\pi f t + \varphi)}}{2} \\ &= a e^{\delta t} \cos(2\pi f t + \varphi), \end{aligned}$$

ce qui est une contribution réelle. Le modèle de signal EDS peut donc se réécrire comme

$$y(t) = \sum_{q=1}^{\frac{N}{2}} a_q e^{\delta_q t} \cos(2\pi f_q t + \varphi_q).$$

Pour un nombre (pair) de pôles  $N$  donné, la méthode ESPRIT permet d'estimer les paramètres  $(a_q, \delta_q, f_q, \varphi_q)$ , en séparant des contributions désirées et perturbatrices dans le signal  $y(t)$ , et en utilisant des propriétés d'invariance de rotation dans ces sous-espaces (pour plus de détails, voir [13, 140]). On peut choisir le nombre de pôles  $N$  manuellement, mais il existe aussi des méthodes d'estimation du nombre de pôles optimal pour représenter le signal donné  $y(t)$  par un modèle EDS, [13, Sec. IV.3-IV.4], comme la méthode ESTER (ESTimation ERror, [14]).

Afin d'avoir une estimation correcte pour le coefficient  $\mu$  (qui ait un sens physique) en utilisant la méthode ESPRIT<sup>20</sup>, il faut que le signal  $y(t)$  couvre le régime linéaire de vibration. C'est la raison pour laquelle nous isolons ce régime dans les signaux de mesure, avant de procéder à l'estimation même du paramètre.

**1. ISOLATION DU RÉGIME LINÉAIRE** Lorsque l'on frappe sur la membrane du tom, on peut distinguer plusieurs régimes, comme schématisé dans la Figure 10.30. Pendant la frappe, la force  $F(t)$  est non nulle, et la membrane (pression  $p_e(t)$ ) se trouve en régime forcé. Dès que la frappe est terminée, la force est nulle, et la membrane est en régime d'oscillation libre. Dans l'analyse décrite dans les Figures 10.15 et suivantes pour l'accordage, seulement le régime d'oscillation libre avait été considéré pour calculer le spectre du son obtenu.

Toutefois, le régime libre se décompose en une potentielle partie en régime non linéaire (glissement fréquentiel, lorsque l'on a frappé suffisamment fort) suivi par le régime linéaire. On souhaite ici isoler seulement ce régime linéaire dans les sons que l'on utilisera pour l'estimation du paramètre  $\mu$ . On commence par prendre cinq sons de frappe de l'expérience précédemment décrite (Fig. 10.31). On regarde les représentations fréquentielles (« HR-ogramme » s [137], calculés avec la méthode ESPRIT-ESTER, dont un exemple est montré Fig. 10.32). En regardant les contributions fréquentielles entre 100 et 250Hz, on observe un glissement fréquentiel : les fréquences sont plus élevées au début, et baissent vers leurs valeurs du régime linéaire. On mesure l'amplitude à la fin du glissement fréquentiel sur le signal temporel. Cette procédure est répétée pour les 5 sons, et l'amplitude minimale des 5 est prise comme amplitude après laquelle on est en régime linéaire (sélection indiquée en rouge dans la Figure 10.31).

**2. ESTIMATION DU PARAMÈTRE  $\mu$**  On peut maintenant appliquer la méthode ESPRIT aux 5 mesures du son  $p_e(t)$  en régime linéaire. On propose de se focaliser sur la contribution du mode 02. On augmente manuellement le nombre de pôles  $N$  du modèle EDS, jusqu'à l'apparition d'un mode à une fréquence au-dessus de 200Hz.

Pour l'exemple montré dans la Figure 10.33, on monte jusqu'à 8 pôles, et on obtient quatre contributions dans le modèle EDS dont les fréquences et amortissements sont listées dans le Tableau 10.8. On voit sur le graphe qu'il y a une bonne correspondance entre le signal d'origine et son approximation par un modèle EDS à 8 pôles.

En appliquant la procédure aux 5 sons, on obtient les estimations

$$(-1,6680935; -1,5783776; -1,493121; -1,375677; -1,238403) [1/s]$$

pour le coefficient d'amortissement  $\delta$  du mode 02. En prenant la moyenne, on obtient une valeur de  $\delta = -1,4707 \frac{1}{s}$ , donc on utilisera dans le modèle du tom un coefficient

$$\mu = 1,4707 \frac{1}{s}.$$

20. Dans la suite, on utilise une implémentation des algorithmes ESPRIT et ESTER de la boîte à outils DESAM (Décomposition en Éléments Sonores et Applications Musicales, [137]).

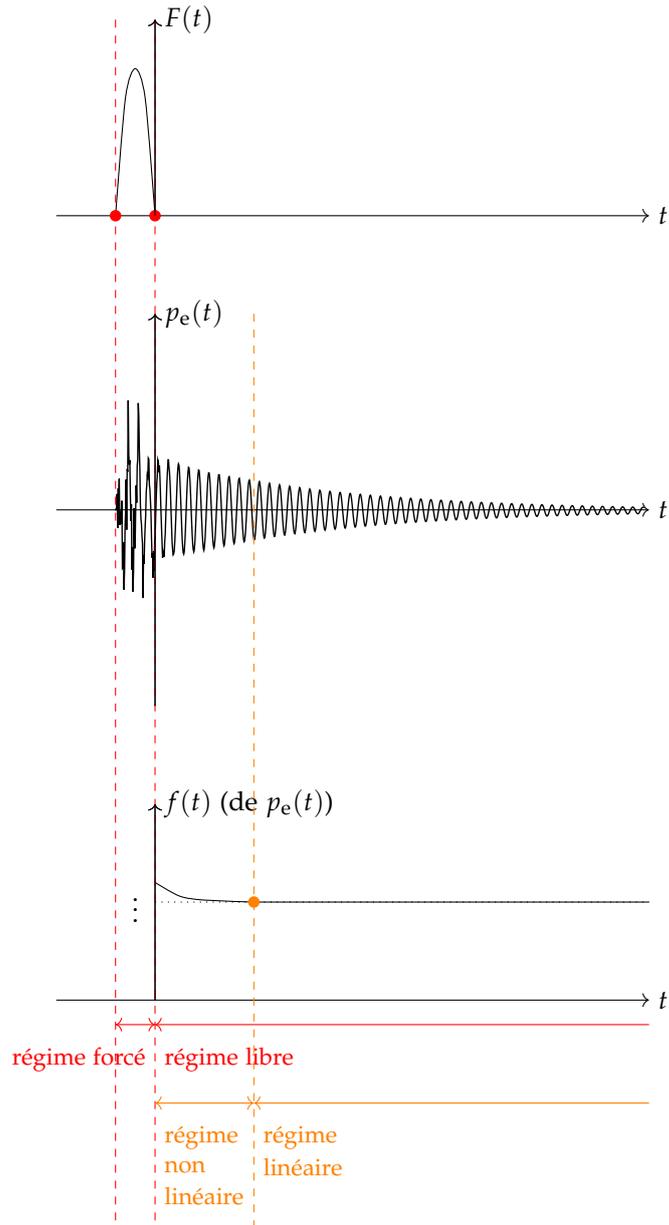


FIGURE 10.30 – Représentation schématique des régimes dans le son d’un coup sur la membrane du tom

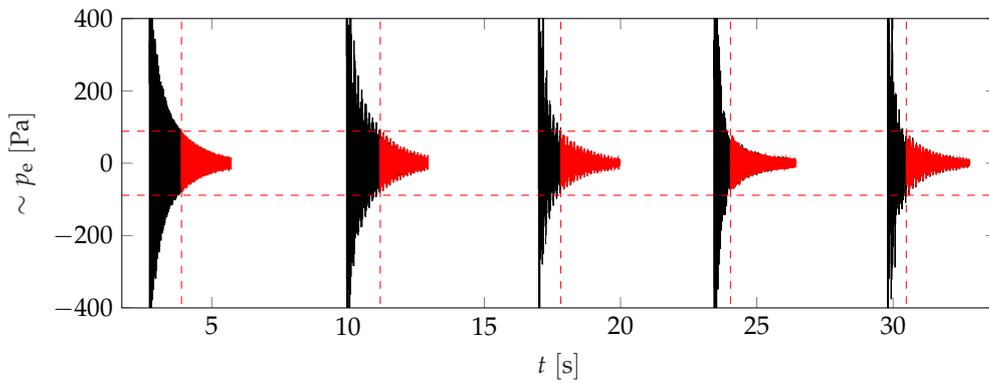


FIGURE 10.31 – Sélection du régime linéaire dans cinq sons de frappe : signaux temporels (le régime linéaire étant indiqué en rouge)

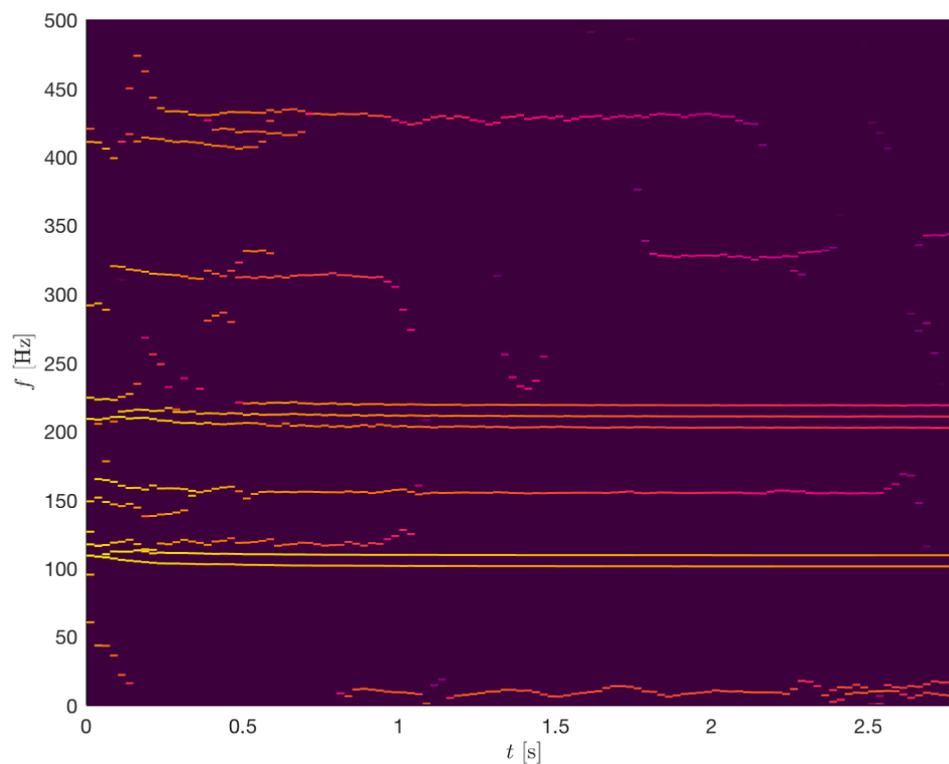


FIGURE 10.32 – Sélection du régime linéaire dans cinq sons de frappe : HR-ogramme d'un des cinq signaux

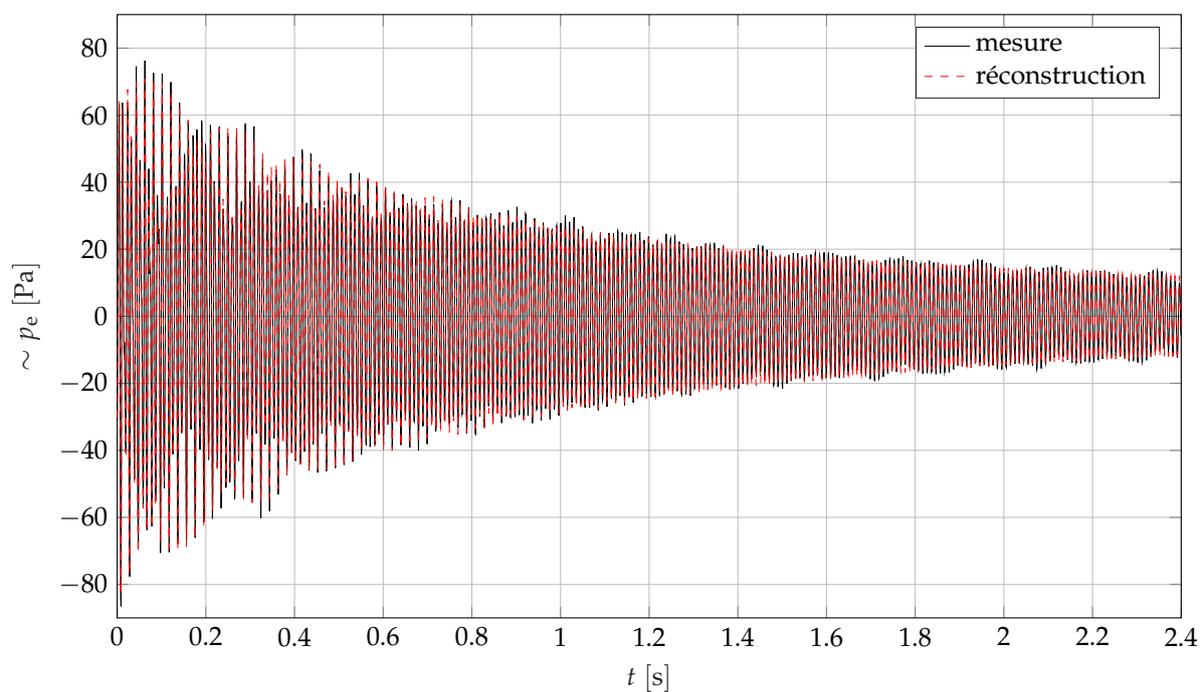


FIGURE 10.33 – Approximation d'un signal  $p_e(t)$  par un modèle EDS à 4 paires de pôles par la méthode ESPRIT

Tableau 10.8 – Approximation par un modèle EDS à 4 paires de pôles du signal de la Figure 10.33 : fréquences et amortissements

$f_q$ [Hz]	$\delta_q$ [1/s]
101,0621	-0,48282
101,3171	-2,702996
154,9807	-2,946332
202,4544	-1,375677

## 10.1.5 Conclusion

En résumé, les paramètres physiques du modèle identifiés dans la présente section sont listés dans le Tableau 10.9.

Tableau 10.9 – Liste des paramètres physiques identifiés

membrane	$a$	rayon	0,162	m
	$\sigma$	densité massique	0,267	kg/m <sup>3</sup>
	$T$	tension	420	N/m
	$\mu$	coefficient de frottement	1,4707	1/s
cavité	$V_0$	volume au repos	0,0195	m <sup>3</sup>
haut-parleur	$m_1$	masse équivalente	0,157	kg
	$c_1$	amortissement équivalent	4,87	kg/s
	$k_1$	raideur équivalente	7,80	kN/m
	$Bl$	facteur de la force de Laplace	17,4	T · m
	$R$	résistance électrique	5,52	$\Omega$
	$L$	inductance électrique	4,37	mH
	$S_1$	surface équivalente	0,0515	m <sup>2</sup>

## 10.2 DISPOSITIF DE CONTRÔLE

Dans la présente section, le dispositif de contrôle est préparé, qui implémentera l'observateur régulateur (9.36)-(9.32). Dans la Sous-section 10.2.1, on spécifie les composants utilisés et précise comment le Coala a été programmé. Le dispositif expérimental complet, incorporant une acquisition de données, est précisé dans la Sous-section 10.2.2. Dans la Sous-section 10.2.3, un système de frappe reproductible est développé et testé.

### 10.2.1 Composants

Le dispositif de contrôle est montré dans la Figure 10.34. Il suit l'architecture typique spécifiée dans la Figure 2.6. On détaille les composants utilisés : le capteur (microphone), le microcontrôleur (Coala) et l'actionneur (haut-parleur).

#### 10.2.1.1 Capteur : microphone

La loi de commande a besoin d'une mesure de la pression dans la cavité. À cet effet, un microphone Bruel & Kjaer 4939 est utilisé, ayant des caractéristiques adaptées aux forts niveaux sonores pouvant apparaître à l'intérieur du tom.

Le microphone est introduit dans la cavité à travers l'un des deux trous latéraux dans la paroi (Fig. 10.35).

#### 10.2.1.2 Actionneur : haut-parleur

Le haut-parleur interne décrit ci-dessus est utilisé comme actionneur du système. Il est commandé *en tension* (et non pas en courant). La loi de commande sortant du Coala passe par un amplificateur de puissance qui multiplie l'amplitude de la tension par un gain 10, avant de l'appliquer aux bornes du haut-parleur (cf. Fig. 10.35).

La loi de commande (9.32) a été développée pour un haut-parleur contrôlé en courant. Or, dans le dispositif décrit, il est contrôlé en tension. D'après l'Équation (10.2) du modèle de Thiele & Small, on a une relation

$$v_1 = Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + Bl\dot{\ell}_1$$

entre le courant  $i_1$  et la tension  $v_1$ . Le courant désiré d'après la loi de commande pourrait être vu comme une valeur cible, pour un asservissement par la tension, ce qui ajouterait une troisième boucle dans la topologie du contrôleur (cf. schéma-bloc 9.27). Toutefois, puisque le Coala permet seulement un calcul à une entrée et une sortie (SISO pour Single Input – Single Output), on propose de négliger le terme  $Ldi_1/dt$  :

$$v_1(t) \approx Ri_1(t) + Bl\dot{\ell}_1(t). \quad (10.6)$$

Cette approximation peut être faite en basse-fréquence puisque le temps caractéristique de la partie électrique du haut-parleur (l'inductance  $L$  étant petite) est plus petit que celui de la partie mécanique. On suppose alors que la dynamique électrique est immédiate, et on néglige la pente  $Ls$  à la droite de la fréquence de résonance dans la fonction de transfert  $H_V/I(s)$  (Fig. 10.7(a)).

#### 10.2.1.3 Microcontrôleur : le Coala

Le contrôleur (observateur (9.36) – régulateur (9.32), avec les constantes physiques identifiées dans la section précédente) est implémenté dans le Coala [191], qui a déjà été introduit dans la Section 2.3.2. Les deux premiers modes axisymétriques ( $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2$ ) seront pris en compte dans le contrôleur.

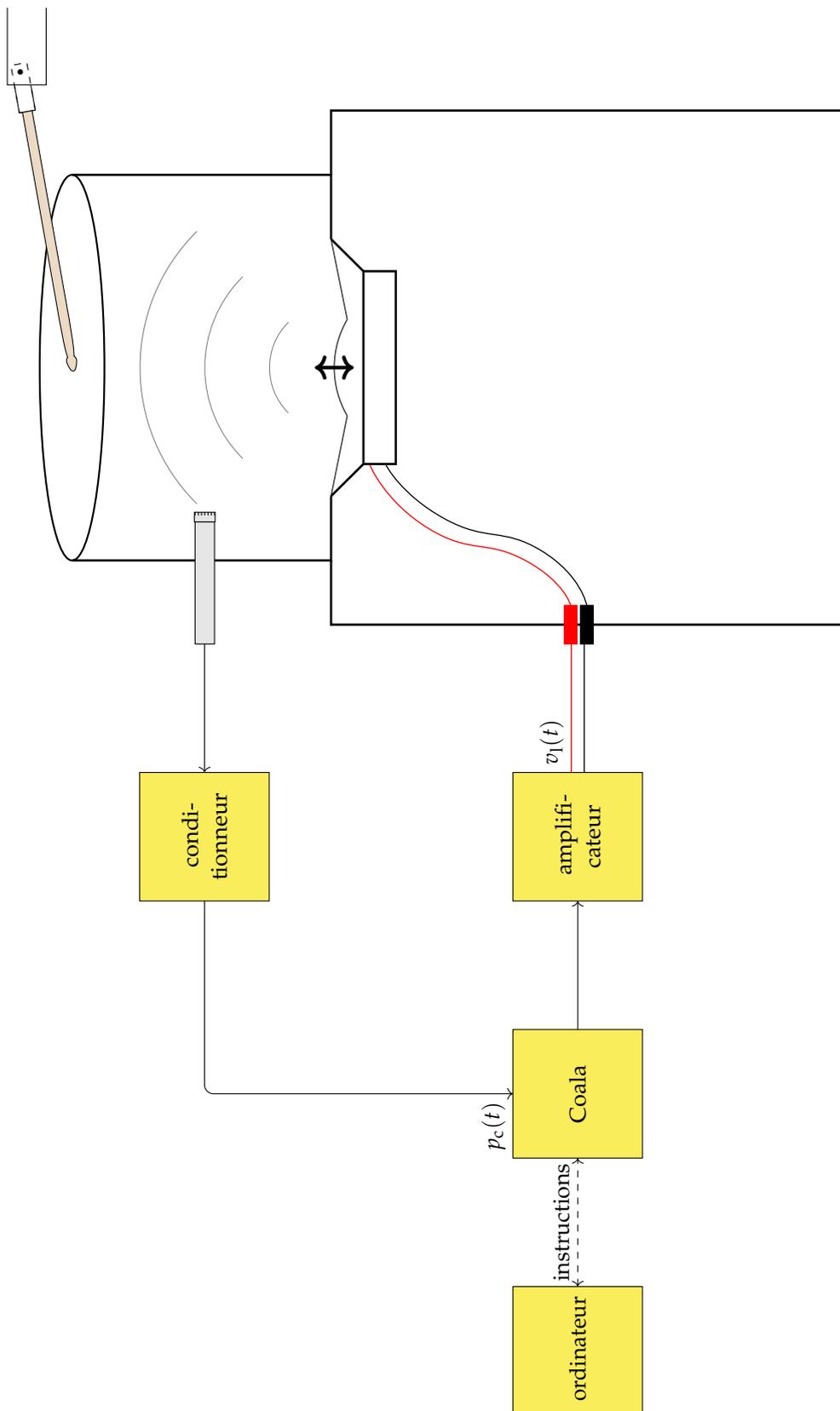


FIGURE 10.34 – Dispositif de contrôle utilisant un microphone comme capteur, le Coala pour implémenter l’algorithme de contrôle, et le haut-parleur comme actionneur



FIGURE 10.35 – Dispositif de contrôle : microphone dans la cavité comme capteur de pression. (Dans cette photo, un autre modèle de microphone est monté à titre indicatif.)

**ARCHITECTURE** L'intérieur du Coala était montré Fig. 2.8. Il contient un ordinateur à carte unique, le BeagleBone<sup>21</sup>, sur lequel tourne un système d'opération Linux avec des extensions temps-réel Xenomai<sup>22</sup> (comme c'est aussi le cas chez le microcontrôleur pour le traitement audio présenté dans [161]).

**PROGRAMMATION** Le Coala peut être programmé en utilisant le logiciel Max MSP, ou par du code C++. Nous utilisons la deuxième option. Le programme exécuté par le Coala est structuré dans un nombre de fichiers contenant des fonctions à une entrée et une sortie, qui pourront être activées séparément ou superposées pendant que le Coala est actif.

On implémente l'observateur-régulateur comme une fonction

```
out = control(in),
```

où  $in$  représente la mesure venant du convertisseur analogique-numérique (la mesure de la pression venant du microphone), et  $out$  le résultat numérique allant à convertisseur numérique-analogique (l'instruction qui est envoyée au haut-parleur). À chaque temps d'échantillonnage, une mesure  $in$  est obtenue, un calcul de la loi de commande est effectué, et l'instruction résultante  $out$  sort du Coala.

L'Équation (9.36) de l'observateur est discrétisée temporellement par la méthode d'Euler explicite :

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{P}\mathbf{Q} \begin{bmatrix} h_1 [y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)]^{\theta_1} \\ \vdots \\ h_n [y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)]^{\theta_n} \end{bmatrix}$$

devient

$$\hat{\mathbf{x}}(t + T_s) = \hat{\mathbf{x}}(t) + T_s \cdot \left[ \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{P}\mathbf{Q} \begin{bmatrix} h_1 [y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)]^{\theta_1} \\ \vdots \\ h_n [y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)]^{\theta_n} \end{bmatrix} \right], \quad (10.7)$$

où  $T_s$  est la période d'échantillonnage,  $y(t)$  est la mesure ( $in$ ) et les variables  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  et  $u(t)$  (représentant la commande en courant  $i_1(t)$ ) ont été sauvegardées au temps d'échantillonnage précédent.

Ensuite, la loi de commande en courant  $i_1(t + T_s)$  (9.32) est calculée. (Elle nécessite la connaissance de la vitesse instantanée de la membrane du haut-parleur  $\dot{l}_1$ . Cette

21. <https://beagleboard.org/>

22. <http://xenomai.org/>

vitesse n'est pas mesurée mais provient de l'observateur temps-fini (10.7).) Finalement, la commande en tension  $u_1(t + T_s)$  (out) est calculée d'après l'Éq. (10.6).

On précise que les formules de l'observateur-régulateur (9.36)-(9.32) avaient été exprimées dans le Chapitre 9 pour des variables adimensionnées. Pour l'implémentation pratique, un redimensionnement des amplitudes des signaux et du temps a été effectué.

Les paramètres de l'observateur utilisés sont  $\theta = 0,86$  et

$$\begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 17.5 & 30 & 33.0625 & 22.125 & 8.125 \end{bmatrix}$$

(obtenus après des tests dans le but de concilier rapidité de convergence et robustesse au bruit). Les paramètres du régulateur sont  $\bar{\alpha} = 0,9$ ,  $\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = 0,3$ ,  $\bar{k}_3 = 2\beta_2$ ,  $\bar{k}_4 = 2\frac{\zeta}{\beta_2}$ .

Pendant la programmation de la fonction `control`, il faut apporter une attention particulière au fait d'allouer de la mémoire pour stocker des variables intermédiaires<sup>23</sup>, ce qui ne peut se faire en temps réel. De plus, les calculs non linéaires présents dans les expressions de l'observateur-régulateur (9.36)-(9.32) étant un peu plus lents que les calculs linéaires précédemment implémentés sur le Coala (cf. [22] et d'autres cas mentionnés dans la Sous-section 2.3.2), une période d'échantillonnage de  $T_s = 100\mu\text{s}$  (plus grande que d'habitude) sera utilisée partout. Ceci correspond à une fréquence d'échantillonnage de  $f_s = 10\text{kHz}$  (plus grand d'un facteur dix [79] par rapport aux fréquences d'intérêt du contrôleur, notamment le mode 02 vers 200Hz).

La fonction `control` est programmée sur un ordinateur qui communique avec le Coala à travers une connexion sans fil depuis un terminal. Après compilation, le Coala est prêt à effectuer le calcul défini en temps réel.

**UTILISATION** Une fois la programmation et la compilation terminées, l'utilisation du Coala en temps réel se fait depuis une page web de l'ordinateur (Fig. 10.36). Nous nous en servons pour démarrer ou arrêter la boucle de contrôle temps-réel, pour faire varier un gain multiplicatif à la sortie (pour des raisons de débogage), et pour activer si besoin la sauvegarde des variables internes du Coala (après l'arrêt de la boucle temps-réel, pour des raisons de monitoring ou débogage<sup>24</sup>).

### 10.2.2 Dispositif expérimental complet

À partir du dispositif de contrôle précisé dans la sous-section précédente (Fig. 10.34), on construit le dispositif expérimental complet qui incorpore des possibilités d'acquisition de données (schématisé dans la Figure 10.37)

Comme mentionné, le Coala permet d'exporter des variables internes comme un fichier text : l'évolution de ses variables d'entrée in (mesure de la pression  $p_c(t)$ ) et de sortie out (loi de commande  $v_1(t)$  divisé par 10), ainsi que l'évolution de l'observateur d'état  $\hat{x}(t)$ .

En plus, un microphone a été placé proche du milieu de la membrane (Fig. 10.38), qui sera utilisé pour évaluer l'effet du contrôle sur le son du tom. La mesure de la pression de ce microphone,  $p_e(t)$ , ainsi que celle du microphone dans la cavité utilisé comme capteur de la boucle de contrôle,  $p_c(t)$  et la tension électrique  $v_1(t)$  appliquée au haut-parleur sont acquises.

Dans la section prochaine, le développement d'un système de frappe reproductible est détaillé. Ensuite, le dispositif expérimental complet est installé dans la chambre anéchoïque de l'Ircam (Figure 10.39 - Tableau 10.10) pour effectuer les tests décrits dans la Section 10.3. La chambre anéchoïque a la forme d'un pavé droit de volume utilisable de  $5.7 \times 4.3 \times 4.2\text{m}^3$  avec les parois couvertes de prismes triangulaires de néoprène et fournit un niveau sonore de fond d'environ 18.5 dB SPL (A) [54].

23. Ou la sauvegarde de variables pour les exporter après l'exécution de la boucle temps-réel pour des raisons de monitoring ou débogage.

24. Un fichier text est créé, qui peut être lu et affiché par un script PYTHON.

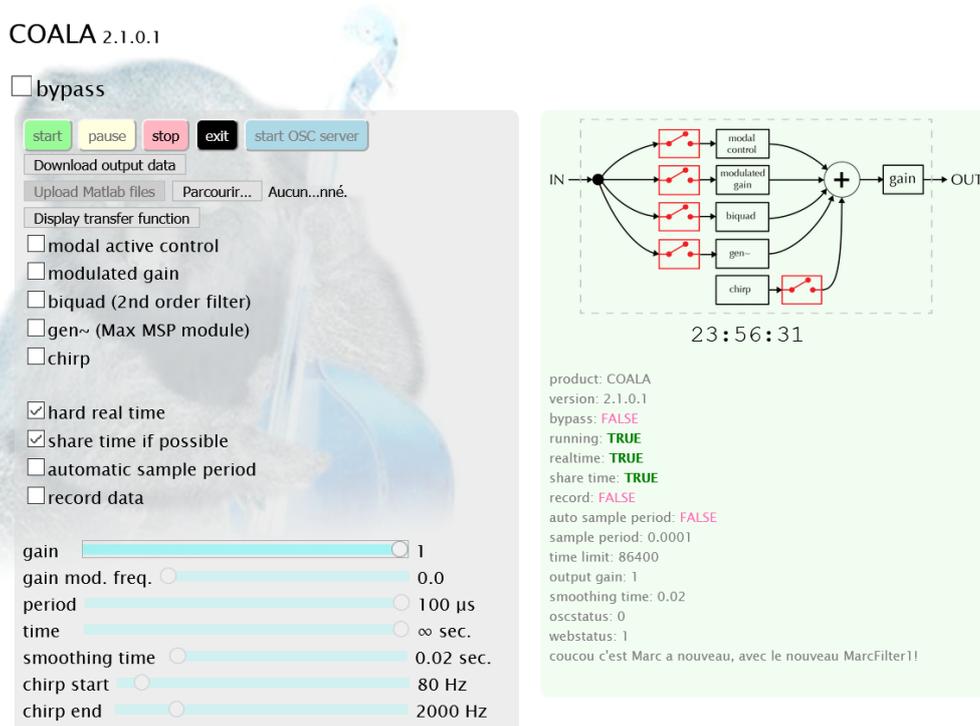


FIGURE 10.36 – Commande à distance de la boucle temps-réel du Coala depuis une page web

Tableau 10.10 – Dispositif expérimental complet en chambre anéchoïque : liste des instruments

Carte d'acquisition	National Instruments 9234
Microphone au-dessus de la cavité	Bruel & Kjaer 4191
Microphone dans la cavité	Bruel & Kjaer 4393
Conditionneur des microphones	Nexus 2690
Microcontrôleur	Coala (v1) « Alto »
Amplificateur du haut-parleur	Newtons4th Ltd LPA05
Haut-parleur	Raveland AXX 1212

### 10.2.3 Système de frappe reproductible

Le tom sera excité par un coup de baguette au milieu de la membrane. Afin de pouvoir comparer le cas sans contrôle avec le cas avec contrôle, il est indispensable de maîtriser la force et le point d'impact le mieux possible afin de garantir la reproductibilité. En effet, si l'on frappe manuellement à plusieurs reprises, il y a des variations de force et de point d'impact, ce qui influencera le degré d'excitation des différents modes de la membrane et le degré de présence d'éventuels phénomènes non linéaires.

Afin de pouvoir mieux contrôler les conditions initiales, nous proposons une excitation par un support de baguette<sup>25</sup> montré Figure 10.40. Ce support a été adapté du support de mailloche développé dans la thèse de Marguerite Jossic [121, Fig. 2.15] pour exciter un gong. Pour pouvoir l'utiliser avec la baguette<sup>26</sup>, une pièce d'ajustement de diamètre a été fabriquée en impression 3D (cf. la Sous-section D.2.2 en annexe).

25. On peut mentionner un actionneur piézoélectrique ou un marteau de piano (p.ex. [192] pour le cas d'un banjo) comme manières alternatives d'excitation.

26. La baguette pèse un peu plus lourd que la mailloche, mais son centre de gravité est plus loin de son extrémité touchant la membrane.

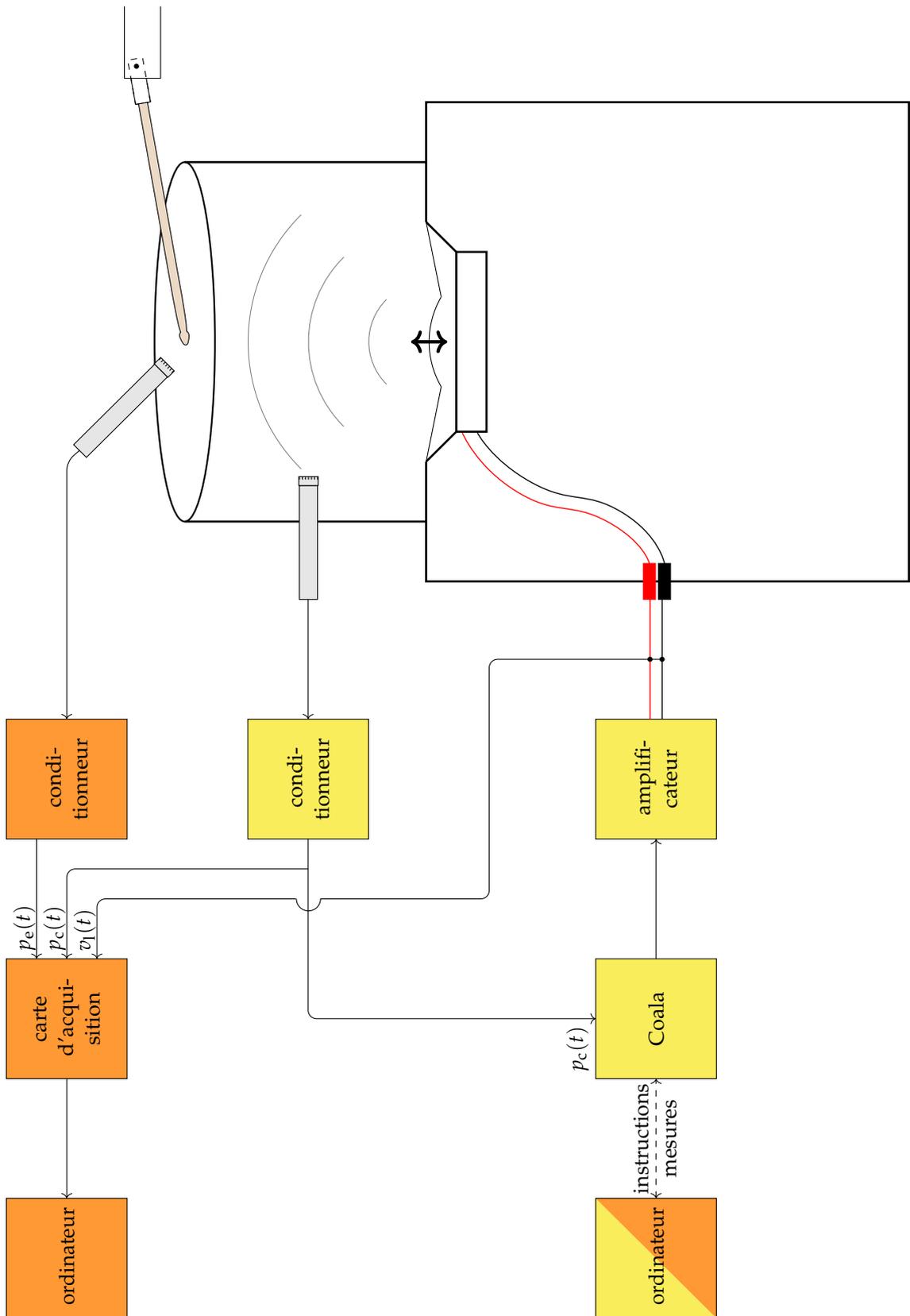


FIGURE 10.37 – Dispositif expérimental complet : schéma



FIGURE 10.38 – Microphone au-dessus de la membrane qui sera utilisé pour évaluer l'effet du contrôle au point milieu de la membrane, en outre du microphone dans la cavité utilisé comme capteur dans la boucle de contrôle.

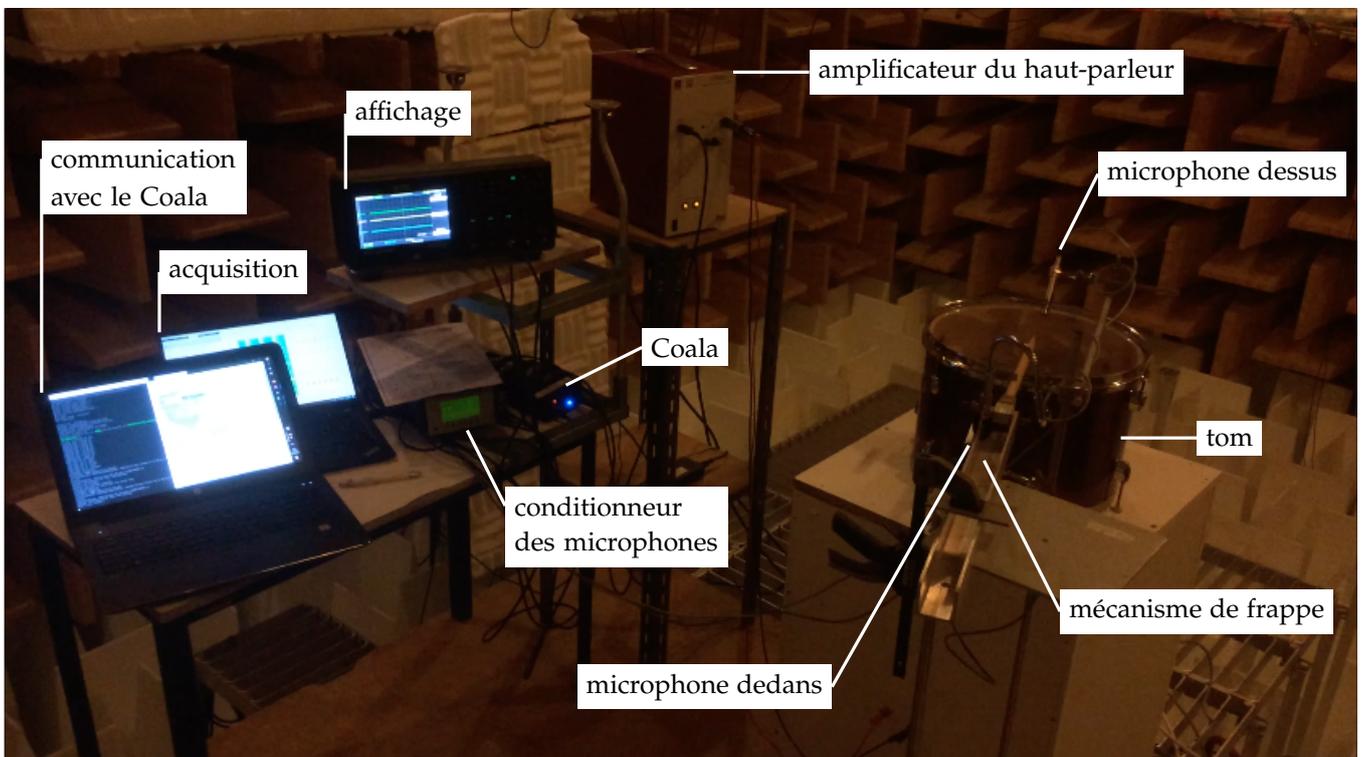


FIGURE 10.39 – Dispositif expérimental complet : installation en chambre anéchoïque



FIGURE 10.40 – Support-baguettes monté dans le dispositif expérimental dans le but d’obtenir une frappe reproductible au milieu de la membrane

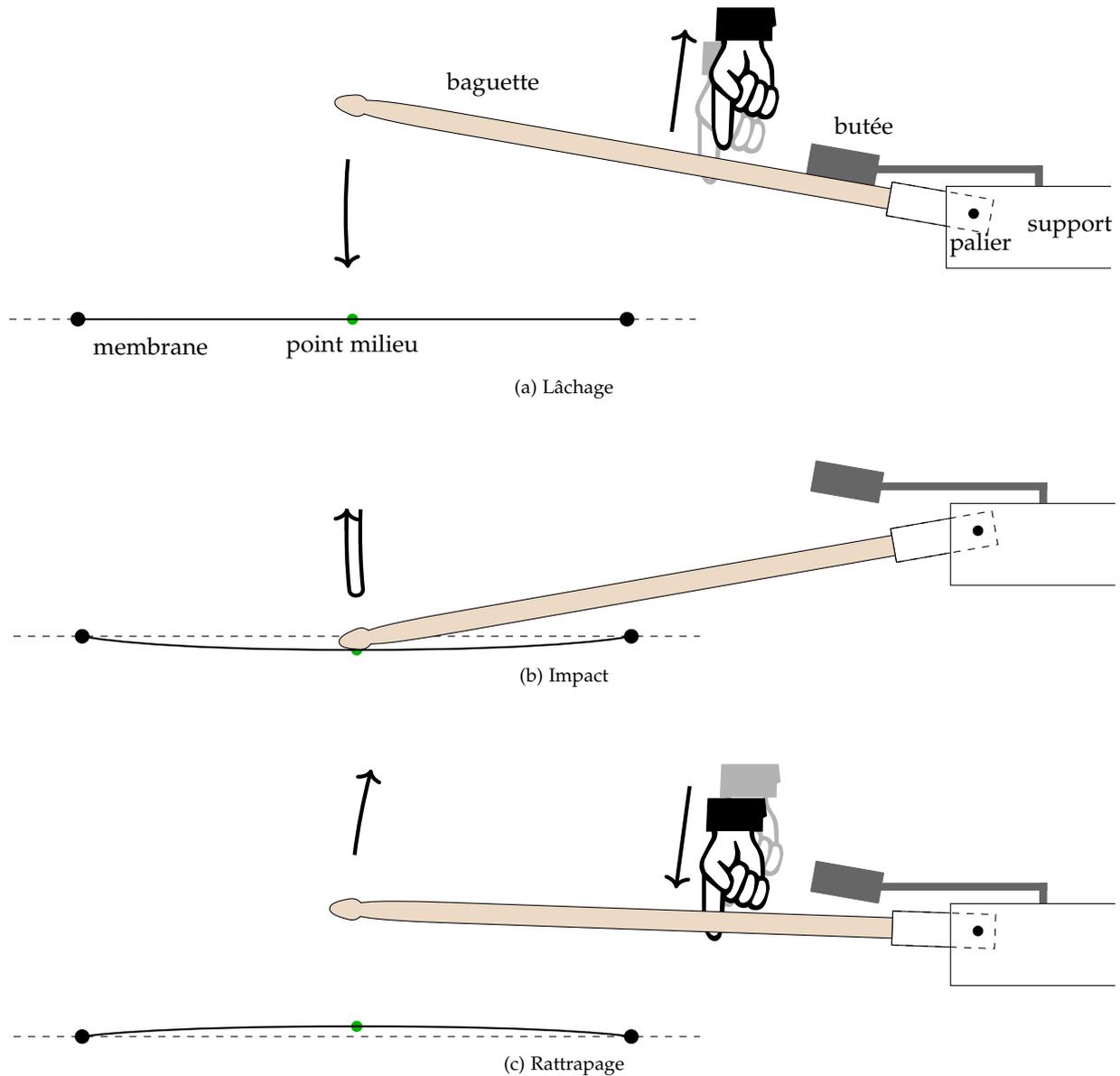


FIGURE 10.41 – Système de frappe reproductible

La manière de frappe utilisée est schématisée dans la Figure 10.41 et consiste des étapes suivantes. Tout d'abord, le pied de support du système de frappe est positionné de telle manière à ce que la baguette se trouve au repos au milieu de la membrane.

1. LÂCHAGE – La baguette est tenue par un doigt de la main contre une butée préalablement fixée à un angle au choix et a donc une certaine énergie potentielle due à la gravité. En retirant très vite le doigt, la baguette tombe.
2. IMPACT – La baguette réalise un impact sur le milieu de la membrane, l'excitant, et rebondit.
3. RATTRAPAGE – On rattrape la baguette montante avec le même doigt pour éviter qu'elle ne redescende une deuxième fois.

En cas d'échec, on obtient deux ou plus de rebonds, et on est obligé de réessayer.

L'efficacité de ce système est évaluée en donnant 5 coups de la manière décrite ci-dessus, puis en donnant 5 coups avec une baguette tenue dans la main, en essayant de viser le milieu de la membrane et de frapper avec une même force à chaque fois.

Sur la Figure 10.42, on voit les débuts des mesures de la pression dans la cavité  $p_e$  du tom, où le temps commence au début de la frappe. On voit que les signaux temporels successifs pour le cas avec le support-baguette sont à peine distinguables, ce qui indique une bonne reproductibilité des conditions initiales. En revanche, les signaux temporels successifs pour le cas manuel connaissent une plus grande variabilité. Sur la même Figure, la densité spectrale de puissance [260] de ces signaux (de durée 1,8s) est indiquée, à titre indicatif. On y voit aussi qu'il y a moins de différences entre les 5 signaux pour le cas du support-baguette.

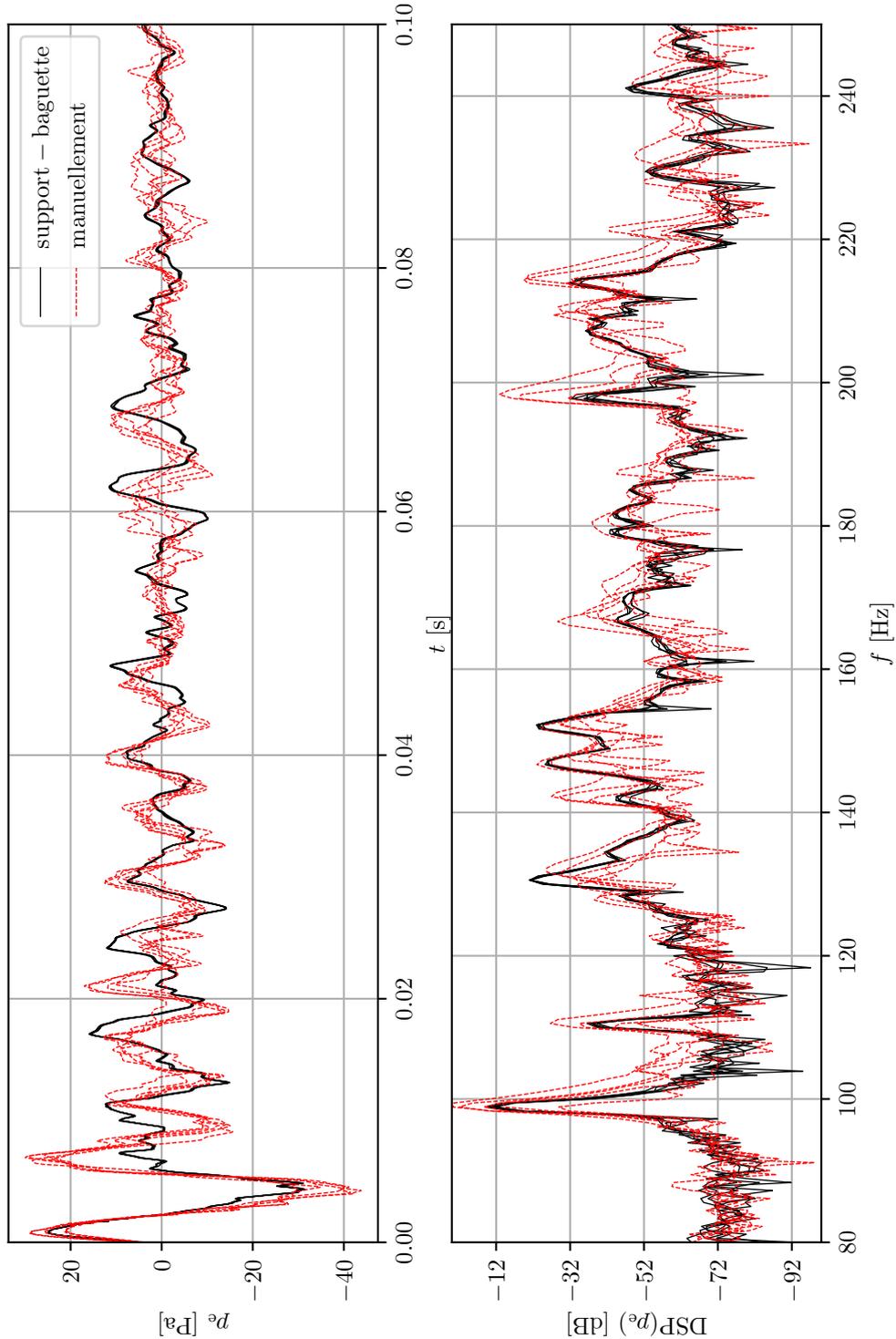


FIGURE 10.42 – Efficacité du support-baguette. Condition non anéchoïque.

### 10.3 ÉVALUATION DU CONTRÔLE

On utilise le dispositif expérimental complet décrit dans la section précédente, excité avec le système de frappe reproductible. Deux tests sont effectués : une évaluation du calcul numérique du contrôleur non linéaire (Sous-section 10.3.1) et une évaluation de la possibilité de changer la fréquence des premiers deux modes axisymétriques de la membrane par le contrôleur (Sous-section 10.3.2).

#### 10.3.1 Méthode numérique régularisant

Le contrôleur-observateur avec un calcul par la méthode d'Euler explicite est activé et un coup est donné avec le support-baguettes. L'évolution des variables internes du Coala est montrée Figure 10.43.

On observe (et entend) un bruit haute-fréquence qui persiste, même quand la pression dans la cavité a été atténuée beaucoup. On suppose que c'est dû à cause de la raideur des lois non linéaires en temps fini. C'est la raison pour laquelle on implémente une linéarisation locale autour de 0 des expressions non linéaires (cf. la Sous-section 7.2.1) pour un intervalle de l'argument de  $[-10^{-5}, 10^{-5}]$  pour l'observateur et  $[-10^{-3}, 10^{-3}]$  pour le régulateur. Avec cette adaptation, le bruit haut-fréquence est enlevé (Fig. 10.44, et une comparaison Fig. 10.45 où l'on voit le *chattering* pour le cas sans linéarisation locale).

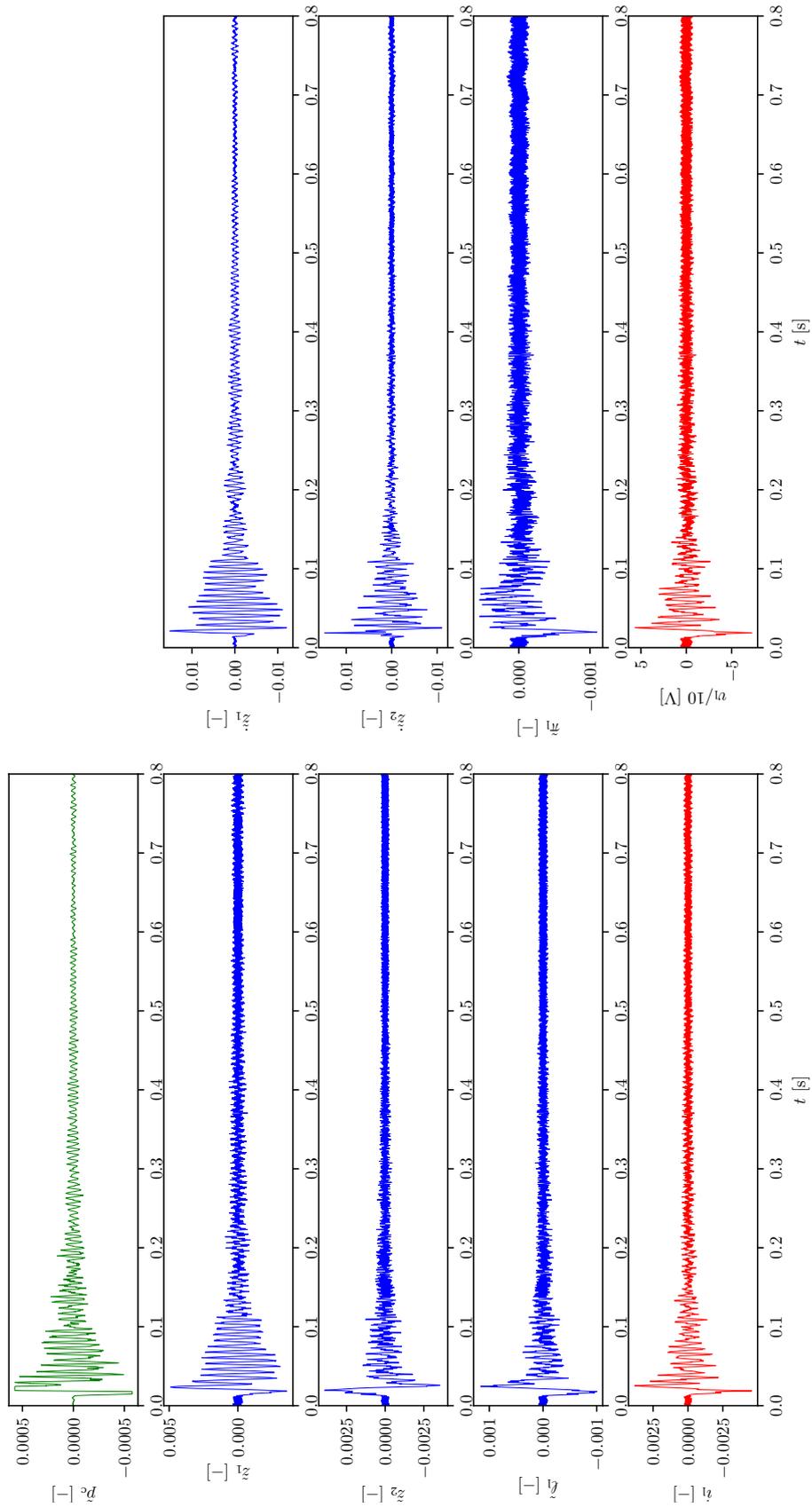


FIGURE 10.43 – Évaluation de la méthode numérique : variables internes du Coala (mesure de pression en vert, état de l’observateur en bleu, loi de commande en courant puis en tension en rouge) pour un calcul par la méthode d’Euler explicite. Condition non anéchoïque.

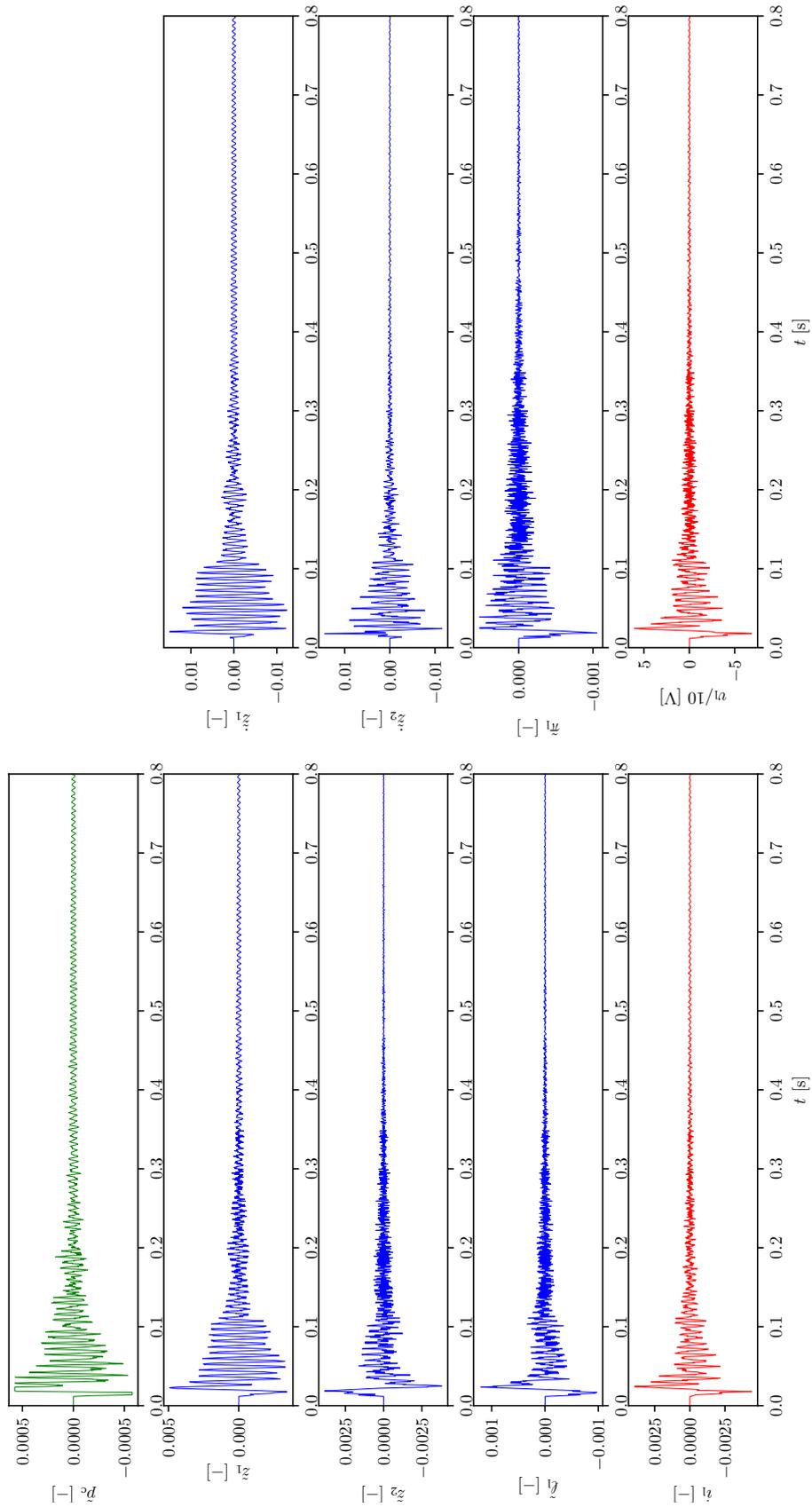


FIGURE 10.44 – Évaluation de la méthode numérique : variables internes du Coala (mesure de pression en vert, état de l’observateur en bleu, loi de commande en courant puis en tension en rouge) pour un calcul par la méthode d’Euler explicite avec une linéarisation locale autour de l’origine. Condition non anéchoïque.

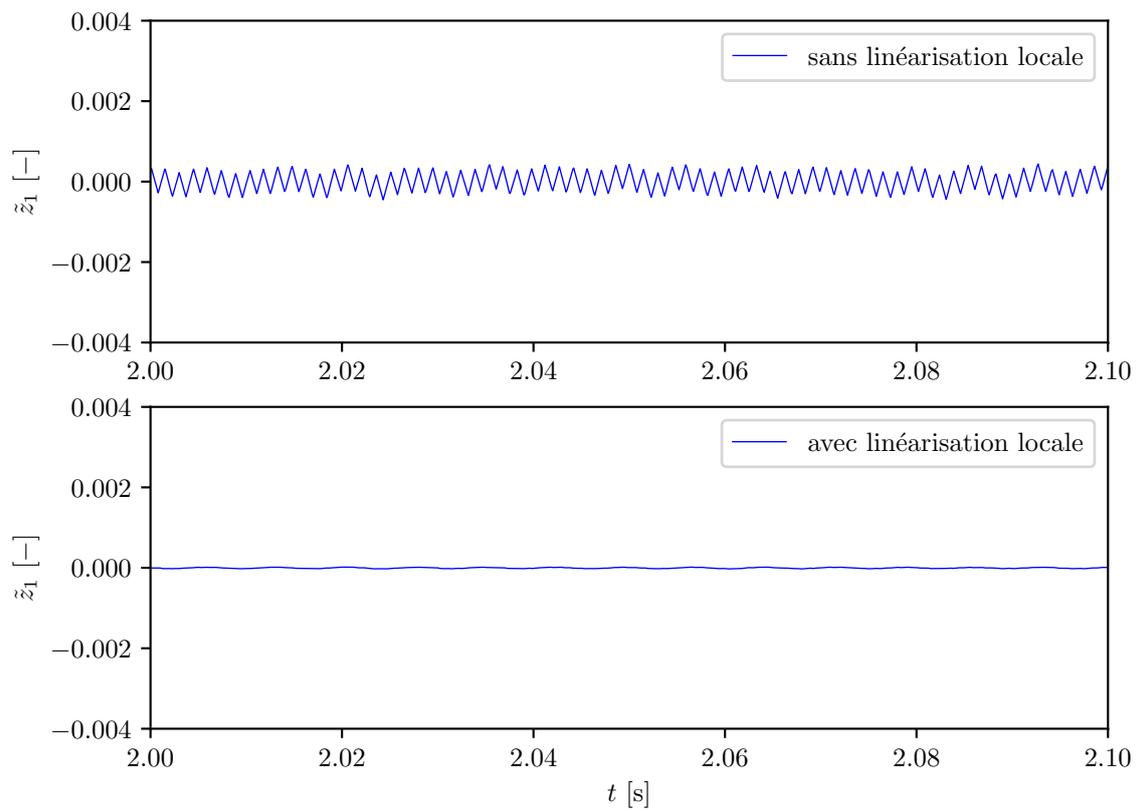


FIGURE 10.45 – Évaluation de la méthode numérique : comparaison d’une partie de l’évolution temporelle de l’estimation de  $z_1$  de l’observateur calculée par la méthode d’Euler explicite, avec/sans linéarisation locale.

### 10.3.2 *Changement de fréquence*

Finalement, on évalue si le contrôleur proposé permet en effet de modifier des fréquences de vibration de la membrane supérieure. Les deux premiers modes axisymétriques ( $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$ , correspondant aux modes 01 et 02) sont pris en compte dans l'implémentation sur le Coala.

#### 10.3.2.1 *Influence de la propagation dans le fût sur la stabilité*

Dans un premier temps, plusieurs placements de pôles visant à modifier légèrement la fréquence du deuxième mode avaient été calculés, mais il s'est avéré que l'implémentation sur le Coala menait dans certains cas à une instabilité du contrôle. En même temps, il a été possible d'obtenir un contrôle stable avec le Coala pour certains paramètres de placement de pôles, pour lesquels le modèle numérique était instable. Inspiré par cette observation, on a supposé que la non-prise en compte (dans le modèle utilisé dans le contrôleur) de la propagation dans le fût entre le haut-parleur et la membrane supérieure en était la cause principale. En effet, un petit test mentionné en Sous-section D.3.1 illustre qu'il existe un déphasage entre le haut-parleur et la membrane supérieure qui dépend de la fréquence (longueur d'onde).

À cause de cette observation que le modèle est insuffisamment détaillé pour permettre une utilisation correcte des paramètres du placement de pôles, on a choisi de procéder à une série de mesures variant dans le Coala ces paramètres, sans pour autant vérifier par le modèle du tom à quelle cible fréquentielle pour les modes 01 et 02 ils correspondraient.

#### 10.3.2.2 *Changement de fréquence observé*

Pour les cas de paramètres de placement de pôles donnant lieu à un contrôle stable suite à une frappe au milieu de la membrane par le système de frappe reproductible, on a mesuré la pression  $p_e$  au dessus du point milieu dans le but de comparer le son obtenu au son obtenu sans contrôle, dont les analyses sont discutées ici.

**SIGNAL TEMPOREL** Dans la Figure 10.46, on voit le début de l'évolution temporelle de signaux de pression extérieure  $p_e$  pour deux ensembles de paramètres de placement de pôles, et pour le cas sans contrôle. Comme montré précédemment, le système de frappe reproductible permet d'obtenir des résultats très similaires quand on répète une même expérience. En comparant les trois cas affichés, on peut conclure que le contrôleur a une influence nette sur l'évolution temporelle de la vibration de la membrane supérieure.

**DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE** En comparant la densité spectrale de puissance pour un nombre de mesures de la pression  $p_e$  avec des paramètres de placement de pôles différents, on peut voir si le contenu fréquentiel des signaux est influencé (Fig. 10.47). Le cas sans contrôle est affiché en bleu marin, et il connaît un pic en dessous de 50Hz, correspondant à la fréquence de résonance du haut-parleur. En comparant les cas avec contrôle avec le cas sans contrôle, on voit que des pics comme celui à 100Hz (mode non axisymétrique 11) ne sont pas du tout impactés par le contrôle. À d'autres endroits, comme dans les régions des modes axisymétriques 01 et 02 visés par le contrôle, mais aussi ailleurs, des décalages de fréquences sont observés (cf. la Figure 10.48 qui se focalise sur la plage fréquentielle visée par le contrôleur).

**HR-OGRAMME** À partir des Figures 10.47-10.48, on peut sélectionner des mesures pour lesquelles un changement de fréquence net a été observé, et calculer leur HR-ogramme (spectrogramme à haute résolution, cf. ci-dessus) pour évaluer l'évolution temporelle des fréquences.

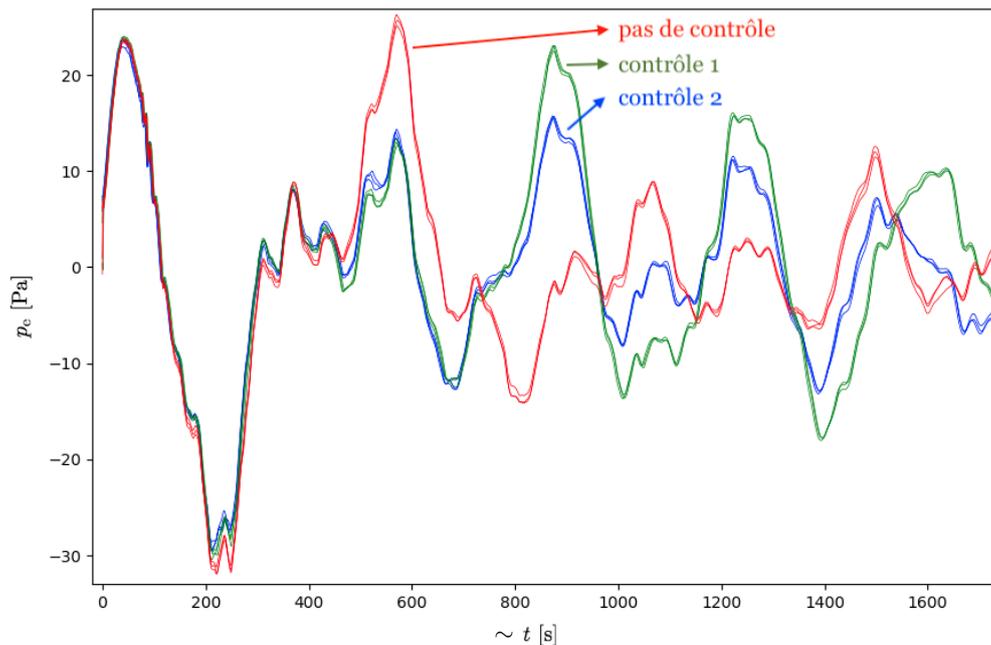


FIGURE 10.46 – Comparaison des signaux de pression extérieure  $p_e$  pour deux ensembles de paramètres de placement de pôles, et le cas sans contrôle. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition non anéchoïque.

Un exemple est montré Figure 10.49, où l'on regarde la densité spectrale de puissance et le HR-ogramme en détail autour de 150Hz (mode 01). La méthode HR y a identifié deux modes à fréquences proches. Dans le cas sans contrôle, ces fréquences ne sont pas stables et les modes sont atténués assez vite. Dans le cas des deux contrôleurs montrés, les contributions des modes durent plus longtemps. Chez le premier contrôleur, une baisse des deux fréquences de ca. 1Hz est obtenue, et les nouvelles fréquences restent stables dans le temps. Chez le deuxième contrôleur, une hausse de ca. 1Hz par rapport au cas sans contrôle est obtenue, et les nouvelles fréquences varient dans le temps.

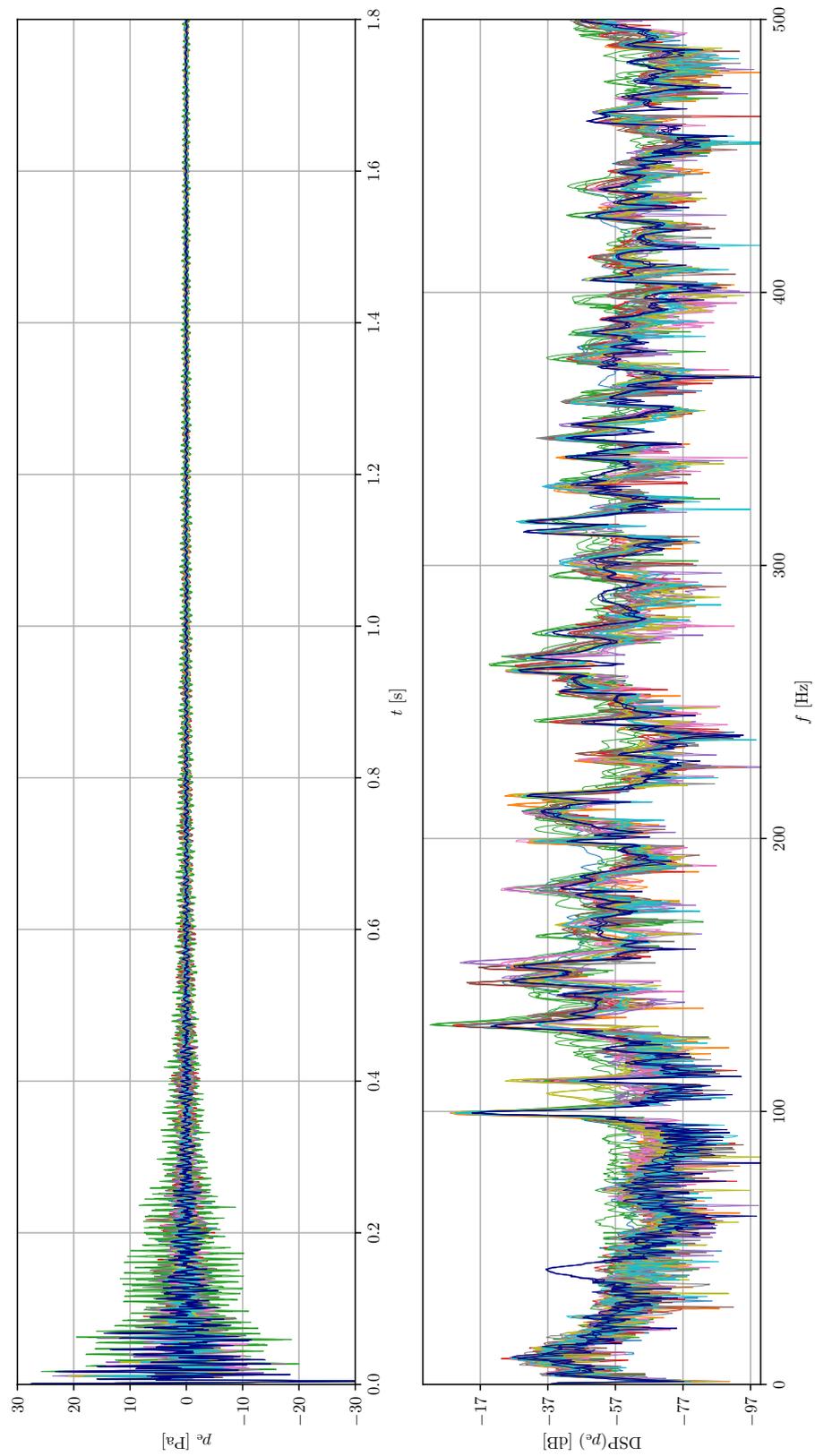


FIGURE 10.47 – Densité spectrale de puissance pour un nombre de mesures de  $p_e$  avec des paramètres de placement de pôles différents. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition non anéchoïque.

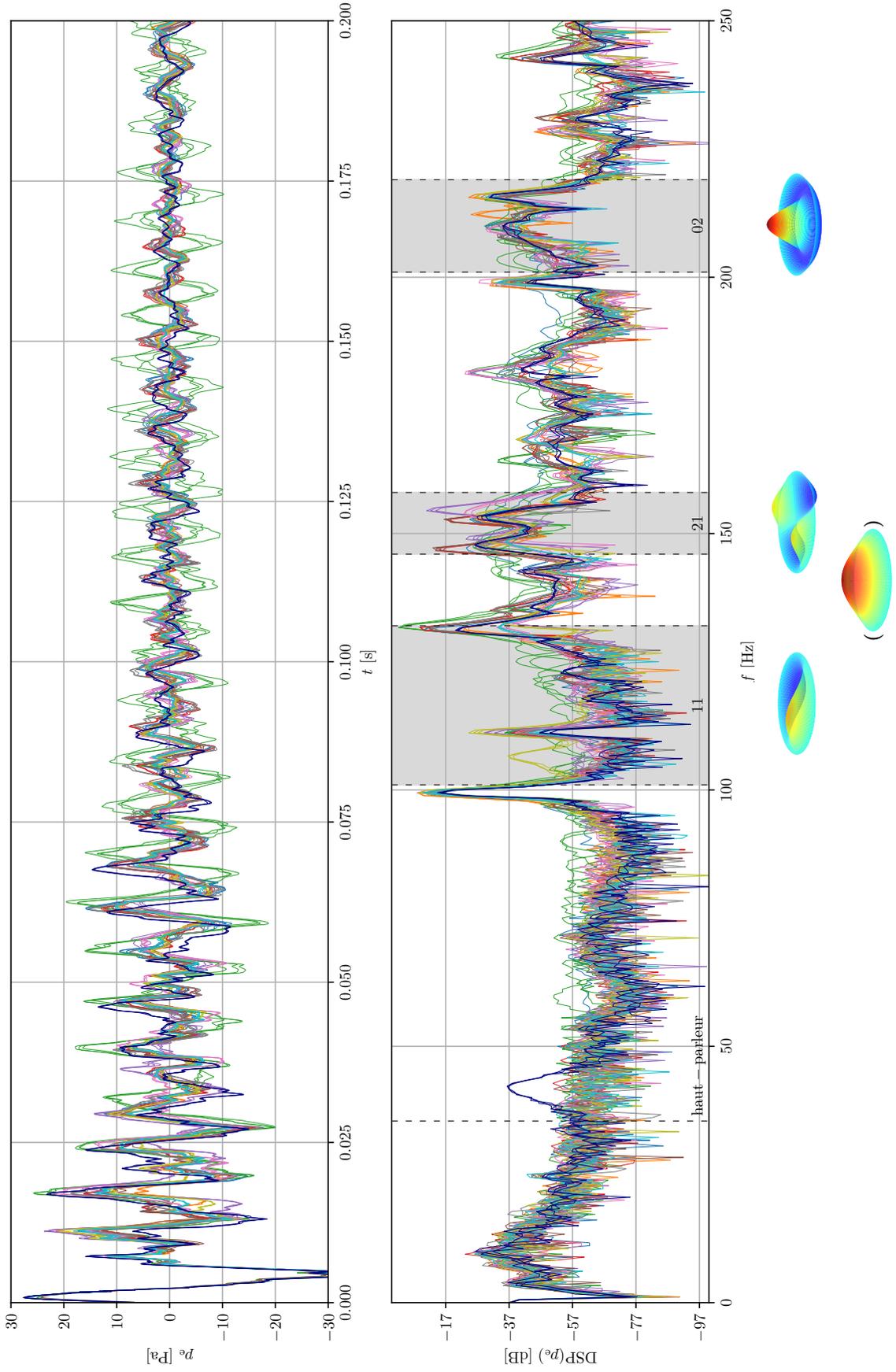


FIGURE 10.48 – Détail de la Figure 10.47. Les plages fréquentielles des modes expérimentalement observés par les figures de Chladni sont indiquées en gris.

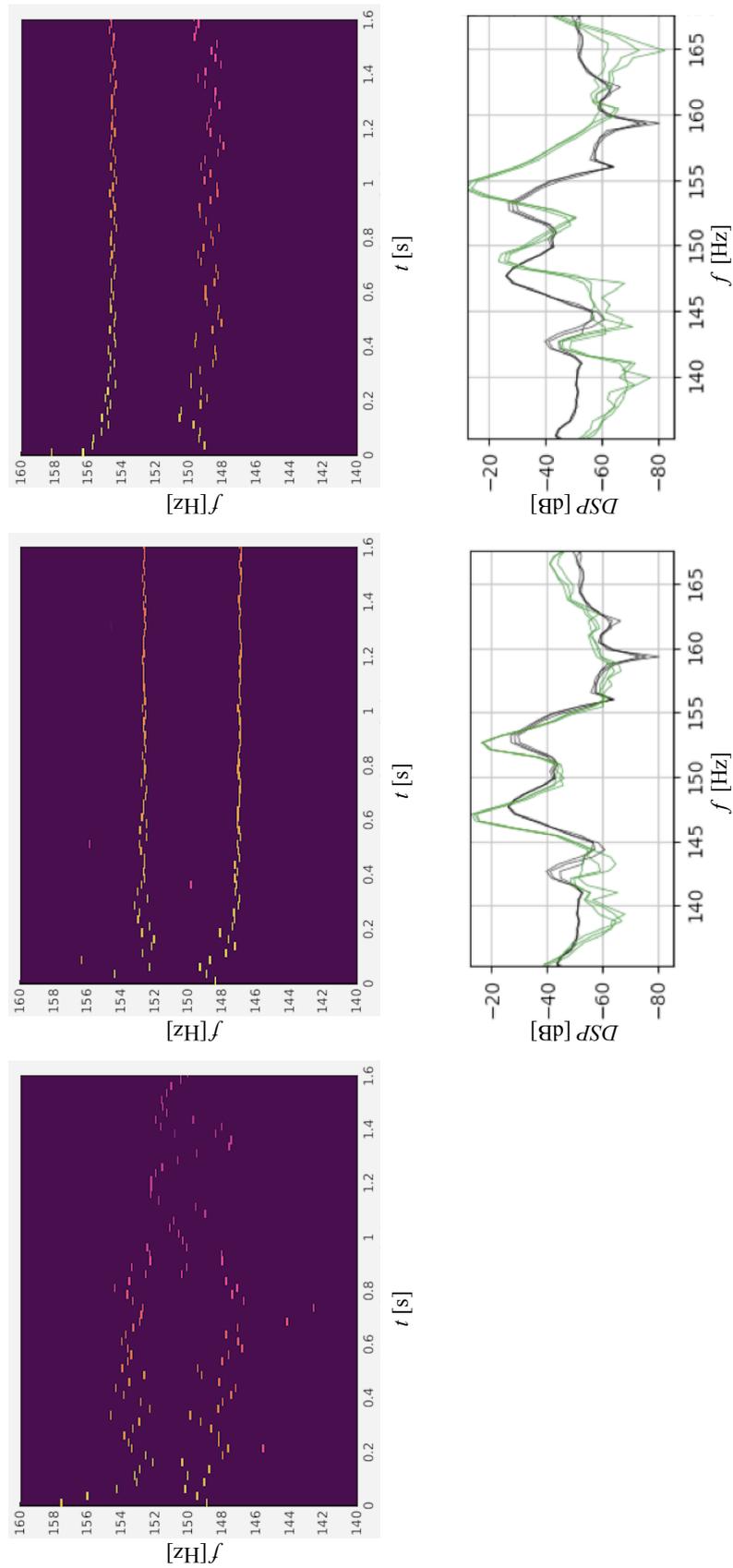


FIGURE 10.49 – Détails des HR-ogrammes pour une mesure de  $p_e$  sans contrôle, avec un premier contrôle (paramètres :  $k_{1a} = -0,5, k_{1b} = k_{2a} = k_{2b} = 0$ ) et un deuxième contrôle (paramètres :  $k_{1a} = k_{2a} = +0,5, k_{1b} = k_{2b} = 0$ ). La DSP des cas contrôlés est affichée en vert, du cas non contrôlé en noir.

**CHAMBRE ANÉCHOÏQUE** Ces mesures sont répétées en chambre anéchoïque. Sur les densités spectrales de puissance (Figures 10.50-10.51), on obtient un résultat pareil. Toutefois, ici, il semble que des pics comme celui à 100Hz, qui ne changeait pas dans les Figures 10.47-10.48, semblent aussi pouvoir être déplacés.

Les HR-ogrammes de deux cas contrôlés sont montrés Figures 10.52-10.53.

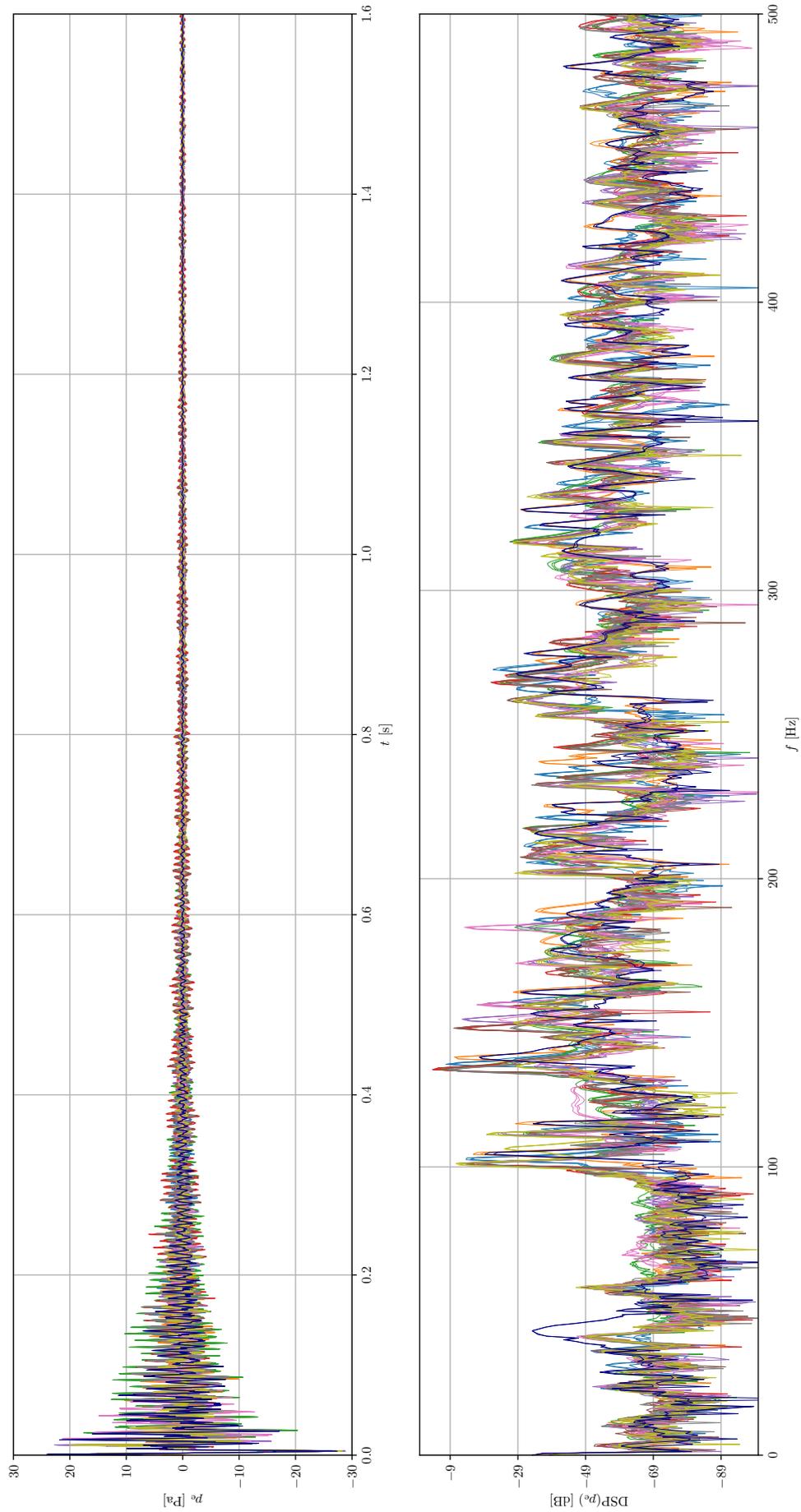


FIGURE 10.50 – Densité spectrale de puissance pour un nombre de mesures de  $p_e$  avec des paramètres de placement de pôles différents. Chaque mesure est répétée 3 fois. Condition anéchoïque.

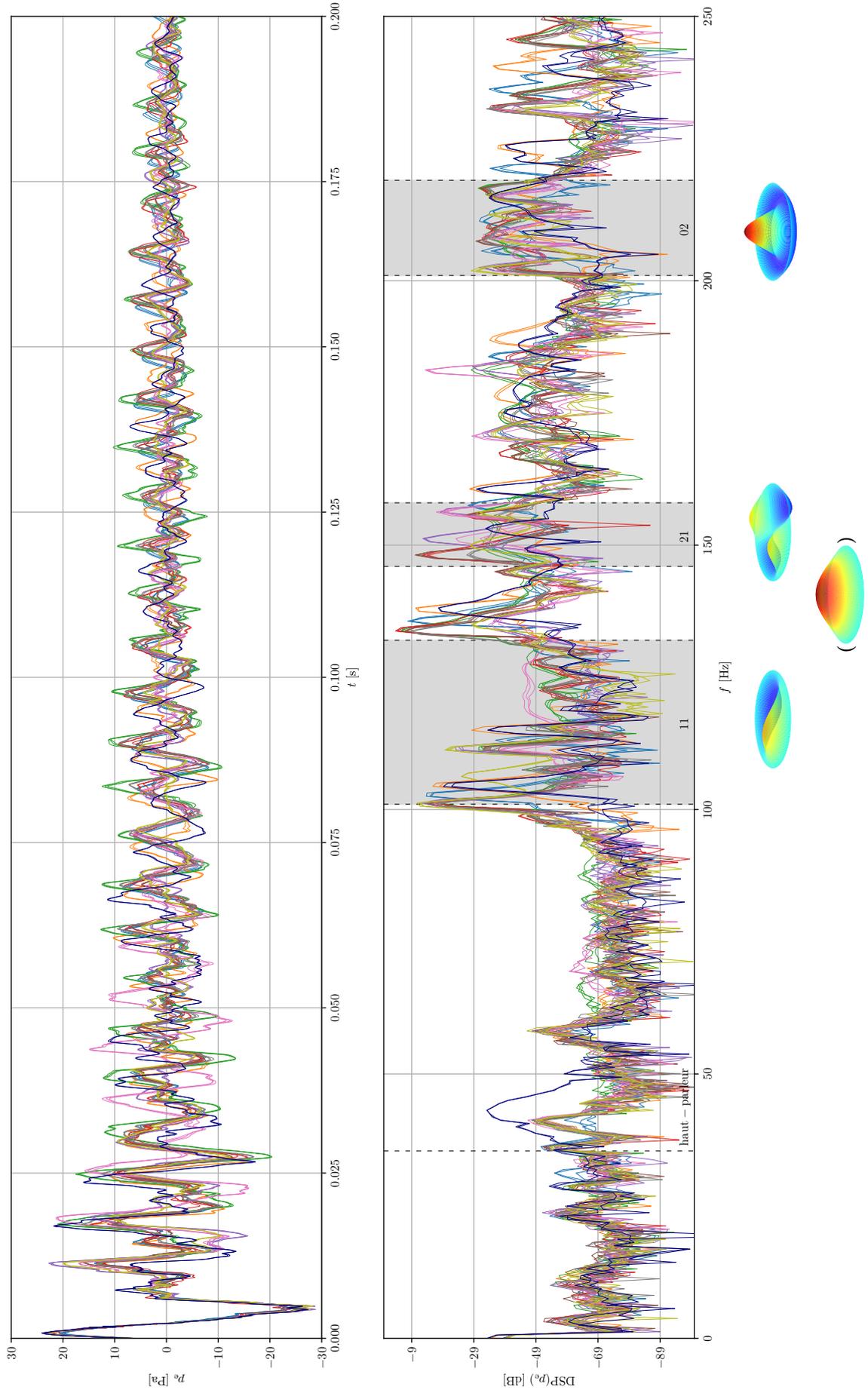


FIGURE 10.51 – Détail de la Figure 10.50. Les plages fréquentielles des modes expérimentalement observés par les figures de Chladni sont indiquées en gris.

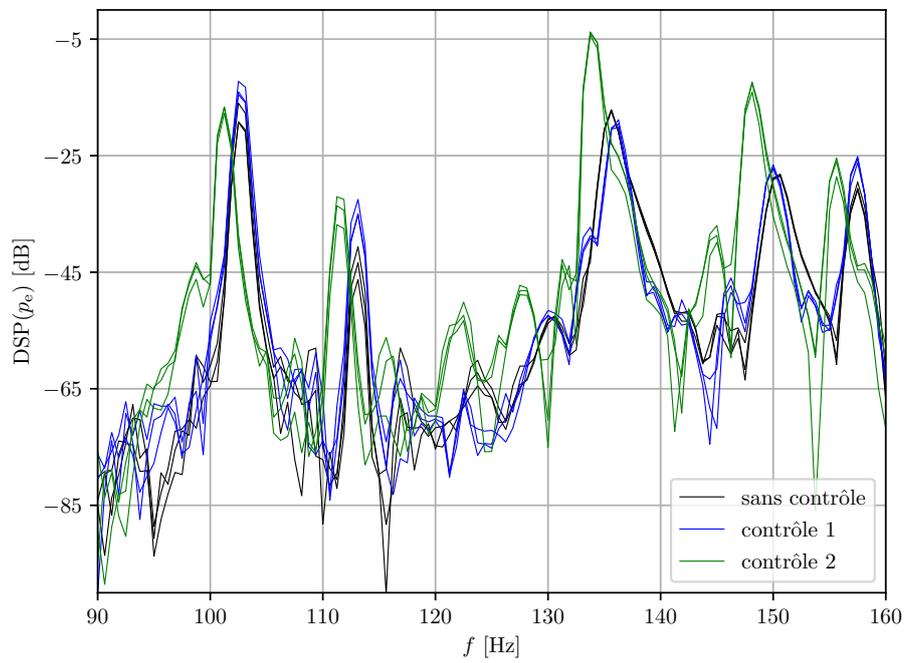


FIGURE 10.52 – Détail des densités spectrales de puissance pour le cas non contrôlé et deux cas contrôlés (contrôle 1 avec  $k_{2a} = 0,5, k_{1a} = k_{1b} = k_{2b} = 0$ , contrôle 2 avec  $k_{2a} = -0,5, k_{1a} = k_{1b} = k_{2b} = 0$ ). Condition anéchoïque.

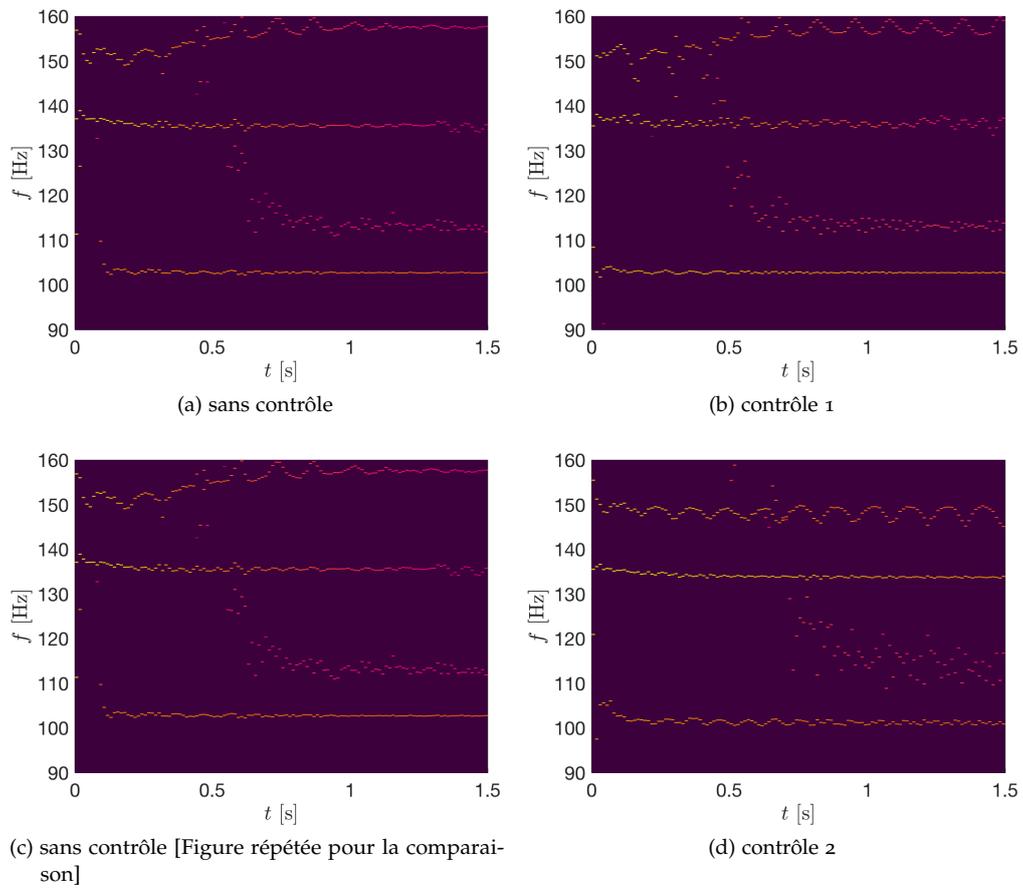


FIGURE 10.53 – Détails des HR-ogrammes correspondants à la Fig. 10.52

## 10.4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Après une identification des paramètres physiques du tom augmenté et une implémentation de la loi de commande en temps fini sur le Coala (avec la méthode numérique déraidissante), des tests ont été effectués pour évaluer la performance quant à un changement ciblé des deux premiers modes axisymétriques de la membrane supérieure de l'instrument.

Il s'est avéré que le modèle utilisé par le contrôleur ne correspond pas très bien avec la réalité. Nous supposons que c'est en premier lieu dû à la non-prise en compte de la propagation du son dans la cavité, entre le haut-parleur et la membrane supérieure, qui a une influence importante sur la performance et la stabilité du système contrôlé.

Pour cette raison, il faudrait affiner le modèle utilisé par le contrôleur afin de mieux prendre en compte la réalité physique.

- En premier lieu, il faut prendre en compte la propagation des ondes sonores dans la cavité (Fig. 10.54), voire d'autres effets comme des réflexions internes ou des modes de cavité ou de parois, si une analyse acoustique plus détaillée montre que ces contributions sont importantes pour le contrôleur.

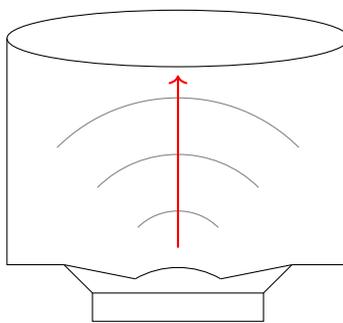


FIGURE 10.54 – Propagation des ondes sonores à l'intérieur de la cavité

- On pourrait aussi regarder l'accordage de la membrane plus en détail, dans le but d'obtenir une distribution de tension plus homogène, faisant correspondre le système mieux avec son modèle à tension supposée constante. En plus, on pourrait accorder le tom à une tension plus élevée, pour laquelle les modes de la membrane seraient plus espacés en fréquence et le mode 01 serait à la fréquence la plus basse (pas de croisement de mode comme c'était le cas ci-dessus); mais il est possible que un changement des fréquences à une haute tension de membrane soit plus difficilement réalisable par le contrôleur.
- Finalement, on pourrait affiner le modèle encore plus en prenant aussi en compte l'influence du rayonnement sur les fréquences de la membrane, en outre de celle de la cavité que nous avons prise en compte dans le modèle actuel.



Cinquième partie

CONTRÔLE EN TEMPS FINI D'UN SYSTÈME HYBRIDE  
(EDP-EDO) : LE CAS DU CÂBLE PESANT



Dans ce chapitre, le mouvement 2D d'un câble pesant flexible est considéré, que l'on peut retrouver dans un pont roulant ou une grue de construction. Il est modélisé par un système hybride EDP-EDO, dont la partie EDO décrit le mouvement d'une plateforme et l'EDP décrit le mouvement d'un câble attaché à la plateforme. Il s'agit d'une équation des ondes avec une tension variable en fonction de l'abscisse curviligne le long du câble.

Ce système hybride EDP-EDO est stabilisé en temps fini par une loi de commande non linéaire obtenue à partir d'un résultat pour la stabilisation de systèmes hyperboliques quasi linéaires  $2 \times 2$  [69]. Son application au problème décrit nécessite plusieurs changements de variables, une transformation d'intégrale de Volterra de type *backstepping*, et la stabilisation en temps-fini d'un système ODE du deuxième ordre décrivant la dynamique d'une variable bien choisie. Ainsi, ce résultat généralise la stabilisation du cas avec une tension constante le long du câble qui est considéré dans [280] au cas d'une tension affine dans l'abscisse curviligne le long du câble. La simulation du système contrôlé nécessite la solution numérique d'équations de noyaux de transformation et de la dynamique temps-fini, ce qui est fait en utilisant des méthodes numériques récentes [9, 196].

Une grande partie de ce chapitre a été reprise de [W9].

## TABLE DES MATIÈRES

11.1	Contexte : stabilisation de systèmes hybrides EDP-EDO . . . . .	192
11.2	Introduction . . . . .	192
11.2.1	Mouvement 2D . . . . .	192
11.2.2	Modèle hybride 2D du câble pesant . . . . .	192
11.2.3	But du contrôle . . . . .	195
11.2.4	Stabilisation en temps fini de systèmes hyperboliques $2 \times 2$ . . . . .	196
11.2.5	Stabilité en temps fini d'un système d'évolution abstrait . . . . .	197
11.2.6	Structure du présent chapitre . . . . .	198
11.3	Obtention de la forme d'un système quasi hyperbolique $2 \times 2$ . . . . .	198
11.3.1	Première transformation . . . . .	198
11.3.2	Deuxième transformation . . . . .	199
11.4	Stabilisation en temps fini de l'EDP . . . . .	199
11.4.1	Système cible . . . . .	200
11.4.2	Transformation de coordonnées de type <i>backstepping</i> . . . . .	202
11.4.3	Calcul des noyaux de transformation . . . . .	203
11.4.4	Loi de commande à la frontière de l'EDP . . . . .	205
11.5	Stabilisation en temps fini du système hybride EDP-EDO . . . . .	205
11.5.1	Conception de la loi de commande . . . . .	206
11.5.2	Preuve de stabilité en temps fini du système hybride . . . . .	208
11.6	Simulation . . . . .	209
11.6.1	Calcul numérique des noyaux de transformation . . . . .	210
11.6.2	Simulation de l'évolution temporelle du système contrôlé . . . . .	210
11.7	Conclusions et perspectives . . . . .	221
11.7.1	Conclusions . . . . .	221
11.7.2	Perspectives . . . . .	222

## 11.1 CONTEXTE : STABILISATION DE SYSTÈMES HYBRIDES EDP-EDO

La stabilisation de systèmes hybrides EDP-EDO a attiré l'attention de la communauté du contrôle depuis plusieurs décennies. On peut mentionner des applications comme le contrôle d'un disque rotatif auquel est attachée une poutre, sans amortissement naturel [68] ainsi que le cas d'une poutre rotative attachée à une inertie en translation [156], une flûte à coulisse [278], des systèmes électriques comme un convertisseur de puissance commuté avec une ligne de transmission [72] ou un convertisseur statique de puissance de type Modulateur de Largeur d'Impulsion courant continu – courant continu de type *buck* (hacheur série), couplé à une barre avec diffusion de chaleur [4, 5], le mouvement turbulent d'un fluide et le flux de trafic [244], et la grue en prenant en compte la flexibilité du câble, comme développé ci-dessous.

## 11.2 INTRODUCTION

11.2.1 *Mouvement 2D*

Nous nous intéressons au mouvement planaire d'une plateforme motorisée pouvant exécuter une translation horizontale, à laquelle est attaché un câble tenant une masse. On peut supposer que ce mouvement a lieu dans une grue de construction (*tower crane*) ou un pont roulant (*overhead crane*) quand le rail sur lequel se déplace la plateforme n'exécute pas de rotation ou translation, respectivement, comme illustré dans la Figure 11.1. De plus, dans la suite, nous supposons que le câble a une longueur fixe. Ceci implique que des variations de la hauteur de la masse transportée sont uniquement dues à des variations de courbure du câble, et non pas à des éventuelles actions d'une poulie.

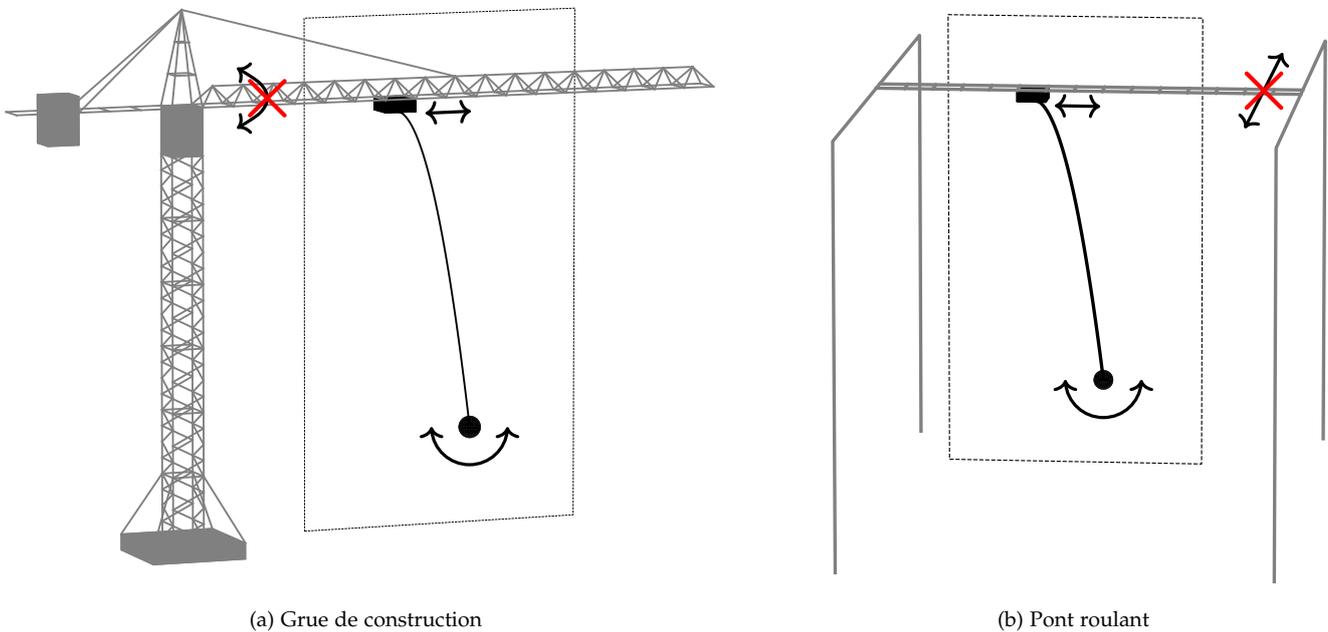


FIGURE 11.1 – Mouvement planaire considéré

11.2.2 *Modèle hybride 2D du câble pesant*

Dans [281], les auteurs ont dérivé et étudié un modèle pour la dynamique d'une plateforme motorisée de masse  $M$  pouvant exécuter une translation horizontale le

long d'un rail horizontal (schématisé Fig. 11.2). Un câble flexible et non extensible de longueur  $\ell = 1$  m est attaché à la plateforme à son extrémité supérieure et à une masse de charge  $m$  à son extrémité inférieure. En supposant de petits déplacements transversaux et angulaires et en négligeant l'accélération de la masse de charge, ils obtiennent le système suivant :

$$y_{tt}(s, t) - (d(s)y_s(s, t))_s = 0, \quad (11.1)$$

$$y_s(0, t) = 0 \quad (11.2)$$

$$y(1, t) = X_p(t) \quad (11.3)$$

$$\ddot{X}_p(t) = \lambda [d(s)y_s(s, t)]_{(s=1)} + \frac{V(t)}{M}, \quad (11.4)$$

avec

$$d(s) \triangleq gs + \frac{gm}{\rho} \quad (11.5)$$

$$\lambda \triangleq \frac{(m + \rho)g}{Md(1)}. \quad (11.6)$$

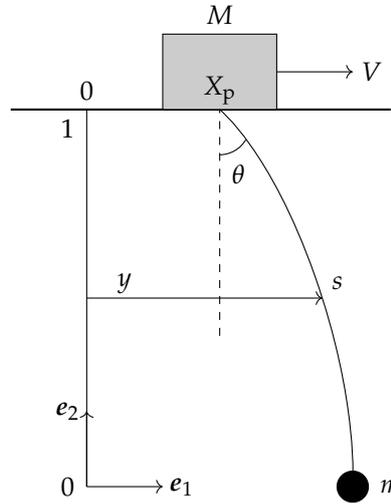


FIGURE 11.2 – Schéma du modèle de grue

Les conditions initiales sont

$$\begin{cases} y(s, 0) = y^0(s) \\ y_t(s, 0) = y^1(s) \\ X_p(0) = X_p^0 \\ \dot{X}_p(0) = \dot{X}_p^1. \end{cases} \quad (11.7)$$

Dans ce modèle,  $s$  dénote l'abscisse curviligne (longueur d'arc) le long du câble, avec  $s = 0$  à son extrémité inférieure et  $s = 1$  à son extrémité supérieure,  $y = y(s, t)$  est le déplacement horizontal d'un point du câble à l'abscisse curviligne  $s$  au moment  $t$ ,  $X_p$  est l'abscisse de la plateforme,  $\rho$  la densité linéique de masse du câble et  $V$  la force appliquée à la plateforme. Les dérivées partielles sont notées comme  $y_{tt} = \partial^2 y / \partial t^2$ ,  $y_{ss} = \partial^2 y / \partial s^2$ , etc., et  $\ddot{X}_p = d^2 X_p / dt^2$ .

La corde subit une tension affine  $d(s)$  (Éq. 11.5) composée d'une contribution constante  $\frac{gm}{\rho}$  due à la masse de charge  $m$  et une contribution linéaire  $gs$  due à la masse du corde. On mentionne que dans [280], les auteurs ont supposé que  $m \gg \rho \cdot \ell$ , et donc  $gm/\rho \gg gs$  pour  $s \in ]0, 1[$  ce qui implique que la fonction  $d(s) \approx \frac{gm}{\rho} \triangleq d$  est constante. Dans la présente contribution, nous retournons au problème originel sans cette approximation, de sorte que la tension  $d(s)$  est donnée par son expression affine (11.5). En particulier, on simulera dans la Section 11.6 le cas avec  $m = 2\text{kg}$ ,  $\rho = 2\text{kg/m}$ ,  $g = 9.81\text{m/s}^2$ ,

c'est-à-dire un câble qui est lourd devant le poids déplacé, ce qui correspond à une contribution linéaire importante dans l'expression  $d(s)$ , comme montré Figure 11.3.

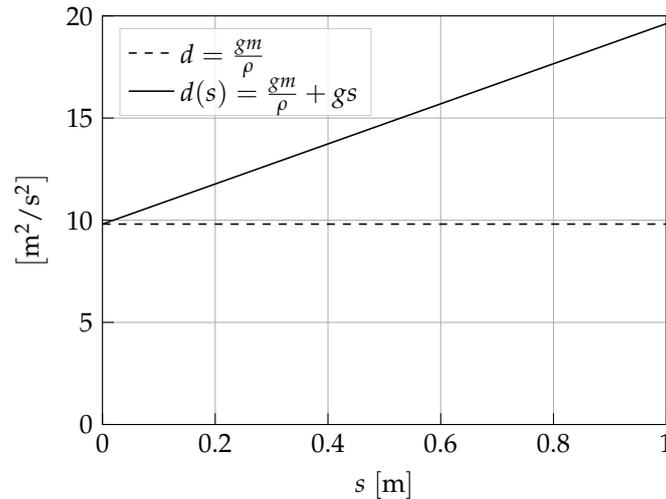


FIGURE 11.3 – Contribution linéaire importante dans  $d(s)$  pour le cas avec  $m = 2\text{kg}$ ,  $\rho = 2\text{kg/m}^2$ ,  $g = 9.81\text{m/s}^2$ .

En appliquant la loi de commande intermédiaire suivante :

$$V(t) = M \cdot U(t) - (m + \rho)g\theta(t), \text{ avec } \theta(t) \triangleq y_s(1, t), \quad (11.8)$$

où la déviation angulaire  $\theta(t)$  du câble par rapport à l'axe verticale, au point  $s = 1$  (c'est-à-dire, au point de connexion avec la plateforme), est supposée mesurée (cf. Fig. 11.2), le système suivant est obtenu :

$$y_{tt} - (d(s)y_s)_s = 0 \quad (s, t) \in ]0, 1[ \times ]0, +\infty[ \quad (11.9)$$

$$y_s(0, t) = 0 \quad t \in ]0, +\infty[ \quad (11.10)$$

$$y(1, t) = X_p(t) \quad t \in ]0, +\infty[ \quad (11.11)$$

$$\ddot{X}_p(t) = U(t), \quad t \in ]0, +\infty[. \quad (11.12)$$

avec les conditions initiales (11.7).

**REMARQUE 1 – SYSTÈME HYBRIDE (EDP-EDO)** On voit que le modèle (11.9)–(11.12) est un *système hybride (EDP-EDO)* : la dynamique de la corde est décrite par une EDP couplée à une EDO décrivant la dynamique de la plateforme. Le système global est contrôlé par l'entrée  $U$ , l'accélération imposée à la plateforme.

On mentionne que le contrôleur en temps fini pour ce système sera développé selon une autre approche que celle suivie pour le système hybride du tom dans le Chapitre 9. En effet, dans le présent chapitre, une stabilisation du système sera obtenue en agissant directement sur l'EDP, sans la projeter sur une base modale comme c'était le cas chez le tom.

**REMARQUE 2 – CÂBLE OU CORDE ?** Pour la modélisation de la grue de construction, du pont roulant et d'autres appareils similaires, on utilise souvent une approche à constantes localisées où le câble est représenté par un pendule rigide [1, 115]. Au contraire, dans une approche à constantes distribuées, on prend en compte la flexibilité du câble en le modélisant par une EDP.

Dans le modèle adopté ci-dessus, nous avons choisi de modéliser le *câble* par une EDP de *corde*<sup>1</sup>. La raison de ce choix est que le modèle EDP de la corde contient seulement une dérivée spatiale d'ordre 2, tandis que le modèle EDP d'un câble, p.ex.

$$\rho y_{tt} - gmy_{ss} + EIy_{ssss} = 0,$$

avec des conditions aux limites et initiales, et où  $E$  [Pa] est le module de Young et  $I$  [m<sup>4</sup>] le moment d'inertie quadratique [118, 247], contient une dérivée spatiale d'ordre 4. À notre connaissance, il n'existe à ce jour pas de résultat sur la stabilisation en temps fini d'une telle EDP du 4<sup>ème</sup> ordre, qui serait similaire au théorème sur la stabilisation en temps fini d'une EDP du 2<sup>ème</sup> ordre [69], que nous appliquerons dans la suite (cf. le Théorème 11.1 ci-dessous).

### 11.2.3 But du contrôle

On souhaite construire une loi de commande pour  $U(t)$  qui déplace le système plateforme-câble (11.9)–(11.12) d'une position au repos

$$(X_p(0) = \text{cst.} \neq 0, \quad \dot{X}_p(0) = 0, \quad y(s, 0) = 0, \quad y_t(s, 0) = 0)$$

à une autre position au repos

$$(X_p(t_F) = 0, \quad \dot{X}_p(t_F) = 0, \quad y(s, t_F) = 0, \quad y_t(s, t_F) = 0),$$

et ceci dans un temps fini  $t_F$ . (Par convention, on définit que l'origine de l'abscisse de  $X_p$  se trouve à la position cible désirée :  $X_p(t_F) = \text{cst.}_2 \triangleq 0$ .)

Ce but de contrôle est schématisé dans la Figure 11.4(a)-(b). On ne veut pas avoir un état final où la plateforme s'arrête, possiblement en temps fini, à un endroit différent de la position 0 (Fig. 11.4(c)), avec un câble qui se stabilise soit en temps fini, soit asymptotiquement. Un autre état final non désiré est le cas de la Fig. 11.4(d), où la plateforme se stabilise bien en temps fini à la position 0, mais le câble n'est stabilisé qu'asymptotiquement.

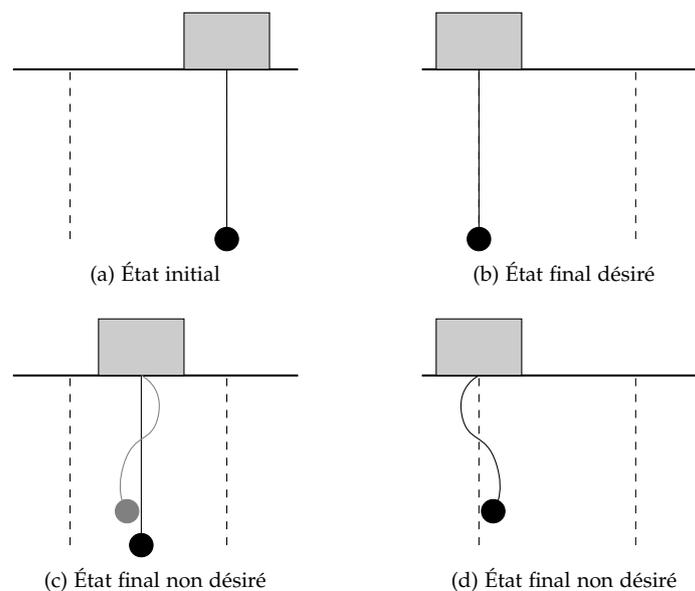


FIGURE 11.4 – But du contrôle

<sup>1</sup>. Cf. aussi les Chapitres 4-8 dans lesquels l'EDP de corde linéaire ou avec une tension non linéaire est considérée.

RÉSULTATS DE CONTRÔLE EXISTANTS POUR LE MODÈLE 2D DU CÂBLE PESANT  
 Une stabilisation asymptotique (mais non pas exponentielle) du système (11.1)-(11.4) a été établie dans [281], tandis qu'une stabilisation exponentielle a ensuite été obtenue dans [274] en utilisant la structure en cascade du système et une approche par *backstepping* (cf. [135] concernant cette approche). Un résultat similaire a été obtenu pour le système (11.9)-(11.12) avec une tension constante et des conditions limites de type Dirichlet dans [169]. La dynamique de la masse de charge a été prise en compte dans [166].

L'approche par *backstepping* est un outil puissant pour la conception de contrôleurs stabilisants dans le contexte de systèmes de dimension finie (cf. p.ex. [228]), mais la structure en cascade de systèmes mécaniques flexibles couplant un EDO et EDP est aussi une propriété utile, comme c'est le cas du modèle 2D de la grue avec un câble flexible. On peut aussi mentionner [68], où les auteurs proposent une classe de lois de commande non linéaires à la frontière stabilisant asymptotiquement un disque rotatif auquel est attachée une poutre, sans amortissement naturel. Notons également que dans [273], la stabilisation asymptotique du modèle 2D de la grue avec une longueur de câble variable a été considérée.

Dans [274], le système (11.9)-(11.12) a été considéré, avec une tension constante (redimensionnée à 1). On y propose le retour d'état linéaire

$$U(t) = -K^{-1} [y_{st}(1, t) + ky_t(1, t)] - \mu \left[ \dot{X}_p(t) + K^{-1} [y_s(1, t) + ky(1, t)] \right], \quad (11.13)$$

avec  $k, K > 0$  et  $\mu > K/2$  des constantes arbitraires, et prouve que le système (11.9)-(11.13) est exponentiellement stable.

Dans [280], le même système à tension constante a été stabilisé en temps fini par le retour d'état non linéaire

$$U(t) = -y_{st}(1, t) - [y_t(1, t) + y_s(1, t)]^{\nu_2} - \left[ y(1, t) + \int_0^1 y_t(\xi, t) d\xi \right]^{\nu_1}, \quad (11.14)$$

avec  $0 < \nu_2 < 1$ ,  $\nu_1 > \frac{\nu_2}{2-\nu_2}$  et  $[x]^{\nu_1} \triangleq \text{sign}(x)|x|^{\nu_1}$ .

REMARQUE Pour plus de résultats concernant le contrôle de la grue de construction, du pont roulant et d'autres appareils similaires, consulter [1, 115] et les références s'y trouvant.

#### 11.2.4 Stabilisation en temps fini de systèmes hyperboliques $2 \times 2$

Certains systèmes hyperboliques avec des conditions aux limites transparentes (non reflétantes, cf. la Sous-section 11.4.1 plus bas) admettent des solutions qui atteignent l'état d'équilibre en temps fini. Une telle propriété, appelée *stabilité en temps fini* dans [6, 187] ou *super-stabilité* dans [229] a été discutée pour la première fois dans [152] pour le cas de l'équation des ondes. L'extension d'une telle propriété à l'équation des ondes sur un réseau a été étudiée dans [6, 229]. Il s'avère que la stabilité en temps fini est aussi valable pour des systèmes hyperboliques quasi linéaires du premier ordre unidimensionnels diagonaux et sans termes source [146, 187]. L'incorporation de termes source dans de tels systèmes mène à une perte de la propriété de stabilité en temps fini si les conditions aux limites sont transparentes, mais la stabilisation reste toujours *rapide* [102]. Cependant, dans le cas linéaire, l'utilisation d'une loi de rétroaction à la frontière basée sur une transformation de type *backstepping* permet de retrouver la stabilité en temps fini pour des systèmes hyperboliques avec des termes source [69].

## 11.2.5 Stabilité en temps fini d'un système d'évolution abstrait

## 11.2.5.1 Système EDO

La stabilité en temps fini d'un système d'évolution EDO

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

est définie comme suit.

**Définition 11.1** (Stabilité en temps fini d'un système d'évolution EDO [39]). Soit  $\Phi = \Phi(x, t)$ ,  $x \in V$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , le flot associé à un système d'évolution EDO dans une espace de dimension finie  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , avec  $x = \mathbf{0}$  un point d'équilibre, c'est-à-dire,  $\Phi(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

On dit que le flot  $(\Phi(x, t))_{(x,t) \in V \times \mathbb{R}_+}$  est globalement stable en temps fini

- s'il existe une fonction non décroissante  $T : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appelée la fonction de temps d'établissement telle que  $\Phi(x, t) = \mathbf{0}$  pour tout  $x \in V \setminus \{0\}$  et tout  $t \geq T(\|x\|_V)$  (convergence en temps fini);
- et si le point d'équilibre  $x = \mathbf{0}$  est stable au sens de Lyapunov<sup>2</sup>, c'est-à-dire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$\|x\|_V < \delta \Rightarrow \|\Phi(x, t)\|_V < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

REMARQUE – STABILITÉ EN TEMPS FINI DU DOUBLE INTÉGRATEUR

**Lemme 11.1** (Stabilité en temps fini du double intégrateur). L'EDO du 2<sup>me</sup> ordre

$$\ddot{x} = -[\dot{x}]^{v_2} - [x]^{v_1},$$

équivalente au système du premier ordre

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -[x_2]^{v_2} - [x_1]^{v_1}, \end{cases}$$

( $x_1 \triangleq x, x_2 \triangleq \dot{x}$ ), est stable en temps fini pour  $0 < v_2 < 1$  et  $v_1 \geq \frac{v_2}{2-v_2}$ .

(Le cas  $v_1 > \frac{v_2}{2-v_2}$  a été prouvé par Haimo [103] et le cas  $v_1 = \frac{v_2}{2-v_2}$  par Bhat & Bernstein [12, 39].)

## 11.2.5.2 Système hybride EDP–EDO

La stabilité en temps fini d'un système d'évolution hybride EDP–EDO dépendant d'une variable spatiale  $z \in [0, 1]$  et une variable temporelle  $t \in \mathbb{R}_+$  peut être définie comme suit.

**Définition 11.2** (Stabilité en temps fini d'un système d'évolution hybride EDP–EDO). Soit  $\Phi = \Phi(x, z, t)$ ,  $x \in H$ ,  $z \in [0, 1]$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , le flot associé à un système d'évolution dans une espace de Hilbert  $H$ . On suppose que  $\Phi$  satisfait la propriété de semi-groupe [57, 71, 185] :  $\Phi(\Phi(x, z, s), z, t) = \Phi(x, z, t + s)$  pour tout  $x \in H$ , tout  $z \in [0, 1]$ , et tout  $t, s \in \mathbb{R}_+$ ; et que  $x = \mathbf{0}$  est un point d'équilibre, c'est-à-dire,  $\Phi(\mathbf{0}, z, t) = \mathbf{0}$  pour tout  $z \in [0, 1]$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ .

On dit que le flot  $(\Phi(x, z, t))_{(x,z,t) \in H \times [0,1] \times \mathbb{R}_+}$  est globalement stable en temps fini

- s'il existe une fonction non décroissante  $T : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  appelée la fonction de temps d'établissement telle que  $\Phi(x, z, t) = \mathbf{0}$  pour tout  $x \in H \setminus \{0\}$ , pour tout  $z \in [0, 1]$  et tout  $t \geq T(\|x\|_H)$  (convergence en temps fini);
- et si le point d'équilibre  $x = \mathbf{0}$  est stable au sens de Lyapunov, c'est-à-dire, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que

$$\|x\|_H < \delta \Rightarrow \|\Phi(x, z, t)\|_H < \varepsilon, \quad \forall z \in [0, 1], t \geq 0.$$

2. (cf. Déf. 3.6)

## 11.2.6 Structure du présent chapitre

La conception de la loi de commande  $U(t)$  à la frontière stabilisant le système hybride EDP-EDO (11.9)-(11.12) avec une tension affine en temps fini se déroulera de la façon suivante.

Afin de pouvoir utiliser l'approche développée dans [69, Proposition 3.1] pour des systèmes hyperboliques quasi linéaires  $2 \times 2$  découplés, deux changements de variables doivent être effectués permettant de réécrire le système d'origine (11.9)-(11.12) sous la forme appropriée (Section 11.3).

Dans un premier temps (Section 11.4), la stabilisation en temps fini de l'EDP seule sera considérée. Les notions de système cible, transformation de type *backstepping* et le calcul de noyaux de transformation sont détaillées, permettant finalement l'expression de la loi de commande à la frontière de [69].

Ensuite, dans la Section 11.5, la stabilisation du système hybride entier (EDP-EDO, c'est-à-dire câble à tension affine & plateforme) est considérée. Basée sur les résultats de la section précédente pour l'EDP, une loi de commande pour l'accélération  $U(t)$  imposée à la plateforme est construite dont on prouve qu'elle stabilise le système hybride entier en temps fini.

Une simulation illustrant la stabilisation en temps fini d'un câble pesant est montrée dans la Section 11.6, utilisant des méthodes numériques récentes [9, 196] pour la résolution numérique des noyaux de transformation et pour la simulation d'une dynamique ODE en temps fini, avant de conclure dans la Section 11.7.

11.3 OBTENTION DE LA FORME D'UN SYSTÈME QUASI HYPERBOLIQUE  $2 \times 2$ 

Deux transformations sont définies, qui permettent de réécrire l'équation hyperbolique du deuxième ordre (11.9) avec conditions aux limites (11.10)-(11.11) et conditions initiales (11.7) comme un système hyperbolique quasi linéaire découplé  $2 \times 2$ , la forme nécessaire pour pouvoir appliquer le Théorème 11.1, comme montré dans la Section 11.4.

## 11.3.1 Première transformation

Suivant [154], une première transformation  $z(x, t) \triangleq y(s, t)$  est définie, où

$$x(s) = \frac{1}{J} \int_0^s d^{-1}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{gJ} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{m}s \right) > 0 \quad (11.15)$$

et

$$J = \int_0^1 d^{-1}(\sigma) d\sigma = \frac{1}{g} \ln \left( 1 + \frac{\rho}{m} \right) > 0,$$

de sorte que  $x(0) = 0$  et  $x(1) = 1$ . Avec cette transformation, l'EDP (11.9) peut être réécrite comme

$$z_{tt}(x, t) - \lambda^2(x) z_{xx}(x, t) = 0, \quad (11.16)$$

où

$$\lambda(x) = \frac{1}{J\sqrt{\tilde{d}(x)}}, \quad \tilde{d}(x) \triangleq d(s(x)) = \frac{gm}{\rho} e^{gJx} \quad (11.17)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} z_x(0, t) = 0 \\ z(1, t) = X_p(t) \\ \ddot{X}_p(t) = U(t), \end{cases} \quad (11.18)$$

$X_p(t)$  étant la position de la plateforme et  $\ddot{X}_p(t) = U(t)$  son accélération, et les conditions initiales

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= z^0(x) = y^0(s) \\ z_t(x, 0) &= z^1(x) = y^1(s). \end{aligned} \quad (11.19)$$

### 11.3.2 Deuxième transformation

L'Équation (11.16) est ensuite réécrite comme un système de deux EDPs du premier ordre. En notant que  $(\partial_t - \lambda \partial_x)(\partial_t + \lambda \partial_x)z = -\lambda \lambda' z_x = (\partial_t + \lambda \partial_x)(\partial_t - \lambda \partial_x)z$ , il peut être démontré que les fonctions

$$\begin{cases} S(x, t) \triangleq z_t(x, t) + \lambda(x)z_x(x, t) \\ D(x, t) \triangleq z_t(x, t) - \lambda(x)z_x(x, t) \end{cases}$$

(invariants de Riemann) satisfont le système

$$S_t(x, t) - \lambda(x)S_x(x, t) = -\frac{\lambda'(x)}{2}(S(x, t) - D(x, t)) \quad (11.20)$$

$$D_t(x, t) + \lambda(x)D_x(x, t) = -\frac{\lambda'(x)}{2}(S(x, t) - D(x, t)). \quad (11.21)$$

En mettant

$$\mathbf{w}(x, t) = \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2} \ln(\lambda(x))} D(x, t) \\ e^{-\frac{1}{2} \ln(\lambda(x))} S(x, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(x)}} \begin{bmatrix} D(x, t) \\ S(x, t) \end{bmatrix}, \quad (11.22)$$

on obtient le système

$$\mathbf{w}_t(x, t) = \begin{bmatrix} -\lambda(x) & 0 \\ 0 & \lambda(x) \end{bmatrix} \mathbf{w}_x(x, t) + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\lambda'(x)}{2} \\ \frac{\lambda'(x)}{2} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{w}(x, t) \quad (11.23)$$

avec les conditions aux limites

$$u(0, t) = v(0, t), \quad (11.24)$$

équivalente à la condition aux limites originelle  $y_s(0, t) = 0$ , et

$$v(1, t) = W(t), \quad (11.25)$$

$W(t)$  étant une loi de commande qui est reliée à la commande physique originelle  $U(t) = \ddot{X}_p(t)$  et l'angle  $\theta(t) = y_s(1, t)$  selon

$$W(t) = \sqrt{L} \sqrt[4]{d(1)} \left( \dot{X}_p(t) + \sqrt{d(1)} \theta(t) \right)$$

(avec  $\dot{X}_p(t) = \int_0^t \ddot{X}_p(\tau) d\tau$ ).

Ce système est sous la forme requise pour l'application de la transformation de type *backstepping* qui sera définie plus bas (avec  $q = 1$ ).

## 11.4 STABILISATION EN TEMPS FINI DE L'EDP

Dans la présente section, nous ne considérons temporairement que la partie EDP (câble) du modèle hybride, qui a été réécrite sous la forme (11.22), comme schématisé dans la Figure 11.5. Nous étudions l'application d'un résultat de stabilisation en temps fini de ce type d'EDP utilisant une loi de commande à la frontière [69], même si, dans l'application décrite, nous ne pouvons pas agir directement à ce point de suspension du câble à la plateforme. Dans la section suivante, on exposera comment utiliser ce résultat pour construire une loi de commande  $U(t)$  agissant sur la plateforme, stabilisant le système hybride complet (plateforme & câble).

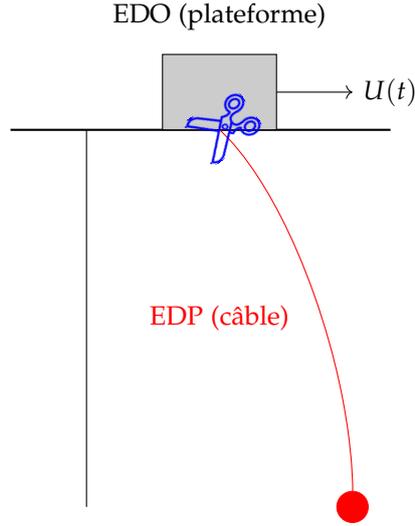


FIGURE 11.5 – Représentation schématique de l'EDP comme sous-système du système hybride EDP-EDO

#### 11.4.1 Système cible

Dans [69], la stabilisation en temps fini du système hyperbolique quasi linéaire découplé  $2 \times 2$  suivant est considéré :

$$\begin{aligned} w_t(x, t) &= \Sigma(x)w_x(x, t) + C(x)w(x, t) \\ &= \begin{bmatrix} -\varepsilon_1(x) & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(x) \end{bmatrix} w_x(x, t) + \begin{bmatrix} 0 & c_1(x) \\ c_2(x) & 0 \end{bmatrix} w(x, t) \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$u(0, t) = qv(0, t) \quad (11.27)$$

$$v(1, t) = W(t), \quad (11.28)$$

où

$$w(x, t) = \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix},$$

$x \in [0, 1], t \geq 0$ ,  $c_1(x)$  et  $c_2(x)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^0([0, 1])$ ,  $\varepsilon_1(x)$  et  $\varepsilon_2(x)$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1([0, 1])$  strictement positives, et  $q \neq 0$  (ici  $^3$ ).

Le système (11.23) avec conditions aux limites (11.24)-(11.25) est de la forme du système (11.26) avec conditions aux limites (11.27)-(11.28) si l'on prend

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x) &= \varepsilon_2(x) = \lambda(x) \quad \forall x \in [0, 1] \\ c_2(x) &= \frac{\lambda'(x)}{2} = -c_1(x) \quad \forall x \in [0, 1] \\ q &= 1. \end{aligned}$$

Dans la Sous-section suivante 11.4.2, une transformation d'état de type *backstepping* sera définie, entre les variables d'état d'origine

$$w(x, t) = \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix}$$

3. Le cas  $q = 0$  est également traité dans [69, §3.5].

et des variables d'état cibles

$$\gamma(x, t) = \begin{bmatrix} \alpha(x, t) \\ \beta(x, t) \end{bmatrix}$$

satisfaisant la dynamique cible

$$\gamma_t(x, t) = \Sigma(x)\gamma_x(x, t) \tag{11.29}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \alpha(0, t) = q\beta(0, t) \\ \beta(1, t) = 0, \end{cases} \tag{11.30}$$

$q \neq 0$ , et une condition initiale  $\gamma(x, 0) = \gamma_0 \in L^2([0, 1])$ .

**REMARQUE – STABILITÉ EN TEMPS FINI DE CE SYSTÈME DE TYPE ADVECTION**  
 Cette dynamique cible est stabilisée en temps fini grâce à la condition aux limites transparente  $\beta(1, t) = 0$ , comme cela a déjà été mentionné dans la Sous-section 11.2.4. En effet, l'Équation (11.29) représente un système de deux EDPs de type advection :

$$\alpha_t(x, t) = -\lambda(x)\alpha_x(x, t) \tag{11.31}$$

$$\beta_t(x, t) = \lambda(x)\beta_x(x, t). \tag{11.32}$$

Chacune de ces EDPs peut représenter la translation 1D à une vitesse  $\mp\lambda(x)$  d'un produit dans un canal d'eau (ou d'une information dans un canal de communication, comme schématisée dans la Figure 11.6). En particulier, ici, une information entre le système sous la forme  $\beta(1, t)$ . L'information est translatée dans la coordonnée  $\beta$  pour  $x$  de  $1 \rightarrow 0$ . Ensuite, on a la deuxième condition aux limites  $\alpha(0, t) = q\beta(0, t)$ , à la suite de quoi l'information est translatée dans la coordonnée  $\alpha$  pour  $x$  de  $0 \rightarrow 1$ . Finalement, l'information quitte le domaine  $x \in [0, 1]$  à  $\alpha(1, t)$ . De ce fait, si à partir d'un moment donné, on peut maintenir  $\beta(1, t)$  à 0, après un temps fini qui vaut

$$T = 2 \int_0^1 \frac{1}{\lambda(x)} dx,$$

le temps d'effectuer un retour puis un aller,  $\alpha$  et  $\beta$  auront atteint 0.

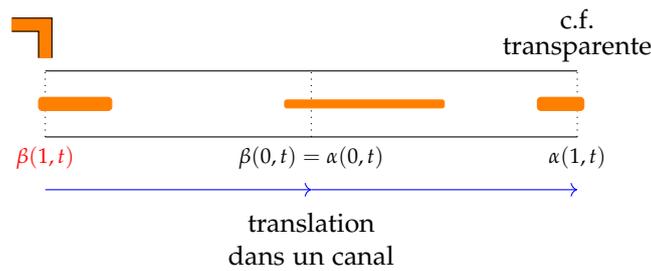


FIGURE 11.6 – Schéma du système de deux EDPs de type advection

Ce comportement est visible dans la Figure 11.7, où l'on voit l'évolution temporelle du système (11.29) pour les conditions initiales

$$\begin{cases} \alpha(x, 0) = 1 + x \\ \beta(x, 0) = 1 - x, \end{cases}$$

les conditions aux limites

$$\begin{cases} \alpha(0, t) = \beta(0, t) \\ \beta(1, t) = 0, \end{cases}$$

et avec la vitesse  $\lambda(x)$  qui a été définie dans la Sous-section 11.3.1.

(Cette simulation a été obtenue par le schéma numérique amont-aval, que l'on utilisera dans la Section 11.6.2, au lieu de la méthode analytique des caractéristiques.)

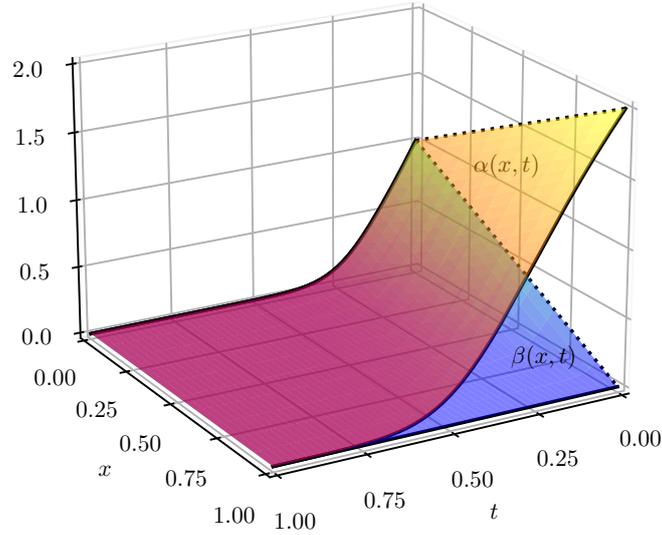


FIGURE 11.7 – Évolution temporelle d'un système de type advection avec condition aux limites transparente : tout devient zéro

#### 11.4.2 Transformation de coordonnées de type backstepping

Dans la présente sous-section, la transformation de type *backstepping* entre le système (11.23) de base et le système cible (11.29) est définie.

**Définition 11.3** (Transformation de type *backstepping* [69]). Une transformation de type *backstepping* est définie entre les variables d'état d'origine  $w(x, t)$  et des variables d'état cibles  $\gamma(x, t)$  comme l'équation intégrale de Volterra

$$\gamma(x, t) = w(x, t) - \int_0^x K(x, \xi) w(\xi, t) d\xi \quad (11.33)$$

et la transformation inverse comme

$$w(x, t) = \gamma(x, t) + \int_0^x L(x, \xi) \gamma(\xi, t) d\xi, \quad (11.34)$$

avec des noyaux directs

$$\mathbf{K}(x, \xi) = \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{uv} \\ K^{vu} & K^{vv} \end{bmatrix} (x, \xi)$$

et des noyaux inverses

$$\mathbf{L}(x, \xi) = \begin{bmatrix} L^{\alpha\alpha} & L^{\alpha\beta} \\ L^{\beta\alpha} & L^{\beta\beta} \end{bmatrix} (x, \xi).$$

**Lemme 11.2** (Condition sur les noyaux [69]). *Par calcul direct, on démontre que les noyaux directs  $\mathbf{K}$  satisfont un système de type Goursat<sup>4</sup> constitué de deux systèmes EDP  $2 \times 2$  hyperboliques du premier ordre :*

$$\begin{cases} \varepsilon_1(x)K_x^{uu} + \varepsilon_1(\xi)K_\xi^{uu} = -\varepsilon_1'(\xi)K^{uu} - c_2(\xi)K^{uv} \\ \varepsilon_1(x)K_x^{uv} - \varepsilon_2(\xi)K_\xi^{uv} = \varepsilon_2'(\xi)K^{uv} - c_1(\xi)K^{uu} \\ \varepsilon_2(x)K_x^{vu} - \varepsilon_1(\xi)K_\xi^{vu} = \varepsilon_1'(\xi)K^{vu} + c_2(\xi)K^{vv} \\ \varepsilon_2(x)K_x^{vv} + \varepsilon_2(\xi)K_\xi^{vv} = -\varepsilon_2'(\xi)K^{vv} + c_1(\xi)K^{vu} \end{cases} \quad (11.35)$$

avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} K^{uu}(x, 0) = \frac{\varepsilon_2(0)}{q\varepsilon_1(0)}K^{uv}(x, 0) \\ K^{uv}(x, x) = \frac{c_1(x)}{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)} \\ K^{vu}(x, x) = -\frac{c_2(x)}{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)} \\ K^{vv}(x, 0) = \frac{q\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_2(0)}K^{vu}(x, 0) \end{cases}$$

sur le domaine triangulaire  $\mathcal{T} = \{(x, \xi) \mid 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$  (dessiné Fig. 11.8).

On démontre que les noyaux indirects  $\mathbf{L}$  satisfont un système de type Goursat similaire de  $4 \times 4$  EDPs hyperboliques du premier ordre :

$$\begin{cases} \varepsilon_1(x)L_x^{\alpha\alpha} + \varepsilon_1(\xi)L_\xi^{\alpha\alpha} = -\varepsilon_1'(\xi)L^{\alpha\alpha} + c_1(x)L^{\beta\alpha} \\ \varepsilon_1(x)L_x^{\alpha\beta} - \varepsilon_2(\xi)L_\xi^{\alpha\beta} = \varepsilon_2'(\xi)L^{\alpha\beta} + c_1(x)L^{\beta\beta} \\ \varepsilon_2(x)L_x^{\beta\alpha} - \varepsilon_1(\xi)L_\xi^{\beta\alpha} = \varepsilon_1'(\xi)L^{\beta\alpha} - c_2(x)L^{\alpha\alpha} \\ \varepsilon_2(x)L_x^{\beta\beta} + \varepsilon_2(\xi)L_\xi^{\beta\beta} = -\varepsilon_2'(\xi)L^{\beta\beta} - c_2(x)L^{\alpha\beta} \end{cases} \quad (11.36)$$

avec des conditions aux limites

$$\begin{cases} L^{\alpha\alpha}(x, 0) = \frac{\varepsilon_2(0)}{q\varepsilon_1(0)}L^{\alpha\beta}(x, 0) \\ L^{\alpha\beta}(x, x) = \frac{c_1(x)}{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)} \\ L^{\beta\alpha}(x, x) = -\frac{c_2(x)}{\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)} \\ L^{\beta\beta}(x, 0) = \frac{q\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_2(0)}L^{\beta\alpha}(x, 0) \end{cases}$$

sur le même domaine triangulaire.

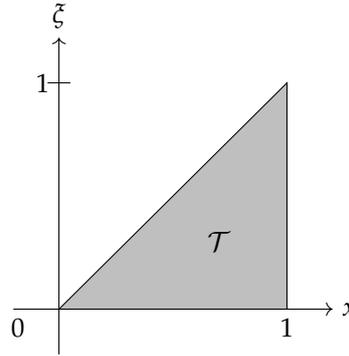
Notons qu'il est aussi possible de déterminer les noyaux inverses  $\mathbf{L}$  à partir de la connaissance des noyaux directs  $\mathbf{K}$  [9] :

$$\mathbf{L}(x, \xi) = \mathbf{K}(x, \xi) + \int_\xi^x \mathbf{K}(x, \sigma)\mathbf{L}(\sigma, \xi) d\sigma. \quad (11.37)$$

#### 11.4.3 Calcul des noyaux de transformation

Pour le cas des coefficients  $\varepsilon_i(x)$  et  $c_i(x)$  présents dans les systèmes de type Goursat ((11.35), (11.36)) constants, donc indépendants des coordonnées  $x$  et  $\xi$ , une solution

4. Comme mentionné dans [69], on propose le terme « problème de Goursat généralisé » p.ex. dans [114]. Le problème de Goursat remonte à ses travaux sur des EDPs il y a plus d'un siècle [98].

FIGURE 11.8 – Domaine triangulaire  $\mathcal{T}$ 

analytique des noyaux a été obtenue dans [250]. Cette solution contient des fonctions de Bessel modifiées de première espèce ainsi que la fonction de Marcum  $Q$  généralisée du premier ordre<sup>5</sup>.

Pour le cas général à coefficients  $\varepsilon_i(x)$  et  $c_i(x)$  *non constants*<sup>6</sup>, des méthodes numériques pour la résolution des systèmes de Goursat ont été développées [9]. On définit une grille de discrétisation uniforme dans le domaine triangulaire  $\mathcal{T}$  pour des pas  $\Delta x$  et  $\Delta \xi$  donnés (comme illustré dans la Fig. 11.9). Ensuite, les parties gauches des équations de Goursat (11.35) et (11.36), qui contiennent des dérivées par rapport à  $x$  et  $\xi$  des noyaux inconnus, sont approximées par des dérivées directionnelles. On a par exemple [9, d'après l'Appendice F.2] :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1(x)K_x^{uu} + \varepsilon_1(\xi)K_\xi^{uu} \\ & \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2(x) + \varepsilon_1^2(\xi)}}{\sigma(x, \xi)} [K^{uu}(x, \xi) - K^{uu}(x - \sigma(x, \xi)v_1(x, \xi), \xi - \sigma(x, \xi)v_2(x, \xi))], \end{aligned}$$

où  $\sigma(x, \xi) > 0$  est une longueur de pas choisie et

$$\mathbf{v}(x, \xi) = \begin{bmatrix} v_1(x, \xi) \\ v_2(x, \xi) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1^2(x) + \varepsilon_1^2(\xi)}} \begin{bmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_1(\xi) \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire, les composants d'un vecteur d'unité selon la direction de la courbe caractéristique. Ces approximations sont ensuite exprimées en interpolant des valeurs des noyaux inconnus des points de la grille voisins. On obtient ainsi un système linéaire d'équations à résoudre pour retrouver les valeurs des noyaux dans tous les points de la grille de discrétisation.

5. La fonction de Marcum  $Q$  généralisée du premier ordre est définie comme

$$Q_1(\sqrt{x}, \sqrt{y}) = 1 - ye^x \int_0^1 e^{-sy} I_0(2\sqrt{sxy}) ds = e^{-(x+y)} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^n y^{n+m}}{n!(n+m)!}$$

avec  $I_0(\cdot)$  la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0. Elle a été définie par J.I. Marcum dans le cadre de ses recherches sur la communication radar et est aussi utilisée en statistique [153, 250, et les références qui s'y trouvent].

6. Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes « quasi-analytiques » qui sont utilisées pour résoudre des systèmes (non linéaires) d'EDPs (p.ex. [126]). Les solutions recherchées sont décomposées d'une certaine manière et substituées dans les équations, ce que mène à des conditions sur les composantes de la décomposition. Dans certains cas, on peut reconnaître une structure dans les composantes de la décomposition (développement en série des fonctions sin, cos, exp, etc.) et obtenir une forme analytique de la solution. Des essais ont été faits pour le système de Goursat (11.35), mais sa complexité semble ne pas permettre d'obtenir une solution analytique.

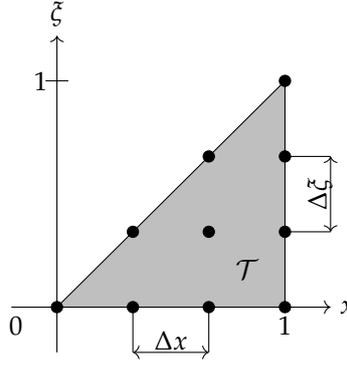


FIGURE 11.9 – Domaine triangulaire  $\mathcal{T}$  avec grille de discrétisation uniforme

11.4.4 Loi de commande à la frontière de l'EDP

Utilisant la transformation de type *backstepping* développée ci-dessus, on peut exprimer une loi de commande à la frontière de l'EDP permettant de la stabiliser en temps fini.

**Théorème 11.1** (Contrôle en temps fini d'un système (11.26) [69]). *Le système d'origine (11.26), avec ses conditions aux limites et conditions initiales, est transformé en le système cible (11.29) à dynamique stable en temps fini, avec ses conditions aux limites et conditions initiales, par la transformation de type backstepping (11.33) avec des noyaux satisfaisant le système (11.35) et en appliquant la loi de commande à la frontière*

$$W(t) = \int_0^1 K^{vu}(1, \xi) u(\xi, t) \, d\xi + \int_0^1 K^{vv}(1, \xi) v(\xi, t) \, d\xi. \tag{11.38}$$

Une stabilisation de l'EDP (11.26) en temps fini est alors obtenue, avec un temps d'établissement

$$T_F = \int_0^1 \left[ \frac{1}{\varepsilon_1(\xi)} + \frac{1}{\varepsilon_2(\xi)} \right] \, d\xi. \tag{11.39}$$

Ici,  $\varepsilon_1(x)$  et  $\varepsilon_2(x)$  sont les vitesses de translation respectives dans le système d'advection dans les coordonnées  $(\alpha, \beta)$  (cf. l'exemple en simulation dans la Sous-section 11.4.1).

11.5 STABILISATION EN TEMPS FINI DU SYSTÈME HYBRIDE EDP-EDO

Retournant à la Figure 11.5, on conclut de la Sous-section 11.4.4 que l'on est capable de stabiliser l'EDP (le câble) sous l'hypothèse de pouvoir contrôler le câble au bord par la loi de commande  $W(t)$  exprimée par l'Équation (11.38). Or, dans le système complet hybride (EDP-EDO) décrit par les Équations (11.9)-(11.12), complétées par les conditions aux limites et initiales, et schématisé dans la Fig. 11.10, on ne contrôle pas la condition aux limites  $v(1, t) = W(t)$  de l'EDP, mais l'accélération  $\ddot{X}_p = U(t)$  de la plateforme. De plus, dans ce cas, la condition à la frontière transparente  $\beta(1, t) = 0$ , nécessaire dans le système cible (11.30) pour garantir la stabilité en temps fini de la partie EDP, n'est pas nécessairement satisfaite.

Dans la présente section, notre but est de concevoir une loi de commande pour l'accélération  $U(t)$  de la plateforme de telle manière à garantir qu'à la fois  $\beta(1, t) = 0$  et une variable auxiliaire  $\varphi(t)$  deviennent zero après un temps fini dont la valeur dépend des conditions initiales. Ensuite, du fait de la condition à la frontière transparente  $\beta(1, t) = 0$  et par construction de la variable auxiliaire  $\varphi(t)$ , à la fois le système cible  $\gamma(x, t)$  (câble) et la position de la plateforme  $X_p(t)$  deviennent zéro après un temps fini additionnel. En somme, le système hybride global (11.9)-(11.12) avec les conditions aux limites et initiales sera ainsi stabilisé en un temps fini.

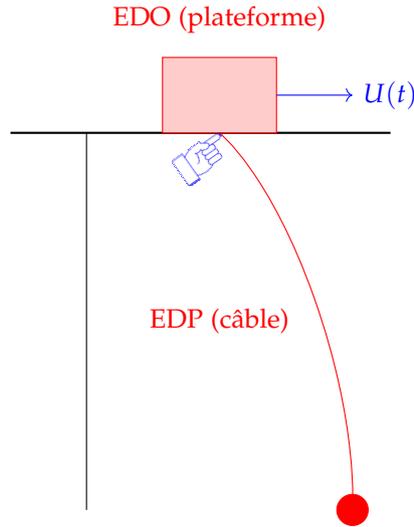


FIGURE 11.10 – Représentation schématique du système hybride EDP–EDO

11.5.1 Conception de la loi de commande

Nous procédons à la conception d’une loi de commande  $U(t)$  stabilisant le système hybride (plateforme & câble à tension affine). Elle sera exprimée dans les coordonnées

$$(X_p(t), \alpha(x, t), \beta(x, t)).$$

Le but sera d’obtenir une condition à la frontière de l’EDP transparente

$$\beta(1, t) = 0$$

après un certain temps, grâce à l’utilisation d’une variable auxiliaire  $\varphi$  astucieusement définie, comme nous développons ci-dessus.

11.5.1.1 Définition de la variable auxiliaire  $\varphi$

On calcule que

$$\begin{aligned} 2 \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{\lambda(1)}} &= 2 \frac{z_t(1, t)}{\sqrt{\lambda(1)}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}(1, t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}(1, t) + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{L}(1, \xi) \boldsymbol{\gamma}(\xi, t) \, d\xi \\ &= \alpha(1, t) + \beta(1, t) + \int_0^1 \left[ \left( L^{\alpha\alpha}(1, \xi) + L^{\beta\alpha}(1, \xi) \right) \alpha(\xi, t) \right. \\ &\quad \left. + \left( L^{\alpha\beta}(1, \xi) + L^{\beta\beta}(1, \xi) \right) \beta(\xi, t) \right] \, d\xi. \end{aligned} \quad (11.40)$$

À ce point, nous définissons la quantité auxiliaire

$$\varphi(t) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} X_p(t) + \int_0^1 [a(x)\alpha(x, t) + b(x)\beta(x, t)] \, dx, \quad (11.41)$$

où les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  sont à définir par la suite. Dans ce cas, on calcule que

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}(t) &= \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(t) + \int_0^1 [a\alpha_t + b\beta_t] dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(t) + \int_0^1 [-a\lambda\alpha_x + b\lambda\beta_x] dx \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(t) + [-a(x)\lambda(x)\alpha(x,t) + b(x)\lambda(x)\beta(x,t)]_{x=0}^1 \\
 &\quad + \int_0^1 [(a\lambda)_x\alpha - (b\lambda)_x\beta] dx,
 \end{aligned} \tag{11.42}$$

utilisant une intégration par parties sur la dernière ligne. Remplaçant  $\dot{X}_p$  dans (11.42) par son expression de l'Équation (11.40), on obtient

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}(t) &= \alpha(1,t) + \beta(1,t) + [-a\lambda\alpha + b\lambda\beta]_{x=0}^1 \\
 &\quad + \int_0^1 \left[ (L^{\alpha\alpha}(1,x) + L^{\beta\alpha}(1,x) + (a\lambda)_x)\alpha \right. \\
 &\quad \left. + (L^{\alpha\beta}(1,x) + L^{\beta\beta}(1,x) - (b\lambda)_x)\beta \right] dx.
 \end{aligned} \tag{11.43}$$

Maintenant, on définit les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$  comme

$$a(x) \triangleq \frac{1}{\lambda(x)} \left( a_0 - \int_0^x (L^{\alpha\alpha}(1,\xi) + L^{\beta\alpha}(1,\xi)) d\xi \right) \tag{11.44}$$

$$b(x) \triangleq \frac{1}{\lambda(x)} \left( b_0 + \int_0^x (L^{\alpha\beta}(1,\xi) + L^{\beta\beta}(1,\xi)) d\xi \right), \tag{11.45}$$

avec les constantes  $a_0, b_0$  qui sont toujours à définir. Ainsi, on a que

$$L^{\alpha\alpha}(1,x) + L^{\beta\alpha}(1,x) + (a\lambda)_x = 0 = L^{\alpha\beta}(1,x) + L^{\beta\beta}(1,x) - (b\lambda)_x,$$

ce qui implique que (11.43) devient

$$\dot{\varphi} = [1 - (a\lambda)(1)]\alpha(1,t) + [1 + (b\lambda)(1)]\beta(1,t) + (a_0 - b_0)\alpha(0,t)$$

pour  $\alpha(0,t) = \beta(0,t)$ , ( $q = 1$ ). On fixe encore

$$a_0 = b_0 \triangleq 1 + \int_0^1 (L^{\alpha\alpha}(1,\xi) + L^{\beta\alpha}(1,\xi)) d\xi, \tag{11.46}$$

et donc

$$1 - (a\lambda)(1) = 0 = a_0 - b_0.$$

Finalement, on obtient que

$$\begin{aligned}
 \dot{\varphi}(t) &= [1 + (b\lambda)(1)]\beta(1,t) \\
 &= \left[ 1 + b_0 + \int_0^1 [L^{\alpha\beta}(1,x) + L^{\beta\beta}(1,x)] dx \right] \beta(1,t) \\
 &= \mu\beta(1,t)
 \end{aligned} \tag{11.47}$$

avec

$$\mu \triangleq 2 + \int_0^1 (L^{\alpha\alpha}(1,x) + L^{\beta\alpha}(1,x) + L^{\alpha\beta}(1,x) + L^{\beta\beta}(1,x)) dx. \tag{11.48}$$

L'Équation (11.47) fournit une relation directe entre la vitesse  $\dot{\varphi}(t)$  de la variable auxiliaire et la condition à la frontière de l'EDP  $\beta(1,t)$ . Pour les développements ultérieurs, il est important d'avoir que le facteur  $\mu \neq 0$  : on aura alors que

$$\dot{\varphi}(t) = 0 \implies \beta(1,t) = 0. \tag{11.49}$$

La non-nullité du facteur multiplicatif  $\mu$  est garantie par le lemme suivant.

**Lemme 11.3.** Les noyaux inverses  $L(x, \xi)$  satisfont

$$\begin{aligned} L^{\alpha\alpha}(x, \xi) &= L^{\beta\beta}(x, \xi) \geq 0 & \forall (x, \xi) \in \mathcal{T} \\ L^{\alpha\beta}(x, \xi) &= L^{\beta\alpha}(x, \xi) \geq 0 & \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

ce qui implique par (11.48) que  $\mu \geq 2$  et ne peut donc être 0.

*Démonstration.* La preuve est donnée en Sous-section E.1.1 de l'Annexe E.  $\square$

### 11.5.1.2 Obtention de la loi de commande $U(t)$

La loi de commande de la plateforme  $\ddot{X}_p = U(t)$  peut être conçue de manière à imposer la dynamique en temps fini du Lemme 11.1 à la variable auxiliaire  $\varphi(t)$  :

$$\ddot{\varphi}(t) + [\dot{\varphi}(t)]^{\nu_2} + [\varphi(t)]^{\nu_1} = 0, \quad (11.50)$$

$0 < \nu_2 < 1, \nu_1 > \frac{\nu_2}{2-\nu_2}$ , ce qui suivant la Définition pour  $\varphi(t)$  (11.41) correspond à une loi de commande

$$\begin{aligned} U(t) = \ddot{X}_p(t) &= -\frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left[ \int_0^1 (a(x)\alpha_{tt}(x, t) + b(x)\beta_{tt}(x, t)) \, dx \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(t) + \int_0^1 (a(x)\alpha_t(x, t) + b(x)\beta_t(x, t)) \, dx \right]^{\nu_2} \right. \\ &+ \left. \left[ \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} X_p(t) + \int_0^1 (a(x)\alpha(x, t) + b(x)\beta(x, t)) \, dx \right]^{\nu_1} \right]. \quad (11.51) \end{aligned}$$

Nous prouvons dans la sous-section suivante que le système hybride (plateforme & câble à tension affine) sera stabilisé en temps fini en appliquant cette loi de commande de type rétroaction sur la plateforme. Nous procédons d'abord dans les variables

$$(\varphi(t), \gamma(x, t)),$$

et retournons ensuite aux variables d'origine

$$(X_p(t), y(s, t)).$$

### 11.5.2 Preuve de stabilité en temps fini du système hybride

Nous prouvons ici la stabilité en temps fini du système hybride (11.9)-(11.12) contrôlé par la loi de commande (11.51). La preuve repose sur le fait que la loi stabilise  $\varphi(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  à 0 dans un temps fini  $T_0$ . Dès ce moment, la condition  $\beta(1, t) = 0$  (11.49), et le système cible d'EDPs de type advection (11.29) se stabilise dans un temps fini supplémentaire  $T_1$ , comme mentionné dans les Sous-sections 11.2.4 et 11.4.1. À ce moment, puisque  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  sont à zéro, de la définition de  $\varphi(t)$  (Éq. 11.41) suit que  $X_p(t)$  est aussi stabilisé à 0.

En conclusion, après un temps fini  $T \triangleq T_0 + T_1$ , on a que

$$X_p(t \geq T) = 0, \quad \alpha(x, t \geq T) = 0, \quad \beta(x, t \geq T) = 0,$$

ou, en exécutant les transformations inverses vers l'écriture originale du modèle,

$$X_p(t \geq T) = 0, \quad y(s, t \geq T) = 0.$$

**Théorème 11.2.** Le système (11.9)-(11.12) contrôlé par la loi de commande (11.51) est stabilisé en temps fini :  $\exists T \mid X_p(t \geq T) = 0 \wedge y(s \in [0, 1], t \geq T) = 0$ .

*Démonstration.* Par construction (11.50),  $\varphi(t)$  est zéro dans un temps fini  $T_0$ . Pour  $t \geq T_0$  on a aussi  $\dot{\varphi}(t) = 0$ , et par (11.49),  $\beta(1, t) = 0$ .

Pour  $t \geq T_0$ ,  $\gamma(x, t)$  satisfait le système d'EDPs cible (11.29) avec  $\alpha(0, t) = \beta(0, t)$  et  $\beta(0, t) = 0$ . Regardant les caractéristiques [152] pour une condition aux limites transparente, on en déduit que  $\gamma(x, t) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $t \geq T_1 + T_0$ .

Ainsi, puisque  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  sont à zéro pour  $t \geq T_1 + T_0$ , de la définition pour  $\varphi(t)$  (Éq. (11.41)) suit que  $X_p(t) = 0$  également.

Finalement, de

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda(x)}} \begin{bmatrix} z_t(x, t) - \lambda(x)z_x(x, t) \\ z_t(x, t) + \lambda(x)z_x(x, t) \end{bmatrix},$$

(11.22), où  $w(x, t) = 0$  a cause de la transformation (11.34), on conclut que  $z_t(x, t) = z_x(x, t) = 0$  pour  $t \geq T_1 + T_0$ . Combiné avec le fait que

$$z(1, t) \stackrel{(11.15)}{=} y(1, t) \stackrel{(11.11)}{=} X_p(t) = 0,$$

on a que  $z(x, t) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $t \geq T_1 + T_0$ .

En conclusion, après avoir appliqué la transformation inverse de (11.15) afin de retourner dans la variable originale  $y(s, t)$ , la stabilité en temps fini du système d'origine (11.9)-(11.12) est obtenue pour le temps d'établissement

$$T \triangleq T_0 + T_1. \tag{11.52}$$

□

**REMARQUE 1 – REMARQUE TECHNIQUE** Une preuve plus formelle de la stabilité du système hybride contrôlé par la loi de commande (11.51) intégrant la régularité et le caractère bien posé du problème est fournie en Sous-section E.1.2 de l'Annexe E.

**REMARQUE 2 – TEMPS D'ÉTABLISSEMENT** Il n'existe pas d'expression analytique pour le temps d'établissement  $T$  (11.52). Si l'on peut calculer  $T_1$  de la formule (11.39) avec  $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) = \lambda(x)$ , il n'existe à notre connaissance pas de formule analytique pour le temps  $T_0$  de la dynamique de  $\varphi(t)$  du Lemme 11.1.

**REMARQUE 3 – PAS DE STABILITÉ EN TEMPS FIXE** La fonction de temps d'établissement (comme introduite dans la Définition 11.2) correspondante à la stabilisation en temps fini du système (11.16)-(11.18) commandée par la loi (11.51) obtenue par le Théorème E.2 est composée de deux contributions : une première contribution correspondant à la stabilisation en temps fini de la variable  $\varphi$  (décrite par (11.50), avec un temps d'établissement dont la valeur dépend des paramètres de commande  $\nu_1$  et  $\nu_2$ ), et une deuxième contribution correspondant à la stabilisation en temps fini des variables  $\beta$  et  $\alpha$  (décrites par (11.29)-(11.30), avec un temps d'établissement de  $2 \int_0^1 \lambda^{-1}(x) dx$  d'après (11.39)). La valeur de cette deuxième contribution ne dépend seulement des paramètres physiques du système (c.f. (11.17)). C'est la raison pour laquelle nous ne pouvons pas obtenir de stabilisation en temps fixe [193] du système hybride EDP-EDO.

## 11.6 SIMULATION

En guise d'illustration numérique, le système (11.9)-(11.12) contrôlé par la loi de commande (11.51) est simulé. Les paramètres physiques suivants sont utilisés :

$$m = 2\text{kg}, \quad \rho = 2\text{kg/m}, \quad g = 9.81\text{m/s}^2,$$

ce qui correspond au cas d'une contribution linéaire importante dans la tension du câble (cf. Fig. 11.3).

On commence par le calcul numérique des noyaux de transformation (Sous-section 11.6.1), avant de pouvoir simuler l'évolution temporelle du système contrôlé (Sous-section 11.6.2).

## 11.6.1 Calcul numérique des noyaux de transformation

Les noyaux directs  $K$  sont calculés en résolvant le système (11.35) numériquement [9]<sup>7</sup>, où le domaine  $\mathcal{T}$  est discrétisé avec  $\Delta x = \Delta \zeta = 0.005$ . Connaissant les noyaux directs  $K$ , les noyaux inverses  $L$  sont calculés d'après l'équation (11.37)<sup>8</sup>.

Les noyaux ainsi obtenus sont montrés Figures 11.11-11.12, où les conditions aux limites et les gains de contrôleur sont indiqués. En particulier, les gains de contrôle utilisés dans la loi de commande (11.51) provenant de l'évaluation des noyaux  $L$  à la frontière ( $x = 1, \zeta$ ), sont montrés en détail sur la Figure 11.13.

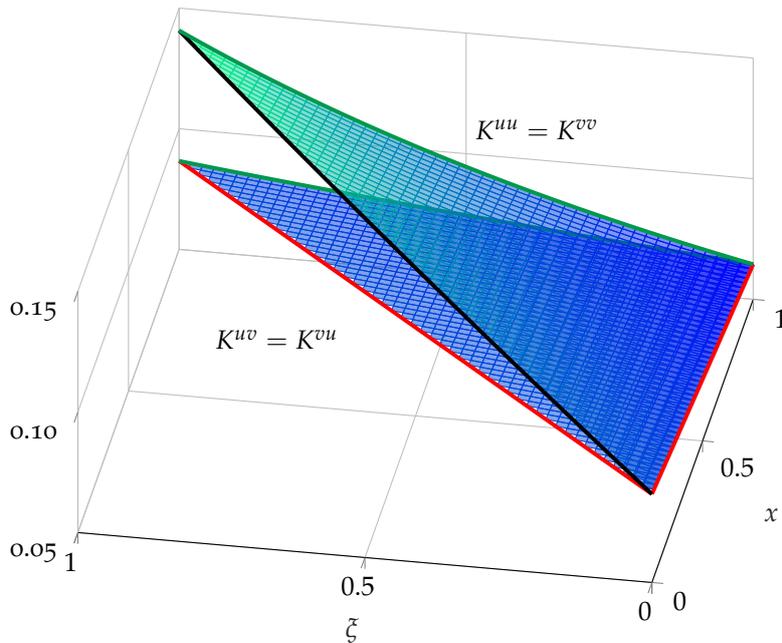


FIGURE 11.11 – Noyaux directs  $K$ . Les bords dessinés en rouge indiquent les conditions aux limites à  $(x, 0)$  et  $(x, x)$  du système de Goursat (11.35). Les bords dessinés en vert correspondent à des gains de contrôle évalués à  $(1, \zeta)$  et utilisés dans la loi de commande (11.38).

## 11.6.2 Simulation de l'évolution temporelle du système contrôlé

Une fois les noyaux de transformation connus, l'évolution temporelle du système (11.9)-(11.12) contrôlé par la loi de commande (11.51) peut être simulée. Afin de simplifier le calcul<sup>9</sup>, nous effectuerons la simulation dans un premier temps dans les coordonnées

$$(X_p(t), \alpha(x, t), \beta(x, t)).$$

Ensuite, les transformations de coordonnées inverses seront appliquées, de sorte à obtenir l'évolution temporelle du système dans les coordonnées d'origine

$$(X_p(t), y(s)).$$

7. Un code MATLAB de l'algorithme est fourni avec le livre.

8. Une implémentation MATLAB a gentiment été mise à disposition par Henrik Anfinson.

9. Il se trouve que l'EDP (11.29) de type advection permet une résolution numérique par la méthode amont-aval, comme montré ci-dessous. Au contraire, une simulation de l'EDP dans les coordonnées d'origine nécessiterait une projection (et troncature) sur une base modale. Pour le cas d'une tension constante, les modes propres pour  $y(s, t)$  sont de la forme  $\psi_i(s) = A_i \sin(\omega_i s) + B_i \cos(\omega_i s)$  [280] et pour le cas de la tension affine, il s'agit des modes propres  $\psi_i(\sigma(s)) = A_i J_0(\sigma(s)) + B_i Y_0(\sigma(s))$  avec  $J_0(\cdot)$  la fonction de Bessel de premier espèce d'ordre 0 et  $Y_0(\cdot)$  la fonction de Neumann-Bessel de deuxième espèce d'ordre 0 [281].

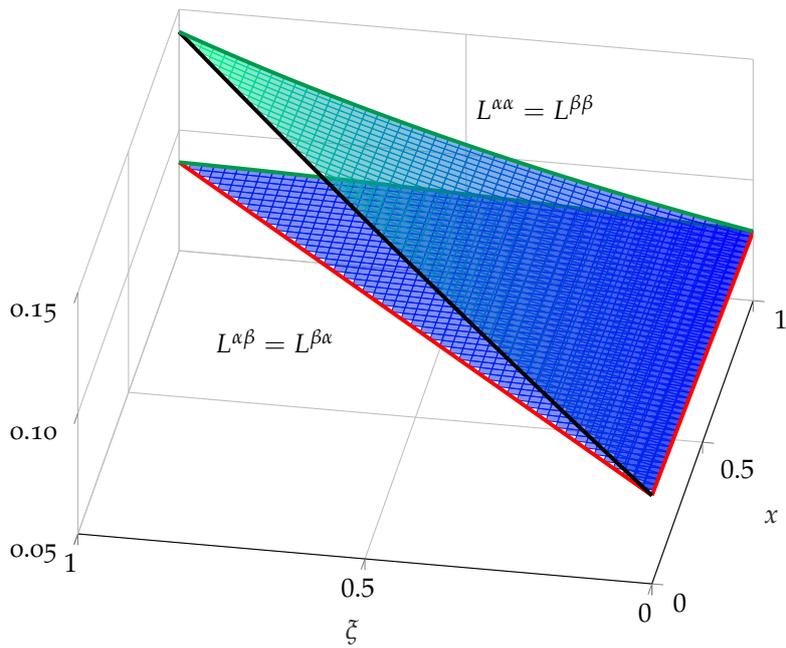


FIGURE 11.12 – Noyaux inverses  $L$ . Les bords dessinés en rouge indiquent les conditions aux limites à  $(x, 0)$  et  $(x, x)$  du système de Goursat (11.36). Les bords dessinés en vert correspondent à des gains de contrôle évalués à  $(1, \zeta)$  et utilisés dans la loi de commande (11.51) ainsi que dans les Équations (11.41) et (11.48).

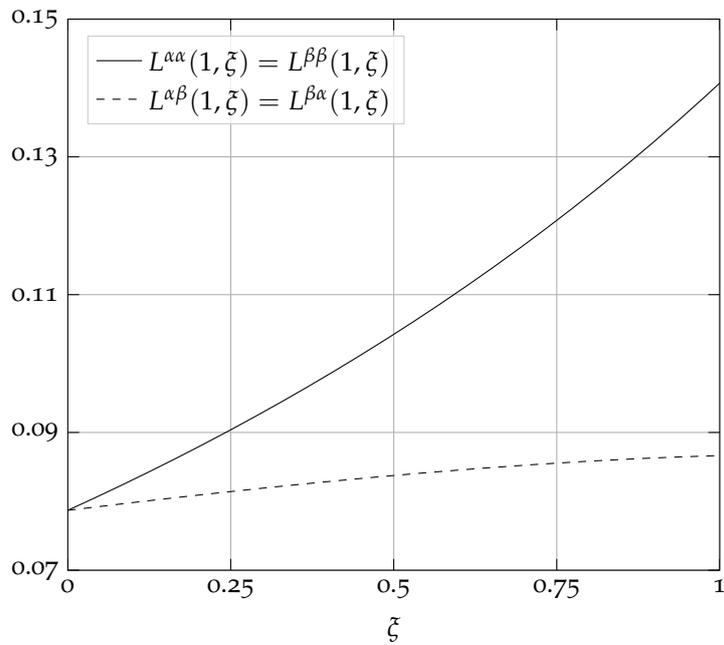


FIGURE 11.13 – Gains de contrôle  $L(1, \zeta)$  utilisés dans la loi de commande (11.51) et dans les Équations (11.41) et (11.48).

**CONDITIONS INITIALES** On considère le cas de conditions initiales nulles, sauf  $X_p(0) = 0.5$  m, c'est-à-dire que le système est initialement au repos avec la plateforme qui se trouve à une position non nulle, comme représenté sur la Figure 11.4(a).

### 11.6.2.1 Évolution temporelle de la variable auxiliaire $\varphi(t)$

L'évolution temporelle de la variable  $\varphi(t)$  qui suit une dynamique stable en temps fini (11.50) est simulée par une méthode numérique proposée dans [196] qui préserve la stabilité en temps fini après discrétisation temporelle. La méthode suppose que le champ de vecteurs  $F$  du système à simuler est  $d$ -homogène [196, Déf. 3.6]<sup>10</sup>, ce qui correspond à prendre  $\nu_1 = \frac{\nu_2}{2-\nu_2}$  dans (11.50). Une transformation de coordonnées non linéaire est donnée, qui permet d'obtenir une représentation alternative en temps continu

$$\dot{z} = \tilde{F}(z),$$

qui admet un schéma de discrétisation implicite préservant la stabilité en temps fini en temps discret. Après la transformation de coordonnées inverse, le schéma de discrétisation implicite préservant la stabilité en temps fini peut être exprimé dans les coordonnées d'origine.

La dynamique (11.50) est réécrite comme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ -[\varphi]^{\frac{\nu_1}{2-\nu_1}} - [\dot{\varphi}]^{\nu_1} \end{bmatrix} \triangleq F \left( \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \right). \quad (11.53)$$

Nous vérifions que les conditions de [196, Théorème 4.1] sont satisfaites. On a que le champ de vecteurs  $F(x)$ , avec

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

est uniformément continu sur la sphère d'unité,  $d$ -homogène de degré d'homogénéité  $\nu_d = -1$  pour la dilatation pondérée

$$d(s) = \begin{bmatrix} e^{r_1 s} & 0 \\ 0 & e^{r_2 s} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-\nu_1}{1-\nu_1} \\ \frac{1}{1-\nu_1} \end{bmatrix},$$

et  $F(-x) = -F(x)$ . Soit  $G_d = \text{diag}(r_1, r_2)$  le générateur de la dilatation  $d(s)$  et soit la matrice  $P \triangleq I_2$  satisfaisant  $PG_d + G_d^T P \succ 0$ .

Finalement, il est exigé que la condition

$$z^T \Xi^T(z) P \Xi(z) \left[ \frac{(I_2 - G_d) z z^T P}{z^T P G_d z} + I_2 \right] F \left( \frac{z}{\|z\|} \right) < 0 \quad (11.54)$$

soit satisfaite pour tout  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , où  $\Xi = I_2$  et  $\|z\| = \sqrt{z^T P z}$ , ce qui selon [196, Thm. 3.8]-[194, Thm. 4] garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique  $V(z) = z^T P z = \|z\|^2$  pour le système défini comme

$$\dot{z} = \left( \frac{(I_2 - G_d) z z^T P}{z^T P G_d z} + I_2 \right) F \left( \frac{z}{\|z\|} \right) \triangleq \tilde{F}(z), \quad (11.55)$$

10. (reprise dans la Définition 5.3 dans le Chapitre 5)

ce qui est la version transformée du système d'origine  $\dot{x} = \tilde{F}(x)$  en utilisant la transformation de coordonnées non linéaire qui sera explicitée ci-dessous dans les Équations (11.58)-(11.59).

La condition (11.54) se simplifie à

$$\frac{\|z\|^3}{r_1 z_1^2 + r_2 z_2^2} \left[ \frac{z_1 z_2}{\|z\|^2} - \frac{z_2}{\|z\|} \left[ \frac{z_1}{\|z\|} \right]^{v_1} - \frac{z_2}{\|z\|} \left[ \frac{z_2}{\|z\|} \right]^{v_2} \right] < 0. \quad (11.56)$$

On observe que l'inégalité stricte (11.56) n'est pas satisfaite pour  $z_2 = 0$ , puisque l'expression du côté gauche vaut alors 0. On remarque que pour  $z_2 = 0 = \dot{z}_2$ , (11.55) se réduit à

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -[\text{sign}(z_1)]^{\frac{v_2}{2-v_2}} \end{bmatrix},$$

ce qui implique que  $z_1 = \dot{z}_1 = 0$ . Alors, la stabilité asymptotique de l'origine de (11.55) est obtenue par le théorème d'invariance de LaSalle<sup>11</sup> si l'on prouve l'inégalité stricte (11.56) pour le cas  $z_2 \neq 0$ . De plus, il suffit de considérer la négativité stricte de l'expression entre crochets, ce qui est fait dans le lemme suivant.

**Lemme 11.4.** Soient  $v_2 \in ]0, 1[$  et  $v_1 = \frac{v_2}{2-v_2} \in ]0, 1[$ . Alors on a pour tout

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

avec  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}^*$ , que

$$\frac{x_2}{\|x\|} \left[ \frac{x_1}{\|x\|} - \left[ \frac{x_1}{\|x\|} \right]^{v_1} - \left[ \frac{x_2}{\|x\|} \right]^{v_2} \right] < 0.$$

*Démonstration.* Soit

$$f(z) \triangleq \frac{z_2}{\|z\|} \left[ \frac{z_1}{\|z\|} - \left[ \frac{z_1}{\|z\|} \right]^{v_1} - \left[ \frac{z_2}{\|z\|} \right]^{v_2} \right], \quad z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

On commence par noter que

$$f(0, z_2) = - \left| \frac{z_2}{\|z\|} \right|^{1+v_2} < 0$$

pour  $z_2 \neq 0$ . On peut donc supposer que l'on a également que  $z_1 \neq 0$ . Soit

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \triangleq \frac{z}{\|z\|}.$$

Alors  $y_1, y_2 \in ]-1, 0[ \cup ]0, 1[$ ,  $\|y\| = 1$  et  $f(z) = g(y) = y_2 (y_1 - |y_1|^{v_1} - |y_2|^{v_2})$ . De  $\|y\| = 1$ , on déduit que

$$y_2 = \pm \sqrt{1 - y_1^2}.$$

Il faut considérer quatre cas :

- (i)  $y_1 \in ]0, 1[$  et  $y_2 = \sqrt{1 - y_1^2}$ ;
- (ii)  $y_1 \in ]0, 1[$  et  $y_2 = -\sqrt{1 - y_1^2}$ ;
- (iii)  $y_1 \in ]-1, 0[$  et  $y_2 = \sqrt{1 - y_1^2}$ ;

11. (cf. Lemme 3.3)

(iv)  $y_1 \in ]-1,0[$  et  $y_2 = -\sqrt{1-y_1^2}$ .

Dans le cas (i), on a que  $g(\mathbf{y}) < 0$ , pour  $y_1 - \lfloor y_1 \rfloor^{\nu_1} < 0$ . Dans le cas (iv), on a aussi que  $g(\mathbf{y}) < 0$ , pour

$$y_1 - \lfloor y_1 \rfloor^{\nu_1} - \lfloor y_2 \rfloor^{\nu_2} = -(|y_1| - |y_1|^{\nu_1}) + |y_2|^{\nu_2} > 0.$$

On définit  $h(s) \triangleq -s + s^{\nu_1} - (1-s^2)^{\frac{\nu_2}{2}}$  pour  $s \in ]0,1[$ . Alors dans le cas (ii), on a que

$$g(\mathbf{y}) = \sqrt{1-y_1^2} h(y_1),$$

pendant que dans le cas (iii), on a que

$$g(\mathbf{y}) = \sqrt{1-y_1^2} \left( -|y_1| + |y_1|^{\nu_1} - (1-y_1^2)^{\frac{\nu_2}{2}} \right) = \sqrt{1-y_1^2} h(|y_1|).$$

Donc, il reste à prouver que  $h(s) < 0$  pour  $s \in ]0,1[$ . Définissant  $\sigma \triangleq s^{\nu_1} \in ]0,1[$ , on note que

$$\begin{aligned} h(s) < 0 &\iff -\sigma^{\frac{1}{\nu_1}} + \sigma < \left(1 - \sigma^{\frac{2}{\nu_1}}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \\ &\iff \sigma \left(1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}-1}\right) < \left(1 + \sigma^{\frac{1}{\nu_1}}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \left(1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} \\ &\iff \sigma^{\frac{2}{\nu_2}} \left(1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}-1}\right)^{\frac{2}{\nu_2}} < \left(1 + \sigma^{\frac{1}{\nu_1}}\right) \left(1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}}\right). \end{aligned} \quad (11.57)$$

Mais pour  $\sigma \in ]0,1[$ , on a que

$$\left(1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}-1}\right)^{\frac{2}{\nu_2}} < 1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}-1} < 1 - \sigma^{\frac{1}{\nu_1}}$$

(puisque  $2/\nu_2 > 2$  et  $1/\nu_1 > 1$ ) et

$$\sigma^{\frac{2}{\nu_2}} < 1 < 1 + \sigma^{\frac{1}{\nu_1}},$$

ce qui implique que l'inégalité (11.57) est satisfaite.  $\square$

On peut maintenant appliquer [196, Théorème 4.1] au champ de vecteurs bidimensionnelle (11.53), et définir une transformation de coordonnées non linéaire entre l'état d'origine

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

et un nouvel état

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} :$$

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_d \mathbf{d} (-\ln \|\mathbf{x}\|_d) \mathbf{x}, \quad (11.58)$$

avec transformation inverse

$$\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z}) = \mathbf{d} (\ln \|\mathbf{z}\|) \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}. \quad (11.59)$$

Ici, la « norme » canonique homogène [196, Eq. 3.4] est définie comme

$$\|\mathbf{x}\|_d = e^{s_x}$$

où  $s_x \in \mathbb{R}$  satisfait

$$\|\mathbf{d}(-s_x)\mathbf{x}\| = 1. \quad (11.60)$$

Plus explicitement, (11.58) correspond à

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{-\frac{s_x}{1-\nu_2}} x_1 \\ e^{-\frac{\nu_2 s_x}{1-\nu_2}} x_2 \end{bmatrix} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $s_x$  est la solution de la condition implicite (11.60)

$$\sqrt{e^{-\frac{2(2-\nu_2)s_x}{1-\nu_2}} x_1^2 + e^{-\frac{2s_x}{1-\nu_2}} x_2^2} = 1$$

qui est résolue numériquement [168] à chaque instant temporel de la simulation.

Finalement, le schéma numérique implicite s'écrit comme

$$\frac{\mathbf{z}(t + \Delta t) - \mathbf{z}(t)}{\Delta t} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}(t + \Delta t)),$$

dans les coordonnées transformées  $\mathbf{z}$ , avec

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}) = \left( \frac{(\mathbf{I}_2 - \mathbf{G}_d) \mathbf{z} \mathbf{z}^\top}{\mathbf{z}^\top \mathbf{G}_d \mathbf{z}} + \mathbf{I}_2 \right) \mathbf{F} \left( \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{\mathbf{z}^\top \mathbf{z}}} \right).$$

En utilisant cette méthode, l'évolution temporelle de la variable auxiliaire  $\varphi(t)$  avec des paramètres de contrôle  $\nu_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\nu_1 = \frac{1}{3}$  est simulée pour un pas temporel  $\Delta t = 0.01$  (Fig. 11.14). En regardant l'erreur logarithmique, on observe qu'elle est stabilisée en un temps fini de  $T_0 \approx 4.23$  s.

### 11.6.2.2 Simulation temporelle de $\alpha(x, t)$ et $\beta(x, t)$

Les deux EDPs du premier ordre pour  $\beta(x, t)$ , (11.32), et pour  $\alpha(x, t)$ , (11.31) sont résolues numériquement par un schéma du premier ordre amont-aval [225]. Des discrétisations spatiale ( $\Delta x = 0.05$ ) et temporelle ( $\Delta t = 0.01$ ) équidistantes sont choisies, respectant la condition CFL de stabilité  $\max(\lambda(x)) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ .

À chaque instant  $t$  de la simulation, les étapes suivantes sont exécutées. D'abord, la condition à la frontière  $\beta(1, t)$  est évaluée de l'Éq. (11.47) connaissant la valeur de  $\dot{\varphi}(t)$ , et avec  $\mu = 2.379$  qui a été calculé numériquement de (11.48) par la méthode des trapèzes sur le maillage spatial. Ensuite, le schéma numérique du premier ordre aval

$$\beta(x, t) = \beta(x, t - \Delta t) + \lambda(x) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\beta(x + \Delta x, t - \Delta t) - \beta(x, t - \Delta t))$$

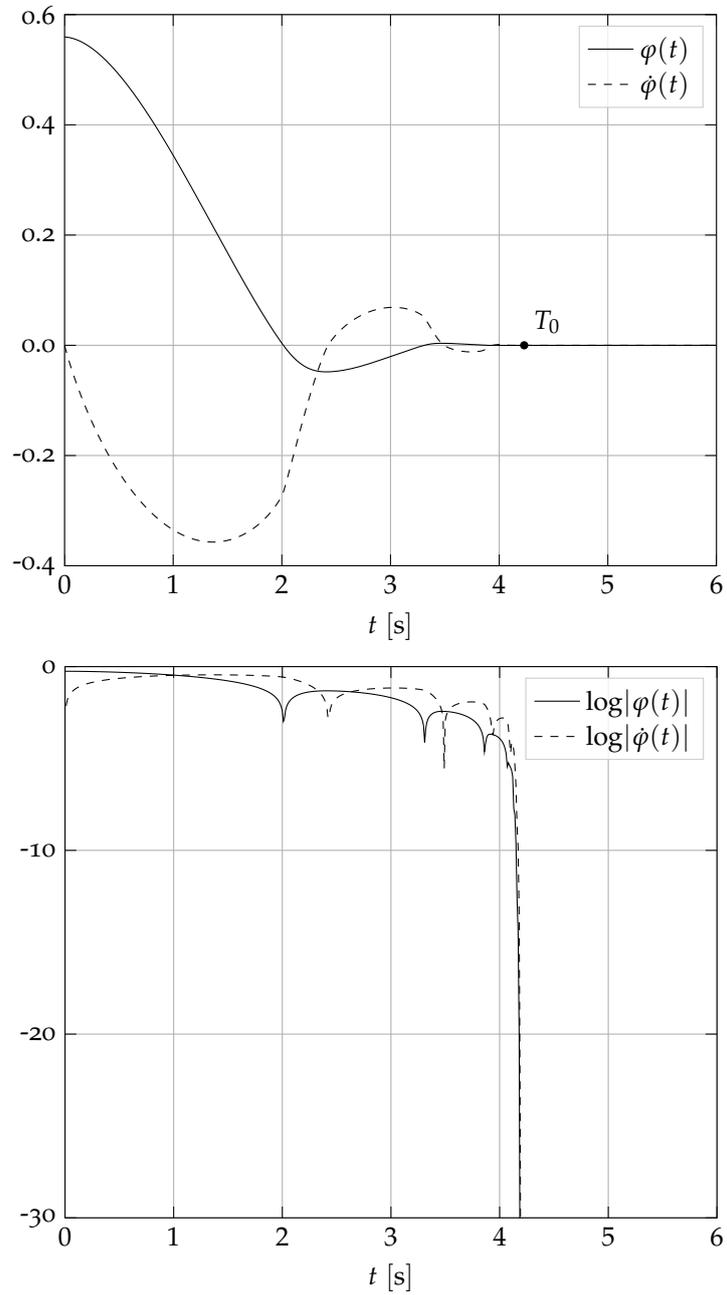
translate l'information dans la coordonnée  $\beta$  pour  $x$  allant de 1 à 0 sur le maillage spatial. Ensuite, la condition à la frontière  $\alpha(0, t) = \beta(0, t)$  est évaluée. Finalement, le schéma numérique du premier ordre amont

$$\alpha(x, t) = \alpha(x, t - \Delta t) - \lambda(x) \frac{\Delta t}{\Delta x} (\alpha(x, t - \Delta t) - \alpha(x - \Delta x, t - \Delta t))$$

translate l'information dans la coordonnée  $\alpha$  pour  $x$  allant de 0 à 1 sur le maillage spatial.

L'évolution temporelle de  $\beta(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$  obtenue est montrée Figures 11.15-11.16. On observe que ces variables sont stabilisées en un temps fini dont la valeur peut être vérifiée par l'expression (c.f. (11.39))

$$T_1 = T_0 + 2 \int_0^1 \frac{1}{\lambda(x)} dx = T_0 + 2 \sqrt{\frac{m}{\rho g}} \left( e^{\frac{g}{2}} - 1 \right) \approx 4.76 \text{ s.}$$

FIGURE 11.14 – Simulation de l'évolution temporelle de la variable auxiliaire  $\varphi(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$ .

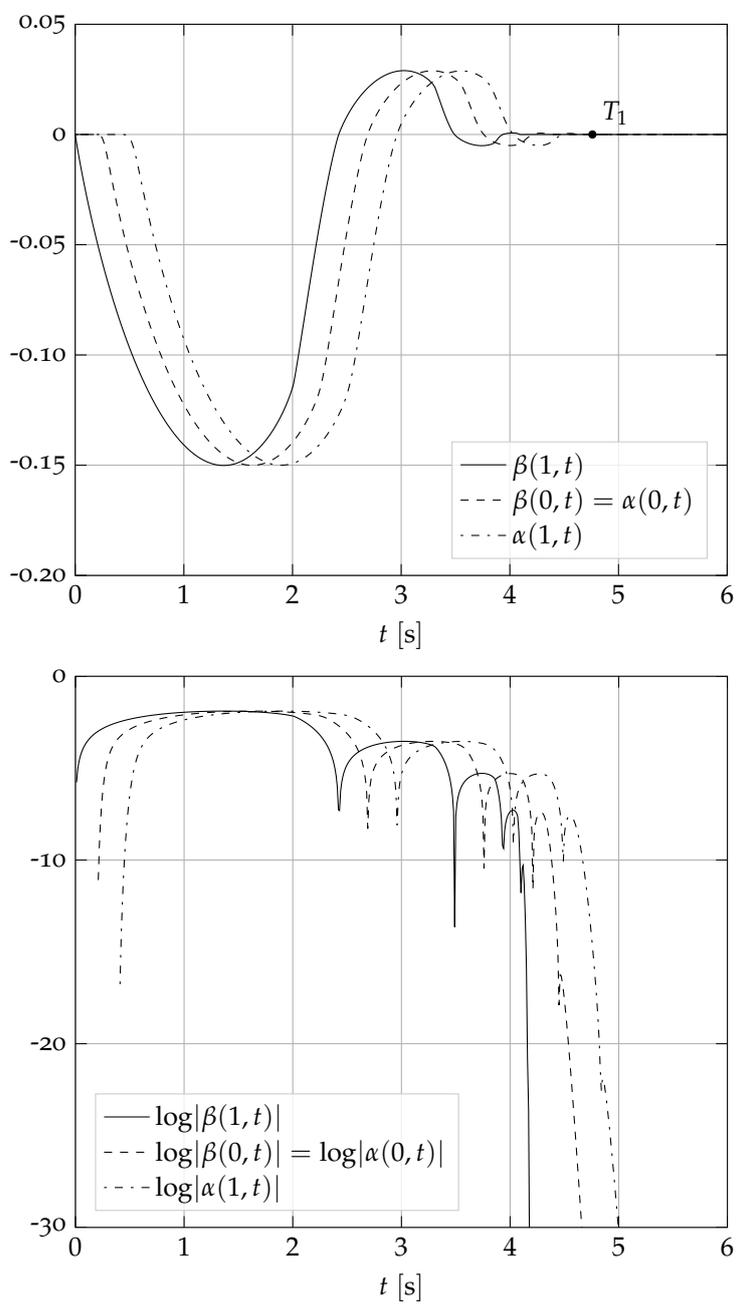


FIGURE 11.15 – Simulation de l'évolution temporelle de  $\beta(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$ , affichée pour  $x = 0$  et  $x = 1$ .

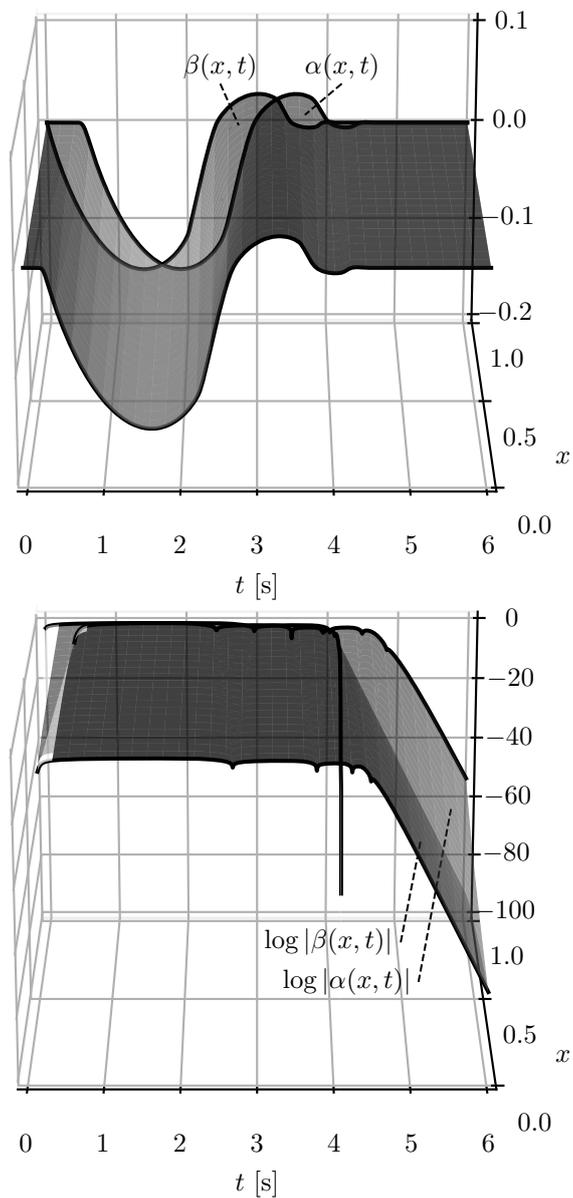


FIGURE 11.16 – Simulation de l'évolution temporelle de  $\beta(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$ , affichée pour tout  $x$

### 11.6.2.3 Simulation de l'évolution temporelle de la position de la plateforme $X_p(t)$

À chaque temps discret  $t$ ,  $\varphi(t)$ ,  $\alpha(x,t)$  et  $\beta(x,t)$  sont connues sur le maillage de la variable  $x$ . La valeur numérique correspondante de la position de la plateforme  $X_p(t)$  est calculée de la définition pour  $\varphi(t)$ , (11.41), où l'intégrale est calculé numériquement par la méthode des trapèzes sur le maillage spatial. L'évolution temporelle de  $X_p(t)$  ainsi obtenue est montrée Figure 11.17.

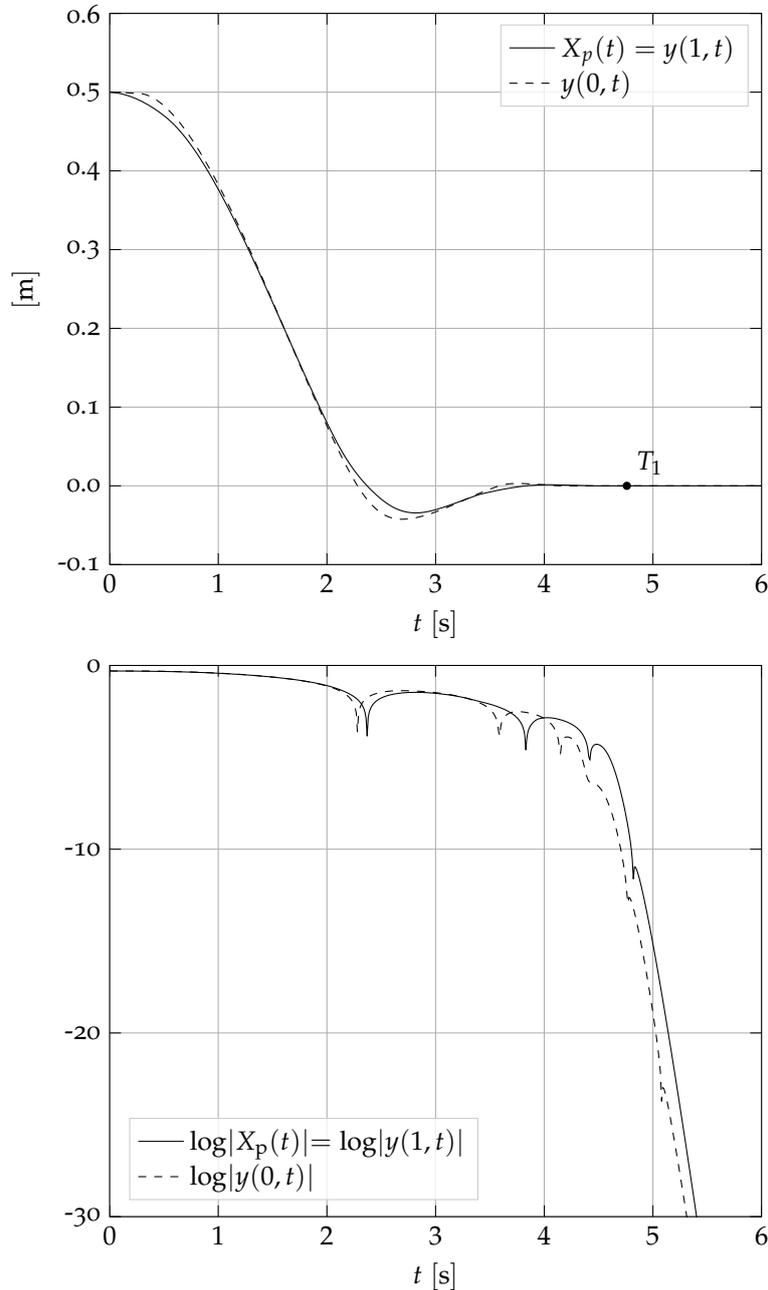


FIGURE 11.17 – Simulation de l'évolution temporelle de la position de la plateforme  $X_p(t)$  et la position du câble  $y(s,t)$  à  $s=0$  et  $s=1$ .

11.6.2.4 Simulation de l'évolution temporelle de la position du câble  $y(s, t)$

Étant donné les valeurs des variables  $(\alpha(x, t), \beta(x, t))$ , on peut effectuer les transformations inverses afin d'exprimer le mouvement du câble dans les coordonnées d'origine  $y(s, t)$  :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} (x, t) &\xrightarrow{(11.34)} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (x, t) \xrightarrow{(11.22)} \frac{1}{\sqrt{\lambda(x)}} \begin{bmatrix} D(x, t) \\ S(x, t) \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{linéaire}]{\text{combinaison}} z_x(x, t) \xrightarrow{\int \cdot dx} z(x, t) \xrightarrow{(11.15)} y(s, t). \end{aligned}$$

Pour l'intégration numérique de  $z_x(x, t)$  à un temps donné  $t$ , on prend la valeur  $z(1, t) = X_p(t)$  afin de garantir la condition de compatibilité (11.11). L'intégration spatiale est ensuite évaluée numériquement par la méthode des trapèzes pour  $x$  allant de 1 à 0 sur le maillage spatial.

L'évolution temporelle de la position du câble  $y(s, t) = z(x, t)$  obtenue est montrée Figures 11.17-11.18.

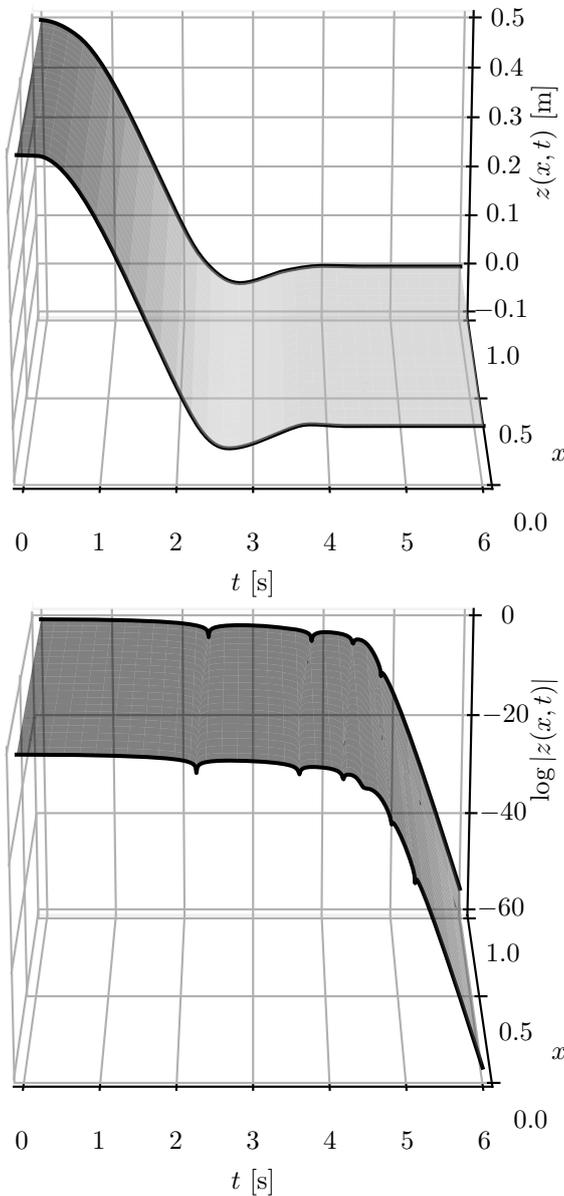


FIGURE 11.18 – Simulation de l'évolution temporelle de la position du câble  $z(x, t) = y(s, t)$ .

En conclusion, le système hybride consistant de la plateforme ( $X_p(t)$ ) et du câble ( $y(s, t)$ ) a été stabilisé à l'origine dans un temps fini, dans ce cas d'une valeur de  $T_1 \approx 4.76$  s. Un aperçu de la simulation du mouvement du système hybride dans l'espace est affiché Figure 11.19.

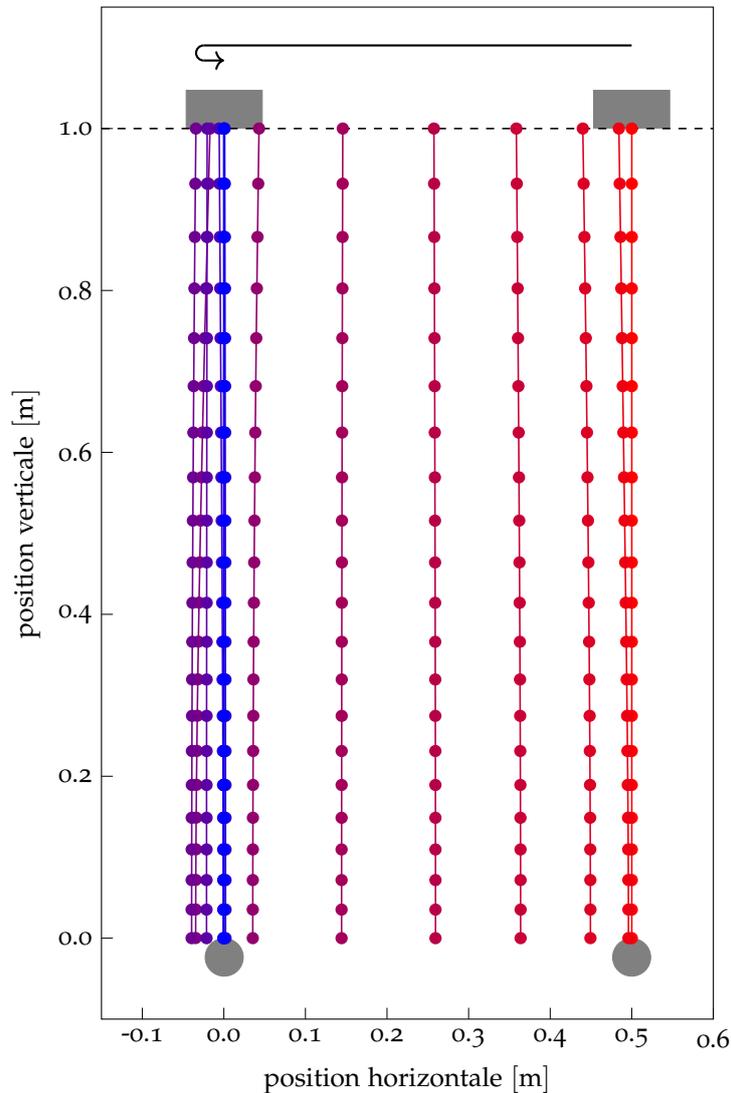


FIGURE 11.19 – Aperçu du mouvement du système dans l'espace. Le maillage spatial dans la coordonnée  $s(x)$  curviligne le long du câble est représenté par des points. La position du câble est affichée pour un nombre de temps équidistant et sa couleur varie du rouge au pourpre puis au bleu pendant le mouvement.

## 11.7 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

### 11.7.1 Conclusions

Une loi de commande stabilisant un modèle planaire hybride décrivant un câble à tension affine attaché à une plateforme a été développée. Cette loi de commande se base sur un résultat existant sur le contrôle en temps fini de systèmes  $2 \times 2$  d'EDPs hyperboliques quasi linéaires, qui nécessite le calcul de noyaux définis par un système d'EDPs de type Goursat. Des méthodes numériques de résolution récentes sont utilisées pour le calcul des noyaux et pour la simulation de la stabilisation du modèle 2D de câble pesant en un temps fini.

### 11.7.2 Perspectives

Le calcul de la loi de commande  $U(t)$  (11.51) proposée nécessite la connaissance de la position  $y(s, t)$  sur toute la longueur du câble. Pour une implémentation plus réaliste, on aurait besoin d'un observateur d'état [9] qui se base sur une mesure de la position  $y(1, t)$  et de l'angle  $\theta(t)$  en haut du câble.

De plus, on pourrait étendre les résultats au cas d'une longueur de câble variable (cf. [273]) ou à un modèle 3D représentant une grue de construction ou un pont roulant, incorporant une rotation ou translation du rail sur lequel se translate la plateforme (comme indiqué dans la Sous-section 11.2.1).

Sixième partie

CONCLUSION



## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## TABLE DES MATIÈRES

12.1	Conclusion . . . . .	225
12.1.1	Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	225
12.1.2	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom . . . . .	226
12.1.3	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant . . . . .	226
12.2	Perspectives . . . . .	226
12.2.1	Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports . . . . .	226
12.2.2	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom . . . . .	226
12.2.3	Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant . . . . .	227

## 12.1 CONCLUSION

12.1.1 *Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports*

Le cas du contrôle en temps fini d'un double intégrateur a été étudié dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports. À partir d'une réinterprétation du système bouclé comme une commande dite IDA-PBC (qui change l'énergie et la dynamique du système), il est possible d'obtenir une reformulation passive de la loi de commande en temps fini. Cette passivité peut apporter de la robustesse, face à, par exemple, une mauvaise identification des paramètres physiques du système. La démarche suivie repose sur le fait que la loi de commande en temps fini utilisée a une fonction de Lyapunov qui peut servir de fonction hamiltonienne dans le formalisme des SHP.

La loi de commande passive en temps fini a été appliquée à la commande d'un haut-parleur comme absorbeur électroacoustique, et à la commande d'une corde non linéaire. Toutefois, dans le cas d'un suivi de trajectoire en temps fini, la propriété de passivité n'a pas encore été obtenue.

Finalement, une méthode numérique implémentant une linéarisation localement déraidissante à l'origine, où les lois de commande sont intrinsèquement non Lipschitz continues, a été proposée. Si cette méthode ne préserve pas la propriété de la stabilisation en temps fini, elle permet de résoudre des problèmes comme le *chattering* pouvant se manifester lors d'une implémentation numérique, ce qui a été montré expérimentalement. Il serait aussi possible d'incorporer cette méthode numérique dans la méthode de simulation par le gradient discret, mais ceci nécessiterait, comme pour le cas de la généralisation de la loi de commande passive en temps fini, d'être capable de formuler le système en boucle fermée comme un SHP.

### 12.1.2 *Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom*

Un contrôleur-observateur a été développé, capable de piloter un haut-parleur dans un tom dans le but de modifier des fréquences dans la vibration de la membrane supérieure de l'instrument. Le contrôleur se base sur une projection modale d'un modèle physique négligeant notamment la propagation du son dans la cavité, entre le haut-parleur et la membrane supérieure du tom.

Une implémentation sur un prototype expérimentale a montré que le contrôleur est en effet capable de modifier des fréquences de la vibration de la membrane supérieure, mais qu'il existe un écart significatif entre le modèle et les mesures. L'utilisation de la méthode de simulation localement déraidissante a permis d'enlever dans la pratique un problème de *chattering* à cause de la raideur des lois de commande utilisées.

La préservation de la stabilité en associant un contrôleur en temps fini et un observateur en temps fini avec un modèle modal tronqué n'a pas été étudiée, ni la passivité de l'observateur.

### 12.1.3 *Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant*

Basé sur un théorème portant sur la commande à la frontière d'une EDP hyperbolique en temps fini, une loi de commande pour la force appliquée à une plateforme à laquelle est attachée un câble a été développée. L'expression de la loi de commande nécessite une intégration numérique d'une expression contenant des noyaux d'une transformation de type *backstepping* préalablement calculés numériquement. Aussi, il est supposé que l'état entier est connu, et seulement le mouvement 2D du système a été considéré.

## 12.2 PERSPECTIVES

### 12.2.1 *Vers un contrôle passif en temps fini d'un système EDO dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports*

Une généralisation de cette contribution consisterait en (i) l'obtention de la propriété de passivité pour un système EDO du deuxième ordre contrôlé par un *suivi de trajectoire* en temps fini, et (ii) une généralisation de la méthode de commande passive en temps fini (vers un point d'équilibre stable ou une trajectoire) au cas d'un système physique *plat d'ordre n*. Si l'on est capable d'obtenir la stabilisation passive en temps fini pour ces systèmes EDO, on peut aussi généraliser la méthode de simulation localement déraidissante incorporée dans la méthode du gradient discret, dont la forme dépendrait de la forme de la loi de commande passive obtenue.

Le problème pratique pour obtenir ces généralisations par l'approche suivie dans le formalisme des SHP est que l'on doit être capable de reformuler un système donné en boucle fermée commandé par une loi de commande en temps fini comme un SHP. Des essais de réécriture de systèmes commandés par les lois en temps fini pour des ordres supérieurs à 2 (p.ex. de Bhat & Bernstein, de Hong, ou de d'Andréa-Novel-Coron-Perruquetti) en essayant d'utiliser des fonctions de Lyapunov données comme fonction hamiltonienne ou en essayant de construire une fonction hamiltonienne soi-même n'ont pas abouti à une structure SHP.

S'il s'avère qu'il n'est pas possible de retrouver une structure SHP, il faudrait approcher la généralisation d'une autre manière.

### 12.2.2 *Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du tom*

Si l'on veut améliorer la performance du contrôleur pour la loi de commande proposée (observateur-régulateur en temps fini, capteur de pression dans la cavité et haut-parleur comme actionneur), il semble être primordial de prendre en compte la propagation dans le fût dans le modèle utilisé dans le contrôleur.

De plus, il faudrait regarder plus en détail l'accordage du tom afin d'obtenir une distribution de tension plus homogène dans la membrane supérieure.

Finalement, si l'on veut aussi être capable d'influencer des modes de vibration de la membrane supérieure non axisymétriques, il faudrait considérer d'ajouter d'autres actionneurs comme une capsule piézoélectrique sur la membrane, éloignée de son centre.

Une étude de la propriété de stabilité en temps fini du système avec l'architecture de commande proposée basée sur une approche modale peut être faite. À cause des expressions non linéaires dans l'observateur-régulateur, on ne peut utiliser la propriété de superposition dans l'analyse, qui serait valide dans le cas d'un système bouclé linéaire. De plus, du fait de l'approche modale, l'influence de *spillover* doit être prise en compte dans l'analyse. Concernant l'étude de la passivité, si l'on utilise l'approche dans le formalisme des SHP, il faut commencer par une reformulation passive de l'observateur, ce qui n'a pas été faite ici.

### 12.2.3 *Contrôle en temps fini d'un système hybride EDP-EDO : le cas du câble pesant*

Pour approcher cette contribution plus d'une implémentation expérimentale, il faudrait ajouter un observateur d'état en temps fini au modèle, basé sur p.ex. la mesure de l'angle en haut du câble.

De plus, le résultat pourrait être généralisé au cas d'un mouvement 3D (une rotation supplémentaire dans le cas d'une grue de construction, ou une translation supplémentaire dans le cas d'un pont roulant).



## APPENDIX



Cette annexe regroupe quelques not(at)ions basiques mathématiques.

---

TABLE DES MATIÈRES

A.1 Algèbre . . . . .	231
A.2 Analyse . . . . .	231
A.3 Équations aux dérivées partielles . . . . .	232

---

A.1 ALGÈBRE

$\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$  : ensemble des nombres réels positifs (0 inclus).

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ensemble des nombres réels sans 0.

$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  : ensemble des nombres réels sans 0.

$\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.

Une *matrice antisymétrique*  $A$  satisfait  $A^T = -A$ . Sa diagonale est zéro.

Une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est *définie positive* ( $A \succ 0$ ) si la forme quadratique  $x^T A x > 0$  pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}_0^n$ .

Une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est *semi-définie positive* ( $A \succeq 0$ ) si la forme quadratique  $x^T A x \geq 0$  pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Une fonction réelle  $f(x) \in \mathcal{C}^1(D)$  est *(semi-)définie positive* sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  contenant l'origine si  $f(0) = 0$  et  $f(x) > 0$  ( $f(x) \geq 0$ ) pour tout  $x \in D \setminus \{0\}$ .

Une fonction réelle  $f(x) \in \mathcal{C}^1(D)$  est *(semi-)définie négative* sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  contenant l'origine si  $-f(x)$  y est (semi-)définie positive.

Matrice zéro de dimension  $n$  :

$$O_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice d'unité de dimension  $n$  :

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice diagonale :

$$\text{diag}(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

A.2 ANALYSE

FONCTIONS REMARQUABLES

Fonction de Heaviside (échelon, Fig. A.1) :

$$\mathbb{H}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0. \end{cases}$$

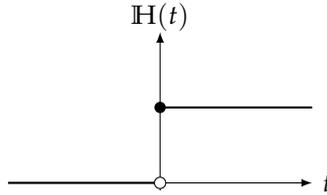


FIGURE A.1 – Fonction de Heaviside

Une fonction continue  $\alpha : [0, a[ \rightarrow [0, +\infty[$  appartient à la classe de fonctions de comparaison  $\mathcal{K}$  [128] si elle est strictement croissante et  $\alpha(0) = 0$ . Si  $a = +\infty$  et  $\alpha(r) \rightarrow +\infty$  pour  $r \rightarrow +\infty$ , elle appartient à la classe  $\mathcal{K}_\infty$ .

#### DISTRIBUTIONS

La distribution de Dirac  $\delta(t)$  (ou, par abus de langage, la fonction  $\delta$  de Dirac) peut être vue comme une fonction nulle dans tout  $\mathbb{R}$  sauf une valeur infinie en 0. Elle satisfait la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

#### CLASSES DE RÉGULARITÉ

Une fonction réelle  $f(x)$  appartient à la classe des *fonctions de carré sommable*  $L^2(D)$  sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}$  si l'intégrale

$$\|f\|_2 \triangleq \sqrt{\int_D |f(x)|^2 dx}$$

existe et vaut un nombre fini. Cette condition permet un nombre fini de discontinuités dans la fonction  $f(x)$ .

Une fonction réelle  $f(x)$  appartient à la classe des *fonctions*  $\mathcal{C}(D)$  sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}$  si elle y est continue.

Une fonction réelle  $f(x)$  appartient à la classe des *fonctions*  $\mathcal{C}^1(D)$  sur un domaine  $D \subseteq \mathbb{R}$  si elle y est continue, une fois dérivable, et sa dérivée  $df(x)/dx$  est continue.

Une fonction réelle  $f(x) : D(\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est *Lipschitz continue* s'il existe une constante réelle et positive  $L$ , telle que, pour tout  $x_1, x_2 \in D$ ,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|.$$

Cette notion forte signifie qu'il existe un maximum (fini) pour la pente que peut avoir la fonction  $f$  dans son domaine  $D$ .

### A.3 ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

#### ORDRE D'UNE EDP

L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle la plus élevée présente dans l'EDP.

## QUELQUES EDPs

Il existe beaucoup de types d'EDPs, dont quelques exemples standard sont mentionnés ici [135], où  $t$  est la variable de temps et  $x$  la variable d'espace. On note que, contrairement aux EDOs, il n'existe pas de méthodes d'analyse ou de commande générales ; il faut les étudier au cas par cas.

*EDPs du premier ordre*

Un EDP contenant une  $\partial_t$  et une  $\partial_x$  représente un modèle de transport ou une ligne à retard.

*EDPs du second ordre*

- Une EDP contenant une  $\partial_t$  et une  $\partial_{xx}$  est une EDP parabolique, modélisant p.ex. un système de réaction-advection-diffusion.
- Une EDP contenant une  $\partial_{tt}$  et une  $\partial_{xx}$  est une EDP hyperbolique, modélisant p.ex. la propagation des ondes.
- Une EDP contenant une  $\partial_{tt}$  et une  $\partial_{xxxx}$  peut représenter le modèle d'une poutre.
- Une EDP contenant une  $\partial_{xx}$  et ne contenant pas de dérivée temporelle est une EDP elliptique, pouvant représenter p.ex. la solution à l'état d'équilibre de l'équation de chaleur.



## CROCHETS

Des règles de calcul pour les crochets  $\lfloor x \rfloor^\alpha \triangleq \text{sign}(x)|x|^\alpha$  sont obtenues directement de la définition. Nous en mentionnons quelques-unes ici.

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor^1 &= x \\ \lfloor -x \rfloor^\alpha &= -\lfloor x \rfloor^\alpha \\ \frac{1}{\lfloor x \rfloor^\alpha} &= \lfloor x \rfloor^{-\alpha} \\ \lfloor x \rfloor^{2n-1} &= x^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \lfloor x \rfloor^{2n} &= \text{sign}(x) \cdot x^{2n} \\ \lfloor kx \rfloor^\alpha &= \lfloor k \rfloor^\alpha \lfloor x \rfloor^\alpha \\ \lfloor \lfloor x \rfloor^\alpha \rfloor^\beta &= \lfloor x \rfloor^{\alpha\beta} \\ \lfloor k \lfloor x \rfloor^\alpha \rfloor^\beta &= \text{sign}(kx) |k|^\beta |x|^{\alpha\beta} = \lfloor k \rfloor^\beta \lfloor x \rfloor^{\alpha\beta} \\ |k \lfloor x \rfloor^\alpha|^\beta &= |k|^\beta |x|^{\alpha\beta} \\ \lfloor k |x|^\alpha \rfloor^\beta &= \lfloor k \rfloor^\beta |x|^{\alpha\beta} \\ |k |x|^\alpha|^\beta &= |k|^\beta |x|^{\alpha\beta} \\ |x|^\alpha |x|^\beta &= |x|^{\alpha+\beta} \\ |x|^\alpha \lfloor x \rfloor^\beta &= \lfloor x \rfloor^{\alpha+\beta} \\ \lfloor x \rfloor^\alpha \lfloor x \rfloor^\beta &= |x|^{\alpha+\beta} \\ \frac{d}{dx} |x|^\alpha &= \alpha |x|^{\alpha-1} \\ \frac{d}{dx} \lfloor x \rfloor^\alpha &= \alpha |x|^{\alpha-1} \\ \int |x|^\alpha dx &= \frac{1}{1-\alpha} |x|^{1+\alpha} + C \\ \int \lfloor x \rfloor^\alpha dx &= \frac{1}{1-\alpha} |x|^{1+\alpha} + C \end{aligned}$$



Ce chapitre contient les détails des calculs correspondant au Chapitre 9.

## TABLE DES MATIÈRES

c.1	Acoustique des membranophones . . . . .	237
c.1.1	Fonctions de Bessel et propriétés . . . . .	237
c.2	Modèle . . . . .	239
c.2.1	Modèle SHP : modèle hybride . . . . .	239
c.2.2	Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride . . . . .	241
c.2.3	Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre . . . . .	245
c.2.4	Représentation d'état . . . . .	266
c.3	Contrôle modal . . . . .	270
c.3.1	Régulateur en temps fini . . . . .	270
c.3.2	Observateur en temps fini . . . . .	273

## C.1 ACOUSTIQUE DES MEMBRANOPHONES

## C.1.1 Fonctions de Bessel et propriétés

## C.1.1.1 Définition

Comme mentionné dans le Chapitre 9, les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$J_m(z),$$

sont une solution de l'EDO de Bessel [2]

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - m^2)y = 0.$$

On peut les exprimer comme la série [2]

$$J_m(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^m \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k! \Gamma(m+k+1)},$$

ou comme l'intégrale [2]

$$J_m(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2m} \theta \, d\theta.$$

Quelques fonctions de Bessel de première espèce sont montrées Figure C.1. Elles ont une infinité de zéros [2], dont les premières valeurs numériques sont répertoriées dans le Tableau C.1.

## C.1.1.2 Propriétés

Les propriétés suivantes sont répertoriées dans [2, 171, 215].

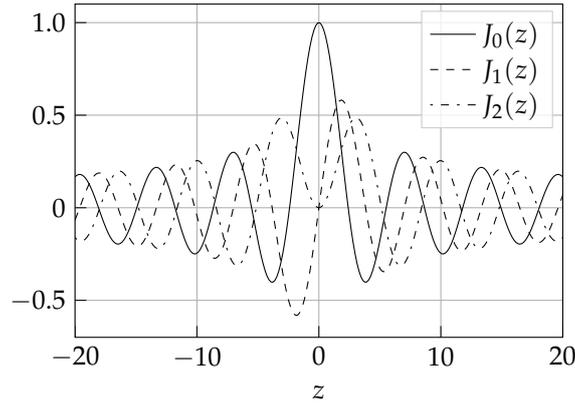


FIGURE C.1 – Graphe des premières fonctions de Bessel de première espèce

Tableau C.1 – Premiers zéros des premières fonctions de Bessel de première espèce [254]

fonction	zéros				
$J_0(z)$	2.405	5.520	8.654	11.792	14.931
$J_1(z)$	3.832	7.016	10.174	13.324	16.471
$J_2(z)$	5.136	8.417	11.620	14.796	17.960
$J_3(z)$	6.380	9.761	13.015	16.224	19.409
$J_4(z)$	7.588	11.065	14.373	17.616	20.827

VALEUR EN 0 En  $z = 0$ , on a que  $J_0(0) = 1$  et  $J_k(0) = 0$  pour tout  $k$  entier  $> 0$  (cf. Fig. C.1).

RELATION ENTRE TROIS FONCTIONS DE BESSEL CONSÉCUTIVES

$$J_{m-1}(z) + J_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} J_m(z) \tag{C.1}$$

avec en particulier :

$$J_0(z) + J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z) \tag{C.2}$$

(On remarque que dans le cas d’une membrane couplée à une cavité, développé dans le Chapitre 9, on a aussi la relation (9.12) entre  $J_0(z)$  et  $J_2(z)$ .)

DÉRIVÉES

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z) \tag{C.3}$$

$$\frac{d}{dz} J_m(z) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(z) - J_{m+1}(z)]$$

donc

$$\frac{d}{dz} J_1(z) = \frac{1}{2} [J_0(z) - J_2(z)] \tag{C.4}$$

INTÉGRALES (La constante d’intégration est représentée par C.)

$$\int z J_0(z) dz = z J_1(z) + C \tag{C.5}$$

$$\int zJ_1(z) dz = \frac{\pi z}{2} [J_1(z)H_0(z) - J_0(z)H_1(z)] + C \quad (\text{C.6})$$

où  $H_\nu(z)$  est la fonction de Struve [215, p. 7] définie comme [2, Chapitre 12]

$$H_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}}{\Gamma(k + \frac{3}{2}) \Gamma(k + \nu + \frac{3}{2})}$$

Propriété [2, p. 497] :

$$H_0(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2k+1}(z)}{2k+1} \quad (\text{C.7})$$

$$\int zJ_0^2(z) dz = \frac{z^2}{2} [J_0^2(z) + J_1^2(z)] + C \quad (\text{C.8})$$

$$\int zJ_m^2(z) dz = \frac{z^2}{2} [J_m^2(z) - J_{m-1}(z)J_{m+1}(z)] + C$$

donc

$$\int zJ_1^2(z) dz = \frac{z^2}{2} [J_1^2(z) - J_0(z)J_2(z)] + C \quad (\text{C.9})$$

ou encore, après substitution de  $J_2(z)$  selon l'Éq. (C.2),

$$\int zJ_1^2(z) dz = \frac{z}{2} [zJ_0^2(z) + zJ_1^2(z) - 2J_0(z)J_1(z)] + C \quad (\text{C.10})$$

$$\int zJ_0(\alpha z)J_0(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [\alpha J_1(\alpha z)J_0(\beta z) - \beta J_0(\alpha z)J_1(\beta z)] + C \quad (\text{C.11})$$

$$\int zJ_1(\alpha z)J_1(\beta z) dz = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} [\beta J_1(\alpha z)J_0(\beta z) - \alpha J_0(\alpha z)J_1(\beta z)] + C \quad (\text{C.12})$$

$$\int z^2J_1(z) dz = z [2J_1(z) - zJ_0(z)] + C \quad (\text{C.13})$$

## C.2 MODÈLE

### C.2.1 Modèle SHP : modèle hybride

**Lemme C.1.** L'opérateur  $\mathcal{J}$  du modèle SHP (9.20) est formellement anti-auto-adjoint.

*Démonstration.* D'après la définition [251], il faut prouver que

$$\langle \mathbf{a}, \mathcal{J}\mathbf{b} \rangle = -\langle \mathcal{J}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle, \quad (\text{C.14})$$

avec le produit scalaire

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \triangleq \int_S \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} d\mathcal{S} + \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

et des vecteurs d'état

$$\mathbf{a}(r,t) = \begin{bmatrix} a_1(r,t) \\ a_2(r,t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(r,t) = \begin{bmatrix} b_1(r,t) \\ b_2(r,t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \\ b_5(t) \end{bmatrix},$$

où

$$a_1(r=a,t) = 0, \quad b_2(r=a,t) = 0, \quad b_1(r=a,t) = 0, \quad b_2(r=a,t) = 0$$

et

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & \text{div} & -\mathbf{1} & 0 & 0 \\ \text{grad} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_{\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S} & 0 & 0 & -S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule que

$$\mathcal{J}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \text{div}(b_2) - b_3 \\ \text{grad}(b_1) \\ \int_{\mathcal{S}} b_1 d\mathcal{S} - S_1 b_4 \\ S_1 b_3 - b_5 \\ b_4 \end{bmatrix},$$

avec  $\text{grad} = \frac{\partial}{\partial r}$  et  $\text{div} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$ . On a alors que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}, \mathcal{J}\mathbf{b} \rangle &= \int_{\mathcal{S}} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) b_2 - b_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} b_1 \end{bmatrix} d\mathcal{S} + \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{S}} b_1 d\mathcal{S} - S_1 b_4 \\ S_1 b_3 - b_5 \\ b_4 \end{bmatrix} \\ &= 2\pi \int_0^1 a_1 \left[ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) b_2 - b_3 \right] r dr + 2\pi \int_0^1 a_2 \frac{\partial}{\partial r} b_1 r dr \\ &\quad + a_3 \left[ 2\pi \int_0^1 b_1 r dr - S_1 b_4 \right] + a_4 [S_1 b_3 - b_5] + a_5 b_4, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\langle \mathcal{J}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= -2\pi \int_0^1 b_1 \left[ \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) a_2 - a_3 \right] r dr - 2\pi \int_0^1 b_2 \frac{\partial}{\partial r} a_1 r dr \\ &\quad - b_3 \left[ 2\pi \int_0^1 a_1 r dr - S_1 a_4 \right] - b_4 [S_1 a_3 - a_5] - b_5 a_4. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties (I.P.), on calcule que

$$\begin{aligned} \int_0^1 a_2 \frac{\partial}{\partial r} b_1 r dr &= \int_{r=0}^{r=1} a_2 r d(b_1) \stackrel{\text{I.P.}}{=} a_2 b_1 r \Big|_0^1 - \int_{r=0}^{r=1} b_1 d(a_2 r) \\ &= - \int_0^1 b_1 \left[ r \frac{\partial a_2}{\partial r} + a_2 \right] dr = - \int_0^1 \left[ b_1 \frac{\partial a_2}{\partial r} + \frac{a_2 b_1}{r} \right] r dr \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 b_2 \frac{\partial}{\partial r} a_1 r dr = - \int_0^1 \left[ a_1 \frac{\partial b_2}{\partial r} + \frac{a_1 b_2}{r} \right] r dr.$$

On peut sortir  $a_3$  et  $b_3$  des intégrales, puisqu'ils ne dépendent pas de  $r$ . En identifiant les termes respectifs, on obtient (C.14).  $\square$

### c.2.2 Modèle SHP : adimensionnement du modèle hybride

Nous divisons toutes les variables par des références et dénotons les variables adimensionnées par un tilde :

$$\tilde{v} \triangleq \frac{v}{v_{\text{ref}}},$$

où les variables de références  $v_{\text{ref}}$  seront choisis ci-dessus dans un but de remplacer un maximum de groupes adimensionnés par la valeur 1, facilitant l'écriture du modèle dans les calculs subséquents.

#### c.2.2.1 Choix préliminaire de quelques références

À ce point, on définit déjà les références

$$\tilde{r} = \frac{r}{a} \in \tilde{\Omega} = [0, 1]$$

et

$$\tilde{t} = \frac{c}{a} t.$$

REMARQUE On a que  $\mathcal{S} = \pi a^2$  et  $\tilde{\mathcal{S}} = \pi$ , ou encore  $\mathcal{S} = a^2 \tilde{\mathcal{S}}$ . De ce fait, l'intégration sur le domaine de la membrane s'écrira  $\int_{\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S} = a^2 \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \cdot d\tilde{\mathcal{S}}$ , ou encore  $\int_0^a \cdot (2\pi r) dr = a^2 \int_0^1 \cdot (2\pi \tilde{r}) d\tilde{r}$ .

#### c.2.2.2 Adimensionnement formel

Ici, nous adimensionnons tout par des références arbitraires et calculons ce que devient le SHP. Après, un choix judicieux pour les références pourra être fait.

- ADIMENSIONNEMENT DE L'ÉTAT Soit

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{x_i^{\text{ref}}}$$

avec  $x_i$  un composant de l'état  $\mathbf{x}$  et  $x_i^{\text{ref}}$  une référence à déterminer ultérieurement. Le vecteur de variables de références est

$$\mathbf{x}^{\text{ref}} = \left[ \pi_{\text{m}}^{\text{ref}} \quad \varepsilon_{\text{m}}^{\text{ref}} \quad V_{\text{c}}^{\text{ref}} \quad \pi_1^{\text{ref}} \quad l_1^{\text{ref}} \right]^{\text{T}}.$$

#### DÉRIVÉE DE L'ÉTAT

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} = \frac{a}{c} \left[ \frac{1}{\pi_{\text{m}}^{\text{ref}}} \quad \frac{1}{\varepsilon_{\text{m}}^{\text{ref}}} \quad \frac{1}{V_{\text{c}}^{\text{ref}}} \quad \frac{1}{\pi_1^{\text{ref}}} \quad \frac{1}{l_1^{\text{ref}}} \right] \frac{d\mathbf{x}}{dt}$$

- ADIMENSIONNEMENT DU HAMILTONIEN On définit un Hamiltonien  $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}})$  qui correspond à  $H(\mathbf{x})$  adimensionné en le divisant par une référence (à déterminer)  $E_0^{\text{ref}}$  [J] et en substituant les variables d'état adimensionnées  $\tilde{\mathbf{x}}$  :

$$H(\mathbf{x}) \text{ [J]} \xrightarrow{\text{état adimensionné}} H(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ [J]} \xrightarrow{\text{diviser par } E_0^{\text{ref}}} \tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}}) \text{ [-]}$$

On obtient

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_S \frac{\pi_m^2}{\sigma_m} dS + \frac{1}{2} \int_S T \varepsilon_m^2 dS + \frac{1}{2} \frac{\gamma p_0}{V_0} V_c^2 + \frac{1}{2} \frac{\pi_1^2}{m_1} + \frac{1}{2} k_1 \ell_1^2$$

$$H(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} a^2 \frac{(\pi_m^{\text{ref}})^2}{\sigma_m} \int_{\tilde{S}} \tilde{\pi}_m^2 d\tilde{S} + \frac{1}{2} a^2 T (\varepsilon_m^{\text{ref}})^2 \int_{\tilde{S}} \tilde{\varepsilon}_m^2 d\tilde{S} \\ + \frac{1}{2} \frac{\gamma p_0}{V_0} (V_c^{\text{ref}})^2 (\tilde{V}_c)^2 + \frac{1}{2} \frac{(\pi_1^{\text{ref}})^2}{m_1} \tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} k_1 (\ell_1^{\text{ref}})^2 \tilde{\ell}_1^2$$

$$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{H(\tilde{\mathbf{x}})}{E_0^{\text{ref}}} = \frac{1}{2} \frac{E_1^{\text{ref}}}{E_0^{\text{ref}}} \int_{\tilde{S}} \tilde{\pi}_m^2 d\tilde{S} + \frac{1}{2} \frac{E_2^{\text{ref}}}{E_0^{\text{ref}}} \int_{\tilde{S}} \tilde{\varepsilon}_m^2 d\tilde{S} \\ + \frac{1}{2} \frac{E_3^{\text{ref}}}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{V}_c^2 + \frac{1}{2} \frac{E_4^{\text{ref}}}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} \frac{E_5^{\text{ref}}}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\ell}_1^2,$$

où

$$\begin{cases} E_1^{\text{ref}} \triangleq a^2 \frac{(\pi_m^{\text{ref}})^2}{\sigma_m} \\ E_2^{\text{ref}} \triangleq a^2 T (\varepsilon_m^{\text{ref}})^2 \\ E_3^{\text{ref}} \triangleq \frac{\gamma p_0}{V_0} (V_c^{\text{ref}})^2 \\ E_4^{\text{ref}} \triangleq \frac{1}{m_1} (\pi_1^{\text{ref}})^2 \\ E_5^{\text{ref}} \triangleq k_1 (\ell_1^{\text{ref}})^2, \end{cases}$$

le tout en [J].

DÉRIVÉE VARIATIONNELLE DU HAMILTONIEN Avec ce Hamiltonien  $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}})$  correspond une dérivée variationnelle (cf. [251])

$$D_{\tilde{\mathbf{x}}} \tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} D_1(\tilde{\pi}_m) \tilde{H} \\ D_2(\tilde{\varepsilon}_m) \tilde{H} \\ D_3(\tilde{V}_c) \tilde{H} \\ D_4(\tilde{\pi}_1) \tilde{H} \\ D_5(\tilde{\ell}_1) \tilde{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a^2 (\pi_m^{\text{ref}})^2}{\sigma_m E_0^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_m \\ \frac{a^2 T (\varepsilon_m^{\text{ref}})^2}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\varepsilon}_m \\ \frac{\gamma p_0 (V_c^{\text{ref}})^2}{V_0 E_0^{\text{ref}}} \tilde{V}_c \\ \frac{(\pi_1^{\text{ref}})^2}{m_1 E_0^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_1 \\ \frac{k_1 (\ell_1^{\text{ref}})^2}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix}.$$

• SHP ADIMENSIONNÉ On substitue les références dans les 5 équations du SHP 9.21.

(1)

$$\frac{d\pi_m}{dt} = \text{div}(T\varepsilon_m) + p_c = T \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \varepsilon_m + p_c - \mu \frac{\pi_m}{\sigma_m}$$

$$\frac{d\tilde{\pi}_m}{d\tilde{t}} = \frac{T}{c} \frac{\varepsilon_m^{\text{ref}}}{\pi_m^{\text{ref}}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \tilde{\varepsilon}_m + \frac{a}{c} \frac{1}{\pi_m^{\text{ref}}} p_c - \frac{a\mu}{c\sigma_m} \tilde{\pi}_m$$

$$\frac{d\tilde{\pi}_m}{d\tilde{t}} = \frac{1}{a^2 c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_m^{\text{ref}} \varepsilon_m^{\text{ref}}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) D_2 \tilde{H} - \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_m^{\text{ref}} V_c^{\text{ref}}} D_3 \tilde{H} - \frac{\mu}{ac} \frac{E_0^{\text{ref}}}{(\pi_m^{\text{ref}})^2} D_1 \tilde{H}$$

(2)

$$\frac{d\varepsilon_m}{dt} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\sigma_m} \pi_m \right)$$

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}_m}{d\tilde{t}} = \frac{1}{a^2 c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\varepsilon_m^{\text{ref}} \pi_m^{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} D_1 \tilde{H}$$

(3)

$$\frac{dV_c}{dt} = \int_S \frac{dy_m}{dt} dS - S_1 \frac{d\ell_1}{dt}$$

$$\frac{d\tilde{V}_c}{d\tilde{t}} = \int_{\tilde{S}} \frac{a^3}{c \sigma_m} \frac{\pi_m^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_m d\tilde{S} - \frac{aS_1}{cm_1} \frac{\pi_1^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_1$$

$$\frac{d\tilde{V}_c}{d\tilde{t}} = \int_S \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}} \pi_m^{\text{ref}}} D_1 \tilde{H} d\tilde{S} - \frac{aS_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}} \pi_1^{\text{ref}}} D_4 \tilde{H}$$

(4)

$$\frac{d\pi_1}{dt} = -S_1 p_c - \frac{c_1}{m_1} \pi_1 - k_1 \ell_1 + Bl i_1$$

$$\frac{d\tilde{\pi}_1}{d\tilde{t}} = \frac{aS_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}} V_c^{\text{ref}}} D_3 \tilde{H} - \frac{ac_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{(\pi_1^{\text{ref}})^2} D_4 \tilde{H} - \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}} \ell_1^{\text{ref}}} D_5 \tilde{H} + \frac{aBl}{c} \frac{i_1^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}}} \tilde{i}_1$$

(5)

$$\frac{d\ell_1}{dt} = \frac{d\tilde{\ell}_1}{d\tilde{t}}$$

$$\frac{d\tilde{\ell}_1}{d\tilde{t}} = \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\ell_1^{\text{ref}} \pi_1^{\text{ref}}} D_4 \tilde{H}$$

Ainsi, on obtient un SHP formellement adimensionné :

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{ac} \frac{E_0^{\text{ref}}}{(\pi_m^{\text{ref}})^2} & \frac{1}{a^2 c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_m^{\text{ref}} \varepsilon_m^{\text{ref}}} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) & -\frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_m^{\text{ref}} V_c^{\text{ref}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a^2 c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\varepsilon_m^{\text{ref}} \pi_m^{\text{ref}}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}} \pi_m^{\text{ref}}} \int_{\tilde{S}} \cdot d\tilde{S} & 0 & 0 & -\frac{aS_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{V_c^{\text{ref}} \pi_1^{\text{ref}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aS_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}} V_c^{\text{ref}}} & -\frac{ac_1}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{(\pi_1^{\text{ref}})^2} & -\frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}} \ell_1^{\text{ref}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{c} \frac{E_0^{\text{ref}}}{\ell_1^{\text{ref}} \pi_1^{\text{ref}}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a^2 (\pi_m^{\text{ref}})^2}{\sigma_m E_0^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_m \\ \frac{a^2 T (\varepsilon_m^{\text{ref}})^2}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\varepsilon}_m \\ \frac{\gamma p_0 (V_c^{\text{ref}})^2}{V_0 E_0^{\text{ref}}} \tilde{V}_c \\ \frac{(\pi_1^{\text{ref}})^2}{m_1 E_0^{\text{ref}}} \tilde{\pi}_1 \\ \frac{k_1 (\ell_1^{\text{ref}})^2}{E_0^{\text{ref}}} \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{aBl}{c} \frac{i_1^{\text{ref}}}{\pi_1^{\text{ref}}} \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{i}_1. \quad (\text{C.15})$$

On remarque la symétrie dans l'opérateur  $\mathcal{J} - \mathcal{R}$  (écrit ici comme une seule matrice).

On vérifie que chaque composant non nul dans ce SHP est sans dimension physique ([−]).

### C.2.2.3 Choix des références

**BUT** On peut proposer deux buts pour l'adimensionnement :

- mettre un maximum de coefficients à 1 dans le gradient du Hamiltonien
- mettre un maximum de coefficients à 1 dans les opérateurs  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$ .

Après dénombrement du nombre de degrés de liberté et comparaison au nombre de variables de référence (5 pour l'état,  $E_0^{\text{ref}}$  et  $i_1^{\text{ref}}$ ), on constate que l'on ne peut obtenir les deux buts à la fois. Nous choisissons de mettre tous les coefficients dans  $D_{\tilde{x}}\tilde{H}(\tilde{x})$  à 1, et donc

$$D_{\tilde{x}}\tilde{H}(\tilde{x}) = \left[ \tilde{\pi}_m \quad \tilde{\varepsilon}_m \quad \tilde{V}_c \quad \tilde{\pi}_1 \quad \tilde{\ell}_1 \right]^T. \quad (\text{C.16})$$

On obtient ainsi 5 conditions. Une 6me consiste à mettre un 1 devant  $\tilde{i}_1$ , et il reste encore une 7me condition à choisir.

**CHOIX RETENU** Après quelques essais, nous proposons la démarche suivante.

Il se trouve que le fait de choisir  $\mathcal{J}(1,3) = 1$  (ou un autre coefficient des opérateurs  $\mathcal{J}$  ou  $\mathcal{R}$ ) mène à un système d'équations surdéterminé sans solution. Pour cette raison, nous choisissons  $V_c^{\text{ref}} \triangleq V_0$  et alors  $E_0^{\text{ref}} \triangleq \gamma p_0 V_0$  d'après la condition sur  $D_3\tilde{H}$ . Finalement, nous obtenons les références

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0^{\text{ref}} \triangleq \gamma p_0 V_0 \\ V_c^{\text{ref}} \triangleq V_0 \\ \pi_1^{\text{ref}} \triangleq \sqrt{m_1 \gamma p_0 V_0} \\ \ell_1^{\text{ref}} \triangleq \sqrt{\frac{\gamma p_0 V_0}{k_1}} \\ \pi_m^{\text{ref}} \triangleq \frac{1}{a} \sqrt{\sigma_m \gamma p_0 V_0} \\ \varepsilon_m^{\text{ref}} \triangleq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\gamma p_0 V_0}{T}} \\ i_1^{\text{ref}} \triangleq \frac{c}{aBl} \pi_1^{\text{ref}} = \frac{c}{aBl} \sqrt{m_1 \gamma p_0 V_0}. \end{array} \right.$$

On remarque que le Hamiltonien s'écrit alors comme

$$\tilde{H}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\pi}_m^2 d\mathcal{S} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varepsilon}_m^2 d\mathcal{S} + \frac{1}{2} \tilde{V}_c^2 + \frac{1}{2} \tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\ell}_1^2. \quad (\text{C.17})$$

## C.2.2.4 SHP adimensionné

En substituant les définitions des variables de références dans le SHP (C.15), on obtient le SHP

$$\frac{d}{d\bar{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu a}{c\sigma_m} & \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\right) & -\frac{a^2}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\sigma_m V_0}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\sigma_m V_0}} \int_{\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S} & 0 & 0 & -\frac{aS_1}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{m_1 V_0}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{aS_1}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{m_1 V_0}} & -\frac{ac_1}{cm_1} & -\frac{a}{c} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a}{c} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{t}_1.$$

Introduisant des noms pour les groupes adimensionnels qui restent dans le SHP, on a finalement

$$\frac{d}{d\bar{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\zeta & \left(\frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}}\right) & -\alpha \mathbb{1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha \int_{\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S} & 0 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & -\zeta & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{t}_1$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \triangleq \frac{a^2}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\sigma_m V_0}} \\ \beta_1 \triangleq \frac{aS_1}{c} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{m_1 V_0}} \\ \beta_2 \triangleq \frac{a}{c} \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \\ \zeta \triangleq \frac{ac_1}{cm_1} \\ \xi \triangleq \frac{\mu a}{c\sigma_m}. \end{array} \right.$$

## C.2.3 Modèle SHP de dimension finie : projection modale et réduction d'ordre

## C.2.3.1 Choix de la base modale

**Lemme C.2.** Les fonctions

$$\left\{ \bar{\psi}_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) \right\},$$

avec  $\lambda_n$  t.q.  $J_0(\lambda_n a) = 0$ , forment une base orthonormale.

*Démonstration.* En utilisant le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ , on vérifie par un calcul que les propriétés d'orthogonalité et normalisation sont satisfaites.

(1) Orthogonalité :  $\langle \bar{\psi}_p, \bar{\psi}_q \rangle_P = 0, p \neq q$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_p a)} J_0(\lambda_p r), \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_q a)} J_0(\lambda_q r) \right\rangle_P \\ &= \frac{2\pi}{\pi a^2 J_1(\lambda_p a) J_1(\lambda_q a)} \int_0^a J_0(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) r \, dr \\ &\stackrel{(C.11)}{=} \frac{2}{a^2 J_1(\lambda_p a) J_1(\lambda_q a)} \left[ \frac{\lambda_p r J_1(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) - \lambda_q r J_0(\lambda_p r) J_1(\lambda_q r)}{\lambda_p^2 - \lambda_q^2} \right]_{r=0}^{r=a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque  $J_0(\lambda_p a) = 0 = J_0(\lambda_q a)$ .

(2) Normalisation :  $\langle \bar{\psi}_n, \bar{\psi}_n \rangle_P = \|\bar{\psi}_n\|^2 = 1$

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r), \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\lambda_n a)} J_0(\lambda_n r) \right\rangle_P \\ &= \frac{2\pi}{\pi a^2 J_1^2(\lambda_n a)} \int_0^a J_0^2(\lambda_n r) r \, dr \\ &= \frac{2\pi}{\pi a^2 J_1^2(\lambda_n a) \lambda_n^2} \int_{r=0}^{r=a} J_0^2(\lambda_n r) (\lambda_n r) \, d(\lambda_n r) \\ &\stackrel{(C.8)}{=} \frac{2\pi}{\pi a^2 J_1^2(\lambda_n a) \lambda_n^2} \left[ \frac{(\lambda_n r)^2}{2} (J_0^2(\lambda_n r) + J_1^2(\lambda_n r)) \right]_{r=0}^{r=a} \\ &= \frac{1}{J_1^2(\lambda_n a)} (J_0^2(\lambda_n a) + J_1^2(\lambda_n a)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

**Lemme C.3.** Les fonctions

$$\left\{ \bar{\varphi}_n(r) = \frac{1}{w_n} [J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n a)] \right\},$$

avec  $\lambda_n$  qui satisfait (9.12) et le poids

$$w_n = \lambda_n a |J_0(\lambda_n a)| \sqrt{2\pi \left( \frac{a^4 \lambda_n^4}{8B^2} - \frac{a^2 \lambda_n^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right)},$$

forment une base orthonormale.

*Démonstration.* En utilisant le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ , on vérifie par un calcul que les propriétés d'orthogonalité et normalisation sont satisfaites.

(1) Orthogonalité

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 w^2}{2\pi} \langle \bar{\varphi}_p, \bar{\varphi}_q \rangle_P \\ &= \int_0^a [J_0(\lambda_p r) - J_0(\lambda_p a)] [J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] r \, dr \\ &= \underbrace{\int_0^a J_0(\lambda_p r) [J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] r \, dr}_{\triangleq I_1} - J_0(\lambda_p a) \underbrace{\int_0^a [J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] r \, dr}_{\triangleq I_2} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
I_1 &\stackrel{\text{(C.5)}}{=} \frac{1}{\lambda_p^2} \int_{r=0}^{r=a} [J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] \, d[\lambda_p r J_1(\lambda_p r)] \\
&\stackrel{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{\lambda_p^2} \left[ \left[ (J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)) \lambda_p r J_1(\lambda_p r) \right]_{r=0}^{r=a} - \int_{r=0}^{r=a} \lambda_p r J_1(\lambda_p r) \, d[J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] \right] \\
&\stackrel{\text{(C.3)}}{=} \frac{1}{\lambda_p^2} \lambda_p \lambda_q \int_0^a r J_1(\lambda_p r) J_1(\lambda_q r) \, dr \\
&\stackrel{\text{(C.12)}}{=} \frac{\lambda_q}{\lambda_p} \left[ \frac{r}{\lambda_p^2 - \lambda_q^2} (\lambda_q J_1(\lambda_p r) J_0(\lambda_q r) - \lambda_p J_1(\lambda_q r) J_0(\lambda_p r)) \right]_{r=0}^{r=a} \\
&= \frac{\lambda_q}{\lambda_p (\lambda_p^2 - \lambda_q^2)} a [\lambda_q J_1(\lambda_p a) J_0(\lambda_q a) - \lambda_p J_1(\lambda_q a) J_0(\lambda_p a)]
\end{aligned}$$

(On se rappelle que  $J_0(\lambda_i a) \neq 0$  ici.)

et

$$\begin{aligned}
I_2 &= -J_0(\lambda_p a) \int_{r=0}^{r=a} [J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] \, d\left(\frac{r^2}{2}\right) \\
&= -J_0(\lambda_p a) \left[ \left[ (J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)) \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=a} - \int_{r=0}^{r=a} \frac{r^2}{2} \, d[J_0(\lambda_q r) - J_0(\lambda_q a)] \right] \\
&\stackrel{\text{(C.3)}}{=} -J_0(\lambda_p a) \int_0^a \frac{r^2}{2} J_1(\lambda_q r) \lambda_q \, dr \\
&= -\frac{J_0(\lambda_p a) \lambda_q}{2} \int_0^a J_1(\lambda_q r) r^2 \, dr \\
&= -\frac{J_0(\lambda_p a)}{2 \lambda_q^2} \int_0^a J_1(\lambda_q r) (\lambda_q r)^2 \, d(\lambda_q r) \\
&\stackrel{\text{(C.13)}}{=} -\frac{J_0(\lambda_p a)}{2 \lambda_q^2} [(\lambda_q r) [2J_1(\lambda_q r) - (\lambda_q r) J_0(\lambda_q r)]]_{r=0}^{r=a} \\
&= -\frac{a}{\lambda_q} J_0(\lambda_p a) J_1(\lambda_q a) + \frac{a^2}{2} J_0(\lambda_p a) J_0(\lambda_q a)
\end{aligned}$$

Nous substituons les propriétés

$$\frac{2}{a \lambda_i} J_1(\lambda_i a) - J_0(\lambda_i a) = J_2(\lambda_i a) \quad (\text{cf. Eq. (C.2)}) \quad (\text{C.18})$$

et

$$-\frac{a^2 \lambda_i^2}{B} J_0(\lambda_i a) = J_2(\lambda_i a) \quad (\text{condition sur les fréquences (9.12)}) \quad (\text{C.19})$$

dans les expressions pour  $I_1$  et  $I_2$  pour ainsi transformer toutes les  $J_1(\cdot)$  en  $J_0(\cdot)$ , que l'on factorise ensuite. Plus précisément, en combinant (C.18) et (C.19), on a que

$$\frac{2}{a \lambda_i} J_1(\lambda_i a) = \left(1 - \frac{a^2 \lambda_i^2}{B}\right) J_0(\lambda_i a). \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned}
& I_1 + I_2 \\
&= \frac{\lambda_q^2 a}{\lambda_p(\lambda_p^2 - \lambda_q^2)} J_0(\lambda_q a) \frac{a\lambda_p}{2} \left[ J_0(\lambda_p a) - \frac{a^2 \lambda_p^2}{B} J_0(\lambda_p a) \right] \\
&\quad - \frac{\lambda_q a}{\lambda_p^2 - \lambda_q^2} J_0(\lambda_p a) \frac{a\lambda_q}{2} \left[ J_0(\lambda_q) - \frac{a^2 \lambda_q^2}{B} J_0(\lambda_q a) \right] \\
&\quad + \frac{a^4 \lambda_q^2}{2B} J_0(\lambda_p a) J_0(\lambda_q a) \\
&= J_0(\lambda_p a) J_0(\lambda_q a) \frac{\lambda_q^2 a^2 B - a^4 \lambda_p^2 \lambda_q^2 - \lambda_q^2 a^2 B + a^4 \lambda_q^4 + a^4 \lambda_q^2 (\lambda_p^2 - \lambda_q^2)}{(\lambda_p^2 - \lambda_q^2) 2B} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(2) Normalisation

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n \rangle_P &= \frac{2\pi}{a^2 \omega^2} \int_0^a [J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n a)]^2 r \, dr \\
&= \frac{2\pi}{a^2 \omega^2} \left[ \underbrace{\int_0^a J_0^2(\lambda_n r) r \, dr}_{\triangleq K_1} - 2 \underbrace{J_0(\lambda_n a) \int_0^a J_0(\lambda_n r) r \, dr}_{\triangleq K_2} + \underbrace{J_0^2(\lambda_n a) \int_0^a r \, dr}_{\triangleq K_3} \right]
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{1}{\lambda_n^2} \int_{r=0}^{r=a} J_0^2(\lambda_n r) (\lambda_n r) \, d(\lambda_n r) \\
&\stackrel{\text{(C.8)}}{=} \frac{1}{\lambda_n^2} \left[ \frac{(\lambda_n r)^2}{2} (J_0^2(\lambda_n r) + J_1^2(\lambda_n r)) \right]_{r=0}^{r=a} \\
&= \frac{a^2}{2} (J_0^2(\lambda_n a) + J_1^2(\lambda_n a)) \\
K_2 &= -\frac{2J_0(\lambda_n a)}{\lambda_n^2} \int_{r=0}^{r=a} J_0(\lambda_n r) (\lambda_n r) \, d(\lambda_n r) \\
&\stackrel{\text{(C.5)}}{=} -\frac{2J_0(\lambda_n a)}{\lambda_n^2} [(\lambda_n r) J_1(\lambda_n r)]_{r=0}^{r=a} \\
&= -\frac{2a}{\lambda_n} J_0(\lambda_n a) J_1(\lambda_n a) \\
K_3 &= \frac{a^2}{2} J_0^2(\lambda_n a)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n \rangle_P &= \frac{2\pi}{a^2 w^2} \left[ \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a) + a^2 J_0^2(\lambda_n a) - \frac{2a}{\lambda_n} J_0(\lambda_n a) J_1(\lambda_n a) \right] \\
&= \frac{2\pi}{a^2 w^2} \left[ \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a) + a^2 J_0(\lambda_n a) \left( J_0(\lambda_n a) - \frac{2}{a \lambda_n} J_1(\lambda_n a) \right) \right] \\
&\stackrel{\text{(C.18)}}{=} \frac{2\pi}{a^2 w^2} \left[ \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a) - a^2 J_0(\lambda_n a) J_2(\lambda_n a) \right] \\
&\stackrel{\text{(C.19)}}{=} \frac{2\pi}{a^2 w^2} \left[ \frac{a^2}{2} J_1^2(\lambda_n a) + \frac{a^4 \lambda_n^2}{B} J_0^2(\lambda_n a) \right] \\
&= \frac{2\pi}{w^2} \left[ \frac{1}{2} J_1^2(\lambda_n a) + \frac{a^2 \lambda_n^2}{B} J_0^2(\lambda_n a) \right] \\
&\stackrel{\text{(C.20)}}{=} \frac{2\pi}{w^2} J_0^2(\lambda_n a) \left[ \frac{1}{2} \frac{a^2 \lambda_n^2}{4} \left( 1 - \frac{a^2 \lambda_n^2}{B} \right)^2 + \frac{a^2 \lambda_n^2}{B} \right] \\
&= \frac{2\pi}{w^2} J_0^2(\lambda_n a) a^2 \lambda_n^2 \left[ \frac{1}{8} \left( 1 - \frac{2a^2 \lambda_n^2}{B} + \frac{a^4 \lambda_n^4}{B^2} \right) + \frac{1}{B} \right] \\
&= \frac{2\pi}{w^2} J_0^2(\lambda_n a) a^2 \lambda_n^2 \left[ \frac{a^4 \lambda_n^4}{8B^2} - \frac{a^2 \lambda_n^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right].
\end{aligned}$$

Avec  $\langle \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n \rangle_P = 1$  correspond la valeur

$$w_n \triangleq \lambda_n a |J_0(\lambda_n a)| \sqrt{2\pi \left( \frac{a^4 \lambda_n^4}{8B^2} - \frac{a^2 \lambda_n^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right)}. \quad (\text{C.21})$$

□

### C.2.3.2 Projection modale du SHP et troncation à $N$ modes

**TRAVAUX PRÉLIMINAIRES** La partie de dimension infinie du SHP adimensionné 9.23 est isolée :

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) & -\alpha \mathbb{1} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} & 0 & 0 \\ \alpha \int_{\tilde{S}} \cdot d\tilde{S} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix},$$

que nous dénotons dans la présente sous-section comme

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathcal{J}} \tilde{x}.$$

(Nous n'indiquons donc pas explicitement ici qu'il s'agit seulement de la sous-partie  $(1:3) \times (1:3)$  du SHP total  $5 \times 5$ ).

Afin de pouvoir projeter  $\tilde{y}_m(\tilde{r}, \tilde{t})$ , nous le faisons apparaître dans l'état  $\tilde{x}$ . On peut calculer que

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_m = \frac{c\sigma_m}{a} \frac{y_m^{\text{ref}}}{\pi^{\text{ref}}} \frac{d\tilde{y}_m}{d\tilde{t}} = \kappa \frac{d\tilde{y}_m}{d\tilde{t}} \\ \tilde{\varepsilon}_m = \frac{1}{\varepsilon_m^{\text{ref}}} \frac{\partial \tilde{y}_m}{\partial \tilde{r}} \end{cases}$$

avec

$$\kappa \triangleq a \sqrt{\frac{T}{\gamma p_0 V_0}} [-]$$

et donc

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}_m \\ \tilde{\varepsilon}_m \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \frac{d\tilde{y}_m}{d\tilde{t}} \\ \kappa \frac{\partial \tilde{y}_m}{\partial \tilde{r}} \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix}.$$

PROJECTION DE L'ÉTAT La projection correspond à

$$y_m(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\varphi}_n(r) z_n(t) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{\varphi}_n(r) z_n(t)$$

avec  $y_m(r, t)$  [m] la position de la membrane,  $\tilde{\varphi}_n[-]$  les fonctions de la base modale (à spécifier plus bas) et  $z_n$  [m] les évolutions temporelles correspondantes.

On adimensionne la formule de la projection en définissant les références additionnelles

$$\begin{cases} \tilde{y}_m = \frac{y_m}{y_m^{\text{ref}}} \triangleq \frac{y_m}{a} \\ \tilde{\varphi}_n = \frac{\tilde{\varphi}_n}{\varphi_n^{\text{ref}}} \triangleq \frac{\tilde{\varphi}_n}{1} \\ \tilde{z}_n = \frac{z_n}{z_n^{\text{ref}}} \triangleq \frac{z_n}{a} \end{cases}$$

et obtient

$$\tilde{y}_m(\tilde{r}, \tilde{t}) \approx \sum_{n=1}^N \tilde{\varphi}_n(\tilde{r}) \tilde{z}_n(\tilde{t}). \quad (\text{C.22})$$

Dénotons par  $\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{t})$  un vecteur  $N \times 1$  contenant les évolutions temporelles  $\tilde{z}_n(\tilde{t})$ ,  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  (à simuler) et par  $\tilde{\mathbf{E}}(\tilde{t})$  un vecteur  $N \times 1$  contenant les fonctions de la base modale  $\tilde{\varphi}_n(\tilde{r})$ ,  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  (connues). Nous pouvons alors écrire

$$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\tilde{r})^\top \tilde{\mathbf{Z}}(\tilde{t})$$

$$\begin{bmatrix} \kappa \frac{d\tilde{y}_m}{d\tilde{t}} \\ \kappa \frac{\partial \tilde{y}_m}{\partial \tilde{r}} \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa \tilde{\mathbf{E}}^\top(\tilde{r}) & 0 \\ \kappa \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}^\top(\tilde{r})}{\partial \tilde{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{t}) \\ \frac{d\tilde{\mathbf{F}}(\tilde{t})}{d\tilde{t}} \\ \tilde{V}_c(\tilde{t}) \end{bmatrix}.$$

(Par abus de notation,  $\tilde{\mathbf{x}}$  représente ici l'approximation des composantes 1 : 3 de l'état adimensionné  $\tilde{\mathbf{x}}$ .) Par exemple, pour  $N = 2$ ,

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \kappa \frac{d\tilde{y}_m}{d\tilde{t}} \\ \kappa \frac{\partial \tilde{y}_m}{\partial \tilde{r}} \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \tilde{\varphi}_1 & \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa (\tilde{\varphi}_1 \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 + \tilde{\varphi}_1 \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2) \\ \kappa (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \tilde{z}_1 + \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 \tilde{z}_2) \\ \tilde{V}_c \end{bmatrix}.$$

PROJECTION DU HAMILTONIEN Grâce à l'adimensionnement, le Hamiltonien contient des formes quadratiques sans constantes physiques (facteurs '1') (C.17) :

$$\tilde{H}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{\pi}_m^2 d\tilde{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{\varepsilon}_m^2 d\tilde{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \tilde{V}_c^2 + \frac{1}{2} \tilde{\pi}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\ell}_1^2$$

et on considère ici la partie 1 : 3, c'est-à-dire,

$$\tilde{H}_{1:3} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{\pi}_m^2 d\tilde{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{\varepsilon}_m^2 d\tilde{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \tilde{V}_c^2.$$

On a que

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{1:3} &= \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{x}_{1:2}^\top \tilde{x}_{1:2} \, d\tilde{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \tilde{x}_3^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\mathbf{Z}}_{1:2}^\top(\tilde{t}) \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)}(\tilde{r}) \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)}^\top(\tilde{r}) \tilde{\mathbf{Z}}_{1:2}(\tilde{t}) (2\pi \tilde{r} d\tilde{r}) + \frac{\tilde{\mathbf{Z}}_3^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Z}}^\top \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{Z}}\end{aligned}$$

où

$$\tilde{\mathbf{W}} \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{1:2} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{W}}_3 \end{bmatrix}$$

avec

$$\tilde{\mathbf{W}}_{1:2} = \int_0^1 \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)} \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)}^\top (2\pi \tilde{r} d\tilde{r})$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_3 = 1 \left( = \tilde{\Phi}_{3,3}^2 \right).$$

Ensuite, on calcule  $\tilde{\mathbf{W}}_{1:2}$ , en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel listées ci-dessus. On montre ici le cas  $N = 2$ .

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{W}}_{1:2} &= 2\pi \int_0^1 \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)} \tilde{\Phi}_{(1:2) \times (1:2)}^\top \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= 2\pi \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \\ 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 \\ \kappa \tilde{\varphi}_1 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \tilde{\varphi}_1 & \kappa \tilde{\varphi}_2 \\ \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= 2\pi \kappa^2 \int_0^1 \begin{bmatrix} (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1)^2 & \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\tilde{\varphi}_1)^2 & \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 & (\tilde{\varphi}_2)^2 \end{bmatrix} \tilde{r} d\tilde{r}\end{aligned}$$

Nous calculons les éléments de la matrice étant donné que (Lemme 9.2) :

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{1}{w_i} [J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)]$$

$$w_i = \tilde{\lambda}_i |J_0(\tilde{\lambda}_i)| \sqrt{2\pi \left( \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right)} = \tilde{\lambda}_i |J_0(\tilde{\lambda}_i)| \sqrt{\pi} \chi_{1,i} \quad (\text{cf. (C.21)})$$

$$\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i = -\frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \quad (\text{en utilisant la propriété (C.3)}).$$

On calcule donc

$$\bullet 2\pi \kappa^2 \int_0^1 \tilde{\varphi}_i^2 \tilde{r} d\tilde{r} = \kappa^2 \frac{2\pi}{w_n^2} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_n \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_n)]^2 \tilde{r} d\tilde{r} = \kappa^2.$$

La dernière étape suit de la normalisation (cf. Lemme 9.2) :

$$\langle \tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n \rangle_P = \frac{2\pi}{a^2 w_n^2} \int_0^a [J_0(\lambda_n r) - J_0(\lambda_n a)]^2 r dr = \frac{2\pi}{w_n^2} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_n \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_n)]^2 \tilde{r} d\tilde{r} = 1.$$

$$\bullet 2\pi\kappa^2 \int_0^1 \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_j \tilde{r} d\tilde{r} = \frac{2\pi\kappa^2}{w_i w_j} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)] [J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_j)] \tilde{r} d\tilde{r} = 0$$

La dernière étape suit de l'orthogonalité (cf. Lemme 9.2).

$$\begin{aligned} \bullet 2\pi\kappa^2 \int_0^1 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i)^2 \tilde{r} d\tilde{r} &= \frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \int_0^1 J_1^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= \frac{2\pi\kappa^2}{w_i^2} \int_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} J_1^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) (\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) d(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \\ &\stackrel{\text{(C.9)}}{=} \frac{2\pi\kappa^2}{w_i^2} \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_i \tilde{r})^2}{2} \left[ J_1^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \right] \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \\ &= \frac{\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \left[ J_1^2(\tilde{\lambda}_i) - J_0(\tilde{\lambda}_i) J_2(\tilde{\lambda}_i) \right] \\ &\stackrel{\text{(C.20)}}{=} \frac{\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^6}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{2B} + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4} + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right] J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \\ &= \frac{\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^6}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{2B} + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4} + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right] J_0^2(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_i^2 J_0^2(\tilde{\lambda}_i) 2\pi \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8} \right]} \\ &= \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{1}{B}}{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} \\ &= \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\chi_{II,i}^2}{\chi_{I,i}^2}, \end{aligned} \tag{C.23}$$

où l'on propose la notation simplifiée avec

$$\begin{cases} \chi_{I,i} \triangleq \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} \\ \chi_{II,i} \triangleq \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{1}{B}}. \end{cases}$$

On peut aussi écrire

$$2\pi\kappa^2 \int_0^1 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i)^2 \tilde{r} d\tilde{r} = \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\left( \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B} \right) - \frac{1}{B}}{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} = \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \left( 1 - \frac{1}{B\chi_{I,i}^2} \right).$$

$$\begin{aligned}
& \bullet 2\pi\kappa^2 \int_0^1 \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_j \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= \frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j} \int_0^1 J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&\stackrel{\text{(C.12)}}{=} \frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j} \left[ \frac{\tilde{r}}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} [\tilde{\lambda}_j J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) - \tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r})] \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \\
&= \frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j} \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} [\tilde{\lambda}_j J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) - \tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r})] \\
&\stackrel{\text{(C.20)}}{=} \frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j} \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} \left[ \tilde{\lambda}_j \frac{\tilde{\lambda}_i}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B}\right) J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) - \tilde{\lambda}_i \frac{\tilde{\lambda}_j}{2} \left(1 - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{B}\right) J_0(\tilde{\lambda}_j) J_0(\tilde{\lambda}_i) \right] \\
&= -\frac{\kappa^2 \pi \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\lambda}_j^2}{B w_i w_j} J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) \\
&= -\frac{\kappa^2 \pi \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\lambda}_j^2 J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j)}{B \tilde{\lambda}_i |J_0(\tilde{\lambda}_i)| \sqrt{2\pi \left(\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8}\right)} \tilde{\lambda}_j |J_0(\tilde{\lambda}_j)| \sqrt{2\pi \left(\frac{\tilde{\lambda}_j^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8}\right)}} \\
&= -\frac{\kappa^2}{2B} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8}} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_j^4}{8B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{4B} + \frac{1}{B} + \frac{1}{8}}} \\
&= -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_j^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}}} \\
&= -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{\chi_{I,i} \chi_{I,j}}.
\end{aligned} \tag{C.24}$$

On souligne que dans ce cas (base modale  $\{\tilde{\varphi}(\tilde{r})\}$  pour la membrane encastree au bord couplée à une cavité), les termes non diagonaux

$$2\pi\kappa^2 \int_0^1 \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_j \tilde{r} d\tilde{r}$$

ne sont pas nuls, puisque  $J_0(\tilde{\lambda}_i) \neq 0$ , où les  $\tilde{\lambda}_i$  sont les solutions de la condition implicite (9.24). Au contraire, pour la base modale correspondant à la membrane seule,

$$\left\{ \tilde{\psi}(\tilde{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi} J_1(\tilde{\lambda}_n)} J_0(\tilde{\lambda}_n \tilde{r}) \right\},$$

avec la condition  $J_0(\tilde{\lambda}_n) = 0$ , on aurait

$$\begin{aligned}
2\pi \int_0^1 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\psi}_i) (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\psi}_j) \tilde{r} d\tilde{r} &= 2\pi\omega^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \int_0^1 J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= 2\pi\omega^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\tilde{r}}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} [\tilde{\lambda}_j J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) - \tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r})]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \\
&= 2\pi\omega^2 \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} [\tilde{\lambda}_j J_1(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) - \tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i) J_1(\tilde{\lambda}_j)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dans ce cas, il existe une relation d'orthogonalité entre les dérivées spatiales des fonctions de la base modale. De ce fait, la matrice  $\tilde{W}$  sera diagonale pour la base modale  $\{\tilde{\psi}(\tilde{r})\}$ , et seulement diagonale par blocs pour la base modale  $\{\tilde{\varphi}(\tilde{r})\}$ .

GRADIENT DU HAMILTONIEN On a que

$$D_{1:3}\tilde{H}_{1:3}(\tilde{x}_{1:3}) = \tilde{W}\tilde{Z}(\tilde{t}).$$

INVERSE DE  $\tilde{W}$  Dans la suite, on aura besoin de l'inverse de la matrice  $\tilde{W}$ , que nous calculons analytiquement pour les cas  $N = 2$ . En substituant des valeurs typiques pour les constantes physiques du tom, on vérifie numériquement que la matrice  $\tilde{W}$  est définie positive, ce qui signifie que l'énergie est bien posée et que la matrice est inversible.

Pour le cas  $N = 1$ , on obtient une matrice diagonale :

$$\tilde{W} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \kappa^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

donc

$$\tilde{W}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{1}{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2} \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{II,1}^2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Pour les cas  $N > 1$ , on a affaire à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\tilde{W} \triangleq \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{array} \right],$$

que l'on inverse par bloc :

$$\tilde{W}^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{array} \right]^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{array} \right].$$

En particulier, pour le cas  $N = 2$ , ceci correspond à

$$\tilde{W} = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} \kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\chi_{I,1}\chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\chi_{I,1}\chi_{I,2}} & \kappa^2 \tilde{\lambda}_2^2 \frac{\chi_{II,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{C.25})$$

dont on calcule que l'inverse est

$$\tilde{W}^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc|c} \frac{\chi_{I,1}\chi_{I,2}}{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \left(\chi_{II,1}^2 \chi_{II,2}^2 - \frac{1}{B^2}\right)} & \frac{\chi_{I,1}\chi_{I,2}}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \left(\chi_{II,1}^2 \chi_{II,2}^2 - \frac{1}{B^2}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\chi_{I,1}\chi_{I,2}}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \left(\chi_{II,1}^2 \chi_{II,2}^2 - \frac{1}{B^2}\right)} & \frac{\chi_{II,2}^2 \chi_{II,1}^2}{\kappa^2 \tilde{\lambda}_2^2 \left(\chi_{II,1}^2 \chi_{II,2}^2 - \frac{1}{B^2}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

PROJECTION DES OPÉRATEURS  $\tilde{\mathcal{J}}$ ,  $\tilde{\mathcal{R}}$  ET  $\tilde{\mathcal{G}}$ Formule générale

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} &= (\tilde{\mathcal{J}} - \tilde{\mathcal{R}}) \tilde{x} + \tilde{\mathcal{G}}\tilde{u} \\
\Downarrow \tilde{x} &= \tilde{\Phi}(\tilde{r})^\top \tilde{\mathcal{Z}}(\tilde{t}) \\
\tilde{\Phi}^\top \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}}{\partial \tilde{t}} &= (\tilde{\mathcal{J}} - \tilde{\mathcal{R}}) \tilde{\Phi}^\top \tilde{\mathcal{Z}} + \tilde{\mathcal{G}}\tilde{u} \\
\tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^\top \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}}{\partial \tilde{t}} &= \tilde{\Phi} (\tilde{\mathcal{J}} - \tilde{\mathcal{R}}) \tilde{\Phi}^\top \tilde{\mathcal{Z}} + \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{G}}\tilde{u} \\
\Downarrow \tilde{\mathcal{Z}} \text{ et } \tilde{u} &\text{ ne dépendent pas de } \tilde{r} \\
\left[ \int_0^1 \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^\top \\ \tilde{\Phi} \tilde{\Phi}^\top \end{bmatrix}}_{\cong \tilde{W}} \begin{matrix} (1:(2N),:) \\ (2N+1,:) \end{matrix} (2\pi\tilde{r}) d\tilde{r} \right] \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}}{\partial \tilde{t}} &= \left[ \int_0^1 \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\Phi}^\top \\ \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\Phi}^\top \end{bmatrix}}_{\cong \tilde{V}} \begin{matrix} (1:(2N),:) \\ (2N+1,:) \end{matrix} (2\pi\tilde{r}) d\tilde{r} \right] - \left[ \int_0^1 \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\Phi}^\top \\ \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\Phi}^\top \end{bmatrix}}_{\cong \tilde{V}_2} \begin{matrix} (1:(2N),:) \\ (2N+1,:) \end{matrix} (2\pi\tilde{r}) d\tilde{r} \right] \tilde{\mathcal{Z}} \\
&\quad + \underbrace{\int_0^1 \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{\Phi} \end{bmatrix}}_{\cong \tilde{U}} \begin{matrix} (1:(2N),:) \\ (2N+1,:) \end{matrix} (2\pi\tilde{r}) d\tilde{r} \tilde{\mathcal{G}}\tilde{u} \\
\Downarrow \tilde{\mathcal{Z}} &= \tilde{W}^{-1} \nabla \tilde{H} \\
\tilde{W} \frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}}{\partial \tilde{t}} &= (\tilde{V} - \tilde{V}_2) \tilde{W}^{-1} \nabla \tilde{H} + \tilde{U} \tilde{\mathcal{G}}\tilde{u} \\
\frac{\partial \tilde{\mathcal{Z}}}{\partial \tilde{t}} &= \left[ \underbrace{\tilde{W}^{-1} \tilde{V} \tilde{W}^{-1}}_{\cong \tilde{\mathcal{J}}} - \underbrace{\tilde{W}^{-1} \tilde{V}_2 \tilde{W}^{-1}}_{\cong \tilde{\mathcal{R}}} \right] \nabla \tilde{H} + \underbrace{\tilde{W}^{-1} \tilde{U} \tilde{\mathcal{G}}}_{\cong \tilde{\mathcal{G}}} \tilde{u} \quad (\text{C.26})
\end{aligned}$$

On rappelle qu'ici,  $x$  représente temporairement seulement la partie 1 :  $(2N + 1)$  de l'état. De ce fait,  $\tilde{\mathcal{G}}$  est zéro, l'entrée  $\tilde{i}_1$  agissant sur la partie EDO du SHP, qui n'est pas concernée par la projection.

Projection de l'opérateur  $\tilde{\mathcal{J}}$ 

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\Phi}^\top &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) & -\alpha \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} & 0 & 0 \\ \alpha \int_{\mathcal{S}} \cdot d\mathcal{S} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \tilde{\varphi}_1 & \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varphi}_1 d\mathcal{S} & \alpha \kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varphi}_2 d\mathcal{S} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1)^2 & \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \cdot \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 \cdot \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2) & \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2)^2 & 0 \\ \kappa^2 \tilde{\varphi}_1 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa^2 \tilde{\varphi}_1 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & -\alpha \kappa \tilde{\varphi}_1 \\ \kappa^2 \tilde{\varphi}_2 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa^2 \tilde{\varphi}_2 \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & -\alpha \kappa \tilde{\varphi}_2 \\ 0 & 0 & \alpha \kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varphi}_1 d\mathcal{S} & \alpha \kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varphi}_2 d\mathcal{S} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}} &= \begin{bmatrix} \int_0^1 \left[ \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\Phi}^\top \right]_{(1:(2N),:)} (2\pi\tilde{r}) d\tilde{r} \\ \left[ \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\Phi}^\top \right]_{(2N+1,:)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa^2(\partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_1)^2 & \kappa^2(\partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_1 \cdot \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_2) & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2(\partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_1 \cdot \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_2) & \kappa^2(\partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_2)^2 & 0 \\ \kappa^2\tilde{\phi}_1 \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_1 & \kappa^2\tilde{\phi}_1 \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_2 & 0 & 0 & -\alpha\kappa\tilde{\phi}_1 \\ \kappa^2\tilde{\phi}_2 \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_1 & \kappa^2\tilde{\phi}_2 \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_2 & 0 & 0 & -\alpha\kappa\tilde{\phi}_2 \\ 0 & 0 & \alpha\kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_1 d\mathcal{S} & \alpha\kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_2 d\mathcal{S} & 0 \end{bmatrix} \tilde{r} d\tilde{r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On calcule les expressions<sup>1</sup> de la matrice  $\tilde{\mathbf{V}}$ .

$$\begin{aligned} \bullet \alpha\kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\phi}_i d\mathcal{S} &= 2\pi \frac{\alpha\kappa}{w_i} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)] \tilde{r} d\tilde{r} \\ &= 2\pi \frac{\alpha\kappa}{w_i} \left[ \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2} \int_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) (\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) d(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i) \int_0^1 \tilde{r} d\tilde{r} \right] \\ &\stackrel{\text{(C.5)}}{=} 2\pi \frac{\alpha\kappa}{w_i} \left[ \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2} [(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})J_1(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} - \left[ \frac{\tilde{r}^2}{2} \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \right] \\ &= 2\pi \frac{\alpha\kappa}{w_i} \left[ \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} J_1(\tilde{\lambda}_i) - \frac{J_0(\tilde{\lambda}_i)}{2} \right] \\ &\stackrel{\text{(C.20)}}{=} 2\pi \frac{\alpha\kappa}{w_i} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right) J_0(\tilde{\lambda}_i) - \frac{J_0(\tilde{\lambda}_i)}{2} \right] \\ &= -\frac{\pi\alpha\kappa\tilde{\lambda}_i^2}{Bw_i} J_0(\tilde{\lambda}_i) \end{aligned} \tag{C.27}$$

ou encore

$$= -\frac{\pi\alpha\kappa\tilde{\lambda}_i^2 J_0(\tilde{\lambda}_i)}{B\tilde{\lambda}_i |J_0(\tilde{\lambda}_i)| \sqrt{\pi}\chi_{I,i}} = -\frac{\sqrt{\pi}\alpha\kappa}{B\chi_{I,i}} \tilde{\lambda}_i \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i))$$

$$\begin{aligned} \bullet \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_i &= -\frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} \left( \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) J_1(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) \\ &\stackrel{\text{(C.4)}}{=} -\frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i}{2} [J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) - J_2(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})] + \frac{J_1(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})}{\tilde{r}} \right] \\ &\stackrel{\text{(C.2)}}{=} -\frac{\tilde{\lambda}_i}{w_i} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i}{2} [J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) - J_2(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})] + \frac{\tilde{\lambda}_i}{2} [J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) + J_2(\tilde{\lambda}_i\tilde{r})] \right] \\ &= -\frac{\tilde{\lambda}_i^2}{w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) \end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned} \bullet 2\pi \int_0^1 \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}}\tilde{\phi}_i)^2 \tilde{r} d\tilde{r} &= 2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \int_0^1 J_1^2(\tilde{\lambda}_i\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\ &\stackrel{\text{(C.23)}}{=} \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{1}{B}}{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{2}{B}} \\ &= \kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\chi_{II,i}^2}{\chi_{I,i}^2} \end{aligned}$$

1. Partout dans les calculs, une expression avec  $i$  et  $j$  ( $\in \mathbb{N}$ ) sous-entend que  $i \neq j$ . L'expression avec  $j = i$  est calculée séparément; on ne la retrouve pas (forcément) en prenant le cas  $j = i$  dans la formule pour  $j \neq i$ !

- $$\begin{aligned}
\bullet 2\pi \int_0^1 \kappa^2 (\partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i \cdot \partial_{\tilde{r}} \varphi_j) \tilde{r} d\tilde{r} &= 2\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j} \int_0^1 J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&\stackrel{\text{(C.24)}}{=} -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{\sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4}} + \frac{2}{B} \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}_j^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{2B} + \frac{1}{4}} + \frac{2}{B}} \\
&= -\frac{\kappa^2}{B} \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \frac{\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{\chi_{I,i} \chi_{I,j}}
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet 2\pi \int_0^1 \alpha \kappa \tilde{\varphi}_i \tilde{r} d\tilde{r} &= \frac{2\pi \alpha \kappa}{w_i} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)] \tilde{r} d\tilde{r} \\
&\stackrel{\text{(C.27)}}{=} -\frac{\pi \alpha \kappa \tilde{\lambda}_i^2}{B w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i)
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet 2\pi \int_0^1 \left( \alpha \kappa \int_{\mathcal{S}} \tilde{\varphi}_i d\mathcal{S} \right) \tilde{r} d\tilde{r} &\stackrel{\text{(C.27)}}{=} 2\pi \int_0^1 \left( -\frac{\pi \alpha \kappa \tilde{\lambda}_i^2}{B w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i) \right) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= -\frac{2\pi^2 \alpha \kappa \tilde{\lambda}_i^2}{B w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i) \int_0^1 \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= -\frac{2\pi^2 \alpha \kappa \tilde{\lambda}_i^2}{B w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i) \left[ \frac{\tilde{r}^2}{2} \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \\
&= -\frac{\pi^2 \alpha \kappa \tilde{\lambda}_i^2}{B w_i} J_0(\tilde{\lambda}_i)
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\bullet 2\pi \int_0^1 \kappa^2 \tilde{\varphi}_i \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_i \tilde{r} d\tilde{r} \\
&\stackrel{\text{(C.28)}}{=} -2\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)] J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= -2\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} \left[ \int_0^1 J_0^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} - J_0(\tilde{\lambda}_i) \int_0^1 J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \right] \\
&\stackrel{\text{(C.8),(C.5)}}{=} -\frac{2\pi \kappa^2}{w_i^2} \left[ \int_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} J_0^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) (\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) d(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i) \int_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) (\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) d(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) \right] \\
&= -\frac{2\pi \kappa^2}{w_i^2} \left[ \left[ \frac{(\tilde{\lambda}_i \tilde{r})^2}{2} (J_0^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) + J_1^2(\tilde{\lambda}_i \tilde{r})) \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} - J_0(\tilde{\lambda}_i) [( \tilde{\lambda}_i \tilde{r} ) J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r})]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \right] \\
&= -\frac{2\pi \kappa^2}{w_i^2} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2} [J_0^2(\tilde{\lambda}_i) + J_1^2(\tilde{\lambda}_i)] - J_0(\tilde{\lambda}_i) \tilde{\lambda}_i J_1(\tilde{\lambda}_i) \right] \\
&\stackrel{\text{(C.20)}}{=} -\frac{2\pi \kappa^2}{w_i^2} \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2} \left[ J_0^2(\tilde{\lambda}_i) + \tilde{\lambda}_i^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} \right) J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \right] - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2} J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right) \right] \\
&= -\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{w_i^2} J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \left[ 1 + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{4} - \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{2B} + \frac{\tilde{\lambda}_i^6}{4B^2} - 1 + \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right] \\
&= -\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{w_i^2} J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \left[ \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{4B^2} - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{2B} + \frac{1}{4} + \frac{1}{B} \right] \\
&= -\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^4}{w_i^2} J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \chi_{II,i}^2 \\
&= -\pi \kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i^4 J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \chi_{II,i}^2}{\tilde{\lambda}_i^2 J_0^2(\tilde{\lambda}_i) \pi \chi_{I,i}} \\
&= -\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \frac{\chi_{II,i}^2}{\chi_{I,i}^2}
\end{aligned}$$

Ou encore (cf. Éq. (C.23))

$$\begin{aligned}
&= -\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \left( 1 - \frac{1}{B\chi_{I,i}^2} \right). \\
\bullet & 2\pi \int_0^1 \kappa^2 \tilde{\varphi}_i \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \right) \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_j \tilde{r} d\tilde{r} \\
&\stackrel{(C.28)}{=} -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \int_0^1 [J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) - J_0(\tilde{\lambda}_i)] J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \int_0^1 J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} - J_0(\tilde{\lambda}_i) \int_0^1 J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} \right] \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \int_0^1 J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r} - \frac{J_0(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_j^2} \int_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) (\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) d(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \right] \\
&\stackrel{(C.11),(C.5)}{=} -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \frac{\tilde{r}}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} (\tilde{\lambda}_i J_1(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_0(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) - \tilde{\lambda}_j J_0(\tilde{\lambda}_i \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r})) - \frac{J_0(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_j^2} (\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) J_1(\tilde{\lambda}_j \tilde{r}) \right]_{\tilde{r}=0}^{\tilde{r}=1} \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} (\tilde{\lambda}_i J_1(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) - \tilde{\lambda}_j J_0(\tilde{\lambda}_i) J_1(\tilde{\lambda}_j)) - \frac{J_0(\tilde{\lambda}_i)}{\tilde{\lambda}_j} J_1(\tilde{\lambda}_j) \right] \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \left( \frac{-\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} - \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \right) J_0(\tilde{\lambda}_i) J_1(\tilde{\lambda}_j) + \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2} J_0(\tilde{\lambda}_j) J_1(\tilde{\lambda}_i) \right] \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{w_i w_j} \left[ \frac{-\tilde{\lambda}_i^2}{\tilde{\lambda}_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} J_0(\tilde{\lambda}_i) J_1(\tilde{\lambda}_j) + \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} J_0(\tilde{\lambda}_j) J_1(\tilde{\lambda}_i) \right] \\
&= -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} [-\tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i) J_1(\tilde{\lambda}_j) + \tilde{\lambda}_j J_0(\tilde{\lambda}_j) J_1(\tilde{\lambda}_i)] \\
&\stackrel{(C.20)}{=} -2\pi\kappa^2 \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} \left[ -\tilde{\lambda}_i J_0(\tilde{\lambda}_i) \frac{\tilde{\lambda}_j}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{B} \right) J_0(\tilde{\lambda}_j) + \tilde{\lambda}_j J_0(\tilde{\lambda}_j) \frac{\tilde{\lambda}_i}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right) J_0(\tilde{\lambda}_i) \right] \\
&= -\frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) \left[ -\frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_j^2}{B} \right) + \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\lambda}_i^2}{B} \right) \right] \\
&= +\frac{2\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j}{w_i w_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)} J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) \frac{\tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j (\tilde{\lambda}_i^2 - \tilde{\lambda}_j^2)}{2B} \\
&= \frac{\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\lambda}_j^2}{B w_i w_j} J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j) \\
&= \frac{\pi\kappa^2 \tilde{\lambda}_i^2 \tilde{\lambda}_j^2 J_0(\tilde{\lambda}_i) J_0(\tilde{\lambda}_j)}{B \tilde{\lambda}_i |J_0(\tilde{\lambda}_i)| \sqrt{\pi} \chi_{I,i} \tilde{\lambda}_j |J_0(\tilde{\lambda}_j)| \sqrt{\pi} \chi_{I,j}} \\
&= \frac{\kappa^2 \tilde{\lambda}_i \tilde{\lambda}_j \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_j))}{B \chi_{I,i} \chi_{I,j}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\tilde{W}^{-1} \tilde{V} &= \begin{bmatrix} \frac{\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & \frac{\chi_{I,1} \chi_{I,2}}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & -\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 \\ \frac{\chi_{I,1} \chi_{I,2}}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & \frac{\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2}{\kappa^2 B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\lambda_1 \lambda_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & -\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{B \chi_{I,1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa} & 0 & 0 & -\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{B \chi_{I,1}} & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,2}} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2}{\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2}} & -\frac{1}{B^2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\frac{\chi_{I,1} \chi_{I,2}^2 \tilde{\lambda}_2}{B \chi_{I,2} \tilde{\lambda}_1 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & +\frac{\chi_{I,1} \chi_{I,2}^2 \tilde{\lambda}_2}{B \chi_{I,2} \tilde{\lambda}_1 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\chi_{I,2} \chi_{I,1}^2 \tilde{\lambda}_1}{B \chi_{I,1} \tilde{\lambda}_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & +\frac{\chi_{I,2} \chi_{I,1}^2 \tilde{\lambda}_1}{B \chi_{I,1} \tilde{\lambda}_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - \frac{1}{B^2})} & \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{\kappa B \chi_{I,1}} \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\kappa B \chi_{I,2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{B \chi_{I,1}} & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{\kappa B \chi_{I,1}} & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\tilde{\lambda}_2 \frac{\chi_{I,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{\kappa B \chi_{I,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1))}{B \chi_{I,1}} & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{f}} &= \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{W}}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\chi_{I,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi \alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa}}{B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) & -\frac{\sqrt{\pi \alpha \kappa}}{B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \frac{\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2}{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - B^2)} & \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - B^2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\chi_{I,1} \chi_{I,2}}{\kappa^2 B} & \frac{\chi_{I,2}^2 \chi_{I,1}}{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 (\chi_{I,1}^2 \chi_{I,2}^2 - B^2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\tilde{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B_{\chi_{I,1}}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \\ 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B_{\chi_{I,2}}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B_{\chi_{I,1}}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B_{\chi_{I,2}}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) & 0 \end{bmatrix}.$$

On a que

$$\tilde{\mathbf{j}}^\top = -\tilde{\mathbf{j}}.$$

Projection de l'opérateur  $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{R}} \tilde{\Phi}^\top &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \tilde{\varphi}_1 & \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_1 & 0 \\ 0 & \kappa \partial_{\tilde{r}} \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_1 & 0 & 0 \\ \kappa \tilde{\varphi}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \kappa \zeta \tilde{\varphi}_1 & \kappa \zeta \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 \zeta \tilde{\varphi}_1^2 & \kappa^2 \zeta \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 \zeta \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 & \kappa^2 \zeta \tilde{\varphi}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \kappa^2 \zeta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_1^2 & \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\varphi}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{V}_2 &= 2\pi\kappa^2 \zeta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^1 \tilde{\varphi}_1^2 \tilde{r} d\tilde{r} & \int_0^1 \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 \tilde{r} d\tilde{r} & 0 \\ 0 & 0 & \int_0^1 \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 \tilde{r} d\tilde{r} & \int_0^1 \tilde{\varphi}_2^2 \tilde{r} d\tilde{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \kappa^2 \zeta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tilde{W}^{-1}\tilde{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = \tilde{W}^{-1}\tilde{V}_2\tilde{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi}{\kappa^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a que  $\tilde{R} = \tilde{R}^T \succeq 0$ .

### SHP projeté

En injectant les expressions obtenues pour  $\tilde{J}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{W}$  dans la formule de projection (C.26), et en considérant à nouveau l'état entier, on trouve après quelques multiplications la forme SHP projeté à  $N$  modes.

Dans la suite,  $\text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_i))$  sera noté comme  $\text{sign}_i$ .

*SHP projeté pour  $N = 1$*

$$\frac{d}{d\tilde{f}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{f}}\tilde{z}_1 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & \frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\kappa B\chi_{l,1}}\tilde{\lambda}_1\text{sign}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{\pi}\alpha}{\kappa B\chi_{l,1}}\tilde{\lambda}_1\text{sign}_1 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} \kappa^2\tilde{\lambda}_1^2\frac{\chi_{ll,1}^2}{\chi_{l,1}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{f}}\tilde{z}_1 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{f}_1$$

SHP projeté pour  $N = 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} \frac{\kappa^2 \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{1,1} \chi_{1,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa^2}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{1,1} \chi_{1,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{z}_2 \\ \tilde{V}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}_1
 \end{aligned}$$



## C.2.4 Représentation d'état

Pour réécrire le SHP sous la représentation d'état standard, on calcule d'abord le produit  $(\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{W}}$  de sorte à obtenir (pour  $N = 2$ )

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \tilde{v}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\zeta & 0 & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\chi_{I,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & -\zeta & \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & -\frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & -\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1 & -\zeta & -\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \tilde{v}_c \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\ell}_1.$$

On substitue ensuite la relation statique de la cavité :

$$\frac{d\tilde{v}_c}{d\tilde{t}} = -\frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \frac{d\tilde{z}_1}{d\tilde{t}} - \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) \frac{d\tilde{z}_2}{d\tilde{t}} - \beta_1 \tilde{\pi}_1,$$

qui, puisque

$$\tilde{\pi}_1 = \frac{1}{\beta_2} \frac{d\tilde{\ell}_1}{d\tilde{t}},$$

s'écrit comme

$$\frac{d\tilde{v}_c}{d\tilde{t}} = -\frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \frac{d\tilde{z}_1}{d\tilde{t}} - \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) \frac{d\tilde{z}_2}{d\tilde{t}} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{d\tilde{\ell}_1}{d\tilde{t}},$$

et après intégration,

$$\tilde{v}_c = -\frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \tilde{z}_1 - \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) \tilde{z}_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{\ell}_1.$$

La représentation d'état  $\dot{x} = Ax + Bu$  ainsi obtenue est montrée pour les cas  $N = 1, 2, 3$  ci-dessous.

La sortie (mesure)  $y$  est la pression dans la cavité (cas  $N = 2$ ) :

$$\begin{aligned} y = \tilde{p}_c &= -\gamma \tilde{v}_c \\ &= \gamma \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \tilde{z}_1 + \gamma \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) \tilde{z}_2 + \gamma \frac{\beta_1}{\beta_2} \tilde{\ell}_1, \end{aligned}$$

donc  $y = Cx$  s'écrit comme

$$y = \begin{bmatrix} \gamma \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) & \gamma \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2)) & 0 & 0 & 0 & \gamma \frac{\beta_1}{\beta_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix}.$$

Représentation d'état pour  $N = 1$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{I,1}^2}{\chi_{I,1}^2} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2 \chi_{I,1}^2} \tilde{\lambda}_1^2 & -\zeta & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\beta_1 \frac{\kappa\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & 0 & -\zeta & -\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{\ell}_1$$

Représentation d'état pour  $N = 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_t \tilde{z}_1 \\ \partial_t \tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{1,1}^2}{\lambda_{1,1}^2} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2 \chi_{1,1}^2} \tilde{\lambda}_1^2 \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{1,1} \chi_{1,2}} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2 \chi_{1,1} \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2 \\ -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi\alpha}}{B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\beta_1 \sqrt{\pi\alpha}}{\beta_2 \kappa B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\frac{\beta_1 \sqrt{\pi\alpha}}{\beta_2 \kappa B \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \\ -\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta & 0 & 0 & -\frac{\beta_1 \sqrt{\pi\alpha}}{\beta_2 \kappa B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\zeta & 0 & -\frac{\beta_1 \sqrt{\pi\alpha}}{\beta_2 \kappa B \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2} & -\zeta & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_t \tilde{z}_1 \\ \partial_t \tilde{z}_2 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\ell}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{t}_1
 \end{aligned} \tag{C.29}$$

Représentation d'état pour  $N = 3$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \partial_t \tilde{z}_1 \\ \partial_t \tilde{z}_2 \\ \partial_t \tilde{z}_3 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\eta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{1,1}^2}{\chi_{1,1}^2} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,1}^2} \tilde{\lambda}_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{1,1} \chi_{1,2}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,1} \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2 & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{1,1} \chi_{1,2}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,1} \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_1 \text{sign}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_3}{\chi_{1,1} \chi_{1,3}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,1} \chi_{1,3}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3 \text{sign}_1 \text{sign}_3 & \frac{\tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3}{B} \frac{\text{sign}_2 \text{sign}_3}{\chi_{1,2} \chi_{1,3}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,2} \chi_{1,3}} \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 \text{sign}_2 \text{sign}_3 & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3}{B} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_3}{\chi_{1,1} \chi_{1,3}} - \frac{\pi \alpha^2}{B^2 \chi_{1,1} \chi_{1,3}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3 \text{sign}_1 \text{sign}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \chi_{1,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 & -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \chi_{1,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 & -\beta_1 \frac{\kappa \sqrt{\pi \alpha}}{B \chi_{1,3}} \tilde{\lambda}_3 \text{sign}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \partial_t \tilde{z}_1 \\ \partial_t \tilde{z}_2 \\ \partial_t \tilde{z}_3 \\ \tilde{\pi}_1 \\ \tilde{\eta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## C.3 CONTRÔLE MODAL

## C.3.1 Régulateur en temps fini

## C.3.1.1 Sous-système de la membrane contrôlée en pression

Nous isolons les  $2N$  premières équations du SHP. La matrice  $\tilde{W}$  est diagonale pour le cas  $N = 1$  ou diagonale par blocs pour  $N \geq 2$  et le seul couplage avec la partie « cavité » est à travers l'élément  $\tilde{J}_{2N,2N+1}$ . Nous considérons  $\tilde{V}_c$  (ou encore  $\tilde{p}_c$ ) comme une entrée (au lieu d'un état), ce qui donne, pour  $N = 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa^2} \\ -\frac{1}{\kappa^2} & -\frac{\zeta}{\kappa^2} \end{bmatrix} \tilde{W}_{(1:2) \times (1:2)} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \end{bmatrix} \tilde{W}_{3,3} \tilde{V}_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa^2} \\ -\frac{1}{\kappa^2} & -\frac{\zeta}{\kappa^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & 0 \\ 0 & \kappa^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \left( -\frac{\tilde{p}_c}{\gamma} \right) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & -\zeta \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma \kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \end{bmatrix}}_B \tilde{p}_c. \end{aligned}$$

De la même manière, le cas  $N = 2$  est calculé comme suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & -\frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & -\frac{\zeta}{\kappa^2} \end{bmatrix} \tilde{W}_{(1:4) \times (1:4)} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \end{bmatrix} \tilde{W}_{5,5} \tilde{V}_c \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\kappa^2} \\ -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & -\frac{\zeta}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 & -\frac{\zeta}{\kappa^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa^2 \tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{II,1}^2}{\lambda_{I,1}^2} & -\frac{\kappa^2}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa^2}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & \kappa^2 \tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{II,2}^2}{\lambda_{I,2}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \left( -\frac{\tilde{p}_c}{\gamma} \right) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{II,1}^2}{\lambda_{I,1}^2} & \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} & -\zeta & 0 \\ \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{B} & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{II,2}^2}{\lambda_{I,2}^2} & 0 & -\zeta \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma \kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma \kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \end{bmatrix}}_B \tilde{p}_c \end{aligned}$$

Modèle pour  $N = 1$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{II,1}^2}{\lambda_{I,1}^2} & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma \kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \end{bmatrix} \tilde{p}_c$$

Modèle pour  $N = 2$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{I1,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{1}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\zeta & 0 \\ \frac{1}{B} \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} \text{sign}_1 \text{sign}_2 & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{I2,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & 0 & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \end{bmatrix} \tilde{p}_c$$

Modèle pour  $N = 3$

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\lambda_{I1,1}^2}{\chi_{I,1}^2} & \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_3}{\chi_{I,1} \chi_{I,3}} & -\zeta & 0 & 0 \\ \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_2}{\chi_{I,1} \chi_{I,2}} & -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\lambda_{I2,2}^2}{\chi_{I,2}^2} & \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 \frac{\text{sign}_2 \text{sign}_3}{\chi_{I,2} \chi_{I,3}} & 0 & -\zeta & 0 \\ \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_3 \frac{\text{sign}_1 \text{sign}_3}{\chi_{I,1} \chi_{I,3}} & \frac{1}{B} \tilde{\lambda}_2 \tilde{\lambda}_3 \frac{\text{sign}_2 \text{sign}_3}{\chi_{I,2} \chi_{I,3}} & -\tilde{\lambda}_3^2 \frac{\lambda_{I3,3}^2}{\chi_{I,3}^2} & 0 & 0 & -\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_1 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_2 \\ \partial_{\tilde{t}}\tilde{z}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign}_1 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_2 \text{sign}_2 \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,3}} \tilde{\lambda}_3 \text{sign}_3 \end{bmatrix} \tilde{p}_c$$

### c.3.1.2 Commandabilité

On prouve que le sous-système de la membrane contrôlée par la pression est commandable. Pour cela, il faut prouver que la matrice de commandabilité  $\mathcal{C}$  est de rang pleine. On montre les cas  $N = 1$  et 2.

Cas  $N = 1$  (ici sans dissipation)

Matrice de commandabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign} (J_0(\tilde{\lambda}_1)) \\ -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign} (J_0(\tilde{\lambda}_1)) & 0 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{\sqrt{\pi\alpha}}{\gamma\kappa B \chi_{I,1}} \tilde{\lambda}_1 \text{sign} (J_0(\tilde{\lambda}_1)) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On a que  $\text{rang}(\mathcal{C}) = 2$  donc le système est commandable.



Dans la dernière expression, la première matrice est de rang 2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots \end{bmatrix} \neq k \cdot \begin{bmatrix} -1 & \zeta & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Pareillement, la deuxième matrice est de rang 2 :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots \end{bmatrix} \neq k \cdot \begin{bmatrix} -1 & \zeta & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

La matrice entière est donc de rang 4 : les deux vecteurs des deux matrices ne peuvent être les mêmes (pour tout  $\zeta$ ) vu que  $\tilde{\lambda}_1 \neq \tilde{\lambda}_2$ .

On a que  $\text{rang}(\mathcal{C}) = 4$  donc le système est commandable.

### c.3.2 Observateur en temps fini

#### c.3.2.1 Observabilité

On considère le cas  $N = 2$  (Éq. (C.29)). Il faut prouver que la matrice d'observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}A \\ \mathcal{C}A^2 \\ \mathcal{C}A^3 \\ \mathcal{C}A^4 \\ \mathcal{C}A^5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

est de rang plein :

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = 6.$$

Pour le calcul, on note :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{bmatrix} \gamma\kappa T_1 & \gamma\kappa T_2 & 0 & 0 & 0 & \gamma \frac{\beta_1}{\beta_2} \end{bmatrix},$$

où  $T_i \triangleq \frac{\sqrt{\pi\alpha}}{B\chi_{I,i}} \tilde{\lambda}_i \text{sign}_i$ , et

$$A \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ U_1 & U_{12} & -\zeta & 0 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2\kappa} T_1 \\ U_{12} & U_2 & 0 & -\zeta & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2\kappa} T_2 \\ -\beta_1\kappa T_1 & -\beta_1\kappa T_2 & 0 & 0 & -\zeta & -\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$U_1 \triangleq -\tilde{\lambda}_1^2 \frac{\chi_{II,1}^2}{\chi_{I,1}^2} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2\chi_{I,1}^2} \tilde{\lambda}_1^2$$

$$U_{12} \triangleq \frac{\tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))}{B \chi_{I,1} \chi_{I,2}} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2 \chi_{I,1} \chi_{I,2}} \tilde{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_2 \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_1)) \text{sign}(J_0(\tilde{\lambda}_2))$$

$$U_2 \triangleq -\tilde{\lambda}_2^2 \frac{\chi_{II,2}^2}{\chi_{I,2}^2} - \frac{\pi\alpha^2}{B^2\chi_{I,2}^2} \tilde{\lambda}_2^2.$$

Un calcul analytique mène à une forme longue dont les premiers termes sont montrés sur la page suivante. Un logiciel analytique confirme que cette expression est de rang 6 ( $\tilde{\lambda}_1$  et  $\lambda_2$  étant différents), de même qu'un logiciel numérique lorsque les valeurs physiques utilisées dans la Simulation 1 dans le Chapitre 9 sont substituées. On peut donc conclure que le système est observable et que l'on peut concevoir un observateur.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \gamma\kappa T_1 & \gamma\kappa T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & \gamma\kappa T_1 & \gamma\kappa T_2 & \gamma\beta_1 & 0 \\ \gamma\kappa [T_1 U_1 + T_2 (U_{12} - \beta_1^2)] & \gamma\kappa [T_1 U_{12} + T_2 (U_2 - \beta_1^2)] & \gamma\kappa T_1 & \gamma\kappa T_2 & \gamma\beta_1 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \gamma [T_1^2 + T_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2] \\ \gamma\kappa [T_1 (\xi\beta_1^2 - \xi U_1) - T_2 \xi U_{12}] & \gamma\kappa [-T_1 \xi U_{12} + T_2 (\xi\beta_1^2 - \xi U_2)] & -\xi\gamma\kappa T_1 & -\xi\gamma\kappa T_2 & -\xi\gamma\beta_1 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \gamma [\xi (T_1^2 + T_2^2) + \xi (\beta_1^2 + \beta_2^2)] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$



Ce chapitre contient quelques informations supplémentaires concernant l'implémentation expérimentale du contrôleur modal du tom dans le Chapitre 10.

## TABLE DES MATIÈRES

D.1	Identification . . . . .	277
D.1.1	Haut-parleur . . . . .	277
D.1.2	Membrane . . . . .	278
D.2	Dispositif de contrôle . . . . .	280
D.2.1	Composants . . . . .	280
D.2.2	Système de frappe reproductible . . . . .	280
D.3	Évaluation du contrôle . . . . .	282
D.3.1	Changement de fréquence . . . . .	282
D.4	Données constructeur . . . . .	285
D.5	Dans les coulisses . . . . .	300

## D.1 IDENTIFICATION

## D.1.1 Haut-parleur

VÉRIFICATION DE L'IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES À titre indicatif, nous souhaitons comparer les valeurs que nous avons identifiées (pour une configuration du haut-parleur dans une enceinte de volume  $V_e = 70 \cdot 50 \cdot 46,3 \text{cm}^3 = \text{ca. } 2238 \text{cm}^3 = 0,160 \text{m}^3$ ) avec les valeurs constructeur données (pour une autre enceinte de  $0,038 \text{m}^3$ ). À cet effet, nous corrigeons l'influence de l'enceinte qui consiste en les deux points suivants.

1. L'air déplacé agit comme une raideur supplémentaire [176]

$$k_e = \frac{F_e}{\Delta x}.$$

La force  $F_e = \Delta p \cdot S_d$  ( $S_d$  étant la surface du piston plan,  $\Delta p$  par rapport à la pression atmosphérique  $p_0$ ) appliquée sur la membrane comprime l'air dans l'enceinte et fait descendre la membrane d'une distance  $\Delta x$ . Ce changement de hauteur de membrane correspond à un changement de volume de  $\Delta V$  par rapport au volume  $V_e$  au repos de l'enceinte. Si nous supposons un processus adiabatique, nous avons la relation

$$\frac{|\Delta p|}{p_0} = \gamma \frac{|\Delta V|}{V_e},$$

où  $\gamma$  est l'indice adiabatique (1,4 pour l'air). Il en suit que

$$k_e = \gamma S_d^2 \frac{p_0}{V_e}.$$

Avec  $S_d = 0,0515 \text{m}^2$ ,  $p_0 = 103525 \text{Pa}$  et  $V_e = 0,160 \text{m}^3$ , ceci correspond à une valeur  $k_e = 2351 \text{N/m}$ .

2. L'ajout de la raideur  $k_e$ , qui consiste à remplacer la raideur  $k$  par une raideur équivalente  $k_{eq} \triangleq k + k_e$  dans les équations de Thiele & Small, induit un changement de fréquence :

$$f_e = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{k + k_e}{m}} = f\sqrt{1 + \kappa},$$

avec  $\kappa \triangleq k_e/k$  le rapport des deux contributions de raideur.

Ainsi, une fréquence  $f_e = 35,425\text{Hz}$  identifiée sur le haut-parleur monté dans une enceinte correspondrait à une fréquence de  $f = 27,22\text{Hz}$  pour un haut-parleur bafflé mais sans enceinte.

La comparaison est donnée dans le Tableau D.1, où l'erreur relative est calculée comme

$$e_{rel} = \frac{|\text{valeur}_{\text{identif.}} - \text{valeur}_{\text{ref.}}|}{\text{valeur}_{\text{ref.}}}$$

Tableau D.1 – Comparaison entre les valeurs identifiées du haut-parleur et les valeurs constructeur.

	IDENTIF.	CORR.	REF.	CORR.	$e_{REL}$ [%]
$f_0$ [Hz]	35,425	31,05	35 (monté ?)		
$R$ [ $\Omega$ ]	5,52		3,2		72,5
$L$ [mH]	4,37		?		
$Bl$ [Tm]	17,4		18,653		6,7
$m$ [g]	157		188		16,5
$c$ [kg/s]	4,87		8,68		43,9
$k$ [N/m]	7800	5449	9088 (monté ?)	?	

Les valeurs de référence proviennent des données constructeur de la Section D.4. Pour faire les conversions à partir des paramètres de Thiele & Small « petit signal » y figurant, on utilise

$$m = \left( \frac{cS_d}{2\pi f_0} \right)^2 \frac{\rho}{V_{as}}$$

avec les données de l'air  $\rho = 1,20\text{kg/m}^3$ ,  $c = 343\text{m/s}$ ,  $V_{as} = 41,2 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$

$$Bl = \sqrt{\frac{2\pi f_0 m R_e}{Q_{es}}}$$

$$c = R_{ms} = \frac{2\pi f_0 m}{Q_{ms}}$$

$$k = \frac{1}{C_{ms}} = \frac{\rho c^2 S_d^2}{V_{as}}$$

#### D.1.2 Membrane

Des figures de Chladni en haute-fréquence sont montrées Figure D.1.



FIGURE D.1 – Figures de Chladni de quelques modes plus élevés. La fréquence d'excitation est indiquée.

## D.2 DISPOSITIF DE CONTRÔLE

### D.2.1 Composants

#### D.2.1.1 Microcontrôleur : le Coala

**CÂBLAGE** Le câblage du Coala permettant d'utiliser les connecteurs Ext in et Ext out est montré Figure D.2.



FIGURE D.2 – Câblage du Coala

### D.2.2 Système de frappe reproductible

Le plan de la pièce d'ajustement de diamètre est montré Figure D.3 et son impression 3D Figure D.4. Le support-baguettes monté (encore sans pied de support et butée) est montré Figure D.5.

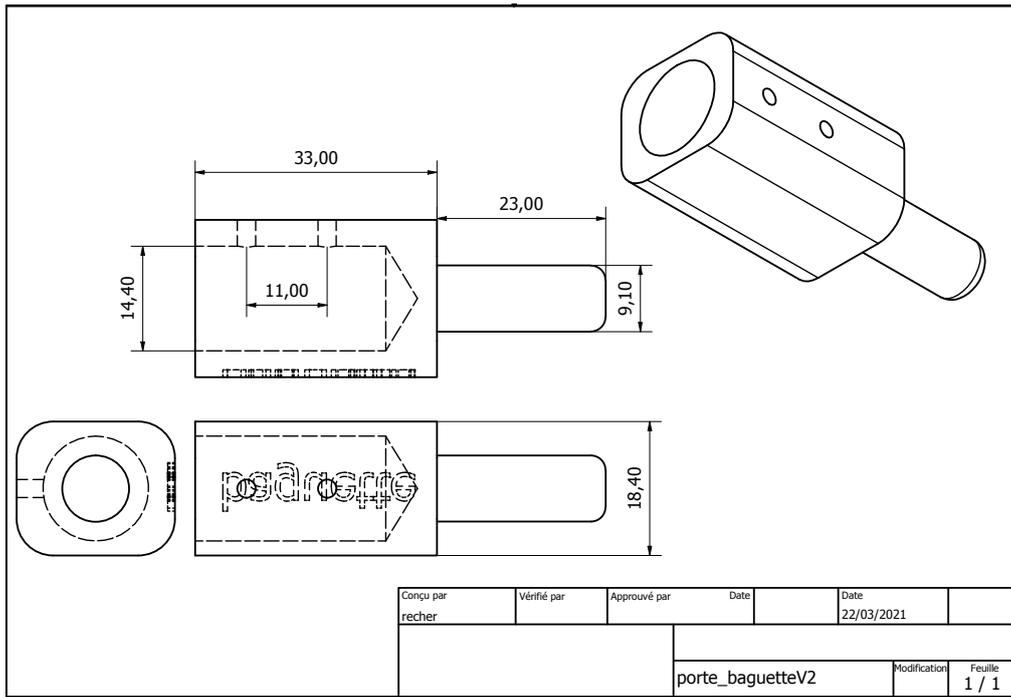


FIGURE D.3 – Conception de la pièce d’ajustement de diamètre

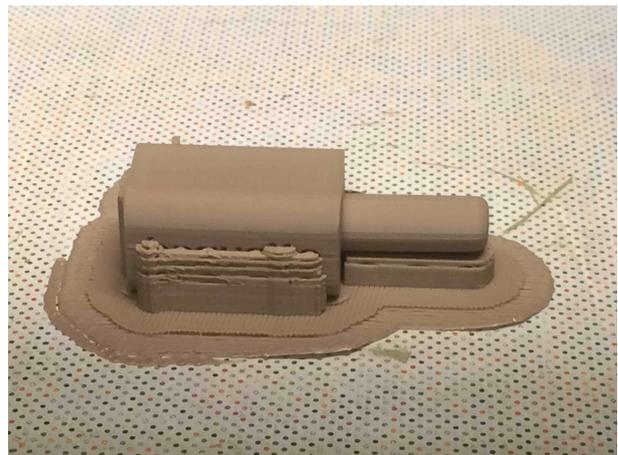


FIGURE D.4 – Impression 3D de la pièce d’ajustement de diamètre



FIGURE D.5 – Montage du support-baguette

## D.3 ÉVALUATION DU CONTRÔLE

D.3.1 *Changement de fréquence*

**DÉPHASAGE DANS LA CAVITÉ** Pour avoir une indication du déphasage entre le mouvement de la membrane du haut-parleur et le son propagé au niveau de la membrane supérieure du tom, on applique une tension en forme de sweep logarithmique d'une durée de 100s allant de 0,1Hz à 10kHz et mesure le son en un point à l'intérieur de la cavité et en un point au-dessus du milieu de la membrane supérieure du tom (Figures 10.38-D.6 et Tableau D.2).

Tableau D.2 – Dispositif concernant le déphasage dans la cavité : liste des instruments

Microphone dans la cavité	Bruel & Kjør 4939
Microphone au-dessus de la membrane	Bruel & Kjør 4191
Conditionneur des microphones	Nexus 2690
Amplificateur du haut-parleur	Newtons4th Ltd LPA05
Générateur basse-fréquence	TTi TG2000
Carte d'acquisition	National Instruments 9234

Les signaux mesurés sont affichés Figure D.7. Dénotant leurs transformées de Laplace comme

$$\begin{cases} v_1(t) \leftrightarrow V(s) \\ p_c(t) \leftrightarrow P_c(s) \\ p_e(t) \leftrightarrow P_e(s), \end{cases}$$

on définit les fonctions de transfert

$$\frac{P_c(s)}{V(s)} \quad \text{et} \quad \frac{P_e(s)}{V(s)},$$

qui sont montrées Figure D.8.

On voit que la phase de la fonction de transfert  $P_c(s)/V(s)$  varie beaucoup dans la plage d'intérêt du contrôleur  $[0, 300]$ Hz. On peut donc s'attendre à des déphasages entre la membrane du haut-parleur et la membrane supérieure du tom en fonction de la fréquence, voire des influences de modes du volume et de la paroi du fût, le tout n'étant pas pris en compte par le modèle utilisé pour le développement de la loi de commande.

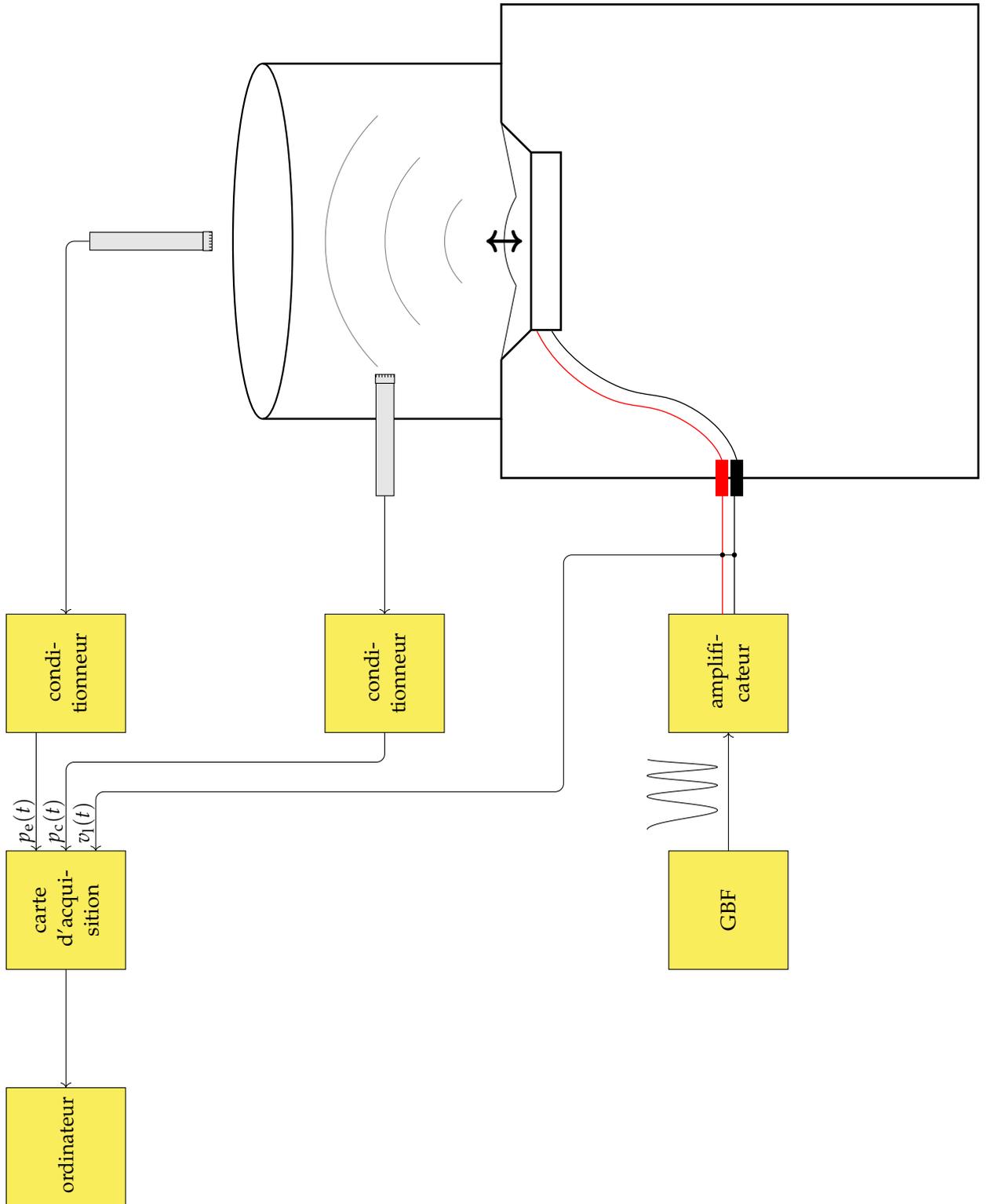


FIGURE D.6 – Dispositif concernant le déphasage dans la cavité : schéma

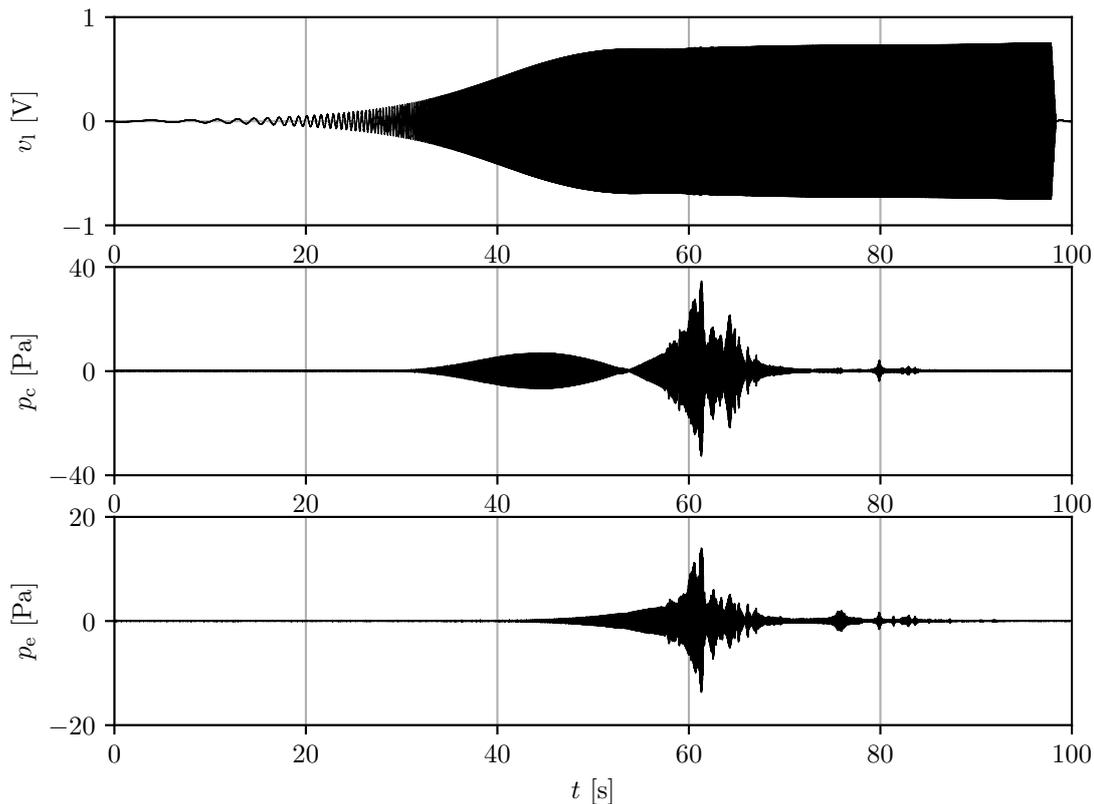


FIGURE D.7 – Mesures concernant le déphasage dans la cavité : signaux mesurés

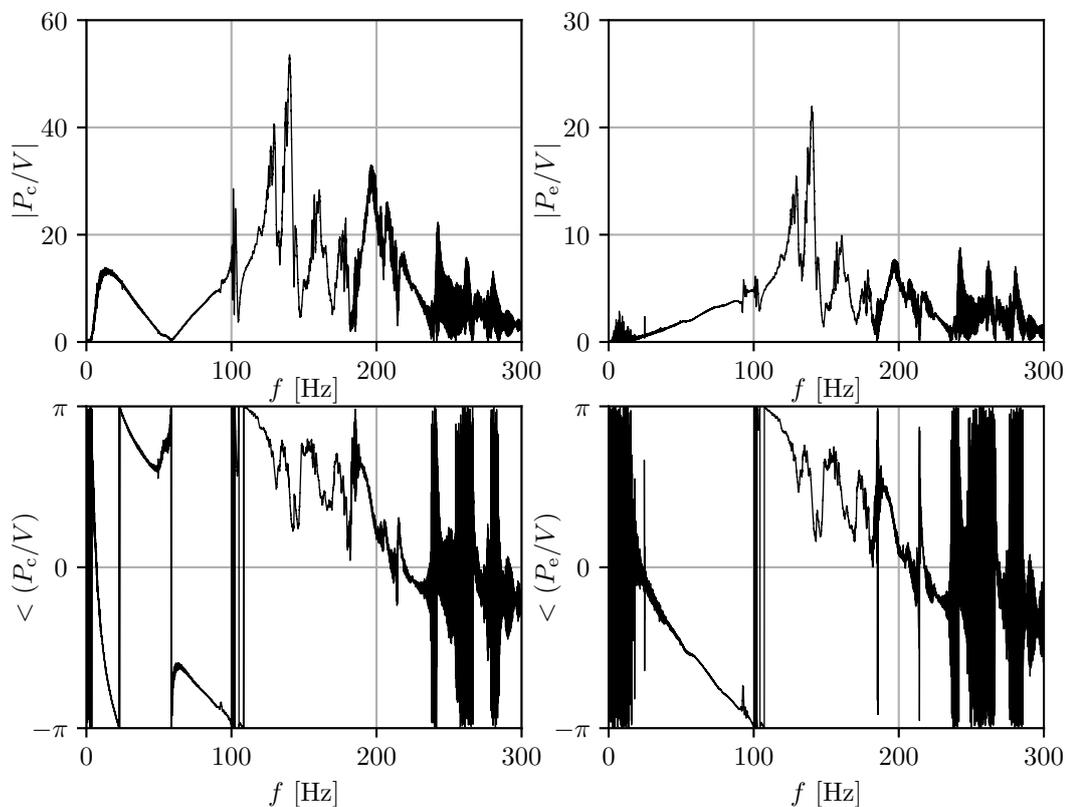


FIGURE D.8 – Mesures concernant le déphasage dans la cavité : fonctions de transfert

## D.4 DONNÉES CONSTRUCTEUR

## CARTE D'ACQUISITION

National instruments 9234

## DATASHEET

**NI 9234**

4 AI,  $\pm 5$  V, 24 Bit, 51.2 kS/s/ch Simultaneous, AC/DC Coupling, IEPE AC Coupling



- Software-selectable AC/DC coupling (AC coupled at 0.5 Hz)
- Software-selectable IEPE signal conditioning with AC coupling (2 mA)
- $-40$  °C to  $70$  °C operating, 5 g vibration, 50 g shock
- 24-bit resolution
- Anti-aliasing filters
- 102 dB dynamic range
- Smart TEDS sensor compatibility

The NI 9234 is a four-channel dynamic signal acquisition module for making high-accuracy measurements from IEPE sensors. The NI 9234 delivers 102 dB of dynamic range and incorporates Integrated Electronics Piezoelectric (IEPE) signal conditioning at 2 mA constant current for accelerometers and microphones. The four input channels simultaneously acquire at rates up to 51.2 kS/s. In addition, the module includes built-in anti-aliasing filters that automatically adjust to your sampling rate. Compatible with a single-module USB carrier and NI CompactDAQ and CompactRIO hardware, the NI 9234 is ideal for a wide variety of mobile or portable applications such as industrial machine condition monitoring and in-vehicle noise, vibration, and harshness testing.



HAUT-PARLEUR

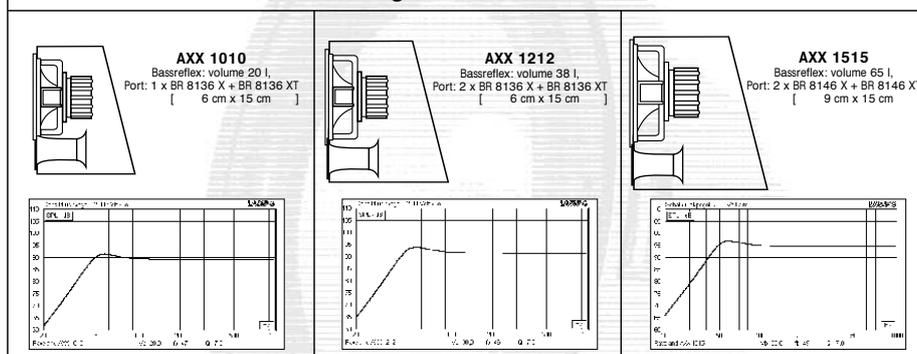
Raveland AXX 1212 <sup>1</sup>

## AXX 1010 / 1212 / 1515

### Car-HiFi Subwoofer Chassis

- silver coated cone
- silver push terminals
- double magnet
- double spider
- lin. excursion +/- 9 mm
- silver die cast basket
- kapton voice coil former
- 30 mm high excursion foam surround
- designed for small cabinets

#### Gehäusevorschläge / recommended enclosures:



#### Technische Daten und Parameter / technical data and parameter

Typ / type:	AXX 1010	AXX 1212	AXX 1515
Nom. Impedanz Ohm / nom. impedance ohms:	4	4	4
Aussendurchmesser / overall diameter mm.	270	320	390
Einbaudurchmesser / mounting diameter mm:	236	286	354
Re Ohm / RDC ohms:	3.2	3.2	3.2
Resonanzfrequenz / resonance frequency Fs Hz	36	35	34
Mech. Dämpfung / mech. damping Qms:	4.65	4.76	4.35
Elekt. Dämpfung / elect. damping Qes:	0.37	0.38	0.34
Gesamt Dämpfung / total damping Qts:	0.34	0.35	0.32
Äquivalentvolumen / equivalent volume VAS L:	21.8	41.2	88
Membranfläche / cone area cm <sup>2</sup> :	333	515	804
Schalldruck / sound pressure level SPL dB:	88	90	93
Belastbarkeit Watt R.M.S. / power handling watts R.M.S.	200	220	300
Belastbarkeit Watt max. / power handling watts max.	500	600	800



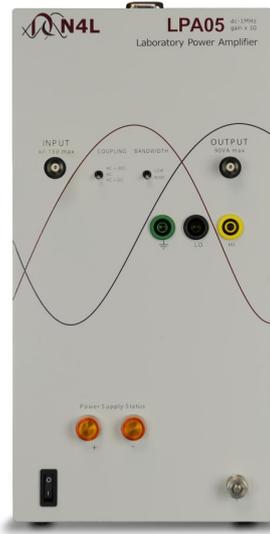
Distribution: speaker trade, Neuenhofer Str. 42-44, 42657 Solingen, Germany, Tel: + 49 - 02 12 - 38226-0, Fax: + 49 - 02 12 - 38226-40, Internet: www.raveland.de

<sup>1</sup>. Ce modèle semble ne plus être produit. Les données constructeur ont été obtenues de l'entreprise Speaker Trade, Solingen, Allemagne.

## AMPLIFICATEUR DU HAUT-PARLEUR

Newton4th Ltd LPA05 Amplificateur de puissance
--

## Laboratory power amplifier **LPA05**



### Features:

- DC and AC wide bandwidth
- Switch selectable coupling options: AC, AC+DC or AC with reduced DC
- Fixed x10 Gain
- Switch selectable bandwidth
- High slew rate
- Isolated BNC or 4mm output sockets
- $\pm 40V$  peak  
3A rms / 5A peak  
(LPA05A resistive load)
- $\pm 16V$  peak  
5A rms / 8A peak  
(LPA05B resistive load)
- Isolated from ground to prevent earth loops
- Robust metal enclosure

LPA05A & LPA05B provide wide bandwidth signal amplification at up to 8A peak, extending the range of industrial and laboratory applications into which the LPA series can be used.

**LPA05:** High frequency, high current testing of very low impedance loads, follow guidance in user manual if DUT impedance is below 5 ohms

-Also in the LPA range -

**LPA01:** High frequency, testing of low impedance loads at up to 1Apk  
e.g. wound components

**LPA400:** High voltage, high frequency testing and calibration  
Driving high voltage actuators (e.g. piezo) up to  $\pm 400V$



Newton4th Ltd  
1 Bede Island Road  
Leicester  
LE2 7EA, UK  
Tel +44 116 2301066  
Fax +44 116 2301061  
e-mail office@newtons4th.com  
Website www.newtons4th.com

The LPA range of power amplifiers from N4L are robust and reliable for use in a variety of industrial and laboratory applications. Designed originally for use with the PSM\* range Phase Sensitive Multimeters, they can also be used anywhere where there is a need to boost a signal either in voltage or current. They combine dc accuracy with wide bandwidth to faithfully reproduce complex waveforms, driving loads that may be capacitive, inductive or resistive. Optionally, the dc component can be eliminated with ac coupling, or can be reduced with ac+(dc) coupling. To limit high frequency noise, the input bandwidth can be reduced with a linear phase, 2<sup>nd</sup> order, low pass filter for low frequency applications.

### Specifications:

Parameter	LPA05A	LPA05B
Max Output Voltage	80V pk-pk (28Vrms)	32V pk-pk (12Vrms)
Max ac output current (>100Hz)	3A rms 5A pk	5A rms 8A pk
Max dc output current	2A	4A
Input connector	isolated BNC	
Input impedance	10kΩ	
Peak input voltage <sup>1</sup>	±4V	±2V
Input common mode range	±40V	
Input offset voltage	5mV (max) 1mV (typ)	
Input coupling	ac, ac+dc, ac+(dc)	
AC coupling filter -3dB	16Hz	
(dc) gain factor	0.1	
Low B/W filter attenuation	40 dB/decade	
Low B/W filter type	linear phase	
Gain	x10	
Slew rate	120 V/us	
Output connector	isolated BNC + 4mm safety connectors	
Output power	90 VA	60 VA
Operating temperature range	0 - 40 °C	
Size	30 x 15 x 25 cm	
Weight	6 kg (approx)	
Power source	90-265V 45-63Hz	
Power consumption	150 VA	



All specifications at 23°C +/- 5°C

These specifications are quoted in good faith but Newtons4th Ltd reserves the right to amend any specification at any time without notice.

<sup>1</sup> The input voltages should be limited to ensure that the output does not exceed the permitted limits.

**\* The PSM range includes the PSM1700, PSM1735, PSM2200 and PSM2201 that incorporate gain/phase analysis, LCR meter, phase angle voltmeter, wideband true rms meter, Power analyser, harmonic analyser and more.**

The LPA range is designed & manufactured in the UK by Newtons4th Ltd.

SONDE DE COURANT

Newtonson4th Ltd HF003 Sonde de courant



Newtonson4th Ltd  
office@newtonson4th.com  
www.newtonson4th.com

## High Frequency Current Shunts for the PPA Series HF003 to HF500



The HF series shunts provide an accurate current sensing solution for many wideband power measurement applications up to 500Arms.

Utilising an innovative design unique to N4L that exhibits exceptionally low parasitic inductance, each shunt will maintain its specified resistance over a frequency range from DC to 1MHz without exhibiting the phase shift that is normally associated with high current resistive shunts.

While the HF series was primarily designed for use with the PPA series power analyzers from N4L that provide exceptional wideband accuracy, dynamic range and common mode rejection, the HF series can be used as a precise current sensing device for other equipment.

Model	Nominal Resistance	Phase Error	Continuous Current	PPA typical* min Current	Input Connector
HF500	0.2mΩ ± 0.1%	0.1° / kHz	500Arms	0.5Arms	M16 bolt/lug
HF200	0.5mΩ ± 0.1%	0.1° / kHz	200Arms	0.2Arms	M10 bolt
HF100	1mΩ ± 0.1%	0.05° / kHz	100Arms	0.1Arms	HD binding post
HF020	10mΩ ± 0.1%	0.01° / kHz	20Arms	10mArms	4mm socket
HF006	100mΩ ± 0.1%	0.001° / kHz	6Arms	1mArms	4mm socket
HF003	470mΩ ± 0.1%	0.0001° / kHz	3Arms	0.2mArms	4mm socket

Permitted Crest Factor: 10 (e.g. repetitive peak current for HF100 is 1000Apk)  
 Maximum peak current: Single peak current with ≤ 100uS duration is 2 x Apk (e.g. single peak current for HF100 is 2000Apk ≤ 100uS)  
 Nominal inductance: < 1nH  
 Minimum current\*: Based on use with a PPA analyzer ext. input and CF of ≤ 3  
 Output connector: Safety BNC – Non isolated with non inverted polarity (Output is at line potential therefore safety BNC to BNC leads must be used for instrument connection)  
 Protection rating: 600V Cat II

## CAPTEUR LASER

## Keyence LK-H050 Capteur laser

## Fiche technique

KEYENCE



LK-H050

Tête de capteur, type à spot



## SPÉCIFICATIONS

Modèle		LK-H050
Type de montage		Réflexion diffuse
Distance de référence		50 mm
Plage de mesure		±10 mm <sup>1</sup>
Source de lumière	Type	Laser rouge à semi-conducteur
	Longueur d'onde	655nm
Source lumineuse	Classe laser	CEI 60825-1: Classe 3R
Source de lumière	Émission	4.8mW
Diamètre de spot (à la distance standard)		ø50 µm
Linéarité		±0.02 % de la pleine échelle (Pleine échelle = 20 mm) <sup>2</sup>
Répétabilité		0.025 µm <sup>3</sup>
Cadence d'échantillonnage		2,55/5/10/20/50/100/200/500/1000 µs (9 étapes réglables)
Caractéristiques de température		0.01 % de la pleine échelle/°C (Pleine échelle = 20 mm)
Résistance à l'environnement	Indice de protection	IP67
	Lumière ambiante	Lampe à incandescence ou fluorescence: 10.000 lux max.
	Température ambiante	De 0 à +50 °C <sup>4</sup>
	Humidité relative	35 à 85 % HR (Sans condensation)
	Résistance aux vibrations	De 10 à 55 Hz, Double amplitude de 1,5 mm, 2 heures dans chacune des directions X, Y et Z
Matériau		Aluminium coulé sous pression
Poids		Environ 260 g
<sup>1</sup> Plage de mesure lorsque le cycle d'échantillonnage est de 20 µs ou plus. <sup>2</sup> Cette valeur est obtenue lorsque la cible standard KEYENCE (pièce blanche diffusante ou pièce pourvue d'une surface métallique réfléchissante uniquement pour le LK-H008/LK-H008W) est mesurée avec le mode de mesure normal. <sup>3</sup> Cette valeur est obtenue lorsque la cible standard KEYENCE (pièce blanche diffusante ou pièce pourvue d'une surface métallique réfléchissante uniquement pour le LK-H008/LK-H008W) est mesurée à la distance de référence, le nombre de mesures utilisées pour calculer la moyenne étant fixé à 16384. La valeur entre parenthèses est un exemple type de mesure dont le nombre de mesures utilisées pour calculer la moyenne est fixé à 65536 et le cycle d'échantillonnage à 200 µs. <sup>4</sup> Lorsque la température ambiante est supérieure ou égale à 40 °C, réalisez un montage sur plaque métallique avant utilisation.		

MARTEAU D'IMPACT

Dytran 5800SL Impulse hammer

Model Number 5800SL	PERFORMANCE SPECIFICATION		Doc No PS5800SL
DYNAPULSE™ IMPULSE HAMMERS			
This family also includes:			
Model	Sensitivity (mV/Lb)	Range (Lbs. Force)	Max. Force (Lbs. Force)
Please, refer to the performance specifications of the products in this family for detailed description			
<b>Supplied Accessories:</b> 1) Accredited calibration certificate (ISO 17025) 2) Model 6278 head extender. Weight - 3.5 Grams. Material - brass.			
<b>Notes:</b> 1) Current must be supplied by constant current type power sources such as Dytran LVM power units. Do not supply power to the hammer from a DC power supply without current limiting as specified here. To do so will immediately destroy the built-in IC amplifier.			
<small>Units on the line drawing are in inches, units in brackets are in millimeters. Refer to ICF 000087 for more information.</small>			
21592 Macilla Street, Chatsworth, California 91311 Phone: 818.700.7818 Fax: 818.700.7880 www.dytran.com For permission to reprint this content, please contact info@dytran.com			

CONDITIONNEUR DU MARTEAU D'IMPACT

Metra Mess- und Frequenztechnik M32 Conditioning module

Manfred Weber  
**Metra Mess- und Frequenztechnik in Radebeul e.K.**  
 D-01445 Radebeul Meißner Str. 58 Internet: www.MMF.de  
 Tel. +49-351-836 2191 Fax +49-351-836 2940 Email: Info@MMF.de



**Instruction Manual**  
**IEPE Conditioning Module M32**

**Application**

The IEPE Conditioning Module M32 is a signal conditioner for transducers with IEPE compatible output. It provides the necessary power supply for the electronic circuit of the sensor. The unit features 3 gain ranges and a plug-in low pass filter. The M32 can be used as a front end for PC based data acquisition systems. It can be combined with the IEPE Supply Module M28. The M32 is suited for both benchtop applications and DIN rail attachment in switch cabinets. The wide supply voltage range of the M32 allows power supply from external batteries, from the available mains plug adapter or from an industrial 24 VDC supply.

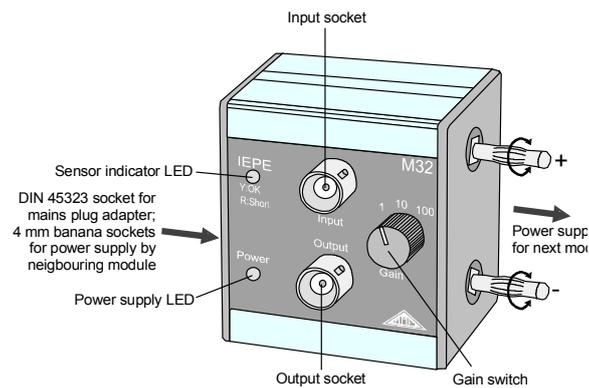
**What is IEPE?**

IEPE is a well-established standard for the output of piezoelectric transducers and microphones. It stands for "Integrated Electronics Piezo Electric". Other brand names for the same principle are ICP®, Isotron®, Delta-tron®, Piezotron® etc. The integrated circuit of the sensor transforms the charge signal of the piezo-ceramic sensing element, with its very high impedance and high EMI sensitivity, into a voltage signal with low impedance.

A special feature of the IEPE electronics is that power supply and measuring signal are transmitted via the same cable. So, an IEPE transducer requires, like a transducer with charge output, only one single-ended shielded cable.

## Technical Data

Input / output:	BNC sockets
Output circuit:	DC coupled; impedance approx. 100 $\Omega$
Dynamic range:	$\pm 10$ V
Constant current source:	3.8 .. 5.6 mA, compliance voltage >24 V
IEPE sensor indicator:	Bicolor LED; off = open input; yellow = 1 .. 24 V = OK; red = shorted
Gain ranges:	1 / 10 / 100 $\pm 1$ % typically; $\pm 2$ % maximum
Output noise:	< 1 mV <sub>rms</sub> with 30 kHz low pass
Frequency range (-3 dB):	0.1 Hz .. 30 kHz (depending on lowpass module)
Low pass filter:	Plug-in module <b>FB2-...</b> ; Butterworth; 4 <sup>th</sup> order; attenuation > 70 dB/decade available frequencies (-3 dB): FB2 - 0.1 / 0.3 / 1 / 3 / 5 / 10 / 30 kHz
Power supply:	U <sub>S</sub> = 5 .. 26 VDC; < 200 mA; insulated from signal path; via DIN 45323 circular power connector (positive terminal at tip) or two banana plugs
Case:	Aluminum, connected to negative terminal of power supply
Included accessories:	2 screw-in banana plugs for power supply connection with other modules
Optional accessories:	<b>PS500:</b> mains plug adapter for 100 .. 240 VAC; 12 VDC / 500 mA sufficient for one unit M32 <b>PS1000:</b> mains plug adapter for 100 .. 240 VAC; 12 VDC / 1000 mA sufficient for up to 3 units M32 <b>M28+32DIN:</b> 35 mm DIN rail adapter
Operating temperature:	-10 .. 55 °C; 95 % relative humidity; no condensation
Weight:	170 g
Dimensions (W x H x D):	56 mm x 59 mm x 44 mm



POT VIBRANT

Brüel & Kjær 4810 petit pot vibrant

PRODUCT DATA

Mini-shaker Type 4810

Uses

- Accelerometer calibration
- Vibration testing of small objects
- Mechanical impedance and mobility measurements
- Experimental modal analysis

Features

- Force rating 10 N (2.25 lbf) sine peak
- Frequency range DC to 18 kHz
- First axial resonance above 18 kHz
- Max. displacement 4 mm (0.16 in) peak-to-peak
- Max. bare table acceleration 550 m/s<sup>2</sup>
- Rugged construction
- Optimized performance using Power Amplifier Type 2718



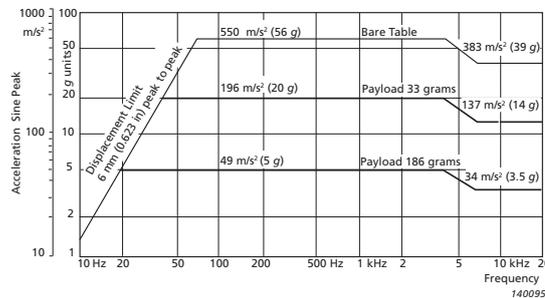
Description

Mini-shaker Type 4810 is of the electrodynamic type with a permanent field magnet. It is well-suited as the force generator in general vibration tests, mechanical impedance and mobility measurements, and experimental modal analysis where only smaller force levels are required. It can also be used in the calibration of vibration transducers, both to determine their sensitivity, by comparison with a standard accelerometer, as well as their frequency response, up to 18 kHz.

The suspension system consists of radial flexure springs that restrict the moving element to almost perfectly rectilinear motion. Laminated flexure springs provide a high degree of damping to minimise distortion due to flexure resonances.

The object to be vibrated is attached to the table by means of a 10–32 UNF screw, the thread size commonly used for mounting accelerometers. Performance limits defined by the maximum displacement (4 mm), maximum force (10 N or 7 N depending on frequency), and the first axial resonance of the moving element (above 18 kHz), are shown in Fig. 1.

Fig. 1 Sine performance curves for Type 4810



AMPLIFICATEUR DU POT VIBRANT

ILP Electronics US1 Power slave



MICROPHONES

Bruel & Kjaer 4939 microphone 1/4"

Bruel & Kjaer 4190 microphone 1/2"

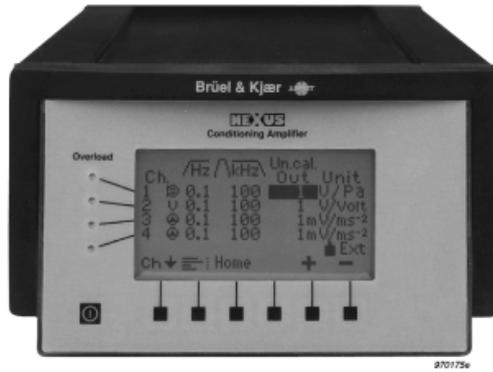
Bruel & Kjaer 4191 microphone 1/2"



## CONDITIONNEUR DES MICROPHONES

## NEXUS 2690 conditionneur

Fig. 2.1  
 Front panel of  
 NEXUS  
 Conditioning  
 Amplifier showing  
 the Amplifier Set-up  
 menu



# Chapter 6

## Specifications

### 6.1 Specifications – Types 2690 to 2693

#### Charge Input

**Connector:** TNC (TNC to 10–32 UNF adaptor JP-0162 included)  
**Grounding:** Single-ended or floating

#### MAX. INPUT

**Differential Charge:** 10 nC (peak); **Type 2692-C/D:** 100 nC (peak)  
**Common Mode Voltage:** 4.2 V (peak)  
 At gain  $\geq 0.316$  mV/pC (–10 dB gain with 1 nF transducer capacitance)

#### INPUT PROTECTION

**Differential Charge:**  $\leq 300$  nC (peak)  
**Common Mode Voltage:**  $\leq 15$  V (peak)  
**Common Mode Rejection Ratio:**  $> 50$  dB (typical) (50 to 60 Hz with 1 nF transducer capacitance)  
**Amplifier Gain:** 0.1 mV/pC to 10 V/pC (–20 to +80 dB gain with 1 nF transducer capacity); **Type 2692-C/D:** 0.01 mV/pC to 10 V/pC (–40 to +80 dB gain with 1 nF transducer capacity)

#### TRANSDUCER SENSITIVITY RANGE

$10^{-19}$  to  $10^{-6}$  C/MU  
 (MU = mechanical units: m/s<sup>2</sup>, g, N, lb., Pa)

#### CALIBRATED OUTPUT

Selectable in 10 dB steps. 100 dB attenuator range,  $10^{-15}$  to  $10^7$  V/MU; **Type 2692-C/D:** Selectable in 10 dB steps. 120 dB attenuator range,  $10^{-16}$  to  $10^7$  V/MU  
 $\pm 1\%$  for  $0^\circ\text{C} \leq T_a \leq +40^\circ\text{C}$  and  $\pm 2\%$  for  $-10^\circ\text{C} \leq T_a \leq +55^\circ\text{C}$   
 Frequency range from  $5 \times f_l$  to  $0.2 \times f_u$   
 $f_l$  = lower freq. limit: 0.1, 1.0 or 10 Hz  
 $f_u$  = upper freq. limit: 0.1, 1, 3, 10, 30 or 100 kHz

#### FREQUENCY RANGE (–10%)

**Acceleration:** 0.1 Hz to 100 kHz (transducer cable length  $< 10$  m)  
**Velocity (optional):** 1.0 Hz to 10 kHz  
**Displacement (optional):** 1.0 Hz to 1 kHz

#### LOW-PASS FILTER (–10%)

0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz, attenuation slope 40 dB/decade

#### HIGH-PASS FILTER (–10%)

**Acceleration:** 0.1, 1.0 or 10 Hz; **Type 2692-C/D:** 0.1, 1 or 20 Hz  
**Velocity (optional):** 1.0 or 10 Hz  
**Displacement (optional):** 1.0 or 10 Hz

#### INHERENT NOISE (2 Hz to 22.4 kHz)

$\leq 5$  fC referred to input,  $-10^\circ\text{C} \leq T_a \leq +40^\circ\text{C}$   
 $< 10$  fC referred to input,  $40^\circ\text{C} \leq T_a \leq +55^\circ\text{C}$   
 (Amplifier sensitivity  $> 20$  dB) with 1 nF transducer capacitance)

#### HARMONIC DISTORTION AND NOISE (2 Hz to 22.4 kHz, $Q_{in}$ )

$\leq 2$  nC peak,  $V_{out} \leq 3.16$  V peak;  
 $< 0.003\%$  for amplifier gain  $\leq 0.1$  V/pC  
 ( $< 40$  dB gain with 1 nF transducer capacitance)

#### ENVIRONMENTAL SUSCEPTIBILITY (referred to input)

**Magnetic Field:**  $< 0.2$  fC/(A/m)  
**Electromagnetic Field:**  $< 20$  fC/(V/m) or  $< 4$  fC/V  
**Vibration (10 to 500 Hz):**  $< 30$  fC/(m/s<sup>2</sup>)

#### MOUNTED RESONANCE TESTING<sup>a</sup>

**EP Patent 715.722, US Patent 5.753.793**  
 Mounted resonance testing of the accelerometer and cable interconnection, controllable from front panel and RS–232 interface

#### TEST TONE OSCILLATOR

$\omega = 1000$  rad/s (159.2 Hz), sinusoidal  
**Test Level:** 1 mV to 10 V ( $\pm 1\%$ ). Controllable from front panel and RS–232 interface  
**Reference Tone:** 1 V (RMS), ( $\pm 1\%$ ), 159.2 Hz  
**Rise Time:**  $> 7.5$  V/ $\mu$ s (100 kHz bandwidth)

#### CHANNEL TO CHANNEL PHASE-MATCH

$2.1^\circ - 0.1^\circ \times (f/f_l)$  from  $f_l$  to  $20 \times f_l$   
 $0.1^\circ$  from  $20 \times f_l$  to  $0.1 \times f_u$   
 $(f/f_u)^\circ$  from  $0.1(f_u)$  to  $f_u$   
 $f_l$ : lower freq. limit: 10 Hz  
 $f_u$ : upper freq. limit: 0.1, 1, 3, 10, 30 or 100 kHz

#### OPTIONAL FILTERS

**Integration:** Single and double  
**Type 2692-C:** Single and double integration filters included  
**Type 2692-D:** Single and double integration filters optional

#### Microphone Input

**Connector:** 7-pin LEMO  
**Grounding:** Outer shield grounded to chassis  
**Input Impedance:** 1 M $\Omega$  || 300 pF (AC coupled)  
**Max. Input:** 31.6 V (peak)  
**Input Protection:**  $\leq 50$  V (peak)

a. Brüel & Kjær patent

**Amplifier Gain:** –20 to +60 dB (80 dB with reduced specs.)

**TRANSDUCER SENSITIVITY RANGE**

$10^{-12}$  to  $10^3$  V/MU  
(MU = mechanical units: Pa, mm)

**CALIBRATED OUTPUT**

Selectable in 10 dB steps. 100 dB attenuator range,  $10^{-15}$  to  $10^7$  V/MU ( $\pm 0.1$  dB for  $0^\circ\text{C} \leq T_a \leq +40^\circ\text{C}$  and  $\pm 0.2$  dB for  $-10^\circ\text{C} \leq T_a \leq +55^\circ\text{C}$ )  
Frequency range from  $5 \times f_l$  to  $0.2 \times f_u$   
 $f_l$  = lower freq. limit: 0.1 or 20 Hz  
 $f_u$  = upper freq. limit: 0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz)

**POLARIZATION VOLTAGE ( $\pm 0.5$  V or  $\pm 0.25\%$ )**

0 or 200 V (all channels simultaneously selected, short-circuit protected)

**PREAMPLIFIER SUPPLY**

Fixed  $\pm 14$  V,  $\pm 40$  V or controlled automatically in accordance with input range (short-circuit protected)

**FREQUENCY RANGE (–1 dB)**

0.1 Hz to 100 kHz (gain  $\leq 60$  dB) (complies with IEC 1260 Class 0 and ANSI S1.11 Type 0-AA for  $f_l = 0.1$  Hz and  $f_u = 100$  kHz)

**HIGH-PASS FILTER (–1 dB)**

0.1 Hz, attenuation slope 40 dB/decade or 20 Hz, attenuation slope 80 dB/decade

**LOW-PASS FILTER (–1 dB)**

0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz, attenuation slope 40 dB/decade

**A-WEIGHTING FILTER**

Complies with IEC 651 Type 0

**INHERENT NOISE (referred to input, gain >20 dB)**

$< 2 \mu\text{V}$  A-weighted

**HARMONIC DISTORTION AND NOISE (2 Hz to 22.4 kHz,  $V_{in}$**

$\leq 20$  V peak,  $V_{out} \leq 3.16$  V peak)  
 $< 0.003\%$  for amplifier gain  $\leq 40$  dB

**ENVIRONMENTAL SUSCEPTIBILITY (referred to input)**

**Magnetic Field:**  $< 0.2 \mu\text{V}/(\text{A/m})$   
**Electromagnetic Field:**  $< 10 \mu\text{V}/(\text{V/m})$  or  $< 10 \mu\text{V}/\text{V}$   
**Vibration (10 to 500 Hz):**  $< 2 \mu\text{V}/(\text{m/s}^2)$

**CHARGE INJECTION CALIBRATION<sup>b</sup>:**

Verification of the entire measurement set-up including the microphone, preamplifier and connecting cable. Controllable from front panel and RS-232 interface  
**Reference Tone:** 1 V (RMS)  $\pm 1\%$ , 1 kHz

**OVERLOAD DETECTION**

Microphone preamplifier overload detection with respect to cable length (3 to 1000 meter)  
**Rise Time:**  $> 7.5 \text{ V}/\mu\text{s}$  (100 kHz bandwidth)

**CHANNEL TO CHANNEL PHASE-MATCH:**

$5.1^\circ - 0.1^\circ \times (f/f_l)$  from  $f_l$  to  $50 \times f_l$  ( $f_l = 0.1$  Hz)  
 $2.1^\circ - 0.1^\circ \times (f/f_l)$  from  $f_l$  to  $20 \times f_l$  ( $f_l = 20$  Hz)  
 $0.1^\circ$  from  $50 \times f_l$  to  $0.1 \times f_u$  ( $f_l = 0.1$  Hz)  
 $0.1^\circ$  from  $20 \times f_l$  to  $0.1 \times f_u$  ( $f_l = 20$  Hz)  
 $(f/f_u)^\circ$  from  $0.1(f_u)$  to  $f_u$

b. Brüel & Kjær patent

where:

$f_u$  = upper frequency limit: 0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz

**OPTIONAL FILTERS**

A-, B-, C- and D-weighting (one module)  
(Complies with IEC 651 Type 0)

**Intensity Input**

Specifications as for microphone input, except when using the "Intensity" filter

**Connector:** 7-pin LEMO (two connectors on two input modules – adaptor required)

**CHANNEL TO CHANNEL PHASE-MATCH AND FREQUENCY RESPONSE (with "Intensity" filter (20 Hz HP/22.4 kHz LP, 40 dB/decade))**

Complies with IEC 1043 standard Class 1 and ANSI S1.12–1995 Class 1, with Brüel & Kjær sound intensity probes  
(Conditions: output sensitivity for the two channels must be equal  
Transducer sensitivity must be equal within 0.5 dB)

**DeltaTron<sup>®</sup> Input**

**Connector:** BNT  
**Grounding:** Single-ended or floating  
**Input Impedance:** 1 M $\Omega$  || 100 pF (AC coupled)

**MAX. INPUT**

**Differential Voltage:**  $\leq 31.6$  V (peak)  
**Common Mode Voltage:** 4.2 V (peak)

**INPUT PROTECTION**

**Differential Voltage:**  $\leq 50$  V (peak)  
**Common Mode Voltage:**  $\leq 15$  V (peak)  
**Common Mode Rejection Ratio:** 50 dB (50 to 60 Hz) (typical)  
**Amplifier Gain:** –20 to +60 dB gain (80 dB with reduced specs.)

**TRANSDUCER SENSITIVITY RANGE**

$10^{-12}$  to  $10^3$  V/MU  
(MU = mechanical units:  $\text{m/s}^2$ , m/s, g, N, lb., Pa)

**CALIBRATED OUTPUT**

Selectable in 10 dB steps. 100 dB attenuator range,  $10^{-16}$  to  $10^7$  V/MU ( $\pm 0.1$  dB for  $0^\circ\text{C} \leq T_a \leq +40^\circ\text{C}$  and  $\pm 0.2$  dB for  $-10^\circ\text{C} \leq T_a \leq +55^\circ\text{C}$ )  
Frequency range from  $5 \times f_l$  to  $0.2 \times f_u$   
 $f_l$  = lower frequency limit: 0.1, 1.0 or 10 Hz  
 $f_u$  = upper frequency limit: 0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz  
**Constant Current Supply ( $\pm 15\%$ ):** +4 mA or +10 mA with a +28 V voltage source  
**Tacho Probe Supply:** +8 V DC at BNT inner shield (short-circuit protected)

**FREQUENCY RANGE (–10%)**

0.1 Hz to 100 kHz (gain  $< 60$  dB) attenuation slope 40 dB

**HIGH-PASS FILTER (–10%)**

0.1 Hz or 1.0 Hz (with attenuation slope 40 dB) or 10 Hz (with attenuation slope 60 dB/decade)

**LOW-PASS FILTER (–10%)**

0.1, 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz

**INHERENT NOISE (referred to input, gain >20 dB):**

$< 2.4 \mu\text{V}$  A-weighted  
 $< 3.3 \mu\text{V}$  lin. 2 Hz to 22.4 kHz

**HARMONIC DISTORTION AND NOISE (2 Hz to 22.4 kHz,  $V_{in}$   $\leq 20$  V peak,  $V_{out} \leq 3.16$  V peak)**  
 $<0.003\%$  for amplifier gain  $\leq 40$  dB  
**Rise Time:**  $>7.5$  V/ $\mu$ s (100 kHz bandwidth)

**ENVIRONMENTAL SUSCEPTIBILITY (referred to input)**

**Magnetic Field:**  $<0.2$   $\mu$ V/(A/m)  
**Electromagnetic Field:**  $<3$   $\mu$ V/(V/m) or  $<3$   $\mu$ V/V  
**Vibration (10 to 500 Hz):**  $<2$   $\mu$ V/(m/s<sup>2</sup>)

**OVERLOAD DETECTION**

Preamplifier overload detection with respect to cable length (3 to 1000 meter)

**CHANNEL TO CHANNEL PHASE-MATCH**

$5.1^\circ - 0.1^\circ \times (f/f_0)$  from  $f_0$  to  $50 \times f_0$  ( $f_0 = 0.1$  or  $1$  Hz)  
 $2.1^\circ - 0.1^\circ \times (f/f_0)$  from  $f_0$  to  $20 \times f_0$  ( $f_0 = 10$  Hz)  
 $0.1^\circ$  from  $50 \times f_0$  to  $0.1 \times f_0$  for  $f_0 = 0.1, 1$  Hz  
 $0.1^\circ$  from  $20 \times f_0$  to  $0.1 \times f_0$  for  $f_0 = 10$  Hz  
 $(f/f_0)^\circ$  from  $0.1(f_0)$  to  $f_0$

where:

$f_0$ : upper freq. limit: 1, 3, 10, 22.4, 30 or 100 kHz

**Reference Tone:** 1 V (RMS)  $\pm 1\%$  (0.1 dB), 1 kHz

**OPTIONAL FILTERS**

**A-, B-, C- and D-weighting** (one module)

(complies with IEC 651 Type 0)

**Integration:** Single and double (one module)

Other filters available upon request

**General Specifications**

**Power Supply**

**INTERNAL BATTERY (not included)**

Nickel-Metal Hydride rechargeable battery supporting SMBus and on-battery charge level meter. Provides typically 15 hours of continuous use with a single channel and 4 hours with four channels without backlighting and without optional filters. With backlighting on, and with optional filters, battery provides typically 3 hours of continuous use. If NEXUS is not used for more than a month, please remove the battery to prevent discharging. Charging time is approximately 4 hours

**EXTERNAL DC POWER INPUT**

Complies with ISO 7637-1 (12 V) and 7637-2 (24 V)

**Input Range:** 10 to 33 VDC

**MAINS SUPPLY**

Supported via supplied Mains Adaptor ZG-0429 (included), 90–264 VAC, 40–65 Hz

**Digital Control Interface**

**SERIAL INTERFACE**

Conforms to EIA/TIA-574 (RS-232)

**Baud rate:** 2400, 4800, 9600

**Parity:** None

**Data Bits:** 8

**Stop Bits:** 1

**Handshake:** X-on/X-off

"Plug and play" interface coupling

**Communication Speed for a Baud Rate of 9600:** Transmission

time for one command of 5 characters is  $\sim 4$  ms

Transmission time for one command of 5 characters and to receive

an echo after each character is  $\sim 8$  ms

Execution time for one command is 100 ms to several seconds.  
 Time to configure a complete 4-channel NEXUS using short form set-up with approx. 600 characters requires transmission time of 2 to 3 s (4 to 6 s with echo after each character)  
 Execution time in NEXUS is from 40 to 60 s  
 For set-ups with over 1000 characters, the transmission time will be increased by at least 30 s due to delay in emptying receiver buffer  
 Response time after requesting a status of one load:  $<0.5$  s  
 Response time after requesting a peak meter reading:  $<0.5$  s

**Display Interface**

**DISPLAY**

64  $\times$  128 pixel graphical display with back-lighting on/off

**OVERLOAD DETECTION**

On both common-mode and differential signals applied before filters LED overload indication at the front panel and overload indication via RS-232 control interface

**Peak Meter**

**Dynamic Range:**  $-30$  to  $+10$  dBV (peak)

**Resolution:** 1 dB

**Analogue Output**

**Connector:** BNC

**Grounding:** Single-ended or floating

**Output Impedance:** 50  $\Omega$ /500 pF

**Max. Output (differential voltage):** 3.16 V peak (6.32 V peak to peak); **Type 2692-C/D:** 10 V peak (20 V peak to peak)

**Max. DC Offset:**  $\pm 25$  mV, typically  $<2$  mV

**OUTPUT PROTECTION**

**Differential Voltage:**  $\leq 50$  V (peak)

**Common Mode Voltage:**  $\leq 15$  (peak)

**Common Mode Rejection:**  $>50$  dB (50 to 60 Hz) for Common Mode

Voltage  $\leq 2$  V peak (voltage injected into instrument)

**OUTPUT DRIVE CAPACITY:**

100 m of cable length (100 pF/m) to 20 kHz

1000 m of cable length (100 pF/m) to 2 kHz

**Channel Separation:** Better than  $-100$  dB at 1 kHz

**Dimensions and Weight**

**Height:** 90 mm (3.5")

**Width:** 144 mm (5.7")

**Depth:** 230 mm (9.1")

**Weight:** Approx. 3 kg (6.6 lb.), for a 4-channel unit including battery

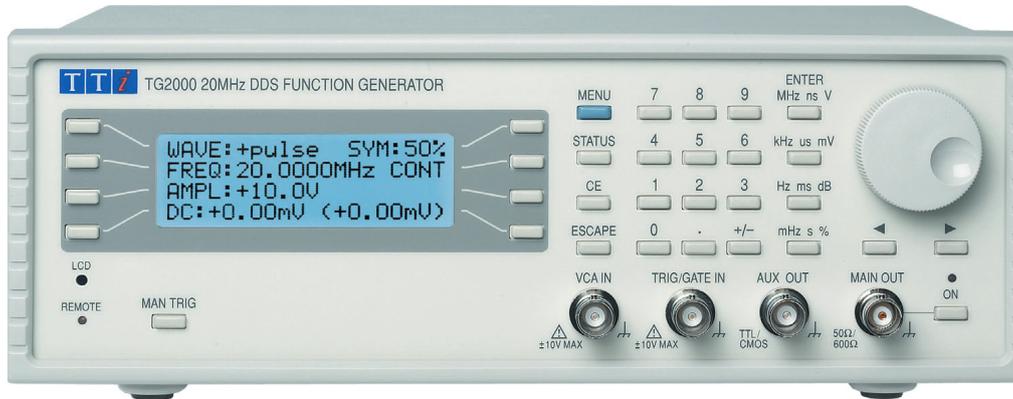
**Note:** All values are typical at 25°C (77°F), unless measurement uncertainty is specified. All uncertainty values are specified at  $2\sigma$  (that is, expanded uncertainty using a coverage factor of 2)

**Calibration**

NEXUS amplifiers are supplied with a Manufacturer's Certificate of Conformance. An initial calibration can be supplied as an option. The calibration services in the table below are based on one channel. There is an extra charge for each additional channel:

## GBF (GÉNÉRATEUR DE BASSES FRÉQUENCES)

## TTi TG2000 20MHz DDS function generator



*0.001Hz to 10MHz or 20MHz frequency range, 6 digits or 1mHz setting resolution.*

*1ppm stability and better than 10 ppm absolute accuracy for one year.*

*Sine, square, triangle, positive pulse and negative pulse waveforms.*

*Low distortion, high spectral purity sine waves.*

*Internal sweep, linear or logarithmic, full range phase continuous, adjustable marker.*

*Modulations modes of gated, AM, FSK and tone switching; built-in trigger generator.*

*5mV to 20V pk-pk output from 50 or 600 ; plus multi function auxiliary output.*

D.5 DANS LES COULISSES



FIGURE D.9 – Détail de la figure de Chladni à 275Hz



FIGURE D.10 – Figure de Chladni à 792Hz



FIGURE D.11 – Chambre anéchoïque

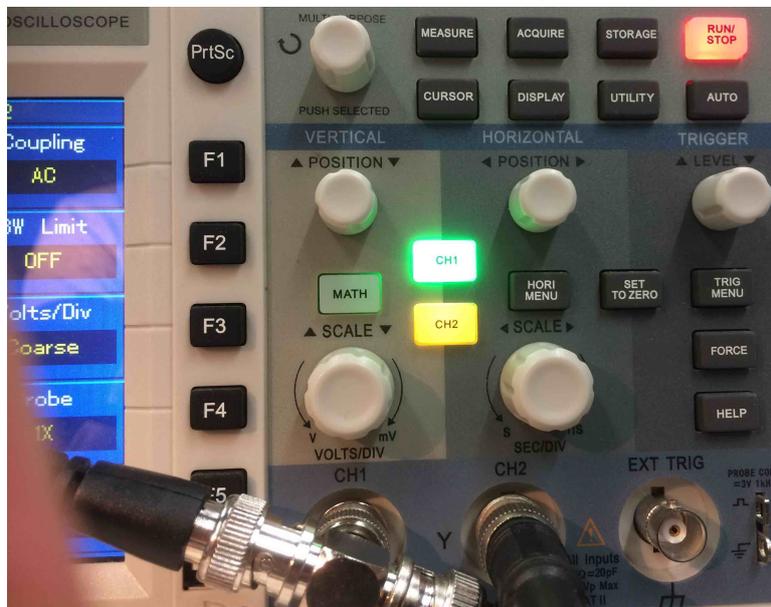
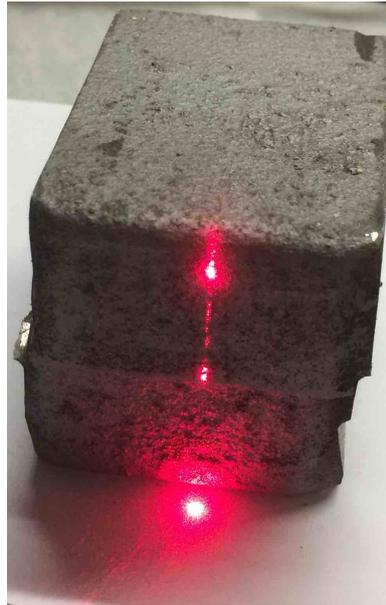


FIGURE D.12 – Son et lumière

Dans cette annexe, des preuves techniques de l'article [W9] sont reprises.

TABLE DES MATIÈRES

E.1	Stabilisation en temps fini du système hybride EDP-EDO . . . . .	303
E.1.1	Conception de la loi de commande . . . . .	303
E.1.2	Preuve de stabilité en temps fini du système hybride . . . . .	306

E.1 STABILISATION EN TEMPS FINI DU SYSTÈME HYBRIDE EDP-EDO

E.1.1 Conception de la loi de commande

**Lemme E.1.** *Les noyaux  $L$  satisfont*

$$\begin{aligned} L^{\alpha\alpha}(x, \xi) &= L^{\beta\beta}(x, \xi) \geq 0 \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}, \\ L^{\alpha\beta}(x, \xi) &= L^{\beta\alpha}(x, \xi) \geq 0 \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

et donc  $\mu \geq 2$ .

*Démonstration.* On rappelle que  $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) = \lambda(x)$  et que  $c_1(x) = -c_2(x) = -\frac{\lambda'(x)}{2}$ . Soient  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  définis par

$$\lambda(x) = \frac{1}{J\sqrt{\frac{g^m}{\rho} e^{\mathcal{G}Jx}}} =: C_1 e^{-C_2 x}.$$

Alors, le système de Goursat satisfait par les noyaux  $L$  s'écrit (voir [69])

$$\lambda(x)L_x^{\alpha\alpha} + \lambda(\xi)L_\xi^{\alpha\alpha} = -\lambda'(\xi)L^{\alpha\alpha} - \frac{\lambda'(x)}{2}L^{\beta\alpha}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.1})$$

$$\lambda(x)L_x^{\alpha\beta} - \lambda(\xi)L_\xi^{\alpha\beta} = \lambda'(\xi)L^{\alpha\beta} - \frac{\lambda'(x)}{2}L^{\beta\beta}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.2})$$

$$\lambda(x)L_x^{\beta\alpha} - \lambda(\xi)L_\xi^{\beta\alpha} = \lambda'(\xi)L^{\beta\alpha} - \frac{\lambda'(x)}{2}L^{\alpha\alpha}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.3})$$

$$\lambda(x)L_x^{\beta\beta} + \lambda(\xi)L_\xi^{\beta\beta} = -\lambda'(\xi)L^{\beta\beta} - \frac{\lambda'(x)}{2}L^{\alpha\beta}, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.4})$$

avec les conditions aux limites

$$L^{\alpha\alpha}(x, 0) = L^{\alpha\beta}(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{E.5})$$

$$L^{\alpha\beta}(x, x) = -\frac{\lambda'(x)}{4\lambda(x)} = \frac{C_2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{E.6})$$

$$L^{\beta\alpha}(x, x) = \frac{C_2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{E.7})$$

$$L^{\beta\beta}(x, 0) = L^{\beta\alpha}(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (\text{E.8})$$

L'existence et l'unicité de la solution  $(L^{\alpha\alpha}, L^{\alpha\beta}, L^{\beta\alpha}, L^{\beta\beta}) \in [C^0(\mathcal{T})]^4$  ont déjà été établies dans [69, Théorème A.1]. Cependant, les affirmations du Lemme E.1 doivent encore être justifiées.

On introduit le système  $2 \times 2$  suivant :

$$\lambda(x)f_x + \lambda(\xi)f_{\xi} = -\lambda'(\xi)f + \mu(x)g, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.9})$$

$$\lambda(x)g_x - \lambda(\xi)g_{\xi} = \lambda'(\xi)f + \mu(x)f, \quad (x, \xi) \in \mathcal{T}, \quad (\text{E.10})$$

avec les conditions aux limites

$$f(x, 0) = g(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{E.11})$$

$$g(x, x) = C, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{E.12})$$

où  $C := C_2/4 > 0$  et  $\mu(x) = -\lambda'(x)/2 > 0$  pour  $x \in [0, 1]$ . Si l'on prouve l'existence d'une solution  $(f, g)$  de (E.9)-(E.12) dans  $[C^0(\mathcal{T})]^2$ , alors en mettant  $L^{\alpha\alpha} = L^{\beta\beta} := f$ ,  $L^{\alpha\beta} = L^{\beta\alpha} := g$ , on obtient une solution de (E.1)-(E.8) dans  $[C^0(\mathcal{T})]^4$ . L'unicité d'une telle solution réduit l'étude du système (E.1)-(E.8) à celle du système (E.9)-(E.12). De ce fait, le Lemme E.1 est une conséquence directe du Lemme suivant.

**Lemme E.2.** Soient  $C > 0$ ,  $\lambda \in C^1([0, 1])$  et  $\mu \in C^0([0, 1])$  avec  $\lambda(x) > 0$  et  $\mu(x) > 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Alors il existe une solution unique  $(f, g) \in [C^0(\mathcal{T}, \mathbb{R}_+)]^2$  de (E.9)-(E.12), où  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ .

*Preuve du Lemme E.2.* On exprime d'abord  $(f, g)$  comme un point fixe d'une application de  $[C^0(\mathcal{T}, \mathbb{R}_+)]^2$  vers soi-même. Ensuite, réduisant le domaine  $(x, \xi)$  à un « trapézoïde », on prouve que cette application est une contraction. Le domaine total  $\mathcal{T}$  est couvert en itérant la construction ci-dessus.

Le système caractéristique pour (E.9) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \lambda(x), \\ \frac{d\xi}{ds} &= \lambda(\xi), \\ \frac{dz}{ds} &= -\lambda'(\xi)z + \mu(x)g, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites  $x(0) = x_0$ ,  $\xi(0) = 0$ , et  $z(0) = g(x_0, 0)$ .

Soit  $\Lambda(x) := \int_0^x \frac{ds}{\lambda(s)}$ . Alors on obtient facilement

$$x(s) = \Lambda^{-1}(\Lambda(x_0) + s), \quad \xi(s) = \Lambda^{-1}(s)$$

et

$$\begin{aligned} f(x(s), \xi(s)) &= z(s) \\ &= e^{-\int_0^s \lambda'(\xi(\sigma)) d\sigma} \left( g(x_0, 0) + \int_0^s e^{\int_0^\sigma \lambda'(\xi(\tau)) d\tau} \mu(x(\sigma)) g(x(\sigma), \xi(\sigma)) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Puisque  $s = \Lambda(\xi)$ ,  $x_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(x) - \Lambda(\xi))$ , on a que  $x(\sigma) = \Lambda^{-1}(\Lambda(x) - \Lambda(\xi) + \sigma)$ ,  $\xi(\sigma) = \Lambda^{-1}(\sigma)$  et

$$\begin{aligned} f(x, \xi) &= e^{-\int_0^{\Lambda(\xi)} \lambda'(\Lambda^{-1}(\sigma)) d\sigma} \left[ g(\Lambda^{-1}(\Lambda(x) - \Lambda(\xi)), 0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\Lambda(\xi)} e^{\int_0^\sigma \lambda'(\Lambda^{-1}(\tau)) d\tau} \mu(\Lambda^{-1}(\Lambda(x) - \Lambda(\xi) + \sigma)) g(\Lambda^{-1}(\Lambda(x) - \Lambda(\xi) + \sigma), \Lambda^{-1}(\sigma)) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Pareillement, le système caractéristique pour (E.10) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \lambda(x), \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\lambda(\xi), \\ \frac{dz}{ds} &= \lambda'(\xi)z + \mu(x)f, \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites  $x(0) = x_0$ ,  $\xi(0) = x_0$ , et  $z(0) = C$ .

On obtient facilement

$$x(s) = \Lambda^{-1}(\Lambda(x_0) + s), \quad \xi(s) = \Lambda^{-1}(\Lambda(x_0) - s)$$

de sorte que

$$s = \frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2}, \quad x_0 = \Lambda^{-1}\left(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2}\right),$$

et

$$\begin{aligned} g(x(s), \xi(s)) &= z(s) \\ &= e^{\int_0^s \lambda'(\xi(\sigma)) d\sigma} \left( C + \int_0^s e^{-\int_0^\sigma \lambda'(\xi(\tau)) d\tau} \mu(x(\sigma)) f(x(\sigma), \xi(\sigma)) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Il en suit que

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= e^{\int_0^{\frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2}} \lambda'(\Lambda^{-1}(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \sigma)) d\sigma} \left( C + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2}} e^{-\int_0^\sigma \lambda'(\Lambda^{-1}(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \tau)) d\tau} \mu\left(\Lambda^{-1}\left(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} + \sigma\right)\right) \right. \\ &\quad \left. \times f\left(\Lambda^{-1}\left(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} + \sigma\right), \Lambda^{-1}\left(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \sigma\right)\right) d\sigma \right). \quad (\text{E.14}) \end{aligned}$$

Remplaçant dans (E.14)  $f$  par son expression dans (E.13), on arrive à  $g = \Gamma(g)$ , où

$$\begin{aligned} \Gamma(g)(x, \xi) &:= e^{\int_0^{\frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2}} \lambda'(\Lambda^{-1}(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \sigma)) d\sigma} \left( C + \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2}} e^{-\int_0^\sigma \lambda'(\Lambda^{-1}(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \tau)) d\tau} \mu\left(\Lambda^{-1}\left(\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} + \sigma\right)\right) \right. \\ &\quad \times e^{-\int_0^{\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \sigma} \lambda'(\Lambda^{-1}(\sigma)) d\sigma} \left\{ g(\Lambda^{-1}(2\sigma), 0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\Lambda(x) + \Lambda(\xi)}{2} - \sigma} e^{\int_0^\kappa \lambda'(\Lambda^{-1}(\tau)) d\tau} \mu(\Lambda^{-1}(2\sigma + \kappa)) \right. \\ &\quad \left. \left. \times g(\Lambda^{-1}(2\sigma + \kappa), \Lambda^{-1}(\kappa)) d\kappa \right\} d\sigma \right). \quad (\text{E.15}) \end{aligned}$$

Pour  $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ , soient

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &:= \{(x, \xi) \in \mathcal{T}; \Lambda(\varepsilon_1) \leq \Lambda(x) - \Lambda(\xi) \leq \Lambda(\varepsilon_2)\}, \\ E_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} &:= C^0(\mathcal{T}_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}, \mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . En notant que la restriction de  $\Gamma(g)$  à  $\mathcal{T}_{0, \varepsilon}$  dépend seulement de la restriction de  $g$  à  $\mathcal{T}_{0, \varepsilon}$ , on peut définir une application  $g \in E_{0, \varepsilon} \rightarrow \Gamma(g) \in E_{0, \varepsilon}$  et trouver une constante  $K = K(\|\mu\|_{L^\infty(0,1)}, \|\lambda'\|_{L^\infty(0,1)}, \|\Lambda\|_{L^\infty(0,1)}) > 0$  de sorte que

$$\begin{aligned} \|\Gamma(g_1) - \Gamma(g_2)\|_{L^\infty(\mathcal{T}_{0, \varepsilon})} &\leq K \sup_{(x, \xi) \in \mathcal{T}_{0, \varepsilon}} \frac{\Lambda(x) - \Lambda(\xi)}{2} \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathcal{T}_{0, \varepsilon})} \\ &\leq \frac{K\Lambda(\varepsilon)}{2} \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathcal{T}_{0, \varepsilon})}. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  assez petit, on a que  $K\Lambda(\varepsilon)/2 < 1$ , de sorte que l'application  $g \in E_{0, \varepsilon} \rightarrow \Gamma(g) \in E_{0, \varepsilon}$  est une contraction, et a donc un point fixe unique d'après le Théorème du

point fixe pour une contraction. En utilisant (E.13), ceci mène à une solution unique  $(f, g) \in E_{0,\varepsilon}^2$ . En procédant de la même manière (en utilisant les valeurs de  $g$  sur la courbe caractéristique  $\Lambda(x) - \Lambda(\xi) = \Lambda(\varepsilon)$  calculée dans l'étape précédente), on peut étendre  $g$  et  $f$  sur les trapézoïdes  $\mathcal{T}_{\varepsilon,2\varepsilon}$ ,  $\mathcal{T}_{2\varepsilon,3\varepsilon}$ , etc. Finalement, les fonctions  $g$  et  $f$  sont définies sur le domaine entier  $\mathcal{T}$  et elles prennent des valeurs non négatives. Les preuves des Lemmes E.2 et E.1 sont complétées ainsi.  $\square$

REMARQUE En fait, il suit de (E.13) et (E.14) que  $f$  et  $g$  prennent des valeurs strictement positives  $\mathcal{T}$ . La même chose est valable pour  $L^{\alpha\alpha} = L^{\beta\beta}$  et  $L^{\alpha\beta} = L^{\beta\alpha}$ .

### E.1.2 Preuve de stabilité en temps fini du système hybride

On prouve qu'avec la loi de commande (11.51), la plateforme et le câble avec une tension affine sont stabilisés en un temps fini. On établit d'abord la stabilité temps-fini du système dans les nouvelles variables  $(\gamma, \varphi)$ , et ensuite, on retourne aux variables d'origine  $(z, X_p)$ . Soit  $H := [L^2(0, 1)]^2 \times \mathbb{R}^2$  muni de la norme

$$\|(\alpha, \beta, \varphi^0, \varphi^1)\|_H^2 := \int_0^1 [\alpha(x)^2 + \beta(x)^2] dx + |\varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2.$$

**Théorème E.1.** Soient  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  avec  $0 < v_2 < 1$  et  $v_1 \geq \frac{v_2}{2-v_2}$ . Alors le système (11.29), (11.50), avec les conditions aux frontières

$$\alpha(0, t) = \beta(0, t), \quad \beta(1, t) = \mu^{-1}\dot{\varphi}(t), \quad (\text{E.16})$$

est bien posé et globalement stable en temps fini dans l'espace de Hilbert  $H$ . Plus précisément, il existe une fonction non décroissante  $T_1 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  telle que pour tous  $(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1) \in H$ , la solution de (11.29), (11.50), (E.16) et  $(\alpha(\cdot, 0), \beta(\cdot, 0), \varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = (\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)$  satisfait

$$\alpha(x, t) = \beta(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H), \quad (\text{E.17})$$

$$\varphi(t) = 0, \quad \forall t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H). \quad (\text{E.18})$$

*Démonstration.* On utilise la structure en cascade du système EDP-EDO, en commençant par la partie EDO. Le problème de Cauchy

$$\ddot{\varphi}(t) + [\dot{\varphi}(t)]^{v_1} + [\varphi(t)]^{v_2} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (\text{E.19})$$

$$(\varphi(0), \dot{\varphi}(0)) = (\varphi^0, \varphi^1), \quad (\text{E.20})$$

admet des solutions  $\varphi \in C^2([0, T])$  pour un certain temps  $T > 0$  (possiblement petit) d'après le Théorème de Peano. La solution est en fait unique en temps positifs, définie sur  $[0, T]$  pour tout  $T > 0$ , et une stabilité globale en temps fini est obtenu pour le système (11.50) (voir [12, 39, 103]). Soit  $T_0 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction non décroissante telle que

$$\varphi(t) = 0 \text{ si } t \geq T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|)$$

où  $\|(\varphi^0, \varphi^1)\| = (|\varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Ensuite, on couple la partie EDO à la partie EDP. On considère le système

$$\beta_t = \lambda(x)\beta_x, \quad x \in ]0, 1[, t > 0, \quad (\text{E.21})$$

$$\beta(1, t) = \mu^{-1}\dot{\varphi}(t), \quad t > 0, \quad (\text{E.22})$$

$$\beta(x, 0) = \beta^0(x), \quad x \in ]0, 1[. \quad (\text{E.23})$$

Suivant [67, Définition 2.1 p. 25], pour des  $T > 0$ ,  $\beta^0 \in L^2(0, 1)$  et  $\varphi \in H^1(0, T)$  donnés, on dit qu'une solution du problème de Cauchy (E.21)-(E.23) est une fonction

$\beta \in C^0([0, T], L^2(0, 1))$  telle que, pour tout  $\tau \in [0, T]$  et pour tout  $\eta \in C^1([0, 1] \times [0, \tau])$  tel que  $\eta(0, t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$-\int_0^\tau \int_0^1 (\eta_t - (\lambda\eta)_x) \beta \, dx \, dt - \frac{\lambda(1)}{\mu} \int_0^\tau \eta(1, t) \dot{\varphi}(t) \, dt + \int_0^1 [\eta(x, \tau) \beta(x, \tau) - \eta(x, 0) \beta^0(x)] \, dx = 0.$$

Alors, suivant de près [67, Théorème 2.4 p. 27], il peut être prouvé qu'il existe une solution unique  $\beta \in C^0([0, T], L^2(0, 1))$  du système de Cauchy (E.21)-(E.23). De plus, notant  $\lambda(x) = C_1 e^{-C_2 x}$  (c.f. (11.17)), on obtient facilement, par la méthode des caractéristiques, que  $\beta$  est donné par

$$\beta(x, t) = \begin{cases} \beta^0 \left( \frac{1}{C_2} \ln(e^{C_2 x} + C_1 C_2 t) \right) & \text{si } t < \frac{e^{C_2} - e^{C_2 x}}{C_1 C_2}, \\ \mu^{-1} \dot{\varphi} \left( t + \frac{e^{C_2 x} - e^{C_2}}{C_1 C_2} \right) & \text{si } t \geq \frac{e^{C_2} - e^{C_2 x}}{C_1 C_2}. \end{cases} \quad (\text{E.24})$$

En particulier, puisque  $\varphi(t) = 0$  pour  $t \geq T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|)$ , on déduit que  $\beta(x, t) = 0$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $t \geq T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|) + \frac{e^{C_2} - e^{C_2 x}}{C_1 C_2}$ .

On note aussi que  $\beta$  a une trace  $\beta(0, \cdot) \in L^2(0, T)$  pour tout  $T > 0$ , qui est donnée par

$$\beta(0, t) = \begin{cases} \beta^0 \left( \frac{1}{C_2} \ln(1 + C_1 C_2 t) \right) & \text{si } t < \frac{e^{C_2} - 1}{C_1 C_2}, \\ \mu^{-1} \dot{\varphi} \left( t + \frac{1 - e^{C_2}}{C_1 C_2} \right) & \text{si } t \geq \frac{e^{C_2} - 1}{C_1 C_2}. \end{cases}$$

Pareillement, il peut être prouvé que pour tout  $\alpha^0 \in L^2(0, 1)$ , il existe pour tout  $T > 0$  une solution unique  $\alpha \in C^0([0, T], L^2(0, 1))$  du problème de Cauchy

$$\alpha_t = -\lambda(x) \alpha_x, \quad x \in ]0, 1[, \quad t > 0, \quad (\text{E.25})$$

$$\alpha(0, t) = \beta(0, t), \quad t > 0, \quad (\text{E.26})$$

$$\alpha(x, 0) = \alpha^0(x), \quad x \in ]0, 1[. \quad (\text{E.27})$$

De plus, elle est donnée par

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} \alpha^0 \left( \frac{1}{C_2} \ln(e^{C_2 x} - C_1 C_2 t) \right) & \text{si } t < \frac{e^{C_2 x} - 1}{C_1 C_2}, \\ \beta \left( 0, t - \frac{e^{C_2 x} - 1}{C_1 C_2} \right) & \text{si } t \geq \frac{e^{C_2 x} - 1}{C_1 C_2}. \end{cases} \quad (\text{E.28})$$

Puisque  $\alpha(0, t) = \beta(0, t) = 0$  pour  $t \geq T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|) + \frac{e^{C_2} - 1}{C_1 C_2}$ , on déduit que  $\alpha(x, t) = 0$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $t \geq T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|) + \frac{e^{C_2} + e^{C_2 x} - 2}{C_1 C_2}$ . Alors

$$\varphi(t) = 0, \quad \text{pour } t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H) \\ := T_0(\|(\varphi^0, \varphi^1)\|) + \frac{2e^{C_2} - 2}{C_1 C_2},$$

$$\alpha(x, t) = \beta(x, t) = 0, \quad \text{pour } t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H) \text{ et } x \in [0, 1].$$

En utilisant la stabilité de l'origine en  $\mathbb{R}^2$  pour (11.50) et les formules (E.24), (E.28), on en déduit la stabilité de l'origine en  $H$  pour le système (11.29), (11.50) et (E.16), qui est alors stable en temps fini (d'après la Définition 11.2).  $\square$

Le Théorème E.1 prouve la stabilité en temps fini du système hybride EDP-EDO dans les coordonnées  $(X_p(t), \alpha(x, t), \beta(x, t))$ . On retourne maintenant aux coordonnées d'origine  $(X_p(t), z(x, t) = y(s, t))$ .

On introduit l'espace

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1) \in H^2(0,1) \times H^1(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \\ & z_x^0(0) = 0, z^0(1) = \Omega^0, \\ & \mu\beta^0(1) = \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}}\Omega^1 - a(1)\lambda(1)\alpha^0(1) + b(1)\lambda(1)\beta^0(1) \\ & \quad + \int_0^1 [(a\lambda)_x\alpha^0 - (b\lambda)_x\beta^0] dx, \\ & \text{avec } \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \beta^0 \end{bmatrix} (x) := \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{bmatrix} (x) - \int_0^x \mathbf{K}(x, \xi) \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{bmatrix} (\xi) d\xi \quad \forall x \in [0, 1] \\ & \text{et } \begin{bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{bmatrix} (x) := \frac{1}{\sqrt{\lambda(x)}} \begin{bmatrix} z^1(x) - \lambda(x)z_x^0(x) \\ z^1(x) + \lambda(x)z_x^0(x) \end{bmatrix} \quad \forall x \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

muni de la norme  $\|(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)\|_{\mathcal{H}}^2 := \|z^0\|_{H^2(0,1)}^2 + \|z^1\|_{H^1(0,1)}^2 + |\Omega^0|^2 + |\Omega^1|^2$ .

On peut maintenant formuler le résultat de stabilité.

**Théorème E.2.** *Le système (11.16)-(11.18) avec la loi de commande (11.51), contenant les exposants  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$  avec  $0 < v_2 < 1$  et  $v_1 \geq \frac{v_2}{2-v_2}$ , et  $a(x)$  et  $b(x)$  définies par (11.44)-(11.45)-(11.46), est bien posé et globalement stable en temps fini dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Plus précisément, il existe une fonction non décroissante  $T : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  telle que pour tous  $(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1) \in \mathcal{H}$ , la solution de (11.16)-(11.18), (11.51) et  $(z(\cdot, 0), z_t(\cdot, 0), X_p(0), \dot{X}_p(0)) = (z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)$  satisfait*

$$z(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq T(\|(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)\|_{\mathcal{H}}), \quad (\text{E.29})$$

$$X_p(t) = 0, \quad \forall t \geq T(\|(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)\|_{\mathcal{H}}). \quad (\text{E.30})$$

*Démonstration.* Soient  $u^0, v^0, \alpha^0, \beta^0 \in H^1(0,1)$  comme dans la définition de l'espace  $\mathcal{H}$ . On note que  $\alpha^0(0) = \beta^0(0)$ , pour  $z_x^0(0) = 0$ . Soient

$$\varphi^0 := \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}}\Omega^0 + \int_0^1 [a(x)\alpha^0(x) + b(x)\beta^0(x)] dx, \quad (\text{E.31})$$

$$\varphi^1 := \mu\beta^0(1). \quad (\text{E.32})$$

On déduit du Théorème E.1 l'existence et l'unicité d'une solution  $(\alpha, \beta, \varphi)$  sur  $\mathbb{R}_+$  de (11.29), (11.50), (E.16), et  $(\alpha(\cdot, 0), \beta(\cdot, 0), \varphi, \dot{\varphi}) = (\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)$ , et que cette solution satisfait (E.17)-(E.18). On sait aussi du Théorème E.1 que  $\alpha, \beta \in C^0([0, T], L^2(0, 1))$  et que  $\varphi \in C^2([0, T])$  pour tout  $T > 0$ .

Ici, les données initiales are plus régulières, et de ce fait, il est supposé que les trajectoires sont plus régulières.

**HYPOTHÈSE 1.**  $\alpha, \beta \in C^0([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^1(0, T))$  pour tout  $T > 0$ .

En effet, en utilisant les propriétés  $\beta^0 \in H^1(0, 1)$ ,  $\dot{\varphi} \in C^1([0, T]) \subset H^1(0, T)$ , la condition de compatibilité (E.32) et la formule (E.24), on déduit que  $\beta \in C^0([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^1(0, T))$ . En particulier,  $\beta(0, \cdot) \in H^1(0, T)$ . De la même façon, en utilisant les propriétés  $\alpha^0 \in H^1(0, 1)$ ,  $\beta(0, \cdot) \in H^1(0, T)$ , la condition de compatibilité  $\alpha^0(0) = \beta^0(0)$  et la formule (E.28), on conclut que  $\alpha \in C^0([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^1(0, T))$ .

Ensuite, on définit respectivement  $X_p(t)$  comme

$$X_p(t) := \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \varphi(t) - \int_0^1 [a(x)\alpha(x, t) + b(x)\beta(x, t)] dx \right), \quad (\text{E.33})$$

$w(x, t)$  comme

$$w(x, t) = \begin{bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{bmatrix} := \gamma(x, t) + \int_0^x \mathbf{L}(x, \xi)\gamma(\xi, t) d\xi \quad (\text{E.34})$$

(avec  $\gamma(x, t) := [\alpha(x, t) \ \beta(x, t)]^\top$ ), et  $[D(x, t) \ S(x, t)]^\top$  comme

$$\begin{bmatrix} D(x, t) \\ S(x, t) \end{bmatrix} := \sqrt{\lambda(x)} w(x, t). \quad (\text{E.35})$$

Il est clair que l'on a aussi que

$$u, v, D, S \in C^0([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^1(0, T)) \quad \forall T > 0. \quad (\text{E.36})$$

De plus, puisque  $\gamma$  satisfait (11.29), on obtient que  $w$  satisfait (11.23) et que les fonctions  $D, S$  satisfont le système (11.20)-(11.21). On peut maintenant définir la fonction  $z(x, t)$ .

**HYPOTHÈSE 2.** Pour tout  $T > 0$ , il existe une fonction unique  $z \in C^0([0, T], H^2(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^2(0, T))$  du système

$$z_t = \frac{S + D}{2}, \quad (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \quad (\text{E.37})$$

$$z_x = \frac{S - D}{2\lambda}, \quad (x, t) \in ]0, 1[ \times ]0, T[, \quad (\text{E.38})$$

$$z(1, 0) = z^0(1) = X_p(0). \quad (\text{E.39})$$

En effet, en mettant  $f := (S + D)/2$  et  $g := (S - D)/(2\lambda)$ , on note que la condition de Schwarz  $f_x = g_t$  est satisfaite, puisque, d'après (11.20)-(11.21),

$$g_t = \frac{S_t - D_t}{2\lambda} = \lambda \frac{S_x + D_x}{2\lambda} + 0 = f_x.$$

En même temps, la condition de compatibilité  $z^0(1) = X_p(0)$  est satisfaite, pour

$$X_p(0) = \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \varphi^0 - \int_0^1 [a(x)\alpha^0(x) + b(x)\beta^0(x)] dx \right) = \Omega^0 = z^0(1),$$

où l'on a utilisé (E.33), (E.31) et la propriété  $z^0(1) = \Omega^0$  de la définition de  $\mathcal{H}$ . Il en suit qu'il existe une solution unique  $z = z(x, t)$  du système (E.37)-(E.39) qui est donnée explicitement par

$$\begin{aligned} z(x, t) &= X_p(0) + \int_0^t f(1, s) ds + \int_1^x g(s, t) ds \\ &= z^0(1) + \int_1^x g(s, 0) ds + \int_0^t f(x, s) ds. \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

Combiné avec (E.36), ceci donne

$$z \in C^0([0, T], H^2(0, 1)) \cap C^1([0, T], H^1(0, 1)) \cap C^0([0, 1], H^2(0, T)). \quad (\text{E.41})$$

On suppose que  $z(x, 0) = z^0(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . En effet, on a d'après (E.40), (E.35), et quelques conditions de la définition de  $\mathcal{H}$  que pour tout  $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} z(x, 0) &= z^0(1) + \int_1^x g(s, 0) ds \\ &= z^0(1) + \int_1^x \frac{S(s, 0) - D(s, 0)}{2\lambda(s)} ds \\ &= z^0(1) + \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s)}} (v^0(s) - u^0(s)) ds \\ &= z^0(1) + \int_1^x z_x^0(s) ds \\ &= z^0(x). \end{aligned}$$

On suppose aussi que

$$z(1, t) = X_p(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{E.42})$$

En effet, on peut déduire de (E.40) et (E.35) que

$$\begin{aligned} z(1, t) &= \int_0^t f(1, s) ds + X_p(0) = \int_0^t \frac{S(1, s) + D(1, s)}{2} ds + X_p(0) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \int_0^t (u(1, s) + v(1, s)) ds + X_p(0) \end{aligned}$$

de sorte que (E.34)

$$\begin{aligned} z_t(1, t) &= \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} (u(1, t) + v(1, t)) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \alpha(1, t) + \beta(1, t) + \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{L}(1, \xi) \begin{bmatrix} \alpha(\xi, t) \\ \beta(\xi, t) \end{bmatrix} d\xi \right). \end{aligned}$$

En même temps, (E.33) donne (11.41) et donc (11.42). En utilisant (11.44)-(11.45), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(t) \\ &+ \underbrace{\left( -a_0 + \int_0^1 (L^{\alpha\alpha}(1, \xi) + L^{\beta\alpha}(1, \xi)) d\xi \right)}_{=-1} \alpha(1, t) \\ &+ \underbrace{\left( b_0 + \int_0^1 (L^{\alpha\beta}(1, \xi) + L^{\beta\beta}(1, \xi)) d\xi \right)}_{=\mu-1} \beta(1, t) \\ &- \int_0^1 [(L^{\alpha\alpha}(1, x) + L^{\beta\alpha}(1, x))\alpha(x, t) + (L^{\alpha\beta}(1, x) + L^{\beta\beta}(1, x))\beta(x, t)] dx. \end{aligned}$$

Combiné avec (E.22), ceci donne

$$\begin{aligned} \dot{X}_p(t) &= \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \alpha(1, t) + \beta(1, t) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 [(L^{\alpha\alpha}(1, x) + L^{\beta\alpha}(1, x))\alpha(x, t) + (L^{\alpha\beta}(1, x) + L^{\beta\beta}(1, x))\beta(x, t)] dx \right) \\ &= z_t(1, t). \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $t$  et en utilisant  $X_p(0) = z^0(1) = z(1, 0)$ , on obtient (E.42).

Vérifions que  $z$  est une solution du système (11.16)-(11.19).

Remplaçant  $z_t$  et  $z_x$  par leur expression en fonction de  $S, D$  et utilisant (11.20)-(11.21), on obtient

$$z_{tt} - \lambda^2 z_{xx} = \frac{S_t + D_t}{2} - \lambda^2 \left( \frac{S_x - D_x}{2\lambda} - \lambda' \frac{S - D}{2\lambda^2} \right) = 0.$$

Pour les conditions aux limites (11.18), on a que  $z(1, t) = X_p(t)$  (par construction de  $z$ ), et que

$$\begin{aligned} z_x(0, t) &= \frac{S(0, t) - D(0, t)}{2\lambda(0)} = \frac{\sqrt{\lambda(0)}}{2\lambda(0)} (v(0, t) - u(0, t)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda(0)}} (\beta(0, t) - \alpha(0, t)) = 0. \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales (11.19), on a que  $z(\cdot, 0) = z^0$  (par construction de  $z$ ) et que

$$\begin{aligned} z_t(x, 0) &= \frac{S(x, 0) + D(x, 0)}{2} = \frac{\sqrt{\lambda(x)}}{2} (u(x, 0) + v(x, 0)) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda(x)}}{2} (u^0(x) + v^0(x)) = z^1(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Étudions la dynamique de  $X_p$ . On écrit  $U(t) := \ddot{X}_p(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**HYPOTHÈSE 3.**  $U \in L^2(0, T)$  pour tout  $T > 0$ .

On déduit de (11.50) et (E.33) que

$$\begin{aligned} U(t) &= \ddot{X}_p(t) \\ &= \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \ddot{\varphi}(t) - \int_0^1 [a\alpha_{tt} + b\beta_{tt}] dx \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( |\dot{\varphi}(t)|^{v_2} + |\varphi(t)|^{v_1} - \int_0^1 [a\alpha_{tt} + b\beta_{tt}] dx \right). \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi \in C^2([0, T])$ , les deux premiers termes de la dernière équation appartiennent à  $C^0([0, T])$ , et donc à  $L^2(0, T)$ . Il reste à prouver que l'application  $t \rightarrow \int_0^1 [a\alpha_{tt} + b\beta_{tt}] dx$  appartient à  $L^2(0, T)$  pour tout  $T > 0$ . En utilisant (E.21) et (E.25) et ensuite une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 [a\alpha_{tt} + b\beta_{tt}] dx &= \int_0^1 [a(-\lambda\alpha_{xt}) + b\lambda\beta_{xt}] dx \\ &= \int_0^1 [(a\lambda)_x\alpha_t - (b\lambda)_x\beta_t] dx + [-a\lambda\alpha_t + b\lambda\beta_t]_0^1. \end{aligned}$$

En remplaçant dans la dernière intégrale les termes  $\alpha_t$  et  $\beta_t$  par  $-\lambda\alpha_x$  et  $\lambda\beta_x$ , respectivement, et en intégrant par parties à nouveau, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 [a\alpha_{tt} + b\beta_{tt}] dx &= \int_0^1 [((a\lambda)_x\lambda)_x\alpha + ((b\lambda)_x\lambda)_x\beta] dx \\ &\quad - [(a\lambda)_x\lambda\alpha + (b\lambda)_x\lambda\beta]_0^1 + [-a\lambda\alpha_t + b\lambda\beta_t]_0^1. \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

(On note que  $(a\lambda)_x = -L^{\alpha\alpha}(1, x) - L^{\beta\alpha}(1, x)$  et  $(b\lambda)_x = L^{\alpha\beta}(1, x) + L^{\beta\beta}(1, x)$ .) Il est clair que les premiers termes de la partie droite de (E.43) sont dans  $C^0([0, T])$  (et alors dans  $L^2(0, T)$ ), pour  $\alpha, \beta \in C^0([0, T], H^1(0, 1))$ . En même temps, en utilisant (11.50), (E.22) et (E.26), on obtient que

$$\begin{aligned} [-a\lambda\alpha_t + b\lambda\beta_t]_0^1 &= -a(1)\lambda(1)\alpha_t(1, t) + b(1)\lambda(1)\mu^{-1}\ddot{\varphi}(t) \\ &= -a(1)\lambda(1)\alpha_t(1, t) + b(1)\lambda(1)\mu^{-1}(|\dot{\varphi}(t)|^{v_1} + |\varphi(t)|^{v_2}). \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi \in C^2([0, T])$  et  $\alpha \in C^0([0, 1], H^1(0, T))$  (et donc  $\alpha_t(1, \cdot) \in L^2(0, T)$ ), on déduit que l'application  $t \rightarrow [-a\lambda\alpha_t + b\lambda\beta_t]_0^1$  appartient aussi à  $L^2(0, T)$  pour tout  $T > 0$ . L'Hypothèse 3 est alors prouvée.

Regardons les conditions initiales pour  $X_p$ . D'après (E.20), (E.31) et (E.33), on a que

$$X_p(0) = \frac{\sqrt{\lambda(1)}}{2} \left( \varphi^0 - \int_0^1 [a(x)\alpha^0(x) + b(x)\beta^0(x)] dx \right) = \Omega^0.$$

En même temps, (E.33) donne (11.41) et (11.42). Prenant  $t = 0$  et utilisant (E.22), on obtient

$$\begin{aligned} \mu\beta(1, 0) = \dot{\varphi}(0) &= \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}} \dot{X}_p(0) - a(1)\lambda(1)\alpha^0(1) + b(1)\lambda(1)\beta^0(1) \\ &\quad + \int_0^1 [(a\lambda)_x\alpha^0 - (b\lambda)_x\beta^0] dx. \end{aligned}$$

Par comparaison à la condition

$$\mu\beta^0(1) = \frac{2}{\sqrt{\lambda(1)}}\Omega^1 - a(1)\lambda(1)\alpha^0(1) + b(1)\lambda(1)\beta^0(1) + \int_0^1 [(a\lambda)_x\alpha^0 - (b\lambda)_x\beta^0] dx,$$

présente dans la définition de  $\mathcal{H}$ , on déduit que  $\dot{X}_p(0) = \Omega^1$ .

En utilisant l'Hypothèse 2, on voit que l'unicité de  $(z, X_p)$  suit de celle de  $(\alpha, \beta, \varphi)$ .

On sait que  $\alpha(x, t) = \beta(x, t) = \varphi(t) = 0$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H)$ .  
On déduit de (E.33) que  $X_p(t) = 0$  pour  $t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H)$ .

Finalement, de (E.34) et (E.35), on déduit que

$$u(x, t) = v(x, t) = D(x, t) = S(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H).$$

Il en suit que

$$z_t(x, t) = z_x(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H).$$

Puisque  $z(1, t) = X_p(t) = 0$  pour  $t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H)$ , on peut conclure que

$$z(x, t) = 0, \quad \forall x \in [0, 1], \forall t \geq T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H).$$

On peut prendre

$$T(R) := \sup\{T_1(\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H); \|(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)\|_{\mathcal{H}} \leq R\}.$$

Il reste à prouver la stabilité de l'origine de  $\mathcal{H}$  pour le système (11.16)-(11.18) et (11.51). Suppose que  $\|(z^0, z^1, \Omega^0, \Omega^1)\|_{\mathcal{H}}$  est petite, et (au moins) plus petite que 1. Alors  $\|(\alpha^0, \beta^0, \varphi^0, \varphi^1)\|_H$  est petite, est d'après le Théorème E.1,  $\varphi(t)$  et  $\dot{\varphi}(t)$  restent petites. On sait que  $z(\cdot, t)$ ,  $X_p(t)$ ,  $\alpha(\cdot, t)$ ,  $\beta(\cdot, t)$ , et  $\varphi(t)$  disparaissent pour  $t \geq T(1)$ . En utilisant (E.24) et (E.28), on voit que  $\|\beta(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  et  $\|\alpha(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  restent petites. En utilisant (E.33) et (11.42), on déduit que  $X_p(t)$  et  $\dot{X}_p(t)$  restent petites aussi. Clairement,  $\|D(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  et  $\|S(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  restent petites aussi d'après (E.34)-(E.35). Pour cette raison,  $\|z_t(\cdot, t)\|_{H^1(0,1)}$  reste petite, d'après (E.37). En utilisant (E.38) et (E.42), on déduit que  $\|z(\cdot, t)\|_{H^2(0,1)}$  reste petite.

Le système (11.16)-(11.18)-(11.51) est donc globalement stable en temps fini d'après la Définition 11.2.

□

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Eihab M. ABDEL-RAHMAN, Ali H. NAYFEH et Ziyad N. MASOUD. « Dynamics and Control of Cranes : A Review ». *Journal of Vibration and Control* 9.7 (2003), p. 863-908.
- [2] Milton ABRAMOWITZ, Irene A. STEGUN et al. *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. T. 55. Dover publications New York, 1972.
- [3] Jürgen ACKERMANN. « Der Entwurf linearer Regelungssysteme im Zustandsraum ». *Regelungstechnik* 7 (1972), p. 297-300.
- [4] Tarek AHMED-ALI, Fouad GIRI, Miroslav KRSTIC et Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE. « Observer design for a class of nonlinear ODE–PDE cascade systems ». *Systems & Control Letters* 83 (2015), p. 19-27.
- [5] Tarek AHMED-ALI, Iasson KARAFYLLIS, Fouad GIRI, Miroslav KRSTIC et Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE. « Exponential Stability Analysis of Sampled-Data ODE–PDE Systems and Application to Observer Design ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.6 (2017), p. 3091-3098.
- [6] Fatiha ALABAU-BOUSSOUIRA, Vincent PERROLLAZ et Lionel ROSIER. « Finite-time stabilization of a network of strings ». *Mathematical Control & Related Fields* 5.4 (2015), p. 721-742.
- [7] Craig A. ANDERSON. « The acoustics of timpani : an analysis of vibrating circular membranes ». Northern Illinois University, August, 1978.
- [8] Vincent ANDRIEU, Laurent PRALY et Alessandro ASTOLFI. « Homogeneous approximation, recursive observer design, and output feedback ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.4 (2008), p. 1814-1850.
- [9] Henrik ANFINSEN et Ole Morten AAMO. *Adaptive Control of Hyperbolic PDEs*. Springer, 2019.
- [10] Karl J. ÅSTRÖM et Tore HÄGGLUND. « PID control ». *IEEE Control Systems Magazine* 1066.033X/06 (2006).
- [11] Christophe AYRAULT, A. BONNET, C. CORNO, Manuel MELON et Bruno GAZENDEL. « Etude d'une sourdine passive et active pour trompette simplifiée ». *Congrès Français d'Acoustique*. 2018.
- [12] Andrea BACCIOTTI et Lionel ROSIER. *Liapunov functions and stability in control theory*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [13] Roland BADEAU. « Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique ». Theses. Télécom ParisTech, 2005.
- [14] Roland BADEAU, Bertrand DAVID et Gaël RICHARD. « A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques ». *IEEE Transactions on Signal Processing* 54.2 (2006), p. 450-458.
- [15] Rolf BADER. « Finite-Difference model of mode shape changes of the Myanmar pat wain drum circle using tuning paste ». *172nd Meeting of the Acoustical Society of America*. T. 29. 1. Acoustical Society of America. 2016, p. 3086-3094.
- [16] Mark J. BALAS. « Feedback control of flexible systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 23.4 (1978), p. 673-679.
- [17] Mark J. BALAS. « Modal control of certain flexible dynamic systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 16.3 (1978), p. 450-462.

- [18] Scott BARTON. « The human, the mechanical, and the spaces in between : Explorations in human-robotic musical improvisation ». *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment*. T. 9. 1. 2013.
- [19] Marc BATTIER. *Regards sur les musiques mixtes*. Institut national de l'audiovisuel, Paris, 2016.
- [20] Simon BENACCHIO. « Contrôle actif modal appliqué aux instruments de musique à cordes ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2014.
- [21] Simon BENACCHIO, Robert PIÉCHAUD, Adrien MAMOU-MANI, Victor FINEL et Baptiste CHOMETTE. « Active Control of String Instruments using Xenomai ». *Proc. of the Fifteenth real-Time Linux Workshop*. 2013, p. 133-141.
- [22] Simon BENACCHIO, Baptiste CHOMETTE, Adrien MAMOU-MANI et Victor FINEL. « Mode tuning of a simplified string instrument using time-dimensionless state-derivative control ». *Journal of sound and vibration* 334 (2015), p. 178-189.
- [23] Simon BENACCHIO, Adrien MAMOU-MANI, Baptiste CHOMETTE et Victor FINEL. « Active control and sound synthesis—two different ways to investigate the influence of the modal parameters of a guitar on its sound ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 139.3 (2016), p. 1411-1419.
- [24] A.H. BENADE. *Fundamentals of Musical Acoustics*. Sous la dir. d'Oxford University PRESS. 1976.
- [25] Edgar Joseph BERDAHL. « Applications of feedback control to musical instrument design ». Thèse de doct. Stanford University, 2010.
- [26] Edgar BERDAHL, Steven BACKER et Julius O. SMITH III. « If I had a Hammer : Design and Theory of an Electromagnetically-prepared Piano ». *Proceedings of the International Computer Music Conference*. 2005.
- [27] Edgar BERDAHL et Julius O. SMITH III. « Inducing unusual dynamics in acoustic musical instruments ». *2007 IEEE International Conference on Control Applications*. IEEE. 2007, p. 1336-1341.
- [28] Edgar BERDAHL, Julius O. SMITH III et Adrian FREED. « Active damping of a vibrating string ». *2006 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration*. 2006.
- [29] Edgar BERDAHL, Julius O. SMITH III et Günter NIEMEYER. « Feedback control of acoustic musical instruments : Collocated control using physical analogs ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 131.1 (2012), p. 963-973.
- [30] Richard E. BERG et David G. STORK. *The Physics of Sound*. 3rd edition. Pearson, 2005.
- [31] Emmanuel BERNUAU, Wilfrid PERRUQUETTI, Denis EFIMOV et Emmanuel MOULAY. « Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator ». *International Journal of Control* 88.3 (2015), p. 451-460.
- [32] Paul BERTRAND. « Les Idées de M. Igor Strawinsky sur le Disque et la Radio ». *Le Ménestrel (Revue musicale hebdomadaire, Paris)* (31/01/1936).
- [33] Matthias BERTSCH. « Vibration patterns and sound analysis of the Viennese Timpani ». *International Symposium on Musical Acoustics (ISMA), Perugia, Italy*. 2001.
- [34] Charles BESNAINOU. « Modal stimulation : a sound synthesis new approach. » *International Symposium on Musical Acoustics ISMA 95, Dourdan, France*. 1995, p. 434-438.
- [35] Charles BESNAINOU. « Transforming the voice of musical instruments by active control of the sound radiation ». *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*. 5. Institute of Noise Control Engineering. 1999, p. 1317-1321.

- [36] Charles BESNAINOU. « Comment changer la voix des instruments de musique ». *Rencontres Musicales Pluridisciplinaires, GRAME, Lyon* (2006).
- [37] Rama B. BHAT. « Acoustics of a cavity-backed membrane : The Indian musical drum ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 90.3 (1991), p. 1469-1474.
- [38] Sanjay P. BHAT et Dennis S. BERNSTEIN. « Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators ». *IEEE Transactions on automatic control* 43.5 (1998), p. 678-682.
- [39] Sanjay P. BHAT et Dennis S. BERNSTEIN. « Finite-time stability of continuous autonomous systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 38.3 (2000), p. 751-766.
- [40] Sanjay P. BHAT et Dennis S. BERNSTEIN. « Geometric homogeneity with applications to finite-time stability ». *Mathematics of Control, Signals and Systems* 17.2 (2005), p. 101-127.
- [41] George W. BLUMAN et Sukeyuki KUMEI. *Symmetries and differential equations*. Springer Science + Business Media, LLC, 1989.
- [42] R.J. BOBBER. « An active transducer as a characteristic impedance of an acoustic transmission line ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 48.1B (1970), p. 317-324.
- [43] Ingolf BORK. *Entwicklung von akustischen Optimierungsverfahren für Stabspiele und Membraninstrumente*. PTB Report, Projekt 5267, Braunschweig, 1983.
- [44] Henri BOUTIN. « Méthodes de contrôle actif d'instruments de musique. Cas de la lame de xylophone et du violon. » Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2011.
- [45] Henri BOUTIN et Charles BESNAINOU. « Physical parameters of the violin bridge changed by active control ». *Acoustics'08, Paris*. 2008, p. 7247-7252.
- [46] Henri BOUTIN, Charles BESNAINOU et Jean-Dominique POLACK. « Modifying the resonances of a xylophone bar using active control ». *Acta Acustica united with Acustica* 101.2 (2015), p. 408-420.
- [47] Damien BOUVIER. « Identification de systèmes non linéaires représentés en séries de Volterra : applications aux systèmes sonores ». Thèse de doct. Sorbonne Université/Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2018.
- [48] John P. BOYD. « Computing zeros on a real interval through Chebyshev expansion and polynomial rootfinding ». *SIAM Journal on Numerical Analysis* 40.5 (2002), p. 1666-1682.
- [49] Mary Ann BRANCH, Thomas F. COLEMAN et Yuying LI. « A subspace, interior, and conjugate gradient method for large-scale bound-constrained minimization problems ». *SIAM Journal on Scientific Computing* 21.1 (1999), p. 1-23.
- [50] Mason BRETAN et Gil WEINBERG. « A survey of robotic musicianship ». *Communications of the ACM* 59.5 (2016), p. 100-109.
- [51] Pascal BRUNET. « Nonlinear system modeling and identification of loudspeakers ». Thèse de doct. Northeastern University Boston, 2014.
- [52] Pavol BRUNOVSKÝ. « A classification of linear controllable systems ». *Kybernetika* 6.3 (1970), p. 173-188.
- [53] David Edward CAHOON. « Frequency-Time Analysis of the Bass Drum Sound ». Mém. de mast. Brigham Young University, Provo, Utah, 1970.
- [54] Thibaut CARPENTIER, Hélène BAHU, Markus NOISTERNIG et Olivier WARUSFEL. « Measurement of a head-related transfer function database with high spatial resolution ». *7th Forum Acusticum (EAA)*. 2014.

- [55] Colas CAVAILLÈS, Christophe AYRAULT, Manuel MELON, Joël GILBERT et Bruno GAZENGEL. « Loudspeaker optimisation for active control of trombone radiation ». *ICSV*. Juil. 2019.
- [56] Colas CAVAILLÈS, Bruno GAZENGEL, Manuel MELON et Christophe AYRAULT. « Optimal active control of a trombone : a parametric study ». *e-Forum Acusticum*. 2020.
- [57] Thierry CAZENAVE et Alain HARAUX. *An introduction to semilinear evolution equations*. T. 13. Oxford University Press on Demand, 1998.
- [58] Antoine CHAIGNE. « Détermination expérimentale de la tension d'une peau de timbale ». *Actes du 5ème Congrès Français d'Acoustique*. 2000, p. 251-253.
- [59] Antoine CHAIGNE et Vincent DOUTAUT. « Numerical simulations of xylophones. I. Time-domain modeling of the vibrating bars ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 101.1 (1997), p. 539-557.
- [60] Antoine CHAIGNE et Jean KERGMARD. *Acoustics of musical instruments*. Springer, 2016.
- [61] Antoine CHAIGNE et Abdessamed RAMDANE. *Numerical simulations of membrane-mallet interaction in kettledrums*. Rapp. tech. Tech. Rep. 98Do10, ENST Paris, 1998.
- [62] B. CHEEKATI et Bharath BHIKKAJI. « A negative imaginary approach to the actuation of a guitar string ». *Mechatronics* 23.8 (2013), p. 997-1004.
- [63] Ernst Florens Friedrich CHLADNI. *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*. Weidmanns Erben und Reich, Leipzig, 1787.
- [64] Ernst Florens Friedrich CHLADNI. *Treatise on Acoustics : The First Comprehensive English Translation of E.F.F. Chladni's Traité d'Acoustique, by Robert T. Beyer*. Springer, 2015.
- [65] Baptiste CHOMETTE et Adrien MAMOU-MANI. « Modal control based on direct modal parameters estimation ». *Journal of Vibration and Control* 24.12 (2018), p. 2389-2399.
- [66] Richard S. CHRISTIAN, Robert E. DAVIS, Arnold TUBIS, Craig A. ANDERSON, Ronald I. MILLS et Thomas D. ROSSING. « Effects of air loading on timpani membrane vibrations ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 76.5 (1984), p. 1336-1345.
- [67] Jean-Michel CORON. *Control and nonlinearity*. Sous la dir. de RI AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Providence. T. 136 of Mathematical Surveys and Monographs. 2007.
- [68] Jean-Michel CORON et Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL. « Stabilization of a rotating body beam without damping ». *IEEE transactions on automatic control* 43.5 (1998), p. 608-618.
- [69] Jean-Michel CORON, Rafael VAZQUEZ, Miroslav KRSTIC et Georges BASTIN. « Local exponential  $H^2$  stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 51.3 (2013), p. 2005-2035.
- [70] Edward F. CRAWLEY et Javier DE LUIS. « Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures ». *AIAA journal* 25.10 (1987), p. 1373-1385.
- [71] Ruth F. CURTAIN et Hans ZWART. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer, 1995.
- [72] Jamal DAAFOUZ, Marius TUCSNAK et Julie VALEIN. « Nonlinear control of a coupled PDE/ODE system modeling a switched power converter with a transmission line ». *Systems & Control Letters* 70 (2014), p. 92-99.

- [73] Sofia DAHL. « Spectral changes in the tom-tom related to striking force ». *Music and Hearing - Quarterly Progress and Status Report* 38.1 (1997), p. 59-65.
- [74] Liam DONOVAN. « Travelling Wave Control of Stringed Musical Instruments ». Thèse de doct. Queen Mary University of London, 2018.
- [75] Leslie E. DRAIN. *The laser Doppler techniques*. Sous la dir. de WILEY. 1980.
- [76] Denis EFIMOV, Andrey POLYAKOV, Arie LEVANT et Wilfrid PERRUQUETTI. « Discretization of asymptotically stable homogeneous systems by explicit and implicit Euler methods ». *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*. IEEE. 2016, p. 5545-5550.
- [77] Denis EFIMOV, Andrey POLYAKOV, Arie LEVANT et Wilfrid PERRUQUETTI. « Realization and discretization of asymptotically stable homogeneous systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.11 (2017), p. 5962-5969.
- [78] Stephen J. ELLIOTT et Philip A. NELSON. « Active noise control ». *IEEE signal processing magazine* 10.4 (1993), p. 12-35.
- [79] Stephen ELLIOTT. *Signal processing for active control*. Elsevier, 2000.
- [80] Père Joseph ENGRAMELLE. *La Tonotechnie ou L'art de noter sur les cylindres, Et tout ce qui est susceptible de Notage dans les Instrumens de Concerts mécaniques*. P. M. Delaguette, Avec Approbation & Privilège du Roi, 1775.
- [81] Nicolás ESPITIA, Andrey POLYAKOV, Denis EFIMOV et Wilfrid PERRUQUETTI. « Boundary time-varying feedbacks for fixed-time stabilization of constant-parameter reaction–diffusion systems ». *Automatica* 103 (2019), p. 398-407.
- [82] Antoine FALAIZE et Thomas HÉLIE. « Passive Guaranteed Simulation of Analog Audio Circuits : A Port-Hamiltonian Approach ». *Applied Sciences* 6.10 (2016), p. 273.
- [83] Antoine FALAIZE et Thomas HÉLIE. « Passive modelling of the electrodynamic loudspeaker : from the Thiele–Small model to nonlinear port-Hamiltonian systems ». *Acta Acustica* 4.1 (2020), p. 1.
- [84] Hugo FASTL et Eberhard ZWICKER. *Psychoacoustics : facts and models*. T. 22. Springer Science & Business Media, 2007.
- [85] Helmut FLEISCHER. *Beiträge zur Vibro- und Psychoakustik : Vibroakustische Untersuchungen an Paukenfellen*. Universität der Bundeswehr München, 2005.
- [86] Harvey FLETCHER et Irvin G. BASSETT. « Some experiments with the bass drum ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 64.6 (1978), p. 1570-1576.
- [87] Neville H. FLETCHER et Thomas D. ROSSING. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [88] Adrian FREED et Osman ISVAN. « Musical Applications of New, Multi-axis Guitar String Sensors ». *26<sup>th</sup> International Computer Music Conference*. 2000.
- [89] Kenji FUJIMOTO et Toshiharu SUGIE. « Canonical transformation and stabilization of generalized Hamiltonian systems ». *Systems & Control Letters* 42.3 (2001), p. 217-227.
- [90] Christopher C. FULLER, Sharon ELLIOTT et Philip A. NELSON. *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.
- [91] Erik U. GALLARDO, Miguel A. ALONSO-ARÉVALO, Eloísa GARCÍA-CANSECO et Carlos AGUILAR-IBÁÑEZ. « Sound model of an orchestral kettledrum considering viscoelastic effects ». *Applied Acoustics* 164 (2020), p. 107284.
- [92] Wodek K. GAWRONSKI. *Dynamics and control of structures : a modal approach*. Springer Science & Business Media, 2004.
- [93] Peter J. GAWTHROP et Geraint P. BEVAN. « Bond-graph modeling ». *IEEE Control Systems Magazine* 27.2 (2007), p. 24-45.

- [94] Hugues GENEVOIS et Raphaël DE VIVO. *Les nouveaux gestes de la musique*. Parenthèses, 1999.
- [95] Arthur GIVOIS. « Contrôle actif modal appliqué au violoncelle ». Université Pierre & Marie Curie ; encadrement par Adrien Mamou-Mani et Baptiste Chomette, 2014.
- [96] Werner GOEBL et Roberto BRESIN. « Measurement and reproduction accuracy of computer-controlled grand pianos ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 114.4 (2003), p. 2273-2283.
- [97] Hans P. W. GOTTLIEB. « Effect of air cavity on the annular drum ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 71.4 (1982), p. 1025-1027.
- [98] Édouard GOURSAT. « Sur un procédé alterné ». *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*. T. 1. 1909, p. 129-143.
- [99] Karl F. GRAFF. *Wave motion in elastic solids*. Courier Corporation, 2012.
- [100] Jeff GREGORIO et Youngmoo KIM. « Augmentation of acoustic drums using electromagnetic actuation and wireless control ». *Journal of the Audio Engineering Society* 66.4 (2018), p. 202-210.
- [101] Per GREN, Kouros TATAR, Jan GRANSTRÖM, Nils-Erik MOLIN et Erik V. JANSSON. « Laser vibrometry measurements of vibration and sound fields of a bowed violin ». *Measurement science and technology* 17.4 (2006), p. 635.
- [102] Martin GUGAT, Vincent PERROLLAZ et Lionel ROSIER. « Boundary stabilization of quasilinear hyperbolic systems of balance laws : exponential decay for small source terms ». *Journal of Evolution Equations* 18.3 (2018), p. 1471-1500.
- [103] Varda Tepper HAIMO. « Finite time controllers ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 24.4 (1986), p. 760-770.
- [104] S. HANAGUD et S. GRIFFIN. « Active structural control for a smart guitar ». *Fourth European conference on smart structures and materials*. 1998, p. 169-175.
- [105] Ben HARMS. « The World of Historical Timpani ». *Early Music America* 14.2 (2008), p. 29-36.
- [106] Eiji HAYASHI. « Development of an automatic piano that produce appropriate : touch for the accurate expression of a soft tone ». *Proc. IROS Workshop on Musical Performance Robots and Its Applications, Beijing, 2006*. 2006, p. 7-12.
- [107] Gregory S. HEET. *String instrument vibration initiator and sustainer*. US Patent 4,075,921. 1978.
- [108] Thomas HÉLIE et Denis MATIGNON. « Nonlinear damping models for linear conservative mechanical systems with preserved eigenspaces : a port-Hamiltonian formulation ». *IFAC-PapersOnLine* 48.13 (2015), p. 200-205.
- [109] Thomas HÉLIE et Charles PICASSO. « The Snail : a real-time software application to visualize sounds ». *Proc. DAFx*. 2017.
- [110] Thomas HÉLIE et David ROZE. « Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series ». *Journal of Sound and Vibration* 314.1-2 (2008), p. 275-306.
- [111] Thomas HÉLIE et David ROZE. « Corde non linéaire amortie : formulation hamiltonienne à ports, réduction d'ordre exacte et simulation à passivité garantie ». *13ème Congrès Français d'Acoustique*. 2016.
- [112] Henry HERMES. « Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls ». *Differential Equations, Stability and Control* 109.1 (1991), p. 249-260.
- [113] Alan C. HINDMARSH. « ODEPACK, a systematized collection of ODE solvers ». *IMACS Transactions on Scientific Computation* 1 (1983), p. 55-64.
- [114] Robert P. HOLTEN. « Generalized Goursat problem. » *Pacific Journal of Mathematics* 12.1 (1962), p. 207-224.

- [115] Keum-Shik HONG et Umer Hameed SHAH. *Dynamics and control of industrial cranes*. Springer, 2019.
- [116] Yiguang HONG. « Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems ». *Systems & control letters* 46.4 (2002), p. 231-236.
- [117] Xianqing HUANG, Wei LIN et Bo YANG. « Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems ». *Automatica* 41.5 (2005), p. 881-888.
- [118] Clara ISSANCHOU, Stefan BILBAO, Jean-Loic LE CARROU, Cyril TOUZÉ et Olivier DOARÉ. « A modal-based approach to the nonlinear vibration of strings against a unilateral obstacle : Simulations and experiments in the pointwise case ». *Journal of Sound and Vibration* 393 (2017), p. 229-251.
- [119] Toshiaki ITOH et Kanji ABE. « Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational difference quotients ». *Journal of Computational Physics* 76.1 (1988), p. 85-102.
- [120] Boyan JIANG, Chuanjiang LI et Guangfu MA. « Finite-time output feedback attitude control for spacecraft using "Adding a power integrator" technique ». *Aerospace Science and Technology* 66 (2017), p. 342-354.
- [121] Marguerite JOSSIC. « Contrôle actif et non-linéarités géométriques : le cas du gong xiaoluo ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2017.
- [122] Marguerite JOSSIC, Baptiste CHOMETTE, Adrien MAMOU-MANI et David ROZE. « Application du contrôle actif sur un gong d'opéra chinois ». *13e Congrès Français d'Acoustique (CFA 2016)*. 2016, p. 1042-1047.
- [123] Marguerite JOSSIC, Adrien MAMOU-MANI, Baptiste CHOMETTE, David ROZE, François OLLIVIER et Christophe JOSSERAND. « Modal active control of Chinese gongs ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 141.6 (2017), p. 4567-4578.
- [124] Thomas KAILATH. *Linear systems*. T. 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [125] Arie J.M. KAIZER. « Modeling of the nonlinear response of an electrodynamic loudspeaker by a Volterra series expansion ». *Journal of the Audio Engineering Society* 35.6 (1987), p. 421-433.
- [126] A.S.V. Ravi KANTH et K. ARUNA. « Differential transform method for solving linear and non-linear systems of partial differential equations ». *Physics Letters A* 372.46 (2008), p. 6896-6898.
- [127] Ajay KAPUR. « A history of robotic musical instruments ». *International Computer Music Conference (ICMC)*. Citeseer. 2005.
- [128] Hassan K. KHALIL. « Nonlinear systems, vol. 3 ». *Prentice Hall* (2002).
- [129] Lawrence E. KINSLER, Austin R. FREY, Alan B. COPPENS et James V. SANDERS. *Fundamentals of acoustics*. Wiley, 1999 (4th edition).
- [130] Gustav KIRCHHOFF. *Vorlesungen über mathematische Physik : Mechanik*. B. G. Teubner, Leipzig, 1876.
- [131] Wolfgang KLIPPEL. « Tutorial : Loudspeaker nonlinearities—Causes, parameters, symptoms ». *Journal of the Audio Engineering Society* 54.10 (2006), p. 907-939.
- [132] Wolfgang KLIPPEL et Ulf SEIDEL. « Fast and accurate measurement of linear transducer parameters ». *110th AES Convention, Amsterdam*. 2001.
- [133] Morten H. KNUDSEN, Jørgen G. JENSEN, Vagn JULSKJÆR et Per RUBAK. « Determination of loudspeaker driver parameters using a system identification technique ». *Journal of the Audio Engineering Society* 37.9 (1989), p. 700-708.
- [134] Paul KOTYCZKA. « Local linear dynamics assignment in IDA-PBC ». *Automatica* 49.4 (2013), p. 1037-1044.
- [135] Miroslav KRSTIC et Andrey SMYSHLYAEV. *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*. T. 16. SIAM, 2008.

- [136] Gerhard KRUMP. « Zur Temperaturabhängigkeit von Lautsprecherparametern ». *Présentation à DAGA-97, Kiel, Allemagne*. 1997.
- [137] Mathieu LAGRANGE, Roland BADEAU, Bertrand DAVID, Nancy BERTIN, José ECHEVESTE, Olivier DERRIEN, Sylvain MARCHAND et Laurent DAUDET. « The DESAM toolbox : spectral analysis of musical audio ». *International Conference on Digital Audio Effects (DAFx), Graz*. 2010.
- [138] Hans Petter LANGTANGEN et Geir K. PEDERSEN. *Scaling of differential equations*. Springer Nature, 2016.
- [139] Jean LAROCHE. « The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 94.4 (1993), p. 1958-1965.
- [140] Jean-Loïc LE CARROU, François GAUTIER et Roland BADEAU. « Sympathetic string modes in the concert harp ». *Acta Acustica united with Acustica* 95.4 (2009), p. 744-752.
- [141] Tristan LEBRUN. *Correction temps-réel d'un haut-parleur électrodynamique : modélisation, mesures et asservissement*. Rapport de projet de fin d'étude. UTC (Compiègne), 2016.
- [142] Tristan LEBRUN. « Modélisation multi-physique passive, identification, simulation, correction et asservissement de haut-parleur sur des comportements cibles ». Thèse de doct. Sorbonne Université, 2019.
- [W5] Tristan LEBRUN, Marc WIJNAND, Thomas HÉLIE, David ROZE et Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL. « Electroacoustic Absorbers Based on Passive Finite-Time Control of Loudspeakers : A Numerical Investigation ». *Nonlinear Dynamics and Control (NODYCON, 2019, Rome), Volume II – Nonlinear dynamics and Control*. Springer International Publishing, 2020, p. 23-31. ISBN : 978-3-030-34747-5.
- [143] Deborah LEE. « Hornbostel-Sachs Classification of Musical Instruments ». *Knowledge Organization* 47.1 (2019), p. 72-91.
- [144] Nicolas LEROY, Emmanuel FLÉTY et Frederic BEVILACQUA. « Reflective Optical Pickup For Violin ». *International Conference on New Interfaces for Musical Expression (NIME06)*. 2006.
- [145] Michael LESTER et Jon BOLEY. « The effects of latency on live sound monitoring ». *Audio Engineering Society Convention 123*. Audio Engineering Society. 2007.
- [146] Guenter LEUGERING et J.P. Georg SCHMIDT. « On the modelling and stabilization of flows in networks of open canals ». *SIAM journal on control and optimization* 41.1 (2002), p. 164-180.
- [147] Arie LEVANT. « Chattering analysis ». *IEEE transactions on automatic control* 55.6 (2010), p. 1380-1389.
- [148] David Reeves LONG. « Realizing Ravel : A Study of the Performing Style of the Composer and his Colleagues ». Mémoire de master. University of California, Santa Cruz, 2019.
- [149] Michelangelo LUPONE et Lorenzo SENO. « Gran cassa and the adaptive instrument feed-drum ». *International Symp. on Computer Music Modeling and Retrieval*. Springer. 2005, p. 149-163.
- [150] Eric MAESTRI. « A Typo-morphological Approach to Human-Machine Interaction Analysis in Music ». *Organised Sound* 22.3 (2017), p. 315-323.
- [151] Eric MAESTRI. « The Fourth Phase of Electroacoustic Music and the Intimate Transformation of the Sonic Experience ». *Electroacoustic Music Studies Network Conference, Florence (Italy)*. 2018.
- [152] Andrew MAJDA et Ralph PHILLIPS. « Disappearing solutions for the dissipative wave equation ». *Indiana University Mathematics Journal* 24.12 (1975), p. 1119-1133.

- [153] Jess I. MARCUM. « Table of Q functions ». *U.S. Air Force Project, RAND Res. Memo. M-339, ASTIA Document AD 1165451. Rand Corp.* (1950).
- [154] Philippe MARTIN, Lionel ROSIER et Pierre ROUCHON. « Null controllability of one-dimensional parabolic equations by the flatness approach ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 54.1 (2016), p. 198-220.
- [155] Bernhard M. MASCHKE et Arjan J. VAN DER SCHAFT. « Port-controlled Hamiltonian systems : modelling origins and systemtheoretic properties ». *IFAC Proc. Volumes* 25.13 (1992), p. 359-365.
- [156] Andrea MATTIONI, Yongxin WU, Yann LE GORREC et Hans ZWART. « Stabilisation of a Rotating Beam Clamped on a Moving Inertia with Strong Dissipation Feedback ». *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2020, p. 5056-5061.
- [157] Sylvain MAUGEAIS. « How to apply a plaster on a drum to make it harmonic ». *International Symposium on Musical Acoustics, ISMA*. 2014.
- [158] A. MAZOYER. « Les moyens de réalisation de l'art musical ». *Le Temps (Quotidien français)* (6/04/1912).
- [159] Andrew P. MCPHERSON, Robert H. JACK et Giulio MORO. « Action-sound latency : Are our tools fast enough ? » (2016).
- [160] Andrew MCPHERSON. « The Magnetic Resonator Piano : Electronic Augmentation of an Acoustic Grand Piano ». *Journal of New Music Research* 39.3 (2010), p. 189-202.
- [161] Andrew MCPHERSON et Victor ZAPPI. « An environment for submillisecond-latency audio and sensor processing on BeagleBone Black ». *Audio Engineering Society Convention* 138. Audio Engineering Society. 2015.
- [162] Thomas MEURER et Miroslav KRSTIC. « Finite-time multi-agent deployment : A nonlinear PDE motion planning approach ». *Automatica* 47.11 (2011), p. 2534-2542.
- [163] Thibaut MEURISSE. « Contrôle Actif Appliqué aux Instruments de Musique à Vent ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie – Paris VI, 2014.
- [164] Thibaut MEURISSE, Adrien MAMOU-MANI, Simon BENACCHIO, Baptiste CHOMETTE, Victor FINEL, David B. SHARP et René CAUSSÉ. « Experimental Demonstration of the Modification of the Resonances of a Simplified Self-Sustained Wind Instrument Through Modal Active Control ». *Acta Acustica united with Acustica* 101.3 (2015), p. 581-593.
- [165] Ulrich MICHELS. *Guide illustré de la musique – Volume I*. Fayard, 1988.
- [166] Abdelkrim MIFDAL. « Stabilisation uniforme d'un système hybride ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 324.1 (1997), p. 37-42.
- [167] Nima MONSHIZADEH, Pooya MONSHIZADEH, Romeo ORTEGA et Arjan van der SCHAFT. « Conditions on shifted passivity of port-Hamiltonian systems ». *Systems & Control Letters* 123 (2019), p. 55-61.
- [168] Jorge J. MORÉ, Burton S. GARBOW et Kenneth E. HILLSTROM. *User guide for MINPACK-1*. Rapp. tech. Argonne National Laboratory, 1980.
- [169] Ömer MORGÜL, Bo Peng RAO et Francis CONRAD. « On the stabilization of a cable with a tip mass ». *IEEE Transactions on automatic control* 39.10 (1994), p. 2140-2145.
- [170] Giulio MORO, Astrid BIN, Robert H. JACK, Christian HEINRICHS et Andrew P. MCPHERSON. « Making high-performance embedded instruments with Bela and Pure Data » (2016).
- [171] Philip M. MORSE. *Vibration and sound*. American Society of Acoustics, 1995.
- [172] Philip McCord MORSE et K. Uno INGARD. *Theoretical acoustics*. McGraw-Hill, New York, 1968.

- [173] Emmanuel MOULAY. « Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation ». Thèse de doct. Ecole Centrale de Lille; Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I, 2005.
- [174] Emmanuel MOULAY et Wilfrid PERRUQUETTI. « Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems ». *Journal of Mathematical analysis and applications* 323.2 (2006), p. 1430-1443.
- [175] Hugues MOUNIER, Joachim RUDOLPH, Michel FLIESS et Pierre ROUCHON. « Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system ». *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 3 (1998), p. 315-321.
- [176] Robert H. MUNNING SCHMIDT. « Low Frequency Sound Generation by Loudspeaker Drivers ». *RMS Acoustics & Mechatronics and Grimm audio* (2017).
- [177] Philipp NEUBAUER, Johannes TSCHESCHE, Joachim Bös, Tobias MELZ et Holger HANSELKA. « An active-system approach for eliminating the wolf note on a cello ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 143.5 (2018), p. 2965-2974.
- [178] Norman S. NISE. *Control systems engineering*. John Wiley & Sons, 2020.
- [179] Romeo ORTEGA, Arjan J. VAN DER SCHAFT et Bernhard M. MASCHKE. « Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems via energy balancing ». *Stability and stabilization of nonlinear systems*. Springer, 1999, p. 239-260.
- [180] Romeo ORTEGA, Arjan VAN DER SCHAFT, Bernhard MASCHKE et Gerard ESCOBAR. « Energy-shaping of port-controlled Hamiltonian systems by interconnection ». *Decision and Control, 1999. Proceedings of the 38th IEEE Conference on*. T. 2. IEEE. 1999, p. 1646-1651.
- [181] Romeo ORTEGA, Arjan J. VAN DER SCHAFT, Iven MAREELS et Bernhard MASCHKE. *Putting energy back in control*. 2001.
- [182] Romeo ORTEGA, Arjan VAN DER SCHAFT, Bernhard MASCHKE et Gerardo ESCOBAR. « Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems ». *Automatica* 38.4 (2002), p. 585-596.
- [183] Harshal B. OZA, Yury V. ORLOV et Sarah K. SPURGEON. « Continuous uniform finite time stabilization of planar controllable systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 53.3 (2015), p. 1154-1181.
- [184] Rafael C.D. PAIVA, Jyri PAKARINEN et Vesa VÄLIMÄKI. « Acoustics and modeling of pickups ». *Journal of the Audio Engineering Society* 60.10 (2012), p. 768-782.
- [185] Amnon PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. T. 44. Springer-Verlag, 1983.
- [186] Bo Rohde PEDERSEN et Per RUBAK. « Online identification of linear loudspeakers parameters ». *Audio Engineering Society Convention* 122. Audio Engineering Society. 2007.
- [187] Vincent PERROLLAZ et Lionel ROSIER. « Finite-Time Stabilization of  $2 \times 2$  Hyperbolic Systems on Tree-Shaped Networks ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 52.1 (2014), p. 143-163.
- [188] Wilfrid PERRUQUETTI, Thierry FLOQUET et Emmanuel MOULAY. « Finite-time observers : application to secure communication ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.1 (2008), p. 356-360.
- [189] Klaus PETERSEN, Jorge SOLIS et Atsuo TAKANISHI. « Musical-based interaction system for the Waseda Flutist Robot ». *Autonomous Robots* 28.4 (2010), p. 471-488.
- [190] Andrew PIEPENBRINK et Matthew WRIGHT. « The bistable resonator cymbal : an actuated acoustic instrument displaying physical audio effects. » *Int. Conf. on New Interfaces for Musical Expression (NIME), Baton Rouge, LA, USA*. 2015, p. 227-230.

- [191] Robert PIÉCHAUD. « A lightweight C++ framework for real time active control ». *Real time Linux workshop*. 2014.
- [192] David POLITZER. « Banjo Drum Physics–sound experiments and simple acoustics demos ». *arXiv preprint arXiv :1806.08857* (2018).
- [193] Andrey POLYAKOV. « Fixed-time stabilization of linear systems via sliding mode control ». *2012 12th International Workshop on Variable Structure Systems*. IEEE. 2012, p. 1-6.
- [194] Andrey POLYAKOV. « Sliding mode control design using canonical homogeneous norm ». *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 29.3 (2019), p. 682-701.
- [195] Andrey POLYAKOV, Jean-Michel CORON et Lionel ROSIER. « On finite-time stabilization of evolution equations : A homogeneous approach ». *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2016, p. 3143-3148.
- [196] Andrey POLYAKOV, Denis EFIMOV et Bernard BROGLIATO. « Consistent discretization of finite-time and fixed-time stable systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 57.1 (2019), p. 78-103.
- [197] Andrey POLYAKOV, Denis EFIMOV et Wilfrid PERRUQUETTI. « Finite-time stabilization using implicit Lyapunov function technique ». *IFAC Ncolcos 2013*. 2013.
- [198] Andrey POLYAKOV, Denis EFIMOV et Wilfrid PERRUQUETTI. « Finite-time and fixed-time stabilization : Implicit Lyapunov function approach ». *Automatica* 51 (2015), p. 332-340.
- [199] Ivan POUPYREV, Michael J. LYONS, Sidney FELS et Tina BLAINE. « New interfaces for musical expression ». *CHI'01 Extended Abstracts on Human Factors in Computing Systems*. 2001, p. 491-492.
- [200] Laurent PRALY. « Generalized weighted homogeneity and state dependent time scale for linear controllable systems ». *Decision and Control, 1997, Proceedings of the 36th IEEE Conference on*. T. 5. IEEE. 1997, p. 4342-4347.
- [201] Andre PREUMONT. *Vibration control of active structures*. T. 2. Springer, 1997.
- [202] Nicolas QUAEGBEUR et Antoine CHAIGNE. « Nonlinear vibrations of loudspeaker-like structures ». *Journal of Sound and Vibration* 309.1-2 (2008), p. 178-196.
- [203] Chandrasekhara Venkata RAMAN. « The Indian musical drums ». *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*. T. 1. 3. Springer. 1934, p. 179-188.
- [204] Ramy RASHAD, Federico CALIFANO, Arjan J van der SCHAFT et Stefano STRAMIGIOLI. « Twenty years of distributed port-Hamiltonian systems : a literature review ». *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 37.4 (2020), p. 1400-1422.
- [205] Romain RAVAUD, Guy LEMARQUAND, Tangi ROUSSEL et Valérie LEMARQUAND. « Ranking of the Nonlinearities of Electrodynamical Loudspeakers ». *Archives of acoustics* 35 (1 2010), p. 49-66.
- [206] David RECTOR et Spencer TOPEL. « EMdrum : An Electromagnetically Actuated Drum ». *Proc. of NIME*. 2014, p. 395-398.
- [207] Gordon REID. « Synthesizing Drums : The Snare Drum ». *Sound on Sound* (2002).
- [208] Witold RESPONDEK et Issa Amadou TALL. « Feedback equivalence of nonlinear control systems : a survey on formal approach ». *Chaos in Automatic Control* (2006), p. 173-188.
- [209] Leïla RHAOUTI, Antoine CHAIGNE et Patrick JOLY. « Time-domain modeling and numerical simulation of a kettledrum ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 105.6 (1999), p. 3545-3562.
- [210] Philip Gilles MacGillivray RICHARDSON. « Acoustic analysis and tuning of cylindrical membranophones ». Thèse de doct. Anglia Ruskin University, 2010.

- [211] Phillip Gilles MacGillivray RICHARDSON et E. Robert TOULSON. « Clearing the drumhead by acoustic analysis method ». *Proceedings of the Institute on Acoustics, Reproduced Sound Conference, Cardiff, Wales, UK*. 2010.
- [212] Etienne RIVET, Sami KARKAR et Hervé LISSEK. « Broadband low-frequency electroacoustic absorbers through hybrid sensor-/shunt-based impedance control ». *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 25.1 (2017), p. 63-72.
- [213] J. Douglas (Tad) ROLLO IV. « Active Control of Spectral Detail Radiated by an air-loaded impacted membrane ». Thèse de doct. The Pennsylvania State University, 2003.
- [214] Calvin D. ROSE. « A New Drumhead Design : An Analysis of the Nonlinear Behavior of a Compound Membrane ». Thèse de doct. Northern Illinois University, 1978.
- [215] Werner ROSENHEINRICH. « Tables of some indefinite integral of Bessel functions of integer order ». *Ernst-Abbe-Hochschule Jena, University of applied sciences, Departement of basic sciences, Germany (disponible en ligne)* (version 05.11.2017).
- [216] Lionel ROSIER. « Etude de quelques problèmes de stabilisation ». Thèse de doct. ENS Cachan, 1993.
- [217] Thomas D. ROSSING. « Nonlinear Effects in Percussion Instruments ». *Percussive Notes Research Edition* 3 (1982), p. 68-72.
- [218] Thomas D. ROSSING. « The physics of kettledrums ». *Scientific American* 247.5 (1982), p. 172-179.
- [219] Thomas D. ROSSING et Neville H. FLETCHER. *Principles of vibration and sound*. Springer Science+Business Media, 2004 (2nd edition).
- [220] Thomas D. ROSSING, Ingolf BORK, Huan ZHAO et Dell O. FYSTROM. « Acoustics of snare drums ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 92.1 (1992), p. 84-94.
- [221] Emilio ROXIN. « On finite stability in control systems ». *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 15.3 (1966), p. 273-282.
- [222] Robert ROY, Arogyaswami PAULRAJ et Thomas KAILATH. « ESPRIT—A subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise ». *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing* 34.5 (1986), p. 1340-1342.
- [223] David ROZE et Thomas HÉLIE. « Introducing a Green–Volterra series formalism to solve weakly nonlinear boundary problems : Application to Kirchhoff’s string ». *Journal of Sound and Vibration* 333.7 (2014), p. 2073-2086.
- [224] Joachim RUDOLPH et Frank WOITTEK. « Flatness-based control without prediction : example of a vibrating string ». *PAMM* 10.1 (2010), p. 629-630.
- [225] Lionel SAINSAULIEU. *Calcul scientifique*. Masson, 1996.
- [226] Toshiya SAMEJIMA et Risa FUKUDA. « Vibration analysis of a musical drum head under nonuniform density and tension using a spectral method ». *Acoustical Science and Technology* 37.6 (2016), p. 295-302.
- [227] G. SATHEJ et R. ADHIKARI. « The eigenspectra of Indian musical drums ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 125.2 (2009), p. 831-838.
- [228] Rodolphe SEPULCHRE, Mrdjan JANKOVIĆ et Petar V. KOKOTOVIĆ. *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, 1997.
- [229] Yingfeng SHANG, Dongyi LIU et Genqi XU. « Super-stability and the spectrum of one-dimensional wave equations on general feedback controlled networks ». *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 31.1 (2014), p. 73-99.
- [230] Richard H. SMALL. « Closed-box loudspeaker systems-part 1 : analysis ». *Journal of the Audio Engineering Society* 20.10 (1972), p. 798-808.
- [231] Richard H. SMALL. « Closed-box loudspeaker systems-part 2 : Synthesis ». *Journal of the Audio Engineering Society* 21.1 (1973), p. 11-18.

- [232] Jorge SOLIS et Atsuo TAKANISHI. « An overview of the research approaches on musical performance robots ». *Proc. Int. Computer Music Conf., Copenhagen*. 2007, p. 423-426.
- [233] Samuel Z. SOLOMON. *How to write for Percussion : a comprehensive guide to percussion composition*. Oxford University Press, 2016.
- [234] Yongduan SONG, Yujuan WANG, John HOLLOWAY et Miroslav KRSTIC. « Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time ». *Automatica* 83 (2017), p. 243-251.
- [235] Daniel SPEER. *Grundrichtiger Unterricht der musikalischen Kunst oder Vielfaches muskalisches Kleeblatt - III. Allerhand Instrumenten Methoden*. Georg Wilhelm Kühnen, Ulm, Germany, 1697.
- [236] Xianyu SU et Qican ZHANG. « Dynamic 3-D shape measurement method : a review ». *Optics and Lasers in Engineering* 48.2 (2010), p. 191-204.
- [237] Donald L. SULLIVAN. « Accurate frequency tracking of timpani spectral lines ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 101.1 (1997), p. 530-538.
- [238] Jean-Baptiste THIEBAUT, Patrick G.T. HEALEY et Nick BRYAN-KINNS. « Drawing electroacoustic music ». *ICMC*. 2008.
- [239] Neville THIELE. « Loudspeakers in vented boxes : Part 1 ». *Journal of the Audio Engineering Society* 19.5 (1971), p. 382-392.
- [240] Neville THIELE. « Loudspeakers in vented boxes : Part 2 ». *Journal of the Audio Engineering Society* 19.6 (1971), p. 471-483.
- [241] THOMAS HÉLIE, ANTOINE FALAIZE, ET NICOLAS LOPES. « Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs ». *Colloque National en Calcul des Structures*. T. 12. 2015.
- [242] Sankalp TIWARI et Anurag GUPTA. « Effects of air loading on the acoustics of an Indian musical drum ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 141.4 (2017), p. 2611-2621.
- [243] Alberto TORIN et Michael NEWTON. « Nonlinear effects in drum membranes ». *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*. 2014, p. 107-112.
- [244] Ngoc-Tu TRINH, Vincent ANDRIEU et Cheng-Zhong XU. « Design of integral controllers for nonlinear systems governed by scalar hyperbolic partial differential equations ». *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.9 (2017), p. 4527-4536.
- [245] Luca TURCHET, Andrew MCPHERSON et Carlo FISCHIONE. « Smart instruments : towards an ecosystem of interoperable devices connecting performers and audiences ». *Proceedings of the Sound and Music Computing Conference*. 2016, p. 498-505.
- [246] Kai TUURI et Oskari KOSKELA. « Understanding Human–Technology Relations Within Technologization and Appification of Musicality ». *Frontiers in psychology* 11 (2020).
- [247] Claude VALETTE et Christian CUESTA. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermes, 1993.
- [248] Philippe John VAN TIGGELEN. « Aperçus sur la Tonotechnie ou le notage des cylindres au XVIIIe siècle ». *Revue de la Société liégeoise de Musicologie* (1981).
- [249] Maarten VAN WALSTIJN et Pedro REBELO. « The prosthetic conga : Towards an actively controlled hybrid musical instrument ». *ICMC*. Citeseer. 2005.
- [250] Rafael VAZQUEZ et Miroslav KRSTIC. « Marcum Q-functions and explicit kernels for stabilization of  $2 \times 2$  linear hyperbolic systems with constant coefficients ». *Systems & Control Letters* 68 (2014), p. 33-42.

- [251] Javier Andres VILLEGAS. « A Port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems ». Thèse de doct. University of Twente, 2007.
- [252] Erich M. VON HORNBOSTEL et Curt SACHS. « Systematik der Musikinstrumente. Ein Versuch ». *Zeitschrift für Ethnologie* 46.H. 4/5 (1914), p. 553-590.
- [253] Erich M. VON HORNBOSTEL et Curt SACHS. « Classification of musical instruments : Translated from the original German by Anthony Baines and Klaus P. Wachsmann ». *The Galpin Society Journal* (1961), p. 3-29.
- [254] George Neville WATSON. *A treatise on the theory of Bessel functions*. 1944 (2nd edition).
- [255] Gil WEINBERG et Scott DRISCOLL. « Robot-human interaction with an anthropomorphic percussionist ». *Proceedings of the SIGCHI conference on Human Factors in computing systems*. 2006, p. 1229-1232.
- [256] Gil WEINBERG et Scott DRISCOLL. « Toward robotic musicianship ». *Computer Music Journal* 30.4 (2006), p. 28-45.
- [257] Gil WEINBERG, Scott DRISCOLL et R Mitchell PARRY. « Haile – An Interactive robotic percussionist ». *ICMC*. 2005.
- [258] Gil WEINBERG, Mark GODFREY, Alex RAE et John RHOADS. « A real-time genetic algorithm in human-robot musical improvisation ». *International Symposium on Computer Music Modeling and Retrieval*. Springer. 2007, p. 351-359.
- [259] Gabriel WEINREICH et René CAUSSÉ. « Digital and analog bows : hybrid mechanical-electrical systems ». *ICASSP'86. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. T. 11. IEEE. 1986, p. 1297-1299.
- [260] Peter WELCH. « The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : a method based on time averaging over short, modified periodograms ». *IEEE Transactions on audio and electroacoustics* 15.2 (1967), p. 70-73.
- [W8] Marc WIJNAND, Thomas HÉLIE et David ROZE. « Finite-time tracking control of a nonlinear string to reference dynamics ». *10th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC)*. 2022 (accepté).
- [W9] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL et Lionel ROSIER. « Finite-time stabilization of an overhead crane with a flexible cable submitted to an affine tension ». *Accepté pour publication dans ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations* (2021).
- [W4] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Thomas HÉLIE et David ROZE. « Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie ». *Congrès Français d'Acoustique*. 2018.
- [W1] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Thomas HÉLIE et David ROZE. « Contrôle des vibrations d'un oscillateur passif : stabilisation en temps fini et par remodelage d'énergie (poster) ». *Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio*. 2018.
- [W6] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Benoît FABRE, Thomas HÉLIE, Lionel ROSIER et David ROZE. « Active control of the axisymmetric vibration modes of a tom-tom drum ». *2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2019.
- [W2] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Benoît FABRE, Lionel ROSIER et David ROZE. « Contrôle actif des modes axisymétriques d'un tom : Système Hamiltonien à Ports et perspectives (poster) ». *Journées Jeunes Chercheurs en Audition, Acoustique musicale et Signal audio*. 2019.
- [W7] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Thomas HÉLIE et David ROZE. « Active control of the axisymmetric vibration modes of a tom-tom drum using a modal-based observer-regulator ». *EAA e-Forum Acusticum*. 2020.

- [W3] Marc WIJNAND, Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Thomas HÉLIE et David ROZE. « Contrôle actif des fréquences d'une membrane de tom : implémentation expérimentale (poster) ». *Congrès des Jeunes Chercheurs en Mécanique (Méca-J)*. Août 2021.
- [261] Peter WILLIAMS et Daniel OVERHOLT. « Design and evaluation of a digitally active drum ». *Personal and Ubiquitous Computing* (2020).
- [262] Carlos Canudas de WIT, Bruno SICILIANO et Georges BASTIN. *Theory of Robot Control*. Springer-Verlag, 1996.
- [263] Randy WORLAND. « Normal modes of a circular drumhead under non-uniform tension ». *The Journal of the Acoustical Society of America* 127.1 (2009), p. 525-533.
- [264] Randy WORLAND. « Chladni patterns on drumheads : a "physics of music" experiment ». *The Physics Teacher* 49.1 (2011), p. 24-27.
- [265] Leonid P. YARIN. *The Pi-Theorem : applications to fluid mechanics and heat and mass transfer*. T. 1. Springer Science & Business Media, 2012.
- [266] Tjalling J. YPMA. « Historical development of the Newton–Raphson method ». *SIAM review* 37.4 (1995), p. 531-551.
- [267] Jun-yong ZHAI, Wen-ting ZHA et Shu-min FEI. « Semi-global finite-time output feedback stabilization for a class of large-scale uncertain nonlinear systems ». *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 18.11 (2013), p. 3181-3189.
- [268] Fumin ZHANG, Siddarth P. NAGARKATTI, B.T. COSTIC, Darren M. DAWSON et Christopher D. RAHN. « Velocity Tracking Control of an Axially Accelerating String and Actuator System ». *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 99CH36304)*. T. 5. IEEE. 1999, p. 4325-4330.
- [269] Meng ZHANG, Romeo ORTEGA, Dimitri JELTSEMA et Hongye SU. « Dissipation Obstacle hampers Control-by-Interconnection Methodology ». *IFAC-PapersOnLine* 48.13 (2015), p. 123-128.
- [270] Lin ZHAO et Yingmin JIA. « Finite-time attitude stabilisation for a class of stochastic spacecraft systems ». *IET Control Theory & Applications* 9.8 (2015), p. 1320-1327.
- [271] Konstantin ZIMENKO, Andrey POLYAKOV, Denis EFIMOV et Wilfrid PERRUQUETTI. « Finite-time and fixed-time stabilization for integrator chain of arbitrary order ». *Proc. 17th European Control Conference (ECC)*. 2018.
- [272] Bahman ZOHURI. *Dimensional analysis beyond the Pi theorem*. Springer, 2017.
- [273] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL et Jean-Marie CORON. « Stabilization of an overhead crane with a variable length flexible cable ». *Computational and Applied Mathematics* 21.1 (2002), p. 101-134.
- [274] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL et Jean-Michel CORON. « Exponential stabilization of an overhead crane with flexible cable via a back-stepping approach ». *Automatica* 36.4 (2000), p. 587-593.
- [275] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Jean-Michel CORON et Wilfrid PERRUQUETTI. « Small-Time Stabilization of Homogeneous Cascaded Systems with Application to the Unicycle and the Slider Examples ». *SIAM Journal on Control and Optimization* 58.5 (2020), p. 2997-3018.
- [276] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL et Michel Cohen DE LARA. *Commande linéaire des systèmes dynamiques*. Masson, 1994.
- [277] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL et Michel DE LARA. *Control theory for engineers – A primer*. Sous la dir. de SPRINGER. Springer, 2013.
- [278] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Benoît FABRE et Jean-Michel CORON. « An acoustic model for automatic control of a slide flute ». *Acta Acustica united with Acustica* 96.4 (2010), p. 713-721.

- [279] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Benoît FABRE et Jean-Michel CORON. « An acoustic model to control an experimental slide flute ». *Acoustics 2012, Nantes (France)*. 2012.
- [280] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Iván MOYANO et Lionel ROSIER. « FINITE-TIME STABILIZATION OF AN OVERHEAD CRANE WITH A FLEXIBLE CABLE ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 31.2 (2019), p. 6.
- [281] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Fadi BOUSTANY, Francis CONRAD et B.P. RAO. « Feedback stabilization of a hybrid PDE-ODE system : Application to an overhead crane ». *Mathematics of Control, Signals and Systems* 7.1 (1994), p. 1-22.
- [282] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Jean-Michel CORON, Benoît FABRE et Thomas HÉLIE. « Wind instruments as time delay systems. Part II : control and estimation ». *IFAC Proceedings Volumes* 42.14 (2009), p. 290-295.
- [283] Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL, Cyril JOLY, Tony NOËL et Joël SENPAUROCA. « Control of a slide flute : a mechatronic project ». *Proceedings of the 3rd International Symposium on Movement and Computing*. 2016, p. 1-5.
- [284] Arjan J. VAN DER SCHAFT. « Port-Hamiltonian systems : network modeling and control of nonlinear physical systems ». *Advanced dynamics and control of structures and machines*. Springer, 2004, p. 127-167.
- [285] Arjan VAN DER SCHAFT et Dimitri JELTSEMA. « Port-Hamiltonian systems theory : An introductory overview ». *Foundations and Trends® in Systems and Control* 1.2-3 (2014), p. 173-378.