



**HAL**  
open science

## Groupe fondamental de Morse stable

Florian Bertuol

► **To cite this version:**

Florian Bertuol. Groupe fondamental de Morse stable. Variables complexes [math.CV]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2022. Français. NNT : 2022TOU30073 . tel-03726679

**HAL Id: tel-03726679**

**<https://theses.hal.science/tel-03726679v1>**

Submitted on 18 Jul 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

---

---

Présentée et soutenue le *mardi 14 Juin 2022* par :

**Florian Bertuol**

**Groupe fondamental de Morse stable**

---

---

### JURY

J.-F. BARRAUD	Directeur de thèse	Université Paul Sabatier
BAPTISTE CHANTRAINE	Rapporteur	Université de Nantes
SYLVAIN COURTE	Examineur	Université Grenoble Alpes
MIHAI DAMIAN	Rapporteur	Université de Strasbourg
THOMAS FIEDLER	Examineur	Université Paul Sabatier
AGNÈS GADBLED	Examinatrice	Université Paris-Saclay
KLAUS NIEDERKRÜGER	Examineur	Université Claude Bernard
ALEXANDRU OANCEA	Examineur	Université de Strasbourg

---

### École doctorale et spécialité :

*MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales*

### Unité de Recherche :

*Institut de Mathématiques de Toulouse*

### Directeur de Thèse :

*Jean-François Barraud*

### Rapporteurs :

*Baptiste Chantraine et Mihai Damian*



*À mon père*



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse, Jean-François. Ce travail n'aurait pas été possible sans ta grande disponibilité, ton soutien constant, ton enthousiasme à transmettre les mathématiques. Chacune de nos réunions - et elles furent nombreuses! - furent pour moi l'occasion de repartir avec autant de nouvelles idées, de nouvelles connaissances, ou parfois simplement du bon pied. Tu as été un excellent directeur de thèse, et j'espère que d'autres suivront après moi.

Je remercie Mihai Damian et Baptiste Chantraine d'avoir accepté de rapporter ma thèse, pour leur travail de relecture et les nombreuses améliorations qu'ils m'auront permis d'apporter à ce manuscrit au cours de nos échanges. Ce fut l'occasion pour moi de prendre un réel recul sur ce texte, et pour cela merci encore. Merci à Sylvain Courte, Thomas Fiedler, Agnès Gadbled, Klaus Niederkrüger et Alexandru Oancea d'avoir accepté de compléter mon jury.

Cela fait désormais plus de dix ans que je fréquente les bancs de l'université. Ce déjà long parcours n'aurait peut-être pas eu lieu sans l'impulsion de ma professeure de mathématiques de terminale, Mme Briel, qui m'a laissé entendre que glisser une fac de maths dans mes vœux d'orientation serait une bonne idée. Je suis heureux de vous avoir écouté.

Je suis tout aussi heureux que le choix de cette université se soit porté sur celle d'Albi, alors encore appelée CUFR Champollion. Ce fut facile de continuer à prendre goût aux mathématiques, car elles y étaient prodiguées par une véritable équipe de choc : la simple évocation des noms de MM. Berthomieu, Montaut, Martin, Ortiz et Recoules doit suffire à rappeler une quantité astronomique de souvenirs à qui était présent à mes côtés durant lesdits cours. Et ceux-là furent nombreux : Rémi S., Bastien M., Loïc, Emeline, Xavier, Sylvain, Olivier, Pauline, Alice M., Ulysse, Thomas C., Cyprien... Je n'oublie évidemment pas Monsieur et Madame Favier (qui doivent eux aussi, pour d'autres raisons, se féliciter d'avoir fréquenté la même université), David et Déborah. La distance n'atténuera pas notre amitié. Je n'oublie pas non plus Anouar et son génie, mon parcours aurait été bien différent s'il n'avait pas croisé le tien. Merci

à Mme Betuing et à son dévouement pour encadrer l'équipe (compétitive ?) de badminton que nous formions avec Jérémy, Thibault, Rémi V. et Marianne. Durant ces mêmes années, la musique était encore de mise, et je suis fier d'avoir compté Martin parmi mes élèves de batterie avant qu'il ne se convertisse par lui-même aux mathématiques.

Vient ensuite Toulouse, et son Université Paul Sabatier. Je mesure ma chance d'y avoir commencé mon master en même temps que Paulin, Alexis, Céline, Thomas B., Benjamin, Leyth, Simon... Anthony, la salle café est bien de gauche depuis ton départ. Je suis content qu'à ces amis se soient ajoutés Théo et Bastien R. lors de la seconde année agreg, ainsi qu'Étienne et Tù lors de la « seconde seconde année » recherche. Ces trois années furent aussi l'occasion de rencontrer Damien, Laura, Kévin et Anne, premiers doctorants d'une longue lignée qu'il me serait donné de côtoyer. Merci à vous quatre pour votre accueil chaleureux.

Car commence alors ma longue occupation du bureau 104 de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, bureau qui aurait été bien vide si je ne l'avais pas tout d'abord partagé avec Jean-Marc. Te retrouver chaque matin au bureau était la garantie d'une bonne journée, parfois écourtée lorsque la cachette d'un indice de tes fameux escape game mathématiques se révélait trop ambitieuse. Je n'oublierai jamais les bons moments que nous avons vécus dans ce bureau, ni les mauvais. Car les épreuves furent nombreuses, et nous avons parfois eu à les surmonter ensemble. Merci à Jules et toi. Je renouvelle mes félicitations au couple que vous formez avec Eva. Ton successeur au bureau, Dominique, je l'ai rencontré alors qu'il était encore en master, sur les bancs d'un cours dont je me félicite de n'avoir pas eu à passer l'examen. Nos points communs nous ont rapidement réunis autour de nos activités vidéoludiques et musicales, et continuent de le faire aujourd'hui encore bien que tu te sois envolé vers de nouvelles aventures allemandes. Aussi, ces quelques mots sont pour toi : *Take this*. J'ai bien sûr une pensée pour ta femme Léo (c'est fou cette propension qu'ont les membres du 104 à se marier!). Enfin, c'est en compagnie de William que j'ai fini de rédiger cette thèse. Scout devant l'éternel, je lui reconnais cet amour de son prochain dont il a fait preuve en m'offrant de bienvenus moments de quiétude lors des matchs de badminton nous opposant. Impitoyables en revanche lorsque nous décidions de faire équipe, j'espère que tu laisseras Joan et Laurent goûter au moins une fois à la victoire lorsque je serai parti... Je suis content d'avoir fini ce travail en ta compagnie.

Bien qu'il suffise de rester au 104 pour y voir défiler l'ensemble des doctorants de l'ex-équipe Picard (dont Fabien, qui s'est vu décerner ce titre honorifique tant sa présence y fut appuyée), le couloir ne se résume pas à ce bureau et à ses occupants officiels. Elena complète le trio de la seconde génération des organisateurs du séminaire Quid que nous formions avec JM (place à la troi-

sième génération, Anthony et Benjamin!). Même si le temps était maussade, ta présence suffisait souvent à faire rayonner un arc-en-ciel. Je te souhaite bon courage pour la dernière ligne droite de ta thèse. Je pense aussi à Sonny, excellent grimpeur aussi bien réel que virtuel, Valentin, auquel je suis redevable pour littéralement chacune de nos discussions mathématiques, Dimitri, que je suis heureux de retrouver, Maxence, dont les pas de danses inopinés ont clairement inspiré le *slingshot*, Solène, Paul, Sara, Bruno, Jade, Papa, Simon, Julien, Erfan, Tuan, Chung, Jordi, Quentin... Merci à Julia de m'avoir accueilli dans son bureau, prodigué des cours d'allemand (« *poke dayné ziber sarn* »), et donné deux fois plus de capsules de café que ce que j'ai réussi à en boire. Merci à Pietro d'avoir été *regular* quand on l'attendait *goofy*, *goofy* quand on l'attendait *regular*.

En dehors du bureau 104, une autre pièce occupe à mes yeux une place de choix dans cet institut : je pense bien sûr à la salle café. Elle était l'assurance d'y trouver chaque midi<sup>1</sup> la compagnie d'amis, un problème de maths inno-  
cemment laissé dans un coin du tableau et qui allait nous occuper bien plus que prévu, une partie de cartes aux règles obscures, voir parfois simplement une chaise et un café. C'était surtout pour moi l'occasion d'y croiser Mehdi, Maxime, Laetitia, Michèle, Louis, Mathias, Baptiste, Guillaume, Pierre, Clément S. & B., Eva, Corentin, Javi, Paola, Perla, Virgile... Jamais salle de convivialité n'aura aussi bien porté son nom.

J'ai eu la chance de pouvoir assister à plusieurs conférences en-dehors de Toulouse, qui furent autant d'occasions de rencontrer des doctorants d'autres horizons. Thibaut, ce mois passé en ta compagnie à Montréal restera l'un des moments forts de ma thèse, tant il fut intense sur les plans mathématique, gustatif, et cinématographique. Il est possible que nous repassions un jour à la Brûlerie Urbaine avec Thomas M. et David L., et qu'ils se souviennent encore de nous. Pierre-Alexandre, je suis content de t'avoir rencontré rapidement après les débuts de nos doctorats et ce fut un plaisir de te recroiser à chaque CAST. J'ai une pensée pour Côme, Amiel et Alexandre à chaque partie de Hanabi qu'il m'est donné de jouer, en respectant bien évidemment les conventions.

Merci au personnel administratif de l'IMT, tout particulièrement à Agnès Requis et Marie-Line Domenjole. Merci au personnel de l'Upsidum pour l'attention avec laquelle ils nous reçoivent chaque midi.

Je pense à ma petite sœur Camille et à son immense talent, au plaisir de découvrir chacune de ses nouvelles réalisations et chacun de ses nouveaux projets à chaque fois que nous nous voyons ; j'ai hâte d'assister à tes futurs spectacles.

Je remercie ma petite amie Alice pour le bonheur qu'elle me procure depuis bientôt dix ans. Ton soutien indéfectible a beaucoup compté pour moi, et tu as

---

1. 11h45-14h15.



su me le faire parvenir malgré la distance qui nous a séparé ces deux dernières années. Je te promets que nous vivrons ensemble l'an prochain, et cette phrase restera valable quelle que soit l'année où tu la liras.

Merci à ma maman d'avoir été si forte ces dernières années, et d'avoir continué à me soutenir et à m'accueillir à Coubisou aussi souvent que je souhaitais y retourner. J'aurais voulu que vous veniez tous les deux assister à ma soutenance avec papa. Je lui dédie cette thèse.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Groupe fondamental de Morse</b>	<b>17</b>
<b>1</b>	<b>Espaces de modules en théorie de Morse</b>	<b>19</b>
1.1	Théorie de Morse . . . . .	19
1.2	Espaces de modules . . . . .	21
1.3	Orientation des espaces de modules . . . . .	24
1.4	Compactification des espaces de modules . . . . .	25
1.5	Topologie et espaces de modules . . . . .	31
1.6	Espaces de modules sans conditions . . . . .	32
1.7	Espaces de modules avec un point marqué . . . . .	37
1.8	Espaces de modules hybrides . . . . .	39
1.9	Généricité . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Groupe fondamental de Morse</b>	<b>45</b>
2.1	Baser le groupe fondamental . . . . .	45
2.2	Générateurs . . . . .	46
2.3	Morphisme d'évaluation . . . . .	48
2.4	Relations . . . . .	51
2.5	Invariance <i>a posteriori</i> et isomorphisme d'évaluation . . . . .	55
2.6	Calcul sur le tore penché . . . . .	57
2.7	Invariance <i>a priori</i> et isomorphisme de descente . . . . .	59
2.8	Calcul entre les tores penchés . . . . .	66
<b>II</b>	<b>Groupe fondamental de Morse stable</b>	<b>71</b>
<b>3</b>	<b>Espaces de modules en théorie de Morse stable</b>	<b>73</b>
3.1	Théorie de Morse stable . . . . .	73
3.2	Espaces de modules . . . . .	75
3.3	Compactification des espaces de modules . . . . .	77
3.4	Espaces de modules à rebonds . . . . .	81
3.5	Généricité . . . . .	85

<b>4</b>	<b>Groupe fondamental de Morse stable</b>	<b>89</b>
4.1	Générateurs . . . . .	89
4.2	Morphisme de descente . . . . .	91
4.3	Application de descente . . . . .	99
4.4	Relations . . . . .	102
<b>A</b>	<b>Variétés à coins et à faces</b>	<b>115</b>
A.1	Préliminaires . . . . .	115
A.2	Extension de résultats lisses au cadre à coins . . . . .	118
<b>B</b>	<b>Résultats de transversalité</b>	<b>123</b>
B.1	Lemme de transversalité à paramètres . . . . .	123
B.2	Un lemme de généricité . . . . .	124

# Table des figures

1.1	Un premier exemple de trajectoires. . . . .	22
1.2	Un second exemple de trajectoires. . . . .	23
1.3	Un exemple de trajectoires brisées. . . . .	27
1.4	Un exemple de trajectoire hybride. . . . .	40
2.1	Un premier pas de Morse. . . . .	47
2.2	Un second pas de Morse. . . . .	47
2.3	Lacet de Morse. . . . .	47
2.4	Intersection positive d'un lacet et d'une variété stable. . . . .	49
2.5	Arête basse. . . . .	52
2.6	Arête haute. . . . .	53
2.7	Partie basse. . . . .	54
2.8	Retirer un sommet de la stratification. . . . .	56
2.9	Retirer une arête de la stratification. . . . .	56
2.10	Champ de vecteurs de la fonction hauteur sur le tore penché. . . . .	57
2.11	Orientations fixées du premier tore penché. . . . .	57
2.12	Parcours du bord d'une espace de modules classiques. . . . .	58
2.13	Un premier type d'arête haute. . . . .	61
2.14	Un second type d'arête haute. . . . .	61
2.15	Un premier type d'arête basse. . . . .	61
2.16	Un second type d'arête basse. . . . .	62
2.17	Parcours du bord d'un espace de modules hybrides. . . . .	65
2.18	Champs de vecteurs sur les tores penchés. . . . .	66
2.19	Orientations fixées du second tore penché. . . . .	67
2.20	Parcours du bord du premier espace hybride. . . . .	68
2.21	Parcours du bord du second espace hybride. . . . .	69
3.1	Un exemple de trajectoires. . . . .	76
3.2	Un exemple de trajectoire brisée. . . . .	79
3.3	Un exemple de trajectoire à rebonds. . . . .	83

4.1	Pas de Morse stable. . . . .	90
4.2	Parcours du bord d'un espace de modules à rebonds. . . . .	94
4.3	Contre-exemple en Morse stable. . . . .	103
4.4	Les relations du second type sont non triviales. . . . .	105
4.5	Une composante se projette avec degré un. . . . .	106
4.6	Découpage d'une perturbation en relations. . . . .	109
4.7	Relations issues de la perturbation. . . . .	109
A.1	Le carré et la larme. . . . .	116

# Introduction

La théorie de Morse consiste à obtenir des informations sur la topologie d'une variété  $M$  à travers l'étude de la dynamique d'une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Une première façon d'obtenir ces informations consiste à analyser le type d'homotopie des sous-niveaux  $M^{\leq a} = \{x \in M ; f(x) \leq a\}$  d'une telle fonction : il reste le même le long des intervalles ne contenant pas de valeurs critiques, mais change lorsque l'intervalle contient une valeur critique  $f(c) \in [a, b], c \in \text{Crit}(f)$ . Précisément, on fixe une métrique Riemannienne  $g$ , on note  $\varphi$  le flot du champ de vecteur  $-\text{grad}_g f$ , et on pose

$$W^u(c) = \{x \in M ; \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = c\}$$

la variété instable du point critique  $c$ . Alors  $M^{\leq b}$  et  $M^{\leq a} \cup W^u(c)$  ont le même type d'homotopie (voir Milnor, [21]). Comme  $M$  est compacte et que les sous-niveaux sont initialement vides, la donnée des variétés instables  $W^u(c)$  est équivalente à celle de la topologie de  $M$ . Un point de vue ultérieur consiste à penser ces mêmes variétés instables  $W^u(c)$  comme aux ensembles de trajectoires de gradient

$$W^u(c) \simeq \mathcal{M}(c, \emptyset) = \{\gamma \in C^\infty(]-\infty, 0], M) ; \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = c, \gamma' = -\text{grad}_g f \circ \gamma\},$$

l'identification étant explicitement donnée par l'application d'évaluation en le bas des trajectoires

$$\text{ev}_+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(c, \emptyset) & \longrightarrow & W^u(c) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(0) \end{array} .$$

Ce point de vue suggère une compactification naturelle des variétés instables, obtenue en rajoutant les trajectoires limites au sens de la distance de Hausdorff des trajectoires lisses considérées jusqu'alors. Ces limites sont décrites à l'aide des ensembles de trajectoires de gradient

$$\mathcal{M}(b, a) = \left\{ \gamma \in C^\infty(]-\infty, +\infty[) ; \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = b \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = a \end{array}, \gamma' = -\text{grad}_g f \circ \gamma \right\} / \mathbb{R},$$

où le quotient est donné par l'action du temps  $T \cdot \gamma = \gamma(\cdot + T)$ , et elles consistent en les trajectoires brisées le long de points critiques intermédiaires (voir F. La-tour, [14]) :

$$\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) = \sqcup_{k \in \mathbb{N}, (c_i)_{i \leq k} \in \text{Crit}(f)^k} \mathcal{M}(c, c_1) \times \mathcal{M}(c_1, c_2) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_k, \emptyset). \quad (1)$$

Ces espaces de trajectoires héritent alors de structures de variétés compactes à faces, homéomorphes à des boules fermées, et qui encodent cette-fois ci directement la topologie de la variété au sens où les applications d'évaluation en le bas des trajectoires généralisées  $\text{ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) \rightarrow M$  sont les applications d'attachement d'une structure de CW-complexe sur  $M$ . On obtient directement à partir de cette structure de nouvelles interprétations des invariants topologiques classiques de  $M$ , issues d'un point de vue purement dynamique :

- l'homologie singulière  $H_*(M; \mathbb{Z})$  de  $M$  peut être obtenue comme l'homologie  $H_*(M, f, g)$  du complexe de Morse

$$\bigoplus_{c \in \text{Crit}_n(f)} \mathbb{Z}[c] \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{c \in \text{Crit}_{n-1}(f)} \mathbb{Z}[c] \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{c \in \text{Crit}_0(f)} \mathbb{Z}[c],$$

où la différentielle  $\partial$  est définie par

$$\partial(b) = \sum_{a \in \text{Crit}_{k-1}(f)} \#\overline{\mathcal{M}}(b, a)$$

pour  $b \in \text{Crit}_k(f)$  ( $\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  est un espace discret, compact, et orienté, et la notation  $\#\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  désigne le nombre de trajectoires orientées positivement moins le nombre de trajectoires orientées négativement),

- lorsque la fonction  $f$  ne possède qu'un unique minimum, le groupe fondamental  $\pi_1(M; \star)$  de  $M$  admet la présentation

$$\pi_1(M, f, g; \star) = \langle \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset), b \in \text{Crit}_1(f) | \underline{\partial} \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset), c \in \text{Crit}_2(f) \rangle,$$

où  $\underline{\partial} \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$  est le mot formé par les variétés instables issues de points critiques d'indice 1 présentes dans le bord de la compactification de la variété instable  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$ . Le chapitre 2 a pour but de détailler cette présentation pour une fonction de Morse quelconque, notamment celles qui possèdent plusieurs minima. On se contentera pour cette introduction de détailler trois points :

- les générateurs sont les segments  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$ , i.e. les compactifications des variétés instables des points critiques d'indice 1, en particulier ils sont en bijection avec  $\text{Crit}_1(f)$ ;
- les relations s'obtiennent à partir du bord  $S^1 \simeq \partial \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$  des compactifications des variétés instables des points critiques d'indice 2;

- l'isomorphisme entre  $\pi_1(M ; \star)$  et  $\pi_1(M, f, g ; \star)$  s'établit à l'aide du flot (laisser couler un lacet topologique par le flot donne un lacet de Morse, laisser couler un disque par le flot donne une relation de Morse).

On peut chercher à étendre ces interprétations dans des cadres plus généraux que celui d'une fonction de Morse sur une variété fermée. Il existe par exemple des généralisations de l'homologie de Morse pour une classe plus large de variétés (à bord [15], à coins [10]) ou de fonctions (fonctions de Morse-Bott [2]), mais l'exemple le plus célèbre provient sans doute de l'application de ces idées à la géométrie symplectique dans les travaux de Floer [9], qui remplace  $M$  par l'espace  $\Omega(M)$  des lacets d'une variété symplectique, la fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  par une fonctionnelle d'action  $\mathcal{A}_H : \Omega(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dépendant d'un Hamiltonien  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ , les points critiques par les solutions périodiques de cet hamiltonien, et les trajectoires de gradient par les solutions d'une équation aux dérivées partielles elliptiques.

Dans ce manuscrit, le cadre qui va nous intéresser est celui de la classe des fonctions de Morse stable, ou fonctions génératrices quadratiques à l'infini (f.g.q.i.), qui sont des fonctions de Morse  $F : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $N \in \mathbb{N}$ , vérifiant comme leur nom l'indique une condition de quadraticité à l'infini. L'étude de cette classe est motivée par plusieurs aspects. On en donne deux :

- Géométrie symplectique : les f.g.q.i engendrent des sous-variétés Lagrangiennes de la variété symplectique  $(T^*M, d\lambda)$ , étendant l'idée de base qui est qu'une fonction de Morse engendre comme telle sous-variété le graphe  $\Gamma_f$  de l'application  $df : M \rightarrow T^*M$ . De telles fonctions apparaissent dans les travaux de M. Chaperon [7], et sont utilisées par F. Laudenbach et J.-C. Sikorav dans [16] où elles leur permettent de prouver la forme suivante de la conjecture d'Arnold :

**Théorème 0.1** (F. Laudenbach, J.-C. Sikorav [16]). *Soit  $0_M \subset T^*M$  la section nulle, et soit  $(\Phi_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie Hamiltonienne générique. Alors*

$$\# \left( \Phi^1(0_M) \cap 0_M \right) \geq \text{sMorse}(M),$$

où

$$\text{sMorse}(M) = \min \left\{ \#\text{Crit}(F) ; N \geq 0, F : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ f.g.q.i.} \right\}.$$

- Algèbre homologique : le complexe de Morse se généralise tel quel au cadre Morse stable. En effet, comme les seuls espaces de modules employés pour le définir sont ceux de la forme  $\mathcal{M}(b, a)$ , i.e. reliant deux



points critiques, les trajectoires en jeu restent bornées (« d'énergie finie ») et admettent une compactification similaire à (1). Dans son article [8], M. Damian montre de plus que les fonctions de Morse stable jouissent de meilleurs propriétés homologiques que les fonctions de Morse, à travers le résultat que tout complexe simplement équivalent à un complexe de Morse peut en fait être réalisé comme un complexe de Morse stable.

Le même article établit que les fonctions Morse et Morse stable diffèrent significativement pour ce qui est de leur nombre de points critiques. Il y est en effet montré le résultat suivant, où  $\text{Morse}(M)$  désigne le nombre minimal de points critiques d'une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  :

**Théorème 0.2** (M. Damian [8]). *Il existe des variétés fermées  $M$  telles que*

$$\text{Morse}(M) > \text{sMorse}(M).$$

En particulier, la différence vient essentiellement des points critiques d'indice 1, et ceux-ci ne suffisent donc plus à engendrer le groupe fondamental en général. Dans [3], J.-F. Barraud résout ce problème de générateurs dans le cadre Floer, en utilisant pour cela des espaces de modules de trajectoires interrompues jouant le rôle des variétés instables de la présentation initiale, tout en possédant des propriétés idoines. Les espaces de modules analogues que l'on propose dans le cadre Morse stable, sur lequel on se fixe désormais, sont ceux constitués des trajectoires interrompues sur  $M \times \mathbb{R}^{N_+} \subset M \times \mathbb{R}^{N_+} \times \mathbb{R}^{N_-}$ , où  $N = N_+ + N_-$  :

$$\mathcal{M}(c, +) = \left\{ \gamma \in C^\infty([-\infty, 0], M \times \mathbb{R}^N) ; \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = c \\ \gamma(0) \in M \times \mathbb{R}^{N_+}, \gamma' = -\text{grad}_g F \circ \gamma \end{array} \right\}.$$

Ces « variétés instables » se compactifient alors à la manière de (1), et les composantes connexes de ces espaces pour les points critiques d'indice normalisé (voir la définition 3.4) 1 seront les générateurs du groupe fondamental de Morse stable, au sens où le groupe

$$\mathcal{L}(M, F, g ; \star) = \langle P, P \text{ composante connexe de } \overline{\mathcal{M}}(b, +), b \in \text{Crit}_1(F) \setminus \emptyset \rangle$$

s'évalue surjectivement sur le groupe fondamental de la variété.

**Théorème 0.3.** *Il existe un morphisme surjectif*

$$\text{ev} : \mathcal{L}(M, F, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star).$$

Les espaces  $\mathcal{M}(c, +)$  pour  $c$  d'indice normalisé supérieur à 1 ne fournissent en revanche pas directement les relations : il existe par exemple une fonction de

Morse stable  $F$  sur  $S^1$  ayant seulement deux points critiques d'indices normalisés 1 et 0, mais dont le groupe  $\mathcal{L}(M, F, g ; \star)$  possède deux générateurs. Il est important de déterminer ces relations intrinsèquement, i.e. comme étant purement issues de la dynamique du gradient de  $F$ , afin de répondre à des questions d'injectivité entre groupes fondamentaux, comme en apparaissent par exemple dans la discussion suivant le théorème 1.2. de J.-F. Barraud et L.S. Suárez dans [4]. Le problème de l'invariance de la présentation reste lui aussi en suspens, le flot n'étant plus un outil adapté pour établir une correspondance entre lacets topologiques et lacets de Morse stable étant donné que laisser couler par le flot revient la plupart du temps à envoyer à l'infini.

Ce manuscrit donne une présentation complète du groupe fondamental de Morse stable  $\pi_1(M, F, g ; \star)$ , pour laquelle les relations dépendent uniquement d'espaces de modules issus de la dynamique de  $-\text{grad}_g F$ . L'idée fondamentale consiste à réinterpréter l'application de descente  $\Theta$  qui à un lacet topologique  $\gamma$  associe un lacet de Morse  $\Theta(\gamma)$  en laissant couler  $\gamma$  par le flot comme donnée par les composantes de bord d'un espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma, \emptyset)$ . Ce point de vue permet de définir l'application de descente dans le cadre Morse stable via les espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$ , mais elle n'hériterait pas de toutes les propriétés qu'elle vérifiait dans le cadre Morse. Les deux premiers types de relations que l'on propose servent à récupérer ces propriétés : pour  $(\ell, \ell_1, \ell_2) \in \mathcal{L}(M, F, g ; \star)^3$ , on demande à ce que

$$\Theta(\ell) \sim \ell$$

et

$$\Theta(\ell_1 \cdot \ell_2) \sim \Theta(\ell_1) \cdot \Theta(\ell_2).$$

On considèrera aussi un troisième type de relations, similaires à celles qui existaient pour le groupe fondamental de Morse, au sens où l'on déclare triviaux des lacets de Morse stable  $\ell$  obtenus à partir d'applications  $\delta : S^1 \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}^2(c, +)$  pour  $c \in \text{Crit}(f)$  et  $\overline{\mathcal{M}}_{\bullet}^2(c, +)$  un certain espace de modules. Pour de tels lacets, on demande à ce que

$$\ell \sim 1.$$

En notant  $\mathcal{R}$  l'ensemble de ces relations, on obtient la présentation du groupe fondamental de Morse

$$\pi_1(M, F, g ; \star) = \langle P, P \text{ composante connexe de } \overline{\mathcal{M}}(b, +), b \in \text{Crit}_1(F) | \mathcal{R} \rangle,$$

appellation justifiée par le résultat suivant.

**Théorème 0.4.** *Le morphisme ev du théorème 0.3 induit un isomorphisme*

$$\text{ev} : \pi_1(M, F, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star).$$

La structure du manuscrit est la suivante. Le chapitre 1 introduit les espaces de modules nécessaires à la définition du groupe fondamental de Morse et au morphisme de descente. Le chapitre 2 détaille la présentation du groupe fondamental de Morse et la réinterprétation du morphisme de descente en terme d'espaces de modules. Le chapitre 3 introduit les nouveaux espaces de modules en vue d'étendre le groupe fondamental au cadre Morse stable. Le chapitre 4 donne les générateurs du groupe fondamental de Morse stable, la définition du morphisme de descente, explicite les relations du groupe fondamental de Morse stable, et montre enfin que la présentation proposée est isomorphe au groupe fondamental usuel de la variété.

**Première partie**

**Groupe fondamental de Morse**



# Chapitre 1

## Espaces de modules en théorie de Morse

On présente dans ce chapitre les différents espaces de modules, des variétés dont les points sont des trajectoires de gradient lisses ou brisées. Ces espaces permettront de définir les différents objets liés au groupe fondamental de Morse : générateurs, relations et morphismes. Les objets (variétés, fonctions...) seront implicitement supposés lisses. On commence par de brèves notions de théorie de Morse.

### 1.1 Théorie de Morse

Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ , et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Un point  $c \in M$  est dit critique pour  $f$  si  $df_c = 0$ . On note  $\text{Crit}(f)$  l'ensemble des points critiques de  $f$ .

**Définition 1.1.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Un point critique  $c \in \text{Crit}(f)$  est dit non dégénéré s'il existe des coordonnées pour lesquelles on a

$$\det \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(c) \right) \neq 0.$$

- La fonction  $f$  est dite de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.

Les fonctions de Morse sont génériques, ce qui peut se voir en reformulant la définition précédente comme une condition de transversalité. Étant donné que la transversalité jouera un rôle important dans ce manuscrit, on en rappelle la définition ainsi que quelques résultats.

**Définition 1.2.** Soit  $F : M \rightarrow S$  et  $G : N \rightarrow S$  deux applications. On dit que  $F$  est transverse à  $G$ , et on note  $F \pitchfork G$ , lorsque

$$\forall (x, y) \in M \times N, F(x) = G(y) (= : z) \implies dF_x(T_x M) + dG_y(T_y N) = T_z S.$$

**Proposition 1.1.** Soit  $F : M \rightarrow S$  et  $G : N \rightarrow S$  deux applications. On suppose que  $F \pitchfork G$ . Alors

$$M \times_{F, S, G} N = \{(x, y) \in M \times N ; F(x) = G(y)\}$$

est une sous-variété de  $M \times N$  de codimension  $\dim S$ .

**Définition 1.3.** Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique. Un ensemble  $A \subset X$  est dit générique, ou résiduel au sens de Baire, s'il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses.

**Théorème 1.1** (Théorème de transversalité, M. Hirsch [12]). Soit  $M, N$  et  $S$  des variétés, et soit  $G : N \rightarrow S$  une application. L'ensemble

$$\{F \in C^\infty(M, S) ; F \pitchfork G\} \subset C^\infty(M, S)$$

est générique. Si  $M$  est compacte, cet ensemble est un ouvert dense.

Le résultat reliant théorie de Morse et transversalité évoqué précédemment est le suivant.

**Proposition 1.2.** 1. Une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est de Morse si et seulement si

$$df \pitchfork 0_{T^*M},$$

où  $0_{T^*M} : M \rightarrow T^*M$  est la section nulle du fibré cotangent de  $M$ ,

2. Les fonctions de Morse sont génériques dans  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Le lemme classique qui suit permet de définir l'indice des points critiques d'une fonction de Morse.

**Lemme 1.1** (Lemme de Morse). Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $c \in \text{Crit}(f)$ . Il existe des coordonnées centrées en  $c$  dans lesquelles  $f$  se lit

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(c) + \frac{1}{2}(-x_1^2 - \dots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2).$$

On appelle carte de Morse de telles coordonnées. L'entier  $k$  est indépendant du choix de carte de Morse. On note  $k = \text{ind}(c)$  et  $\text{Crit}_j(f) = \{c \in \text{Crit}(f) ; \text{ind}(c) = j\}$ .

**Corollaire 1.1.** Soit  $M$  une variété compacte et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. Alors l'ensemble  $\text{Crit}(f)$  est fini.

**Définition 1.4.** Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse. Une métrique Riemannienne  $g : M \rightarrow T^*M \otimes T^*M$  est dite adaptée à  $f$  s'il existe des cartes de Morse  $(\varphi_c, U_c)$  au voisinage de chaque point critique  $c \in \text{Crit}(f)$  telles que  $g$  soit plate dans ces cartes, i.e. telles que les applications  $\varphi_c : (U_c, g) \rightarrow (\varphi_c(U_c), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$  soient des isométries.

## 1.2 Espaces de modules

On suppose à présent que  $M$  est fermée et connexe. Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse, et  $g$  une métrique adaptée à  $f$ . On note  $X = -\text{grad}_g f$  l'opposé du gradient de  $f$ , et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t, x) & \longmapsto & \varphi^t(x) \end{array}$$

le flot de générateur infinitésimal  $X$ .

Si  $\gamma : I \rightarrow M$  est une fonction définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  qui admet des limites en  $\inf I$  et  $\sup I$ , on notera respectivement  $\gamma(-)$  et  $\gamma(+)$  ces limites.

À des points critiques  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ , peut associer les espaces de trajectoires de gradient semi-infinies

$$\mathcal{M}(b, \emptyset) = \{\gamma \in C^\infty(]-\infty, 0], M) ; \gamma(-) = b, \gamma' = X \circ \gamma\}$$

et

$$\mathcal{M}(\emptyset, a) = \{\gamma \in C^\infty([0, +\infty[, M) ; \gamma(+) = a, \gamma' = X \circ \gamma\}.$$

On munit ces espaces de structures de variétés en les rendant respectivement difféomorphes à la variété instable de  $b$

$$W^u(b) = \{x \in M ; \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi^t(x) = b\}$$

et à la variété stable de  $a$

$$W^s(a) = \{x \in M ; \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) = a\}$$

via les plongements donnés par les applications d'évaluations

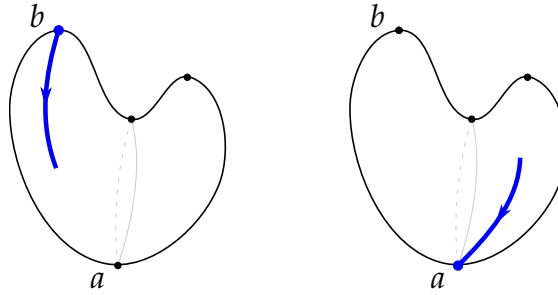
$$\text{Ev}_+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(b, \emptyset) & \longrightarrow & M \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(+) \end{array} \quad \text{et} \quad \text{Ev}_- : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(\emptyset, a) & \longrightarrow & M \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(-) \end{array}.$$

Ce sont des boules ouvertes de dimensions respectives  $\text{ind}(b)$  et  $n - \text{ind}(a)$ . Des exemples de telles trajectoires sont donnés pour la fonction hauteur  $(x, y, z) \mapsto z$  restreinte à la sphère tordue  $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$  dans la figure 1.1.

**Définition 1.5.** On dit que le couple  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale lorsque :

$$\forall (a, b) \in \text{Crit}(f)^2, (\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow M) \pitchfork (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow M).$$



FIGURE 1.1 – Une trajectoire de  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  et une trajectoire  $\mathcal{M}(\emptyset, a)$ .

Cette condition équivaut à demander que  $W^u(b) \pitchfork W^s(a)$  pour tout couple de points critiques  $(a, b)$ . Le résultat suivant est originellement dû à S. Smale [26], et la preuve que l'on évoque dans la section 1.9 est due à M. Schwarz [25].

**Théorème 1.2** (S. Smale [26]). *Soit  $f$  une fonction de Morse fixée. L'ensemble des métriques  $g$  adaptées à  $f$  telles que  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale est générique.*

À un couple de points critiques  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ , on peut ensuite associer le produit fibré des espaces  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  et  $\mathcal{M}(\emptyset, a)$  par  $\text{Ev}_+$  et  $\text{Ev}_-$  au-dessus de  $M$  : on note symboliquement

$$\begin{array}{c} \boxed{\times} \\ \text{Ev} \end{array} = \begin{array}{c} \times \\ \text{Ev}_+, M, \text{Ev}_- \end{array}$$

et on pose

$$\mathcal{M}_\bullet(b, a) = \mathcal{M}(b, \emptyset) \begin{array}{c} \boxed{\times} \\ \text{Ev} \end{array} \mathcal{M}(\emptyset, a),$$

i.e.

$$\mathcal{M}_\bullet(b, a) = \{(\gamma_-, \gamma_+) \in \mathcal{M}(b, \emptyset) \times \mathcal{M}(\emptyset, a) ; \gamma_- (+) = \gamma_+ (-)\}.$$

Si le couple  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale, cet espace est alors une variété, de dimension  $\text{ind}(b) + n - \text{ind}(a) - n = \text{ind}(b) - \text{ind}(a)$ . On identifiera par la suite  $\mathcal{M}_\bullet(b, a)$  à l'ensemble de trajectoires de gradient infinies et paramétrées

$$\{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}, M) ; \gamma(-) = b, \gamma(+)=a, \gamma' = X \circ \gamma\}$$

via  $\gamma \mapsto (\gamma|_{]-\infty, 0]}, \gamma|_{[0, +\infty[})$ , ou bien à l'intersection

$$W^u(b) \cap W^s(a)$$

via  $x \mapsto (\varphi^\bullet(x)|_{]-\infty, 0]}, \varphi^\bullet(x)|_{[0, +\infty[})$ . Lorsque  $b \neq a$ ,  $\mathcal{M}_\bullet(b, a)$  admet une action libre et propre de  $\mathbb{R}$ , donnée par  $T \cdot \gamma = \gamma(\cdot + T)$ . On note alors

$$\mathcal{M}(b, a) = \mathcal{M}_\bullet(b, a)/\mathbb{R}.$$

Les éléments de cet espace sont des trajectoires de gradient infinies et non paramétrées. On fera l'abus d'identifier une trajectoire non paramétrée  $[\gamma] \in \mathcal{M}(b, a)$  à un de ses représentants  $\gamma$ . L'espace  $\mathcal{M}(b, a)$  est une variété de dimension  $\text{ind}(b) - \text{ind}(a) - 1$ , diffeomorphe à

$$(W^u(b) \cap W^s(a)) / \mathbb{R}$$

via l'application (correctement définie)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(b, a) & \longrightarrow & (W^u(b) \cap W^s(a)) / \mathbb{R} \\ \gamma & \longmapsto & [\gamma(0)] \end{array} ,$$

ou encore à

$$W^u(b) \cap W^s(a) \cap f^{-1}(p)$$

où  $p \in ]f(a), f(b)[$  est une valeur régulière de  $f$ , via l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(b, a) & \longrightarrow & W^u(b) \cap W^s(a) \cap f^{-1}(p) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(T) \end{array} ,$$

$T$  étant donné implicitement par l'équation  $f(\gamma(T)) = p$ . La figure 1.2 présente des trajectoires de ces espaces, toujours pour la fonction hauteur sur la sphère tordue.

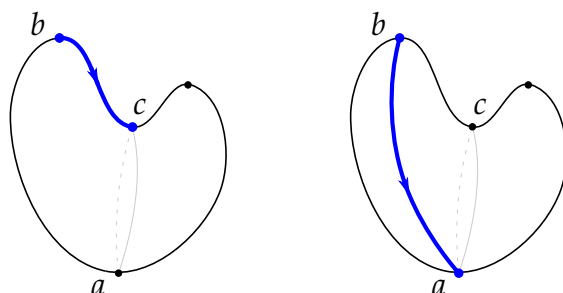


FIGURE 1.2 – Une trajectoire de  $\mathcal{M}(b, c)$  et une trajectoire  $\mathcal{M}(b, a)$ .

**Remarque 1.1.** 1. Pour  $c \in \text{Crit}(f)$ , l'espace  $\mathcal{M}_\bullet(c, c) \simeq W^u(c) \cap W^s(c)$  est le singleton  $\{\gamma \in C^\infty(]-\infty, +\infty[, M), \gamma \equiv c\}$ .

2. La notation  $\mathcal{M}_\bullet(b, a)$  provient de l'interprétation suivante : une trajectoire  $\gamma \in \mathcal{M}_\bullet(b, a)$  peut être vue comme la trajectoire non paramétrée sous-jacente  $[\gamma] \in \mathcal{M}(b, a)$  munie d'un point marqué  $\bullet \in \text{Im}([\gamma]) := \text{Im}(\gamma)$ , via le plongement

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_\bullet(b, a) & \longrightarrow & \mathcal{M}(b, a) \times M \\ \gamma & \longmapsto & ([\gamma], \gamma(0)) \end{array} .$$

3. On doit nécessairement avoir  $\text{ind}(b) > \text{ind}(a)$  pour que l'espace  $\mathcal{M}(b, a)$  soit non vide.

Dans la suite de ce chapitre, les symboles  $r$  et  $q$  désigneront soit un point critique de  $f$ , soit  $\emptyset$ . On suppose momentanément que  $(r, q) \neq (\emptyset, \emptyset)$  lorsque les deux symboles sont utilisés simultanément, l'espace  $\mathcal{M}(\emptyset, \emptyset)$  et sa compactification n'étant traités qu'à partir de la section 1.6.

### 1.3 Orientation des espaces de modules

Les espaces  $\mathcal{M}(c, \emptyset)$  sont orientables, et un choix d'orientations oriente naturellement les espaces  $\mathcal{M}(b, a)$ . On détaille ce procédé dans le paragraphe suivant.

Les variétés  $\mathcal{M}(c, \emptyset)$  sont contractiles, donc orientables, et l'orientation d'un espace tangent  $T_\gamma \mathcal{M}(c, \emptyset)$  en un point  $\gamma$  suffit à spécifier l'orientation choisie. Fixer une orientation sur l'espace  $\mathcal{M}(c, \emptyset)$  est donc équivalent à fixer orientation sur l'espace tangent  $T_c W^u(c)$  au vu de l'isomorphisme

$$T_c W^u(c) \simeq T_{\gamma_-^c} \mathcal{M}(c, \emptyset),$$

où l'on note  $\gamma_\pm^c \in C^\infty(\mathbb{R}_\pm, M)$  les trajectoires semi-infinies constantes égales à  $c$ . Cela induit ensuite une co-orientation<sup>1</sup> de  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c) \rightarrow M$ , au vu de l'isomorphisme

$$T_{\gamma_-^c} \mathcal{M}(c, \emptyset) \oplus T_{\gamma_+^c} \mathcal{M}(\emptyset, c) \simeq T_c W^s(c) \oplus T_c W^u(c) = T_c M.$$

L'orientation de  $\mathcal{M}(b, a)$  se construit en deux étapes. Premièrement, on peut orienter l'espace de modules  $\mathcal{M}_\bullet(b, a) \simeq W^u(b) \cap W^s(a)$  en utilisant le fait général qu'une intersection transverse entre une sous-variété orientée et une sous-variété co-orientée est elle-même naturellement orientée via l'isomorphisme entre fibrés vectoriels

$$\begin{aligned} & \nu(W^s(a), M)|_{W^u(b) \cap W^s(a)} \oplus T(W^u(b) \cap W^s(a)) \\ & \simeq \nu(W^u(b) \cap W^s(a), W^s(a)) \oplus T(W^u(b) \cap W^s(a)) \\ & \simeq TW^u(b)|_{W^u(b) \cap W^s(a)}. \end{aligned}$$

Deuxièmement, la description de l'espace tangent d'une variété quotient et la transversalité entre  $W^u(b)$  et  $W^s(a)$  fournissent un isomorphisme

$$T_{[x]}((W^u(b) \cap W^s(a)) / \mathbb{R}) \simeq (T_x W^u(b) \cap T_x W^s(a)) / T_x(\mathbb{R} \cdot x)$$

---

1. Une co-orientation d'un plongement  $F : U \rightarrow V$  est une orientation du fibré normal de  $F(U)$  dans  $V$ ,  $\nu(F(U), V)$ .

où  $\mathbb{R} \cdot x$  est l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\mathbb{R}$ , i.e. l'image de la trajectoire  $\gamma = \phi^\bullet(x)$ , ce qui permet l'identification  $T_x(\mathbb{R} \cdot x) = \mathbb{R} \cdot X_x$ . Finalement, on oriente  $\mathcal{M}(b, a)$  avec l'isomorphisme

$$\mathbb{R} \cdot X_x \oplus T_\gamma \mathcal{M}(b, a) \simeq T_\gamma \mathcal{M}_\bullet(b, a),$$

où  $\mathbb{R} \cdot X_x$  est orienté en décrétant que  $X_x$  en est une base directe.

On fixe dans la suite de ce chapitre des orientations des espaces  $\mathcal{M}(c, \emptyset)$ .

## 1.4 Compactification des espaces de modules

Le point remarquable à propos des espaces de modules est qu'il est possible de les compactifier en les imbriquant les uns aux autres, et que ces compactifications sont en plus dotées d'une structure de variété à faces respectant ces différentes inclusions. On commence par rappeler brièvement les définitions et les résultats qui nous seront utiles sur les variétés à coins et à faces, notamment ceux sur les produits fibrés au-dessus de variétés lisses, avant de décrire la compactification en elle-même. Les preuves de ces résultats peuvent être trouvées dans l'annexe A.

### Aparté sur les variétés à coins et à faces

Une variété à coins  $P$  de dimension  $n$  se définit comme une variété lisse à cela près qu'on remplace dans les définitions « ouverts de  $\mathbb{R}^n$  » par

$$\ll \text{ouverts de } \mathbb{R}_k^n := \mathbb{R}^{n-k} \times [0, +\infty[^k, 0 \leq k \leq n \gg.$$

La profondeur  $d(x)$  d'un point  $x \in P$  est le nombre de coordonnées nulles de  $\varphi(x)$  pour une carte  $\varphi$ , et la  $k$ -strate  $\partial^k P$  est l'ensemble des points de profondeur  $k$ . Une face est l'adhérence d'une composante de la 1-strate, et une variété à coins est dite à faces si tout point  $x \in P$  appartient à exactement  $d(x)$  faces. Si  $F : P \rightarrow M$  est une fonction définie sur une variété à coins, on note  $\partial^k F = F|_{\partial^k P}$  sa restriction à la  $k$ -strate de  $P$ .

Là où les variétés à bord ne sont pas stables par produits, les variétés à coins admettent même des produits fibrés au-dessus de variétés lisses, lorsque les applications vérifient la condition de transversalité suivante.

**Définition 1.6.** Soient  $P^n$  et  $Q^m$  des variétés à coins,  $N$  une variété lisse,  $F : P \rightarrow M$  et  $G : Q \rightarrow M$  deux applications lisses. On dit que  $F$  est transverse à  $G$ , et on note  $F \pitchfork G$ , si

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \forall j \in \{0, m\}, \partial^i F \pitchfork \partial^j G.$$

**Proposition 1.3.** Soient  $P, Q$  des variétés à coins (resp. à faces),  $N$  une variété lisse,  $F : P \rightarrow N$  et  $G : Q \rightarrow N$ . Si  $F \pitchfork G$ , alors

$$P \times_{F,N,G} Q = \{(x, y) \in P \times Q ; F(x) = G(y)\}$$

est une sous-variété à coins (resp. à faces) de  $P \times Q$  de codimension  $\dim M$ , vérifiant

$$\partial^k \left( P \times_{F,N,G} Q \right) = \bigcup_{i+j=k} \left( \partial^i P \times_{\partial^i F, N, \partial^j G} \partial^j Q \right).$$

On a précisé la notion de variété à faces, car elle est celle qui permet de généraliser la notion d'application collier d'une variété à bord (i.e. la donnée d'un plongement  $G : \partial M \times [0, \eta[ \rightarrow M$  vérifiant que  $G|_{\partial M \times \{0\}}$  est l'inclusion) tout en tenant compte de la combinatoire des différentes strates.

**Définition 1.7.** Soit  $P$  une variété à faces, de faces  $F_i, i \in \mathfrak{J}$ . Pour  $I \subset \mathfrak{J}$ , on note  $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$ . Un jeu d'applications colliers sur  $P$  est la donnée de plongements<sup>2</sup>

$$G_I : \mathring{F}_I \times [0, \eta[^I \rightarrow P$$

pour chaque  $I \subset \mathfrak{J}$ , vérifiant les conditions suivantes :

1.  $G_I(x, (0)_{i \in I}) = x$ ,
2. Si  $J \subset I$  et si  $(\lambda_i)_{i \in I} \in [0, \eta[^I$  est tel que  $\lambda_i = 0$  si et seulement si  $i \in J$ , alors  $G_I(x, (\lambda_i)_{i \in I}) \in \mathring{F}_J$ .

Le second point de la définition précédente laisse espérer une compatibilité entre applications colliers associées à deux jeux d'indices  $J \subset I$ . La proposition suivante réalise un telle compatibilité :

**Proposition 1.4** (L. Qin [24]). Soit  $P$  une variété à faces. Il existe un jeu d'applications colliers sur  $P$  vérifiant les conditions de compatibilité suivantes : si  $J \subset I$  et si  $(\lambda_i)_{i \in I} \in [0, \eta[^I$  est tel que  $\lambda_i > 0$  lorsque  $i \notin J$ , alors

$$G_I(x, (\lambda_i)_{i \in I}) = G_J(G_I(x, (\tilde{\lambda}_i)_{i \in I}), (\lambda_j)_{j \in J}), \text{ où } \tilde{\lambda}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in J \\ \lambda_i & \text{sinon} \end{cases}.$$

---

2. Les intersections de faces d'une variété à faces sont elles-mêmes des variétés à faces, et on note ici  $\mathring{F}_I = \partial^0 F_I$ .

## Description de la compactification

**Définition 1.8.** Soit  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ . On définit les relations<sup>3</sup>  $>$  et  $\geq$  par :

1. «  $b \geq a$  » = «  $\mathcal{M}(b, a) \neq \emptyset$  »,
2. «  $b > a$  » = «  $b \geq a \wedge b \neq a$  ».

On convient que les assertions  $b \geq \emptyset, b > \emptyset, \emptyset \geq a$  et  $\emptyset > a$  sont vraies.

**Définition 1.9.** Une suite critique  $I$  est un  $(k + 2)$ -uplet

$$I = (r, c_1, \dots, c_k, q) \in (\text{Crit}(f) \cup \{\emptyset\}) \times \text{Crit}(f)^k \times (\text{Crit}(f) \cup \{\emptyset\}),$$

$k \in \mathbb{N}$ , tel que

- $r > c_0$ ,
- $\forall i \in \{1, \dots, k-1\}, c_i > c_{i+1}$ ,
- $c_k > q$ .

Si  $I = (r, \dots, q)$  est une suite critique de  $f$ , on note  $|I| = k$ , et

$$\mathcal{M}_I = \mathcal{M}(r, c_1) \times \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{M}(c_i, c_{i+1}) \times \mathcal{M}(c_k, q).$$

On note finalement

$$\overline{\mathcal{M}}(r, q) = \bigsqcup_I \mathcal{M}_I,$$

où l'union est prise sur toutes les suites critiques  $I = (r, c_1, \dots, c_k, q)$ . La figure 1.3 présente deux trajectoires de ces espaces, toujours pour la fonction hauteur sur la sphère tordue.

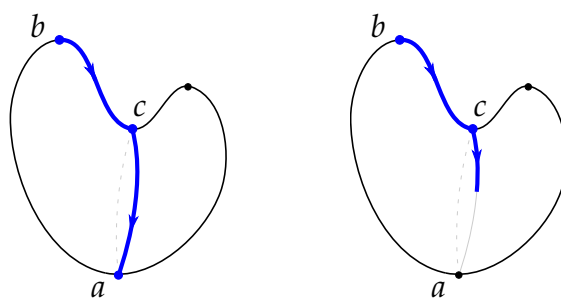


FIGURE 1.3 – Une trajectoire de  $\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  et une trajectoire  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$ .

Le résultat suivant décrit en quel sens  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$  est une « bonne » compactification de  $\mathcal{M}(r, q)$  :

3. Ce ne sont pas des relations d'ordre.

**Théorème 1.3** (F. Latour [14], L. Qin [23]). *Les ensembles  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$  peuvent être munis de structures de variétés compactes à faces vérifiant les points suivants :*

1. *La  $k$ -strate de  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$  est donnée par  $\partial^k \overline{\mathcal{M}}(r, q) = \bigsqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I$ ,*
2. *Pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ , les applications  $\overline{\mathcal{M}}(r, c) \times \overline{\mathcal{M}}(c, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q)$  sont des plongements,*
3. *L'évaluation  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(r, q) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_+(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_k(+)$  est lisse,*
4. *L'évaluation  $\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(r, q) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_-(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_0(-)$  est lisse,*
5. *En tant que variétés orientées,*
  - (a)  $\forall (a, b) \in \text{Crit}(f)^2, \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, a) = \bigsqcup_c (-1)^{\text{ind}(b) - \text{ind}(c)} \mathcal{M}(b, c) \times \mathcal{M}(c, a)$ ,
  - (b)  $\forall b \in \text{Crit}(f), \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) = \bigsqcup_c \mathcal{M}(b, c) \times \mathcal{M}(c, \emptyset)$ ,

*où l'orientation à gauche est l'orientation induite sur le bord et l'orientation à droite est l'orientation produit.*

*Démonstration.* On détaille comment munir les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  d'une structure de variétés à faces vérifiant les points du théorème, la manière de procéder pour les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  et  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, a)$  étant analogue. On peut supposer pour simplifier la rédaction que la fonction de Morse est étagée, i.e. la fonction  $c \in \text{Crit}(f) \mapsto f(c) \in \mathbb{R}$  est injective. On regarde les niveaux réguliers autour de chaque point critique, i.e. les

$$M_i^\pm = f^{-1}(f(c_i) \pm \varepsilon), \text{ avec } b := c_0 > \dots > c_i > \dots > c_k =: a,$$

où  $\varepsilon$  est choisi suffisamment petit. On note  $S_i^u = W^u(c_i) \cap M_i^-$ ,  $S_i^s = W^s(c_i) \cap M_i^+$ , les sphères instables et stables de  $c_i$ , et on considère les espaces de trajectoires de la forme :

1.  $\mathcal{M}(c_i, M_i^-) = \{\gamma \in \mathcal{M}(c_i, \emptyset) ; \gamma(+) \in M_i^-\} \simeq S_i^u$ ,
2.  $\mathcal{M}(M_i^+, c_i) = \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, c_i) ; \gamma(-) \in M_i^+\} \simeq S_i^s$ ,
3.  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) = U_i \cup B_i$ , avec

$$U_i = \left\{ \gamma \in C^\infty([0, L], M) ; L > 0, \begin{array}{l} \gamma(-) \in M_i^+ \\ \gamma(+) \in M_i^- \end{array}, \gamma' = X \circ \gamma \right\}$$

et

$$B_i = \mathcal{M}(M_i^+, c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M_i^-),$$

4.  $\mathcal{M}(M_i^-, M_{i-1}^+) = \left\{ \gamma \in C^\infty([0, L], M) ; L > 0, \begin{array}{l} \gamma(-) \in M_i^- \\ \gamma(+) \in M_{i-1}^+ \end{array}, \gamma' = X \circ \gamma \right\}$ .

On peut montrer (voir par exemple les lemmes préparatoires de la section 5 de [23]) que les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-)$  sont des variétés à bord<sup>4</sup>, de bord

$$\partial\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) = B_i = \mathcal{M}(M_i^+, c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M_i^-),$$

et que les espaces  $\mathcal{M}(M_i^-, M_{i-1}^+)$  sont des variétés lisses, qui sont difféomorphes au graphe de l'application  $M_i^- \rightarrow M_{i-1}^+$  induite par le flot. De même, on peut montrer que les applications d'évaluations sont des difféomorphismes une fois restreintes aux points intérieurs des différents espaces, i.e. les applications

- $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) \setminus \partial\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) \rightarrow M_i^- \setminus S_i^u,$
- $\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) \setminus \partial\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-) \rightarrow M_i^+ \setminus S_i^s,$
- $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(M_i^-, M_{i-1}^+) \rightarrow M_i^-$  et
- $\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(M_i^-, M_{i-1}^+) \rightarrow M_{i-1}^+$

sont des difféomorphismes. Ensuite, comme  $\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  s'identifie au produit fibré<sup>5</sup>

$$\mathcal{M}(b, M_0^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_0^-, M_1^+) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \overline{\mathcal{M}}(M_1^+, M_1^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \cdots \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_{k-1}^-, M_k^+) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_k^+, a),$$

il suffit d'établir la transversalité entre les différentes évaluations pour obtenir la structure voulue. Pour la 0-strate, i.e. l'intérieur, comme toutes les flèches  $\text{Ev}_-$  sont des difféomorphismes, sauf potentiellement  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(M_k^+, a) \rightarrow M_k^+$ , elles seront transverses si et seulement si

$$\left( \widetilde{\text{Ev}}_+ : \mathcal{M}(b, M_0^-) \rightarrow M_k^+ \right) \pitchfork \left( \text{Ev}_- : \mathcal{M}(M_k^+, a) \rightarrow M_k^+ \right),$$

où l'on a noté

$$\widetilde{\text{Ev}}_+ = \underbrace{\text{Ev}_-^{-1} \circ \text{Ev}_+ \circ \cdots \circ \text{Ev}_-^{-1} \circ \text{Ev}_+}_{k+1 \text{ fois}}.$$

Cette condition équivaut à la transversalité entre les traces de  $W^u(b)$  et  $W^s(a)$  dans le niveau  $M_k^+$ , autrement dit à la propriété de Morse-Smale pour les points critiques  $b$  et  $a$ . Pour la  $j$ -strate, on obtient des produit fibrés de la forme

$$\underbrace{\mathcal{M}(b, M_0^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_0^-, M_1^+) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_1^+, c_1) \times \mathcal{M}(c_1, M_1^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \cdots \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_k^+, a)}_{\Pi_1} \cdots$$

4. Donc à faces.

5. Les produits fibrés se font toujours entre deux applications  $\text{Ev}_+$  et  $\text{Ev}_-$ , mais le but commun à ces couples d'applications n'est plus  $M$  mais seulement un niveau  $M_i^\pm$ . On garde quand même la notation  $\underset{\text{Ev}}{\boxtimes}$  pour plus de concision.



où  $j$  facteurs  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M_i^-)$  sont remplacés par  $\mathcal{M}(M_i^+, c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M_i^-)$ . Ce produit fibré s'exprime donc comme le produit de  $j$  produits fibrés  $\Pi_1, \dots, \Pi_j$  de la forme préalablement étudiée, et la propriété de Morse-Smale pour tous les couples de points critiques extrémaux qui y apparaissent permet de conclure. Les quatre premiers points de l'énoncé découlent directement de cette description, et on renvoie à la preuve du théorème 3.6 de [23] pour le cinquième point.  $\square$

**Remarque 1.2.** 1. Cette preuve fait apparaître des produits fibrés de variétés à coins au-dessus de variétés lisses, et des trajectoires de longueurs finies, même si les espaces de modules rencontrés jusqu'ici ne sont composés que de trajectoires de longueurs infinies ou semi-infinies.

2. Les applications  $\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow W^u(b)$  et  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow W^s(a)$  sont des difféomorphismes, mais les applications  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \rightarrow \overline{W^u(b)}$  et  $\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, a) \rightarrow \overline{W^s(a)}$  sont en général seulement surjectives.

## Propriétés additionnelles des jeux d'applications colliers

On peut chercher à refléter la nature combinatoire et géométrique des espaces de modules compactifiés dans les jeux d'applications colliers, jusque-là définis pour une variété à faces quelconque. Premièrement, si l'on note  $c_i, i \in I$ , les points critiques de  $f$ , et

$$F_i = \overline{\mathcal{M}(r, c_i) \times \mathcal{M}(c_i, q)} = \overline{\mathcal{M}(r, c_i)} \times \overline{\mathcal{M}(c_i, q)}$$

les faces de  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$ , alors en identifiant une suite critique  $I = (r, c_{i_1}, \dots, c_{i_k}, q)$  avec l'ensemble d'indices  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ , on obtient que

$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i = \prod_{i=0}^k \overline{\mathcal{M}(c_i, c_{i+1})} \text{ et } \mathring{F}_I = \prod_{i=0}^k \mathcal{M}(c_i, c_{i+1}) = \mathcal{M}_I.$$

Les applications colliers associées à  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$  seront donc de la forme

$$G_I : \mathcal{M}_I \times [0, \eta]^I \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q),$$

et on souhaite alors établir une compatibilité entre les applications colliers et les plongements  $\overline{\mathcal{M}}(r, c) \times \overline{\mathcal{M}}(c, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q)$ . Deuxièmement, une trajectoire est dans la face  $F_i$  si et seulement si elle se brise sur le point critique  $c_i$ , i.e. si et seulement si elle passe une infinité de temps dans la carte de Morse fixée de  $c_i$ . On souhaite alors relier le temps passé par la trajectoire dans la carte de Morse des points critiques aux paramètres de  $[0, \eta]^I$  des applications colliers. La proposition suivante assure que l'on peut garantir de telles propriétés :

**Proposition 1.5** (L. Qin [24], K. Wehrheim [28]). *Il existe des jeux d'applications colliers*

$$\left( G_I : \mathcal{M}_I \times [0, \eta]^I \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q) \right)_{I \subset \mathcal{J}}$$

qui vérifient à la fois les conditions de compatibilité de la proposition 1.4 et les conditions suivantes :

1. Pour toutes suites critiques  $I_1 = (r, c_1, \dots, c_{l-1}, c_l)$  et  $I_2 = (c_l, c_{l+1}, \dots, q)$ , si l'on note  $I$  la suite critique  $(r, \dots, c_l, \dots, q)$ , alors on a que pour tout  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{M}_{I_1} \times \mathcal{M}_{I_2}$  et pour tout  $((\lambda_i)_{i \in I_1}, (\lambda_i)_{i \in I_2}) \in [0, \eta]^{I_1} \times [0, \eta]^{I_2}$ ,

$$G_I((\gamma_1, \gamma_2), ((\lambda_i)_{i \in I_1}, 0, (\lambda_i)_{i \in I_2})) = (G_{I_1}(\gamma_1, (\lambda_i)_{i \in I_1}), G_{I_2}(\gamma_2, (\lambda_i)_{i \in I_2})),$$

2. La trajectoire  $G_I(x, (\lambda_i)_{i \in I})$  passe un temps<sup>6</sup>  $t_i = -\ln(\lambda_i)$  dans la carte de Morse fixée de  $c_i$ .

De telles applications sont dites applications colliers associatives géométriques, ou collages.

La notation classique

$$G_I : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_I \times [0, \eta]^I & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}(r, q) \\ ((\gamma_0, \dots, \gamma_k), (\lambda_1, \dots, \lambda_k)) & \longmapsto & \gamma_0 \#_{\lambda_1} \gamma_1 \#_{\lambda_2} \dots \#_{\lambda_k} \gamma_k \end{array}$$

permet de présenter de manière plus compacte les conditions de compatibilité que vérifient les collages. On obtient par exemple les égalités

$$(\gamma_0 \#_{\lambda_1} \gamma_1) \#_{\lambda_2} \gamma_2 = \gamma_0 \#_{\lambda_1} (\gamma_1 \#_{\lambda_2} \gamma_2) = \gamma_0 \#_{\lambda_1} \gamma_1 \#_{\lambda_2} \gamma_2,$$

où l'on fait la remarque que la seconde égalité n'est pas une définition, contrairement aux cas plus communs d'associativité.

## 1.5 Topologie et espaces de modules

Soit  $b \in \text{Crit}(f)$ . Les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  sont contractiles car toute trajectoire brisée ou non se rétracte sur la trajectoire constante  $\gamma_-^b \in \mathcal{M}(b, \emptyset)$ , mais on a plus précisément que :

**Théorème 1.4** (F. Latour [14]). *L'espace  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  est homéomorphe à  $\mathbb{B}^{\text{ind}(b)}$ .*

La compactification  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  de la boule ouverte  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  résulte donc en une boule fermée. Le résultat fondamental reliant la théorie de Morse à la topologie de la variété est le suivant.

6. Avec la convention  $-\ln(0) = +\infty$ .

**Théorème 1.5** (F. Latour [14]). *Les applications  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \rightarrow M$  sont les applications d'attachement d'une structure de CW-complexe sur  $M$ .*

Comme le groupe fondamental d'un CW-complexe dépend uniquement de ses 1-cellules et de ses 2-cellules, on en déduit le principe :

**Principe 1.1.** *Il existe une présentation de  $\pi_1(M ; \star)$  dont les générateurs dépendent des espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  avec  $\text{ind}(b) = 1$  et les relations dépendent des espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$  avec  $\text{ind}(c) = 2$ .*

On détaille dans le chapitre 2 la présentation évoquée ci-dessus. L'objectif du chapitre 4 sera de généraliser cette présentation au cadre Morse stable, où la première difficulté sera que la variété n'est plus compacte (ce sera l'espace total d'un fibré vectoriel trivial  $E \rightarrow M$ ) et que le théorème 1.5 n'est alors plus vérifié.

## 1.6 Espaces de modules sans conditions

On considère l'espace de trajectoires de gradient de longueurs finies strictement positives

$$\mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) = \{\gamma \in C^\infty([0, L], M) ; L > 0, \gamma' = X \circ \gamma\}.$$

C'est une variété de dimension  $n + 1$ , difféomorphe à  $M \times \mathbb{R}_+^*$  via

$$\begin{aligned} M \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \\ (x, L) &\longmapsto \varphi^\bullet(x)|_{[0, L]} \end{aligned}$$

Cet espace va se compactifier de la même manière que les espaces de modules précédents, i.e. via l'ajout des trajectoires brisées, à ceci près que sa 1-strate comportera une composante de plus correspondant aux trajectoires de longueur nulle. Plus précisément, on note

$$\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) = \left( \bigsqcup_I \mathcal{M}_I \right) \sqcup \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\},$$

où l'union est prise sur toutes les suites critiques<sup>7</sup>  $I = (\emptyset, c_1, \dots, c_k, \emptyset)$ . L'ensemble de droite dans l'union disjointe est canoniquement difféomorphe à  $M$ , où l'on voit les points comme des trajectoires de gradient sur l'intervalle  $\{0\}$ .

**Théorème 1.6** (L. Qin [23], K. Wehrheim [28]). *L'ensemble  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)$  peut être muni d'une structure de variété à faces vérifiant les points suivants :*

7. On autorise à présent  $(c_0, c_{k+1}) = (\emptyset, \emptyset)$  dans la définition d'une suite critique, en décrétant les assertions  $\emptyset \geq \emptyset$  et  $\emptyset > \emptyset$  comme vraies.

1.  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)$  est une variété compacte à faces dont la  $k$ -strate est donnée par

$$\partial^k \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) = \begin{cases} \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \sqcup \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} & \text{si } k = 1 \\ \sqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I & \text{sinon} \end{cases} ,$$

2. Les applications  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, c) \times \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)$  sont des plongements,

3. L'évaluation  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_+(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_k(+)$  est lisse,

4. L'évaluation  $\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_-(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_0(-)$  est lisse,

5. On note  $\gamma_L^c \in C^\infty([0, L], M)$  la trajectoire constante égale  $c$  de longueur  $L$  et  $\gamma_\pm^c \in C^\infty(\mathbb{R}_\pm, M)$  les trajectoires semi-infinies constantes égales à  $c$ . Alors :

$$\gamma_L^c \xrightarrow{L \rightarrow +\infty} (\gamma_+^c, \gamma_-^c) \in \mathcal{M}(\emptyset, c) \times \mathcal{M}(c, \emptyset).$$

*Démonstration.* On reprend l'ensemble des notations de la preuve du théorème 1.3, et on définit à présent les ensembles

$$M(i) = f^{-1}(\llbracket f(c_{i+1}), f(c_{i-1}) \rrbracket),$$

$W_i^u = W^u(c_i) \cap M(i)$  puis  $W_i^s = W^s(c_i) \cap M(i)$  ainsi que les espaces de trajectoires

1.  $\mathcal{M}(c_i, M(i)) = \{\gamma \in \mathcal{M}(c_i, \emptyset) ; \gamma(+) \in M(i)\} \simeq W_i^u,$
2.  $\mathcal{M}(M(i), c_i) = \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, c_i) ; \gamma(-) \in M(i)\} \simeq W_i^s,$
3.  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) = U_i \cup B_i,$  avec

$$U_i = \{(x^+, x) \in M_i^+ \times M(i) ; \exists t \in ]-\infty, +\infty[ \text{ tq } x = \varphi^t(x^+)\}$$

et

$$B_i = \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M(i)) \simeq S_i^s \times W_i^u,$$

4.  $\overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) = U_i' \cup B_i',$  avec

$$U_i' = \{(x, x^-) \in M(i) \times M_i^- ; \exists t \in ]-\infty, +\infty[ \text{ tq } x = \varphi^t(x^-)\}$$

et

$$B_i' = \mathcal{M}(M(i), c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M_i^-) \simeq W_i^s \times S_i^u,$$

5.  $\overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i)) = U_i'' \cup B_i'' \cup C_i$ , avec

$$U_i'' = \left\{ \gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) ; \begin{array}{l} \gamma(-) \in M(i) \\ \gamma(+) \in M(i) \end{array} \right\},$$

$$B_i'' = \mathcal{M}(M(i), c_i) \times \mathcal{M}(c_i, M(i))$$

et

$$C_i = \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma(\pm) \in M(i)\} \simeq M(i).$$

**Lemme 1.2.** *Les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i))$ ,  $\overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-)$  et  $\overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i))$  sont des variétés à bord, de bord respectifs  $B_i$ ,  $B_i'$  et  $B_i'' \cup C_i$ . Les applications*

$$\text{Ev}_- : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) \setminus \partial \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) & \longrightarrow & M(i) \setminus W_i^u \\ (x^+, x) & \longmapsto & x \end{array}$$

et

$$\text{Ev}_+ : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) \setminus \partial \overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) & \longrightarrow & M(i) \setminus W_i^s \\ (x, x^-) & \longmapsto & x \end{array}$$

sont des difféomorphismes, et les applications

$$\text{Ev}_\pm : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i)) \setminus \partial \overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i)) & \longrightarrow & M(i) \\ \gamma & \longmapsto & \gamma(\pm) \end{array}$$

sont des submersions.

*Démonstration du lemme 1.2.* Le fait que les intérieurs de ces espaces soient des variétés est clair, en considérant par exemple pour  $\overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i))$  le difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M(i) \setminus W_i^u & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) \setminus \partial \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) \\ x & \longmapsto & (\varphi^{t_x}(x), x) \end{array},$$

où  $x \mapsto t_x$  est la fonction donnée implicitement par  $f(\varphi^{t_x}(x)) = f(c_i + \varepsilon)$ . Il reste alors à paramétrer un voisinage du bord de ces espaces par un plongement défini sur une variété à bord. On se place dans une carte de Morse  $V_i \subset \mathbb{B}_\varepsilon^{\text{ind}(c_i)} \times \mathbb{B}_\varepsilon^{n-\text{ind}(c_i)}$ , où l'on identifie  $W_i^u \simeq \mathbb{B}_\varepsilon^{\text{ind}(c_i)} \times \{0\}^{n-\text{ind}(c_i)}$ ,  $S_i^u \simeq S_\varepsilon^{\text{ind}(c_i)} \times \{0\}^{n-\text{ind}(c_i)}$ ,  $W_i^s \simeq \{0\}^{\text{ind}(c_i)} \times \mathbb{B}_\varepsilon^{n-\text{ind}(c_i)}$  et  $S_i^s \simeq \{0\}^{\text{ind}(c_i)} \times S_\varepsilon^{n-\text{ind}(c_i)}$ . Alors les applications

$$Q_i^+ : \begin{array}{ccc} [0, \eta] \times S_i^s \times W_i^u & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}(M_i^+, M(i)) \\ (t, y, x) & \longmapsto & \left( tx, (t^2 \|x\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} y, x, t(t^2 \|x\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}} y \right) \end{array}$$

et

$$Q_i^- : \begin{array}{ccc} [0, \eta] \times W_i^s \times S_i^u & \longrightarrow & \overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) \\ (t, y, x) & \longmapsto & \left( t(t^2\|x\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}x, y, (t^2\|x\|^2 + 1)^{\frac{1}{2}}x, ty \right) \end{array}$$

sont des plongements. La preuve de cette affirmation est l'objet du lemme 5.2 de L. Qin [23].

Pour le troisième espace  $\overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i))$ , on considère en se plaçant à nouveau dans une carte de Morse le plongement

$$Q_i : \begin{array}{ccc} [0, 1] \times W_i^s \times W_i^u & \longrightarrow & \mathbb{R} \times M(i) \times M(i) \\ (t, y, x) & \longmapsto & (t, tx, y, x, ty) \end{array}$$

dont l'image s'identifie à celle de l'injection

$$I_i : \begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i)) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times M(i) \times M(i) \\ \gamma & \longmapsto & (e^{-L(\gamma)}, \gamma(-), \gamma(+)) \end{array}$$

où

$$L(\gamma) = \begin{cases} L & \text{si } \gamma \in C^\infty([0, L], M) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Remarquons que la composante de bord  $\{0\} \times W_i^s \times W_i^u$  est envoyée sur  $B_i''$  tandis que la composante de bord  $\{1\} \times W_i^s \times W_i^u$  est envoyée sur  $C_i$ .

On voit à travers ces différentes paramétrisations que les évaluations vérifient les propriétés de l'énoncé, montrant ainsi le lemme 1.2.  $\square$

On définit ensuite

$$\mathcal{M}(i, j) := (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M \times M)^{-1}(M(i) \times M(j)),$$

$0 \leq i \leq j \leq k$ , que l'on identifie aux produits fibrés suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(i, j) &= \overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i)) && \text{si } i = j, \\ \mathcal{M}(i, j) &= \overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_i^-, M_{i+1}^+) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \overline{\mathcal{M}}(M_{i+1}^+, M_{i+1}^-) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \cdots \\ &\cdots \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(M_{j-1}^-, M_j^+) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \overline{\mathcal{M}}(M_j^+, M(j)) && \text{si } i < j. \end{aligned}$$

Ces produits fibrés sont des variétés, ce qui est garanti à la manière de la preuve du théorème 1.3 par la propriété de Morse-Smale. Remarquons que

$$\mathcal{M}(i, j) \cap \mathcal{M}(i', j') \neq \emptyset \iff |i' - i| \leq 1 \wedge |j' - j| \leq 1.$$

Dans ce cas, il faut vérifier que les structures différentielles induites par les identifications précédentes coïncident. On montre que c'est le cas pour des couples

de la forme  $(i, j) = (i, i)$  et  $(i', j') = (i, i + 1)$ , les autres cas se traitant de manière similaire. L'espace

$$\mathcal{M}(i, i) \cap \mathcal{M}(i, i + 1)$$

s'identifie soit à un sous-espace

$$\mathcal{M}(i, i ; i, i + 1) \subset \overline{\mathcal{M}}(M(i), M(i))$$

lorsqu'il est vu comme un sous-espace de  $\mathcal{M}(i, i)$ , soit à un sous-espace

$$\mathcal{M}(i, i + 1 ; i, i) \subset \overline{\mathcal{M}}(M(i), M_i^-) \boxtimes_{\text{Ev}} \overline{\mathcal{M}}(M_{i+1}^+, M(i + 1))$$

lorsqu'il est vu comme un sous-espace de  $\mathcal{M}(i, i + 1)$ . En notant

$$M^+(j) = f^{-1}([f(c_j), f(c_{j-1})]) \text{ et } M^-(j) = f^{-1}([f(c_{j+1}), f(c_j)]),$$

on a que

$$I_i(\mathcal{M}(i, i ; i, i + 1)) \subset \mathbb{R} \times M(i) \times M^-(i)$$

et

$$\mathcal{M}(i, i + 1 ; i, i) \subset M(i) \times M_i^- \times M_{i+1}^+ \times M^+(i + 1).$$

On définit alors

$$\tilde{\zeta} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M(i) \times M^-(i) & \longrightarrow & M(i) \times M_i^- \times M_{i+1}^+ \times M^+(i + 1) \\ (\tau, x, y) & \longmapsto & (x, \psi_i^-(y), \psi_{i+1}^+(y), y) \end{array} ,$$

où  $\psi_i^-$  est l'application de  $M^-(i)$  dans  $M_i^-$  induite par le flot et  $\psi_{i+1}^+$  celle de  $M^-(i)$  dans  $M_{i+1}^+$  (voir [5]), et

$$\zeta : \begin{array}{ccc} M(i) \times M_i^- \times M_{i+1}^+ \times M^+(i + 1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \times M(i) \times M^-(i) \\ (x, x^-, y^+, y) & \longmapsto & (e^{-L(x, y)}, x, y) \end{array} ,$$

où  $L(x, y) = \sup\{l \in \mathbb{R} ; f(\varphi^{-l}(y)) < f(x)\}$  est une extension de la fonction  $L$  précédemment introduite au sens où  $L(\gamma(-), \gamma(+)) = L(\gamma)$ . L'application

$$\begin{array}{ccc} M(i) \times M^+(i + 1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & e^{-L(x, y)} \end{array}$$

est lisse, donc les applications  $\tilde{\zeta}$  et  $\zeta$  sont lisses et vérifient

$$(\tilde{\zeta} \circ \zeta)|_{\mathcal{M}(i, i ; i, i + 1)} = \text{id} \text{ et } (\zeta \circ \tilde{\zeta})|_{\mathcal{M}(i, i + 1 ; i, i)} = \text{id},$$

ce qui montre finalement la compatibilité entre les deux structures différentielles sur  $\mathcal{M}(i, i) \cap \mathcal{M}(i, i + 1)$ .  $\square$

## 1.7 Espaces de modules avec un point marqué

On note

$$\mathcal{M}_\bullet(r, q) = \mathcal{M}(r, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(\emptyset, q).$$

On va montrer que ces espaces sont des variétés, qui admettent les compactifications

$$\overline{\mathcal{M}}_\bullet(r, q) = \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$$

qui en font comme pour les espaces de modules précédents des variétés compactes à faces.

**Proposition 1.6.** *Soit  $(f, g)$  un couple vérifiant la propriété de Morse-Smale. Les espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}_\bullet(r, q)$  sont des variétés compactes à faces.*

*Démonstration.* La compacité découle de celle des espaces  $\overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset)$  et  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$  et de la continuité des application d'évaluation. Le fait que ces espaces soient des variétés à faces découle de la transversalité des applications

$$\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \rightarrow M \text{ et } \text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q) \rightarrow M.$$

Montrons qu'elle est en effet réalisée.

1. Si  $(r, q) = (b, a) \in \text{Crit}(f)^2$  : la transversalité entre

$$\partial^i \text{Ev}_+ : \underbrace{\mathcal{M}(b, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_i, \emptyset)}_{\subset \sqcup_{|I|=i} \mathcal{M}_I} \rightarrow M$$

et

$$\partial^j \text{Ev}_- : \underbrace{\mathcal{M}(\emptyset, c_{i+1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i+j}, c_{i+j+1})}_{\subset \sqcup_{|J|=j} \mathcal{M}_J} \rightarrow M$$

revient à la transversalité entre les applications  $\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(c_i, \emptyset) \rightarrow M$  et  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c_{i+1}) \rightarrow M$ , i.e. à la propriété de Morse-Smale.

2. Si  $(r, q) = (b, \emptyset), b$  ou  $(r, q) = (\emptyset, a), (a, b \in \text{Crit}(f)^2)$  : les nouveaux cas à examiner sont la transversalité entre

$$\partial^i \text{Ev}_+ : \sqcup_{|I|=i} \mathcal{M}_I \rightarrow M \text{ et } \partial^0 \text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M,$$

et la transversalité entre

$$\partial^i \text{Ev}_+ : \sqcup_{|I|=i} \mathcal{M}_I \rightarrow M \text{ et } \partial^1 \text{Ev}_- : \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} \rightarrow M.$$

Les applications  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M$  et  $\text{Ev}_- : \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} \rightarrow M$  étant des submersions, ces transversalités sont garanties.



3. Si  $(r, q) = (\emptyset, \emptyset)$  : les nouveaux cas à examiner sont la transversalité entre

$$\partial^0 \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M \text{ et } \partial^0 \text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M,$$

celle entre

$$\partial^0 \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M \text{ et } \partial^1 \text{Ev}_- : \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} \rightarrow M,$$

et celle entre

$$\partial^1 \text{Ev}_+ : \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} \rightarrow M$$

et

$$\partial^1 \text{Ev}_- : \{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\} \rightarrow M.$$

Comme chacune de ces applications est une submersion, ces transversalités sont à nouveau garanties automatiquement. □

On a  $\dim \overline{\mathcal{M}}_\bullet(r, q) = \dim \overline{\mathcal{M}}(r, q) + 1$ . Ces espaces sont munis d'une nouvelle application d'évaluation :

**Définition 1.10.** On note  $\text{Ev}_\bullet : \overline{\mathcal{M}}_\bullet(r, q) \rightarrow M$  l'application lisse donnée par

$$\text{Ev}_\bullet = \text{Ev}_+ \circ p_1 \circ i = \text{Ev}_- \circ p_2 \circ i,$$

où

$$i : \overline{\mathcal{M}}_\bullet(r, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$$

est l'inclusion et

$$p_1 : \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \text{ et } p_2 : \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$$

sont les projections canoniques.

**Remarque 1.3.** La structure de produit fibré de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}_\bullet(b, a)$  induit la description de la compactification de  $\mathcal{M}_\bullet(b, a)$  telle qu'établie par L. Qin dans son théorème 3.5 [23] (où  $\overline{\mathcal{M}}_\bullet(b, a)$  et  $\mathcal{M}_\bullet(b, a)$  sont notés respectivement  $\overline{\mathcal{W}}(b, a)$  et  $\mathcal{W}(b, a)$ ). En effet, si l'on appelle suite critique avec un point marqué les  $(k + 3)$ -uplets

$$I_\bullet = (b = c_0, c_1, \dots, c_k, c_{k+1} = a ; s) \in \text{Crit}(f)^{k+2} \times \{0, \dots, k\}$$

tels que

- $\forall i \in \{0, \dots, k\} \setminus \{s\}, c_i > c_{i+1}$ ,

- $c_s \geq c_{s+1}$ ,

et si l'on note

$$\mathcal{M}_{I_\bullet} = \prod_{i=0}^{s-1} \mathcal{M}(c_i, c_{i+1}) \times \mathcal{M}_\bullet(c_s, c_{s+1}) \times \prod_{i=s+1}^k \mathcal{M}(c_i, c_{i+1}),$$

alors la  $k$ -strate de  $\overline{\mathcal{M}_\bullet}(b, a)$  est donnée par

$$\begin{aligned} & \partial^k \overline{\mathcal{M}_\bullet}(b, a) \\ &= \bigcup_{i+j=k} \partial^i \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \partial^j \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, a) \\ &= \bigcup_{i+j=k} \sqcup_{|I|=i} \mathcal{M}_I \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \sqcup_{|J|=j} \mathcal{M}_J \\ &= \bigsqcup_{|I|+|J|=k} \mathcal{M}(b, c_0) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_i, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}(\emptyset, c_{i+1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i+j}, c_{i+j+1}) \\ &= \bigsqcup_{|I|+|J|=k} \mathcal{M}(b, c_0) \times \cdots \times \mathcal{M}_\bullet(c_i, c_{i+1}) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_{i+j}, c_{i+j+1}) \\ &= \bigsqcup_{|I_\bullet|=k} \mathcal{M}_{I_\bullet}, \end{aligned}$$

où l'union est prise sur toutes les suites critiques avec un point marqué de longueur  $k$ .

## 1.8 Espaces de modules hybrides

Soit deux couples  $(f, g)$  et  $(f', g')$  de fonctions de Morse et de métriques adaptées. On notera  $\mathcal{M}_{(f,g)}(r, q)$  ou  $\mathcal{M}_{(f',g')}(r', q')$  pour préciser à quel couple se réfère l'espace de modules considéré.

**Définition 1.11.** On dit du quadruplet  $(f, g, f', g')$  qu'il vérifie la propriété de Morse-Smale hybride si  $(f, g)$  et  $(f', g')$  vérifient la propriété de Morse-Smale, et si tout couple de points critiques  $(b, a') \in \text{Crit}(f) \times \text{Crit}(f')$  vérifie que

$$(\text{Ev}_+ : \mathcal{M}_{(f,g)}(b, \emptyset) \rightarrow M) \pitchfork (\text{Ev}_- : \mathcal{M}_{(f',g')}(\emptyset, a') \rightarrow M).$$

Cette condition équivaut aux intersections transverses  $W_{(f,g)}^u(b) \pitchfork W_{(f,g)}^s(a)$ ,  $W_{(f',g')}^u(b') \pitchfork W_{(f',g')}^s(a')$  et  $W_{(f,g)}^u(b) \pitchfork W_{(f',g')}^s(a')$  pour tout couple de points critiques. La preuve du résultat suivant est reportée à la section 1.9.

**Théorème 1.7.** Soit  $(f, f')$  un couple de fonctions de Morse. L'ensemble des couples de métriques adaptées  $(g, g')$  telles que  $(f, g, f', g')$  vérifie la propriété de Morse-Smale hybride est générique.

Pour  $r \in \text{Crit}(f) \cup \{\emptyset\}$  et  $q' \in \text{Crit}(f') \cup \{\emptyset\}$ , on note

$$\mathcal{M}_{(f,g,f',g')}(r, q') = \mathcal{M}_{(f,g)}(r, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}_{(f',g')}(\emptyset, q')$$

et sa compactification

$$\overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(r, q') = \overline{\mathcal{M}}_{(f,g)}(r, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \overline{\mathcal{M}}_{(f',g')}(\emptyset, q').$$

La figure 1.4 présente une trajectoire élément d'un tel espace de modules, où la variété  $M$  est la sphère  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , le premier couple  $(f, g)$  est donné par la fonction hauteur  $(x, y, z) \mapsto z$  et la métrique induite, et le second couple  $(f', g')$  est donné par la fonction largeur  $(x, y, z) \mapsto y$  et la métrique induite. La partie de la trajectoire qui correspond au premier couple est colorée en bleu, tandis que la partie correspondant au second couple est colorée en rouge.

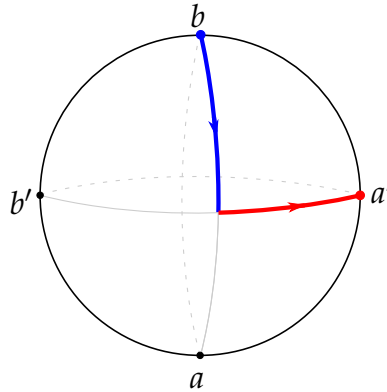


FIGURE 1.4 – Une trajectoire de  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, a')$ .

**Proposition 1.7.** Soit  $(f, g, f', g')$  un quadruplet qui vérifie la propriété de Morse-Smale hybride. Les espaces de modules hybrides sont des variétés compactes à faces.

*Démonstration.* Le seul point nouveau à examiner par rapport à la proposition 1.6 est la transversalité entre

$$\partial^i \text{Ev}_+ : \mathcal{M}_{(f,g)}(b, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}_{(f,g)}(c_i, \emptyset) \rightarrow M$$

et

$$\partial^j \text{Ev}_- : \mathcal{M}_{(f',g')}(\emptyset, c'_{i+1}) \times \cdots \times \mathcal{M}_{(f',g')}(c'_{i+j}, c'_{i+j+1}) \rightarrow M,$$

qui revient à la transversalité entre les applications  $\text{Ev}_+ : \mathcal{M}_{(f,g)}(c_i, \emptyset) \rightarrow M$  et  $\text{Ev}_- : \mathcal{M}_{(f',g')}(\emptyset, c'_{i+1})$  et qui est donc garantie par la propriété de Morse-Smale hybride du quadruplet  $(f, g, f', g')$ .  $\square$

En terme de dimensions, on a

- $\dim \overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(b, a') = \text{ind}(b) - \text{ind}(a')$ ,
- $\dim \overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(b, \emptyset) = \text{ind}(b) + 1$ ,
- $\dim \overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(\emptyset, a') = n - \text{ind}(a') + 1$ ,
- $\dim \overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(\emptyset, \emptyset) = n + 2$ .

## 1.9 Généricité

Les résultats de structure vont tous découler de l'application du lemme de transversalité à paramètres (voir l'annexe B) dans le cadre décrit ensuite. Les détails techniques des constructions présentées sont l'objet de l'annexe A de [25] de M. Schwarz.

On fixe une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , des points critiques  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ , et on note

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b, \emptyset) &= \{\gamma \in W^{1,2}(\text{]} - \infty, 0], M) ; \gamma(-) = b\}, \\ \mathcal{P}(\emptyset, a) &= \{\gamma \in W^{1,2}([0, +\infty[, M) ; \gamma(+) = a\}, \\ \mathcal{P}(\emptyset, \emptyset) &= \{\gamma \in W^{1,2}([0, L], M) ; L > 0\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{P}(b, a) = \left\{ \gamma \in W^{1,2}(\text{]} - \infty, +\infty[, M) ; \begin{array}{l} \gamma(-) = b \\ \gamma(+) = a \end{array} \right\}$$

où les espaces de Sobolev sont définis par rapport à une métrique arbitraire fixée sur  $M$ . Ce sont des variétés Hilbertiennes, dont l'espace tangent en  $\gamma$  s'identifie à  $W^{1,2}(\gamma^*TM)$ . Pour un des espaces  $\mathcal{P}(r, q)$  précédent, on note

$$\mathcal{L}(r, q) = \sqcup_{\gamma \in \mathcal{P}(r, q)} L^2(\gamma^*TM).$$

La projection canonique  $\mathcal{L}(r, q) \rightarrow \mathcal{P}(r, q)$  est un fibré Banachique. En notant  $\mathcal{G}$  l'ensemble des métriques Riemanniennes sur  $M$  et en fixant une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit la famille de sections paramétrée par  $\mathcal{G}$  :

$$F^f : \begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{P}(r, q) & \longrightarrow & \mathcal{L}(r, q) \\ (g, \gamma) & \longmapsto & \gamma' + \text{grad}_g f \circ \gamma \end{array}$$

Le théorème suivant affirme que  $F^f$  vérifie les hypothèses du lemme de transversalité à paramètres.

**Théorème 1.8** (M. Schwarz [25]). *On a :*

1. Pour toute métrique Riemannienne  $g$ , la section  $F_g^f$  est Fredholm.
2. L'application  $F^f : \mathcal{G} \times \mathcal{P}(r, q) \rightarrow \mathcal{L}(r, q)$  est transverse à  $0_{\mathcal{L}(r, q)}$ .
3. Les solutions  $\gamma$  de  $F^f(g, \gamma) = 0$  sont  $C^\infty$  et sont les trajectoires de  $-\text{grad}_g f$ .

Comme les couples  $(r, q)$  sont en nombre fini, l'intersection

$$\Sigma^f = \bigcap_{(r, q)} \Sigma_{(r, q)}^f \subset \mathcal{G}$$

des ensembles génériques donnés par le lemme de transversalité à paramètres reste générique. La transversalité de  $F^f(g, \bullet)$  avec la section nulle et la condition de Morse-Smale telle qu'on l'a énoncé en terme d'intersections transverses entre variétés stables et instables sont équivalentes, voir par exemple la proposition 5.8 de M. Hutchings [13]. Ceci montre alors que

$$g \in \Sigma^f \iff (f, g) \text{ vérifie la propriété de Morse-Smale,}$$

et prouve le théorème 1.2.

Le paragraphe précédent entraîne aussi que les espaces

$$\widetilde{\mathcal{M}}(r, q) := (F^f)^{-1}(0_{\mathcal{L}(r, q)})$$

sont des variétés Banachiques. Considérons alors pour deux fonctions de Morse  $f$  et  $f'$  les applications

$$\text{Ev}_+ : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) & \longrightarrow & M \\ (g, \gamma) & \longmapsto & \gamma(+) \end{array} \quad \text{et} \quad \text{Ev}_- : \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q') & \longrightarrow & M \\ (g', \gamma') & \longmapsto & \gamma'(-) \end{array} .$$

Le lemme suivant affirme que ces applications sont des submersions (même en se restreignant à des variations de métriques à support imposé, hypothèse qui sera utile pour prouver ultérieurement la proposition 3.4) et a comme premier corollaire d'établir leur transversalité, qui se reformule comme celle entre

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q') & \longrightarrow & M^2 \\ (g, \gamma, g', \gamma') & \longmapsto & (\gamma(+), \gamma'(-)) \end{array}$$

et  $\Delta = \{(x, x) \in M^2 ; x \in M\} \subset M^2$ .

**Lemme 1.3.** *Soit  $(g, \gamma) \in \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset)$ . Soit  $p = \gamma(t_0)$  et soit  $U \subset M$  un voisinage de  $p$ . On note  $T_g \mathcal{G}_U = \{\dot{g} \in T_g \mathcal{G} ; x \notin U \implies \dot{g}_x = 0\}$  et  $\text{p}_G : \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \rightarrow \mathcal{G}$  la projection canonique. Alors  $(d\text{Ev}_+)_{(g, \gamma)} : d\text{p}_G^{-1}_{(g, \gamma)}(T_g \mathcal{G}_U) \rightarrow T_{\gamma(+)} M$  est surjective.*

*Démonstration.* Soit  $g_\bullet : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathcal{G}$  une famille de métriques vérifiant  $g_0 = g$  et  $g_\bullet|_{E \setminus U} \equiv g$ . Soit  $t_0^+ = \sup\{t \in \mathbb{R} ; \gamma(t) \in U\}$ . On note  $p_+ = \gamma(t_0^+)$ ,  $q = \gamma(+\infty) = \gamma(L)$ , puis  $H_0, H_1$  et  $H_2$  des voisinages de  $p, p_+$  et  $q$  dans leurs niveaux respectifs. Le flot de  $-\text{grad}_{g_s} f$  induit un difféomorphisme

$$\varphi_{10}^s : \begin{array}{ccc} H_0 & \longrightarrow & H_1 \\ x & \longmapsto & \varphi^{t(s,x)}(x) \end{array} .$$

On note aussi  $\varphi_{21} : H_1 \times ]L - \varepsilon', L + \varepsilon[ \rightarrow E$  la restriction du flot à un voisinage de  $(p_+, L)$  (quitte à travailler sur  $\gamma^* TE$  et à renormaliser, on se ramène de  $(t_0, t_0^+, L)$  à  $(0, 1, L)$ ), qui induit un difféomorphisme sur  $\text{Im}(\varphi_{21})$ . Soit à présent

$$(\dot{h}_2, \dot{\tau}_2) \in T_q E = T_q H_2 \oplus \mathbb{R} \cdot \gamma'.$$

On note

$$(\dot{h}_1, \dot{\tau}_1) = (d\varphi_{21})^{-1}(\dot{h}_2, \dot{\tau}_2) \in T_{p_+} E = T_{p_+} H_1 \oplus \mathbb{R} \cdot \gamma'.$$

Il nous faut fabriquer une famille  $g_\bullet$  telle que

$$\varphi_{02}^s(x, t) = \varphi_{21}(\varphi_{10}^s(x), t - t(s, x))$$

vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{20}^s}{\partial s}(0, L) &= (\dot{h}_2, \dot{\tau}_2) \\ \iff d_{H_1} \varphi_{21} \left( \frac{\partial \varphi_{10}^s}{\partial s}(0) \right) - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial t} \cdot \frac{\partial t(s, 0)}{\partial s}(0) &= (\dot{h}_2, \dot{\tau}_2) \\ \iff \left( \frac{\partial \varphi_{10}^s}{\partial s}(0), \frac{\partial t(s, 0)}{\partial s}(0) \right) &= (\dot{h}_1, -\dot{\tau}_1). \end{aligned}$$

Construisons de manière équivalente une famille de pseudo-gradients induisant cette condition. Soit  $\theta : ]t, t_+[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bosse telle que  $\int_t^{t_+} \theta(\tau) d\tau = 1$ . On pose  $X_s = s \cdot \theta \cdot \dot{h}_1 + (1 + s \cdot \dot{\tau}_1) \frac{\partial}{\partial \tau}$ , dont le flot  $\psi_{10}^s$  est donné par

$$\psi_{10}^s(h, t) = \left( s \cdot \int_0^t \theta(t) dt \cdot \dot{h}_1, \int_0^t (1 + s \dot{\tau}_1) dt \right).$$

Alors  $\varphi_{10}^s(\bullet) = \psi_{10}^s(\bullet, t(s, \bullet))$  vérifie

$$\varphi_{10}^s(x) = \left( s \cdot \dot{h}_1, \underbrace{\int_0^{t(s,x)} (1 + s \dot{\tau}_1) dt}_{=1} \right),$$

où l'on obtient d'une part que  $\frac{\partial \varphi_{10}^s}{\partial s}(0) = \dot{h}_1$  et d'autre part que

$$\int_0^{t(s,x)} (1 + s\dot{\tau}_1) dt = 1 \implies t(s,x) = \frac{1}{1 + s\dot{\tau}_1} \implies \frac{\partial t(s,0)}{\partial s}(0) = \frac{-\dot{\tau}_1}{(1 + 0 \cdot \dot{\tau}_1)^2} = -\dot{\tau}_1.$$

□

Le lemme de transversalité à paramètres fournit un ensemble générique

$$\Sigma_{(r,q')}^{(f,f')} \subset \mathcal{G}^2,$$

et l'ensemble des couples  $(r, q')$  étant à nouveau en nombre fini, l'intersection

$$\Sigma^{(f,f')} = \cap_{(r,q')} \Sigma_{(r,q')}^{(f,f')} \cap (\Sigma^f \times \mathcal{G}) \cap (\mathcal{G} \times \Sigma^{f'}) \subset \mathcal{G}^2$$

est un ensemble générique vérifiant que

$$(g, g') \in \Sigma^{(f,f')} \iff (f, g, f', g') \text{ vérifie la propriété de Morse-Smale hybride,}$$

ce qui prouve le théorème 1.7.

# Chapitre 2

## Groupe fondamental de Morse

Dans ce chapitre, on définit le groupe fondamental de Morse d'une variété fermée  $M$  en tant que présentation de groupe associée à la donnée d'un couple  $(f, g)$  vérifiant la propriété de Morse-Smale. On développe un point de vue et un vocabulaire similaires à ceux que l'on prendra pour définir le groupe fondamental de Morse stable. On montre l'invariance de cette présentation par rapport aux données de deux manières différentes : l'une en exhibant un isomorphisme avec le groupe fondamental usuel de la variété (le morphisme d'évaluation), l'autre en construisant un isomorphisme entre deux présentations associées à des données compatibles (le morphisme de descente).

### 2.1 Baser le groupe fondamental

Soit  $p \in M$ . On considère la propriété suivante sur  $p$  :

$$\text{Le point } p \text{ est une valeur régulière de } \text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M. \quad (2.1)$$

C'est une propriété générique, qui revient à demander que  $p \in \cup_{c \in \text{Crit}_0(f)} W^s(c)$ . On note ensuite

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset) &= (\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow M)^{-1}(p) \\ &= \{\gamma \in \overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) ; \gamma(-) = p\}. \end{aligned}$$

Lorsque  $p$  vérifie la condition (2.1),  $\overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)$  est donc une variété à faces de dimension 1. C'est en fait un segment, dont les sommets sont la trajectoire  $\gamma^p$  constante égale à  $p$  et la trajectoire brisée  $(\beta_p, \alpha_p) \in \mathcal{M}(p, c) \times \mathcal{M}(c, \emptyset)$ , où  $c \in \text{Crit}_0(f)$  est le point tel que  $p \in W^s(c)$ . On note  $\overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)^+$  le segment muni de l'orientation telle que le sommet  $p$  soit le départ.



## 2.2 Générateurs

On fixe  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse et  $g$  une métrique adaptée à  $f$ . On suppose que le couple  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale (voir la définition 1.5) et on fixe un point  $\star$  vérifiant la condition (2.1).

Si  $\mathcal{G}$  est un ensemble et  $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{G}}$  (le groupe libre engendré par  $\mathcal{G}$ ), on note  $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle = \mathcal{F}_{\mathcal{G}} / \overline{\mathcal{R}}$  le groupe de générateurs  $\mathcal{G}$  et de relations  $\mathcal{R}$ , où  $\overline{\mathcal{R}}$  est la clôture normale de  $\mathcal{R}$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ .

**Définition 2.1.** 1. Un pas de Morse  $P$  est la donnée d'un espace de modules orienté  $\overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset)$ , avec  $r \in \text{Crit}_1(f)$  ou  $r = \star$ . On détaillera l'écriture d'un pas de Morse de deux manières :

- (a) soit en écrivant  $P = \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset)^\varepsilon = b^\varepsilon$ , où  $\varepsilon \in \{-, +\}$  précise si l'orientation considérée est celle fixée initialement ou l'orientation opposée,
- (b) soit en écrivant  $P = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+)$ , où  $(\beta_-, \alpha_-) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset)$  est la trajectoire orientée négativement pour l'orientation induite sur le bord et  $(\beta_+, \alpha_+) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(r, \emptyset)$  la trajectoire orientée positivement, avec la convention que  $\beta_- = \alpha_- = \gamma^\star$  lorsque  $^1 P = \overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^+$ .

On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pas de Morse.

- 2. Deux pas de Morse  $P^1 = (\beta_-^1, \alpha_-^1, \beta_+^1, \alpha_+^1)$  et  $P^2 = (\beta_-^2, \alpha_-^2, \beta_+^2, \alpha_+^2)$  sont dits consécutifs<sup>2</sup> si  $\alpha_+^1 = \alpha_-^2$ . Un chemin de Morse est un mot formé de pas de Morse consécutifs.
- 3. Un lacet de Morse libre  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i = P^1 \dots P^k$  est un chemin de Morse tel que  $P^1$  soit consécutif à  $P^k$ . On note  $\mathcal{L}$  leur ensemble.
- 4. Si  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i$  est un lacet de Morse, on note  $\bar{\ell} = \prod_{i=1}^k \overline{P^{k+1-i}}$  le lacet de Morse formé par les pas de Morse munis des orientations opposées.
- 5. Un lacet de Morse basé en  $\star$  est un lacet de Morse dont le premier pas  $P^1$  est  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^+$ . On note  $\mathcal{L}^\star$  leur ensemble.
- 6. Une relation de Morse du premier type est un mot de la forme  $P \cdot \bar{P}$ . On note  $\mathcal{R}_1$  leur ensemble.
- 7. Le groupe

$$\mathcal{L}(M, f, g ; \star) = \langle \mathcal{L}^\star | (P^1 \dots \ell \dots P^k)(P^1 \dots \hat{\ell} \dots P^k)^{-1}, \ell \in \mathcal{R}_1 \rangle,$$

où  $\hat{\phantom{x}}$  signifie que les lettres n'apparaissent pas dans le mot, est appelé groupe des lacets de Morse. Ses éléments sont les lacets de Morse basés

1. C'est le seul pas de Morse dont l'un des bords ne se décrit pas comme un couple de trajectoires.

2. De manière équivalente, si  $\text{Ev}_+(\beta_+^1) = \text{Ev}_+(\beta_-^2)$ .

en  $\star$  (car on a égalité entre l'inverse formel  $P^{-1}$  et le pas  $\bar{P}$ ), dans lesquels on peut simplifier deux pas de Morse qui apparaissent consécutivement avec leurs orientations opposées.

La figure 2.1 présente un pas de Morse  $\bar{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  avec  $b \in \text{Crit}_1(f)$ , vu comme

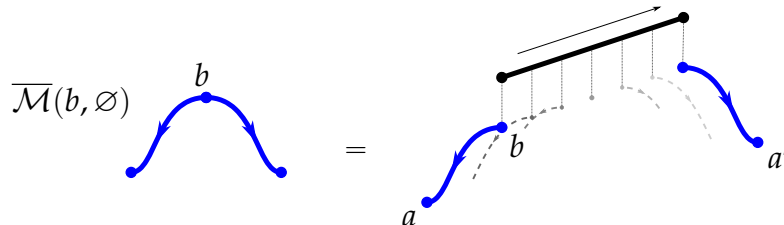


FIGURE 2.1 – Pas de Morse par un point critique  $b \in \text{Crit}_1(f)$ .

un espace à un paramètre de trajectoires issues de  $b$  (on doit « éclater » la figure étant donné que les trajectoires se recouvrent les unes les autres). La figure 2.2 présente un pas de Morse  $\bar{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)$ , vu comme un espace à un paramètre de

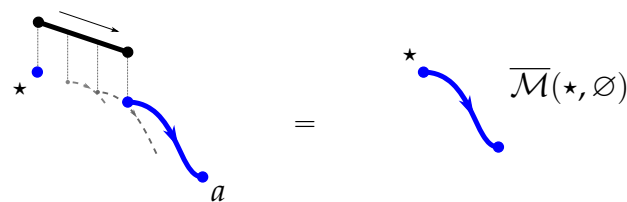


FIGURE 2.2 – Pas de Morse par le point base  $\star$ .

trajectoires issues de  $\star$ . Enfin, la figure 2.3 présente un lacet de Morse basé en  $\star$ .

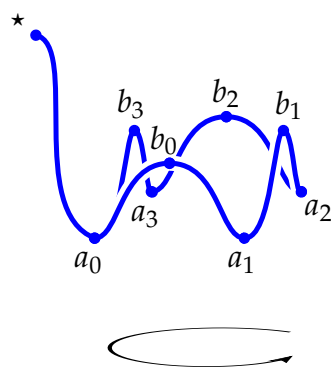


FIGURE 2.3 – Lacet de Morse.

**Remarque 2.1.** Le seul pas consécutif à  $P = \overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)^-$  est  $\overline{P} = \overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)^+$ . Un lacet  $\ell \in \mathcal{L}(M, f, g ; \star)$  admettra ainsi toujours une écriture  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i$  dans laquelle les seuls pas  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^\pm$  sont  $P^1 = \overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^+$  et  $P^k = \overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^-$ . Si l'on suppose de plus que  $\star = a_0 \in \text{Crit}_0(f)$ , on peut en plus omettre les pas  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^\pm$  en décrétant qu'un pas  $P = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+)$  est basé en  $\star$  si  $\alpha_- \in \mathcal{M}(a_0, \emptyset)$ , ou de manière équivalente  $\text{Ev}_+(\beta_-) = a_0$ . On va faire cette hypothèse, qui nous permet alors de ne travailler qu'avec des pas  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  et allègera la rédaction de ce chapitre. On remarquera systématiquement chaque moment où des pas du type  $\overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)$  seraient naturellement apparus. L'équivalent des espaces  $\overline{\mathcal{M}}(p, \emptyset)$  dans le cadre de Morse stable ne permettra pas cette simplification, et comme les fonctions de Morse sont des fonctions de Morse stable, le lecteur pourra trouver une description du groupe fondamental de Morse sans ces simplifications comme un cas particulier du groupe fondamental de Morse stable dans le chapitre 4.

## 2.3 Morphisme d'évaluation

Un pas  $P \in \mathcal{P}$  muni d'une paramétrisation  $\gamma_P : [-1, 1] \rightarrow P$  respectant son orientation induit une application  $\tilde{\gamma}_P : [-1, 1] \rightarrow M$  définie par  $\tilde{\gamma}_P = \text{Ev}_+ \circ \gamma_P$ . On définit à partir de ces applications un morphisme

$$\text{Ev} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M, f, g ; \star) & \longrightarrow & \pi_1(M ; \star) \\ \ell = P^1 \cdots P^k & \longmapsto & [\tilde{\gamma}_{P^1} \cdots \tilde{\gamma}_{P^k}] \end{array} ,$$

où  $\cdot$  désigne la concaténation de chemins, dit morphisme d'évaluation. Ce morphisme ne dépend pas des précédents choix de paramétrisations. Le résultat qui justifie l'appellation de « générateurs du groupe fondamental de Morse » est le théorème suivant :

**Théorème 2.1.** *Le morphisme  $\text{Ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$  est surjectif.*

La preuve classique du résultat précédent consiste à laisser couler un lacet topologique le long du flot jusqu'à ce qu'il soit compris dans une union de voisinages tubulaires des variétés instables des points critiques d'indice 1, puis ensuite à le rétracter à l'aide des projections de ces voisinages tubulaires. On propose une preuve différente, qui utilise le collage et la topologie des espaces de modules  $\mathcal{M}(\emptyset, a)$ . Notons que ces preuves sont propres au cadre Morse, et ne se transmettront pas au cadre Morse stable.

*Démonstration.* Le fait que  $\text{Ev}$  soit un morphisme est clair, car  $\text{Ev}(\overline{P}) = \overline{\text{Ev}(P)}$ , où la seconde barre désigne  $\gamma \mapsto (\overline{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t))$ . Seule la surjectivité est à

prouver, i.e. il nous faut montrer que tout lacet est homotope à un lacet égal à l'évaluation d'un lacet de Morse.

Soit  $[\gamma] \in \pi_1(M; \star)$ . On peut supposer que  $\gamma : (S^1, 1) \rightarrow (M, \star)$  est lisse et que pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$ ,  $\gamma \pitchfork (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c) \rightarrow M)$  (i.e. le lacet intersecte transversalement chaque variété stable  $W^s(c)$ ). La dimension attendue de ces intersections vaut  $1 + n - \text{ind}(c) - n = 1 - \text{ind}(c)$ , autrement dit le lacet intersecte seulement des variétés stables de points critiques d'indices 0 et 1, et seulement en un nombre fini de points pour ces dernières. Ces intersections viennent de plus avec des signes, induits par les co-orientations fixées des variétés stables. Notons  $\theta_1 < \dots < \theta_k \in [0, 2\pi[ \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$  ces points,  $\theta_i$  correspondant à l'intersection du lacet avec la variété stable de  $b_i \in \text{Crit}_1(f)$  (avec potentiellement répétition des  $b_i$ ), et  $\varepsilon_i \in \{-, +\}$  les signes de ces intersections.

L'application  $\gamma$  envoie l'intervalle  $]\theta_i, \theta_{i+1}[$  dans la variété stable de  $a_i \in \text{Crit}_0(f)$  (avec potentiellement répétition des  $a_i$ ), tandis que  $]0, \theta_1[ \cup ]\theta_k, 2\pi[$  est envoyé dans la variété stable de  $a_0 = \star$ . On note  $\gamma_i$  la restriction de  $\gamma$  à  $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $\gamma_0$  la restriction à  $[0, \theta_1] \cup [\theta_k, 2\pi]$ ,  $(\beta_-^i, \beta_+^i)$  les paramétrisations des trajectoires des bords des  $\overline{\mathcal{M}}(b_i, \emptyset)$  munis de leurs orientations fixées, et  $\tau_i \in \mathcal{M}(\emptyset, b_i)$  la paramétrisation de la trajectoire vérifiant  $\text{ev}_-(\tau_i) = \gamma(\theta_i)$ . Le chemin  $\gamma = \gamma_0 \cdot \dots \cdot \gamma_k$  est homotope au chemin

$$\gamma_0 \cdot \tau_1 \cdot B_1 \cdot \overline{\tau_1} \cdot \gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_{k-1} \cdot \tau_k \cdot B_k \cdot \overline{\tau_k},$$

avec

$$B_i = \beta_{-\varepsilon_i}^i \cdot \overline{\beta_{-\varepsilon_i}^i} \cdot \beta_{\varepsilon_i}^i \cdot \overline{\beta_{\varepsilon_i}^i}.$$

La figure 2.4 représente une intersection positive (on y précise l'orientation du lacet et celle de la variété instable du point critique) ainsi que les différents types de chemins intervenant dans cette description. Les trajectoires  $(\tau_i, \beta_-^i) \in$

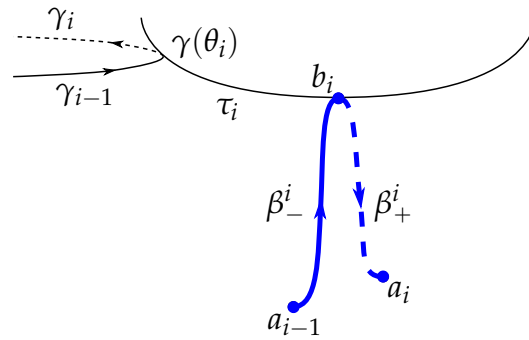


FIGURE 2.4 – Intersection positive d'un lacet et d'une variété stable.

$\mathcal{M}(\emptyset, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, a_{\varepsilon_i})$ , avec  $a_{\varepsilon_i} = a_{i-1}$  si  $\varepsilon_i = +$  et  $a_i$  si  $\varepsilon_i = -$ , peuvent être

lissées en des trajectoires  $\zeta_-^i = \tau_i \#_\lambda \beta_-^i \in \mathcal{M}(\emptyset, a_{\varepsilon_i})$ , et de même pour les trajectoires  $(\tau_i, \beta_+^i) \in \mathcal{M}(\emptyset, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, a_{-\varepsilon_i})$  qui peuvent être lissées en des trajectoires  $\zeta_+^i = \tau_i \#_\lambda \beta_+^i \in \mathcal{M}(\emptyset, a_{-\varepsilon_i})$ . Les chemins  $\gamma_i$  peuvent eux être perturbés près de leurs extrémités en des chemins  $\tilde{\gamma}_i$  de sorte à ce qu'ils restent tracés dans la variété stable de  $a_i$  et que l'on ait toujours  $\tilde{\gamma}_i(+)=\zeta_-^{i+1}(-)$ , etc. On obtient finalement une homotopie du chemin  $\gamma$  avec le chemin

$$\tilde{\gamma}_0 \bullet \zeta_{-\varepsilon_1}^1 \bullet \overline{\beta_{-\varepsilon_1}^1} \bullet \beta_{\varepsilon_1}^1 \bullet \overline{\zeta_{\varepsilon_1}^1} \bullet \dots \bullet \overline{\gamma_{k-1}} \bullet \zeta_{-\varepsilon_k}^k \bullet \overline{\beta_{-\varepsilon_k}^k} \bullet \beta_{\varepsilon_k}^k \bullet \overline{\zeta_{\varepsilon_k}^k},$$

et comme à présent les chemins  $\overline{\zeta_{\varepsilon_i}^i} \bullet \tilde{\gamma}_i \bullet \zeta_{-\varepsilon_{i+1}}^{i+1}$  sont des lacets inclus dans la variété stable de  $a_{\varepsilon_i}$ , ils se rétractent pour obtenir une dernière homotopie entre le chemin précédent et

$$\overline{\beta_{-\varepsilon_1}^1} \bullet \beta_{\varepsilon_1}^1 \bullet \dots \bullet \overline{\beta_{-\varepsilon_k}^k} \bullet \beta_{\varepsilon_k}^k = \text{Ev}(\overline{\mathcal{M}}(b_1, \emptyset)^{\varepsilon_1} \dots \overline{\mathcal{M}}(b_k, \emptyset)^{\varepsilon_k}).$$

□

**Corollaire 2.1** (Inégalité homotopique de Morse). *Soit  $\mu_1(M)$  le nombre minimal de générateurs d'une présentation de  $\pi_1(M; \star)$ . Alors*

$$\#\text{Crit}_1(f) \geq \mu_1(M).$$

*Démonstration.* On considère le graphe<sup>3</sup> connexe<sup>4</sup> de sommets  $\text{Crit}_0(f)$ , avec une arête orientée allant du sommet  $a_-$  au sommet  $a_+$  si et seulement si il existe un pas de Morse  $P = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+)$  avec  $\text{Ev}_+(\beta_-) = a_-$  et  $\text{Ev}_+(\beta_+) = a_+$ . Pour un sommet  $c$ , on fixe un chemin reliant  $\star$  à  $c$ , i.e. un mot  $s_c = P^1 \dots P^k$  formé de pas de Morse consécutifs où  $P^1 = (\beta_-^1, \alpha_-^1, \beta_+^1, \alpha_+^1)$  vérifie  $\text{Ev}_+(\beta_-^1) = \star$  et  $P^k = (\beta_-^k, \alpha_-^k, \beta_+^k, \alpha_+^k)$  vérifie  $\text{Ev}_+(\beta_+^k) = c$ . On définit alors le morphisme

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{P} | \mathcal{R}_1 \rangle & \longrightarrow & \mathcal{L}(M, f, g; \star) \\ P = (\beta_-, \beta_+) & \longmapsto & s_{\text{ev}_+(\beta_-)} \cdot P \cdot \overline{s_{\text{ev}_+(\beta_+)}} \end{array},$$

qui est surjectif car  $\varphi(\ell) = \ell$ . Comme

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} | \mathcal{R}_1 \rangle &\simeq \langle \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)^\pm, \text{ind}(b) = 1 | \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)^+ \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)^- \rangle \\ &\simeq \langle \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)^+, \text{ind}(b) = 1 | \emptyset \rangle \end{aligned}$$

est le groupe libre à  $\#\text{Crit}_1(f)$  générateurs, on obtient l'inégalité voulue en considérant le morphisme surjectif  $\text{Ev} \circ \varphi : \langle \mathcal{P} | \mathcal{R}_1 \rangle \rightarrow \pi_1(M; \star)$ . □

3. C'est la description du 1-squelette de la structure de CW-complexe du théorème 1.5.

4. Sinon on aurait deux points critiques d'indice 0 non homologues au sens de l'homologie de Morse, ce qui contredirait que  $H_0(M, f, g) = H_0(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$  comme  $M$  est supposée connexe.

**Remarque 2.2.** Si l'on note

$$\text{Morse}(M) = \min \{ \#\text{Crit}(f) ; f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ est de Morse} \}$$

le nombre de Morse de  $M$  et

$$\text{Morse}_i(M) = \min \{ \#\text{Crit}_i(f) ; f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ est de Morse} \}$$

le  $i$ -ème nombre de Morse de  $M$ , on obtient par conséquent que

$$\text{Morse}(M) \geq \text{Morse}_1(M) \geq \mu_1.$$

## 2.4 Relations

Une variété à coins compacte de dimension  $n$  induit un graphe<sup>5</sup> dont les sommets sont donnés par les points de sa  $n$ -strate et les arêtes par les segments de sa  $(n-1)$ -strate. D'après le théorème 1.4, le graphe induit par la variété à faces  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$  avec  $\text{ind}(c) = 2$  est cyclique. L'orientation fixée sur  $\mathcal{M}(c, \emptyset)$  induit une orientation de ce graphe cyclique. Détaillons à quoi correspondent les sommets et arêtes de ce graphe.

**Arêtes.** Comme  $\mathcal{M}(c, d)$  est vide dès que  $\text{ind}(c) \leq \text{ind}(d)$ , on a que

$$\begin{aligned} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) &= \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \\ &= \sqcup_{d \in \text{Crit}_0(f) \cup \text{Crit}_1(f)} \mathcal{M}(c, d) \times \mathcal{M}(d, \emptyset) \\ &= \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}_1, \end{aligned}$$

où

- $\mathcal{E}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(c, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset)$ ,
- $\mathcal{E}_1 = \sqcup_{b \in \text{Crit}_1(f)} \mathcal{M}(c, b) \times \mathcal{M}(b, \emptyset)$ .

On distingue donc deux types d'arêtes : ce sont soit les composantes  $\mathcal{E}_0$ , soit les composantes  $\mathcal{E}_1$ . Comme  $\dim \mathcal{M}(c, b) = 2 - 1 - 1 = 0$ ,  $\mathcal{M}(c, b)$  est discret, et comme  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  est connexe, une arête de  $\mathcal{E}_1$  est de la forme  $\{\gamma\} \times \mathcal{M}(b, \emptyset)$ , avec  $\gamma \in \mathcal{M}(c, b)$  (ici,  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  est donc un pas de Morse, voir le paragraphe suivant).

---

5. En prenant soin de retirer les composantes de la  $(n-1)$ -strate diffeomorphes à  $S^1$ .

**Sommets.** On a ensuite que

$$\begin{aligned} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) &= \sqcup_{|I|=2} \mathcal{M}_I \\ &= \sqcup_{b \in \text{Crit}_1(f), a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(c, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \\ &= \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Les sommets sont donc tous du même type, un triplet de trajectoires dans un certain  $\mathcal{M}(c, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset)$ .

**Explorer une composante de bord.** Un sommet est donc une trajectoire qui présente deux types de singularités : une singularité « haute » (ici la brisure sur le premier point critique intermédiaire) et une singularité « basse » (ici la brisure sur le second point critique intermédiaire). On distinguera alors les arêtes « hautes », celles qui joignent deux singularités hautes tout en préservant une singularité basse (ici celles de type  $\mathcal{E}_0$ ), et les arêtes « basses », celles qui joignent deux singularités basses tout en préservant une singularité haute (ici celles de types  $\mathcal{E}_1$ ). Les arêtes basses correspondent précisément aux arêtes qui induisent des pas de Morse. Chaque sommet étant alors extrémité d'une arête haute et d'une arête basse, parcourir le graphe cyclique induit par le bord de l'espace de modules consiste à alterner entre arête haute et arête basse. Le fait que la singularité basse soit préservée par les arêtes hautes entraîne que les pas de Morse induits par les arêtes basses sont consécutifs, et concaténer les pas de Morse induits par les arêtes basses résulte donc en la formation d'un lacet de Morse libre. Ce procédé, dénommé « marche du crocodile » dans [3], restera valable pour tous les cas de figures similaires que l'on rencontrera au cours de ce manuscrit (voir les propositions 2.3, 4.1, 4.2 et 4.4).

La figure 2.5 présente une arête basse, et la figure 2.6 présente une arête

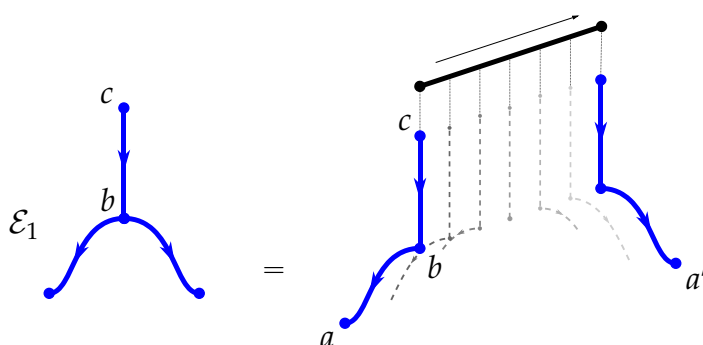


FIGURE 2.5 – Arête basse.

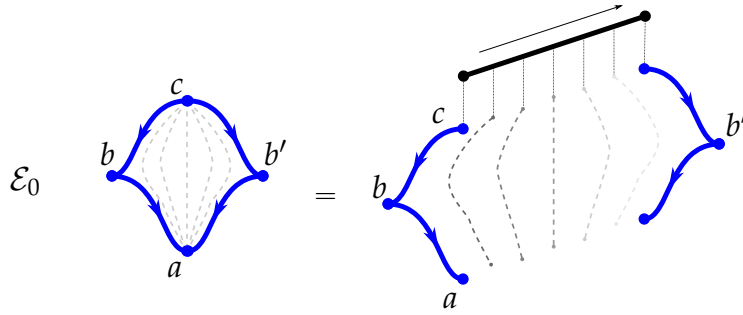
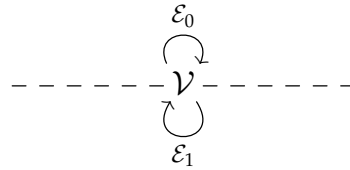


FIGURE 2.6 – Arête haute.

haute.

Même si ce n'est pas nécessaire pour construire le lacet de Morse stable qui nous intéresse, la proposition suivante indique en détail la manière dont sont reliés arêtes et sommets dans le cas des espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$ ,  $c \in \text{Crit}_2(f)$ .

**Proposition 2.1.** *Le graphe cyclique induit par le bord d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)$  a comme combinatoire celle d'un cycle du graphe*



alternant entre arête haute (au-dessus de la démarcation en pointillé) et arête basse (en-dessous de la démarcation en pointillé).

*Démonstration.* Soit  $v = (\gamma, \beta, \alpha) \in \mathcal{M}(c, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset)$  un sommet. Comme  $(\gamma, \beta) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(c, a)$ , qui est une variété à faces compacte de dimension 1, on en déduit que  $(\gamma, \beta)$  est un sommet d'une arête  $\tilde{e}_0 \subset \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(c, a) = \mathcal{M}(c, a)$ . Puis, comme  $(\beta, \alpha) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$ , qui est aussi une variété à faces compacte de dimension 1, on en déduit que  $(\beta, \alpha)$  est un sommet de l'arête  $\tilde{e}_1 = \mathcal{M}(b, \emptyset)$ . Finalement,  $(\gamma, \beta, \alpha)$  est à la fois un sommet de  $e_0 = \tilde{e}_0 \times \{\alpha\} \in \mathcal{E}_0$  et de  $e_1 = \{\gamma\} \times \tilde{e}_1 \in \mathcal{E}_1$ .  $\square$

On associe alors à un espace  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)^\varepsilon$  un lacet de Morse libre en concaténant les pas induits par les arêtes basses. Plus précisément :

1. On fixe une arête  $e_1 \in \mathcal{E}_1$ , puis on forme la suite finie ordonnée  $e_1, e_2, \dots, e_{2k}$  des arêtes du graphe cyclique qui respecte l'orientation héritée de celle de  $\mathcal{M}(c, \emptyset)^\varepsilon$ .
2. L'arête  $e_{2i-1}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , est du type  $\mathcal{E}_1$  et donc de la forme  $\{\gamma_i\} \times \mathcal{M}(b_i, \emptyset)$ . On note  $\varepsilon_i \in \{-, +\}$  l'orientation du point  $\{\gamma_i\} \in \mathcal{M}(c, b_i)$ .



3. On pose  $\ell = \prod_{i=1}^k \overline{\mathcal{M}(b_i, \emptyset)}^{\varepsilon_i}$ .

**Proposition 2.2.** *Le mot  $\ell$  ainsi formé est un lacet de Morse libre. On dira que  $\ell$  est tracé sous  $c$ .*

*Démonstration.* Le seul point à prouver est que les pas soient bien consécutifs. La formule d'orientation dans le théorème 1.3 affirme que l'orientation du bord  $\partial^1 \mathcal{M}(c, \emptyset)$  coïncide avec l'orientation produit : celle d'une arête  $\{\gamma_i\} \times \mathcal{M}(b_i, \emptyset)$  du type  $\mathcal{E}_1$  vaut donc bien le produit de l'orientation  $\varepsilon_i$  de la trajectoire  $\gamma_i$  avec celle fixée de l'espace  $\mathcal{M}(b_i, \emptyset)$ , ce qui correspond à notre notation  $\overline{\mathcal{M}(b_i, \emptyset)}^{\varepsilon_i}$ . On conclut en remarquant que l'application  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}(c, \emptyset)} \rightarrow M$  est constante le long des arêtes du type  $\mathcal{E}_0$ .  $\square$

La figure 2.7 présente une configuration possible.

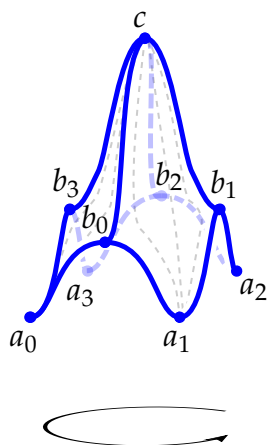


FIGURE 2.7 – Lacet tracé sous  $c \in \text{Crit}_2(f)$ .

**Définition 2.2.** 1. On appelle relation de Morse du second type un lacet de Morse  $\ell$  tel qu'il existe un point critique  $c$  avec  $\text{ind}(c) = 2$  tel que  $\ell$  soit tracé sous  $c$ . On note  $\mathcal{R}_2$  leur ensemble.

2. Le groupe

$$\pi_1(M, f, g ; \star) = \left\langle \mathcal{L}^\star \mid (P^1 \dots \ell \dots P^k)(P^1 \dots \hat{\ell} \dots P^k)^{-1}, \ell \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \right\rangle$$

est appelé groupe fondamental de Morse. Ses éléments sont donc les lacets de Morse basés en  $\star$ , dans lesquels on peut simplifier deux pas qui apparaissent consécutivement avec leurs orientations opposées ou lacets qui sont tracés sous des points critiques d'indice 2.

## 2.5 Invariance *a posteriori* du groupe fondamental de Morse, isomorphisme d'évaluation

L'énoncé suivant justifie l'appellation de groupe fondamental de Morse. On en déduit l'invariance du groupe fondamental de Morse par rapport à la fonction  $f$  et à la métrique  $g$  fixées.

**Théorème 2.2.** *Le morphisme  $\text{Ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$  passe au quotient et induit un isomorphisme  $\text{Ev} : \pi_1(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$ .*

*Démonstration.* Le fait que  $\text{Ev}$  passe au quotient est clair, car si  $\ell \in \partial(\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset))$ , alors  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) \rightarrow M$  est une application continue définie sur un disque fermé et vérifiant  $[\text{Ev}_+|_{\partial^1 \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)} : \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset) \simeq S^1 \rightarrow M] = \text{Ev}(\ell)$ . Le lacet non basé  $\ell$  est donc homotopiquement trivial. Il nous faut ainsi seulement prouver que si un lacet de Morse est homotopiquement trivial, alors il est dans la fermeture normale des relations de Morse.

Soit  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i$  un lacet de Morse homotopiquement trivial (i.e.  $\text{Ev}(\ell) = 1$ ), et soit  $D : \mathbb{D} \rightarrow M$  une application dont la restriction au bord  $\partial \mathbb{D} \simeq S^1$  soit une paramétrisation de la concaténation des  $P^i$ . On peut supposer que  $D$  est lisse et que, quitte à perturber  $D$  le long de  $\mathbb{D}$ ,  $D \circ (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c) \rightarrow M)$  pour tout  $c \in \text{Crit}(f)$  (i.e. le disque intersecte transversalement chaque variété stable  $W^s(c)$ ). On obtient alors une stratification de  $\mathbb{D}$  donnée par

$$\mathbb{D} = \cup_{a \in \text{Crit}_0(f)} D^{-1}(W^s(a)) \cup \cup_{b \in \text{Crit}_1(f)} D^{-1}(W^s(b)) \cup \cup_{c \in \text{Crit}_2(f)} D^{-1}(W^s(c)).$$

On va décrire deux opérations sur un tel disque stratifié qui résultent en l'obtention d'un nouveau disque stratifié présentant respectivement un sommet (ici, un point de  $\cup_{c \in \text{Crit}_2(f)} D^{-1}(W^s(c))$ ) ou une arête (ici, une composante de  $\cup_{b \in \text{Crit}_1(f)} D^{-1}(W^s(b))$ ) de moins, et dont le bord est un lacet de Morse équivalent (i.e. égal dans le groupe fondamental de Morse) au lacet de Morse bordant le disque initial.

1. Retirer un sommet : pour un point  $x \in \cup_{c \in \text{Crit}_2(f)} D^{-1}(W^s(c))$ , on trace un segment reliant  $x$  au bord du disque et on considère le disque  $\tilde{\mathbb{D}}$  obtenu à partir de  $\mathbb{D}$  en retirant un voisinage de ce segment (voir la figure 2.8). En choisissant convenablement ce voisinage, on peut supposer que la stratification initiale induit une stratification de  $\tilde{\mathbb{D}}$ , et que le bord de  $\tilde{\mathbb{D}}$  intersecte transversalement et dans le même ordre les mêmes variétés stables de points critiques d'indice 1 que le bord de  $\mathbb{D}$ , à l'insertion près d'un mot de la forme  $m \cdot r \cdot m^{-1}$ , où  $r = b_1^\pm \cdots b_l^\pm$  est une relation de Morse du second type. La preuve du théorème 2.1 montrait comment modifier un tel

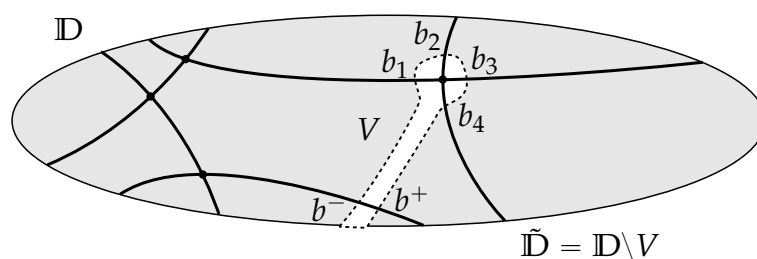


FIGURE 2.8 – Retirer un sommet de la stratification.

lacet topologique afin d'obtenir le lacet de Morse correspondant : on réitère cette modification au voisinage du bord de  $\tilde{D}$  (de sorte à ce que ça ne modifie pas la stratification) et on obtient l'opération voulue.

2. Retirer une arête : si on rencontre successivement les extrémités d'une même arête en parcourant le bord de  $\mathbb{D}$ , alors le disque que l'on obtient en retirant un voisinage de la cellule (composante de  $\cup_{a \in \text{Crit}_0(f)} D^{-1}(W^s(a))$ ) correspondante est à nouveau stratifié avec une arête de moins, et on le modifie à nouveau au voisinage de son bord pour que ce dernier soit un lacet de Morse égal au précédent à l'insertion près d'une relation de Morse du premier type  $P \cdot \bar{P}$  (voir la figure 2.9).).

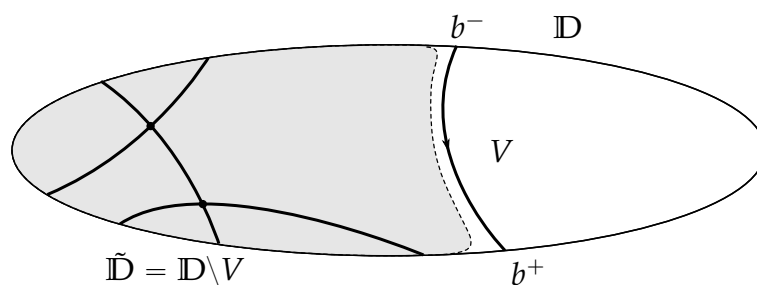


FIGURE 2.9 – Retirer une arête de la stratification.

On conclut la preuve comme suit : le nombre de sommets de la stratification étant fini, on applique la première opération jusqu'à les avoir tous retirés. Ensuite, on retire successivement les arêtes concernées par la seconde opération (il en existe toujours au moins une, sans quoi deux arêtes différentes se croiseraient) jusqu'à obtenir un disque stratifié ne présentant qu'une cellule, dont le bord vaut alors 1 dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .

□

En guise d'exemple, on va déterminer le groupe des lacets de Morse et le groupe fondamental de Morse du tore penché  $\tilde{\mathbb{T}} \subset \mathbb{R}$ .

## 2.6 Calcul du groupe fondamental de Morse du tore penché

On considère le tore penché, i.e. le tore

$$\mathbb{T}^2 = \{(\cos(\theta), \cos(\phi)(2 + \sin(\theta)), \sin(\phi)(2 + \sin(\theta))) \in \mathbb{R}^3 ; (\theta, \phi) \in [0, 2\pi[{}^2\}$$

muni de la restriction de la projection orthogonale sur la droite de vecteur directeur  $(1, 0, 1)$ , notée  $h$ . On représente sur la figure 2.10 les trajectoires de gradient de  $h$  pour la métrique induite  $g$  sur un domaine fondamental.

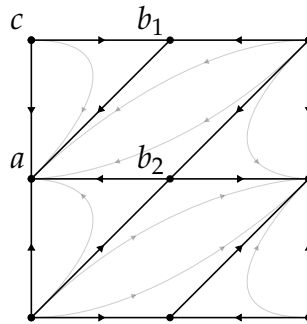


FIGURE 2.10 – Champ de vecteurs de la fonction hauteur sur le tore penché.

tion  $h$  est de Morse, elle possède quatre points critiques  $\star = a, b_1, b_2$  et  $c$ , avec  $\text{ind}(c) = 2, \text{ind}(b_1) = \text{ind}(b_2) = 1$  et  $\text{ind}(a) = 0$ , et le couple  $(h, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale. La figure 2.11 précise les orientations que l'on se fixe sur les espaces  $\mathcal{M}(r, \emptyset)$ . Comme la fonction  $h$  n'a qu'un minimum, n'importe

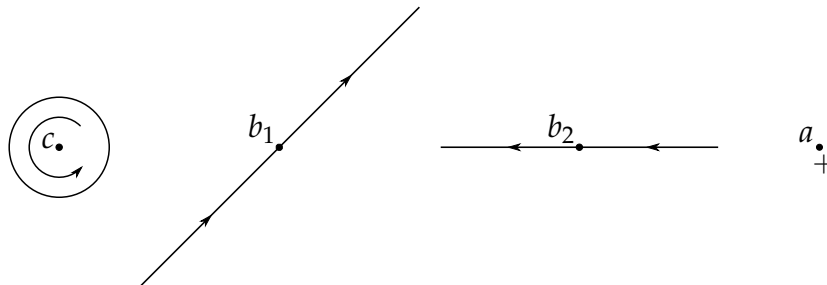


FIGURE 2.11 – Les orientations fixées des espaces de modules  $\mathcal{M}(r, \emptyset)$ .

quel mot en les pas sera un lacet de Morse basé en le point  $\star$ . On a donc que

$$\mathcal{L}(\mathbb{T}^2, h, g ; \star) = \langle \mathcal{P} | \mathcal{R}_1 \rangle = \langle b_i^\pm | b_i^+ b_i^- \rangle \simeq \langle b_1^+, b_2^+ | \emptyset \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

le groupe libre à deux générateurs. Calculons à présent les relations de Morse, ce qui revient dans cet exemple à déterminer un lacet  $\ell$  tracé sous  $c$ . La figure

2.12 illustre le parcours du bord de cet espace de modules, en partant de l'arête  $\{\gamma\} \times \mathcal{M}(b_1, \emptyset)$  où  $\gamma \in \mathcal{M}(c, b_1)$  est la trajectoire orientée positivement. On récupère le mot  $b_1^+ b_2^+ b_1^- b_2^- = [b_1^+, b_2^+]$ , et on a donc que

$$\pi_1(\mathbb{T}^2, h, g ; \star) = \langle \mathcal{P} | \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \rangle \simeq \langle b_1^+, b_2^+ | [b_1^+, b_2^+] \rangle \simeq \mathbb{Z}^2,$$

où l'on retrouve bien le groupe fondamental classique du tore  $\pi_1(\mathbb{T} ; \star)$ . Notons au passage que le corollaire 2.1 oblige une fonction de Morse à avoir au moins deux points critiques d'indice 1, et donc la fonction hauteur du tore penché réalise avec ses quatre points critiques le nombre de Morse du tore (i.e. le nombre minimal de points critiques que doit posséder une fonction de Morse définie sur la variété).

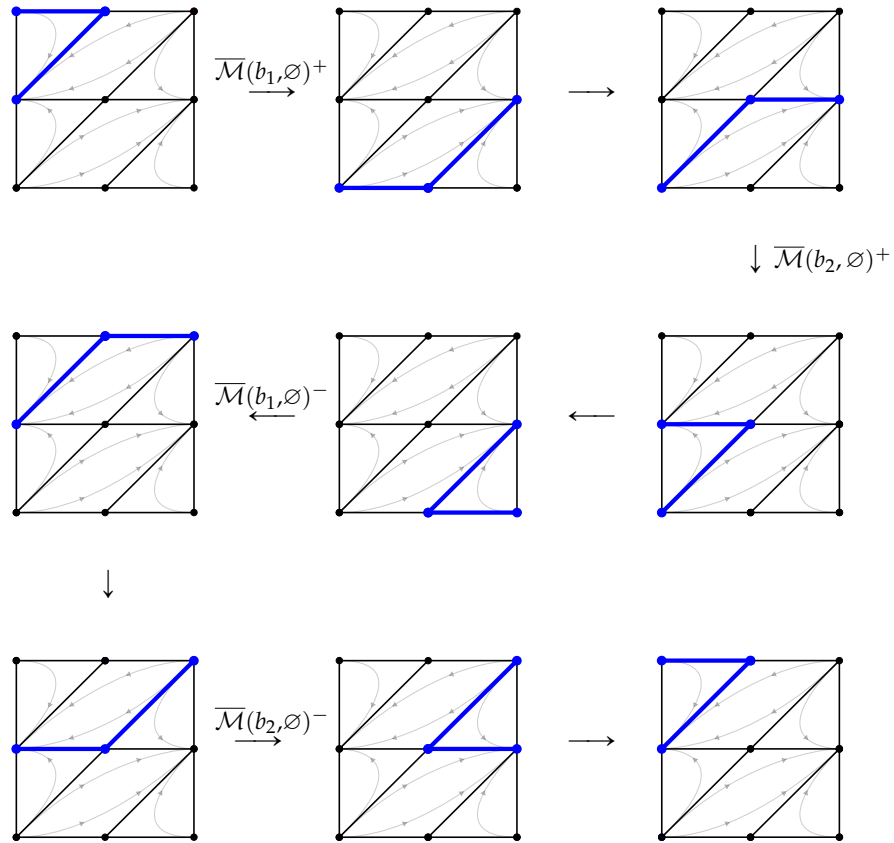


FIGURE 2.12 – Parcours du bord de  $\overline{\mathcal{M}}(c, \emptyset)^+$ .

## 2.7 Invariance *a priori* du groupe fondamental de Morse, isomorphisme de descente

On détaille ici comment obtenir l'invariance *a priori* du groupe fondamental de Morse, en ce qu'on va construire un isomorphisme dit de descente

$$\Phi : \pi_1(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M, f', g' \star').$$

pour un quadruplet  $(f, g, f', g')$  vérifiant la propriété de Morse-Smale hybride (voir la définition 1.11). Ce morphisme sera défini à l'aide des espaces de modules hybrides

$$\overline{\mathcal{M}}^1_{(f,g,f',g')}(b, \emptyset)$$

définis dans la section 1.8. Pour simplifier les notations, on notera au cours de cette section

- $\mathcal{M}^1$  au lieu de  $\mathcal{M}^1_{(f,g,f',g')}$
- $\mathcal{M}$  au lieu de  $\mathcal{M}_{(f,g)}$ ,
- $\mathcal{M}'$  au lieu de  $\mathcal{M}_{(f',g')}$ .

La dimension attendue des espaces  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, a')$  est de

$$\text{ind}(b) + n - \text{ind}(a') - n = \text{ind}(b) - \text{ind}(a'),$$

tandis que celle des espaces  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, \emptyset)$  est de

$$\text{ind}(b) + n + 1 - n = \text{ind}(b) + 1.$$

Dans le cas où  $\text{ind}(b) = 1$ , la dimension de ce dernier espace vaut 2, et son bord est homéomorphe à un cercle<sup>6</sup>. Ainsi, comme auparavant, la graphe induit par sa 1-strate (arêtes) et sa 2-strate (sommets) sera cyclique. Détaillons à quoi correspondent les arêtes et les sommets de ce graphe.

**Arêtes.** Comme  $\mathcal{M}^1(b, d)$  est vide dès que  $\text{ind}(d) > \text{ind}(b)$ , on a en identifiant  $\{\gamma \in C^\infty(\{0\}, M) ; \gamma' = X \circ \gamma\}$  et  $M$  que

$$\begin{aligned} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}^1(b, \emptyset) &= \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \partial^0 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, \emptyset) \right) \sqcup \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, \emptyset) \right) \\ &= \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \mathcal{M}'(\emptyset, \emptyset) \right) \sqcup \left( \mathcal{M}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \left( \sqcup_{|J|=1} \mathcal{M}'_J \sqcup M \right) \right) \\ &= \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}'_0 \sqcup \mathcal{E}'_1 \sqcup \mathcal{E}_{deg}, \end{aligned}$$

où

---

6. C'est *a priori* seulement une union disjointe de cercles, mais comme la surface  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, \emptyset)$  est contractile (sur le couple  $(\gamma^b, b)$  où  $\gamma^b$  est la trajectoire  $\gamma^b$  constante égale à  $b$ ) alors elle est homéomorphe à un disque.

- $\mathcal{E}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}^1(a, \emptyset)$ ,
- $\mathcal{E}'_0 = \sqcup_{a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(b, a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset)$ ,
- $\mathcal{E}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \mathcal{M}'(b', \emptyset)$ ,
- $\mathcal{E}_{deg} = \mathcal{M}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} M$ .

Les arêtes se répartissent donc en quatre types. Comme  $\dim \mathcal{M}^1(b, b') = 1 - 1 = 0$ , une arête de  $\mathcal{E}'_1$  est de la forme  $\{\gamma\} \times \mathcal{M}'(b', \emptyset)$  avec  $\gamma \in \mathcal{M}^1(b, b')$ . Il n'y a qu'une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$ , difféomorphe à  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  via

$$\text{id} \times \text{Ev}_+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(b, \emptyset) & \longrightarrow & \mathcal{M}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} M \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma, \text{ev}_+(\gamma)) \end{array} .$$

En notant  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+)$ , les arêtes de type  $\mathcal{E}_0$  correspondent aux pas<sup>7</sup>  $\overline{\mathcal{M}}'(\text{Ev}_+(\beta_{\pm}), \emptyset)$  comme introduits à la section 2.1.

**Sommets.** On a ensuite que

$$\begin{aligned} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}^1(b, \emptyset) &= \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, \emptyset) \right) \sqcup \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, \emptyset) \right) \\ &= \left( \mathcal{M}(b, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \sqcup_{|J|=2} \mathcal{M}'_J \right) \sqcup \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \left( \sqcup_{|J|=1} \mathcal{M}'_J \sqcup M \right) \right) \\ &= \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}'_1 \sqcup \mathcal{V}_{deg}, \end{aligned}$$

où

- $\mathcal{V}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}^1(a, a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset)$ ,
- $\mathcal{V}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f'), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \mathcal{M}'(b', a') \times \mathcal{M}(a', \emptyset)$ ,
- $\mathcal{V}_{deg} = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} M$ .

On distingue ainsi trois types de sommets. Comme  $\mathcal{M}^1(a, a')$  et  $\mathcal{M}'(a', \emptyset)$  ne contiennent tous deux qu'une unique trajectoire, il y a exactement deux sommets de type  $\mathcal{V}_0$ . On compte enfin deux sommets de type  $\mathcal{V}_{deg}$ , qui sont les extrémités de l'unique segment  $\mathcal{E}_{deg}$ .

Ces sommets présentent à nouveau une singularité « haute » et une singularité « basse » : pour ceux de type  $\mathcal{V}_0$  et  $\mathcal{V}'_1$ , ces singularités correspondent

7. Notons que les points  $\text{Ev}_+(\beta_{\pm})$  n'appartiennent a priori pas à  $\text{Crit}_0(f')$ , ce qui est un obstacle à l'utilisation de ces pas au vu de nos définitions des générateurs du groupe fondamental de Morse. On a choisi de contourner leur utilisation au cours de ce chapitre, mais ce point sera traité dans le cadre Morse stable lors de la section 4.2.

aux deux brisures sur des points critiques, mais les sommets de type  $\mathcal{V}_{deg}$  ont comme singularité haute une brisure en un point critique et comme singularité basse une trajectoire définie sur un singleton et non plus sur un intervalle plus général. Les arêtes « hautes » seront ainsi celles de type  $\mathcal{E}'_0$  (voir la figure 2.13)

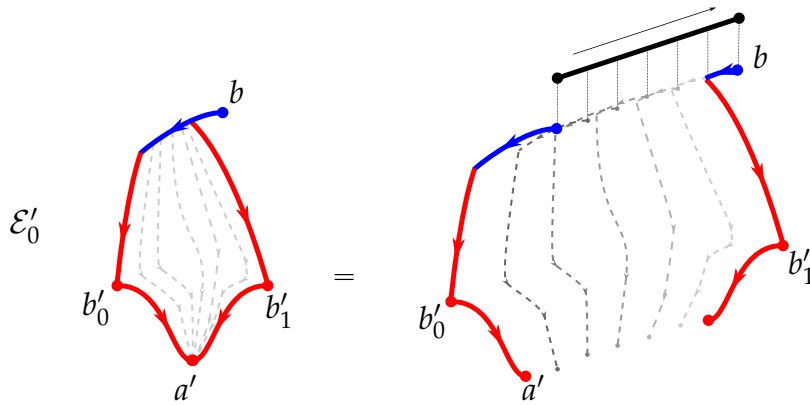


FIGURE 2.13 – Arête haute de type  $\mathcal{E}'_0$ .

et  $\mathcal{E}_{deg}$  (voir la figure 2.14), tandis que les arêtes « basses » seront celles de type

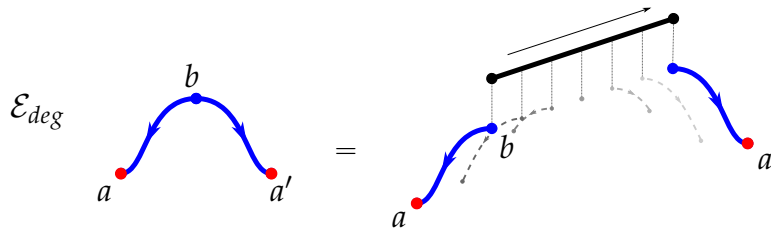


FIGURE 2.14 – Arête haute de type  $\mathcal{E}_{deg}$ .

$\mathcal{E}_0$  (voir la figure 2.15) et  $\mathcal{E}'_1$  (voir la figure 2.16).

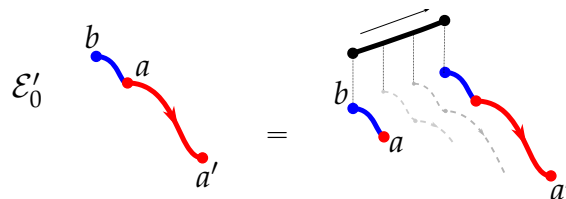
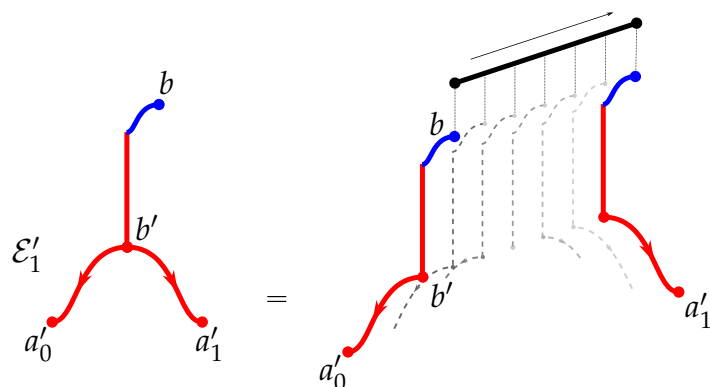


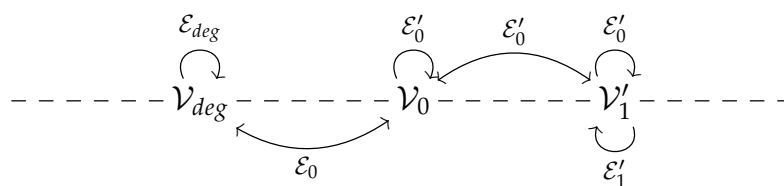
FIGURE 2.15 – Arête basse de type  $\mathcal{E}_0$ .

Là encore, même si ce n'est pas nécessaire pour construire le lacet de Morse final, on donne en détail la manière dont arêtes et sommets sont reliés dans ces nouveaux graphes.



FIGURE 2.16 – Arête basse de type  $\mathcal{E}'_1$ .

**Proposition 2.3.** *Le graphe cyclique induit par le bord d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, \emptyset)$  a comme combinatoire celle d'un cycle du graphe*



*alternant entre arête haute (au-dessus de la démarcation en pointillés) et arête basse (en-dessous de la démarcation en pointillé), et contenant une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$ .*

*Démonstration.* Comme

$$\begin{aligned}
& \partial^1 \overline{\mathcal{E}}_0 \\
&= \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \partial^1 \overline{\mathcal{M}}^1(a, \emptyset) \\
&= \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(a, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, \emptyset) \\
&= \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \left( \sqcup_{|J|=1} \mathcal{M}'_J \sqcup M \right) \\
&= \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \left( \sqcup_{e \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}'(\emptyset, a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset) \sqcup M \right) \\
&= \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_{deg},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
& \partial^1 \overline{\mathcal{E}}'_0 \\
&= \sqcup_{a' \in \text{Crit}_0(f')} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}^1(b, a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset) \\
&= \sqcup_{a' \in \text{Crit}_0(f')} \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \partial^0 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, a') \sqcup \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(\emptyset, a') \right) \times \mathcal{M}'(a', \emptyset) \\
&= \sqcup_{a' \in \text{Crit}_0(f')} \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \boxtimes_{\text{Ev}} \mathcal{M}'(\emptyset, a') \sqcup \mathcal{M}(b, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} \sqcup_{|J|=1} \mathcal{M}'_J \right) \times \mathcal{M}'(a', \emptyset) \\
&= \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}'_1,
\end{aligned}$$

qu'ensuite

$$\begin{aligned}
& \partial^1 \overline{\mathcal{E}}'_1 \\
&= \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(b', \emptyset) \\
&= \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \sqcup_{|J|=1} \mathcal{M}'_J \\
&= \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \sqcup_{a', \text{ind}(a')=0} \mathcal{M}(b', a') \times \mathcal{M}(a', \emptyset) \\
&= \mathcal{V}'_1
\end{aligned}$$

et qu'enfin

$$\begin{aligned}
& \partial^1 \overline{\mathcal{E}}_{deg} \\
&= \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} M \\
&= \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \boxtimes_{\text{Ev}} M \\
&= \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \boxtimes_{\text{Ev}} M \\
&= \mathcal{V}_{deg},
\end{aligned}$$

il suffit de remarquer qu'une arête de  $\mathcal{E}_0$  a nécessairement un sommet de type  $\mathcal{V}_0$  et un sommet de type  $\mathcal{V}_{deg}$  pour obtenir le graphe abstrait de l'énoncé. Il reste à voir que deux arêtes consécutives ne peuvent pas être du même type. On montre que ça ne peut pas être le cas en raisonnant sur le type du sommet commun aux deux arêtes.

1. Si le sommet est de type  $\mathcal{V}_0$  : on note

$$(\beta, (\gamma, \gamma'), \alpha') \in \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}^1(a, a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset)$$

ce sommet. S'il est l'extrémité d'une arête  $\{\tilde{\beta}\} \times \mathcal{M}^1(\tilde{a}, \emptyset)$  de type  $\mathcal{E}_0$ , alors nécessairement  $\tilde{\beta} = \beta$  puis  $\tilde{a} = a$ . Réciproquement, il est l'extrémité de l'arête  $\{\beta\} \times \mathcal{M}^1(a, \emptyset)$ . Ainsi, la seconde arête d'extrémité ce sommet est de type  $\mathcal{E}'_0$ .

2. Si le sommet est de type  $\mathcal{V}'_1$  : on note

$$((\gamma, \gamma'), \beta', \alpha') \in \mathcal{M}^1(b, b') \times \mathcal{M}'(b', a') \times \mathcal{M}'(a', \emptyset)$$

ce sommet. S'il est l'extrémité d'une arête  $\{(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}')\} \times \mathcal{M}'(\tilde{b}', \emptyset)$  de type  $\mathcal{E}_1$ , alors nécessairement  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}') = (\gamma, \gamma')$  puis  $\tilde{b}' = b'$ . Réciproquement, il est l'extrémité de l'arête  $\{(\gamma, \gamma')\} \times \mathcal{M}(b', \emptyset)$ . Ainsi, la seconde arête d'extrémité ce sommet est de type  $\mathcal{E}'_0$ .

3. Si le sommet est de type  $\mathcal{V}_{deg}$  : on note

$$(\beta, \alpha, \alpha(+)) \in \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} M$$

ce sommet. Alors il est à la fois extrémité de l'unique arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$  et de l'arête  $\{\beta\} \times \mathcal{M}^1(a, \emptyset)$  de type  $\mathcal{E}_0$ .

□

À un pas de Morse  $P = \overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)^\varepsilon$  pour les données  $(f, g)$ , on associe alors un chemin de Morse pour les données  $(f', g')$  en concaténant les pas induits par les arêtes basses. Plus précisément :

1. On considère l'arête dégénérée  $e_{-2} = \mathcal{M}(b, \emptyset)_{deg}$  orientée de sorte à ce que le difféomorphisme  $\mathcal{M}(b, \emptyset)^\varepsilon \rightarrow e_{-2}$  **renverse** l'orientation  $\varepsilon$ , et on la complète en la suite finie ordonnée  $e_{-2}, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}, e_{2k+1}$  des arêtes orientées du graphe cyclique.
2. L'arête  $e_{2i-1}$ ,  $1 \leq i \leq k$ , est du type  $\mathcal{E}'_1$  et donc de la forme  $\{\gamma_i\} \times \mathcal{M}'(b'_i, \emptyset)$ . On note  $\varepsilon_i \in \{-, +\}$  l'orientation telle que le difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}'(b'_i, \emptyset)^{\varepsilon_i} & \longrightarrow & e_{2i-1} \\ \beta & \longmapsto & (\gamma_i, \beta) \end{array}$$

**respecte** l'orientation.

3. On pose  $\Phi(P) = \prod_{i=1}^k \mathcal{M}'(b'_i, \emptyset)^{\varepsilon_i}$ .

La figure 2.17 présente une configuration possible, où l'on remarque que le chemin de Morse stable obtenu est bien celui en laissant couler le chemin induit par  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$  par le flot.

Notre choix de ne pas utiliser le pas  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)$  nous impose ici une légère modification : on note  $\star' \in \text{Crit}_0(f')$  le point tel que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi^t(\star) = \star'$ . Le lacet de Morse que l'on obtient pour les données  $(f', g')$  est alors basé en  $\star'$ . L'utilisation des pas  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^\pm$  aurait permis de continuer à baser le groupe fondamental en  $\star$ , étant donné que la première et la dernière arête de type  $\mathcal{E}_0$  que l'on rencontre sont respectivement  $\overline{\mathcal{M}}(\star, \emptyset)^+$  et  $\mathcal{M}(\star, \emptyset)^-$ .

---

8. Il faut pour cela faire l'hypothèse générique que  $\star$  vérifie la condition (2.1) : c'est le cas comme c'est un point critique d'indice 0.

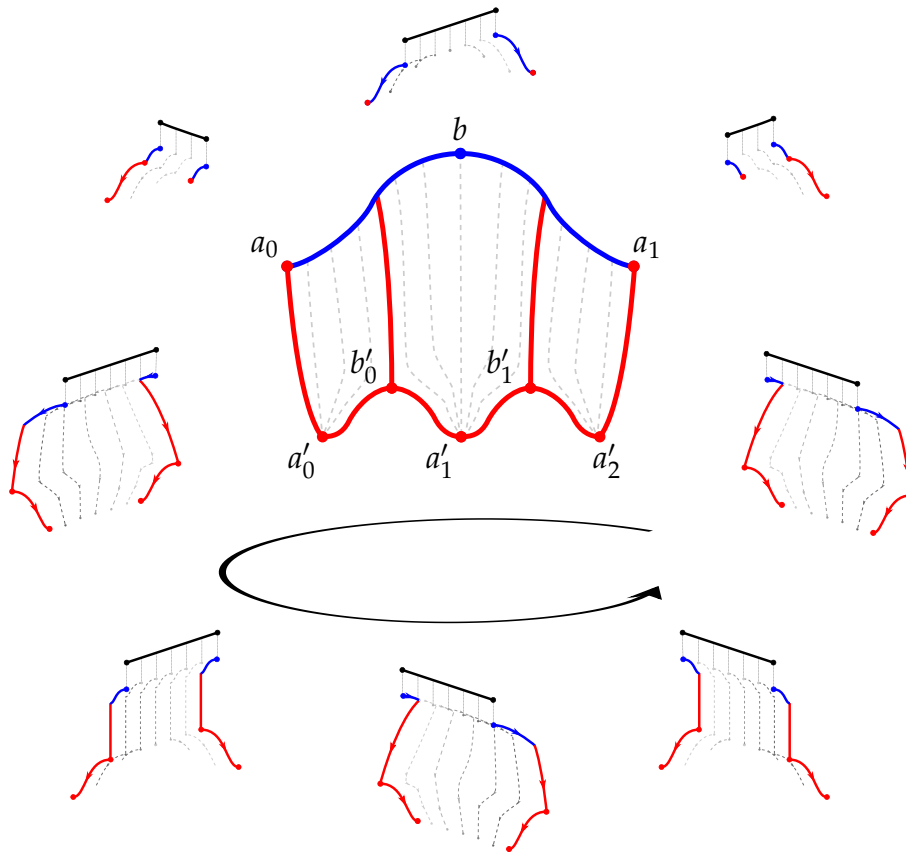


FIGURE 2.17 – Parcours du bord de  $\overline{\mathcal{M}^1}(b, \emptyset)$ .

**Proposition 2.4.** *Le morphisme de descente*

$$\Phi : \begin{array}{l} \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \longrightarrow \mathcal{L}(M, f', g' ; \star') \\ \ell = p^1 \dots p^k \longmapsto \Phi(p^1) \dots \Phi(p^k) \end{array}$$

*est bien défini.*

*Démonstration.* Le fait que les pas soient bien consécutifs découle à nouveau du choix cohérent des orientations et du fait que l'application  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}^1}(b, \emptyset) \rightarrow M$  soit constante le long des arêtes de type  $\mathcal{E}'_0$ .  $\square$

On a en fait mieux :

**Théorème 2.3.** *Le morphisme de descente  $\Phi : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \mathcal{L}(M, f', g' ; \star')$  passe au quotient et induit un isomorphisme  $\Phi : \pi_1(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M, f', g' ; \star')$ .*

*Démonstration.* La preuve que le morphisme passe au quotient se base sur une construction analogue à celle du théorème 2.2 : l'application d'évaluation sur un

disque  $\overline{\mathcal{M}(c, \emptyset)}$  induisant une relation  $\ell$  est homotope à une application dont l'image est l'union de l'évaluation de ce disque et des évaluations des trajectoires des  $\overline{\mathcal{M}^1(b_i, \emptyset)}$ , où les  $P^i = \overline{\mathcal{M}(b_i, \emptyset)}$  sont les lettres de  $\ell$ . Cette dernière application est à son tour homotope à une application dont l'image est un disque de la forme  $\cup_j \text{Ev}_+(\overline{\mathcal{M}^1(b_j, \emptyset)})$ , et on conclut par une récurrence similaire.

Comme le morphisme de descente préserve la classe d'homotopie du lacet  $\text{Ev}(\ell)$ , ce qui revient à la commutativité du diagramme suivant<sup>9</sup>

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M, f, g ; \star) & \xrightarrow{\Phi} & \pi_1(M, f', g' ; \star') \\ \text{Ev} \downarrow & & \downarrow \text{Ev} \\ \pi_1(M ; \star) & \xrightarrow{\psi} & \pi_1(M ; \star') \end{array}$$

où les deux flèches verticales et la flèche du bas sont des isomorphismes, on en déduit que le morphisme de descente est un isomorphisme.  $\square$

## 2.8 Isomorphisme entre groupes fondamentaux de Morse de tores penchés

On considère en plus du tore penché  $(\mathbb{T}^2, h)$  de la section 2.6 un second tore penché, le même tore  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mais muni cette fois-ci de la restriction de la projection sur la droite de vecteur directeur  $(1, 0, -1)$ , notée  $\tilde{h}$ . On représente sur la figure 2.18 les trajectoires de gradient de  $h$  et de  $\tilde{h}$  pour la métrique induite  $g$  sur un domaine fondamental. Les fonctions  $h$  et  $\tilde{h}$  sont de Morse et le qua-

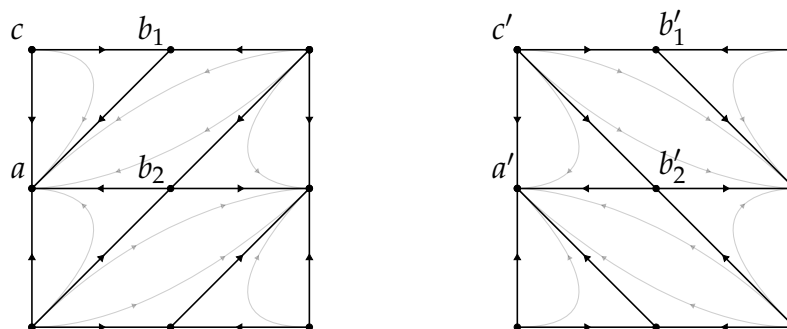


FIGURE 2.18 – Champs de vecteurs sur les tores penchés.

druplet  $(h, g, \tilde{h}, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale hybride. La figure 2.19

9. L'application  $\psi$  est la conjugaison par un chemin arbitraire reliant  $\star'$  à  $\star$ .

précise les orientations fixées pour les espaces  $\mathcal{M}'(r', \emptyset)$ , celles sur les espaces  $\mathcal{M}(r, \emptyset)$  restant celles de la figure 2.11. On a déterminé dans la section 2.6 que

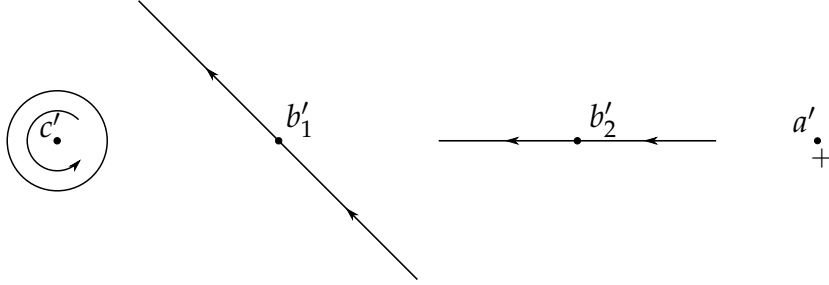


FIGURE 2.19 – Les orientations fixées des espaces de modules  $\mathcal{M}'(r', \emptyset)$ .

$\mathcal{L}(\mathbb{T}, h, g ; \star) \simeq \langle b_1^+, b_2^+ | \emptyset \rangle$  et  $\pi_1(\mathbb{T}, h, g ; \star) \simeq \langle b_1^+, b_2^+ | [b_1^+, b_2^+] \rangle$ . On obtient par un calcul similaire que

$$\mathcal{L}(\mathbb{T}, \tilde{h}, g ; \star') \simeq \langle (b'_1)^+, (b'_2)^+ | \emptyset \rangle$$

et

$$\pi_1(\mathbb{T}, \tilde{h}, g ; \star') \simeq \langle (b'_1)^+, (b'_2)^+ | [(b'_1)^+, (b'_2)^+] \rangle.$$

Pour calculer le morphisme  $\Phi : \pi_1(\mathbb{T}, h, g ; \star) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}, \tilde{h}, g ; \star')$ , il suffit donc de déterminer  $\Phi(b_1^+)$  et  $\Phi(b_2^+)$ . Les figures 2.20 et 2.21 illustrent les parcours des bords des espaces de modules correspondants, où l'on récupère les mots  $\Phi(b_1^+) = (b'_2)^-(b'_1)^+(b'_2)^-$  et  $\Phi(b_2^+) = (b'_2)^+$ . On vérifie comme attendu que

$$\Phi([b_1^+, b_2^+]) = (b'_2)^-[(b'_1)^+, (b'_2)^+](b'_2)^+ \in \overline{\mathcal{R}'_1 \cup \mathcal{R}'_2},$$

et l'isomorphisme de descente  $\Phi : \mathbb{Z}b_1^+ \oplus \mathbb{Z}b_2^+ \rightarrow \mathbb{Z}(b'_1)^+ \oplus \mathbb{Z}(b'_2)^+$  est donné par

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

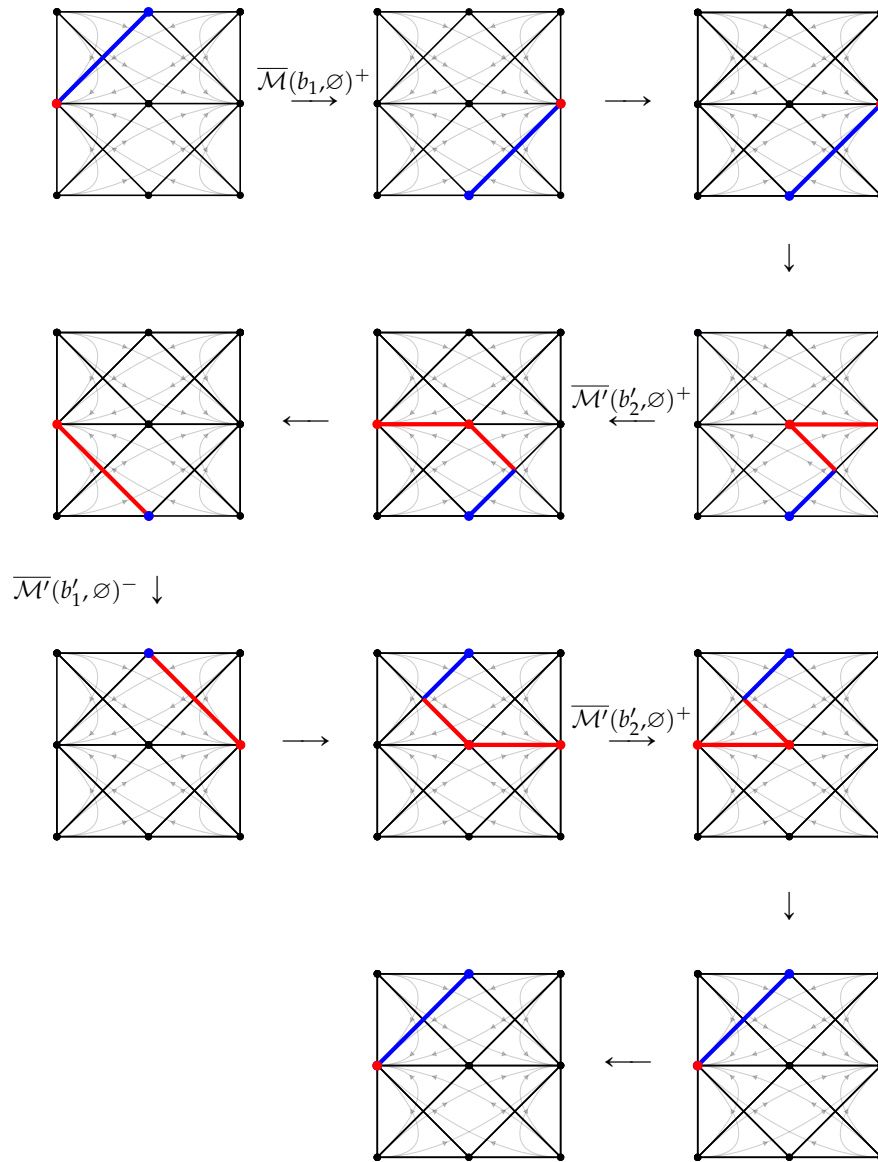


FIGURE 2.20 – Parcours du bord de  $\overline{\mathcal{M}}^1(b_1, \varphi)^+$ .

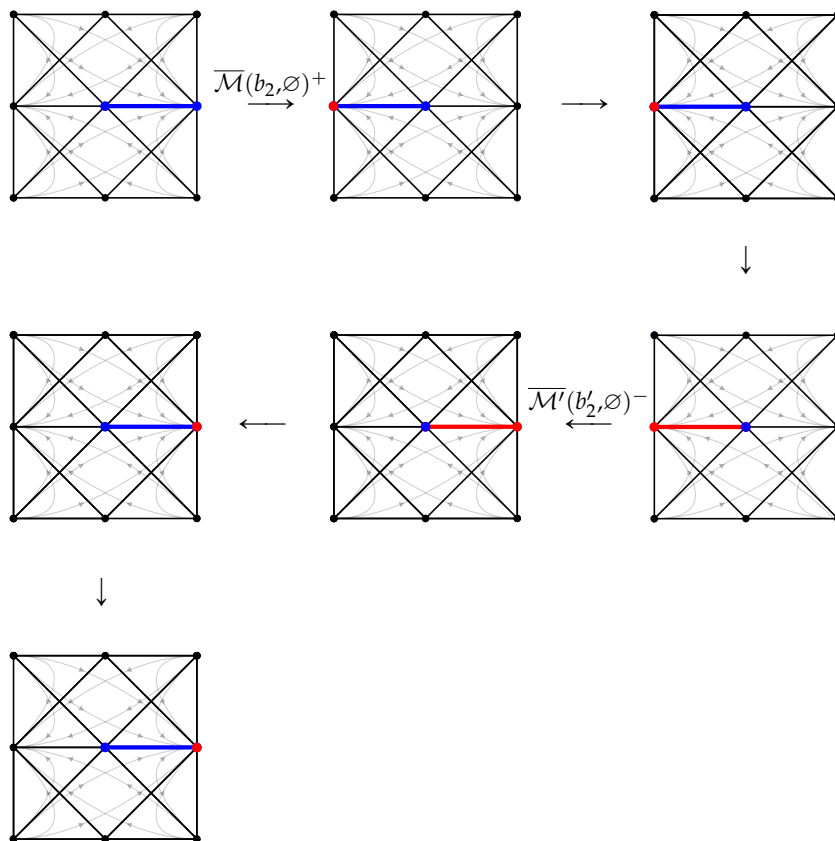


FIGURE 2.21 – Parcours du bord de  $\overline{\mathcal{M}}^1(b_2, \emptyset)^+$ .





**Deuxième partie**

**Groupe fondamental de Morse  
stable**



# Chapitre 3

## Espaces de modules en théorie de Morse stable

On présente dans ce chapitre les espaces de modules que l'on utilisera afin de généraliser le groupe fondamental de Morse au cadre Morse stable.

### 3.1 Théorie de Morse stable

Soit  $M$  une variété fermée connexe, et  $E = M \times \mathbb{R}^N = M \times \mathbb{R}^{N-} \times \mathbb{R}^{N+}$  l'espace total du fibré trivial  $E \rightarrow M$ . On note  $E^- = M \times \mathbb{R}^{N-} \times \{0\}^{N+}$  et  $E^+ = M \times \{0\}^{N-} \times \mathbb{R}^{N+}$ , des sous-fibrés de  $E$  vérifiant  $E = E^- \oplus E^+$ .

**Définition 3.1.** Une fonction  $f : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  est quadratique à l'infini s'il existe une forme quadratique  $q$ , définie positive sur  $\mathbb{R}^{N+}$  et définie négative sur  $\mathbb{R}^{N-}$ , telle que  $f(p, u) = \frac{1}{2}q(u)$  hors d'un compact de  $E$ .

**Définition 3.2.** Une fonction de Morse stable  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de Morse quadratique à l'infini.

**Définition 3.3.** Une métrique Riemannienne  $g$  est dite adaptée à  $f$  s'il existe des cartes de Morse  $(\varphi_c, U_c)$  au voisinage de chaque point critique  $c \in \text{Crit}(F)$  telles que  $g$  soit plate dans ces cartes, et si elle est standard à l'infini, i.e. il existe une métrique Riemannienne  $g'$  sur  $M$  telle que  $g = g' \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}}$  hors d'un compact de  $E$ .

**Proposition 3.1.** *Toute fonction de Morse stable admet une métrique adaptée.*

*Démonstration.* Soient  $(\varphi_c, U_c)$  des cartes de Morse fixées de chaque point critique  $c \in \text{Crit}(f)$ , et  $K$  un compact de  $E$  en dehors duquel  $f$  est quadratique. On note  $F = K \setminus \cup_c U_c$  et  $V$  un voisinage de  $F$  tel que  $V \cap \text{Crit}(f) = \emptyset$ . On considère

une partition de l'unité  $\psi_i$  subordonnée au recouvrement  $(\cup_c U_c) \cup (E \setminus K) \cup V$ , et on définit

$$g = \sum_c \psi_c \cdot \phi_c^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_{st}) + \psi_\infty \cdot (g' \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{st}) + \psi_0 \cdot g'',$$

où  $g'$  est une métrique Riemannienne sur  $M$  et  $g''$  une métrique Riemannienne sur la variété ouverte  $V$ . Par convexité,  $g$  est une métrique Riemannienne. En réduisant les  $U_c$  et  $K$  pour qu'ils n'intersectent plus  $V$ ,  $g$  vérifie alors les conditions de la définition.  $\square$

**Proposition 3.2.** *Soit  $f$  une fonction de Morse stable et  $g$  une métrique adaptée à  $f$ . Alors le flot  $\varphi$  de  $-\text{grad}_g f$  est complet. De plus, pour tout  $x \in E$ , soit  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi^t(x) \in \text{Crit}(f)$ , soit  $\varphi^\bullet(x)|_{[0, +\infty[}$  sort de tout compact de  $E$  (idem avec  $-\infty$ ).*

*Démonstration.* Si le flot n'est pas complet, alors d'après le théorème d'explosion en temps fini il sort de tout compact de  $E$ . Son flot coïncidera donc à partir d'un certain moment avec celui de

$$-\text{grad}_g f = 0 \oplus \text{grad}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} q = \left(0, \frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{n_-}}\right),$$

qui est complet car donné explicitement par

$$\psi(t, p, u_1, \dots, u_n) = (p, u_1 e^t, \dots, u_{n_-} e^t, u_{n_-+1} e^{-t}, \dots, u_n e^{-t}),$$

et c'est donc une contradiction. Supposons à présent qu'une trajectoire  $\gamma = \varphi^\bullet(x)$  ne tende vers aucun point critique en  $+\infty$  (le raisonnement est identique pour  $-\infty$ ). Elle possède alors un dernier temps d'entrée dans une carte de Morse  $t_0$ , en dehors desquelles il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\|\text{grad} f\| \geq \varepsilon$ . Alors,

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t) - f \circ \gamma(t_0) &= \int_{t_0}^t d(f \circ \gamma) \\ &= \int_{t_0}^t df(-\text{grad} f) ds \\ &= \int_{t_0}^t -\|\text{grad} f\|^2 ds \\ &\leq \int_{t_0}^t (-\varepsilon^2) ds \\ &= \varepsilon^2(t_0 - t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

ce qui est entraîné que  $\gamma$  sorte de tout compact de  $E$  sans quoi  $f(\gamma)$  serait borné.  $\square$

**Définition 3.4.** On note  $|c| = \text{ind}(c) - N_-$  l'indice normalisé d'un point critique  $c \in \text{Crit}(f)$ .

Le terme de « normalisé » s'explique par la remarque suivante : étant données une fonction de Morse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  et une forme quadratique  $q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $F = f \oplus q : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  (qu'on peut rendre quadratique à l'infini à l'aide d'une petite perturbation au voisinage de l'infini sans créer de nouveau point critique) a les mêmes points critiques que  $f$ , et l'indice normalisé de  $(x, 0) \in \text{Crit}(F)$  est l'indice classique du point critique  $x \in \text{Crit}(f)$ . Désormais,  $\text{Crit}_j(f)$  désignera l'ensemble des points critiques d'indice normalisé  $j$  de  $f$ .

## 3.2 Espaces de modules

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse stable et  $g$  une métrique adaptée à  $f$ . On note  $X = -\text{grad}_g f$  l'opposé du gradient de  $f$ ,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times M & \longrightarrow & M \\ (t, x) & \longmapsto & \varphi^t(x) \end{array}$$

le flot de générateur infinitésimal  $X$ . À des points critiques  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ , on peut associer les espaces suivants de trajectoire de gradient semi-infinies

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(b, +) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(b, \emptyset) ; \gamma(+)\in E^+\} \\ &= (\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow E)^{-1}(E^+) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(-, a) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, a) ; \gamma(-)\in E^-\} \\ &= (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow E)^{-1}(E^-). \end{aligned}$$

On considèrera aussi l'espace de trajectoires de gradient de longueurs finies

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(-, +) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) ; \gamma(-)\in E^-, \gamma(+)\in E^+\} \\ &= (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E^- \times E^+). \end{aligned}$$

Enfin, en notant  $E_p = \pi^{-1}(p)$  la fibre au-dessus d'un point  $p \in M$ , on considèrera les espaces de trajectoires de longueurs finies

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(p^-, +) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) ; \gamma(-)\in E_p^-, \gamma(+)\in E^+\} \\ &= (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E_p^- \times E^+), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(-, p^+) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) ; \gamma(-) \in E^-, \gamma(+)\in E_p^+\} \\ &= (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E^- \times E_p^+),\end{aligned}$$

et les espaces de trajectoires de gradient semi-infinies

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(b, p^+) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(b, \emptyset) ; \gamma(+)\in E_p^+\} \\ &= (\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow E)^{-1}(E_p^+),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(p^-, a) &= \{\gamma \in \mathcal{M}(\emptyset, a) ; \gamma(-)\in E_p^-\} \\ &= (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow E)^{-1}(E_p^-).\end{aligned}$$

La figure 3.1 présente des exemples de trajectoires de ces espaces de mo-

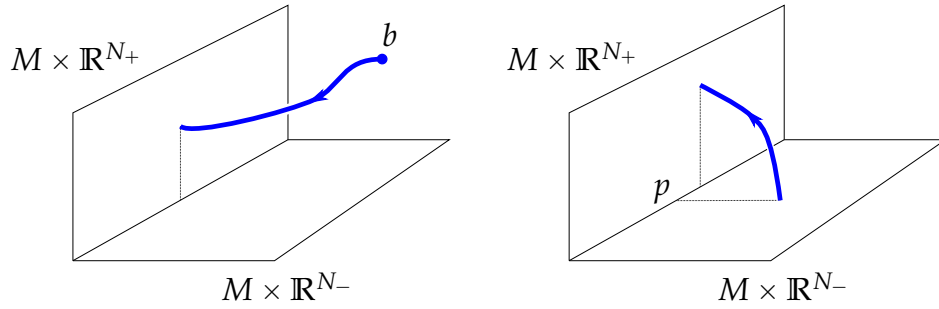


FIGURE 3.1 – Une trajectoire de  $\mathcal{M}(b, +)$  et une trajectoire de  $\mathcal{M}(p^-, +)$ .

dules.

Chacun des espaces précédent est muni de quatre applications d'évaluations : les deux évaluations dans l'espace total  $\text{Ev}_\pm$  données par  $\text{Ev}_\pm(\gamma) = \gamma(\pm)$ , et les évaluations dans la base  $\text{ev}_\pm$  données par  $\text{ev}_\pm = \pi \circ \text{Ev}_\pm$ , i.e.  $\text{ev}_\pm(\gamma) = (\pi \circ \gamma)(\pm)$ .

Dans la suite de ce chapitre, le symbole  $r$  désignera soit un point critique, soit  $p^-$  pour  $p$  un point de  $M$ , soit  $-$ , tandis que le symbole  $q$  désignera soit un point critique, soit  $p^+$  pour  $p$  un point de  $M$ , soit  $+$ .

**Définition 3.5.** Soit  $(f, g)$  un couple de données. On note

$$\mathcal{A}(f, g) = \{\text{ev}_+(\gamma) ; \gamma \in \mathcal{M}(a, +), a \in \text{Crit}_0(f)\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{A}(f, g)$  apparaîtra naturellement lors de l'étude des strates des espaces de modules dans le cadre Morse stable, voir le début la section 4.2.

**Définition 3.6.** On dit que le couple  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale stable si :

- $\forall (a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ ,
- $(\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow E) \pitchfork (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow E)$ ,
- $(\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, \emptyset) \rightarrow E) \pitchfork E^+$ ,
- $(\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, a) \rightarrow E) \pitchfork E^-$ ,
- $(\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \mathcal{M}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2) \pitchfork (E^- \times E^+)$ ,
- $\forall p \in \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ ,

$$\text{Les fibres } E_p^\pm = \{p\} \times \mathbb{R}^{N_\pm} \text{ sont régulières,} \quad (3.1)$$

au sens où

- $E_p^\pm \pitchfork (\text{Ev}_\pm : \mathcal{M}(-, +) \rightarrow E)$ ,
- $E_p^- \pitchfork (\text{Ev}_- : \mathcal{M}(-, a) \rightarrow E)$ ,
- $E_p^+ \pitchfork (\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(b, +) \rightarrow E)$ .

La condition (3.1) étend la condition (2.1) que l'on avait rencontrée dans le cadre Morse, et garantira la structure de variétés à faces des espaces  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$ , etc. , pour les points  $p$  de  $\{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ . La preuve du résultat suivant est reportée à la section 3.5.

**Théorème 3.1.** *Soit  $f$  une fonction de Morse stable fixée. L'ensemble des métriques  $g$  adaptées à  $f$  telles que  $(f, g)$  vérifie la propriété de Morse-Smale stable est générique.*

Les dimensions de ces variétés sont données par

- $\dim \mathcal{M}(b, +) = |b|$ ,
- $\dim \mathcal{M}(-, a) = n - |a|$ ,
- $\dim \mathcal{M}(-, +) = n + 1$ ,
- $\dim \mathcal{M}(p^-, +) = \dim \mathcal{M}(-, p^+) = 1$ ,
- $\dim \mathcal{M}(p^-, a) = -|a|$ ,
- $\dim \mathcal{M}(b, p^+) = |b| - n$ .

### 3.3 Compactification des espaces de modules

On peut à nouveau compactifier ces espaces de modules, et ces compactifications peuvent toujours être munies de structure de variétés à faces jouissant de bonnes propriétés.



**Définition 3.7.** Soit  $(a, b) \in \text{Crit}(f)^2$ . On étend les relations  $>$  et  $\geq$  par :

1. «  $b \geq +$  » = «  $b > +$  » := «  $\overline{\mathcal{M}}(b, +) \neq \emptyset$  »,
2. «  $- \geq a$  » = «  $- > a$  » := «  $\overline{\mathcal{M}}(-, a) \neq \emptyset$  ».

On convient que  $- \geq +$  et  $- > +$ .

**Définition 3.8.** Une suite critique  $I = (c_0, c_1, \dots, c_{k+1})$  est un  $(k+2)$ -uplet, élément de l'ensemble

$$\left( \text{Crit}(f) \cup \{-\} \cup M_{(f,g)} \right) \times \text{Crit}(f)^k \times \left( \text{Crit}(f) \cup \{+\} \cup M_{(f,g)} \right),$$

où  $k \in \mathbb{N}$ , tel que  $(c_0, c_{k+1}) \notin M_{(f,g)} \times M_{(f,g)}$  et tel que pour tout  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $c_i > c_{i+1}$ .

Pour une suite critique  $I = (c_0, c_1, \dots, c_{k+1})$ , on note toujours  $|I| = k$ , et

$$\mathcal{M}_I = \prod_{i=0}^k \mathcal{M}(c_i, c_{i+1}).$$

On note finalement

$$\overline{\mathcal{M}}(r, q) = \left( \bigsqcup_I \mathcal{M}_I \right) \bigsqcup A_{r,q},$$

où l'union est prise sur toutes les suites critiques de la forme  $I = (r, c_1, \dots, c_k, q)$ , et où

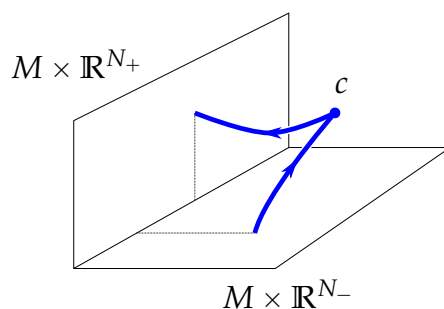
$$A_{r,q} = \begin{cases} M & \text{si } (r, q) = (-, +) \\ \{p\} & \text{si } (r, q) = (p^-, +) \text{ ou } (r, q) = (-, p^+) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} .$$

Ci-dessus, on interprète l'ensemble  $M$  comme l'ensemble des trajectoires de gradient  $\{\gamma \in C^\infty(\{0\}, E) ; \gamma(\pm) \in M, \gamma' = X \circ \gamma\}$  sur l'intervalle  $\{0\}$ , et de même on interprète  $\{p\}$  comme  $\{\gamma \in C^\infty(\{0\}, E) ; \gamma(\pm) = p, \gamma' = X \circ \gamma\}$ . La figure 3.2 présente un exemple de trajectoire de ces espaces de modules.

**Théorème 3.2.** Les ensembles  $\overline{\mathcal{M}}(r, q)$  peuvent être munis de structures de variétés compactes à faces vérifiant les point suivants :

1. la  $k$ -strate de  $\partial^k \overline{\mathcal{M}}(r, q)$  est donnée par  $(\bigsqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I) \sqcup A_{r,q}^k$ , où

$$A_{r,q}^k = \begin{cases} M & \text{si } k = 1, (r, q) = (-, +) \\ M & \text{si } k = 1, (r, q) = (p^-, +) \\ \{p\} & \text{si } k = 1, (r, q) = (-, p^+) \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases} ,$$

FIGURE 3.2 – Une trajectoire de  $\overline{\mathcal{M}}(-, +)$ .

2. Les applications  $\overline{\mathcal{M}}(r, c) \times \overline{\mathcal{M}}(c, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q)$  sont des plongements,
3. L'évaluation  $\text{Ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(r, q) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_+(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_k(+)$  est lisse,
4. L'évaluation  $\text{Ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(r, q) \rightarrow M$  définie par  $\text{Ev}_-(\gamma_0, \dots, \gamma_k) = \gamma_0(-)$  est lisse.

*Démonstration.* Commençons par montrer la compacité de ces espaces. On réitère mot pour mot la preuve du théorème 1.3 dans le cadre Morse stable, ajoutant les trajectoires brisées aux espaces de modules  $\mathcal{M}(b, a)$ ,  $\mathcal{M}(b, \emptyset)$ ,  $\mathcal{M}(\emptyset, a)$  et  $\mathcal{M}(\emptyset, \emptyset)$  pour en faire des variétés à faces, mais pas nécessairement compactes : seuls les espaces de modules de la forme  $\overline{\mathcal{M}}(b, a)$  le sont *a priori*. Notons  $\widetilde{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  (resp.  $\widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, a)$ ,  $\widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)$ ) les espaces qui étaient désignés par  $\overline{\mathcal{M}}(b, \emptyset)$  (resp.  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, a)$ ,  $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)$ ) dans le chapitre 1 pour souligner ce point. La compacité des espaces de modules de l'énoncé découle de la quadraticité à l'infini : on détaille l'argument pour l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(b, +)$ , les autres se traitant de manière similaire. On fixe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de trajectoires de  $\overline{\mathcal{M}}(b, +)$ . On peut alors extraire de la suite  $(\text{Ev}_+(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente  $(\text{Ev}_+(\gamma_{\phi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ , sans quoi on aurait l'existence d'un  $n_0 \in \mathbb{N}$  pour lequel la trajectoire  $\gamma_{n_0} = (\gamma_{n_0}^1, \dots, \gamma_{n_0}^k)$  vérifierait  $\gamma_{n_0}^k(t) = (\kappa_1, 0, \kappa_2 e^{-t})$  pour tout  $t < 0$  et  $\kappa_1 \in M, \kappa_2 \in \mathbb{R}^{N_+}$ , i.e. la trajectoire  $\gamma_{n_0}^k$  coïnciderait avec une ligne de gradient de  $-q$  sur  $E^+$  en temps négatif, et le fait qu'alors  $\gamma_{n_0}^k(-) \notin \text{Crit}(f)$  serait une contradiction. On note  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  au lieu de  $(\gamma_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite extraite de trajectoires, puis  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ev}_+(\gamma_n)$  et  $c_1, \dots, c_k$  les points critiques dans  $f^{-1}(]f(l), f(b)[)$  ordonnés de sorte à ce que  $f(b) > f(c_1) > \dots > f(c_k) > f(l)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand et  $\varepsilon > 0$  assez petit, les évaluations de  $\gamma_n$  dans les niveaux  $L_i = f^{-1}(f(c_i) + \varepsilon)$  sont bien définies (ce sont des hypersurfaces transverses au flot). En utilisant à nouveau la quadraticité à l'infini, on extrait successivement des suites de trajectoires telles que les suites  $(\text{Ev}_{L_i}(\gamma_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers des  $x_i \in E$ , qui sont tous éléments d'une

trajectoire commune  $\gamma_\infty \in \overline{\mathcal{M}}(b, +)$ , limite d'une suite extraite de la suite initiale  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Les structures de variétés à faces découlent quant à elles des descriptions suivantes :

- $\overline{\mathcal{M}}(b, +) = (\text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \rightarrow E)^{-1}(E^+)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(-, a) = (\text{Ev}_- : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, a) \rightarrow E)^{-1}(E^+)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(-, +) = (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E^- \times E^+)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +) = (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E_p^- \times E^+)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(-, p^+) = (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E^- \times E_p^+)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(p^-, a) = (\text{Ev}_- : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, a) \rightarrow E)^{-1}(E_p^-)$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}(b, p^+) = (\text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \rightarrow E)^{-1}(E_p^+)$ ,

La propriété de Morse-Smale stable entraîne la transversalité nécessaire pour faire des espaces précédent des variétés à coins. En effet, en énumérant les différents types de strates en jeu, on constate que :

1. la condition

$$(\partial^k \text{Ev}_+ : \underbrace{\mathcal{M}(b, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_k, \emptyset)}_{\subset \sqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I = \partial^k \widetilde{\mathcal{M}}(b, \emptyset)} \rightarrow E) \pitchfork E^+$$

est équivalente à ce que  $(\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(c_k, \emptyset) \rightarrow E) \pitchfork E^+$ ,

2. la condition

$$(\partial^k \text{Ev}_- : \underbrace{\mathcal{M}(\emptyset, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_k, a)}_{\subset \sqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I = \partial^k \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, a)} \rightarrow E) \pitchfork E^-$$

est équivalente à ce que  $(\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c_1) \rightarrow E^2) \pitchfork E^-$ ,

3. la condition

$$(\partial^k (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+) : \underbrace{\mathcal{M}(\emptyset, c_1) \times \cdots \times \mathcal{M}(c_k, \emptyset)}_{\subset \sqcup_{|I|=k} \mathcal{M}_I = \partial^k \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)} \rightarrow E) \pitchfork (E^- \times E^+)$$

est équivalente à ce que

$$(\text{Ev}_- : \mathcal{M}(\emptyset, c_1) \rightarrow E) \pitchfork E^- \text{ et } (\text{Ev}_+ : \mathcal{M}(c_k, \emptyset) \rightarrow E) \pitchfork E^+,$$

4. la condition

$$(\partial^0(\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+) : \underbrace{\mathcal{M}(\emptyset, \emptyset)}_{=\partial^0 \tilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset)} \rightarrow E^2) \pitchfork (E^- \times E^+)$$

apparaît précisément dans la condition de Morse-Smale stable,

5. la condition

$$(\partial^1(\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+) : \underbrace{\subset \partial^1 \tilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) M}_{\subset \partial^1 \tilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) M} \rightarrow E^2) \pitchfork (E^- \times E^+)$$

est automatique car correspondant à  $(\Delta : E \rightarrow E^2) \pitchfork (E^- \times E^+)$ ,

6. les conditions portant sur les strates des espaces de modules encore non traités  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$ ,  $\overline{\mathcal{M}}(-, p^+)$ ,  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, a)$  et  $\overline{\mathcal{M}}(b, p^+)$  se traitent de la même manière que les conditions précédentes, un point  $p$  vérifiant la condition (3.1) remplissant précisément les conditions de transversalité requises.

□

**Remarque 3.1.** Les espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$  ne sont plus formés d'un seul segment comme dans le cadre Morse, mais sont des unions finies de segments. Les bords de ces segments sont soit des couples de trajectoires éléments d'un produit  $\mathcal{M}(p^-, a) \times \mathcal{M}(a, +)$ , pour lesquels on a forcément que  $-|a| \geq 0$  et  $|a| \geq 0$ , i.e.<sup>1</sup>  $|a| = 0$ , soit la trajectoire constante  $\gamma^p : \{0\} \rightarrow E$ ,  $\gamma(0) = p$ . On notera  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}^+$  le segment contenant cette trajectoire constante, orientée de sorte que  $\gamma^p$  soit son bord négatif.

### 3.4 Espaces de modules à rebonds

Les preuves des résultats énoncés dans cette section sont à nouveau reportées à la section 3.5.

#### Espaces de modules avec un point marqué

Soit  $(f, g)$  un couple vérifiant la propriété de Morse-Smale. On définit

$$\overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, q) = \tilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \underset{\text{Ev}}{\boxtimes} \tilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q).$$

---

1. On obtient de même que les points critiques  $b$  intervenant dans le bord des segments  $\overline{\mathcal{M}}(-, p)$  vérifient  $|b| = n$ .

Ces espaces sont compacts à la manière de la preuve du théorème 3.2, et ce sont des variétés à faces à la manière de la preuve de la proposition 1.6. On identifiera ces espaces avec leurs images par les plongements

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, q) &\longrightarrow \overline{\mathcal{M}}(r, q) \times E \\ (\gamma_-, \gamma_+) &\longmapsto (\gamma, x) \end{aligned} \quad ,$$

où  $\gamma \in \overline{\mathcal{M}}(r, q)$  est la trajectoire sous-jacente (non paramétrée si  $(r, q) = (b, a)$ , paramétrée sinon) et  $x = \gamma_-(+) = \gamma_+(-) \in \text{Im}(\gamma)$ . Les espaces  $\overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, q)$  sont munis des applications d'évaluation suivantes :

**Définition 3.9.** On note  $\text{Ev}_{\bullet} : \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, q) \rightarrow E$  l'application lisse donnée par

$$\text{Ev}_{\bullet} = \text{Ev}_+ \circ p_1 \circ i = \text{Ev}_- \circ p_2 \circ i,$$

où

$$i : \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, q) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$$

est l'inclusion et

$$p_1 : \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \text{ et } p_2 : \widetilde{\mathcal{M}}(r, \emptyset) \times \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, q)$$

sont les projections canoniques. On note  $\text{ev}_{\bullet} = \pi \circ \text{Ev}_{\bullet}$ .

### Espaces de modules à rebonds polyfides

On s'intéresse aux espaces de trajectoires qui vont faire intervenir plusieurs jeux de données<sup>2</sup> ( $f_i : M \times \mathbb{R}^{N^i} \rightarrow \mathbb{R}, g_i)_{0 \leq i \leq j}$ , à la manière des espaces de modules hybrides de la section 1.8. La condition, qui était alors que les trajectoires pour deux jeux de données consécutifs devaient arriver et repartir du même point  $p \in M$ , est adaptée en demandant à ce que les trajectoires de deux jeux de données consécutifs arrivent sur et repartent d'une fibre  $E_p$  pour le même point  $p \in M$ . On note que le chemin obtenu en concaténant les projections de ces trajectoires sur  $M$  est continu. Lorsque la fonction  $f$  est répétée plusieurs fois dans ce jeu de données, on souhaiterait pouvoir utiliser la même métrique  $g$  à chaque facteur correspondant, mais il n'est en général pas possible d'assurer la généricité pour de telles configurations.

Posons

$$\boxed{\boxtimes}_{\text{ev}} = \times_{\text{ev}_{\bullet}, M, \text{ev}_-}$$

---

2. On remarque que l'on autorise les fonctions  $f_i$  à avoir différentes puissances  $\mathbb{R}^{N^i} = \mathbb{R}^{N^i_+} \times \mathbb{R}^{N^i_-}$  dans leurs sources.

et étendons l'application  $ev_\bullet$  aux espaces de modules sans point marqué en décrétant alors  $ev_\bullet = ev_+$ . Fixons des couples  $(f_i, g_i)_{0 \leq i \leq j}$  de fonctions de Morse stable et de métriques adaptées. On pose

$$\overline{\mathcal{M}}_\lambda^j(r, q) = \overline{\mathcal{M}}_{\bullet(f_0, g_0)}(r, +) \boxtimes_{ev} \left( \boxtimes_{ev_{k=1}}^{j-1} \overline{\mathcal{M}}_{\bullet(f_k, g_k)}(-, +) \right) \boxtimes_{ev} \overline{\mathcal{M}}_{\bullet(f_j, g_j)}(-, q).$$

La figure 3.3 présente un exemple de trajectoire de ces espaces de modules :

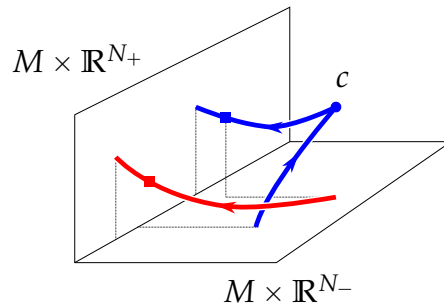


FIGURE 3.3 – Une trajectoire de  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^1(-, +)$ .

la partie de la trajectoire correspondant aux premières données étant colorée en bleu, la partie correspondant aux secondes données en rouge, et le point marqué sur chaque trajectoire étant figuré par un carré.

**Théorème 3.3.** Soit  $(f_i)_{0 \leq i \leq j}$  des fonctions de Morse stable fixées. L'ensemble des métriques adaptées  $(g_i)_{0 \leq i \leq j}$  telles que les espaces de modules à rebonds polyfides rattachés aux données  $(f_i, g_i)_{0 \leq i \leq j}$  soient des variétés à faces compactes est générique.

On dira toujours à propos de données  $(f_i, g_i)_{0 \leq i \leq j}$  génériques au sens du théorème précédent qu'elles vérifient la propriété de Morse-Smale.

Une sous-variété des espaces  $\overline{\mathcal{M}}_\lambda^j(r, q)$ , celle constituée des trajectoires dont chaque point marqué coïncide avec l'arrivée de la trajectoire qui lui est attachée, nous servira à définir l'analogue du morphisme de descente dans le cadre Morse stable.

**Corollaire 3.1.** Soit  $(f_i)_{0 \leq i \leq j}$  des fonctions de Morse stable fixées. L'ensemble des métriques adaptées  $(g_i)_{0 \leq i \leq j}$  telles que les espaces de modules

$$\overline{\mathcal{M}}^j(r, q) = \{(\gamma_0, x_0, \dots, \gamma_j, x_j) \in \overline{\mathcal{M}}_\lambda^j(r, q) ; \forall 0 \leq i \leq j, x_i = \gamma_i(+)\}$$

rattachés aux données  $(f_i, g_i)_{0 \leq i \leq j}$  soient des variétés à faces compactes est générique.

**Remarque 3.2.** L'espace  $\overline{\mathcal{M}}^j(r, q)$  peut s'exprimer comme un produit fibré d'espaces de modules sans point marqué à travers le difféomorphisme

$$\overline{\mathcal{M}}^j(r, q) \simeq \overline{\mathcal{M}}_{(f_0, g_0)}(r, +) \boxtimes_{\text{ev}} \left( \boxtimes_{\text{ev}_{k=1}}^{j-1} \overline{\mathcal{M}}_{(f_k, g_k)}(-, +) \right) \boxtimes_{\text{ev}} \overline{\mathcal{M}}_{(f_j, g_j)}(-, q).$$

On privilégiera ce point de vue lorsqu'on le rencontrera.

### Espace de modules à rebonds polyfides pour des données répétées : un cas particulier

On verra lors de la dernière section de ce chapitre que les espaces de modules à rebonds polyfides pour des données répétées  $(f, g)_{0 \leq i \leq j}$  ne sont pas nécessairement génériquement des variétés à faces. Ceci sera quand même vérifié pour le cas particulier  $r = b \in \text{Crit}(f)$ ,  $q = +$  et  $j = 2$  :

**Proposition 3.3.** Soit  $f$  une fonction de Morse stable fixée, et soit  $b \in \text{Crit}(f)$ . L'ensemble des métriques adaptées  $g$  telles que les espaces

$$\overline{\mathcal{M}}_{\lambda}^2(b, +) = \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(f, g)(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(f, g)(-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}(f, g)(-, +)$$

soient des variétés à faces compactes est générique.

### Espaces de modules à rebonds

On définit finalement les espaces topologiques compacts

$$\overline{\mathcal{M}}_{\bullet}^j(r, q) = \overline{\mathcal{M}}_{\lambda}^j(r, q) / \sim,$$

où  $((\gamma_0, x_0), \dots, (\gamma_j, x_j)) \sim ((\beta_0, y_0), \dots, (\beta_j, y_j))$  si et seulement si

$$\forall i \in \{0, \dots, j\}, \{x \in \overline{\text{Im}(\gamma_i)} ; f(x) \geq f(x_j)\} = \{y \in \overline{\text{Im}(\beta_i)} ; f(y) \geq f(y_j)\}.$$

Autrement dit, deux éléments sont identifiés dans cet espace si et seulement si pour tout  $i \in \{0, \dots, j\}$ , les trajectoires  $\gamma_i$  et  $\beta_i$  coïncident au-dessus de leurs points marqués  $x_i$  et  $y_i$ , qui sont de fait égaux.

**Remarque 3.3.** La restriction de la projection

$$\overline{\mathcal{M}}_{\lambda}^j(r, q) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{\bullet}^j(r, q) / \sim$$

à  $\overline{\mathcal{M}}^j(r, q)$  est bijective.

### 3.5 Généricité

On reprend les notations de la section 1.9. On considèrera en plus des espaces de chemins précédents les espaces de chemins avec un point marqué

$$\mathcal{P}_\bullet(r, q) = \{(\gamma, x) \in \mathcal{P}(r, q) \times \mathbb{R} ; x \in \text{Im}(\gamma)\}$$

et  $\mathcal{L}_\bullet(r, q) \rightarrow \mathcal{P}_\bullet(r, q)$  les fibrés correspondants. On note de la même manière  $\widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(r, q) = (F^f)^{-1}(0_{\mathcal{L}_\bullet(r, q)})$ . En appliquant le lemme 1.3, on obtient que les espaces

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(b, +) &= (\text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(b, \emptyset) \rightarrow E)^{-1}(E^+), \\ \widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(-, a) &= (\text{Ev}_- : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, a) \rightarrow E)^{-1}(E^-),\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(-, +) = (\text{Ev}_- \times \text{Ev}_+ : \widetilde{\mathcal{M}}(\emptyset, \emptyset) \rightarrow E^2)^{-1}(E^- \times E^+)$$

sont des variétés, puis que les espaces

$$\widetilde{\mathcal{M}}^j(r, q) = E^{-1}(\Delta^j)$$

en sont à leur tour, où  $E : \widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(r, +) \times \left(\times_{k=1}^{j-1} \widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(-, +)\right) \times \widetilde{\mathcal{M}}_\bullet(-, q) \rightarrow M^{2j}$  est donnée par

$$E(g_0, \gamma_0, x_0, \dots, g_j, \gamma_j, x_j) = (\text{ev}_+(\gamma_0), \text{ev}_-(\gamma_1), \text{ev}_+(\gamma_1), \dots, \text{ev}_+(\gamma_{j-1}), \text{ev}_-(\gamma_j))$$

est transverse à  $\Delta^j = \{(x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_j, x_j) \in M^{2j} ; x_i \in M\} \subset M^{2j}$ . Le lemme de transversalité à paramètres fournit un ensemble générique

$$\Sigma_{(r, q)}^{(f_i)_{0 \leq i \leq j}},$$

et l'ensemble des couples  $(r, q)$  étant fini, l'ensemble défini par récurrence finie sur  $j$  comme l'intersection

$$\Sigma_{(r, q)}^{(f_i)_{0 \leq i \leq j}} = \cap_{(r, q)} \Sigma_{(r, q)}^{(f_i)_{0 \leq i \leq j}} \cap \times_{k=0}^j \left( \mathcal{G} \times \dots \times \underbrace{\Sigma_{(r, q)}^{(f_i)_{0 \leq i \leq j, i \neq k}}}_{k\text{-ième position}} \times \dots \times \mathcal{G} \right) \subset \mathcal{G}^{j+1}$$

est un ensemble générique vérifiant

$$(g_i)_{0 \leq i \leq j} \in \Sigma_{(r, q)}^{(f_i)_{0 \leq i \leq j}} \iff (f_i, g_i)_{0 \leq i \leq j} \text{ vérifie la propriété de Morse-Smale,}$$

prouvant les théorèmes 3.1 et 3.3.



Lorsque  $f_i = f$  pour tout  $i \in \{0, \dots, j\}$ , on pourrait souhaiter utiliser une même métrique générique  $g$  pour chacun des facteurs du produit, ce que ne garantit pas le résultat précédent. En fait, si l'on note

$$\widetilde{\mathcal{N}}^j(r, q) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{\bullet}(r, +) \times \left( \times_{k=1}^{j-1} \widetilde{\mathcal{M}}_{\bullet}(-, +) \right) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{\bullet}(-, q)$$

le sous-ensemble dont les éléments vérifient  $g_0 = \dots = g_j$ , alors l'application  $E|_{\widetilde{\mathcal{N}}^j(r, q)}$  décrite auparavant n'est plus nécessairement transverse à  $\Delta^j$ . La raison est que les trajectoires  $(\gamma_0, \dots, \gamma_j)$  telles que

$$(g, \gamma_0, x_0, \dots, g, \gamma_j, x_j) \in E|_{\widetilde{\mathcal{N}}^j(r, q)}^{-1}(\Delta^j)$$

peuvent s'intersecter<sup>3</sup>, et qu'alors le choix d'un (unique) vecteur tangent  $\dot{g}$  ne peut pas se faire de sorte à perturber indépendamment l'image de la différentielle de  $E|_{\widetilde{\mathcal{N}}^j(r, q)}$  dans chaque facteur de l'arrivée. On a cependant comme annoncé par la proposition 3.3 les exceptions suivantes :

**Proposition 3.4.** *Soit  $b \in \text{Crit}(f)$ . Les applications*

$$E|_{\widetilde{\mathcal{N}}^1(r, q)} : \widetilde{\mathcal{N}}^1(r, q) \rightarrow M^2$$

*sont transverses à  $\Delta^1$ , et l'application*

$$E|_{\widetilde{\mathcal{N}}^2(b, +)} : \widetilde{\mathcal{N}}^2(b, +) \rightarrow M^4$$

*est transverse à  $\Delta^2$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer que les trajectoires  $\gamma_0, \gamma_1$  telles que

$$(g, \gamma_0, x_0, g, \gamma_1, x_1) \in \left( \prod_{i=0}^1 F^f \right)^{-1} (0)$$

et que les trajectoires  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  telles que

$$(g, \gamma_0, x_0, g, \gamma_1, x_1, g, \gamma_2, x_2) \in \left( \prod_{i=0}^2 F^f \right)^{-1} (0)$$

sont « suffisamment injectives », au sens où l'on peut appliquer le lemme 1.3 sur des ouverts disjoints de sorte à fabriquer un vecteur tangent  $\dot{g}$  qui perturbe indépendamment suffisamment d'applications d'évaluations  $ev_{\pm}$ .

3. Donc en tant que trajectoires de gradient, être confondues le long d'intervalles.

- Pour  $\widetilde{\mathcal{N}}^1(r, q)$  : il suffit qu'un des deux facteurs à l'arrivée soit une submersion, et c'est ce que montre le lemme 1.3.
- Pour  $\widetilde{\mathcal{N}}^2(b, a)$ ,  $a \in \text{Crit}(f)$  : il existe  $\tau_0 \ll 0$  et  $\tau_2 \gg 0$ , ainsi que des voisinages  $U_0$  de  $\gamma_0(\tau_0)$  et  $U_2$  de  $\gamma_2(\tau_2)$  tels que  $U_0 \cap \text{Im}(\gamma_1) = U_0 \cap \text{Im}(\gamma_2) = \emptyset$  et  $U_2 \cap \text{Im}(\gamma_0) = U_2 \cap \text{Im}(\gamma_1) = \emptyset$ . On peut alors construire une métrique tangente convenable  $\dot{g}$  dans  $T_g \mathcal{G}_{U_0 \cup U_2}$ .
- Pour  $\widetilde{\mathcal{N}}^2(b, +)$  : il existe  $\tau_0 \ll 0$  et un voisinage  $U$  de  $\gamma_0(\tau_0)$  tel que  $U \cap \text{Im}(\gamma_1) = U \cap \text{Im}(\gamma_2) = \emptyset$ . Ensuite, soit  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  n'ont pas de point commun (auquel cas la trajectoire  $(\gamma_0, \gamma_1)$  est injective), soit elles sont restrictions d'une même trajectoire de gradient à deux intervalles  $I_0$  et  $I_1$ . Comme nécessairement  $\inf I_1 > -\infty = \inf I_0$ , il existe  $\tau_1 \in \mathbb{R}$  et un voisinage  $V$  de  $\gamma_1(\tau_1)$  tel que  $U \cap V = \emptyset$ . On peut alors construire une métrique tangente convenable  $\dot{g}$  dans  $T_g \mathcal{G}_{U_0 \cup U_1}$  en choisissant successivement la perturbation dans  $U_1$  puis dans  $U_0$  (ce qui laisse bien invariante la différentielle de  $\text{ev}_+$  en  $\gamma_1$ ).

□

Le lemme de transversalité à paramètres s'applique alors à ces configurations, prouvant la proposition 3.3.



# Chapitre 4

## Groupe fondamental de Morse stable

On définit ici le groupe fondamental de Morse stable et on montre l'invariance du groupe ainsi défini par rapport aux données fixées.

### 4.1 Générateurs

On fixe un point  $\star \in M$  et des données  $(f, g)$  vérifiant la propriété de Morse-Smale stable (i.e. pour lesquelles tous les espaces de modules en jeu seront coupés transversalement, voir la section 3.5). On donne à présent une suite de définitions qui aboutit à la définition du groupe des lacets de Morse stable.

**Définition 4.1.** 1. Un pas de Morse stable  $(f, g, \star)$  est la donnée d'une composante connexe orientée d'un espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}(r, +)$ , où  $r \in \text{Crit}_1(f)$  ou  $r = p^-$  avec  $^1 p \in \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ . On détaillera l'écriture d'un pas de Morse par

$$P = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+),$$

où  $(\beta_-, \alpha_-) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(r, +)$  est le sommet orienté négativement et  $(\beta_+, \alpha_+) \in \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(r, +)$  le sommet orienté positivement, avec la convention que  $\beta_- = \alpha_- = \gamma^p$  lorsque  $^2 P = \overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}^+$ . On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des pas de Morse stable.

2. Deux pas de Morse stable  $P^1 = (\beta_-^1, \alpha_-^1, \beta_+^1, \alpha_+^1)$  et  $P^2 = (\beta_-^2, \alpha_-^2, \beta_+^2, \alpha_+^2)$  sont dits consécutifs si  $\alpha_+^1 = \alpha_-^2$ . Un chemin de Morse stable est un mot formé de pas de Morse stables consécutifs.

---

1. On rappelle que  $\mathcal{A}(f, g) = \{\text{ev}_+(\gamma) ; \gamma \in \mathcal{M}(a, +), a \in \text{Crit}_0(f)\}$ .  
2. C'est la seule composante dont l'un des bords ne se décrit pas comme un couple de trajectoires, voir la remarque 3.1.

3. Un lacet de Morse stable  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i = P^1 \dots P^k$  est un chemin de Morse stable tel que  $P^1$  soit consécutif à  $P^k$ . On note  $\mathcal{L}$  leur ensemble.
4. Si  $\ell = \prod_{i=1}^k P^i$  est un lacet de Morse stable, on note  $\bar{\ell} = \prod_{i=1}^k \overline{P^{k+1-i}}$  le lacet de Morse stable formé des pas de Morse stable munis des orientations opposées.
5. Un lacet de Morse stable basé en  $\star \in M$  est un lacet de Morse dont le premier pas  $P^1$  est  $\overline{\mathcal{M}(\star^-, +)}_{deg}^+$ . On note  $\mathcal{L}^\star$  leur ensemble.
6. Une relation préliminaire est un mot de la forme  $P \cdot \bar{P}$ . On note  $\mathcal{R}$  leur ensemble.
7. Le groupe

$$\mathcal{L}(M, f, g ; \star) = \langle \mathcal{L}^\star | (P^1 \dots \ell \dots P^k)(P^1 \dots \hat{\ell} \dots P^k)^{-1}, \ell \in \mathcal{R} \rangle,$$

où  $\hat{\phantom{x}}$  signifie que les lettres n'apparaissent pas dans le mot, est appelé groupe des lacets de Morse stable. Ses éléments sont les lacets de Morse stable basés en  $\star$  dans lesquels on peut simplifier deux pas de Morse stable qui apparaissent consécutivement avec leurs orientations opposées.

La figure 4.1 présente les trois différents types de pas de Morse stable. Une

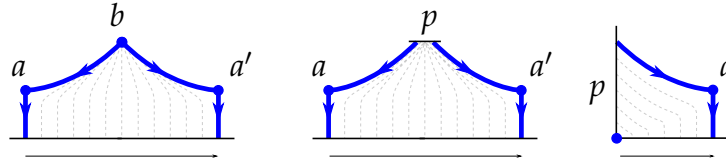


FIGURE 4.1 – Pas de Morse stable en  $b \in \text{Crit}_1(f)$  et  $p \in M$  (standard et dégénéré).

trajectoire touchant un trait noir est à comprendre comme arrivant sur  $E^+$  ou partant de  $E^-$ , et sur la fibre  $E_p^+$  ou  $E_p^-$  si  $p$  y est écrit. Comme les trajectoires ne se recouvrent pas comme dans le cadre Morse, les figures « éclatées » que nous avons utilisées ne sont ici pas nécessaires pour représenter ces espaces comme des familles à un paramètre de trajectoires.

On note  $\nu(r)$  le nombre de composantes connexes de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(r, +)$ . On justifiera l'appellation « générateurs du groupe fondamental de Morse stable » lors du corollaire 4.1, où l'on montre la surjectivité du morphisme d'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$$

défini par  $\text{ev} = \pi_* \circ \text{Ev}$ , où  $\text{Ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(E ; \star)$  est définie à la section 2.3 et où  $\pi_*$  est l'application induite par  $\pi : E \rightarrow M$  au niveau des

groupes fondamentaux. La preuve de la surjectivité de ce morphisme dans le cadre Morse (c'est le théorème 2.1) reposait sur la contractibilité des espaces  $\mathcal{M}(\emptyset, a)$ . Or, c'est une propriété que ne vérifient pas a priori leurs analogues  $\mathcal{M}(-, a)$ .

## 4.2 Morphisme de descente

Le but de cette section est de détailler l'obtention d'un morphisme

$$\Psi : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \mathcal{L}(M, f', g' ; \star'),$$

dit morphisme de descente. Contrairement à son analogue dans le cadre Morse (défini à la section 2.7), on ne peut pas omettre les pas de type  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$  comme il avait alors été possible de le faire. On utilisera les espaces de modules à rebonds  $\overline{\mathcal{M}}^1(r, q)$  rattachés aux données  $(f, g, f', g')$  (définis à la section 3.4), que l'on suppose générique au sens de la proposition 3.1. On utilisera pour alléger les notations

- $\overline{\mathcal{M}}^1$  au lieu de  $\overline{\mathcal{M}}^1_{(f, g, f', g')}$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}$  au lieu de  $\overline{\mathcal{M}}_{(f, g)}$ ,
- $\overline{\mathcal{M}}'$  au lieu de  $\overline{\mathcal{M}}'_{(f', g')}$ .

Par commodité, on appellera aussi pas de Morse stable les composantes orientées des espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$  avec  $p$  qui vérifie la condition (3.1) et pas nécessairement dans  $\{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ , en se souvenant qu'on ne les a pas pris en compte dans nos générateurs.

Détaillons l'écriture d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(a, +)$  avec  $|a| = 0$ . Comme  $\overline{\mathcal{M}}(a, +) = \mathcal{M}(a, +)$  est de dimension 0, et consiste donc en une union finie de trajectoires, on a que

$$\overline{\mathcal{M}}^1(a, +) = \overline{\mathcal{M}}(a, +) \boxtimes_{\text{ev}} \overline{\mathcal{M}}'(-, +) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{M}(a, +)} \{\gamma\} \times \overline{\mathcal{M}}'((\text{ev}_+(\gamma))^{-}, +),$$

où apparaissent les points de  $\mathcal{A}(f, g)$ . Comme  $\dim \overline{\mathcal{M}}'(-, +) = \dim M + 1$ , effectuer le produit fibré d'un espace de modules de dimension  $m$  avec l'espace  $\overline{\mathcal{M}}'(-, +)$  au-dessus de  $M$  résulte en l'obtention d'un espace de dimension  $m + 1$ . La dimension d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$  avec  $b \in \text{Crit}(f)$  vaudra donc  $|b| + 1$  et celle d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(p^-, +)$  avec  $p$  vérifiant la condition (3.1) vaut 2. L'étude qui suit détaillant les strates de ces espaces est semblable à celle de la section 2.7, la nouveauté étant la contribution des nouveaux termes de bord décrits dans le théorème 3.2.

### Image d'un pas de Morse stable de type $\overline{\mathcal{M}}(b, +)$ , $|b| = 1$

Lorsque  $|b| = 1$ , le bord de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$  est formé d'une union de cercles. Le graphe induit par sa 1-strate (arêtes) et sa 2-strate (sommets) est une union de graphes cycliques, et la donnée d'un pas de Morse stable correspond au choix et à l'orientation de l'un de ces graphes. Détaillons les arêtes et sommets en jeu. On rappelle que l'on voit les ensembles  $M$  et  $\{p\}$  comme les espaces de trajectoires sur un singleton  $\{\gamma \in C^\infty(\{0\}, E) ; \gamma(\pm) \in M, \gamma' = X \circ \gamma\}$  et  $\{\gamma \in C^\infty(\{0\}, E) ; \gamma(\pm) = p, \gamma' = X \circ \gamma\}$ .

**Arêtes.** En ne tenant pas compte des espaces de modules qui deviennent vides lorsque leurs dimensions deviennent négatives, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}^1(b, +) &= \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^0 \overline{\mathcal{M}}'(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(-, +) \right) \\ &= \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \boxtimes_{\text{ev}} \mathcal{M}'(-, +) \right) \sqcup \left( \mathcal{M}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}'_I \sqcup M \right) \right) \\ &= \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}'_0 \sqcup \mathcal{E}'_1 \sqcup \mathcal{E}_{deg}, \end{aligned}$$

où

- $\mathcal{E}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \left( \mathcal{M}(b, a) \times \cup_{\gamma \in \mathcal{M}(a, +)} \{\gamma\} \times \mathcal{M}'((\text{ev}_+(\gamma))^- , +) \right)$ ,
- $\mathcal{E}'_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(b, a') \times \mathcal{M}'(a', +)$ ,
- $\mathcal{E}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \mathcal{M}'(b', +)$ ,
- $\mathcal{E}_{deg} = \mathcal{M}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} M$ .

Comme  $\dim \mathcal{M}(b, a) = 0$ , les arêtes du type  $\mathcal{E}_0$  correspondent aux composantes des  $\mathcal{M}((\text{ev}_+(\gamma))^- , +)$ , donc aux pas de Morse stable en les points de  $\mathcal{A}(f, g)$ . Les arêtes du type  $\mathcal{E}'_1$  correspondent aux composantes des  $\mathcal{M}'(b', +)$ , i.e. aux pas de Morse stable en les points critiques d'indice (normalisé) 1 de  $f'$ . Ensuite, les arêtes du type  $\mathcal{E}_{deg}$  sont en correspondance avec les composantes de  $\mathcal{M}(b, +)$ , i.e. les pas de Morse stable en  $b$ , via le difféomorphisme

$$\text{id} \times \text{ev}_+ : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(b, +) & \longrightarrow & \mathcal{M}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} M \\ \gamma & \longmapsto & (\gamma, \text{ev}_+(\gamma)) \end{array} .$$

En particulier, on a au plus une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$  dans chacune des composantes du graphe étant donné que la restriction de la projection

$$\overline{\mathcal{M}}^1(b, +) \subset \overline{\mathcal{M}}(b, +) \times \overline{\mathcal{M}}(-, +) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(b, +)$$

envoie une composante connexe du bord de  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$  dans une composante connexe de  $\overline{\mathcal{M}}(b, +)$ .

**Sommets.** On a ensuite que

$$\begin{aligned} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}^1(b, +) &= \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}'(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}'(-, +) \right) \\ &= \left( \mathcal{M}(b, +) \boxtimes_{\text{ev}} \sqcup_{|I|=2} \mathcal{M}'_I \right) \sqcup \left( \sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \boxtimes_{\text{ev}} (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}'_I \sqcup M) \right) \\ &= \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}'_1 \sqcup \mathcal{V}_{deg}, \end{aligned}$$

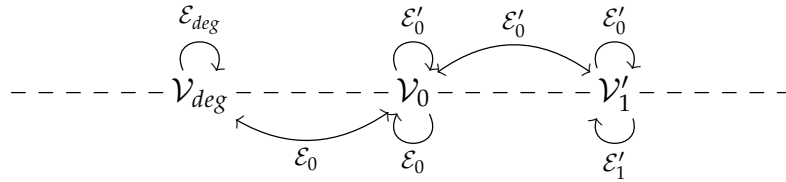
où

- $\mathcal{V}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}^1(a, a') \times \mathcal{M}'(a', +),$
- $\mathcal{V}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f'), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(b, b') \times \mathcal{M}'(b', a') \times \mathcal{M}'(a', +),$
- $\mathcal{V}_{deg} = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, +) \boxtimes_{\text{ev}} M.$

On distingue ainsi trois types de sommets.

Les singularités hautes et basses ainsi que les arêtes hautes et basses sont donc les mêmes que lors de la proposition 2.3, la seule nouveauté ici étant l'intervention des pas de type  $\overline{\mathcal{M}}(p, +)$  induits par les arêtes  $\mathcal{E}_0$  autres que les pas  $\overline{\mathcal{M}}(p, +)_{deg}$ .

**Proposition 4.1.** *Les graphes cycliques induits par le bord d'un espace  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$  ont comme combinatoire celle d'un cycle du graphe*



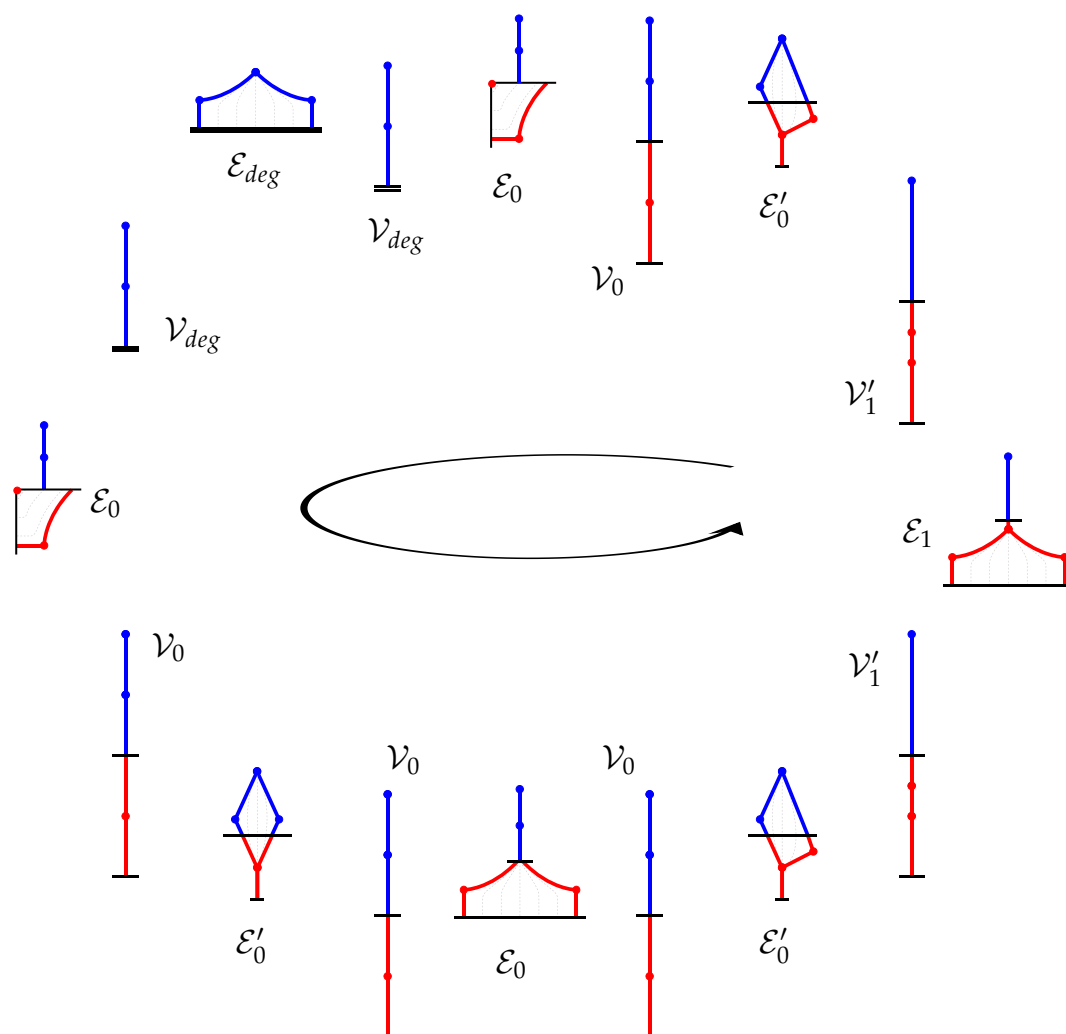
alternant entre arête haute (au-dessus de la démarcation en pointillés) et arête basse (en-dessous de la démarcation en pointillés) et contenant une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$ .

*Démonstration.* La preuve consiste à nouveau, à la manière de celle de la proposition 2.1, à lister les paires d'arêtes pouvant être issues d'un sommet fixé.  $\square$

La figure 4.2 illustre le parcours d'un tel cycle, ainsi qu'une arête de chaque type. Les trajectoires correspondant aux premières données  $y$  sont colorées en bleu, tandis que celles correspondant aux secondes données  $y$  sont colorées en rouge. À nouveau, on n'a pas besoin d'éclater les figures pour les représenter comme des familles à un paramètre.

À un pas de Morse stable  $P$  en un point critique  $b \in \text{Crit}_1(f)$  pour les données  $(f, g)$ , on peut alors associer un chemin de Morse stable pour les données  $(f', g')$  en concaténant les pas induits par les arêtes basses. Plus précisément :



FIGURE 4.2 – Parcours d'une composante de bord de  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$ .

1. On considère l'arête dégénérée  $e_1 = P_{deg}$ , et on la complète en la suite finie ordonnée  $e_1, e_2, \dots, e_{2k+1}$  des arêtes du graphe cyclique qu'elle induit.
2. L'arête  $e_{2i}, 1 \leq i \leq k$ , est soit du type  $\mathcal{E}_0$  et donc de la forme  $\{\beta\} \times \{\alpha\} \times P^i, P^i \subset \overline{\mathcal{M}}^1(p^-, +)$ , soit du type  $\mathcal{E}'_1$  et donc de la forme  $\{\gamma\} \times P^i, P^i \subset \overline{\mathcal{M}}(b', +)$ .
3. On définit  $\Phi(P) = \prod_{i=1}^k \overline{P^{k-i}}$  (les pas sont listés dans le sens contraire, avec leurs orientations opposées).

**Image d'un pas de Morse stable de type  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$ ,  $p \in \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$**

On a ensuite pour les espaces  $\overline{\mathcal{M}^1}(p^-, +)$  la description suivante :

**Arêtes.** D'abord,

$$\begin{aligned} \partial^1 \overline{\mathcal{M}^1}(p^-, +) &= \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^0 \overline{\mathcal{M}'}(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}'}(-, +) \right) \\ &= \left( (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \sqcup \{p\}) \boxtimes_{\text{ev}} \mathcal{M}'(-, +) \right) \sqcup \left( \mathcal{M}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}'_I \sqcup M) \right) \\ &= \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}'_0 \sqcup \mathcal{E}'_1 \sqcup \mathcal{E}_p \sqcup \mathcal{E}_{deg}, \end{aligned}$$

où

- $\mathcal{E}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} (\mathcal{M}(p^-, a) \times \cup_{\gamma \in \mathcal{M}(a, +)} \{\gamma\} \times \mathcal{M}'((\text{ev}_+(\gamma))^- , +))$ ,
- $\mathcal{E}'_0 = \sqcup_{a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(p^-, a') \times \mathcal{M}'(a', +)$ ,
- $\mathcal{E}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f')} \mathcal{M}^1(p^-, b') \times \mathcal{M}'(b', +)$ ,
- $\mathcal{E}_p = \{p\} \times \mathcal{M}'(p^-, +)$ ,
- $\mathcal{E}_{deg} = \mathcal{M}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} M$ .

Les arêtes de type  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}'_1$  correspondent à nouveau aux pas de Morse stable en les points de  $\mathcal{A}(f, g)$  et les points critiques d'indice normalisé 1 de  $f'$ . Les arêtes du type  $\mathcal{E}_p$  correspondent quant à elles aux pas de Morse stable en  $p$  pour les données  $(f', g')$ , là où les arêtes de type  $\mathcal{E}_{deg}$  correspondent aux pas de Morse stable en le point  $p$  pour  $(f, g)$ . On notera  $e_{deg}$  l'arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$  donnée par  $\mathcal{M}(p, +)_{deg} \boxtimes_{\text{ev}} M$ .

**Sommets.** On a ensuite que

$$\begin{aligned} \partial^2 \overline{\mathcal{M}^1}(p^-, +) &= \left( \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^2 \overline{\mathcal{M}'}(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \partial^1 \overline{\mathcal{M}'}(-, +) \right) \\ &= \left( \mathcal{M}(p^-, +) \boxtimes_{\text{ev}} \sqcup_{|I|=2} \mathcal{M}'_I \right) \sqcup \left( (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \sqcup \{p\}) \boxtimes_{\text{ev}} (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}'_I \sqcup M) \right) \\ &= \mathcal{V}_0 \sqcup \mathcal{V}'_1 \sqcup \mathcal{V}_p \sqcup \mathcal{V}_{deg} \sqcup \mathcal{V}_{pdeg}, \end{aligned}$$

où

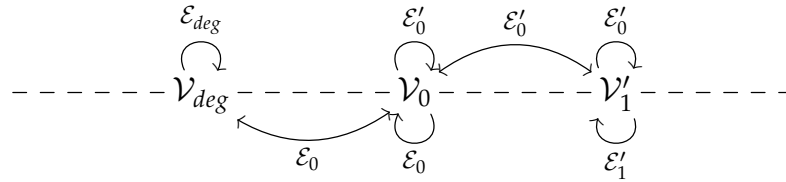
- $\mathcal{V}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}(p^-, a) \times \mathcal{M}^1(a, a') \times \mathcal{M}'(a', +)$ ,
- $\mathcal{V}'_1 = \sqcup_{b' \in \text{Crit}_1(f'), a' \in \text{Crit}_0(f')} \mathcal{M}^1(p^-, b') \times \mathcal{M}'(b', a') \times \mathcal{M}'(a', +)$ ,
- $\mathcal{V}_p = \{p\} \times \mathcal{M}'(p^-, a') \times \mathcal{M}'(a', +)$ ,

- $\mathcal{V}_{deg} = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(p^-, a) \times \mathcal{M}(a, +) \underset{\text{ev}}{\boxtimes} M$ ,
- $\mathcal{V}_{pdeg} = \{p\} \underset{\text{ev}}{\boxtimes} M$ .

La nouvelle singularité haute rencontrée ici consiste en des trajectoires définies sur un singleton et non plus sur un intervalle plus général. Cette singularité est présente uniquement sur la composante de bord de  $\overline{\mathcal{M}^1}(p^-, +)$  qui contient l'arête dégénérée  $e_{deg}$ . Les arêtes hautes sont celles de type  $\mathcal{E}_{deg}$  et  $\mathcal{E}'_0$ , tandis les arêtes basses sont celles de type  $\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}'_1$ . À nouveau, même si ce n'est pas nécessaire pour définir le lacet de Morse stable final, la proposition suivante précise quels sommets sont reliés par quelles arêtes.

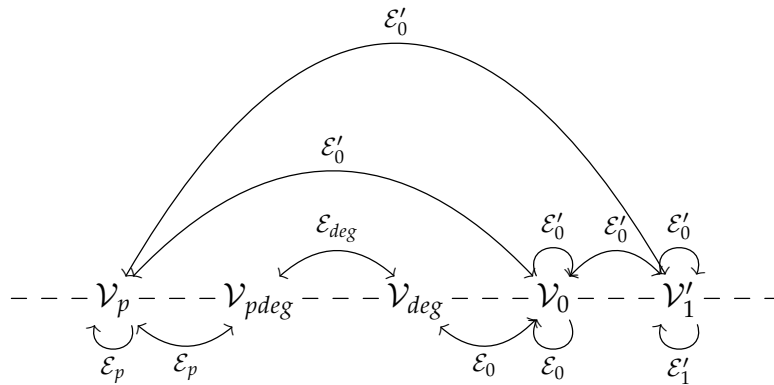
**Proposition 4.2.** *Les graphes cycliques induits par le bord d'un espace  $\overline{\mathcal{M}^1}(p^-, +)$  ont comme combinatoire :*

1. si la composante ne contient pas l'arête  $e_{deg}$  : ce sont les cycles du graphe



alternant entre arête haute (au-dessus de la démarcation en pointillés) et arête basse (en-dessous de la démarcation en pointillés) et contenant une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$ .

2. si la composante contient l'arête  $e_{deg}$  : ce sont les cycles du graphe



alternant entre arête haute (au-dessus de la démarcation en pointillés) et arête basse (en-dessous de la démarcation en pointillés) et contenant une arête de type  $\mathcal{E}_{deg}$  (en l'occurrence l'arête  $e_{deg}$ ).

*Démonstration.* La preuve qui consiste à lister l'ensemble des configurations possibles reste identique à celles des propositions similaires.  $\square$

À un pas de Morse stable  $P$  en un point  $p \in M$ , pour les données  $(f, g)$ , on peut alors associer un chemin de Morse stable pour les données  $(f', g')$  en concaténant les pas induits par les arêtes basses. Plus précisément :

1. Si  $P \neq \overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}$ , on est dans le premier cas de la proposition précédente et l'on procède comme pour les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(b, +)$ ,
2. Si  $P = \overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}$ , on est dans le second cas de la proposition précédente et l'on procède comme suit :
  - (a) On considère l'arête dégénérée  $e_1$  du point 2 de la proposition précédente, et on la complète en la suite finie ordonnée  $e_1, e_2, \dots, e_k$  des arêtes du graphe cyclique qu'elle induit.
  - (b) Les arêtes paires  $e_{2i}$ ,  $i \geq 1$ , sont du type  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}'_1$  ou  $\mathcal{E}_p$ . On note  $P^i$  le pas de Morse stable correspondant.
  - (c) On définit  $\Phi(P) = \prod_i \overline{P^{k-i}}$  (les pas sont à nouveau listés dans le sens contraire, avec leurs orientations opposées).

### Définition du morphisme de descente

À ce stade, on a défini pour deux jeux de données  $(f, g)$  et  $(f', g')$  une application  $\Phi$  qui :

1. à un pas de Morse stable  $P \subset \overline{\mathcal{M}}(b, +)$ ,  $|b'| = 1$ , pour  $(f, g)$ , associe un chemin de Morse stable pour  $(f', g')$  en des points critiques  $b'$ ,  $|b'| = 1$ , ou en des points de  $\mathcal{A}(f, g)$ ,
2. à un pas de Morse stable  $P \subset \overline{\mathcal{M}}(p, +)$  pour  $(f, g)$ , associe un chemin de Morse stable pour  $(f', g')$  en des points critiques  $b'$ ,  $|b'| = 1$ , en des points de  $\mathcal{A}(f, g)$ , ou en  $p$  lorsque  $P = \overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}^\pm$  est un pas dégénéré.

Soit  $P^1 \dots P^k$  un lacet de Morse stable pour  $(f, g)$ . Alors  $\ell = \Phi(P^1) \dots \Phi(P^k)$  est un lacet de Morse stable pour  $(f', g')$ , avec l'inconvénient de contenir des pas à travers les points  $\{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$  que l'on ne considère a priori pas comme des générateurs de notre groupe  $\mathcal{L}(M, f', g' ; \star')$ . On règle ce problème en plusieurs temps. D'abord, comme le seul pas consécutif à  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}^-$  est  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}^+$  (voir la remarque 3.1), alors quitte à simplifier ces occurrences dans  $\ell$  on peut supposer qu'il contient comme pas dégénérés uniquement ses premier et dernier pas  $\overline{\mathcal{M}}(\star^-, +)_{deg}^\pm$ . Ensuite, en réitérant la construction de  $\Phi$  mais pour les jeux de données répétées  $(f', g')$  et  $(f', g')$ , et en l'appliquant à chacune des

lettres des chemins de Morse stable  $\Phi(P^i) = P_1^i \dots P_{k_i}^i$ , on obtient un lacet de Morse stable

$$\Psi(P) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{k_i} \Phi(P_j^i)$$

basé en  $\star$  et dont les pas de type  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$  vérifient  $p \in \{\star\} \cup \mathcal{A}(f', g')$ , étant donné que les seuls pas  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)$  qui entraînent la présence de pas de type  $\overline{\mathcal{M}}'(p^-, +)$  sont les pas  $\overline{\mathcal{M}}(p^-, +)_{deg}$  (ceci montre que le point base  $\star$  joue un rôle distingué, nous incitant à baser le groupe fondamental à l'arrivée en ce même point). On montre ainsi :

**Proposition 4.3.** *Pour des données  $(f, g, f', g')$  génériques, le morphisme de descente*

$$\Psi : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \mathcal{L}(M, f', g' ; \star)$$

*est bien défini.*

On obtient consécutivement à partir de la proposition 4.3 les deux corollaires suivants :

**Corollaire 4.1.** *Le morphisme  $ev : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$  est surjectif.*

*Démonstration.* La remarque fondamentale est que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(M, f', g' ; \star) & \xrightarrow{\Psi} & \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \\ & \searrow ev & \swarrow ev \\ & \pi_1(M ; \star) & \end{array}$$

commute, i.e. le morphisme de descente  $\Psi$  ne change pas la classe d'homotopie de l'évaluation d'un lacet de Morse stable : même si l'espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}^1(b, +)$  n'est pas un disque et qu'on ne peut donc pas y lire directement l'homotopie cherchée, on peut former à partir des trajectoires qu'il utilise un disque permettant de réaliser cette homotopie dans  $M$ . La description de ce disque est l'objet de la fin de la section 2 de [3], où la configuration géométrique sous-jacente y est illustrée dans la figure 14.

En choisissant comme  $f'$  une fonction de Morse, le théorème 2.1 affirme que la flèche de gauche est surjective. C'est donc aussi le cas de la flèche de droite.  $\square$

**Corollaire 4.2** (Inégalité homotopique de Morse stable). *Soit  $M$  une variété fermée,  $f : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de Morse stable et  $g$  une métrique adaptée à  $f$ . On note  $\mu_1(M)$  le nombre minimal de générateurs d'une présentation de  $\pi_1(M ; \star)$ . Alors*

$$\sum_{b \in \text{Crit}_1(f)} \nu(b) + \sum_{p \in \mathcal{A}(f, g)} \nu(p) + \nu(\star) \geq \mu_1(M),$$

où  $\nu(r)$  désigne ici le nombre de composantes connexes de  $\overline{\mathcal{M}}_{(f,g)}(r, +)$ .

*Démonstration.* En fixant un chemin de Morse stable  $s_\alpha$  basé en  $\star$  pour chaque extrémité  $(\beta, \alpha)$  de pas de Morse stable<sup>3</sup>, on définit un morphisme

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \langle \mathcal{P} | \mathcal{R} \rangle & \longrightarrow & \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \\ P = (\beta_-, \alpha_-, \beta_+, \alpha_+) & \longmapsto & s_{\alpha_-} \cdot P \cdot \overline{s_{\alpha_+}} \end{array} ,$$

surjectif comme  $\varphi(\ell) = \ell$ . Comme  $\langle \mathcal{P} | \mathcal{R} \rangle$  est le groupe libre à  $\sum_{b, |b|=1} \nu(b) + \sum_{p \in \mathcal{A}(f,g)} \nu(p) + \nu(\star)$  générateurs, on obtient la formule via le morphisme surjectif  $\text{ev} \circ \varphi : \langle \mathcal{P} | \mathcal{R} \rangle \rightarrow \pi_1(M ; \star)$ .  $\square$

La notion de multiplicité est donc une manière de corriger le problème soulevé par le théorème 0.2 de M. Damian. Notons qu'il est possible de générer le groupe fondamental de Morse stable sans utiliser les pas utilisant les points de  $\mathcal{A}(f, g)$  (c'est par exemple ce qui est fait dans [3]), ce que nous n'avons pas fait ici étant donné que l'on aura besoin de ces pas au moment de définir les relations, mais qu'on peut donc supprimer le terme correspondant dans la formule, En revanche, on ne se débarrasse pas de la multiplicité du point base.

### 4.3 Application de descente

Les constructions utilisées lors de la définition de  $\Phi$  et  $\Psi$  lors de la section précédente se généralisent au niveau de chemins génériques  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , de classe  $C^1$  par morceaux.

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  un chemin transverse à  $\text{ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(-, +) \rightarrow M$ . On note

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) &= [0, 1] \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \overline{\mathcal{M}}(-, +) \\ &= \{(t, u) \in [0, 1] \times \overline{\mathcal{M}}(-, +), \gamma(t) = \text{ev}_-(u)\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}(\gamma, a) &= [0, 1] \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \overline{\mathcal{M}}(-, a) \\ &= \{(t, u) \in [0, 1] \times \overline{\mathcal{M}}(-, a), \gamma(t) = \text{ev}_-(u)\}. \end{aligned}$$

Si  $\gamma$  est lisse, l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$  est une variété compacte à faces de dimension 2, dont on détaille la nature des strates ci-dessous.

<sup>3</sup> Si un tel chemin n'existe pas, alors le pas  $P$  n'intervient pas dans la description de  $\mathcal{L}(M, f, g ; \star)$  et on peut poser  $\varphi(P) = 1$  tout en conservant la surjectivité.

**Arêtes.**

$$\begin{aligned}
\partial^1 \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) &= \left( \partial^1 ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \partial^0 \overline{\mathcal{M}}(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^0 ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(-, +) \right) \\
&= \left( \{0, 1\} \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \mathcal{M}(-, +) \right) \sqcup \left( ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \sqcup M) \right) \\
&= \mathcal{E}_{\gamma(0)} \sqcup \mathcal{E}_{\gamma(1)} \sqcup \mathcal{E}_0 \sqcup \mathcal{E}_1 \sqcup \mathcal{E}_\gamma,
\end{aligned}$$

où

- $\mathcal{E}_{\gamma(\pm)} = \mathcal{M}(\gamma(0)^-, +) \cup \mathcal{M}(\gamma(1)^-, +)$ ,
- $\mathcal{E}_0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(\gamma, a) \times \mathcal{M}(a, +)$ ,
- $\mathcal{E}_1 = \sqcup_{b \in \text{Crit}_1(f)} \mathcal{M}(\gamma, b) \times \mathcal{M}(b, +)$ ,
- $\mathcal{E}_\gamma = ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{id}} M$ .

Il n'y a qu'une arête de type  $\mathcal{E}_\gamma$ , que l'on note  $\underline{\gamma}$ .

**Sommets.**

$$\begin{aligned}
\partial^2 \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) &= \left( \partial^1 ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \partial^1 \overline{\mathcal{M}}(-, +) \right) \sqcup \left( \partial^0 ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \partial^2 \overline{\mathcal{M}}(-, +) \right) \\
&= \left( \{0, 1\} \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} (\sqcup_{|I|=1} \mathcal{M}_I \sqcup M) \right) \sqcup \left( ]0, 1[ \times_{\gamma, M, \text{ev}_-} \sqcup_{|I|=2} \mathcal{M}_I \right) \\
&= \mathcal{V}_{\gamma(0)}^0 \sqcup \mathcal{V}_{\gamma(1)}^0 \sqcup \mathcal{V}_{\gamma(0)} \sqcup \mathcal{V}_{\gamma(1)} \sqcup \mathcal{V}_{1,0},
\end{aligned}$$

où

- $\mathcal{V}_{\gamma(\pm)}^0 = \sqcup_{a \in \text{Crit}_0(f)} (\mathcal{M}(\gamma(0)^-, a) \cup \mathcal{M}(\gamma(1)^-, a)) \times \mathcal{M}(a, +)$ ,
- $\mathcal{V}_{\gamma(\pm)} = \left( \{0\} \times_{\gamma, M, \text{id}} M \right) \cup \left( \{1\} \times_{\gamma, M, \text{id}} M \right)$ ,
- $\mathcal{V}_{1,0} = \sqcup_{b \in \text{Crit}_1(f), a \in \text{Crit}_0(f)} \mathcal{M}(\gamma, b) \times \mathcal{M}(b, a) \times \mathcal{M}(a, +)$ .

Dans cette configuration, les seules singularités hautes pour une trajectoire élément d'un sommet que nous n'avons pas déjà rencontré sont celles consistant à « démarrer d'une extrémité de  $\gamma$  ». Ainsi, les arêtes hautes seront ici celles de type  $\mathcal{E}_0$  et  $\mathcal{E}_\gamma$ , tandis que les arêtes basses, induisant des pas de Morse stable soit en des points critiques  $b \in \text{Crit}_1(f)$ , soit en  $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \subset M$ , seront celles de type  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_{\gamma(-)}$  et  $\mathcal{E}_{\gamma(+)}$ .

Si  $\gamma$  est seulement lisse par morceaux (et continue), en notant  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , les parties lisses<sup>4</sup> de  $\gamma$ , et  $p_i^-, p_i^+$  les extrémités de  $\gamma_i$ , on a (en remarquant que

4. On dit dans ce cas que  $\gamma \dashv \text{ev}_-$  si et seulement si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\gamma_i \dashv \text{ev}_-$ .

$p_i^+ = p_{i+1}^-$ ) :

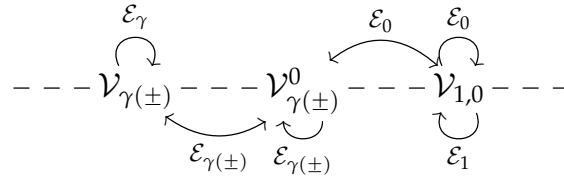
$$\overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) = \left( \bigcup_{i=1}^n \overline{\mathcal{M}}(\gamma_i, +) \right) / \sim$$

où  $\sim$  identifie point par point  $\overline{\mathcal{M}}((p_i^+)^-, +)$  et  $\overline{\mathcal{M}}((p_{i+1}^-)^-, +)$  pour  $1 \leq i < n$ . Le bord topologique de cet espace est alors

$$\partial \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) = \left( \bigcup_{i=1}^n \partial \overline{\mathcal{M}}(\gamma_i, +) \right) / \sim$$

et est encore une variété de dimension 1 lisse par morceaux.

**Proposition 4.4.** *Le graphe cyclique induit par la composante de bord de  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$  qui contient l'arête  $\underline{\gamma}$  a comme combinatoire celle d'un cycle du graphe*



alternant entre arête haute (au-dessus des démarcations en pointillés) et arête basse (en-dessous des démarcations en pointillés) et contenant une arête de type  $\mathcal{E}_\gamma$  (en l'occurrence l'arête  $\underline{\gamma}$ ).

On peut alors définir comme lors de la section 4.2 le chemin de Morse stable  $\Theta(\gamma)$  constitué (de l'opposé) des pas de Morse stable consécutifs induit par le graphe précédent. Lorsque  $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \not\subset \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ , le mot  $\Theta(\gamma)$  utilise des pas qui ne sont pas pris en compte dans notre présentation du groupe des lacets de Morse stable. En revanche, lorsque  $\{\gamma(0), \gamma(1)\} \subset \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ , par exemple lorsque  $\gamma$  est la concaténation de chemins  $\text{ev}(P)\text{ev}_+ \circ \gamma_P : [0, 1] \rightarrow M$  pour  $\gamma_P : [0, 1] \rightarrow P$  une paramétrisation de  $P$ , on ne rencontre pas ce problème. En particulier, en choisissant comme  $\gamma$  des chemins aux extrémités dans  $\{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)$ , on définit ainsi une application

$$\Theta : \{ \gamma : ([0, 1], 0, 1) \rightarrow (M, \{\star\} \cup \mathcal{A}(f, g)) ; \gamma \pitchfork \text{ev}_- \} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{chemins de Morse} \\ \text{stable pour } (f, g) \end{array} \right\}'$$

et en choisissant comme  $\gamma$  des lacets basés en  $\star$ , on définit une application

$$\Theta : \{ \gamma : (S^1, 1) \rightarrow (M, \star) ; \gamma \pitchfork \text{ev}_- \} \rightarrow \mathcal{L}(M, f, g ; \star).$$



On sera par la suite en mesure d'établir l'égalité<sup>5</sup>

$$\Theta(\text{ev}(P)) = \Phi(P),$$

que l'on souhaite donner dès à présent afin d'insister sur la nature purement dynamique des relations que l'on va proposer dans la section 4.4 (les  $\Phi(P)$  étant définis à partir d'espaces de modules n'utilisant pas de chemins annexes  $\gamma$ ).

**Remarque 4.1.** On peut recopier le paragraphe qui précède en échangeant départ et arrivée des espaces de modules, ainsi que les rôles de  $-$  et  $+$ , et on obtient alors une étude similaire pour l'espace de modules

$$\overline{\mathcal{M}}(-, \gamma) = \overline{\mathcal{M}}(-, +) \times_{\text{ev}, \mathcal{M}, \gamma} [0, 1].$$

Cela revient à faire la même construction pour la fonction  $-f$ . Le chemin de Morse stable (pour  $-f$ ) qu'on obtient alors est une suite d'arêtes  $\overline{\mathcal{M}}(-, q)$  avec  $q \in \text{Crit}_n(f)$  ou  $q = p^+$  avec  $p \in \{\gamma(0), \gamma(1)\}$  et sera noté  $\hat{\Theta}(\gamma)$  pour le distinguer de  $\Theta(\gamma)$  (qu'on notera également  $\hat{\Theta}(\gamma)$  par symétrie). On parlera dans ce cas d'« application de montée ».

## 4.4 Relations

Récupérer seulement les lacets qui sont tracés sous des points critiques  $c \in \text{Crit}_2(f)$  (voir la proposition 2.2) ne suffit plus à engendrer les relations comme dans le cas du groupe fondamental de Morse. L'exemple suivant illustre ce problème :

**Exemple 4.1.** La figure 4.3 représente le champ de gradient d'une fonction de Morse stable  $f : S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , qui résulte de la perturbation du gradient d'une fonction  $h + q$  avec  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction hauteur et  $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une forme quadratique de signature 1. Les deux morceaux de surfaces représentent une partie de la variété instable du point critique  $b$ , avec  $|b| = \text{ind}(b) - 1 = 1$ , et une partie de la variété stable du point critique  $a$ , avec  $|a| = \text{ind}(a) - 1 = 0$ . On compte quatre trajectoires de  $b$  à  $a$ , dont trois correspondent aux trois points d'intersection apparents entre les deux morceaux de surfaces. Le groupe des lacets de Morse stable associé à ces données possède donc au moins deux générateurs, les deux pas en le point critique  $b$  : l'ensemble de relations ne saurait être vide si l'on souhaite retrouver que  $\pi_1(S^1 ; \star) = \mathbb{Z}$ .

5. Le lemme 4.1 commence par exemple par montrer que  $\Theta(\text{ev}(P))$  ne dépend pas du choix de la paramétrisation.

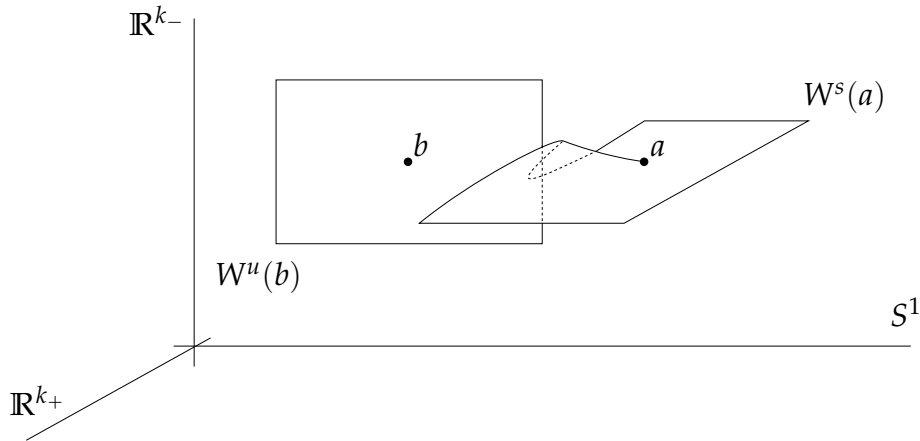


FIGURE 4.3 – Une fonction de Morse stable sur  $S^1$ .

On formalise la notion de « partie basse » dans la définition suivante <sup>6</sup> :

**Définition 4.2.** Soit  $\overline{\mathcal{M}}(\dots, +)$  un espace de modules dont le dernier terme dans son écriture en produit fibré est  $\overline{\mathcal{M}}(-, +)$ . On dit qu'un chemin continu  $\delta : [0, 1] \rightarrow \partial\overline{\mathcal{M}}(\dots, +)$  est tracé au-dessus d'un chemin de Morse stable  $\ell = \coprod_{i=1}^k P^i$  s'il existe une partition de  $[0, 1]$  en sous intervalles sur lesquels  $\delta$  est alternativement et dans l'ordre

- un chemin dans un espace  $\overline{\mathcal{M}}(\dots, a) \times \overline{\mathcal{M}}(a, +)$  avec  $a \in \text{Crit}_0(f)$  (en particulier,  $\delta$  est constant sur le facteur  $\overline{\mathcal{M}}(a, +)$  qui est de dimension 0),
- une paramétrisation de  $\{*\} \times P^i$ ,  $1 \leq i \leq k$  (où  $*$  est une trajectoire d'un espace de modules  $\overline{\mathcal{M}}(\dots, b)$  ou  $\overline{\mathcal{M}}(\dots, p^+)$  en fonction du type du pas).

Le chemin  $\ell$  est dit partie basse de  $\delta$ .

Lorsque  $\overline{\mathcal{M}}(\dots, +) = \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$ , on distingue un certain type de pas :

**Définition 4.3.** Un lacet de Morse stable est tracé en-dessous d'un lacet topologique  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  s'il est la partie basse d'un lacet  $\delta : S^1 \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$  tel que l'application  $\pi_1 \circ \delta : S^1 \rightarrow S^1$  soit de degré 1, où  $\pi_1 : \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +) \subset S^1 \times \overline{\mathcal{M}}(-, +) \rightarrow S^1$  est la restriction de la projection sur le premier facteur.

**Exemple 4.2.** Le lacet de Morse stable  $\check{\Theta}(\gamma)$  est tracé en-dessous de  $\gamma$ , mais il peut en exister d'autres.

Si  $\ell$  est chemin de Morse stable, on notera abusivement  $\Theta(\ell)$  au lieu de  $\Theta(\text{ev}(\ell))$ , où  $\text{ev}(\ell) : [0, 1] \rightarrow M$  est le chemin  $C^1$  par morceaux défini à paramétrisation près induit par  $\ell$  (ceci ne dépend pas du choix de la paramétrisation, comme va le montrer le lemme 4.1).

6. On rappelle que les espaces de modules à rebonds  $\overline{\mathcal{M}}^j(r, q)$  sont l'objet de la section 3.4.

**Définition 4.4.** On prend comme relations de Morse stable les relations des trois types suivants :

1. pour  $\ell \in \mathcal{L}(M, f, g ; \star)$  :

$$\ell = \Theta(\ell),$$

2. pour  $\ell \in \mathcal{L}(M, f, g ; \star)$  et  $\ell_1, \ell_2$  des mots tels que  $\ell = \ell_1 \cdot \ell_2$  :

$$\Theta(\ell_1 \cdot \ell_2) = \Theta(\ell_1) \cdot \Theta(\ell_2),$$

3. pour tout lacet de Morse stable  $\rho$  qui est partie basse d'un lacet

$$\delta : S^1 \rightarrow \partial \overline{\mathcal{M}^2}(c, +)$$

où  $c \in \text{Crit}_n(f)$  et pour tout chemin de Morse stable  $w$  du point base au départ de  $\rho$  :

$$w\rho w^{-1} = 1.$$

On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble des relations de Morse stable.

**Remarque 4.2.** • Les relations du type 2 sont *a priori* non triviales, comme l'illustre la figure 4.4. Elle représente à sa gauche les composantes de bord des espaces  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_1, +)$  et  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_2, +)$  et à sa droite celles de l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, +)$ , comme des graphes au-dessus des paramètres de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Les arêtes basses sont dessinées verticalement (puisqu'elles sont associées au même point sur  $\gamma_i$ ). Parmi elles, les arêtes associées à  $\star$  sont dessinées en noir. Le lacet de Morse stable  $\Theta(\gamma_1) \cdot \Theta(\gamma_2)$  est celui constitué des pas de Morse stable rencontrés le long du chemin en pointillé sur la partie de gauche, tandis que le lacet de Morse stable  $\Theta(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$  est celui constitué des pas de Morse stable rencontrés le long du chemin en pointillé sur la figure de droite. Ces deux lacets diffèrent d'un lacet de Morse stable correspondant au cercle central, *a priori* non trivial.

- Les relations sont dans le noyau du morphisme  $\text{ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$ , i.e. sont homotopiquement triviales : la raison est la même que celle évoquée dans la preuve du corollaire 4.1, à savoir que les trajectoires des différents espaces de modules permettent de réaliser des disques le long desquels réaliser les homotopies voulues.

On est alors en mesure de définir le groupe fondamental de Morse stable.

**Définition 4.5.** Le groupe

$$\pi_1(M, f, g ; \star) = \left\langle \mathcal{L}^* \mid (P^1 \dots \ell \dots P^k)(P^1 \dots \hat{\ell} \dots P^k)^{-1}, \ell \in \mathcal{R} \right\rangle$$

est appelé groupe fondamental de Morse stable.

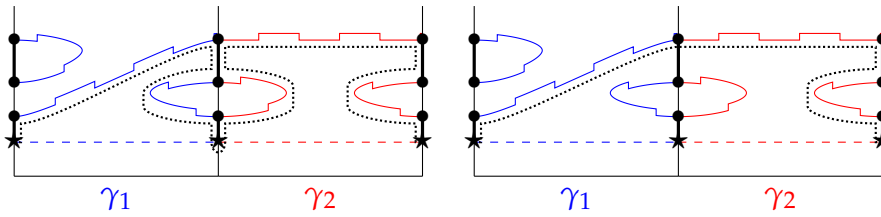


FIGURE 4.4 –  $\Theta(\gamma_1) \cdot \Theta(\gamma_2)$  versus  $\Theta(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ .

L'appellation groupe fondamental de Morse stable est justifiée par le théorème suivant, établissant au passage l'invariance de la présentation en par rapport aux données.

**Théorème 4.1.** *L'application  $ev : \pi_1(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$  est un isomorphisme.*

La fin de cette section consiste à prouver ce théorème. On commence par établir quelques propriétés de  $\Theta$  au niveau des lacets topologiques.

### Application de descente et lacets topologiques

**Lemme 4.1** (Reparamétrage). *Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  un lacet basé lisse par morceaux dans  $M$ . Soit  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application lisse par morceaux telle que  $\tau(0) = 0$  et  $\tau(1) = 1$  et  $\gamma' = \gamma \circ \tau$ . Alors, pour un choix générique de  $\gamma$  et  $\tau$ ,  $\Theta(\gamma)$  et  $\Theta(\gamma')$  sont égaux à élimination des pas consécutifs opposés près.*

*Démonstration.* Les chemins  $\Theta(\gamma)$  et  $\Theta(\gamma')$  sont tracés sous  $\gamma$  et ont les mêmes extrémités. Ils sont en particulier tracés sur la même composante connexe de  $\partial \overline{\mathcal{M}}(\gamma, +)$  qui est homéomorphe à  $S^1$ . Comme les deux évitent  $\underline{\gamma}$  (voir la section 4.3), on en déduit qu'ils sont homotopes, et donc équivalents modulo élimination des pas opposés consécutifs.  $\square$

**Lemme 4.2.** *Soit  $\tau, \alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  des applications lisses par morceaux, sans valeurs singulières communes, envoyant 0 sur 0 et 1 sur 1. On suppose que 0 et 1 sont des points réguliers de  $\tau$ . Alors il existe des applications lisses par morceaux  $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  et  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  envoyant 0 sur 0 et 1 sur 1 qui rendent le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \phi & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 [0, 1] & \longrightarrow & \tau^*[0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & [0, 1] \\
 & \searrow \tilde{\alpha} & \downarrow \tau^*\alpha & & \downarrow \alpha \\
 & & [0, 1] & \xrightarrow{\tau} & [0, 1]
 \end{array} \tag{4.1}$$

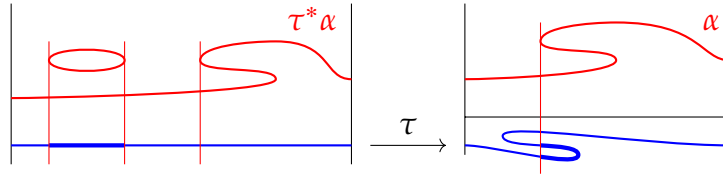


FIGURE 4.5 – Une composante de  $\tau^*\alpha$  se projette avec degré 1 sur  $\alpha$ .

*Démonstration.* Comme  $\tau$  et  $\alpha$  n'ont pas de valeurs critiques communes,  $\tau^*\alpha$  est une variété lisse par morceaux de dimension 1 qui se projette proprement sur  $[0, 1]$ . Au voisinage des extrémités,  $\tau$  est un difféomorphisme, donc  $\tau^*\alpha$  et  $\alpha$  ont les mêmes fibres. On en déduit qu'au dessus d'un voisinage  $[0, \epsilon)$  de 0, toutes les composantes de  $\tau^*\alpha$  ont leur deux bords au-dessus de  $\epsilon$  sauf une qui a un bord au-dessus de 0. La même chose est valable au-dessus de 1. La composante connexe reliant 0 à 1 est difféomorphe à  $[0, 1]$ , et son inclusion dans  $\tau^*[0, 1]$  rend le diagramme (4.1) commutatif. Il est bien lisse par morceaux puisqu'il est lisse en dehors des préimages des singularités de  $\alpha$  et de  $\tau$ .  $\square$

Si  $\gamma$  est un chemin tracé au-dessus d'un chemin de Morse stable  $\sigma_1 \cdots \sigma_k$ , on peut appliquer  $\Theta$  à chaque pas de sa partie basse séparément. On obtient un chemin de Morse stable noté

$$\Theta_*(\gamma) = \Theta(\sigma_1) \cdots \Theta(\sigma_k),$$

qui en général n'est pas le même que  $\Theta(\gamma)$  (voir la figure 4.4). Remarquons que si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont deux chemins composables tracés au dessus de lacets de Morse stable, on a  $\Theta_*(\gamma_1) \cdot \Theta_*(\gamma_2) = \Theta_*(\gamma_1 \cdot \gamma_2)$ , et que  $\Theta_*(\gamma_1^{-1}) = (\Theta_*(\gamma_1))^{-1}$ .

**Lemme 4.3.** Soit  $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  une famille de lacets basés telle que  $\gamma_\lambda \pitchfork \text{ev}_-$  pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . Soit Alors  $\check{\Theta}(\gamma_0) = \check{\Theta}(\gamma_1)$ .

*Démonstration.* C'est un corollaire du lemme A.1 de l'annexe A : l'hypothèse entraîne que les espaces de modules  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_\lambda, +)$  sont isotopes. Comme l'espace des chemins de Morse stable est discret, on en déduit que  $\check{\Theta}(\gamma_\lambda)$  est indépendant de  $\lambda$  et par suite l'énoncé.  $\square$

**Lemme 4.4.** Soit  $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$  une famille de lacets basés telle que  $\overline{\mathcal{M}}(-, \gamma_\lambda)$  soit coupé transversalement pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ . Soit  $\ell_0$  et  $\ell_1$  des lacets de Morse stable tracés respectivement sous  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ . Alors  $\ell_0 = \ell_1$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .

*Démonstration.* D'après l'hypothèse de transversalité, les composantes de bord de  $\overline{\mathcal{M}}(-, \gamma_\lambda)$  qui permettent de définir  $\hat{\Theta}(\gamma_\lambda)$  (voir la remarque 4.1) pour diffé-

rents  $\lambda$  sont toutes difféomorphes. On peut donc choisir une partition fixe

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^{2N+1} [t_i, t_{i+1}]$$

et des paramétrisations  $\hat{\gamma}_\lambda : [0, 1] \rightarrow \partial\overline{\mathcal{M}}(-, \gamma_\lambda)$  de ces composantes de bord auxquelles on a retiré l'arête  $\underline{\gamma}_\lambda$  (voir la section 4.3) vérifiant :

- pour  $k = 2i$  :  $\hat{\gamma}_\lambda|_{[t_{2i}, t_{2i+1}]}$  paramètre une arête basse, i.e. est une composante d'un espace de la forme  $\mathcal{M}(-, a_i) \times \mathcal{M}(a_i, \gamma_\lambda)$  avec  $|a_i| = n$ , qui relie une trajectoire brisée

$$(\omega_i, \psi_i, \chi_{i,\lambda}) \in \mathcal{M}(-, a_i) \times \mathcal{M}(a_i, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, \gamma_\lambda)$$

avec  $|b_i| = n - 1$  ou  $b_i = \star^\pm$ , à une autre trajectoire

$$(\omega_i, \psi'_i, \chi_{i+1,\lambda}) \in \mathcal{M}(-, a_i) \times \mathcal{M}(a_i, b_{i+1}) \times \mathcal{M}(b_{i+1}, \gamma_\lambda)$$

du même type :

$$(\omega_i, \psi_i, \chi_{i,\lambda}) \xleftarrow[\text{[}t_{2i}, t_{2i+1}\text{]}]{\hat{\gamma}_\lambda} (\omega_i, \psi'_i, \chi_{i+1,\lambda})$$

- pour  $k = 2i - 1$  :  $\hat{\Gamma}|_{[t_{2i-1}, t_{2i}]}$  paramètre une arête haute, i.e. est une composante d'un espace de la forme  $\mathcal{M}(-, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, \gamma_\lambda)$  avec  $|b_i| = n - 1$ , ou  $\mathcal{M}(-, \star^+)$ , qui relie une trajectoire brisée

$$(\omega_{i-1}, \psi'_{i-1}, \chi_{i,\lambda}) \in \mathcal{M}(-, a_{i-1}) \times \mathcal{M}(a_{i-1}, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, \gamma_\lambda)$$

à une trajectoire

$$(\omega_i, \psi'_i, \chi_{i,\lambda}) \in \mathcal{M}(-, a_i) \times \mathcal{M}(a_i, b_i) \times \mathcal{M}(b_i, \gamma_\lambda)$$

du même type (lorsque  $b_i = \star^\pm$ , on convient que  $\mathcal{M}(\star^-, \gamma_\lambda)$  est le singleton formé de la trajectoire constante en  $\star$ ) :

$$(\omega_{i-1}, \psi'_{i-1}, \chi_{i,\lambda}) \xleftarrow[\text{[}t_{2i-1}, t_{2i}\text{]}]{\hat{\gamma}_\lambda} (\omega_i, \psi_i, \chi_{i,\lambda})$$

Les deux lacets de Morse stable  $\ell_0$  et  $\ell_1$  étant tracés sous  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$ , ils sont parties basses de deux lacets  $\check{\gamma}_0 : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\gamma_0, +)$  et  $\check{\gamma}_1 : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathcal{M}}(\gamma_1, +)$ .

On considère les deux applications d'évaluations

$$[0, 1] \xrightarrow{\check{\gamma}_0} \overline{\mathcal{M}}(-, +) \xrightarrow{\text{ev}_-} [0, 1]$$

et

$$[0, 1] \xrightarrow{\check{\gamma}_0} \partial\mathcal{M}(-, +) \xrightarrow{\text{ev}_+} [0, 1].$$

Le lemme 4.2 fournit alors des applications  $\tilde{\alpha}_0$  et  $\phi_0$  de degré 1 qui rendent le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\phi_0} & [0, 1] \\ \downarrow \tilde{\alpha}_0 & & \downarrow \check{\gamma}_0 \\ & & \partial\overline{\mathcal{M}}(-, +) \\ & & \downarrow \text{ev}_- \\ [0, 1] & \xrightarrow{\check{\gamma}_0} \partial\overline{\mathcal{M}}(-, +) \xrightarrow{\text{ev}_+} & [0, 1] \end{array}$$

Comme  $\phi_0$  est de degré 1,  $\ell_0$  est égale à la partie basse  $\ell'_0$  de  $\check{\gamma}_0 \circ \phi_0$  modulo élimination de pas opposés consécutifs. On remplace  $\ell_0$  par  $\ell'_0$ .

On répète le procédé précédent pour  $\gamma_1$ .

On note  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\alpha}_1^{-1}$  la concaténation des chemins  $\tilde{\alpha}_0$  et  $(\tilde{\alpha}_1)^{-1}$ , qui résulte donc en un lacet  $\tilde{\alpha} : S^1 \rightarrow [0, 1]$ . On note aussi  $\check{\gamma}$  la concaténation de  $\check{\gamma}_0 \cdot (\check{\gamma}_1)^{-1}$  et  $\ell = \ell_0 \cdot \ell_1^{-1}$ . On a  $\ell = \Theta(\check{\gamma})$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ . De plus, comme  $\tau_\epsilon = \text{ev}_+ \circ \hat{\gamma}_\epsilon$  et  $\alpha_\epsilon = \text{ev}_- \circ \check{\gamma}_\epsilon$  n'ont pas de valeur singulière commune,  $\epsilon = 0, 1$ , les  $t_i$  sont des valeurs régulières de  $\tilde{\alpha}$ .

Fixons un entier pair  $k = 2i \in \{1, \dots, N\}$ . L'ensemble

$$\tilde{\alpha}^{-1}(t_{2i}) = \{s_{i,1}, \dots, s_{i,2N_i}\}$$

est constitué d'un nombre pair de valeurs, rangées dans l'ordre croissant d'apparition, qui sont régulières pour l'application  $\text{ev}_- : \overline{\mathcal{M}}(\gamma_0, +) \rightarrow [0, 1]$  si  $s_{i,j} < \frac{1}{2}$  et  $\text{ev}_+ : \overline{\mathcal{M}}(\gamma_1, +) \rightarrow [0, 1]$  si  $s_{i,j} > \frac{1}{2}$ . En particulier,  $\check{\gamma}(s_{i,j}) \in \mathcal{M}(-, x_{i,j}) \times \mathcal{M}(x_{i,j}, +)$  est une configuration brisée en  $x_{i,j} \in \text{Crit}_0(f)$ . De plus, si  $s_{i,j} < \frac{1}{2}$ , (resp.  $s_{i,j} > \frac{1}{2}$ ) alors  $\text{ev}_+(\chi_i^0) = \text{ev}_-(\check{\gamma}(s_{i,j}))$  (resp.  $\text{ev}_+(\chi_i^1) = \text{ev}_-(\check{\gamma}(s_{i,j}))$ ). Ces deux trajectoires définissent donc un élément

$$u_{i,j} \in \mathcal{M}^1(b_i, x_{i,j}) \times \mathcal{M}(x_{i,j}, +). \quad (4.2)$$

On regroupe alors les  $u_{i,j}$  par paires pour former des chemins  $\Lambda_{i,j}$  obtenus en remontant  $u_{2j-1}$  et en redescendant  $u_{2j}$  :

$$\Lambda_{i,j} = (u_{i,2j-1})^{-1} \cdot u_{i,2j}.$$

Plus formellement, on regarde  $\Lambda_{i,j}$  comme un chemin dans  $\overline{\mathcal{M}}^1_\bullet(b_i, +)$  obtenu en déplaçant le point marqué le long des trajectoires fixes  $u_{i,j}$  et  $u_{i,j+1}$ .

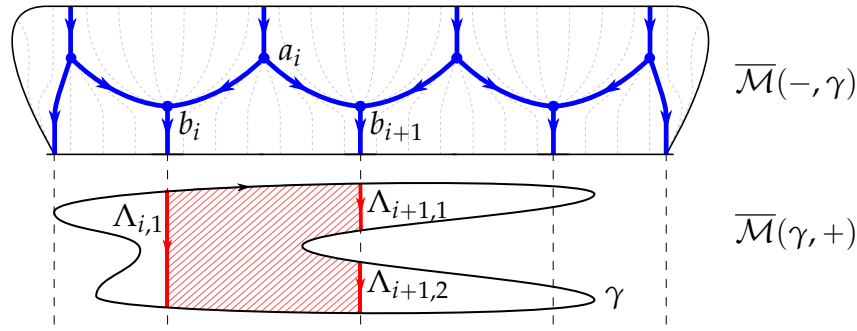


FIGURE 4.6 – Découpage d'une perturbation en relations.

Par ailleurs, pour chaque  $i$ , on considère la décomposition de  $\check{\gamma}$  suivant la partition fournie par les  $s_{i,j}$  (auxquels on ajoute  $s_{i,0} = 0$  et  $s_{i,2N_i+1} = 1$ ) : on note

$$\mu_{i,j} = \check{\gamma}|_{[s_{i,2j}, s_{i,2j+1}]} \text{ et } \lambda_{i,j} = \check{\gamma}|_{[s_{i,2j-1}, s_{i,2j}]}.$$

En d'autres termes, les  $\mu_{i,j}$  et  $\lambda_{i,j}$  sont les composantes de  $\check{\gamma}$  le long desquelles  $\tilde{\alpha}$  est inférieure ou supérieure à  $t_{2j}$ . Alors

$$\check{\gamma} = \mu_{i,0} \cdot \lambda_{i,1} \cdot \mu_{i,1} \cdots \lambda_{i,N_i} \cdot \mu_{i,N_i}.$$

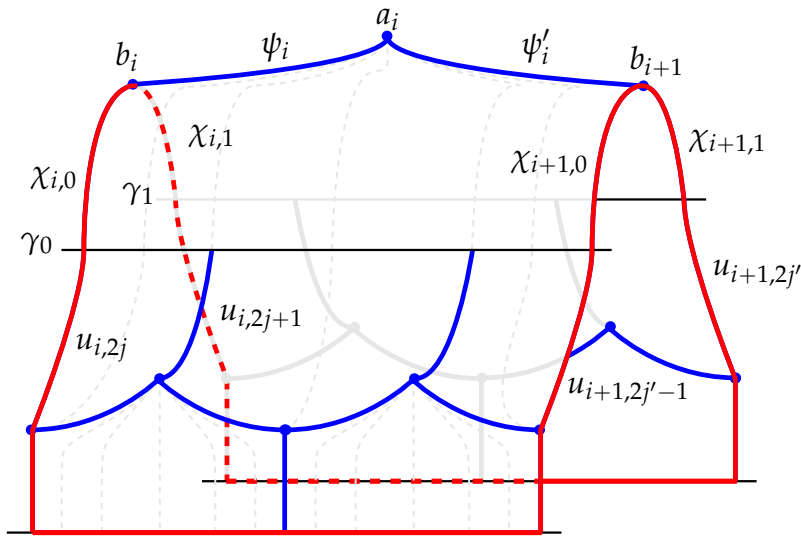


FIGURE 4.7 – Le lacet  $\Theta_*(\rho)$  est une relation.

On considère alors le chemin  $\check{\gamma}_i$  dans lequel on remplace les  $\lambda_{i,j}$  par  $\Lambda_{i,j}$  :

$$\check{\gamma}_i = \mu_{i,0} \cdot \Lambda_{i,1} \cdot \mu_{i,1} \cdots \Lambda_{i,N_i} \cdot \mu_{i,N_i}.$$



On rappelle qu'on suppose que  $\check{\gamma}$  est tracé au dessus d'un chemin de Morse stable. Comme les  $s_{i,j}$  sont tous dans des pas hauts de  $\check{\gamma}$ , les  $\mu_{i,j}$  et  $\lambda_{i,j}$  sont encore tracés au-dessus de chemins de Morse stable. Le lacet  $\check{\gamma}_i$  pour sa part contient, en plus de pas de Morse stable, les  $\Lambda_{i,j}$  qui n'en sont pas. Toutefois, d'après (4.2),  $\Theta(\Lambda_{i,j})$  est bien un chemin de Morse stable. On notera donc toujours  $\Theta_*(\check{\gamma}_i)$  le chemin obtenu en appliquant  $\Theta$  morceau par morceau à la partie basse de  $\check{\gamma}_i$  :

$$\Theta_*(\check{\gamma}_i) = \Theta_*(\mu_{i,0}) \cdot \Theta(\Lambda_{i,1}) \cdot \Theta_*(\mu_{i,1}) \cdots \Theta(\Lambda_{i,N_i}) \cdot \Theta_*(\mu_{i,N_i}).$$

Notre but est de montrer que  $\ell = \Theta_*(\check{\gamma}_i)$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .

On procède par récurrence descendante, qu'on initialise en remarquant que  $\check{\gamma}_N = \check{\gamma}$ , et comme la partie basse de  $\check{\gamma}$  ne contient que des pas de Morse stable, les relations 2 assurent que  $\ell = \Theta_*(\check{\gamma}_N)$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .

On suppose donc qu'on a montré que  $\ell = \Theta_*(\check{\gamma}_{i+1})$ . On applique la même décomposition que ci-dessus associée à  $t_{i+1}$  aux chemins  $\lambda_{i,j}$  : on note  $\lambda'_{i,j}$  le chemin dans lequel on a remplacé toutes les parties qui dépassent  $t_{i+1}$  par les chemins  $\Lambda_{i+1,j'}$  correspondants. On obtient

$$\check{\gamma}_{i+1} = \mu_{i,0} \cdot \lambda'_{i,1} \cdot \mu_{i,1} \cdots \lambda'_{i,N_i} \cdot \mu_{i,N_i}.$$

On montre maintenant, toujours par récurrence descendante, qu'on peut remplacer chaque  $\lambda'_{i,j}$  par  $\Lambda_{i,j}$  sans changer l'image par  $\Theta_*$ . Soit

$$w = \mu_{i,0} \cdot \lambda'_{i,1} \cdots \mu_{i,N_i-1}$$

et considérons

$$\rho = \Lambda_{i,N_i} \cdot (\lambda'_{i,N_i})^{-1}.$$

En lui appliquant  $\Theta$  morceaux par morceaux, on obtient le chemin

$$\Theta_*(\rho) = \Theta(\Lambda_{i,N_i}) \cdot (\Theta_*(\lambda'_{i,N_i}))^{-1}.$$

Or toutes les trajectoires de  $\Theta(\lambda'_{i,N_i})$  ou de  $\Theta(\Lambda_{i,N_i})$  se relèvent continûment en des trajectoires partant de  $a_i$  qui est un point d'indice  $n$  : en effet, pour  $s < \frac{1}{2}$  (resp.  $s > \frac{1}{2}$ ) on a  $\text{ev}_+(\hat{\gamma}_0(\tilde{\alpha}(s))) = \text{ev}_-(\check{\gamma}(s))$  (resp.  $\text{ev}_+(\hat{\gamma}_0(\tilde{\alpha}(s))) = \text{ev}_-(\check{\gamma}(s))$ ). Sur une composante  $\zeta$  de  $\lambda'_{i,j}$  privé des  $\Lambda_{i,j'}$ , on a  $\tilde{\alpha}(s) \in [t_{2i}, t_{2i+2}]$ . Pour  $t \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]$ ,  $\text{ev}_+(\hat{\gamma}_0(t))$  est constant égal à  $\text{ev}_+(\hat{\gamma}_0(t_{2i+1}))$  (en fait, les  $\hat{\gamma}_0(t)$  sont toutes des trajectoires brisées en  $b_i$  pour lesquelles la trajectoire issue de  $b_i$  est indépendante de  $t$ ). Soit  $\pi : [t_{2i}, t_{2i+2}] \rightarrow [t_{2i}, t_{2i+1}]$  la projection qui écrase  $[t_{2i+1}, t_{2i+2}]$  sur  $\{t_{2i+1}\}$ . Alors  $\text{ev}_+(\hat{\gamma}_0(\pi \circ \tilde{\alpha}(s))) = \text{ev}_-(\check{\gamma}(s))$ . Les configurations  $\check{\gamma}_0(\pi \circ \tilde{\alpha}(s))$  (resp.  $\check{\gamma}_1(\pi \circ \tilde{\alpha}(s))$ ) suivies de  $\check{\gamma}(s)$  forment donc des trajectoires de  $\overline{\mathcal{M}^1(a_i, +)}$ . C'est encore vrai pour  $s = \frac{1}{2}$ . La composante  $\zeta$  se relève ainsi en un

chemin continu dans  $\overline{\mathcal{M}^1}(a_i, +)$ . En rajoutant un point marqué à l'extrémité de la trajectoires, on les voit comme des trajectoires de  $\overline{\mathcal{M}^1}_\bullet(a_i, +)$ . Le bord de ce chemin est formé de configurations de la forme  $(\psi_i, u_{i,j})$  ou  $(\psi'_i, u_{i+1,j})$ .

Par ailleurs, les  $\Lambda_{i,j'}$  et  $\Lambda_{i+1,j'}$  auxquelles on accole les trajectoires  $\psi_i$  et  $\psi'_i$  relient ces configurations entre elles dans  $\overline{\mathcal{M}^1}_\bullet(a_i, +)$ .

On a ainsi exprimé  $\rho$  comme un lacet dans  $\overline{\mathcal{M}^1}_\bullet(a_i, +)$ . On en déduit que  $\Theta_*(\rho) = 1$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .

En appliquant également  $\Theta$  morceaux par morceaux à  $\gamma_{i+1}$ , on obtient dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$  :

$$\begin{aligned}\Theta_*(\check{\gamma}_{i+1}) &= \Theta_*(w) \cdot \Theta_*(\lambda'_{i,N_i}) \Theta_*(\mu_{i,N_i}) \\ &= \Theta_*(w) \cdot \Theta_*(\Lambda_{i,N_i}) \Theta_*(\mu_{i,N_i}).\end{aligned}$$

En recommençant ce calcul pour chaque  $\lambda'_{i,j'}$ , on parvient à remplacer chaque  $\lambda'_{i,j}$  par  $\Lambda_{i,j}$ , et on obtient finalement :

$$\ell = \Theta_*(\check{\gamma}_{i+1}) = \Theta_*(\check{\gamma}_i).$$

Ainsi,  $\ell = \Theta_*(\check{\gamma}_0)$ . Comme  $\check{\gamma}_0$  est constitué de trajectoires qui partent toutes du point  $\star$ , elles sont toutes reliées à un même point d'indice  $n$  et donc  $\Theta_\star(\check{\gamma}_0)$  est une relation dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ . On obtient donc finalement que

$$\ell = 1.$$

□

### Invariance de la présentation

On se donne maintenant un disque  $D : \mathbb{D} \rightarrow M$ , dont on suppose que le rayon  $[0, 1]$  est envoyé sur le point base. On définit alors

$$\overline{\mathcal{M}}(D, +) = \mathbb{D} \times_{D, M, \text{ev}_-} \overline{\mathcal{M}}(-, +),$$

que l'on regarde regarde fibré au-dessus de  $[0, 1]$  par les différents rayons du disque :

$$\overline{\mathcal{M}}(D, +) = \bigsqcup_{R \in [0,1]} \overline{\mathcal{M}}(\gamma_R, +),$$

où  $\gamma_R = D|_{R\mathbb{D}}$ . On utilise le lemme B.1 de l'annexe B afin d'imposer de bonnes propriétés génériques à l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(D, +)$  et à ses strates :

**Corollaire 4.3.** *Pour un choix générique de  $D$ ,*

- l'espace  $\overline{\mathcal{M}}(D, +)$  est une variété lisse à coins de dimension 3,
- l'application  $\check{\rho} : \mathcal{M}(D, +) \rightarrow [0, 1]$  (induite par la projection  $\mathcal{M}(D, +) \rightarrow \mathbb{D}$  puis la projection radiale  $\mathbb{D} \rightarrow [0, 1]$ ) est une fonction de Morse,
- les applications  $\check{\rho} : \mathcal{M}(D, c) \rightarrow [0, 1]$ ,  $c \in \text{Crit}(f)$ , sont des fonctions de Morse,
- l'application  $\hat{\rho} : \mathcal{M}(-, D) \rightarrow [0, 1]$  est une fonction de Morse,
- les applications  $\hat{\rho} : \mathcal{M}(c, D) \rightarrow [0, 1]$ ,  $c \in \text{Crit}(f)$ , sont des fonctions de Morse.

On appelle rayon critique bas un  $R \in [0, 1]$  valeur critique d'une des applications  $\check{\rho}$  de l'énoncé précédent, et rayon critique haut un  $R \in [0, 1]$  valeur critique d'une des applications  $\hat{\rho}$  de l'énoncé précédent.

**Corollaire 4.4.** *Pour un choix générique de  $D$ , les rayons critiques hauts et bas sont distincts.*

Dans la suite  $D$  est choisi de façon à satisfaire toutes les conditions de généralité des corollaires ci-dessus.

**Lemme 4.5.** *Soit  $[R_0, R_1] \subset [0, 1]$  un intervalle qui ne contient pas de rayon critique bas. Alors  $\Theta(\gamma_{R_0}) = \Theta(\gamma_{R_1})$ .*

*Démonstration.* L'hypothèse entraîne que la famille  $\gamma : [R_0, R_1] \times [0, 1] \rightarrow M$  est telle que  $\overline{\mathcal{M}}(\gamma_{R+\tau}, +)$  est coupé transversalement pour tout  $R_0 < t < R_1$ , c'est donc une application du lemme 4.3.  $\square$

**Lemme 4.6.** *Soit  $R$  un rayon critique bas. Il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\Theta(\gamma_{R+\epsilon})$  est égal à  $\Theta(\gamma_{R-\epsilon})$  dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$ .*

*Démonstration.* Comme  $R$  est un rayon critique, bas il n'est pas un rayon critique haut. Par généralité ouverte, il existe un voisinage de  $\epsilon > 0$  tel que les espaces  $\overline{\mathcal{M}}(-, \gamma_{R+\tau})$  soient coupés transversalement pour  $-\epsilon < \tau < \epsilon$ . D'après le lemme 4.4,  $\Theta(\gamma_{R+\epsilon}) = \Theta(\gamma_{R-\epsilon})$ .  $\square$

On est finalement en mesure de prouver le théorème 4.1.

*Preuve du théorème 4.1.* Le corollaire 4.1 montrait déjà la surjectivité du morphisme  $\text{ev} : \mathcal{L}(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$ . Montrons-en l'injectivité.

Soit  $w \in \ker \text{ev}$ . Il existe un disque  $D$  qui est bordé par  $\gamma = \text{ev}(w)$ . On peut le choisir générique au sens des corollaires précédents. L'intervalle

$$[0, 1] = [0, R_0, R_1, \dots, R_n, 1]$$

est partitionné par les rayons critiques et bas et haut. D'après les lemmes 4.5 et 4.6 appliqués successivement,

$$\Theta(\gamma) = \Theta(\gamma_1) = \Theta(\gamma_{R_n+\epsilon}) = \Theta(\gamma_{R_n-\epsilon}) = \Theta(\gamma_{R_{n-1}+\epsilon}) = \cdots = \Theta(\gamma_0)$$

est égal dans  $\pi_1(M, f, g ; \star)$  à l'image par  $\Theta$  du lacet constant au centre du disque, c'est-à-dire au lacet constant. On en déduit ainsi que

$$w = 1 \in \pi_1(M, f, g ; \star),$$

et donc que  $\text{ev} : \pi_1(M, f, g ; \star) \rightarrow \pi_1(M ; \star)$  est injectif. □



# Annexe A

## Géométrie différentielle sur les variétés à coins

Dans cette annexe, on montre les résultats que l'on a utilisés portant sur les variétés à coins et à faces. Quelques remarques et exemples permettent d'illustrer la différence entre ces variétés et celles simplement lisses ou à bord. Les preuves des premiers résultats peuvent être trouvées dans [5] et [17].

### A.1 Préliminaires

**Définition A.1.** Une variété à coins  $P$  de dimension  $n$  est une variété lisse dans laquelle on remplace dans les définitions

« ouverts de  $\mathbb{R}^n$  » par « ouverts de  $\mathbb{R}_k^n := \mathbb{R}^{n-k} \times [0, +\infty[^k, 0 \leq k \leq n$  ».

Le fait que l'on choisisse de modéliser ces espaces sur les  $\mathbb{R}_k^n$  plutôt que uniquement sur  $\mathbb{R}_n^n = [0, +\infty[^n$  permet de continuer à parler de cartes  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$  centrées en  $x \in P$ , i.e. telles que  $\varphi(x) = 0$ . Ceci est dû au fait qu'un difféomorphisme entre variétés à coins envoie la  $k$ -strate dans la  $k$ -strate, et considérer l'ensemble des  $\mathbb{R}_k^n$  dont l'origine est de profondeur  $k$  résout le problème. On peut d'ailleurs définir la profondeur d'un point  $p \in P$  comme l'unique entier  $d(x) = k$  tel qu'il existe une carte  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$  centrée en  $x$ , ce qui correspond bien au nombre de zéros nécessaires à l'écriture de  $\varphi(x)$  et donc à la définition initiale. On rappelle que la  $k$ -strate est l'ensemble des points de profondeur  $k$ ,  $\partial^k P = \{x \in P ; d(x) = k\}$ . La figure A.1 donne deux exemples de variétés à coins, le carré  $[0, 1]^2$  et la lame  $\mathbb{L}$ , où la 0-strate correspond à la partie grisée, la 1-strate correspond aux arêtes, tandis que la 2-strate correspond aux sommets. On notera  $\mathring{P} = \partial^0 P$  les points intérieurs à  $P$  et  $\partial P = \cup_{k \geq 1} \partial^k P$  les points sur le bord de  $P$ .

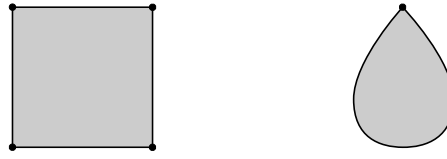


FIGURE A.1 – Le carré et la larme.

Une application  $f : P \rightarrow Q$  entre variétés à coins est dite lisse en  $x \in P$  s'il existe des cartes  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  et  $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ , des ouverts  $\mathcal{U} \supset \varphi(U)$  et  $\mathcal{V} \supset \psi(V)$  et une fonction  $\hat{f} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  lisse en  $\varphi(x)$  prolongeant  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ . Les notions usuelles de fibré tangent, fibré cotangent, immersion, submersion, plongement, etc. s'étendent comme dans le cas des variétés à bord, où l'on commence par faire en sorte que l'espace tangent en un point  $x \in P$  soit toujours l'ensemble des dérivations sur les germes de fonctions lisses au point  $x$  :

$$T_x P = \{X_x : C_p^\infty(P) \rightarrow \mathbb{R} ; X_x(f \cdot g) = X_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot X_x(g)\}.$$

Les germes d'applications n'étant pas affectées par la strate, on a  $T_p P \simeq \mathbb{R}^n$  quel que soit  $x$ . Le choix d'une carte  $\varphi$  induit toujours celui d'une base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{1 \leq i \leq n}$ .

On voit facilement que les variétés à coins sont stables par produit (contrairement aux variétés à bord), et que la  $k$ -strate d'une variété à coins de dimension  $n$  est une variété lisse de dimension  $n - k$ . Une sous-famille de variétés à coins, les variétés à faces, permet d'obtenir des résultats plus forts.

**Définition A.2.** Une face est l'adhérence d'une composante connexe de la 1-strate.

Par exemple, le carré de la figure A.1 possède quatre faces toutes difféomorphes au segment  $[0, 1]$ , tandis que la larme de cette même figure ne comporte qu'une face, qui est seulement homéomorphe au cercle  $S^1$ .

**Définition A.3.** Une variété à coins  $P$  est dite à faces si tout point  $x \in P$  appartient à exactement  $d(x)$  faces.

Le carré est une variété à faces, alors que la larme n'est qu'une variété à coins étant donné que l'unique élément de sa 2-strate n'appartient qu'à une seule face.

**Proposition A.1.** Les faces d'une variétés à faces sont des variétés à faces.

La proposition précédente donne par exemple du sens aux formules  $\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$  rencontrées en étudiant la cohomologie de de Rham : le simplexe  $\Delta$  est une

variété à faces, les faces qui constituent son bord sont des simplexes et donc encore des variétés à faces, et l'intégrale  $\int_{\partial\Delta} \omega$  est à comprendre comme la somme de l'intégrale de  $\omega$  sur chacune de ces faces.

Un ensemble  $S \subset Q$  est une sous-variété à coins de la variété à coins  $Q$  si c'est l'image  $i(P)$  d'un plongement  $i : P \rightarrow Q$ , avec  $P$  une variété à coins. Certaines sous-variétés à coins possèdent des strates qui se comportent correctement vis-à-vis des strates de la variété ambiante.

**Définition A.4.** Une sous-variété nette  $S$  de codimension  $s$  d'une variété à coins  $P$  de dimension  $n$  est un ensemble vérifiant les conditions suivantes :

1.  $\forall k > n - s, \partial^k P \cap S = \emptyset$ ,
2. pour tout point  $x \in S$ , il existe une carte  $(\varphi, U)$  de  $P$  centrée en  $x$  telle que  $\varphi(U \cap S) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}_{d(x)}^{n-s}$ .

**Proposition A.2.** Une sous-variété nette  $S$  d'une variété à coins  $P$  est une variété à coins, qui vérifie  $\partial^k S = \partial^k P \cap S$ . Si  $P$  est à faces, alors  $S$  l'est aussi.

Contrairement aux variétés à bord, les variétés à coins admettent des produits et des produits fibrés au-dessus de variétés lisses, sous réserve que les flèches vérifient une condition de transversalité.

**Proposition A.3.** Soit  $P$  et  $Q$  deux variétés à coins. Alors  $P \times Q$  est une variété à coins. De plus,

$$\partial^k(P \times Q) = \bigcup_{i+j=k} \partial^i P \times \partial^j Q.$$

Si  $P$  et  $Q$  sont à faces,  $P \times Q$  l'est aussi.

**Définition A.5.** Deux applications  $f : P \rightarrow S$  et  $g : Q \rightarrow S$ , où  $P$  et  $Q$  sont des variétés à coins et  $S$  est une variété lisse, sont dites transverses si :

$$\forall (x, y, z) \in P \times Q \times S, f(x) = g(y) = z \implies df_x(T_x \partial^{d(x)} P) + dg_y(T_y \partial^{d(y)} Q) = T_z S.$$

Autrement dit,

$$f \pitchfork g \iff \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \partial^i f \pitchfork \partial^j g.$$

**Proposition A.4.** Soient  $f : P \rightarrow S$  et  $g : Q \rightarrow S$  deux applications transverses. Le produit fibré

$$P \times_{f,S,g} Q = \{(x, y) \in P \times Q ; f(x) = g(y)\}$$

est une sous-variété nette de codimension  $s$  de  $P \times Q$ , qui vérifie

$$\partial^k \left( P \times_{f,S,g} Q \right) = \bigcup_{i+j=k} \left( \partial^i P \times_{f,S,g} \partial^j Q \right).$$

Si  $P$  et  $Q$  sont à faces,  $P \times_{f,S,g} Q$  l'est aussi.



*Démonstration.* Il suffit de reformuler la transversalité des applications  $f$  et  $g$  en celle des applications

$$f \times g : \begin{array}{ccc} P \times Q & \longrightarrow & S^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (f(x), g(y)) \end{array} \quad \text{et } \Delta : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & S^2 \\ z & \longmapsto & (z, z) \end{array}$$

pour se retrouver dans le formalisme du lemme 3.4 de [5].  $\square$

Notons finalement qu'on a l'identification suivante au niveau des espaces tangents :

$$T \left( \begin{array}{c} P \times Q \\ f, S, g \end{array} \right) \simeq TP \times_{df, TS, dg} TQ.$$

## A.2 Extension de résultats lisses au cadre à coins

En adaptant quelques définitions aux variétés à coins, on est en mesure de généraliser des résultats classiques de géométrie différentielle portant sur les variétés lisses.

**Définition A.6.** Soit  $P$  une variété à coins et  $M$  une variété lisse. Une application  $f : P \rightarrow M$  est dite submersion si pour tout entier  $k$ ,  $\partial^k f = f|_{\partial^k P}$  est une submersion (au sens lisse).

On parlera de submersion faible pour l'ancienne définition. Une submersion est une submersion faible, car  $T_x \partial^k P \subset T_x P$  et donc  $T_{f(x)} M = df(T_x \partial^k P) \subset df(T_x P)$ . En revanche, il existe des submersions faibles qui ne sont pas des submersions, comme la projection  $p_2 : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $(x, y) \mapsto y$ , où  $\partial^1 p_2 : \partial^1 \mathbb{R}_1^2 = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est alors donnée par  $x \mapsto 0$ . Remarquons que, si  $f : P \rightarrow M$  est une submersion, alors les strates  $\partial^k P$  de  $P$  sont vides dès que  $k > n - m$ . Le théorème du rang constant pour les submersions est toujours vrai dans ce cadre :

**Proposition A.5** (Théorème du rang constant pour les submersions sur les variétés à coins). Soit  $P$  une variété à coins,  $M$  une variété lisse et  $f : P \rightarrow M$  une submersion. Pour tout  $x \in P$ , il existe des coordonnées  $(\varphi, U)$  centrées en  $x$  et  $(\psi, V)$  centrées en  $f(x)$  telles que dans ces coordonnées,

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m).$$

*Démonstration.* L'énoncé étant local, on peut considérer que  $P = \mathbb{R}_n^k$ ,  $k \leq n - m$ ,  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $x = 0 \in \mathbb{R}_n^k$  et  $f(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$ . D'après l'hypothèse,

$$\partial^k f : \mathbb{R}^{n-k} \times \{0\}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$$

est une submersion. On peut supposer que  $(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$  est de rang  $m$ . Alors  $\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$  est une carte « à coins » de  $P$ , et le théorème du rang classique appliqué à

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

permet de conclure. □

Les résultats découlant du théorème du rang ont donc une chance d'être étendus dans le cadre à coins. C'est le cas du théorème d'Ehresmann.

**Définition A.7.** Une application  $f : P \rightarrow M$  est une fibration localement triviale si pour tout  $y \in M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $p$  vérifiant les deux conditions :

1. Il existe un difféomorphisme  $\Phi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times f^{-1}(p)$ ,
2. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times f^{-1}(p) \\ & \searrow f & \swarrow \text{pr}_U \\ & & U \end{array}$$

**Proposition A.6** (Théorème d'Ehresmann pour les variétés à coins). *Soit  $P$  une variété à coins compacte et  $\pi : P \rightarrow M$  une submersion surjective. Alors  $\pi$  est une fibration localement triviale.*

*Démonstration.* Comme l'énoncé est local, il suffit de montrer le résultat pour  $M = \mathbb{R}^m$ . On le montre pour  $M = \mathbb{R}$ , le cas général étant analogue. Soit  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $p \in \pi^{-1}(t)$ , il existe d'après le théorème du rang des coordonnées  $(\varphi_p, U_p)$  au voisinage de  $p$  et des coordonnées  $(\psi_p, V_p)$  au voisinage de  $t$  telles que dans ces coordonnées,  $\pi(x_1, \dots, x_n) = x_1$ . On extrait un sous-recouvrement fini de  $\pi^{-1}(t)$  dans  $\cup_p U_p$ , que l'on note  $\cup_{i=1}^m U_i$ . Les champs de vecteurs  $X_i$  définis sur  $U_i$  par  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^1}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , vérifient

$$d\pi_p(X_i) = \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_t = f_i(t) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t,$$

où  $p \in U_i$  et  $f_i : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse ne s'annulant pas. Les champs de vecteurs  $X_i$  sont tangents aux strates de  $U_i$ , ce qui est équivalent à dire que  $P$  n'a pas de  $n$ -strate, et ceci est garanti comme  $\partial^k P \neq \emptyset$  entraîne que  $k \leq \dim P - \dim ]-1, 1[ = n - 1$ . On introduit ensuite les champs de vecteurs  $Y_i = \frac{1}{f_i \circ \pi} \cdot X_i$

ainsi qu'une partition de l'unité  $\rho_i$  subordonnée au recouvrement  $\cup_{i=1}^m U_{p_i}$ . Le champ de vecteur  $Y = \sum_{i=1}^m \rho_i Y_i$  vérifie alors

$$d\pi_p(Y) = \sum_{i=1}^m \rho_i(p) d\pi_p(Y_i) = \sum_{i=1}^m \rho_i(p) \frac{1}{f_i(t)} f_i(t) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t = \left( \sum_{i=1}^m \rho_i(p) \right) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_t.$$

Comme  $Y$  est tangent aux strates de  $M$ , et que  $M$  est compacte, le flot de  $Y$  est complet. Ce flot se restreint alors en un difféomorphisme

$$\varphi : ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \times \pi^{-1}(t) \rightarrow \pi^{-1}(]t - \varepsilon, t + \varepsilon[)$$

vérifiant  $\pi \circ \varphi(s, x) = s$ . □

Le lemme suivant donne l'invariance d'une famille de produits fibrés sans singularité, au sens où les applications qui les définissent restent toujours transverses :

**Lemme A.1.** *Soit  $f_t : P \rightarrow M$  et  $g_t : Q \rightarrow M$  deux familles d'applications, où  $P$  et  $Q$  sont des variétés à coins compactes et  $M$  une variété lisse,  $t \in ]-1, 1[$ . On suppose que pour tout  $t$ ,  $f_t$  et  $g_t$  sont transverses. Alors pour tout  $t$ , on a que*

$$P \times_{f_t, M, g_t} Q \simeq P \times_{f_0, M, g_0} Q.$$

*Démonstration.* On note  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$  les applications données par  $\tilde{f}(t, x) = (t, f_t(x))$  et  $\tilde{g}(t, y) = (t, g_t(y))$ . Soit  $(t, z) \in ]-1, 1[ \times M$ ,  $x \in \partial^i P$  et  $y \in \partial^j Q$  tels que  $f_t(x) = g_t(y) = z$ , et  $s \oplus u \in \mathbb{R} \oplus T_z M = T_{(t,z)}(]-1, 1[ \times M)$ . On choisit deux vecteurs tangents  $v \in T_x \partial^i P$  et  $w \in T_y \partial^j Q$  tels que  $(df_t)_x(v) + (dg_t)_y(w) = u$ , dont l'existence est assurée par l'hypothèse de transversalité entre  $f_t$  et  $g_t$ . On a alors  $d\tilde{f}_{(t,x)}(s, v) + d\tilde{g}_{(t,y)}(0, w) = s \oplus (df_t)_x(v) + 0 \oplus (dg_t)_y(w) = s \oplus u$ , ce qui montre la transversalité de  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$ . Le produit fibré

$$S = (]-1, 1[ \times P) \times_{\tilde{f}, ]-1, 1[ \times M, \tilde{g}} (]-1, 1[ \times Q)$$

est alors une variété à coins. La projection  $\pi : S \rightarrow ]-1, 1[$  sur le premier ou le second facteur  $]-1, 1[$  (les deux applications coïncident) s'y restreint en une fonction lisse. Montrons que cette projection est une submersion, i.e. que pour tout point  $p = (t, x, t, y) \in S$  (on note  $d(p) = k$ ,  $d(x) = i$  et  $d(y) = j$ ), on a  $d\pi_p(T_p \partial^k S) = \mathbb{R}$ . Comme la différentielle de la projection est donnée par  $d\pi_p(s, u, s, v) = s$ , cela revient à montrer qu'il existe des vecteurs tangents  $u \in$

$T_x \partial^i P$  et  $v \in T_y \partial^j Q$  tels que  $(s, u, s, v) \in T_p \partial^k S$ . Or, ce dernier espace tangent se décrit comme

$$\begin{aligned}
T_p \partial^k S &= T_p(\partial^k([\ ] - 1, 1[\times P] \times_{\tilde{f}, ]-1, 1[\times M, \tilde{g}} [\ ] - 1, 1[\times Q])) \\
&= T_{(t,x)} \partial^i [\ ] - 1, 1[\times P] \times_{d\tilde{f}_{(t,x)}, \mathbb{R} \oplus T_z M, d\tilde{g}_{(t,y)}} T_{(t,y)} \partial^j [\ ] - 1, 1[\times Q] \\
&= (\mathbb{R} \oplus T_x \partial^i P) \times_{d\tilde{f}_{(t,x)}, \mathbb{R} \oplus T_z M, d\tilde{g}_{(t,y)}} (\mathbb{R} \oplus T_y \partial^j Q) \\
&= \{(s, u, s, v) ; s \frac{\partial f_{\bullet}(x)}{\partial t} + df_t(u) = s \frac{\partial g_{\bullet}(y)}{\partial t} + dg_t(v)\} \\
&= \{(s, u, s, v) ; df_t(u) - dg_t(v) = s[\frac{\partial g_{\bullet}(y)}{\partial t} - \frac{\partial f_{\bullet}(x)}{\partial t}]\},
\end{aligned}$$

et l'hypothèse de transversalité permet le choix de tels vecteurs  $u$  et  $v$ . On peut alors appliquer le théorème d'Erhesmann à  $\pi$ , qui est donc une fibration localement triviale de fibre

$$\pi^{-1}(t) = \{(t, x, t, y) \in [\ ] - 1, 1[\times P \times] - 1, 1[\times Q ; f_t(x) = g_t(y)\} \simeq P \times_{f_t, M, g_t} Q,$$

ce qui montre l'énoncé.  $\square$

On en déduit le corollaire suivant pour les fonctions  $h : P \rightarrow \mathbb{R}$  dont aucune restriction  $\partial^k h : \partial^k P \rightarrow \mathbb{R}$  ne présente de point critique :

**Corollaire A.1.** *Soit  $h : P \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Crit}(\partial^k h) = \emptyset$ . Alors les niveaux  $h^{-1}(t)$  sont tous difféomorphes.*

*Démonstration.* La condition sur  $h : P \rightarrow \mathbb{R}$  entraîne sa transversalité à tout point  $\{t\} \subset \mathbb{R}$ . En considérant la famille de fonction  $f_t : \{*\} \rightarrow \mathbb{R}, f_t(*) = t$ , on obtient d'après le lemme A.1 que les produits fibrés

$$P \times_{h, M, f_t} \{*\} = \{(x, *) \in P \times \{*\} ; h(x) = f_t(*)\} \simeq h^{-1}(t)$$

sont tous difféomorphes.  $\square$



# Annexe B

## Résultats de transversalité

### B.1 Lemme de transversalité à paramètres

**Théorème B.1** (Sard-Smale). *Soit  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  des variétés Banachiques séparables. Soit  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une application Fredholm de régularité  $C^l$  avec  $l \geq \max(1, \text{ind}(f) + 1)$ . Alors l'ensemble des valeurs régulières de  $f$  est générique. En particulier, pour un  $y \in \mathcal{F}$  générique, l'ensemble  $f^{-1}(y)$  est une sous-variété de  $\mathcal{E}$  de dimension  $\text{ind}(f)$ .*

**Définition B.1.** Soit  $\mathcal{M}$  une variété Banachique et  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  un fibré Banachique de fibre  $\mathcal{F}$ . Une section  $s : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  est dite Fredholm d'indice  $r$  si il existe une trivialisatation locale  $\{(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha : \mathcal{E}_{\mathcal{U}_\alpha} \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{F})\}_{\alpha \in I}$  telle que pour tout  $\alpha$ , l'application

$$p \circ \phi_\alpha \circ s : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathcal{F}$$

soit une application Fredholm d'indice  $r$ .

**Corollaire B.1** (Lemme de transversalité à paramètres). *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  un fibré Banachique de fibre  $\mathcal{F}$ , et soit  $s : \mathcal{G} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}$  une application telle que pour tout  $g \in \mathcal{G}$  on ait  $s_g = s(g, \cdot)$  soit une section Fredholm lisse d'indice  $\text{ind}(s)$ . On suppose que  $s$  est transverse à  $0_{\mathcal{E}}$ . Alors pour un ensemble générique  $\Sigma \subset \mathcal{G}$ , les sections  $s_g$  sont transverses à  $0_{\mathcal{E}}$ . En particulier, pour un ensemble générique  $\Sigma \subset \mathcal{G}$ , les ensembles  $s_g^{-1}(0_{\mathcal{E}})$  sont des sous-variétés de  $\mathcal{M}$  de dimension  $\text{ind}(s)$ .*

*Démonstration.* On considère une connexion  $\nabla$  quelconque. Comme on a dans la décomposition canonique  $T_{0_x} \mathcal{E} = T_x \mathcal{M} \oplus \mathcal{E}_x$  que

$$ds_{(g,x)}(u, v) = d_{\mathcal{G}s_{(g,x)}}(u) + d_{\mathcal{M}s_{(g,x)}}(v) = 0 \oplus d_{\mathcal{G}s_{(g,x)}}(u) + v \oplus \nabla_v s_g,$$

les hypothèses entraînent que pour tout  $(g, x)$  tel que  $(s_g)_x = 0$ , l'application  $\nabla s_g : v \mapsto \nabla_v s_g$  est Fredholm et  $p \circ ds_{(g,x)} : (u, v) \mapsto d_{\mathcal{G}s_{(g,x)}}(u) + \nabla_v s_g$  est surjective. Comme  $s \pitchfork 0_{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{Z} = s^{-1}(0_{\mathcal{E}})$  est une sous-variété de  $\mathcal{G} \times \mathcal{M}$ . Montrons

que la restriction de la projection  $\pi : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{G}$  est une application Fredholm. Pour  $(g, x) \in \mathcal{Z}$ , on a d'une part

$$T_{(g,x)}\mathcal{Z} = ds_{(g,x)}^{-1}(T0\mathcal{E}) = \{(u, v) \in T_g\mathcal{G} \oplus T_x\mathcal{M} ; d_{\mathcal{G}S}(g,x)(u) + \nabla_v s_g = 0\},$$

et d'autre part  $d\pi_{(g,x)}(u, v) = u$ , donc

$$\ker d\pi_{(g,x)} = \{(0, v) \in T_g\mathcal{G} \oplus T_x\mathcal{M} ; \nabla_v s_g = 0\} \simeq \ker \nabla s_g.$$

Ensuite, comme

$$\text{Im } d\pi_{(g,x)} = \{u \in T_g\mathcal{G} ; \exists v \in T_x\mathcal{M} \text{ tq } d_{\mathcal{G}S}(g,x)(u) = \nabla_v s_g\},$$

l'application  $d_{\mathcal{G}S}(g,x) : T_g\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_x$  induit un morphisme injectif

$$\text{coker } d\pi_{(g,x)} = T_g\mathcal{G}/\text{Im } d\pi_{(g,x)} \rightarrow \mathcal{E}_x/\text{Im } \nabla s_g = \text{coker } \nabla s_g.$$

Ce morphisme est de plus surjectif : comme tout élément  $w$  de  $\mathcal{E}_x$  s'écrit  $w = d_{\mathcal{G}S}(g,x)(u) + \nabla_v s_g$  pour un certain couple  $(u, v)$ , un tel  $u$  vérifie

$$d_{\mathcal{G}S}(g,x)[u] = [d_{\mathcal{G}S}(g,x)(u)] = [d_{\mathcal{G}S}(g,x)(u) + \nabla_v s_g] = [w]$$

Ainsi,  $\pi$  est Fredholm d'indice le même indice que les  $\nabla s_g$ . Comme ses valeurs régulières  $\Sigma \subset \mathcal{Z}$  correspondent aux  $g$  tel que  $s_g$  soit transverse à  $\mathcal{E}$ , on conclut en appliquant le théorème B.1.  $\square$

## B.2 Un lemme de généricité

**Lemme B.1.** *Soit  $X, Y, \Lambda$  des variétés avec  $\dim \Lambda = 1$ , et soit  $Z \subset Y$  une sous-variété. On note  $\mathcal{F} = C^\infty(X, Y)$  et  $\mathcal{F}^\Lambda = C^\infty(\Lambda, \mathcal{F})$ . Alors l'ensemble des  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{F}^\Lambda$  tels que  $e : (\lambda, x) \mapsto f_\lambda(x)$  soit transverse à  $Z$  et que  $\pi_\Lambda|_{e^{-1}(Z)} : e^{-1}(Z) \rightarrow \Lambda$  soit une fonction de Morse est générique.*

*Démonstration.* On note

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}^\Lambda \times \Lambda \times X & \longrightarrow & Y \\ ((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \lambda, x) & \longmapsto & f_\lambda(x) \end{array} .$$

Cette application est une submersion, en particulier elle est transverse à  $Z$ . On note  $\dot{\mathcal{M}}$  la variété  $\Phi^{-1}(Z)$ . On note ensuite  $\pi : \text{Hom}(TX, TY/TZ) \rightarrow X \times Z$  le fibré de fibre  $\pi^{-1}(x, z) = \text{Hom}(T_x X, T_z Y/T_z Z)$ ,  $e : \dot{\mathcal{M}} \rightarrow X \times Z$  l'application

donnée par  $e((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \lambda, x) = (x, f_\lambda(x))$ ,  $q : TY|_Z \rightarrow TY/TZ$  la projection canonique, et

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \dot{\mathcal{M}} & \longrightarrow & e^* \pi \\ ((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \lambda, x) & \longmapsto & q \circ (df_\lambda)_x \end{array}$$

une section du fibré  $e^* \pi$ . On note  $\Sigma^k \subset \text{Hom}(TX, TY/TZ)$  la sous variété de fibre  $\Sigma^k_{(x,z)} = \{L : T_x X \rightarrow T_z Y/T_z Z ; L \text{ est de corang } k\}$ . En appliquant le lemme de transversalité à paramètres à l'application  $\Phi$  et à la sous-variété  $Z$ , puis à l'application  $\Psi$  et aux sous-variétés  $\Sigma^k$ , on obtient un ensemble générique  $\widetilde{\mathcal{F}}_\Lambda$  tel que, pour tout  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \widetilde{\mathcal{F}}_\Lambda$ ,  $\Phi_{(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}} := \Phi_{(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \bullet}$  soit transverse à  $Z$  et  $\Psi_{(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}} := \Psi_{((f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, \bullet)}$  soit transverse à  $\Sigma^k$  pour tout  $k$ . Fixons  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \widetilde{\mathcal{F}}_\Lambda$ . On note  $\dot{\mathcal{M}} = \Phi_{(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}}^{-1}(Z)$ , puis  $\dot{\Phi}, \dot{\Psi}, \dot{\pi}_\Lambda$  et  $\dot{\pi}_X$  les restrictions des applications sous-entendues à  $\dot{\mathcal{M}}$ . Remarquons que

$$\begin{aligned} & \dim \dot{\Psi}^{-1}(\Sigma^k) \\ &= \dim \dot{\mathcal{M}} + \dim \Sigma^k - \dim e^* \pi \\ &= \dim \dot{\mathcal{M}} + (\dim Y - \dim Z - k) \cdot (\dim X + k) - \dim X \cdot (\dim Y - \dim Z) \\ &= (1 - k) \cdot \underbrace{(\dim X + \dim Z - \dim Y + 1 + k)}_{=\dim \dot{\mathcal{M}} \geq 0}, \end{aligned}$$

donc  $\dim \dot{\Psi}^{-1}(\Sigma^k) < 0$  et ainsi  $\dot{\Psi}^{-1}(\Sigma^k) = \emptyset$  dès que  $k > 1$ . Comme pour tout  $w \in \dot{\mathcal{M}}$  on a que  $\dot{\Phi}(\pi_\Lambda(w), \pi_X(w)) \in Z \subset Y$ , on aura alors que

$$\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \cdot d\dot{\pi}_\Lambda(\bullet) + d_X \dot{\Phi} \circ d\dot{\pi}_X(\bullet) \in \text{Hom}(T\dot{\mathcal{M}}, TZ) \subset \text{Hom}(T\dot{\mathcal{M}}, TY).$$

Soit  $w = (\lambda, x) \in \text{Crit}(\dot{\pi}_\Lambda)$ . Remarquons que, comme

$$T_w \dot{\mathcal{M}} = \left\{ (\dot{\lambda}, \dot{x}) \in \mathbb{R} \times T_x X ; \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \cdot \dot{\lambda} + d_X \dot{\Phi}(\dot{x}) \in T_{f_\lambda(x)} Z \right\},$$

on ne peut pas avoir que  $\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \in \text{Im}(d_X \dot{\Phi}) + T_{f_\lambda(z)} Z$ , sans quoi il existerait un  $\dot{x} \in T_x X$  et un  $\dot{z} \in T_{f_\lambda(x)} Z$  tel que  $\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \cdot 1 + d_X \dot{\Phi}(\dot{x}) = \dot{z}$ , d'où  $\dot{w} = (1, \dot{x}) \in T_w \dot{\mathcal{M}}$ , et  $1 = (d\dot{\pi}_\lambda)_w(\dot{w})$  serait alors une contradiction. Donc  $\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \notin \text{Im}(d_X \dot{\Phi}) + T_{f_\lambda(z)} Z$ , et comme  $\dot{\Phi} \pitchfork Z$  et qu'alors

$$\underbrace{\mathbb{R} \cdot \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda}}_{:=D} + \underbrace{\left( \text{Im}(d_X \dot{\Phi}) + T_{f_\lambda(x)} Z \right)}_{:=H} = T_{f_\lambda(x)} Y,$$



cette somme est directe :  $D \oplus H = T_{f_\lambda(x)}Y$ . En différenciant à l'ordre supérieur, on obtient en omettant les termes en  $(d\dot{\pi}_\Lambda)_w = 0$  que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \lambda} \cdot d^2 \dot{\pi}_\lambda(\bullet, \bullet) + d_X^2 \dot{\Phi}(d\dot{\pi}_X(\bullet), d\dot{\pi}_X(\bullet)) + d_X \dot{\Phi} \circ d^2 \dot{\pi}_X(\bullet, \bullet) &\in \text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, TZ) \\ &\subset \text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, TY). \end{aligned}$$

En considérant l'application  $\text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, TY) \rightarrow \text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, D)$  induite par la projection  $T_{f_\lambda(x)}Y = D \oplus H \xrightarrow{r} D$ , on obtient que

$$d^2 \dot{\pi}_\lambda(\bullet, \bullet) + r \circ d_X^2 \dot{\Phi}(d\dot{\pi}_X(\bullet), d\dot{\pi}_X(\bullet)) = 0 \in \text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, D).$$

La non dégénérescence de  $w$  revient donc à celle de la forme bilinéaire

$$r \circ d_X^2 \dot{\Phi}(d\dot{\pi}_X(\bullet), d\dot{\pi}_X(\bullet)) \in \text{Bil}(T\dot{\mathcal{M}}, D).$$

Soit  $\alpha \in \text{Hom}(T\dot{\mathcal{M}}, D)$ . On utilise le fait que  $\dot{\Psi} \pitchfork \Sigma^1$ , i.e.

$$\text{Im}(d\dot{\Psi}) + T_{q \circ (df_\lambda)_x} \Sigma^1 = \text{Hom}(TX, TY/TZ).$$

Comme  $w \in \text{Crit}(\dot{\pi}_\Lambda)$ , on a vu que  $T_w \dot{\mathcal{M}}$  ne contient que des vecteurs de la forme  $(0, \dot{x})$ , et s'identifie ainsi à un sous-espace de  $T_x X$  via l'application  $s = d\dot{\pi}_X$ . En considérant cette application, et à nouveau la projection  $r : TY/TZ \simeq D \oplus H \rightarrow D$ , on obtient une application surjective

$$\sigma = r \circ s : \text{Hom}(TX, TY/TZ) \rightarrow \text{Hom}(T\dot{\mathcal{M}}, D).$$

Or, comme

$$T_v \Sigma^1 = \{\dot{v} \in \text{Hom}(TX, TY/TZ) ; \dot{v}(\ker(v)) \subset \text{Im}(v)\},$$

l'image de  $T_{q \circ (df_\lambda)_x} \Sigma^1$  par  $\sigma$  est réduite à la forme bilinéaire nulle étant donné qu'ici  $\text{Im}(v) = \text{Im}(d_X \dot{\Phi}) \subset H \subset \ker t$ . Ainsi, il existe  $\dot{w} \in T_w \dot{\mathcal{M}}$  tel que  $\sigma \circ d\dot{\Psi}(\dot{w}) = \alpha$ . Finalement, remarquons que  $\dot{\Psi} = d_X \dot{\Phi}(\bullet)$ , puis en omettant à nouveau les termes en  $(d\dot{\pi}_\Lambda)_w = 0$  que  $d\dot{\Psi} = d_X^2(\bullet, d\dot{\pi}_X)$ , et qu'alors

$$\sigma \circ d\dot{\Psi}(\dot{w}) = \sigma \circ (d^2 \dot{\Phi}(d\dot{\pi}_X(\dot{w}), \bullet)) = r \circ (d^2 \dot{\Phi}(d\dot{\pi}_X(\dot{w}), d\dot{\pi}_X(\bullet)))$$

est une forme non dégénérée. □

# Bibliographie

- [1] M. AUDIN et M. DAMIAN : *Morse theory and Floer homology*. Universitext. Springer, London; EDP Sciences, Les Ulis, 2014. Translated from the 2010 French original by Reinie Erné.
- [2] A. BANYAGA et D. E. HURTUBISE : Cascades and perturbed morse–bott functions. *Algebraic & Geometric Topology*, 13(1):237–275, Feb 2013.
- [3] J.-F. BARRAUD : A Floer fundamental group. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(3):773–809, 2018.
- [4] J.-F. BARRAUD et L. S. SUÁREZ : The fundamental group of a rigid Lagrangian cobordism. *Annales des sciences mathématiques du Québec*, oct. 2018.
- [5] D. BURGHELEA, L. FRIEDLANDER et T. KAPPELER : On the space of trajectories of a generic gradient like vector field. *An. Univ. Vest Timiș. Ser. Mat.-Inform.*, 48(1-2):45–126, 2010.
- [6] J. CERF : La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 39:5–173, 1970.
- [7] M. CHAPERON : Une idée du type « géodésiques brisées » pour les systèmes hamiltoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 298(13):293–296, 1984.
- [8] M. DAMIAN : On the stable Morse number of a closed manifold. *Bull. London Math. Soc.*, 34(4):420–430, 2002.
- [9] A. FLOER : Witten’s complex and infinite-dimensional Morse theory. *Journal of Differential Geometry*, 30(1):207 – 221, 1989.
- [10] D. G. C. HANDRON : The Morse complex for a Morse function on a manifold with corners, 2004.
- [11] A. HATCHER : *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [12] M. W. HIRSCH : *Differential topology*, vol. 33 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1976 original.

- [13] M. HUTCHINGS : Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves). <https://math.berkeley.edu/~hutching/>, 2002.
- [14] F. LATOUR : Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de de Rham. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (80):135–194 (1995), 1994.
- [15] F. LAUDENBACH : A Morse complex on manifolds with boundary. *Geom. Dedicata*, 153:47–57, 2011.
- [16] F. LAUDENBACH et J.-C. SIKORAV : Persistance d’intersection avec la section nulle au cours d’une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent. *Invent. Math.*, 82(2):349–357, 1985.
- [17] J. M. LEE : *Introduction to smooth manifolds*, vol. 218 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second éd., 2013.
- [18] D. MCDUFF et D. SALAMON : *J-holomorphic curves and symplectic topology*, vol. 52 de *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, second éd., 2012.
- [19] S. MESCHER : *Perturbed gradient flow trees and  $A_\infty$ -algebra structures in Morse cohomology*, vol. 6 de *Atlantis Studies in Dynamical Systems*. Atlantis Press, [Paris]; Springer, Cham, 2018.
- [20] D. MILINKOVIĆ et Y.-G. OH : Floer homology as the stable Morse homology. *J. Korean Math. Soc.*, 34(4):1065–1087, 1997.
- [21] J. MILNOR : *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. *Annals of Mathematics Studies*, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [22] R. ORITA : Morse–Bott inequalities for manifolds with boundary. *Tokyo Journal of Mathematics*, 41(1), 2018.
- [23] L. QIN : On moduli spaces and CW structures arising from Morse theory on Hilbert manifolds. *J. Topol. Anal.*, 2(4):469–526, 2010.
- [24] L. QIN : On the associativity of gluing. *J. Topol. Anal.*, 10(3):585–604, 2018.
- [25] M. SCHWARZ : *Morse homology*, vol. 111 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [26] S. SMALE : On gradient dynamical systems. *Ann. of Math. (2)*, 74:199–206, 1961.
- [27] L. TRAYNOR : Symplectic homology via generating functions. *Geom. Funct. Anal.*, 4(6):718–748, 1994.
- [28] K. WEHRHEIM : Smooth structures on Morse trajectory spaces, featuring finite ends and associative gluing. In *Proceedings of the Freedman Fest*, vol. 18 de *Geom. Topol. Monogr.*, p. 369–450. Geom. Topol. Publ., Coventry, 2012.