



HAL
open science

Contrôle véhicule autonome. Contrôle robuste et haute performance pour permettre les manœuvres à haute dynamique des véhicules autonomes

Dario Penco

► **To cite this version:**

Dario Penco. Contrôle véhicule autonome. Contrôle robuste et haute performance pour permettre les manœuvres à haute dynamique des véhicules autonomes. Automatique / Robotique. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UPASG039 . tel-03735769

HAL Id: tel-03735769

<https://theses.hal.science/tel-03735769>

Submitted on 21 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contrôle véhicule autonome : contrôle robuste et haute performance pour permettre les manœuvres à haute dynamique des véhicules autonomes

Autonomous vehicle control : robust and high performance control to enable high dynamics range maneuvering of autonomous vehicles

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 580, sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)
Spécialité de doctorat : Automatique
Graduate School : Informatique et Sciences du Numérique, Référent : CentraleSupélec

Thèse préparée dans les unités de recherche **Laboratoire des Signaux et Systèmes (Université Paris-Saclay, CentraleSupélec)** et **Groupe Renault**, sous la direction de **Emmanuel GODOY**, professeur, et l'encadrement de **Joan DAVINS-VALLDAURA**, docteur, **Pedro KVIESKA**, docteur et **Giorgio VALMORBIDA**, maître des conférences

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 20 mai 2022, par

Dario PENCO

Composition du Jury

Jean-Marc BIANNIC Professeur, ISAE-SUPAERO	Président
Marc JUNGERS Directeur de recherche, CNRS, CRAN, Université de Lorraine	Rapporteur & examinateur
Olivier SENAME Professeur des Universités, GIPSA-Lab, Grenoble INP	Rapporteur & examinateur
Xuefang LIN-SHI Professeur des Universités, Laboratoire Ampère, Insa Lyon	Examineur
Saïd MAMMAR Professeur des Universités, Laboratoire IBISC, Université Paris-Saclay	Examineur
Emmanuel GODOY Professeur, Laboratoire des Signaux et Systèmes, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay	Directeur de thèse
Giorgio VALMORBIDA Maître des conférences, Laboratoire des Signaux et Systèmes, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay	Co-encadrant

Plus on connaît, plus on aime.

Leonardo da Vinci

REMERCIEMENTS

J'ai sincèrement aimé le parcours, difficile mais gratifiant, de trois ans de doctorat, à tel point que je suis mélancolique que ce soit terminé. J'ai choisi de faire une thèse afin d'explorer un sujet technique en profondeur, réaliser un travail innovant, apprendre et étudier tout au long de ces trois ans. Toutes ces attentes ont été largement satisfaites et dépassées. Cela a été possible grâce à l'aide de plusieurs personnes, envers lesquelles je suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse Emmanuel Godoy et mes co-encadrants Joan Davins, Pedro Kvieska et Giorgio Valmorbida, pour votre confiance et soutien pendant ces trois ans. Votre disponibilité et votre encadrement ont été essentiels pour la réalisation de ce travail. Vous m'avez beaucoup appris, je suis très chanceux et reconnaissant d'avoir pu travailler avec vous et j'espère sincèrement que nous serons amenés à retravailler ensemble dans le futur.

Je suis également reconnaissant envers les membres de mon jury de thèse. Je remercie Olivier Sename et Marc Jungers d'avoir accepté le rôle de rapporteur et d'avoir révisé mon manuscrit de thèse en si peu de temps. Merci aussi à Xuefang Lin-Shi et Saïd Mammar d'avoir fait partie du jury et merci à Jean-Marc Biannic de l'avoir présidé. Vos remarques et questions ont été très intéressantes, m'ont permis de réfléchir ultérieurement sur le travail accompli et m'ont donné des idées pour de possibles perspectives.

Du côté du L2S, je remercie les membres de l'équipe SYCOMORE et les doctorants (ou docteurs maintenant !) avec qui j'ai pu passer du temps et discuter. L'ambiance de travail dans le laboratoire était excellente et nous avons partagé de très bons moments en jouant au tarot, au molkky et au beach-volley. Je remercie particulièrement Vincent, le bouffon du labo, qui nous a si bien divertis, Thomas, le papa qui connaît tout, de l'administratif à l'automatique en passant par LaTeX, Mathieu et Kodjo, le yin et le yang du bureau, Baptiste, le meilleur passeur au volley, Pinpin, même s'il m'a abandonné en tant que représentant des doctorants de l'école doctorale (as-tu finalement réussi à terminer tes heures de formation non scientifique ?), Maxime, pour son rire contagieux, Martin, qui m'a convaincu de rester omnivore, Geoffray, "l'affreux" (c'est tout ce que j'ai à dire), et Joy, toujours de bonne humeur. Le cadre de travail chez Renault a été tout aussi plaisant. Je remercie plus particulièrement Raphaël, Clément, Maud, Moad, Yann, Pascal, Salam, Renaud, Thibault, Julien, Simon, Iris, Pape et enfin les membres de l'équipe de basket de l'ESR Renault.

Un très grand merci à Line, qui partage ma vie, et qui m'a soutenu pendant ces trois ans. "La thèse" a pris beaucoup de mon temps et attention, au détriment d'autres aspects de ma vie. Cela n'a pas du être toujours simple pour toi, donc je te remercie pour ta patience. De plus, ton aide pour la rédaction de ce manuscrit a été indispensable. Si aujourd'hui la grammaire de cette thèse est correcte, c'est aussi grâce à toi ! (Malheureusement ton travail n'est pas entièrement fini, j'ai besoin que tu corriges encore ces remerciements !)

Je remercie également mes amis qui m'ont si bien permis d'oublier temporairement les tribulations de la thèse lorsque j'en avais besoin. En France je remercie plus particulièrement Clément, Djil, Arnaud, Justin, Thibault, Emeline, Juliette, JD et Laurène. In Italia ringrazio Comu, Marco, Edo, Dallo, Nanno,

Cocci, Amu, Andre, Tacce e Erne.

Enfin, un très grand merci à ma famille : mes parents et ma sœur Chiara. Mes parents m'ont donné l'envie d'étudier, ils m'ont fait aimer mes études. Je considère que l'accomplissement du doctorat leur appartient aussi.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction et contexte des travaux de thèse	1
Contexte et motivations des travaux de thèse	1
Contributions principales	3
Organisation du manuscrit	5
I Modélisation de la dynamique du véhicule	9
1 Modèles analytiques pour la synthèse et l'analyse des lois de commande	11
1.1 Modèle bicyclette sans suspensions	12
1.1.1 Cinématique et cinétique du véhicule	14
1.1.2 Équations du mouvement	15
1.2 Modèle quatre roues sans suspensions	17
1.2.1 Cinématique et cinétique du véhicule	18
1.2.2 Équations du mouvement	18
1.3 Modèle quatre roues avec suspensions	19
1.3.1 Cinématique et cinétique du véhicule	21
1.3.2 Équations du mouvement	25
1.4 Position absolue du véhicule	28
2 Modélisation des forces extérieures	29
2.1 Force de la pesanteur avec route inclinée	29
2.2 Forces des pneus	30
2.2.1 Cinématique de la roue	31
2.2.2 Coefficients non-linéaires de raideur des pneus	35
2.2.3 Saturation des forces des pneus	36
2.3 Force de traînée aérodynamique	37
2.4 Force de résistance au roulement	38
2.5 Forces normales aux roues	38
2.5.1 Distribution de charge variable - modèle bicyclette sans suspensions	38
2.5.2 Distribution de charge variable - modèle quatre roues sans suspensions	40
2.5.3 Distribution de charge variable - modèle quatre roues avec suspensions	41
2.6 Résultantes des actions de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue	45
2.7 Forces des suspensions	45
2.7.1 Cinématique des suspensions	46
3 Simulation et validation des modèles de dynamique véhicule	51
3.1 Validation des modèles développés	51
3.1.1 Manœuvre d'évitement sans freinage	53
3.1.2 Manœuvre d'évitement avec freinage	57

3.1.3	Manœuvre <i>Fishhook</i>	59
3.2	Choix d'un modèle pour la synthèse du correcteur	62
4	Linéarisation du modèle non-linéaire	67
4.1	Commande nominale pour la trajectoire de référence	67
4.2	Bouclage avec les forces saturées des pneumatiques	71
4.3	Linéarisation le long d'une trajectoire de référence	73
4.3.1	Modèle avec entrées seuil	76
4.3.2	Linéarisation des fonctions de saturation	78
4.4	Dynamique de l'erreur de position et de lacet	80
II	Synthèse des correcteurs	83
5	État de l'art	85
5.1	Contrôle du véhicule : manœuvres à faible dynamique	85
5.1.1	Contrôle longitudinal pour des manœuvres à faible dynamique	86
5.1.2	Contrôle latéral pour des manœuvres à faible dynamique	88
5.2	Contrôle du véhicule : manœuvres à haute dynamique	90
5.2.1	Découplage des dynamiques longitudinale et latérale	90
5.2.2	Couplage des dynamiques longitudinale et latérale	91
5.3	Choix de la méthode de synthèse des correcteurs	94
5.4	Commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV	95
5.4.1	Approche polytopique	97
5.4.2	Approche LFT	97
5.4.3	Approche <i>grid-based</i>	99
6	Synthèse des correcteurs - approche LPV polytopique	101
6.1	Mise en forme du modèle qLPV polytopique	102
6.2	Trajectoires de référence	104
6.2.1	Manœuvre d'évitement sans freinage	104
6.2.2	Manœuvre d'évitement avec freinage	105
6.2.3	Un modèle qLPV polytopique pour les deux trajectoires de référence	106
6.3	Synthèse des correcteurs	107
6.3.1	Correcteurs statiques	109
6.3.2	Correcteurs dynamiques	114
6.4	Analyse de la boucle fermée	119
6.4.1	Région d'attraction de la boucle fermée	119
6.4.2	Simulations en boucle fermée	125
6.5	Conclusions sur la synthèse avec l'approche LPV polytopique	129
7	Synthèse des correcteurs - approche LPV <i>grid-based</i>	131
7.1	Mise en forme du modèle qNLPV <i>grid-based</i>	132
7.2	Synthèse des correcteurs	136
7.2.1	Correcteurs statiques	138
7.2.2	Correcteurs dynamiques	141
7.3	Analyse en boucle fermée	147
7.3.1	Région d'attraction en boucle fermée	147
7.3.2	Simulations en boucle fermée	150
7.4	Conclusion sur la synthèse avec l'approche LPV <i>grid-based</i>	154
8	Simulation et validation des correcteurs	157
8.1	Scénarios de simulation	157
8.2	Analyse des résultats de simulation	160
8.2.1	Analyse numérique des résultats	160
8.2.2	Analyse détaillée des trajectoires	165
8.3	Conclusion	173
	Conclusion générale et perspectives	175

Annexes	181
A Commande robuste et optimale - systèmes LTI	183
A.1 État de l'art	183
A.1.1 Commande H_∞	183
A.1.2 Commande H_2	185
A.1.3 Commande multi-objectif	185
A.2 Analyse de stabilité	186
A.2.1 Systèmes linéaires	186
A.2.2 Stabilité d'un système avec entrées saturées	188
A.3 Analyse de performance	192
A.3.1 Norme H_∞	193
A.3.2 Norme H_2	193
A.3.3 Norme H_2 généralisée	194
A.4 Synthèse du correcteur	195
A.4.1 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires	195
A.4.2 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires avec entrées saturées	197
A.4.3 Correcteurs dynamiques pour des systèmes linéaires	198
A.4.4 Correcteurs dynamiques pour des systèmes avec entrées saturées	202
B Revue des différentes méthodes pour la synthèse des correcteurs	211
B.1 Commande LQ	211
B.2 Commande MPC	212
B.3 Commande par mode glissant	213
C Linéarisation du modèle véhicule : matrices variables dans le temps	215
C.1 Linéarisation le long d'une trajectoire de référence	215
C.2 Expression du modèle avec entrées seuil	217
C.3 Linéarisation des fonctions de saturation	218

TABLE DES FIGURES

1	Classification des systèmes ADAS, cf. SAE INTERNATIONAL 2018	2
2	Décomposition des systèmes pour l'automatisation de la conduite des véhicules.	4
1.1	Plan xy du modèle bicyclette.	14
1.2	Plan $x_w y_w$ d'une roue.	14
1.3	Composantes des forces de la roue dans $Oxyz$	16
1.4	Forces extérieures, plan xy du modèle bicyclette.	16
1.5	Forces extérieures, plan $x_w z_w$ d'une roue.	16
1.6	Forces extérieures sur le modèle quatre roues, plan xy	19
1.7	Modèle véhicule avec roulis, vue de derrière; ϕ est l'angle de roulis de la masse suspendue.	20
1.8	Modèle véhicule avec tangage, vue à gauche; θ est l'angle de tangage de la masse suspendue.	20
1.9	Exemple de centre de roulis (image extraite de JAZAR 2017) : point I_{18} est le centre de roulis instantané.	20
1.10	Géométrie du modèle quatre roues avec suspensions vue à gauche.	23
1.11	Géométrie du modèle quatre roues avec suspensions vue de derrière.	23
1.12	Forces sur la masse non suspendue, plan $x_u y_u$	26
1.13	Forces sur la masse suspendue, plan $x_u z_u$	27
1.14	Forces sur la masse suspendue, plan $y_u z_u$	28
2.1	Angle de dévers de la route θ_x	30
2.2	Angle de pente de la route θ_y	30
2.3	Plan $x_w z_w$ d'une roue.	31
2.4	Angle de glissement de la roue α	32
2.5	Calcul de α dans le repère véhicule.	32
2.6	Plan xy du modèle bicyclette.	33
2.7	Plan xz du modèle bicyclette.	33
2.8	Plan xy d'un modèle quatre roues.	34
2.9	Force latérale du pneu en fonction de la force normale au pneu.	36
2.10	Ellipse de saturation des forces des pneus.	36
2.11	Effet de la saturation sur le vecteur des forces du pneu.	37
2.12	Fonction logistique.	38
2.13	Fonction de saturation.	38
2.14	Plan yz du modèle bicyclette.	39
2.15	Plan xz du modèle bicyclette.	39
2.16	Modèle véhicule à quatre roues, plan yz	41
2.17	Plan xy du modèle bicyclette avec suspensions : forces qui agissent sur la masse non suspendue.	42
2.18	Plan xz du modèle bicyclette avec suspensions : forces qui agissent sur la masse non suspendue.	43
2.19	Plan yz du modèle bicyclette avec suspensions : forces qui agissent sur la masse non suspendue.	43
2.20	Modèle quatre roues avec suspensions, masse non suspendue, plan yz	44
2.21	Forces sur la masse suspendue, plan $x_u z_u$	45
2.22	Forces sur la masse suspendue, plan $y_u z_u$	45

2.23	Compression des suspensions avant à cause du tangage.	46
2.24	Géométrie du véhicule.	47
3.1	Action des forces des pneus positives sur la roue (image extraite de REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001).	52
3.2	Action des forces de résistance au roulement sur la roue (image extraite de REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001).	52
3.3	Manœuvre d'évitement sans freinage : angles de braquage.	53
3.4	Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	53
3.5	Manœuvre d'évitement sans freinage : accélération du modèle MADA.	54
3.6	Manœuvre d'évitement sans freinage : trajectoire MADA.	55
3.7	Manœuvre d'évitement sans freinage : trajectoires des modèles.	55
3.8	Manœuvre d'évitement sans freinage : composantes du vecteur vitesse.	55
3.9	Manœuvre d'évitement sans freinage : vitesse de lacet.	55
3.10	Manœuvre d'évitement sans freinage : forces latérales des pneus par essieu.	56
3.11	Manœuvre d'évitement sans freinage : angles des dérives des roues.	56
3.12	Manœuvre d'évitement sans freinage : forces normales des roues.	56
3.13	Manœuvre d'évitement sans freinage : forces latérales des pneus.	56
3.14	Manœuvre d'évitement sans freinage : vitesse de rotation des roues.	57
3.15	Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de roulis.	57
3.16	Manœuvre d'évitement avec freinage : angles de braquage.	57
3.17	Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	57
3.18	Manœuvre d'évitement avec freinage : trajectoires des modèles.	58
3.19	Manœuvre d'évitement avec freinage : accélération du modèle MADA.	58
3.20	Manœuvre d'évitement avec freinage : composantes du vecteur vitesse.	58
3.21	Manœuvre d'évitement avec freinage : forces longitudinales des pneus.	59
3.22	Manœuvre d'évitement avec freinage : forces latérales des pneus.	59
3.23	Manœuvre d'évitement avec freinage : forces normales.	59
3.24	Manœuvre d'évitement avec freinage : vitesse de roulis et de tangage.	59
3.25	Manœuvre d'évitement avec freinage : vitesses de rotation des roues.	59
3.26	Angle de braquage de la manœuvre <i>Fishhook</i>	60
3.27	Manœuvre <i>Fishhook</i> : angles de braquage.	60
3.28	Manœuvre <i>Fishhook</i> : couples roues et vitesse longitudinale.	60
3.29	Manœuvre <i>Fishhook</i> : accélération du modèle MADA.	61
3.30	Manœuvre <i>Fishhook</i> : trajectoires des modèles.	61
3.31	Manœuvre <i>Fishhook</i> : composantes du vecteur vitesse.	61
3.32	Détail de la manœuvre <i>Fishhook</i> pour la trajectoire du modèle bicyclette sans suspensions.	61
3.33	Manœuvre <i>Fishhook</i> : forces latérales des modèles avec quatre roues.	62
3.34	Manœuvre <i>Fishhook</i> : forces normales des modèles avec quatre roues.	62
4.1	Modèle MADA : exemple des couples roues.	69
4.2	Système non-linéaire avec forces saturées bouclées en entrée.	73
4.3	Saturation de l'écart des forces des pneus du système linéarisé.	75
4.4	Modèle linéarisé avec forces saturées bouclées en entrée.	76
4.5	Fonction de saturation.	77
4.6	Fonction seuil.	77
4.7	Fonction logistique.	78
4.8	Secteurs de pente le long de la manœuvre d'évitement sans freinage.	79
4.9	Secteurs de pente le long de la manœuvre d'évitement avec freinage.	79
4.10	Manœuvre d'évitement sans freinage.	81
4.11	Manœuvre d'évitement avec freinage.	81
4.12	Manœuvre d'évitement sans freinage.	82
4.13	Manœuvre d'évitement avec freinage.	82
5.1	Architecture du contrôle longitudinal.	87
5.2	Système LPV exprimé par LFT.	98
6.1	Système augmenté pour la synthèse des correcteurs LPV.	104
6.2	Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.	105

6.3	Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	105
6.4	Manœuvre d'évitement avec freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.	106
6.5	Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	106
6.6	Système augmenté pour la synthèse du correcteur.	109
6.7	Diagramme de Bode des filtres de pondération.	110
6.8	Région LMI pour la synthèse du correcteur.	111
6.9	Fonction de saturation.	113
6.10	Fonction seuil.	113
6.11	Système augmenté pour la synthèse du correcteur.	115
6.12	Correcteur PSU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	123
6.13	Correcteur PSU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	123
6.14	Correcteur PSU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	123
6.15	Correcteur PSU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	123
6.16	Correcteur PDU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.17	Correcteur PDU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.18	Correcteur PDU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.19	Correcteur PDU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.20	Correcteur PDUAW, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.21	Correcteur PDUAW, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.	124
6.22	Manœuvre d'évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.	126
6.23	Manœuvre d'évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : angle de dérive du véhicule, correcteur PDU1.	126
6.24	Manœuvre d'évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : accélération du véhicule, correcteur PDU1.	126
6.25	Manœuvre d'évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur PDU1.	127
6.26	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.	127
6.27	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : accélération du véhicule, correcteur PDU1.	128
6.28	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur PDU1.	128
7.1	Modèle linéarisé avec forces saturées bouclées en entrée.	132
7.2	Approximation de la vitesse de rotation des roues pour la manœuvre d'évitement sans freinage.	134
7.3	Approximation de la vitesse de rotation des roues pour la manœuvre d'évitement avec freinage.	134
7.4	Processus de synthèse du correcteur avec l'approche LPV <i>grid-based</i>	135
7.5	Système augmenté pour la synthèse du correcteur.	136
7.6	Diagramme de Bode des filtres de pondération.	137
7.7	Région LMI pour la synthèse du correcteur.	138
7.8	Correcteur GSU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	148
7.9	Correcteur GSU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	148
7.10	Correcteur GSU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	148
7.11	Correcteur GSU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	148
7.12	Correcteur GDU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	148

7.13	Correcteur GDU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	148
7.14	Correcteur GDU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	149
7.15	Correcteur GDU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	149
7.16	Correcteur GDUAW, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	149
7.17	Correcteur GDUAW, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	149
7.18	Correcteur GDU3, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.	149
7.19	Correcteur GDU3, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.	149
7.20	Manœuvre d'évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.	151
7.21	Manœuvre d'évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDU1.	151
7.22	Manœuvre d'évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDUAW.	152
7.23	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.	152
7.24	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDU1.	153
7.25	Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDUAW.	153
8.1	Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.	158
8.2	Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	158
8.3	Manœuvre d'évitement avec freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.	159
8.4	Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.	159
8.5	Manœuvre d'évitement sans freinage : erreurs avec la commande nominale.	160
8.6	Manœuvre d'évitement avec freinage : erreurs avec la commande nominale.	160
8.7	Diagramme en boîte de l'erreur longitudinale x_L , latérale y_L et de la distance d_L .	163
8.8	Histogramme de l'erreur longitudinale x_L , latérale y_L et de la distance d_L .	164
8.9	Scénario 1, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	166
8.10	Scénario 1, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	166
8.11	Scénario 1, évitement avec freinage : comparaison de $\Delta\tau_{wf}$ pour les correcteurs PDU2 et PDUAW.	167
8.12	Scénario 1, évitement sans freinage, correcteur GSU2 : comparaison entre δ_f souhaité et appliqué.	167
8.13	Scénario 2, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	168
8.14	Scénario 4, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	168
8.15	Scénario 5, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	168
8.16	Scénario 7, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	168
8.17	Scénario 5, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : comparaison entre δ_f souhaité et mesuré.	169
8.18	Scénario 7, évitement sans freinage, correcteur PSU2 : comparaison entre δ_f souhaité et mesuré.	169
8.19	Scénario 9, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	169
8.20	Scénario 12, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	170
8.21	Scénario 13, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	170
8.22	Scénario 14, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	170
8.23	Scénario 10, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	171
8.24	Scénario 9, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.	172
8.25	Scénario 9, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : couple total des roues souhaité et mesuré.	173
8.26	Scénario 9, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : variables d'état du modèle linéarisé.	173
A.1	Architecture standard pour la synthèse des correcteurs robustes : u entrées de commande, w entrées de perturbation, z sorties contrôlées et y sorties mesurées.	184
A.2	Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité.	184
A.3	Architecture de contrôle avec les filtres de pondération pour la synthèse H_∞ .	184
A.4	Région LMI : demi-plan gauche.	188
A.5	Région LMI : demi-plan droit.	188
A.6	Région LMI : cercle.	188

A.7	Région LMI : section conique.	188
A.8	Fonction de saturation.	189
A.9	Fonction seuil.	189
A.10	Système avec dynamique saturée.	189
A.11	Zones de la fonction seuil.	191
B.1	Architecture de commande MPC.	212
B.2	Modes de la commande par mode glissant.	213

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Paramètres du véhicule.	13
2.1	Variables d'état du véhicule.	30
2.2	Limites de saturation des forces d'un pneu.	37
3.1	Paramètres du véhicule.	54
3.2	Indicateurs de la manœuvre d'évitement sans freinage.	64
3.3	Indicateurs de la manœuvre d'évitement avec freinage.	65
3.4	Indicateurs de la manœuvre <i>Fishhook</i>	66
4.1	Limites de saturation des forces normales et des forces des pneus.	72
4.2	Secteur de pente des fonctions de saturation linéarisées.	79
6.1	Paramètres du véhicule.	105
6.2	Secteurs de pente des fonctions de saturation linéarisées.	106
6.3	Paramètres variables des modèles LPV.	107
6.4	Paramètres variables du polytope commun aux deux trajectoires.	108
6.5	Indices de performance des correcteurs statiques.	112
6.6	Indices de performance des correcteurs dynamiques.	116
6.7	Région d'attraction : conditions initiales maximales des variables d'état du véhicule et volume de l'ellipsoïde.	122
6.8	Résumé des correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique.	129
7.1	Limites de variation des paramètres le long des deux trajectoires de référence.	134
7.2	Limites de variation des paramètres pour le modèle qNLPV <i>grid-based</i>	135
7.3	Valeurs des paramètres variables utilisées pour la grille de synthèse.	136
7.4	Indices de performance des correcteurs statiques.	139
7.5	Indices de performance des correcteurs dynamiques.	143
7.6	Résumé des correcteurs obtenus avec l'approche LPV <i>grid-based</i>	154
8.1	Paramètres du véhicule.	158
8.2	Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement sans freinage.	161
8.3	Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement avec freinage.	161
8.4	Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement sans freinage.	162

INTRODUCTION ET CONTEXTE DES TRAVAUX DE THÈSE

Contexte et motivations des travaux de thèse

Le travail présenté dans ce manuscrit se place dans le contexte de la conduite autonome. Celle-ci est largement considérée comme une solution possible à différents problèmes concernant le transport routier, comme par exemple l'amélioration de la sécurité, l'optimisation de la consommation d'énergie et la réduction du trafic et de la pollution due à la circulation d'un large nombre de véhicules, comme détaillé dans [MAHMASSANI 2016](#) et [LITMAN 2020](#).

Les premiers éléments vers la conduite autonome sont les systèmes d'aide à la conduite, ou ADAS (*Advanced Driver-Assistance Systems*), qui regroupent les fonctions assistant la conduite du véhicule dans différentes conditions. Ces dernières années, ils ont été l'objet de nombreux projets de recherche et développement dans les domaines académique et industriel, cf. [KUKKALA et al. 2018](#) et [HAQUE et al. 2021](#). Les principaux systèmes ADAS actuellement commercialisés par les constructeurs automobiles et regroupés selon leur objectif sont :

- Les **systèmes de sécurité** qui visent à l'**amélioration de la manœuvrabilité du véhicule** (ou systèmes réglementaires) :
 - *Anti-lock Braking System* (ABS) ([RAJAMANI 2012](#))
Ce système de sécurité agit sur la commande des freins dans une phase de freinage du véhicule. Il vise à empêcher le blocage des roues, pour maintenir la manœuvrabilité du véhicule et maximiser la force de freinage du véhicule.
 - *Electronic Stability Control* (ESC) ([RAJAMANI 2012](#))
Il s'agit d'une fonction de sécurité dont le but est d'améliorer la stabilité du véhicule dans des conditions à la limite d'adhérence. Quand ce système est activé, le freinage différentiel des roues est utilisé pour le maintien de l'orientation de l'angle de lacet du véhicule dans la direction souhaitée par le conducteur.
- Les **systèmes de confort** (ou d'aide à la conduite actifs) :
 - *Adaptive Cruise Control* (ACC) ([RAJAMANI 2012](#))
Ce système régule la vitesse et assure le maintien d'une distance de sécurité entre le véhicule commandé et le véhicule qui le précède sur la même voie, s'il est présent. Cela est réalisé en agissant sur l'accélération et le freinage du véhicule.
 - *Lane Centering Assist* (LCA) ([RAJAMANI 2012](#))
Ce système sert à maintenir le véhicule au centre de la voie et assister le conducteur dans le suivi de la route. Pour cela, il agit sur l'angle de braquage.
 - *Autonomous Parking* ([SONG et LIAO 2016](#))
Il s'agit d'une fonction de confort, pour l'automatisation des manœuvres de stationnement du véhicule. Elle agit sur l'accélération, le freinage et le braquage du véhicule.
- Les **systèmes de sécurité** qui agissent en cas des **imprévus non relevés par le conducteur** (ou d'aide à la conduite passifs) :

- *Lane Keeping Assist* (LKA) (ALI et al. 2013)
Il s’agit d’une fonction de sécurité dont le but est d’éviter des sorties de voie involontaires. Il agit sur l’angle de braquage du véhicule.
- *Automatic Emergency Braking* (AEB) (ZHENG et al. 2020)
Il s’agit d’une fonction de sécurité, visant à éviter ou réduire la sévérité d’un potentiel impact avec un véhicule, un vélo ou un piéton. Le moyen d’action employé est le freinage du véhicule.

Le standard J3016 de *SAE International*, défini dans SAE INTERNATIONAL 2018, propose une classification, résumée dans la Figure 1 en anglais, des systèmes ADAS en fonction de leur niveau d’autonomie. Cette classification est constituée de six niveaux progressifs d’autonomie : le niveau zéro correspond à

SAE level	Name	Narrative Definition	Execution of Steering and Acceleration/Deceleration	Monitoring of Driving Environment	Fallback Performance of Dynamic Driving Task	System Capability (Driving Modes)
Human driver monitors the driving environment						
0	No Automation	the full-time performance by the <i>human driver</i> of all aspects of the <i>dynamic driving task</i> , even when enhanced by warning or intervention systems	Human driver	Human driver	Human driver	n/a
1	Driver Assistance	the <i>driving mode</i> -specific execution by a driver assistance system of either steering or acceleration/deceleration using information about the driving environment and with the expectation that the <i>human driver</i> perform all remaining aspects of the <i>dynamic driving task</i>	Human driver and system	Human driver	Human driver	Some driving modes
2	Partial Automation	the <i>driving mode</i> -specific execution by one or more driver assistance systems of both steering and acceleration/deceleration using information about the driving environment and with the expectation that the <i>human driver</i> perform all remaining aspects of the <i>dynamic driving task</i>	System	Human driver	Human driver	Some driving modes
Automated driving system (“system”) monitors the driving environment						
3	Conditional Automation	the <i>driving mode</i> -specific performance by an <i>automated driving system</i> of all aspects of the <i>dynamic driving task</i> with the expectation that the <i>human driver</i> will respond appropriately to a <i>request to intervene</i>	System	System	Human driver	Some driving modes
4	High Automation	the <i>driving mode</i> -specific performance by an <i>automated driving system</i> of all aspects of the <i>dynamic driving task</i> , even if a <i>human driver</i> does not respond appropriately to a <i>request to intervene</i>	System	System	System	Some driving modes
5	Full Automation	the full-time performance by an <i>automated driving system</i> of all aspects of the <i>dynamic driving task</i> under all roadway and environmental conditions that can be managed by a <i>human driver</i>	System	System	System	All driving modes

FIGURE 1 – Classification des systèmes ADAS, cf. SAE INTERNATIONAL 2018.

une automatisation inexistante et le niveau cinq représente un véhicule totalement autonome, capable éventuellement de circuler sans intervention humaine. Parmi ces six niveaux, deux catégories de systèmes d’automatisation de la conduite sont identifiées, différenciées par le besoin de surveillance de l’environnement de la part du conducteur. Les systèmes appartenant aux niveaux zéro, un et deux nécessitent la surveillance de l’environnement par le conducteur. En revanche, pour les systèmes de niveaux trois, quatre et cinq, le véhicule surveille l’environnement de façon autonome. L’action du conducteur, nécessaire uniquement pour les systèmes de niveau trois et quatre, est alors sollicitée par le véhicule uniquement dans des conditions spécifiques.

Les systèmes ADAS actuellement commercialisés par les constructeurs automobiles, présentés précédemment, appartiennent uniquement aux niveaux un et deux de la classification proposée par *SAE International*. Ils nécessitent donc d’une surveillance de la part du conducteur. Pour avancer vers des niveaux supérieurs d’automation de la conduite, moins de surveillance de la part du conducteur est nécessaire. Le véhicule doit donc être capable de gérer de façon autonome de plus en plus des scénarios de conduite, dont des conditions d’urgence. Le développement des solutions pour le contrôle du véhicule dans des manœuvres d’évitement d’obstacles (comme par exemple un véhicule ou un piéton) est donc une étape nécessaire pour atteindre le véhicule autonome. Différentes solutions au problème sont actuellement en cours d’étude ou ont été proposées dans les domaines industriel et académique. Ainsi les systèmes qui agissent activement sur le braquage du véhicule pour effectuer des manœuvres d’évitement d’obstacles sont communément

appelés les systèmes *Automatic Emergency Steering* (AES). Les systèmes AES appartiennent à la catégorie des systèmes de sécurité intervenant en cas des imprévus non relevés par le conducteur, ou systèmes d'aide à la conduite passifs.

Dans le contexte de la conduite autonome et des systèmes ADAS, deux catégories de manœuvre sont identifiées : les manœuvres à *faible dynamique* et les manœuvres à *haute dynamique*. En général, les manœuvres pour lesquelles l'accélération du véhicule est limitée à 0,3 g et sur un seul axe du véhicule, longitudinal ou latéral, sont dites à faible dynamique. Les systèmes de confort, comme par exemple l'ACC et le LCA, traitent l'automatisation de la conduite pour ce type de manœuvre. Dans ces conditions, les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule sont considérées découplées et par conséquent leur contrôle est généralement abordé séparément. On parle donc de *contrôle longitudinal* pour l'ACC et *contrôle latéral* pour le LCA. De plus, pour des manœuvres à faible dynamique, les forces des pneus présentent généralement un comportement linéaire. L'utilisation d'un modèle linéaire simplifie le contrôle du véhicule. Les manœuvres pour lesquelles l'accélération du véhicule est supérieure à 0,3 g sont dites à haute dynamique. Pour ces conditions, les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule doivent être considérées couplées et, de plus, les pneus présentent un comportement non-linéaire. Il est donc important de prendre en compte ces aspects pour l'automatisation de la conduite. Parmi les systèmes ADAS actuellement commercialisés, ceux qui traitent du contrôle du véhicule dans des conditions de haute dynamique, c'est-à-dire l'ABS, l'ESC et l'AEB, interviennent seulement sur le couple des roues par moyen du freinage. De plus, ces systèmes poursuivent uniquement un objectif : l'amélioration de la manœuvrabilité du véhicule pour l'ABS et l'ESC et le freinage pour l'AEB. Un système d'évitement d'obstacles peut déplacer latéralement le véhicule à vitesse constante ou effectuer des trajectoires plus complexes, pour lesquelles le véhicule est déplacé latéralement et freiné simultanément par exemple. Pour un système dont le but est de réaliser ce deuxième type de manœuvre, les objectifs sont multiples : le véhicule doit être capable, de façon autonome, d'accélérer ou freiner et conjointement de changer de direction pour se déplacer latéralement. Dans ce contexte, il est donc primordial d'utiliser simultanément le braquage et le couple des roues comme moyen d'action. De surcroît, le contrôle séparé des dynamiques longitudinale et latérale du véhicule n'est pas adapté, en raison du couplage entre les deux dynamiques. Le développement des solutions pour le contrôle du véhicule dans des manœuvres d'évitement d'obstacles présente donc des nouveaux défis techniques qui intéressent les domaines académique et industriel.

Les systèmes pour l'automatisation de la conduite des véhicules sont décomposés en trois fonctions principales :

- *Perception* : elle utilise les données des capteurs sur le véhicule pour estimer en temps réel l'état du véhicule et de l'environnement qui l'entoure,
- *Génération de trajectoire* : elle génère, à partir de l'état du véhicule et de l'environnement fournis par la fonction de perception, les trajectoires de référence que le véhicule doit suivre,
- *Commande* : elle calcule les commandes à fournir aux actionneurs du véhicule pour réaliser la trajectoire de référence issue de la fonction de génération de trajectoire.

Cette décomposition, représentée dans la Figure 2, est présentée dans la littérature pour des travaux plus anciens, comme dans [REECE et SHAFER 1993](#), et récents, comme par exemple dans [BADUE et al. 2021](#). Les résultats présentés dans ce manuscrit portent sur la fonction de *commande*. Plus particulièrement, l'objectif est le développement d'une loi de commande pour le suivi de trajectoire d'un véhicule autonome pour des manœuvres d'évitement d'obstacles à haute dynamique. La détermination des trajectoires de référence n'est donc pas abordée dans ce manuscrit. Les trajectoires à suivre sont fournies par la fonction de génération de trajectoire. Les manœuvres de référence considérées combinent le déplacement latéral et le freinage du véhicule. Les lois de commande conçues doivent donc asservir ces trajectoires de référence au moyen de l'angle de braquage et du couple des roues.

Contributions principales

Cette thèse, démarrée en mars 2019, a été effectuée dans le cadre d'une convention CIFRE entre le Département Automatique du Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S) à CentraleSupélec, campus de Gif-sur-Yvette, et Le Groupe Renault, dans l'équipe de développement des lois de commande pour les systèmes ADAS au Technocentre, à Guyancourt.

Dans ce manuscrit, nous proposons des modèles non-linéaires de dynamique du véhicule, permettant de

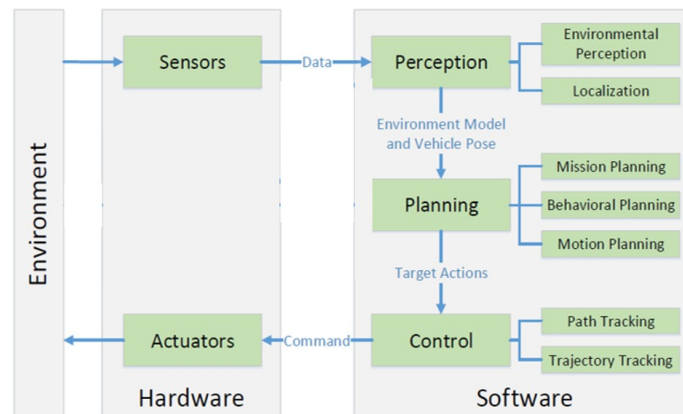


FIGURE 2 – Décomposition des systèmes pour l'automatisation de la conduite des véhicules.

représenter son comportement dans des manœuvres à haute dynamique. L'ensemble de modèles proposés considère les mouvements longitudinal et latéral du véhicule et leurs couplages, un modèle non-linéaire des forces des pneus et une représentation variable du transfert de charge. Des simulations permettent de comparer les différents modèles et de choisir le plus approprié pour la synthèse du correcteur. Des modèles linéaires variables dans le temps sont formulés le long d'une trajectoire de référence du modèle non-linéaire. En utilisant les approches LPV polytopique et *grid-based*, ces modèles linéarisés sont pris en compte dans la synthèse des correcteurs de type retour d'état et retour de sortie. Ces correcteurs, statiques et dynamiques, combinent le braquage et le couple aux roues pour stabiliser les trajectoires du véhicule et garantir le suivi de trajectoire sur un ensemble varié de manœuvres d'évitement d'obstacles. La synthèse des correcteurs est effectuée en utilisant la commande robuste et optimale multi-objectif, au moyen de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. Les non-linéarités du système dues à la saturation des signaux de commande et des forces des pneus sont prises en compte pour la synthèse des correcteurs pour la maximisation de la région d'attraction du système en boucle fermée.

Bien que le travail proposé dans ce manuscrit soit centré sur des manœuvres d'évitement d'obstacles, il est important de souligner que les méthodes de développement des correcteurs présentées peuvent être utilisées pour le développement de la commande pour tous les systèmes qui agissent conjointement sur le braquage et le couple aux roues. Les méthodes proposées peuvent donc être appliquées également pour des manœuvres à faible dynamique.

Le travail exposé dans ce manuscrit a abouti à différentes publications et au dépôt de deux brevets.

Articles de conférence

1. Dario PENCO, Joan DAVINS-VALLDAURA, Emmanuel GODOY, Pedro KVIESKA, Giorgio VALMORBIDA, *Self-scheduled H-infinity control of autonomous vehicle in collision avoidance maneuvers*, à : 4th IFAC Workshop on Linear Parameter-Varying Systems (LPVS), juillet 2021.
2. Dario PENCO, Joan DAVINS-VALLDAURA, Emmanuel GODOY, Pedro KVIESKA, Giorgio VALMORBIDA, *Control for autonomous vehicles in high dynamics maneuvers : LPV modeling and static feedback controller*, à : Conference on Control Technology and Applications (CCTA), août 2021.

Communications dans des journées scientifiques sans acte

1. Dario PENCO, Joan DAVINS-VALLDAURA, Emmanuel GODOY, Pedro KVIESKA, Giorgio VALMORBIDA, *Autonomous vehicle control : Robust and high performance control to enable high dynamics range maneuvering of autonomous vehicles*, à : PhD Students Day - L2S, septembre 2021.

Brevets

1. Dario PENCO, Joan DAVINS-VALLDAURA, Emmanuel GODOY, Pedro KVIESKA, Giorgio VALMORBIDA, *Synthèse d'un correcteur statique pour manœuvre d'évitement*, N° brevet Renault : PJ-22-0039, Brevet en cours de rédaction juridique, envoyé en février 2022.
2. Dario PENCO, Joan DAVINS-VALLDAURA, Emmanuel GODOY, Pedro KVIESKA, Giorgio VALMORBIDA, *Procédé de régulation et contrôle véhicule pour une trajectoire de manœuvre d'évitement à haute dynamique : régulateur grid-based*, N° brevet Renault : PJ-22-0049, Brevet en cours de rédaction juridique, envoyé en février 2022.

Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en deux parties principales :

- la première partie aborde la modélisation de la dynamique du véhicule,
- la deuxième partie traite de la synthèse des correcteurs pour le contrôle du véhicule au cours des manœuvres d'évitement d'obstacles à haute dynamique.

Partie I - Modélisation de la dynamique du véhicule

Chapitre 1 - Modèles analytiques pour la synthèse et l'analyse des lois de commande

Ce chapitre présente les modèles de la dynamique du véhicule développés. Plus particulièrement, il s'agit de trois modèles non-linéaires :

- un modèle bicyclette sans suspensions,
- un modèle quatre roues sans suspensions,
- un modèle quatre roues avec suspensions.

Ces trois modèles considèrent les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule et leurs couplages, un modèle des forces des pneus non-linéaire et une distribution variable de charge des roues. Ces aspects sont importants pour la représentation du comportement du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique. Dans ce chapitre, la cinématique et la cinétique de chaque modèle véhicule sont présentées. La définition des modèles est complétée par les équations du mouvement du véhicule.

Chapitre 2 - Modélisation des forces extérieures

Ce chapitre présente en détail les forces extérieures qui agissent sur le véhicule. Ces forces sont présentes dans les équations du mouvement du véhicule et elles sont donc nécessaires pour la définition des modèles véhicule, présentés dans le chapitre 1. Les forces des pneus sont l'objet d'une description particulièrement détaillée, car importantes pour la caractérisation de la dynamique du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique. Un modèle non-linéaire, représentant la saturation des pneus et le glissement combiné, a été choisi. Un modèle variable des forces normales aux roues a été développé pour chaque modèle véhicule. L'importance d'une description précise des forces normales aux roues, qui évoluent significativement lors des manœuvres à haute dynamique en raison du transfert de charge, est due à son impact sur les seuils de saturation des forces des pneus.

Chapitre 3 - Simulation et validation des modèles de dynamique véhicule

Les modèles de dynamique véhicule présentés dans le chapitre 1 sont validés dans ce chapitre. Les résultats de simulation des modèles non-linéaires sont exposés en exploitant différents scénarios. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec un modèle à haute représentativité, dont le but est la simulation de la dynamique du véhicule et qui servira comme modèle de référence. Dans un premier temps, une analyse numérique permet d'observer le comportement des variables d'état et des forces qui agissent sur le système dans différents scénarios de simulation choisis. Ensuite, une analyse numérique est réalisée, pour rendre plus objective la comparaison entre les différents modèles. L'analyse des trois modèles à complexité croissante permet d'établir les avantages réels de la complexification des modèles. Au regard des résultats issus des analyses graphique et numérique, un modèle est ensuite sélectionné pour la synthèse des correcteurs.

Chapitre 4 - Linéarisation du modèle non-linéaire

Ce chapitre présente la linéarisation du modèle véhicule non-linéaire retenu dans le chapitre d'après l'analyse présentée dans le chapitre 3, afin d'obtenir un modèle pour la synthèse des correcteurs. Le modèle non-linéaire choisi est reformulé afin d'obtenir les forces des pneus et les forces normales aux roues en entrée du système. Un nouveau bouclage est ainsi obtenu. Il permettra d'introduire des conditions pour la synthèse de correcteurs, en vue d'augmenter la région d'attraction de l'origine en boucle fermée en présence des saturations de forces des pneus. Ce modèle est ensuite linéarisé le long d'une trajectoire de référence, conduisant à deux expressions du modèle linéarisé, obtenues en utilisant deux fonctions de saturation différentes. Les modèles linéarisés obtenus sont utilisés dans les chapitres 6 et 7 pour la mise en place d'un modèle LPV polytopique et d'un modèle LPV *grid-based*.

Partie II - Développement des correcteurs pour des manœuvres à haute dynamique

Chapitre 5 - État de l'art

Ce chapitre propose un résumé et une analyse de la littérature sur la synthèse des correcteurs pour le contrôle du véhicule dans le cadre de l'automatisation de la conduite. L'objectif de l'analyse est d'identifier les méthodes de synthèse des lois de commande employées dans le contexte de la conduite autonome, leurs avantages et leurs inconvénients. Une revue de la littérature pour l'automatisation de la conduite dans des manœuvres à faible et haute dynamique est présentée. Ensuite, les motivations pour le choix des méthodes pour la synthèse des correcteurs seront exposées. Concernant les méthodes de synthèse des correcteurs, une attention particulière est accordée à la commande robuste et optimale, et à son application aux modèles LPV. Ce type de commandes a été employé au cours de ces travaux de thèse pour la synthèse des correcteurs.

Chapitre 6 - Synthèse des correcteurs - approche LPV polytopique

Dans ce chapitre, la synthèse des correcteurs selon l'approche LPV polytopique est abordée. Un modèle variable dans le temps de la dynamique du véhicule, développé dans le chapitre 4, est utilisé pour obtenir un modèle LPV polytopique. Un ensemble d'éléments variables dans le temps des matrices de la représentation d'état du modèle linéarisé est employé pour définir le vecteur des paramètres variables du modèle LPV. Le choix de ces paramètres variables et des limites du polytope du modèle LPV est fait en utilisant deux trajectoires de référence, correspondant à des manœuvres d'évitement d'obstacle sans et avec freinage du véhicule. Ces manœuvres peuvent donc être interprétées comme l'enveloppe des trajectoires pour lesquelles le modèle LPV représente la dynamique du véhicule. Le modèle LPV est exploité pour la synthèse de différents correcteurs, autant statiques que dynamiques. L'estimation de la région d'attraction de la boucle fermée, réalisée grâce à une fonction de Lyapunov quadratique et également avec une approche empirique, permet de comparer les performances de ces correcteurs. Enfin, des simulations montreront le comportement du système en boucle fermée avec les différents correcteurs développés et pour des différentes conditions de fonctionnement.

Chapitre 7 - Synthèse des correcteurs - approche LPV *grid-based*

Ce chapitre aborde la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV *grid-based*. Un modèle variable dans le temps de la dynamique du véhicule, développé dans le chapitre 4, est reformulé de façon à obtenir un modèle LPV *grid-based*. Dans ce cas, les variables d'état et les entrées du modèle véhicule pourront être exploitées en tant que paramètres variables du modèle LPV. Les mêmes trajectoires de référence employées dans le chapitre 6, sont utilisées pour la définition de l'espace de variation des paramètres variables. Le modèle LPV *grid-based* est ensuite exploité pour la synthèse des correcteurs. Dans ce cas également, deux types de correcteurs sont développés, statique et dynamique. Enfin, l'estimation de façon empirique de la région d'attraction et des simulations clôturent le chapitre.

Chapitre 8 - Simulation et validation des correcteurs

Ce chapitre présente les résultats de simulation en boucle fermée d'un modèle à haute représentativité avec les correcteurs développés dans les chapitres 6 et 7. L'objectif des simulations est la validation et la comparaison de ces correcteurs à travers différents scénarios. Plus particulièrement, les simulations

permettent d'observer le comportement en boucle fermée pour différentes conditions de fonctionnement : conditions initiales différentes de zéro, présence des dispersions paramétriques du véhicule et avec des perturbations dues à l'inclinaison de la route. Une analyse numérique et une analyse graphique sont présentées pour évaluer et illustrer les résultats de ces simulations.

Annexes

Annexe A - Commande robuste et optimale - systèmes LTI

Dans cette annexe, plusieurs méthodes et outils pour le développement de la commande robuste et optimale sont rappelées. Plus particulièrement, la synthèse des correcteurs au moyen de *fonctions de Lyapunov quadratiques* est présentée. Les conditions de stabilité de la boucle fermée sont exprimées sous forme de LMI, utilisées comme contraintes pour des problèmes d'optimisation convexes.

Annexe B - Revue des différentes méthodes pour la synthèse des correcteurs

Cette annexe présente une revue des principales méthodes de synthèse des lois de commande, autres que la commande robuste et optimale. Plus particulièrement les commandes LQ, MPC et par mode glissant sont présentées.

Annexe C - Linéarisation du modèle véhicule : matrices variables dans le temps

Cette annexe présente les expressions des matrices variables dans le temps obtenues suite à la linéarisation du modèle de dynamique véhicule, effectuée dans le chapitre 4. Ces expressions sont rassemblées ici, pour simplifier la lecture du manuscrit.

Première partie

Modélisation de la dynamique du véhicule

La modélisation de la dynamique véhicule est présentée dans cette partie. Le but est l'obtention d'un modèle pour la synthèse des correcteurs. Dans un premier temps, différents modèles non-linéaires, permettant de représenter de façon précise le mouvement du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique, sont présentés. Dans un deuxième temps, ces modèles sont validés à partir des différents résultats de simulation, comparés avec les résultats obtenus au moyen du modèle à haute représentativité MADA. L'analyse de ces résultats permet de choisir un modèle pour la synthèse des correcteurs. Enfin, le modèle non-linéaire retenu est linéarisé le long d'une trajectoire de référence. Le modèle LTV obtenu au moyen de la linéarisation sera utilisé dans la deuxième partie du manuscrit, pour la formalisation des deux modèles LPV pour la synthèse des correcteurs.

MODÈLES ANALYTIQUES POUR LA SYNTHÈSE ET L'ANALYSE DES LOIS DE COMMANDE

Sommaire

1.1	Modèle bicyclette sans suspensions	12
1.1.1	Cinématique et cinétique du véhicule	14
1.1.2	Équations du mouvement	15
1.2	Modèle quatre roues sans suspensions	17
1.2.1	Cinématique et cinétique du véhicule	18
1.2.2	Équations du mouvement	18
1.3	Modèle quatre roues avec suspensions	19
1.3.1	Cinématique et cinétique du véhicule	21
1.3.2	Équations du mouvement	25
1.4	Position absolue du véhicule	28

Dans ce chapitre, nous présentons des modèles de la dynamique véhicule. Dans le but du développement des correcteurs pour la stabilisation du véhicule le long des manœuvres de référence à haute dynamique, l'objectif de la modélisation est l'obtention d'un modèle véhicule pour la synthèse des correcteurs qui soit représentatif de la dynamique du véhicule dans les conditions visées. Dans des conditions à haute dynamique, les dynamiques des variables associées aux mouvements longitudinal et latéral du véhicule sont fortement couplées. De plus, dans ces conditions, les forces des pneus, importantes pour la caractérisation de la dynamique du véhicule, subissent l'effet du *glissement combiné* etaturent plus facilement, comme on le verra au cours de ce chapitre. Un seul correcteur pour le contrôle de l'ensemble des variables du mouvement du véhicule doit donc tenir compte de ce couplage. Il est donc très important que le modèle du véhicule utilisé pour la synthèse des correcteurs intègre ces facteurs. Dans ce but, trois modèles du véhicule ont été développés :

- un modèle bicyclette sans suspensions,
- un modèle quatre roues sans suspensions,
- un modèle quatre roues avec suspensions.

Comme on verra en détail dans ce chapitre, ces trois modèles ont en commun quatre facteurs fondamentaux pour un modèle représentatif dans des conditions à haute dynamique et pratiques pour la synthèse des correcteurs :

- a. la prise en compte des variables associées aux dynamiques longitudinale, latérale et de rotation des roues et leurs couplages,
- b. la représentation des forces des pneus avec un modèle tenant compte des saturations et du glissement combiné,
- c. une distribution de charge variable, permettant un calcul plus précis des forces des pneus,
- d. l'utilisation des angles de braquage et des couples aux roues comme entrées du système, évitant ainsi de prendre comme entrées de commande les forces générées par les pneumatiques.

Le développement de trois modèles sert à l'étude de différents niveaux de complexité. Il a donc été possible d'établir, dans des conditions de haute dynamique, les avantages réels d'un modèle plus complexe par rapport à un plus simple, le but étant le choix du modèle le plus représentatif dans ces conditions.

Dans ce chapitre on se limite à décrire la cinématique, cinétique et les équations du mouvement des modèles véhicule développés. Le chapitre 2 sera dédié à la description détaillée des expressions des forces qui agissent sur le véhicule, nécessaires pour la définition des modèles véhicule. L'analyse et la comparaison des modèles dans des conditions de haute dynamique et le choix du modèle pour la synthèse des correcteurs seront traités dans le chapitre 3. La cinématique, cinétique et les équations du mouvement pour chaque modèle seront traitées en détail dans les sections 1.1, 1.2 et 1.3. A la fin du chapitre, dans la section 1.4, on montrera comment déterminer la position absolue du véhicule à partir de ses variables d'état. Cela sera utile dans la suite pour la définition des modèles de synthèse pour les correcteurs.

La Table 1.1 contient les paramètres du véhicule qui seront utilisés pour la définition des modèles véhicule.

1.1 Modèle bicyclette sans suspensions

Dans la littérature, un modèle bicyclette linéaire, décrivant uniquement la dynamique latérale du véhicule, est largement utilisé pour la synthèse des lois de commande dans des conditions de faible dynamique. Ce modèle utilise un modèle des forces des pneus linéaire, une distribution de charge du véhicule constante et considère la vitesse longitudinale du véhicule constante. Une description du modèle bicyclette linéaire peut être consultée dans [RAJAMANI 2012](#). Ce modèle ne nous convient pas, car il néglige complètement la dynamique longitudinale du véhicule et il n'est donc pas adapté pour la synthèse d'un correcteur pour le contrôle de la vitesse du véhicule. De plus, un modèle linéaire des forces des pneus ne permet pas de représenter la saturation des forces, phénomène présent dans des conditions de haute dynamique. D'autres modèles bicyclette non-linéaires, tenant compte de la dynamique longitudinale du véhicule, sont également étudiés dans la littérature. Ces modèles sont généralement utilisés pour la synthèse des correcteurs dans des conditions de haute dynamique. Dans [WANG, ZHANG et WANG 2014](#), par exemple, les auteurs proposent un modèle bicyclette non-linéaire, représentant les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule. Dans ce modèle, les forces des pneus sont linéaires et la dynamique de rotation des roues est négligée et condensée dans des entrées de perturbation. Dans [JIA 2000](#) l'auteur propose un modèle bicyclette non-linéaire, tenant compte du couplage des dynamiques longitudinale et latérale du véhicule, sans considérer pour autant la dynamique de rotation des roues. Dans ce cas, les forces longitudinales des pneus sont considérées comme des entrées du système. Un correcteur de bas niveau est donc nécessaire pour commander les couples aux roues afin d'obtenir les forces longitudinales souhaitées. Dans [ATTIA, ORJUELA et BASSET 2014](#) il est proposé un modèle bicyclette non-linéaire, qui inclut la dynamique longitudinale et latérale du véhicule et celle de rotation des roues. En revanche, il utilise une distribution de charge constante et un modèle des forces des pneus non-linéaire. La cinématique de ce modèle est très similaire à celle du modèle bicyclette décrit par la suite, qui se différencie principalement par un transfert de charge variable et le modèle des forces des pneus choisi.

Au regard de la littérature, nous allons étudier un modèle bicyclette non-linéaire, tenant compte des points a-d ci-dessus. Pour ce modèle, les deux roues de l'essieu avant sont regroupées au centre de la voie du véhicule ; de même pour les deux roues de l'essieu arrière. Le véhicule est donc constitué d'un corps et de deux roues, une sur l'essieu avant et une sur l'essieu arrière, au centre de la voie du véhicule. Les mouvements suivants sont considérés (pour les axes du véhicule voir les Figures 1.1 et 1.2) :

- translation longitudinale du corps du véhicule, le long de son axe x ,
- translation latérale du corps du véhicule, le long son axe y ,
- lacet du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe z ,
- rotation des roues autour de leur axe y_w .

Les dynamiques suivantes sont négligées :

- translation verticale du corps du véhicule, le long de son axe z ,
- roulis du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe x ,
- tangage du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe y .

Au vu des mouvements considérés, les variables d'état sont :

Paramètre	Description	Paramètre	Description
m	masse totale	m_u	masse non suspendue
m_s	masse suspendue	I_{xx}	moment d'inertie longitudinal du véhicule
I_{yy}	moment d'inertie latéral du véhicule	I_{zz}	moment d'inertie vertical du véhicule
$I_{u\ xx}$	moment d'inertie longitudinal de la masse non suspendue	$I_{u\ yy}$	moment d'inertie latéral de la masse non suspendue
$I_{u\ zz}$	moment d'inertie vertical de la masse non suspendue	$I_{s\ xx}$	moment d'inertie longitudinal de la masse suspendue
$I_{s\ yy}$	moment d'inertie latéral de la masse suspendue	$I_{s\ zz}$	moment d'inertie vertical de la masse suspendue
ℓ_w	largeur, ou voie, du véhicule	ℓ_f	distance entre centre d'inertie du véhicule et essieu avant
ℓ_r	distance entre centre d'inertie du véhicule et essieu arrière	L	longueur du véhicule
ℓ_{fu}	distance entre centre d'inertie de la masse non suspendue et essieu avant	ℓ_{ru}	distance entre centre d'inertie de la masse non suspendue et essieu arrière
ℓ_{fs}	distance entre centre d'inertie de la masse suspendue et essieu avant	ℓ_{rs}	distance entre centre d'inertie de la masse suspendue et essieu arrière
h	hauteur du centre d'inertie du véhicule	h_u	hauteur du centre d'inertie de la masse non suspendue
h_s	hauteur du centre d'inertie de la masse suspendue	h_r	distance entre le centre d'inertie de la masse suspendue et le centre de rotation de la masse suspendue
I_{wy}	moment d'inertie latérale de la roue	r_e	rayon effectif des roues
μ	coefficient de friction entre sol et pneu	ρ	densité de l'air
C_d	coefficient de traînée aérodynamique du véhicule	A_f	surface frontale du véhicule
$c_{\alpha f}$	raideur latérale des pneus des roues avant	$c_{\alpha r}$	raideur latérale des pneus des roues arrière
$c_{\kappa f}$	raideur longitudinale des pneus des roues avant	$c_{\kappa r}$	raideur longitudinale des pneus des roues arrière
f_{rf}	coefficient des forces de résistance au roulement des roues avant	f_{rr}	coefficient des forces de résistance au roulement des roues arrière
$\ell_{susp f}$	course des suspensions avant	$\ell_{susp r}$	course des suspensions arrière
k_{sf}	raideur des suspensions avant	k_{sr}	raideur des suspensions arrière
k_{df}	amortissement des suspensions avant	k_{dr}	amortissement des suspensions arrière
$k_{\phi f}$	raideur de la barre antiroulis avant	$k_{\phi r}$	raideur de la barre antiroulis arrière

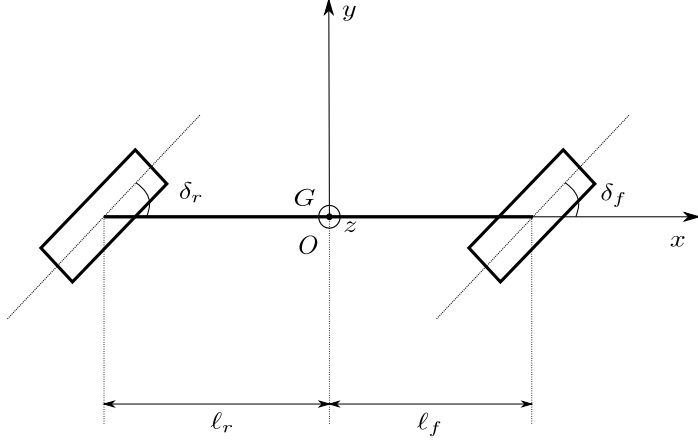
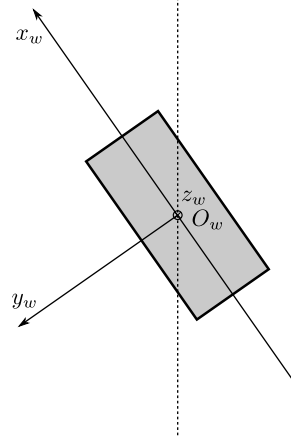
TABLE 1.1 – Paramètres du véhicule.

- v vitesse longitudinale du véhicule,
- u vitesse latérale du véhicule,
- r vitesse de lacet du véhicule,
- ω_{wf} et ω_{wr} vitesse de rotation des roues avant et arrière.

Les entrées du système sont :

- δ_f et δ_r angles de braquage des roues avant et arrière,
- τ_{wf} et τ_{wr} couples des roues avant et arrière,
- θ_x et θ_y angles de dévers et pente de la route.

Les angles de rotation des roues autour de leurs axes z_w , respectivement δ_f et δ_r , ont donc été considérés comme des entrées du système et leur dynamique n'a pas été modélisée. L'angle de lacet du véhicule est noté ψ .


 FIGURE 1.1 – Plan xy du modèle bicyclette.

 FIGURE 1.2 – Plan $x_w y_w$ d'une roue.

1.1.1 Cinématique et cinétique du véhicule

La cinématique du véhicule sera étudiée dans un référentiel absolu \mathcal{R}_a , auquel le repère $O_a x_a y_a z_a$, avec base $(\vec{i}_a, \vec{j}_a, \vec{k}_a)$, est associé. En revanche, pour des raisons de commodité, dans la définition des équations du mouvement du véhicule, les vecteurs seront projetés dans un repère $Oxyz$, avec base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, lié au corps du véhicule, avec $O \equiv G$, où G est le centre d'inertie du véhicule. Le repère $Oxyz$ est illustré dans la Figure 1.1. Le référentiel auquel $Oxyz$ est associé est appelé \mathcal{R} . Les vecteurs suivants sont définis :

$$— \quad {}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t) = \left. \frac{d^{(xyz)}\vec{O}_a \vec{G}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} : \text{vitesse absolue du centre d'inertie du véhicule, dans le}$$

repère véhicule $Oxyz$,

$$— \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} : \text{vitesse de rotation du corps du véhicule par rapport à } \mathcal{R}_a,$$

$$— \quad {}^{(xyz)}\dot{\vec{v}}_G(t) = \left. \frac{d^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} : \text{dérivée temporelle de } {}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t) \text{ dans } \mathcal{R},$$

$$— \quad \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) = \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r} \end{bmatrix} : \text{dérivée temporelle de } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \text{ dans } \mathcal{R}_a.$$

En considérant la *formule de Bour*, cf. JAZAR 2017, pour la composition des dérivées temporelles des vecteurs, l'accélération de G par rapport à \mathcal{R}_a dans le repère $Oxyz$ peut être calculée de la façon suivante :

$${}^{(xyz)}\vec{a}_{aG}(t) = \left. \frac{d^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t) = {}^{(xyz)}\dot{\vec{v}}_G(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t) \quad (1.1)$$

dont les composantes sont :

$${}^{(xyz)}\vec{\mathbf{a}}_{aG}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v} - r u \\ \dot{u} + r v \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2)$$

La dérivée temporelle dans \mathcal{R}_a de la quantité de mouvement du véhicule est :

$${}^{(xyz)}\dot{\vec{\mathbf{p}}}_{\mathcal{R}_a}(G, t) = m {}^{(xyz)}\vec{\mathbf{a}}_{aG}(t) = \begin{bmatrix} m(\dot{v} - r u) \\ m(\dot{u} + r v) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Le moment cinétique du véhicule, cf. [JAZAR 2017](#), se calcule de la façon suivante :

$$\vec{\sigma}_{\mathcal{R}_a}(G, t) = I_G \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \quad (1.4)$$

avec I_G la matrice d'inertie du véhicule. Sa dérivée temporelle par rapport à \mathcal{R}_a est calculée, tenant compte que $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)$ décrit la vitesse de rotation autour de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère $Oxyz$, en utilisant la loi de composition des dérivées temporelles des vecteurs :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(G, t) &= \left. \frac{d I_G \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \wedge (I_G \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)) = \\ &= I_G \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \wedge (I_G \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)) \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec le moment d'inertie :

$$I_G = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}.$$

Il est raisonnable de considérer le véhicule symétrique par rapport au plan xz de $Oxyz$; les produits d'inertie I_{xy} et I_{yz} de la matrice I_G sont donc nuls, cf. [GINSBERG 1995](#). De plus, pour un véhicule le produit d'inertie I_{xz} est normalement faible et l'on adopte $I_{xz} \approx 0$, comme dans [JAZAR 2017](#). Le moment d'inertie du véhicule devient :

$$I_G \approx \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Les composantes de $\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(G, t)$ dans $Oxyz$ sont :

$$\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(G, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz} \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

1.1.2 Équations du mouvement

L'obtention d'un modèle dynamique passe par la description des forces agissant sur le système. Nous allons prendre en compte les forces suivantes, représentées dans les Figures 1.4 et 1.5 :

- force de la pesanteur, une composante pour chaque axe du repère $Oxyz$,
- P_x composante longitudinale,
- P_y composante latérale,
- P_z composante verticale,

- forces normales,
 - N_f et N_r pour les roues avant et arrière,
- forces longitudinales des pneus,
 - F_{xf} et F_{xr} pour les roues avant et arrière,
- forces latérales des pneus,
 - F_{yf} et F_{yr} pour les roues avant et arrière,
- forces de résistance au roulement,
 - R_{xf} et R_{xr} pour les roues avant et arrière,
- F_{aero} force de traînée aérodynamique, pour simplicité considérée juste sur l'axe longitudinal x .

Le détail du calcul pour chaque force qui agit sur le véhicule sera abordé dans le chapitre 2. Les forces longitudinales et latérales des pneus sont respectivement sur l'axe longitudinal x_w et latéral y_w de la roue respective. Les forces de résistance au roulement sont sur l'axe x_w . Par conséquent, ces forces sont décomposées dans une composante longitudinale et une latérale dans le repère véhicule $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
 F_{xxf} &= F_{xf} \cos \delta_f & F_{xxr} &= F_{xr} \cos \delta_r \\
 F_{yxf} &= F_{xf} \sin \delta_f & F_{yxr} &= F_{xr} \sin \delta_r \\
 F_{xyf} &= F_{yf} \sin \delta_f & F_{xyr} &= F_{yr} \sin \delta_r \\
 F_{yyf} &= F_{yf} \cos \delta_f & F_{yyr} &= F_{yr} \cos \delta_r \\
 R_{xxf} &= R_{xf} \cos \delta_f & R_{xxr} &= R_{xr} \cos \delta_r \\
 R_{yxf} &= R_{xf} \sin \delta_f & R_{yxr} &= R_{xr} \sin \delta_r
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

celles-ci sont illustrées dans la Figure 1.3 pour une roue.

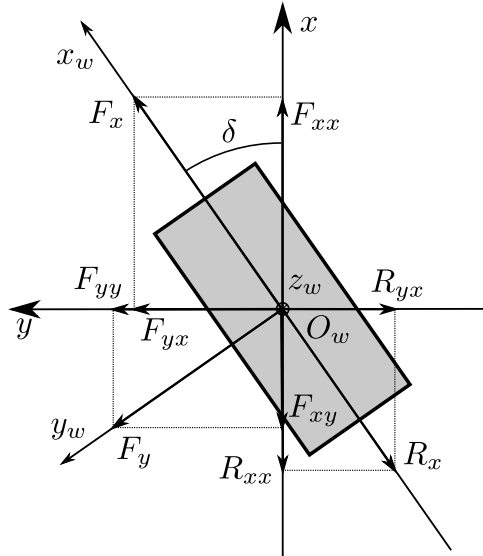


FIGURE 1.3 – Composantes des forces de la roue dans $Oxyz$.

Pour le calcul des équations du mouvement de la translation du véhicule sur le plan xy et sa rotation autour de l'axe z , on considère les forces comme montré sur les Figures 1.4 et 1.5, les composantes x et y de la dérivée de la quantité de mouvement en (1.3) et la composante z de la dérivée du moment cinétique en (1.7) :

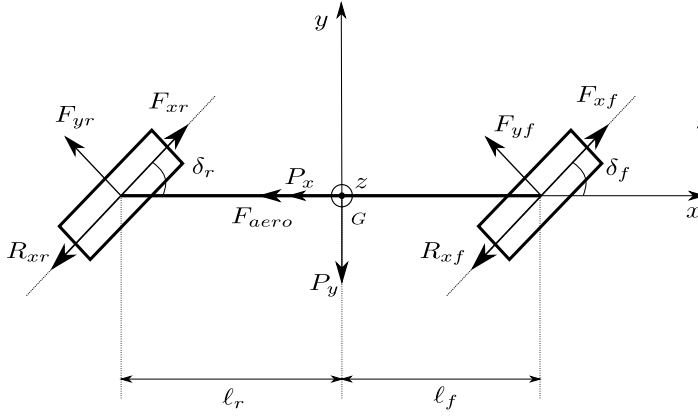
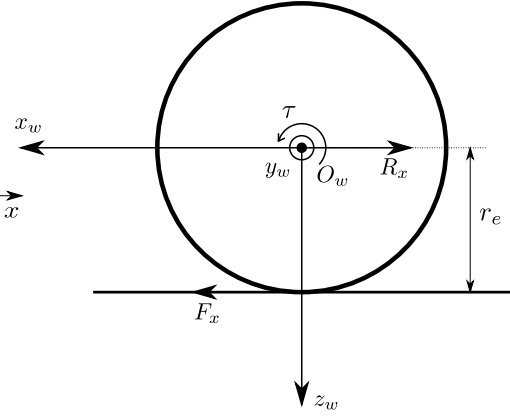
$$m(\dot{v} - r u) = 2 F_{xxf} + 2 F_{xxr} - 2 R_{xxf} - 2 R_{xxr} - 2 F_{xyf} - 2 F_{xyr} - P_x - F_{aero} \tag{1.9a}$$

$$m(\dot{u} + r v) = 2 F_{yxf} + 2 F_{yxr} - 2 R_{yxf} - 2 R_{yxr} + 2 F_{yyf} + 2 F_{yyr} - P_y \tag{1.9b}$$

$$I_{zz} \dot{r} = (2 F_{yxf} + 2 F_{yyf} - 2 R_{yxf}) \ell_f - (2 F_{yxr} + 2 F_{yyr} - 2 R_{yxr}) \ell_r. \tag{1.9c}$$

Les équations de rotation des roues sont :

$$I_{wy} \dot{\omega}_{wf} = \tau_{wf} - 2 F_{xf} r_e \tag{1.10a}$$


 FIGURE 1.4 – Forces extérieures, plan xy du modèle bicyclette.

 FIGURE 1.5 – Forces extérieures, plan $x_w z_w$ d'une roue.

$$I_{w_y} \dot{\omega}_{wr} = \tau_{wr} - 2 F_{xr} r_e \quad (1.10b)$$

où $I_{w_y} \dot{\omega}_{wf}$ et $I_{w_y} \dot{\omega}_{wr}$ sont les composantes le long de l'axe y_w de la dérivée du moment cinétique respectivement des roues avant et arrière. Elles sont calculées en considérant les roues symétriques par rapport aux plans $x_w y_w$, $x_w z_w$ et $y_w z_w$. Les axes $x_w y_w z_w$ sont donc les axes principaux et le moment d'inertie de la roue est une matrice diagonale.

1.2 Modèle quatre roues sans suspensions

En extension du modèle bicyclette de la section 1.1, un modèle véhicule à quatre roues sans suspensions a été développé. Cela nous permet de représenter d'une façon plus précise les forces des pneus, car il est possible de représenter un transfert de charge entre les côtés gauche et droit du véhicule. En effet, le transfert de charge est important pour la description des forces normales des roues, qui déterminent le seuil de saturation des forces des pneus. De plus, en utilisant un modèle quatre roues, le couple que les forces des pneus produisent sur le mouvement de lacet est représenté, les roues étant positionnées à l'endroit où elles se situent pour le véhicule réel. Dans la littérature on trouve des modèles de dynamique véhicule avec quatre roues, pour le contrôle combiné des dynamiques longitudinale et latérale du véhicule. Un modèle quatre roues considérant les forces des pneus non-linéaire et une charge statique pour les roues est proposé dans [CHOU et D'ANDRÉA-NOVEL 2005](#). Dans [YIN et al. 2015](#) les auteurs proposent un modèle quatre roues qui utilise un modèle non-linéaire des forces des pneus et une distribution de charge constante. Les entrées du système sont l'angle de braquage des roues avant et les coefficients de glissement des roues. Un correcteur bas niveau est donc nécessaire pour calculer les couples des roues et réaliser les coefficients de glissement souhaités. Un modèle similaire est utilisé dans [GAO et al. 2010](#), mais au lieu des coefficients de glissement, dans ce cas les entrées du système sont les forces longitudinales des pneus.

Pour le modèle quatre roues sans suspensions les mêmes dynamiques du modèle bicyclette de la section 1.1 ont été considérées pour le véhicule :

- translation longitudinale du corps du véhicule, le long de son axe x ,
- translation latérale du corps du véhicule, le long son axe y ,
- lacet du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe z ,
- rotation des roues autour de leur axe y_w .

Les dynamiques dont on ne tient pas compte sont :

- translation verticale du corps du véhicule, le long de son axe z ,
- roulis du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe x ,
- tangage du corps du véhicule, c'est-à-dire rotation autour de son axe y .

Les variables d'état sont :

- v vitesse longitudinale du véhicule,
- u vitesse latérale du véhicule,

- r vitesse de lacet du véhicule,
- ω_{wfi} et ω_{wfo} ¹ vitesse de rotation des roues avant gauche et droite,
- ω_{wri} et ω_{wro} vitesse de rotation des roues arrière gauche et droite.

Le modèle comporte le double d'entrées, en considérant que le double des roues est pris en compte :

- δ_{fi} et δ_{fo} angles de braquage des roues avant gauche et droite,
- δ_{ri} et δ_{ro} angles de braquage des roues arrière gauche et droite,
- τ_{wfi} et τ_{wfo} couples des roues avant gauche et droite,
- τ_{wri} et τ_{wro} couples des roues avant gauche et droite.

1.2.1 Cinématique et cinétique du véhicule

Comme pour le modèle bicyclette la cinématique du véhicule est étudiée dans un référentiel absolu \mathcal{R}_a . Les vecteurs sont projetés dans le repère véhicule $Oxyz$ pour décrire les équations de mouvement. Les dérivées de la quantité de mouvement et du moment cinétique du véhicule sont identiques à celles du modèle bicyclette, calculées dans la section 1.1.1. On rappelle, par commodité, les expressions (1.3) et (1.7). La dérivée de la quantité de mouvement du véhicule dans $Oxyz$ est :

$${}^{(xyz)}\dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G, t) = \begin{bmatrix} m(\dot{v} - ru) \\ m(\dot{u} + rv) \\ 0 \end{bmatrix}$$

et celle du moment cinétique du véhicule est :

$$\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(G, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{zz}\dot{r} \end{bmatrix}.$$

1.2.2 Équations du mouvement

Les forces sont les mêmes que celles listées dans la section 1.1.2, maintenant exprimées pour quatre roues. Les forces et leur convention sont montrées dans la Figure 1.6. Les composantes dans $Oxyz$ des forces liées aux roues sont :

$$\begin{array}{llll} F_{xxfi} = F_{xfi} \cos \delta_{fi} & F_{xxfo} = F_{xfo} \cos \delta_{fo} & F_{xxri} = F_{xri} \cos \delta_{ri} & F_{xxro} = F_{xro} \cos \delta_{ro} \\ F_{yxfi} = F_{xfi} \sin \delta_{fi} & F_{yxf0} = F_{xfo} \sin \delta_{fo} & F_{yxri} = F_{xri} \sin \delta_{ri} & F_{yxro} = F_{xro} \sin \delta_{ro} \\ F_{xyfi} = F_{yfi} \sin \delta_{fi} & F_{xyfo} = F_{yfo} \sin \delta_{fo} & F_{xyri} = F_{yri} \sin \delta_{ri} & F_{xyro} = F_{yro} \sin \delta_{ro} \\ F_{yyfi} = F_{yfi} \cos \delta_{fi} & F_{yyfo} = F_{yfo} \cos \delta_{fo} & F_{yyri} = F_{yri} \cos \delta_{ri} & F_{yyro} = F_{yro} \cos \delta_{ro} \\ R_{xxfi} = R_{xfi} \cos \delta_{fi} & R_{xxfo} = R_{xfo} \cos \delta_{fo} & R_{xxri} = R_{xri} \cos \delta_{ri} & R_{xxro} = R_{xro} \cos \delta_{ro} \\ R_{yxfi} = R_{xfi} \sin \delta_{fi} & R_{yxf0} = R_{xfo} \sin \delta_{fo} & R_{yxri} = R_{xri} \sin \delta_{ri} & R_{yxro} = R_{xro} \sin \delta_{ro}. \end{array} \quad (1.11)$$

Les équations du mouvement pour la translation du véhicule sur le plan xy et sa rotation autour de l'axe z sont :

$$m(\dot{v} - ru) = F_{xxfi} + F_{xxfo} + F_{xxri} + F_{xxro} - R_{xxfi} - R_{xxfo} - R_{xxri} - R_{xxro} + \\ - F_{xyfi} - F_{xyfo} - F_{xyri} - F_{xyro} - P_x - F_{aero} \quad (1.12a)$$

$$m(\dot{u} + rv) = F_{yxfi} + F_{yxf0} + F_{yxri} + F_{yxro} - R_{yxfi} - R_{yxf0} - R_{yxri} - R_{yxro} + \\ + F_{yyfi} + F_{yyfo} + F_{yyri} + F_{yyro} - P_y \quad (1.12b)$$

1. Les suffixes i et o correspondent à *inner* et *outer*. Ils ont été choisis au lieu de l et r (*left* et *right*), pour ne pas répéter le suffixe r , qui indique déjà l'arrière du véhicule (*rear*).

$$\begin{aligned}
 I_{zz}\dot{r} = & \ell_f (F_{yxfi} + F_{yxf_o}) + \ell_f (F_{yyfi} + F_{yyf_o}) - \ell_r (F_{yxri} + F_{yxr_o}) - \ell_r (F_{yyri} + F_{yyr_o}) + \\
 & - \frac{\ell_w}{2} (F_{xxfi} + F_{xxr_i}) + \frac{\ell_w}{2} (F_{xyfi} + F_{xyr_i}) + \frac{\ell_w}{2} (F_{xxf_o} + F_{xxr_o}) - \frac{\ell_w}{2} (F_{xyf_o} + F_{xyr_o}) + \\
 & - \ell_f (R_{yxfi} + R_{yxf_o}) + \ell_r (R_{yxri} + R_{yxr_o}) + \frac{\ell_w}{2} (R_{xxfi} + R_{xxr_i}) - \frac{\ell_w}{2} (R_{xxf_o} + R_{xxr_o})
 \end{aligned} \tag{1.12c}$$

L'on observe une différence par rapport au modèle bicyclette sans suspensions : la présence des moments produits par les forces longitudinales des pneus. Ces moments apparaissent car les forces ne sont plus appliquées au centre de la voie du véhicule. Les équations de la dynamique de rotation des roues sont :

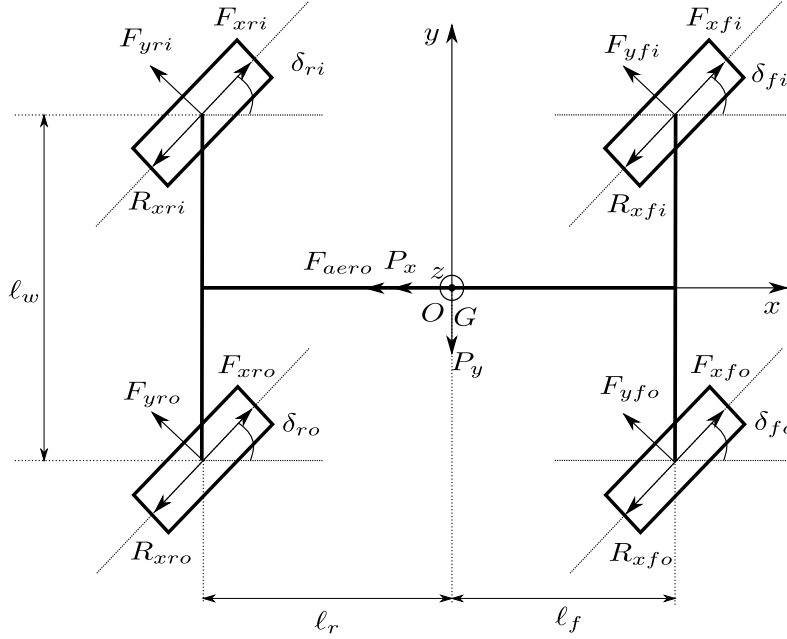


FIGURE 1.6 – Forces extérieures sur le modèle quatre roues, plan xy .

$$I_{wy}\dot{\omega}_{wfi} = \tau_{wfi} - F_{xfi}r_e \tag{1.13a}$$

$$I_{wy}\dot{\omega}_{wfo} = \tau_{wfo} - F_{xf_o}r_e \tag{1.13b}$$

$$I_{wy}\dot{\omega}_{wri} = \tau_{wri} - F_{xri}r_e \tag{1.13c}$$

$$I_{wy}\dot{\omega}_{wro} = \tau_{wro} - F_{xr_o}r_e \tag{1.13d}$$

1.3 Modèle quatre roues avec suspensions

Dans cette section le développement d'un modèle véhicule à quatre roues avec suspensions est présenté. Il sera utile pour l'évaluation de l'impact du châssis sur la dynamique du véhicule. Dans des manœuvres à haute dynamique cela modifie le transfert de charge et par conséquent les forces des pneus. De plus, la rotation de la masse suspendue fait apparaître de nouvelles composantes sur l'accélération du véhicule. Pour ce modèle, le véhicule est composé de deux solides indéformables : la masse suspendue et la masse non suspendue. La masse suspendue du véhicule est l'ensemble de la masse du véhicule portée par les suspensions, la masse restante est la masse non suspendue :

- la masse non suspendue est approchée par une plateforme portée par quatre roues ;
- la masse suspendue est approchée par une masse connectée à la masse non suspendue par une tige ;
- le système agit comme un pendule inversé sur une plateforme qui se translate sur le sol ;
- la tige, qui relie les deux masses, est fixée à la masse non suspendue au centre de roulis et de tangage de la masse suspendue, O_s ;

- la liaison mécanique entre masse suspendue et non suspendue permet deux degrés de liberté : la masse suspendue peut tourner autour de l'axe longitudinal x_s et de l'axe latéral y_s , qui passent au travers de O_s ; voir les Figures 1.7 et 1.8.

Cette description permet le roulis et le tangage de la masse suspendue par rapport à la masse non suspendue. En revanche, la liaison mécanique entre les deux masses ne permet pas de rotation autour de l'axe vertical z_s et aucune translation. La masse suspendue a donc le même mouvement de lacet et la même translation sur le plan horizontal que la masse non suspendue.

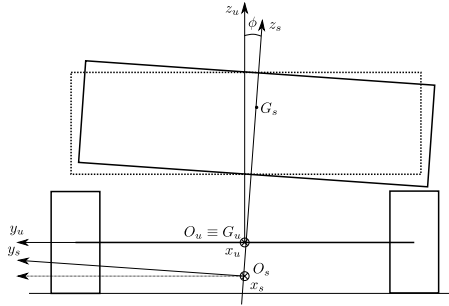


FIGURE 1.7 – Modèle véhicule avec roulis, vue de derrière ; ϕ est l'angle de roulis de la masse suspendue.

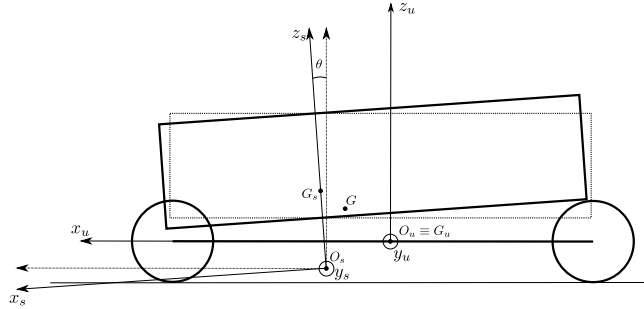


FIGURE 1.8 – Modèle véhicule avec tangage, vue à gauche ; θ est l'angle de tangage de la masse suspendue.

En réalité, les axes de roulis et de tangage de la voiture se déplacent selon la charge du véhicule et sa dynamique et ne sont pas nécessairement à la même hauteur, cf. [JAZAR 2017](#), [REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001](#). Cependant, au regard de la difficulté de déterminer la position exacte des centres de roulis et de tangage, pour simplifier la réalisation du modèle leurs positions seront considérées constantes et coïncidentes. Cette approximation est plutôt commune pour le développement des modèles véhicule pour la synthèse et l'analyse des lois de commande. Dans [JAZAR 2017](#) et [KRUCZEK et STRIBRSKY 2004](#) les centres de roulis et tangage sont considérés coïncidents avec le centre d'inertie de la masse suspendue. Dans [BEAL et GERDES 2010](#), [CAO et al. 2013](#), [JALALI et al. 2018](#) et [RAJAMANI 2012](#) le centre de roulis est considéré comme étant sous le centre d'inertie de la masse suspendue. Cette deuxième approche a été choisie dans le développement du modèle quatre roues avec suspensions, car plus représentative pour la plupart des véhicules. Par exemple, on peut voir dans la Figure 1.9 que le centre de roulis est sous le centre d'inertie de la masse suspendue du véhicule. Dans la littérature il existe des modèles qui séparent la

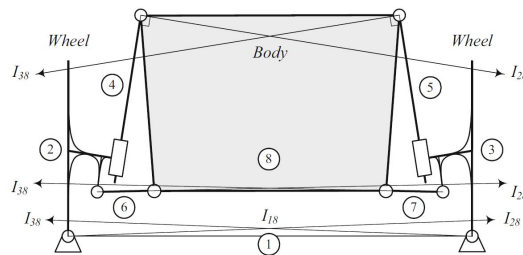


FIGURE 1.9 – Exemple de centre de roulis (image extraite de [JAZAR 2017](#)) : point I_{18} est le centre de roulis instantané.

masse non suspendue en quatre solides indéformables. Cela permet de considérer le mouvement vibratoire de chaque roue. En revanche, dans ce cas le mouvement vibratoire a été négligé et pour cette raison il est raisonnable de considérer un seul solide pour représenter la masse non suspendue.

Les mouvements suivants ont été considérés pour la masse non suspendue :

- translation longitudinale, le long de l'axe x_u ,
- translation latérale, le long l'axe y_u ,
- lacet, c'est-à-dire rotation autour de l'axe z_u ,
- roulement des roues, c'est-à-dire rotation autour de l'axe y_w .

Les dynamiques pour la masse suspendue :

- roulis, c'est-à-dire rotation autour de l'axe x_s ,
- tangage, c'est-à-dire rotation autour de l'axe y_s .

La translation verticale du corps du véhicule a été négligée dans ce modèle. Les variables d'état du système sont :

- v vitesse longitudinale du véhicule,
- u vitesse latérale du véhicule,
- p vitesse de roulis de la masse suspendue,
- q vitesse de tangage de la masse suspendue,
- r vitesse de lacet du véhicule,
- ω_{wfi} et ω_{wfo} vitesse de rotation des roues avant gauche et droite,
- ω_{wri} et ω_{wro} vitesse de rotation des roues arrière gauche et droite.

Les entrées du système sont les mêmes que celles définies dans la section 1.2 pour le modèle quatre roues sans suspensions :

- δ_{fi} et δ_{fo} angles de braquage des roues avant gauche et droite,
- δ_{ri} et δ_{ro} angles de braquage des roues arrière gauche et droite,
- τ_{wfi} et τ_{wfo} couples des roues avant gauche et droite,
- τ_{wri} et τ_{wro} couples des roues arrière gauche et droite.

Les angles qui décrivent l'attitude du véhicule sont :

- ϕ angle de roulis de la masse suspendue,
- θ angle de tangage de la masse suspendue,
- ψ angle de lacet du véhicule.

1.3.1 Cinématique et cinétique du véhicule

Comme pour les modèles définis dans les sections 1.1 et 1.2, les informations cinématiques et cinétiques du modèle quatre roues avec suspensions seront étudiées dans un référentiel absolu \mathcal{R}_a , auquel est associé un système de coordonnées cartésiennes $O_a x_a y_a z_a$ et une base orthonormale $(\vec{i}_a, \vec{j}_a, \vec{k}_a)$. Un référentiel attaché au véhicule permet de simplifier les expressions des forces et des équations du mouvement, comme déjà vu pour le modèle bicyclette et le modèle quatre roues sans suspensions. Dans ce cas, on considère deux référentiels pour le véhicule : un référentiel attaché à la masse non suspendue \mathcal{R}_u , avec un système de coordonnées cartésiennes $O_u x_u y_u z_u$ et base orthonormale $(\vec{i}_u, \vec{j}_u, \vec{k}_u)$, et un référentiel attaché à la masse suspendue \mathcal{R}_s , avec un système de coordonnées cartésiennes $O_s x_s y_s z_s$ et base orthonormale $(\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$. O_u est coïncidant avec le centre d'inertie de la masse non suspendue, G_u . En revanche, O_s ne coïncide pas avec le centre d'inertie de la masse suspendue, mais avec le centre de roulis et de tangage de la masse suspendue. L'axe z_s passe par le centre d'inertie de la masse suspendue, G_s . $O_u x_u y_u z_u$ et $O_s x_s y_s z_s$ sont montrés dans les Figures 1.7 et 1.8. On définit les vecteurs :

$$— \quad (x_u y_u z_u) \vec{v}_{a G_u}(t) = \left. \frac{d^{(x_u y_u z_u)} \vec{O}_a \vec{G}_u(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} : \text{vitesse absolue de } G_u, \text{ dans le repère } O_u x_u y_u z_u$$

$$— \quad \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} : \text{vitesse de rotation de la masse non suspendue par rapport à } \mathcal{R}_a$$

$$— \quad (x_u y_u z_u) \dot{\vec{v}}_{a G_u}(t) = \left. \frac{d^{(x_u y_u z_u)} \vec{v}_{a G_u}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix} : \text{dérivée temporelle de } (x y z) \vec{v}_{a G_u}(t) \text{ dans } \mathcal{R}_u$$

$$\begin{aligned}
 - \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) &= \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{r} \end{bmatrix} : \text{dérivée temporelle de } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \text{ dans } \mathcal{R}_a \\
 - \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) &= \begin{bmatrix} p \\ q \\ 0 \end{bmatrix} : \text{vitesse de rotation de la masse suspendue par rapport à } \mathcal{R}_u \\
 - \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) &= \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ 0 \end{bmatrix} : \text{dérivée temporelle de } \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) \text{ dans } \mathcal{R}_a
 \end{aligned}$$

On considère d'abord la masse non suspendue. La cinématique et cinétique de la masse non suspendue sont les mêmes que celles des modèles sans suspensions des sections 1.1 et 1.2. L'accélération du centre d'inertie et les dérivées temporelles de la quantité de mouvement et du moment cinétique peuvent donc être calculées comme pour le modèle bicyclette sans suspensions, en (1.2), (1.3) et (1.7) vu en section 1.1.1. L'accélération du centre d'inertie de la masse non suspendue dans $O_u x_u y_u z_u$ est :

$${}^{(x_u y_u z_u)} \vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_u, t) = \begin{bmatrix} \dot{v} - r u \\ \dot{u} + r v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et la dérivée de la quantité de mouvement est :

$${}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_u, t) = \begin{bmatrix} m_u(\dot{v} - r u) \\ m_u(\dot{u} + r v) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

Pour le calcul du moment cinétique et de sa dérivée on considère la masse non suspendue symétrique par rapport aux plans $x_u y_u$ et $x_u z_u$. Le moment d'inertie de la masse non suspendue est :

$$I_{G_u} = \begin{bmatrix} I_{u_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{u_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{u_{zz}} \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

La dérivée du moment cinétique dans $O_u x_u y_u z_u$ est :

$$\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(G_u, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{u_{zz}} \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

On considère maintenant la masse suspendue. La vitesse absolue de rotation de la masse suspendue est :

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

et en conséquence l'accélération absolue de rotation est :

$$\dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) = \left. \frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

En utilisant la *formule de Bour*, l'accélération du centre d'inertie de la masse suspendue est exprimée par :

$$\begin{aligned} {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) &= {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(O_s, t) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \\ &+ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Le point O_s est solidaire à la masse non suspendue. Il est donc possible de calculer son accélération toujours en utilisant la *formule de Bour* :

$$\begin{aligned} {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(O_s, t) &= {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_u, t) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{G_u O_s}(t) \\ &+ \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{G_u O_s}(t) \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

En combinant (1.20) et (1.21) l'accélération du centre d'inertie de la masse suspendue est :

$$\begin{aligned} {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) &= {}^{(x_u y_u z_u)}\vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_u, t) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{G_u O_s}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{G_u O_s}(t) \right) \\ &+ \dot{\vec{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge \left(\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

On considère la géométrie du véhicule comme dans les Figures 1.10 et 1.11. On définit :

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{G_u O_s}(t) = \begin{bmatrix} l_{fu} - l_{fs} \\ 0 \\ -h_{us} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

avec $h_{us} = h_u - (h_s - h_r)$. La distance de G_s à O_s est h_r :

$${}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_r \end{bmatrix}.$$

On a besoin de la matrice de rotation entre \mathcal{R}_s et \mathcal{R}_u pour trouver les composantes de $\overrightarrow{O_s G_s}(t)$ dans le système de coordonnées $O_u x_u y_u z_u$. En effet, les équations du mouvement seront calculées dans le repère $O_u x_u y_u z_u$. La convention pour les angles d'Euler dans le domaine automobile, selon JAZAR 2017, considère dans un premier temps la rotation autour de l'axe x , le roulis, ensuite la rotation autour de l'axe y , le tangage, et enfin la rotation autour de l'axe z , le lacet. Pour calculer la matrice de rotation entre \mathcal{R}_s et \mathcal{R}_u on va utiliser cette convention, sauf qu'entre \mathcal{R}_s et \mathcal{R}_u il n'y a pas de rotation autour de l'axe z_s ; on considère donc qu'il y a d'abord une rotation ϕ autour de l'axe x_s et ensuite une rotation θ autour de

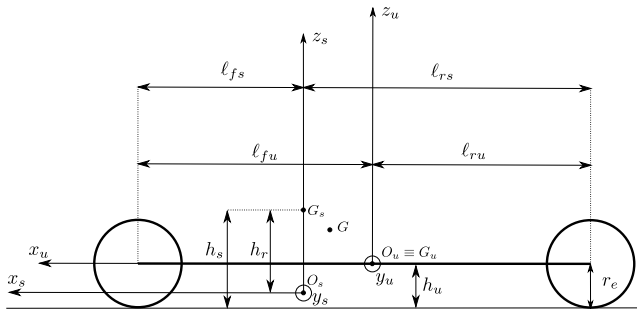


FIGURE 1.10 – Géométrie du modèle quatre roues avec suspensions vue à gauche.

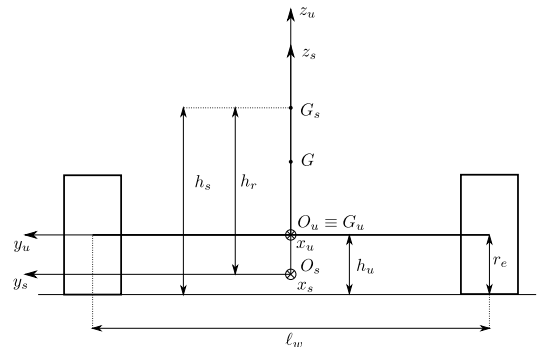


FIGURE 1.11 – Géométrie du modèle quatre roues avec suspensions vue de derrière.

l'axe y_s .

$$R_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u} = R_{y\theta} R_{x\phi} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\phi \sin\theta & -\cos\phi \sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\theta & -\sin\phi \cos\theta & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

En considérant $R_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_s} = R_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}^{-1} = R_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}^T$, cf. JAZAR 2017, on trouve :

$$R_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_s} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta & \cos\phi & -\sin\phi \cos\theta \\ -\cos\phi \sin\theta & \sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

et donc :

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) = R_{\mathcal{R}_u/\mathcal{R}_s} {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) = \begin{bmatrix} h_r \sin\theta \\ -h_r \sin\phi \cos\theta \\ h_r \cos\phi \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (1.26)$$

En utilisant (1.14), (1.23) et (1.26) dans (1.22) l'accélération du centre d'inertie de la masse suspendue dans $O_u x_u y_u z_u$ est :

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{a}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) = \begin{bmatrix} (l_{f_s} - l_{f_u}) r^2 - u r + \dot{v} + h_r (\dot{q} \cos\phi \cos\theta - q (q \sin\theta + p \cos\theta \sin\phi) - r (r \sin\theta - p \cos\phi \cos\theta) + \dot{r} \cos\theta \sin\phi) \\ \dot{u} + r v - \dot{r} (l_{f_s} - l_{f_u}) + h_r (r (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) + p (q \sin\theta + p \cos\theta \sin\phi) + \dot{r} \sin\theta - \dot{p} \cos\phi \cos\theta) \\ h_r (p (r \sin\theta - p \cos\phi \cos\theta) - q (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) - \dot{q} \sin\theta - \dot{p} \cos\theta \sin\phi) \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

La dérivée temporelle de la quantité de mouvement du centre d'inertie de la masse suspendue est donc :

$${}^{(x_u y_u z_u)}\dot{\overrightarrow{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) = \begin{bmatrix} m_s ((l_{f_s} - l_{f_u}) r^2 - u r + \dot{v} + h_r (\dot{q} \cos\phi \cos\theta - q (q \sin\theta + p \cos\theta \sin\phi) - r (r \sin\theta - p \cos\phi \cos\theta) + \dot{r} \cos\theta \sin\phi)) \\ m_s (\dot{u} + r v - \dot{r} (l_{f_s} - l_{f_u}) + h_r (r (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) + p (q \sin\theta + p \cos\theta \sin\phi) + \dot{r} \sin\theta - \dot{p} \cos\phi \cos\theta)) \\ m_s (h_r (p (r \sin\theta - p \cos\phi \cos\theta) - q (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) - \dot{q} \sin\theta - \dot{p} \cos\theta \sin\phi)) \end{bmatrix}. \quad (1.28)$$

On considère la masse suspendue symétrique par rapport au plan xz , donc les produits d'inertie $I_{s xy}$ et $I_{s yz}$ sont nuls. De plus, on approche $I_{s xz} \approx 0$. La matrice d'inertie de la masse suspendue est :

$$I_{G_s} = \begin{bmatrix} I_{s xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{s yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{s zz} \end{bmatrix}.$$

La dérivée temporelle du moment cinétique de la masse suspendue autour de 0_s est :

$$\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) &= {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\dot{\overrightarrow{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) + \left. \frac{d I_{G_s} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_a} = \\ &= {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\dot{\overrightarrow{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) + \left. \frac{d I_{G_s} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_s} + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge (I_{G_s} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t)) = \\ &= {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{O_s G_s}(t) \wedge {}^{(x_u y_u z_u)}\dot{\overrightarrow{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) + I_{G_s} \dot{\overrightarrow{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t) \wedge (I_{G_s} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_a}(t)) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Les composantes de $\dot{\overrightarrow{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t)$ dans $O_u x_u y_u z_u$ sont :

$$\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \overrightarrow{i}_u &= (m_s \cos\theta \sin\phi (q (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) - p (r \sin\theta - p \cos\phi \cos\theta) + \\ &\quad + \dot{q} \sin\theta + \dot{p} \cos\theta \sin\phi) - m_s \cos\phi \cos\theta (r (q \cos\phi \cos\theta + r \cos\theta \sin\phi) + p (q \sin\theta + \\ &\quad + p \cos\theta \sin\phi) + \dot{r} \sin\theta - \dot{p} \cos\phi \cos\theta)) h_r^2 + (-m_s \cos\phi \cos\theta (\dot{u} + r v - \dot{r} (l_{f_s} - l_{f_u}))) h_r + \\ &\quad + (I_{s xx} \dot{p} + q I_{s zz} r - I_{s yy} q r) \end{aligned} \quad (1.30a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{j}_u &= (m_s \sin \theta (q (q \cos \phi \cos \theta + r \cos \theta \sin \phi) - p (r \sin \theta - p \cos \phi \cos \theta) + \dot{q} \sin \theta + \\ &\quad + \dot{p} \cos \theta \sin \phi) - m_s \cos \phi \cos \theta (r (r \sin \theta - p \cos \phi \cos \theta) + q (q \sin \theta + p \cos \theta \sin \phi) + \\ &\quad - \dot{q} \cos \phi \cos \theta - \dot{r} \cos \theta \sin \phi)) h_r^2 + (m_s \cos \phi \cos \theta ((l_{fs} - l_{fu}) r^2 - ur + \dot{v})) h_r + \\ &\quad + (I_{syy} \dot{q} - p I_{szz} r + r I_{sxx} p) \end{aligned} \quad (1.30b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{k}_u &= (m_s \sin \theta (r (q \cos \phi \cos \theta + r \cos \theta \sin \phi) + p (q \sin \theta + p \cos \theta \sin \phi) + \dot{r} \sin \theta + \\ &\quad - \dot{p} \cos \phi \cos \theta) - m_s \cos \theta \sin \phi (r (r \sin \theta - p \cos \phi \cos \theta) + q (q \sin \theta + p \cos \theta \sin \phi) + \\ &\quad - \dot{q} \cos \phi \cos \theta - \dot{r} \cos \theta \sin \phi)) h_r^2 + (m_s \sin \theta (\dot{u} + rv - \dot{r} (l_{fs} - l_{fu})) + \\ &\quad + m_s \cos \theta \sin \phi ((l_{fs} - l_{fu}) r^2 - ur + \dot{v})) h_r + (I_{szz} \dot{r} - q I_{sxx} p + I_{syy} p q) \end{aligned} \quad (1.30c)$$

Il est possible de simplifier le modèle en considérant l'angle de roulis ϕ et l'angle de tangage θ suffisamment petits et donc les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos \phi &\approx 1 & \cos \theta &\approx 1 \\ \sin \phi &\approx \phi & \sin \theta &\approx \theta. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les composantes de ${}^{(x_u y_u z_u)} \vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t)$, ${}^{(x_u y_u z_u)} \vec{p}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t)$ et ${}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t)$ sont :

$${}^{(x_u y_u z_u)} \vec{a}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) = \begin{bmatrix} \dot{v} - ru + l_{fs} r^2 - l_{fu} r^2 + h_r (\dot{q} + \dot{r} \phi - q^2 \theta - r^2 \theta + pr - pq \phi) \\ \dot{u} - \dot{r} l_{fs} + \dot{r} l_{fu} + rv + h_r (\dot{r} \theta - \dot{p} + p^2 \phi + r^2 \phi + qr + pq \theta) \\ -h_r (q (q + r \phi) + p (p - r \theta) + \dot{p} \phi + \dot{q} \theta) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)} \vec{p}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) = \begin{bmatrix} m_s (\dot{v} - ru + l_{fs} r^2 - l_{fu} r^2 + h_r (\dot{q} + \dot{r} \phi - q^2 \theta - r^2 \theta + pr - pq \phi)) \\ m_s (\dot{u} - \dot{r} l_{fs} + \dot{r} l_{fu} + rv + h_r (\dot{r} \theta - \dot{p} + p^2 \phi + r^2 \phi + qr + pq \theta)) \\ -m_s h_r (q (q + r \phi) + p (p - r \theta) + \dot{p} \phi + \dot{q} \theta) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{i}_u &= (m_s \phi (q (q + r \phi) + p (p - r \theta) + \dot{p} \phi + \dot{q} \theta) - m_s (r (q + r \phi) - \dot{p} + \\ &\quad + p (p \phi + q \theta) + \dot{r} \theta)) h_r^2 - m_s (\dot{u} + rv - \dot{r} (l_{fs} - l_{fu})) h_r + \\ &\quad + I_{sxx} \dot{p} + q I_{szz} r - I_{syy} q r \end{aligned} \quad (1.33a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{j}_u &= (m_s (\dot{q} + r (p - r \theta) - q (p \phi + q \theta) + \dot{r} \phi) + m_s \theta (q (q + r \phi) + \\ &\quad + p (p - r \theta) + \dot{p} \phi + \dot{q} \theta)) h_r^2 + m_s ((l_{fs} - l_{fu}) r^2 - ur + \dot{v}) h_r + \\ &\quad + I_{syy} \dot{q} - p I_{szz} r + r I_{sxx} p \end{aligned} \quad (1.33b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{k}_u &= I_{szz} \dot{r} + h_r^2 (m_s \phi (\dot{q} + r (p - r \theta) - q (p \phi + q \theta) + \\ &\quad + \dot{r} \phi) + m_s \theta (r (q + r \phi) - \dot{p} + p (p \phi + q \theta) + \dot{r} \theta)) - q I_{sxx} p + \\ &\quad + h_r (m_s \theta (\dot{u} + rv - \dot{r} (l_{fs} - l_{fu})) + m_s \phi ((l_{fs} - l_{fu}) r^2 - ur + \dot{v})) + I_{syy} p q \end{aligned} \quad (1.33c)$$

1.3.2 Équations du mouvement

Les équations du mouvement suivantes sont considérées :

- l'équation de Newton pour l'axe longitudinal de la masse non suspendue, x_u
- l'équation de Newton pour l'axe latéral de la masse non suspendue, y_u
- l'équation d'Euler pour l'axe vertical de la totalité du corps du véhicule, z
- l'équation d'Euler pour l'axe longitudinal de la masse suspendue, x_s
- l'équation d'Euler pour l'axe latéral de la masse suspendue, y_s
- une équation d'Euler pour l'axe latéral de chaque roue, y_w

Les forces qui agissent sur la masse non suspendue sont :

- force de la pesanteur, une composante pour chaque axe du repère $O_u x_u y_u z_u$
 - P_{ux} composante longitudinale pour la masse non suspendue,
 - P_{uy} composante latérale pour la masse non suspendue,
 - P_{uz} composante verticale pour la masse non suspendue,
- forces normales,
 - N_{fi} et N_{fo} forces normales des roues avant gauche et droite,
 - N_{ri} et N_{ro} forces normales des roues arrière gauche et droite,
- forces longitudinales des pneus
 - F_{xfi} et F_{xfo} forces longitudinales des roues avant gauche et droite,
 - F_{xri} et F_{xro} forces longitudinales des roues arrière gauche et droite,
- forces latérales des pneus
 - F_{yfi} et F_{yfo} forces latérales des roues avant gauche et droite,
 - F_{yri} et F_{yro} forces latérales des roues arrière gauche et droite,
- forces de résistance au roulement
 - R_{xfi} et R_{xfo} forces de résistance au roulement des roues avant gauche et droite,
 - R_{xri} et R_{xro} forces de résistance au roulement des roues arrière gauche et droite,
- forces résultantes de la liaison mécanique entre masse non suspendue et suspendue, une composante pour chaque axe du repère $O_u x_u y_u z_u$
 - C_x composante sur x_u
 - C_y composante sur y_u
 - C_z composante sur z_u
- forces dues aux suspensions
 - S_{fi} et S_{fo} forces des suspensions des roues avant gauche et droite,
 - S_{ri} et S_{ro} forces des suspensions des roues arrière gauche et droite.

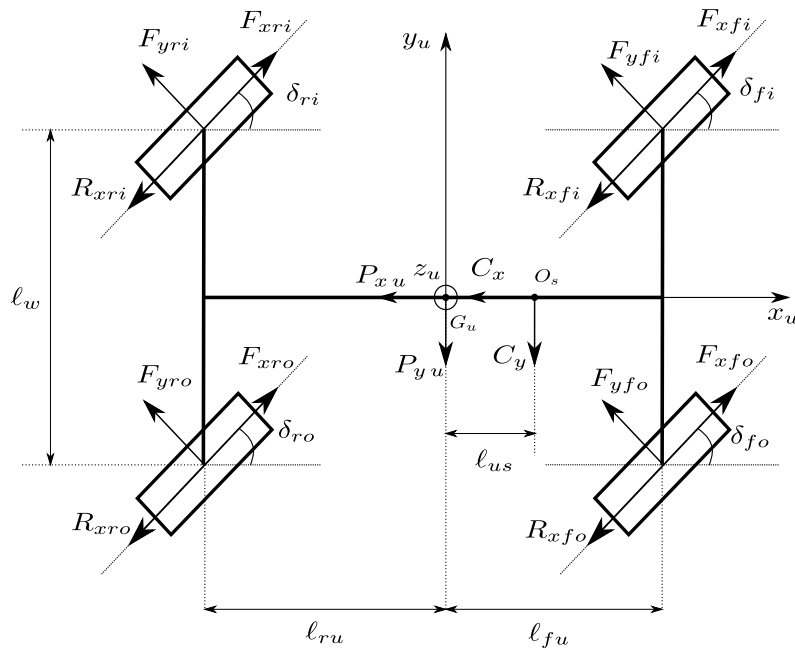


FIGURE 1.12 – Forces sur la masse non suspendue, plan $x_u y_u$.

Ces forces sont représentées sur le schéma de la Figure 1.12. Les forces liées aux roues ont chacune une composante dans $O_u x_u y_u z_u$, calculées comme dans (1.11). Il faut remarquer que pour décrire la dynamique de lacet du véhicule, afin de simplifier la définition du modèle, le véhicule est traité comme un seul solide

indéformable. Cette simplification est possible car la liaison mécanique entre masse suspendue et non suspendue ne permet pas la rotation entre les deux solides le long de l'axe verticale. En conséquence l'équation d'Euler autour de l'axe vertical du corps du véhicule, z , est égale à l'équation du mouvement (1.12c) du modèle quatre roues sans suspensions de la section 1.2. Pour les équations du mouvement de translation de la masse non suspendue on considère les composantes sur les axes x_u et y_u de la dérivée de la quantité de mouvement en (1.15) et les forces comme elles sont montrées dans la Figure 1.12. Les premières équations du mouvement sont donc :

$$m_u (\dot{v} - r u) = F_{xxfi} - F_{xyfi} + F_{xxfo} - F_{xyfo} + F_{xxri} - F_{xyri} + F_{xxro} - F_{xyro} + \\ - R_{xxfi} - R_{xxfo} - R_{xxri} - R_{xxro} - C_x - P_{u_x} \quad (1.34a)$$

$$m_u (\dot{u} + r v) = F_{yxfi} + F_{yyfi} + F_{yxf0} + F_{yyf0} + F_{yxri} + F_{yyri} + F_{yxro} + F_{yyro} + \\ - R_{yxfi} - R_{yxf0} - R_{yxri} - R_{yxro} - C_y - P_{u_y} \quad (1.34b)$$

$$I_{zz} \dot{r} = \ell_f (F_{yxfi} + F_{yxf0}) + \ell_f (F_{yyfi} + F_{yyf0}) - \ell_r (F_{yxri} + F_{yxro}) - \ell_r (F_{yyri} + F_{yyro}) + \\ - \frac{\ell_w}{2} (F_{xxfi} + F_{xxri}) + \frac{\ell_w}{2} (F_{xyfi} + F_{xyri}) + \frac{\ell_w}{2} (F_{xxfo} + F_{xxro}) - \frac{\ell_w}{2} (F_{xyfo} + F_{xyro}) + \\ - \ell_f (R_{yxfi} + R_{yxf0}) + \ell_r (R_{yxri} + R_{yxro}) + \frac{\ell_w}{2} (R_{xxfi} + R_{xxri}) - \frac{\ell_w}{2} (R_{xxfo} + R_{xxro}) \quad (1.34c)$$

Les forces qui agissent sur la masse suspendue sont :

- force de la pesanteur, une composante pour chaque axe du repère $O_u x_u y_u z_u$
 - P_{s_x} composante longitudinale pour la masse suspendue,
 - P_{s_y} composante latérale pour la masse suspendue,
 - P_{s_z} composante verticale pour la masse suspendue,
- forces résultantes de la liaison mécanique entre les masses suspendue et non suspendue C_x , C_y et C_z ,
- forces des suspensions S_{fi} , S_{fo} , S_{ri} et S_{ro} ,
- force de traînée aérodynamique, F_{aero} , pour simplifier considérée uniquement sur l'axe longitudinal x_u .

Ces forces sont représentées sur les schémas des Figures 1.13 et 1.14.

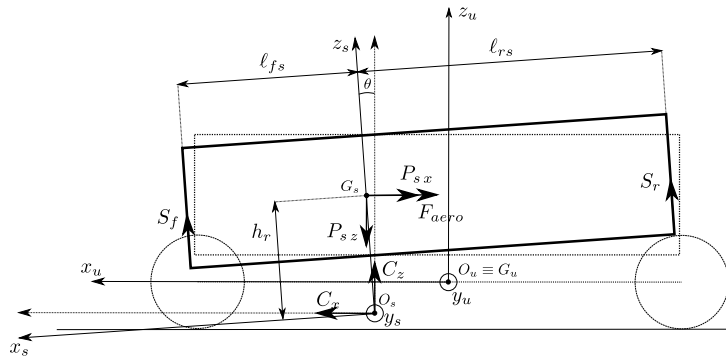


FIGURE 1.13 – Forces sur la masse suspendue, plan $x_u z_u$.

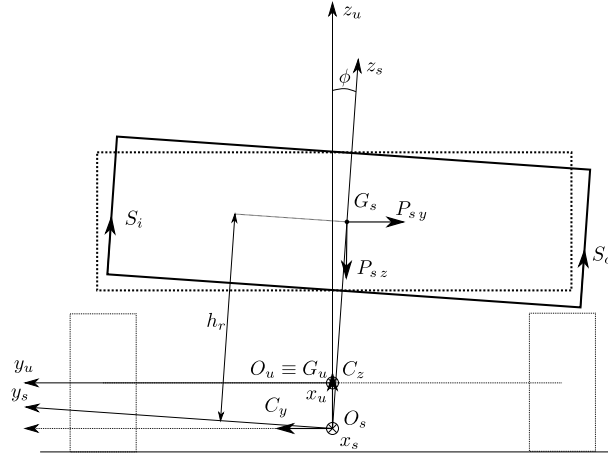
Les équations du mouvement pour la masse suspendue sont obtenues en considérant (1.30a) et (1.30b) :

$$\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{i}_u = \frac{\ell_w}{2} (S_{fi} + S_{ri}) - \frac{\ell_w}{2} (S_{fo} + S_{ro}) + P_{s_y} h_r \cos \theta \cos \phi + P_{s_z} h_r \cos \theta \sin \phi \quad (1.35a)$$

$$\dot{\vec{\sigma}}_{\mathcal{R}_a}(0_s, t) \vec{j}_u = \ell_{rs} (S_{ri} + S_{ro}) - \ell_{fs} (S_{fi} + S_{fo}) + P_{s_z} h_r \sin \theta - F_{aero} h_r \cos \theta \cos \phi - P_{s_x} h_r \cos \theta \cos \phi \quad (1.35b)$$

Enfin les équations d'Euler décrivant la rotation des roues sont les mêmes que celles de (1.13) :

$$I_{w_y} \dot{\omega}_{w_{fi}} = \tau_{w_{fi}} - F_{x_{fi}} r_e \quad (1.36a)$$


 FIGURE 1.14 – Forces sur la masse suspendue, plan $y_u z_u$.

$$I_{w y} \dot{\omega}_{wfo} = \tau_{wfo} - F_{xfo} r_e \quad (1.36b)$$

$$I_{w y} \dot{\omega}_{wri} = \tau_{wri} - F_{xri} r_e \quad (1.36c)$$

$$I_{w y} \dot{\omega}_{wro} = \tau_{wro} - F_{xro} r_e \quad (1.36d)$$

1.4 Position absolue du véhicule

Pour la synthèse du correcteur, il est nécessaire de savoir calculer la position absolue du véhicule dans le repère absolu $O_a x_a y_a z_a$. Cela est possible en intégrant sa vitesse dans le repère absolu. En revanche, comme on a vu dans les sections 1.1.1, 1.2.1 et 1.3.1, le vecteur vitesse absolue du véhicule, ${}^{(xyz)}\vec{v}_{aG_u}(t) = [v \ u \ 0]^T$ pour les modèles sans suspensions et ${}^{(x_u y_u z_u)}\vec{v}_{aG_u}(t) = [v \ u \ 0]^T$ pour le modèle avec suspensions, est calculé dans un repère véhicule, $Oxyz$ et $O_u x_u y_u z_u$ respectivement. Un changement de repère est donc nécessaire pour calculer la position du véhicule dans $O_a x_a y_a z_a$ à partir des variables d'état du véhicule. Pour les trois modèles véhicule développés, une seule rotation est appliquée entre $Oxyz$ (ou $O_u x_u y_u z_u$) et $O_a x_a y_a z_a$: la rotation de lacet, avec angle ψ . La matrice de rotation associée à cette transformation est :

$$R_{z\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Le changement de base pour calculer la vitesse absolue du véhicule dans le repère $O_a x_a y_a z_a$ est donc :

$${}^{(x_a y_a z_a)}\vec{v}_{aG} = R_{z\psi}^T {}^{(xyz)}\vec{v}_{aG} = \begin{bmatrix} v \cos \psi - u \sin \psi \\ u \cos \psi + v \sin \psi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Finalement avec l'intégration de l'équation (1.38) on obtient la position du véhicule dans $O_a x_a y_a z_a$, c'est à dire la position absolue du véhicule.

Ce chapitre a présenté la cinématique, cinétique et les équations du mouvement des modèles véhicule développés, sans spécifier les forces qui agissent sur le système. Dans le chapitre 2 les expressions de ces forces seront décrites.

MODÉLISATION DES FORCES EXTÉRIEURES

Sommaire

2.1	Force de la pesanteur avec route inclinée	29
2.2	Forces des pneus	30
2.2.1	Cinématique de la roue	31
2.2.2	Coefficients non-linéaires de raideur des pneus	35
2.2.3	Saturation des forces des pneus	36
2.3	Force de traînée aérodynamique	37
2.4	Force de résistance au roulement	38
2.5	Forces normales aux roues	38
2.5.1	Distribution de charge variable - modèle bicyclette sans suspensions	38
2.5.2	Distribution de charge variable - modèle quatre roues sans suspensions	40
2.5.3	Distribution de charge variable - modèle quatre roues avec suspensions	41
2.6	Résultantes des actions de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue	45
2.7	Forces des suspensions	45
2.7.1	Cinématique des suspensions	46

Ce chapitre présente en détail l'ensemble de forces qui agissent sur le véhicule. Ces forces sont nécessaires pour la définition des modèles de dynamique véhicule et leur action sur les équations du mouvement du véhicule a été présenté dans le chapitre 1. Une attention particulière est réservée aux forces des pneus, qui jouent un rôle très important pour la caractérisation de la dynamique du véhicule. Comme évoqué dans le chapitre 1, les forces des pneus ont un comportement non-linéaire dans des conditions de haute dynamique, car soumises à saturation et au phénomène de glissement combiné. Les seuils de saturation des pneus varient avec les forces normales aux roues. Dans ces conditions de haute dynamique, le transfert de charge entre les roues du véhicule est important. Pour déterminer de manière plus précise les forces des pneus, un modèle variable des forces normales aux roues a donc été développé pour les trois modèles présentés dans le chapitre 1. Les expressions des forces normales aux roues varient avec l'accélération du véhicule.

La section 2.1 présente les expressions des composantes de la force de pesanteur, qui varient selon la pente et le dévers de la route. Un modèle non-linéaire des forces des pneus est présenté dans la section 2.2. De plus, la cinématique des roues est traitée pour le modèle bicyclette sans suspensions et les modèles quatre roues et les taux de glissement des roues, nécessaires pour déterminer les forces des pneus, sont définis. Les section 2.3 et 2.4 présentent respectivement la force de traînée aérodynamique et les forces de résistance au roulement. Les modèles variables des forces normales aux roues sont présentés dans la section 2.5. Enfin, le chapitre termine avec les sections 2.6 et 2.7, qui présentent respectivement les résultantes des actions de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue et les forces de suspensions, nécessaires pour la définition du modèle quatre roues avec suspensions. Les variables d'état du véhicule, utilisées pour définir les forces extérieures, sont rappelées dans Table 2.1.

Variable	Description	Variable	Description
v	vitesse longitudinale	u	vitesse latérale
r	vitesse de lacet	ψ	angle de lacet
p	vitesse de roulis	ϕ	angle de roulis
q	vitesse de tangage	θ	angle de tangage
ω_{wf}	vitesse de la roue avant d'un modèle avec deux roues	ω_{wr}	vitesse de la roue arrière d'un modèle avec deux roues
ω_{wfi} et ω_{wfo}	vitesse des roues avant d'un modèle avec quatre roues ¹	ω_{wri} et ω_{wro}	vitesse des roues arrière d'un modèle avec quatre roues

TABLE 2.1 – Variables d'état du véhicule.

2.1 Force de la pesanteur avec route inclinée

Les angles θ_x et θ_y sont respectivement les angles de dévers et de pente de la route, comme montré dans les Figures 2.1 et 2.2. Les composantes de la force de la pesanteur dans le repère $Oxyz$ pour la totalité de la masse du véhicule sont :

$$P_x = m g \cos \theta_x \sin \theta_y \quad (2.1a)$$

$$P_y = m g \cos \theta_y \sin \theta_x \quad (2.1b)$$

$$P_z = m g \cos \theta_x \cos \theta_y. \quad (2.1c)$$

Pour le modèle quatre roues avec suspensions, les composantes de la force de la pesanteur dans $O_u x_u y_u z_u$ pour la masse suspendue et la masse non suspendue sont :

$$P_{u_x} = m_u g \cos \theta_x \sin \theta_y \quad (2.2a)$$

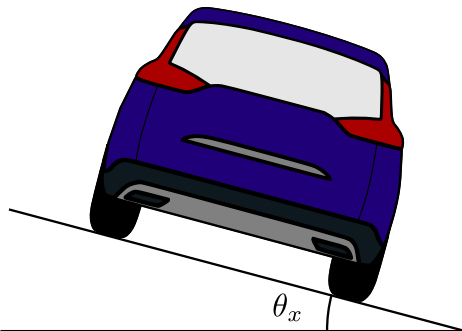
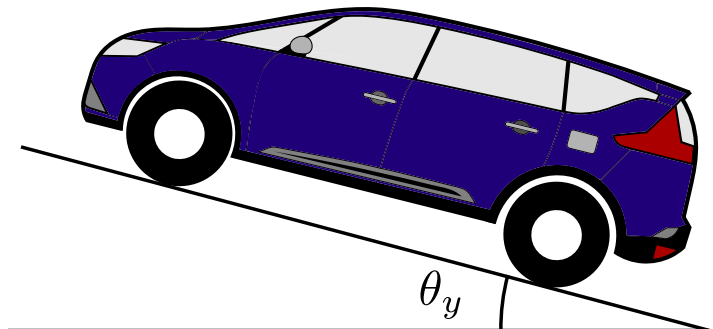
$$P_{u_y} = m_u g \cos \theta_y \sin \theta_x \quad (2.2b)$$

$$P_{u_z} = m_u g \cos \theta_x \cos \theta_y \quad (2.2c)$$

$$P_{s_x} = m_s g \cos \theta_x \sin \theta_y \quad (2.2d)$$

$$P_{s_y} = m_s g \cos \theta_y \sin \theta_x \quad (2.2e)$$

$$P_{s_z} = m_s g \cos \theta_x \cos \theta_y. \quad (2.2f)$$

FIGURE 2.1 – Angle de dévers de la route θ_x .FIGURE 2.2 – Angle de pente de la route θ_y .

2.2 Forces des pneus

Les forces des pneus sont centrales dans la définition d'un modèle de dynamique véhicule. En particulier dans des conditions à haute dynamique, les pneus peuvent atteindre leur niveau de saturation. Dans ce cas, les forces produites n'augmentent plus avec les variables de glissement des pneus (définies en détail dans la suite de cette section), ce qui conduit à une perte d'adhérence entre pneus et sol. Un modèle linéaire des forces des pneus, utilisé dans le *modèle bicyclette linéaire*, cf. [RAJAMANI 2012](#), n'est donc pas représentatif du comportement non-linéaire du véhicule. C'est pour cette raison que dans les modèles développés, un modèle non-linéaire des forces des pneus a été choisi. Le modèle utilisé est une variation du modèle de Dugoff, cf. [DUGOFF 1969](#), décrit dans [KISSAI et al. 2017](#). Ce modèle, développé pour des problèmes de contrôle, est plus simple et nécessite moins de paramètres que d'autres modèles plus complexes existants dans la littérature, comme par exemple *Formule magique de Pacejka*, présenté dans [BAKKER, NYBORG et PACEJKA 1987](#), ou les *modèles à brosses*, cf. [PACEJKA 2012](#), [SVENDENIUS et WITTENMARK 2003](#) et [VILLELA 2004](#). Néanmoins le modèle dans [KISSAI et al. 2017](#) est suffisamment représentatif des phénomènes de saturation et glissement combiné des pneus. Nous décrivons le modèle proposé par [KISSAI et al. 2017](#) pour les forces des pneus par la suite. Les forces longitudinales et latérales produites par un pneu sont proportionnelles respectivement au taux de *glissement longitudinal*, κ , et à l'*angle de glissement latéral*, α , du pneu.

$$\hat{F}_x = c_\kappa^* (\mu, N, \alpha) \kappa \quad (2.3a)$$

$$\hat{F}_y = c_\alpha^* (\mu, N, \kappa) \alpha. \quad (2.3b)$$

Les taux de glissement longitudinal et de l'angle de glissement latéral, κ et α , ainsi que les expressions pour les coefficients c_κ^* et c_α^* , dénommés coefficients non-linéaires de raideur des pneus, seront définies ci-dessous.

2.2.1 Cinématique de la roue

Comme déjà vu dans la section 1.1, à chaque roue on associe un repère $O_w x_w y_w z_w$, montré dans la Figure 2.3. Pour calculer les forces produites par un pneu, il est nécessaire de définir le coefficient de

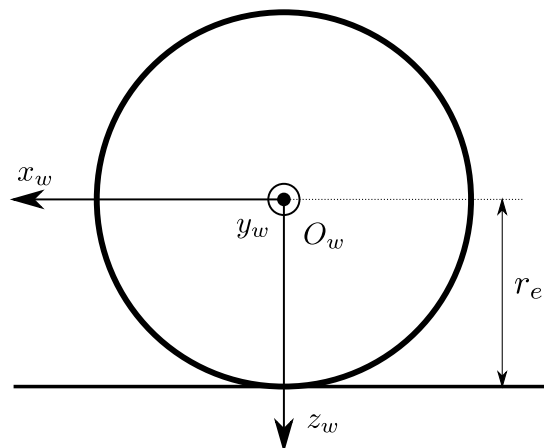


FIGURE 2.3 – Plan $x_w z_w$ d'une roue.

glissement longitudinal κ et l'angle de glissement latéral α . Dans la suite on rappelle la définition de plusieurs variables qui concernent la roue (se référer à [PACEJKA 2012](#)). La première variable d'intérêt est le *rayon effectif* de la roue r_e . Cela n'est pas le rayon de la roue au repos, mais le rayon qui rend la vitesse tangentielle du bord de la roue égale à la vitesse de translation du centre de la roue, v_w , quand la roue roule librement (sans aucun couple appliqué). Selon cette définition le rayon effectif est :

$$r_e = \frac{v_w}{\omega}. \quad (2.4)$$

On introduit le *point de glissement* S , qui nous servira à définir le glissement de la roue. Ce point est défini comme étant le point au bord de la roue directement en dessous du centre de roulement de la roue.

La vitesse longitudinale du point de glissement S est :

$$v_{Sx} = v_w - \omega r_e. \quad (2.5)$$

Il est donc possible de distinguer trois cas :

- roue qui roule librement : $v_w = \omega r_e \implies v_{Sx} = 0$,
- un couple de freinage est présent sur la roue : $v_w > \omega r_e \implies v_{Sx} > 0$,
- un couple moteur est présent sur la roue : $v_w < \omega r_e \implies v_{Sx} < 0$.

Le taux de glissement longitudinal est le ratio entre la vitesse du point de glissement S et la vitesse de translation du centre de la roue :

$$\kappa = -\frac{v_{Sx}}{v_w} = -\frac{v_w - \omega r_e}{v_w}. \quad (2.6)$$

Le glissement latéral est le rapport entre la composante latérale u_w et la composante longitudinale v_w du vecteur vitesse de la roue :

$$\tan \alpha = -\frac{u_w}{v_w}.$$

L'angle de glissement latéral α , montré en Figure 2.4, est :

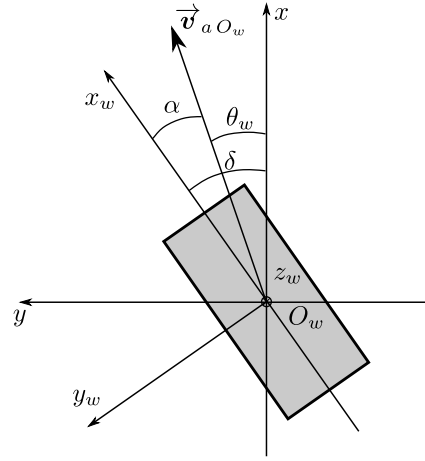
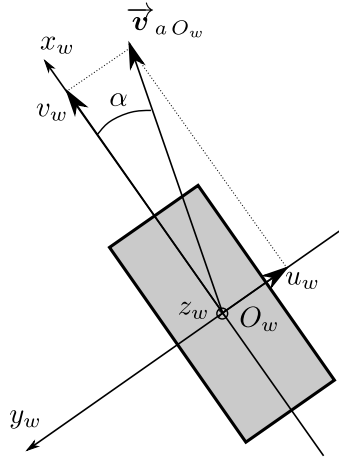


FIGURE 2.4 – Angle de glissement de la roue α . FIGURE 2.5 – Calcul de α dans le repère véhicule.

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{u_w}{v_w}\right). \quad (2.7)$$

On souhaite calculer κ et α en fonction des variables d'état du véhicule. Il est donc nécessaire de calculer v_w et u_w pour chaque roue en fonction de ces variables d'état. On définit ${}^{(xyz)}\overrightarrow{OO_w}$ le vecteur position de la roue, qui est constant. Dans le repère véhicule $Oxyz$ ($O_u x_u y_u z_u$ pour le modèle quatre roues avec suspensions), la vitesse absolue de O_w est :

$${}^{(xyz)}\overrightarrow{v}_{aO_w}(t) = {}^{(xyz)}\overrightarrow{v}_{aG}(t) + \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t) \wedge {}^{(xyz)}\overrightarrow{OO_w}. \quad (2.8)$$

A partir de l'expression de la vitesse du centre de la roue obtenue avec (2.8), un changement de base est maintenant nécessaire pour trouver les expressions de v_w et u_w , qui sont dans le repère roue $O_w x_w y_w z_w$. Pour le calcul de α , cela n'est pas nécessaire. En effet, il est possible de calculer α autrement, comme montré en Figure 2.5. On appelle ${}^{(xyz)}v_{O_w}$ et ${}^{(xyz)}u_{O_w}$ les composantes x et y du vecteur $\overrightarrow{v}_{aO_w}$ dans le repère véhicule. L'angle de dérive de la roue θ_w dans le repère véhicule est :

$$\theta_w = \arctan\left(\frac{{}^{(xyz)}u_{O_w}}{{}^{(xyz)}v_{O_w}}\right). \quad (2.9)$$

Finalement on obtient l'expression de α :

$$\alpha = \delta - \theta_w = \delta - \arctan\left(\frac{{}^{(xyz)}u_{O_w}}{{}^{(xyz)}v_{O_w}}\right). \quad (2.10)$$

Pour le calcul de κ il est nécessaire de calculer v_w , soit la composante du vecteur \vec{v}_{aO_w} sur l'axe longitudinal x_w du repère de la roue. La matrice de rotation de $Oxyz$ vers $O_w x_w y_w z_w$ est :

$$R_{O_w/O} = R_{z_w -\delta} R_{x_w \pi} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ \sin \delta & -\cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

En multipliant la matrice de rotation en (2.11) par ${}^{(xyz)}\vec{v}_{aO_w}$ on trouve l'expression de la vitesse de la roue dans le repère roue :

$${}^{(x_w y_w z_w)}\vec{v}_{aO_w} = R_{O_w/O} {}^{(xyz)}\vec{v}_{aO_w}. \quad (2.12)$$

Finalement l'expression de v_w est :

$$v_w = {}^{(xyz)}v_{O_w} \cos \delta + {}^{(xyz)}u_{O_w} \sin \delta. \quad (2.13)$$

Le taux de glissement longitudinal est :

$$\kappa = -\frac{{}^{(xyz)}v_{O_w} \cos \delta + {}^{(xyz)}u_{O_w} \sin \delta - \omega r_e}{{}^{(xyz)}v_{O_w} \cos \delta + {}^{(xyz)}u_{O_w} \sin \delta}. \quad (2.14)$$

Il est possible de simplifier les expressions de κ et α avec les approximations suivantes :

- δ petit : $\sin \delta \approx \delta$ et $\cos \delta \approx 1$,
- ${}^{(xyz)}v_{aO_w} \gg {}^{(xyz)}u_{O_w}$: $\arctan\left(\frac{{}^{(xyz)}u_{O_w}}{{}^{(xyz)}v_{O_w}}\right) \approx \frac{{}^{(xyz)}u_{O_w}}{{}^{(xyz)}v_{O_w}}$ et ${}^{(xyz)}v_{O_w} + {}^{(xyz)}u_{O_w} \delta \approx {}^{(xyz)}v_{O_w}$.

Dans ce cas, les expressions de κ et α sont :

$$\kappa = -\frac{{}^{(xyz)}v_{O_w} - \omega r_e}{{}^{(xyz)}v_{O_w}} \quad (2.15) \quad \alpha = \delta - \frac{{}^{(xyz)}u_{O_w}}{{}^{(xyz)}v_{O_w}}. \quad (2.16)$$

Pour trouver finalement les expressions de κ et de α pour chaque roue, il est nécessaire de considérer la géométrie du véhicule. Elle varie selon si on considère un modèle bicyclette ou un modèle quatre roues.

Glissement des roues - modèle bicyclette

Les paramètres qui caractérisent la géométrie du modèle bicyclette sont montrés dans les Figures 2.6 et 2.7. Les vecteurs de position de la roue avant et arrière, appelés \vec{r}_f et \vec{r}_r , sont :

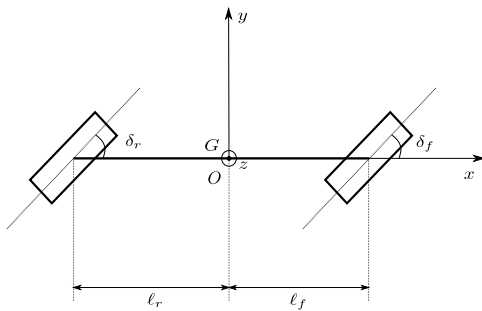


FIGURE 2.6 – Plan xy du modèle bicyclette.

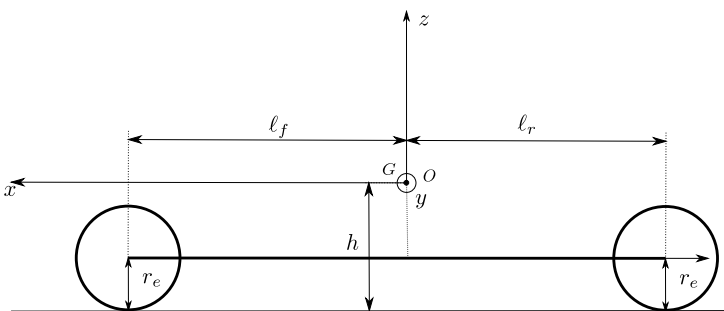
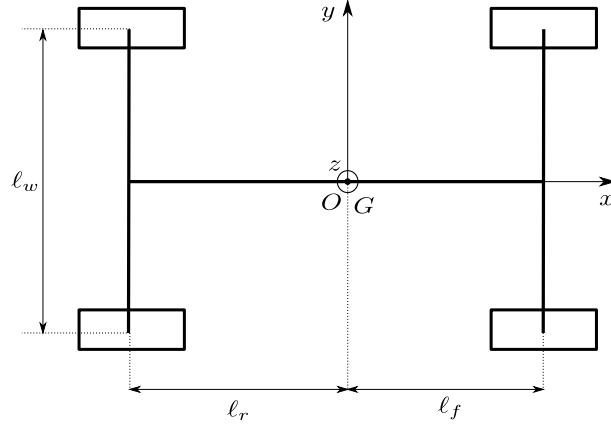


FIGURE 2.7 – Plan xz du modèle bicyclette.

$$\vec{r}_f = \begin{bmatrix} l_f \\ 0 \\ -(h - r_e) \end{bmatrix} \quad \vec{r}_r = \begin{bmatrix} -l_r \\ 0 \\ -(h - r_e) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$


 FIGURE 2.8 – Plan xy d'un modèle quatre roues.

En utilisant (2.8) avec (2.17) et les définitions de ${}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t)$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)$ de la section 1.1.1, les vitesses absolues du centre des roues, appelées \vec{v}_{wf} et \vec{v}_{wr} , sont :

$$\vec{v}_{wf} = \begin{bmatrix} v \\ u + \ell_f r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{wr} = \begin{bmatrix} v \\ u - \ell_r r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

On utilise l'expression (2.18) dans (2.14) et (2.10) pour trouver κ et α pour les deux roues :

$$\kappa_f = -\frac{v \cos \delta_f + (u + \ell_f r) \sin \delta_f - \omega_f r_e}{v \cos \delta_f + (u + \ell_f r) \sin \delta_f} \quad \kappa_r = -\frac{v \cos \delta_r + (u - \ell_r r) \sin \delta_r - \omega_r r_e}{v \cos \delta_r + (u - \ell_r r) \sin \delta_r} \quad (2.19)$$

$$\alpha_f = \delta_f - \arctan\left(\frac{u + \ell_f r}{v}\right) \quad \alpha_r = \delta_r - \arctan\left(\frac{u - \ell_r r}{v}\right). \quad (2.20)$$

Enfin si on utilise les expressions simplifiées (2.15) et (2.16) on trouve :

$$\kappa_f = -\frac{v - \omega_f r_e}{v} \quad \kappa_r = -\frac{v - \omega_r r_e}{v} \quad (2.21)$$

$$\alpha_f = \delta_f - \frac{u + \ell_f r}{v} \quad \alpha_r = \delta_r - \frac{u - \ell_r r}{v}. \quad (2.22)$$

Glissement des roues - modèle quatre roues

Les paramètres qui caractérisent la géométrie d'un modèle quatre roues sont montrés dans la Figure 2.8. Les vecteurs de position des quatre roues sont :

$$\vec{r}_{fi} = \begin{bmatrix} \ell_f \\ \frac{\ell_w}{2} \\ -(h - r_e) \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{ri} = \begin{bmatrix} -\ell_r \\ \frac{\ell_w}{2} \\ -(h - r_e) \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{fo} = \begin{bmatrix} \ell_f \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ -(h - r_e) \end{bmatrix} \quad \vec{r}_{ro} = \begin{bmatrix} -\ell_r \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ -(h - r_e) \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

En utilisant (2.8) avec (2.23) et les définitions de ${}^{(xyz)}\vec{v}_{aG}(t)$ et $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_a}(t)$ de la section 1.1.1, les vitesses absolues du centre des roues, sont :

$$\vec{v}_{wfi} = \begin{bmatrix} v - \frac{\ell_w}{2} r \\ u + \ell_f r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{wri} = \begin{bmatrix} v - \frac{\ell_w}{2} r \\ u - \ell_r r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{wfo} = \begin{bmatrix} v + \frac{\ell_w}{2} r \\ u + \ell_f r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{wro} = \begin{bmatrix} v + \frac{\ell_w}{2} r \\ u - \ell_r r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

On utilise l'expression (2.24) dans (2.14) et (2.10) pour trouver κ et α pour les quatre roues :

$$\begin{aligned}\kappa_{fi} &= -\frac{(v - \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{fi} + (u + \ell_f r) \sin \delta_{fi} - \omega_{fi} r_e}{(v - \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{fi} + (u + \ell_f r) \sin \delta_{fi}} & \kappa_{ri} &= -\frac{(v - \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{ri} + (u - \ell_r r) \sin \delta_{ri} - \omega_{ri} r_e}{(v - \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{ri} + (u - \ell_r r) \sin \delta_{ri}} \\ \kappa_{fo} &= -\frac{(v + \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{fo} + (u + \ell_f r) \sin \delta_{fo} - \omega_{fo} r_e}{(v + \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{fo} + (u + \ell_f r) \sin \delta_{fo}} & \kappa_{ro} &= -\frac{(v + \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{ro} + (u - \ell_r r) \sin \delta_{ro} - \omega_{ro} r_e}{(v + \frac{\ell_w}{2}r) \cos \delta_{ro} + (u - \ell_r r) \sin \delta_{ro}}\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{fi} &= \delta_{fi} - \arctan\left(\frac{u + \ell_f r}{v - \frac{\ell_w}{2}r}\right) & \alpha_{ri} &= \delta_{ri} - \arctan\left(\frac{u - \ell_r r}{v - \frac{\ell_w}{2}r}\right) \\ \alpha_{fo} &= \delta_{fo} - \arctan\left(\frac{u + \ell_f r}{v + \frac{\ell_w}{2}r}\right) & \alpha_{ro} &= \delta_{ro} - \arctan\left(\frac{u - \ell_r r}{v + \frac{\ell_w}{2}r}\right).\end{aligned}\quad (2.26)$$

Si on utilise les expressions simplifiées (2.15) et (2.16) :

$$\begin{aligned}\kappa_{fi} &= -\frac{v - \frac{\ell_w}{2}r - \omega_{fi} r_e}{v - \frac{\ell_w}{2}r} & \kappa_{ri} &= -\frac{v - \frac{\ell_w}{2}r - \omega_{ri} r_e}{v - \frac{\ell_w}{2}r} \\ \kappa_{fo} &= -\frac{v + \frac{\ell_w}{2}r - \omega_{fo} r_e}{v + \frac{\ell_w}{2}r} & \kappa_{ro} &= -\frac{v + \frac{\ell_w}{2}r - \omega_{ro} r_e}{v + \frac{\ell_w}{2}r}\end{aligned}\quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{fi} &= \delta_{fi} - \frac{u + \ell_f r}{v - \frac{\ell_w}{2}r} & \alpha_{ri} &= \delta_{ri} - \frac{u - \ell_r r}{v - \frac{\ell_w}{2}r} \\ \alpha_{fo} &= \delta_{fo} - \frac{u + \ell_f r}{v + \frac{\ell_w}{2}r} & \alpha_{ro} &= \delta_{ro} - \frac{u - \ell_r r}{v + \frac{\ell_w}{2}r}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

2.2.2 Coefficients non-linéaires de raideur des pneus

Les coefficients c_κ^* et c_α^* varient non-linéairement selon la dynamique du véhicule, en particulier selon les glissements longitudinal et latéral, la force normale N sur le pneu et le coefficient de frottement μ entre pneu et sol :

$$c_\kappa^*(\mu, N, \alpha) = \frac{\mu N c_\kappa \left(4 \sqrt{c_\alpha^2 \tan(\alpha)^2 + c_\kappa^2 \kappa^{*2}} + \mu N (\kappa^* - 1)\right)}{4 c_\alpha^2 \tan(\alpha)^2 + 4 c_\kappa^2 \kappa^{*2}} \quad (2.29a)$$

$$c_\alpha^*(\mu, N, \kappa) = \frac{\mu N c_\alpha \left(4 \sqrt{\alpha^{*2} c_\alpha^2 + c_\kappa^2 \kappa^2} + \mu N (\kappa - 1)\right)}{4 \alpha^{*2} c_\alpha^2 + 4 c_\kappa^2 \kappa^2}. \quad (2.29b)$$

Les coefficients κ^* et α^* sont calculés de la façon suivante :

$$\kappa^* = \frac{\mu N \left(4 c_\kappa + \sqrt{(\mu N)^2 + 8 c_\kappa \mu N + \mu N}\right)}{8 c_\kappa^2} \quad (2.30a)$$

$$\alpha^* = \frac{\mu N}{2 c_\alpha}. \quad (2.30b)$$

Les paramètres c_κ et c_α sont respectivement la raideur longitudinale et latérale du pneu ; ce sont des valeurs constantes. Les coefficients non-linéaires des forces définies dans (2.3) varient en fonction de la force normale sur le pneu : les forces longitudinale et latérale produites par un pneu augmentent avec la force normale au pneu. De plus, le coefficient c_κ^* dépend de α et, vice versa, c_α^* dépend de κ : le modèle dans

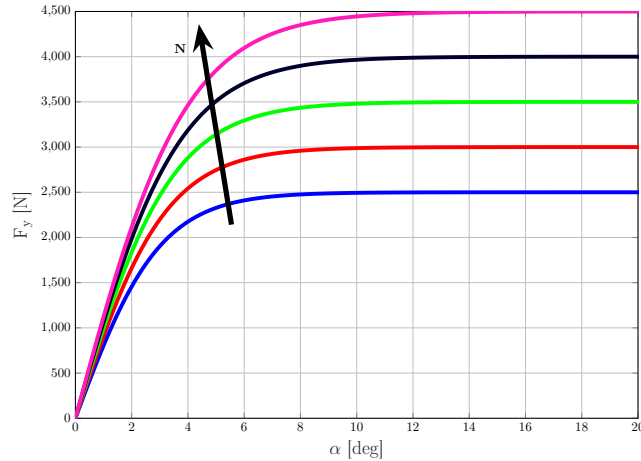


FIGURE 2.9 – Force latérale du pneu en fonction de la force normale au pneu.

KISSAI et al. 2017 considère le *glissement combiné*. C'est un comportement important pour la définition d'un modèle non-linéaire des forces des pneus, comme on le voit dans PACEJKA 2012, SCHURING, PELZ et POTTINGER 1996, SVENDENIUS 2003 et WONG 2001. Cela implique que la force longitudinale produite par le pneu réduit lorsque la force latérale augmente, et vice versa. Ce comportement reflète le concept du potentiel unique du pneu, que les dynamiques longitudinale et latérale doivent partager, comme expliqué dans MICHELIN 2001.

2.2.3 Saturation des forces des pneus

Les forces définies dans (2.3) ne correspondent pas aux forces effectivement appliquées, car elles sont soumises à une saturation. Les saturations des forces des pneus sont souvent approchées par une ellipse, cf. PACEJKA 2012, SVENDENIUS 2003 et WONG 2001. L'ellipse de saturation est représentée dans la Figure 2.10. La force maximale totale que le pneu peut produire est indiquée par le périmètre de l'ellipse. Le vecteur de force du pneu, dont les composantes sur les axes x et y de l'ellipse sont respectivement les forces longitudinale et latérale du pneu, reste toujours à l'intérieur de l'ellipse. Dans le modèle de KISSAI et al.

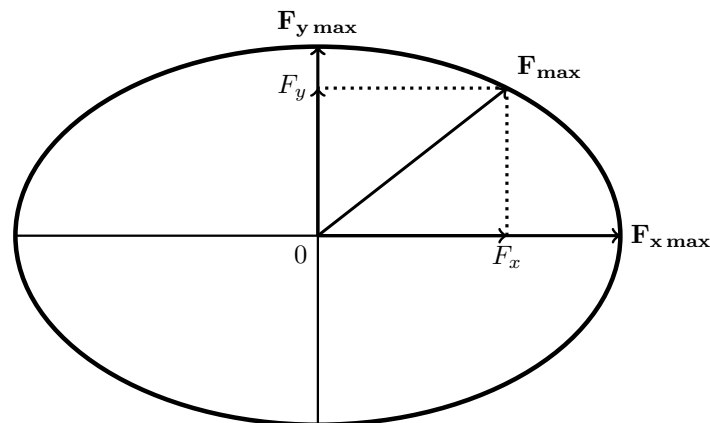


FIGURE 2.10 – Ellipse de saturation des forces des pneus.

2017, pour simplifier le problème, l'ellipse a été ramenée à un cercle. Cette approximation est raisonnable et commune, voir par exemple dans KRITAYAKIRANA 2012 et SCHURING, PELZ et POTTINGER 1996. Le rayon du cercle de saturation est donné par la force normale au pneu : la force maximale produite au total par le pneu est $F_{max} = \mu N$. Ainsi, les saturations des forces longitudinale et latérale du pneu sont

$\sigma(\mathbf{x})$	x	ℓ_s	u_s
F_x	\hat{F}_x	$-\sqrt{(\mu \frac{N}{2})^2 - F_y^2}$	$\sqrt{(\mu N)^2 - F_y^2}$
F_y	\hat{F}_y	$-\sqrt{(\mu \frac{N}{2})^2 - F_x^2}$	$\sqrt{(\mu N)^2 - F_x^2}$

TABLE 2.2 – Limites de saturation des forces d'un pneu.

telles que :

$$F_x \leq \sqrt{(\mu N)^2 - F_y^2} \quad (2.31)$$

$$F_y \leq \sqrt{(\mu N)^2 - F_x^2}.$$

On considère que le vecteur sature en magnitude. Ainsi, le cercle de saturation ne modifie pas la direction du vecteur des forces du pneu, comme illustré dans la Figure 2.11. On dénomme $\sigma(x)$ une fonction de

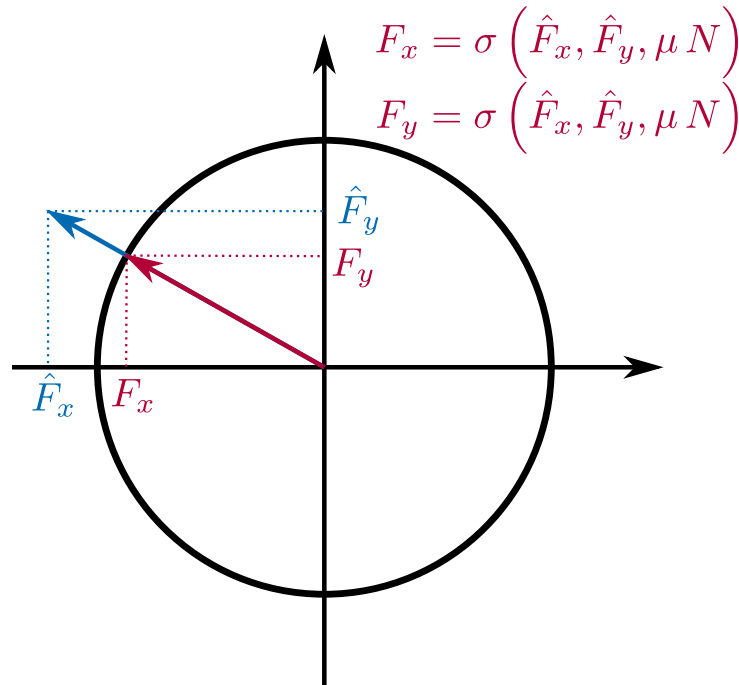


FIGURE 2.11 – Effet de la saturation sur le vecteur des forces du pneu.

saturation générique et les scalaires ℓ_s et u_s , représentant respectivement les bornes inférieure et supérieure de la fonction de saturation. La Table 2.2 présente les définitions de ℓ_s et u_s pour un pneu générique. Pour les modèles non-linéaires utilisés dans les simulations, σ est représenté par la *fonction logistique* et son expression est :

$$\sigma(x) = \frac{u_s - \ell_s}{1 + e^{-\frac{4}{u_s - \ell_s} \left(x - \frac{u_s + \ell_s}{2}\right)}} + \ell_s. \quad (2.32)$$

Dans le chapitre 4, une autre expression pour σ , à dérivée discontinue, est également utilisée :

$$\sigma(x) = \begin{cases} u_s, & x \geq u_s \\ x, & \ell_s \leq x \leq u_s \\ \ell_s, & x \leq \ell_s \end{cases} \quad (2.33)$$

Les Figure 2.12 et 2.13 illustrent respectivement les expressions de σ dans (2.32) et (2.33).

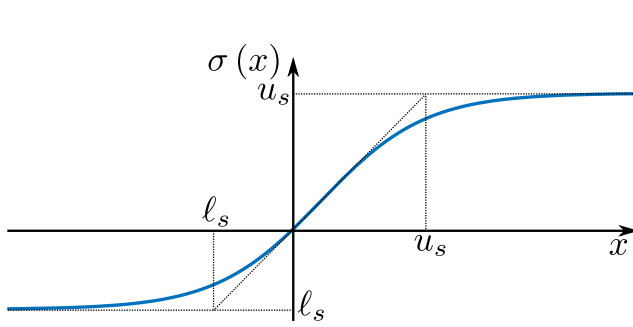


FIGURE 2.12 – Fonction logistique.

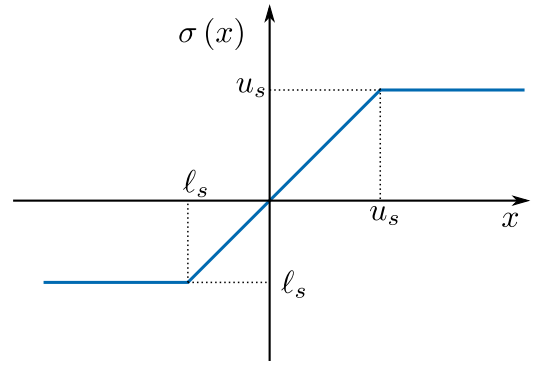


FIGURE 2.13 – Fonction de saturation.

2.3 Force de traînée aérodynamique

La force de traînée aérodynamique a été considérée par simplicité uniquement dans l'axe longitudinal du véhicule. Dans [RAJAMANI 2012](#) elle est décrite proportionnelle à la vitesse longitudinale du véhicule :

$$F_{aero} = \frac{1}{2} \rho C_d A_f v^2 \quad (2.34)$$

avec :

- ρ densité de l'air,
- C_d coefficient de traînée aérodynamique du véhicule,
- A_f surface frontale du véhicule.

2.4 Force de résistance au roulement

En générale la force de résistance au roulement d'une roue est considérée proportionnelle à la force normale à la roue. Comme indiqué dans [RAJAMANI 2012](#), les forces de résistance au roulement d'un modèle avec quatre roues sont alors :

$$R_{xfi} = f_{rf} N_{fi} \quad (2.35a) \qquad R_{xri} = f_{rr} N_{ri} \quad (2.35c)$$

$$R_{xfo} = f_{rf} N_{fo} \quad (2.35b) \qquad R_{xro} = f_{rr} N_{ro} \quad (2.35d)$$

Par simplicité, les coefficients f_{rf} et f_{rr} , sont considérés constants. Les coefficients f_{rf} et f_{rr} varient selon plusieurs facteurs, cf. [SZIRTES et RÓZSA 2007](#), comme par exemple la pression du pneu et la vitesse de la roue. Dans [PACEJKA 2012](#) une expression du coefficient de résistance au roulement en fonction de la vitesse de la roue est donnée. En revanche, il est commun, pour des modèles orientés à la synthèse des lois de commande, de considérer ces coefficients constants. Ainsi, par simplicité, les coefficients f_{rf} et f_{rr} , ont été considérés constants. Il faudra se rappeler que ces paramètres sont donc soumis à des incertitudes. Les forces de résistance au roulement sont appliquées au centre des roues, cf. [GENTA 1997](#). Pour cette raison ils n'apparaissent pas dans les équations du mouvement de la rotation des roues (1.10).

2.5 Forces normales aux roues

Les forces normales aux roues sont importantes pour leur impact sur le calcul des forces des pneus, comme vu dans la section 2.2. Pour cette raison, au lieu d'utiliser une distribution de charge constante, comme dans le modèle bicyclette linéaire, cf. [RAJAMANI 2012](#), les forces normales utilisées dans les modèles ici définis dépendent de la dynamique du véhicule. Dans cette section, des modèles de charge variable pour les modèles des sections 1.1, 1.2 et 1.3 sont développés.

2.5.1 Distribution de charge variable - modèle bicyclette sans suspensions

On cherche une expression des forces normales aux roues N_f et N_r dépendante de la dynamique véhicule. On considère ces équations du mouvement du corps du véhicule :

- l'équation de Newton pour la translation verticale du véhicule,
- l'équation d'Euler pour la rotation de roulis,
- l'équation d'Euler pour la rotation de tangage.

La quantité de mouvement et sa dérivée temporelle sont nulles sur l'axe z car le véhicule ne se translate pas sur l'axe z . Le moment cinétique du véhicule et sa dérivée sont nuls aussi sur l'axe x et y car les mouvements de roulis et de tangage ont été négligés. Les équations du mouvement mentionnées sont déduites à partir des Figures 2.14 et 2.15 :

$$0 = N_f + N_r - P_z \quad (2.36a)$$

$$0 = 2(F_{yxf} + F_{yyf} + F_{yxr} + F_{yyr})h - 2(R_{yxf} + R_{yxr})(h - r_e) \quad (2.36b)$$

$$0 = -2(F_{xxf} - F_{xyf} + F_{xxr} - F_{xyr})h + 2(R_{xxf} + R_{xxr})(h - r_e) + N_r \ell_r - N_f \ell_f. \quad (2.36c)$$

On considère alors les équations (1.9) et (2.36) comme un système d'équations. Les inconnues sont N_f ,

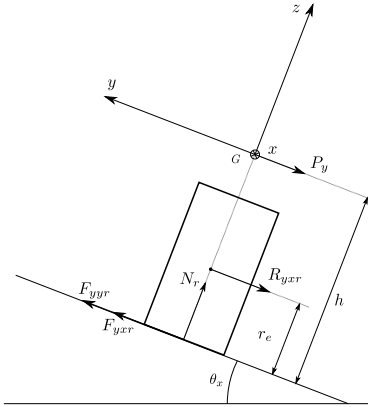


FIGURE 2.14 – Plan yz du modèle bicyclette.

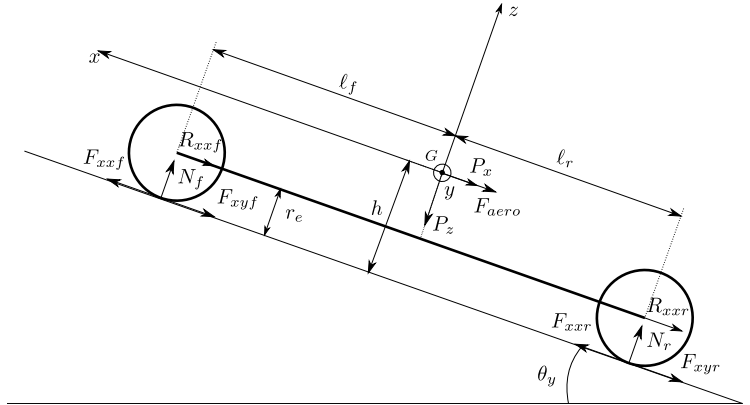


FIGURE 2.15 – Plan xz du modèle bicyclette.

N_r , F_{xf} , F_{xr} , F_{yf} et F_{yr} . Le système défini est linéaire par rapport aux inconnues choisies. On a donc un système d'équations linéaires qu'on peut écrire sous la forme $AX = B$. En revanche, la matrice A n'est pas de rang plein et pour cette raison le système n'a pas de solution. Cependant on ne cherche une solution que pour N_f et N_r , et non pas pour F_{xf} , F_{xr} , F_{yf} et F_{yr} . On peut réorganiser le système d'équations en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A pour réécrire le système dans une forme $A'X = B'$, ce qui nous permet de trouver une solution pour N_f et N_r . Les mêmes opérations sont effectuées aussi sur B pour obtenir B' . Les matrices A et A' sont *ligne-équivalentes*, si A' a été obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur A . Dans ce cas, l'espace des solutions de $A'X = B'$ est le même de $AX = B$, cf. CURTIS 1984. Les opérations élémentaires effectuées sur A nous permettent d'obtenir A' afin que N_f et N_r ne dépendent pas de F_{xf} , F_{xr} , F_{yf} et F_{yr} , c'est-à-dire que le système d'équations a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} A'_{11} & 0 \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix}$$

avec A'_{11} de rang plein et :

$$X_1 = \begin{bmatrix} N_f \\ N_r \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} F_{xf} \\ F_{xr} \\ F_{yf} \\ F_{yr} \end{bmatrix}.$$

Il est donc possible de trouver une solution pour N_f et N_r en résolvant le système d'équations réduit $A'_{11} X_1 = B'_1$. Soit :

$$N_f = \frac{g m \ell_r}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \theta_x \cos \theta_y - \frac{g m h}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \theta_x \sin \theta_y - \frac{m h}{d(\delta_f, \delta_r)} (\dot{v} - r u) + \frac{h}{d(\delta_f, \delta_r)} F_{aero} - \frac{2 f_{rr} g m r_e}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \delta_r \cos \theta_x \cos \theta_y \quad (2.37a)$$

$$N_r = \underbrace{\frac{g m \ell_f}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \theta_x \cos \theta_y}_{(1)} + \underbrace{\frac{g m h}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \theta_x \sin \theta_y}_{(2)} + \underbrace{\frac{m h}{d(\delta_f, \delta_r)} (\dot{v} - r u)}_{(3)} + \underbrace{\frac{h}{d(\delta_f, \delta_r)} F_{aero}}_{(4)} + \underbrace{\frac{2 f_{rf} g m r_e}{d(\delta_f, \delta_r)} \cos \delta_f \cos \theta_x \cos \theta_y}_{(5)} \quad (2.37b)$$

avec $d(\delta_f, \delta_r) = l_f + l_r + 2 f_{rf} r_e \cos \delta_f - 2 f_{rr} r_e \cos \delta_r$. Il est possible d'observer dans (2.37a) et (2.37b) les différentes composantes qui contribuent au transfert de charge entre l'avant et l'arrière du véhicule. L'élément (1) des sommes, si on considère $\delta_f = 0$, $\delta_r = 0$ et $f_{rf} = f_{rr}$ correspond à la distribution de charge statique, comme calculée dans RAJAMANI 2012, mais en prenant en compte l'inclinaison de la route. L'élément (2) produit un transfert de charge de l'essieu avant à l'essieu arrière si le véhicule est sur une montée, $\theta_y > 0$, et vice-versa si le véhicule est en descente. On rappelle que l'accélération longitudinale du véhicule, vue dans (1.2), est égale à $\dot{v} - r u$. On comprend donc de l'élément (3) que si le véhicule a une accélération longitudinale positive, il y a un transfert de charge de l'avant à l'arrière du véhicule. Si l'accélération est négative, alors le transfert est de l'arrière vers l'avant. Surtout il est important de retenir que les expressions de N_f et N_r dépendent de la dérivée des variables d'état du véhicule, notamment de \dot{v} . La force de traînée aérodynamique F_{aero} , fonction de la vitesse longitudinale v , comme vu dans la section 2.3, intervient dans l'élément (4) et réduit la charge sur les roues avant. Enfin, les derniers éléments de (2.37a) et (2.37b) sont causés par les forces de résistance au roulement, qui dépendent des forces normales aux roues, comme on a vu dans la section 2.4. On peut simplifier les résultats de (2.37) en considérant les angles de braquage δ_f et δ_r et les angles de dévers et de pente de la route θ_x et θ_y petits. Dans ce cas, on peut approcher $\cos \delta \approx 1$ et $\sin \delta \approx \delta$. Les expressions simplifiées de N_f et N_r sont :

$$N_f = \frac{g m \ell_r}{\hat{d}} - \frac{g m h}{\hat{d}} \theta_y - \frac{m h}{\hat{d}} (\dot{v} - r u) - \frac{h}{\hat{d}} F_{aero} - \frac{2 f_{rr} g m r_e}{\hat{d}} \quad (2.38a)$$

$$N_r = \frac{g m \ell_f}{\hat{d}} + \frac{g m h}{\hat{d}} \theta_y + \frac{m h}{\hat{d}} (\dot{v} - r u) + \frac{h}{\hat{d}} F_{aero} + \frac{2 f_{rf} g m r_e}{\hat{d}} \quad (2.38b)$$

avec $\hat{d} = l_f + l_r + 2 f_{rf} r_e - 2 f_{rr} r_e$.

2.5.2 Distribution de charge variable - modèle quatre roues sans suspensions

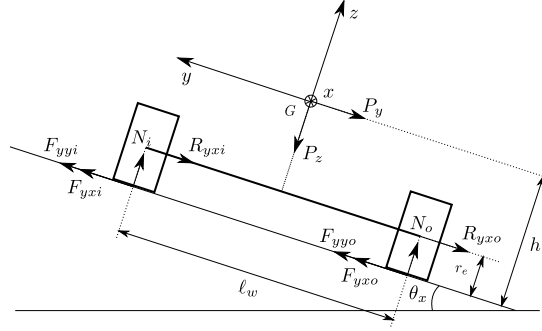
Comme pour le modèle bicyclette on cherche une expression des forces normales aux roues dépendant de la dynamique du véhicule. Dans ce cas, en revanche, le calcul entre la distribution de charge à l'avant et à l'arrière du véhicule ne suffit pas, il est nécessaire de calculer aussi la distribution de charge entre les deux roues de chaque essieu. Pour connaître la distribution de charge entre l'avant et l'arrière du véhicule, la solution (2.37) pour le modèle bicyclette de la section précédente est utilisée. Ensuite, l'avant et l'arrière du véhicule sont considérés séparément pour calculer la distribution de charge entre les deux roues avant et les deux roues arrière. On considère les forces sur le plan yz d'une « moitié » de véhicule, montrées dans la Figure 2.16. Les composantes latérale et verticale du poids dans le repère véhicule sont calculées comme dans (2.1), mais la masse considérée est \hat{m} , variable avec la dynamique du véhicule et considérée comme une inconnue :

$$\hat{P}_y = \hat{m} g \cos \theta_y \sin \theta_x$$

$$\hat{P}_z = \hat{m} g \cos \theta_x \cos \theta_y.$$

On définit aussi :

$$F_{y\text{tot}} = F_{yyi} + F_{yyo} + F_{yxi} + F_{yxo}.$$

FIGURE 2.16 – Modèle véhicule à quatre roues, plan yz .

Pour la moitié avant du véhicule $F_{y\ tot}$ sera la somme des composantes latérales dans le repère véhicule des forces des pneus avant, F_{xfi} , F_{yfi} , F_{xfo} et F_{yfo} , pour la moitié arrière des forces des pneus arrière, F_{xri} , F_{yri} , F_{xro} et F_{yro} . Les forces de résistance au roulement R_{yxi} et R_{yxo} dépendent toujours linéairement des forces normales N_i et N_o , comme vu dans la section 2.4. Pour une moitié de véhicule on peut prendre en considération les équations suivantes :

- l'équation de Newton pour l'axe y ,
- l'équation de Newton pour l'axe z ,
- l'équation d'Euler pour l'axe x ,
- une équation imposant que la force normale totale, N_{tot} , est la somme des forces normales de la roue intérieure, N_i , et extérieure, N_o .

Ces équations sont déduites des forces montrées dans la Figure 2.16 et en considérant que la translation verticale et le roulis du véhicule sont nuls :

$$\hat{m}(\dot{u} + r v) = F_{y\ tot} - R_{yxi} - R_{yxo} - \hat{m} \cos \theta_y \sin \theta_x \quad (2.39a)$$

$$0 = N_{tot} - \hat{m} g \cos \theta_x \cos \theta_y \quad (2.39b)$$

$$0 = N_i \frac{\ell_w}{2} - N_o \frac{\ell_w}{2} + F_{y\ tot} h - (R_{yxi} + R_{yxo})(h - r_e) \quad (2.39c)$$

$$N_{tot} = N_i + N_o. \quad (2.39d)$$

N_{tot} est calculé en utilisant le modèle de distribution de charge variable du modèle bicyclette (2.37). On peut donc résoudre le système d'équations (2.39) avec ces inconnues : N_i , N_o , \hat{m} et $F_{y\ tot}$. Pour N_i et N_o on obtient :

$$N_o = \frac{N_{tot}}{2} + \frac{N_{tot}}{g \ell_w \cos \theta_x \cos \theta_y} (h \cos \theta_y \sin \theta_x + h(\dot{u} + r v)) + \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \sin \delta \quad (2.40a)$$

$$N_i = \underbrace{\frac{N_{tot}}{2}}_{(1)} - \frac{N_{tot}}{g \ell_w \cos \theta_x \cos \theta_y} \left(\underbrace{h \cos \theta_y \sin \theta_x}_{(2)} + \underbrace{h(\dot{u} + r v)}_{(3)} \right) - \underbrace{\frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \sin \delta}_{(4)}. \quad (2.40b)$$

Si on remplace N_{tot} successivement par N_f et N_r , calculés selon (2.37a) et (2.37b), on obtient N_{fi} , N_{fo} , N_{ri} et N_{ro} . Aussi dans ce cas on peut voir que l'élément (1) de la somme des expressions (2.40a) et (2.40b) est la charge statique : N_{tot} est la charge totale sur l'essieu, qui, en statique, est distribuée uniformément entre les deux roues de l'essieu. L'éléments (2) fait le transfert de charge causé par le dévers de la route θ_x . Pour comprendre l'élément (3) on rappelle que la vitesse latérale du véhicule, vue dans (1.2), est égale à $\dot{u} + r v$. L'élément (3) représente le transfert de charge causé par l'accélération latérale du véhicule. Il est donc important de voir que dans le cas du modèle quatre roues sans suspensions, le transfert de charge dépend toujours de la dérivée des variables d'état du véhicule : de \dot{v} , parce que N_{tot} est calculé avec (2.37), et maintenant aussi de \dot{u} . Finalement l'élément (4) est dû aux forces de résistance au roulement, dépendant des forces normales. Aussi dans ce cas on peut considérer les angles δ_f , δ_r , θ_x et θ_y petits et simplifier les expressions des forces normales :

$$N_o = \frac{N_{tot}}{2} + \frac{N_{tot}}{g \ell_w} (h \theta_x + h(\dot{u} + r v)) + \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \delta \quad (2.41a)$$

$$N_i = \frac{N_{tot}}{2} - \frac{N_{tot}}{g \ell_w} (h \theta_x + h(\dot{u} + r v)) - \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \delta. \quad (2.41b)$$

Dans ce cas, on peut remplacer N_{tot} successivement par N_f et N_r , calculés selon (2.38), pour obtenir N_{fi} , N_{fo} , N_{ri} et N_{ro} .

2.5.3 Distribution de charge variable - modèle quatre roues avec suspensions

Pour calculer les forces normales pour le modèle quatre roues avec suspensions en fonction de la dynamique véhicule on utilise une procédure analogue à celle développée dans la section précédente pour le modèle véhicule à quatre roues sans suspensions. On considère tout d'abord les équations du mouvement pour la masse non suspendue mais en ne considérant que deux roues, comme pour un modèle bicyclette. On considère les équations du mouvement de la masse non suspendue de ce modèle :

- l'équation de Newton de l'axe x_u ,
- l'équation de Newton de l'axe y_u ,
- l'équation de Newton de l'axe z_u ,
- l'équation d'Euler de l'axe x_u ,
- l'équation d'Euler de l'axe y_u ,
- l'équation d'Euler de l'axe z_u .

Elles sont déduites des Figures 2.17, 2.18 et 2.19, en considérant que pour la masse non suspendue, la translation verticale, le roulis et le tangage sont nuls :

$$m_u (\dot{v} - r u) = F_{xxf} + F_{xxr} - R_{xxf} - R_{xxr} - F_{xyf} - F_{xyr} - P_{ux} - C_x \quad (2.42a)$$

$$m_u (\dot{u} + r v) = F_{yxf} + F_{yxr} - R_{yxf} - R_{yxr} + F_{yyf} + F_{yyr} - P_{uy} - C_y \quad (2.42b)$$

$$0 = N_f + N_r - P_{uz} - S_f - S_r - C_z \quad (2.42c)$$

$$0 = (F_{yxf} + F_{yyf} + F_{yxr} + F_{yyr}) h_u - (R_{yxf} + R_{yxr}) (h_u - r_e) - C_y h_{us} \quad (2.42d)$$

$$0 = -(F_{xxf} - F_{xyf} + F_{xxr} - F_{xyr}) h_u + (R_{xxf} + R_{xxr}) (h_u - r_e) + N_r \ell_{ru} + N_f \ell_{fu} + C_x h_{us} + C_z \ell_{us} + S_f \ell_{fu} - S_r \ell_{ru} \quad (2.42e)$$

$$I_{uzz} \dot{r} = (F_{yxf} + F_{yyf} - R_{yxf}) \ell_{fu} - (F_{yxr} + F_{yyr} - R_{yxr}) \ell_{ru} - C_y \ell_{us} \quad (2.42f)$$

où $\ell_{us} = \ell_{fu} - \ell_{rs}$. Comme dans le cas du modèle bicyclette sans suspensions, le système d'équations

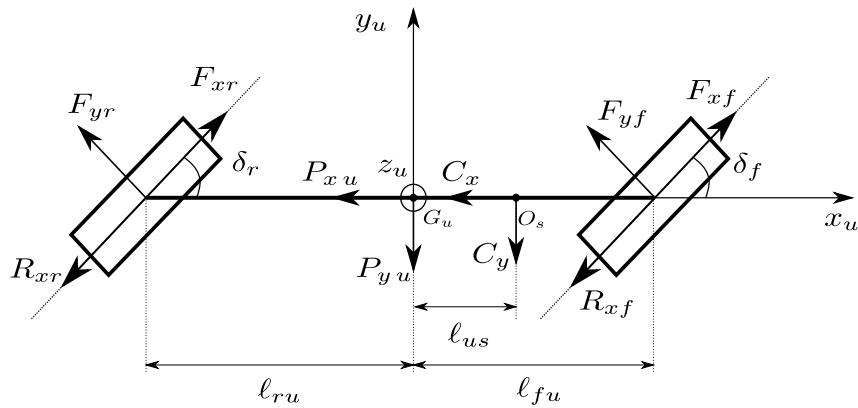


FIGURE 2.17 – Plan xy du modèle bicyclette avec suspensions : forces qui agissent sur la masse non suspendue.

(2.42) est linéaire en considérant comme inconnues N_f , N_r , F_{xf} , F_{xr} , F_{yf} et F_{yr} . Le problème est mis en forme $A X = B$. La matrice A , dans ce cas aussi, n'est pas de rang plein ; il n'y a donc pas de solution

$$N_r = \frac{h_u - h_{us}}{\hat{d}} C_x + \frac{\ell_{fs} + f_{rf} r_e}{\hat{d}} C_z + \frac{(f_{rf} r_e)}{\hat{d}} S_f + \frac{\ell_{fu} + \ell_{ru} + f_{rf} r_e}{\hat{d}} S_r + \frac{g m \ell_{fu}}{\hat{d}} + \frac{g m h_u}{\hat{d}} \theta_y + \frac{m h_u}{\hat{d}} (\dot{v} - r u) + \frac{2 f_{rf} g m r_e}{\hat{d}} \quad (2.44b)$$

avec $\hat{d} = \ell_{fu} + \ell_{ru} + 2 f_{rf} r_e - 2 f_{rr} r_e$. Maintenant on considère à nouveau la masse non suspendue avec quatre roues. On peut considérer séparément l'avant et l'arrière du véhicule. Comme cela a été fait dans la section précédente pour le modèle véhicule quatre roues sans suspensions, on considère une *moitié* de véhicule à la fois, pour trouver la distribution de la force normale entre roue intérieure et extérieure de la moitié en question. Les équations suivantes sont considérées pour chaque moitié du véhicule :

- l'équation de Newton pour l'axe y_u ,
- l'équation de Newton pour l'axe z_u ,
- l'équation d'Euler pour l'axe x_u ,
- une équation imposant que la force normale totale, N_{tot} , est la somme des forces normales de la roue intérieure, N_i , et extérieure, N_o .

Elles sont déduites de la Figure 2.20, toujours en prenant en compte que la translation verticale et le roulis de la masse non suspendue sont nuls :

$$\hat{m} (\dot{u} + r v) = F_{y\ tot} - R_{yxi} - R_{yxo} - P_y - \hat{C}_y \quad (2.45a)$$

$$0 = N_{tot} - P_z - S_i - S_o - \hat{C}_z \quad (2.45b)$$

$$0 = N_i \frac{\ell_w}{2} - N_o \frac{\ell_w}{2} + F_{y\ tot} h_u - (R_{yxi} + R_{yxo}) (h_u - r_e) - \hat{C}_y h_{us} - S_i \frac{\ell_w}{2} + S_o \frac{\ell_w}{2} \quad (2.45c)$$

$$N_{tot} = N_i + N_o. \quad (2.45d)$$

N_{tot} est calculé en utilisant (2.43). La masse considérée \hat{m} varie avec la dynamique du véhicule et elle est une inconnue. L'impact des forces résultantes des actions de liaison entre masse suspendue et masse non

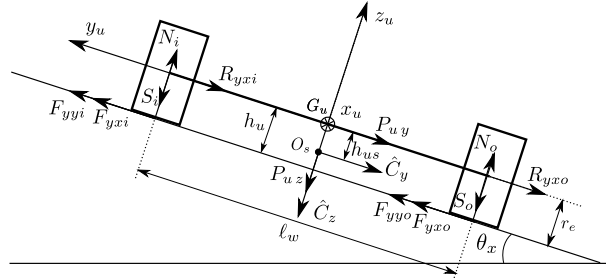


FIGURE 2.20 – Modèle quatre roues avec suspensions, masse non suspendue, plan yz .

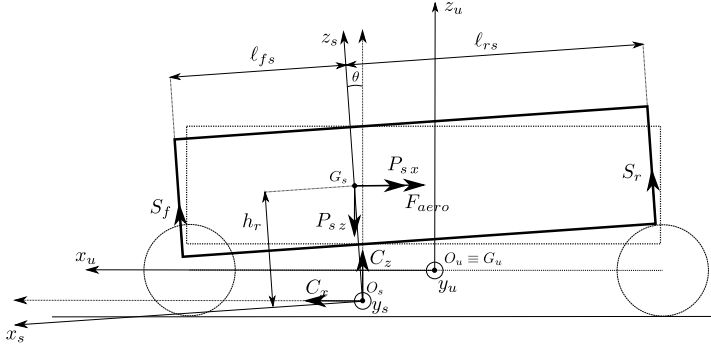
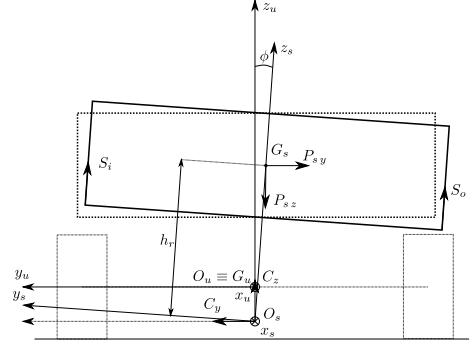
suspendue sur les deux moitiés du véhicule a été pondéré selon la distance du point de contact entre les deux masses, O_s , et l'essieu considéré :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{yf} &= \frac{\ell_{rs}}{L} C_y & \hat{C}_{yr} &= \frac{\ell_{fs}}{L} C_y \\ \hat{C}_{zf} &= \frac{\ell_{rs}}{L} C_z & \hat{C}_{zr} &= \frac{\ell_{fs}}{L} C_z. \end{aligned}$$

Pour chaque moitié de véhicule on peut résoudre le système d'équations (2.45) avec les inconnues N_i , N_o , \hat{m} et $F_{y\ tot}$, pour obtenir une solution de N_i et N_o :

$$N_o = \frac{N_{tot}}{2} + \frac{h_u - h_{us}}{\ell_w} \hat{C}_y + \frac{h_u \cos \theta_y \sin \theta_x + h_u (\dot{u} + r v)}{g \ell_w \cos \theta_x \cos \theta_y} \left(N_{tot} - \hat{C}_z - S_i - S_o \right) + \frac{S_o - S_i}{2} + \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \sin \delta \quad (2.46a)$$

$$N_i = \frac{N_{tot}}{2} - \frac{h_u - h_{us}}{\ell_w} \hat{C}_y - \frac{h_u \cos \theta_y \sin \theta_x + h_u (\dot{u} + r v)}{g \ell_w \cos \theta_x \cos \theta_y} \left(N_{tot} - \hat{C}_z - S_i - S_o \right) - \frac{S_o - S_i}{2} - \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \sin \delta. \quad (2.46b)$$


 FIGURE 2.21 – Forces sur la masse suspendue, plan $x_u z_u$.

 FIGURE 2.22 – Forces sur la masse suspendue, plan $y_u z_u$.

Dans (2.46) il est possible de distinguer les différentes contributions au transfert de charge, comme dans (2.43). Il est possible de simplifier (2.46) en considérant les angles δ_f , δ_r , θ_x et θ_y petits :

$$N_o = \frac{N_{tot}}{2} + \frac{h_u - h_{us}}{\ell_w} \hat{C}_y + \frac{h_u \theta_x + h_u (\dot{u} + r v)}{g \ell_w} \left(N_{tot} - \hat{C}_z - S_i - S_o \right) + \frac{S_o - S_i}{2} + \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \delta \quad (2.47a)$$

$$N_i = \frac{N_{tot}}{2} - \frac{h_u - h_{us}}{\ell_w} \hat{C}_y - \frac{h_u \theta_x + h_u (\dot{u} + r v)}{g \ell_w} \left(N_{tot} - \hat{C}_z - S_i - S_o \right) - \frac{S_o - S_i}{2} - \frac{N_{tot} f_r r_e}{\ell_w} \delta. \quad (2.47b)$$

2.6 Résultantes des actions de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue

Les résultantes de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue sont présentes dans le modèle quatre roues avec suspensions, décrit en section 1.3. Le vecteur de ces forces est appelé $\vec{C}(t)$ et il est appliqué au point de liaison entre masse suspendue et masse non suspendue, O_s . $\vec{C}(t)$ est calculé pour permettre au point de la masse suspendue O_s de rester solidaire avec la masse non suspendue. Pour calculer les composantes de $\vec{C}(t)$ dans $O_u x_u y_u z_u$ on peut considérer les équations de Newton de la masse suspendue, qu'on déduit à partir des Figures 2.21 et 2.22 et en utilisant (1.28) :

$${}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{i}_u = -F_{aero} - P_{sx} + (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \sin \theta + C_x \quad (2.48a)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{j}_u = -P_{sy} - (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \cos \theta \sin \phi + C_y \quad (2.48b)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{k}_u = -P_{sz} + (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \cos \theta \cos \phi + C_z. \quad (2.48c)$$

Les résultantes des actions de liaison sont :

$$C_x = F_{aero} + P_{sx} - (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \sin \theta + {}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{i}_u \quad (2.49a)$$

$$C_y = P_{sy} + (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \cos \theta \sin \phi + {}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{j}_u \quad (2.49b)$$

$$C_z = P_{sz} - (S_{fo} + S_{fi} + S_{ro} + S_{ri}) \cos \theta \cos \phi + {}^{(x_u y_u z_u)} \dot{\vec{p}}_{\mathcal{R}_a}(G_s, t) \vec{k}_u. \quad (2.49c)$$

2.7 Forces des suspensions

Les forces des suspensions sont présentes dans le modèle quatre roues avec suspensions, décrit en section 1.3. Les suspensions sont modélisées comme un ressort plus un amortisseur, comme dans RAJAMANI 2012.

La force produite par le ressort est proportionnelle à la compression de la suspension $\vec{c}(t)$:

$$F_s = k_s \vec{c}(t). \quad (2.50)$$

$\vec{c}(t)$ sera calculé pour les quatre roues dans la suite de cette section. Le coefficient de raideur du ressort, k_s , a été considéré constant. La force produite par l'amortisseur est proportionnelle à la vitesse de compression de la suspension $\dot{\vec{c}}(t)$:

$$F_d = k_d \dot{\vec{c}}(t). \quad (2.51)$$

$\dot{\vec{c}}(t)$ sera aussi calculé pour les quatre roues dans la suite de cette section. Le coefficient d'amortissement, k_d , a été considéré constant. On ajoute également à la force du ressort et de l'amortisseur l'effet produit par la barre antiroulis. Comme expliqué dans REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001, la barre antiroulis a comme objectif de réduire le roulis du véhicule pendant les virages. Dans JAZAR 2017 un modèle simplifié de la barre de roulis est présenté. Selon ce modèle, le couple produit par cet élément du châssis sur l'axe longitudinale de la masse suspendue est donné par :

$$M_\phi = k_\phi \phi \quad (2.52)$$

où ϕ est l'angle de roulis du véhicule. Par simplicité, on considère que les forces qui génèrent ce couple sont appliquées sur la masse suspendue et non suspendue au même endroit où les forces des ressorts et des amortisseurs sont appliquées, c'est-à-dire en correspondance du centre de rotation des roues. Alors les forces sur les roues gauche et droite causées par la barre antiroulis sont égales à :

$$F_{\phi i} = \frac{k_\phi}{2 \ell_w} \phi \quad (2.53a)$$

$$F_{\phi o} = -\frac{k_\phi}{2 \ell_w} \phi. \quad (2.53b)$$

Enfin, les forces produites par les deux suspensions du même essieu sont égales à :

$$S_i = F_s + F_d + F_{\phi i} = k_s \vec{c}(t) + k_d \dot{\vec{c}}(t) + \frac{k_\phi}{2 \ell_w} \phi \quad (2.54a)$$

$$S_o = F_s + F_d + F_{\phi o} = k_s \vec{c}(t) + k_d \dot{\vec{c}}(t) - \frac{k_\phi}{2 \ell_w} \phi. \quad (2.54b)$$

Dans ZHAO, LI et QU 2014 et KISSAI et al. 2019 un modèle des forces des suspensions similaire à celui décrit ici est utilisé.

2.7.1 Cinématique des suspensions

Dans la suite on calcule la compression des suspensions, étant le déplacement vertical de la masse suspendue dans le repère $O_u x_u y_u z_u$ où les résultantes des forces des suspensions sont appliquées à la masse suspendue. Pour simplifier le modèle véhicule, les forces des suspensions sont considérées être appliquées à la masse suspendue sur les points qui, au repos, sont en dessous des roues. Comme on peut voir dans la Figure 2.23, la distance à calculer est ${}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{W}\mathbf{S}}(t)$. On peut calculer ${}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{W}\mathbf{S}}(t)$ comme :

$${}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{W}\mathbf{S}}(t) = {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S}}(t) - {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{W}}(t).$$

Si on considère la géométrie du véhicule montrée dans la Figure 2.24, on a :

$$\begin{aligned} {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{W}_{fi}}(t) &= \begin{bmatrix} \ell_{fs} \\ \frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} \end{bmatrix} & {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{W}_{fo}}(t) &= \begin{bmatrix} \ell_{fs} \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} \end{bmatrix} \\ {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{W}_{ri}}(t) &= \begin{bmatrix} -\ell_{rs} \\ \frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} \end{bmatrix} & {}^{(x_u y_u z_u)} \overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{W}_{ro}}(t) &= \begin{bmatrix} -\ell_{rs} \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.55)$$

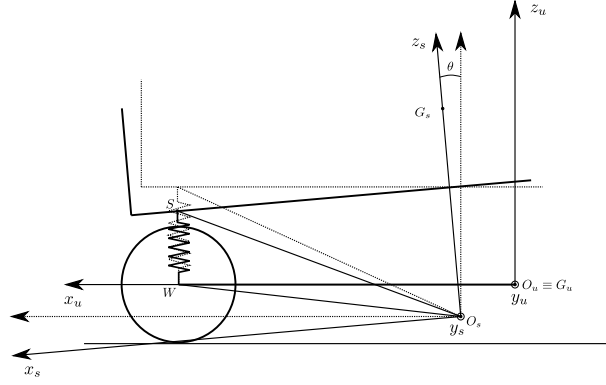


FIGURE 2.23 – Compression des suspensions avant à cause du tangage.

$$\begin{aligned}
 {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S} f_i}(t) &= \begin{bmatrix} \ell_{fs} \\ \frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} + \ell_{susp f} \end{bmatrix} & {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S} f_o}(t) &= \begin{bmatrix} \ell_{fs} \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} + \ell_{susp f} \end{bmatrix} \\
 {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S} r_i}(t) &= \begin{bmatrix} -\ell_{rs} \\ \frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} + \ell_{susp r} \end{bmatrix} & {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S} r_o}(t) &= \begin{bmatrix} -\ell_{rs} \\ -\frac{\ell_w}{2} \\ h_{us} + \ell_{susp r} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Pour obtenir les segments ${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s \mathbf{S}}(t)$ il suffit de multiplier par la matrice de rotation (1.25) :

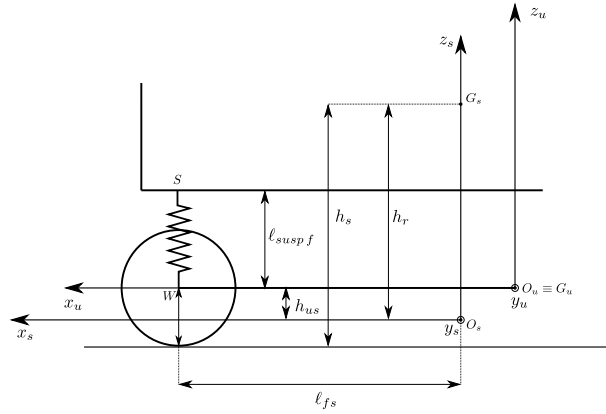


FIGURE 2.24 – Géométrie du véhicule.

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s \mathbf{S} f_i}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \theta + \ell_{fs} \cos \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \cos \phi - (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \phi \cos \theta + \ell_{fs} \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp f}) \cos \phi \cos \theta - \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \tag{2.57a}$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s \mathbf{S} f_o}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \theta + \ell_{fs} \cos \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \cos \phi - (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \phi \cos \theta + \ell_{fs} \sin \phi \sin \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp f}) \cos \phi \cos \theta - \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \tag{2.57b}$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S}_{ri}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \theta - \ell_{rs} \cos \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \cos \phi - (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \phi \cos \theta - \ell_{rs} \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp r}) \cos \phi \cos \theta + \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.57c)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{0}_s \mathbf{S}_{ro}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \theta - \ell_{rs} \cos \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \cos \phi - (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \phi \cos \theta - \ell_{rs} \sin \phi \sin \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp r}) \cos \phi \cos \theta + \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (2.57d)$$

Donc on trouve :

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{fi} \mathbf{S}_{fi}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \theta + \ell_{fs} (\cos \theta - 1) \\ \frac{\ell_w}{2} (\cos \phi - 1) - (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \phi \cos \theta + \ell_{fs} \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp f}) \cos \phi \cos \theta - \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta - h_{us} \end{bmatrix} \quad (2.58a)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{fo} \mathbf{S}_{fo}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \theta + \ell_{fs} (\cos \theta - 1) \\ -\frac{\ell_w}{2} (\cos \phi - 1) - (h_{us} + \ell_{susp f}) \sin \phi \cos \theta + \ell_{fs} \sin \phi \sin \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp f}) \cos \phi \cos \theta - \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta - h_{us} \end{bmatrix} \quad (2.58b)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{ri} \mathbf{S}_{ri}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \theta - \ell_{rs} (\cos \theta - 1) \\ \frac{\ell_w}{2} (\cos \phi - 1) - (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \phi \cos \theta - \ell_{rs} \sin \phi \sin \theta \\ \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp r}) \cos \phi \cos \theta + \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta - h_{us} \end{bmatrix} \quad (2.58c)$$

$${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{ro} \mathbf{S}_{ro}}(t) = \begin{bmatrix} (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \theta - \ell_{rs} (\cos \theta - 1) \\ -\frac{\ell_w}{2} (\cos \phi - 1) - (h_{us} + \ell_{susp r}) \sin \phi \cos \theta - \ell_{rs} \sin \phi \sin \theta \\ -\frac{\ell_w}{2} \sin \phi + (h_{us} + \ell_{susp r}) \cos \phi \cos \theta + \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta - h_{us} \end{bmatrix}. \quad (2.58d)$$

La compression d'une suspension est la différence sur l'axe vertical de $\overrightarrow{\mathbf{W}\mathbf{S}}(t)$ par rapport à sa position au repos. La position au repos des suspensions est celle quand l'angle de roulis et de tangage sont égaux à zéro, $\phi = 0$ et $\theta = 0$. Pour simplifier le modèle on considère uniquement le déplacement sur l'axe z pour la compression des suspensions et non pas le déplacement sur les axe x et y . Avec ces considérations les compressions des suspensions sont :

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{fi}}(t) = (h_{us} + \ell_{susp f}) (1 - \cos \phi \cos \theta) - \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta \quad (2.59a)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{fo}}(t) = (h_{us} + \ell_{susp f}) (1 - \cos \phi \cos \theta) + \frac{\ell_w}{2} \sin \phi + \ell_{fs} \cos \phi \sin \theta \quad (2.59b)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{ri}}(t) = (h_{us} + \ell_{susp r}) (1 - \cos \phi \cos \theta) - \frac{\ell_w}{2} \sin \phi - \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta \quad (2.59c)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{ro}}(t) = (h_{us} + \ell_{susp r}) (1 - \cos \phi \cos \theta) + \frac{\ell_w}{2} \sin \phi - \ell_{rs} \cos \phi \sin \theta. \quad (2.59d)$$

Si on considère ϕ et θ petits, il est possible de simplifier (2.59) :

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{fi}}(t) = -\frac{\ell_w}{2} \phi + \ell_{fs} \theta \quad (2.60a) \quad \overrightarrow{\mathbf{c}_{ri}}(t) = -\frac{\ell_w}{2} \phi - \ell_{rs} \theta \quad (2.60c)$$

$$\overrightarrow{\mathbf{c}_{fo}}(t) = \frac{\ell_w}{2} \phi + \ell_{fs} \theta \quad (2.60b) \quad \overrightarrow{\mathbf{c}_{ro}}(t) = \frac{\ell_w}{2} \phi - \ell_{rs} \theta. \quad (2.60d)$$

On peut calculer maintenant la dérivée temporelle de ${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}\dot{\mathbf{S}}}(t)$, qui servira pour calculer la vitesse de compression des suspensions. En utilisant la *formule de Bour* :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}\dot{\mathbf{S}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u} &= \left. \frac{d {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{S}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u} - \left. \frac{d {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{W}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u} = \\ &= \left. \frac{d {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{S}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_s} + \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) \wedge {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{S}}}(t) - \left. \frac{d {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{W}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u}. \end{aligned}$$

En considérant que ${}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{S}}}(t)$ est solidaire à \mathcal{R}_s et constant, et ${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{W}}}(t)$ est constant :

$$\left. \frac{d {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}\dot{\mathbf{S}}}(t)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_u} = \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathcal{R}_s/\mathcal{R}_u}(t) \wedge {}^{(x_s y_s z_s)}\overrightarrow{\mathbf{O}_s\dot{\mathbf{S}}}(t) \quad (2.61)$$

qui en forme vectorielle est :

$$\begin{aligned} {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{fi}\dot{\mathbf{S}}_{fi}}(t) &= \begin{bmatrix} q(h_{us} + \ell_{susp f}) \\ -p(h_{us} + \ell_{susp f}) \\ p\frac{\ell_w}{2} - q\ell_{fs} \end{bmatrix} & {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{fo}\dot{\mathbf{S}}_{fo}}(t) &= \begin{bmatrix} q(h_{us} + \ell_{susp f}) \\ -p(h_{us} + \ell_{susp f}) \\ -p\frac{\ell_w}{2} - q\ell_{fs} \end{bmatrix} \\ {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{ri}\dot{\mathbf{S}}_{ri}}(t) &= \begin{bmatrix} q(h_{us} + \ell_{susp r}) \\ -p(h_{us} + \ell_{susp r}) \\ p\frac{\ell_w}{2} + q\ell_{rs} \end{bmatrix} & {}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}_{ro}\dot{\mathbf{S}}_{ro}}(t) &= \begin{bmatrix} q(h_{us} + \ell_{susp r}) \\ -p(h_{us} + \ell_{susp r}) \\ -p\frac{\ell_w}{2} + q\ell_{rs} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Comme pour la compression, on considère pour la vitesse de déplacement d'une suspension la composante sur l'axe vertical du vecteur ${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}\dot{\mathbf{S}}}(t)$; le déplacement dû à la compression est positif lorsque la masse suspendue se rapproche de la masse non suspendue, donc la dérivée du déplacement a un signe inversé par rapport à ${}^{(x_u y_u z_u)}\overrightarrow{\mathbf{W}\dot{\mathbf{S}}}(t)$:

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{c}}}_{fi}(t) = -p\frac{\ell_w}{2} + q\ell_{fs} \quad (2.63a)$$

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{c}}}_{ri}(t) = -p\frac{\ell_w}{2} - q\ell_{rs} \quad (2.63c)$$

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{c}}}_{fo}(t) = p\frac{\ell_w}{2} + q\ell_{fs} \quad (2.63b)$$

$$\dot{\overrightarrow{\mathbf{c}}}_{ro}(t) = p\frac{\ell_w}{2} - q\ell_{rs}. \quad (2.63d)$$

Les forces extérieures présentées dans ce chapitre complètent la définition des modèles véhicule présentés dans le chapitre 1. Ces trois modèles représentent conjointement la dynamique longitudinale et latérale du véhicule et considèrent les comportements non-linéaires des forces des pneus (saturation et glissement combiné), enrichis par une expression variable des forces normales aux roues. En revanche d'autres phénomènes ont été négligés : la géométrie des suspensions, le mouvement verticale du véhicule et la dynamique des actionneurs. Ces aspects peuvent être considérés pour enrichir les modèles, au détriment de leur simplicité. Les modèles présentés seront validés dans le chapitre 3 au moyen de différents résultats de simulation.

SIMULATION ET VALIDATION DES MODÈLES DE DYNAMIQUE VÉHICULE

Sommaire

3.1 Validation des modèles développés	51
3.1.1 Manœuvre d'évitement sans freinage	53
3.1.2 Manœuvre d'évitement avec freinage	57
3.1.3 Manœuvre <i>Fishhook</i>	59
3.2 Choix d'un modèle pour la synthèse du correcteur	62

Dans ce chapitre, on traite la validation des modèles de dynamique du véhicule développés dans le chapitre 1 et le choix d'un modèle pour la synthèse des correcteurs, abordée dans la deuxième partie de ce manuscrit. Dans la section 3.1, les résultats de simulation des modèles conçus seront comparés à ceux issus de l'exploitation d'un modèle à haute représentativité développé par Renault, considéré dans la suite comme le modèle de référence. Trois scénarios de simulation seront analysés :

1. une manœuvre d'évitement sans freinage,
2. une manœuvre d'évitement avec freinage,
3. la manœuvre standard *Fishhook* des tests NCAP.

Les deux premiers scénarios ont été choisis pour évaluer les modèles sur des manœuvres à haute dynamique, objet du contrôle du véhicule dans la deuxième partie de ce manuscrit. La manœuvre *Fishhook* nous permettra d'évaluer les limites des modèles développés, mais elle ne représente pas une manœuvre de référence autour de laquelle on souhaite contrôler le véhicule. La section 3.2 discute les résultats de la section 3.1 dans le but de choisir un modèle pour la synthèse des correcteurs. L'évaluation des modèles sera basée également sur un critère associé à une fonction de coût. Cela permettra d'adopter un critère quantitatif pour le choix du modèle de synthèse.

3.1 Validation des modèles développés

Dans cette section on montre les résultats des simulations effectuées avec :

- le modèle bicyclette sans suspensions (section 1.1),
- le modèle quatre roues sans suspensions (section 1.2),
- le modèle quatre roues avec suspensions (section 1.3).

Ces modèles ont été mis en œuvre dans l'environnement Matlab/Simulink. Des simulations ont été réalisées pour pouvoir évaluer leurs comportements dans des conditions à haute dynamique. Les résultats de ces simulations ont été comparés avec les simulations faites sur le modèle à haute représentativité MADA (*Modélisation Avancée de Dynamique Automobile*) MUSTAKI 2019. Le modèle MADA a été développé par Renault dans l'environnement Matlab/Simulink, pour pouvoir réaliser des simulations représentatives de différents véhicules développés par le constructeur. Le paramétrage des différents véhicules produits par le

constructeur est donc disponible et précis. De plus, le modèle MADA incorpore plusieurs sous-systèmes constituant le véhicule, comme la direction, le moteur, les freins, le châssis et d'autres encore. Ce modèle n'a pas été considéré pour la synthèse des correcteurs car trop complexe pour les méthodes de synthèse des lois de commande. Il s'agit en effet d'un modèle conçu pour la simulation et très représentatif d'un véhicule réel. Le modèle MADA peut être asservi comme un véhicule avec des ADAS, c'est-à-dire à travers une requête d'angle volant et une requête de couple. Un correcteur traduit la requête d'angle volant dans un couple pour la DAE (*Direction Assistée Électronique*). L'angle de braquage des roues dépend donc de la dynamique du système de direction. Celle-ci ne sera pas prise en compte dans notre modèle. Un autre correcteur bas niveau traduit la requête de couple aux roues en une pression du système de freinage, en cas de requête négative. Dans ce cas, le couple appliqué aux roues dépend de la dynamique du système de freinage. En revanche, si le couple demandé est positif, le couple appliqué aux roues dépend de la dynamique du moteur. Ainsi, la dynamique de traction est différente selon le signe du couple aux roues. Les entrées des modèles développés, comme observé dans le chapitre 1, sont l'angle de braquage des roues et les couples aux roues. Ces modèles ne considèrent pas la dynamique de la direction, des freins et du moteur. Pour s'affranchir de la modélisation des actionneurs dans les modèles du chapitre 1, l'angle de braquage des roues et le couple des roues calculés dans les simulations par MADA ont été utilisés comme entrées pour les simulations des modèles développés. Il est donc possible de comparer la dynamique du véhicule des modèles proposés avec MADA, en appliquant les mêmes entrées que celles déterminées par MADA, c'est-à-dire les signaux à la sortie des systèmes de direction, freinage et moteur. Dans la suite on considère un véhicule avec seulement les deux roues avant directrices, donc les angles de braquage des roues arrière ne changent pas le long de la simulation et sont considérés égaux à zéro.

Il est important d'évoquer un autre facteur qui intervient sur l'angle de braquage des roues et qui sera observé sur les sorties de MADA. L'angle de braquage des roues ne dépend pas uniquement de la dynamique de la direction, mais également de la dynamique du châssis, comme expliqué dans REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001. Quand les forces des pneus sont positives, c'est-à-dire quand le véhicule accélère, elles produisent un couple sur l'axe vertical des roues, en les faisant tourner vers l'intérieur ; au contraire, quand elles sont négatives, le couple produit fait tourner les roues vers l'extérieur. Les forces de résistance au roulement, agissant sur le centre de rotation de la roue, produisent également un couple qui tourne les roues vers l'extérieur. Les Figures 3.1 et 3.2 illustrent ces phénomènes. A droite, le bras qui lie la roue au châssis est représenté ; cela constitue le système utilisé pour braquer la roue et il n'est donc pas fixe, pouvant tourner. Par conséquent, les forces appliquées au centre de la roue produisent un couple sur le centre de rotation du système de braquage proportionnel au levier, indiqué par r_a dans les Figures 3.1 et 3.2. Pour compenser ce phénomène, il est possible d'ajouter aux roues avant un angle de *pincement*

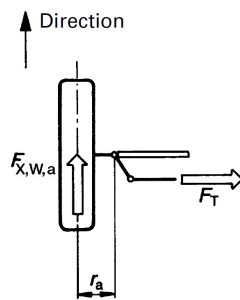


FIGURE 3.1 – Action des forces des pneus positives sur la roue (image extraite de REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001).

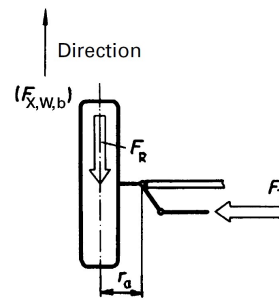


FIGURE 3.2 – Action des forces de résistance au roulement sur la roue (image extraite de REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001).

ou d'*ouverture*, selon si l'orientation des roues est vers l'intérieur ou l'extérieur du véhicule. Un angle de pincement est ajouté dans le cas où l'on veut compenser en priorité le couple des forces de résistance au roulement. En revanche, un angle d'ouverture est utilisé pour compenser le couple des forces de traction des roues. Le signe de l'angle et son amplitude dépendent donc du réglage du châssis du véhicule. Un angle de pincement ou d'ouverture sera observé sur les sorties de MADA des angles de braquage des roues. La moyenne de l'angle de braquage des deux roues avant dans MADA est considérée pour l'angle de braquage des roues avant. Cet angle de braquage moyen δ_f est donc utilisé comme entrée pour le modèle bicyclette sans suspensions (section 1.1). Pour les modèles avec quatre roues (sections 1.2 et 1.3), les

angles des roues gauche et droite sont calculés comme expliqué dans [RAJAMANI 2012](#) :

$$\delta_{fo} = \begin{cases} \delta_f - \delta_f^2 \frac{\ell_w}{2(\ell_f + \ell_r)}, & \delta_f \geq 0 \\ \delta_f + \delta_f^2 \frac{\ell_w}{2(\ell_f + \ell_r)}, & \delta_f < 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\delta_{fi} = \begin{cases} \delta_f + \delta_f^2 \frac{\ell_w}{2(\ell_f + \ell_r)}, & \delta_f \geq 0 \\ \delta_f - \delta_f^2 \frac{\ell_w}{2(\ell_f + \ell_r)}, & \delta_f < 0 \end{cases}$$

pour reproduire la géométrie directionnelle d'Ackermann. Pour les couples aux roues, les sorties de MADA sont utilisées comme les entrées des modèles conçus. Pour le modèle bicyclette sans suspensions il suffit de faire la somme des couples des roues de chaque essieu.

Dans la suite on va considérer trois scénarios de simulation :

- une manœuvre d'évitement sans freinage,
- une manœuvre d'évitement avec freinage,
- la manœuvre *Fishhook* (un test standard NCAP).

Ces trois scénarios ont été choisis pour évaluer la dynamique des différents modèles sur les axes longitudinal et latéral du véhicule et leur couplage. Désormais, dans les figures, les acronymes suivants seront utilisés : BSS pour le modèle *Bicyclette Sans Suspensions*, QRSS pour le modèle *Quatre Roues Sans Suspensions* et QRAS pour le modèle *Quatre Roues Avec Suspensions*. Les paramètres du véhicule utilisés pour les simulations sont présents dans la table 3.1. Ces paramètres correspondent à ceux d'un véhicule Renault existant, un véhicule de type SUV (*Sport Utility Vehicle*) de taille moyenne.

3.1.1 Manœuvre d'évitement sans freinage

Dans cette section, on considère une manœuvre d'évitement sans freinage du véhicule. Cette manœuvre nous intéresse parce qu'elle sollicite la dynamique latérale du véhicule. Il s'agit également d'un type de manœuvre similaire à celles utilisées pour la synthèse des correcteurs et la stabilisation du véhicule. Les

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
m	2051 kg	m_u	240 kg	m_s	1811 kg
I_{xx}	753 kg m ²	I_{yy}	3192 kg m ²	I_{zz}	3625 kg m ²
$I_{u\ xx}$	377 kg m ²	$I_{u\ yy}$	461 kg m ²	$I_{u\ zz}$	584 kg m ²
$I_{s\ xx}$	376 kg m ²	$I_{s\ yy}$	2731 kg m ²	$I_{s\ zz}$	3041 kg m ²
ℓ_w	1,582 m	ℓ_f	1,126 m	ℓ_r	1,54 m
L	2,666 m	ℓ_{fu}	1,295 m	ℓ_{ru}	1,371 m
ℓ_{fs}	1,104 m	ℓ_{rs}	1,562 m	h	0,637 m
h_u	0,344 m	h_s	0,676 m	h_r	0,48 m
$I_{w\ y}$	1,87 kg m ²	r_e	0,344 m	μ	1
$c_{\alpha f}$	103592 N/rad	$c_{\alpha r}$	83833 N/rad	$c_{\kappa f}$	144817 N
$c_{\kappa r}$	112223 N	f_{rf}	0,015	f_{rr}	0,015
ρ	1,225 kg/m ³	C_d	0,35	A_f	2,23 m ²
$\ell_{susp f}$	0,133 m	$\ell_{susp r}$	0,17 m	k_{sf}	44190 N/m
k_{sr}	27821 N/m	k_{df}	1480 N s/m	k_{dr}	2618 N s/m
$k_{\phi f}$	35000 N m/rad	$k_{\phi r}$	16000 N m/rad		

TABLE 3.1 – Paramètres du véhicule.

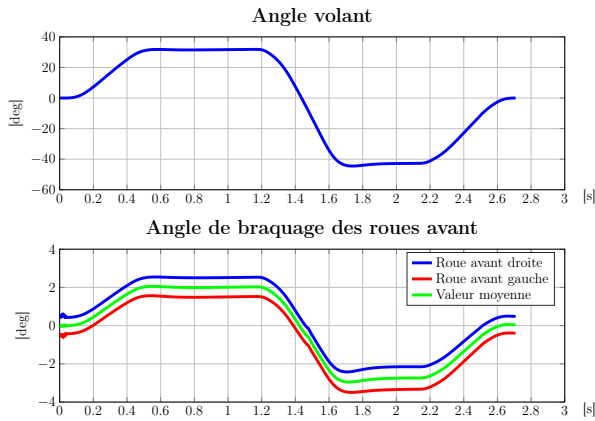


FIGURE 3.3 – Manœuvre d'évitement sans freinage : angles de braquage.

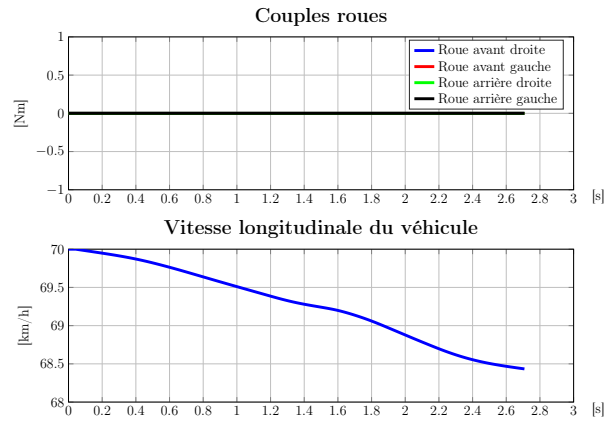


FIGURE 3.4 – Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

Figures 3.3, 3.4 et 3.6 illustrent les caractéristiques de ce scénario. En particulier, la Figure 3.3 montre l'angle du volant le long du scénario et l'angle de braquage des roues avant correspondant. Il est possible de voir dans la Figure 3.3 que les roues avant ont un angle non nul et de signe opposé quand l'angle volant est égal à zéro. Cela est effectivement dû au phénomène expliqué au début de cette section et on peut déduire que le véhicule est réglé pour avoir un angle de pincement. La Figure 3.4 montre le couple appliqué aux roues et la vitesse longitudinale du véhicule. Dans ce scénario, la vitesse initiale du véhicule est de 70 km/h et, le couple appliqué aux roues étant nul, le véhicule a une faible accélération négative due aux forces de résistance au roulement, à la traînée aérodynamique et au braquage du véhicule. La Figure 3.5 montre

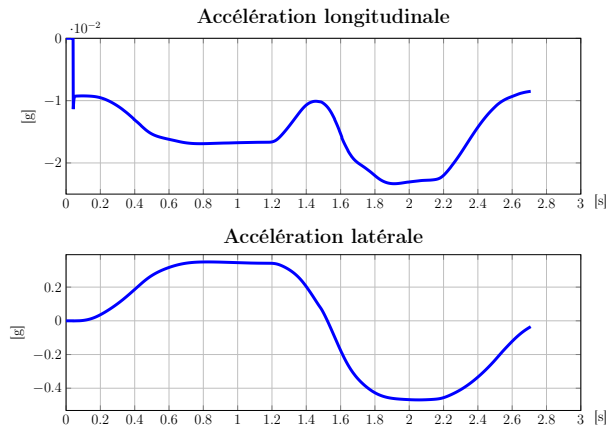


FIGURE 3.5 – Manœuvre d'évitement sans freinage : accélération du modèle MADA.

l'évolution des accélérations longitudinale et latérale du modèle MADA dans la manœuvre d'évitement sans freinage. On constate que l'accélération latérale du véhicule dépasse significativement le seuil de 0,3 g. Il s'agit donc d'une manœuvre à haute dynamique. Enfin, dans la Figure 3.6, on peut voir la trajectoire du véhicule dans l'espace. La manœuvre est donc un évitement d'obstacle avec déplacement latéral du véhicule d'environ 4 m. L'angle de braquage et les couples des roues ont donc été utilisés comme entrées pour les simulations des modèles développés. La Figure 3.7 montre la trajectoire des différents modèles véhicule. Les trois modèles développés parcourent une trajectoire très similaire et avec un déplacement latéral plus important par rapport à MADA. Cela est également confirmé en analysant l'évolution des principales variables d'état du véhicule, c'est-à-dire la vitesse longitudinale v , latérale u et de lacet r . Dans la Figure 3.8 on peut voir que v est similaire dans les quatre modèles et en particulier le modèle quatre roues avec suspensions est le plus proche de MADA. En revanche, la composante u a une amplitude supérieure pour les modèles développés, mais les valeurs sont faibles et l'allure de u reste comparable dans les quatre modèles. Dans la Figure 3.9 on voit que la vitesse de lacet r est supérieure dans les modèles développés par rapport à celle dans MADA. C'est principalement cette différence qui est à l'origine de l'écart de trajectoire qu'on observe dans la Figure 3.7 entre les modèles développés et MADA. En effet, si la rotation de lacet du véhicule est supérieure, son déplacement latéral est supérieur aussi.

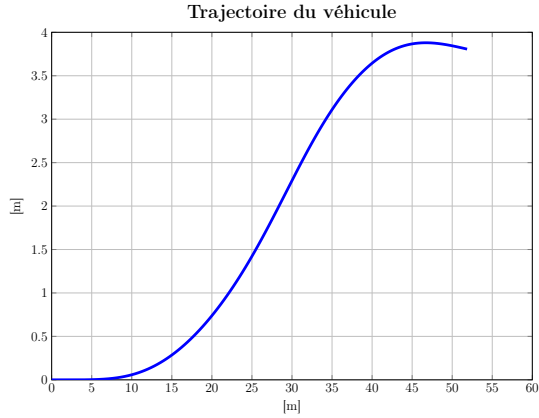


FIGURE 3.6 – Manœuvre d'évitement sans freinage : trajectoire MADA.

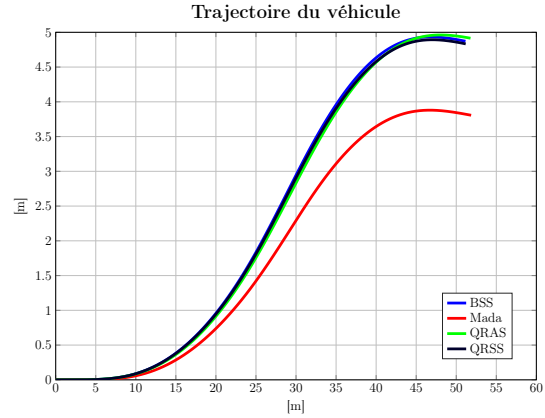


FIGURE 3.7 – Manœuvre d'évitement sans freinage : trajectoires des modèles.

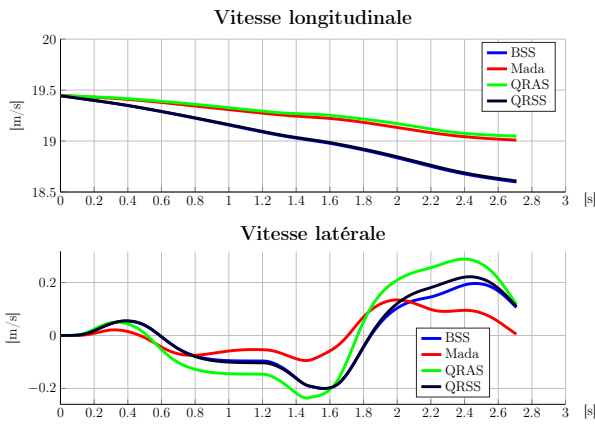


FIGURE 3.8 – Manœuvre d'évitement sans freinage : composantes du vecteur vitesse.

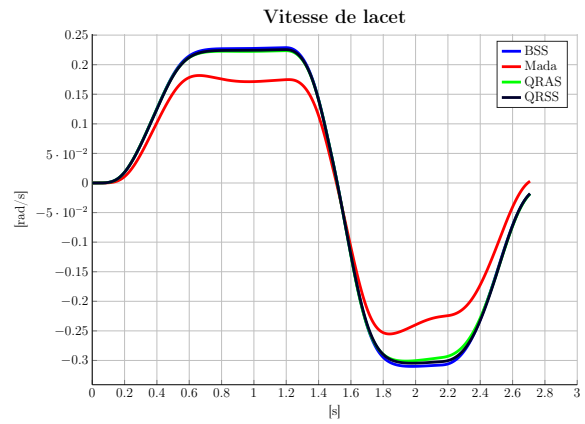


FIGURE 3.9 – Manœuvre d'évitement sans freinage : vitesse de lacet.

Pour comprendre d'où provient cette différence on considère maintenant la Figure 3.10. Elle montre les forces latérales des pneus par essieu, c'est-à-dire $2F_y$ pour le modèle bicyclette et $F_{yi} + F_{yo}$ pour les modèles avec quatre roues. On peut donc voir que dans MADA les forces latérales des pneus sont plus faibles sur les deux essieux, bien que la différence soit faible. En analysant les angles de dérive des roues dans la Figure 3.10 on n'observe pas que ceux-ci soient plus faibles dans MADA par rapport aux autres modèles. On peut donc en conclure que la différence des forces latérales entre MADA et les autres modèles est due au modèle des forces des pneus utilisé. En effet, MADA utilise la *formule magique de Pacejka* [BAKKER, NYBORG et PACEJKA 1987](#) et non pas la variation du modèle de Dugoff présentée dans [KISSAI et al. 2017](#), que les modèles développés utilisent, comme présenté dans la section 2.2. Cette différence des forces des pneus entraîne un plus faible moment sur l'axe z du véhicule et donc conduit à une vitesse de lacet et latérale plus faibles. Par conséquent, le véhicule tourne moins et le déplacement latéral est inférieur. Pour corriger cette différence, il est possible varier les coefficients de raideur latérale des pneus dans le modèle adopté ici. A présent, on étudie le transfert de charge entre les roues des côtés gauche et droite du véhicule pour les modèles avec quatre roues. Dans la Figure 3.12 on voit le transfert de charge entre les deux côtés du véhicule pour les roues avant et arrière. Le transfert de charge est très similaire pour les quatre modèles. Comme attendu, dans un virage la force normale de la roue interne au virage réduit et la charge est transférée sur la roue externe, pour chaque essieu. Comme vu dans la section 2.2, cela induit une réduction du coefficient de raideur non-linéaire du pneu c_α^* et du seuil de saturation du pneu. Finalement, pour les modèles quatre roues développés, on arrive à la saturation des forces des pneus. En effet, on voit dans la Figure 3.13 que les forces latérales des pneus à l'intérieur du contre virage a droite, entre 1,6s et 2,2s, réduisent alors que l'angle de dérive de la roue correspondante, dans la Figure 3.11, augmente. On peut donc en conclure que, en raison du transfert de charge des roues droites vers les roues gauches, le seuil de saturation des roues droites a réduit. Ce phénomène ne semble pas se produire pour le modèle MADA, alors que le transfert de charge est comparable, comme évoqué.

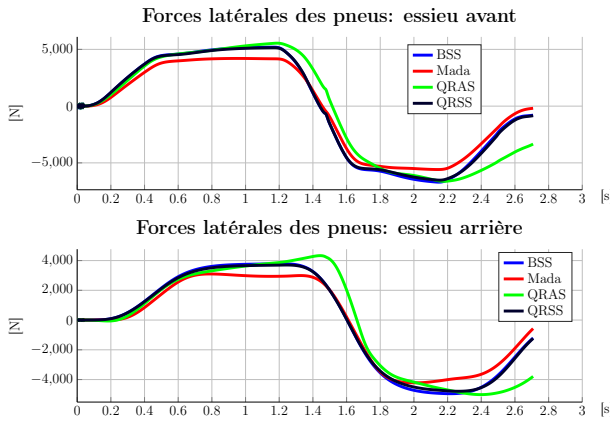


FIGURE 3.10 – Manœuvre d’évitement sans freinage : forces latérales des pneus par essieu.

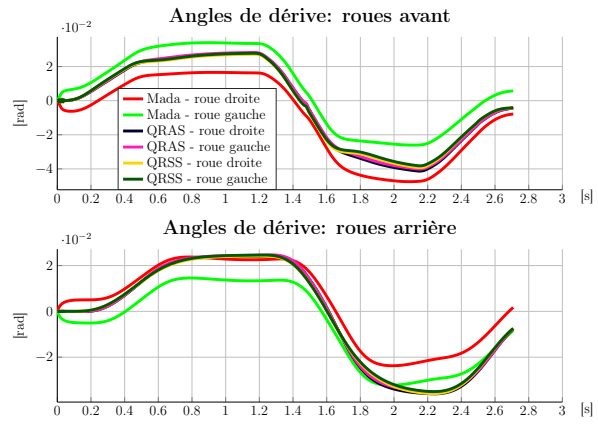


FIGURE 3.11 – Manœuvre d’évitement sans freinage : angles des dérives des roues.

On peut donc supposer que cette différence est encore une fois due à la différence de modèle des pneus utilisé. Les vitesses de rotation des roues pour les différents modèles sont présentées dans la Figure 3.14.

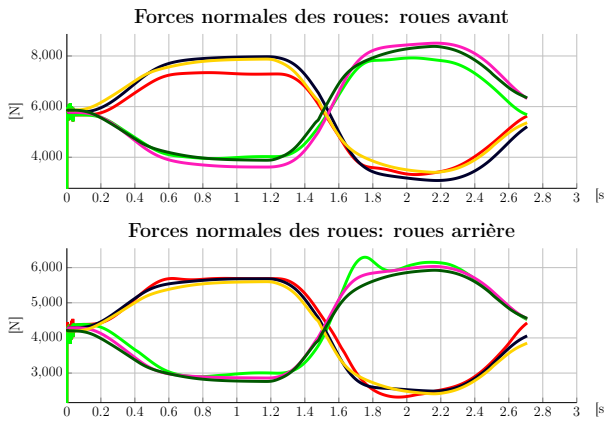


FIGURE 3.12 – Manœuvre d’évitement sans freinage : forces normales des roues.

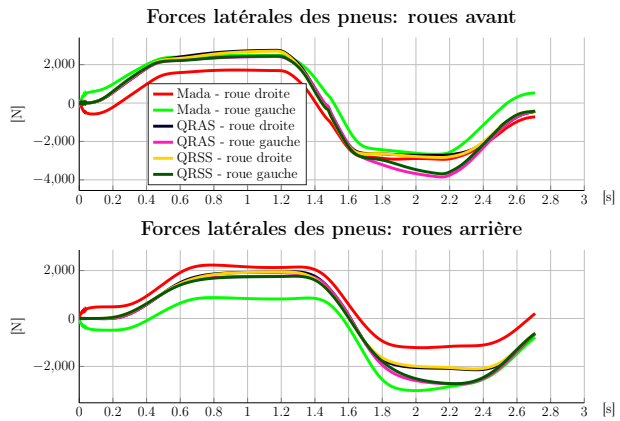


FIGURE 3.13 – Manœuvre d’évitement sans freinage : forces latérales des pneus.

L’évolution de ces variables est comparable, mais on constate que pour le modèle MADA il existe une faible différence entre la vitesse de rotation des roues du même essieu quand le véhicule effectue un virage. En effet, la roue à l’extérieur du virage parcourt une distance plus grande et elle tourne donc à une vitesse supérieure que la roue à l’intérieur du virage. Enfin, on conclut l’examen de ce scénario en analysant dans la Figure 3.15 l’angle de roulis du modèle quatre roues avec suspensions en comparaison avec celui de MADA. On observe que l’angle de roulis du modèle développé est plus important que celui de MADA. Cela est dû à la simplicité de la modélisation du châssis du modèle quatre roues avec suspensions développé par rapport à MADA. On peut supposer que la différence plus importante est due au fait que l’axe de roulis a été considéré parallèle au sol et sa hauteur constante. En effet, cet axe peut être incliné et il n’est pas constant, il se déplace selon l’accélération du véhicule, comme expliqué dans MILLIKEN et MILLIKEN 1997 et REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001. De plus, la raideur des ressorts et des barres anti-roulis et l’amortissement des suspensions ont été considérés constants. Ce n’est pas le cas en réalité et ces coefficients varient selon le point de fonctionnement du système. Ces différences de modélisation sont donc probablement à l’origine de l’écart de l’angle de roulis entre le modèle quatre roues avec suspensions et MADA. Toutefois il reste difficile d’établir avec certitude toutes les causes de cette disparité, car les détails de la modélisation de MADA ne sont pas entièrement accessibles. Finalement on peut en conclure que les modèles développés, dans ce scénario, ont un comportement globalement représentatif de la réalité. Il est utile de rappeler que le modèle MADA a été créé pour de la simulation et il est beaucoup plus riche que les modèles présentés dans le chapitre 1. Des écarts dans le comportement de ces modèles par rapport à celui de MADA sont donc attendus et compréhensibles. Dans cette manœuvre qui sollicite principalement la dynamique latérale, l’ajout des suspensions ne semble pas particulièrement enrichissant, surtout au vue

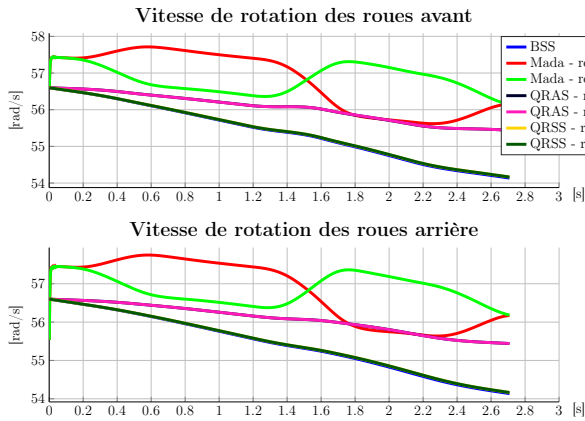


FIGURE 3.14 – Manœuvre d'évitement sans freinage : vitesse de rotation des roues.

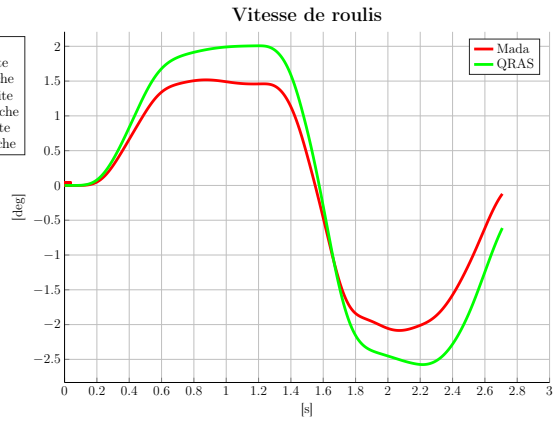


FIGURE 3.15 – Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de roulis.

de la complexité supérieure qu'il engendre.

3.1.2 Manœuvre d'évitement avec freinage

Dans cette section on considère un scénario de simulation avec une manœuvre d'évitement d'obstacle, mais cette fois-ci un couple de freinage est appliqué aux roues. Cette manœuvre nous intéresse parce qu'elle sollicite la dynamique longitudinale et latérale du véhicule de façon combinée. De plus, elle représente un autre type de manœuvre auquel on sera confrontés pour la synthèse d'un correcteur et la stabilisation du véhicule. Les Figures 3.16 et 3.17 montrent les angles de braquage et les couples aux roues en sortie

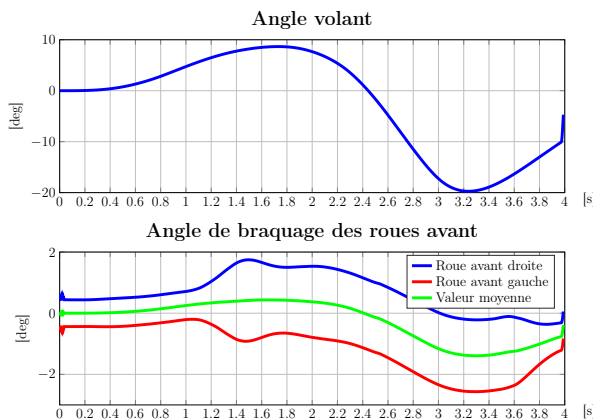


FIGURE 3.16 – Manœuvre d'évitement avec freinage : angles de braquage.

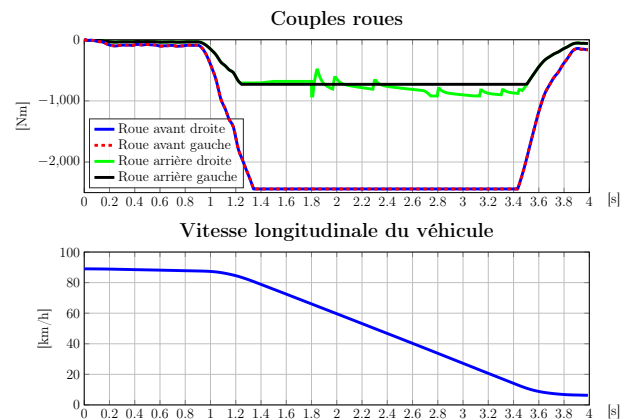


FIGURE 3.17 – Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

de MADA et utilisés comme entrées pour les modèles conçus. Il est possible d'observer dans la Figure 3.16 comme l'angle de pincement des roues avant augmente, les roues tournent vers l'intérieur. Cela est différent du comportement attendu selon l'explication donnée au début de la section : les forces des pneus produites en cas de freinage induisent un couple sur les axes verticaux des roues, en les faisant tourner vers l'extérieur, soit en augmentant l'angle d'ouverture. Même si cela reste vrai, souvent la géométrie du châssis, comme expliqué dans REIMPELL, STOLL et BETZLER 2001, est développée pour que, pendant le freinage, quand la charge du véhicule est transférée sur l'essieu avant, l'angle de pincement des roues avant augmente. Cela est fait pour compenser le couple produit par les forces des pneus et empêcher aux roues de tourner vers l'extérieur. MADA comportant un modèle du châssis, l'augmentation de l'angle de pincement observée dans la Figure 3.16 est donc le résultat de la dynamique du châssis. Dans la Figure 3.17 on voit la vitesse longitudinale du véhicule : la vitesse initiale est d'environ 90 km/h et en 4 s est freiné jusqu'à environ 6 km/h. Le freinage au cours de la manœuvre est donc fort, la décélération passe en dessous de -9m/s^2 . De plus, dans la Figure 3.18 on voit que le véhicule est déplacé latéralement d'environ 1m. Les accélérations longitudinale et latérale du modèle MADA sont présentées dans la Figure

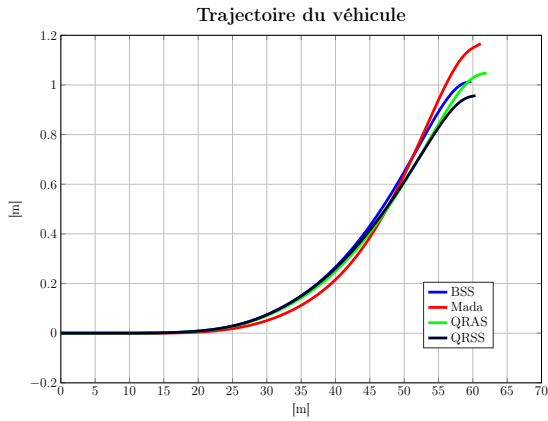


FIGURE 3.18 – Manœuvre d'évitement avec freinage : trajectoires des modèles.

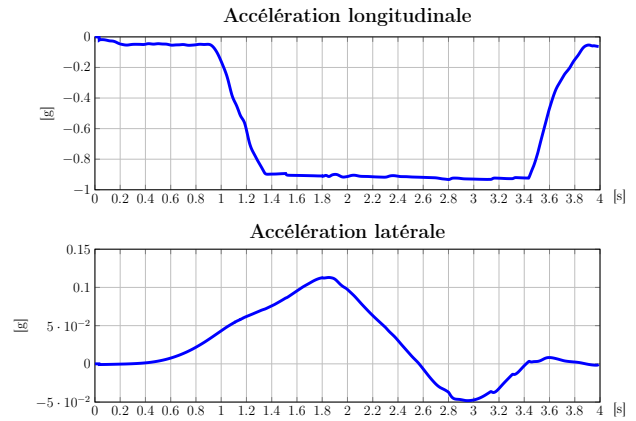


FIGURE 3.19 – Manœuvre d'évitement avec freinage : accélération du modèle MADA.

3.19. Dans ce cas l'accélération longitudinale atteint presque 1 g. Cette manœuvre représente également un cas à haute dynamique. Dans la Figure 3.20 on peut voir que les vitesses longitudinale et latérale

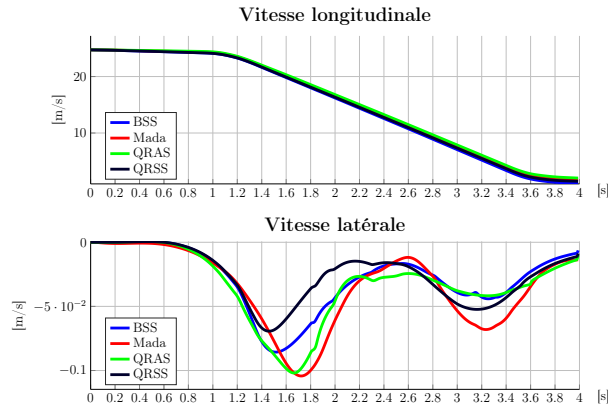


FIGURE 3.20 – Manœuvre d'évitement avec freinage : composantes du vecteur vitesse.

des modèles développés sont très similaires à celle du modèle MADA. En effet, les Figures 3.21 et 3.22 montrent que les forces des pneus sur les deux essieux, longitudinales et latérales, sont très similaires pour tous les modèles. Les forces latérales ont une amplitude légèrement supérieure dans MADA, par rapport aux modèles développés. C'est en raison de cela que dans la Figure 3.18 le modèle MADA montre un déplacement latéral légèrement plus important que celui des autres modèles. On peut imaginer que cette différence vient toujours du modèle des pneus utilisé et de comment celui-ci traite le glissement combiné, largement sollicité dans ce scénario. Dans la Figure 3.23 on observe que le transfert de charge entre l'essieu avant et l'essieu arrière est très similaire dans tous les modèles. Dans la Figure 3.24 on voit que la dynamique de roulis et de tangage du modèle quatre roues avec suspensions est comparable à celle de MADA. Finalement, dans la Figure 3.25 on constate que les vitesses de rotations des roues pour les différents modèles sont comparables également dans une manœuvre avec une importante variation de la vitesse longitudinale du véhicule. On peut donc en conclure que sur ce type de trajectoire, combinant de la haute dynamique longitudinale et latérale, les modèles développés ont un comportement représentatif du véhicule.

3.1.3 Manœuvre *Fishhook*

Dans cette section, on considère un scénario de simulation avec une manœuvre *Fishhook*. C'est une manœuvre utilisée aux États Unis par la NHTSA (*National Highway Traffic Safety Administration*) dans les tests d'évaluation des véhicules NCAP (*New Car Assessment Program*). Il s'agit d'une manœuvre de braquage et contre-braquage très rapide qui, selon la NHTSA, vise à reproduire une manœuvre effectuée par un conducteur en situation de panique. Le *Fishhook* est utilisé dans les tests NCAP pour pouvoir évaluer la propension d'un véhicule à se retourner. La procédure pour effectuer la manœuvre est expliquée

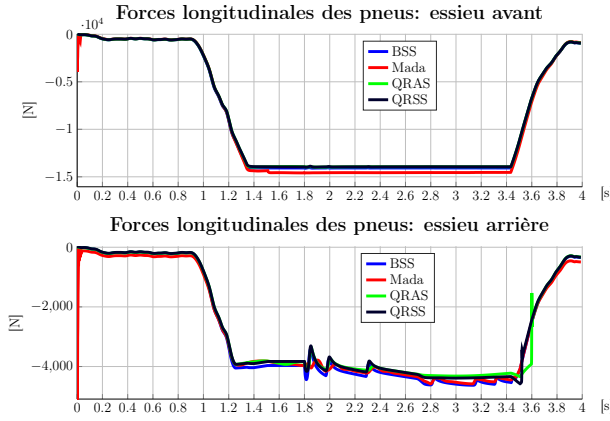


FIGURE 3.21 – Manœuvre d’évitement avec freinage : forces longitudinales des pneus.

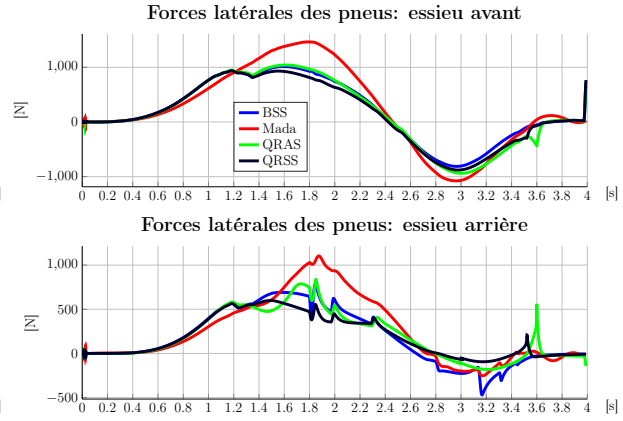


FIGURE 3.22 – Manœuvre d’évitement avec freinage : forces latérales des pneus.

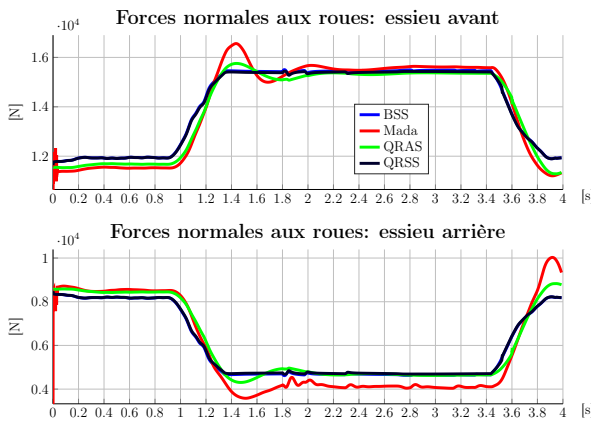


FIGURE 3.23 – Manœuvre d’évitement avec freinage : forces normales.

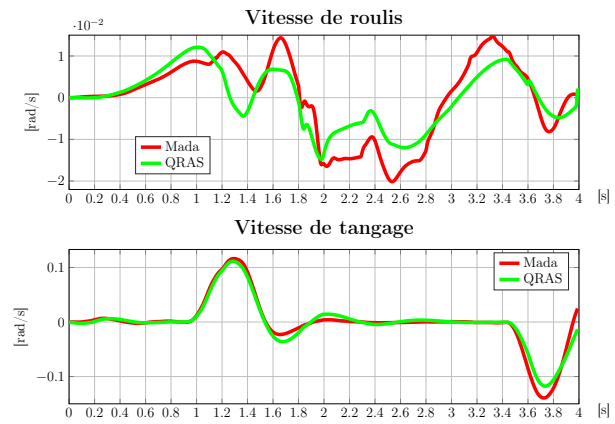


FIGURE 3.24 – Manœuvre d’évitement avec freinage : vitesse de roulis et de tangage.

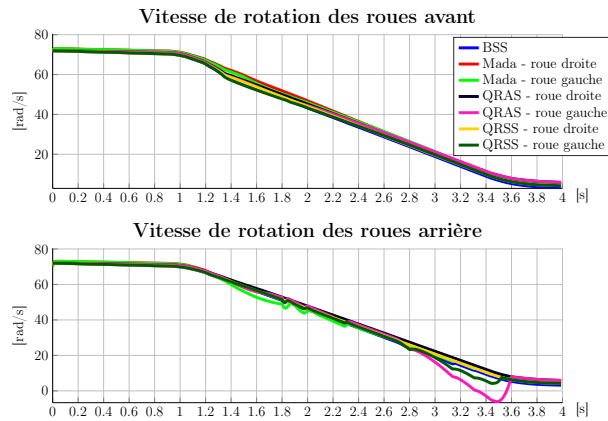


FIGURE 3.25 – Manœuvre d’évitement avec freinage : vitesses de rotation des roues.

dans [NHTSA 2013](#). La Figure 3.26 montre l’angle de braquage du véhicule le long de la manœuvre *Fishhook*. Le véhicule avance en roue libre, c’est-à-dire qu’aucun couple n’est appliqué aux roues. L’angle δ_{max} correspond à l’angle nécessaire pour avoir une accélération latérale constante de $0,3g$ à vitesse longitudinale constante et égale à la vitesse à laquelle le véhicule est initialisé au début de la manœuvre. On s’intéresse à évaluer les modèles développés dans le chapitre 1 sur cette manœuvre parce qu’elle sollicite l’axe latéral du véhicule dans des conditions de très haute dynamique. La Figure 3.27 montre l’angle volant et les angles de braquage des roues pour une manœuvre *Fishhook* effectuée avec MADA. Dans la Figure 3.28 on voit qu’effectivement aucun couple n’est appliqué aux roues et que la manœuvre est

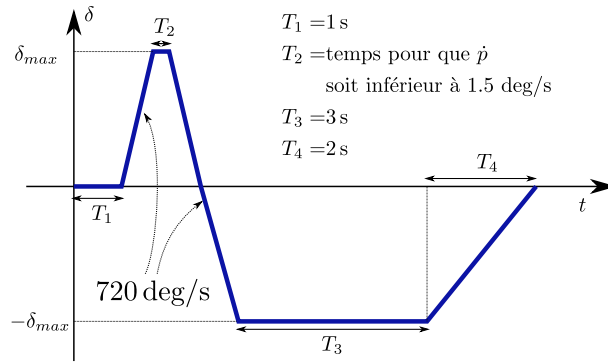


FIGURE 3.26 – Angle de braquage de la manœuvre *Fishhook*.

initialisée à 60 km/h. L'accélération latérale du véhicule, présentée dans la Figure 3.29 est très importante,

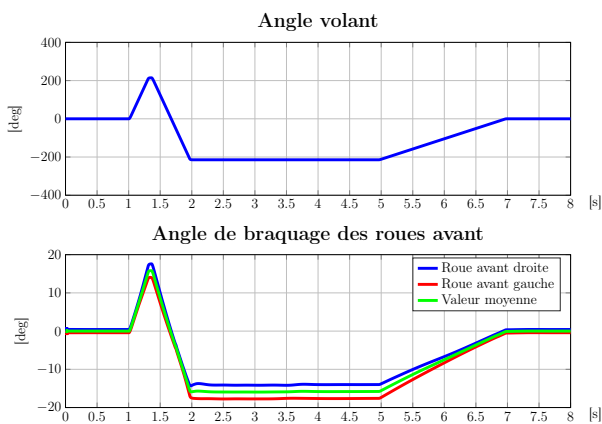


FIGURE 3.27 – Manœuvre *Fishhook* : angles de braquage.

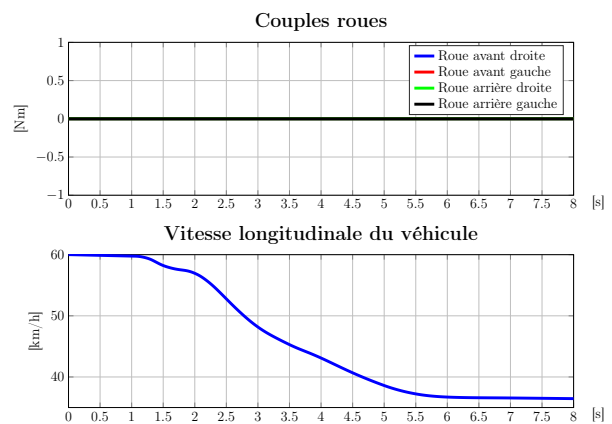


FIGURE 3.28 – Manœuvre *Fishhook* : couples roues et vitesse longitudinale.

atteignant 1 g. Cette manœuvre sollicite la dynamique latérale du véhicule encore plus de la manœuvre d'évitement sans freinage présentée précédemment. Dans la Figure 3.30 on voit que le modèle bicyclette

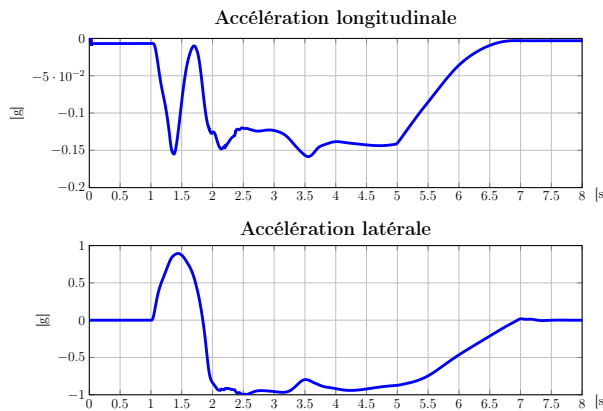


FIGURE 3.29 – Manœuvre *Fishhook* : accélération du modèle MADA.

sans suspensions effectue une trajectoire très différente des autres modèles, une fois que le contre virage à droite est effectué. En effet, si on analyse sa vitesse longitudinale dans la Figure 3.31, on voit qu'elle devient négative. On comprend donc que pour le modèle bicyclette le véhicule a fait un tête-à-queue, ce qui apparaît également dans la Figure 3.32, où la trajectoire du véhicule et sa position dans l'espace à différents instants sont indiquées. Pour comprendre pourquoi ce phénomène n'est présent que sur le modèle bicyclette, il faut rappeler une différence importante existante dans le calcul de l'accélération de lacet entre un modèle avec deux roues et un modèle avec quatre roues. Pour cela on fait référence aux

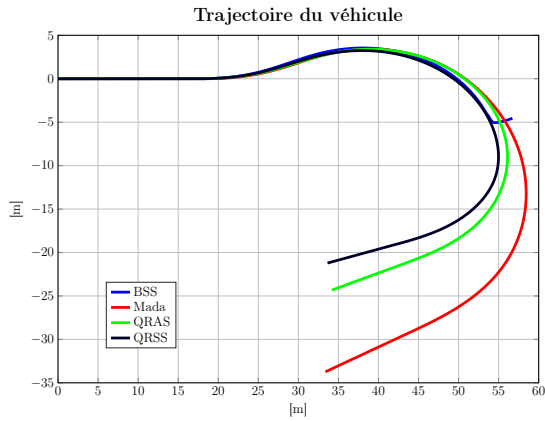


FIGURE 3.30 – Manœuvre *Fishhook* : trajectoires des modèles.

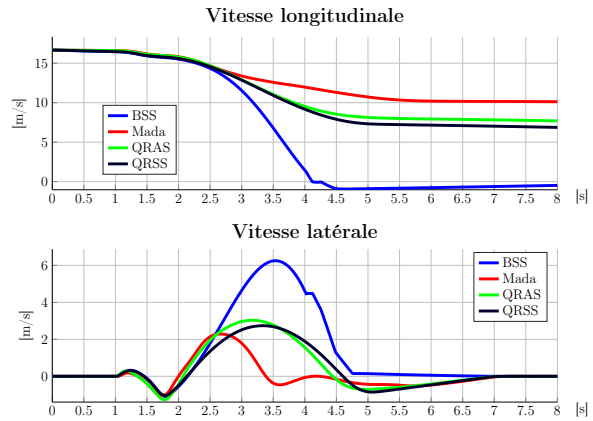


FIGURE 3.31 – Manœuvre *Fishhook* : composantes du vecteur vitesse.

équations du mouvement des sections 1.1.2 et 1.2.2. Plus particulièrement, on a montré dans la section

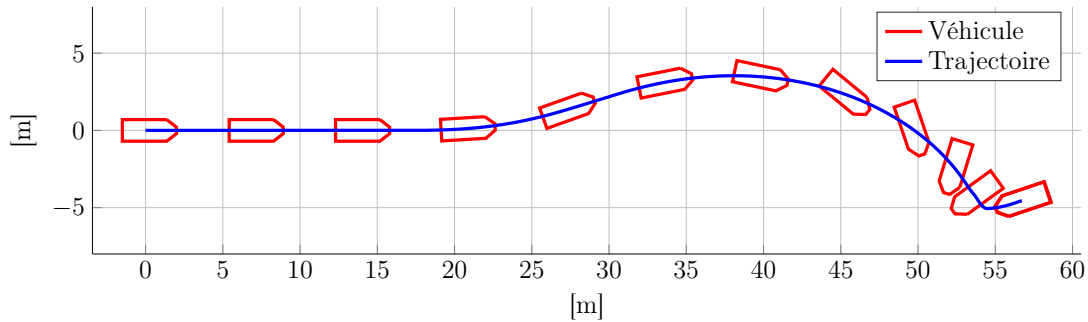
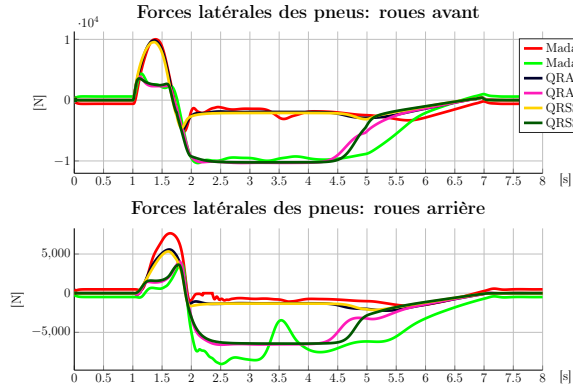
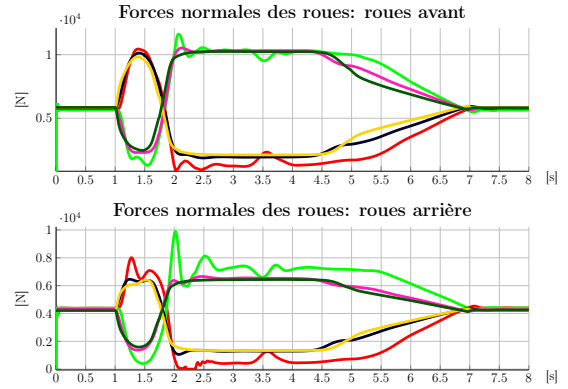


FIGURE 3.32 – Détail de la manœuvre *Fishhook* pour la trajectoire du modèle bicyclette sans suspensions.

1.1.2 que les composantes longitudinales des forces latérales des pneus ne produisent pas un moment sur l'axe z du véhicule, pour le modèle bicyclette, parce qu'elles sont appliquées sur l'axe x du véhicule. En revanche, on a observé dans la section 1.2.2 que pour un modèle avec quatre roues, ces composantes des forces produisent un moment sur l'axe vertical du véhicule. Les composantes longitudinales des roues du côté gauche produisent un moment qui pousse le véhicule à tourner vers la gauche, celles du côté droit poussent le véhicule à tourner vers la droite. En particulier, dans ce scénario de simulation, les forces latérales des roues du côté gauche du véhicule sont très importantes et celles du côté droit sont faibles, comme on peut voir dans la Figure 3.33. Cela est dû au fait que la manœuvre est particulièrement brusque et en particulier les roues du côté gauche, à partir de 2s, portent la quasi totalité de la charge du véhicule. Le transfert de charge, illustré pour les modèles avec quatre roues dans la Figure 3.34, et son impact sur les forces des pneus a donc un effet de sous-virage sur le véhicule : ce phénomène tend à tourner le véhicule vers la gauche, alors que la commande est supposée le faire tourner à droite. Cette composante de sous-virage n'existe pas sur le modèle bicyclette. Le résultat de l'application des entrées sur le modèle bicyclette n'est donc pas représentatif de cette manœuvre. On observe que le véhicule sur-vire et finit par faire un tête-à-queue. Cette manœuvre nous permet donc de bien voir une différence importante, dans des conditions de très forte dynamique, entre un modèle avec deux roues et un avec quatre roues. En revanche, il faut bien garder à l'esprit que si les modèles avec quatre roues développés avaient utilisé une distribution de charge constante, donc sans transfert de charge entre les deux côtés du véhicules, le résultat attendu serait également celui d'un survirage comme pour le modèle bicyclette sans suspensions. Dans ce cas, il n'y aurait pas eu de disparité importante entre les forces des pneus des deux côtés du véhicule, car la charge aurait été également distribuée. Le moment des forces des pneus du côté droit aurait donc compensé celui du côté gauche, éliminant le facteur sous-vireur qui empêche le véhicule de faire un tête-à-queue. Il semble donc très important d'utiliser une distribution de charge variable sur un modèle quatre roues, pour qu'il soit le plus représentatif possible dans des conditions de haute dynamique latérale.


 FIGURE 3.33 – Manœuvre *Fishhook* : forces latérales des modèles avec quatre roues.

 FIGURE 3.34 – Manœuvre *Fishhook* : forces normales des modèles avec quatre roues.

3.2 Choix d'un modèle pour la synthèse du correcteur

Il est maintenant nécessaire de faire un choix du modèle qu'on utilisera dans la deuxième partie de ce manuscrit en vue de la synthèse des correcteurs pour la stabilisation du véhicule le long d'une trajectoire de référence à haute dynamique. En effet, comme déjà discuté dans le chapitre 1, le but de la modélisation est l'obtention d'un modèle pour la synthèse d'un correcteur pour la stabilisation du véhicule le long d'une trajectoire à haute dynamique. Pour cela, le choix du modèle doit se baser sur sa représentativité pour des manœuvres à haute dynamique. De plus, un compromis doit être fait entre la représentativité du modèle et sa complexité. En effet, plus le modèle est riche et les équations le décrivant sont complexes, plus la synthèse du correcteur est difficile.

On s'appuiera dans la suite sur les résultats des simulations détaillées dans la section 3.1. En complément de l'analyse des simulations déjà faite dans la section précédente, on cherche aussi un critère plus objectif pouvant nous aider à comprendre dans quelle mesure les modèles développés s'approchent du modèle à haute représentativité MADA. Pour cela on a choisi de faire une analyse de corrélation et régression [MERKURYEVA et VECHERINSKA 2010](#). Le *Root-Mean-Square Error* pourrait être utilisé également pour comparer les modèles développés avec MADA.

Définition 1. [KENDALL et STUART 1979](#) En considérant deux variables aléatoires X et Y avec respectivement une moyenne μ_X et μ_Y et un écart type σ_X et σ_Y , leur *coefficient de corrélation de Pearson* est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (3.2)$$

où $\text{cov}(X, Y)$ est la covariance de X et Y . En considérant que $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$, on peut aussi donner une autre définition de $\rho(X, Y)$ en fonction de la moyenne et de la variance :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (3.3)$$

Si X et Y sont deux suites finies de N éléments, avec x_i et y_i un élément de la suite, alors le coefficient de corrélation est calculé de la façon suivante :

$$\rho(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (3.4)$$

Au vue de la définition (3.2), $\rho(X, Y)$ peut être interprété comme une mesure normalisée de la covariance, telle que sa valeur est toujours comprise entre -1 et 1. Comme la covariance, le coefficient de corrélation de Pearson $\rho(X, Y)$ est une mesure de la *corrélation linéaire* entre X et Y et il ignore tous les autres types de dépendance entre les deux variables. Alors si $\rho(X, Y) = 1$ ou $\rho(X, Y) = -1$ il existe une relation linéaire parfaite entre X et Y , respectivement positive et négative, tandis que $\rho(X, Y) = 0$ signifie qu'il n'existe aucune relation linéaire entre les deux variables. Dans notre cas, on peut utiliser la définition (3.4) pour déterminer le coefficient de corrélation entre les variables d'état du véhicule calculées par les modèles développés et MADA le long des différentes simulations. On considère par exemple $v_M(t)$

la vitesse longitudinale du véhicule calculée avec le modèle MADA et $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_3(t)$ la vitesse longitudinale calculée respectivement par le modèle bicyclette sans suspensions, le modèle quatre roues sans suspensions et le modèle quatre roues avec suspensions le long de la même simulation. On peut prendre N échantillons aux mêmes instants pour les quatre variables et obtenir les suites v_M , v_1 , v_2 et v_3 . En utilisant la définition (3.4) on calcule les coefficients de corrélation $\rho(v_M, v_1)$, $\rho(v_M, v_2)$ et $\rho(v_M, v_3)$. Ces coefficients nous donnent donc une mesure de la relation linéaire entre la vitesse longitudinale calculée par les modèles du chapitre 1 et MADA. Étant donné qu'on considère MADA comme le modèle de référence, idéalement on recherche une relation linéaire parfaite entre les modèles développés et MADA, donc on aimerait retrouver un coefficient de corrélation égal à 1 pour chaque variable d'état du véhicule. Plus le coefficient de corrélation s'approche de 1, plus on considère que le modèle est proche de MADA. En revanche, une relation linéaire parfaite pour une variable d'état entre MADA et un modèle ne suffit pas à conclure que la variable d'état du modèle en analyse est identique à celle de MADA, dans la simulation. En effet, la variable d'état du modèle pourrait être exactement deux fois plus importante que celle de MADA et le coefficient de corrélation serait toujours égal à 1. Il faut donc considérer aussi le coefficient de proportionnalité entre les deux variables.

Théorème 1. **FREEDMAN 2009** *On considère deux variables X et Y . Un simple modèle de régression linéaire est donné par :*

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon \quad (3.5)$$

où β_0 et β_1 sont respectivement l'interception et la pente à estimer et ϵ est l'erreur aléatoire. Il existe une solution analytique pour calculer β_0 et β_1 , fondée sur la méthode des moindres carrés. Si X et Y sont deux suites de N valeurs alors :

$$\beta = \left(\hat{X}^T \hat{X} \right)^{-1} \hat{X}^T Y \quad (3.6)$$

où $\beta = [\beta_0 \ \beta_1]^T$ et $\hat{X} = [1 \ X]^T$.

Dans notre cas on peut considérer $\beta_0 = 0$ et estimer β_1 avec (3.6) en faisant une régression linéaire où X est égal à la variable d'état du modèle développé, par exemple v_1 , v_2 ou v_3 , et Y est la variable d'état de MADA, donc dans l'exemple v_M . S'il existe une relation linéaire entre la variable d'état du modèle développé et celle de MADA, qu'on vérifie à travers le coefficient de corrélation, alors β_1 représente le *coefficient de proportionnalité* entre les deux variables. Plus β_1 est proche de 1, plus la variable d'état du modèle est proche à celle de MADA. Dans la suite le coefficient β_1 calculé pour v_M et v_1 est appelé $\beta(v_M, v_1)$.

En plus de regarder séparément les coefficients de corrélation et de proportionnalité pour chaque variable d'état du véhicule, on peut aussi définir un coût total, fondé sur ces coefficients, représentatif du comportement global du modèle. Pour chaque variable d'état X et chaque modèle k du chapitre 1 on définit le coût :

$$J_k(X) = \frac{|(1 - \beta(X_M, X_k))|}{\rho(X_M, X_k)^3} \quad (3.7)$$

On a choisi d'utiliser le coefficient de corrélation au cube pour pénaliser les variables avec une faible corrélation à MADA. En effet, si le degré de relation linéaire entre deux variables est faible, le coefficient de proportionnalité, trouvé en supposant une relation linéaire entre les deux variables n'est plus représentatif d'une réelle proportionnalité entre les deux quantités. On comprend donc qu'il est important de pénaliser davantage le coût de cette variable. Dans la suite, on considérera deux variables différentes pour juger la totalité du comportement du modèle. La première est la moyenne des tous les coûts des variables d'états communes à tous les modèles. Pour la deuxième, qu'on considérera comme le coût global pour l'évaluation des modèles, la moyenne des coûts d'un ensemble réduit de variables d'état¹, c'est-à-dire la vitesse longitudinale et de lacet, la position longitudinale et latérale et l'angle de lacet, est déterminée :

$$J_{gk} = \frac{J_k(v) + J_k(r) + J_k(x_v) + J_k(y_v) + J_k(\psi)}{5} \quad (3.8)$$

Plus la valeur de (3.8) est proche de zéro, plus la dynamique et la position du modèle en question est proche de celle de MADA. On a choisi d'utiliser v et r pour la définition de J_k , car ces variables définissent la dynamique de déplacement du véhicule dans l'espace. L'objectif principal du contrôle, comme on verra dans la deuxième partie de ce manuscrit, sera d'éliminer l'écart du véhicule par rapport à la trajectoire de

1. Les variables ne sont pas normalisées, mais il est important de souligner que cela est conseillé si leur ordre de grandeur est très différent.

référence. Ce qui nous intéresse le plus dans le modèle du véhicule employé pour la synthèse du correcteur est qu'il puisse représenter correctement la dynamique de déplacement dans l'espace. On a donc considéré aussi les variables de position du véhicule dans l'espace et son attitude, c'est-à-dire x_v , y_v et ψ . En revanche, on ne considère pas la vitesse latérale u dans le calcul de J_{gk} . Dans la définition des modèles de dynamique véhicule, la vitesse latérale est plus importante pour quantifier le glissement latéral du véhicule et par conséquent déterminer les angles de dérive des pneus, fondamentaux pour le calcul des forces latérales des pneus. En revanche, la valeur de la vitesse latérale est très faible en comparaison de la vitesse longitudinale, même pour des manœuvres à haute dynamique comme celles considérées dans les scénarios de simulation de la section 3.1. Les seuls cas où la vitesse latérale atteint des valeurs élevées se retrouvent dans le modèle bicyclette sans suspensions, dans le cas de la manœuvre *Fishhook* de la section 3.1.3, quand le véhicule fait un tête-à-queue. Ce cas n'est pas représentatif des types de manœuvre qu'on souhaite réaliser pour un évitement d'obstacle, étant donné que dans ces conditions le véhicule est difficilement manœuvrable. La vitesse latérale u étant donc faible, la dynamique de déplacement du véhicule dans l'espace est principalement caractérisée par la vitesse longitudinale v et r . Pour cette raison il a été choisi d'exclure u du calcul du coût global. Les vitesses de rotation des roues ω_{wfi} , ω_{wfo} , ω_{wri} et ω_{wro} ont été exclues aussi du calcul de J_k . Ces variables d'état sont en effet utiles à la définition des modèles pour le calcul du glissement longitudinal des roues et donc le calcul des forces longitudinales des pneus, cependant elles ne contribuent pas directement à la dynamique de déplacement du véhicule dans l'espace. Pour la même raison les vitesses de roulis et de tangage, p et q , ne sont pas prises en compte. De plus, parmi les modèles développés, seul le modèle quatre roues avec suspensions comporte ces variables d'état. Dans la suite il faut considérer que pour le modèle bicyclette sans suspensions, la vitesse de rotation des deux roues avant a été considérée égale à la vitesse de la seule variable d'état ω_{wf} , car ce modèle a une seule roue au centre de chaque essieu. La même chose a été faite pour les roues arrière. La table 3.2 donne les résultats de l'analyse pour le scénario de la manœuvre d'évitement sans freinage, vue dans la section 3.1.1. Les coûts les plus faibles ont été marqués en vert, les plus élevés en rouge et les moyens en jaune. On peut voir que le coût global des trois modèles, calculé selon (3.8), est très proche pour les trois modèles. En effet, en section 3.1.1 on avait vu que les trois modèles se comportaient de façon similaire l'un par rapport à l'autre. Par rapport au coût global et la moyenne, le modèle quatre roues avec suspensions est un peu plus proche de MADA, mais si on analyse individuellement le coût de

Variable d'état	ρ			β			J_k		
	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS
v	0,9991	0,9991	0,9994	0,9894	0,9897	1,0012	0,0107	0,0103	0,0012
u	0,8321	0,8454	0,9393	1,3715	1,5187	2,2289	0,6449	0,8585	1,4829
r	0,9980	0,9979	0,9983	1,2731	1,2567	1,2457	0,2747	0,2583	0,2470
x_v	1,0000	1,0000	1,0000	0,9890	0,9895	0,9982	0,0110	0,0105	0,0018
y_v	0,9999	0,9999	0,9997	1,2644	1,2511	1,2583	0,2644	0,2512	0,2586
ψ	0,9992	0,9992	0,9992	1,2927	1,2771	1,2721	0,2934	0,2777	0,2727
ω_{wfi}	0,2415	0,2429	0,2267	0,9745	0,9748	0,9861	1,8096	1,7555	1,1944
ω_{wfo}	0,8914	0,8915	0,9006	0,9753	0,9756	0,9868	0,0348	0,0344	0,0180
ω_{wri}	0,2283	0,2291	0,2251	0,9746	0,9750	0,9863	2,1320	2,0804	1,2009
ω_{wro}	0,8846	0,8839	0,8865	0,9755	0,9758	0,9871	0,0354	0,0350	0,0186
Moyenne							0,5511	0,5572	0,4696
Coût global							0,1708	0,1616	0,1563

TABLE 3.2 – Indicateurs de la manœuvre d'évitement sans freinage.

Variable d'état	ρ			β			J_k		
	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS
v	1,0000	1,0000	1,0000	0,9877	0,9920	1,0077	0,0123	0,0080	0,0077
u	0,9296	0,8237	0,9311	0,7881	0,6554	0,9032	0,2637	0,6166	0,1199
r	0,9739	0,9615	0,9705	0,8204	0,7067	0,7973	0,1945	0,3299	0,2218
x_v	0,9999	1,0000	1,0000	0,9869	0,9916	1,0082	0,0131	0,0084	0,0082
y_v	0,9975	0,9969	0,9986	0,9022	0,8510	0,9171	0,0985	0,1504	0,0833
ψ	0,9814	0,9858	0,9858	0,8100	0,7475	0,8073	0,2010	0,2636	0,2012
ω_{wfi}	0,9997	0,9994	0,9997	0,9655	0,9666	0,9822	0,0345	0,0335	0,0178
ω_{wfo}	0,9992	0,9995	0,9996	0,9598	0,9664	0,9802	0,0403	0,0336	0,0198
ω_{wri}	0,9983	0,9968	0,9885	0,9956	0,9969	1,0003	0,0045	0,0031	0,0003
ω_{wro}	0,9999	0,9998	0,9997	0,9801	0,9863	1,0020	0,0199	0,0137	0,0020
							Moyenne		
							0,0882	0,1461	0,0682
							Coût global		
							0,1039	0,1521	0,1044

TABLE 3.3 – Indicateurs de la manœuvre d'évitement avec freinage.

chaque variable, il est le modèle le plus éloigné pour la vitesse latérale u . En effet, dans la Figure 3.8, on a observé que la vitesse latérale de ce modèle est la plus éloignée par rapport à celle de MADA. En revanche, si on évalue le coefficient de corrélation, celui de ce modèle est le plus élevé des trois, mais le coefficient de proportionnalité est le plus loin de 1. Cela signifie que la vitesse latérale du modèle quatre roues avec suspensions a une tendance similaire à celle de MADA, mais avec une amplitude plus importante. La table 3.3 présente les résultats de l'analyse pour le scénario de la manœuvre d'évitement avec freinage, vue dans la section 3.1.2. Également dans ce cas le coût global est très proche pour les trois modèles et cela confirme ce qu'on avait vu avec l'analyse des courbes. Le coût du modèle bicyclette sans suspensions est le plus faible, mais celui du modèle quatre roues avec suspensions est quasiment égal. En revanche, si on analyse la moyenne de toutes les variables d'état, le modèle quatre roues avec suspensions a un coût plus faible. Enfin, dans la table 3.4 on voit les informations pour le scénario de la manœuvre *Fishhook*, vue dans la section 3.1.3. Comme attendu suite à l'analyse faite dans la section 3.1.3, le modèle bicyclette sans suspensions, qui dans ce cas fait un tête-à-queue, est celui ayant le coût global plus grand. Il est aussi possible de voir que le modèle quatre roues avec suspensions est meilleur que celui sans suspensions, même en analysant individuellement le coût de chaque variable d'état. Plus la dynamique de la trajectoire est forte, plus un modèle avec complexité supérieure semble montrer ses avantages.

Pour le choix final du modèle pour la synthèse des correcteurs, on doit considérer dans quel type de trajectoire on veut contrôler le véhicule. Comme on verra dans la deuxième partie de ce manuscrit, pour le contrôle on traitera des manœuvres d'évitement d'obstacle sans et avec freinage du véhicule, comme celles analysées dans les sections 3.1.1 et 3.1.2. Bien que la manœuvre *Fishhook* soit très intéressante pour tester les limites des différents modèles développés, elle n'est pas intéressante pour le contrôle du véhicule. Comme évoqué précédemment dans la section 3.1.3, elle reproduit une manœuvre qu'un conducteur pris par la panique pourrait réaliser. Elle ne représente donc pas une manœuvre pertinente que le véhicule doit réaliser en cas d'urgence. En se fondant donc sur les résultats des deux premiers scénarios, il semble que les deux modèles quatre roues ne fournissent pas un avantage évident par rapport au modèle bicyclette sans suspensions. En revanche, ils sont plus complexes à manipuler pour la synthèse des correcteurs, particulièrement par la présence d'un nombre plus important de non-linéarités, étant donné que le nombre des forces des pneus est multiplié par deux. On peut donc en conclure que le modèle bicyclette sans

Variable d'état	ρ			β			J_k		
	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS	BSS	QRSS	QRAS
v	0,9778	0,9939	0,9947	0,5902	0,8808	0,9094	0,4383	0,1214	0,0920
u	0,3468	0,5658	0,6781	1,1138	0,8703	1,1182	2,7281	0,7162	0,3792
r	0,6333	0,9397	0,9521	1,0030	1,0103	0,9932	0,0119	0,0124	0,0079
x_v	0,9095	0,9965	0,9982	1,0482	0,9500	0,9711	0,0640	0,0505	0,0290
y_v	0,8642	0,9920	0,9981	0,1911	0,6863	0,7499	1,2531	0,3213	0,2515
ψ	0,9375	0,9953	0,9971	1,2095	1,1043	1,0608	0,2542	0,1057	0,0613
ω_{wfi}	0,6691	0,9811	0,9781	0,6215	0,8344	0,8608	1,2635	0,1753	0,1488
ω_{wfo}	0,6467	0,9894	0,9908	0,6527	0,8721	0,8972	1,2842	0,1320	0,1057
ω_{wri}	0,9667	0,9855	0,9843	0,5701	0,8504	0,8783	0,4759	0,1563	0,1276
ω_{wro}	0,9738	0,9825	0,9858	0,6065	0,8946	0,9223	0,4262	0,1111	0,0811
							Moyenne		
							0,8199	0,1902	0,1284
							Coût global		
							0,7916	0,1223	0,0884

 TABLE 3.4 – Indicateurs de la manœuvre *Fishhook*.

suspensions développé en section 1.1 est suffisant pour la synthèse des correcteurs. En effet, il faut toujours considérer qu'un correcteur robuste est capable de rejeter les incertitudes dues à la modélisation. De plus, il faut toujours considérer que les paramètres du véhicule, comme par exemple la masse m et les coefficients de raideur des pneus c_α^* et c_κ^* , sont eux mêmes sujets à incertitude. Il ne faut donc pas penser que l'utilisation du modèle le plus précis élimine la nécessité de chercher un correcteur robuste.

Dans le chapitre 4, le modèle bicyclette sans suspensions sera linéarisé. Le modèle linéarisé sera utilisé dans les chapitre 6 et 7 pour la formalisation d'un modèle LPV polytopique et d'un modèle LPV *grid-based*. Ces modèles LPV seront donc utilisés pour la synthèse de différents correcteurs.

LINÉARISATION DU MODÈLE NON-LINÉAIRE

Sommaire

4.1	Commande nominale pour la trajectoire de référence	67
4.2	Bouclage avec les forces saturées des pneumatiques	71
4.3	Linéarisation le long d'une trajectoire de référence	73
4.3.1	Modèle avec entrées seuil	76
4.3.2	Linéarisation des fonctions de saturation	78
4.4	Dynamique de l'erreur de position et de lacet	80

Dans ce chapitre, on traite la linéarisation du modèle bicyclette sans suspensions développé dans la section 1.1. L'objectif de la linéarisation est l'obtention d'un modèle auquel des méthodes de synthèse des correcteurs s'appliquent. Le modèle linéarisé obtenu servira ensuite, dans les chapitres 6 et 7, pour la formalisation de différents modèles LPV, utilisés pour la synthèse des correcteurs.

Dans la section 4.1, une méthode pour déterminer la commande nominale en boucle ouverte et la trajectoire de référence nécessaire pour la linéarisation du modèle non-linéaire est présentée. Dans la section 4.2, on reformule le modèle bicyclette sans suspensions pour exprimer la dynamique du véhicule avec les forces saturées, donc les forces des pneus et les forces normales aux roues, comme des entrées du système. Nous mettons ainsi en évidence le bouclage avec les non-linéarités des saturations. Dans la section 4.3 on linéarise le modèle le long d'une trajectoire de référence. Plus particulièrement, deux expressions du modèle linéarisé le long de la trajectoire de référence sont obtenues, en utilisant deux fonctions de saturation différentes. Les deux modèles linéarisés obtenus sont variables dans le temps. La première expression du modèle linéarisé sera exploitée dans le chapitre 7 pour obtenir un modèle LPV *grid-based* et la deuxième dans le chapitre 6 pour la formalisation d'un modèle LPV polytopique. Enfin, dans la section 4.4, on complète les modèles linéaires obtenus avec la dynamique de l'erreur de position longitudinale, latérale et de lacet par rapport à la trajectoire de référence. En effet, l'objectif des correcteurs qu'on développera dans les chapitres 6 et 7 est le suivi des trajectoires de référence, obtenu en éliminant les erreurs de position et d'angle.

4.1 Commande nominale pour la trajectoire de référence

Dans cette section on présente une méthode pour déterminer la commande nominale et la trajectoire de référence correspondante, le long de laquelle le modèle bicyclette sans suspensions sera linéarisé dans la section 4.3. Comme évoqué précédemment, les modèles linéaires variables dans le temps obtenus au moyen de cette linéarisation seront utilisés dans les chapitres 6 et 7 pour la formalisation de deux modèles LPV, en exploitant respectivement les approches polytopique et *grid-based*. Les correcteurs développés dans ces chapitres, à partir des modèles LPV, ont comme objectif d'amener à l'origine le modèle linéarisé. La commande nominale et la dynamique du véhicule le long de la trajectoire de référence doivent donc être connus. Dans la littérature il existe différentes solutions pour la planification des trajectoires fondées sur des méthodes inspirées des techniques de commande optimale et prédictive pour la génération des

trajectoires. Ces solutions exploitent un modèle de la dynamique pour déterminer les commandes nominales et prédire la trajectoire du véhicule, garantissant également que les trajectoires planifiées soient réalisables, un aspect particulièrement important dans le contexte des manœuvres à haute dynamique. Des exemples de ce type de solution sont donnés par [HOWARD et KELLY 2007](#), [ANDERSON et al. 2010](#), [HEGEDÜS et al. 2017](#), [HEGEDÜS et al. 2018](#) et [LIU et CUI 2019](#). En utilisant une de ces méthodes pour la planification des trajectoires, les variables d'état du véhicule et les commandes nominales le long de la trajectoire de référence sont donc disponibles en sortie de l'algorithme pour la planification des trajectoires. Le travail présenté dans ce manuscrit ne traite pas la question de la planification des trajectoires. Une autre équipe de Renault travaille actuellement au développement d'un planificateur des trajectoires basé sur un modèle véhicule, comme ceux cités précédemment. En revanche, le planificateur des trajectoires en question n'est pas encore suffisamment abouti et il n'a pas été utilisé en couplage avec les correcteurs développés et présentés dans ce manuscrit. L'équipe en charge du développement du planificateur des trajectoires a fourni un ensemble de trajectoires de référence, sous forme de parcours du véhicule dans l'espace, c'est-à-dire les coordonnées $x_0(t)$ et $y_0(t)$ dans le repère absolu, et de profil de vitesse, $v_0(t)$. Les évolutions des variables d'état du véhicule et la commande nominale ne sont pas disponibles dans ce cas. On a donc calculé une commande nominale pour les trajectoires de référence fournies.

Avant de présenter les expressions des commandes nominales pour les trajectoires de référence, il est nécessaire d'introduire quelques remarques sur les entrées de contrôle du modèle bicyclette sans suspensions. Tout d'abord, l'angle de braquage des roues arrière est considéré nul ($\delta_r = 0$). Cette hypothèse se justifie car on s'intéresse au contrôle des véhicules avec uniquement les deux roues avant directrices. De plus, on choisit d'exprimer le couple de la roue arrière par :

$$\tau_{wr} = k_\tau \tau_{wf} \quad (4.1)$$

où k_τ est un scalaire constant compris entre 0 et 1. En effet, cette contrainte est introduite par le système de freinage du véhicule. A ce propos, on considère dans la Figure 4.1 le couple de freinage des roues avant et arrière calculé par MADA pour le scénario de simulation d'une manœuvre d'évitement d'obstacle avec freinage, précédemment analysé dans la section 3.1.2. Dans la Figure 4.1 on vérifie que les couples des roues arrière sont inférieurs et proportionnels à ceux des roues avant. En effet, comme expliqué dans [HEISSING et ERSOY 2011](#), le système de freinage du véhicule est généralement conçu pour ne pas appliquer le même couple aux roues avant et arrière. Cette caractéristique est réalisée de façon à exploiter au maximum la capacité de freinage des pneus. On sait qu'une accélération négative causée par le freinage du véhicule engendre un transfert de charge entre l'avant et l'arrière du véhicule, comme on a vu pour les modèles développés dans la section 2.5.1. Plus particulièrement, la charge sur les roues arrière augmente et celle sur les roues avant diminue. De plus, la force d'un pneu augmente avec l'accroissement de la force normale sur le pneu et vice-versa diminue si la charge diminue, comme évoqué dans la section 2.2. On en déduit que les roues avant peuvent produire une force longitudinale plus importante que celle des roues arrière pour freiner le véhicule. Il est donc plus intéressant d'appliquer un couple plus important sur les roues de l'essieu avant que sur celles de l'essieu arrière. De plus, cela réduit la possibilité de faire saturer et donc glisser excessivement les roues arrière qui, ayant une charge plus faible, ont un seuil de saturation inférieur à celui des roues avant. C'est aussi une contrainte imposée par des normes d'homologation, comme indiqué dans [ROBERT BOSCH GMBH 2019](#), car un glissement excessif des roues arrière rend le véhicule difficile à commander. Le ratio idéal entre le couple des roues avant et arrière varie non-linéairement selon l'accélération du véhicule, la relation entre le seuil de saturation des forces des pneus et la charge n'étant pas linéaire. En revanche, en général, le système de freinage des véhicules ne permet pas de modifier le ratio du couple de freinage entre les roues avant et arrière. Pour cette raison il est raisonnable de considérer le coefficient k_τ constant dans l'expression (4.1). En revanche, les entrées τ_{wf} et τ_{wr} représentent indistinctement le couple de freinage et d'accélération des roues. L'expression (4.1), introduite pour représenter une contrainte du système de freinage, n'est donc pas nécessairement représentative dans le cas où un couple d'accélération est appliqué aux roues. Une première option pour résoudre ce problème est de considérer deux entrées distinctes pour représenter le couple aux roues : un couple de freinage, pour lequel l'expression (4.1) est appliquée pour lier le couple des roues postérieures à celui des roues antérieures, et un couple moteur, pour lequel le lien entre τ_{wf} et τ_{wr} est défini selon le type de traction (traction, propulsion ou intégrale) employé par le véhicule. Dans ce cas, le couple de freinage est saturé en haut à zéro et le couple moteur est saturé en bas à une valeur négative (qui est généralement faible par rapport au couple de freinage) équivalente au couple de freinage que le moteur est capable de produire. Cela peut rendre la synthèse du correcteur plus difficile. En effet, il est plus probable d'atteindre ces bornes de saturation, même pour des manœuvres avec un faible effort de commande, car elles sont proches de zéro. Il est donc plus important



FIGURE 4.1 – Modèle MADA : exemple des couples roues.

de prendre en compte les saturations des entrées de commande dans la synthèse du correcteur. Pour éviter ce problème, on a choisi d'utiliser une seule entrée τ_{wf} pour le couple des roues, dont le signe permet de représenter le couple de freinage ou le couple moteur. En effet, dans ce cas, les bornes de saturation de τ_{wf} sont équivalentes au couple de freinage et au couple moteur maximal et le signal n'est donc pas saturé proche de zéro. La saturation de ce signal de contrôle est donc plus difficilement atteinte que les bornes de saturation des deux entrées saturées proches de zéro. En revanche, il reste à évaluer l'extension de (4.1) à un couple d'accélération. Pour cela, on considère dans la suite un véhicule à traction intégrale avec un différentiel central, permettant de régler la distribution du couple moteur entre les roues avant et arrière, cf. RAJAMANI 2012, et de modifier le ratio entre les couples délivrés sur les essieux avant et arrière. Dans ce cas, il est donc possible d'appliquer en accélération le même ratio de couple qu'en freinage.

En vue de ces remarques sur les entrées du système, les expressions des commandes nominales pour les trajectoires de référence sont présentées dans la suite. Pour le calcul de l'angle de braquage des roues avant, on a utilisé une méthode employée par Renault pour le calcul du *feedforward* du LCA implémenté sur les véhicules produits en série. Pour cela, il est nécessaire de calculer la courbure de la trajectoire de référence, égale à :

$$\rho(t) = \frac{\left| \frac{d^2 y(t)}{dx^2(t)} \right|}{\left(1 + \frac{dy^2(t)}{dx(t)} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.2)$$

On rappelle que dans le chapitre 2 la variable ρ indique la densité de l'air et elle est utilisée pour déterminer la force de trainée aérodynamique. En revanche, dans ce chapitre $\rho(t)$ indique la courbure de la route. On considère la dynamique latérale d'un modèle bicyclette linéaire, dont pour les équations d'état on renvoie à RAJAMANI 2012. On rappelle uniquement la dynamique de la vitesse latérale :

$$\dot{u} = -v r - \frac{2c_{\alpha f} + 2c_{\alpha r}}{m v} u - \frac{2c_{\alpha f} \ell_f - 2c_{\alpha r} \ell_r}{m v} r + \frac{2c_{\alpha f}}{m} \delta_f \quad (4.3)$$

Si la vitesse latérale du véhicule est approchée par zéro et la vitesse du véhicule est constante, la courbure de la trajectoire effectuée par un véhicule avec un angle de braquage constant est donnée par le ratio entre la vitesse de lacet r et la vitesse longitudinale du véhicule v :

$$\rho_v = \frac{r}{v} \quad (4.4)$$

et donc la vitesse de lacet peut être exprimée par :

$$r = \rho_v v. \quad (4.5)$$

On considère un véhicule en régime stabilisé et effectuant un virage de courbure constante, avec accélération et vitesse latérale égales à zéro. Alors dans ce cas, en utilisant (4.4) avec (4.3) on obtient :

$$0 = -\rho_v v^2 - \frac{2c_{\alpha f} \ell_f - 2c_{\alpha r} \ell_r}{m v} \rho_v v + \frac{2c_{\alpha f}}{m} \delta_f \quad (4.6)$$

Si on cherche la commande en boucle ouverte de sorte que ρ_v soit égal à $\rho(t)$ et v égal à $v_0(t)$, alors on peut considérer la commande nominale suivante pour l'angle de braquage :

$$\delta_{f0}(t) = \rho_0(t) v_0(t) \frac{m}{2c_{\alpha f}} \left(v_0(t) + \frac{2c_{\alpha f} \ell_f - 2c_{\alpha r} \ell_r}{m v} \right). \quad (4.7)$$

Pour trouver la commande nominale pour le couple des roues, on considère la dynamique de la vitesse longitudinale d'un modèle bicyclette exprimée par :

$$m \dot{v} = 2 F_{xf} \cos(\delta_f) + 2 F_{xr} - f_{rf} \frac{m g \ell_r}{\ell_f + \ell_r} \cos(\delta_f) - f_{rr} \frac{m g \ell_f}{\ell_f + \ell_r} - \frac{1}{2} \rho C_d A_f v^2 \quad (4.8)$$

où les composantes longitudinales des forces latérales des pneus ont été négligées, la charge sur les roues a été considérée statique et la vitesse latérale du véhicule a été approchée par zéro. On rappelle aussi la dynamique de la vitesse de rotation des roues, comme exprimée par (1.10), mais en utilisant (4.1) :

$$I_{wy} \dot{\omega}_{wf} = \tau_{wf} - 2 F_{xf} r_e \quad (4.9a)$$

$$I_{wy} \dot{\omega}_{wr} = k_\tau \tau_{wf} - 2 F_{xr} r_e. \quad (4.9b)$$

En utilisant (4.9a) et (4.9b) on peut exprimer les forces des pneus par :

$$F_{xf} = \frac{\tau_{wf} - I_{wy} \dot{\omega}_{wf}}{2 r_e} \quad (4.10a)$$

$$F_{xr} = \frac{k_\tau \tau_{wf} - I_{wy} \dot{\omega}_{wr}}{2 r_e} \quad (4.10b)$$

et donc la dynamique de la vitesse longitudinale est exprimée par :

$$m \dot{v} = \frac{\tau_{wf} - I_{wy} \dot{\omega}_{wf}}{r_e} \cos(\delta_f) + \frac{k_\tau \tau_{wf} - I_{wy} \dot{\omega}_{wr}}{r_e} - \frac{m g}{\ell_f + \ell_r} (f_{rf} \ell_r \cos(\delta_f) + f_{rr} \ell_f) - \frac{1}{2} \rho C_d A_f v^2. \quad (4.11)$$

Il est possible de résoudre (4.11) par τ_{wf} et la commande nominale pour le couple des roues est donc :

$$\tau_{wf0}(t) = \frac{m \dot{v}_0(t) + \frac{1}{2} \rho C_d A_f v_0(t)^2 + \frac{m g}{\ell_f + \ell_r} (f_{rf} \ell_r \cos(\delta_f) + f_{rr} \ell_f) + \frac{I_{wy}}{r_e} (\dot{\omega}_{f0}(t) \cos(\delta_{f0}(t)) + \dot{\omega}_{r0}(t))}{k_\tau + \cos(\delta_{f0}(t))} \quad (4.12)$$

où pour obtenir $\dot{v}_0(t)$ il est possible de calculer numériquement la dérivée de $v_0(t)$. De plus, on considère que les vitesses tangentielles des points de contact des roues avec le sol sont égales à la vitesse longitudinale du véhicule $v_0(t)$, afin de ne pas avoir de glissement longitudinal des pneus. Grâce à cette supposition on peut calculer la vitesse de rotation des roues par :

$$\omega_{f0}(t) = \omega_{r0}(t) = \frac{v_0(t)}{r_e} \quad (4.13)$$

Il est possible de dériver numériquement la vitesse de rotation des roues pour obtenir $\dot{\omega}_{f0}(t)$ et $\dot{\omega}_{r0}(t)$. Enfin, les commandes nominales de l'angle de braquage, exprimé par (4.7), et du couple des roues, exprimé par (4.13), peuvent être utilisées avec un modèle de dynamique du véhicule pour estimer la dynamique du véhicule le long de la trajectoire de référence. Dans la suite du manuscrit, pour le développement des correcteurs dans les chapitres 6 et 7, le modèle quatre roues avec suspensions, présenté dans la section 1.2, sera utilisé pour le calcul des variables d'état du système le long des trajectoires de référence.

L'angle de braquage et le couple nominaux, exprimés respectivement par (4.7) et (4.12), ne produisent pas la trajectoire de référence souhaitée, si appliqués au véhicule. Cela est dû aux incertitudes de modélisation et aux simplifications effectuées pour obtenir les expressions (4.7) et (4.12). Cet aspect sera montré dans le chapitre 8. Le développement d'un correcteur en boucle fermée pour effectuer la trajectoire de référence est donc nécessaire. Cela permet également la convergence des trajectoires en présence de conditions initiales différentes de zéro et d'autres perturbations.

4.2 Bouclage avec les forces saturées des pneumatiques

L'analyse des modèles véhicule faite dans le chapitre 3, a conduit à choisir le modèle bicyclette sans suspensions (présenté dans la section 1.1) pour la synthèse des correcteurs. Dans cette section ce modèle non-linéaire est exprimé avec un bouclage qui nous permet de considérer les forces des pneus saturées comme des entrées du système.

On considère le modèle bicyclette sans suspensions avec le vecteur d'état et les entrées suivantes :

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} v & u & r & \omega_{wf} & \omega_{wr} \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \delta_f & \tau_{wf} & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T.$$

On rappelle les équations de mouvement (1.9) et (1.10) de ce modèle, précédemment présentées dans la section 1.1.2, mais en tenant compte que $\delta_r = 0$ et ainsi certaines composantes des forces des pneus sont aussi égales à zéro :

$$m(\dot{v} - r u) = 2 F_{xxf} + 2 F_{xxr} - 2 R_{xxf} - 2 R_{xxr} - 2 F_{xyf} - P_x - F_{aero} \quad (4.14a)$$

$$m(\dot{u} + r v) = 2 F_{yxf} - 2 R_{yxf} + 2 F_{yyf} + 2 F_{yyr} - P_y \quad (4.14b)$$

$$I_{zz} \dot{r} = (2 F_{yxf} + 2 F_{yyf} - 2 R_{yxf}) \ell_f - 2 F_{yyr} \ell_r \quad (4.14c)$$

$$I_{wy} \dot{\omega}_{wf} = \tau_{wf} - 2 F_{xf} r_e \quad (4.14d)$$

$$I_{wy} \dot{\omega}_{wr} = k_\tau \tau_{wf} - 2 F_{xr} r_e. \quad (4.14e)$$

On rappelle aussi que les forces des pneus avant saturation, décrites dans la section 2.2, sont :

$$\hat{F}_x = c_\kappa^*(\mu, N, \alpha) \kappa \quad (4.15a)$$

$$\hat{F}_y = c_\alpha^*(\mu, N, \kappa) \alpha \quad (4.15b)$$

avec les coefficients $c_\kappa^*(\mu, N, \alpha)$ et $c_\alpha^*(\mu, N, \kappa)$, exprimés dans (2.29a) et (2.29b), qui dépendent de façon non-linéaire de la force normale N à la roue. Il a également été évoqué que les forces des pneus sont saturées et que leurs seuils de saturation dépend aussi de N . Les forces normales de la roue avant N_f et arrière N_r , données pour le modèle bicyclette sans suspensions par (2.37a) et (2.37b), dépendent de la dynamique du véhicule, en particulier de l'accélération longitudinale \dot{v} . De plus, les forces normales sont également saturées : sur une roue la force normale est comprise entre zéro et le poids total du véhicule. Si la roue ne porte pas de charge du véhicule, ce qui peut se produire si la roue décroche du sol, alors la force normale est nulle. Dans le cas opposé, la roue ne peut pas porter plus de la totalité du véhicule, ce qui arrive si les forces normales des autres roues sont égales à zéro. En pratique il est très difficile, voir impossible, d'imaginer une condition telle que cela se reproduit. Dans la suite on utilisera deux fonctions de saturation différentes, précédemment présentées dans la section 2.2. Pour l'instant on considère une fonction de saturation générique $\sigma(x)$, où x est l'entrée de la fonction, et on ne spécifie pas comment cette fonction est définie. Le scalaire ℓ_s représente la borne inférieure de saturation et u_s celle supérieure. On note \hat{N}_f , \hat{N}_r , \hat{F}_{xf} , \hat{F}_{xr} , \hat{F}_{yf} et \hat{F}_{yr} les forces normales et les forces des pneus avant saturation. La table 4.1 montre les limites de saturation pour les forces saturées du modèle. Le modèle exprimé par (4.14) est en forme implicite :

$$f(\dot{\underline{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = 0 \quad (4.16a)$$

avec

$$f(\dot{\underline{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) = \begin{bmatrix} m \dot{v} - m r u - 2 F_{xxf} - 2 F_{xxr} + 2 R_{xxf} + 2 R_{xxr} + 2 F_{xyf} + P_x + F_{aero} \\ m \dot{u} + m r v - 2 F_{yxf} + 2 R_{yxf} - 2 F_{yyf} - 2 F_{yyr} + P_y \\ I_{zz} \dot{r} - (2 F_{yxf} + 2 F_{yyf} - 2 R_{yxf}) \ell_f + 2 F_{yyr} \ell_r \\ I_{wy} \dot{\omega}_{wf} - \tau_{wf} + 2 F_{xf} r_e \\ I_{wy} \dot{\omega}_{wr} - k_\tau \tau_{wf} + 2 F_{xr} r_e \end{bmatrix}. \quad (4.16b)$$

$\sigma(\mathbf{x})$	\mathbf{x}	ℓ_s	\mathbf{u}_s
N_f	\hat{N}_f	0	$\frac{1}{2} m g \cos \theta_x \cos \theta_y$
N_r	\hat{N}_r	0	$\frac{1}{2} m g \cos \theta_x \cos \theta_y$
F_{xf}	\hat{F}_{xf}	$-\sqrt{(\mu \frac{N_f}{2})^2 - F_{yf}^2}$	$\sqrt{(\mu \frac{N_f}{2})^2 - F_{yf}^2}$
F_{xr}	\hat{F}_{xr}	$-\sqrt{(\mu \frac{N_r}{2})^2 - F_{yr}^2}$	$\sqrt{(\mu \frac{N_r}{2})^2 - F_{yr}^2}$
F_{yf}	\hat{F}_{yf}	$-\sqrt{(\mu \frac{N_f}{2})^2 - F_{xf}^2}$	$\sqrt{(\mu \frac{N_f}{2})^2 - F_{xf}^2}$
F_{yr}	\hat{F}_{yr}	$-\sqrt{(\mu \frac{N_r}{2})^2 - F_{xr}^2}$	$\sqrt{(\mu \frac{N_r}{2})^2 - F_{xr}^2}$

TABLE 4.1 – Limites de saturation des forces normales et des forces des pneus.

En raison de la dépendance non-linéaire de F_{xf} , F_{xr} , F_{yf} et F_{yr} par rapport à N_f et N_r , il n'est pas possible d'obtenir une forme explicite. On peut obtenir un modèle linéarisé à partir du modèle non-linéaire implicite (4.16) en utilisant le *théorème des fonctions implicites*, cf. BROWDER 2012. En revanche, il a été choisi d'utiliser une autre approche, en reformulant le modèle bicyclette sans suspensions pour exprimer la dynamique du véhicule avec les forces saturées. Grâce à cette approche, on aboutit à un modèle linéaire qui présentera des avantages pour la synthèse des correcteurs. La relation (4.16) peut être décomposée en deux parties de façon à isoler les forces des pneus et les forces normales, qui contiennent la partie implicite du modèle :

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} r u - \frac{1}{m} F_{aero} - \frac{1}{m} P_x \\ -r v - \frac{1}{m} P_y \\ 0 \\ \frac{1}{I_{w y}} \tau_{wf} \\ \frac{1}{I_{w y}} k_{\tau} \tau_{wf} \end{bmatrix}}_{=g(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} (2 F_{xxf} + 2 F_{xxr} - 2 R_{xxf} - 2 R_{xxr} - 2 F_{xyf}) \\ \frac{1}{m} (2 F_{yxf} - 2 R_{yxf} + 2 F_{yyf} + 2 F_{yyr}) \\ \frac{1}{I_{zz}} ((2 F_{yxf} + 2 F_{yyf} - 2 R_{yxf}) \ell_f - 2 F_{yyr} \ell_r) \\ -\frac{2 r_e}{I_{w y}} F_{xf} \\ -\frac{2 r_e}{I_{w y}} F_{xr} \end{bmatrix}}_{=M}. \quad (4.17)$$

En considérant le vecteur M et en utilisant les définitions des composantes longitudinales et latérales des forces des pneus et des forces de résistance au roulement dans (1.8), on obtient :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} [2\sigma(\hat{F}_{xf}(\sigma(\hat{N}_f))) \cos \delta_f + 2\sigma(\hat{F}_{xr}(\sigma(\hat{N}_r))) - 2\sigma(\hat{F}_{yf}(\sigma(\hat{N}_f))) \sin \delta_f - \sigma(\hat{N}_f) f_{rf} \cos \delta_f - \sigma(\hat{N}_r) f_{rr}] \\ \frac{1}{m} [2\sigma(\hat{F}_{yf}(\sigma(\hat{N}_f))) \cos \delta_f + 2\sigma(\hat{F}_{yr}(\sigma(\hat{N}_r))) + 2\sigma(\hat{F}_{xf}(\sigma(\hat{N}_f))) \sin \delta_f - \sigma(\hat{N}_f) f_{rf} \sin \delta_f] \\ \frac{1}{I_{zz}} [2\sigma(\hat{F}_{yf}(\sigma(\hat{N}_f))) \ell_f \cos \delta_f - 2\sigma(\hat{F}_{yr}(\sigma(\hat{N}_r))) \ell_r + 2\sigma(\hat{F}_{xf}(\sigma(\hat{N}_f))) \ell_f \sin \delta_f - \sigma(\hat{N}_f) f_{rf} \ell_f \sin \delta_f] \\ -\frac{2 r_e}{I_{w y}} \sigma(\hat{F}_{xf}(\sigma(\hat{N}_f))) \\ -\frac{2 r_e}{I_{w y}} \sigma(\hat{F}_{xr}(\sigma(\hat{N}_r))) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Le vecteur des fonctions de saturation¹ est défini par :

$$\underline{\sigma}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \sigma(h_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \\ \sigma(h_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u})) \\ \sigma(h_3(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)) \\ \sigma(h_4(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)) \\ \sigma(h_5(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)) \\ \sigma(h_6(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

1. La fonction σ représente une fonction de saturation générique. Différentes fonctions de saturation seront spécifiées dans la suite du chapitre.

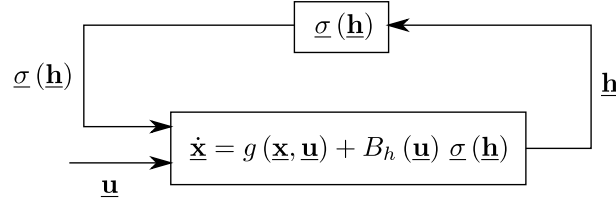


FIGURE 4.2 – Système non-linéaire avec forces saturées bouclées en entrée.

où l'entrée de $\underline{\sigma}(\mathbf{h})$ est le vecteur de forces avant saturation :

$$\underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma}) = \begin{bmatrix} h_1(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ h_2(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ h_3(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma}) \\ h_4(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma}) \\ h_5(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma}) \\ h_6(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}_f \\ \hat{N}_r \\ \hat{F}_{xf}(\sigma(\hat{N}_f)) \\ \hat{F}_{xr}(\sigma(\hat{N}_r)) \\ \hat{F}_{yf}(\sigma(\hat{N}_f)) \\ \hat{F}_{yr}(\sigma(\hat{N}_r)) \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Enfin, le vecteur M est exprimé par :

$$M = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{m} f_{rf} \cos \delta_f & -\frac{1}{m} f_{rr} & \frac{2}{m} \cos \delta_f & \frac{2}{m} & -\frac{2}{m} \sin \delta_f & 0 \\ -\frac{1}{m} f_{rf} \sin \delta_f & 0 & \frac{2}{m} \sin \delta_f & 0 & \frac{2}{m} \cos \delta_f & \frac{2}{m} \\ -\frac{1}{I_{zz}} \ell_f f_{rf} \sin \delta_f & 0 & \frac{2}{I_{zz}} \ell_f \sin \delta_f & 0 & \frac{2}{I_{zz}} \ell_f \cos \delta_f & -\frac{2}{I_{zz}} \ell_r \cos \delta_r \\ 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wy}} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=B_h(\mathbf{u})} \underline{\sigma}(\mathbf{h}) \quad (4.21)$$

Enfin, en utilisant la définition (4.21), (4.17) devient :

$$\dot{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + B_h(\mathbf{u}) \underline{\sigma}(\mathbf{h}) \quad (4.22)$$

La Figure 4.2 représente le bouclage exprimé par (4.22). En effet, les forces normales aux roues et les forces de pneus, représentées par le vecteur $\underline{\sigma}(\mathbf{h})$, sont bouclées sur le modèle de la dynamique du système, parce qu'elles apparaissent en entrée du système, et l'entrée du vecteur $\underline{\sigma}(\mathbf{h})$ est donnée par $\underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \underline{\sigma})$, en sortie du système. L'équation (4.22) est l'expression du système non-linéaire, exploitée pour la linéarisation du modèle véhicule. Comme évoqué précédemment, ce bouclage est utile principalement pour la synthèse des correcteurs. Cette représentation, avec le bouclage, nous permettra également d'exploiter des propriétés de la fonction de saturation pour la synthèse des correcteurs pour maximiser la région de stabilité de la boucle fermée au vu de cette non-linéarité. Cette problématique sera abordée dans les chapitres suivants.

4.3 Linéarisation le long d'une trajectoire de référence

Dans cette section, la linéarisation du modèle de dynamique véhicule exprimé par (4.22) le long d'une trajectoire de référence $\mathcal{T}_0(t) = (\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))$ est abordée. Les variables $\dot{\mathbf{x}}_0(t)$, $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$ et $\underline{\sigma}_0(t)$ sont respectivement la dynamique de l'état, l'état, les entrées du système et les forces saturées le long de la trajectoire de référence et elles varient dans le temps en raison de l'évolution de la trajectoire dans le temps. Les forces saturées sur la trajectoire de référence sont égales à $\underline{\sigma}_0(t) = \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \underline{\sigma}_0(t)))$. On suppose donc connaître ces variables, liées par la relation :

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = g(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + B_h(\mathbf{u}_0) \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \underline{\sigma}_0)).$$

Les écarts de l'état, des commandes et des entrées saturées du système par rapport à l'état, les commandes et les entrées saturées le long de la trajectoire de référence sont considérés :

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (4.23a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}} - \underline{\mathbf{u}}_0 \quad (4.23b)$$

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0. \quad (4.23c)$$

En utilisant une décomposition en série de Taylor au premier ordre, la dynamique linéarisée de l'écart $\Delta \underline{\mathbf{x}}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= \left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \\ &+ \left. \frac{\partial (B_h(\underline{\mathbf{u}}) \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}))}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial (B_h(\underline{\mathbf{u}}) \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}))}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{(\underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \Delta \underline{\sigma} = \\ &= \left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \left(\left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} + \left. \frac{\partial (B_h(\underline{\mathbf{u}}) \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}))}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \right) \Delta \underline{\mathbf{u}} + \\ &+ B_h(\underline{\mathbf{u}}_0(t)) \left. \frac{\partial \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}})}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{\underline{\sigma}_0(t)} \Delta \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (4.24)$$

où $\Delta \underline{\mathbf{x}}$ est l'écart de l'état par rapport à $\mathcal{T}_0(t)$, $\Delta \underline{\mathbf{u}}$ est l'écart des entrées du système et $\Delta \underline{\sigma}$ est l'écart des forces saturées. La matrice $\left. \frac{\partial \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}})}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{\underline{\sigma}_0(t)}$ est égale à la matrice identité. Finalement, on peut exprimer (4.24) par :

$$\Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} = A(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t) \Delta \underline{\sigma} \quad (4.25a)$$

$$A(t) = \left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} \quad (4.25b)$$

$$B(t) = \left. \frac{\partial g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} + \left. \frac{\partial (B_h(\underline{\mathbf{u}}) \underline{\sigma}(\underline{\mathbf{h}}))}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \quad (4.25c)$$

$$B_h(t) = B_h(\underline{\mathbf{u}}_0(t)). \quad (4.25d)$$

Le modèle linéarisé (4.25) a donc en entrée l'écart des forces saturées $\Delta \underline{\sigma}$ par rapport aux forces le long de la trajectoire de référence $\underline{\sigma}_0(t)$. Le signal $\Delta \underline{\sigma}$ est la sortie d'une fonction de saturation, mais les seuils de saturation varient dans le temps et dépendent de la valeur de $\underline{\sigma}_0(t)$. On considère par exemple la force longitudinale du pneu avant $F_{xf0}(\tilde{t})$ à un instant \tilde{t} de la trajectoire de référence. Si elle est déjà proche de la borne de saturation inférieure, en raison d'une force longitudinale importante produite à cause d'un freinage du véhicule le long de la trajectoire de référence, alors l'écart $\Delta F_{xf}(\tilde{t})$ négatif disponible est faible. On ne peut pas freiner beaucoup plus le véhicule par rapport à la trajectoire de référence, vu que pour $\mathcal{T}_0(\tilde{t})$ la force longitudinale du pneu avant est déjà proche de la capacité maximale de freinage du véhicule. En revanche, l'écart $\Delta F_{xf}(\tilde{t})$ positif peut être important, comme illustré dans la Figure 4.3. Il est alors possible de réduire le freinage du véhicule ou même de l'accélérer en produisant une force longitudinale positive. On comprend donc que $\Delta \underline{\sigma}$ est la sortie d'une fonction de saturation où la différence entre les deux bornes est la même que pour $\underline{\sigma}_0(t)$ à chaque instant, mais où la valeur à abscisse zéro, c'est à dire quand l'entrée $\Delta \underline{\mathbf{h}} = 0$, varie selon la valeur de $\underline{\mathbf{h}}_0(t)$. Pour rendre clair le fait que $\Delta \underline{\sigma}$ est une sortie d'une fonction de saturation, dans la suite on l'exprimera par :

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{h}}). \quad (4.26)$$

Le vecteur $\Delta \underline{\mathbf{h}}$ est l'entrée de la fonction de saturation du modèle linéarisé, il est nécessaire de déterminer son expression. La fonction $\underline{\mathbf{h}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})$ est une fonction non-linéaire, sa linéarisation le long de la trajectoire $\mathcal{T}_0(t)$ est :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{h}} &= \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\dot{\mathbf{x}}}} \right|_{(\underline{\dot{\mathbf{x}}}_0(t), \underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \Delta \underline{\dot{\mathbf{x}}} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right|_{(\underline{\dot{\mathbf{x}}}_0(t), \underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \\ &+ \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\dot{\mathbf{x}}}_0(t), \underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\underline{\dot{\mathbf{x}}}, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \right|_{(\underline{\dot{\mathbf{x}}}_0(t), \underline{\mathbf{x}}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t), \underline{\sigma}_0(t))} \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{h}}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

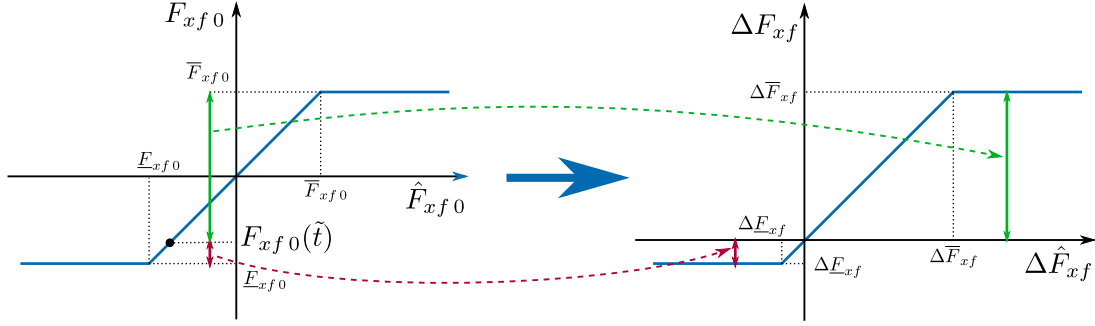


FIGURE 4.3 – Saturation de l'écart des forces des pneus du système linéarisé.

On remplace l'expression (4.25a) de $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ dans (4.27) :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{h}} &= \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} (A(t)\Delta \underline{\mathbf{x}} + B(t)\Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t)\Delta \sigma) + \\ &+ \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \\ &+ \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \sigma(\Delta \underline{\mathbf{h}}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

On peut exprimer $\Delta \underline{\mathbf{h}}$ par :

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C(t)\Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t)\Delta \underline{\mathbf{u}} + D_h(t)\sigma(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (4.29a)$$

$$C(t) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} A(t) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.29b)$$

$$D(t) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} B(t) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.29c)$$

$$D_h(t) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} B_h(t) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))}. \quad (4.29d)$$

En réunissant (4.25) et (4.29), le système linéarisé autour d'une trajectoire $\mathcal{T}_0(t) = (\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))$ est :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(t)\Delta \underline{\mathbf{x}} + B(t)\Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t)\sigma(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (4.30a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C(t)\Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t)\Delta \underline{\mathbf{u}} + D_h(t)\sigma(\Delta \underline{\mathbf{h}})$$

$$A(t) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} \quad (4.30b)$$

$$B(t) = \left. \frac{\partial g(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\mathbf{x}_0(t), \underline{\mathbf{u}}_0(t))} + \left. \frac{\partial (B_h(\underline{\mathbf{u}})\sigma(\underline{\mathbf{h}}))}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right|_{(\underline{\mathbf{u}}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.30c)$$

$$B_h(t) = B_h(\underline{\mathbf{u}})|_{\underline{\mathbf{u}}_0(t)} \quad (4.30d)$$

$$C(t) = \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} A(t) + \left. \frac{\partial \underline{\mathbf{h}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.30e)$$

$$D(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} B(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.30f)$$

$$D_h(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} B_h(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{(\dot{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), \sigma_0(t))} \quad (4.30g)$$

Le modèle (4.30) est NLTV, car l'expression de la dérivée du vecteur des variables d'état $\dot{\mathbf{x}}$ présente en entrée le vecteur des forces saturées σ ($\Delta \mathbf{h}$). Pour simplifier les expressions des matrices $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t)$, $C(t)$, $D(t)$ et $D_h(t)$, certaines approximations ont été faites. Sans ces approximations leurs expressions seraient très complexes et le modèle linéarisé serait difficile à manipuler pour l'obtention des modèles LPV pour la synthèse des correcteurs. Pour simplifier la lecture du chapitre, ces expressions ne seront pas montrées dans ce texte. La complexité de ces matrices provient principalement des coefficients $c_{\kappa_f}^*$, $c_{\kappa_r}^*$, $c_{\alpha_f}^*$ et $c_{\alpha_r}^*$ des forces des pneus. Pour cela ils ont été considérés comme des scalaires variables dans le temps. De plus, l'angle de braquage δ_f a été considéré faible et les approximations suivantes ont été utilisées :

$$\cos \delta_f \approx 1 \qquad \sin \delta_f \approx \delta_f.$$

Ces approximations sont justifiées, l'angle de braquage maximal des roues avant d'une voiture de tourisme étant généralement d'environ 30 deg. Les mêmes approximations ont été utilisées pour les angles de dévers et pente de la route, θ_x et θ_y . Une route a rarement une inclinaison supérieure à 20% en valeur absolue, correspondant à un angle d'environ 11 deg, donc les approximations se justifient. Pour les angles de dérive, α_f et α_r , et les taux de glissement des roues, κ_f et κ_r , on utilise les expressions simplifiées (2.15) et (2.16), introduites dans la section 2.2.1. Ces expressions reposent sur deux approximations :

1. l'angle de braquage δ_f est considéré petit,
2. la vitesse longitudinale de la roue est considérée beaucoup plus importante que sa vitesse latérale.

Pour le premier point, il a précédemment été évoqué que δ_f est faible. La deuxième approximation est également justifiée, parce que les cas où l'hypothèse n'est pas valable sont ceux où normalement le véhicule est très difficilement manœuvrable. En effet, ces cas ne sont pas présents dans les trajectoires de référence considérées. Enfin, les forces de résistance au roulement seront négligées dans le modèle de synthèse, car ces forces sont significativement plus faible que les forces des pneus. Malgré ces approximations, les expressions des matrices $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t)$, $C(t)$, $D(t)$ et $D_h(t)$ restent complexes. Pour simplifier la lecture et la compréhension du chapitre, elles sont présentées dans l'annexe C. La Figure 4.4 montre un schéma du modèle linéarisé (4.30). Le modèle obtenu dépend de six matrices variables dans le temps. Il s'agit donc

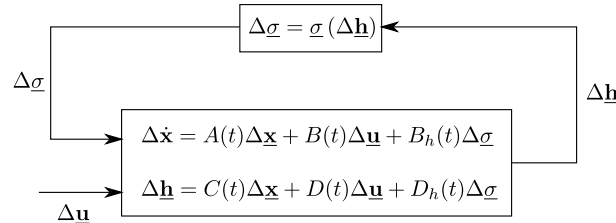


FIGURE 4.4 – Modèle linéarisé avec forces saturées bouclées en entrée.

d'un modèle temps-variant. Dans les sections 4.3.1 et 4.3.2 les deux fonctions de saturation précédemment présentées dans la section 2.2 nous permettront d'exprimer le modèle variable dans le temps de deux façons différentes. Les deux représentations ont des avantages différents pour la synthèse des correcteurs, détaillés dans les chapitres 6 et 7.

4.3.1 Modèle avec entrées seuil

On rappelle la fonction de saturation (2.33) à dérivée discontinue, montrée en Figure 4.5, définie par :

$$\sigma(x) = \begin{cases} u_s, & x \geq u_s \\ x, & \ell_s \leq x \leq u_s \\ \ell_s, & x \leq \ell_s \end{cases} \quad (4.31)$$

On définit aussi la fonction seuil, montrée en Figure 4.6 :

$$\phi(x) = \sigma(x) - x. \quad (4.32)$$

On s'est intéressés à exprimer le modèle linéarisé en fonction de la fonction seuil. En effet, comme on

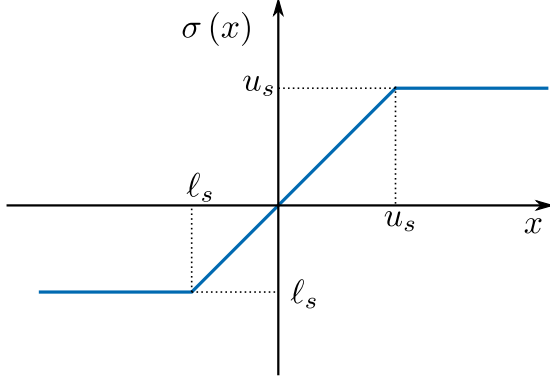


FIGURE 4.5 – Fonction de saturation.

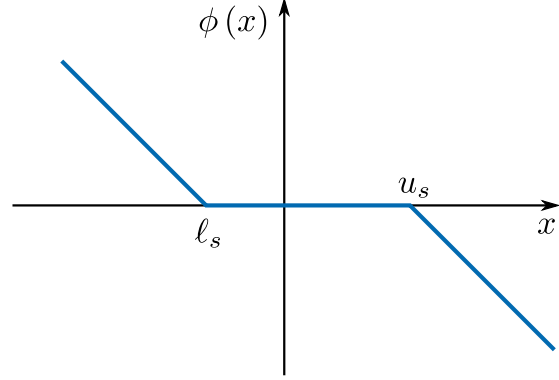


FIGURE 4.6 – Fonction seuil.

verra dans les chapitres suivants, pour la fonction seuil il existe une condition utile pour la synthèse des correcteurs en prenant en compte l'entrée non-linéaire. Il est possible d'exprimer le modèle (4.30) en exploitant (4.32) et en effectuant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\mathbf{h}} &= C(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + D_h(t) \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) - D_h(t) \Delta \underline{\mathbf{h}} + D_h(t) \Delta \underline{\mathbf{h}} \\ (I - D_h(t)) \Delta \underline{\mathbf{h}} &= C(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + D_h(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \Delta \underline{\mathbf{h}} &= \underbrace{(I - D_h(t))^{-1} C(t)}_{=\tilde{C}(t)} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \underbrace{(I - D_h(t))^{-1} D(t)}_{=\tilde{D}(t)} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \underbrace{(I - D_h(t))^{-1} D_h(t)}_{=\tilde{D}_h(t)} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \end{aligned}$$

et par conséquent la dynamique de l'état est décrite par les expressions :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= A(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t) \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) - B_h(t) \Delta \underline{\mathbf{h}} + B_h(t) \Delta \underline{\mathbf{h}} \\ \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= A(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B_h(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) + B(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t) \tilde{C}(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B_h(t) \tilde{D}(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + B_h(t) \tilde{D}(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= \underbrace{(A(t) + B_h(t) \tilde{C}(t))}_{=\tilde{A}(t)} \Delta \underline{\mathbf{x}} + \underbrace{(B(t) + B_h(t) \tilde{D}(t))}_{=\tilde{B}(t)} \Delta \underline{\mathbf{u}} + \underbrace{(B_h(t) + B_h(t) \tilde{D}(t))}_{=\tilde{B}_h(t)} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}). \end{aligned}$$

Ainsi, le système (4.30), en exploitant l'expression (4.31) de la fonction de saturation, est équivalent à :

$$\Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} = \tilde{A}(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + \tilde{B}(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + \tilde{B}_h(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (4.33a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = \tilde{C}(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + \tilde{D}(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + \tilde{D}_h(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (4.33b)$$

avec :

$$\tilde{A}(t) = A(t) + B_h(t) \tilde{C}(t) \quad (4.33c)$$

$$\tilde{B}(t) = B(t) + B_h(t) \tilde{D}(t) \quad (4.33d)$$

$$\tilde{B}_h(t) = B_h(t) + B_h(t) \tilde{D}_h(t) \quad (4.33e)$$

$$\tilde{C}(t) = (I - D_h(t))^{-1} C(t) \quad (4.33f)$$

$$\tilde{D}(t) = (I - D_h(t))^{-1} D(t) \quad (4.33g)$$

$$\tilde{D}_h(t) = (I - D_h(t))^{-1} D_h(t). \quad (4.33h)$$

Les expressions complètes des matrices $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{B}_h(t)$, $\tilde{C}(t)$, $\tilde{D}(t)$ et $\tilde{D}_h(t)$ sont présentées dans l'annexe C. Ce modèle sera exploité dans la section 7.1 pour définir un modèle LPV du véhicule.

4.3.2 Linéarisation des fonctions de saturation

Dans cette section on utilise comme fonction de saturation la *fonction logistique* (2.32), qu'on rappelle est définie par :

$$\sigma(x) = \frac{u_s - \ell_s}{1 + e^{-\frac{4}{u_s - \ell_s} \left(x - \frac{u_s + \ell_s}{2}\right)}} + \ell_s \quad (4.34)$$

où u_s et ℓ_s sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de la saturation. Cette fonction est représentée dans la Figure 4.7. La fonction logistique peut être linéarisée et décrite par une droite centrée

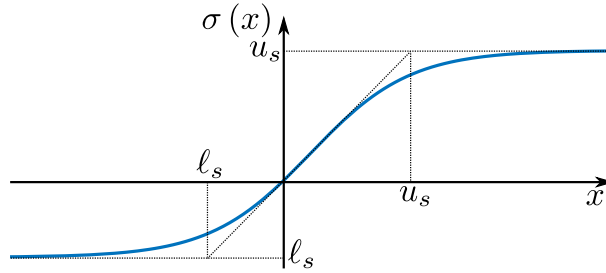


FIGURE 4.7 – Fonction logistique.

à zéro avec pente variable. Si, par exemple, on considère $F_{xf} = \sigma(\hat{F}_{xf})$ le long de $\mathcal{T}(t)$, alors en utilisant un développement en série de Taylor au premier ordre, la linéarisation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} F_{xf} &\approx F_{xf}|_{(\hat{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))} + \left. \frac{\partial \sigma(\hat{F}_{xf})}{\partial \hat{F}_{xf}} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))} \Delta \hat{F}_{xf} \\ &\approx F_{xf}|_{(\hat{\mathbf{x}}_0(t), \mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))} + k_{F_{xf}}(t) \Delta \hat{F}_{xf} \end{aligned} \quad (4.35)$$

soit l'expression linéarisée pour ΔF_{xf} :

$$\Delta F_{xf} = k_{F_{xf}}(t) \Delta \hat{F}_{xf}. \quad (4.36)$$

Le coefficient $k_{F_{xf}}(t)$ varie selon le point de fonction du système : si F_{xf} est saturée $k_{F_{xf}} = 0$, si F_{xf} est au centre de la plage de saturation, $k_{F_{xf}} = 1$. En utilisant cette approximation également pour les autres forces saturées, il est possible d'approcher le vecteur $\Delta \underline{\sigma}$ de la façon suivante :

$$\Delta \underline{\sigma}(\mathbf{h}) \approx K_\sigma(t) \Delta \mathbf{h} \quad (4.37)$$

où la matrice K_σ est une matrice diagonale avec les coefficients de pente des forces saturées dans la diagonale :

$$K_\sigma(t) = \begin{bmatrix} k_{N_f}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{N_f}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{F_{xf}}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{F_{xr}}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{F_{yf}}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{F_{yr}}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

On sait que les coefficients de pente varient selon le point de fonctionnement du système : plus les forces s'approchent des bornes de saturation, plus les coefficients des droites s'approchent de zéro. Le coefficient de pente le long de la trajectoire de référence est donc compris dans un secteur et l'amplitude du secteur dépend de la trajectoire de référence. Dans les Figures 4.8 et 4.9 on illustre les secteurs de

Force	Évitement sans freinage		Évitement avec freinage	
	\underline{k}	\bar{k}	\underline{k}	\bar{k}
ΔN_f	0,9394	0,9917	0,6499	0,9913
ΔN_r	0,9394	0,9917	0,6501	0,9913
ΔF_{xf}	0,9691	0,9793	0,1293	0,9950
ΔF_{xr}	0,9378	0,9618	0	0,9860
ΔF_{yf}	0,5806	1	0,8479	1
ΔF_{yr}	0,5152	1	0,0088	1

TABLE 4.2 – Secteur de pente des fonctions de saturation linéarisées.

pente pour le modèle bicyclette sans suspensions le long de la manœuvre d'évitement d'obstacle sans freinage, présentée dans la section 3.1.1, et le long de la manœuvre d'évitement d'obstacle avec freinage, présentée dans la section 3.1.2. A partir des secteurs illustrés dans les Figures 4.8 et 4.9, il est possible de constater qu'effectivement, dans la manœuvre avec freinage, les forces des pneus s'approchent davantage des bornes de saturation. Cela est dû aux glissements longitudinal et latéral combinés. Dans la manœuvre d'évitement sans freinage, seuls les secteurs des forces latérales des pneus incorporent des valeurs inférieures à 1. L'amplitude des secteurs des forces normales aux roues et des forces longitudinales des pneus est quasiment nulle et la pente est toujours très proche de 1. En effet, sans couple appliqué aux roues, la force longitudinale générée par les pneus est très proche de zéro et l'accélération longitudinale est également faible. L'accélération longitudinale est la cause principale du transfert de charge entre l'essieu avant et arrière. Si elle est faible, le transfert de charge l'est aussi. Pour la manœuvre d'évitement avec freinage

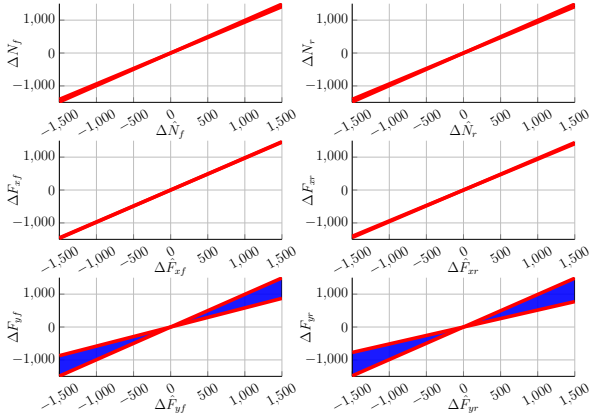


FIGURE 4.8 – Secteurs de pente le long de la manœuvre d'évitement sans freinage.

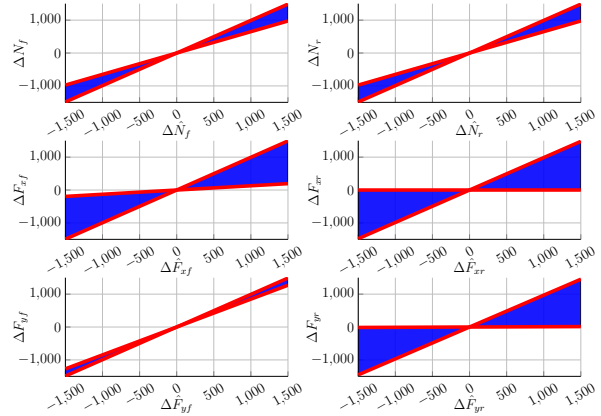


FIGURE 4.9 – Secteurs de pente le long de la manœuvre d'évitement avec freinage.

c'est différent et le couple appliqué aux roues induit de larges forces longitudinales. Seul le secteur de la force latérale du pneu avant est plutôt proche de 1. En effet, pendant le freinage, le transfert de charge augmente la force maximale totale du pneu avant et donc le pneu est loin de la saturation. Dans la table 4.2, les coefficients de pente maximale et minimale pour les forces saturées le long des deux manœuvres d'évitement sont montrés. Ils sont notés respectivement par \bar{k} et \underline{k} . En utilisant l'approximation (4.37) dans (4.30a) on trouve :

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} + D_h(t) K_\sigma(t) \Delta \underline{\mathbf{h}}$$

$$(I - D_h(t) K_\sigma) \Delta \underline{\mathbf{h}} = C(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D(t) \Delta \underline{\mathbf{u}}$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = (I - D_h(t) K_\sigma)^{-1} C(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + (I - D_h(t) K_\sigma)^{-1} D(t) \Delta \underline{\mathbf{u}}.$$

Finalement $\Delta \underline{\mathbf{h}}$ est égal à :

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = \tilde{C}(t) \Delta \underline{\mathbf{x}} + \tilde{D}(t) \Delta \underline{\mathbf{u}} \quad (4.39a)$$

$$\hat{C}(t) = (I - D_h(t) K_\sigma(t))^{-1} C(t) \quad (4.39b)$$

$$\hat{D}(t) = (I - D_h(t) K_\sigma(t))^{-1} D(t) \quad (4.39c)$$

et il est possible d'approcher également $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ en remplaçant (4.39) dans (4.30a) :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} &= A(t) \Delta \mathbf{x} + B(t) \Delta \mathbf{u} + B_h(t) K_\sigma(t) \Delta \mathbf{h} \\ &= A(t) \Delta \mathbf{x} + B(t) \Delta \mathbf{u} + B_h(t) K_\sigma(t) \left(\hat{C}(t) \Delta \mathbf{x} + \hat{D}(t) \Delta \mathbf{u} \right). \end{aligned}$$

Enfin, la dynamique du modèle linéarisé est exprimée par l'expression suivante :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \hat{A}(t) \Delta \mathbf{x} + \hat{B}(t) \Delta \mathbf{u} \quad (4.40a)$$

$$\hat{A}(t) = A(t) + B_h(t) K_\sigma(t) \hat{C}(t) = A(t) + B_h(t) K_\sigma(t) (I - D_h(t) K_\sigma(t))^{-1} C(t) \quad (4.40b)$$

$$\hat{B}(t) = B(t) + B_h(t) K_\sigma(t) \hat{D}(t) = B(t) + B_h(t) K_\sigma(t) (I - D_h(t) K_\sigma(t))^{-1} D(t). \quad (4.40c)$$

Le modèle linéaire (4.40) ne dépend plus des entrées saturées. Le nombre des matrices variables dans le temps dont la représentation d'état dépend est réduit de six à deux. On verra dans la section 6.1 que cela constitue un avantage pour la représentation sous forme de modèle LPV polytopique. Les expressions complètes des matrices $\hat{A}(t)$ et $\hat{B}(t)$ sont présentes dans l'annexe C.

4.4 Dynamique de l'erreur de position et de lacet

Dans cette section, on définit les dynamiques de l'erreur de position dans un repère absolu et de lacet du véhicule par rapport à la trajectoire de référence. En effet, le modèle de synthèse des correcteurs doit comporter la dynamique de ces erreurs, afin d'assurer le suivi de trajectoire du véhicule au regard de la trajectoire de référence. Pour représenter la dynamique de l'erreur, on utilise un modèle simplifié de la cinématique du véhicule qu'on retrouve souvent dans la littérature, comme dans [RAJAMANI 2012](#). Avec ce modèle, les vitesses longitudinale et latérale du véhicule dans le repère absolu sont exprimées par :

$$v_a = v \cos \psi \quad (4.41a)$$

$$u_a = v \sin \psi. \quad (4.41b)$$

Cela est équivalent à approcher la vitesse latérale u par zéro dans la relation (1.38), décrivant la vitesse absolue du modèle bicyclette sans approximation. En effet, selon la relation (1.38), les vitesses longitudinale et latérale du véhicule dans le repère absolu sont exprimées par :

$$v_a = v \cos \psi - u \sin \psi \quad (4.42a)$$

$$u_a = u \cos \psi + v \sin \psi. \quad (4.42b)$$

Cette approximation est justifiée pour les trajectoires d'intérêt. En effet, on peut prendre comme exemple la manœuvre d'évitement d'obstacle sans freinage, vue dans la section 3.1.1 et la manœuvre d'évitement d'obstacle avec freinage, vue dans la section 3.1.2. Ces trajectoires représentent deux types de trajectoires de référence qu'on sera amenés à traiter pour la synthèse des correcteurs dans les chapitres 6 et 7. Dans les Figures 4.10 et 4.11, on observe les évolutions temporelles de v et u pour le modèle bicyclette sur les deux trajectoires de référence considérées. On peut vérifier que la composante latérale de la vitesse u est faible dans les deux manœuvres et négligeable par rapport à v pour décrire le déplacement du véhicule dans l'espace. On peut conclure que l'expression (4.41) est une approximation pratique pour le calcul de la dynamique de l'erreur de position dans le repère absolu. Les vitesses longitudinale et latérale du véhicule le long de la trajectoire de référence dans un repère absolu sont exprimées par :

$$v_{0a} = v_0 \cos \psi_0 \quad (4.43a)$$

$$u_{0a} = v_0 \sin \psi_0 \quad (4.43b)$$

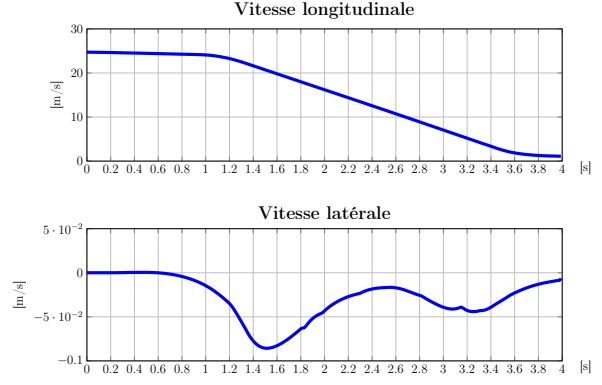
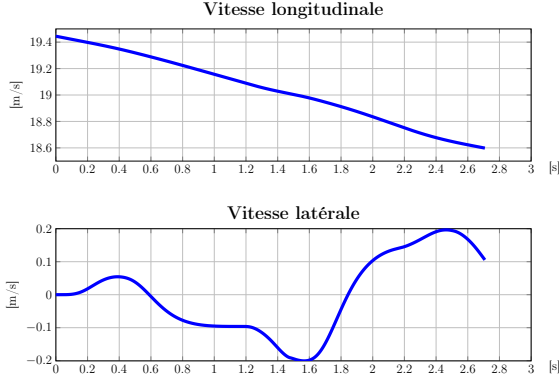


FIGURE 4.10 – Manœuvre d'évitement sans freinage. FIGURE 4.11 – Manœuvre d'évitement avec freinage.

où v_0 , u_0 et ψ_0 sont respectivement la vitesse longitudinale, latérale et l'angle de lacet du véhicule le long de $\mathcal{T}(t)$. Par simplicité de notation, on a omis la dépendance au temps de ces variables. On peut donc calculer la dynamique de l'erreur de position entre le véhicule et la trajectoire dans le repère absolu à partir des relations (4.41) et (4.43) :

$$\Delta v_a = v_a - v_{0a} = v \cos \psi - v_0 \cos \psi_0 \quad (4.44a)$$

$$\Delta u_a = u_a - u_{0a} = v \sin \psi - v_0 \sin \psi_0. \quad (4.44b)$$

A présent on considère les variables d'état du système linéarisé (le modèle (4.33) ou le modèle (4.40), ils partagent les mêmes variables d'état) :

- Δv , l'écart de vitesse longitudinale dans le repère du véhicule,
- Δu , l'écart de vitesse latérale dans le repère du véhicule,
- Δr , l'écart de vitesse de lacet du véhicule par rapport à la trajectoire de référence.

La variable $\Delta\psi$, dont la dynamique est donnée par :

$$\Delta \dot{\psi} = \Delta r \quad (4.45)$$

représente l'erreur de lacet par rapport à la trajectoire de référence. On souhaite exprimer Δv_a et Δu_a en fonction de Δv , Δu et $\Delta\psi$, les variables d'état du modèle linéarisé utilisées pour la synthèse des correcteurs. En exploitant la relation (4.23a), il est possible d'exprimer :

$$v = \Delta v + v_0 v = \Delta v + v_0 \cos \Delta\psi + u_0 \sin \Delta\psi \quad (4.46a)$$

$$u = \Delta u + u_0 v = \Delta u + u_0 \cos \Delta\psi - v_0 \sin \Delta\psi \quad (4.46b)$$

$$\psi = \Delta\psi + \psi_0. \quad (4.46c)$$

En utilisant les expressions en (4.46) dans la dynamique de l'erreur de position et d'angle entre véhicule et trajectoire de référence (4.44) on obtient :

$$\Delta v_a = (\Delta v + v_0) \cos (\Delta\psi + \psi_0) - v_0 \cos \psi_0 \quad (4.47a)$$

$$\Delta u_a = (\Delta v + v_0) \sin (\Delta\psi + \psi_0) - v_0 \sin \psi_0. \quad (4.47b)$$

Soit :

$$\Delta v_a = (\Delta v + v_0) (\cos \Delta\psi \cos \psi_0 - \sin \Delta\psi \sin \psi_0) - v_0 \cos \psi_0 \quad (4.48a)$$

$$\Delta u_a = (\Delta v + v_0) (\sin \Delta\psi \cos \psi_0 + \cos \Delta\psi \sin \psi_0) - v_0 \sin \psi_0. \quad (4.48b)$$

On peut considérer que ψ_0 et $\Delta\psi$ sont faibles. Cette hypothèse est justifiée selon le type de trajectoire qu'on considérera pour le contrôle du véhicule. En effet, on peut prendre comme exemple les manœuvres d'évitement d'obstacle sans et avec freinage, déjà présentées précédemment. Les Figures 4.12 et 4.13 montrent l'angle de lacet pour ces deux trajectoires, permettant de vérifier que sa valeur reste faible dans les deux cas. Comme on considère une linéarisation du véhicule autour de la trajectoire, la représentation

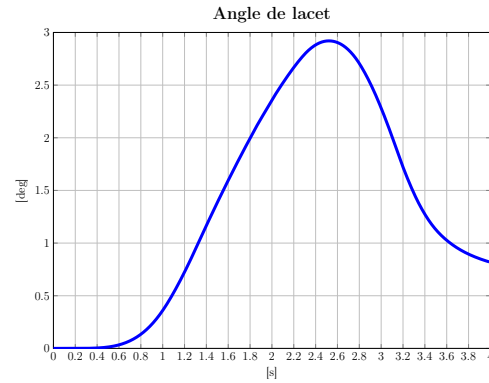
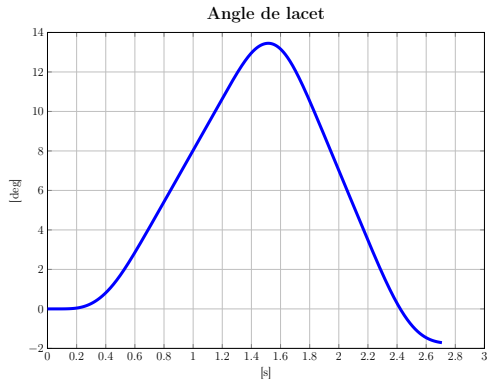


FIGURE 4.12 – Manœuvre d'évitement sans freinage. FIGURE 4.13 – Manœuvre d'évitement avec freinage.

au moyen d'un modèle linéaire est justifiée si $\Delta\psi$ est faible. Les valeurs de ψ_0 et $\Delta\psi$ étant considérées faibles, alors $\psi = \Delta\psi + \psi_0$ est également faible. Dans la suite, les approximations suivantes ont donc été prises en compte : $\cos \psi \approx 1$ et $\sin \psi \approx \psi$ et finalement (4.48) devient :

$$\Delta v_a = \Delta v \quad (4.49a)$$

$$\Delta u_a = \Delta v \psi_0 + \Delta v \Delta\psi + \Delta\psi v_0. \quad (4.49b)$$

Pour aboutir à un modèle de synthèse linéaire, le terme bilinéaire $\Delta v \Delta\psi$ est négligée, car on suppose que les correcteurs qu'on développera maintiendront le véhicule autour de la trajectoire de référence et que cette hypothèse reste valide. Dans ce cas, Δv et $\Delta\psi$ seront faibles et il semble donc raisonnable d'enlever le terme $\Delta v \Delta\psi$ pour le modèle de synthèse. Finalement, les dynamiques de l'erreur de position dans le repère absolu et de lacet sont exprimées par :

$$\dot{x}_L = \Delta v \quad (4.50a)$$

$$\dot{y}_L = \Delta v \psi_0 + \Delta\psi v_0 \quad (4.50b)$$

$$\Delta \dot{\psi} = \Delta r \quad (4.50c)$$

où x_L et y_L sont les erreurs longitudinale et latérale dans le repère absolu. Les équations (4.50) sont donc ajoutées aux modèles linéarisés (4.33) et (4.40). Pour cette raison le vecteur d'état du modèle linéarisé est :

$$\underline{\mathbf{x}} = \left[v \quad u \quad r \quad x_L \quad y_L \quad \Delta\psi \quad \omega_{wf} \quad \omega_{wr} \right]^T.$$

Malgré le fait que plusieurs approximations ont été appliquées pour obtenir (4.50), on montrera grâce aux résultats des chapitres 6, 7 et 8 que les correcteurs développés à partir de ce modèle stabilisent le véhicule autour des trajectoires de référence visées. En effet, on estime qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser le modèle exact de la cinématique du véhicule, présenté dans la section 1.4, pour la synthèse du correcteur. Une analyse réalisée au préalable des expressions des dynamiques des erreurs de position et de lacet pour le modèle de synthèse a confirmé qu'il suffit d'un modèle permettant de représenter le couplage entre la vitesse longitudinale et la rotation de lacet du véhicule pour décrire le déplacement latéral. Ce couplage est présent dans l'équation (4.50b).

Les modèles linéarisés obtenus dans ce chapitre seront utilisés dans les chapitre 6 et 7 pour la formalisation d'un modèle LPV et la synthèse de différents correcteurs.

Deuxième partie

Synthèse des correcteurs

Cette partie aborde la synthèse de correcteurs pour le contrôle du véhicule dans des manœuvres à haute dynamique. Dans un premier temps, une revue de la littérature concernant le contrôle du véhicule est proposée. L'aperçu fourni permettra de choisir les méthodes utilisées pour la synthèse des correcteurs. Dans un deuxième temps, la synthèse des correcteurs est présentée. Les approches LPV polytopique et *grid-based* sont exploitées pour obtenir les lois de commande. Les correcteurs obtenus sont validés au moyen de différentes simulations avec le système en boucle fermée en exploitant le modèle à haute représentativité MADA. Enfin, cette partie termine avec les conclusions et perspectives de ces travaux de thèse.

ÉTAT DE L'ART

Sommaire

5.1	Contrôle du véhicule : manœuvres à faible dynamique	85
5.1.1	Contrôle longitudinal pour des manœuvres à faible dynamique	86
5.1.2	Contrôle latéral pour des manœuvres à faible dynamique	88
5.2	Contrôle du véhicule : manœuvres à haute dynamique	90
5.2.1	Découplage des dynamiques longitudinale et latérale	90
5.2.2	Couplage des dynamiques longitudinale et latérale	91
5.3	Choix de la méthode de synthèse des correcteurs	94
5.4	Commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV	95
5.4.1	Approche polytopique	97
5.4.2	Approche LFT	97
5.4.3	Approche <i>grid-based</i>	99

Ce chapitre présente l'état de l'art du contrôle du véhicule dans le cadre de l'automatisation de la conduite et des méthodes de commande pour la synthèse des correcteurs. L'objectif est d'identifier les méthodes de synthèse des lois de commande employées dans le contexte de la conduite autonome. Il est important de comprendre les contextes dans lesquels ces méthodes sont appliquées, leurs avantages et leurs inconvénients. Cela permettra de comprendre les besoins de recherche du domaine et quelles méthodes sont potentiellement plus avantageuses pour le problème de stabilisation du véhicule le long des trajectoires à haute dynamique.

Dans l'introduction de ce manuscrit, les différents systèmes d'automatisation de la conduite et les défis futurs auxquels les mondes académique et industriel doivent se confronter pour étendre le domaine d'application de la conduite autonome ont été décrits. En ce sens, les manœuvres à faible et haute dynamique ont été différenciées. Dans la section 5.1 la littérature portant sur le contrôle du véhicule dans le cas des manœuvres à faible dynamique est traitée. La section 5.2 fait l'objet de la littérature concernant le contrôle du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique. Dans la section 5.3, les conclusions sur l'analyse de la littérature présentée dans les deux sections précédentes sont proposées. Enfin, un choix des méthodes pour la synthèse des correcteurs, fondée sur l'aperçu fourni dans les sections 5.1 et 5.2, est effectué. En vue des méthodes retenues pour la synthèse des correcteurs, la littérature sur la commande robuste et optimale appliquée aux modèles LPV est présentée dans la section 5.4. Une revue des autres méthodes de synthèse des correcteurs est présentée dans l'annexe B.

5.1 Contrôle du véhicule : manœuvres à faible dynamique

Dans cette section, une étude bibliographique du contrôle du véhicule dans des conditions de faible dynamique est abordée. L'automatisation de la conduite dans ces conditions est généralement traitée par des fonctions de confort, comme l'ACC (*Adaptive Cruise Control*) et le LCA (*Lane Centering Assistance*), évoquées dans l'introduction de ce manuscrit. On rappelle que les manœuvres à faible dynamique sont

celles avec une accélération du véhicule inférieure à $0,3g$. Dans ces conditions, les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule sont généralement considérées découplées. De la relation (1.2) on sait que les accélérations longitudinale et latérale du véhicule, dans un repère lié au véhicule, sont :

$$a_x = \dot{v} - r u \quad (5.1a)$$

$$a_y = \dot{u} + r v \quad (5.1b)$$

où les termes $r u$ dans (5.1a) et $r v$ dans (5.1b) représentent le couplage entre les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule. Pour des manœuvres à faible dynamique, la vitesse latérale u , la vitesse de lacet r et la variation de la vitesse longitudinale v restent faibles. Pour cela le terme $r u$ dans (5.1a) peut être approché par zéro et on peut considérer v constant et $r v$ dans (5.1b) variable exclusivement par r . On peut donc constater que l'hypothèse que les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule soient découplées est pertinente. De plus, dans des conditions à faible dynamique, le comportement des forces des pneus peut être considéré linéaire et le glissement combiné peut être négligé. Comme présenté dans la section 2.2, les forces des pneus sont soumises à saturation et le seuil de saturation dépend de différents facteurs :

- la charge sur la roue,
- le glissement combiné, c'est-à-dire que le seuil de saturation pour la force longitudinale du pneu dépend de la force latérale instantanée et vice versa,
- les coefficients de frottement entre pneu et sol,
- les coefficients de raideur longitudinale et latérale des pneus.

Parmi ces points, on ne considère maintenant que les deux premiers, qui sont ceux liés à la dynamique du véhicule. Pour le premier point on peut supposer que, dans une manœuvre à faible dynamique, le transfert de charge est faible. En effet, il a été montré dans la section 2.5 que la distribution de charge varie avec l'accélération du véhicule : si l'accélération est faible, les forces normales aux roues peuvent être considérées constantes et égales à la charge statique, c'est-à-dire avec le véhicule à l'arrêt. Pour le deuxième point, dans des manœuvres à faible dynamique, l'accélération du véhicule étant faible, il est alors raisonnable de supposer que les forces des pneus sont faibles aussi. L'effet du glissement combiné sur le seuil de saturation est négligeable. On peut en conclure que dans ces conditions, en supposant le transfert de charge et le glissement combiné nuls, le seuil de saturation des pneus reste élevé, si le coefficient de frottement entre pneu et sol et les coefficients de raideur du pneu ne sont pas trop faibles. Étant donné qu'on considère le seuil de saturation élevé et qu'on a supposé que les forces des pneus nécessaires à ce type de manœuvre seront faibles, alors il est raisonnable de négliger la saturation des forces des pneus. Les approximations pour le transfert de charge et le glissement combiné servent aussi à approcher le calcul de forces des pneus, présenté dans (2.3), en considérant $c_\kappa^*(\mu, N, \alpha)$ et $c_\alpha^*(\mu, N, \kappa)$ constants. Dans des manœuvres à faible dynamique, on voit donc qu'il est possible d'utiliser un modèle des forces des pneus linéaire, où l'interaction entre les forces longitudinales et latérales des pneus est nulle. Pour des manœuvres à faible dynamique, grâce au fait que les dynamiques latérale et longitudinale du véhicule sont découplées et que le glissement combiné est négligé, le problème de la conduite autonome est souvent séparé en deux problèmes distincts : le *contrôle longitudinal* et le *contrôle latéral*. Le contrôle longitudinal corrige généralement la vitesse longitudinale du véhicule et éventuellement l'écart longitudinal avec une cible en face du véhicule. Le contrôle latéral porte sur le déplacement latéral du véhicule et de son attitude, en particulier de son angle de lacet. Dans la suite on considère séparément la littérature des contrôles longitudinal et latéral pour des manœuvres à faible dynamique.

5.1.1 Contrôle longitudinal pour des manœuvres à faible dynamique

Dans cette section une revue de la littérature sur le contrôle longitudinal pour des manœuvres à faible dynamique est effectuée. Les méthodes présentées sont donc normalement employées pour l'ACC, une fonction de confort qui régule automatiquement la vitesse du véhicule à la valeur de référence imposée par le conducteur et l'adapte selon la vitesse des véhicules voisins, afin de maintenir une distance de sécurité. La loi de commande doit donc être capable de réaliser deux opérations différentes :

- réguler la vitesse du véhicule,
- suivre le véhicule qui le précède.

De plus, le système doit comporter une fonction pour décider le mode de fonctionnement à utiliser à chaque instant et effectuer une transition entre les deux opérations lors des commutations du mode de fonctionnement. En revanche, ce dernier point peut être considéré comme appartenant au domaine de la

planification de trajectoire, car il nécessite d'établir à quelle vitesse et jusqu'à quelle distance le véhicule s'approche d'un véhicule cible. Cette aspect est donc en dehors du cadre des travaux de cette thèse, car on suppose la trajectoire de référence connue. Dans la suite on se focalise donc sur l'aspect asservissement du véhicule. Comme présenté dans [RAJAMANI 2012](#), l'architecture du contrôle longitudinal est généralement hiérarchisée, avec un correcteur de haut niveau et un correcteur bas niveau. Le correcteur de haut niveau détermine l'accélération de référence du véhicule, selon la vitesse du véhicule, la vitesse cible imposée par le conducteur et les informations d'un éventuel véhicule cible. Le correcteur bas niveau détermine le couple moteur ou de freinage nécessaire à suivre l'accélération calculée par le correcteur de haut niveau. La Figure 5.1 montre l'architecture générique du contrôle longitudinal. Une méthode largement utilisée

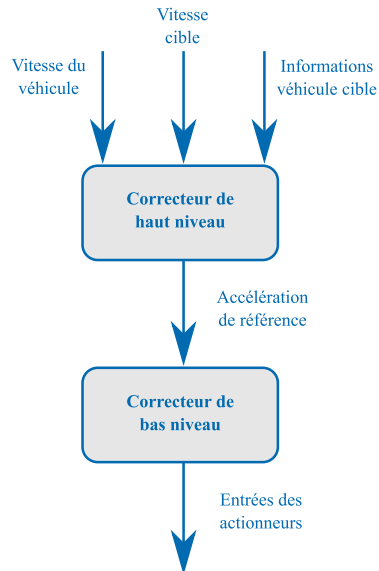


FIGURE 5.1 – Architecture du contrôle longitudinal.

pour le correcteur haut niveau est le régulateur PID. Dans [PERSSON et al. 1999](#) un correcteur à action intégrale seule est proposé, avec en entrée l'écart d'accélération. Les auteurs ont fait le choix de ne pas utiliser les actions proportionnelle et dérivée car des tests expérimentaux ont montré que le bruit sur la mesure de l'accélération du véhicule et sur sa dérivée conduisaient à une commande d'amplitude trop importante. Pour compenser l'absence de l'action proportionnelle, un *feed-forward* statique, portant sur l'accélération de référence, a été ajouté. Pour adapter le comportement de la boucle fermée selon si on souhaite accélérer ou freiner le véhicule, deux gains d'action intégrale K_i et deux gains de *feed-forward* sont utilisés. La valeur des gains est choisie selon le signe de l'accélération de référence, négative ou positive. Un correcteur PID, avec en entrée l'écart de vitesse, est proposé dans [HIMA et al. 2011](#). Pour réduire la sensibilité de la commande au bruit à haute fréquence, un filtre passe-bas est appliqué à l'action dérivée. De plus, pour empêcher à la partie intégrale de prendre des valeurs trop élevées en cas de saturation des actionneurs, un correcteur *anti-windup* est ajouté. Dans [NAUS et al. 2010a](#) les auteurs proposent un correcteur PD, c'est-à-dire sans partie intégrale, avec en entrée l'écart de position longitudinale. La dynamique du système en boucle fermée avec le correcteur bas niveau est approché par une fonction du troisième ordre avec retard temporel. Les gains K_p et K_d sont calculés en imposant à la fonction de sensibilité complémentaire de la boucle fermée une bande passante et une marge de phase souhaitées. De plus, les auteurs considèrent que les véhicules adjacents communiquent entre eux. Dans ce cas on considère donc une extension de l'ACC, appelée CACC (*Cooperative Adaptive Cruise Control*). Cette extension peut permettre une amélioration de la sécurité routière dans le cas d'une flotte de véhicule qui voyage avec l'ACC activé. On ne cherche pas seulement la stabilité du véhicule, garantie par l'ACC, mais on souhaite également garantir que les erreurs d'écartement des véhicules ne s'amplifient pas le long de la flotte lorsqu'un véhicule ne se déplace pas à vitesse constante. Dans ce cas on parle de *string stability*. Dans [NAUS et al. 2010a](#), les auteurs considèrent qu'un véhicule dispose de la mesure de l'accélération du véhicule le précédant. Ce signal est donc utilisé comme entrée d'un *feed-forward*, pour améliorer la performance du correcteur PD. Des tests expérimentaux montrent que le correcteur avec *feed-forward* permet de réduire la distance entre véhicules en garantissant la *string stability*, en revanche pas garantie par un simple correcteur PD. Une autre solution basée sur des correcteurs PD et garantissant la *string stability* dans le cadre d'une fonction CACC est proposée dans [MILANÉS et al. 2014](#). Dans [HASPALAMUTGIL](#)

et ADALI 2017 les auteurs proposent deux correcteurs PI pour le contrôle haut niveau de l'ACC. Un correcteur PI est utilisé pour la régulation de la vitesse au cas où aucun véhicule cible est présent. Un autre correcteur PI est utilisé pour la régulation de la distance en cas de présence d'un véhicule cible. Un algorithme de commutation est utilisé pour le choix du correcteur à utiliser. La critique évoquée la plus commune à l'utilisation des correcteurs PID concerne le calcul des gains du régulateur. En effet, ils nécessitent un réglage assez fin, souvent réalisé de façon itérative suite à plusieurs essais. On trouve également dans la littérature des solutions utilisant d'autres méthodes pour la synthèse des correcteurs de haut niveau pour le contrôle longitudinal. Dans LIANG et PENG 1999 les auteurs proposent une solution pour calculer les coefficients d'un correcteur PI comme ceux d'un correcteur LQ. On considère pour cela un système dont le vecteur d'état est constitué des écarts de vitesse et de position du véhicule par rapport au véhicule le précédant. La dynamique de l'écart de vitesse, donc l'accélération de l'écart, est approchée par une fonction du premier ordre avec retard temporel. Cela conduit à un modèle linéaire. Un retour d'état de ce système a donc la même structure qu'un correcteur PI avec en entrée l'écart de vitesse. Les coefficients du correcteur sont déterminés par une approche LQ. Un correcteur dynamique H_∞ est proposé dans KAYACAN 2017. Comme dans NAUS et al. 2010a, les auteurs considèrent : un correcteur en boucle fermée avec l'écart de position et un *feed-forward* à partir de la mesure de l'accélération du véhicule le précédant (les véhicules adjacents communiquent entre eux leur accélération). Dans ce cas également on approche la dynamique de la boucle bas niveau par un modèle linéaire du troisième ordre avec un retard temporel. En revanche, au lieu d'utiliser un correcteur statique PD, l'auteur de KAYACAN 2017 propose un correcteur dynamique de type H_∞ , pour obtenir une boucle fermée robuste, optimiser le suivi de consigne et rejeter les perturbations, dans ce cas représentées sous forme d'un signal générique ajouté à la commande en sortie du correcteur. Un autre correcteur H_∞ est proposé dans LAIB, SENAME et DUGARD 2020 pour une fonction de CACC, garantissant la *string stability*. Dans ce cas, un modèle LPV, permettant de considérer un espacement temporel variable entre les véhicules, est utilisé pour la synthèse du correcteur, qui dépend donc du paramètre variable. La commande MPC est utilisée dans NAUS et al. 2010b pour la synthèse du correcteur haut niveau pour le ACC. Le modèle utilisé pour la prédiction est un simple modèle linéaire ne prenant pas en compte les forces qui agissent sur le véhicule et considérant la vitesse et l'accélération du véhicule. Les erreurs de position et de vitesse par rapport au véhicule cible sont mesurées. Le problème d'optimisation pour le calcul de la commande optimale est soumis à des contraintes : l'erreur de position relative doit être positive et les valeurs de l'accélération et du *jerk* du véhicule doivent être comprises dans une plage donnée. Ces contraintes permettent de respecter les objectifs de sécurité, confort et consommation énergétique de l'ACC. La fonction de coût utilisée est quadratique en l'état et la dérivée de l'accélération souhaitée, afin de maximiser le confort de conduite induite par la commande. Enfin, la méthode proposée par BEMPORAD et al. 2002 est utilisée pour obtenir un correcteur PWA explicite.

Pour le contrôle du couple (commande bas niveau), nécessaire à réaliser l'accélération issue du correcteur haut niveau, il est important d'utiliser un modèle de la dynamique longitudinale du véhicule, en considérant aussi la dynamique des actionneurs. La dynamique du moteur est en particulier caractérisée par des non-linéarités, comme expliqué dans CHO et HEDRICK 1989 et MOSKWA et HEDRICK 1992. Pour cette raison une méthode largement employée dans la littérature pour les correcteurs bas niveau pour le contrôle longitudinal est la commande par mode glissant. HEDRICK et al. 1991 utilise la commande par mode glissant à partir d'un modèle de la dynamique longitudinale du véhicule qui considère la dynamique du moteur non-linéaire et celle des freins linéaire. En considérant que le modèle a une dérivée discontinue, une méthode exploitant des surfaces de glissement multiples, proposée par GREEN et HEDRICK 1990, est utilisée. Un correcteur similaire est proposé par SEI-BUM CHOI et HEDRICK 1995. Les auteurs de WANG et al. 2019 proposent une solution de commande par mode glissant avec un réseau de neurones pour réduire le phénomène de réticence. En particulier une méthode de commande par mode glissant appelée *terminale et non-singulière* est utilisée. Comme expliqué dans MOHAMMADI ASL, SHABBOUEI HAGH et PALM 2017, ce type de méthode a normalement un temps de convergence réduit et une meilleure atténuation des perturbations en régime stationnaire par rapport aux méthodes classiques de commande par mode glissant. Un réseau de neurones de type RBF (*Radial Basis Function*), intéressant parce qu'il peut représenter des systèmes linéaires et converger rapidement, est utilisé pour adapter le gain du correcteur pendant le mode de glissement et réduire la réticence de la commande.

5.1.2 Contrôle latéral pour des manœuvres à faible dynamique

Dans cette section on traite la littérature concernant le contrôle latéral du véhicule pour des manœuvres à faible dynamique. Les solutions qu'on verra sont donc souvent employées pour la fonction ADAS appelée

LCA, une fonction de confort dont l'objectif est de maintenir le véhicule au centre de la voie au moyen de l'angle de braquage du véhicule. Une grande majorité des solutions présentes dans la littérature pour le contrôle latéral du véhicule à faible dynamique font appel pour la synthèse au *modèle bicyclette*, détaillé dans [RAJAMANI 2012](#). Ce modèle considère la dynamique latérale et de lacet du véhicule, sans prendre en compte la dynamique longitudinale. La vitesse longitudinale du véhicule v est considérée constante. Les angles de dérive du véhicule et des roues sont considérés faibles. Un modèle linéaire des forces des pneus est utilisé et la force normale aux roues est supposée constante. Ces approximations sont cohérentes au regard des considérations faites au début de la section 5.1. La commande robuste et optimale est largement utilisée dans la littérature pour la synthèse dans le cas du contrôle latéral. [O'BRIEN, IGLESIAS et URBAN 1996](#) utilisent le modèle bicyclette pour la synthèse d'un correcteur H_∞ dynamique avec la méthode de *loop-shaping* proposée par [MCFARLANE et GLOVER 1992](#). Les sorties contrôlées et mesurées sont l'erreur latérale et de lacet par rapport au centre de la voie, l'entrée de perturbation à rejeter est la courbure de la route et la commande calculée est l'angle de braquage des roues avant. La méthode de *loop-shaping* est utilisée afin d'améliorer le suivi de la trajectoire cible et limiter la bande passante de la commande. Le même méthode est aussi utilisée par [HIMA et al. 2011](#). Un correcteur multi-objectif est proposé par [MAMMAR 1997](#). Dans [MAMMAR 1997](#), le modèle bicyclette est exprimé comme un modèle LPV polytopique, pour prendre en compte une plage de variation de la masse du véhicule et du coefficient de frottement entre les pneus et le sol. La synthèse du correcteur est faite par LMI, en considérant une borne pour la norme H_∞ du transfert entre la courbure de la route et l'erreur latérale, permettant de minimiser l'erreur de suivi de trajectoire, et une borne pour la norme H_2 de la courbure vers l'accélération latérale, la vitesse de lacet et l'angle de la roue, pour maximiser le confort du passager. De plus, une région LMI a été considérée pour borner la dynamique de la boucle fermée. Dans [SHIMAKAGE 2002](#) l'auteur propose un correcteur H_2 à partir du modèle bicyclette avec un simple modèle de la direction intégré. Les perturbations considérées sont la courbure de la route et un bruit blanc présent sur la dynamique de la direction. Les sorties contrôlées sont une combinaison pondérée des erreurs latérale et de lacet, réglées de sorte à imposer un comportement adéquat à la boucle fermée. Une μ -analyse est utilisée à posteriori pour vérifier la robustesse de la boucle fermée par rapport aux dispersions paramétriques, en particulier celles liées aux pneus, à la direction et à la masse du véhicule. Dans [EOM et al. 2003](#) deux correcteurs sont proposés et comparés : un correcteur LQ et un correcteur H_∞ . Des essais expérimentaux sur véhicule montrent que les deux correcteurs garantissent le suivi du centre de la voie même en présence de perturbations, mais le correcteur LQ produit des commandes plus oscillantes en cas de perturbations à haute fréquence. Les auteurs de [SENTOUH et al. 2011](#) proposent un correcteur H_2 avec anticipation pour le contrôle latéral partagé avec le conducteur. Un observateur PI robuste avec entrées inconnues est proposé pour estimer la courbure et l'inclinaison de la route pour un horizon temporel proche. Les estimations de ces perturbations sont utilisées en entrée du correcteur H_2 . Enfin le couple au volant du conducteur est aussi estimée. La commande du correcteur H_2 est désactivée dans le cas de la détection d'un couple important venant du conducteur, indiquant qu'il prend le contrôle du véhicule. Dans [MUSTAKI et al. 2018](#) un correcteur statique multi-objectif est proposé. Le modèle bicyclette est mis sous forme de modèle LPV avec l'approche *grid-based*, afin de considérer des dispersions paramétriques. Le problème d'optimisation pour la recherche du correcteur impose une limite sur la marge de module pour garantir la robustesse de la boucle fermée. La norme H_2 du transfert de la courbure de la route et du vent (entrées de perturbation), vers les sorties contrôlées (le *jerk* de l'erreur latérale et de l'angle de braquage) est minimisée avec l'objectif de garantir le confort de conduite. Le problème d'optimisation qui en résulte n'est pas convexe et le correcteur a donc été obtenu en utilisant un solveur *non-smooth*. Les auteurs dans [ATOUI et al. 2021](#) proposent la synthèse de trois correcteurs LPV H_∞ pour le contrôle latéral. Les trois correcteurs sont obtenus en résolvant un problème d'optimisation sous contraintes LMI en utilisant les trois approches LPV : polytopique, LFT et *grid-based*. Le cadre LPV est utilisé pour prendre en compte une plage de variations de la vitesse longitudinale du véhicule pour le modèle bicyclette linéaire. Des essais sur véhicule ont permis la validation des trois correcteurs et les auteurs ont observé que le correcteur polytopique est plus sensible aux bruits de mesure par rapport aux deux autres correcteurs.

Dans la littérature on trouve également des solutions qui utilisent d'autres méthodes pour le contrôle latéral du véhicule dans des conditions de faible dynamique. [MARINO, SCALZI et NETTO 2011](#) proposent une solution avec deux correcteurs PID avec une structure en cascade. Le premier correcteur est un PI avec en entrée l'écart de vitesse de lacet du véhicule, dans l'objectif d'atténuer les perturbations et l'effet des incertitudes paramétriques. La vitesse de lacet de référence est calculée par le deuxième correcteur, un PID fondé sur l'erreur latérale. Une solution similaire est proposée par [AMER et al. 2016](#). Les auteurs de [TAGNE, TALJ et CHARARA 2013](#) proposent une solution avec la commande par mode glissant. Le modèle

bicyclette sous forme LPV, avec la vitesse longitudinale considérée comme paramètre variable, est utilisé pour la synthèse. La variable de glissement est définie en fonction de l'écart latéral et sa dérivée dans le but de réduire la réticence du correcteur. Une méthode similaire est utilisée par [IMINE et MADANI 2013](#) pour des véhicules poids lourd. Dans ce cas, le modèle véhicule considéré est un modèle bicyclette intégrant aussi la dynamique de roulis du véhicule, plus importante sur un véhicule poids lourd que sur un véhicule de tourisme, et couplé avec la dynamique de lacet du véhicule. Un correcteur par mode glissant du troisième ordre est utilisé. Un correcteur LQ développé à partir du modèle bicyclette est proposé dans [SON et al. 2015](#). L'état du modèle bicyclette est estimé au moyen d'un filtre de Kalman.

5.2 Contrôle du véhicule : manœuvres à haute dynamique

Dans cette section, on présente une revue de la littérature du contrôle du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique, c'est-à-dire avec une accélération du véhicule supérieure à $0,3g$. Dans ces conditions, l'automatisation de la conduite d'un véhicule de tourisme est généralement traitée par des fonctions de sécurité, comme des correcteurs électroniques de trajectoire, ou ESC (*Electronic Stability Control*). Ces correcteurs utilisent une combinaison de freinage et de braquage pour assister le conducteur et augmenter la stabilité du véhicule pour des manœuvres à la limite de la perte de contrôle, ou des fonctions d'évitement d'obstacles. Dans ces conditions, les approximations considérées au début de la section 5.1 sont moins raisonnables. Tout d'abord, si on considère l'accélération du véhicule exprimée par (5.1), il faut considérer que la vitesse de lacet r n'est pas faible dans une manœuvre à haute dynamique. Les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule sont donc couplées et traiter leur contrôle séparément est moins pertinent. De plus, dans ces conditions, les pneus sont très sollicités et ils atteignent leur seuil de saturation. Ce phénomène est accentué par le fait que souvent les pneus, dans des manœuvres à haute dynamique, sont soumis au glissement combiné. Cet aspect, ainsi que le transfert de charge, très important dans ces conditions, cf. [VELENIS, TSIOTRAS et LU 2008](#), imposent la prise en compte d'un modèle non-linéaire des forces des pneus pour la synthèse des correcteurs.

5.2.1 Découplage des dynamiques longitudinale et latérale

Malgré les considérations faites sur les manœuvres à haute dynamique, on trouve dans la littérature des solutions qui traitent séparément le contrôle longitudinal et latéral du véhicule dans ces conditions et qui reposent sur un modèle linéaire des forces des pneus. [KRITAYAKIRANA et GERDES 2009](#) proposent une approche séparée pour les contrôles longitudinal et latéral pour un véhicule de course autonome. Le contrôle latéral est constitué d'une composante d'anticipation et d'un retour de mesure sur l'erreur de position latérale. L'anticipation est calculée en inversant le modèle bicyclette linéaire. Le retour de mesure est calculé en utilisant une méthode fondée sur un champ potentiel, proposée dans [ROSSETTER 2003](#), qui utilise un modèle linéaire des forces des pneus. Le contrôle longitudinal calcule la vitesse de référence à utiliser dans les virages. En ligne droite la vitesse calculée tend vers l'infini et l'accélération du véhicule est limitée par le couple généré par le moteur. Un correcteur bas niveau est nécessaire pour réaliser cette vitesse. Le contrôle longitudinal est également composé d'une anticipation et d'un retour de mesure sur les erreurs de position latérale et d'angle de lacet par rapport à la trajectoire de référence. Pour exploiter au maximum le potentiel des pneus, nécessaire pour maximiser la performance d'un véhicule de course, la composante d'anticipation de la vitesse est calculée en considérant la route plate, la force maximale que les pneus sont capables de produire dans un virage et en approchant la vitesse latérale du véhicule à zéro. Cela demande la connaissance du coefficient d'adhérence entre pneu et sol, qui doit donc être estimé. Le correcteur par retour de mesure est ajouté pour réduire la vitesse du véhicule en cas d'écartement du véhicule de la trajectoire de référence. Les auteurs proposent des améliorations au contrôle longitudinal et latéral dans [KRITAYAKIRANA 2012](#). Dans ce cas, les coefficients de glissement longitudinal et les angles de dérive des pneus sont estimés pour réduire la vitesse du véhicule en cas de saturation des forces des pneus. Pour le contrôle latéral, l'utilisation du *centre de percussion* du véhicule, défini dans [MILLIKEN et MILLIKEN 1997](#), pour le calcul de l'erreur latérale permet de négliger les forces latérales des pneus arrières et donc d'obtenir un correcteur plus robuste aux incertitudes de ces derniers. Plusieurs essais sur véhicule ont été faits pour valider les méthodes proposées. Même si les résultats des essais sont positifs, il est important de signaler que cette approche repose sur une identification approfondie du véhicule d'essai et des conditions du sol, plus particulièrement du coefficient de frottement. Les solutions proposées manquent donc de robustesse et elles ne sont pas adaptées pour des véhicules produits en série. Dans [THOMMYPILLAI, EVANGELOU et SHARP 2009](#) les auteurs proposent également un contrôle longitudinal et un contrôle latéral pour des conditions de haute dynamique. Un correcteur PID est utilisé pour le

contrôle longitudinal. Un correcteur LQ est utilisé pour le contrôle latéral. Celui-ci est développé à partir du modèle bicyclette, mais cette fois la formule magique de Pacejka, cf. [BAKKER, NYBORG et PACEJKA 1987](#), est exploitée pour décrire les forces des pneus, au lieu d'un modèle linéaire. Pour la synthèse du correcteur, les forces des pneus non-linéaires sont linéarisées en fonction des angles de dérive des roues sur un ensemble de points de fonctionnement du système. Un correcteur a donc été calculé pour chaque point de fonctionnement et l'interpolation est utilisée pour le calcul du correcteur entre les points de linéarisation. Des simulations ont été effectuées pour des conditions à haute dynamique, mais il faut noter que la vitesse est toujours constante et que le problème de la vitesse variable n'est pas abordé par les auteurs. Dans [YOSHIDA, SHINOHARA et NAGAI 2008](#) un correcteur MPC pour le contrôle latéral a été développé en utilisant un modèle bicyclette linéaire; en revanche, des contraintes de saturation ont été imposées à la commande pour représenter la limite de bande passante de la direction. Le correcteur a été testé sur des trajectoires de changement de voie, pour lesquelles la dynamique longitudinale est ignorée. Les tests du correcteur ont été faits en simulation mais le modèle utilisé n'est pas spécifié. Dans [HU et al. 2016](#) les auteurs proposent un correcteur LPV H_∞ agissant sur le braquage et le freinage différentiel pour le contrôle latéral du véhicule. Le modèle bicyclette linéaire est mis sous forme de modèle LPV polytopique pour prendre en compte des incertitudes sur la vitesse longitudinale du véhicule et sur les coefficients de raideur des pneus avant et arrière. Un couple en entrée sur la dynamique de lacet, représentant le couple généré par le freinage différentiel, est ajouté au modèle bicyclette. Un correcteur bas niveau est donc nécessaire pour réaliser ce dernier. Un correcteur LPV H_∞ est obtenu par la solution d'un problème d'optimisation numérique sous contraintes LMI. Des simulations, réalisées avec un modèle non-linéaire à haute représentativité sur des manœuvres d'évitement d'obstacle et à haute dynamique à vitesse constante, montrent que le correcteur obtenu est robuste et de résultats satisfaisants sont atteints en considérant également un coefficient d'adhérence du sol faible. Plus récemment [PENG et al. 2020](#) proposent deux correcteurs MPC pour le contrôle latéral du véhicule sur des manœuvres d'évitement d'obstacle et à haute dynamique, un nécessitant la résolution d'un problème d'optimisation en ligne et l'autre calculé hors ligne. Le même modèle bicyclette linéaire employé par [HU et al. 2016](#), avec un couple de commande sur la dynamique de lacet, est utilisé. Également dans ce cas le modèle bicyclette linéaire est mis sous forme LPV polytopique, pour considérer une plage d'incertitudes de la vitesse longitudinale du véhicule et des coefficients de raideur latérale des pneus. Le comportement non-linéaire des pneus est donc représenté à travers la plage de variation des coefficients de raideur. Les correcteurs MPC calculent l'angle de braquage de la roue avant et le couple de freinage différentiel. Pour réaliser ce dernier, un correcteur bas niveau est donc également nécessaire. Une logique pour la génération du couple de freinage différentiel est proposée pour un véhicule avec moteurs électriques indépendants pour chaque roue. Des simulations, avec des manœuvres à haute dynamique à vitesse constante et un essai expérimental qui prévoit un virage à 90 degrés avec faible variation de vitesse, ont été utilisées pour valider les correcteurs. La méthode basée sur la résolution d'un problème d'optimisation en ligne a des performances légèrement supérieures à celles du deuxième correcteur, mais selon les auteurs, cette différence ne justifie pas la complexification d'implémentation sur le calculateur que cela implique.

5.2.2 Couplage des dynamiques longitudinale et latérale

Dans la littérature un nombre important de solutions qui considèrent le couplage entre les dynamiques longitudinale et latérale et les non-linéarités des pneus sont proposées pour le contrôle du véhicule dans des conditions de haute dynamique. La commande MPC est très utilisée dans ce contexte, car elle permet d'utiliser un modèle non-linéaire et offre un cadre pratique pour spécifier les contraintes sur l'état et la commande. Dans [FALCONE et al. 2007](#) trois correcteurs MPC pour le contrôle de l'angle de braquage sont proposés. Le premier est fondé sur un modèle bicyclette non-linéaire, intégrant la dynamique longitudinale du véhicule et un modèle des forces des pneus non-linéaire, mais qui ne prend pas en compte le glissement combiné et approche la charge appliquée aux roues par une valeur constante. Des contraintes de saturation de la commande et de sa bande passante sont prises en compte dans le problème d'optimisation. Le correcteur a été testé, en simulation et expérimentalement, sur des trajectoires de double changement de voie à vitesse constante. Les tests ont montré de bons résultats pour des vitesses du véhicule inférieures à 10 m/s (36 km/h), donc plutôt à faible vitesse. A vitesse plus élevée, l'horizon de prédiction doit être allongé; la conséquence est une complexité de calcul plus importante et donc un temps de calcul de la commande trop élevé. Le deuxième correcteur est une variation du précédent pour résoudre le problème de la complexité de calcul. Dans ce cas, le correcteur est fondé sur une linéarisation du modèle non-linéaire; à chaque instant de calcul une linéarisation est faite autour du point de fonctionnement du système. La complexité de calcul avec cette solution est effectivement réduite; le correcteur a été testé jusqu'à une

vitesse véhicule de 17 m/s (environ 60 km/h). En revanche, la commande est caractérisée par un phénomène de réticence. Enfin, un troisième correcteur a été développé en réduisant l'horizon de calcul de la commande, pour réduire davantage la complexité de calcul et rendre le correcteur suffisamment rapide pour pouvoir l'implémenter sur un ordinateur embarqué. Dans [FALCONE et al. 2008](#) les mêmes auteurs proposent un correcteur MPC qui combine braquage et freinage pour des manœuvres d'évitement d'obstacle. Un modèle non-linéaire quatre roues, incluant également la dynamique longitudinale du véhicule, est utilisé pour la prédiction. Un modèle non-linéaire des forces des pneus considérant les interactions entre les forces latérales et longitudinales est utilisé. Dans ce cas également, le transfert de charge est négligé. Les couples des roues sont commandés indépendamment l'un de l'autre, permettant le freinage différentiel. Dans les simulations de validation du correcteur, le véhicule n'est pas ralenti, il doit juste réaliser un changement de voie. Les résultats montrent que la charge de calcul du correcteur est trop élevée. Une alternative proposée pour réduire la charge de calcul est un correcteur fondé sur la linéarisation du modèle quatre roues, autour du point de fonctionnement courant du véhicule, réalisée en ligne. Une solution similaire à [FALCONE et al. 2008](#) est proposée dans [YIN et al. 2015](#). La différence principale est l'utilisation du glissement longitudinal des pneus comme variable à commander, au lieu du couple de freinage. Cette solution exige donc un correcteur bas niveau pour calculer le couple de freinage nécessaire et réaliser le glissement souhaité. Dans [ATTIA, ORJUELA et BASSET 2014](#) les auteurs proposent deux correcteurs séparés pour la dynamique longitudinale et latérale du véhicule et analysent leur interaction. Même si deux correcteurs sont utilisés pour le contrôle du véhicule, le couplage des deux dynamiques n'est pas négligé. En effet, un modèle bicyclette non-linéaire incluant la dynamique longitudinale du véhicule est utilisé pour la prédiction d'un correcteur MPC utilisé pour le contrôle latéral. Ce modèle utilise un modèle non-linéaire pour les forces des pneus et le problème d'optimisation du correcteur est résolu sous contraintes de saturation d'amplitude et de bande passante de l'angle de braquage des roues. Un modèle non-linéaire de la dynamique longitudinale du véhicule, incluant la dynamique du moteur, est utilisé pour la synthèse du contrôle longitudinal, obtenu en utilisant une approche de Lyapunov directe. Une fonction de Lyapunov quadratique est définie en fonction de l'erreur de vitesse longitudinale, le couple moteur et le couple de freinage sont calculés pour que la dérivée de cette fonction soit négative et avec une décroissance donnée. L'architecture de contrôle a été testée par des simulations et le correcteur se comporte bien même sur des manœuvres d'évitement d'obstacle à vitesse constante. Le problème de la charge de calcul et du temps de résolution du problème d'optimisation en ligne pour le correcteur MPC n'est pas abordé dans ce travail.

Les travaux cités ci-dessus ne visent pas spécifiquement à produire des correcteurs robustes. Dans [GAO et al. 2014](#) un correcteur *tube-based* MPC est utilisé pour la synthèse d'un correcteur robuste avec la commande prédictive. Le correcteur est développé à partir d'un modèle bicyclette non-linéaire, qui considère aussi la dynamique longitudinale du véhicule. En s'inspirant du travail de [KRITAYAKIRANA 2012](#), les équations du système ont été exprimées en fonction du centre de percussion du véhicule, afin d'éliminer la force latérale des pneus arrière et donc enlever une source d'incertitude des équations. Pour simplifier le modèle de prédiction et réduire donc la charge de calcul, les termes les plus compliqués du modèle, à savoir les forces longitudinale et latérale de la roue avant et la force longitudinale de la roue arrière (la force latérale de la roue arrière a été simplifiée), ont été considérés comme les entrées du système à commander. Un correcteur bas niveau est donc nécessaire pour calculer l'angle de braquage de la roue avant et le couple de freinage des roues pour réaliser les forces souhaitées. La validation du correcteur a été effectuée en simulation avec un coefficient de frottement entre pneu et sol incertain, pour simuler un sol enneigé et glacé, et sur des tests expérimentaux. Tests et simulations utilisent des trajectoires d'évitement d'obstacles, sans freinage du véhicule. Dans ce cas aussi les forces longitudinales des pneus sont au service du contrôle de la dynamique latérale du véhicule. Dans [ODA, NONAKA et SEKIGUCHI 2017](#) les auteurs proposent également un correcteur robuste qui calcule les forces longitudinales et latérales des pneus et nécessite ensuite d'un correcteur bas niveau pour la réalisation de ces forces. En revanche, dans ce cas, le correcteur robuste est obtenu au moyen d'une combinaison de la commande MPC classique et de la commande par mode glissant. Un correcteur MPC utilise un modèle quatre roues non-linéaire pour la prédiction et le calcul des forces nominales des pneus, soumises à saturation, en tenant compte du transfert de charge. Ces forces des pneus nominales sont ensuite utilisées comme signaux de référence pour un correcteur par mode glissant, robuste aux perturbations et aux incertitudes du modèle. Une logique pour la génération des forces des roues est proposée pour un véhicule avec machines électriques indépendantes pour chaque roue. Le correcteur est validé par des simulations avec un modèle véhicule non-linéaire, qui inclut la modélisation du châssis du véhicule. L'architecture de contrôle proposée est validée sur différents scénarios à haute dynamique.

Dans la littérature, des solutions qui utilisent d'autres méthodes de commande sont également proposées pour le contrôle du véhicule pour des manœuvres d'évitement d'obstacle et dans des conditions de haute dynamique. Le cadre des modèles LPV associé à la commande robuste et optimale, par exemple, est utile parce qu'il permet de traiter des modèles non-linéaires avec des méthodes qui garantissent la robustesse de la boucle fermée. Cet aspect est très important dans le contexte du contrôle des véhicules de tourisme, qui sont caractérisés par des grandes incertitudes paramétriques (par exemple la masse et les coefficients des pneus) et qui doivent faire face à des conditions environnementales très variées. Dans [ALCALA et al. 2018](#) les auteurs proposent une solution qui utilise deux correcteurs LPV LQ avec une structure en cascade pour les contrôles longitudinal et latéral du véhicule combinés. Le premier correcteur LPV LQ est fondé sur un modèle LPV polytopique représentant la cinématique du véhicule, dont les variables d'état sont les erreurs de position longitudinale, latérale et d'angle de lacet par rapport à la trajectoire de référence et les entrées sont la vitesse longitudinale et de lacet du véhicule. Ce correcteur calcule donc la vitesse longitudinale et de lacet de référence pour le deuxième correcteur. Le deuxième correcteur LPV LQ est développé à partir d'un modèle bicyclette LPV polytopique de la dynamique longitudinale et latérale du véhicule, qui utilise un modèle linéaire pour les forces latérales des pneus et dont les entrées sont l'angle de braquage et les forces longitudinales des pneus. Un correcteur bas niveau est donc nécessaire pour réaliser les forces longitudinales des pneus souhaitées. La synthèse des deux correcteurs est faite avec une méthode fondée sur la résolution d'un problème avec contraintes LMI et l'architecture hiérarchisée nécessite que le correcteur de dynamique soit plus rapide que le correcteur de la cinématique, pour obtenir une boucle fermée stable. Un filtre de Kalman sur un modèle LPV est proposé pour l'estimation des variables d'état non mesurées. Le correcteur a été validé par des simulations avec le modèle véhicule non-linéaire employé pour calculer les modèles LPV utilisés pour la synthèse. Les auteurs de [ATOUI et al. 2020](#) proposent un correcteur LPV H_∞ pour les contrôles longitudinal et latéral combinés. Un modèle similaire à celui employé par [ALCALA et al. 2018](#) est utilisé, mais dans ce cas, un seul modèle LPV est obtenu en utilisant l'approche *grid-based*, pour limiter le nombre des paramètres variables. Les auteurs ont choisi de ne pas utiliser deux correcteurs avec structure en cascade, mais un seul correcteur LPV H_∞ pour simplifier l'architecture de contrôle. L'approche *grid-based* a permis également l'utilisation d'une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres. Des filtres de pondération ont été utilisés pour améliorer le suivi de trajectoire et prendre en compte les limites des actionneurs. Les commandes calculées par le correcteur sont l'angle de braquage des roues avant et l'accélération longitudinale du véhicule. Dans ce cas aussi, un correcteur bas niveau est donc nécessaire pour réaliser l'accélération souhaitée, mais il n'est pas l'objet du travail présenté. Des simulations, qui utilisent le modèle non-linéaire du véhicule employé pour la définition du modèle LPV, mais avec un modèle non-linéaire des forces des pneus, sont utilisées pour la validation du correcteur. Un autre correcteur H_∞ pour le contrôle longitudinal et latéral combiné du véhicule est proposé par [KISSAI et al. 2019](#). Dans ce cas aussi la commande du véhicule est hiérarchisée. Le correcteur H_∞ permet de calculer les forces longitudinale et latérale du véhicule et le couple de lacet souhaités du véhicule. Une logique intermédiaire calcule les forces longitudinales et latérales des quatre pneus pour réaliser les commandes du correcteur H_∞ , qui, finalement, sont multipliées par des gains statiques pour calculer les angles de braquage et le couple des roues. Pour le correcteur H_∞ , un modèle LPV *grid-based* de la dynamique longitudinale, latérale et de lacet du véhicule est considéré. En revanche, au lieu de faire la synthèse d'un correcteur LPV, les auteurs ont choisi de faire la synthèse d'un correcteur H_∞ pour chaque point de la grille. Un algorithme d'interpolation linéaire est ensuite utilisé pour obtenir le correcteur entre les points de la grille.

La commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV a également donné des résultats positifs dans le domaine automobile pour le développement des fonctions de GCC (*Global Chassis Control*), des fonctions qui assistent le conducteur en combinant le contrôle du braquage, du freinage et des suspensions actives pour améliorer la stabilité du véhicule dans des conditions à haute dynamique. [GÁSPÁR et al. 2007](#) proposent un correcteur LPV H_∞ pour améliorer la stabilité du véhicule dans des manœuvres d'urgence en agissant sur le freinage différentiel et le contrôle des suspensions actives du véhicule. Dans ce cas un modèle linéaire du roulis et du lacet du véhicule est considéré, avec en entrée les forces générées par les suspensions actives et les forces longitudinales des pneus. Des filtres de pondération sont utilisés pour la synthèse du correcteur. Ces filtres dépendent de manière affine de deux paramètres variables, le transfert de charge entre les deux cotés du véhicule et le moment du roulis normalisé, de sorte que le comportement de la boucle fermée varie selon les conditions de conduite. Si aucune situation d'urgence n'est détectée, les filtres donnent à la boucle fermée un comportement propice au confort des passagers et l'utilisation du freinage différentiel est désactivé. Si une situation d'urgence est détectée, les filtres permettent l'utilisation du freinage différentiel et l'objectif des suspensions n'est plus le confort. En utilisant ces filtres LPV, un

correcteur H_∞ est obtenu par optimisation sous contraintes LMI. La même approche est utilisée par [POUSSOT-VASSAL et al. 2011](#) et [DOUMIATI et al. 2013](#) pour obtenir un correcteur LPV H_∞ qui combine freinage différentiel et braquage du véhicule pour stabiliser le véhicule et dans [FERGANI, SENAME et DUGARD 2016](#) pour un correcteur LPV H_∞ qui harmonise l'action des suspensions actives, du freinage et du braquage. D'autres correcteurs LPV H_∞ pour le développement des fonctions de GCC sont proposées dans [CHOKOR 2019](#). Enfin, d'autres applications du cadre LPV aux systèmes de contrôle du véhicule sont présentées dans [LI et al. 2021](#).

5.3 Choix de la méthode de synthèse des correcteurs

Les conclusions sur la littérature concernant le contrôle du véhicule et le choix de la méthode de synthèse des correcteurs pour le travail présenté dans ce manuscrit sont le sujet de cette section. Au préalable d'une analyse on rappelle l'objectif du travail de thèse : le développement d'une architecture et d'une loi de commande pour le contrôle longitudinal et latéral du véhicule pour des manœuvres à haute dynamique, en combinant l'action du braquage, du freinage et de l'accélération du véhicule. Dans un premier temps, il faut déterminer s'il est intéressant d'aborder séparément les problèmes du contrôle longitudinal et latéral du véhicule avec deux correcteurs distincts, ou conjointement, c'est-à-dire développer un seul correcteur qui agit sur les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule. On a vu en section 5.1 que, pour des manœuvres à faible dynamique, il est courant d'employer deux correcteurs différents pour le contrôle longitudinal et latéral du véhicule. En effet, comme évoqué précédemment, le couplage entre les deux dynamiques est négligeable si les vitesses latérale et de lacet du véhicule sont faibles et la vitesse longitudinale varie lentement. De plus, pour des manœuvres à faible dynamique, les pneus sont peu sollicités et par conséquent les phénomènes de saturation et de glissement combiné du pneu sont également négligeables. Le transfert de charge entre les roues reste faible. En revanche, dans la section 5.2 on a vu que ces approximations sont moins pertinentes pour des manœuvres à haute dynamique. Dans ce cas, le couplage entre dynamique longitudinale et latérale est beaucoup plus important, parce que les vitesses latérale et de lacet ne sont pas faibles et parce que la vitesse longitudinale peut varier considérablement. De plus, les forces générées par les pneus sont d'amplitude significativement plus importante et les phénomènes qui induisent un comportement non-linéaire des pneus sont donc présents. Malgré cela, on a vu dans la section 5.2.1 que dans la littérature certaines solutions proposent de traiter séparément les contrôles longitudinal et latéral du véhicule également pour des manœuvres à haute dynamique. En revanche, une partie de ces solutions, comme par exemple celles proposées par [ROSSETTER 2003](#) et [KRITAYAKIRANA 2012](#), demandent l'identification des paramètres du véhicule, un réglage fin du correcteur et manquent donc de robustesse. Les autres solutions se focalisent sur le contrôle latéral du véhicule, en considérant constante la vitesse longitudinale du véhicule. Ces solutions, comme celles proposées par [HU et al. 2016](#) et [PENG et al. 2020](#), ont donc été validées sur des manœuvres à haute dynamique mais à vitesse longitudinale constante ou avec des variations faibles. Dans le contexte de ces travaux on cherche à commander également la vitesse longitudinale du véhicule, pour pouvoir réaliser, par exemple, des manœuvres d'évitement d'obstacle avec freinage. Ce type de manœuvre sollicite simultanément les hautes dynamiques pour les axes longitudinal et latéral du véhicule. Dans ce cas, on estime que la saturation des forces des pneus, facilitée par le transfert de charge entre les roues, le glissement longitudinal et latéral combiné, joue un rôle très important dans la dynamique du véhicule et nécessite donc d'être prise en compte pour garantir la stabilité du véhicule. Cette considération est confortée par le grand nombre de solutions présentes dans la littérature qui couplent les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule pour le contrôle dans des manœuvres à haute dynamique, comme discuté dans la section 5.2.2. Même si les solutions présentées dans cette section ne proposent pas toutes le contrôle longitudinal et latéral combiné, elles soulignent l'importance de prendre en compte ce couplage pour la génération de la commande et elles utilisent une modélisation non-linéaire des forces des pneus. Pour ces raisons, il a été retenu d'utiliser un modèle pour la synthèse des correcteurs, représentatif du couplage entre les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule et un modèle des forces des pneus qui incorpore les phénomènes de saturation et glissement combiné. L'utilisation d'un modèle qui couple les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule rend plus facile la synthèse d'un seul correcteur qui combine le contrôle longitudinal et latéral du véhicule. L'architecture de commande résultante est, de cette façon, plus simple. De plus, l'harmonisation des objectifs du contrôle longitudinal et latéral et de l'action des actionneurs est grandement simplifiée. Pour ces raisons, on choisit de faire la synthèse d'un seul correcteur combinant le contrôle longitudinal et latéral.

En ce qui concerne le choix de la méthode de synthèse du correcteur, on a vu dans la section 5.2.2 que la méthode MPC est largement utilisée. En effet, elle permet l'utilisation des modèles non-linéaires,

ce qui est un avantage important si l'on adopte un modèle qui couple la dynamique longitudinale et latérale du véhicule et la saturation des forces des pneus. De plus, comme souligné dans la section B.2, la commande MPC offre un cadre pratique pour exprimer des contraintes sur l'état du système et les commandes. Le problème de la charge de calcul élevée, présent pour la commande MPC en raison de la nécessité de trouver la solution d'un problème d'optimisation en ligne, est souvent résolu en utilisant des solutions *hardware* sur mesure, comme expliqué dans [ABUGHALIEH et ALAWNEH 2019](#). En revanche, une unité de calcul dédiée et sur mesure pour la commande développée n'est pas toujours disponible sur un véhicule de tourisme vendu à grande échelle, pour des raisons économiques évidentes. De plus, la commande MPC n'offre pas encore un cadre optimal pour la spécification des objectifs de robustesse de la boucle fermée et des preuves de stabilité sont souvent difficiles à obtenir. La commande par mode glissant offre aussi la possibilité d'utiliser des modèles non-linéaires. De plus, elle garantit la robustesse de la boucle fermée. En revanche, cette méthode produit souvent des phénomènes indésirés de réticence. De plus, les signaux de contrôle générés peuvent être de très grande amplitude. L'utilisation de la commande par mode glissant peut entraîner des comportements non souhaités des actionneurs, notamment de la direction et du moteur dans le cas du contrôle du véhicule. La commande robuste et optimale, comme discuté dans la section 5.4, offre un cadre idéal pour la synthèse des correcteurs robustes. De plus, la méthode de recherche du correcteur par LMI permet d'exprimer une large variété de spécifications dans le domaine fréquentiel et temporel, en rendant très pratique le réglage de la commande, comme discuté dans la section A.1.3. Pour ces raisons, comme montré dans la section 5.1.2, ces méthodes ont été utilisées largement et avec succès pour le contrôle latéral du véhicule dans des manœuvres à faible dynamique, où le comportement du véhicule peut être considéré linéaire. L'application de ces méthodes aux systèmes LPV, présentée dans la section 5.4, permet de traiter aussi des modèles non-linéaires. En effet, comme l'analyse de l'état de l'art l'a montré, l'application de la commande robuste et optimale aux systèmes LPV a déjà produit des résultats positifs pour le contrôle longitudinal et latéral combiné du véhicule et pour des fonctions de GCC pour la stabilisation du véhicule dans des manœuvres d'urgence. La commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV a donné des résultats positifs aussi dans d'autres domaines, comme l'aéronautique, comme par exemple dans [BIANNIC, APKARIAN et GARRARD 1997](#) et [MASUBUCHI et al. 2004](#), et le contrôle des missiles, comme dans [APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995](#) et [LIM et HOW 2003](#).

En vue de ces considérations, on choisit d'utiliser la commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV pour la synthèse d'un correcteur pour le contrôle longitudinal et latéral combiné.

5.4 Commande robuste et optimale appliquée aux systèmes LPV

Dans cette section, une revue des méthodes de commande robuste et optimale appliquées aux systèmes linéaires à paramètres variables, ou systèmes LPV (*Linear Parameter-Varying*), est effectuée. Ces méthodes seront utilisées dans les chapitres 6 et 7 pour la synthèse des correcteurs. Dans un premier temps, la commande robuste et optimale a été développée pour les systèmes LTI (*Linear Time-Invariant*). Une étude bibliographique des méthodes de commande robuste et optimale appliquées aux systèmes LTI est présentée dans l'annexe A, plus particulièrement sur les commandes H_∞ , H_2 et multi-objectif. Ces méthodes partagent un point en commun : le correcteur est obtenu en résolvant un problème d'optimisation, qui vise à minimiser un indice de performance, exprimé soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel. Comme détaillé dans la section A.1, la commande H_∞ est particulièrement intéressante pour la robustesse en boucle fermée qui en résulte. La commande H_2 est utilisée au lieu de la commande H_∞ quand une approche moyenne est souhaitée, par exemple pour limiter l'énergie sur les signaux de commande ou les sorties du système. La commande multi-objectif permet de combiner les avantages des commandes H_∞ et H_2 . D'autres contraintes peuvent également être ajoutées pour la synthèse du correcteur ; par exemple, il est possible de définir une région du plan complexe, appelée région LMI, cf. [CHILALI et GAHINET 1996](#) et [CHILALI, GAHINET et APKARIAN 1999](#), pour le placement des pôles du système en boucle fermée. Une approche pour la synthèse des correcteurs H_∞ , H_2 et multi-objectif, fondée sur une fonction de Lyapunov quadratique pour la vérification de la stabilité en boucle fermée, fait appel aux inégalités matricielles affines, ou LMI (*Linear Matrix Inequalities*). Ces LMI définissent un ensemble convexe, car affines par rapport aux inconnues. Le problème d'optimisation qui en résulte est donc convexe et ainsi il peut être résolu numériquement. Pour ce type de problème, des algorithmes utilisant des méthodes de points intérieurs permettent de trouver efficacement une solution optimale de façon numérique. D'un point de vue pratique, pour la synthèse de correcteurs il est possible de définir et de résoudre les problèmes d'optimisation en utilisant la *LMI control toolbox* de MATLAB, cf. [GAHINET et al. 1994](#). Comme alternative il est aussi possible d'utiliser la *toolbox YALMIP*, cf. [LOFBERG 2004](#), qui permet

de faire appel à des solveurs tiers, soit en libre accès, comme *SeDuMi*, cf. [STURM 1999](#), et *SDPT3*, cf. [TOH, TODD et TÛTÛNCÛ 1999](#), soit payants, comme *Mosek* (qui offre également des licences académiques gratuites), cf. [ANDERSEN et ANDERSEN 2000](#), et *LMILAB*, le solveur de la *LMI control toolbox*. Autrement, la *toolbox LPVTools*, cf. [HJARTARSON, SEILER et PACKARD 2015](#), offre une large variété d'outils pour l'analyse des modèles LPV et la synthèse des correcteurs.

Les méthodes de commande robuste et optimale peuvent être étendues aux modèles LPV. Ces modèles, introduits dans [SHAMMA 1988](#), représentent une classe de systèmes non-linéaires qui peuvent être exprimés avec une représentation d'état linéaire, où les matrices dépendent d'un ensemble de paramètres variables, regroupés dans un vecteur $\underline{\mathbf{p}}$. Pour ces approches [WU 1995](#), [BIANNIC 1996](#) et [BRUZELIUS 2004](#) sont des textes de référence pour les méthodes de commande robuste et optimale pour les modèles LPV. La représentation d'état d'un modèle LPV est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= A(\underline{\mathbf{p}}(t)) \underline{\mathbf{x}}(t) + B(\underline{\mathbf{p}}(t)) \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) &= C(\underline{\mathbf{p}}(t)) \underline{\mathbf{x}}(t) + D(\underline{\mathbf{p}}(t)) \underline{\mathbf{u}}(t)\end{aligned}\tag{5.2}$$

où $\underline{\mathbf{p}}(t) \in \mathbb{R}^q$. Le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ est normalement considéré indépendant de l'état du système. En revanche, on peut éliminer cette hypothèse, comme indiqué dans [SHAMMA et ATHANS 1992](#), si on considère des variations de $\underline{\mathbf{p}}$ bornées. Dans ce cas, il est possible de représenter un système non-linéaire par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= A(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \underline{\mathbf{x}}(t) + B(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) &= C(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \underline{\mathbf{x}}(t) + D(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \underline{\mathbf{u}}(t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\underline{\mathbf{p}}(\underline{\mathbf{x}}(t), t) = C_p \underline{\mathbf{x}}(t)$$

où le vecteur des paramètres $(\underline{\mathbf{x}}(t), t) \in \mathbb{R}^q$ dépend de l'état du système, conduisant selon cette forme à de modèles *quasi-LPV*, ou qLPV. La représentation qLPV peut être employée pour traiter les systèmes non-linéaires, en cachant les non-linéarités dans les paramètres variables. La représentation (5.3) peut être utilisée aussi pour des systèmes variables dans le temps, obtenus par exemple suite à la linéarisation d'un modèle non-linéaire le long d'une trajectoire de référence. En revanche, il est nécessaire de remarquer que le fait de considérer un nombre trop élevé de paramètres variables rend la synthèse des correcteurs numériquement coûteuse. En effet, la complexité d'un modèle LPV évolue avec la dimension de $\underline{\mathbf{p}}$. La majorité des conditions sous forme de LMI pour la synthèse multi-objectif pour les systèmes LTI, dont une partie est présentée dans l'annexe A, peuvent être étendues aux systèmes LPV et qLPV. En effet, le théorème de stabilité de Lyapunov (rappelé dans l'annexe A) peut être utilisé pour prouver la stabilité d'un système linéaire. Il est donc possible d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique pour vérifier la stabilité d'un système LPV, comme cela est fait pour un système LTI. On prend par exemple une condition simple : le système LTI avec dynamique $\dot{\underline{\mathbf{x}}} = A \underline{\mathbf{x}}$ est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que la LMI

$$A^T P + P A < 0\tag{5.4}$$

soit vérifiée (une démonstration du théorème est donnée dans la section A.2.1). On peut étendre le résultat au système LPV :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = A(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}}\tag{5.5}$$

avec \mathcal{P} l'espace de variation de $\underline{\mathbf{p}}$. Le système LPV (5.5) est stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que :

$$A^T(\underline{\mathbf{p}}) P + P A(\underline{\mathbf{p}}) < 0 \quad \forall \underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}.\tag{5.6}$$

La structure de la condition LMI est donc identique pour un système LTI ou LPV, à part la dépendance à $\underline{\mathbf{p}}$. De cette façon on peut donc étendre les résultats de synthèse des correcteurs robustes et optimaux par LMI aux systèmes LPV. Il est important de remarquer que, même si dans la littérature il est commun de parler de correcteur H_∞ aussi pour des modèles LPV, un modèle LPV peut représenter un système non-linéaire. Dans ce cas, on ne peut donc pas parler de norme H_∞ de la fonction de transfert de la boucle fermée, mais on parle de norme \mathcal{L}_2 -induite de la relation entrées-sorties de la boucle fermée, cf. [BIANNIC 1996](#), page 86. La norme H_2 n'existe pas non plus pour un système LPV. Son extension est simplement \ll la plus grande énergie atteignable par la réponse impulsionnelle lorsque $\underline{\mathbf{p}}$ décrit l'ensemble des trajectoires contenues dans le domaine $\mathcal{P} \gg$, cf. [BIANNIC 1996](#), page 86. La notion des pôles du système n'existe pas non plus pour les systèmes LPV. En revanche, il est toujours possible d'étendre le résultat de [CHILALI](#),

GAHINET et APKARIAN 1999, pour le placement de pôles de la boucle fermée d'un système LTI dans une région LMI, aux systèmes LPV. Dans ce cas, on place dans la région LMI les pôles de tous les systèmes LTI obtenus en figeant toutes les valeurs possibles de $\underline{\mathbf{p}}$ dans \mathcal{P} . Pour la synthèse des correcteurs robustes et optimaux par LMI pour des systèmes LPV, il reste à établir comment on peut vérifier les conditions données sur l'entièreté de \mathcal{P} . Pour cela, il existe trois façons différentes de représenter les modèles LPV :

- approche polytopique,
- approche LFT,
- approche *grid-based*.

Les trois représentations permettent d'obtenir des correcteurs LPV, c'est-à-dire que les correcteurs obtenus dépendent eux même des paramètres variables de $\underline{\mathbf{p}}$ du modèle LPV utilisé pour la synthèse. Dans la suite on utilisera la notation compacte

$$S(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} A(\underline{\mathbf{p}}) & B(\underline{\mathbf{p}}) \\ C(\underline{\mathbf{p}}) & D(\underline{\mathbf{p}}) \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}. \quad (5.7)$$

pour indiquer les matrices du système LPV.

5.4.1 Approche polytopique

Cette représentation nécessite une dépendance affine des matrices $A(\underline{\mathbf{p}})$, $B(\underline{\mathbf{p}})$, $C(\underline{\mathbf{p}})$ et $D(\underline{\mathbf{p}})$ par rapport aux paramètres variables de $\underline{\mathbf{p}}$. Sous réserve de cette propriété et s'il est possible de représenter l'espace de variation de $\underline{\mathbf{p}}$ par un polytope convexe \mathcal{P} , alors une représentation LPV polytopique du système existe. Cette représentation permet de calculer les matrices du modèle dans tous les points à l'intérieur de \mathcal{P} au moyen d'une combinaison convexe des N sommets du polytope :

$$\{S(\underline{\mathbf{p}}), \underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{P}\} = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i S_i \mid \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \right\} \quad (5.8)$$

Une solution commune du choix du polytope est l'hypercube de dimension q et $N = 2^q$ sommets, où les limites de chaque dimension s'étend du minimum au maximum du paramètre correspondant. En revanche, en réduisant le volume du polytope il est possible de réduire le conservatisme dans la synthèse des correcteurs développés à partir du modèle. Des méthodes pour réduire la taille du polytope et le nombre de ses sommets sont présentées dans BIANNIC 1996, pages 56-61. Dans APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995 les auteurs proposent une méthode pour la synthèse d'un correcteur H_∞ à partir d'un modèle LPV polytopique. La méthode proposée permet d'obtenir un correcteur LPV polytopique, c'est-à-dire que le correcteur obtenu dépend aussi de façon affine des paramètres variables de $\underline{\mathbf{p}}$. En revanche, certaines matrices du modèle de synthèse doivent être nécessairement constantes, de sorte que le système LPV en boucle fermée soit lui aussi polytopique. Cette contrainte est cependant facilement résolue en ajoutant des filtres rapides et constants en entrée et sortie du modèle de synthèse, si nécessaire. Dans APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995 les auteurs montrent que, si le système en boucle fermée est polytopique, alors vérifier les conditions LMI aux sommets du polytope \mathcal{P} est suffisant à prouver que les conditions sont vraies sur l'ensemble du domaine polytopique. Les matrices du correcteur pour chaque sommet de \mathcal{P} peuvent être calculées en utilisant la solution explicite proposée dans GAHINET 1996. Le problème de commande H_∞ pour un modèle LPV polytopique a donc un nombre fini de contraintes sous forme LMI, proportionnel au nombre de sommets du polytope. La complexité du problème augmente donc avec ce nombre. En utilisant les résultats proposés par APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995, il est possible d'étendre le résultat de SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997 pour la synthèse multi-objectif aux systèmes LPV. On peut en conclure que l'avantage principal de l'approche polytopique, pour la commande robuste et optimale des systèmes LPV, est qu'un nombre fini de contraintes sous forme de LMI garantit la stabilité et la performance de la boucle fermée sur l'ensemble de l'espace de variation des paramètres. En revanche, la nécessité d'une dépendance affine du système par rapport aux paramètres variables peut augmenter le nombre des paramètres variables à utiliser pour la définition du modèle. Cela conduit à l'augmentation du nombre de sommets du polytope et donc de la complexité du problème d'optimisation. Enfin, la nécessité d'utiliser une enveloppe convexe pour la définition de \mathcal{P} peut augmenter le conservatisme de la représentation.

5.4.2 Approche LFT

Cette représentation est plus générale que celle de l'approche polytopique et nécessite une dépendance rationnelle du système par rapport aux paramètres variables. Le système LPV peut être exprimé par :

$$S(\underline{\mathbf{p}}) = \sum_{i=1}^k \phi_i(\underline{\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \quad \forall \underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{P} \quad (5.9)$$

où $\phi_i(\underline{\mathbf{p}}) \forall i = 1 \dots k$ sont des expressions rationnelles par rapport aux éléments de $\underline{\mathbf{p}}$. Comme expliqué dans [BIANNIC 1996](#), les fonctions rationnelles multi-variables peuvent être représentées par des *transformations fractionnaires linéaires*, ou LFT (*Linear Fractionnal Transformation*). Les LFT sont utilisées en Automatique pour la représentation des incertitudes bouclées sur le système. Si on considère la Figure [A.2](#), on peut considérer les transferts suivants :

$$\begin{aligned} z_{\Delta} &= M_{11} w + M_{12} w_{\Delta} \\ z &= M_{21} w + M_{22} w_{\Delta} \\ w_{\Delta} &= \Delta z_{\Delta}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Alors la relation entrée-sortie de w vers z est donnée par la LFT :

$$z = \left(M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11})^{-1} M_{12} \right) w = \mathcal{F}_u(M, \Delta) w. \quad (5.11)$$

Le bloc $\Delta(s)$, qui représente typiquement toutes les incertitudes du modèle, est généralement diagonal par blocs. Dans le cadre des systèmes LPV, on peut exploiter le fait que les fonctions rationnelles peuvent être exprimées par une LFT pour interpréter le système LPV comme un système LTI bouclé avec un transfert Θ diagonal par blocs, comme cela est fait pour les incertitudes du système. La Figure [5.2](#) montre ce bouclage. Ainsi, il est possible d'exprimer le système LPV par :

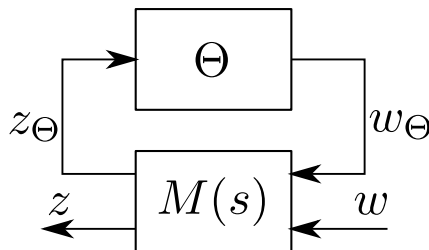


FIGURE 5.2 – Système LPV exprimé par LFT.

$$S(\underline{\mathbf{p}}) = \mathcal{F}_u(M, \Theta) \quad (5.12)$$

où Θ est décrit par :

$$\Theta = \text{blockdiag}(p_1 I_{k_1}, \dots, p_q I_{k_q}) \quad (5.13)$$

et $k_i \geq 1$ sont les occurrences du paramètre variable p_i dans les fonctions rationnelles. Dans [BIANNIC 1996](#), pages 70-73, la procédure pour calculer M et Θ à partir de (5.9) est présentée. Il est important de souligner qu'il n'est pas évident d'obtenir le modèle LFT minimal, c'est à dire celui avec la taille minimale de Θ . Dans cet objectif, [BECK 1997](#) propose des méthodes de réduction du modèle LPV LFT. Dans [APKARIAN et GAHINET 1995](#) les auteurs proposent une méthode pour la synthèse d'un correcteur H_{∞} à partir d'un modèle LPV LFT par LMI. La méthode cherche un correcteur LPV sous forme LFT. Une condition d'existence du correcteur est donnée en résolvant un problème d'optimisation avec uniquement deux contraintes LMI. La solution est utilisée pour trouver les matrices du correcteur en résolvant un autre problème d'optimisation. Il est important de remarquer que le calcul du correcteur prévoit l'inversion d'une matrice dépendante de Θ et donc des paramètres variables, qui doivent être mesurés en ligne à chaque pas de calcul. Pour l'implémentation du correcteur, il sera donc nécessaire de calculer l'inverse d'une matrice, ce qui peut être limitant selon la puissance du calculateur employé et la fréquence d'échantillonnage du correcteur. De plus, on a vu que le calcul de la matrice Θ minimale n'est pas évident. Elle peut donc être

de très grande taille, ce qui complique ultérieurement l'implémentation du correcteur. Un résultat similaire à celui proposé dans [APKARIAN et GAHINET 1995](#) est proposé par [PACKARD 1994](#). La même procédure proposée par [APKARIAN et GAHINET 1995](#) peut être employée en utilisant l'extension de la norme H_2 aux systèmes LPV exprimés par LFT, cf. [BIANNIC 1996](#), pour obtenir un correcteur LPV LFT H_2 . Enfin, on peut en conclure que la représentation des modèles LPV par LFT permet en général d'utiliser moins de paramètres variables par rapport à l'approche polytopique, car la dépendance aux paramètres est plus générale. En revanche, il n'existe pas une méthode pour calculer la matrice Θ minimale, qui peut être de taille très importante et peut ainsi rendre difficile l'implémentation du correcteur sur le calculateur.

5.4.3 Approche *grid-based*

La représentation des systèmes LPV par l'approche *grid-based* est la plus simple des représentations utilisées. En effet, avec cette approche, les matrices du système ne nécessitent pas de dépendre des paramètres variables de manière affine ou rationnelle. Avec l'approche *grid-based* on se limite à diviser \mathcal{P} , l'espace de variation des paramètres variables \mathbf{p} , par une grille de points. Le système LTI correspondant au système LPV calculé pour une valeur constante de \mathbf{p} est connu pour chaque point de la grille. Ensuite on peut interpoler entre les points de la grille pour connaître les matrices du système LPV à l'intérieur de \mathcal{P} . [WU 1995](#) expose une procédure à utiliser pour la synthèse de correcteurs avec l'approche *grid-based*. Le problème d'optimisation est résolu en vérifiant les contraintes sous forme LMI pour chaque point de la grille. Une seule fonction de Lyapunov est utilisée sur l'ensemble des points. La solution obtenue ne garantit pas la stabilité ni la performance en boucle fermée en dehors des points de la grille, mais elle est acceptable si la grille utilisée pour la synthèse est suffisamment dense¹. En revanche, une grille très dense fait augmenter le nombre de contraintes du problème d'optimisation et en conséquence la complexité du problème. Comme montré dans [WU 1995](#), il est donc possible de chercher une solution pour le correcteur sur une grille peu dense et ensuite vérifier la solution obtenue sur une grille beaucoup plus dense. Si la solution n'est pas vérifiée sur la deuxième grille, on utilise une grille un peu plus dense pour la synthèse et on vérifie à nouveau sur la deuxième grille. La procédure est itérée jusqu'au moment où une solution est vérifiée sur la grille de densité plus importante. Comme dans ce cas il n'existe aucune contrainte pour la dépendance du système LPV par rapport aux paramètres variables, il n'existe pas non plus de contrainte sur les matrices du modèle LPV, comme dans le cas de la représentation polytopique. De plus, il est possible aussi d'utiliser une fonction de Lyapunov quadratique qui dépend des paramètres variables, cf. [WU 1995](#). La matrice $P = P^T > 0$ de la fonction de Lyapunov aura donc la structure suivante :

$$P(\mathbf{p}) = P_0 + \sum_{i=1}^q q_i P_i. \quad (5.14)$$

Cela peut contribuer à réduire le conservatisme de la solution trouvée. Dans ce cas, les matrices $P_i \forall i = 0 \dots q$ seront les variables de décision du problème d'optimisation. L'approche *grid-based* est très simple et elle est souvent utilisée pour représenter des modèles non-linéaires de forme complexe, pour limiter le nombre des paramètres variables. De plus, cette approche peut être utilisée avec la synthèse H_∞ , H_2 et multi-objectif. En revanche, elle n'offre pas de garanties de stabilité et de performance sur l'ensemble de l'espace de variation des paramètres.

1. La densité d'une grille est induite par le nombre des points considérés dans le domaine de variation des paramètres.

SYNTHÈSE DES CORRECTEURS - APPROCHE LPV POLYTOPIQUE

Sommaire

6.1	Mise en forme du modèle qLPV polytopique	102
6.2	Trajectoires de référence	104
6.2.1	Manœuvre d'évitement sans freinage	104
6.2.2	Manœuvre d'évitement avec freinage	105
6.2.3	Un modèle qLPV polytopique pour les deux trajectoires de référence	106
6.3	Synthèse des correcteurs	107
6.3.1	Correcteurs statiques	109
6.3.2	Correcteurs dynamiques	114
6.4	Analyse de la boucle fermée	119
6.4.1	Région d'attraction de la boucle fermée	119
6.4.2	Simulations en boucle fermée	125
6.5	Conclusions sur la synthèse avec l'approche LPV polytopique	129

Dans ce chapitre, la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique est discutée. Un modèle linéaire variable dans le temps de la dynamique du véhicule est utilisé. Ce modèle a été obtenu dans le chapitre 4 par linéarisation du modèle non-linéaire bicyclette sans suspensions le long de différentes trajectoires. Ensuite, à partir de ce modèle linéaire variable dans le temps, nous considérons un modèle qLPV polytopique. On choisit pour cela un ensemble d'éléments variables dans le temps des matrices de la représentation d'état du modèle linéarisé comme paramètres variables du modèle qLPV. Le choix de ces paramètres variables, et leur plage de variation, a été fait en utilisant les trajectoires de référence. En particulier, on a considéré deux trajectoires de référence :

- un changement de deux voies sans freinage,
- un changement d'une voie avec freinage,

représentatives des manœuvres d'évitement d'obstacle. Le but est de développer un correcteur unique pour contrôler le véhicule autour des deux trajectoires de référence. Les plages de variation des paramètres variables incluent l'évolution des éléments variables dans le temps le long des deux manœuvres d'évitement d'obstacle. Le modèle qLPV obtenu a été utilisé pour la synthèse de deux correcteurs statiques et de trois correcteurs LPV dynamiques, en résolvant des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. Les outils de la commande robuste et optimale ont été utilisés pour la synthèse des correcteurs, pour lesquels différents objectifs ont été considérés. Des contraintes sur la norme H_∞ et H_2 -généralisée du système en boucle fermée sont prises en compte dans tous les correcteurs. De plus, certains correcteurs considèrent des contraintes pour la saturation des signaux de commande. Les correcteurs obtenus stabilisent la boucle fermée sur l'ensemble du domaine polytopique. Ils peuvent donc être utilisés pour la stabilisation du véhicule autour de toutes les trajectoires de référence dont la dynamique est incluse dans le domaine polytopique du modèle qLPV utilisé pour la synthèse. On peut donc interpréter les deux manœuvres d'évitement choisies comme l'enveloppe des trajectoires pour lesquelles la performance et la stabilité de

la boucle fermée sont garanties. Pour l'analyse du système en boucle fermée, une autre expression de la linéarisation du modèle non-linéaire bicyclette sans suspensions, présentée également dans le chapitre 4, est considérée. Dans ce cas, les fonctions de saturation des forces des pneus apparaissent dans l'expression de la dérivée du vecteur d'état du modèle. La région d'attraction du système non-linéaire en boucle fermée avec les différents correcteurs est estimée et utilisée comme un des critères d'évaluation des correcteurs.

Dans un premier temps, dans la section 6.1, la méthode utilisée pour définir le modèle qLPV à partir du modèle linéarisé variable dans le temps est présentée. La procédure appliquée pour le choix des paramètres variables et la définition du modèle polytopique sera abordée plus particulièrement. Dans la section 6.2, les deux trajectoires de référence considérées sont montrées. Dans la section 6.1, les paramètres variables sont présentés pour chaque trajectoire. La section termine avec l'obtention d'un modèle qLPV polytopique unique représentatif de la dynamique du véhicule le long des deux trajectoires de référence. Dans la section 6.3 la synthèse des correcteurs est abordée, en argumentant les choix effectués. Les correcteurs développés sont analysés dans la section 6.4 en estimant la région d'attraction de la boucle fermée avec les différents correcteurs. Cela est fait avec deux méthodes : en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique et avec une approche empirique au moyen de simulations et une méthode de Monte Carlo. Des résultats de simulation en boucle fermée détaillés viennent appuyer les analyses effectuées. Ce chapitre est complété avec des conclusions sur la synthèse des correcteurs par l'approche LPV polytopique, dans la section 6.5.

Dans ce chapitre on parlera de norme H_∞ du système en boucle fermée, mais il est important de souligner qu'en réalité il s'agit de la norme \mathcal{L}_2 -induite de la relation entrées-sorties du système en boucle fermée. En effet, pour un système qLPV la définition de norme H_∞ n'est pas applicable. Il s'agit donc d'un abus de langage, souvent employé dans la littérature. De façon similaire on parlera également de norme H_2 -généralisée du système en boucle fermée.

6.1 Mise en forme du modèle qLPV polytopique

Dans cette section, on aborde le problème de la définition du modèle qLPV polytopique à partir d'un modèle linéarisé du véhicule. En particulier, on choisit d'utiliser le modèle obtenu à travers la linéarisation exprimée par (4.40), c'est-à-dire le modèle comportant la linéarisation des fonctions de saturation des forces des pneus et des forces normales. En effet, l'avantage de ce modèle est qu'il dépend uniquement de deux matrices variables dans le temps, au lieu de six pour le modèle linéarisé exprimé par (4.33) avec en entrée les forces saturées, discutées dans la section 4.3.1. Le modèle (4.40) variable dans le temps, auquel on ajoute la dynamique des erreurs longitudinale, latérale et de lacet décrite par les équations (4.50), a la forme suivante :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(t)\Delta \mathbf{x} + B(t)\Delta \mathbf{u} \quad (6.1)$$

avec $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et les vecteurs des variables d'état et des entrées sont :

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta r \\ x_L \\ y_L \\ \Delta \psi \\ \Delta \omega_{wf} \\ \Delta \omega_{wr} \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_f \\ \Delta \tau_{wf} \\ \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \end{bmatrix}.$$

Pour la synthèse des correcteurs on considère séparément les entrées de commande et les entrées de perturbation. On exprime donc le modèle linéarisé par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(t)\Delta \mathbf{x} + B_w(t)\Delta \mathbf{w} + B_u(t)\Delta \mathbf{u} \quad (6.2)$$

avec $B_w(t) \in \mathbb{R}^{n \times m_w}$, $B_u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ et :

$$\Delta \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_f \\ \Delta \tau_{wf} \end{bmatrix}.$$

Les matrices $A(t)$, $B_w(t)$ et $B_u(t)$ varient dans le temps en raison de leur dépendance par rapport aux variables d'état et aux entrées du véhicule le long de la trajectoire de référence $\mathcal{T}_0(t)$ utilisée pour la linéarisation du modèle bicyclette sans suspensions. Comme il est possible de voir dans les expressions (C.13a)-(C.13j) et (C.14), les matrices variables dans le temps ne dépendent pas de façon affine des variables d'état et des entrées du système décrivant la trajectoire de référence, elles ne peuvent donc pas être choisies comme paramètres variables avec l'approche polytopique. Nous choisissons des éléments variables dans le temps des matrices $A(t)$, $B_w(t)$ et $B_u(t)$ comme paramètres variables, comme par exemple les éléments $a_{11}(t)$ et $b_{u_{11}}(t)$. En revanche, comme on peut voir dans la section C.3 de l'annexe C, au total vingt éléments sont variables dans le temps pour les matrices du modèle linéarisé considéré. Le problème qui se pose est alors le choix des éléments des matrices, car ce nombre de paramètres variables est très élevé pour un modèle qLPV polytopique. La limitation est imposée par les méthodes d'analyse et de synthèse des correcteurs. En effet, le nombre de contraintes LMI et donc la complexité du problème d'optimisation pour la synthèse des correcteurs augmente avec le nombre des sommets du polytope, qui s'accroît avec le nombre des paramètres variables. De plus, le volume du polytope et donc le degré de conservatisme de la représentation du modèle augmente aussi avec le nombre de paramètres variables. Dans ce cas, la minimisation du volume du polytope et du nombre des sommets, qui ne sont pas des problèmes simples, devient donc très importante. Il est important de remarquer que les matrices du modèle linéarisé sans linéarisation des fonctions de saturation, obtenues dans la section 4.3.1 et dont les expressions des matrices sont présentées dans la section C.2 de l'annexe C, ont au total quarante-huit différents éléments variables dans le temps. En effet, l'information du modèle est distribuée dans six matrices variables dans le temps, au lieu de deux pour (6.1) et par conséquent le nombre d'éléments variables est considérablement supérieur. Pour cette raison, on préfère utiliser le modèle (6.1) pour l'obtention d'un modèle qLPV polytopique, où l'information du modèle est condensée dans moins de paramètres.

Pour réduire le nombre de paramètres, on a choisi de considérer un sous-ensemble des éléments variables dans le temps des matrices du modèle linéarisé et d'approcher par une valeur constante les éléments restants. En particulier, on a choisi les huit éléments des matrices $A(t)$, $B_w(t)$ et $B_u(t)$ avec le plus d'impact sur la dérivée des variables d'état du modèle comme paramètres variables qui constituent le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$. Le choix de restreindre le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ à huit paramètres constitue un compromis entre la représentativité du modèle qLPV et la complexité de la synthèse du correcteur. La simplification numérique du problème d'optimisation rend donc possible de spécifier plus d'objectifs dans la recherche du correcteur. Pour le choix des huit éléments variables dans le temps des matrices $A(t)$, $B_w(t)$ et $B_u(t)$ à considérer comme paramètres variables constituant le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$, on a procédé de la façon suivante :

1. les variables ψ et v sont toujours prises en compte dans le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$, car très importantes pour représenter la dynamique de l'erreur latérale y_L , exprimée par (4.50b), comme des analyses préliminaires l'ont mis en évidence,
2. pour les six paramètres restants, le produit de chaque élément avec la variable d'état ou l'entrée correspondante le long de la trajectoire de référence est calculé ; les éléments dont ce produit est inférieur à 5% de la dérivée de la variable d'état sur laquelle ils agissent sont exclus,
3. le taux de variation des éléments restants le long de la trajectoire de référence est calculé,
4. les six éléments variables dans le temps avec le coefficient de variation¹ le plus élevé sont choisis comme paramètres variables constituant le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$,
5. tous les éléments variables dans le temps restants sont approchés par une valeur constante et égale à la moyenne de l'élément le long de la trajectoire de référence.

L'espace de variation \mathcal{P} du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ est un hypercube de dimension huit, avec $N_p = 2^8$ sommets. Chaque dimension représente un paramètre variable du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ et s'étend du minimum au maximum de l'élément variable dans le temps correspondant le long de la trajectoire de référence. Finalement le modèle qLPV polytopique a la forme suivante :

$$\Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} = A(\underline{\mathbf{p}})\Delta \underline{\mathbf{x}} + B_w(\underline{\mathbf{p}})\Delta \underline{\mathbf{w}} + B_u(\underline{\mathbf{p}})\Delta \underline{\mathbf{u}}. \quad (6.3)$$

On rappelle que pour la synthèse des correcteurs LPV avec l'approche polytopique, il est nécessaire que la matrice B_u ne soit pas dépendante du vecteur des paramètres variables. Comme expliqué dans [APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995](#), cette contrainte permet d'obtenir la boucle fermée affine par rapport aux paramètres variables. En effet, dans l'expression de la boucle fermée², les matrices du correcteur qui

1. Le coefficient de variation d'une variable est définie comme le rapport entre l'écart type et la moyenne.

2. Pour un correcteur dynamique générique, consulter leurs expressions dans la section A.4.3 de l'annexe A.

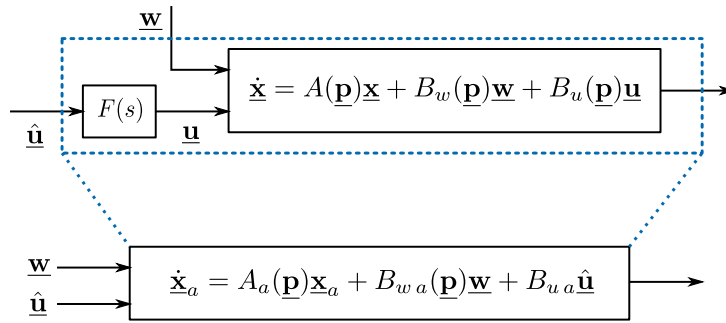


FIGURE 6.1 – Système augmenté pour la synthèse des correcteurs LPV.

dépendent de $\underline{\mathbf{p}}$ sont multipliées par B_u . Si B_u dépend aussi de $\underline{\mathbf{p}}$, la boucle fermée n'est pas affine par rapport à $\underline{\mathbf{p}}$. Dans ce cas, on ne peut donc pas utiliser l'approche polytopique pour la synthèse des correcteurs. [APKARIAN, GAHINET et BECKER 1995](#) propose une solution pour la synthèse d'un correcteur dynamique avec l'approche polytopique dans le cas où B_u dépend de $\underline{\mathbf{p}}$. Il suffit d'ajouter un filtre du premier ordre sur l'entrée du système dont les éléments de la matrice de commande dépendent des paramètres variables, comme montré dans la Figure 6.1. Ensuite, il est possible d'utiliser le système augmenté avec le filtre pour la synthèse du correcteur. En effet, en utilisant cette approche, l'entrée du système est ajoutée au vecteur d'état du système et les éléments de B_u qui dépendent de $\underline{\mathbf{p}}$ se trouvent ensuite dans la nouvelle matrice $A_a(\underline{\mathbf{p}})$ du système augmenté. De plus, si le filtre utilisé en entrée est rapide, l'effet de la dynamique fictive de l'entrée sur la représentativité du modèle est négligeable.

6.2 Trajectoires de référence

Dans cette section on présente les trajectoires de référence qui seront l'objectif du contrôle dans ce chapitre. Plus particulièrement, on illustre la position du véhicule, la vitesse longitudinale et la commande nominale de la trajectoire de référence. Les trajectoires de référence ont été obtenues selon la méthode présentée dans la section 4.1. Les paramètres du véhicule sont ceux utilisés dans le chapitre 3 pour les simulations des modèles de dynamique véhicule. Ils sont rappelés dans la Table 6.1. Pour chaque trajectoire de référence, on montre également le secteur de variation des coefficients de pente des fonctions de saturation. De plus, on met en évidence les huit éléments qui constituent le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ du modèle qLPV obtenu à partir de la trajectoire selon la méthode discutée dans la section 6.1. Les éléments du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ peuvent varier selon la trajectoire de référence considérée. Enfin on conclut la section par la définition d'un polytope qui inclut les variations des paramètres des deux trajectoires de référence.

6.2.1 Manœuvre d'évitement sans freinage

Dans cette section, on présente une trajectoire d'évitement sans freinage. Plus particulièrement, il s'agit d'un changement de deux voies en roue libre avec une vitesse longitudinale initiale d'environ 70 km/h, donc similaire à la manœuvre présentée dans la section 3.1.1 pour les simulations des modèles de dynamique véhicule, mais avec un déplacement latéral plus important. La Figure 6.2 présente l'angle de braquage des roues avant qui produit un déplacement latéral d'environ 6 m. La Figure 6.3 montre les couples des roues, égaux à zéro, et la vitesse longitudinale du véhicule, réduisant avec une accélération négative faible à cause des forces de résistance au roulement et de la traînée aérodynamique. La Table 6.2 présente le secteur de pente des fonctions de saturation linéarisées pour cette manœuvre d'évitement. Comme attendu, on constate que le secteur est non nul pour les forces latérales des pneus, très sollicitées pour produire un déplacement latéral du véhicule d'environ 6 m. En revanche, le secteur est nul et la pente est constante, et égale à 1, pour les forces longitudinales des pneus et les forces normales aux roues. Cela est dû au fait qu'aucun couple n'est appliqué aux roues et par conséquent les forces longitudinales sont très faibles. L'accélération longitudinale est alors faible et le transfert de charge également. La Table 6.3 donne les éléments des matrices variables dans le temps considérés comme paramètres variables pour la définition du modèle qLPV polytopique si on applique la procédure décrite dans la section 6.1 à cette trajectoire de référence. Il est important de remarquer qu'un élément de la matrice de commande $B_u(t)$ est considéré comme paramètre variable. Il s'agit en particulier de l'élément $b_{u11}(t)$, reliant l'angle de braquage à la vitesse longitudinale du véhicule. Il est donc nécessaire d'ajouter un filtre rapide passe-bas du premier

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
m	2051 kg	m_u	240 kg	m_s	1811 kg
I_{xx}	753 kg m ²	I_{yy}	3192 kg m ²	I_{zz}	3625 kg m ²
$I_{u_{xx}}$	377 kg m ²	$I_{u_{yy}}$	461 kg m ²	$I_{u_{zz}}$	584 kg m ²
$I_{s_{xx}}$	376 kg m ²	$I_{s_{yy}}$	2731 kg m ²	$I_{s_{zz}}$	3041 kg m ²
ℓ_w	1,582 m	ℓ_f	1,126 m	ℓ_r	1,54 m
L	2,666 m	ℓ_{fu}	1,295 m	ℓ_{ru}	1,371 m
ℓ_{fs}	1,104 m	ℓ_{rs}	1,562 m	h	0,637 m
h_u	0,344 m	h_s	0,676 m	h_r	0,48 m
I_{wy}	1,87 kg m ²	r_e	0,344 m	μ	1
$c_{\alpha f}$	103592 N/rad	$c_{\alpha r}$	83833 N/rad	$c_{\kappa f}$	144817 N
$c_{\kappa r}$	112223 N	f_{rf}	0,015	f_{rr}	0,015
ρ	1,225 kg/m ³	C_d	0,35	A_f	2,23 m ²
$\ell_{susp f}$	0,133 m	$\ell_{susp r}$	0,17 m	k_{sf}	44190 N/m
k_{sr}	27821 N/m	k_{df}	1480 N s/m	k_{dr}	2618 N s/m
$k_{\phi f}$	35000 N m/rad	$k_{\phi r}$	16000 N m/rad		

TABLE 6.1 – Paramètres du véhicule.

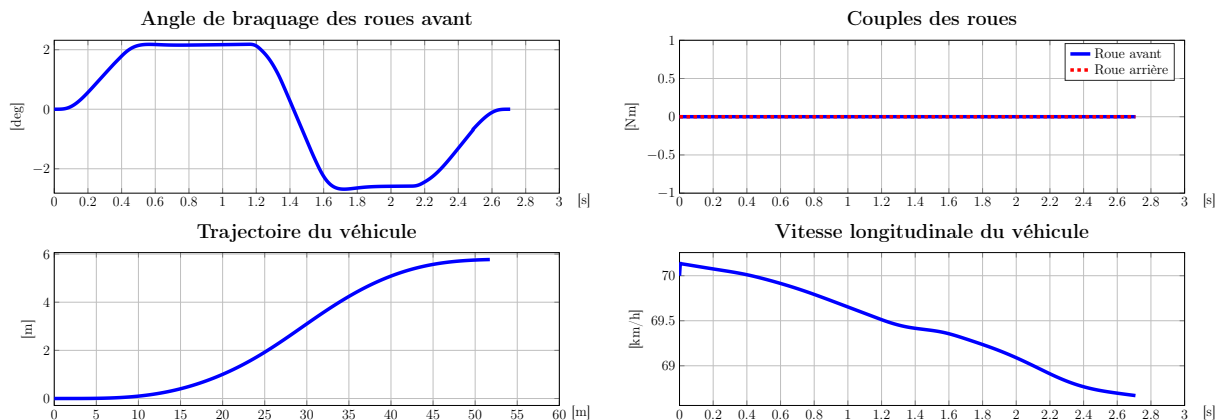


FIGURE 6.2 – Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.

FIGURE 6.3 – Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

ordre en entrée sur l'angle de braquage en vue d'utiliser le modèle qLPV pour la synthèse des correcteurs, si eux mêmes dépendent également des paramètres variables.

6.2.2 Manœuvre d'évitement avec freinage

Dans cette section on présente une trajectoire d'évitement avec freinage. Plus particulièrement, il s'agit d'un changement de voie avec une décroissance de la vitesse longitudinale d'environ 84 km/h à 35 km/h. La Figure 6.4 montre l'angle de braquage des roues avant pour un déplacement latéral d'environ 3 m. La Figure 6.5 montre les couples des roues, et la vitesse longitudinale du véhicule. Cette manœuvre est similaire à celle analysée dans la section 3.1.2, où la commande nominale conduit déjà à la saturation des forces des pneus, mais avec un effet de freinage du véhicule moins important. L'objectif est le développement d'un correcteur pour une manœuvre où il reste une marge pour la magnitude de freinage, ce qui permettra de l'utiliser comme entrée du modèle linéarisé. En effet, si les forces des pneus sont déjà saturées à cause

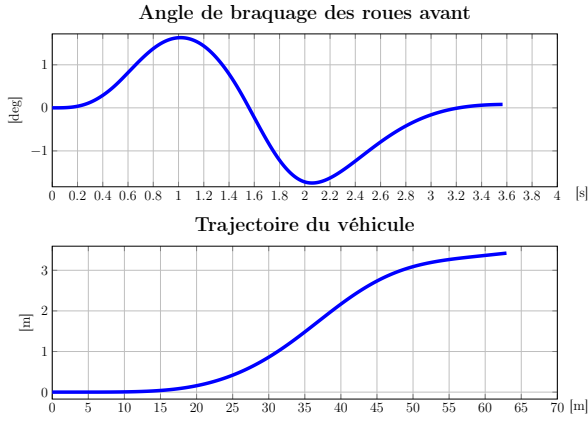


FIGURE 6.4 – Manœuvre d'évitement avec freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.

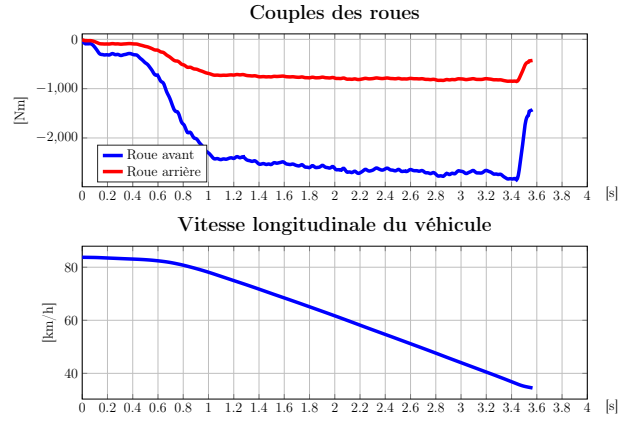


FIGURE 6.5 – Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

Force	Évitement sans freinage		Évitement avec freinage	
	\underline{k}	\bar{k}	\underline{k}	\bar{k}
ΔN_f	1	1	0,9710	1
ΔN_r	1	1	0,9217	1
ΔF_{x_f}	1	1	0,7837	1
ΔF_{x_r}	1	1	0,7643	1
ΔF_{y_f}	0,8006	1	0,7912	1
ΔF_{y_r}	0,8266	1	0,7955	1

TABLE 6.2 – Secteurs de pente des fonctions de saturation linéarisées.

d'un fort freinage, un effort supplémentaire de commande ne peut pas freiner davantage le véhicule. La Table 6.2 présente le secteur de pente des fonctions de saturation linéarisées pour cette manœuvre d'évitement. On constate que les secteurs sont plus importants pour les forces longitudinales des pneus et les forces normales, par rapport à la première manœuvre présentée, parce qu'un couple de freinage est appliqué aux roues pendant la manœuvre. On observe que le secteur des forces latérales des pneus est également légèrement plus important que dans la manœuvre d'évitement sans freinage, malgré le fait que le déplacement latéral soit significativement plus faible. Cela est dû au phénomène de glissement combiné : dans cette manœuvre le véhicule est freiné pendant un mouvement de rotation, donc les forces longitudinales des pneus ne sont pas nulles et par conséquent le seuil de saturation des forces latérales est plus faible. La Table 6.3 montre les éléments des matrices variables dans le temps considérés comme paramètres variables pour cette trajectoire de référence. Les six paramètres variables communs aux deux trajectoires ont été mis en évidence. On y trouve l'élément $b_{u11}(t)$ de la matrice de commande et il est donc nécessaire d'ajouter un filtre rapide passe-bas du premier ordre en entrée sur l'angle de braquage pour pouvoir utiliser le modèle qLPV pour la synthèse des correcteurs, si eux mêmes dépendent également du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$.

6.2.3 Un modèle qLPV polytopique pour les deux trajectoires de référence

La Table 6.3 présente les paramètres variables constituant le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ pour les deux trajectoires de référence, obtenus selon la procédure expliquée dans la section 6.1. Grâce à ces paramètres on peut définir deux polytopes : un pour la manœuvre d'évitement sans freinage et un pour la manœuvre d'évitement avec freinage. Les deux modèles qLPV polytopiques qui en résultent peuvent être utilisés pour la synthèse des deux types de correcteurs :

- des correcteurs pour la manœuvre d'évitement sans freinage,
- des correcteurs pour la manœuvre d'évitement avec freinage.

Évitement sans freinage			Évitement avec freinage		
Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i	Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i
$a_{21}(t)$	-0,557	0,633	$a_{21}(t)$	-0,391	0,382
$a_{27}(t)$	-0,103	0,083	$a_{27}(t)$	-0,072	0,051
$a_{37}(t)$	-0,066	0,053	$a_{37}(t)$	-0,046	0,032
$\psi(t)$	-0,262	0,262	$\psi(t)$	-0,262	0,262
$v(t)$	19,08	19,48	$v(t)$	9,581	23,26
$b_{u11}(t)$	-6,254	7,004	$b_{u11}(t)$	-4,442=1	4,137
$a_{12}(t)$	-0,488	0,416	$a_{31}(t)$	-0,037	0,055
$a_{13}(t)$	-0,438	0,215	$a_{32}(t)$	0,284	1,415

TABLE 6.3 – Paramètres variables des modèles LPV.

On s'est intéressés à la définition d'un domaine polytopique comprenant les deux trajectoires. En effet, on souhaite obtenir un correcteur unique qui puisse être utilisé pour la stabilisation du véhicule autour de ces trajectoires. A présent, la définition du modèle qLPV polytopique pour la synthèse des correcteurs pour les deux trajectoires est donc effectuée. Pour définir le domaine polytopique commun aux deux trajectoires, il est nécessaire de choisir les paramètres variables du modèle LPV. Dans la Table 6.3 les paramètres variables communs pour les polytopes des deux manœuvres sont mis en évidence (couleur verte). On constate que six des huit paramètres sont partagés par les deux trajectoires. Le nombre des paramètres variables doit être limité afin de simplifier la synthèse des correcteurs. Il est donc nécessaire de choisir parmi les paramètres qui ne sont pas en commun entre les deux trajectoires ceux qui doivent être utilisés en priorité dans la définition du domaine polytopique englobant les deux manœuvres. En reprenant plus en détail ces paramètres :

- $a_{12}(t)$ et $a_{13}(t)$ lient la vitesse latérale et la vitesse de lacet à l'accélération longitudinale,
- $a_{31}(t)$ et $a_{32}(t)$ lient la vitesse longitudinale et la vitesse latérale à l'accélération de lacet.

Si on considère les deux premiers paramètres on favorise la représentation de l'impact de la dynamique latérale sur celle longitudinale. Si on choisit les deux derniers, l'impact de la dynamique longitudinale sur la dynamique latérale est mis en avant. Il est nécessaire de considérer pour la première trajectoire de référence qu'aucun couple n'est appliqué aux roues. Par conséquent, l'accélération longitudinale est très faible et donc l'influence de la vitesse latérale et de lacet est considérable. Dans le cas où un couple est appliqué aux roues, ce couplage a un poids plus faible. Pour cette raison, en général, on estime que l'influence du couplage de la dynamique longitudinale sur la dynamique latérale est plus important que l'inverse. De plus, on développera des correcteurs agissant sur le couple des roues, qui peut donc être non nul en boucle fermée même si pour la commande nominale il est nul. Pour cette raison il a été estimé plus pertinent d'utiliser $a_{31}(t)$ et $a_{32}(t)$ comme paramètres variables pour la définition du polytope commun aux deux trajectoires. Les paramètres de ce polytope sont donc rassemblés dans la Table 6.4. Les intervalles de variation des paramètres pour le polytope unique ont été choisis afin de comprendre leur variation le long des deux trajectoires de référence.

6.3 Synthèse des correcteurs

Dans cette section on présente la synthèse des correcteurs pour la stabilisation du véhicule le long des trajectoires de référence. Dans un premier temps, le travail a porté sur le développement des correcteurs en utilisant les deux modèles qLPV polytopiques des deux trajectoires de référence. Les correcteurs obtenus ne sont donc pas orientés au contrôle du véhicule le long de deux manœuvres, mais ils sont spécifiques à la trajectoire de référence considérée pour l'obtention du modèle qLPV polytopique utilisé pour la synthèse. Dans un deuxième temps, les mêmes méthodes de synthèse ont été appliquées à partir du modèle qLPV polytopique commun aux deux manœuvres, afin d'obtenir des correcteurs valables pour les deux trajectoires de référence. Une première analyse a montré que les résultats obtenus sont comparables aux deux correcteurs distincts, que ce soit en termes de norme H_∞ et H_2 -généralisée de la

Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i
$a_{21}(t)$	-0,557	0,633
$a_{27}(t)$	-0,103	0,083
$a_{37}(t)$	-0,066	0,053
$\psi(t)$	-0,262	0,262
$v(t)$	9,581	23,261
$b_{u11}(t)$	-6,254	7,004
$a_{31}(t)$	-0,037	0,055
$a_{32}(t)$	0,284	1,415

TABLE 6.4 – Paramètres variables du polytope commun aux deux trajectoires.

boucle fermée atteintes à travers le problème d'optimisation que suite à l'analyse des simulations. En revanche, le correcteur unique est plus intéressant pour l'application aux véhicules autonomes, pour des raisons d'implémentation. En effet, il peut stabiliser le véhicule le long d'un ensemble plus grand de trajectoires de référence. Pour ces raisons, dans la suite, l'axe de développement a porté sur la synthèse de correcteurs à partir du modèle qLPV polytopique unique pour les deux trajectoires de référence. Dans cette section la démarche de synthèse des correcteurs est présentée.

On considère le système qLPV polytopique exprimé par :

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\dot{\mathbf{x}}} &= A(\underline{\mathbf{p}})\Delta \underline{\mathbf{x}} + B_w(\underline{\mathbf{p}})\Delta \underline{\mathbf{w}} + B_u \Delta \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{c}} &= C_c \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{y}} &= C_y \Delta \underline{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{6.4}$$

obtenu selon la procédure présentée précédemment (section 6.1). Le vecteur $\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{p_z}$ des sorties contrôlées est :

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ \Delta \psi \end{bmatrix}$$

dans l'objectif d'annuler l'écart de position et d'angle de lacet. Dans la suite on considérera différents vecteurs de sorties de mesure $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{p_y}$. Le modèle qLPV (6.4) peut être exprimé avec l'approche polytopique par :

$$S(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{pmatrix} A_i & B_{w_i} & B_u \\ C_z & 0 & 0 \\ C_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall i = 1, \dots, N_p\tag{6.5}$$

où N_p sont les sommets du polytope \mathcal{P} .

La synthèse abordée dans la suite considérera aussi bien des correcteurs statiques que dynamiques. Elle sera faite au moyen de la résolution d'un problème d'optimisation sous des contraintes LMI. Pour la résolution de ces problèmes d'optimisation la *toolbox YALMIP* de MATLAB a été employée, cf. [LOFBERG 2004](#), avec le solveur *Mosek*, cf. [ANDERSEN et ANDERSEN 2000](#). Différentes conditions LMI pour la synthèse multi-objectif des correcteurs dans le cadre des systèmes LTI sont présentées dans la section A.4 de l'annexe A. Dans ce sens, dans le chapitre 5 nous avons discuté comment ces conditions, construites à partir de fonctions de Lyapunov quadratiques, s'appliquent aux inclusions différentielles polytopiques traitées dans ce chapitre. Comme les fonctions quadratiques sont indépendantes de paramètres, l'approche polytopique permet de conclure sur la stabilité pour des variations arbitraires de paramètres à l'intérieur du polytope, ainsi pour le système LPV.

6.3.1 Correcteurs statiques

On aborde dans cette section la synthèse des correcteurs statiques. Les entrées de commande sont donc exprimées par :

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = K \underline{\mathbf{y}} = K C_y \Delta \underline{\mathbf{x}} \quad (6.6)$$

où la matrice $K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ est la matrice de gains statiques recherchée. Le système en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= (A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u K C_y) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B_w(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{c}} &= C_c \Delta \underline{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dans un premier temps, comme il sera fait pour les correcteurs dynamiques dans la section 6.3.2, la synthèse d'un retour d'état a été envisagée :

$$\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}.$$

En revanche, il a été constaté, à travers des simulations exploitant le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions, que les correcteurs statiques par retour d'état sont instables en boucle fermée avec le modèle non-linéaire. En particulier, il a été observé que l'instabilité de la boucle fermée est causée par la mesure de l'écart de vitesse de rotation des roues, c'est-à-dire des variables $\Delta \omega_{wf}$ et $\Delta \omega_{wr}$. En effet, on remarque que le modèle non-linéaire utilisé pour les simulations possède quatre roues et par conséquent il a quatre variables de vitesse de rotations des roues, deux pour chaque essieu. Pour calculer les variables $\Delta \omega_{wf}$ et $\Delta \omega_{wr}$, la moyenne des vitesses de rotation des roues de chaque essieu a été utilisée. Cette simplification provoque l'instabilité de la boucle fermée. Pour éviter ce problème, l'écart de vitesse de rotation des roues n'a pas été pris en compte dans la synthèse des correcteurs et donc le vecteur de mesure est :

$$\underline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta r \\ x_L \\ y_L \\ \Delta \psi \end{bmatrix}.$$

Dans la suite on montre la synthèse des correcteurs statiques par retour de mesure. Le premier correcteur utilise une région LMI pour borner la dynamique du système en boucle fermée et minimise les normes H_∞ et H_2 -généralisée. Le deuxième correcteur proposé considère les mêmes contraintes exploitées par le premier correcteur, mais en plus il maximise la région d'attraction du système en boucle fermée vis-à-vis des saturations des signaux de commande.

Premier cas : correcteur statique H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles

Le premier correcteur statique développé est un correcteur H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles. Dans le chapitre 5 le concept des filtres de pondération a été introduit pour régler le comportement de la boucle fermée dans le cadre de la commande robuste et optimale. On considère le schéma de la Figure 6.6 avec les filtres $W_e(s)$, $W_u(s)$ et $W_d(s)$ et le système augmenté $G_a(s)$ est utilisé pour la synthèse. Pour le

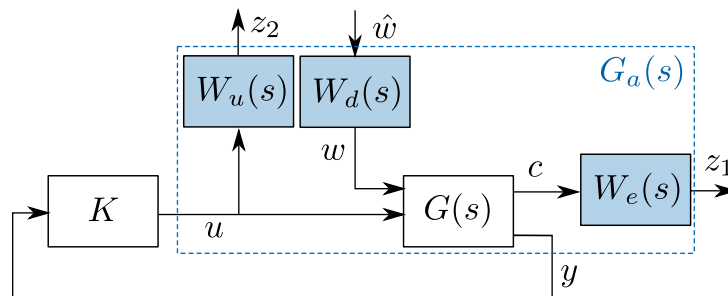


FIGURE 6.6 – Système augmenté pour la synthèse du correcteur.

correcteur présenté dans cette section, le filtre $W_d(s)$ n'a pas été utilisé, car l'entrée de référence n'est

pas employée. Les filtres $W_e(s)$ et $W_u(s)$ suffisent alors à régler les deux relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{z}}_1$ et $\underline{\mathbf{z}}_2$. Les filtres $W_e(s)$ et $W_u(s)$ utilisés sont :

$$W_e(s) = \begin{bmatrix} W_{e11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_{e22}(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_{e33}(s) \end{bmatrix} \quad (6.8a) \quad W_u(s) = \begin{bmatrix} W_{u11}(s) & 0 \\ 0 & W_{u22}(s) \end{bmatrix} \quad (6.8b)$$

avec :

$$W_{e11}(s) = W_{e33}(s) = \frac{0,641s + 5,569}{s + 2,784} \quad (6.8c) \quad W_{u11}(s) = \frac{2s + 3,848}{s + 11,54} \quad (6.8e)$$

$$W_{e22}(s) = \frac{0,641s + 5,774}{s + 3,176} \quad (6.8d) \quad W_{u22}(s) = \frac{10s + 216,6}{s + 433,1} \quad (6.8f)$$

Les expressions (7.6c)-(7.6f) représentent des filtres du premier ordre et leurs diagrammes de Bode sont représentés dans la Figure 6.7. Le filtre $W_e(s)$ a été choisi afin de rejeter les perturbations sur l'erreur de

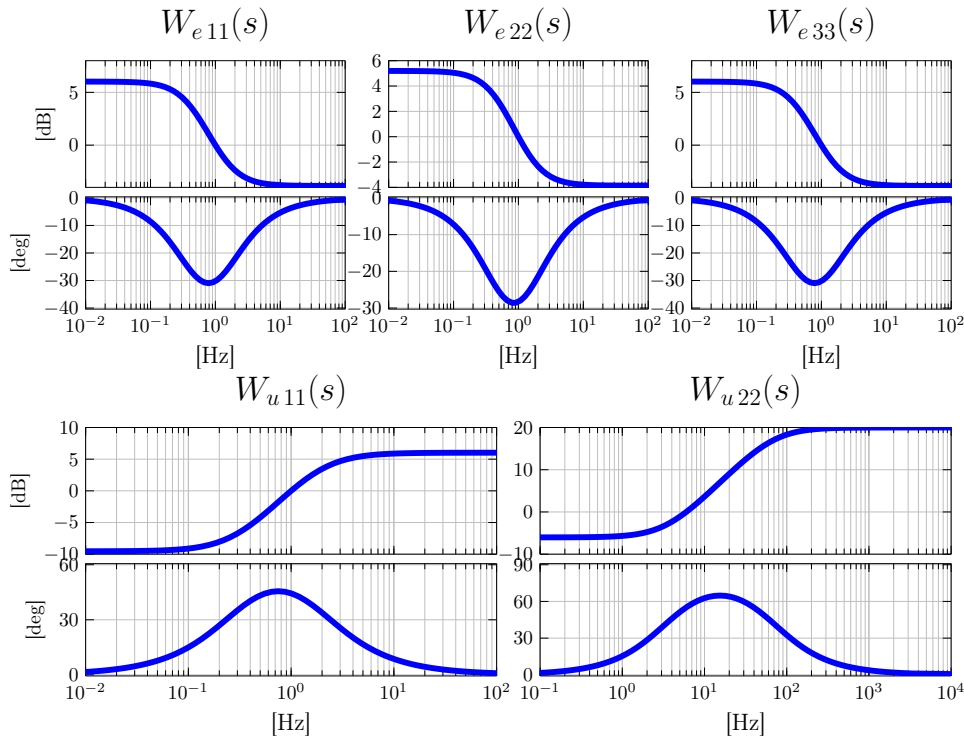


FIGURE 6.7 – Diagramme de Bode des filtres de pondération.

position et d'angle de lacet jusqu'à 1 Hz et ses gains à haute fréquence ont été réduits autant que possible pour limiter le gain \mathcal{L}_2 de la boucle fermée. Le filtre $W_u(s)$ sert à limiter la bande passante de la relation entrées-sorties de $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ vers les sorties de commande $\underline{\mathbf{z}}_2$: la bande passante de l'angle de braquage $\Delta \delta_f$ est coupée à 1 Hz, celle du couple des roues $\Delta \tau_{wf}$ a été coupée à 6 Hz. La valeur de 1 Hz pour l'angle de braquage $\Delta \delta_f$ a été choisie pour ne pas solliciter les comportements non-linéaires de la direction. Pour la dynamique du couple des roues, il faut prendre en compte la dynamique du moteur et du système de freinage. Ce dernier est très rapide et sa dynamique peut être négligée. Pour le système de traction, il a été choisi de considérer un moteur électrique et pas un moteur thermique. La bande passante d'un moteur électrique, d'environ 15 Hz, est significativement plus élevée que celle d'un moteur thermique, pour lequel elle peut varier considérablement, mais reste aux alentours de 0,5 Hz pour un véhicule particulier pas typé sport. Pour limiter la vitesse de la commande, une bande passante de 6 Hz a été choisie pour le couple. Une région LMI a été utilisée pour borner la dynamique de la boucle fermée. La région \mathbb{D} utilisée pour la synthèse du correcteur est représentée dans la Figure 6.8 et les valeurs suivantes ont été choisies :

- $\bar{\lambda} = -1,5$,
- $\lambda = -500$,
- $\theta = 0,6435$ rad.

Cela limite le placement des pôles en boucle fermée de tous les systèmes LTI dans le domaine polytopique. Cela est donc utile pour imposer des bornes aux dynamiques les plus lentes et les plus rapides de la boucle fermée. Limiter les dynamiques les plus lentes est particulièrement important dans le contexte des manœuvres d'urgence, pour lesquelles le système doit converger le plus rapidement possible. De plus, la région LMI permet aussi d'assumer un amortissement minimum $\xi > \xi_{min} = 0,6$ des pôles des réalisations LTI. La définition des matrices de la région LMI est précisée dans l'annexe A. Le critère adopté au calcul

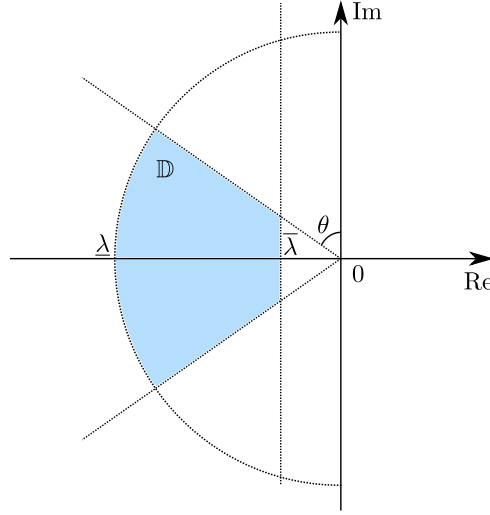


FIGURE 6.8 – Région LMI pour la synthèse du correcteur.

du correcteur est la minimisation de la norme H_∞ entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{z}}_1$ et $\underline{\mathbf{z}}_2$ est exploitée. Pour cela il est possible d'étendre aux modèles polytopiques le résultat du Théorème 15, pour la synthèse d'un correcteur statique à norme H_∞ minimale pour un système LTI. Enfin, la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties $\underline{\mathbf{z}}_2$ est également minimisée. La norme H_2 -généralisée, cf. WILSON 1989 et ROTEA 1993, dont on rappelle la définition dans la section A.3.3, mesure le pic d'amplitude maximal des sorties du système en réponse à des entrées de perturbation à énergie unitaire. Elle est donc utile pour minimiser l'amplitude des commandes du système et limiter leurs saturations. Pour cela il est possible d'étendre aux systèmes polytopiques le résultat du Théorème 16. Les résultats des Théorèmes 14, 15 et 16, étendus aux systèmes polytopiques, sont rassemblés pour définir les contraintes LMI pour la synthèse du correcteur. On appelle C_z , D_{zu} , C_{z_2} et D_{z_2u} les matrices telles que :

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{z}}_1 \\ \underline{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix}^T = C_z \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{zu} \Delta \underline{\mathbf{u}}$$

$$\underline{\mathbf{z}}_2 = C_{z_2} \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{z_2u} \Delta \underline{\mathbf{u}}.$$

En considérant une région LMI définie par

$$\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (6.9)$$

s'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_{w_i} & Q C_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ B_{w_i}^T & -\gamma_\infty I & D_{zw}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & D_{zw} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.10a)$$

$$\begin{bmatrix} QA_i^T + A_iQ + B_uY + Y^T B_u^T & B_{wi} \\ B_{wi}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6.10b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC_{z_2}^T + Y^T D_{z_2u}^T \\ C_{z_2}Q + D_{z_2u}Y & \gamma_{2g}^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (6.10c)$$

$$L \otimes Q + M \otimes (A_iQ) + M^T \otimes (QA_i^T) + M \otimes (B_uY) + M^T \otimes (Y^T B_u^T) < 0 \quad (6.10d)$$

alors :

- le correcteur $K = Y(C_y Q)^+{}^3$ stabilise le système polytopique,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (6.7) dans le domaine polytopique \mathcal{P} sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont inférieures à γ_∞ et γ_{2g} respectivement.

Pour le problème d'optimisation on choisit de minimiser la fonction de coût suivante :

$$J(\gamma_\infty, \gamma_{2g}) = 2\gamma_\infty^2 + \gamma_{2g}^2 \quad (6.11)$$

pour laquelle on choisit de favoriser γ_∞ parce qu'on veut maximiser en priorité la robustesse de la boucle fermée. Pour choisir une combinaison convexe optimale des critères des performance à minimiser il serait également possible d'utiliser des approches itératives, comme celle proposée dans [POUSSOT-VASSAL et al. 2008](#), basée sur l'*optimum de Pareto*. Finalement, les correcteurs sont déterminés en résolvant le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\{\gamma_\infty, \gamma_{2g}, Q, Y\}} \quad & 2\gamma_\infty^2 + \gamma_{2g}^2 \\ \text{soumis à} \quad & (6.10a), (6.10b), (6.10c), (6.10d) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Dans la suite, pour identifier le correcteur obtenu grâce au problème (6.12), on utilisera la dénomination PSU1 (*Polytopique Statique Unique*). Les indices de performance γ_∞ et γ_{2g} de la boucle fermée pour le correcteur sont données dans la Table 6.5.

	PSU1	PSU2
γ_∞	0,96	1
γ_{2g}	1,05	1,41

TABLE 6.5 – Indices de performance des correcteurs statiques.

Deuxième cas : correcteur statique pour système avec non-linéarités de secteur en entrée

Dans le contexte des manœuvres d'urgence, où le véhicule doit agir le plus rapidement possible, il est possible d'atteindre les bornes des saturations de actionneurs. Il peut donc être utile de considérer les saturations des commandes dans la synthèse des correcteurs. Ce problème a déjà été abordé en partie pour la synthèse du correcteur présenté dans le paragraphe précédent. En effet, on a minimisé, conjointement à la norme H_∞ , la norme H_2 -généralisée de la boucle fermée. Comme évoqué dans le paragraphe précédent, la norme H_2 -généralisée exprime le pic d'amplitude maximale des sorties en réponse à des entrées de perturbation à énergie unitaire. En étendant le concept aux systèmes polytopiques et en minimisant la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les entrées de perturbation et les commandes en sortie du correcteur, on limite l'amplitude des grandeurs de commande. Cela vise à réduire les signaux excédent les limites de saturation des actionneurs. En revanche, si l'écart par rapport à la trajectoire de référence est important, il est encore possible de saturer les signaux de commande. On considère maintenant le système qNLPV exprimé par :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{p})\Delta \mathbf{x} + B_w(\mathbf{p})\Delta \mathbf{w} + B_u \underline{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) \quad (6.13)$$

3. On souligne que M^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice M .

où $\underline{\sigma}(\Delta \mathbf{u})$ est la fonction de saturation de $\Delta \mathbf{u}$, représentée en Figure 6.9. Il est toujours possible d'exprimer le système (6.13) par la fonction seuil, définie par :

$$\phi(\Delta \mathbf{u}) = \underline{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}. \quad (6.14)$$

On considère la fonction non-linéaire (6.14) comme une non-linéarité de secteur et on utilise la condition de

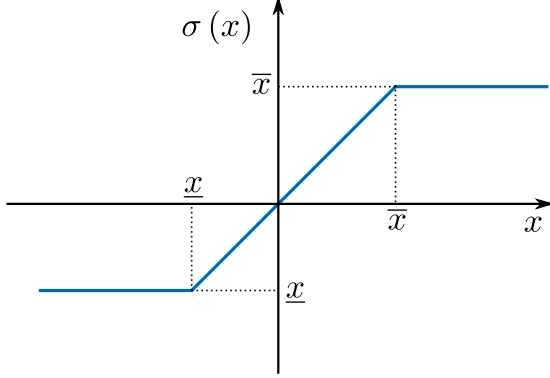


FIGURE 6.9 – Fonction de saturation.

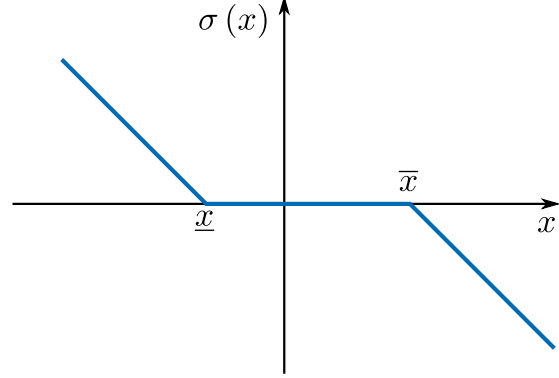


FIGURE 6.10 – Fonction seuil.

secteur généralisée⁴, cf. [TARBOURIECH et al. 2011](#), pour exprimer une condition de stabilité quadratique de la boucle fermée du correcteur statique et le système non-linéaire (6.13) sous forme de contrainte LMI. On peut utiliser cette contrainte et maximiser la région d'attraction du système en la boucle fermée. Pour le faire, on étend le résultat du Théorème 19 aux systèmes LPV et on le combine avec les contraintes exprimées par (6.10a)-(6.10d).

S'il existe une région \mathbb{D} , des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $S_u = S_u^T > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale et $J_u \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que les conditions (6.10a)-(6.10d) sont vérifiées et $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_u S_u - J_u^T \\ S_u B_u^T - J_u & -2S_u \end{bmatrix} < 0 \quad (6.15a)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_j^T - J_{u_j}^T \\ Y_j - J_{u_j} & \bar{u}_j^2 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (6.15b)$$

où

- Y_j et $J_{u_j} \forall j = 1 \dots m_u$ sont respectivement les lignes des matrices Y et J_u ,
- $\bar{u}_j \forall j = 1 \dots m_u$ sont les valeurs maximales des entrées, c'est-à-dire $\Delta \bar{\delta}_f$ et $\Delta \bar{\tau}_{wf}$, les valeurs maximales de $\Delta \delta_f$ et $\Delta \tau_{wf}$,

alors :

- le correcteur $K = Y(C_y Q)^+$ stabilise le système qLPV (6.5) et $\mathcal{E}(P, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq 1\}$, avec $P = Q^{-1}$, est une RSA (*Région de Stabilité Asymptotique*) du système qLPV avec entrées $\Delta \mathbf{u}$ saturées en boucle fermée,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (6.7) dans le domaine polytopique \mathcal{P} sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont inférieures à γ_∞ et γ_{2g} respectivement.

Les équations (6.15b) considèrent symétriques les bornes de saturation des commandes par rapport à zéro. Pour le véhicule utilisé on considère les saturations suivantes :

- $-30 \text{ deg} \leq \delta_f \leq 30 \text{ deg}$,
- $-3846 \text{ Nm} \leq \tau_{wf} \leq 946 \text{ Nm}$ (la saturation du couple total est $-5000 \text{ Nm} \leq \tau_{wf} + \tau_{wr} \leq 1230 \text{ Nm}$).

4. La condition de secteur généralisée est présentée dans l'annexe A.

Les seuils de saturation de $\Delta\delta_f$ et $\Delta\tau_{wf}$ dépendent aussi des commandes le long de la trajectoire de référence, δ_{f0} et τ_{wf0} , et elles ne sont donc pas symétriques. La valeur absolue la plus faible des seuils de saturation de $\Delta\delta_f$ et $\Delta\tau_{wf}$ le long des trajectoires de référence est considérée. Une RSA (*Région de Stabilité Asymptotique*) est un sous-ensemble de la région d'attraction du système. Si on maximise la trace de la matrice Q il est donc possible de maximiser la région d'attraction du système qLPV (6.5) avec entrées saturées. On choisit donc a priori des valeurs pour γ_∞ et γ_{2g} et on détermine le correcteur en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\{Q, Y, S_u, J_u\}} \text{trace}(Q) \\ & \text{soumis à} \quad (6.10a), (6.10b), (6.10c), (6.10d), (6.15a), (6.15b) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Pour la synthèse de ce correcteur statique on utilise la même région \mathbb{D} et les mêmes filtres de pondération $W_e(s)$ et $W_u(s)$ utilisés pour le correcteur PSU1. Des valeurs suboptimales peuvent être choisies pour γ_∞ et γ_{2g} , par rapport aux valeurs trouvées pour la synthèse du correcteur PSU1, permettant de laisser un degré de liberté suffisant pour la maximisation de la région d'attraction. Les valeurs retenues pour le correcteur développé à partir du problème d'optimisation (6.16), identifié par le nom PSU2, sont données dans la Table 6.5.

6.3.2 Correcteurs dynamiques

On aborde dans cette section la synthèse des correcteurs dynamiques. Le correcteur dépend du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ des paramètres variables et il est exprimé par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_k &= A_K(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}}_k + B_K \underline{\mathbf{y}} \quad \forall \underline{\mathbf{p}} \in \mathcal{P} \\ \Delta \underline{\mathbf{u}} &= C_K \underline{\mathbf{x}}_k + D_K \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (6.17)$$

où l'ordre du correcteur est égal à celui du modèle de synthèse et $A_K(\underline{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_K \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $C_K \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $D_K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$. Comme la stabilité est obtenue pour le modèle polytopique avec des variations arbitraires, les paramètres du correcteur, étant également un système LPV, doivent suivre les évolutions des paramètres du système. Le système en boucle fermée est exprimé par :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} = A_{cl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}} + B_{wcl}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} \quad (6.18a)$$

$$\underline{\mathbf{c}} = C_{ccl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} \quad (6.18b)$$

avec $\underline{\mathbf{x}}_{cl}^T = [\Delta \underline{\mathbf{x}}^T, \underline{\mathbf{x}}_k^T]^T$ et

$$A_{cl}(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K(\underline{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \quad (6.18c)$$

$$B_{wcl}(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} B_w(\underline{\mathbf{p}}) + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix} \quad (6.18d)$$

$$C_{zcl} = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18e)$$

Dans la suite on fera la synthèse des correcteurs dynamiques en supposant l'ensemble du vecteur d'état accessible à la mesure, soit :

$$\underline{\mathbf{y}} = \Delta \underline{\mathbf{x}}.$$

Les LMI utilisées pour la synthèse des correcteurs sont présentées dans les sections A.4.3 et A.4.4 pour les modèles LTI. Comme effectué pour la synthèse des correcteurs statiques, le premier correcteur dynamique utilise une région LMI pour borner la dynamique du système en boucle fermée et il en minimise les normes H_∞ et H_2 -généralisée. Le deuxième correcteur proposé considère les mêmes contraintes exploitées par le premier correcteur, mais il maximise aussi la région d'attraction du système en boucle fermée vis-à-vis des saturations des signaux de commande. Un dernier correcteur avec *anti-windup* pour la saturation des signaux de commande est proposé.

$$L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} + M \otimes \begin{bmatrix} A_i \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A_i + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix} + M^T \otimes \begin{bmatrix} A_i \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A_i + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix}^T < 0 \quad (6.19d)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (6.19e)$$

alors le correcteur dynamique avec les matrices $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K) \\ A_{Ki} &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A_i + B_u D_K C_y) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (6.20)$$

assure :

- la stabilité du système polytopique,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (6.18) dans le domaine polytopique \mathcal{P} sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont bornées par γ_∞ et γ_{2g} , respectivement.

Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

On constate que seule la matrice $A_K(\mathbf{p})$ du correcteur dépend des paramètres variables, parce qu'elle est calculée en utilisant la matrice $A(\mathbf{p})$ du modèle qLPV du système. Comme pour le correcteur PSU1, on utilise la fonction de coût (6.11) et le correcteur dynamique est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{\gamma_\infty, \gamma_{2g}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}\}} \quad & 2\gamma_\infty^2 + \gamma_{2g}^2 \\ \text{soumis à} \quad & (6.19a), (6.19b), (6.19c), (6.19d), (6.19e) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dans la suite, ce correcteur dynamique sera identifié par la dénomination PDU1 (*Polytopique Dynamique Unique*). Les indices de performance γ_∞ et γ_{2g} de la boucle fermée pour le correcteur sont présentés dans la Table 6.6.

	PDU1	PDU2	PDUAW
γ_∞	1,00	1,00	1,00
γ_{2g}	0,91	1,22	1,22

TABLE 6.6 – Indices de performance des correcteurs dynamiques.

Deuxième cas : correcteur dynamique pour système avec non-linéarités de secteur en entrée

Comme il a été fait pour le correcteur statique, il est également possible, pour la synthèse du correcteur dynamique, de prendre en compte de façon explicite les saturations des signaux de commande. On considère le système avec entrées saturées :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{x} + B_w(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{w} + B_u \sigma(\Delta \mathbf{u}) \quad (6.22)$$

qui peut être exprimé par la fonction seuil (6.14). Dans ce cas également on peut utiliser la condition de secteur généralisée et trouver une condition de stabilité quadratique de la boucle fermée pour le correcteur dynamique. Il est donc possible d'étendre le résultat du Théorème 27 aux modèles polytopiques et le

combiner avec les conditions exprimées par (6.19a)-(6.19e).

S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale, $\mathbf{J}_{u1} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{J}_{u2} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$, une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que (6.19a)-(6.19e) sont valides et $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c} \left[\begin{array}{c|c|c} A_i \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 \\ \hline \mathbf{S}_u B_u^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{S}_u B_u^T \mathbf{Y} - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] & & \\ \hline & & \end{array} \right) < 0 \quad (6.23a)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_j^T - \mathbf{J}_{u1j}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & C_y^T \hat{\mathbf{D}}_j^T - \mathbf{J}_{u2j}^T \\ \hline \hat{\mathbf{C}}_j - \mathbf{J}_{u1j} & \hat{\mathbf{D}}_j C_y - \mathbf{J}_{u2j} & \bar{u}_j^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (6.23b)$$

où

- Y_j , \mathbf{J}_{u1j} et $\mathbf{J}_{u2j} \forall j = 1 \dots m_u$ sont respectivement les lignes des matrices Y , J_{u1} et J_{u2} ,
- $\bar{u}_j \forall j = 1 \dots m_u$ sont les valeurs maximales des entrées, c'est-à-dire $\Delta \bar{\delta}_f$ et $\Delta \bar{\tau}_{wf}$, les valeurs maximales de $\Delta \delta_f$ et $\Delta \tau_{wf}$,

alors le correcteur dynamique avec les matrices $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\ A_{Ki} &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A_i + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T} \end{aligned} \quad (6.24)$$

assure :

- la stabilité du système polytopique et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système avec entrées saturées en boucle fermée,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (6.18) dans le domaine polytopique \mathcal{P} sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont bornées par γ_∞ et γ_{2g} , respectivement.

La matrice P de la fonction de Lyapunov quadratique est telle que :

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & N \\ N^T & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & M \\ M^T & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix}. \quad (6.25)$$

On constate que la condition (6.23a) est non-linéaire par rapport aux inconnues. Cela est dû au produit $\mathbf{S}_u B_u^T \mathbf{Y}$. Le problème d'optimisation qu'on obtient en utilisant la contrainte (6.23a) n'est donc pas convexe. Pour ne pas devoir résoudre un problème d'optimisation non-convexe il est possible d'envisager deux solutions :

- on choisit une valeur pour \mathbf{S}_u , qui peut se révéler très difficile,
- on utilise la méthode proposée dans GARCIA et al. 2009 et SILVA et al. 2008, présentée en annexe A avec le Théorème 28 pour les systèmes LTI.

La deuxième solution prévoit d'ajouter une composante d'*anti-windup* au correcteur, conduisant à l'expression :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= A_K(\mathbf{p}) \mathbf{x}_k + B_K(\mathbf{p}) \mathbf{y} + E_{Ku} \phi(\Delta \mathbf{u}) \\ \Delta \mathbf{u} &= C_K(\mathbf{p}) \mathbf{x} + D_K(\mathbf{p}) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

De cette façon il est possible d'exprimer la condition (6.23a) sous forme linéaire ; les détails de la convexification sont présentés en annexe A. S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale, $\mathbf{J}_{u1} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{J}_{u2} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$, une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que (6.19a)-(6.19e) sont valides et $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} A_i \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 \\ \hline \mathbf{S}_u B_u^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{R}_u - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] \right) < 0 \quad (6.27a)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_j^T - \mathbf{J}_{u1j}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & C_y^T \hat{\mathbf{D}}_j^T - \mathbf{J}_{u2j}^T \\ \hline \hat{\mathbf{C}}_j - \mathbf{J}_{u1j} & \hat{\mathbf{D}}_j C_y - \mathbf{J}_{u2j} & \bar{u}_j^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (6.27b)$$

alors le correcteur dynamique avec matrices $\forall i = 1 \dots N_p$:

$$\begin{aligned} E_{Ku} &= N^{-1} (\mathbf{R}_u - \mathbf{Y} B_u \mathbf{S}_u) \mathbf{S}_u^{-1} \\ D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K) \\ A_{Ki} &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A_i + B_u D_K C_y) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (6.28)$$

assure :

- la stabilité du système qLPV (6.5) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système avec entrées saturées en boucle fermée,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (6.18) dans le domaine polytopique \mathcal{P} sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont bornées par γ_∞ et γ_{2g} , respectivement.

Pour maximiser la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$, on cherche à minimiser la trace de P , ce qui peut être fait, comme expliqué dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), en minimisant un scalaire $\rho > 0$ et en ajoutant la contrainte LMI suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc} \rho I & I & 0 \\ I & Y & I \\ 0 & I & X \end{array} \right] \geq 0. \quad (6.29)$$

Il est donc possible de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{\rho, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \mathbf{S}_u, \mathbf{J}_{u1}, \mathbf{J}_{u2}, \mathbf{R}_u\}} \quad & \rho \\ \text{soumis à} \quad & (6.19a), (6.19b), (6.19c), (6.19d), (6.19e), (6.27a), (6.27b), (7.27) \end{aligned} \quad (6.30)$$

où les valeurs de γ_∞ et γ_{2g} sont choisies a priori. Ce correcteur dynamique sera identifié dans la suite par le nom PDUAW (*Polytopique Dynamique Unique Anti-Windup*). Ses indices de performance en boucle fermée sont présentés dans la Table 6.6.

Dans ce travail on s'est intéressés également à la synthèse d'un correcteur dynamique qui maximise la région d'attraction du système avec entrées saturées, mais sans utiliser la composante d'*anti-windup*. Précédemment on a mentionné que, pour éliminer la non-linéarité de la condition (6.23b), il est possible de choisir a priori la valeur de la matrice \mathbf{S}_u . Dans ce cas elle n'est plus une inconnue du problème d'optimisation, qui est donc convexe. En revanche, comme déjà souligné le choix de la matrice \mathbf{S}_u n'est pas une

tâche simple. Une approche possible sera de s'appuyer sur une solution du problème d'optimisation (6.30). Selon notre expérience, la solution de la matrice \mathbf{S}_u trouvée dans ce cas fournit une valeur permettant de résoudre le problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} \min_{\rho, \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \mathbf{J}_{u1}, \mathbf{J}_{u2}, \mathbf{R}_u\}} \rho \\ \text{soumis à} \quad (6.19a), (6.19b), (6.19c), (6.19d), (6.19e), (6.23a), (6.23b), (7.27) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Le correcteur dynamique trouvé de cette façon a été nommé PDU2. Ses indices de performance γ_∞ et γ_{2g} sont donnés dans la Table 6.6.

6.4 Analyse de la boucle fermée

Cette section aborde l'analyse des correcteurs développés dans la section 6.3. Un des axes est l'estimation de la région d'attraction de la boucle fermée du système non-linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales du système pour lesquelles les trajectoires en boucle fermée convergent à l'origine. L'intérêt de connaître cet ensemble est de l'utiliser comme approximation de la zone d'opération du système en boucle fermée et ainsi l'employer comme un critère d'évaluation des correcteurs. Dans un premier temps, dans la section 6.4.1 la région d'attraction est estimée par rapport aux non-linéarités du système causées par la saturation des forces des pneus et des entrées de commande au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique. Dans un deuxième temps, des simulations avec une approche Monte Carlo sont effectuées pour estimer empiriquement la région d'attraction par rapport à des conditions initiales non nulles pour les vitesses longitudinale et latérale du véhicule. Les résultats de ces simulations sont détaillés dans la section 6.4.2. Enfin on conclut la section avec l'analyse temporelle en la boucle fermée au moyen de simulations numériques. Cela nous sert à comparer plus en détail le comportement des différents correcteurs développés dans des conditions différentes.

L'ensemble de résultats de simulation montrés dans cette section ont été obtenus en exploitant l'action des correcteurs sur le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions, décrit dans la section 1.3. De plus, les saturations suivantes des entrées du système ont été prises en compte dans les simulations :

- $-30 \text{ deg} \leq \delta_f \leq 30 \text{ deg}$,
- $-3846 \text{ Nm} \leq \tau_{wf} \leq 946 \text{ Nm}$,
- $-1154 \text{ Nm} \leq \tau_{wr} \leq 284 \text{ Nm}$.

6.4.1 Région d'attraction de la boucle fermée

L'ensemble des conditions initiales pour lesquelles le système converge, autrement dit la région d'attraction, sert à analyser l'action des correcteurs développés et à établir les limites dans l'espace d'état pour l'évolution des trajectoires du véhicule.

Estimation au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique

Cette section porte sur l'estimation de la région d'attraction pour le système non-linéaire présentant la saturation des entrées de commande et des forces des pneus. Pour obtenir des estimations décrites par une ellipsoïde, on utilise une fonction de Lyapunov quadratique. On considère pour cela l'expression du modèle linéarisé (4.33), présentée dans la section 4.3.1, et de plus on suppose que les entrées de commande \mathbf{u} peuvent saturer. On néglige les entrées de perturbation et on exprime le modèle linéarisé en fonction des seuils au lieu des saturations, comme :

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = A(t) \Delta \mathbf{x} + B_u(t) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{u}) + B_h(t) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \quad (6.32a)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{h}} = C_h(t) \Delta \mathbf{x} + D_{hu}(t) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{u}) + D_{hh}(t) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \quad (6.32b)$$

où $\mathbf{x} = [v \quad u \quad r \quad x_L \quad y_L \quad \Delta\psi \quad \omega_{wf} \quad \omega_{wr}]^T$. Ce modèle exclut du vecteur $\Delta \mathbf{h}$, présenté dans la section 4.3, les forces normales, qu'on considérera non saturées. Comme évoqué dans le chapitre 4, la saturation de la force normale d'une roue, pour un modèle avec deux roues, est atteinte si toute la charge ou, au contraire, si aucune charge n'est présente sur la roue. Il ne s'agit pas de cas possibles pour un modèle bicyclette, où le transfert de charge parmi les deux roues d'un essieu n'existe pas. En effet, un cas réaliste

où la saturation des forces normales pourrait se produire lorsqu'une roue se soulève suite à un transfert de charge latéral important causée par un virage très dynamique. L'expression du système linéarisé par (6.32) permet de prendre en compte les saturations des forces des pneus et des entrées $\Delta \underline{\mathbf{u}}$. Alors, pour l'expression des conditions de stabilité du système, on considère le système en boucle fermée avec les correcteurs et le modèle (6.32). Pour l'évaluation des conditions de stabilité du système non-linéaire en boucle fermée, on le représente sous forme de modèle NLPV. En revanche, on constate que si on représente le modèle (6.32) par un modèle qNLPV polytopique en utilisant la procédure expliquée dans la section 6.1, les huit paramètres variables trouvés ne seraient pas les mêmes que ceux du modèle qLPV polytopique utilisé pour la synthèse des correcteurs. En effet, les éléments variables dans le temps des matrices du modèle (6.32) ne sont pas les mêmes que les éléments des matrices du modèle (6.2), qu'on a utilisés pour obtenir le modèle qLPV polytopique de synthèse⁵. Par conséquent, si on représente sous forme de modèle qNLPV polytopique le modèle linéarisé (6.32), la boucle fermée, dans le cas d'un correcteur LPV dynamique, serait un modèle qLPV polytopique avec un vecteur $\underline{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{16}$, limitant ainsi l'analyse avec la résolution de problème sous contraintes LMI. De plus, comme précédemment évoqué dans la section 6.1, les matrices du modèle (6.32) présentent un nombre élevé de paramètres variables dans le temps, donc en considérer exclusivement huit paramètres variables résulterait dans un modèle trop simpliste. L'approche LPV polytopique n'est donc pas non plus adaptée dans le cas d'un correcteur statique. Une solution alternative est d'utiliser l'approche LPV *grid-based* pour l'analyse de stabilité et l'estimation de la région d'attraction de la boucle fermée. En effet, pour l'approche LPV *grid-based*, la dépendance affine entre les matrices du modèle et les paramètres variables n'est pas nécessaire. Il est donc possible d'utiliser les variables d'état et les entrées du système non-linéaire comme paramètres variables. On calcule donc la représentation LTI de la boucle fermée dans un ensemble des points de l'espace des variations des paramètres variables. Pour les correcteurs LPV, on connaît les expressions analytiques des paramètres variables, fonction à la fois des variables d'état et des entrées du système non-linéaire. On considère donc le modèle qNLPV en boucle fermée suivant :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} = A_{cl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}}_{cl} + B_{ucl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + B_{hcl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (6.33a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C_{hcl}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{hucl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + D_{hhcl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (6.33b)$$

où les matrices de la représentation d'état varient selon le correcteur utilisé. On considère maintenant N_g points de la grille pour lesquels on calcule le système LTI :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} = A_{cli} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + B_{ucli} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + B_{hcli} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (6.34a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C_{hcli} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + D_{hucli} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + D_{hhcli} \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (6.34b)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = C_{ucli} \underline{\mathbf{x}}_{cl}. \quad (6.34c)$$

Pour l'estimation de la région d'attraction on considère pour la grille un ensemble de points représentant l'évolution temporelle des trajectoires de référence présentées dans la section 6.2. Pour l'analyse de stabilité on utilise les Théorèmes 6 et 7 présentés en annexe A. S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $S_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale, $J_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$ et $J_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ telles que $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} Q A_{cli}^T + A_{cli} Q & B_{ucli} S_u - J_u^T & B_{hcli} S - Q C^T - J^T \\ \hline S_u B_{ucli}^T - J_u & -2S_u & -S_u D_{hucli}^T \\ \hline S B_{hcli}^T - C Q - J & -D_{hucli} S_u & -(I + D_{hhcli}) S - S (I + D_{hhcli})^T \end{array} \right] < 0 \quad (6.35a)$$

$$\left[\begin{array}{c} Q \quad J_k^T \\ J_k \quad \bar{h}_k^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall k = 1 \dots p_h \quad (6.35b)$$

$$\left[\begin{array}{cc} Q & C_{ucli}^T - J_{uj}^T \\ C_{ucli} - J_{uj} & \bar{u}_j^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (6.35c)$$

alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}} \leq 1\}$, avec $P = Q^{-1}$, est une RSA du système (6.33). Les variables $\bar{u}_j \quad \forall j = 1 \dots m_u$ sont les valeurs maximales des signaux de commande. Comme on a expliqué

5. Il est possible de consulter les expressions des matrices des modèles (6.32) et (6.2) dans l'annexe C.

précédemment pour la synthèse des correcteurs, la saturation des entrées du système n'est pas symétrique et elle dépend de la trajectoire de référence. Dans ce cas, comme déjà effectué pour la synthèse des correcteurs, il est possible d'admettre un certain niveau de conservatisme et prendre le seuil de saturation le plus bas de $\Delta\delta_f$ et $\Delta\tau_{wf}$ le long des deux trajectoires de référence. Les variables $\bar{h}_k \quad \forall k = 1 \dots p_h$ représentent les valeurs maximales des variables du vecteur $\Delta\mathbf{h}$, c'est-à-dire l'écart des forces des pneus par rapport aux forces produites le long des trajectoires de référence. Le seuil de saturation des éléments de $\Delta\mathbf{h}$ n'est pas symétrique non plus, comme il a été montré plus en détail dans le chapitre 4. Pour ces signaux aussi, il est possible d'admettre un certain niveau de conservatisme et considérer le plus petit seuil de saturation le long des trajectoires de référence. Un des premiers critères de performance à analyser concerne en priorité les conditions initiales non nulles des variables d'état du véhicule pour lesquelles la boucle fermée converge. En effet, la manœuvre d'évitement d'obstacle peut débuter avec une incertitude des conditions initiales du véhicule. Dans le cas où la trajectoire de référence est calculée avec des conditions initiales différentes des conditions réelles, le correcteur doit agir pour stabiliser le véhicule au voisinage de la trajectoire. En revanche, on peut considérer que les variables d'état du correcteur sont initialisées à zéro. La région d'attraction de la boucle fermée est donc estimée en maximisant l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ pour les directions des variables d'état du véhicule. Pour la maximisation de l'ellipsoïde le long de certaines directions, on exploite une expression sous forme d'une condition LMI, présentée par [SILVA 1997](#) et [GOMES DA SILVA et TARBOURIECH 2001](#), efficace pour l'optimisation numérique. On considère la direction de maximisation de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$:

$$D = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n_k} \\ 0_{n_k \times n} & 0_{n_k \times n_k} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

où n est l'ordre du système et n_k est l'ordre du correcteur. On maximise alors le scalaire β tel que :

$$\begin{bmatrix} I & \beta D^T \\ \beta D & Q \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

pour maximiser l'estimation de la région d'attraction de la boucle fermée dans les directions exprimées par D . Le problème d'optimisation pour l'estimation de la région d'attraction est donc :

$$\begin{aligned} & \max_{\{Q, S_u, S_h, J_u, J_h, \beta\}} \beta \\ & \text{soumis à} \quad (6.19a), (6.19b), (6.19c), (6.35a), (6.35b), (6.35c), (6.37) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Une solution pour le problème d'optimisation (6.38) pour les boucles fermées avec les différents correcteurs a été déterminée en utilisant une grille de 145 points au total, répartis uniformément parmi les deux trajectoires d'évitement d'obstacle. L'utilisation d'une grille avec un nombre restreint de points nous a permis d'estimer la région d'attraction la plus grande possible, car la complexité du problème d'optimisation est réduite, étant donné que le nombre de contraintes est également restreint. La solution a été ensuite validée sur une grille d'environ 14500 points. Dans la Table 6.7 on montre les conditions initiales maximales obtenues par l'estimation de la région d'attraction des boucles fermées avec les différents correcteurs. Les régions d'attraction estimées pour les cinq correcteurs sont acceptables pour toutes les variables d'état du véhicule, malgré le fait qu'une approche pessimiste a été utilisée dans le choix des seuils de saturation des forces des pneus et des entrées de commande. Aucun des correcteurs ne fait converger les trajectoires de la boucle fermée avec des conditions initiales considérablement plus importantes dans toutes les directions. Dans ce cas il est utile d'évaluer le volume de l'ellipsoïde, étant une valeur globale de la taille des régions d'attraction estimées. Le volume n'est pas le paramètre maximisé pour l'estimation de la région d'attraction parce que, comme expliqué dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 60, il peut conduire à des estimations plates, c'est-à-dire des ellipsoïdes où une ou plusieurs directions sont très pénalisées par rapport à d'autres. En général, on observe que les correcteurs dynamiques ont une région d'attraction plus grande que les correcteurs statiques. En revanche, les valeurs pour les directions associées aux variables de la dynamique latérale sont comparables entre correcteurs statiques et correcteurs dynamiques ; pour l'écart latéral y_L et l'écart de lacet $\Delta\psi$, l'estimation de la région d'attraction est même plus grande pour les correcteurs statiques. Les correcteurs dynamiques ne conduisent donc pas à une taille majeure de la région d'attraction pour toutes les directions possibles. On constate que la prise en compte de façon explicite des saturations de signaux de commande a un effet satisfaisant pour le correcteur PSU2 par rapport à PSU1. Le volume de l'ellipsoïde est supérieur et les directions des variables associées à la dynamique

Variable d'état	PSU1	PSU2	PDU1	PDU2	PDUAW
Δv	0,580 m/s	0,689 m/s	1,488 m/s	1,366 m/s	1,326 m/s
Δu	0,857 m/s	0,869 m/s	0,961 m/s	1,034 m/s	1,025 m/s
Δr	24,25 deg/s	23,30 deg/s	25,04 deg/s	24,67 deg/s	24,87 deg/s
x_L	7,054 cm	10,69 cm	82,32 cm	72,78 cm	72,83 cm
y_L	38,42 cm	29,58 cm	23,97 cm	29,02 cm	29,11 cm
$\Delta\psi$	3,501 deg	3,089 deg	2,618 deg	2,701 deg	2,655 deg
$\Delta\omega_{wf}$	229,6 deg/s	243,1 deg/s	564,6 deg/s	388,7 deg/s	369,6 deg/s
$\Delta\omega_{wr}$	219,2 deg/s	234,9 deg/s	307,9 deg/s	384,2 deg/s	363,8 deg/s
Volume	$2,34 \cdot 10^9$	$3,16 \cdot 10^9$	$1,30 \cdot 10^{11}$	$1,21 \cdot 10^{11}$	$1,04 \cdot 10^{11}$

TABLE 6.7 – Région d'attraction : conditions initiales maximales des variables d'état du véhicule et volume de l'ellipsoïde.

longitudinale aussi. Pour les correcteurs dynamiques, la maximisation de la région d'attraction vis-à-vis de ces non-linéarités produit des résultats mitigés. La région d'attraction avec les correcteurs PDU2 et PDUAW est plus large principalement dans la direction de y_L , mais elle est plus faible pour Δv et x_L . Le volume est plus faible avec les correcteurs PDU2 et PDUAW qu'avec PDU1, même si la différence n'est pas importante. L'utilisation de l'*anti-windup* pour la saturation des signaux de commande semble être moins satisfaisante que les correcteurs sans *anti-windup*, en termes de taille de la région d'attraction.

Les résultats montrés dans la Table 6.7 sont une estimation de la région d'attraction, qui peut être trop conservatrice, en raison de l'utilisation d'une fonction quadratique alors que la région d'attraction n'est peut être pas un ellipsoïde. De plus, la méthode adoptée ne permet pas la prise en compte des saturations asymétriques. Cependant, les résultats de la Table 6.7 sont utiles, car cette analyse formelle conduit à un premier critère de comparaison des correcteurs.

Estimation empirique

Une autre méthode pour l'estimation de la région d'attraction est une approche empirique. On fait des simulations avec une approche Monte Carlo et on estime la région d'attraction de la boucle fermée en vérifiant pour quelles conditions initiales les trajectoires du système convergent. En revanche, pour un système avec plus de trois variables d'état, l'affichage des résultats de simulation n'est pas possible. De plus, le temps nécessaire pour effectuer les simulations augmente de façon exponentielle avec le nombre de dimensions considérées. Pour ces raisons, dans la suite on utilisera une approche empirique pour l'estimation de la région d'attraction uniquement selon deux directions : la vitesse longitudinale et la vitesse latérale. On a choisi une variable associée à la dynamique longitudinale du véhicule et une à celle latérale, parce qu'on constate, d'après les résultats de la Table 6.7, qu'en général les variables de la dynamique longitudinale ou de la dynamique latérale sont liées entre elles ; par exemple si la région d'attraction est large dans la direction de la vitesse longitudinale Δv , on estime alors qu'elle sera large également dans la direction de l'erreur longitudinale x_L . De plus, on a préféré considérer deux variables de vitesse au lieu de deux variables de position. En effet, on estime qu'une condition initiale différente de zéro pour l'erreur de position longitudinale x_L , latérale y_L ou de l'angle de lacet $\Delta\psi$ est moins représentative d'un cas réel. Une manœuvre d'évitement sera toujours calculée à partir de la position actuelle du véhicule, correspondante à l'origine de la trajectoire de référence. Dans ce cas, on suppose que l'erreur initiale de position ou d'angle est probablement égale à zéro. Au contraire, une erreur de mesure ou d'estimation de vitesse initiale du véhicule est possible. En particulier, pour une manœuvre d'urgence, on suppose que la manœuvre d'évitement démarre avec une vitesse latérale du véhicule non nulle. Cette dernière pourrait ne pas être prise en compte par l'algorithme de planification des trajectoires ou être mal estimée. Pour estimer de façon empirique la région d'attraction, on a donc effectué des simulations avec un ensemble de 300 points de conditions initiales différentes de zéro pour l'écart de vitesse longitudinale Δv et latérale Δu par rapport à la trajectoire de référence. Cela a été fait pour les deux trajectoires de référence présentées

dans la section 6.2. Ces deux manœuvres ont en revanche une durée limitée, d'environ 2,7 s pour le changement de deux voies sans freinage et 3,5 s pour le changement d'une voie avec freinage. La région d'attraction ne dépend pas de la vitesse de convergence : si les trajectoires du système ne divergent pas et la convergence est observée après la fin de la trajectoire de référence, les conditions initiales appartiennent à la région d'attraction. En raison de cela, l'horizon temporel des trajectoires de référence a été étendu jusqu'à 30 s. Lorsque la manœuvre d'évitement est terminée, le véhicule est maintenu en ligne droite et à vitesse constante. Cependant, dans la suite on mettra en évidence les conditions initiales pour lesquelles le véhicule converge avant la fin de la trajectoire de référence. Une trajectoire converge si les valeurs absolues des erreurs x_L et y_L sont inférieures à 2 cm et la valeur absolue de l'erreur $\Delta\psi$ est inférieure à 1 deg.

Comme évoqué au début de cette section, les simulations ont été effectuées avec le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions. De plus, les entrées de commande sont saturées avec les valeurs montrées précédemment :

- $-30 \text{ deg} \leq \delta_f \leq 30 \text{ deg}$,
- $-3846 \text{ Nm} \leq \tau_{wf} \leq 946 \text{ Nm}$,
- $-1154 \text{ Nm} \leq \tau_{wr} \leq 284 \text{ Nm}$.

Les Figures 6.12-6.21 montrent les résultats des simulations avec des conditions initiales non nulles pour Δv et Δu pour les correcteurs polytopiques. On montre également l'ellipsoïde estimée avec une fonction de Lyapunov quadratique pour ces deux directions. En général, on observe que les régions d'attraction

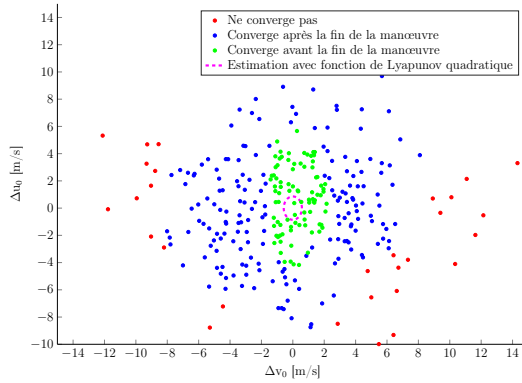


FIGURE 6.12 – Correcteur PSU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

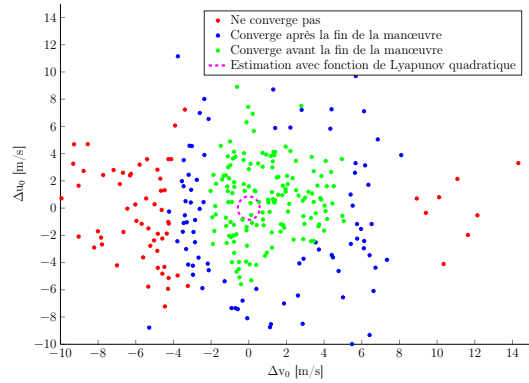


FIGURE 6.13 – Correcteur PSU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

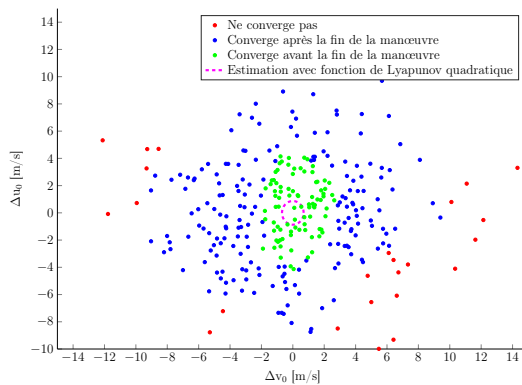


FIGURE 6.14 – Correcteur PSU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

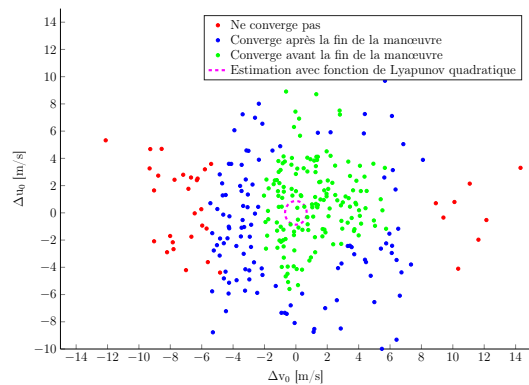


FIGURE 6.15 – Correcteur PSU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

obtenues empiriquement sont considérablement plus grandes que celles estimées au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique. Pour ces deux directions, les correcteurs stabilisent le véhicule autour des deux trajectoires de référence pour des conditions initiales de Δv et Δu de grande amplitude, telles que

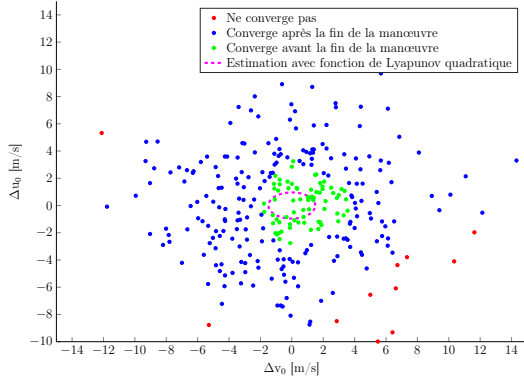


FIGURE 6.16 – Correcteur PDU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

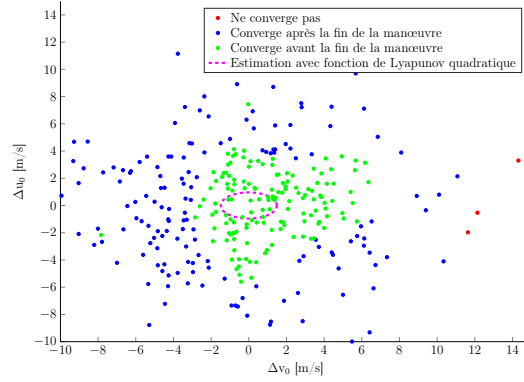


FIGURE 6.17 – Correcteur PDU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

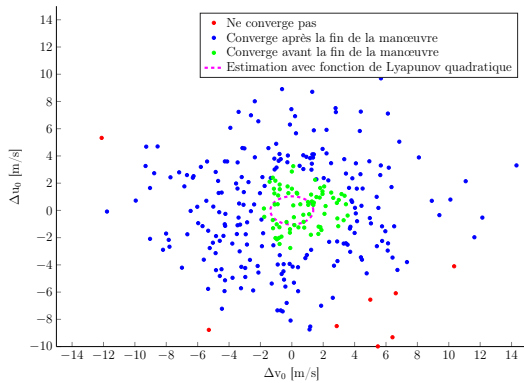


FIGURE 6.18 – Correcteur PDU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

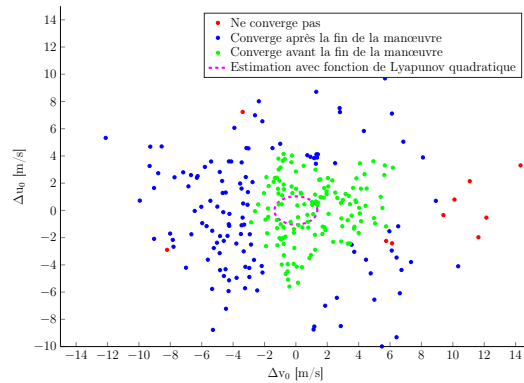


FIGURE 6.19 – Correcteur PDU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

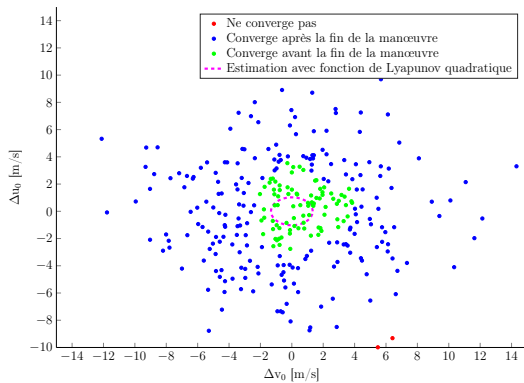


FIGURE 6.20 – Correcteur PDUAW, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

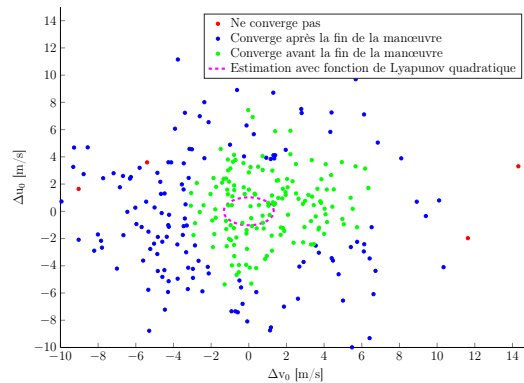


FIGURE 6.21 – Correcteur PDUAW, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction calculée par une méthode empirique.

les Figures 6.12-6.21 ne montrent pas clairement les limites des régions d'attraction. Des simulations en boucle fermée avec des conditions initiales encore plus importantes, pour trouver les limites des régions d'attraction, n'ont pas été effectuées. On estime que des conditions initiales plus importantes ne seraient pas représentatives des conditions de fonctionnement du système. Une vitesse latérale de 1 m/s est déjà très importante dans le cadre des véhicules routiers et les simulations effectuées ont largement dépassé ce niveau. De plus, la charge de calcul pour l'exécution des simulations est élevée et par conséquent les conditions initiales considérées ont été limitées. On constate d'après les Figures 6.12-6.21 que le

comportement des boucles fermées pour les deux directions Δv et Δu n'est pas symétrique par rapport à l'origine. Cela dépend de plusieurs aspects :

- le seuil de saturation des couples des roues n'est pas symétrique par rapport à zéro et cela explique qu'une valeur négative de $\Delta v(0)$ est plus difficile à corriger qu'une valeur positive,
- les trajectoires de référence ne sont pas en ligne droite, mais dans les deux cas le véhicule se déplace vers la gauche ; une vitesse latérale initiale $\Delta u(0)$ négative, c'est-à-dire un véhicule qui initialement se déplace vers la droite, la direction opposée à celle visée par la trajectoire de référence, est donc plus difficile à corriger.

Pour tous les correcteurs, l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les erreurs du système en boucle fermée par rapport à la trajectoire de référence convergent avant la fin de la trajectoire de référence a une taille plus faible pour la manœuvre d'évitement sans freinage. Cela est simplement dû au fait que cette trajectoire a une durée plus courte que la manœuvre avec freinage. Bien que les régions d'attraction estimées de façon empirique soient de taille considérablement supérieures que celles estimées avec une fonction de Lyapunov quadratique, les résultats de simulation confirment ce qu'on a déjà observé dans la Table 6.7. Pour cela on considère la capacité du correcteur à stabiliser le véhicule autour de la trajectoire de référence ainsi que celle de le faire avant la fin de la trajectoire. Les Figures 6.12-6.21 confirment que le correcteur PDU1 est en général le plus performant, que ce soit en termes de taille de la région d'attraction qu'en convergence avant la fin de la trajectoire de référence. En revanche, la différence entre les correcteurs dynamiques est très faible. Pour les correcteurs statiques on constate que le correcteur PSU2, qui prend en compte les saturations des actionneurs, a une région d'attraction, et un ensemble de conditions initiales pour lesquelles la convergence des signaux est assurée avant la fin de la manœuvre, de taille plus importante que celle obtenue avec le correcteur PSU1.

6.4.2 Simulations en boucle fermée

Dans cette section on montre en détail des résultats de simulation en boucle fermée avec les différents correcteurs proposés dans ce chapitre. On rappelle que les simulations sont faites avec le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions et que les entrées du système sont saturées. L'objectif des simulations est d'observer et comparer la performance des différents correcteurs avec des conditions initiales différentes de zéro. La première simulation présentée a été faite sur la trajectoire d'évitement sans freinage avec changement de deux voies présentée dans la section 6.2.1. Dans ce cas on considère ces conditions initiales différentes de zéro :

$$\Delta v(0) = 2 \text{ m/s} \qquad \Delta u(0) = -1 \text{ m/s} \qquad \Delta r(0) = -15 \text{ deg/s.}$$

Le véhicule débute la manœuvre d'évitement d'obstacle à une vitesse longitudinale supérieure à celle de référence, en tournant et en se déplaçant vers la droite, c'est-à-dire la direction opposée vers laquelle la trajectoire de référence cherche à déplacer le véhicule. La Figure 6.22 montre les signaux de commande calculés par les correcteurs et les erreurs de position et d'angle du véhicule par rapport à la trajectoire de référence. Les signaux de commande sont saturés et on souligne qu'ils correspondent à l'écart des entrées du système par rapport aux commandes nominales de la manœuvre d'évitement. Leurs seuils de saturation dépendent donc des entrées de référence et ils peuvent varier le long de la trajectoire. On constate que les grandeurs convergent avant la fin de la manœuvre avec les différents correcteurs et les erreurs de position et de lacet restent limitées malgré les conditions initiales élevées. Les erreurs de position et d'angle restent sensiblement dans le même ordre de grandeur pour l'ensemble de correcteurs. En revanche, la simulation montre que l'erreur longitudinale x_L maximale est plus importante pour le correcteur PSU1, qui semble aussi plus lent à converger dans ce cas. Le correcteur statique PSU2, qui prend en compte de façon explicite la saturation des commandes, est plus rapide et limite davantage les erreurs de position et de lacet. Les résultats avec les correcteurs PDU2 et PDUAW sont très proches, malgré le fait que le correcteur PDUAW utilise le *anti-windup* et que la saturation des commandes soit atteinte. Cela confirme que le choix de la matrice S_u fait pour la synthèse du correcteur PDU2, pour ne pas ajouter une composante de *anti-windup*, est bien adapté. D'après cette simulation on constate que l'erreur longitudinale x_L converge plus rapidement avec les correcteurs PDU2 et PDUAW qu'avec le correcteur PDU1. On observe que l'erreur de lacet $\Delta \psi$ est plus importante pour les trois correcteurs dynamiques. Cela signifie que l'angle de dérive du véhicule est légèrement plus important avec les correcteurs dynamiques. Ceci peut être observé dans la Figure 6.23, où l'angle de dérive est comparé entre les résultats obtenus avec les correcteurs PSU2 et PDU1. On estime que l'erreur d'angle de lacet est moins prioritaire que les erreurs de position x_L et y_L dans le cadre d'une manœuvre d'urgence. Dans ces conditions le glissement latéral du véhicule (le *drift*

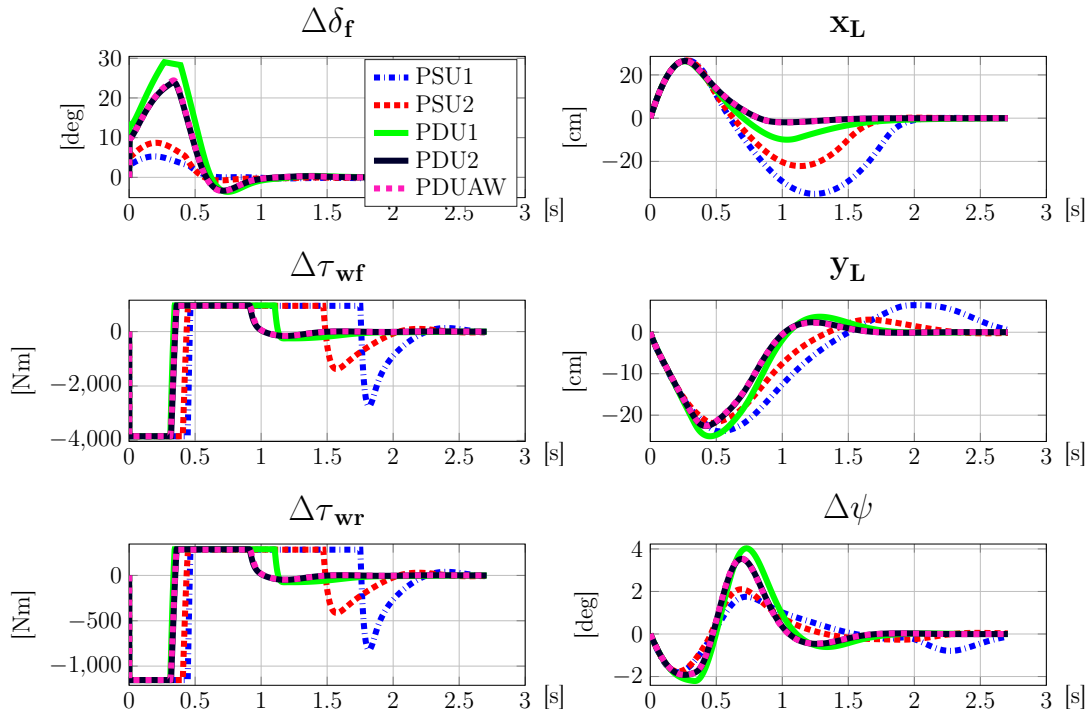


FIGURE 6.22 – Manœuvre d’évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.

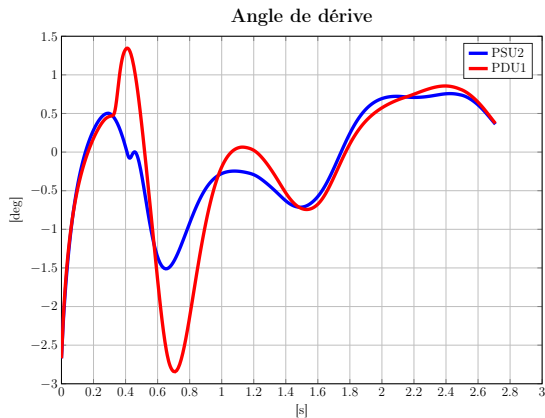


FIGURE 6.23 – Manœuvre d’évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : angle du véhicule, correcteur PDU1.

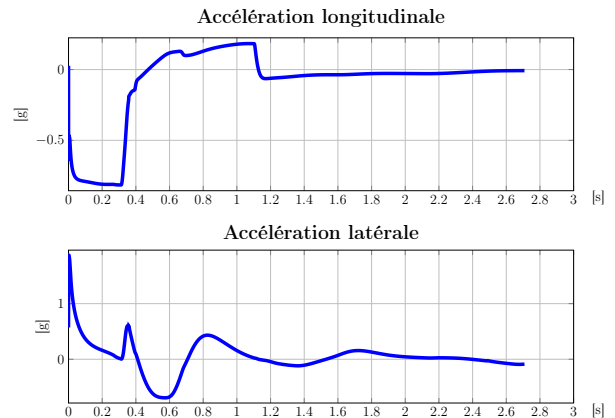


FIGURE 6.24 – Manœuvre d’évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : accélération du véhicule, correcteur PDU1.

en anglais) est un comportement acceptable, au contraire des manœuvres de confort. Les accélérations longitudinale et latérale du véhicule dépassent le seuil de 0,3 g et les forces des pneus saturent le long de cette manœuvre, comme il est possible de voir respectivement dans les Figures 6.23 et 6.25 pour le correcteur PDU1. La simulation concerne donc une manœuvre à haute dynamique. Pour ne pas compliquer, ces données ne sont pas présentées pour les simulations avec les autres correcteurs, mais il est souligné que dans ces cas aussi les limites d’accélération et de saturation des forces des pneus sont atteintes. Il est donc constaté que les correcteurs développés stabilisent le véhicule dans des conditions de haute dynamique, pour lesquelles le comportement des forces des pneus est non-linéaire.

On considère à présent une autre simulation correspondante à une trajectoire d’évitement avec freinage présentée dans la section 6.2.1. Cette manœuvre a une durée supérieure à la précédente, on considère donc une condition initiale plus élevée pour la vitesse longitudinale :

$$\Delta v(0) = 5 \text{ m/s}$$

$$\Delta u(0) = -1 \text{ m/s}$$

$$\Delta r(0) = -15 \text{ deg/s.}$$

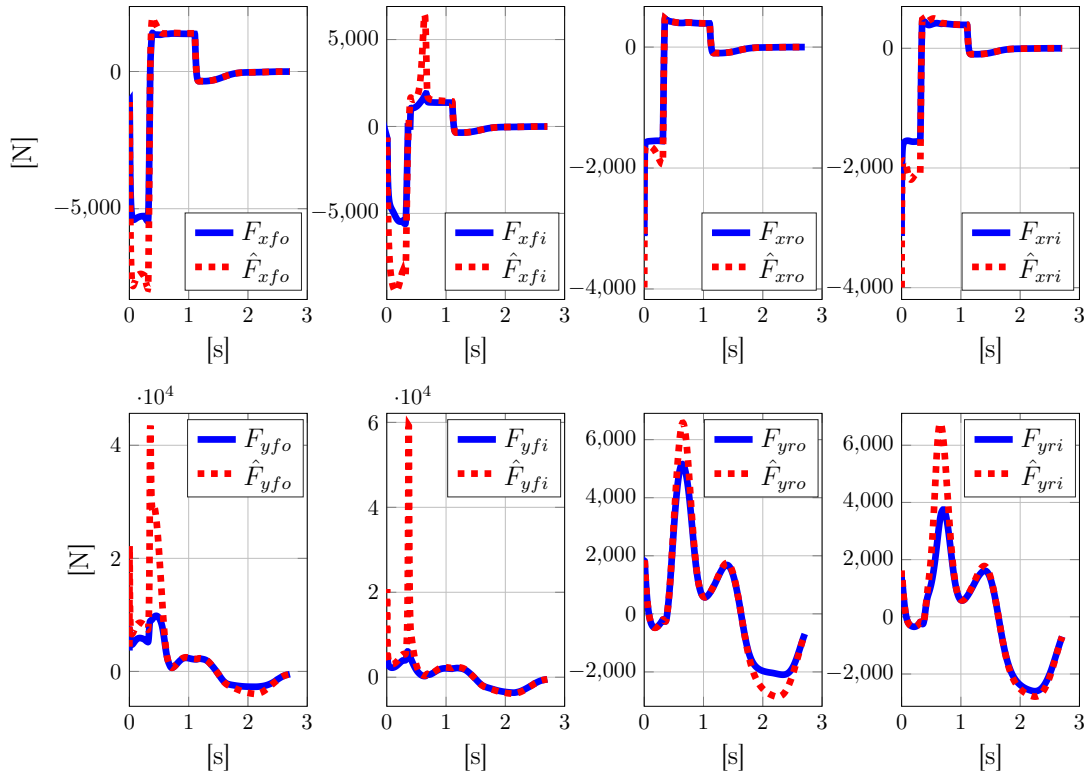


FIGURE 6.25 – Manœuvre d'évitement sans freinage avec conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur PDU1.

La Figure 6.26 montre les commandes, les erreurs de position et de lacet avec les différents correcteurs au cours de ce scénario. Dans ce cas également toutes les lois de commande conduisent à la convergence des

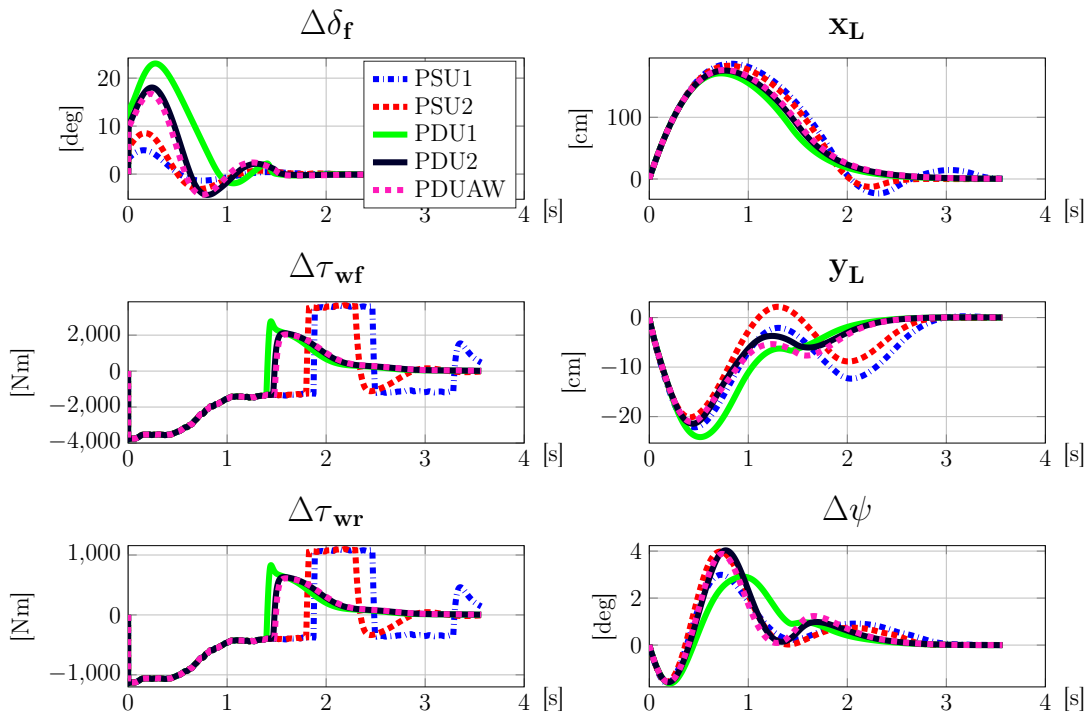


FIGURE 6.26 – Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.

grandeurs régulées avant la fin de la manœuvre d'évitement. La différence des erreurs de position et de

lacet entre les correcteurs est moins marquée. On observe néanmoins qu'avec les correcteurs statiques elles oscillent davantage, en particulier l'erreur latérale y_L . Ce scénario appartient également aux manœuvres à haute dynamique, comme il est possible de constater dans la Figure 6.27 pour le correcteur PDU1.

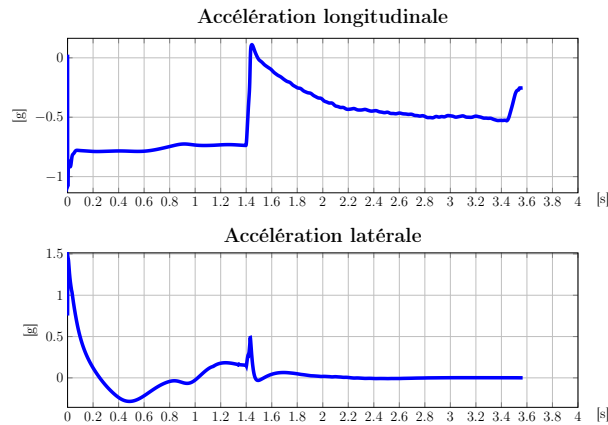


FIGURE 6.27 – Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : accélération du véhicule, correcteur PDU1.

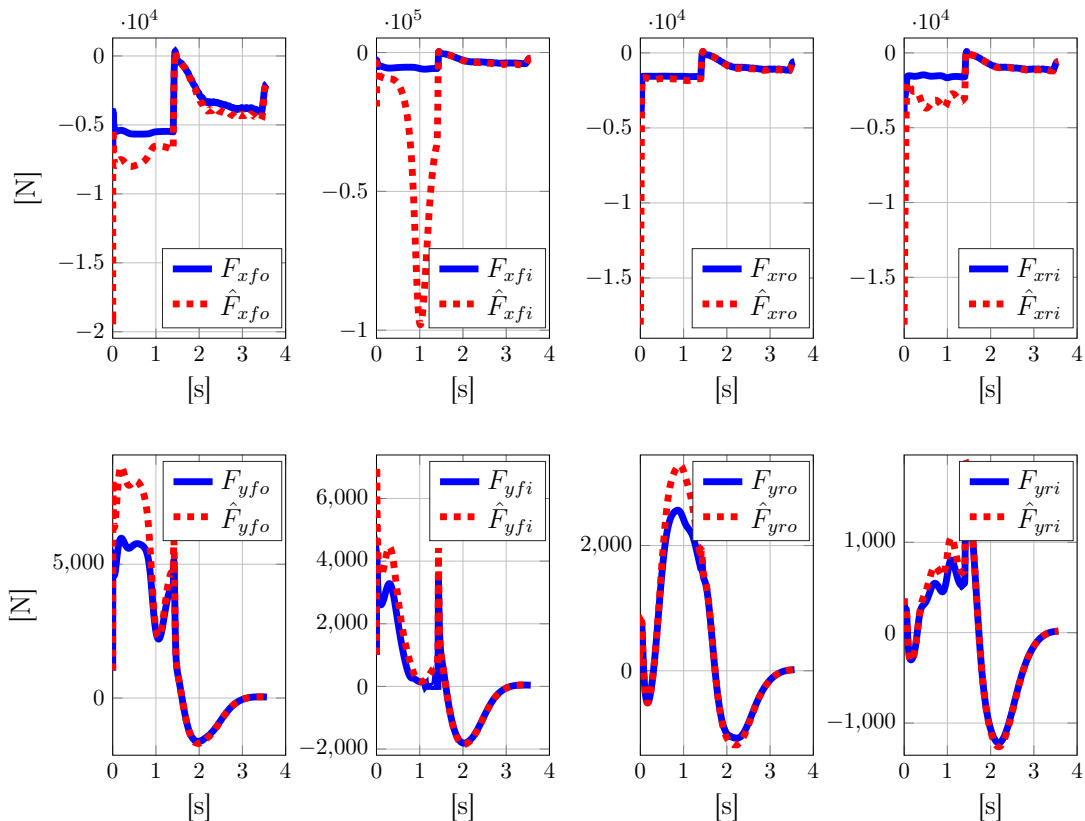


FIGURE 6.28 – Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur PDU1.

la Figure 6.28 il est montré que dans ce cas également les forces des pneus atteignent leurs valeurs de saturation. En particulier, il est visible que la saturation des pneus implique principalement les forces longitudinales. On souligne que, dans ce cas, la commande nominale de la trajectoire de référence applique un couple de freinage pour ralentir le véhicule, ainsi les forces des pneus sont déjà plus proches du niveau de saturation. La force longitudinale supplémentaire que les pneus peuvent produire en freinage est alors plus limitée que dans une trajectoire de référence sans freinage. Malgré cela, les correcteurs assurent la convergence des différentes grandeurs avec une vitesse initiale considérablement supérieure à celle de la

trajectoire de référence ; on rappelle que $\Delta v(0)$ est égal à 5 m/s.

Les résultats des simulations analysées dans cette section nous montrent que les correcteurs développés stabilisent les trajectoires du véhicule autour des différentes trajectoires de référence. Cela est possible malgré des conditions initiales élevées et la saturation des signaux de commande et des forces des pneus.

6.5 Conclusions sur la synthèse avec l'approche LPV polytopique

Dans ce chapitre, un modèle linéarisé de la dynamique du véhicule a été formulé selon une représentation qLPV polytopique et il a été exploité pour la synthèse des correcteurs pour la stabilisation du véhicule autour des trajectoires de référence. Les paramètres variables du domaine polytopique contiennent un ensemble varié de trajectoires de référence. Plus particulièrement, il a été défini à partir de deux trajectoires de référence différentes, un changement de deux voies sans freinage et un changement de voie avec freinage. Le domaine polytopique contient toutes les trajectoires d'évitement avec et sans freinage dont les variables d'état du modèle sont bornés par les deux trajectoires de référence considérées. Le modèle polytopique a été utilisé pour la synthèse de cinq correcteurs, dont un résumé est présenté dans la Table 6.8. La synthèse des correcteurs a été faite au moyen de la résolution de problèmes d'optimisation avec contraintes LMI. Les estimations analytique et empirique de la région d'attraction et l'analyse des simulations du système en boucle fermée avec les différents correcteurs ont été présentées. Elles montrent que les cinq correcteurs développés stabilisent les trajectoires du véhicule autour des deux trajectoires de référence utilisées, malgré des conditions initiales élevées et la saturation des signaux de commande et des forces des pneus. En général, l'analyse montre que les correcteurs dynamiques conduisent à une région d'attraction de taille plus grande que celles obtenues avec les correcteurs statiques et convergent plus rapidement. En revanche, l'écart de taille des régions d'attraction entre les deux types de correcteurs est faible et les correcteurs statiques ont aussi une bonne performance. Ils représentent donc une option facile à implémenter sur

	Correcteur	Contraintes considérées
Correcteurs statiques	PSU1	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI
	PSU2	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande sans anti-windup
Correcteurs dynamiques	PDU1	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI
	PDU2	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande sans anti-windup
	PDUAW	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande avec anti-windup

TABLE 6.8 – Résumé des correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique.

l'ECU d'un véhicule, car ils ne demandent pas la discrétisation du correcteur. La prise en compte de façon explicite des saturations des signaux de commande pour la synthèse des correcteurs statiques a été très utile pour agrandir la région d'attraction en boucle fermée. Cette approche produit des résultats mitigés pour la synthèse des correcteurs LPV dynamiques, pour lesquels les améliorations apportées par la maximisation de la région d'attraction vis-à-vis de ces non-linéarités sont moins évidentes. Enfin, les évolutions des commandes et des erreurs sont très similaires avec les correcteurs PDU2 et PDUAW. L'utilisation d'une composante de *anti-windup* pour les saturations de signaux de commande ne semble donc pas nécessaire.

Dans le chapitre 8, d'autres simulations du système en boucle fermée, en utilisant le modèle à haute représentativité MADA, seront présentés. Ces simulations permettront de montrer la robustesse des correcteurs vis-à-vis des incertitudes paramétriques et de modélisation. De plus, on montrera également le rejet des perturbations dues à la pente et au dévers de la route. Avant cela, la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV *grid-based* sera explorée dans le chapitre 7.

SYNTHÈSE DES CORRECTEURS - APPROCHE LPV GRID-BASED

Sommaire

7.1	Mise en forme du modèle qNLPV <i>grid-based</i>	132
7.2	Synthèse des correcteurs	136
7.2.1	Correcteurs statiques	138
7.2.2	Correcteurs dynamiques	141
7.3	Analyse en boucle fermée	147
7.3.1	Région d'attraction en boucle fermée	147
7.3.2	Simulations en boucle fermée	150
7.4	Conclusion sur la synthèse avec l'approche LPV <i>grid-based</i>	154

Dans ce chapitre, la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV *grid-based* est abordée. Comme pour l'approche LPV polytopique présentée le chapitre 6, on utilise également dans ce cas un modèle variable dans le temps de la dynamique du véhicule, obtenu dans le chapitre 4 à partir de la linéarisation du modèle non-linéaire bicyclette sans suspensions, pour obtenir un modèle qNLPV *grid-based*. En revanche, le modèle variable dans le temps utilisé dans ce chapitre diffère de celui utilisé dans le chapitre 6, car il permet de représenter les saturations des forces des pneus par des non-linéarités de secteur. Pour l'approche LPV *grid-based*, les variables d'état et les entrées du véhicule pourront être utilisées en tant que paramètres variables du modèle qNLPV. Le domaine de variation de ces paramètres a été défini de sorte à contenir les valeurs maximales et minimales des évolutions des variables d'état du véhicule le long des deux trajectoires de référence qui ont été présentées dans la section 6.2 :

- une manœuvre avec changement de deux voies sans freinage,
- une manœuvre avec changement d'une voie avec freinage.

Dans ce cas aussi le modèle qNLPV peut représenter la dynamique du modèle linéarisé le long de ces deux trajectoires. De plus, il peut représenter toutes les trajectoires dans l'intervalle de valeurs maximales et minimales des évolutions des variables d'état du véhicule des deux manœuvres d'évitement considérées. La stabilité et la performance de la boucle fermée avec les correcteurs développés à partir de ce modèle qNLPV sera alors garantie pour cet ensemble de trajectoires. Deux correcteurs statiques et quatre correcteurs LPV dynamiques seront développés. Pour leur synthèse, on utilisera la commande robuste et optimale multi-objectif, en résolvant des problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. La représentation des saturations des forces des pneus par des non-linéarités de secteur en entrée du système permettra de considérer de façon explicite ces saturations pour la synthèse des correcteurs.

Dans la section 7.1, la procédure utilisée pour définir le modèle qNLPV à partir du modèle linéarisé variable dans le temps est présentée. Dans la section 7.2, la synthèse des correcteurs est abordée en détail, en justifiant les choix effectués. Le comportement en boucle fermée avec les différents correcteurs est analysé dans la section 7.3. Une estimation, avec une approche Monte Carlo, de la région d'attraction pour les directions de la vitesse longitudinale et latérale du véhicule est proposée. De plus, des résultats

de simulation sont présentés en détail. Le chapitre est enfin terminé avec des conclusions sur la synthèse des correcteurs au moyen de l'approche LPV *grid-based*, dans la section 7.4.

Comme évoqué dans le chapitre 6, dans ce chapitre également on parlera de norme H_∞ et de norme H_2 -généralisée du système en boucle fermée. Il est rappelé que dans le cadre des modèles LPV il s'agit d'un abus de langage.

7.1 Mise en forme du modèle qNLPV *grid-based*

Dans cette section on discute de formalisation qNLPV *grid-based* du modèle linéarisé de la dynamique véhicule. Pour cela, le modèle linéarisé (4.33), présenté dans le chapitre 4, est exploité pour la définition du modèle LPV. On rappelle que ce modèle est exprimé en fonction des forces normales et des forces saturées des pneus, bouclées sur la dynamique du système comme on peut observer sur la Figure 7.1 où $\underline{\phi}(\Delta \underline{h})$ est une fonction seuil. On préfère exprimer la dynamique du modèle linéarisé par cette fonction, au lieu de la fonction de saturation, afin d'utiliser la condition de secteur généralisée (voir l'annexe A) pour la définition des conditions de la stabilité de la boucle fermée et des conditions pour la synthèse des correcteurs. Les étapes pour obtenir la dynamique du modèle linéarisé exprimée par la fonction seuil au lieu de la fonction de saturation sont présentées dans la section 4.3.1. La présence des forces saturées en entrée du modèle du

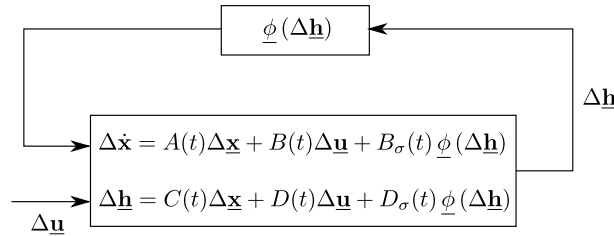


FIGURE 7.1 – Modèle linéarisé avec forces saturées bouclées en entrée.

système sera utile pour la synthèse des correcteurs. Dans la section 7.2 on montrera que cela permettra d'ajouter des conditions aux problèmes d'optimisation pour réduire l'effet de la saturation des forces des pneus sur la stabilité de la boucle fermée. On rappelle que pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique, l'expression (4.40) du modèle linéarisé avait été choisie. Dans ce cas, les forces saturées n'apparaissent pas en entrée de la dynamique du système et il n'est donc pas possible de les prendre en compte de façon explicite pour la synthèse des correcteurs. En revanche, comme évoqué dans le chapitre 6, la représentation d'état exprimée par (4.40) dépend uniquement de deux matrices variables dans le temps, au lieu de six, comme pour le modèle (4.33). Cela est donc un avantage pour la sélection des paramètres variables du modèle qLPV polytopique, par un sous-ensemble des éléments variables dans le temps du modèle linéarisé. Grâce à ce choix, les matrices sont affines par rapport aux paramètres du modèle LPV. En utilisant l'approche LPV *grid-based*, les matrices de la représentation d'état ne sont pas nécessairement affines dans les paramètres variables. Il est alors possible d'utiliser comme paramètres les variables d'état et les entrées du système. Par conséquent, un nombre élevé d'éléments variables dans le temps des matrices de la représentation d'état¹ ne représente plus un problème pour la définition du modèle LPV, parce qu'ils ne sont plus utilisés comme paramètres variables du modèle LPV. Dans ce cas, il est alors possible d'utiliser le modèle linéarisé exprimé par (4.33). Par simplicité, la saturation des forces normales aux roues a été négligée pour la synthèse des correcteurs. En effet, la saturation de la force normale d'une roue est atteinte si toute la charge ou au contraire si aucune charge n'est présente sur la roue. Ce sont des cas plus théoriques que réels pour un modèle bicyclette, où le transfert de charge entre les deux roues d'un essieu n'existe pas. Le modèle variable dans le temps considéré est donc exprimé par :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\underline{x}} &= A(t) \Delta \underline{x} + B_w(t) \Delta \underline{w} + B_u(t) \Delta \underline{u} + B_h(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{h}) \\ \Delta \underline{h} &= C_h(t) \Delta \underline{x} + D_{hw}(t) \Delta \underline{w} + D_{hu}(t) \Delta \underline{u} + D_{hh}(t) \underline{\phi}(\Delta \underline{h}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

1. Il est rappelé qu'ils dépendent dans le temps en raison de leur dépendance par rapport aux variables d'état et aux entrées du véhicule le long de la trajectoire de référence.

où $\forall t A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_w(t) \in \mathbb{R}^{n \times m_w}$, $B_u(t) \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $B_h(t) \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$, $C_h(t) \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $D_{hw}(t) \in \mathbb{R}^{p_h \times m_w}$, $D_{hu}(t) \in \mathbb{R}^{p_h \times m_u}$, $D_{hh}(t) \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ et :

$$\Delta \underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta v \\ \Delta u \\ \Delta r \\ x_L \\ y_L \\ \Delta \psi \\ \Delta \omega_{wf} \\ \Delta \omega_{wr} \end{bmatrix} \quad \Delta \underline{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_x \\ \Delta \theta_y \end{bmatrix} \quad \Delta \underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Delta \delta_f \\ \Delta \tau_{wf} \end{bmatrix} \quad \Delta \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} \Delta F_{xf} \\ \Delta F_{xr} \\ \Delta F_{yf} \\ \Delta F_{yr} \end{bmatrix}.$$

Les matrices du modèle (7.1), présentées dans l'annexe C, dépendent des variables d'état et des entrées du système, plus particulièrement de :

- l'accélération longitudinale \dot{v} ,
- la vitesse longitudinale v ,
- la vitesse latérale u ,
- la vitesse de lacet r ,
- l'angle de lacet ψ ,
- la vitesse de rotation des roues ω_{wf} et ω_{wr} ,
- l'angle de braquage δ_f .

Ces variables peuvent être utilisées comme paramètres variables du modèle qNLPV *grid-based*. En revanche, huit reste une dimension élevée pour le vecteur des paramètres $\underline{\mathbf{p}}$. En effet, le nombre de points de la grille augmente de manière exponentielle avec le nombre des paramètres variables. On s'est donc intéressé à réduire le nombre de paramètres pour limiter les points de la grille et simplifier la synthèse des correcteurs. Pour cela on approche la vitesse de rotation des roues par la vitesse correspondante lorsque aucun glissement longitudinal est présent. Cela veut dire que la vitesse de rotation des deux roues est calculée par :

$$\omega_{wf} = \omega_{wr} = \frac{v}{r_e}. \quad (7.2)$$

Pour la synthèse des correcteurs, on a considéré les deux trajectoires de référence présentées dans la section 6.2 :

- une manœuvre d'évitement sans freinage, qui correspond à un changement de deux voies à 70 km/h,
- une manœuvre d'évitement avec freinage, qui correspond à un changement d'une voie avec un ralentissement du véhicule d'environ 85 km/h à 35 km/h.

Dans les Figures 7.2 et 7.3, l'approximation (7.2) est comparée à la vitesse de rotation des roues. On constate qu'elle est justifiée, même pour la trajectoire avec freinage, où le glissement longitudinal est nécessairement présent, en raison du ralentissement du véhicule. De cette façon on réduit à six le nombre de paramètres variables constituant le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$:

$$\underline{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ v \\ u \\ r \\ \psi \\ \delta_f \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Les intervalles de variation des variables d'état et des entrées du système le long des deux trajectoires de référence ont été considérés pour définir les limites des paramètres variables du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$. Ces limites

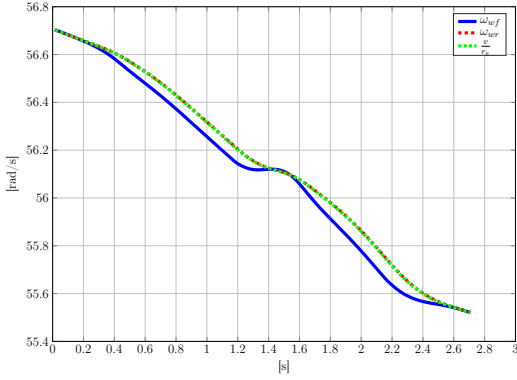


FIGURE 7.2 – Approximation de la vitesse de rotation des roues pour la manœuvre d'évitement sans freinage.

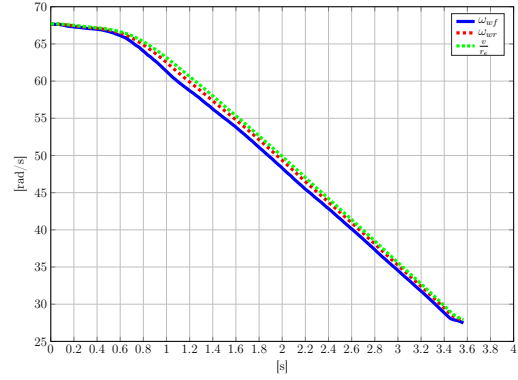


FIGURE 7.3 – Approximation de la vitesse de rotation des roues pour la manœuvre d'évitement avec freinage.

Évitement sans freinage			Évitement avec freinage		
Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i	Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i
\dot{v}	-0,256 m/s ²	0 m/s ²	\dot{v}	-5,225 m/s ²	0 m/s ²
v	19,075 m/s	19,482 m/s	v	9,581 m/s	23,261 m/s
u	-0,276 m/s	0,284 m/s	u	-0,260 m/s	0,035 m/s
r	-0,289 rad/s	0,245 rad/s	r	-0,152 rad/s	0,177 rad/s
ψ	0 rad	0,262 rad	ψ	0 rad	0,145 rad
δ_f	-0,047 rad	0,038 rad	δ_f	-0,031 rad	0,021 rad

TABLE 7.1 – Limites de variation des paramètres le long des deux trajectoires de référence.

sont présentées dans la Table 7.1 pour les deux trajectoires de référence. Comme pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique, dans ce cas également on cherche des correcteurs permettant de contrôler le véhicule le long des deux trajectoires de référence. Par conséquent, les limites extrêmes parmi les deux manœuvres sont utilisées pour la définition du modèle qNLPV *grid-based*. Une exception est faite pour l'angle de lacet ψ : on considère la borne supérieure en valeur absolue et on l'utilise pour établir un intervalle de variation symétrique par rapport à zéro. On constate dans la Table 7.1 que la limite inférieure pour ψ est zéro pour les deux trajectoires de référence. Cela est dû au fait que le véhicule se déplace vers la gauche dans les deux manœuvres. En revanche, on a observé que pour le modèle qNLPV de synthèse il est préférable d'utiliser un intervalle de variation de ψ représentant aussi un véhicule qui tourne vers la droite. En effet, selon les conditions initiales ou les perturbations en entrée du système, le correcteur doit considérer des angles de lacet positifs et négatifs. Finalement le domaine de variation des paramètres variables pour le modèle qNLPV utilisé pour la synthèse des correcteurs est présenté dans la Table 7.2. Le modèle qNLPV *grid-based* est donc exprimé par :

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\mathbf{x}} &= A(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{x} + B_w(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{w} + B_u(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{u} + B_h(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \\
 \Delta \mathbf{h} &= C_h(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{x} + D_{hw}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{w} + D_{hu}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{u} + D_{hh}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h})
 \end{aligned}
 \tag{7.4}$$

où le vecteur des paramètres est défini par (7.3) et son domaine de variation est présenté dans la Table 7.2. Avec l'approche LPV *grid-based*, les modèles LTI obtenus en figeant les valeurs des paramètres variables sur un ensemble de points du domaine de variation de $\underline{\mathbf{p}}$ sont utilisés pour définir une grille. Une pratique largement employée pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV *grid-based*, cf. [WU 1995](#), est d'utiliser deux grilles différentes :

- une grille de synthèse, moins dense,
- une grille de validation, beaucoup plus dense que la grille de synthèse.

Une façon de procéder est la suivante :

- synthèse du correcteur avec la grille la moins dense possible,
- si la solution est validée sur la grille plus dense le correcteur est retenu,
- sinon on crée une nouvelle grille de synthèse plus dense que la précédente et la procédure est répétée.

Il est possible d’initialiser le processus en utilisant comme grille de synthèse uniquement les sommets de l’hypercube contenant le domaine de variation de \underline{p} . Cette approche est représentée par la Figure 7.4. Une grille de synthèse de 128 points a été utilisée pour la synthèse des correcteurs dans la section 7.2.

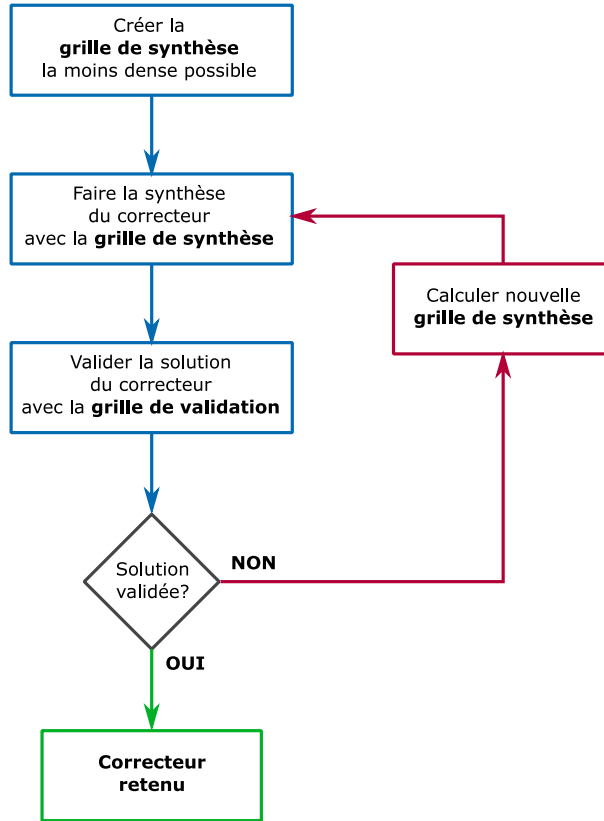


FIGURE 7.4 – Processus de synthèse du correcteur avec l’approche LPV *grid-based*.

Les valeurs considérées pour chaque paramètre variable sont indiquées dans la Table 7.3 et toutes les combinaisons possibles des valeurs des six paramètres ont été considérées pour créer la grille. On constate que pour tous les paramètres, sauf la vitesse longitudinale v , seules les valeurs extrêmes du domaine de variation ont été considérées. Pour la vitesse longitudinale v , il a été observé qu’un plus grand nombre de valeurs était nécessaire pour que la solution trouvée soit vérifiée avec la grille de validation. Douze valeurs uniformément distribuées par paramètre variable sur son domaine de variation ont été considérées pour la grille de validation. Dans ce cas également, toutes les combinaisons possibles des valeurs des paramètres constituent les points de la grille, qui contient donc environ $3 \cdot 10^6$ points.

Paramètre	\underline{p}_i	\bar{p}_i
\dot{v}	-5,225 m/s ²	0 m/s ²
v	9,581 m/s	23,261 m/s
u	-0,276 m/s	0,284 m/s
r	-0,289 rad/s	0,245 rad/s
ψ	-0,262 rad	0,262 rad
δ_f	-0,047 rad	0,038 rad

TABLE 7.2 – Limites de variation des paramètres pour le modèle qNLPV *grid-based*.

Paramètre	Valeurs de la grille
\dot{v}	$[-5, 2251, 0]$
v	$[9, 5808, 14, 1409, 18, 7011, 23, 261]$
u	$[-0, 2761, 0, 2840]$
r	$[-0, 2887, 0, 2448]$
ψ	$[-0, 2618, 0, 2618]$
δ_f	$[-0, 0469, 0, 0381]$

TABLE 7.3 – Valeurs des paramètres variables utilisées pour la grille de synthèse.

7.2 Synthèse des correcteurs

La synthèse des correcteurs est abordée dans cette section. On considère le modèle qNLPV (7.4) auquel on ajoute les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{c}}$ et les sorties mesurées $\underline{\mathbf{y}}$:

$$\begin{aligned}
 \Delta \dot{\mathbf{x}} &= A(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{x} + B_w(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{w} + B_u(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{u} + B_h(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \\
 \Delta \mathbf{h} &= C_h(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{x} + D_{hw}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{w} + D_{hu}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \mathbf{u} + D_{hh}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \\
 \underline{\mathbf{c}} &= C_c \Delta \mathbf{x} \\
 \underline{\mathbf{y}} &= \Delta \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

où le vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ est défini par (7.3) avec

$$\underline{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ \Delta \psi \end{bmatrix}.$$

Dans la suite, la synthèse des correcteurs statiques et des correcteurs dynamiques est abordée sous la forme de problèmes d'optimisation sous des contraintes LMI. Comme pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique, la résolution de ces problèmes d'optimisation est réalisée avec la *toolbox* YALMIP de MATLAB, cf. LOFBERG 2004, avec le solver Mosek, cf. ANDERSEN et ANDERSEN 2000. On fait référence aux résultats présentés dans l'annexe A pour les conditions LMI pour la synthèse des correcteurs.

L'approche LPV *grid-based* permet de prendre en compte des bornes sur la vitesse de variation des paramètres variables, à travers l'utilisation d'une fonction de Lyapunov dépendante elle-même des paramètres. Cette méthode permet de réduire le conservatisme des solutions trouvées, mais elle n'a pas été prise en compte dans ces travaux. Elle représente donc une perspective future intéressante.

Pour la synthèse des correcteurs on considérera le système augmenté présenté en Figure 7.5. Comme évoqué précédemment (chapitres 5 et 6), les filtres $W_e(s)$, $W_u(s)$ et $W_d(s)$, choisis pour régler le comportement fréquentiel de la boucle fermée, sont ajoutés et le système augmenté $G_a(s)$ est utilisé pour la synthèse des correcteurs. Dans ce cas, comme pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique,

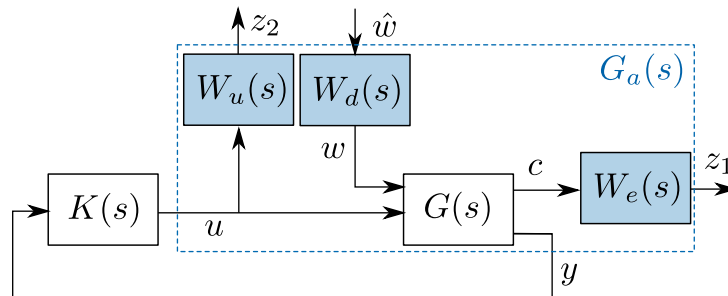


FIGURE 7.5 – Système augmenté pour la synthèse du correcteur.

l'entrée de référence est nulle. Les filtres $W_e(s)$ et $W_u(s)$ suffisent à régler les deux relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \mathbf{w}$ et les sorties contrôlées \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 . Les filtres $W_e(s)$ et $W_u(s)$ choisis sont caractérisés par les fonctions :

$$W_e(s) = \begin{bmatrix} W_{e11}(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_{e22}(s) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.6a)$$

$$W_u(s) = \begin{bmatrix} W_{u11}(s) & 0 \\ 0 & W_{u22}(s) \end{bmatrix} \quad (7.6b)$$

avec :

$$W_{e11}(s) = \frac{0,8333s + 8,021}{s + 4,01} \quad (7.6c)$$

$$W_{u11}(s) = \frac{2s + 3,848}{s + 11,54} \quad (7.6e)$$

$$W_{e22}(s) = \frac{0,8333s + 8,317}{s + 3,176} \quad (7.6d)$$

$$W_{u22}(s) = \frac{2s + 23,09}{s + 69,26} \quad (7.6f)$$

et leurs diagrammes de Bode sont représentés dans la Figure 7.6. Les filtres (7.6) sont légèrement différents

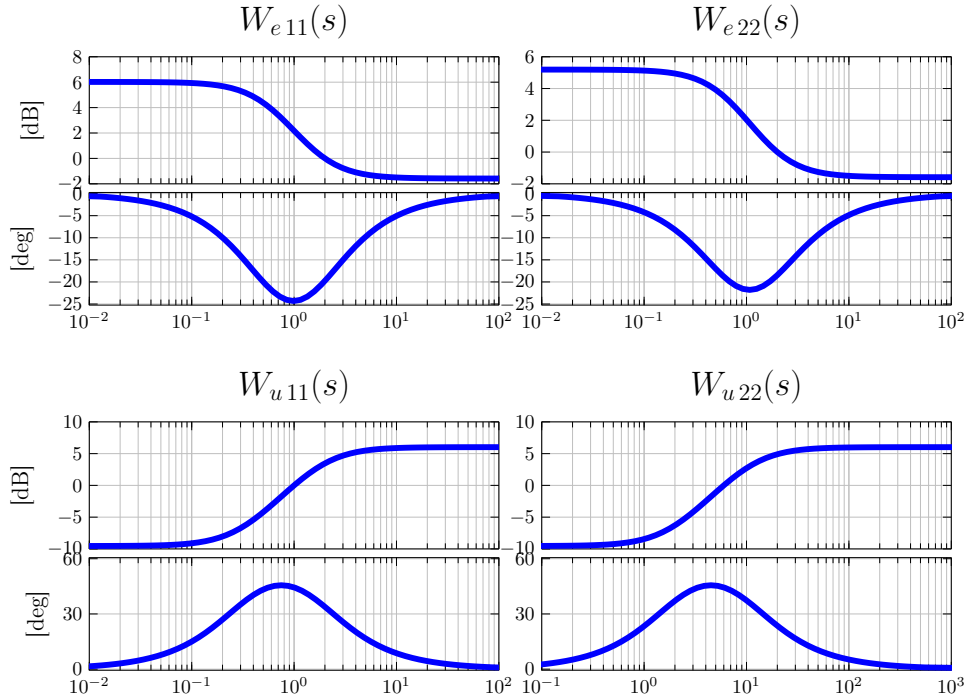


FIGURE 7.6 – Diagramme de Bode des filtres de pondération.

des filtres exprimés par (6.8) et utilisés pour la synthèse des correcteurs avec l'approche LPV polytopique. Il n'y a pas de différence significative, mais ils ont été ajustés pour améliorer la performance de la boucle fermée. La différence principale est que le filtre $W_{e33}(s)$ est un gain constant et égal à 1 dans ce cas. Cela permet de réduire la norme H_∞ de la boucle fermée et il a été estimé que le rejet des perturbations sur l'erreur de lacet $\Delta\psi$ n'est pas prioritaire dans des manœuvres d'évitement d'obstacle que sur l'erreur longitudinale x_L et latérale y_L . Il est important de remarquer que dans ce cas également :

- les perturbations sur les erreurs de position x_L et y_L sont rejetées majoritairement jusqu'à 1 Hz,
- la bande passante pour le signal de commande $\Delta\delta_f$ est de 1 Hz, pour ne pas solliciter les non-linéarités présentes dans la dynamique de la direction,
- la bande passante pour le signal de commande $\Delta\tau_{wf}$ est de 6 Hz, environ la moitié de celle d'une machine électrique.

7.2.1 Correcteurs statiques

La synthèse des correcteurs statiques est abordée dans cette section, la commande correspond au retour d'état :

$$\Delta \underline{\mathbf{u}} = K \underline{\mathbf{y}} = K \Delta \underline{\mathbf{x}} \quad (7.7)$$

où la matrice $K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ est la matrice de gain statique recherchée. La représentation en boucle fermée est :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= (A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u(\underline{\mathbf{p}}) K) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B_w(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + B_h(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \Delta \underline{\mathbf{h}} &= (C_h(\underline{\mathbf{p}}) + D_{hu}(\underline{\mathbf{p}}) K) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{hw}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + D_{hh}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \underline{\mathbf{z}} &= C_z \Delta \underline{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Premier cas : correcteur statique H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles

Un correcteur statique H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles est initialement considéré. Il s'agit du même type de correcteur que le correcteur PSU1, obtenu avec l'approche LPV polytopique (déterminé au moyen du problème d'optimisation (6.12)), qui :

- minimise la norme H_∞ des relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{z}}_1$ et $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8), pour en maximiser la robustesse et le rejet des perturbations,
- minimise la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8), pour réduire la possibilité de saturation des signaux de commande,
- placement des pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation du vecteur de paramètres $\underline{\mathbf{p}}$ dans la région LMI \mathbb{D} .

Il est donc intéressant de calculer le même correcteur avec les deux approches LPV, polytopique et *grid-based*, afin de les comparer. Une région LMI \mathbb{D} , comme celle représentée dans la Figure 7.7, caractérisée par les paramètres suivants, est utilisée :

- $\bar{\lambda} = -1,5$,
- $\underline{\lambda} = -2000$,
- $\theta = 0,5236$ rad.

On constate que dans ce cas la région LMI est plus grande que celle utilisée pour le correcteur PSU1. Ce choix est nécessaire pour trouver une solution du correcteur. Le paramètre $\underline{\lambda}$ est plus faible, par rapport à la région LMI utilisée pour la synthèse des correcteurs statiques PSU1 et PSU2, où $\underline{\lambda} = -500$, donc les dynamiques rapides de la boucle fermée sont moins limitées. L'amortissement minimal est de 0,5 au lieu de 0,6. En revanche, le paramètre $\bar{\lambda}$ n'a pas changé. Les conditions LMI pour la synthèse de ce correcteur

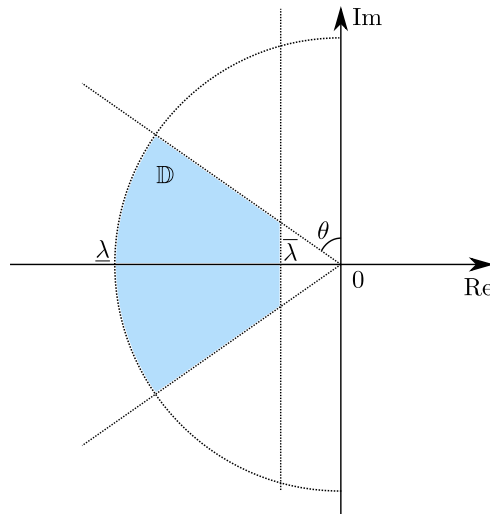


FIGURE 7.7 – Région LMI pour la synthèse du correcteur.

sont les mêmes que celles présentées dans le chapitre 6, exprimées par (6.10a)-(6.10d). Dans ce cas elles

seront évaluées aux N_g points de la grille de synthèse, au lieu des N_p sommets du polytope. Pour simplifier la lecture on les rappelle également dans ce chapitre. On appelle C_z , D_{zu} , C_{z_2} et D_{z_2u} les matrices telles que :

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}^T = C_z \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{zu} \Delta \underline{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{z}_2 = C_{z_2} \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{z_2u} \Delta \underline{\mathbf{u}}.$$

En considérant une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$, s'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_{u_i} Y + Y^T B_{u_i}^T & B_{w_i} & Q C_z^T + Y^T D_{z_u}^T \\ B_{w_i}^T & -\gamma_\infty I & D_{z_w}^T \\ C_z Q + D_{z_u} Y & D_{z_w} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.9a)$$

$$\begin{bmatrix} Q A_i^T + A_i Q + B_{u_i} Y + Y^T B_{u_i}^T & B_{w_i} \\ B_{w_i}^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.9b)$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q C_{z_2}^T + Y^T D_{z_2u}^T \\ C_{z_2} Q + D_{z_2u} Y & \gamma_{2g}^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (7.9c)$$

$$L \otimes Q + M \otimes (A_i Q) + M^T \otimes (Q A_i^T) + M \otimes (B_{u_i} Y) + M^T \otimes (Y^T B_{u_i}^T) < 0 \quad (7.9d)$$

alors

- le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise l'origine du système qNLPV (7.5) (en considérant l'entrée $\underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}})$ égale à zéro),
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation des paramètres sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont respectivement inférieures à γ_∞ et γ_{2g} .

Le problème d'optimisation suivant est résolu pour trouver une solution :

$$\begin{aligned} \min_{\{\gamma_\infty, \gamma_{2g}, Q, Y\}} \quad & 2\gamma_\infty^2 + \gamma_{2g}^2 \\ \text{soumis à} \quad & (7.9a), (7.9b), (7.9c), (7.9d) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Le correcteur obtenu sera ensuite désigné par la notation GSU1 (*Grid-based Statique Unique*). Les indices de performance γ_∞ et γ_{2g} de la boucle fermée pour ce correcteur sont donnés dans la Table 7.4.

	GSU1	GSU2
γ_∞	0,35	1
γ_{2g}	0,001	1,1

TABLE 7.4 – Indices de performance des correcteurs statiques.

Deuxième cas : correcteur statique pour système avec non-linéarités de secteur en entrée

Dans le chapitre 6 on a constaté que la prise en compte des saturations des signaux de commande pour la synthèse du correcteur statique a un effet satisfaisant sur la stabilité et la performance de la boucle fermée. Plus particulièrement cela a été fait en considérant la fonction de saturation comme une non-linéarité

de secteur et en utilisant la condition de secteur généralisée (se référer à l'annexe A) pour définir les conditions de stabilité de la boucle fermée. La fonction de Lyapunov, obtenue en résolvant le problème d'optimisation pour la recherche du correcteur, définit une ellipsoïde qui est une estimation de la région d'attraction du système avec entrées saturées. Par conséquent, il est possible de maximiser la région d'attraction de la boucle fermée pour la recherche du correcteur. Au regard des résultats satisfaisants obtenus avec l'approche LPV polytopique, on s'est intéressés à explorer la même méthode également avec l'approche LPV *grid-based*. De plus, dans ce cas, il est possible de considérer également les saturations des forces des pneus. En effet, le modèle qNLPV (7.5) est exprimé en fonction des forces des pneus saturées, représentées à travers la fonction seuil $\underline{\phi}(\Delta \mathbf{h})$, pour laquelle la condition de secteur s'applique. Le modèle suivant est alors considéré :

$$\begin{aligned}\Delta \dot{\mathbf{x}} &= A(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{x} + B_w(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{w} + B_u(\mathbf{p}) \underline{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) + B_h(\mathbf{p}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \\ \Delta \mathbf{h} &= C_h(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{x} + D_{hw}(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{w} + D_{hu}(\mathbf{p}) \underline{\sigma}(\Delta \mathbf{u}) + D_{hh}(\mathbf{p}) \underline{\phi}(\Delta \mathbf{h}) \\ \mathbf{c} &= C_c \Delta \mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \Delta \mathbf{x}\end{aligned}\tag{7.11}$$

La stabilité de la boucle fermée est donc définie également en fonction des forces saturées des pneus en entrée du modèle de la dynamique véhicule. Pour cela on exploite le Théorème 18, détaillé dans l'annexe A. On combine ce résultat avec les conditions LMI (6.15a) et (6.15b) présentées dans le chapitre 6. De plus, les contraintes suivantes sont à nouveau considérées pour la synthèse du correcteur :

- limitation de la norme H_∞ des relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \mathbf{w}$ et les sorties contrôlées \mathbf{z}_1 et \mathbf{z}_2 de la boucle fermée (7.8), pour en maximiser la robustesse et le rejet des perturbations,
- limitation de la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \mathbf{w}$ et les sorties \mathbf{z}_2 de la boucle fermée (7.8), pour réduire la saturation des signaux de commande,
- placement des pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation de \mathbf{p} dans la région LMI \mathbb{D} .

S'il existe une région LMI \mathbb{D} , des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $S_u = S_u^T > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$, $J_u \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $S_u = S_u^T > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ et $J_h \in \mathbb{R}^{m_h \times n}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que les conditions (7.9a)-(7.9d) sont vérifiées et $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_{u_i} Y + Y^T B_{u_i}^T & B_{u_i} S_u - J_u^T \\ S_u B_{u_i}^T - J_u & -2S_u \end{bmatrix} < 0 \tag{7.12a}$$

$$\begin{bmatrix} Q & Y_j^T - J_{u_j}^T \\ Y_j - J_{u_j} & \bar{u}_j^2 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \tag{7.12b}$$

$$\begin{bmatrix} A_i Q + Q A_i^T + B_{u_i} Y + Y^T B_{u_i}^T & B_{h_i} S_h - Q C_{h_i}^T - Y^T D_{h_{u_i}}^T - J_h^T \\ S_h B_{h_i}^T - C_{h_i} Q - D_{h_{u_i}} Y - J_h & -(I + D_{h_{h_{cl_i}}}) S - S (I + D_{h_{h_{cl_i}}})^T \end{bmatrix} < 0 \tag{7.12c}$$

$$\begin{bmatrix} Q & J_{h_k}^T \\ J_{h_k} & \bar{h}_k^2 \end{bmatrix} > 0 \quad \forall k = 1 \dots p_k \tag{7.12d}$$

où

- Y_j et $J_{u_j} \forall j = 1 \dots m_u$ sont les lignes des matrices Y et J_u ,
- \bar{u}_j sont les valeurs maximales des entrées de commande, c'est-à-dire $\Delta \bar{\delta}_f$ et $\Delta \bar{\tau}_{wf}$, les valeurs maximales de $\Delta \delta_f$ et $\Delta \tau_{wf}$,
- Y_k et $J_{h_k} \forall k = 1 \dots p_h$ sont les lignes des matrices Y et J_h ,
- \bar{h}_k sont les valeurs maximales des écarts des forces des pneus par rapport à la trajectoire de référence, c'est-à-dire de ΔF_{xf} , ΔF_{xr} , ΔF_{yf} et ΔF_{yr} ,

alors

- le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise l'origine du système qNLPV (7.5) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}} \leq 1\}$, où $P = Q^{-1}$, est une RSA (*Région de Stabilité Asymptotique*) du système qNLPV avec entrées $\Delta \underline{\mathbf{u}}$ et $\Delta \underline{\mathbf{h}}$ saturées,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation des paramètres sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont inférieures à γ_∞ et γ_{2g} respectivement.

Les conditions (7.12b) $\forall j = 1 \dots m_u$ et (7.12d) $\forall k = 1 \dots p_h$ considèrent symétriques les bornes de saturation des commandes et des forces des pneus par rapport à zéro. En revanche, comme il a été expliqué précédemment, ces bornes ne sont pas symétriques. Pour cela on peut adopter une démarche conservatrice et considérer le plus petit seuil de saturation de $\Delta \delta_f$, $\Delta \tau_{wf}$, ΔF_{xf} , ΔF_{xr} , ΔF_{yf} et ΔF_{yr} le long des deux trajectoires de référence considérées. Une RSA est un sous-ensemble de la région d'attraction du système. Si on maximise la trace de la matrice Q il est donc possible de maximiser la région d'attraction du système qNLPV (7.5) en boucle fermée avec les entrées de commande et des forces des pneus saturées. Cela peut contribuer à réduire la zone d'instabilité du système causée par la saturation de actionneurs et des pneus. On choisit donc a priori des valeurs pour γ_∞ et γ_{2g} et on détermine la solution du correcteur en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\{Q, Y, S_u, J_u\}} \quad \text{trace}(Q) \\ & \text{soumis à} \quad (7.9a), (7.9b), (7.9c), (7.9d), (7.12a), (7.12b), (7.12c), (7.12d) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Pour la synthèse de ce correcteur statique on utilise la même région LMI \mathbb{D} et les mêmes filtres de pondération $W_e(s)$ et $W_u(s)$ utilisés pour le correcteur GSU1. Pour les valeurs de γ_∞ et γ_{2g} il est possible de choisir des valeurs sous-optimales par rapport aux valeurs déterminées pour la synthèse du correcteur GSU1, pour laisser un degré de liberté suffisant pour la maximisation de la région d'attraction. Les valeurs choisies pour le correcteur développé à partir du problème d'optimisation (7.13), désigné par GSU2, sont données dans la Table 7.4.

7.2.2 Correcteurs dynamiques

On aborde dans cette section la synthèse des correcteurs LPV dynamiques, dépendants du vecteur $\underline{\mathbf{p}}$ des paramètres variables. Sa dynamique est exprimée par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_k &= A_K(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}}_k + B_K(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{y}} \\ \Delta \underline{\mathbf{u}} &= C_K \underline{\mathbf{x}}_k + D_K \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (7.14)$$

où l'ordre du correcteur est égal à celui du modèle de synthèse et $\forall \underline{\mathbf{p}} A_K(\underline{\mathbf{p}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_K \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $C_K \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $D_K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$. Le système en boucle fermée est exprimé par :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} = A_{cl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}} + B_{wcl}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + B_{hcl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (7.15a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{h}} = C_{hcl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}} + D_{hwcl}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + D_{hhcl}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \quad (7.15b)$$

$$\underline{\mathbf{c}} = C_{ccl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} \quad (7.15c)$$

avec $\underline{\mathbf{x}}_{cl}^T = [\Delta \underline{\mathbf{x}}^T, \underline{\mathbf{x}}_k^T]^T$ et

$$A_{cl}(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u D_K & B_u C_K \\ B_K & A_K(\underline{\mathbf{p}}) \end{bmatrix} \quad (7.15d)$$

$$B_{wcl}(\underline{\mathbf{p}}) = \begin{bmatrix} B_w(\underline{\mathbf{p}}) + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix} \quad (7.15e)$$

$$B_{hcl} = \begin{bmatrix} B_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.15f)$$

$$C_{hcl} = \begin{bmatrix} C_h + D_{hu} D_K C_y & D_{hu} C_K \end{bmatrix} \quad (7.15g)$$

$$C_{zcl} = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15h)$$

Les démonstrations des contraintes LMI utilisées pour la synthèse des correcteurs sont présentées pour les systèmes LTI dans les sections A.4.3 et A.4.4.

Premier cas : correcteur dynamique H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles

On décrit initialement la synthèse d'un correcteur LPV dynamique H_∞/H_2 -généralisée avec placement des pôles. Il s'agit du même type de correcteur que le correcteur PDU1, obtenu avec l'approche LPV polytopique, qui :

- minimise la norme H_∞ des relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{z}}_1$ et $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8),
- minimise la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8),
- place les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation du vecteur de paramètres $\underline{\mathbf{p}}$ dans la région LMI \mathbb{D} .

Comme pour les correcteurs statiques PSU1 et GSU1, il est intéressant de déterminer le même correcteur dynamique avec les deux approches LPV différentes en vue de comparer les performances respectives. La région LMI \mathbb{D} utilisée pour la synthèse du correcteur a la forme de celle représentée dans la Figure 7.7, avec :

- $\bar{\lambda} = -1,5$,
- $\underline{\lambda} = -5000$,
- $\theta = 0,52$ rad.

Par rapport à la région LMI utilisée pour la synthèse des correcteurs statiques GSU1 et GSU2, où $\underline{\lambda} = -2000$, dans ce cas on permet des dynamiques plus rapides en boucle fermée. Pour la synthèse de ce correcteur on reprend les conditions (6.19a)-(6.19e) présentées dans le chapitre 6, évaluées aux N_g points de la grille de synthèse, au lieu des N_p sommets du polytope.

S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$, une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c} A_i \mathbf{X} + B_{u_i} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + \hat{\mathbf{D}}^T B_{u_i}^T \\ B_{w_i}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_{u_i}^T \\ C_z \mathbf{X} + D_{zu} \hat{\mathbf{C}} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} \\ B_{w_i}^T \mathbf{Y}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{B}}^T \\ C_z + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\gamma_\infty I \\ D_{zw} + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} D_{yw} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma_\infty I \end{array} \end{array} \right) < 0 \quad (7.16a)$$

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} A_i \mathbf{X} + B_{u_i} \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + \hat{\mathbf{D}}^T B_{u_i}^T \\ B_{w_i}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_{u_i}^T \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} \\ B_{w_i}^T \mathbf{Y}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{B}}^T \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -I \end{array} \end{array} \right) < 0 \quad (7.16b)$$

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ I \\ C_{z_2} \mathbf{X} + D_{z_2 u} \hat{\mathbf{C}} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{Y} \\ C_{z_2} + D_{z_2 u} \hat{\mathbf{D}} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \gamma_{2g}^2 I \end{array} \end{array} \right) > 0 \quad (7.16c)$$

$$L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} + M \otimes \begin{bmatrix} A_i \mathbf{X} + B_{u_i} \hat{\mathbf{C}} & A_i + B_{u_i} \hat{\mathbf{D}} \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} + M^T \otimes \begin{bmatrix} A_i \mathbf{X} + B_{u_i} \hat{\mathbf{C}} & A_i + B_{u_i} \hat{\mathbf{D}} \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^T < 0 \quad (7.16d)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (7.16e)$$

alors le correcteur dynamique avec les matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \\ A_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) C_K M^T - \mathbf{Y} (A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (7.17)$$

assure :

- la stabilité du système qNLPV (7.5) (en considérant l'entrée $\underline{\phi}(\Delta \mathbf{h})$ égale à zéro),
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.15) dans le domaine de variation des paramètres sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont respectivement inférieures à γ_∞ et γ_{2g} .

Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$. Pour calculer les matrices (7.17) du correcteur il est possible d'utiliser deux approches :

- les calculer aux N_g points de la grille de synthèse par (7.17) et ensuite interpoler entre ces points pour les obtenir sur le domaine de variation des paramètres,
- les calculer par (7.17) à chaque instant d'exécution du correcteur.

La deuxième approche a été utilisée dans ce travail. En effet, si on considère que la grille de validation est suffisamment dense pour valider le correcteur dans le domaine de variation des paramètres, alors les équations (7.17) sont considérées une expression valide du correcteur. De plus, le calcul par (7.17) est plus rapide qu'une interpolation. En résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{\gamma_\infty, \gamma_{2g}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}\}} \quad & 2\gamma_\infty^2 + \gamma_{2g}^2 \\ \text{soumis à} \quad & (7.16a), (7.16b), (7.16c), (7.16d), (7.16e) \end{aligned} \quad (7.18)$$

on détermine le correcteur, désigné par la suite GDU1 (*Grid-based Dynamique Unique*). Les indices de performance γ_∞ et γ_{2g} de la boucle fermée pour ce correcteur sont présentés dans la Table 7.5.

	GDU1	GDU2	GDUAW	GDU3
γ_∞	0,87	1	1	1
γ_{2g}	0,85	1,2	1,1	1,1

TABLE 7.5 – Indices de performance des correcteurs dynamiques.

La norme H_2 -généralisée, cf. WILSON 1989 et ROTEA 1993, dont on rappelle la définition dans la section A.3.3, mesure le pic d'amplitude maximal des sorties du système en réponse à des entrées de perturbation à énergie unitaire. De la même manière que pour les signaux de commande dans le correcteur GDU1, on peut donc limiter la norme H_2 -généralisée également pour la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties $\underline{\mathbf{h}}_2$ de la boucle fermée (7.8). Cela permet de réduire l'impact des perturbations sur les forces des pneus et donc réduire la saturation des forces des pneus. Pour cela il est possible d'ajouter la condition LMI suivante aux conditions (7.16a)-(7.16e).

S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$, une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$,

$\gamma_{2g} > 0$ et $\gamma_h > 0$ tels que les conditions (7.16a)-(7.16e) sont vérifiées et que $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ \hline I & \mathbf{Y} & 0 \\ \hline C_h \mathbf{X} + D_{hu} \hat{\mathbf{C}} & C_h + D_{hu} \hat{\mathbf{D}} & \gamma_h^2 I \end{array} \right) > 0 \quad (7.19)$$

alors le correcteur dynamique avec les matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \\ A_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) C_K M^T - \mathbf{Y} (A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (7.20)$$

assure :

- la stabilité du système qNLPV (7.5) (en considérant l'entrée $\underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}})$ égale à zéro),
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.15) dans le domaine de variation des paramètres sont dans la région \mathbb{D} ,
- les normes H_∞ de la relation entrée-sortie entre $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et $\hat{\underline{\mathbf{z}}}$, H_2 -généralisée entre $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et $\hat{\underline{\mathbf{z}}}_2$ et entre $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et $\Delta \hat{\underline{\mathbf{h}}}$ sont inférieures à γ_∞ , γ_{2g} et γ_h respectivement.

Des valeurs sous-optimales sont assignées a priori pour γ_∞ et γ_{2g} et en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{\gamma_h, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}\}} \quad & \gamma_h^2 \\ \text{soumis à} \quad & (7.16a), (7.16b), (7.16c), (7.16d), (7.16e), (7.19) \end{aligned} \quad (7.21)$$

on détermine la solution conduisant au correcteur, désigné par la suite GDU2. Les indices de performance γ_∞ et γ_{2g} de la boucle fermée pour le correcteur GDU2 sont donnés dans la Table 7.5.

Deuxième cas : correcteur dynamique pour système avec non-linéarités de secteur en entrée

Cette section porte sur la synthèse d'un correcteur LPV dynamique pour le système avec non-linéarités de secteur en entrée, c'est-à-dire un correcteur du même type que les correcteurs PDU2 et PDUAW, obtenus avec l'approche LPV polytopique et présentés dans le chapitre 6. Pour ces deux correcteurs, la stabilité de la boucle fermée a été prise en compte en considérant les non-linéarités de secteur en entrée du système et dues à la saturation des signaux de contrôle. Dans ce cas, la formalisation du modèle qNLPV (7.5) à partir du modèle linéarisé (4.33) permet de considérer également les non-linéarités de secteur dues aux saturations des forces des pneus pour le calcul des conditions de stabilité de la boucle fermée, comme il a été fait pour le correcteur statique GSU2. Le système qNLPV suivant est donc considéré pour la synthèse du correcteur :

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\dot{\mathbf{x}}} &= A(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{x}} + B_w(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + B_u(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + B_h(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \Delta \underline{\mathbf{h}} &= C_h(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{x}} + D_{hw}(\underline{\mathbf{p}}) \Delta \underline{\mathbf{w}} + D_{hu}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\sigma}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) + D_{hh}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{h}}) \\ \underline{\mathbf{c}} &= C_c \Delta \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\mathbf{y}} &= \Delta \underline{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

On cherche un correcteur LPV dynamique de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\mathbf{x}}}_k &= A_K(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{x}}_k + B_K(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\mathbf{y}} + E_{Ku}(\underline{\mathbf{p}}) \underline{\phi}(\Delta \underline{\mathbf{u}}) \\ \Delta \underline{\mathbf{u}} &= C_K \underline{\mathbf{x}}_k + D_K \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (7.23)$$

où $E_{Ku}(\underline{\mathbf{p}}) \phi(\Delta \underline{\mathbf{u}})$ représente une composante *anti-windup* statique pour la saturation des signaux de contrôle. Pour le calcul des conditions de stabilité du système avec les non-linéarités de secteur en entrée, le résultat du Théorème 24, présenté dans l'annexe A, est utilisé avec les conditions (6.27a) et (6.27b) présentées dans le chapitre 6. Pour la synthèse du correcteur on considère également les contraintes suivantes :

- limitation de la norme H_∞ des relations entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties contrôlées $\underline{\mathbf{z}}_1$ et $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8),
- limitation de la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie entre les signaux de perturbation $\Delta \underline{\mathbf{w}}$ et les sorties $\underline{\mathbf{z}}_2$ de la boucle fermée (7.8),
- placement des pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.8) dans le domaine de variation du vecteur de paramètres $\underline{\mathbf{p}}$ dans la région LMI \mathbb{D} .

Par conséquent, les conditions LMI (7.16a)-(7.16e) sont considérées pour la synthèse du correcteur.

S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale, $\mathbf{J}_{u1} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{J}_{u2} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $\mathbf{S}_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $\mathbf{J}_{h1} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\mathbf{J}_{h2} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$, une région LMI $\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$ et des scalaires $\gamma_\infty > 0$ et $\gamma_{2g} > 0$ tels que (7.16a)-(7.16e) sont valides et $\forall i = 1 \dots N_g$:

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} A_i \mathbf{X} + B_{ui} \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + \hat{\mathbf{D}}^T B_{ui}^T & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} & 0 \\ \hline \mathbf{S}_u B_{ui}^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{R}_u - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] \right) < 0 \quad (7.24a)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_j^T - \mathbf{J}_{u1j}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & \hat{\mathbf{D}}_j^T - \mathbf{J}_{u2j}^T \\ \hline \hat{\mathbf{C}}_j - \mathbf{J}_{u1j} & \hat{\mathbf{D}}_j - \mathbf{J}_{u2j} & \bar{u}_j^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (7.24b)$$

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} A_i \mathbf{X} + B_{ui} \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + \hat{\mathbf{D}}^T B_{ui}^T & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} & 0 \\ \hline \mathbf{S}_h B_\phi^T - C_{hi} \mathbf{X} - D_{hu} \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{J}_{h1} & \mathbf{S}_h B_\phi^T \mathbf{Y} - C_{hi} - D_{hu} \hat{\mathbf{D}} - \mathbf{J}_{h2} & -(I + D_{h\phi}) \mathbf{S}_h \end{array} \right] \right) < 0 \quad (7.24c)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \mathbf{J}_{h1k}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & \mathbf{J}_{h2k}^T \\ \hline \mathbf{J}_{h1k} & \mathbf{J}_{h2k} & \bar{h}_k^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall k = 1 \dots p_h \quad (7.24d)$$

alors le correcteur dynamique avec les matrices :

$$\begin{aligned} E_{Ku}(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\mathbf{R}_u - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) \mathbf{S}_u) \mathbf{S}_u^{-1} \\ D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \\ A_K(\underline{\mathbf{p}}) &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u(\underline{\mathbf{p}}) C_K M^T - \mathbf{Y} (A(\underline{\mathbf{p}}) + B_u(\underline{\mathbf{p}}) D_K) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (7.25)$$

assure :

- la stabilité du système qNLPV (7.22) où l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système avec entrées saturées en boucle fermée,
- les pôles de toutes les réalisations LTI de la boucle fermée (7.15) dans le domaine de variation des paramètres sont dans la région \mathbb{D} ,

— les normes H_∞ et H_2 -généralisée de la boucle fermée sont inférieures à γ_∞ et γ_{2g} .

La matrice P de la fonction de Lyapunov quadratique est telle que :

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & N \\ N^T & \hat{Y} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & M \\ M^T & \hat{X} \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

On observe que la bilinéarité $\mathbf{S}_h B_\phi^T \mathbf{Y}$ apparaît dans la condition (7.24c). Le problème d'optimisation résultant, en utilisant cette contrainte, n'est donc pas convexe. Afin d'éviter d'arriver à résoudre un problème d'optimisation non-convexe, il existe deux solutions, déjà présentées dans le chapitre 6 :

- on choisit une valeur pour \mathbf{S}_h , mais cela reste complexe à réaliser,
- on utilise la méthode proposée dans GARCIA et al. 2009 et SILVA et al. 2008, présentée en détail dans l'annexe A en exploitant le Théorème 28 pour les systèmes LTI, qui nécessite d'ajouter une composante *anti-windup* au correcteur également pour la saturation des forces des pneus.

L'estimation des forces des pneus est une tâche difficile et un correcteur ne nécessitant pas de mesurer $\phi(\Delta \mathbf{h})$ est donc souhaité. Ainsi, pour obtenir un correcteur sans composante *anti-windup* pour la saturation des forces des pneus, il est possible d'utiliser une procédure comparable à celle utilisée dans le chapitre 6 pour le calcul du correcteur PDU2 et qui combine les deux solutions évoquées :

1. on calcule un correcteur avec *anti-windup* pour $\phi(\Delta \mathbf{h})$ avec la méthode proposée dans GARCIA et al. 2009 et SILVA et al. 2008,
2. la solution de la matrice \mathbf{S}_h est récupérée et utilisée pour résoudre un problème d'optimisation sous les contraintes (7.16a)-(7.16e) et (7.24a)-(7.24d).

Pour la première étape on utilise le résultat du Théorème 25, présenté dans l'annexe A, conjointement aux conditions (7.16a)-(7.16e), (7.24a) et (7.24b) pour résoudre un problème d'optimisation pour maximiser la taille de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$. Pour cela, on cherche à minimiser la trace de P , ce qui peut être fait, comme expliqué dans TARBOURIECH et al. 2011, en minimisant un scalaire $\rho > 0$ et en ajoutant la contrainte LMI suivante :

$$\begin{bmatrix} \rho I & I & 0 \\ I & Y & I \\ 0 & I & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (7.27)$$

On peut donc utiliser la matrice \mathbf{S}_h de la solution du correcteur avec *anti-windup* pour la saturation des forces des pneus, pour résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\{\rho, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \mathbf{J}_{u1}, \mathbf{J}_{u2}, \mathbf{R}_u, \mathbf{S}_u, \mathbf{J}_{h1}, \mathbf{J}_{h2}\}} \quad & \rho \\ \text{soumis à} \quad & (7.16a), (7.16b), (7.16c), (7.16d), (7.16e), \\ & (7.24a), (7.24b), (7.24c), (7.24d), (7.27) \end{aligned} \quad (7.28)$$

pour obtenir un correcteur exprimé par (7.23) et qu'on appellera GDUAW (*Grid-based Dynamique Anti-Windup*). Les valeurs sous-optimales de γ_∞ et γ_{2g} choisies a priori pour la synthèse du correcteur GDUAW sont présentées dans la Table 7.5. La procédure utilisée pour déterminer la matrice S_h et obtenir le correcteur GDUAW peut être utilisée aussi pour calculer la matrice S_u et obtenir un correcteur dynamique sans *anti-windup* pour la saturation des entrées de commande. Pour cela, au lieu d'utiliser les contraintes LMI (7.24a) et (7.24b), on utilise les contraintes (6.23a) et (6.23b), rappelées ci-dessous :

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} A_i \mathbf{X} + B_{ui} \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A_i^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_{ui}^T & \mathbf{Y} A_i + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 \\ \hline \mathbf{S}_u B_{ui}^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{S}_u B_{ui}^T \mathbf{Y} - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] \right) < 0 \quad (7.29a)$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_j^T - \mathbf{J}_{u1j}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & C_y^T \hat{\mathbf{D}}_j^T - \mathbf{J}_{u2j}^T \\ \hline \hat{\mathbf{C}}_j - \mathbf{J}_{u1j} & \hat{\mathbf{D}}_j C_y - \mathbf{J}_{u2j} & \bar{u}_j^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall j = 1 \dots m_u \quad (7.29b)$$

En résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} & \min_{\{\rho, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \mathbf{J}_{u1}, \mathbf{J}_{u2}, \mathbf{J}_{h1}, \mathbf{J}_{h2}\}} \rho \\ & \text{soumis à} \quad (7.16a), (7.16b), (7.16c), (7.16d), (7.16e), \\ & \quad \quad \quad (7.29a), (7.29b), (7.24c), (7.24d), (7.27) \end{aligned} \tag{7.30}$$

on obtient un correcteur dénommé dans la suite GDU3. Les valeurs sous-optimales de γ_∞ et γ_{2g} choisies pour la synthèse du correcteur GDU3 sont données dans la Table 7.5.

7.3 Analyse en boucle fermée

Dans cette section, on aborde l'analyse des correcteurs développés dans la section 7.2. Comme il a été fait pour les correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique dans la section 6.4, il est intéressant d'estimer la région d'attraction de la boucle fermée du système non-linéaire, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales du système pour lesquelles les variables d'état convergent vers zéro. En revanche, son estimation n'est pas une tâche simple. Il est possible d'utiliser la méthode proposée dans la section 6.4.1, qui estime la région d'attraction par une ellipsoïde au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique et la condition de secteur généralisée pour les saturations des forces des pneus et des signaux de commande. En revanche, on a constaté dans le chapitre 6 que cette méthode est très conservatrice et que la région d'attraction estimée semble être significativement de taille plus faible que celle observée au moyen des résultats de simulation. Cependant cette approche peut être utilisée pour comparer les correcteurs entre eux. D'autre part le problème d'optimisation (6.38) n'aboutit pas à une solution pour le système en boucle fermée avec les correcteurs développés avec l'approche LPV *grid-based*. L'estimation de la région d'attraction au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique pour ces correcteurs ne sera donc pas abordée dans ce chapitre. On montrera dans la section 7.3.1 une estimation empirique, obtenue en exploitant des résultats de simulation avec une approche Monte Carlo pour des conditions initiales non-nulles pour les vitesses longitudinale et latérale du véhicule. Les résultats de ces simulations seront présentés dans la section 7.3.2. Enfin, on conclut la section avec l'analyse temporelle de quelques simulations en boucle fermée. Cela servira à comparer plus en détail le comportement des différents correcteurs développés dans des conditions différentes.

Tous les résultats de simulations présentés dans cette section ont été obtenus en simulant l'action des correcteurs sur le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions, décrit dans la section 1.3. De plus, les saturations suivantes des entrées du système ont été prises en compte dans les simulations :

- $-30 \text{ deg} \leq \delta_f \leq 30 \text{ deg}$,
- $-3846 \text{ Nm} \leq \tau_{wf} \leq 946 \text{ Nm}$,
- $-1154 \text{ Nm} \leq \tau_{wr} \leq 284 \text{ Nm}$.

7.3.1 Région d'attraction en boucle fermée

La région d'attraction est un outil qui sert à établir les limites de la dynamique du véhicule pour lesquelles les correcteurs stabilisent le système non-linéaire. Elle est donc utile pour définir leurs limites d'application et comparer les différents correcteurs développés. Pour une estimation empirique de la région d'attraction, des simulations avec une approche Monte Carlo ont été réalisées. Comme il a déjà été fait dans le chapitre 6 pour les correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique, des conditions initiales non nulles ont été considérées uniquement selon deux directions : la vitesse longitudinale et la vitesse latérale. Les conditions initiales pour les autres variables d'état du modèle du véhicule ont été considérées égales à zéro. De cette façon le nombre des simulations reste limité et l'analyse des résultats est simple à interpréter. De plus, les deux directions choisies permettent d'observer l'action des correcteurs développés sur les deux axes du véhicule : l'axe longitudinal et l'axe latéral. La région d'attraction a été estimée pour les deux trajectoires de référence : la manœuvre d'évitement sans freinage et celle avec freinage (se référer à la section 6.2). Pour vérifier la convergence des trajectoires du système en boucle fermée, les horizons temporelles des deux trajectoires ont été allongés à 30s, en maintenant le véhicule en ligne droite et à vitesse constante après la fin de la manœuvre d'évitement. Une trajectoire converge si les valeurs absolues des erreurs x_L et y_L sont inférieures à 2 cm et la valeur absolue de l'erreur $\Delta\psi$ est inférieure à 1 deg. Les Figures 7.8-7.17 représentent l'estimation empirique des régions d'attraction, pour les différents correcteurs, sur

lesquelles il a été mis en évidence les cas où les variables d'état en boucle fermée convergent avant ou après la fin de la manœuvre d'évitement et le cas où elles ne convergent pas. On constate que pour les

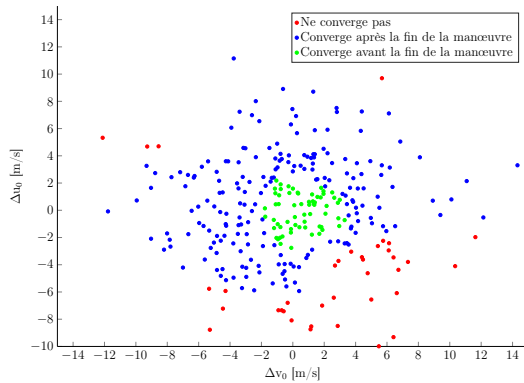


FIGURE 7.8 – Correcteur GSU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

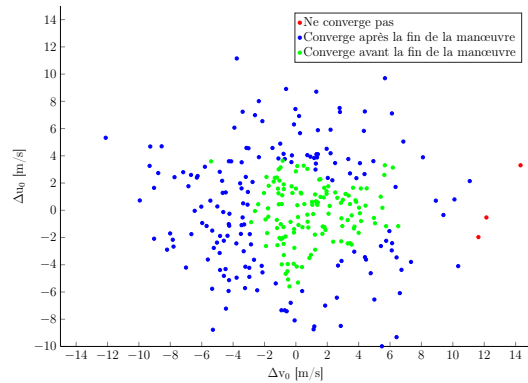


FIGURE 7.9 – Correcteur GSU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

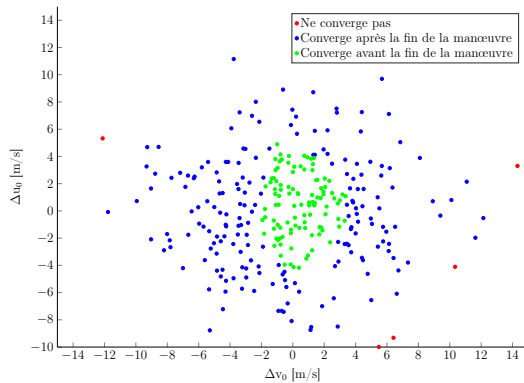


FIGURE 7.10 – Correcteur GSU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

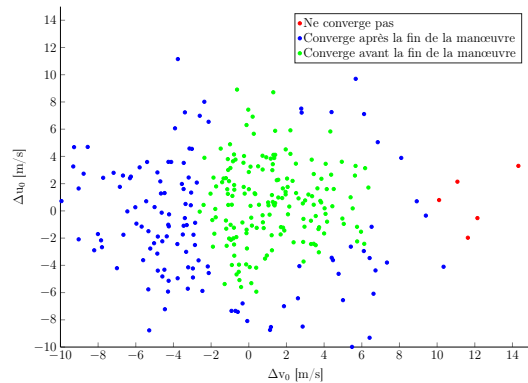


FIGURE 7.11 – Correcteur GSU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

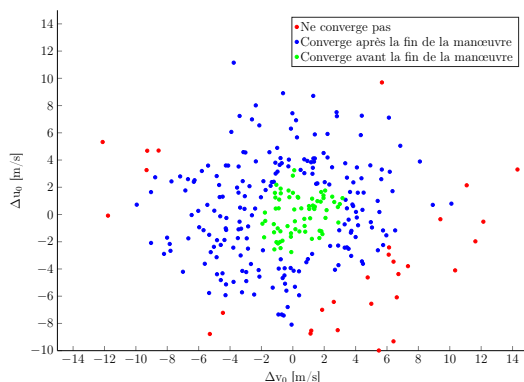


FIGURE 7.12 – Correcteur GDU1, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

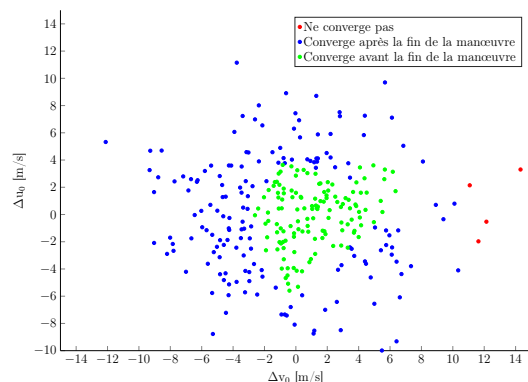


FIGURE 7.13 – Correcteur GDU1, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

correcteurs développés dans ce chapitre, comme pour ceux calculés dans le chapitre 6, les estimations de la région d'attraction obtenues au moyen des simulations sont très larges pour les directions considérées. Les conditions initiales utilisées pour les simulations ne permettent pas d'établir avec précision les limites obtenues avec les différents correcteurs. Des simulations en boucle fermée avec des conditions initiales

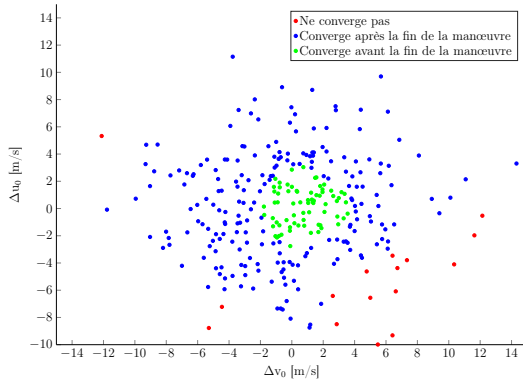


FIGURE 7.14 – Correcteur GDU2, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

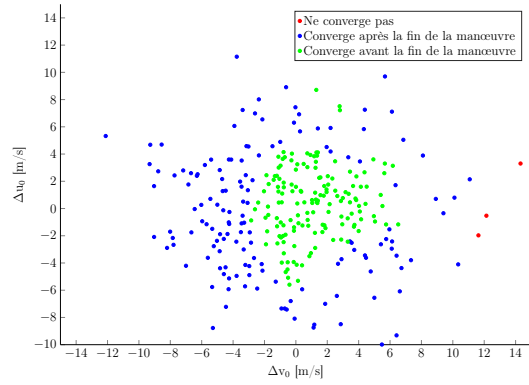


FIGURE 7.15 – Correcteur GDU2, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

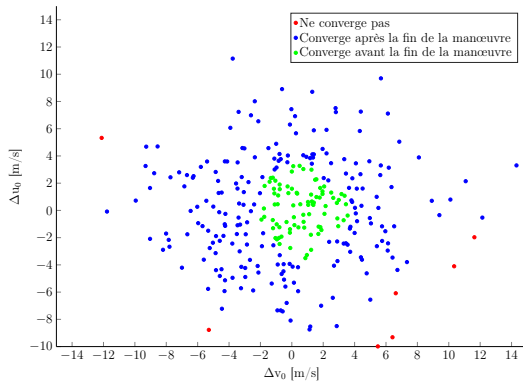


FIGURE 7.16 – Correcteur GDUAW, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

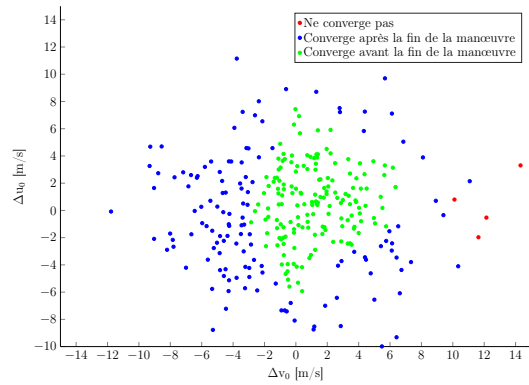


FIGURE 7.17 – Correcteur GDUAW, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

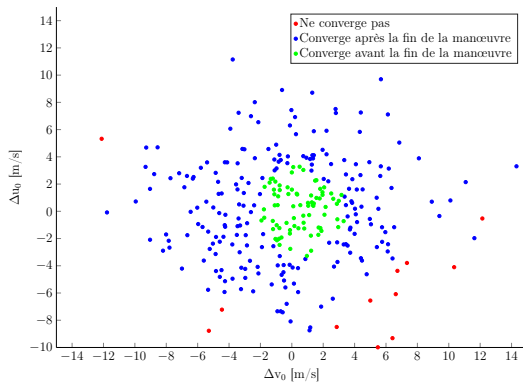


FIGURE 7.18 – Correcteur GDU3, trajectoire d'évitement sans freinage : région d'attraction empirique.

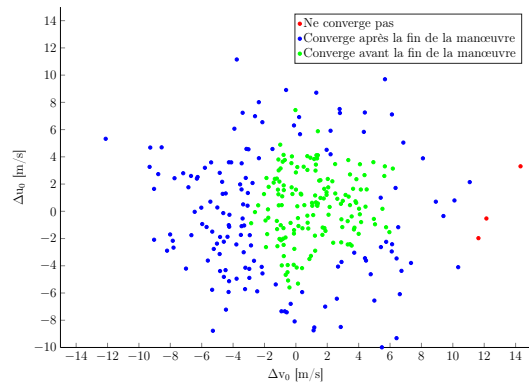


FIGURE 7.19 – Correcteur GDU3, trajectoire d'évitement avec freinage : région d'attraction empirique.

encore plus importantes, pour trouver les limites des régions d'attraction, n'ont pas été effectuées, car on estime que des conditions initiales plus importantes ne seraient pas représentatives des conditions de fonctionnement du système. Une vitesse latérale de 1 m/s est déjà très importante dans le cadre des véhicules routiers et les simulations effectuées ont largement dépassé ce niveau. De plus, la charge de calcul pour l'exécution des simulations est élevée et par conséquent les conditions initiales considérées ont été limitées. Comme dans le chapitre 6, on constate d'après les Figures 7.8-7.17, que la région d'attraction et l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les variables d'état du système en boucle fermée

convergent avant la fin de la manœuvre d'évitement ne sont pas symétriques. On rappelle que cela dépend de la trajectoire de référence considérée et du fait que les saturations des entrées de commande ne sont pas symétriques. En analysant les Figures 7.8-7.11 on constate que le correcteur GSU2, qui prend en compte la saturation des entrées de commande et des forces des pneus à travers les non-linéarités de secteur, a une région d'attraction plus grande que celle obtenue avec le correcteur GSU1. De plus, la région des conditions initiales pour lesquelles les variables d'état convergent avant la fin de la manœuvre d'évitement est également plus grande. La différence la plus significative est dans la direction de la vitesse latérale $\Delta u_0(t)$. L'analyse des Figures 7.12-7.15 montre que la région d'attraction et l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles la convergence en boucle fermée est atteinte avant la fin de la manœuvre sont plus larges pour le correcteur GDU2 que pour le correcteur GDU1, mais la différence reste faible. La minimisation de la norme H_2 -généralisée de la relation entrée-sortie des entrées de perturbation vers les forces des pneus, faite par le correcteur GDU2, apporte donc une amélioration par rapport au correcteur GDU1. En revanche, l'amélioration apportée par le correcteur GDUAW, qui prend en compte les saturations des entrées de commande et des forces des pneus à travers les non-linéarités de secteur, est encore plus significative, comme on peut le constater sur les Figures 7.16 et 7.17. Les résultats des simulations avec le correcteur GDU3, montrés dans les Figures 7.18 et 7.19, sont comparables à ceux du correcteur GDUAW. Selon la taille des estimations de la région d'attraction, on constate donc que la méthode utilisée pour le choix de la matrice S_u afin d'obtenir un correcteur sans *anti-windup* aboutit à un résultat satisfaisant. Finalement on peut comparer le meilleur des correcteurs statiques, le correcteur GSU2, avec le meilleur des correcteurs dynamiques, le correcteur GDUAW. En analysant les Figures 7.8, 7.11, 7.16 et 7.17 on peut constater que l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les deux correcteurs amène la convergence avant la fin de la manœuvre d'évitement est similaire, mais ce domaine est légèrement plus grand pour le correcteur GSU2, qui, selon ce critère, conduit à une meilleure performance que le correcteur dynamique GDUAW.

7.3.2 Simulations en boucle fermée

Dans cette section les résultats de simulation avec les différents correcteurs développés dans ce chapitre sont présentés en détail. Plus particulièrement les résultats de simulation proposés sont ceux également analysés dans la section 6.4.2, pour les correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique.

La première simulation présentée a été faite avec la trajectoire d'évitement sans freinage avec changement de deux voies. Dans ce cas on considère les conditions initiales suivantes (différentes de zéro) :

$$\Delta v(0) = 2 \text{ m/s} \qquad \Delta u(0) = -1 \text{ m/s} \qquad \Delta r(0) = -15 \text{ deg/s.}$$

La Figure 7.20 montre les signaux de commande et les erreurs longitudinale, latérale et de lacet en boucle fermée avec les différents correcteurs. On constate qu'en général les correcteurs tenant compte des saturations des entrées de commande et de forces des pneus au moyen des non-linéarités de secteur, c'est-à-dire GSU2, GDUAW et GDU3, conduisent à des signaux de commande de plus faible amplitude que ceux obtenus avec les correcteurs correspondants ne considérant pas les non-linéarités de secteur. A travers l'analyse détaillée de ce scénario de simulation, en se fondant sur l'amplitude des erreurs longitudinale x_L , latérale y_L et de lacet $\Delta\psi$, on confirme différentes conclusions qui avaient été faites par l'analyse précédente de la région d'attraction :

- le correcteur statique GSU2 donne des meilleurs résultats que le correcteur GSU1,
- le correcteur GDU2 améliore la performance de la boucle fermée par rapport au correcteur GDU1, mais les correcteurs GDUAW et GDU3 produisent de meilleurs résultats,
- le correcteur GDU3 a un comportement très similaire à celui du correcteur GDUAW et la performance en boucle fermée n'est pas dégradée sans la composante de anti-windup, malgré le fait que la saturation des signaux de contrôle soit atteinte.

Il est intéressant de comparer également les forces des pneus entre un correcteur dont la synthèse a été faite en prenant en compte ces saturations et un autre dont la synthèse a été faite en les négligeant. Les Figures 7.21 et 7.22 montrent les forces des pneus pour le scénario de simulation avec les correcteurs GDU1 et GDUAW respectivement (on rappelle que la grandeur indiquée par \hat{F} représente la force du pneu avant saturation et F en sortie de la fonction de saturation). On constate particulièrement que dans la première partie de la manœuvre d'évitement, avant 1s, les entrées des fonctions de saturation, c'est-à-dire les forces des pneus avant saturation, sont plus faibles avec le correcteur GDUAW que celles obtenues le correcteur GDU1. On en conclut donc que le correcteur GDUAW sollicite moins les forces des pneus, donc moins

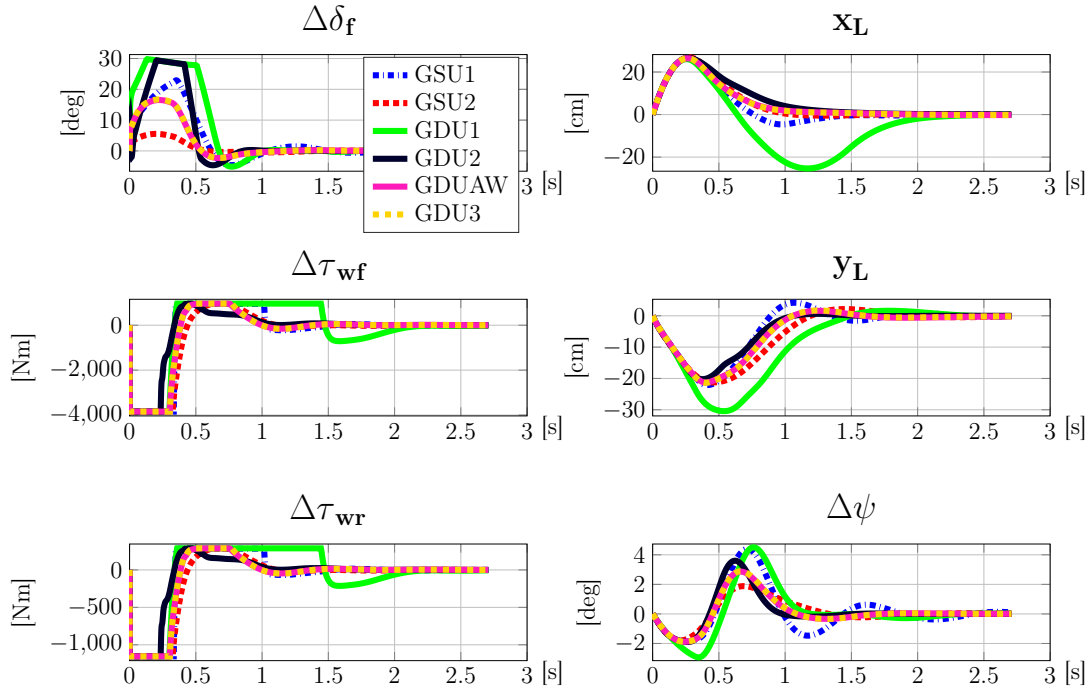


FIGURE 7.20 – Manœuvre d'évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.

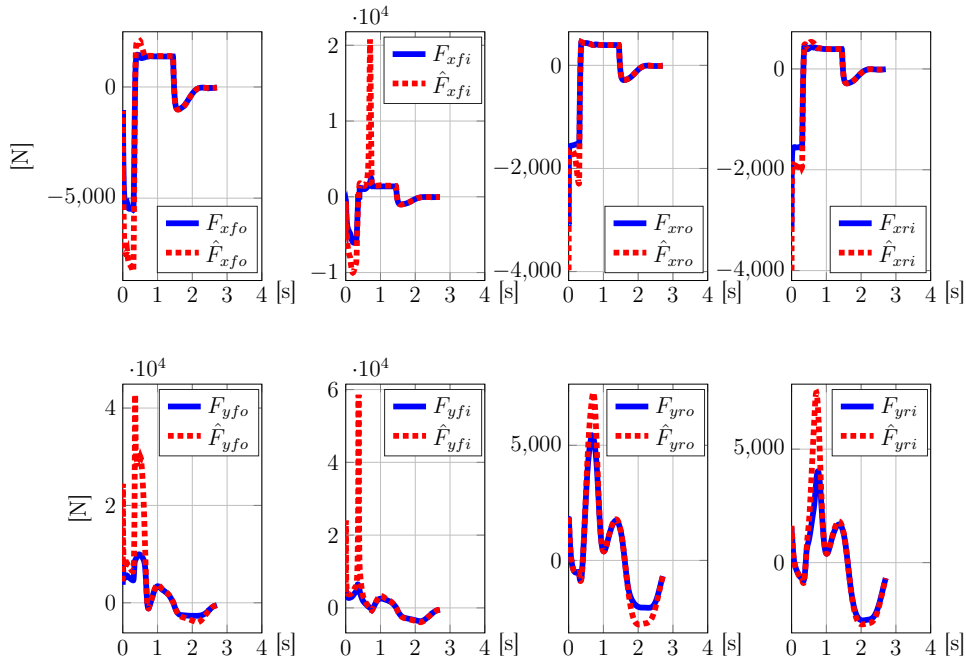


FIGURE 7.21 – Manœuvre d'évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDU1.

soumises à saturation.

La deuxième simulation considérée est faite sur la trajectoire d'évitement avec freinage. Les conditions initiales sont dans ce cas :

$$\Delta v(0) = 5 \text{ m/s}$$

$$\Delta u(0) = -1 \text{ m/s}$$

$$\Delta r(0) = -15 \text{ deg/s.}$$

La Figure 7.23 montre les signaux de commande et les erreurs longitudinale, latérale et de lacet en boucle fermée avec les différents correcteurs pour ce deuxième scénario de simulation. On constate que dans ce cas les correcteurs GDU1 et GDU2 ne produisent pas des trajectoires convergentes avant la fin de la manœuvre

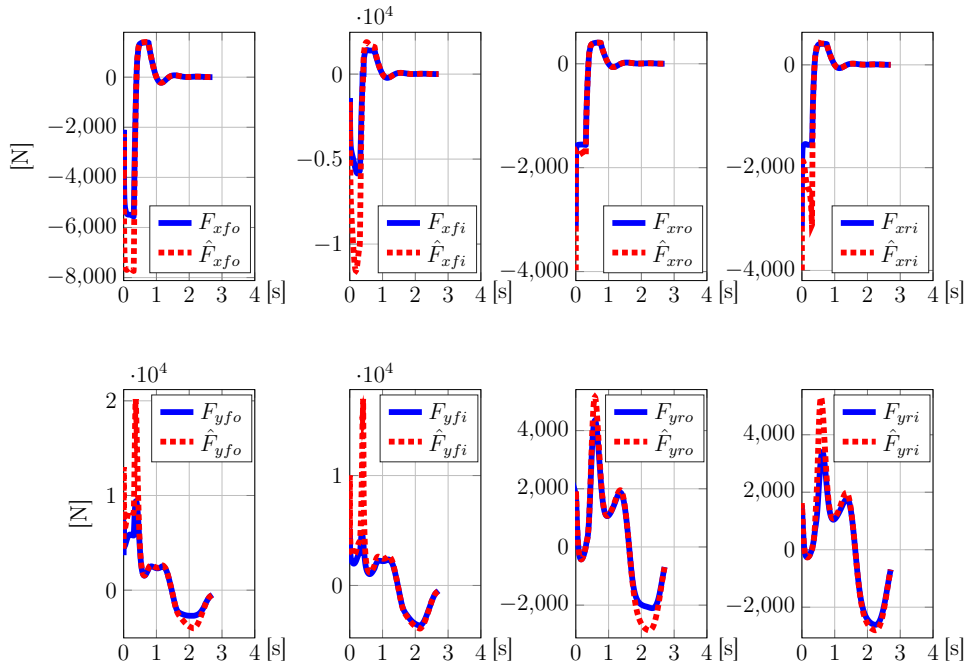


FIGURE 7.22 – Manœuvre d’évitement sans freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDUAW.

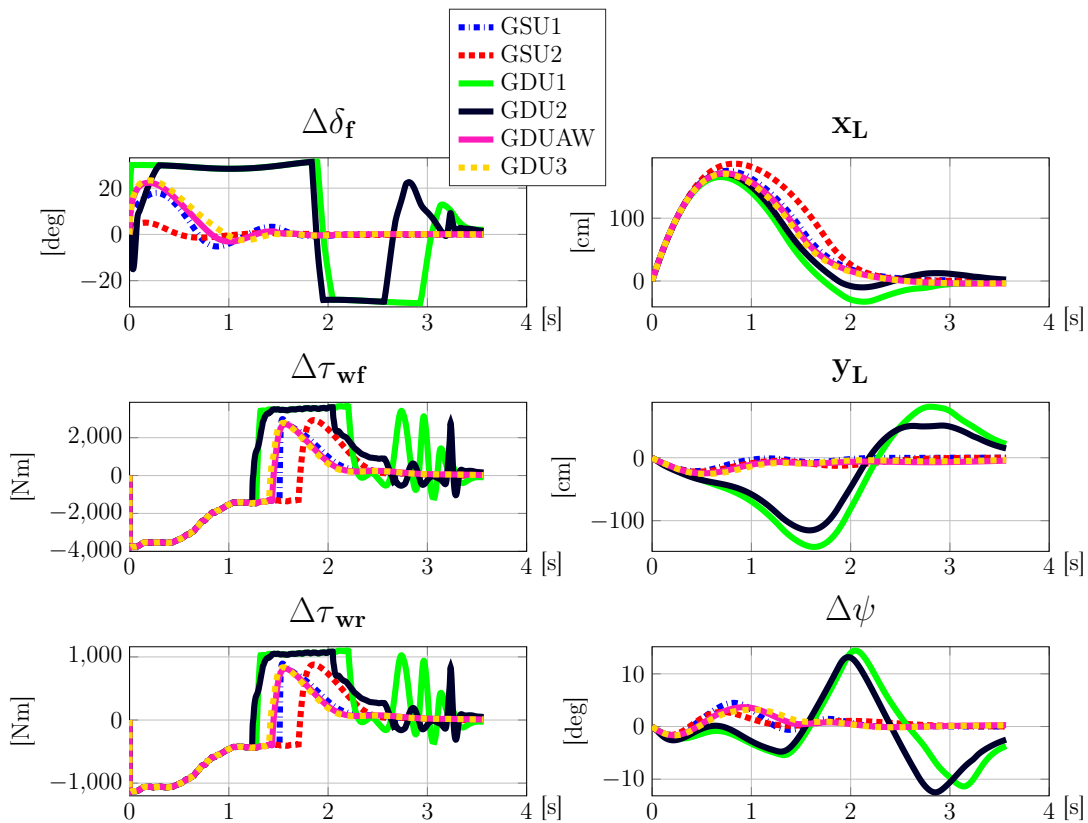


FIGURE 7.23 – Manœuvre d’évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : signaux de commande et erreurs de position et de lacet.

d’évitement. Cela est en partie dû à la saturation des signaux de commande, plus particulièrement de l’angle de braquage $\Delta\delta_f$, qui en revanche ne saturer pas pour les autres correcteurs. On s’est également intéressés à comparer les forces des pneus obtenues avec les correcteurs GDU1 et GDUAW dans ce scénario

de simulation. Dans ce cas aussi le correcteur GDUAW conduit significativement à la saturation des forces des pneus longitudinales, mais cela est compréhensible en considérant le large écart initial de vitesse longitudinale et le fait que la trajectoire de référence prévoit déjà le freinage du véhicule. En revanche, la sollicitation des forces latérales des pneus est plus faible pour le correcteur GDUAW que pour le correcteur GDU1.

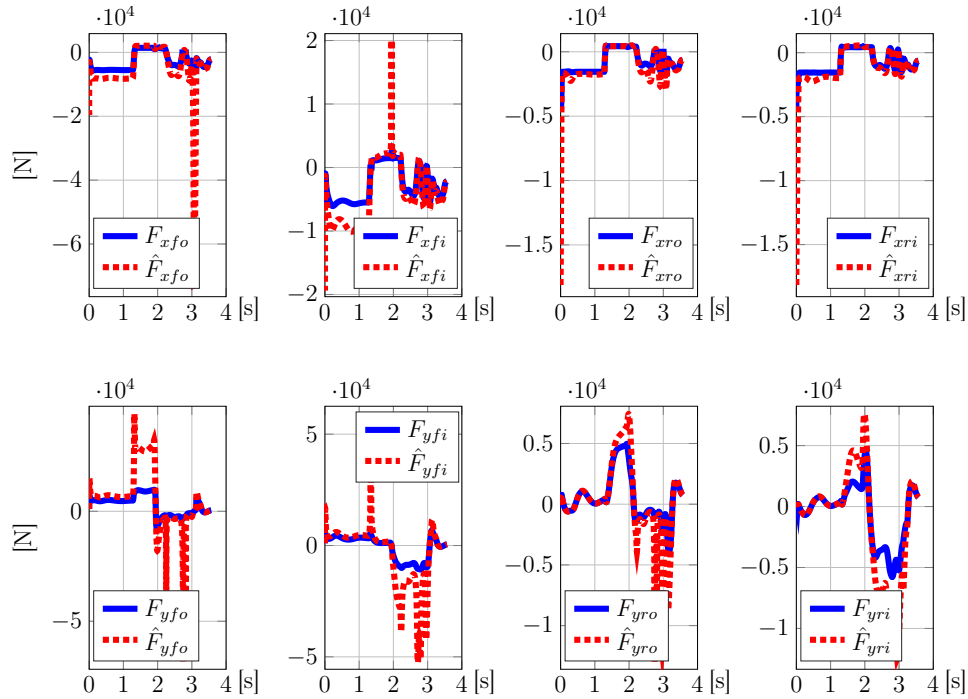


FIGURE 7.24 – Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDU1.

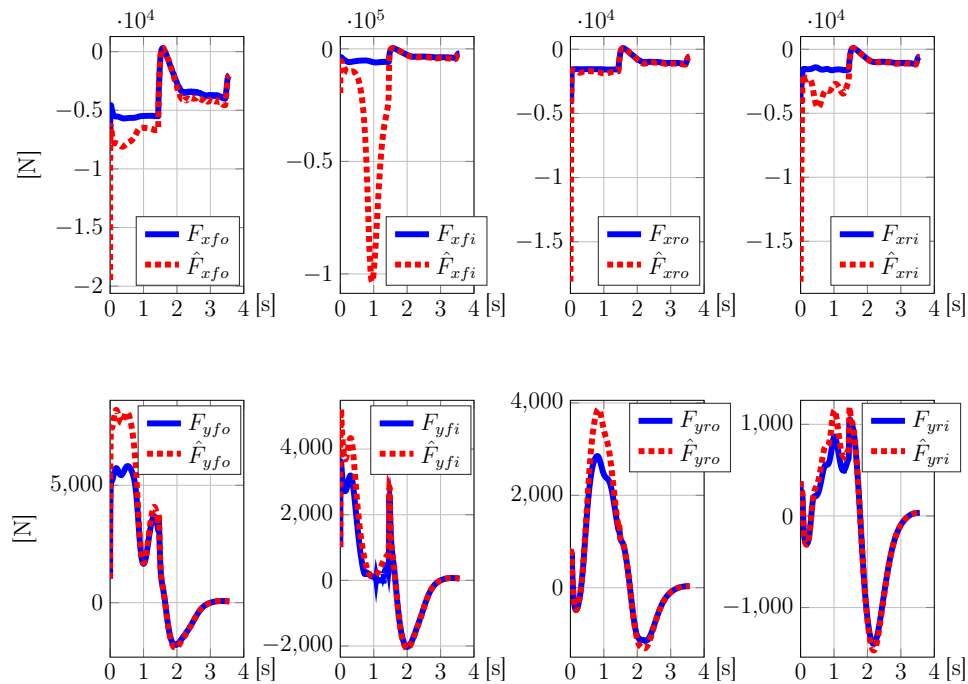


FIGURE 7.25 – Manœuvre d'évitement avec freinage et conditions initiales non nulles : forces des pneus, correcteur GDUAW.

7.4 Conclusion sur la synthèse avec l'approche LPV *grid-based*

Dans ce chapitre l'approche LPV *grid-based* a été explorée pour la synthèse des correcteurs pour la stabilisation du véhicule autour des différentes manœuvres d'évitement. En opposition à l'approche LPV polytopique, cette deuxième approche a permis d'utiliser le modèle linéarisé du véhicule avec les saturations des forces des pneus représentées comme des non-linéarités de secteur en entrée du système. Cela a été utile pour la prise en compte de ces saturations dans la synthèse des correcteurs. De plus, l'approche LPV *grid-based* a également permis d'utiliser les variables d'état et les entrées du système comme paramètres variables, en limitant les approximations pour le modèle LPV. Dans ce cas aussi le domaine de variation des paramètres a été choisi de sorte à contenir les deux trajectoires de référence considérées. Le modèle qNLPV contient donc toutes les trajectoires dont la dynamique est inférieure ou égale à celle de la manœuvre d'évitement sans freinage et de celle avec freinage. La stabilité et la performance de la boucle fermée sont donc garanties sur cet ensemble de trajectoires. Le modèle qNLPV *grid-based* a été utilisé pour la synthèse de six correcteurs, dont un résumé est présenté dans la Table 7.6. La synthèse des correcteurs a été faite par moyen de la résolution de problèmes d'optimisation

	Correcteur	Contraintes considérées
Correcteurs statiques	GSU1	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI
	GSU2	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande sans <i>anti-windup</i> saturations des signaux des forces des pneus
Correcteurs dynamiques	GDU1	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI
	GDU2	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les forces des pneus
	GDUAW	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande avec <i>anti-windup</i> saturations des signaux des forces des pneus
	GDU3	minimisation de la norme H_∞ pour les sorties contrôlées minimisation de la norme H_2 -généralisée pour les signaux de commande placement des pôles dans une région LMI saturations des signaux de commande sans <i>anti-windup</i> saturations des signaux des forces des pneus

TABLE 7.6 – Résumé des correcteurs obtenus avec l'approche LPV *grid-based*.

avec contraintes LMI. L'estimation empirique de la région d'attraction pour les directions de la vitesse longitudinale et latérale et l'analyse des simulations du système en boucle fermée avec les différents correcteurs ont été présentées. Elles montrent que les correcteurs obtenus avec l'approche LPV *grid-based* stabilisent les trajectoires du véhicule autour des deux trajectoires de référence considérées, malgré des conditions initiales élevées et la saturation des signaux de commande et des forces des pneus. Contrairement aux correcteurs obtenus avec l'approche LPV polytopique, les correcteurs dynamiques ne semblent pas avoir une meilleure performance par rapport aux correcteurs statiques. L'utilisation des non-linéarités de secteur en entrée du système pour prendre en compte les saturations des signaux de commande et des forces des pneus pour la synthèse des correcteurs a donné des résultats satisfaisants dans les cas statique et dynamique. La performance de la boucle fermée est significativement améliorée dans les deux cas.

Dans le chapitre 8, d'autres simulations complémentaires réalisées avec les correcteurs développés avec le modèle à haute représentativité MADA seront présentées. Plus particulièrement ces simulations seront utilisées pour analyser la robustesse de la boucle fermée vis à vis des incertitudes paramétriques, de modélisation et le rejet des perturbations liées à la pente et au dévers de la route. De plus, les correcteurs obtenus avec les approches LPV polytopique et *grid-based* seront comparés.

SIMULATION ET VALIDATION DES CORRECTEURS

Sommaire

8.1 Scénarios de simulation	157
8.2 Analyse des résultats de simulation	160
8.2.1 Analyse numérique des résultats	160
8.2.2 Analyse détaillée des trajectoires	165
8.3 Conclusion	173

Dans ce chapitre, des résultats de simulation sont présentés pour valider et comparer les performances obtenues avec les correcteurs conçus dans les chapitres 6 et 7. Des simulations ont été effectuées avec le modèle à haute représentativité MADA (*Modélisation Avancée de Dynamique Automobile*), utilisé dans le chapitre 3 pour la validation des modèles de dynamique véhicule du chapitre 1. Le modèle MADA, qui inclut la modélisation de plusieurs sous-systèmes du véhicule, comme par exemple la direction, le moteur, le système de freinage et le châssis, permettra d'évaluer le comportement en boucle fermée avec les différents correcteurs dans un cadre le plus proche possible d'un véhicule d'essai, mais avec les avantages d'un environnement de simulation : répétabilité des scénarios de simulation et modification facile des paramètres du véhicule et du sol.

Dans la section 8.1 les différents scénarios de simulation sont présentés. Ils ont été choisis pour évaluer le comportement en boucle fermée vis-à-vis des incertitudes paramétriques, et de modélisation, et le rejet des perturbations dues à l'inclinaison du sol. Dans la section 8.2 les résultats de simulation seront analysés. Dans un premier temps, une analyse numérique est présentée, afin de fournir un panorama du système en boucle fermée avec les différents correcteurs à travers les scénarios évoqués. Dans un deuxième temps, une analyse détaillée permettra de confirmer les observations déduites d'après l'analyse numérique et de comparer plus en détail le comportement en boucle fermée avec les différents correcteurs. Enfin, ce chapitre se terminera par la section 8.3 présentant les conclusions sur les différentes méthodes de synthèse des correcteur déduites d'après l'analyse des simulations.

8.1 Scénarios de simulation

Dans cette section, les scénarios de simulation étudiés dans ce chapitre sont présentés. L'ensemble de simulations sont exécutées avec le modèle à haute représentativité MADA (*Modélisation Avancée de Dynamique Automobile*) MUSTAKI 2019, présenté et utilisé dans le chapitre 3 pour la validation des modèles de dynamique du véhicule. Comme évoqué précédemment, le modèle MADA a été conçu par Renault pour réaliser les simulations pendant les phases de développement des projets véhicules. Il incorpore le modèle détaillé de plusieurs sous-systèmes du véhicule : direction, moteur, freins, châssis et d'autres encore. Les simulations ont été effectuées avec un véhicule à motorisation électrique dont les paramètres sont ceux utilisés dans le chapitre 3 pour la validation des modèles de dynamique véhicule. Ils sont rappelés dans la Table 8.1. Les deux manœuvres d'évitement présentées dans la section 6.2 sont utilisées. On rappelle qu'il s'agit des deux manœuvres suivantes :

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
m	2051 kg	m_u	240 kg	m_s	1811 kg
I_{xx}	753 kg m ²	I_{yy}	3192 kg m ²	I_{zz}	3625 kg m ²
$I_{u_{xx}}$	377 kg m ²	$I_{u_{yy}}$	461 kg m ²	$I_{u_{zz}}$	584 kg m ²
$I_{s_{xx}}$	376 kg m ²	$I_{s_{yy}}$	2731 kg m ²	$I_{s_{zz}}$	3041 kg m ²
ℓ_w	1,582 m	ℓ_f	1,126 m	ℓ_r	1,54 m
L	2,666 m	ℓ_{fu}	1,295 m	ℓ_{ru}	1,371 m
ℓ_{fs}	1,104 m	ℓ_{rs}	1,562 m	h	0,637 m
h_u	0,344 m	h_s	0,676 m	h_r	0,48 m
I_{wy}	1,87 kg m ²	r_e	0,344 m	μ	1
$c_{\alpha f}$	103592 N/rad	$c_{\alpha r}$	83833 N/rad	$c_{\kappa f}$	144817 N
$c_{\kappa r}$	112223 N	f_{rf}	0,015	f_{rr}	0,015
ρ	1,225 kg/m ³	C_d	0,35	A_f	2,23 m ²
$\ell_{susp f}$	0,133 m	$\ell_{susp r}$	0,17 m	k_{sf}	44190 N/m
k_{sr}	27821 N/m	k_{df}	1480 N s/m	k_{dr}	2618 N s/m
$k_{\phi f}$	35000 N m/rad	$k_{\phi r}$	16000 N m/rad		

TABLE 8.1 – Paramètres du véhicule.

- *manœuvre d'évitement sans freinage* : un changement de deux voies, correspondant à un déplacement latéral d'environ 6 m, avec le véhicule en roue libre et une vitesse longitudinale initiale d'environ 70 km/h ;
- *manœuvre d'évitement avec freinage* : un changement de voie, correspondant à un déplacement latéral d'environ 3 m, avec freinage et la vitesse longitudinale qui évolue d'environ 84 km/h à 35 km/h.

Dans les Figures 8.1 - 8.4 les commandes nominales $\delta_{f0}(t)$ et $\tau_{wf0}(t)$, les évolutions du déplacement latéral et de la vitesse longitudinale du véhicule le long des deux trajectoires de référence sont présentées. Ces manœuvres sont simulées dans des conditions différentes, pour la validation de la boucle fermée avec

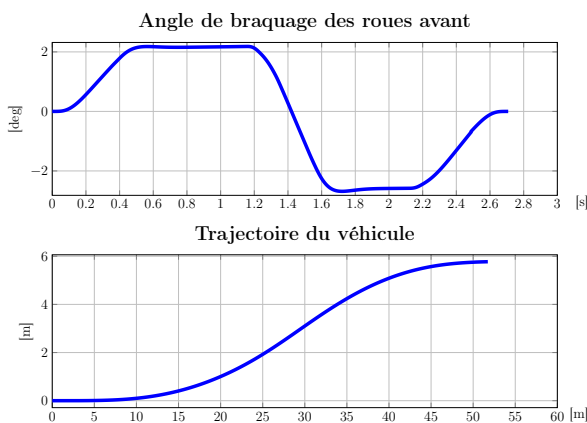


FIGURE 8.1 – Manœuvre d'évitement sans freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.

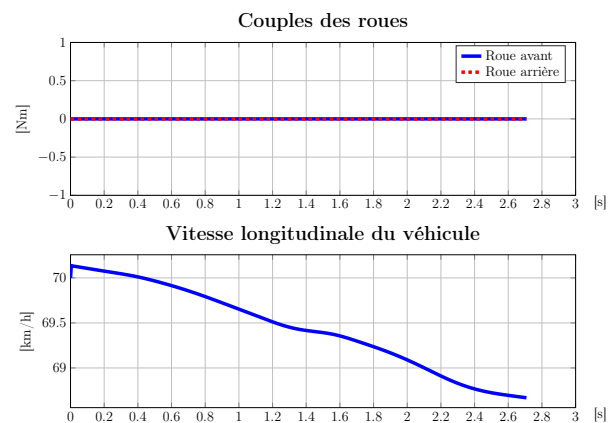


FIGURE 8.2 – Manœuvre d'évitement sans freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

des conditions initiales différentes de zéro, des perturbations en entrée du système et des dispersions paramétriques. Les scénarios de simulation considérés sont :

- *scénario 1* : cas nominal, avec conditions initiales égales à zéro et valeurs nominales des paramètres du véhicule ; ce scénario permet d'observer l'action du correcteur induite par les incertitudes de

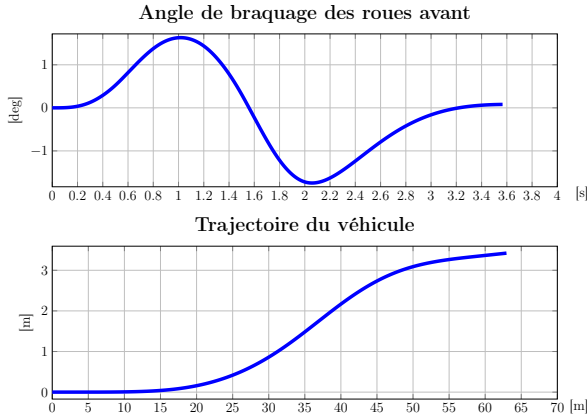


FIGURE 8.3 – Manœuvre d'évitement avec freinage : angle de braquage et trajectoire du véhicule.

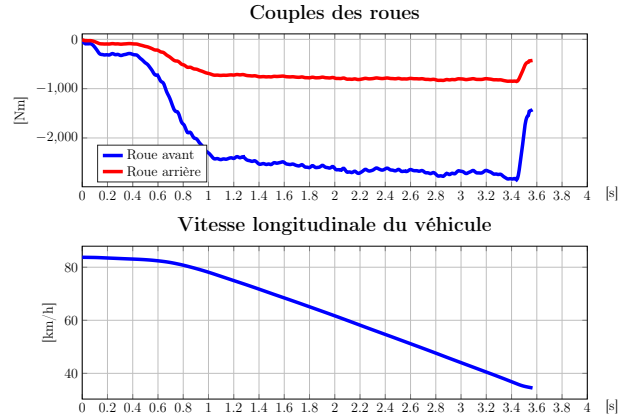


FIGURE 8.4 – Manœuvre d'évitement avec freinage : couples roues et vitesse longitudinale.

modélisation et l'erreur de la commande nominale ;

- *scénario 2* : condition initiale du système de $\Delta v(0) = 5 \text{ km/h}$;
- *scénario 3* : condition initiale du système de $\Delta v(0) = -5 \text{ km/h}$;
- *scénario 4* : condition initiale du système de $\Delta \psi(0) = -5 \text{ deg}$; il n'est pas possible de spécifier avec le modèle MADA une condition initiale non nulle pour la vitesse latérale u ou la vitesse de lacet r ; par conséquent le comportement de la boucle fermée induite par une condition initiale non nulle pour la dynamique latérale est testée à travers l'écart initial d'angle de lacet ;
- *scénario 5* : la manœuvre est réalisée sur une route avec une pente de -10% , donc avec un angle $\theta_y = 5,71 \text{ deg}$;
- *scénario 6* : la manœuvre est réalisée sur une route avec une pente de $+10\%$, donc avec un angle $\theta_y = -5,71 \text{ deg}$;
- *scénario 7* : la manœuvre est réalisée sur une route avec un dévers de 10% vers la droite du véhicule, donc avec un angle $\theta_x = 5,71 \text{ deg}$;
- *scénario 8* : la manœuvre est réalisée sur une route avec un dévers de 10% vers la gauche du véhicule, donc avec un angle $\theta_x = -5,71 \text{ deg}$;
- *scénario 9* : la manœuvre est réalisée sur une route avec un coefficient de frottement pneu-sol μ égal à $0,5$;
- *scénario 10* : la manœuvre est réalisée sur une route avec un coefficient de frottement pneu-sol μ égal à $0,4$;
- *scénario 11* : la manœuvre est réalisée sur une route avec un coefficient de frottement pneu-sol μ variable et compris entre $0,3$ et $0,5$;
- *scénario 12* : la manœuvre est réalisée avec un véhicule dont les coefficients de raideur longitudinale et latérale des pneus sont égaux à la moitié des valeurs nominales : $c_{\kappa f} = 72409 \text{ N}$, $c_{\kappa r} = 56112 \text{ N}$, $c_{\alpha f} = 51796 \text{ N/rad}$ et $c_{\alpha r} = 41917 \text{ N/rad}$;
- *scénario 13* : la manœuvre est réalisée avec un véhicule chargé avec plusieurs passagers et bagages, conduisant à la masse véhicule $m = 2386 \text{ kg}$ (335 kg en plus de la valeur nominale) ;
- *scénario 14* : dans ce scénario plusieurs éléments qui perturbent la manœuvre sont combinés
 - les conditions initiales du système différentes de zéro sont $\Delta v(0) = 3 \text{ km/h}$ et $\Delta \psi(0) = -2 \text{ deg}$,
 - les angles de dévers et de pente de la route sont $\theta_x = 1,72 \text{ deg}$ et $\theta_y = 2,86 \text{ deg}$, qui correspondent à une inclinaison vers la droite de 3% et en descente de -5% ,
 - le coefficient de frottement pneu-sol μ est égal à $0,5$,
 - la masse du véhicule est $m = 2386 \text{ kg}$.

Toutes les simulations sont réalisées avec un horizon temporel de 10 s , pour observer la convergence des trajectoires, après la fin de la manœuvre d'évitement d'obstacle. Pour cela, après la fin de la manœuvre d'évitement, le véhicule est maintenu à vitesse constante et en ligne droite.

Dans les Figures 8.5 et 8.6 les erreurs de position et d'angle de lacet sont montrées pour les deux trajectoires de référence dans le cas nominal en boucle ouverte, c'est-à-dire avec uniquement les entrées nominales exprimées par (4.7) et (4.12), présentées dans la section 4.1. On constate que les erreurs ne

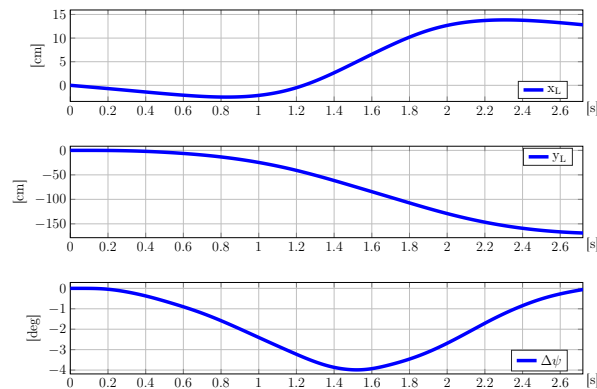


FIGURE 8.5 – Manœuvre d'évitement sans freinage : erreurs avec la commande nominale.

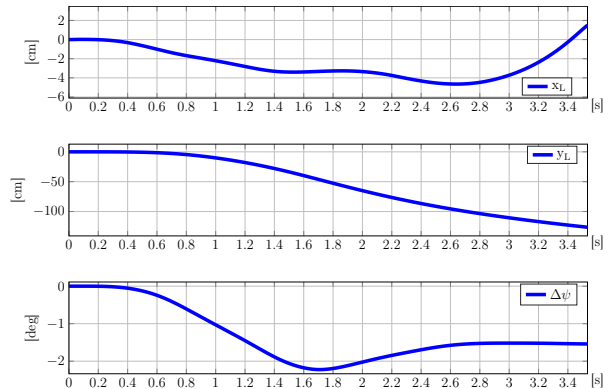


FIGURE 8.6 – Manœuvre d'évitement avec freinage : erreurs avec la commande nominale.

sont pas égales à zéro, à cause des approximations faites pour le calcul de la commande nominale. Plus particulièrement, l'erreur latérale est significativement importante. L'action des correcteurs ne sera donc pas nulle, même pour le scénario 1 de simulation.

8.2 Analyse des résultats de simulation

Dans cette section, l'analyse des résultats des simulations pour les différents scénarios avec les deux manœuvres d'évitement est effectuée. Tout d'abord, dans la section 8.2.1, une analyse numérique des résultats de simulation est proposée afin d'évaluer le comportement global des correcteurs. Dans un deuxième temps, section 8.2.2, une analyse plus en détail est réalisée pour certains scénarios de simulation, permettant de confirmer les observations de la section 8.2.1 et de comparer les différents correcteurs.

8.2.1 Analyse numérique des résultats

Dans cette section on réalise une analyse numérique des résultats de simulation pour les différents scénarios présentés dans la section 8.1 sur les deux trajectoires de référence considérées en utilisant les correcteurs développés dans les chapitres 6 et 7. Les observations du comportement des erreurs de position longitudinale x_L et latérale y_L sont l'objet de cette analyse. En effet, ces variables sont les plus importantes, au regard de l'objectif d'avoir une erreur nulle vis-à-vis de la trajectoire de référence. L'annulation de l'erreur d'angle de lacet $\Delta\psi$ n'est pas prioritaire dans le cadre d'une manœuvre d'urgence. Dans ces conditions, on estime qu'une erreur d'angle de lacet $\Delta\psi$ non nulle est acceptable afin de réduire les erreurs de position. Pour définir un critère d'évaluation unique on considère la norme du vecteur de distance entre le véhicule et la trajectoire de référence, exprimée par :

$$d_L = \sqrt{x_L^2 + y_L^2}. \quad (8.1)$$

Les résultats de simulation sont évalués par la fonction de coût suivante :

$$J = \max(d_L) + \sigma_{d_L} \quad (8.2)$$

où σ_{d_L} est l'écart type de la distance d_L du véhicule par rapport à la trajectoire de référence. Le coût (8.2) permet de quantifier la proximité à la trajectoire de référence. Les Tables 8.2 et 8.3 présentent les valeurs du coût (8.2) pour les différents scénarios de simulation, respectivement pour les manœuvres d'évitement sans et avec freinage. Les valeurs plus faibles et les valeurs plus importantes ont été soulignées en vert et en rouge. Enfin le coût moyen des différents scénarios est présenté pour chaque correcteur. D'après les résultats présentés, il est possible de constater qu'un seul correcteur ne permet pas d'obtenir le meilleur coût sur l'ensemble de critères considérés. En revanche, on observe que le correcteur statique GSU1 obtenu avec l'approche LPV *grid-based* est celui qui conduit au coût le plus bas dans la majorité des scénarios de simulation. Malgré cela, ce correcteur ne permet pas d'obtenir le coût moyen le plus bas pour les deux manœuvres. Les résultats de la Table 8.4, où les correcteurs ont été ordonnés par coût

Manœuvre d'évitement sans freinage											
Scénario	PSU1	PSU2	PDU1	PDU2	PDUAW	GSU1	GSU2	GDU1	GDU2	GDU3	GDUAW
1	0,069	0,036	0,023	0,022	0,021	0,020	0,062	0,034	0,030	0,020	0,019
2	0,778	0,562	0,388	0,403	0,403	0,427	0,412	1,129	15,958	0,524	0,399
3	0,917	0,920	0,919	0,919	0,919	0,919	0,916	1,327	1,158	0,966	0,917
4	0,736	0,757	0,776	0,799	0,803	0,752	0,715	0,798	0,954	0,744	0,741
5	0,072	0,035	0,019	0,028	0,034	0,019	0,064	0,052	0,022	0,021	0,020
6	0,066	0,038	0,028	0,027	0,028	0,023	0,064	0,036	0,056	0,034	0,033
7	0,168	0,102	0,070	0,039	0,039	0,030	0,150	0,052	0,040	0,038	0,040
8	0,159	0,093	0,032	0,034	0,036	0,027	0,140	0,033	0,040	0,045	0,047
9	0,915	0,684	0,403	0,409	0,408	0,307	0,948	0,401	0,330	0,401	0,404
10	13,578	2,096	2,714	2,972	2,973	4,511	2,744	2,446	2,719	2,562	2,656
11	1,673	1,311	1,061	1,081	1,098	1,100	1,785	3,294	0,998	0,944	0,938
12	0,093	0,055	0,022	0,022	0,021	0,021	0,088	0,031	0,027	0,024	0,026
13	0,130	0,087	0,039	0,039	0,039	0,032	0,126	0,045	0,803	0,039	0,042
14	2,360	1,677	8,333	8,839	7,976	8,597	2,002	7,281	8,431	9,462	8,289
	1,551	0,604	1,059	1,117	1,057	1,199	0,730	1,211	2,255	1,130	1,041

TABLE 8.2 – Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement sans freinage.

Manœuvre d'évitement avec freinage											
Scénario	PSU1	PSU2	PDU1	PDU2	PDUAW	GSU1	GSU2	GDU1	GDU2	GDU3	GDUAW
1	0,037	0,022	0,009	0,009	0,185	0,008	0,054	0,021	0,024	0,016	0,022
2	0,450	0,482	0,440	0,454	0,459	0,469	0,450	2,217	3,306	0,684	0,450
3	0,633	0,660	0,658	0,658	0,661	0,666	0,614	0,864	0,780	0,684	0,655
4	0,822	0,923	0,885	0,965	0,923	0,953	0,854	0,847	0,921	0,866	0,866
5	0,043	0,026	0,018	0,030	0,159	0,007	0,077	0,045	0,019	0,026	0,026
6	0,032	0,018	0,019	0,023	0,200	0,014	0,038	0,021	0,037	0,027	0,032
7	0,095	0,072	0,032	0,034	0,184	0,023	0,098	0,038	0,039	0,037	0,027
8	0,116	0,079	0,032	0,035	0,180	0,025	0,108	0,034	0,033	0,043	0,055
9	0,332	0,237	0,127	0,129	0,175	0,112	0,347	0,482	0,152	0,137	0,146
10	9,457	8,998	6,192	6,326	5,809	14,883	6,952	9,144	7,220	7,445	7,903
11	4,108	3,738	2,084	2,098	1,866	2,875	2,741	1,718	2,552	2,373	2,177
12	0,049	0,032	0,013	0,014	0,180	0,010	0,063	0,020	0,023	0,020	0,028
13	0,062	0,042	0,781	0,023	0,798	0,014	0,072	0,030	0,023	0,027	0,035
14	3,461	2,731	2,756	3,221	4,202	1,689	2,216	6,666	4,539	3,249	5,038
	1,407	1,290	1,003	1,001	1,141	1,553	1,049	1,582	1,405	1,117	1,247

TABLE 8.3 – Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement avec freinage.

moyen pour les deux trajectoires de référence et pour la totalité des simulations effectuées, permettent de constater que le correcteur GSU1 a le quatrième coût le plus élevé sur l'ensemble de simulations. En effet, en observant plus en détail les résultats des Tables 8.2 et 8.3, il existe différents scénarios de simulation où ce correcteur a un coût particulièrement élevé par rapport aux autres. Ainsi, parfois la performance du correcteur GSU1 est significativement inférieure à celle des autres. Au contraire, le correcteur GSU2, qui a rarement le coût plus faible pour un scénario de simulation en particulier, a le coût moyen le plus faible sur l'ensemble des simulations. Sa performance est donc plus régulière et dans les cas où il est moins performant il ne l'est pas significativement par rapport aux autres correcteurs.

Pour la construction des figures présentées dans la suite de cette section, une base de données a été

Manœuvre d'évitement sans freinage										
PSU2	GSU2	GDUAW	PDUAW	PDU1	PDU2	GDU3	GSU1	GDU1	PSU1	GDU2
0,604	0,730	1,041	1,057	1,059	1,117	1,130	1,199	1,211	1,551	2,255
Manœuvre d'évitement avec freinage										
PDU2	PDU1	GSU2	GDU3	PDUAW	GDUAW	PSU2	GDU2	PSU1	GSU1	GDU1
1,001	1,003	1,049	1,117	1,141	1,247	1,290	1,405	1,407	1,553	1,582
Le deux manœuvres d'évitement										
GSU2	PSU2	PDU1	PDU2	PDUAW	GDU3	GDUAW	GSU1	GDU1	PSU1	GDU2
0,889	0,947	1,031	1,059	1,099	1,123	1,144	1,376	1,396	1,479	1,830

TABLE 8.4 – Analyse des simulations pour la manœuvre d'évitement sans freinage.

considérée pour chaque correcteur : elle est constituée par un ensemble d'échantillons représentant l'évolution des erreurs longitudinale x_L et latérale y_L , et la distance d_L le long des résultats de simulation en boucle fermée. Les évolutions de ces variables ont été observées à une fréquence de 50 ms et, de cette façon, la base de données de chaque correcteur contient le même nombre d'échantillons. Le *diagramme en boîte* des erreurs longitudinale x_L , latérale y_L et de la distance d_L , représenté dans la Figure 8.7, confirme ce que traduit le coût moyen des correcteurs. Dans ce diagramme :

- le trait rouge représente la moyenne des valeurs,
- la boîte bleue représente l'écart interquartile, contenant les éléments du deuxième et troisième quartile,
- les barres noires, qui s'étendent aux extrémités de la boîte, représentent les valeurs maximale et minimale de la base de données.

Dans la Figure 8.7, les axes y sont représentés sur une échelle logarithmique afin de simplifier la représentation des valeurs d'amplitude très variée. Cette représentation permet de comparer de façon claire plusieurs aspects du comportement en boucle fermée. Par ordre de priorité, on estime que :

1. les valeurs maximale et minimale de x_L et y_L et la valeur maximale de d_L doivent être le plus proche possible de zéro, garantissant la minimisation de l'erreur dans le pire des cas,
2. l'écart interquartile de ces trois variables doit être le plus étroit possible et proche de zéro et la moyenne de d_L doit être faible, ce qui indique que l'erreur est la moins élevée possible dans la majorité des cas.

Dans un système voué à la sécurité, la minimisation du pire cas est privilégiée sur la performance du cas nominal, d'où le choix de prioriser les critères d'évaluation de cette manière. D'après cette la Figure 8.7 les points suivants peuvent être constatés.

- Les valeurs maximales et minimales pour les trois variables représentées appartiennent à GSU1, parmi tous les correcteurs. Cela confirme l'observation faite d'après l'analyse des coûts des correcteurs dans les différents scénarios de simulation, c'est-à-dire que l'écartement du véhicule de la trajectoire de référence est particulièrement important dans certains simulations.
- Les correcteurs GSU2 et PSU2, qui ont le coût moyen le plus faible parmi tous les correcteurs, ont des valeurs maximales et minimales significativement plus proches de zéro par rapport aux correcteurs GSU1 et PSU1. En général, on observe une corrélation élevée entre le classement des correcteurs présenté dans la Table 8.4 et la valeur maximale de d_L sur l'ensemble des scénarios de simulation.
- Pour l'ensemble des correcteurs :
 - l'écart interquartile de l'erreur longitudinale x_L est compris entre $\pm 4,5$ cm et entre ± 1 cm pour l'écart latéral y_L ,
 - dans 75% des échantillons, la distance d_L est inférieure à 10 cm¹.

On constate donc que dans la majorité des cas, la distance du véhicule par rapport à la trajectoire de référence est faible pour tous les correcteurs développés. Le point numéro 2 du paragraphe précédent est donc vérifié pour tous les correcteurs pour l'ensemble de résultats de simulation. La minimisation

1. A exclusion du correcteur GDU2 pour lequel le troisième quartile est à 25 cm.

de la distance maximale d_L , correspondant au point numéro 1, devient alors d'autant plus important pour l'évaluation des correcteurs.

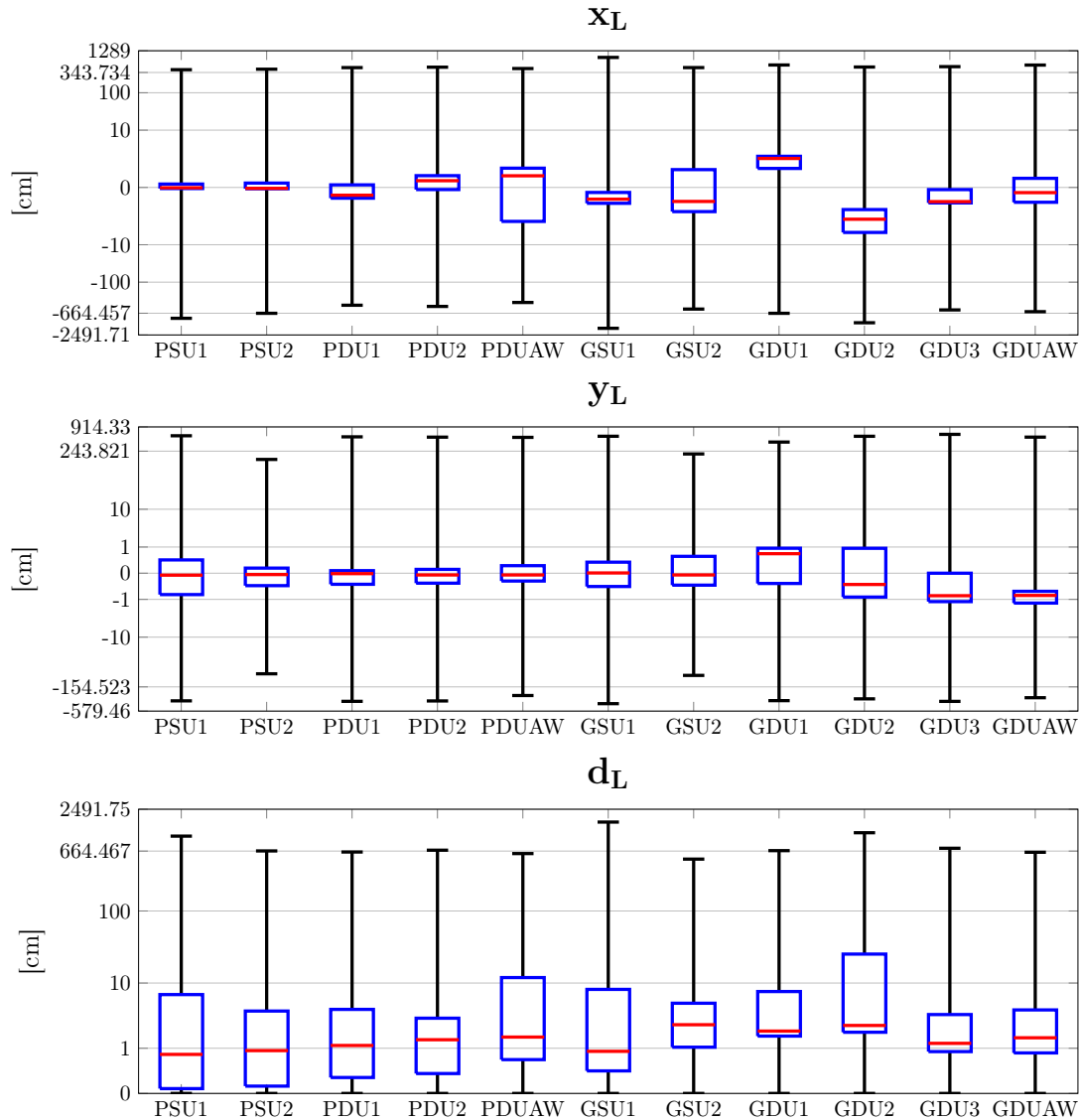


FIGURE 8.7 – Diagramme en boîte de l'erreur longitudinale x_L , latérale y_L et de la distance d_L .

L'histogramme des erreurs longitudinale x_L et latérale y_L et de la distance d_L , représenté dans la Figure 8.8, offre un autre point de vue des observations effectuées à partir des résultats présentés dans les Tables 8.2 - 8.4 et dans la Figure 8.7. Dans ce cas, les répartitions des erreurs longitudinale x_L et latérale y_L , et de la distance d_L sont présentées dans l'ensemble de scénarios de simulation pour chaque correcteur. Également dans ce cas, une échelle logarithmique a été utilisée pour représenter les axes y. Les aspects suivants sont à remarquer d'après la Figure 8.8.

- Une large majorité des valeurs des erreurs x_L et y_L et de la distance d_L est proche de zéro pour tous les correcteurs. Cela confirme à nouveau que dans la majorité des cas la distance entre le véhicule et la trajectoire de référence est faible, ce qui est satisfaisant.
- La répartition des valeurs met en évidence que les occurrences les plus éloignées de zéro de la distance d_L appartiennent aux correcteurs GSU1, GDU2 et PSU1 (indiqués respectivement par les couleurs jaune, marron et bleue dans la Figure 8.8), parmi les correcteurs avec les coûts moyens les plus élevés, dans la Table 8.4. Dans ce cas également, on confirme alors que le coût moyen est très fortement pénalisé par quelques scénarios où le système en boucle fermée avec ces correcteurs s'éloigne significativement de la trajectoire de référence.

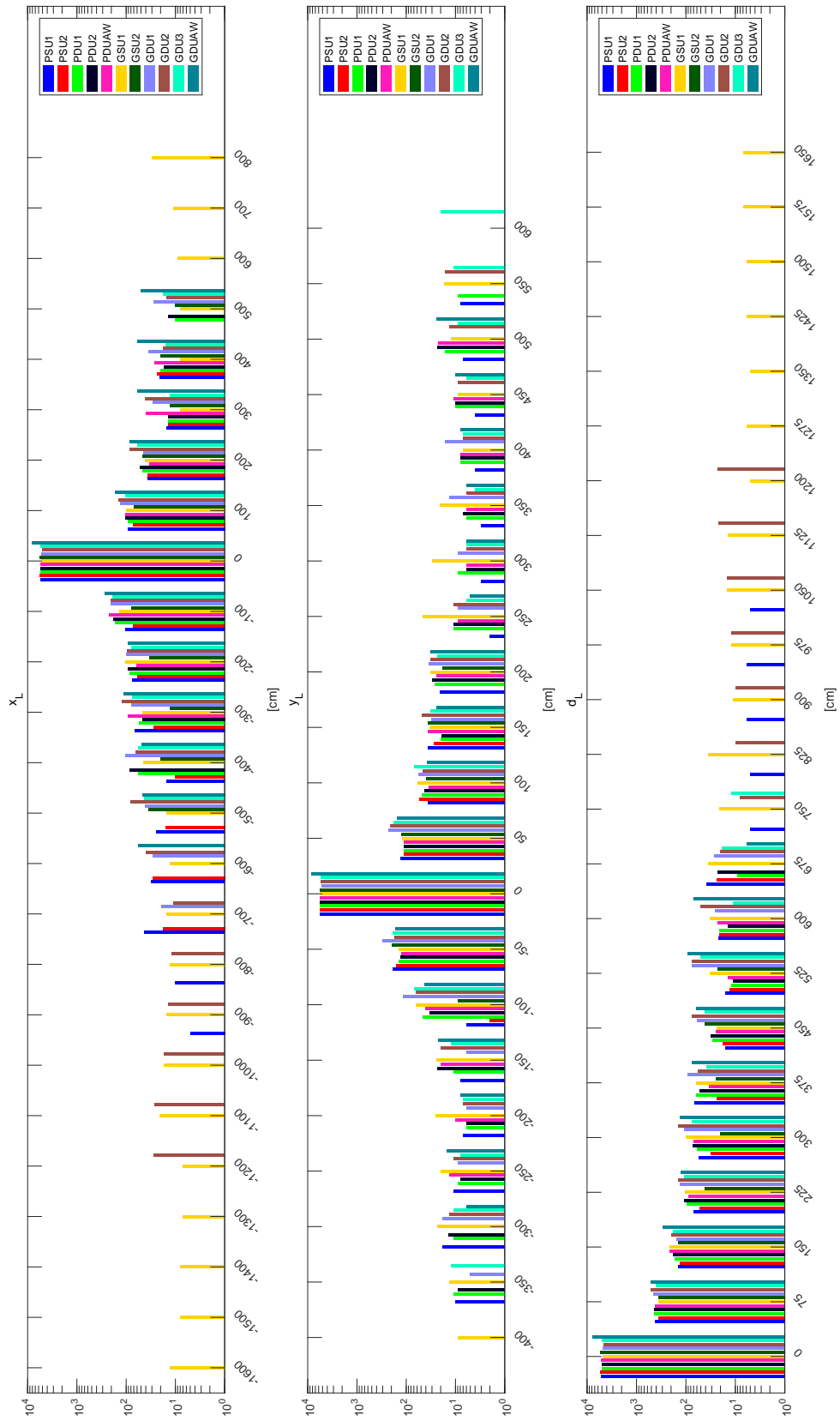


FIGURE 8.8 – Histogramme de l'erreur longitudinale x_L , latérale y_L et de la distance d_L .

- La distribution des erreurs longitudinale et latérale n'est pas symétrique par rapport à zéro. Cela est dû à la saturation non symétrique du couple des roues et au fait que les deux trajectoires de référence simulées déplacent le véhicule vers la gauche, comme il avait été précédemment remarqué dans les chapitres 6 et 7.

D'après les résultats présentés dans cette section, il est possible de conclure que, de manière générale, les correcteurs qui prennent en compte les non-linéarités de secteur en entrée du système² ont un comportement plus uniforme sur l'ensemble de simulations effectuées ; la performance en boucle fermée est moins dégradée dans le pire cas par rapport aux correcteurs qui ne prennent pas en compte de façon explicite ces non-linéarités. En revanche, il est compréhensible que ces derniers puissent avoir une meilleure performance pour certains scénarios où les saturations ne sont pas sollicitées. En effet, la prise en compte des non-linéarités de secteur élargit la région d'attraction de la boucle fermée sans forcément améliorer les autres indices de performance à l'intérieur de cette région. En estimant que le critère de décision numéro un pour le choix d'un correcteur conçu pour une fonction d'évitement d'obstacle soit sa capacité de stabiliser le véhicule dans le plus large ensemble de scénarios, il est alors raisonnable de conclure que les correcteurs pour lesquels les non-linéarités de secteur ont été considérées pendant la synthèse sont préférables. Il reste à établir quel choix doit être privilégié dans les choix des correcteurs parmi :

- les correcteurs statiques et dynamiques,
- les approches LPV polytopique ou *grid-based*,
- l'utilisation ou pas de l'*anti-windup* pour la saturation des signaux de commande.

En effet, l'analyse numérique n'offre pas une réponse claire à ces questions, qui seront alors traitées plus en détail dans l'analyse proposée dans la prochaine section.

8.2.2 Analyse détaillée des trajectoires

Dans cette section une analyse graphique de certaines simulations est proposée, pour une étude plus en détail des correcteurs. A la fin de la section 8.2.1, nous avons pu conclure que les correcteurs pour lesquels la synthèse prend en compte les non-linéarités de secteur en entrée du système produisent une meilleure performance sur l'ensemble des simulations. En effet, on a affirmé que les correcteurs qui ne prennent pas en compte ces non-linéarités ont une région d'attraction plus faible. Dans certains scénarios, où ces non-linéarités sont sollicitées, leur performance est alors très fortement dégradée. Pour cette raison, dans la première partie de cette section, les correcteurs pour lesquels la région d'attraction a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités de secteur sont considérés. Un panorama du comportement en boucle fermée avec ces correcteurs pour les différents scénarios de simulation est proposée. Dans la deuxième partie de la section, l'analyse détaillée de certains scénarios, sollicitant les non-linéarités de secteur, permet de confirmer les observations effectuées dans la section 8.2.1 concernant la taille de la région d'attraction.

Panoramique du comportement en boucle fermée

A présent, les correcteurs pour lesquels la région d'attraction en boucle fermée a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités de secteur sont considérés. En effet, comme constaté par l'analyse numérique présentée en section 8.2.1, ces correcteurs sont préférables. Plus particulièrement, un correcteur par type est considéré :

- correcteur statique PSU2,
- correcteur LPV dynamique PDU2,
- correcteur LPV dynamique PDUAW avec anti-windup pour la saturation des signaux de commande,
- correcteur statique GSU2,
- correcteur LPV dynamique GDU3,
- correcteur LPV dynamique GDUAW avec anti-windup pour la saturation des signaux de commande.

Le cas nominal, représenté par le scénario 1, est initialement analysé. Les Figures 8.9 et 8.10 présentent les résultats des simulations respectivement pour les manœuvres d'évitement sans et avec freinage. Dans

². Que ce soit pour les saturations des signaux de commande avec l'approche LPV polytopique (correcteurs PSU2, PDU2 et PDUAW), ou pour les saturations des signaux de commande et des forces des pneus avec l'approche LPV *grid-based* (correcteurs GSU2, GDU3 et GDUAW).

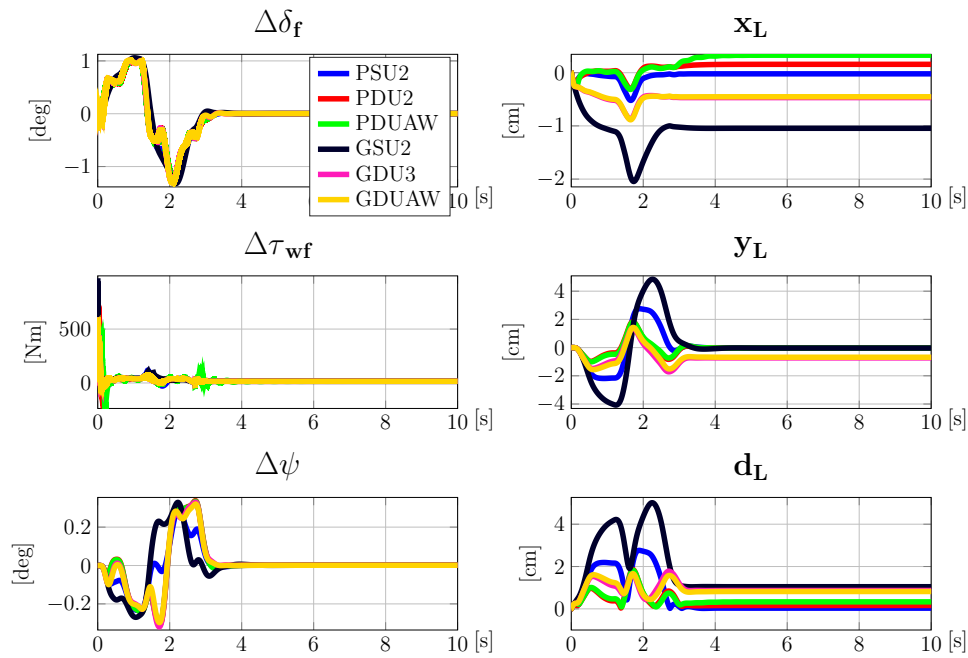


FIGURE 8.9 – Scénario 1, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

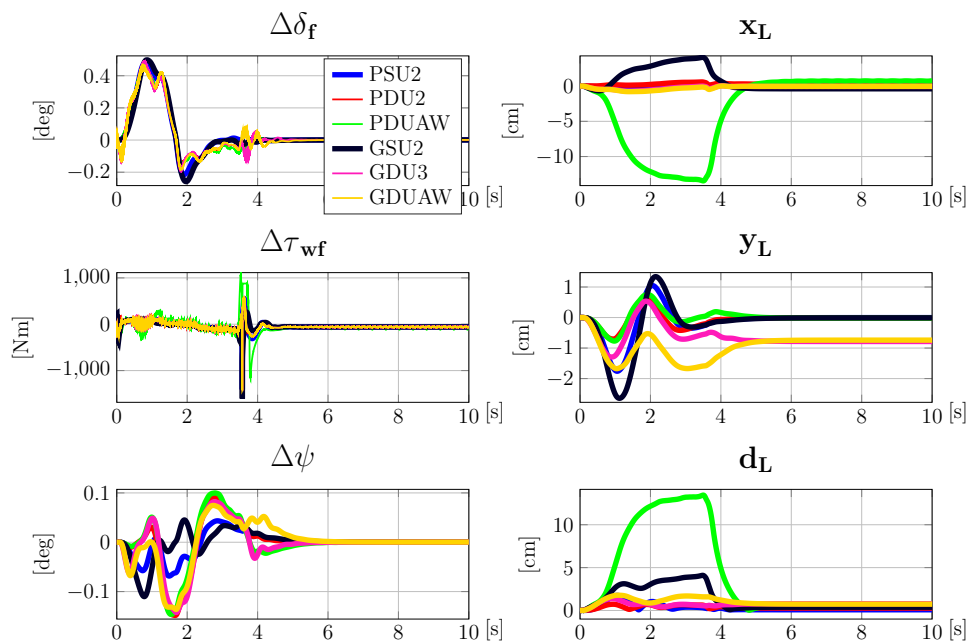


FIGURE 8.10 – Scénario 1, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

la section 8.1, on a montré dans les Figures 8.5 et 8.6 les erreurs de position longitudinale x_L , latérale y_L et d'angle de lacet $\Delta\psi$ pour le véhicule asservi uniquement par la commande nominale en boucle ouverte dans le cas nominal. Ces signaux montrent que la commande nominale ne réalise pas la trajectoire de référence et plus particulièrement l'erreur latérale dépasse significativement 1 m à la fin de la manœuvre d'évitement. En revanche, il est possible d'observer dans les Figures 8.9 et 8.10 qu'en boucle fermée avec les six correcteurs la trajectoire converge et que les erreurs de position et d'angle restent très faibles. Pour la manœuvre d'évitement avec freinage, on constate que l'erreur longitudinale x_L avec le correcteur PDUAW est considérablement plus importante qu'avec les autres correcteurs. Il est difficile d'établir exactement la raison de cette erreur, mais si on observe plus en détail la commande $\Delta\tau_{wf}$ issue du correcteur PDUAW, présentée dans la Figure 8.11, et qu'on la compare avec celle issue du correcteur

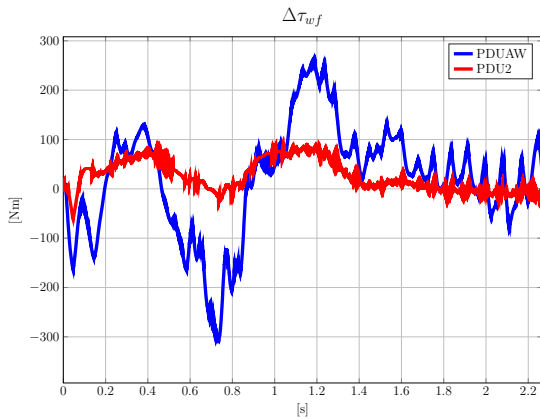


FIGURE 8.11 – Scénario 1, évitement avec freinage : comparaison de $\Delta\tau_{wf}$ pour les correcteurs PDU2 et PDUAW.

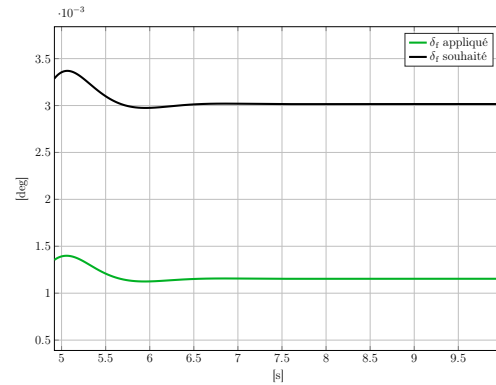


FIGURE 8.12 – Scénario 1, évitement sans freinage, correcteur GSU2 : comparaison entre δ_f souhaité et appliqué.

PDU2, il est possible de constater qu'au début de la manœuvre, le correcteur PDUAW demande un couple négatif, conduisant au ralentissement du véhicule et causant une erreur négative. Il est important de souligner que cette erreur est corrigée à la fin de la manœuvre d'évitement et que le véhicule ne diverge pas par rapport à la trajectoire de référence. Enfin, on observe dans les Figures 8.9 et 8.10 qu'une faible erreur statique est présente sur la position longitudinale x_L et parfois la position latérale y_L . La simulation pour la manœuvre d'évitement sans freinage avec le correcteur GSU2 est par exemple considérée pour comprendre ce phénomène. La Figure 8.12 présente la comparaison des commandes δ_f souhaitée et appliquée dans la deuxième partie de cette simulation, quand la boucle fermée présente une erreur statique de position. On observe qu'une faible erreur entre le δ_f souhaité et appliqué persiste, même quand les signaux se stabilisent à une valeur constante. Une commande non nulle est donc calculée par le correcteur, proportionnelle à l'erreur statique, mais la commande appliquée est plus faible et cela ne permet pas d'éliminer l'erreur statique. Dans les chapitres 6 et 7, pour lesquels les correcteurs ont été simulés avec le modèle non-linéaire quatre roues avec suspensions, ce problème n'est pas présent. Pour commander le modèle MADA, l'angle de braquage des roues δ_f doit être traduit en angle volant. Cette étape, pas nécessaire pour le modèle quatre roues avec suspensions, pourrait donc contribuer à la présence de l'erreur statique. Le coefficient de démultiplication entre le volant et les roues n'est pas constant et il a été estimé empiriquement pour différentes valeurs de l'angle de braquage δ_f . En revanche, il est possible qu'une erreur dans l'estimation de ce coefficient soit présente pour des faibles valeurs de δ_f , causant la différence observée dans la Figure 8.12 entre les angles souhaité et appliqué. Pour corriger cette erreur, la conversion de l'angle δ_f en angle volant doit donc être analysée. Au niveau de la synthèse des correcteurs, une action intégrale pourrait être ajoutée sur les variables x_L et y_L pour éliminer l'erreur statique.

La Figure 8.13 présente les résultats de simulation du scénario 2 pour la manœuvre d'évitement avec freinage. Ce cas est intéressant parce que la manœuvre est initialisée à une vitesse supérieure de 5 km/h par rapport à la trajectoire de référence, dont la commande nominale prévoit déjà le freinage. On observe que le système en boucle fermée avec les six correcteurs assure la convergence des signaux, permettant de freiner ultérieurement le véhicule, malgré le fait que le couple de freinage atteigne le seuil de saturation. Le comportement en boucle fermée est comparable avec tous les correcteurs, à part le correcteur GDU3, pour lequel l'angle $\Delta\delta_f$ est initialement plus important, en causant une erreur latérale. Un autre scénario intéressant pour observer le comportement en boucle fermée avec des conditions initiales différentes de zéro est le scénario 4, pour lequel l'erreur initiale d'angle de lacet est égale à -5 deg, c'est-à-dire où le véhicule est tourné vers la droite par rapport à la direction du véhicule le long de la trajectoire de référence. Dans ce cas, le comportement en boucle fermée est observé pour la manœuvre d'évitement sans freinage, qui prévoit un changement de deux voies à gauche. Dans ce cas également, le comportement en boucle fermée converge pour les correcteurs, mais on constate que les correcteurs dynamiques calculent un angle de braquage $\Delta\delta_f$ significativement plus important que les correcteurs statiques PSU2 et GSU2, ce qui conduit à une plus grande erreur longitudinale.

Les Figures 8.15 et 8.16 présentent des résultats de simulation où le véhicule est soumis à des perturbations dues à l'inclinaison de la route. Plus particulièrement, le scénario 5, dans lequel la route est

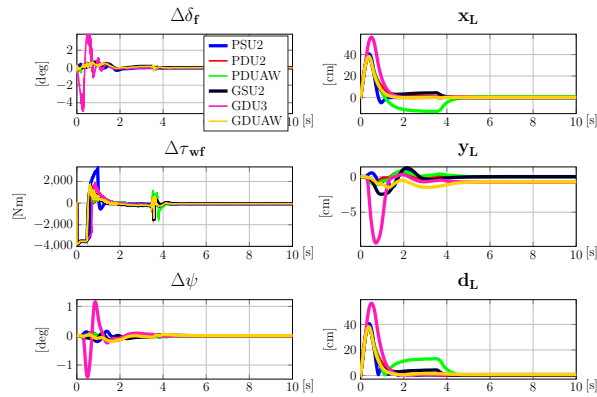


FIGURE 8.13 – Scénario 2, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

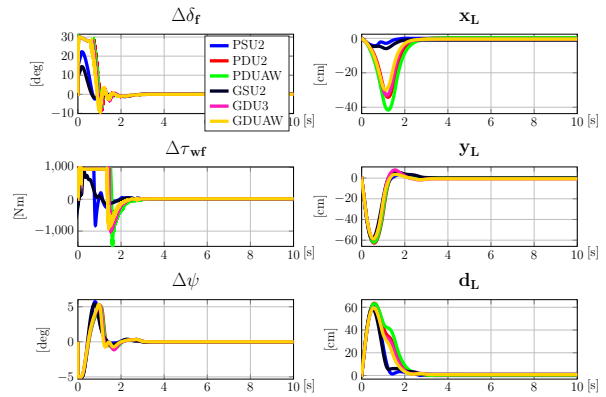


FIGURE 8.14 – Scénario 4, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

inclinée de 10% en descente, est représenté dans la Figure 8.15 pour la manœuvre d'évitement avec freinage et le scénario 7, avec une inclinaison de dévers de 10% vers la droite, est présenté dans la Figure 8.16 pour la manœuvre d'évitement sans freinage. Dans les deux cas, on constate que les erreurs longitudinale x_L et

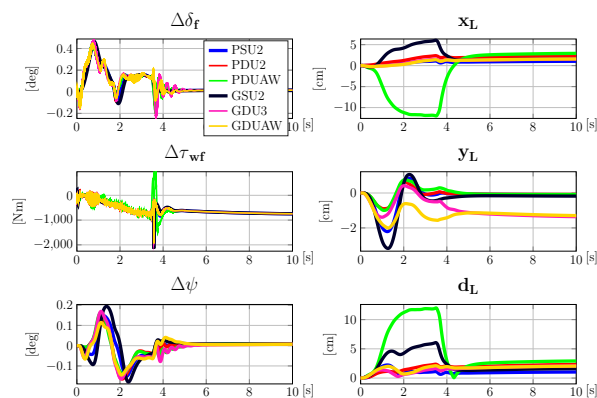


FIGURE 8.15 – Scénario 5, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

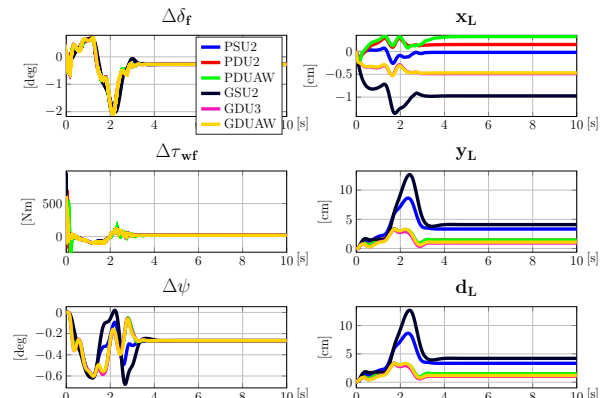


FIGURE 8.16 – Scénario 7, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

latérale y_L sont restreintes à des valeurs faibles, mais elles ne convergent pas vers zéro. Les Figures 8.17 et 8.18 présentent la différence entre les angles de braquage δ_f souhaité et appliqué dans la deuxième partie des simulations, respectivement pour le correcteur GDU3 dans le scénario 5 et le correcteur PSU2 dans le scénario 7. On observe que, dans les deux cas, l'écart entre l'angle de braquage souhaité et celui appliqué est plus important par rapport à celui observé dans la Figure 8.12. Par exemple, l'écart dans le scénario 7 avec le correcteur PSU2, présenté dans la Figure 8.18, correspond à un angle volant d'environ 1,5 deg, ce qui n'est pas négligeable. D'autre part, l'erreur statique sur la variable y_L est plus importante dans ce cas par rapport au scénario 1. Une corrélation est alors visible entre les erreurs statiques de y_L et l'écart des commandes δ_f souhaitée et appliquée. Par conséquent, les Figures 8.17 et 8.18 confirment, à notre avis, que la conversion de l'angle de braquage en angle volant joue un rôle dans les erreurs statiques observées.

Les scénarios 9, 12 et 13 permettent d'observer le comportement en boucle fermée avec des dispersions paramétriques. Plus particulièrement, on rappelle que dans le scénario 9 le coefficient de frottement μ pneu-sol est égal à 0,5, dans le scénario 12 la condition des pneus est considérée dégradée et les coefficients de raideur sont d'environ la moitié de la valeur nominale et dans le scénario 13 on considère que le véhicule est chargé de passagers et de bagages. Les Figures 8.19 - 8.21 présentent les résultats de simulation des scénarios 9, 12 et 13 pour la manœuvre d'évitement sans freinage. En boucle fermée les évolutions des différentes grandeurs convergent dans les trois cas avec tous les correcteurs. En général, on constate que les correcteurs dynamiques sont plus robustes aux dispersions paramétriques que les correcteurs statiques,

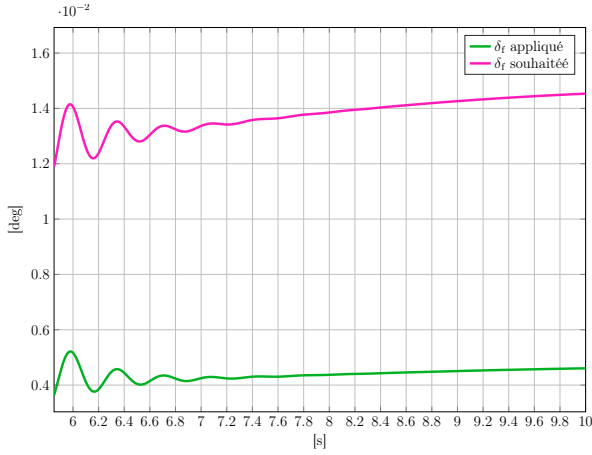


FIGURE 8.17 – Scénario 5, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : comparaison entre δ_f souhaité et mesuré.

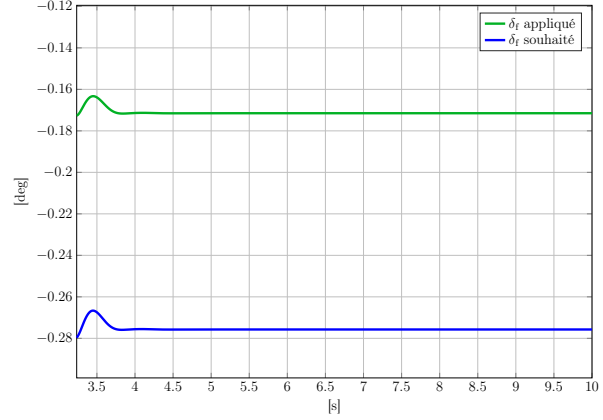


FIGURE 8.18 – Scénario 7, évitement sans freinage, correcteur PSU2 : comparaison entre δ_f souhaité et mesuré.

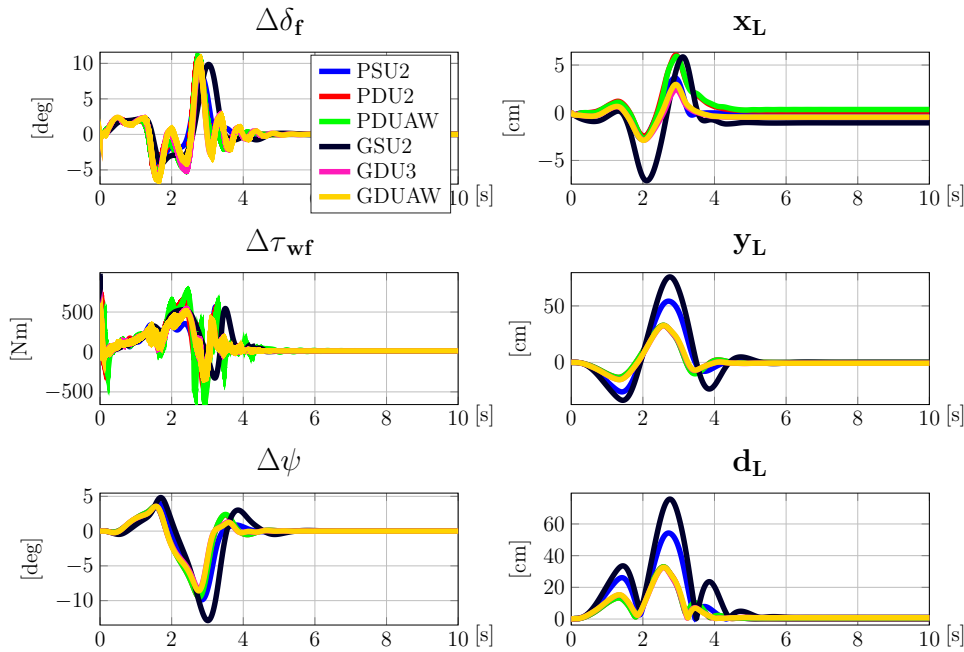


FIGURE 8.19 – Scénario 9, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

pour lesquels les erreurs de position et de lacet sont plus importantes.

Enfin la Figure 8.22 présente les résultats de simulation du scénario 14 pour la manœuvre d'évitement avec freinage. On rappelle que ce scénario considère :

- des conditions initiales du système différentes de zéro $\Delta v(0) = 3 \text{ km/h}$ et $\Delta \psi(0) = -2 \text{ deg}$,
- des angles de dévers et de pente de la route $\theta_x = 1,72 \text{ deg}$ et $\theta_y = 2,86 \text{ deg}$, qui correspondent à une inclinaison vers la droite de 3% et en descente de -5%,
- un coefficient de frottement pneu-sol μ égal à 0,5,
- une masse du véhicule $m = 2386 \text{ kg}$.

D'après la Figure 8.22, on constate que les deux correcteurs avec *anti-windup* ne semblent pas conduire à une meilleure performance que les correcteurs dynamiques sans *anti-windup*, en termes d'erreur de position et d'angle. De plus, il n'est pas possible d'affirmer avec certitude quelle approche LPV, polytopique ou *grid-based*, a abouti aux meilleurs résultats. En ce qui concerne les correcteurs statiques, dans ce scénario

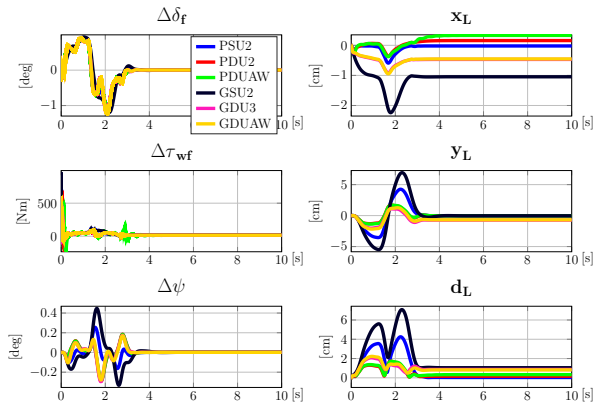


FIGURE 8.20 – Scénario 12, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

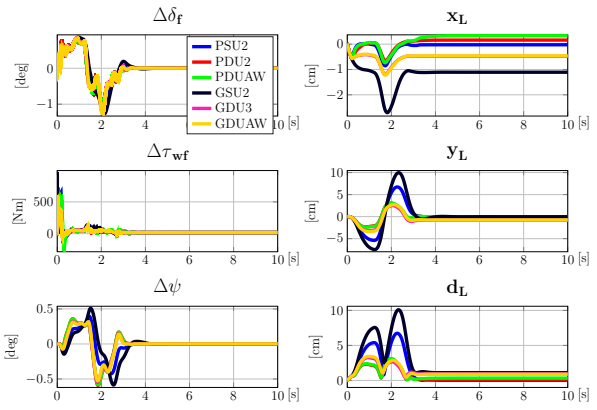


FIGURE 8.21 – Scénario 13, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

le correcteur GSU2 limite davantage les erreurs de position et d'angle de lacet que le correcteur PSU2. Au contraire, les correcteurs PDU2 et PDUAW ont un meilleur niveau de performance par rapport à GDU3 et GDUAW.

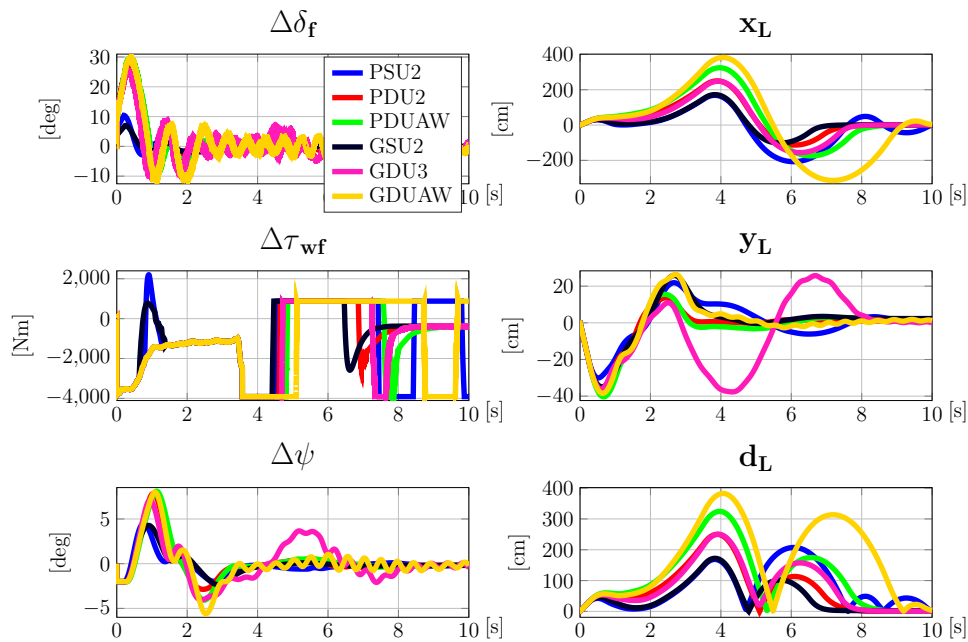


FIGURE 8.22 – Scénario 14, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

Les résultats présentés permettent de constater que les différents correcteurs développés stabilisent le véhicule autour de la trajectoire de référence en présence des perturbations dues à la pente et au dévers de la route, des conditions initiales différentes de zéro et des dispersions paramétriques. Cela a été vérifié pour les deux manœuvres d'évitement d'obstacles considérées, sans et avec freinage. Il a été observé que les performances des correcteurs statiques et dynamiques, obtenus avec les approches LPV polytopique ou *grid-based*, sont comparables.

Comparaison de la taille de la région d'attraction pour des scénarios avec faible adhérence pneus-sol

Dans un premier temps, un scénario permettant de comparer la région d'attraction en boucle fermée avec les correcteurs statique est étudié. Pour cela les résultats du scénario 10 sont analysés, pour lequel

le coefficient de frottement μ pneus-sol est égal à 0,4, 40% de la valeur nominale, et qui représente une route mouillée et dont la surface n'est pas en conditions idéales. Plus particulièrement, le scénario est présenté pour la manœuvre d'évitement sans freinage et avec les correcteurs statiques PSU1, PSU2, GSU1 et GSU2. Il est important de rappeler que :

- pour les correcteurs PSU1 et GSU1, les non-linéarités de secteur n'ont pas été considérées pendant la synthèse,
- pour le correcteur PSU2, la région d'attraction en boucle fermée a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités dues aux saturations des signaux de commande,
- pour le correcteur GSU2, la région d'attraction en boucle fermée a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités dues aux saturations des signaux de commande et des forces des pneus.

La Figure 8.23 présente les entrées de commande calculées par les quatre correcteurs et les erreurs longitudinale x_L , latérale y_L et de lacet $\Delta\psi$, et la distance d_L . Les erreurs du système en boucle fermée avec le correcteur PSU1 divergent ; la commande du couple des roues avec le correcteur GSU1 oscille sans convergence de l'erreur latérale, et cela après la fin de la manœuvre. En revanche, les erreurs du véhicule par rapport à la trajectoire de référence convergent avec les correcteurs PSU2 et GSU2. Ce scénario met

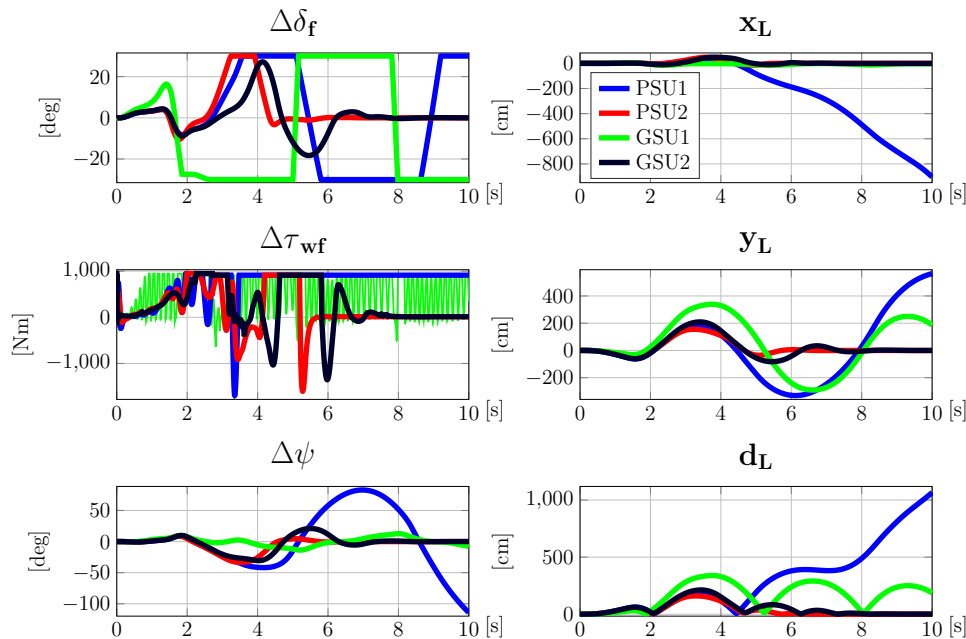


FIGURE 8.23 – Scénario 10, évitement sans freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

en évidence que la prise en compte des non-linéarités de secteur en entrée du système pour la synthèse des correcteurs a un effet satisfaisant quand ces non-linéarités sont sollicitées et que la région d'attraction de la boucle fermée est plus grande.

Un autre scénario est présenté pour comparer les correcteurs LPV dynamiques obtenus avec l'approche *grid-based*. Pour cela le scénario 9, pour lequel le coefficient de frottement μ pneus-sol est égal à 0,5, est analysé pour la manœuvre d'évitement avec freinage. Les résultats de simulation avec les correcteurs LPV dynamiques GDU1, GDU2 et GDU3 sont présentés et il est rappelé que :

- pour les correcteurs GDU1 et GDU2, les non-linéarités de secteur n'ont pas été considérées pour la synthèse,
- pour le correcteur GDU3, la région d'attraction en boucle fermée a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités dues aux saturations des signaux de commande et des forces des pneus.

La Figure 8.24 permet de vérifier que les erreurs divergent avec les correcteurs GDU1 et GDU2 et convergent avec le correcteur GDU3. Dans ce cas également, il est alors possible d'observer que la maximisation de la région d'attraction par rapport aux non-linéarités de secteur en entrée du système a produit un résultat satisfaisant. On observe que, dans la première partie de l'horizon temporel, pendant la manœuvre d'évitement d'obstacle, la commande des trois correcteurs génère des oscillations à haute

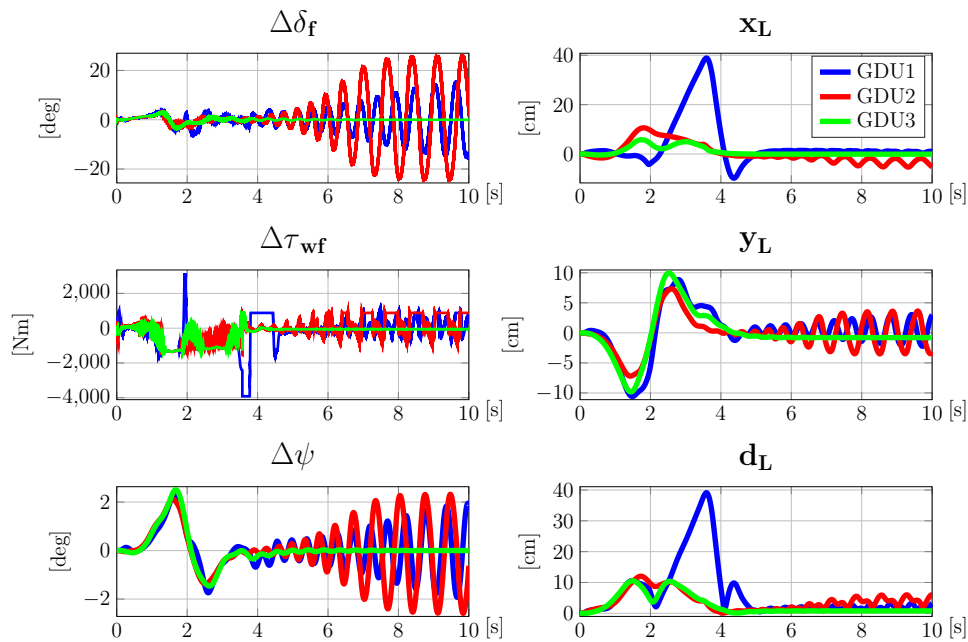


FIGURE 8.24 – Scénario 9, évitement avec freinage : entrées de commande et erreurs de position et de lacet.

fréquence. Dans la deuxième partie, après quatre secondes, les oscillations sont amorties dans le cas avec le correcteur GDU3, mais elles persistent avec les correcteurs GDU1 et GDU2. Les oscillations à haute fréquence sont causées par l’activation de l’ABS, activé également en boucle ouverte avec uniquement la commande nominale en entrée du système. En effet, la trajectoire de référence nécessite de freiner le véhicule, mais avec le sol mouillé qui provoque un faible coefficient de frottement μ , les roues glissent significativement et risquent de se bloquer. Dans ce cas, l’ABS intervient en activant et désactivant à haute fréquence les freins pour empêcher le blocage des roues. Cela est confirmé sur la Figure 8.25, qui montre les couples totaux des roues souhaité et mesuré. Ce dernier oscille à haute fréquence pendant la phase de freinage à cause de l’activation de l’ABS. Par conséquent, le couple appliqué aux roues cause une oscillation de la vitesse des roues et des variables d’état du modèle linéarisé en entrées du correcteur, comme il est possible de voir sur la Figure 8.26. A notre avis, ces oscillations ne sont pas la cause du

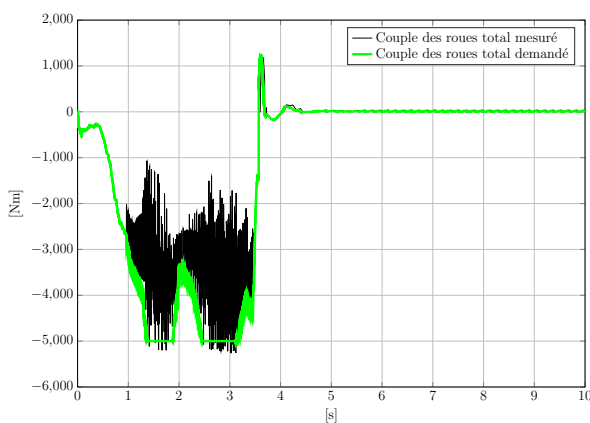


FIGURE 8.25 – Scénario 9, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : couple total des roues souhaité et mesuré.

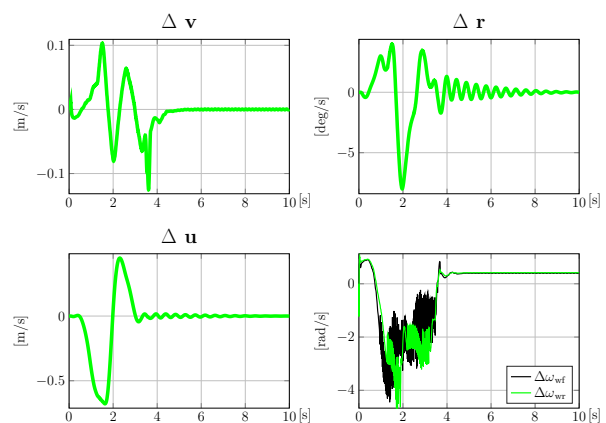


FIGURE 8.26 – Scénario 9, évitement avec freinage, correcteur GDU3 : variables d’état du modèle linéarisé.

comportement divergeant des erreurs dans les simulations avec les correcteurs GDU1 et GDU2. En effet, ces oscillations sont présentes également avec le correcteur GDU3, pour lequel les erreurs convergent. Il est donc raisonnable de conclure qu’il n’y a pas un problème de compatibilité entre les correcteurs proposés et l’activation du système ABS. Néanmoins, si l’on souhaite réduire la présence des oscillations sur la

commande du couple des roues du correcteur GDU3 (par exemple pour améliorer le confort des passagers du véhicule), il est possible d'augmenter l'atténuation des perturbations sur cette sortie de commande en changeant les filtres de pondération. En revanche, cela pourrait causer la dégradation d'un autre indice de performance pendant la synthèse du correcteur. Pour des manœuvres d'urgence, pour lesquelles le confort des passagers n'est pas une priorité, il ne semble donc pas utile de changer les filtres de pondération.

D'après ces simulations, on confirme qu'en général la maximisation de la région d'attraction de la boucle fermée par rapport aux non-linéarités de secteur en entrée du système est efficace pour l'élargissement des conditions pour lesquelles le correcteur arrive à stabiliser le véhicule le long de la trajectoire de référence. Uniquement pour les correcteurs LPV dynamiques obtenus avec l'approche polytopique il n'existe pas de cas, parmi les scénarios de simulation, pour lequel les résultats en boucle fermée divergent avec PDU1 et convergent avec PDU2 et PDUAW³. Les simulations effectuées n'ont donc pas permis de montrer que la région d'attraction en boucle fermée avec les correcteurs PDU2 et PDUAW, qui a été maximisée vis-à-vis des non-linéarités de secteur dues aux saturations des signaux de contrôle, est plus grande que avec le correcteur PDU1.

8.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les correcteurs développés dans les chapitres 6 et 7 ont été exploités pour les simulations avec le modèle à haute représentativité MADA. Le premier point que les simulations ont permis de constater est l'efficacité de la prise en compte des non-linéarités de secteur dans la synthèse des correcteurs pour la maximisation de la région d'attraction. Pour les correcteurs obtenus avec l'approche NLPV polytopique, la région d'attraction a été maximisée vis-à-vis des saturations des signaux de commande. Pour les correcteurs obtenus avec l'approche NLPV *grid-based*, le modèle qNLPV utilisé pour la synthèse permet de prendre en compte également les saturations des forces des pneus. L'analyse présentée dans la section 8.2.1 met en évidence que les correcteurs obtenus avec cette approche conduisent à un comportement plus uniforme sur l'ensemble des simulations effectuées et en général limitent davantage la distance entre la trajectoire du véhicule et la trajectoire de référence. En revanche, il n'est pas garanti que la performance en boucle fermée soit meilleure également pour des scénarios dans lesquelles les saturations des signaux de commande et des forces des pneus ne sont pas atteintes. Des simulations présentées dans la section 8.2.2 montrent des cas où en boucle fermée le comportement converge avec des correcteurs obtenus avec la maximisation de la région d'attraction et diverge avec des correcteurs qui ne prennent pas en compte les non-linéarités dues aux saturations. Cela indique que la région d'attraction en boucle fermée est effectivement plus large en utilisant le premier type de correcteurs.

Les simulations ont permis également de comparer les correcteurs avec *anti-windup* pour les signaux de commande avec les correcteurs sans *anti-windup*. D'après les résultats des sections 8.2.1 et 8.2.2, il est possible de conclure que la composante d'*anti-windup* utilisée dans ce travail ne donne pas d'avantages évidents par rapport aux correcteurs dynamiques sans *anti-windup*. Au contraire, la mesure de l'écart entre les commande souhaitées et celles mesurées est non nulle également quand les signaux de commande ne sont pas saturés, à cause de la dynamique et du retard des actionneurs du véhicule. Cela conduit à des oscillations à haute fréquence sur la commande générée, ce qui est un effet indésirable.

Dans la section 8.2.2, des résultats de simulation permettant d'observer que les correcteurs développés sont robustes aux incertitudes paramétriques et de modélisation sont présentés. Plus particulièrement, des dispersions sur le coefficient de frottement μ entre pneus et sol, sur les coefficients de raideur des pneus et sur la masse du véhicule ont été prises en compte. La loi de commande permet également de rejeter des perturbations dues à l'inclinaison de la route.

Enfin, les simulations présentées ne permettent pas de conclure définitivement quelle approche LPV, polytopique ou *grid-based*, aboutit aux meilleurs correcteurs. En effet, les analyses quantitative et détaillée mettent en évidence qu'il n'existe pas un correcteur avec des performances supérieures aux autres sur l'ensemble des scénarios de simulation.

Pour résumer, le chapitre permet de conclure sur les points suivants.

3. On rappelle que pour la synthèse du correcteur PDU1 les non-linéarités de secteur n'ont pas été prise en compte et que, en revanche, les non-linéarités dues aux saturations des signaux de commande ont été considérées pour la synthèse des correcteurs PDU2 et PDUAW.

- La prise en compte des non-linéarités de secteur augmente l'ensemble des conditions pour lesquelles les correcteurs stabilisent le véhicule. Les correcteurs qui considèrent ces contraintes sont donc préférables.
- Les correcteurs LPV dynamiques avec *anti-windup* ici testés ont un niveau de performance inférieur aux correcteurs sans *anti-windup*. Les correcteurs sans *anti-windup* sont donc préférables.
- Le niveau de performance des correcteurs statiques et dynamiques et des correcteurs obtenus avec les approches LPV polytopique ou *grid-based* sont comparables. Il est raisonnable d'affirmer qu'un correcteur statique est donc préférable, parce que l'implémentation sur l'ECU du véhicule est plus simple.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Ce manuscrit a détaillé le développement des lois de commande pour le suivi de trajectoires des manœuvres d'évitement d'obstacles à haute dynamique, dans le contexte de la conduite autonome. Les actions de commande s'appuient sur des actionneurs permettant le braquage, l'accélération et le freinage du véhicule. Des méthodes de commande robuste et optimale appliquées aux modèles LPV ont été employées pour la synthèse des correcteurs. Plus particulièrement, les approches polytopique et *grid-based* ont été utilisées et une comparaison a été proposée.

La première partie du manuscrit développe des modèles de dynamique véhicule et présente leur comparaison. Le but de cette partie est le choix d'un modèle représentatif du système dans des conditions de haute dynamique. Dans ces conditions de fonctionnement, des phénomènes de couplage entre les dynamiques longitudinale et latérale du véhicule et des non-linéarités des forces des pneus sont présents. Des modèles simplifiés, employés pour le développement séparé du contrôle longitudinal et latéral pour des manœuvres à faible dynamique, se sont avérés pas adaptés aux manœuvres à haute dynamique. En effet, l'étude de la littérature concernant la synthèse des correcteurs pour le contrôle du véhicule a mis en évidence que, dans ces conditions, les hypothèses pour un découplage des dynamiques longitudinale et latérale du véhicule ne sont pas vérifiées. De plus, les modèles étudiés mettent en évidence que l'utilisation d'un modèle non-linéaire des forces des pneus permet de représenter leur comportement de saturation et de glissement combiné. Par conséquent les modèles présentés dans la première partie du manuscrit partagent les deux aspects suivants :

1. ils considèrent les dynamiques longitudinale, latérale et de rotation des roues et leur couplage,
2. ils utilisent un modèle non-linéaire pour décrire les forces des pneus, permettant de représenter leur saturation et le glissement combiné.

En outre, un modèle de distribution de charge variable des roues a été développé. Ceci est fondamental pour la caractérisation des forces des pneus, car leurs seuils de saturation dépendent de la force normale de la roue. La variation des forces normales produit par l'accélération du véhicule est donc un facteur important lié à la saturation des pneus dans des manœuvres d'évitement d'obstacles. Cet aspect est souvent négligé dans la littérature. De plus, les modèles de dynamique du véhicule développés considèrent les couples et les angles de braquage des roues comme les entrées du système, au lieu des forces des pneus (comme dans d'autres modèles proposés dans la littérature). Cet aspect est intéressant pour un modèle dont le but est la synthèse d'une loi de commande. En effet, les correcteurs développés à l'aide de ce modèle ne nécessitent pas la réalisation d'un second correcteur bas niveau, en contraste avec le cas pour lequel les forces des pneus seraient les sorties d'un correcteur haut niveau⁴. L'avantage de considérer l'angle de braquage et les couples aux roues comme entrées est la simplification de l'architecture de contrôle. Cela réduit également les étapes de test et validation ainsi que les problèmes potentiels de l'architecture avec deux correcteurs en cascade. Plus particulièrement, avec deux correcteurs la boucle intérieure doit être significativement plus rapide que celle extérieure. De plus, dans ce cas, il n'est pas possible de prendre en compte les saturations des actionneurs pour la synthèse du correcteur haut niveau. Les trois modèles non-linéaires présentés ont une complexité croissante et la comparaison des résultats de simulation a permis d'évaluer les écarts entre

4. Dans ce cas, une loi de commande de bas niveau calcule les angles de braquage et les couples aux roues pour réaliser les forces souhaitées, comme dans [DOUMIATI et al. 2013](#).

un modèle à deux ou quatre roues et l'impact d'une modélisation simplifiée du châssis par rapport à un modèle rigide. Ces résultats de simulation, comparés aux simulations effectuées avec le modèle de référence à haute représentativité MADA ont montré que, dans les manœuvres d'évitement d'obstacles étudiées, le comportement du modèle bicyclette non-linéaire est comparable à celui des modèles quatre roues. En revanche, un autre scénario, correspondant à un cas de perte de contrôle du véhicule, a mis en évidence les limites de validité du modèle non-linéaire avec deux roues en cas de très haute dynamique latérale. Les simulations ont également montré que la modélisation du châssis proposée apporte une amélioration par rapport au modèle quatre roues rigide. Finalement, c'est le modèle bicyclette non-linéaire qui a été retenu pour la synthèse des correcteurs. En effet, son comportement est comparable à celui des modèles plus complexes dans les scénarios visés, c'est-à-dire des manœuvres d'évitement d'obstacles. De plus, ce modèle est plus simple que les modèles avec quatre roues, ce qui est un aspect importante pour un modèle dont le but est l'utilisation pour la synthèse de correcteurs.

La deuxième partie du manuscrit présente le développement de différents correcteurs pour la stabilisation du véhicule autour de manœuvres de référence d'évitement d'obstacles. Le modèle bicyclette non-linéaire a été représenté avec un nouveau bouclage pour lequel les forces soumises à saturation, c'est-à-dire les forces normales aux roues et les forces des pneus, apparaissent en entrée du modèle de la dynamique et dépendent elles mêmes du vecteur d'état du modèle du véhicule. Ensuite, ce modèle non-linéaire a été linéarisé autour d'une trajectoire de référence. Deux approches pour le traitement de la fonction de saturation ont été utilisées, afin d'obtenir deux expressions différentes du modèle linéarisé :

1. une fonction de saturation à dérivée discontinue pour exprimer le modèle au moyen de la fonction seuil,
2. une fonction logistique comme fonction de saturation, approchée par une droite à pente variable ; le modèle obtenu est linéaire, ne présentant plus les forces saturées en entrée.

Les deux expressions du modèle sont exprimées par un modèle linéaire variable dans le temps. La trajectoire de référence et les commandes nominales associées peuvent alors être déterminées par la fonction de planification des trajectoires. Cette fonction n'étant pas encore aboutie, uniquement des trajectoires dans l'espace et un profil de vitesse étaient disponibles. Pour remédier à l'absence des commandes nominales, des expressions de l'angle de braquage et du couple aux roues ont été développées par inversion du modèle bicyclette non-linéaire et ainsi générer les trajectoires de référence.

La deuxième expression du modèle linéarisé a été utilisée pour obtenir un modèle qLPV polytopique dont les paramètres variables sont huit éléments variables dans le temps des matrices de la représentation d'état caractérisant au mieux la dynamique du véhicule. Les éléments variables dans le temps restants ont été approchés par une valeur constante. La deuxième expression du modèle linéarisé, même si moins riche en raison de l'approximation des fonctions de saturation par une droite, est plus intéressante dans ce cas, car comportant un nombre d'éléments variables dans le temps plus faible par rapport à la première expression. Pour le choix des paramètres variables et leurs intervalles de variation pour la définition des limites du domaine polytopique, deux manœuvres d'évitement d'obstacles ont été considérées :

1. un changement de deux voies sans freinage,
2. un changement d'une voie avec freinage.

Ces deux trajectoires constituent l'enveloppe des manœuvres d'évitement que le modèle qLPV peut représenter. Deux correcteurs statiques et trois correcteurs LPV dynamiques ont été développés à partir du modèle qLPV polytopique. Il s'agit de correcteurs robustes multi-objectifs, développés pour maximiser le rejet des perturbations et minimiser les efforts de commande. Pour cela, la norme H_∞ des relations entrée-sortie des entrées de perturbation vers les signaux de commande et les erreurs de position de lacet et la norme H_2 -généralisée vers les signaux de commande ont été minimisées. De plus, que ce soit dans le cas statique ou dynamique, les saturations des entrées de commande ont été considérées comme des non-linéarités de secteur et la région d'attraction de la boucle fermée a été maximisée par rapport à ces non-linéarités. Pour le correcteur dynamique, deux versions ont été proposées afin de maximiser la région de stabilité, selon la prise en compte, ou non, d'une action *anti-windup* sur les signaux de commande.

La première expression du modèle linéarisé, pour laquelle les forces saturées apparaissent en entrée de la dynamique du véhicule, a été utilisée pour obtenir un modèle qNLPV *grid-based*. Dans ce cas, les variables d'état et les entrées du modèle peuvent être utilisées comme paramètres variables. Il n'est donc pas nécessaire d'approcher par des valeurs constantes certains éléments des matrices de la représentation d'état. Les mêmes trajectoires de référence employées pour la définition du modèle qLPV polytopique ont

été utilisées pour définir le domaine de variation des paramètres du modèle qNLPV *grid-based*. Pour la synthèse des correcteurs, la présence des forces des pneus saturées en entrée de la dynamique du véhicule a permis de prendre en compte également ces non-linéarités de secteur pour la maximisation de la région d'attraction en boucle fermée. Les autres objectifs utilisés pour la synthèse des correcteurs avec l'approche polytopique ont été considérés à nouveau. Dans ce cas également, plusieurs correcteurs, statiques et dynamiques, ont été développés.

Les simulations avec le modèle à haute représentativité MADA et les différents correcteurs proposés ont permis d'évaluer la robustesse en boucle fermée par rapport aux incertitudes paramétriques et de modélisation, le rejet des perturbations dues à l'inclinaison de la route et la réponse à des conditions initiales différentes de zéro. Ces simulations ont été réalisées pour les deux manœuvres d'évitement d'obstacles : sans freinage et avec freinage. Il a été observé que l'erreur latérale du véhicule par rapport à la trajectoire de référence est significativement différente de zéro dans le cas des simulations en boucle ouverte, c'est-à-dire avec le véhicule commandé uniquement par les commandes nominales. Les trajectoires en boucle fermée convergent, même en cas de dispersions paramétriques significatives et avec des conditions initiales différentes de zéro. Il a été observé que la prise en compte des non-linéarités de secteur pour la synthèse des correcteurs augmente de façon significative la région d'attraction en boucle fermée. Les correcteurs qui prennent en compte cet aspect sont donc préférables à ceux qui le négligent. En revanche, l'utilisation de l'action *anti-windup* développée pour la saturation des signaux de commande n'améliore pas le niveau de performance en boucle fermée. Au contraire, l'écart entre les commandes souhaitées et les commandes appliquées, dû à la dynamique des actionneurs, conduit à des oscillations de la commande avec *anti-windup*, qui peuvent dégrader les performances en boucle fermée. Les correcteurs LPV dynamiques sans *anti-windup* sont donc retenus. D'après les résultats des simulations effectuées avec le modèle à haute représentativité MADA, le niveau de performance en boucle fermée avec les correcteurs statiques ou dynamiques est comparable. Dans ce cas, on estime donc que l'utilisation d'un correcteur statique est plus avantageuse, car son implémentation sur un ECU véhicule est plus simple et la charge de calcul est inférieure. Les niveaux de performance en boucle fermée avec les correcteurs obtenus par les approches LPV polytopique et *grid-based* sont également comparables. En revanche, les approximations faites pour la représentation d'état du modèle qNLPV *grid-based* par rapport au modèle qLPV polytopique sont moindres. En effet, pour ce dernier, des éléments des matrices d'état ont été approchés par des valeurs constantes, afin de réduire le nombre total des paramètres variables. Les éléments variables et les éléments approchés par une valeur constante ont été choisis pour représenter au mieux la dynamique du véhicule dans les types de manœuvres d'évitement d'obstacles visées. Il est donc possible de supposer que le choix des paramètres variables nécessite d'être modifié pour des manœuvres différentes. Dans ce cas, le modèle qLPV polytopique présenté dans ce manuscrit et les correcteurs développés à partir de ce modèle ne seraient pas optimisés pour la trajectoire à contrôler. Il est à envisager que le développement de correcteurs différents soit nécessaire dans des manœuvres très différentes. Il est important de souligner que cet aspect n'a pas été étudié, car les correcteurs développés ont été testés sur les différentes manœuvres utilisées pour la définition du modèle qLPV. En utilisant l'approche LPV *grid-based*, les approximations faites avec l'approche polytopique ne sont pas présentes et les paramètres variables sont les variables d'état et les entrées du véhicule. Les niveaux de performance en boucle fermée avec les correcteurs développés de cette façon sont donc garantis pour tous types de trajectoires, dont la seule contrainte est que les variables d'états soient limitées aux plages de variation utilisées pour la définition domaine des paramètres du modèle qLPV *grid-based*.

Grâce aux résultats obtenus, plusieurs perspectives sont envisagées. Les principales perspectives sont détaillées ci-dessous, subdivisées en trois catégories.

Implémentation des correcteurs sur un véhicule et validation expérimentale

La première perspective ouverte par le travail présenté dans ce manuscrit est la réalisation d'essais sur un véhicule pour la validation des correcteurs développés. En effet, les résultats des simulations réalisées avec le modèle à haute représentativité MADA sont prometteurs. La mise en place des correcteurs sur un véhicule d'essai et la réalisation des tests représentent donc la prochaine étape du processus de validation, nécessaire pour conclure quant à la méthode, parmi celles proposées, la plus intéressante pour l'implémentation sur un véhicule série. Dans une première étape, la simple exécution des manœuvres de référence permettrait de valider l'efficacité des correcteurs développés. Ensuite, le couplage avec la fonction de planification des trajectoires serait également intéressante. Les commandes nominales générées par le planificateur de trajectoires pourraient être plus précises que la simple commande en boucle ouverte

proposée dans ce manuscrit, ce qui pourrait améliorer le niveau de performance en boucle fermée. De plus, la problématique de re-planification de la trajectoire de référence est un aspect majeur qui doit être évalué. Plusieurs scénarios sont envisageables. Il est possible de considérer qu'une trajectoire de référence est générée au moment où une situation d'urgence est détectée et que la trajectoire ne varie plus jusqu'à la fin de la manœuvre d'évitement d'obstacles. Dans ce cas, la boucle de planification des trajectoires est ouverte pendant la manœuvre. Ce cas est celui qui a été considéré dans les simulations présentées dans ce manuscrit⁵. En revanche, il est possible de supposer que la trajectoire de référence puisse changer au cours de la manœuvre. Un tel cas se justifierait si l'environnement autour du véhicule change significativement ou parce que le véhicule s'éloigne significativement de la trajectoire de référence initiale. Dans ce cas, la boucle de planification des trajectoires est fermée pendant la manœuvre d'évitement d'obstacle. La vitesse d'évolution de la trajectoire de référence est un facteur important à considérer qui pourrait conduire à l'instabilité du système si elle est trop élevée. En effet, comme dans le cas du développement de plusieurs correcteurs en cascade, la dynamique de la boucle de régulation intérieure doit être significativement plus rapide que la dynamique de la boucle extérieure. Cet aspect est donc important et à évaluer pour l'implémentation du correcteur sur le véhicule.

D'autres aspects doivent être pris en compte pour l'implémentation des correcteurs sur un ECU du véhicule. Il est nécessaire de considérer quelles variables d'état du véhicule, parmi celles en entrée du correcteur, sont mesurées et lesquelles ne le sont pas, qui doivent donc être estimées. Dans ce cas, le développement d'un observateur d'état est nécessaire et le comportement en boucle fermée doit être validé avec cet observateur. Un autre aspect doit être considéré pour les correcteurs dynamiques, développés en temps continu. En effet, leur implémentation sur un calculateur nécessite une discrétisation. La méthode, cf. [TÓTH 2010](#), et la fréquence de discrétisation doivent alors être évaluées, pour conserver le même niveau de performance. Une autre approche consiste à faire la synthèse des correcteurs directement en temps discret, c'est-à-dire en utilisant le modèle qLPV discrétisé. Dans ce cas, les conditions LMI pour les problèmes d'optimisation et les régions LMI pour le placement des pôles changent, cf. [GAHINET et APKARIAN 1994](#), [ROSINOVÁ et HOLIČ 2014](#) et [ROSINOVÁ et HYPÍUSOVÁ 2019](#).

Amélioration du niveau de performance du système en boucle fermée

D'autres perspectives concernent l'amélioration des correcteurs proposés. Un axe d'amélioration possible est la réduction du domaine de variation des paramètres du modèle LPV, avec l'approche polytopique ou *grid-based*. Cela permettrait de réduire le conservatisme des solutions obtenues et donc d'améliorer les indices de performance optimisés pendant la synthèse des correcteurs. L'hypercube de dimension égale au nombre de paramètres variables a été utilisé comme leur domaine de variation, avec les approches polytopique et *grid-based*, où chaque dimension s'étend de la valeur minimum à la valeur maximum du paramètre correspondant. Ce domaine de variation peut inclure des combinaisons de paramètres qui ne sont pas physiquement atteignables. Il est donc possible de considérer un autre domaine plus restreint, n'incluant pas ces points. Une grille des points qui doivent être contenus dans le domaine de variation des paramètres peut être obtenue, par exemple, à partir des simulations qui ont été effectuées avec le modèle à haute représentativité MADA. Elle représente l'ensemble de combinaisons des paramètres atteints pendant les manœuvres d'évitement d'obstacles. Cette grille de points peut être utilisée pour la synthèse des correcteurs avec l'approche *grid-based*, pour laquelle la convexité du domaine de variation n'est pas nécessaire.

Avec l'approche LPV polytopique, il est nécessaire de calculer l'enveloppe convexe minimale contenant l'ensemble des points de la grille. Dans la littérature il existe plusieurs méthodes pour la recherche de l'enveloppe convexe minimale contenant un ensemble de points, comme par exemple celles proposées par [BARBER, DOBKIN et HUHDANPAA 1996](#), [HUANG et LIU 2012](#) et [KHOSRAVANI, RUANO et FERREIRA 2013](#). En revanche, le nombre de sommets du polytope obtenu de cette façon peut être très élevé, rendant difficile la synthèse d'un correcteur. Pour réduire le nombre de points, il est possible d'utiliser des méthodes qui éliminent des sommets d'un polytope, comme l'algorithme proposé par [BIANNIC 1996](#). Dans ce cas, le polytope ne représente plus l'enveloppe minimale et un compromis doit être trouvé entre le nombre de sommets du polytope et le conservatisme du domaine de variation des paramètres.

5. Ce choix a été dicté par l'absence d'une fonction de planification des trajectoires, qui, comme il a été expliqué, est en cours de développement au sein d'une autre équipe du Groupe Renault. Cette fonction n'était pas suffisamment aboutie pendant ces travaux de thèse.

La synthèse des correcteurs proposés dans ces travaux de thèse considèrent des variations arbitraires des paramètres variables. Avec l'approche *grid-based*, comme expliqué dans [Wu 1995](#), il est possible prendre en compte des bornes sur la vitesse de variation des paramètres. Cela est obtenu en utilisant des fonctions de Lyapunov dépendantes des paramètres variables. Cette méthode permet de réduire le conservatisme des solutions trouvées et elle représente donc une perspective d'amélioration du niveau de performance du système en boucle fermée.

Les simulations avec le modèle à haute représentativité MADA ont mis en évidence que le niveau de performance en boucle fermée est dégradé dans les scénarios pour lesquels le coefficient de friction entre pneus et sol est faible. Bien que les trajectoires en boucle fermée convergent pour des valeurs faibles du coefficient d'adhérence, plus particulièrement jusqu'à 0,4, l'erreur de position atteint des valeurs significatives. Pour améliorer le niveau de performance en boucle fermée dans ces conditions, une possibilité est celle de considérer une plage de variation pour le coefficient de friction μ pendant la synthèse des correcteurs. Avec l'approche LPV polytopique cela se traduit par une extension des intervalles de variation des paramètres du modèle LPV, pour lequel le domaine polytopique a donc un volume plus important. Avec l'approche LPV *grid-based*, le coefficient μ dévient un paramètre variable du modèle LPV, pour lequel le domaine de variation des paramètres a une dimension supplémentaire et donc un volume plus grand dans ce cas également. La prise en compte de la plage de variation du coefficient μ pour la synthèse des correcteurs pourrait améliorer le niveau de performance en boucle fermée en cas de faible coefficient d'adhérence. En revanche, il faut également remarquer que cette approche rend plus difficile la recherche de la solution pendant la synthèse des correcteurs. En effet, dans les deux cas, polytopique ou *grid-based*, le volume du domaine de variation des paramètres est plus important. Considérer le coefficient μ variable pour la synthèse des correcteurs ne demande pas la connaissance de sa valeur pour la réalisation des correcteurs statiques proposés dans cette thèse, car ils ne dépendent pas des paramètres variables du modèle LPV. En revanche, les correcteurs dynamiques présentés sont LPV, c'est-à-dire qu'ils dépendent des paramètres variables du modèle LPV. Dans ce cas, le coefficient μ doit être connu pour calculer à chaque instant les matrices du correcteur. Il peut alors être estimé avec une des méthodes présentes dans la littérature, comme par exemple celles proposées par [RAJAMANI et al. 2012](#) et [CHAKRABORTY et al. 2015](#). D'autres paramètres du véhicule peuvent également être considérés variables, comme par exemple la masse du véhicule ou les coefficients de raideur des pneus.

Enfin, une autre perspective concerne l'exploitation du freinage différentiel pour l'amélioration de la stabilisation du véhicule et le suivi de trajectoire. Il s'agit d'une entrée dans des fonctions d'assistance à la conduite, comme l'ESC, donc applicable à des manœuvres à haute dynamique. Si un modèle de dynamique véhicule avec deux roues est utilisé, il est possible d'ajouter dans l'équation de la dynamique de lacet un couple en entrée du système, qui représente le couple produit par le freinage différentiel; cette approche est utilisée dans la littérature, comme par exemple dans [DOUMIATI et al. 2013](#). En revanche, dans ce cas, un correcteur de bas niveau est nécessaire pour calculer les couples des roues pour réaliser le couple du freinage différentiel donné. Si le correcteur calcule déjà le couple aux roues pour l'accélération et le freinage du véhicule, comme pour les correcteurs présentés dans ce manuscrit, le couple calculé par le correcteur de bas niveau peut être incohérent avec la commande du correcteur de haut niveau. De plus, l'asservissement d'un couple de lacet ne permettrait pas de prendre en compte les saturations des forces des pneus par les non-linéarités de secteur, car le lien entre le couple de lacet et les forces des pneus nécessaires pour le réaliser n'est pas explicité. En utilisant un modèle quatre roues, comme un de ceux proposés dans ce manuscrit, deux commandes distinctes pour les couples aux roues des côtés gauche et droit, permettent au correcteur de générer un couple de freinage différentiel sur la dynamique de lacet, sans besoin d'utiliser un correcteur de bas niveau. Les mêmes commandes utilisées pour produire un couple de lacet du véhicule sont utilisées pour accélérer et freiner le véhicule. De plus, le lien entre le couple de lacet et les forces des pneus reste explicite⁶, ce qui permet de considérer les saturations des forces des pneus dans la synthèse des correcteurs. Comme il a été observé dans ce manuscrit, cet aspect est important pour élargir la région d'attraction en boucle fermée. En résumé, pour la prise en compte du freinage différentiel, il est raisonnable d'estimer que l'utilisation d'un des deux modèles quatre roues présentés dans ce manuscrit pourrait aboutir à des résultats plus performants qu'en utilisant un modèle avec deux roues.

6. Ce lien n'est donc plus calculé explicitement par le correcteur, mais il est le résultat des commandes des couples aux roues.

Intégration du correcteur dans un véhicule autonome

La transition de l'utilisation des correcteurs développés vers d'autres correcteurs utilisés pour des conditions de conduite différentes, est un problème à résoudre pour atteindre un véhicule autonome. En effet, les correcteurs proposés dans ce manuscrit sont orientés au contrôle du véhicule pour des manœuvres d'évitement d'obstacle. Dans ce contexte, la stabilisation et la vitesse de convergence du véhicule le long des trajectoires de référence à haute dynamique constituent les critères de performance principaux du système en boucle fermée. Ces objectifs ne sont pas prioritaires en dehors des situations d'urgence, comme par exemple dans des conditions de conduite sur autoroute ou en ville à faible dynamique. Dans ces cas, il est nécessaire de maximiser le confort des passagers, en maintenant faible l'accélération du véhicule et en limitant la dérive du véhicule. Les correcteurs proposés ne sont donc pas adaptés au contrôle du véhicule dans ces conditions de conduite et d'autres lois de commande doivent être employées. Pour cette raison, un véhicule autonome sera donc constitué des différents correcteurs. En revanche, la transition entre deux correcteurs peut provoquer l'instabilité du véhicule. La commutation entre des correcteurs, abordée dans MAHTOUT 2020, représente donc un axe de recherche future très important.

Annexes



COMMANDE ROBUSTE ET OPTIMALE - SYSTÈMES LTI

Sommaire

A.1 État de l'art	183
A.1.1 Commande H_∞	183
A.1.2 Commande H_2	185
A.1.3 Commande multi-objectif	185
A.2 Analyse de stabilité	186
A.2.1 Systèmes linéaires	186
A.2.2 Stabilité d'un système avec entrées saturées	188
A.3 Analyse de performance	192
A.3.1 Norme H_∞	193
A.3.2 Norme H_2	193
A.3.3 Norme H_2 généralisée	194
A.4 Synthèse du correcteur	195
A.4.1 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires	195
A.4.2 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires avec entrées saturées	197
A.4.3 Correcteurs dynamiques pour des systèmes linéaires	198
A.4.4 Correcteurs dynamiques pour des systèmes avec entrées saturées	202

Dans cet annexe la commande robuste et optimale pour les systèmes LTI est abordée. Plus particulièrement, on considère la synthèse de correcteurs à travers des *fonctions de Lyapunov quadratiques*. Les conditions de stabilité de la boucle fermée sont exprimées sous forme de LMI, utilisées comme contraintes d'un problème d'optimisation pour la synthèse du correcteur. Ce type de problème est convexe et il existe des algorithmes efficaces pour la recherche de la solution optimale.

Les textes [BOYD 1994](#) et [DUAN et YU 2013](#) peuvent être consultés comme références pour l'utilisation des LMI en Automatique.

Dans un premier temps, une revue des méthodes pour la synthèse de lois de commande robustes et optimales est présentée dans la section [A.1](#). Dans la section [A.2](#) on traite l'analyse de stabilité au moyen de fonctions de Lyapunov quadratiques. Des indices de performance du système, utilisés pour la synthèse des correcteurs, sont introduits dans la section [A.3](#). Enfin, dans la section [A.4](#) la synthèse des correcteurs est présentée.

A.1 État de l'art

Dans cette section une revue des méthodes de commande robuste et optimale est effectuée. Ces méthodes sont le point de départ pour la synthèse des correcteur pour des manœuvres à haute dynamique. Plus particulièrement, trois méthodes sont présentées :

- la commande H_∞ ,

- la commande H_2 ,
- la commande multi-objectif.

Ces méthodes partagent un point en commun : le correcteur est obtenu en résolvant un problème d'optimisation, qui vise à minimiser un indice de performance, exprimé dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Deux références importantes dans ce cas sont FRANCIS 1987 et ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996.

A.1.1 Commande H_∞

Un correcteur H_∞ , permet de minimiser l'effet des perturbations w sur z , les sorties contrôlées du système. Le système est exprimé sous forme standard comme dans la Figure A.1, la norme H_∞ (dont une définition est rappelée dans l'annexe A.3.1) de la fonction de transfert en boucle fermée entre w sur z , T_{zw} , est minimisée.

Des filtres de pondérations, cf. ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996, peuvent être ajoutés dans l'expression de

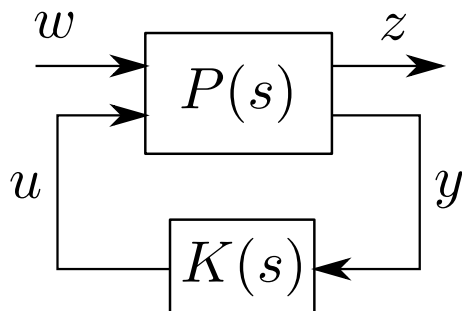


FIGURE A.1 – Architecture standard pour la synthèse des correcteurs robustes : u entrées de commande, w entrées de perturbation, z sorties contrôlées et y sorties mesurées.

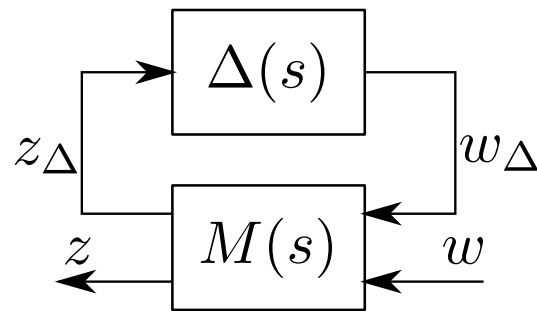


FIGURE A.2 – Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité.

$P(s)$, pour imposer un comportement en fréquence au système en boucle fermée pour améliorer le suivi de consigne, le rejet des perturbations, la robustesse ou imposer une bande passante pour les commandes. La Figure A.3 montre une architecture de contrôle, commune dans la littérature, avec les filtres de pondération. On peut considérer comme entrées à rejeter le vecteur des signaux de référence r et celui des perturbations \hat{w} . Les sorties contrôlées sont les vecteurs z_1 et z_2 . Le filtre $W_e(s)$ est utilisé pour définir un profil fréquentiel le rejet des perturbations sur les sorties contrôlées. Le filtre $W_u(s)$ est utilisé pour imposer une bande passante aux signaux de commande. Enfin, le filtre $W_d(s)$ donne un degré de liberté supplémentaire pour la mise au point du correcteur. Parfois il suffit d'assigner une valeur constante à ce filtre, pour régler le comportement en basse fréquence à z_1 et assigner à z_2 un gabarit d'atténuation assurant la robustesse de la stabilité. Un filtre $W_d(s)$ peut être utilisé pour modifier le comportement en moyenne fréquence de z_1 . Dans LUNDSTRÖM, SKOGESTAD et WANG 1991 et ORTEGA et RUBIO 2004 différentes méthodes sont proposées pour le réglage de ces filtres.

Une autre approche pour régler le comportement de la boucle fermée, dénommée *loop-shaping*, est proposée dans MCFARLANE et GLOVER 1992, chapitre 6, pages 98-131. Dans ce cas deux filtres sont ajoutés, avant

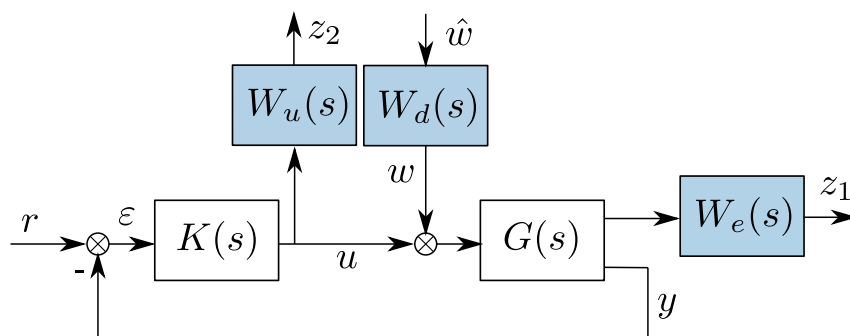


FIGURE A.3 – Architecture de contrôle avec les filtres de pondération pour la synthèse H_∞ .

et après le transfert du système $G(s)$.

L'aspect le plus intéressant de la commande H_∞ est la robustesse en boucle fermée qui en résulte. Pour comprendre cet aspect, le *théorème du petit gain*, cf. ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996, page 212, est considéré. On prend en compte le bouclage présenté dans la Figure A.2, où $M(s)$ est un système stable et $\Delta(s)$ est une incertitude inconnue, non structurée, avec $\|\Delta(s)\|_\infty < \gamma^{-1}$ et stable aussi. Selon le théorème du petit gain, le bouclage entre le système $M(s)$ et $\Delta(s)$ est stable si $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$. La minimisation de γ , représentant la norme H_∞ du transfert T_{zw} , équivaut à maximiser l'ensemble des incertitudes pour lesquelles le système en boucle fermée reste stable.

Il existe différentes méthodes pour le calcul d'un correcteur H_∞ optimal ou sous-optimal. La première méthode apparue dans la littérature pour la résolution du problème H_∞ est celle fondée sur les équations de Riccati, appelée aussi *algorithme de Glover-Doyle*, présentée dans GLOVER et DOYLE 1988, page 169, et DOYLE et al. 1989, page 835. Cette technique permet de trouver un correcteur $K(s)$, s'il existe, pour une valeur choisie a priori de la norme H_∞ de la boucle fermée. Il est donc nécessaire d'approcher la valeur optimale de γ par dichotomie; cette procédure est souvent appelée γ -itération. Dans la littérature il existe aussi une deuxième méthode pour la résolution du problème H_∞ , qui fait appel aux inégalités matricielles affines, ou LMI (*Linear Matrix Inequalities*). Cette méthode repose sur une fonction de Lyapunov quadratique, cf. KHALIL 2001, page 117, pour vérifier la stabilité en boucle fermée. Les auteurs dans GAHINET et APKARIAN 1994, page 434, et IWASAKI et SKELTON 1994, page 1311, proposent une formulation par LMI de la faisabilité du problème H_∞ . Ces LMI définissent donc un ensemble convexe, car elles sont affines par rapport aux inconnues. Il est donc possible de rechercher directement la valeur optimale de γ , puisque le problème d'optimisation est convexe et ainsi il peut être résolu numériquement de façon efficace. La solution de ce problème d'optimisation peut être utilisée pour trouver un correcteur au moyen de la formule explicite proposée par GAHINET 1996, page 1011.

Le premier avantage de la résolution du problème H_∞ par LMI, par rapport à la méthode par équations de Riccati, est qu'elle nécessite moins d'hypothèses pour le modèle de synthèse. De plus, elle conduit à un problème d'optimisation convexe. Pour ce type de problème il existe une large variété d'algorithmes capables de trouver efficacement une solution optimale de façon numérique, utilisant des méthodes de points intérieurs. D'un point de vue pratique, pour la synthèse de correcteurs il est possible de définir et de résoudre les problèmes d'optimisation en utilisant la *LMI control toolbox* de MATLAB, cf. GAHINET et al. 1994. Comme alternative il est aussi possible d'utiliser la *toolbox YALMIP*, cf. LOFBERG 2004, qui permet de faire appel à des solveurs tiers, soit en libre accès, comme *SeDuMi*, cf. STURM 1999, et *SDPT3*, cf. TOH, TODD et TÛTÛNCÛ 1999, soit payants, comme *Mosek* (qui offre également des licences académiques gratuites), cf. ANDERSEN et ANDERSEN 2000, et *LMILAB*, le solveur de la *LMI control toolbox*.

A.1.2 Commande H_2

La commande H_2 diffère de la commande H_∞ par l'indice de performance à optimiser. Dans ce cas l'objectif est la minimisation de la norme H_2 de T_{zw} , le transfert des perturbations w aux sorties contrôlées du système z , en considérant toujours le schéma standard en Figure A.1. La commande H_∞ minimise le gain le plus important du transfert de w sur z , comme on a évoqué dans la section A.1.1. En revanche, en minimisant la norme H_2 (dont une définition est rappelée dans l'annexe A.3.2), l'énergie moyenne produite par w sur la sortie z , sur l'ensemble de toutes les fréquences, est minimisée. La commande H_2 est donc utilisée au lieu de la commande H_∞ quand une approche moyenne est souhaitée, par exemple pour limiter l'énergie sur les signaux de commande. Cela peut être utile pour éviter la saturation des actionneurs ou réduire la sollicitation du système. En revanche, le problème de la robustesse aux incertitudes du système n'est pas pris en compte par la commande H_2 , au contraire de la commande H_∞ , intrinsèquement robuste. Pour régler le comportement en fréquence de la boucle fermée dans la commande H_2 , il est possible d'utiliser des filtres de pondération, comme pour la commande H_∞ .

Comme pour la commande H_∞ , il est possible de trouver une solution pour le problème de la commande H_2 par équations de Riccati, comme proposé dans DOYLE et al. 1989, page 835. En revanche, dans ce cas aussi plusieurs itérations sont nécessaires pour trouver le correcteur optimal. Il est donc préférable d'utiliser la méthode de résolution du problème H_2 par LMI, cf. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997, page 903, qui, comme montré dans la section A.1.1, conduit à un problème convexe qui peut être résolu numériquement pour déterminer directement la solution optimale.

A.1.3 Commande multi-objectif

Il peut être intéressant de réaliser la synthèse du correcteur en suivant différents critères de performance. Par exemple on peut avoir besoin d'exploiter la commande H_∞ pour obtenir une boucle fermée robuste et la commande H_2 pour limiter les signaux de commande. On parle dans ces cas de commande multi-objectif, qui englobe tout problème de synthèse d'un correcteur avec une combinaison de spécifications dans le domaine fréquentiel et temporel. Pour le problème H_2/H_∞ mixte, une solution au moyen d'équations de Riccati qui utilise une matrice inconnue commune est proposée dans [BERNSTEIN et HADDAD 1989](#), page 299, et [KHARGONEKAR et ROTEA 1991](#), page 830. Les performances souhaitées sont obtenues au détriment d'un certain conservatisme. De façon similaire il est possible d'utiliser une seule fonction de Lyapunov quadratique pour trouver un correcteur multi-objectif par LMI. [SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997](#) offre une vue d'ensemble des différentes spécifications pour la synthèse multi-objectif sous forme LMI et propose un changement de variable pour la formulation d'un problème convexe qui utilise une seule matrice de Lyapunov. Une méthode similaire est proposée aussi dans [MASUBUCHI, OHARA et SUDA 1998](#). Avec cette méthode il est possible de prendre en compte pour la synthèse du correcteur des bornes pour la norme H_∞ et H_2 des différents transferts. De plus, il est possible de considérer aussi d'autres critères de performance, comme par exemple la norme H_2 généralisée, présentée dans [WILSON 1989](#) et utilisée initialement pour la synthèse des correcteurs dans [ROTEA 1993](#). Elle représente l'amplitude maximale des sorties pour des entrées unitaires et elle est donc utile pour limiter les signaux de commande et éviter la saturation des actionneurs. D'un façon générale, quand la synthèse est faite en imposant plusieurs bornes pour des normes différentes et des transferts différents, on minimise une seule norme et on fixe les autres valeurs avant la résolution du problème d'optimisation. Avec la méthode multi-objectif par LMI proposée il est aussi possible de placer les pôles de la boucle fermée dans une région convexe du plan complexe, appelée région LMI, cf. [CHILALI et GAHINET 1996](#) et [CHILALI, GAHINET et APKARIAN 1999](#), afin d'imposer des limites aux dynamiques la plus lente et la plus rapide de la boucle fermée et à imposer un amortissement minimal des pôles. Dans [TARBOURIECH et al. 2011](#) les auteurs proposent différentes méthodes pour prendre en considération de façon explicite les saturations des actionneurs. Les solutions proposées peuvent être intégrées à la synthèse multi-objectif avec la méthode proposée par [SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997](#). Finalement, il est encore possible d'ajouter d'autres spécifications à la synthèse multi-objectif. Pour l'expression des spécifications du comportement du système sous forme LMI, des références comme [BOYD 1994](#), [DUAN et YU 2013](#) et [SCHERER et WEILAND 2015](#) peuvent être utilisées. Il est important de rappeler que les conditions LMI pour les différentes spécifications sont obtenues au moyen d'une fonction de Lyapunov quadratique pour prouver la stabilité de la boucle fermée, comme évoqué en section [A.1.1](#) pour la commande H_∞ par LMI. Une définition de fonction de Lyapunov quadratique et de la façon pour l'utiliser pour vérifier la stabilité d'un système est donnée dans la section [A.2](#) de l'annexe [A](#). L'annexe [A](#) rassemble aussi un ensemble de conditions sous forme de LMI discutées dans cette section.

A.2 Analyse de stabilité

Dans cette section on rappelle les concepts d'analyse de stabilité d'un système à travers une fonction de Lyapunov. Ces résultats seront appliqués à des systèmes en boucle fermée pour l'obtention des conditions LMI pour la synthèse des correcteurs du type retour d'état et retour de mesure. Pour cela, on rappelle le *théorème de stabilité de Lyapunov*, comme indiqué dans [KHALIL 2001](#).

On considère le système non-linéaire

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}) \tag{A.1}$$

satisfaisant $f(0) = 0$.

Théorème 2. [KHALIL 2001](#), page 114. *On considère $x = 0$ un point d'équilibre du système (A.1) et $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant $x = 0$. On considère la fonction $V(\underline{x}) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable telle que*

$$V(0) = 0 \quad \text{et} \quad V(x) > 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D} - \{0\} \tag{A.2a}$$

$$\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{D} \tag{A.2b}$$

alors $x = 0$ est stable. De plus, si

$$\dot{V}(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{D} - \{0\} \tag{A.3}$$

alors $x = 0$ est stable asymptotiquement.

Le théorème 2 définit la *stabilité locale* du système : $V(\underline{\mathbf{x}})$ prouve la stabilité d'un point d'équilibre $\underline{\mathbf{x}}$ dans \mathcal{D} . Si $\mathcal{D} \equiv \mathbb{R}^n$ alors le point d'équilibre de (A.1) est *globalement stable*.

Pour un système linéaire, la stabilité locale implique la stabilité globale, pour cette raison l'on parlera de la *stabilité du système*.

Une *fonction de Lyapunov quadratique* est une fonction de Lyapunov largement utilisée pour la synthèse des correcteurs. Elle est définie par

$$V(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}} \quad (\text{A.4})$$

où $P = P^T > 0$ est une matrice symétrique et définie positive.

A.2.1 Systèmes linéaires

On considère le système linéaire à temps continu :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = A \underline{\mathbf{x}} \quad (\text{A.5})$$

où $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Stabilité quadratique

Lorsque l'on utilisera une fonction quadratique pour montrer la stabilité du système l'on perlera de *stabilité quadratique*.

Théorème 3. *BOYD 1994, page 61. Le système A.5 est stable si*

$$\begin{aligned} A^T P + P A &\leq 0 \\ P &> 0 \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

et asymptotiquement stable si

$$\begin{aligned} A^T P + P A &< 0 \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Une condition équivalente est donnée par l'existence d'une matrice symétrique définie positive telle que

$$\begin{aligned} Q A^T + A Q &< 0 \\ Q &> 0. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(A.8) est équivalente à (A.6) et elle obtenue en pré et post-multipliant (A.6) par $Q = P^{-1}$.

L'existence d'une matrice P telle que (A.6) ou (A.7) soient respectées, correspond à vérifier que $\lambda_i(A) \forall i = 1, \dots, n$, les valeurs propres de A , soient respectivement inférieures ou égales, ou strictement inférieures à 0.

\mathbb{D} -stabilité

Définition 2. *DUAN et YU 2013, page 99. Soit une région $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$, symétrique par rapport à l'axe réel, le système (A.5) est dit \mathbb{D} -stable si $\lambda_i(A) \in \mathbb{D} \forall i = 1, \dots, n$.*

Pour la suite nous allons étudier la \mathbb{D} -stabilité pour des ensembles convexes dans le plan complexe, dénommés *régions LMI*.

Définition 3. *DUAN et YU 2013, page 103. Soit une région $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. S'il existe des matrices $L = L^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ et $M \in \mathbb{R}^{r \times r}$ telles que*

$$\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} : L + sM + \bar{s}M^T < 0\} \quad (\text{A.9})$$

alors \mathbb{D} est dénommé région LMI et

$$F_{\mathbb{D}}(s) = L + sM + \bar{s}M^T \quad (\text{A.10})$$

est la fonction caractéristique de la région LMI \mathbb{D} .

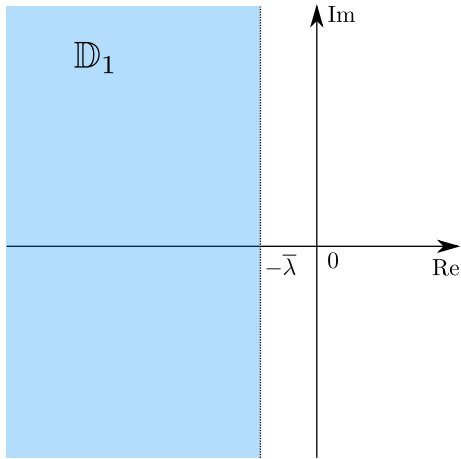


FIGURE A.4 – Région LMI : demi-plan gauche.

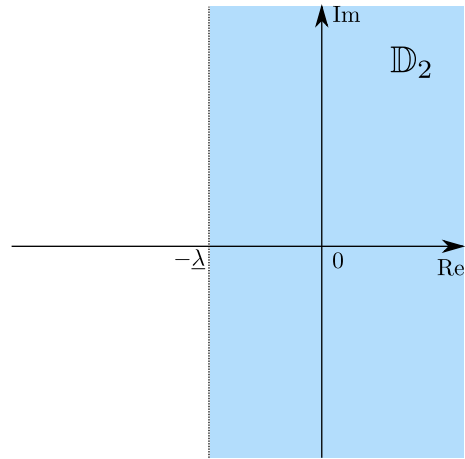


FIGURE A.5 – Région LMI : demi-plan droit.

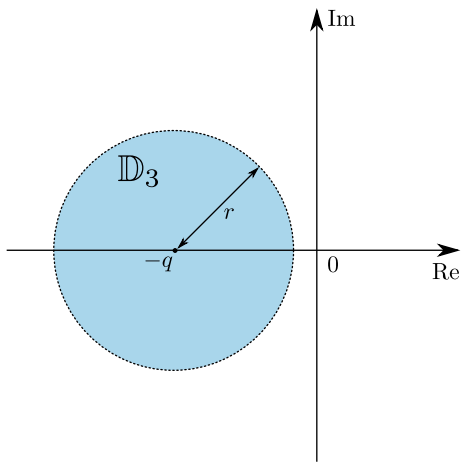


FIGURE A.6 – Région LMI : cercle.

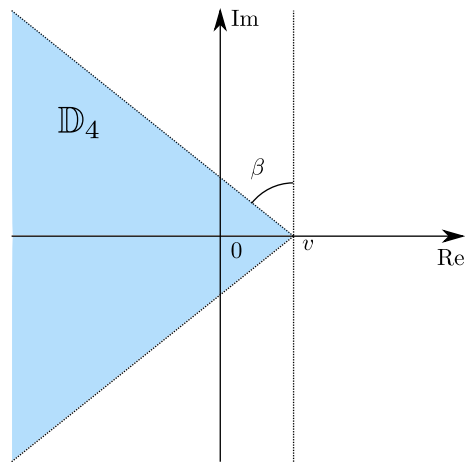


FIGURE A.7 – Région LMI : section conique.

Avec cette formulation il est possible représenter des demi-plans, des cercles et des sections coniques, comme montré sur les Figures A.4, A.5, A.6 et A.7. Comme indiqué dans [DUAN et YU 2013](#), pages 101-105, ces régions LMI sont définies à l'aide de (A.9) comme suit :

- le demi-plan gauche de $-\bar{\lambda}$

$$L = 2\bar{\lambda} \quad M = 1,$$

- le demi-plan droit de $-\lambda$

$$L = 2\lambda \quad M = -1,$$

- le cercle de rayon r centré en $(-q, 0)$

$$L = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

- le secteur conique centré en $(v, 0)$ et avec angle β

$$L = \begin{bmatrix} -2v \cos \beta & 0 \\ 0 & -2v \cos \beta \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}.$$

L'intersection de deux régions LMI est une région LMI. Pour exprimer l'intersection de régions LMI il suffit de décrire chaque région avec l'inégalité (A.9) et d'exprimer les points s qui satisfassent simultanément les différentes inégalités.

Théorème 4. DUAN *et* YU 2013, page 107. Soit \mathbb{D} une région LMI, avec fonction caractéristique

$$F_{\mathbb{D}}(s) = L + sM + \bar{s}M^T$$

alors une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est \mathbb{D} -stable si et seulement si il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que

$$L \otimes P + M \otimes (AP) + M^T \otimes (AP)^T < 0 \quad (\text{A.11})$$

où \otimes représente le produit de Kronecker.

A.2.2 Stabilité d'un système avec entrées saturées

Systèmes avec dynamique saturée

On considère le système suivant avec entrées saturées :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B_h \underline{\sigma}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{h} &= C_h \mathbf{x} + D_{hh} \underline{\sigma}(\mathbf{h}) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{p_h}$, $C_h \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $D_{hh} \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ et $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^{p_h}$ avec chaque élément $\sigma_i(h_i)$ représentant une fonction de saturation, illustrée dans la Figure A.8, et $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{p_h}$ est l'argument de $\underline{\sigma}$. Pour la suite nous allons faire l'hypothèse que $(I - D_{hh})$ est une matrice inversible.

Une partie de la dynamique du système est donc saturée et elle est représentée par $\underline{\sigma}(\mathbf{h})$. Le système est

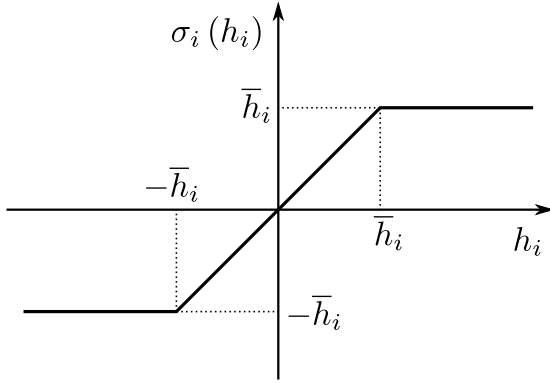


FIGURE A.8 – Fonction de saturation.

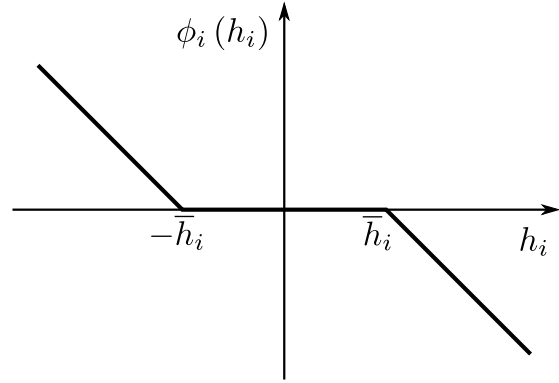


FIGURE A.9 – Fonction seuil.

donc représenté par le bouclage en Figure A.10. La fonction de saturation présentée dans la Figure A.8

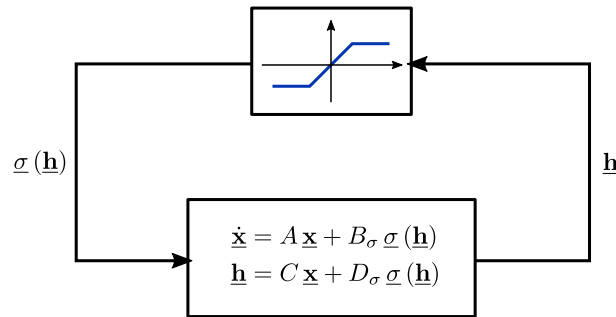


FIGURE A.10 – Système avec dynamique saturée.

est définie par

$$\sigma(h_i) = \begin{cases} \bar{h}_i, & h_i \geq \bar{h}_i \\ h_i, & \underline{h}_i \leq h_i \leq \bar{h}_i \\ \underline{h}_i, & h_i \leq \underline{h}_i \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

On considère la fonction *seuil*, montrée en Figure A.9 :

$$\underline{\phi}(\mathbf{h}) = \underline{\sigma}(\mathbf{h}) - \mathbf{h}. \quad (\text{A.14})$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= C_h \mathbf{x} + D_{hh} \underline{\phi}(\mathbf{h}) - D_{hh} \mathbf{h} + D_{hh} \mathbf{h} \\ (I - D_{hh}) \mathbf{h} &= C_h \mathbf{x} + D_{hh} \underline{\phi}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{h} &= \underbrace{(I - D_{hh})^{-1} C_h}_{=\tilde{C}_h} \mathbf{x} + \underbrace{(I - D_{hh})^{-1} D_{hh}}_{=\tilde{D}_{hh}} \underline{\phi}(\mathbf{h})\end{aligned}$$

et il est possible d'exprimer le système (A.12)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_h \underline{\phi}(\mathbf{h}) - B_h \mathbf{h} + B_h \mathbf{h} \\ \dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_h \underline{\phi}(\mathbf{h}) + B_h \tilde{C}_h \mathbf{x} + B_h \tilde{D} \underline{\phi}(\mathbf{h}) \\ \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{(A + B_h \tilde{C}_h)}_{=\tilde{A}} \mathbf{x} + \underbrace{(B_h + B_h \tilde{D})}_{=\tilde{B}_h} \underline{\phi}(\mathbf{h}).\end{aligned}$$

Le système (A.12) est donc équivalent à :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \tilde{A} \mathbf{x} + \tilde{B}_h \underline{\phi}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{h} &= \tilde{C}_h \mathbf{x} + \tilde{D}_{hh} \underline{\phi}(\mathbf{h})\end{aligned}\tag{A.15}$$

avec :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= A + B_h \tilde{C}_h \\ \tilde{B}_h &= B_h + B_h \tilde{D}_{hh} \\ \tilde{C}_h &= (I - D_{hh})^{-1} C_h \\ \tilde{D}_{hh} &= (I - D_{hh})^{-1} D_{hh}.\end{aligned}\tag{A.16}$$

Pour alléger la notation dans la suite on considère le système :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_h \underline{\phi}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{h} &= C_h \mathbf{x} + D_{hh} \underline{\phi}(\mathbf{h})\end{aligned}\tag{A.17}$$

L'intérêt d'avoir l'expression (A.17) au lieu de (A.12) est qu'on peut utiliser, pour l'analyse de stabilité du système, la *condition de secteur généralisée*, valable pour la fonction seuil. Cette condition nous permettra d'estimer un sous-ensemble de la région d'attraction du système. En effet, le système (A.17) est non-linéaire, à cause de la présence de l'entrée $\underline{\phi}(\mathbf{h})$. En général, il existe donc un ensemble de conditions initiales \mathbf{x} pour lesquelles $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$, seulement si le système est stable un boucle ouverte. L'ensemble des conditions initiales pour lesquelles le système converge à zéro est appelé la *région d'attraction* du système. La détermination exacte de la région d'attraction d'un système est une tâche très compliquée, dont il n'existe pas une solution pour le cas général. En revanche, il est possible d'estimer la région d'attraction en calculant un sous-ensemble, qu'on appelle *région de stabilité asymptotique* (RSA).

Pour une fonction de Lyapunov quadratique $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ avec $P = P^T > 0$, l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}(P, 1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \leq 1\}\tag{A.18}$$

sera un ensemble invariant et contractif si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{E}(P, 1)$. Dans ce cas $\mathcal{E}(P, 1)$ est donc une RSA du système, une estimation de la région d'attraction.

On rappelle dans la suite la condition de secteur généralisée. Une version de cette condition est représentée dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 43, mais sans considérer la somme du vecteur \mathbf{h} au vecteur $\underline{\phi}(\mathbf{h})$.

Théorème 5. *On considère $\underline{\phi}(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^{p_h}$, une matrice diagonale $T \geq 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p_h}$ tel que $|v_i| \leq \bar{h}_i$, alors :*

$$\underline{\phi}(\mathbf{h})^T T (\underline{\phi}(\mathbf{h}) + \mathbf{h} + \mathbf{v}) \leq 0.\tag{A.19}$$

Démonstration. Par simplicité on considère juste un élément du vecteur $\underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})$ et on évalue

$$\phi_i(h_i) (\phi_i(h_i) + h_i + v).$$

En se basant sur les zones définies dans la Figure A.11, on peut voir que :

$$\begin{aligned} \text{Z1 : } & \underbrace{\phi_i(h_i)}_{>0} \underbrace{(\phi_i(h_i) + h_i + \underbrace{v}_{\in[-\bar{h}_i, \bar{h}_i]})}_{\leq 0} \leq 0 \\ \text{Z2 : } & \underbrace{\phi_i(h_i)}_{=0} (\phi_i(h_i) + h_i + v) = 0 \\ \text{Z3 : } & \underbrace{\phi_i(h_i)}_{<0} \underbrace{(\phi_i(h_i) + h_i + \underbrace{v}_{\in[-\bar{h}_i, \bar{h}_i]})}_{\geq 0} \leq 0. \end{aligned}$$

Finalement pour toutes les zones $\phi_i(h_i) (\phi_i(h_i) + h_i + v) \leq 0$ et si on multiplie par un scalaire $t > 0$ le résultat ne change pas. \square

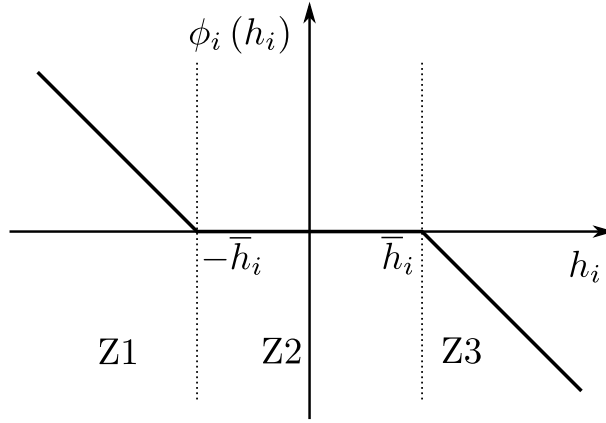


FIGURE A.11 – Zones de la fonction seuil.

On montre maintenant une condition LMI pour l'évaluation de la stabilité de (A.17) et l'estimation d'une RSA. Le résultat suivant est inspiré de la solution proposée dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 125, qui aborde le problème pour un système avec entrées de commande (calculées par un retour d'état et exprimées par $\underline{\mathbf{u}} = K\underline{\mathbf{x}}$) saturées.

Théorème 6. *S'il existe une matrice $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $S_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale et une matrice $J_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} Q A^T + A Q & B_h S_h - Q C_h^T - J_h^T \\ \hline S_h B_h^T - C_h Q - J_h & -(I + D_{hh}) S_h - S_h (I + D_{hh})^T \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.20a})$$

$$\left[\begin{array}{c} Q & J_{hi}^T \\ J_{hi} & \bar{h}_i^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h \quad (\text{A.20b})$$

alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1) = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}} \leq 1\}$, avec $P = Q^{-1}$, est une RSA du système (A.17).

Démonstration. On considère la matrice H telle que $|H_i \underline{\mathbf{x}}| \leq \bar{h}_i$ et on définit la fonction :

$$S(T, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\phi}, H) = 2 \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})^T (\underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) + \underline{\mathbf{h}} + H \underline{\mathbf{x}}) \leq 0. \quad (\text{A.21})$$

On considère une fonction de Lyapunov quadratique $V(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}}$ avec $P = P^T > 0$ et en utilisant (A.21) on voit

$$\dot{V}(\underline{\mathbf{x}}) \leq \dot{V}(\underline{\mathbf{x}}) - S_h(T, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\phi}, H).$$

Finalement on appelle $W = \dot{V}(\underline{\mathbf{x}}) - S_h(T, \underline{\mathbf{x}}, \underline{\phi}, H)$ et on cherche à vérifier que $W < 0$. On développe W :

$$\begin{aligned} W &= (A\underline{\mathbf{x}} + B_h \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}))^T P \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}^T P (A\underline{\mathbf{x}} + B_h \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})) - 2\underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})^T T (\underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) + \underline{\mathbf{h}} + H\underline{\mathbf{x}}) \\ &= (A\underline{\mathbf{x}} + B_h \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}))^T P \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}^T P (A\underline{\mathbf{x}} + B_h \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})) - 2\underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})^T T ((I + D_{hh}) \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) + (C_h + H) \underline{\mathbf{x}}) \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c} A^T P + P A & P B_h - C_h^T T - H^T T \\ \hline B_h^T P - T C_h - T H & -T(I + D_{hh}) - (I + D_{hh})^T T \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$W < 0$ si :

$$\left[\begin{array}{c|c} A^T P + P A & P B_h - C_h^T T - H^T T \\ \hline B_h^T P - T C_h - T H & -T(I + D_{hh}) - (I + D_{hh})^T T \end{array} \right] < 0. \quad (\text{A.22})$$

Pour éliminer la bilinéarité TH on définit $Q = P^{-1}$, $S_h = T^{-1} > 0$ et $J_h = H Q$ et on pré et post-multiplie (A.22) par $U = \text{diag}(Q, S_h)$ et on obtient (A.20a).

On rappelle du théorème 5 que la condition de secteur généralisée n'est valable que si $|H_i \underline{\mathbf{x}}| \leq \bar{h}_i \forall i$. Cela veut dire que $\underline{\mathbf{x}}^T H_i^T \bar{h}_i^{-2} H_i \underline{\mathbf{x}} \leq 1$. En exploitant la définition de l'ellipsoïde (A.18) on peut écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}} &\geq \underline{\mathbf{x}}^T H_i^T \bar{h}_i^{-2} H_i \underline{\mathbf{x}} \\ P &\geq H_i^T \bar{h}_i^{-2} H_i \\ P - H_i^T \bar{h}_i^{-2} H_i &\geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant le complément de Schur (BOYD 1994), on trouve :

$$\begin{bmatrix} P & H_i^T \\ H_i & \bar{h}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (\text{A.23})$$

Maintenant (A.23) est multiplié par $U' = \text{diag}(Q, 1)$ pour obtenir (A.20b). \square

Systèmes avec entrées de commande saturées

On considère un système linéaire avec les entrées de commande saturées :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = A \underline{\mathbf{x}} + B_u \sigma(\underline{\mathbf{u}}) \quad (\text{A.24})$$

où $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m_u}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ et le vecteur $\underline{\mathbf{u}}$ des commande est calculé par un retour d'état

$$\underline{\mathbf{u}} = K \underline{\mathbf{x}}.$$

On considère $\bar{u}_i \forall i = 1 \dots m_u$ les seuils de saturation des signaux de commande et $K_i \forall i = 1 \dots m_u$ les ligne de la matrice K .

Théorème 7. *TARBOURIECH et al. 2011, page 125. S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale et $J_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ telles que :*

$$\left[\begin{array}{c|c} Q(A + B_u K)^T + (A + B_u K)Q & B_u S_u - J_u^T \\ \hline S_u B_u^T - J_u & -2S_u \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.25a})$$

$$\begin{bmatrix} Q & Q K_i^T - J_{u_i}^T \\ K_i Q - J_{u_i} & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m_u \quad (\text{A.25b})$$

alors l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$, avec $P = Q^{-1}$, est une RSA pour le système (A.24).

A.3 Analyse de performance

Dans cette section les conditions LMI pour évaluer les normes H_∞ , H_2 et H_2 généralisée d'un système linéaire sont rappelées. Ces normes sont utilisées comme indices de performance pour la synthèse des correcteurs.

Le système linéaire suivant est considéré :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B_w \mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= C_z \mathbf{x} + D_{zw} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{A.26}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m_w}$ est le vecteur des entrées de perturbation et $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{p_z}$ est le vecteur des sorties qui mesurent la performance du système.

Le fonction de transfert du système (A.26) est :

$$G_{zw}(s) = C_z (sI - A)^{-1} B_w + D_{zw}.\tag{A.27}$$

On rappelle la définition de norme \mathcal{L}_2 .

Définition 4. ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996, page 112. La norme \mathcal{L}_2 d'une fonction scalaire ou matricielle $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{m_w \times p_z}$ générique est définie par :

$$\|F\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(F^*(j\omega)F(j\omega))}.\tag{A.28}$$

A.3.1 Norme H_∞

La norme H_∞ de (A.27) est :

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}\{G_{zw}(j\omega)\}.\tag{A.29}$$

La norme H_∞ mesure le gain maximum entrées-sorties du système. Pour des systèmes linéaire invariants la norme H_∞ est égale à la norme \mathcal{L}_2 induite du système, comme expliquée dans KHALIL 2001, page 210. Pour la synthèse des correcteurs on s'intéresse à borner la norme H_∞ de la boucle fermée à partir de l'équivalence avec la norme \mathcal{L}_2 induite et en utilisant la représentation d'état du système. Dans la suite on présente une condition LMI, dénommée *Bounded Real Lemma*, qui, si vérifiée, garantie que la norme H_∞ de (A.26) est inférieure à une valeur donnée.

Théorème 8. DUAN et YU 2013, page 146. On considère le système (A.26). $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_\infty$ s'il existe une matrice $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle qu'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z^T \\ B_w^T P & -\gamma_\infty I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0\tag{A.30a}$$

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB_w & C_z^T \\ B_w^T P & -\gamma_\infty^2 I & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0\tag{A.30b}$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P + C_z^T C_z & PB_w + C_z^T D_{zw} \\ B_w^T P + D_{zw}^T C_z & D_{zw}^T D_{zw} - \gamma_\infty^2 I \end{bmatrix} < 0\tag{A.30c}$$

Il est possible exprimer le théorème 8 d'une autre façon encore.

Théorème 9. DUAN et YU 2013, page 150. On considère le système (A.26). $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_\infty$ s'il existe une matrice $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ & B_w & QC_z^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty I & D_{zw}^T \\ C_z Q & D_{zw} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0\tag{A.31}$$

A.3.2 Norme H_2

On calcule la norme H_2 du système (A.26) en calculant la norme \mathcal{L}_2 , définition 4, de la fonction de transfert (A.27) :

$$\|G_{zw}(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{trace}(G_{zw}^T(j\omega)G_{zw}(j\omega)) d\omega}. \quad (\text{A.32})$$

La norme exprimée par (A.32) représente l'énergie de la sortie \mathbf{z} en réponse à un bruit blanc de variance 1 en entrée sur \mathbf{w} , comme évoqué dans SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997.

Pour avoir une définition de la norme H_2 du système (A.26) en fonction de sa représentation d'état, on considère le théorème suivant.

Définition 5. ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996, page 112. On considère le système avec fonction de transfert (A.27) et A stable. Alors on a :

$$\|G_{zw}(s)\|_2^2 = \text{trace}(B_w^T L_o B_w) = \text{trace}(C_z^T L_c C_z). \quad (\text{A.33})$$

où L_o et L_c sont respectivement les Gramians d'observabilité et de contrôlabilité de (A.26), calculés par les équations de Lyapunov suivantes :

$$AL_c + L_c A^T + B_w B_w^T = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$A^T L_o + L_o A + C_z^T C_z = 0. \quad (\text{A.35})$$

Pour la synthèse des correcteurs on est intéressés à borner la norme H_2 de la boucle fermée. Donc on montre ici une condition LMI qui, si vérifiée, prouve que la norme H_2 de (A.26) est bornée par un valeur γ_2 .

Théorème 10. DUAN et YU 2013, page 157. On considère le système (A.26) stable et $D_{zw} = 0$. $\|G_{zw}(s)\|_2 < \gamma_2$ si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. Il existe une matrice $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$AQ + QA^T + B_w B_w^T < 0 \quad (\text{A.36a})$$

$$\text{trace}(C_z^T Q C_z) < \gamma_2^2 \quad (\text{A.36b})$$

2. Il existe une matrice $R = R^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$A^T R + RA + C_z^T C_z < 0 \quad (\text{A.37a})$$

$$\text{trace}(B_w^T R B_w) < \gamma_2^2 \quad (\text{A.37b})$$

En utilisant le théorème 10 il est possible de trouver une autre condition LMI largement utilisée pour la synthèse des correcteurs (voir SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997).

Théorème 11. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. On considère le système (A.26) stable et $D_{zw} = 0$. $\|G_{zw}(s)\|_2 < \gamma_2$ s'il existe une matrice $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $V = V^T \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$ telles que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & P B_w \\ B_w^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.38a})$$

$$\begin{bmatrix} P & C_z^T \\ C_z & V \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.38b})$$

$$\text{trace}(V) < \gamma_2^2. \quad (\text{A.38c})$$

A.3.3 Norme H_2 généralisée

On considère maintenant la norme H_2 généralisée, définie dans WILSON 1989 et utilisée initialement pour la synthèse des correcteurs dans ROTEA 1993.

La norme H_2 généralisée du système (A.26) est donnée par

$$\|G_{zw}(s)\|_{2g} = \sup \left\{ \|\underline{\mathbf{z}}\|_2 : \underline{\mathbf{x}} = 0, T \geq 0, \int_0^T \|\underline{\mathbf{w}}(t)\|_2^2 dt \leq 1 \right\}. \quad (\text{A.39})$$

Elle mesure le pic d'amplitude maximale des sorties $\underline{\mathbf{z}}$ en réponse à des entrées de perturbation à énergie unitaire. Elle est utile dans la synthèse des correcteurs pour borner l'amplitude des sorties, par exemple pour éviter la saturation des actionneurs du système.

Dans la suite on présente une condition LMI qui, si vérifiée, prouve que la norme H_2 généralisée d'un système est inférieure à une valeur donnée.

Théorème 12. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. On considère le système (A.26) avec $D_{zw} = 0$. $\|G_{zw}(s)\|_{2g} < \gamma_{2g}$ s'il existe une matrice $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & P B_w \\ B_w^T P & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.40a})$$

$$\begin{bmatrix} P & C_z^T \\ C_z & \gamma_{2g}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A.40b})$$

A.4 Synthèse du correcteur

Dans cette section la synthèse des correcteurs à temps continu à travers la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI est traitée.

A.4.1 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires

Le système linéaire suivant est considéré :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= A \underline{\mathbf{x}} + B_w \underline{\mathbf{w}} + B_u \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{z}} &= C_z \underline{\mathbf{x}} + D_{zw} \underline{\mathbf{w}} + D_{zu} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}} &= C_y \underline{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

où $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{m_w}$ est le vecteur des entrées de perturbation, $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m_u}$ est le vecteur des entrées de commande, $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{p_z}$ est le vecteur des sorties contrôlées, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{p_y}$ est le vecteur des sorties mesurées.

On cherche dans cette section un correcteur de la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{u}} = K \underline{\mathbf{y}} \quad (\text{A.42})$$

où $K \in \mathbb{R}^{n_u \times p_y}$ est un gain statique.

La dynamique de la boucle fermée est :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= (A + B_u K C_y) \underline{\mathbf{x}} + B_w \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{z}} &= (C_z + D_{zu} K C_y) \underline{\mathbf{x}} + D_{zw} \underline{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

et la fonction de transfert de $\underline{\mathbf{w}}$ à $\underline{\mathbf{z}}$ est :

$$G_{zw}(s) = (C_z + D_{zu} K C_y) (sI - (A + B_u K C_y))^{-1} B_w + D_{zw}. \quad (\text{A.44})$$

Retour d'état

L'entrée du correcteur est l'état du système : $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}$.

On rappelle la synthèse d'un correcteur statique dans le cas où on ignore les entrées de perturbation, c'est à dire où on considère $\underline{\mathbf{w}} = 0$.

Théorème 13. BOYD 1994, page 100. S'il existe une matrice $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ telles que

$$AQ + QA^T + B_u Y + Y^T B_u < 0 \quad (\text{A.45})$$

alors le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise le système (A.41) avec $\underline{\mathbf{w}} = 0$.

Si le théorème 13 est vérifié on dit que le système (A.41) est *stabilisable quadratiquement*.

Retour d'état avec placement des pôles

On cherche un correcteur statique, dans le cas où $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}$ et en considérant $\underline{\mathbf{w}} = 0$, qui stabilise le système et place les pôles de la boucle fermée dans une région LMI.

Théorème 14. DUAN et YU 2013, page 208. S'il existe une matrice $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et une région LMI $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$ telles que

$$L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M^T \otimes (QA^T) + M \otimes (B_u Y) + M^T \otimes (Y^T B_u^T) < 0 \quad (\text{A.46})$$

alors le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise le système (A.41) avec $\underline{\mathbf{w}} = 0$ et les pôles de la boucle fermée se trouvent dans \mathbb{D} .

Retour d'état et norme H_∞

On cherche un correcteur statique, dans le cas où $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}$, capable de stabiliser le système et minimiser la norme H_∞ du transfert entre $\underline{\mathbf{w}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$.

Théorème 15. DUAN et YU 2013, page 251. S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et un scalaire $\gamma_\infty > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_u Y + Y^T B_u^T & B_w & QC_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ B_w^T & -\gamma_\infty I & D_{zw}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & D_{zw} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.47})$$

alors le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise le système (A.41) et $\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma_\infty$.

Pour la synthèse de correcteur il donc possible de minimiser γ_∞ sous la contrainte (A.47).

Retour d'état et norme H_2

On cherche un correcteur statique, dans le cas où $\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{x}}$, capable de stabiliser le système et minimiser la norme H_2 du transfert entre $\underline{\mathbf{w}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$.

Théorème 16. DUAN et YU 2013, page 257. On considère le système (A.41) avec $D_{zw} = 0$. S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $V = V^T \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$ et un scalaire $\gamma_2 > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + B_u Y + Y^T B_u^T & B_w \\ B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.48a})$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & V \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.48b})$$

$$\text{trace}(V) < \gamma_2^2. \quad (\text{A.48c})$$

alors le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise le système (A.41) et $\|G_{zw}(s)\|_2 < \gamma_2$.

Pour la synthèse de correcteur il donc possible de minimiser γ_2 sous les contraintes (A.48a), (A.48b) et (A.48c).

Retour d'état et norme H_2 généralisée

On cherche un correcteur statique, dans le cas où $\underline{y} = \underline{x}$, capable de stabiliser le système et minimiser la norme H_2 généralisée du transfert entre \underline{w} et \underline{z} .

Théorème 17. *On considère le système (A.41) avec $D_{zw} = 0$. S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et un scalaire $\gamma_{2g} > 0$ telles que*

$$\begin{bmatrix} QA^T + AQ + B_u Y + Y^T B_u^T & B_w \\ & B_w^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.49a})$$

$$\begin{bmatrix} Q & QC_z^T + Y^T D_{zu}^T \\ C_z Q + D_{zu} Y & \gamma_{2g}^2 I \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.49b})$$

alors le correcteur $K = YQ^{-1}$ stabilise le système (A.41) et $\|G_{zw}(s)\|_{2g} < \gamma_{2g}$.

Démonstration. On considère le théorème 12 pour le système en boucle fermée (A.43). La condition (A.40a) est la même que la condition (A.38a) du théorème 11. (A.49a) est donc calculée de la même façon que (A.48a) du théorème 16.

Maintenant on écrit (A.40b) pour (A.43) :

$$\begin{bmatrix} P & (C_z + D_{zu}K)^T \\ (C_z + D_{zu}K) & \gamma_{2g}^2 I \end{bmatrix} > 0. \quad (\text{A.50})$$

On pré et post-multiplie (A.50) par $U = \text{diag}(Q, I)$ et en considérant $Y = KQ$ on obtient (A.49b). \square

Pour la synthèse de correcteur il est donc possible de minimiser γ_{2g} sous les contraintes (A.49a) et (A.49b).

A.4.2 Correcteurs statiques pour des systèmes linéaires avec entrées saturées

Systèmes avec dynamique saturée

On considère le système non-linéaire :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B_h \underline{\phi}(\underline{h}) + B_u K \underline{x} \\ \underline{h} &= C_h \underline{x} + D_{hh} \underline{\phi}(\underline{h}) + D_{hu} K \underline{x} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

où $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{h} \in \mathbb{R}^{p_h}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C_h \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $D_{hh} \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$, $D_{hu} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^{p_h}$ avec chaque élément $\sigma_i(h_i)$ représentant une fonction de saturation et $\underline{h} \in \mathbb{R}^{p_h}$ est l'argument de $\underline{\sigma}$. La matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le gain d'un correcteur statique par retour d'état.

Comme évoqué dans la section A.2.2, ce système peut représenter un système avec dynamique saturée. Le théorème suivant est inspiré du résultat proposé dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 146, pour la synthèse d'un correcteur statique par retour d'état dans le cas où les signaux de commande sont saturés.

Théorème 18. *S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $S_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale et une matrice $J_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$ telles que*

$$\left[\begin{array}{c|c} QA^T + AQ + B_u Y + Y^T * B_u^T & B_h S_h - QC_h^T - Y^T D_{hu}^T - J_h^T \\ \hline S_h B_h^T - C_h Q + Y D_{hu} - J_h & -(I + D_{hh}) S_h - S_h (I + D_{hh})^T \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.52a})$$

$$\left[\begin{array}{c} Q & J_{hi}^T \\ J_{hi} & \bar{h}_i^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h \quad (\text{A.52b})$$

alors le gain $K = YQ^{-1}$ garantit la stabilité asymptotique pour le système non-linéaire (A.54) dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$, avec $P = Q^{-1}$.

Démonstration. On applique le résultat du théorème 6 au système (A.51) en boucle fermée

$$\left[\begin{array}{c|c} Q (A + B_u K)^T + (A + B_u K) Q & B_h S_h - Q (C_h + D_{hu} K)^T - J_h^T \\ \hline S_h B_h^T - (C_h + D_{hu} K) Q - J_h & -(I + D_{hh}) S_h - S_h (I + D_{hh})^T \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.53a})$$

$$\left[\begin{array}{cc} Q & J_{h_i}^T \\ J_{h_i} & \bar{h}_i^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h. \quad (\text{A.53b})$$

La variable $Y = KQ$ est définie et appliquée à l'expression (A.53a), pour obtenir (A.52a). \square

Systèmes avec entrées de commande saturées

On considère un système linéaire avec les entrées de commande saturées :

$$\dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + B_u \sigma(\mathbf{u}) \quad (\text{A.54})$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_u}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ et le vecteur \mathbf{u} des commande est calculé par un retour d'état

$$\mathbf{u} = K \mathbf{x}.$$

On considère $\bar{u}_i \quad \forall i = 1 \dots m_u$ les seuils de saturation des signaux de commande et $Y_i \quad \forall i = 1 \dots m_u$ les ligne de la matrice Y .

Théorème 19. [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 146. *S'il existe des matrices $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $S_u > 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ diagonale et $J_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$ telles que :*

$$\left[\begin{array}{c|c} A Q + Q A^T + B_u Y + Y^T * B_u^T & B_u S_u - J_u^T \\ \hline S_u B_u^T - J_u & -2 S_u \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.55a})$$

$$\left[\begin{array}{cc} Q & Y_i \cdot^T - J_{u_i}^T \\ K_i Q - J_{u_i} & \bar{u}_i^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m_u \quad (\text{A.55b})$$

alors le gain $K = YQ^{-1}$ garantit la stabilité asymptotique pour le système non-linéaire (A.54) dans l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$, avec $P = Q^{-1}$.

Pour la synthèse du correcteur, que ce soit avec les résultats des théorèmes 19 ou 18, différents critères peuvent être utilisés pour maximiser la région d'attraction du système en boucle fermée, comme évoqué pour la synthèse de correcteurs statiques. Un ensemble de ces critères est présenté dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), pages 59-62.

Synthèse multi-objectif

Il est possible combiner les résultats des théorèmes 14, 15, 16, 17, 18 et 19 pour la synthèse d'un seul correcteur. Pour cela, une seule fonction de Lyapunov quadratique $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$, avec $Q = Q^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, est utilisée. En pratique cela veut dire que la même matrice Q est utilisée pour toutes les contraintes LMI. Dans ce cas on parle de *Lyapunov Shaping Paradigm*, comme évoqué dans [SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997](#).

En considérant les inégalités de théorèmes 15, 16 et 17, pour la synthèse du correcteur il sera possible de minimiser une fonction de coût combinant les scalaires γ_∞ , γ_2 et γ_{2g} . Il est également possible de choisir de minimiser un de ces indices de performance et choisir pour les autre une valeur a priori.

Retour de mesure

Il est possible de faire la synthèse d'un correcteur par retour de sortie, donc dans un cas où $\mathbf{u} = KC_y \mathbf{x}$, avec les mêmes méthodes proposées par les théorèmes 14, 15, 16, 17, 18 et 19. Dans ces théorèmes la matrice K n'apparaît pas explicitement comme variable de décision, car pour obtenir un problème d'optimisation

convexe la variable $Y = KQ$ est utilisée. Pour un correcteur par retour de mesure, le produit KC_yQ apparait dans les inégalités matricielles. Pour obtenir une condition LMI, la variable $Y = KC_yQ$ est utilisée. La matrice de gain du correcteur est donc exprimée par :

$$K = Y (C_y Q)^+ \quad (\text{A.56})$$

où $(C_y Q)^+$ est l'inverse de Moore-Penrose de $(C_y Q)$.

A.4.3 Correcteurs dynamiques pour des systèmes linéaires

Le système linéaire suivant est considéré :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}} &= A \underline{\mathbf{x}} + B_w \underline{\mathbf{w}} + B_u \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{z}} &= C_z \underline{\mathbf{x}} + D_{zw} \underline{\mathbf{w}} + D_{zu} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{y}} &= C_y \underline{\mathbf{x}} + D_{yw} \underline{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

où $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^{m_w}$ est le vecteur des entrées de perturbation, $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m_u}$ est le vecteur des entrées de commande, $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{p_z}$ est le vecteur des sorties contrôlées, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{p_y}$ est le vecteur des sorties mesurées.

On cherche dans cette section un correcteur dynamique d'ordre n de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_k &= A_K \underline{\mathbf{x}}_k + B_K \underline{\mathbf{y}} \\ \underline{\mathbf{u}} &= C_K \underline{\mathbf{x}} + D_K \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

où $A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_K \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $C_K \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $D_K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$.

La dynamique de la boucle fermée est :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} &= A_{cl} \underline{\mathbf{x}} + B_{w\,cl} \underline{\mathbf{w}} \\ \underline{\mathbf{z}} &= C_{z\,cl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + D_{zw\,cl} \underline{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

avec $\underline{\mathbf{x}}_{cl}^T = [\underline{\mathbf{x}}^T, \underline{\mathbf{x}}_k^T]^T$ et

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix} \\ B_{w\,cl} &= \begin{bmatrix} B_w + B_u D_K D_{yw} \\ B_K D_{yw} \end{bmatrix} \\ C_{z\,cl} &= \begin{bmatrix} C_z + D_{zu} D_K C_y & D_{zu} C_K \end{bmatrix} \\ D_{zw\,cl} &= D_{zw} + D_{zu} D_K D_{yw} \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

La fonction de transfert de $\underline{\mathbf{w}}$ à $\underline{\mathbf{z}}$ est :

$$G_{zw\,cl}(s) = C_{cl} (sI - A_{cl})^{-1} B_{w\,cl} + D_{w\,cl}. \quad (\text{A.61})$$

Pour la suite on présente un changement de variables permettant de rendre linéaires les inégalités matricielles pour la synthèse des correcteurs dynamiques. Ce changement de variable est présenté dans [SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997](#).

Dans la suite on marquera en gras les variables des inégalités matricielles.

On considère une fonction de Lyapunov quadratique $V(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}^T P \underline{\mathbf{x}}$, où $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, partitionnée comme :

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & N \\ N^T & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & M \\ M^T & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.62})$$

où $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1} > 0$ et $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{-1} > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Il est donc possible définir :

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & \mathbf{Y} \\ 0 & N^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.63})$$

et on observe que $P\Pi_1 = \Pi_2$.

On considère le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= N A_K M^T + N B_K C_y \mathbf{X} + \mathbf{Y} B_u C_K M^T + \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \\ \hat{\mathbf{B}} &= N B_K + \mathbf{Y} B_u D_K \\ \hat{\mathbf{C}} &= C_K M^T + D_K C_y \mathbf{X} \\ \hat{\mathbf{D}} &= D_K\end{aligned}\tag{A.64}$$

où $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$.

Ce changement de variables permet d'obtenir les relations ci-dessous :

$$\Pi_1^T P A_{cl} \Pi_1 = \Pi_2^T A_{cl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix}\tag{A.65a}$$

$$\Pi_1^T P B_{wcl} = \Pi_2^T B_{wcl} = \begin{bmatrix} B_w + B_u \hat{\mathbf{D}} D_{yw} \\ \mathbf{Y} B_w + \hat{\mathbf{B}} D_{yw} \end{bmatrix}\tag{A.65b}$$

$$C_{zcl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} C_z \mathbf{X} + D_{zu} \hat{\mathbf{C}} & C_z + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} C_y \end{bmatrix}\tag{A.65c}$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix}.\tag{A.65d}$$

Les matrices M et N vérifient :

$$MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}.\tag{A.66}$$

On impose également que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0\tag{A.67}$$

de sorte que $I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$ soit non singulière. A partir de (A.66) l'on observe que si \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont données, il est possible de calculer M et N au moyen de la décomposition en valeurs singulières de $(I - \mathbf{X}\mathbf{Y})$.

Correcteur H_∞

On cherche un correcteur dynamique (A.58) tel que la norme H_∞ du transfert entre $\underline{\mathbf{w}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$ soit minimisée. Il existe différentes façons de formuler les contraintes LMI pour ce problème. Dans GAHINET et APKARIAN 1994 des conditions LMI sont données et la solution du problème d'optimisation peut être utilisée pour la recherche d'un correcteur avec la méthode explicite présentée dans GAHINET 1996.

Ici on présente la méthode proposée dans SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997 pour la synthèse d'un correcteur H_∞ , car plus pratique pour la synthèse d'un correcteur multi-objectif.

Théorème 20. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. *S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ et un scalaire $\gamma_\infty > 0$ telles que :*

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A} \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 & 0 \\ \hline B_w^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & B_w^T \mathbf{Y}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{B}}^T & -\gamma_\infty I & 0 \\ \hline C_z \mathbf{X} + D_{zu} \hat{\mathbf{C}} & C_z + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} C_y & D_{zw} + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} D_{yw} & -\gamma_\infty I \end{array} \right) < 0\tag{A.68a}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0\tag{A.68b}$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned}
D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\
C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\
B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\
A_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T}
\end{aligned} \tag{A.69}$$

stabilise (A.57) et $\|G_{zw\,cl}(s)\|_\infty < \gamma_\infty$. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Pour la synthèse du correcteur on cherche une solution du théorème 20 en minimisant γ_∞ .

Correcteur H_2

On cherche un correcteur dynamique (A.58) tel que la norme H_2 du transfert entre $\underline{\mathbf{w}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$ soit minimisée.

Théorème 21. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. *S'il existe les matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ et $\mathbf{V} = \mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$ et un scalaire $\gamma_2 > 0$ telles que :*

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \frac{A\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}}}{\hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T} & 0 & 0 \\ \hline \frac{\hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T}{B_w^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T} & \mathbf{Y}A + \hat{\mathbf{B}}C_y & 0 \\ \hline B_w^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & B_w^T \mathbf{Y}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{B}} & -I \end{array} \right] \right) < 0 \tag{A.70a}$$

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ \hline I & \mathbf{Y} & 0 \\ \hline C_z \mathbf{X} + D_{zu} \hat{\mathbf{C}} & C_z + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} C_y & \mathbf{V} \end{array} \right] \right) > 0 \tag{A.70b}$$

$$\text{trace}(\mathbf{V}) < \gamma_2^2 \tag{A.70c}$$

$$D_{zw} + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} D_{yw} = 0 \tag{A.70d}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{array} \right] > 0 \tag{A.70e}$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned}
D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\
C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\
B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\
A_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T}
\end{aligned} \tag{A.71}$$

stabilise (A.57) et $\|G_{zw\,cl}(s)\|_2 < \gamma_2$. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Pour la synthèse du correcteur on cherche une solution du théorème 21 en minimisant γ_2 .

Correcteur pour la minimisation de la norme H_2 généralisée

On cherche un correcteur dynamique (A.58) tel que la norme H_2 généralisée du transfert entre $\underline{\mathbf{w}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$ soit minimisée.

Théorème 22. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. *S'il existe les matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ et un scalaire $\gamma_{2g} > 0$ telles que :*

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y}A + \hat{\mathbf{B}}C_y & 0 \\ \hline B_w^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & B_w^T \mathbf{Y}^T + D_{yw}^T \hat{\mathbf{B}} & -I \end{array} \right] \right) < 0 \quad (\text{A.72a})$$

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & 0 & 0 \\ \hline I & \mathbf{Y} & 0 \\ \hline C_z \mathbf{X} + D_{zu} \hat{\mathbf{C}} & C_z + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} C_y & \gamma_{2g}^2 I \end{array} \right] \right) > 0 \quad (\text{A.72b})$$

$$D_{zw} + D_{zu} \hat{\mathbf{D}} D_{yw} = 0 \quad (\text{A.72c})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.72d})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\ A_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

stabilise (A.57) et $\|G_{zw,cl}(s)\|_{2g} < \gamma_{2g}$. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Pour la synthèse du correcteur on cherche une solution du théorème 22 en minimisant γ_{2g} .

Correcteur avec placement des pôles

On cherche un correcteur dynamique (A.58) tel que les pôles de la boucle fermée soient dans une région LMI \mathbb{D} .

Théorème 23. SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997. *S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ et une région LMI $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$ telles que :*

$$L \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} + M \otimes \begin{bmatrix} A\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}A + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix} + M^T \otimes \begin{bmatrix} A\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y}A + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix}^T < 0 \quad (\text{A.74a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.74b})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\ A_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

stabilise (A.57) et les pôles de la boucle fermée (A.59) se trouvent dans \mathbb{D} . Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

A.4.4 Correcteurs dynamiques pour des systèmes avec entrées saturées

On considère dans cette section la synthèse des correcteurs dynamiques pour des systèmes avec signaux de commande saturés. Dans ce cas également, on cherche un correcteur dynamique d'ordre n de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}}_k &= A_K \underline{\mathbf{x}}_k + B_K \underline{\mathbf{y}} \\ \underline{\mathbf{u}} &= C_K \underline{\mathbf{x}} + D_K \underline{\mathbf{y}}\end{aligned}\tag{A.76}$$

où $A_K \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_K \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $C_K \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $D_K \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$.

Systèmes avec dynamique saturée

Le système suivant est considéré :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}} &= A \underline{\mathbf{x}} + B_u \underline{\mathbf{u}} + B_h \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) \\ \underline{\mathbf{h}} &= C_h \underline{\mathbf{x}} + D_{hu} \underline{\mathbf{u}} + D_{hh} \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) \\ \underline{\mathbf{y}} &= C_y \underline{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{A.77}$$

où $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{m_u}$ est le vecteur des entrées de commande, $\underline{\phi} \in \mathbb{R}^{p_h}$ est un vecteur de fonctions seuil, $\underline{\mathbf{h}} \in \mathbb{R}^{p_h}$ représente la dynamique saturée du système avant saturation, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{p_y}$ est le vecteur des sorties mesurées. La relation (A.77) dépend de la fonction seuil et pas de la fonction de saturation. Cependant dans la section A.2.2 on a vu qu'un système avec entrées saturées peut toujours être représenté en fonction de la fonction seuil. On se rappelle qu'on a $-\bar{h}_i \leq \sigma(h_i) \leq \bar{h}_i \quad \forall i = 1 \dots p_h$.

La dynamique de la boucle fermée est :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{x}}}_{cl} &= A_{cl} \underline{\mathbf{x}} + B_{\phi cl} \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}}) \\ \underline{\mathbf{h}} &= C_{hcl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + D_{h\phi cl} \underline{\phi}(\underline{\mathbf{h}})\end{aligned}\tag{A.78}$$

avec $\underline{\mathbf{x}}_{cl}^T = [\underline{\mathbf{x}}^T, \underline{\mathbf{x}}_k^T]^T$ et

$$\begin{aligned}A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix} \\ B_{\phi cl} &= \begin{bmatrix} B_h \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_{hcl} &= \begin{bmatrix} C_h + D_{hu} D_K C_y & D_{hu} C_K \end{bmatrix} \\ D_{h\phi cl} &= D_{hh}.\end{aligned}\tag{A.79}$$

La fonction de transfert de $\underline{\mathbf{w}}$ à $\underline{\mathbf{z}}$ est :

$$G_{zwcl}(s) = C_{cl} (sI - A_{cl})^{-1} B_{wcl} + D_{wcl}.\tag{A.80}$$

Dans cette section on considère à nouveau le changement de variable introduit dans SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997 et qu'on a déjà rappelé dans la section A.4.3. On observe que pour la boucle fermée (A.78) on a les égalités suivantes :

$$\Pi_1^T P A_{cl} \Pi_1 = \Pi_2^T A_{cl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} A \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix}\tag{A.81a}$$

$$\Pi_1^T P B_{\phi cl} = \Pi_2^T B_{\phi cl} = \begin{bmatrix} B_h \\ \mathbf{Y} B_h \end{bmatrix}\tag{A.81b}$$

$$C_{hcl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} C_h \mathbf{X} + D_{hu} \hat{\mathbf{C}} & C_h + D_{hu} \hat{\mathbf{D}} C_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.81c})$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.81d})$$

Le théorème qui suit est inspiré d'un résultats proposé dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 162, qui traite le cas où les signaux de commande sont saturés et de plus considère un système avec des entrées de perturbation limitées en norme.

Théorème 24. *Si il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $\mathbf{J}_{h1} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\mathbf{J}_{h2} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ telles que :*

$$\text{He} \left(\begin{bmatrix} \frac{A \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}}}{\hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T} & \frac{0}{\mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y} & \frac{0}{0} \\ \frac{\mathbf{S}_h B_h^T - C_h \mathbf{X} - D_{hu} \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{J}_{h1}}{\mathbf{S}_h B_h^T \mathbf{Y} - C_h - D_{hu} \hat{\mathbf{D}} C_y - \mathbf{J}_{h2}} & \frac{0}{-(I + D_{hh}) \mathbf{S}_h} \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (\text{A.82a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I & \mathbf{J}_{h1_i}^T \\ I & \mathbf{Y} & \mathbf{J}_{h2_i}^T \\ \mathbf{J}_{h1_i} & \mathbf{J}_{h2_i} & \bar{h}_i^{-2} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h \quad (\text{A.82b})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.82c})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K) \\ A_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

stabilise (A.77) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Démonstration. On cherche une fonction de Lyapunov quadratique $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, où $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ pour le système en boucle fermée telle que le théorème 6 soit vérifié, alors on considère initialement (A.22) et (A.23) :

$$\left[\frac{A_{cl}^T P + P A_{cl}}{B_{\phi cl}^T P - T C_{hcl} - T H} \mid \frac{P B_{\phi cl} - C_{hcl}^T T - H^T T}{-T (I + D_{\phi cl}) - (I + D_{\phi cl})^T T} \right] < 0 \quad (\text{A.84})$$

$$\begin{bmatrix} P & H_i^T \\ H_i & \bar{h}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h. \quad (\text{A.85})$$

On pré et post-multiplie (A.84) et (A.85) respectivement par $U = \text{diag}(\Pi_1, \mathbf{S}_h)$ et $U' = \text{diag}(\Pi_1, I)$, avec $\mathbf{S}_h = T^{-1}$:

$$\left[\frac{\Pi_1^T A_{cl}^T P \Pi_1 + \Pi_1^T P A_{cl} \Pi_1}{\mathbf{S}_h B_{\phi cl}^T P \Pi_1 - C_{hcl} \Pi_1 - H \Pi_1} \mid \frac{\Pi_1^T P B_{\phi cl} \mathbf{S}_h - \Pi_1^T C_{hcl}^T - \Pi_1^T H^T}{-(I + D_{h\phi cl}) \mathbf{S}_h - \mathbf{S}_h (I + D_{h\phi cl})^T} \right] < 0 \quad (\text{A.86})$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^T P \Pi_1 & \Pi_1^T H_i^T \\ H_i \Pi_1 & \bar{h}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h. \quad (\text{A.87})$$

On définit $H\Pi_1 = [J_{h1} \ J_{h2}]$. Finalement en remplaçant (A.81a), (A.81b), (A.81c) et (A.81d) dans (A.86) et (A.87) on obtient (A.82a) et (A.82b). \square

L'inégalité (A.82a) ne définit pas un ensemble convexe, pour la présence du produit $\mathbf{S}_h B_h \mathbf{Y}$. Pour cela, il est possible de choisir la matrice \mathbf{S}_h avant la recherche d'une solution du théorème 24. Dans ce cas, \mathbf{S}_h n'est plus une variable de décision. Cette option n'est pas très facilement réalisable, parce qu'en pratique \mathbf{S}_h est souvent très importante pour la recherche d'une solution et le choix d'une valeur \mathbf{S}_h a priori n'est pas une tâche simple.

Une solution à ce problème est inspirée des résultats proposés par GARCIA et al. 2009 et SILVA et al. 2008 : on introduit un *anti-windup* statique au correcteur, qui donc a la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= A_K \mathbf{x}_k + B_K \underline{\mathbf{y}} + E_{Kh} \underline{\phi}(\mathbf{h}) \\ \underline{\mathbf{u}} &= C_K \mathbf{x} + D_K \underline{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

où $E_{Kh} \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$. Dans ce cas :

$$B_{\phi cl} = \begin{bmatrix} B_h \\ E_{Kh} \end{bmatrix} \quad (\text{A.89})$$

et l'égalité (A.81b) dévient

$$\Pi_1^T P B_{\phi cl} = \Pi_2^T B_{\phi cl} = \begin{bmatrix} B_h \\ \mathbf{Y} B_h + N E_{Kh} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.90})$$

Le théorème suivant est inspiré de la solution proposée dans GARCIA et al. 2009 pour un système avec signaux de commande saturés et entrées de perturbation avec énergie limitée.

Théorème 25. *Si il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_h > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $\mathbf{J}_{h1} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\mathbf{J}_{h2} \in \mathbb{R}^{p_h \times n}$, $\mathbf{R}_h \in \mathbb{R}^{n \times p_h}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ telles que :*

$$\text{He} \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} A\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T \\ \mathbf{S}_h B_h^T - C_h \mathbf{X} - D_{hu} \hat{\mathbf{C}} - \mathbf{J}_{h1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y \\ \mathbf{R}_h^T - C_h - D_{hu} \hat{\mathbf{D}} C_y - \mathbf{J}_{h2} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -(I + D_{hh}) \mathbf{S}_h \end{array} \end{array} \right) < 0 \quad (\text{A.91a})$$

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ I \\ \mathbf{J}_{h1i} \end{array} & \begin{array}{c} I \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{J}_{h2i} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{J}_{h1i}^T \\ \mathbf{J}_{h2i}^T \\ \bar{h}_i^2 \end{array} \end{array} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots p_h \quad (\text{A.91b})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.91c})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} E_{Kh} &= N^{-1} (\mathbf{R}_h - \mathbf{Y} B_h \mathbf{S}_h) \mathbf{S}_h^{-1} \\ D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K) \\ A_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

stabilise (A.77) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à celle du théorème 24. On reprend de (A.86) et (A.87). Cette fois on utilise l'égalité (A.90) et on effectue le changement de variable suivant : $\mathbf{R}_h = \mathbf{Y} B_h \mathbf{S}_h + N E_{Kh} \mathbf{S}_h$. On obtient de cette façon (A.91a). \square

Systèmes avec entrées de commande saturées

On considère un système linéaire avec les entrées de commande saturées :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_u \underline{\sigma}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{y} &= C_y \mathbf{x}\end{aligned}\tag{A.93}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_u}$ est le vecteur des entrées de commande, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p_y}$ est le vecteur des sorties mesurées et $\underline{\sigma}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m_u}$ est le vecteur des commandes saturées avec chaque élément $\sigma_i(u_i)$ représentant une fonction de saturation, avec $-\bar{u}_i \leq \sigma(u_i) \leq \bar{u}_i \quad \forall i = 1 \dots m_u$.

En considérant (A.76) et (A.93) on veut exprimer la dynamique de la boucle fermée en fonction de la fonction seuil $\underline{\phi}(\mathbf{u}) = \underline{\sigma}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_u \underline{\sigma}(\mathbf{u}) - B_u \mathbf{u} + B_u \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B_u \underline{\phi}(\mathbf{u}) + B_u C_K \mathbf{x}_k + B_u D_K C_y \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} &= (A + B_u D_K C_y) \mathbf{x} + B_u C_K \mathbf{x}_k + B_u \underline{\phi}(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Donc finalement la dynamique de la boucle fermée en fonction de la seuil est :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{cl} &= A_{cl} \mathbf{x} + B_{ucl} \underline{\phi}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &= C_{ucl} \mathbf{x}_{cl}\end{aligned}\tag{A.94}$$

avec $\mathbf{x}_{cl}^T = [\mathbf{x}^T, \mathbf{x}_k^T]^T$ et

$$\begin{aligned}A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix} \\ B_{ucl} &= \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_{ucl} &= \begin{bmatrix} D_K C_y & C_K \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{A.95}$$

La condition de secteur généralisée suivante est considérée.

Théorème 26. *TARBOURIECH et al. 2011, page 43.* On considère $\underline{\phi}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^{m_u}$, une matrice diagonale $T \geq 0 \in \mathbb{R}^{m_u \times m_u}$ et un vecteur $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m_u}$ tels que $|u_i - v_i| \leq \bar{u}_i$, alors :

$$\underline{\phi}(\mathbf{u})^T T (\underline{\phi}(\mathbf{u}) + \mathbf{v}) \leq 0.\tag{A.96}$$

On cherche finalement des conditions LMI pour la synthèse d'un correcteur dynamique.

Dans ce cas aussi on considère le changement de variable introduit dans SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997 et qu'on a déjà rappelé dans la section A.4.3. On observe que pour la boucle fermée (A.94) on a les égalités suivantes :

$$\Pi_1^T P A_{cl} \Pi_1 = \Pi_2^T A_{cl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} A \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & A + B_u \hat{\mathbf{D}} C_y \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y \end{bmatrix}\tag{A.97a}$$

$$\Pi_1^T P B_{ucl} = \Pi_2^T B_{\phi cl} = \begin{bmatrix} B_u \\ \mathbf{Y} B_u \end{bmatrix}\tag{A.97b}$$

$$C_{ucl} \Pi_1 = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} C_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.97c})$$

$$\Pi_1^T P \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.97d})$$

Le théorème qui suit est inspiré d'un résultats proposé dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), page 162 pour un système avec signaux de commande saturés et des entrées de perturbation limitées en norme.

Théorème 27. *Si il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_u > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $\mathbf{J}_{u1} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{J}_{u2} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ telles que :*

$$\text{He} \left(\begin{bmatrix} A\mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 \\ \mathbf{S}_u B_u^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{S}_u B_u^T \mathbf{Y} - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{bmatrix} \right) < 0 \quad (\text{A.98a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_i^T - \mathbf{J}_{u1i}^T \\ I & \mathbf{Y} & C_y^T \hat{\mathbf{D}}_i^T - \mathbf{J}_{u2i}^T \\ \hat{\mathbf{C}}_i - \mathbf{J}_{u1i} & \hat{\mathbf{D}}_i C_y - \mathbf{J}_{u2i} & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m_u \quad (\text{A.98b})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.98c})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= \left(\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X} \right) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K \right) \\ A_K &= N^{-1} \left(\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X} \right) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

stabilise (A.93) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Démonstration. Cette démonstration suit initialement les mêmes étapes que la démonstration du théorème (6). On considère la matrice H telle que $|H_i \underline{\mathbf{x}}_{cl}| \leq \bar{u}_i \quad \forall i = 1 \dots m_u$. En tenant compte de (A.96), on cherche une fonction de Lyapunov quadratique $V(\underline{\mathbf{x}}_{cl}) = \underline{\mathbf{x}}_{cl}^T P \underline{\mathbf{x}}_{cl}$ avec $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\underline{\mathbf{x}}_{cl}) - 2\underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) T (\underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) + H \underline{\mathbf{x}}_{cl}) &< 0 \\ (A_{cl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + B_{ucl} \underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}))^T P \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{x}}^T P (A_{cl} \underline{\mathbf{x}}_{cl} + B_{ucl} \underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}})) - 2\underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) T (\underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) + H \underline{\mathbf{x}}_{cl}) &< 0 \\ \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{ucl} - H^T T \\ B_{ucl}^T P - T H & -2T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}} \\ \underline{\phi}(\underline{\mathbf{u}}) \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

donc finalement on cherche un correcteur tel que

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P + P A_{cl} & P B_{ucl} - H^T T \\ B_{ucl}^T P - T H & -2T \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{A.100})$$

Pour garantir que $|u_i - H_i \underline{\mathbf{x}}_{cl}| \leq \bar{u}_i$, on considère

$$\underline{\mathbf{x}}_{cl}^T P \underline{\mathbf{x}}_{cl} \geq \underline{\mathbf{x}}_{cl}^T (C_{ucl} - H_i)^T \bar{u}_i^{-2} (C_{ucl} - H_i) \underline{\mathbf{x}}_{cl}$$

$$P \geq (C_{ucl} - H_i)^T \bar{u}_i^{-2} (C_{ucl} - H_i)$$

$$P - (C_{ucl} - H_i)^T \bar{u}_i^{-2} (C_{ucl} - H_i) \geq 0$$

qui, en utilisant le complément de Schur, donne :

$$\begin{bmatrix} P & (C_{ucl} - H_i)^T \\ (C_{ucl} - H_i) & \bar{u}_i^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (\text{A.101})$$

On pré et post-multiplie (A.100) et (A.101) respectivement par $U = \text{diag}(\Pi_1, \mathbf{S}_u)$, avec $S_u = T^{-1}$, et $U' = \text{diag}(\Pi_1, I)$:

$$\left[\begin{array}{c|c} \Pi_1^T A_{cl}^T P \Pi_1 + \Pi_1^T P A_{cl} \Pi_1 & \Pi_1^T P B_{ucl} \mathbf{S}_u - \Pi_1^T H^T T \\ \hline \mathbf{S}_u B_{ucl}^T P \Pi_1 - T H \Pi_1 & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] < 0 \quad (\text{A.102})$$

$$\left[\begin{array}{cc} \Pi_1^T P \Pi_1 & \Pi_1^T (C_{ucl} - H_i)^T \\ (C_{ucl} - H_i) \Pi_1 & \bar{u}_i^2 \end{array} \right] \geq 0. \quad (\text{A.103})$$

On définit $H \Pi_1 = [J_{u1} \ J_{u2}]$. Finalement il suffit de remplacer les égalités (A.97a), (A.97b), (A.97c) et (A.97d) dans (A.102) et (A.103) et on trouve (A.98a) et (A.98b). \square

Comme dans le théorème 24 pour les systèmes avec dynamique saturée, (A.98a) n'est pas convexe à cause du terme $\mathbf{S}_u B_u^T \mathbf{Y}$. Les mêmes solutions présentées précédemment peuvent être utilisées : soit on choisit une valeur pour \mathbf{S}_u a priori, mais on rappelle que ce n'est pas une tâche simple, soit on utilise la méthode proposée dans GARCIA et al. 2009 et SILVA et al. 2008, déjà discutée pour les systèmes avec dynamique saturée. Pour cette deuxième option on rappelle qu'on cherche un correcteur avec forme :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= A_K \mathbf{x}_k + B_K \mathbf{y} + E_{Ku} \phi(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u} &= C_K \mathbf{x} + D_K \mathbf{y} \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

où $E_{Ku} \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$. Dans ce cas :

$$B_{ucl} = \begin{bmatrix} B_u \\ E_{Ku} \end{bmatrix} \quad (\text{A.105})$$

et l'égalité (A.97b) devient

$$\Pi_1^T P B_{ucl} = \Pi_2^T B_{ucl} = \begin{bmatrix} B_u \\ \mathbf{Y} B_u + N E_{Ku} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.106})$$

Le théorème suivant est inspiré de la solution proposée dans GARCIA et al. 2009 pour un système avec signaux de commande saturés et entrées de perturbation avec énergie limitée.

Théorème 28. *S'il existe des matrices $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{S}_u > 0 \in \mathbb{R}^{p_h \times p_h}$ diagonale, $\mathbf{J}_{u1} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{J}_{u2} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$, $\mathbf{R}_u \in \mathbb{R}^{n \times m_u}$, $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times p_y}$, $\hat{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{m_u \times n}$ et $\hat{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{m_u \times p_y}$ telles que :*

$$\text{He} \left(\left[\begin{array}{c|c|c} A \mathbf{X} + B_u \hat{\mathbf{C}} & 0 & 0 \\ \hline \hat{\mathbf{A}} + A^T + C_y^T \hat{\mathbf{D}}^T B_u^T & \mathbf{Y} A + \hat{\mathbf{B}} C_y & 0 \\ \hline \mathbf{S}_u B_u^T - \mathbf{J}_{u1} & \mathbf{R}_u - \mathbf{J}_{u2} & -2\mathbf{S}_u \end{array} \right] \right) < 0 \quad (\text{A.107a})$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{X} & I & \hat{\mathbf{C}}_i^T - \mathbf{J}_{u1i}^T \\ \hline I & \mathbf{Y} & C_y^T \hat{\mathbf{D}}_i^T - \mathbf{J}_{u2i}^T \\ \hline \hat{\mathbf{C}}_i - \mathbf{J}_{u1i} & \hat{\mathbf{D}}_i C_y - \mathbf{J}_{u2i} & \bar{u}_i^2 \end{array} \right] \geq 0 \quad \forall i = 1 \dots m_u \quad (\text{A.107b})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & I \\ I & \mathbf{Y} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.107c})$$

alors le correcteur dynamique avec matrices :

$$\begin{aligned} E_{K_u} &= N^{-1} (\mathbf{R}_u - \mathbf{Y} B_u \mathbf{S}_u) \mathbf{S}_u^{-1} \\ D_K &= \hat{\mathbf{D}} \\ C_K &= (\hat{\mathbf{C}} - D_K C_y \mathbf{X}) M^{-T} \\ B_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{Y} B_u D_K) \\ A_K &= N^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - N B_K C_y \mathbf{X} - \mathbf{Y} B_u C_K M^T - \mathbf{Y} (A + B_u D_K C_y) \mathbf{X}) M^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

stabilise (A.93) et l'ellipsoïde $\mathcal{E}(P, 1)$ est une RSA du système. Les matrices M et N sont telles que $MN^T = I - \mathbf{X}\mathbf{Y}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème suit les même étapes que celle du théorème 25. \square

Pour la synthèse des correcteurs dynamiques, que ce soit avec les résultats des théorèmes 24, 25, 27 ou 28, différents critères peuvent être utilisés pour maximiser la région d'attraction du système en boucle fermée, comme évoqué pour la synthèse de correcteurs statiques. On rappelle qu'un ensemble de ces critères est présenté dans [TARBOURIECH et al. 2011](#), pages 59-62.

Correcteurs dynamiques multi-objectif

Comme pour la synthèse d'un correcteur statique, il est possible de combiner les résultats des théorèmes 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27 et 28 pour la synthèse d'un seul correcteur. Dans ce cas également, une seule fonction de Lyapunov quadratique $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, avec $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, est utilisée pour les différentes inégalités.

On rappelle qu'on parle dans ce cas de *Lyapunov Shaping Paradigm*, voir [SCHERER, GAHINET et CHILALI 1997](#).



REVUE DES DIFFÉRENTES MÉTHODES POUR LA SYNTHÈSE DES CORRECTEURS

Sommaire

B.1 Commande LQ	211
B.2 Commande MPC	212
B.3 Commande par mode glissant	213

Dans cette annexe, un résumé de différentes méthodes de synthèse des lois de commande, autres que la commande robuste et optimale, est présenté. Plus particulièrement, notre attention sera focalisée sur les méthodes mentionnées dans la présentation de la littérature du contrôle du véhicule, effectuée dans le chapitre 5.

B.1 Commande LQ

La commande LQ (*Linéaire Quadratique*) est une technique de commande optimale qui permet de calculer un retour d'état statique, cf. **ANDERSON et MOORE 1990** et **LOCATELLI 2001**. On présente dans la suite le cas à horizon infini, pour les systèmes stationnaires. Le régulateur est calculé en minimisant un critère de performance :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \tag{B.1}$$

quadratique en l'état du système x et en la commande u . L'objectif est de ramener l'état au voisinage de l'origine. Les valeurs des matrices $Q = Q^T \geq 0$ et $R = R^T > 0$ sont choisies pour assurer un compromis entre l'évolution de l'état et celle de la commande.

On considère un système linéaire avec dynamique $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$. On appelle aussi H une matrice telle que $Q = H^T H$. Alors la solution du correcteur LQ est :

$$u(t) = -L x(t) \tag{B.2a}$$

avec

$$L = R^{-1} B^T P \tag{B.2b}$$

où $P = P^T \geq 0$ est la solution de l'équation algébrique de Riccati

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \tag{B.2c}$$

L'avantage principal de la méthode LQ est qu'elle permet de réaliser un retour d'état en manipulant uniquement les matrices Q et R . Le réglage du correcteur est donc très intuitif. En revanche, cette méthode nécessite de disposer de l'état du système en entier, qui doit donc être mesuré ou estimé.

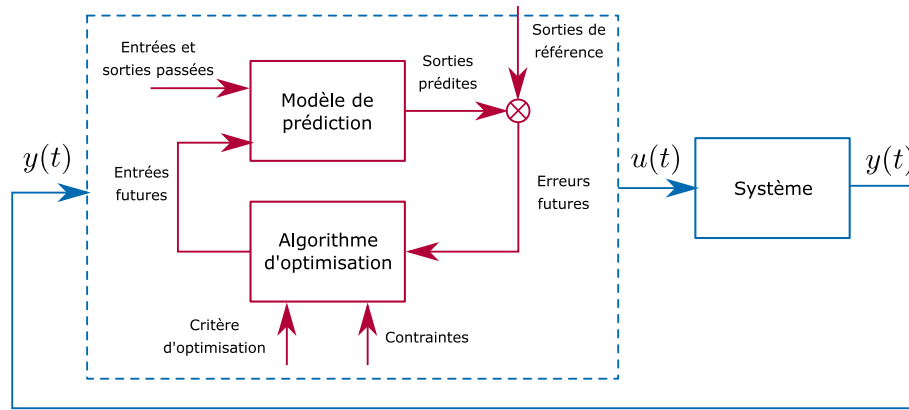


FIGURE B.1 – Architecture de commande MPC.

Il existe également une solution pour les systèmes variables dans le temps, mais le correcteur résultant est calculé sur un horizon fini. Il est donc nécessaire de calculer le correcteur en ligne, au moyen de la solution d'une équation différentielle de Riccati, ce qui peut être difficile pour un système variable dans le temps. La commande LQG (*Linéaire Quadratique Gaussienne*) est une extension qui réunit un régulateur LQ avec un filtre de Kalman, cf. [KALMAN 1960](#), pour un système en présence de bruit blanc v sur l'état et w sur les sorties. Comme expliqué dans [ZHOU, DOYLE et GLOVER 1996](#), chapitre 14, pages 365-392, la commande H_2 peut être interprétée comme une généralisation de la commande LQG.

B.2 Commande MPC

La commande prédictive, ou MPC (*Model Predictive Control*), est une commande à temps discret, basé sur un modèle du système pour en prédire le comportement sur un horizon fini et calculer une commande optimale basée sur cette prédiction. Comme expliqué dans [CAMACHO et BORDONS 2007](#), les correcteurs appartenant à la famille de la commande MPC sont généralement caractérisés par la stratégie suivante :

1. A l'instant t les sorties du système sont prédites sur un horizon fini de N échantillons en utilisant un modèle linéaire ou non-linéaire du système. Les sorties prédites $y(t+k|t) \forall k = 1 \dots N$ dépendent des entrées et sorties passées du système et des futurs signaux de contrôle $u(t+k|t) \forall k = 0 \dots N-1$.
2. Les signaux de contrôle $u(t+k|t) \forall k = 1 \dots N-1$ sont calculés en minimisant un critère d'optimisation.
3. Seul l'échantillon de la commande à l'instant $u(t|t)$ est appliqué en entrée du système, et les restants $u(t+k|t) \forall k = 1 \dots N-1$ sont écartés. Au pas d'échantillonnage suivant $y(t+1)$ est connu et la procédure redémarre de façon itérative.

La Figure B.1 montre une architecture classique de la commande MPC. Le critère d'optimisation est souvent une fonction quadratique de l'erreur des sorties du système par rapport aux signaux de référence. Il peut prendre aussi en considération les efforts de commande. L'optimisation peut être effectuée en ajoutant des contraintes. Ces contraintes peuvent être utilisées pour poser des limites de saturation et de variation des signaux de commande. La recherche de la commande optimale nécessite généralement une méthode d'optimisation itérative. Un cas particulier est celui où le critère d'optimisation est quadratique, le modèle est linéaire et l'optimisation est faite sans contrainte. Dans ce cas, il existe une solution explicite du correcteur, cf. [CAMACHO et BORDONS 2007](#), et donc l'optimisation en ligne n'est pas nécessaire. De plus, dans [BEMPORAD et al. 2002](#) les auteurs proposent une méthode pour obtenir une solution explicite également pour des problèmes linéaires quadratiques de commande MPC avec contraintes. Le correcteur qui en résulte est une fonction linéaire par morceaux, ou PWA (*Piecewise Affine Function*).

La commande MPC est pratique à implémenter parce qu'elle permet d'utiliser des modèles de prédiction très différents, soit linéaires soit non-linéaires. Le rôle du modèle est important pour la qualité de la commande obtenue et il doit donc être représentatif du système. La spécification des limites de saturation et de bande passante des signaux de contrôle est très facile, parce qu'elles sont spécifiées à travers les contraintes d'optimisation. De plus, ces contraintes peuvent aussi être employées pour borner le comportement des sorties du système, pour spécifier le comportement de la boucle fermée. En revanche, cette méthode nécessite généralement la résolution d'un problème d'optimisation en ligne. Cela peut être un problème critique, selon la performance du calculateur et la fréquence d'échantillonnage de la

commande.

La commande MPC classique n'offre pas de moyen pour prendre en compte des critères de robustesse de la boucle fermée. En revanche, il existe des extensions, rassemblées sous le nom de *MPC Robuste*, dont [RAKOVIĆ 2019](#) fait un panorama. Un type de ces extensions à la méthode MPC est celui des méthodes appelées *tube MPC*, dont dans la littérature beaucoup de solutions sont proposées, comme par exemple dans [LANGSON et al. 2004](#), [BALANDAT 2010](#) et [MAYNE et al. 2011](#). Les signaux de commande générés par ces méthodes sont composés d'une composante nominale, calculée en utilisant un modèle nominal sans perturbation, et d'une composante calculée en fonction de l'erreur entre l'état estimé par le modèle nominal et celui mesuré. La théorie des ensembles invariants est utilisée pour garantir la stabilité de la boucle fermée.

B.3 Commande par mode glissant

La commande par mode glissant, ou SMC (*Sliding Mode Control*), cf. [SHTESSEL et al. 2014](#), est une méthode de commande robuste non-linéaire. Ce type de commande utilise une variable σ , appelée *variable de glissement* et fonction des variables d'état du système, pour représenter la trajectoire du système souhaitée. Quand la variable σ est égale à zéro, le système se trouve sur la trajectoire souhaitée, appelée *surface de glissement*. La surface de glissement représente le profil de convergence qu'on aimerait assigner à la dynamique en boucle fermée. Les spécifications du comportement en boucle fermée sont assignées à travers la définition de la variable de glissement.

L'objectif du correcteur est donc d'amener à zéro la variable de glissement, de sorte que le système en boucle fermé soit sur la surface de glissement. Une fois que le système a été amené sur la surface de glissement, le correcteur doit le maintenir dessus, en dépit de perturbations. Dans ce cas, on dit que le système *glisse* sur la surface. Le correcteur est donc caractérisé par deux modes différents, illustrés dans la Figure B.2 :

- un *mode de convergence*, utilisé quand l'état du système est amené de n'importe quel point de l'espace de l'état vers la surface de glissement,
- un *mode de glissement*, utilisé pour maintenir le système sur la surface de glissement et l'amener à l'origine.

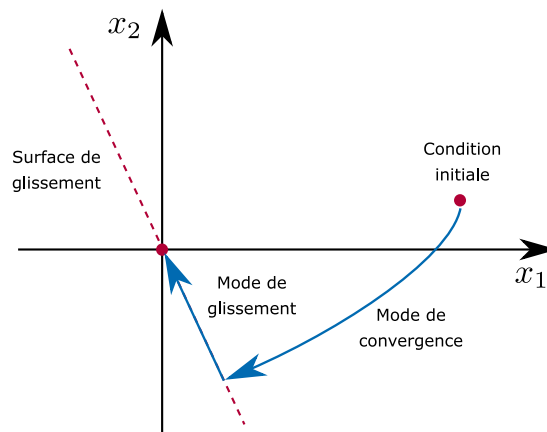


FIGURE B.2 – Modes de la commande par mode glissant.

La commande par mode glissant n'est pas nécessairement une fonction continue, mais discontinue, qui peut commuter entre fonctions continues différentes selon le point de fonctionnement du système. En particulier la commande générée dépend du signe de la variable de glissement, donc de la fonction non-linéaire $\text{sign}(\sigma)$. L'utilisation de la fonction signe peut en revanche causer un phénomène indésirable de réticence, ou *chattering*, plus ou moins élevé selon la fréquence d'échantillonnage de la loi de commande une fois implémentée sur un calculateur. Ce phénomène peut être atténué en utilisant des approximations continues de la fonction de signe, comme la fonction logistique, ou en utilisant des méthodes de commande par mode glissant d'ordre supérieur. Ces méthodes, comme par exemple celles proposées par [BARTOLINI, FERRARA et USAI 1998](#) et [SHTESSEL, TALEB et PLESTAN 2012](#), utilisent aussi les dérivées de la variable de glissement pour le calcul des signaux de commande.



LINÉARISATION DU MODÈLE VÉHICULE : MATRICES VARIABLES DANS LE TEMPS

Sommaire

C.1	Linéarisation le long d'une trajectoire de référence	215
C.2	Expression du modèle avec entrées seuil	217
C.3	Linéarisation des fonctions de saturation	218

Cette annexe présente les matrices variables dans le temps obtenues suite à la linéarisation du modèle de dynamique véhicule effectuée dans le chapitre 4.

Dans la section C.1 on introduit les expressions pour les résultats de la section 4.3, celles de la section 4.3.1 sont présentées dans la section C.2 et enfin dans la section C.3 on trouve les expressions pour la linéarisation développée dans la section 4.3.2.

C.1 Linéarisation le long d'une trajectoire de référence

Dans cette section nous présentons les expressions analytiques des matrices temps-variants $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t)$, $C(t)$, $D(t)$ et $D_h(t)$, obtenues en utilisant (4.30b)-(4.30g). On rappelle que nous considérons le modèle bicyclette non-linéaire, développé dans la section 1.1. Les approximations suivantes ont été adoptées :

- Les coefficients non-linéaires des forces des pneus $c_{\kappa_f}^*$, $c_{\kappa_r}^*$, $c_{\alpha_f}^*$ et $c_{\alpha_r}^*$ sont considérés comme des scalaires variables dans le temps,
- l'angle de braquage δ_f est considéré faible, ce qui se traduit par les approximations $\cos \delta_f \approx 1$ et $\sin \delta_f \approx \delta_f$,
- les angle de dévers θ_x et pente de la route θ_y sont considérés faibles et donc $\cos \theta_{x,y} \approx 1$ et $\sin \theta_{x,y} \approx \theta_{x,y}$,
- on utilise les expressions simplifiées (2.15) et (2.16), introduites dans la section 2.2.1, pour les angles de dérive, α_f et α_r , et les taux de glissement des roues, κ_f et κ_r ,
- les forces de résistance au roulement sont négligées.

Dans la suite, pour simplifier la notation, on a omis l'indice 0 pour indiquer qu'une variable prend les valeurs le long de la trajectoire de référence. Par exemple on écrit $v(t)$ au lieu de $v_0(t)$.

Avec les approximations indiqués on obtient les expressions suivants pour les matrices $A(t)$, $B(t)$, $B_h(t)$, $C(t)$, $D(t)$ et $D_h(t)$:

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{A_f C_a \rho v(t)}{m} & r(t) & u(t) & 0 & 0 \\ -r(t) & 0 & -v(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))}{m} & 0 & 0 & -g \\ \frac{2\sigma(\hat{F}_{xf}(t))}{m} & 0 & -g & 0 \\ \frac{2\sigma(\hat{F}_{xf}(t))\ell_f}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{wyy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_\tau}{I_{wyy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.2)$$

$$B_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{m} & \frac{2}{m} & -\frac{2\delta_f(t)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_f(t)}{m} & 0 & \frac{2}{m} & \frac{2}{m} \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_f(t)\ell_f}{I_{zz}} & 0 & \frac{2\ell_f}{I_{zz}} & -\frac{2\ell_r}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wyy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wyy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_{\kappa f}^*(t)\omega_{wf}(t)r_e}{v^2(t)} & 0 & 0 & \frac{c_{\kappa f}^*(t)r_e}{v(t)} & 0 & 0 \\ -\frac{c_{\kappa r}^*(t)\omega_{wr}(t)r_e}{v^2(t)} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{\kappa r}^*(t)r_e}{v(t)} & 0 \\ \frac{c_{\alpha f}^*(t)(u(t)+\ell_f r(t))}{v^2(t)} & -\frac{c_{\alpha f}^*(t)}{v(t)} & -\frac{c_{\alpha f}^*(t)\ell_f}{v(t)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_{\alpha r}^*(t)(u(t)-\ell_r r(t))}{v^2(t)} & -\frac{c_{\alpha r}^*(t)}{v(t)} & \frac{c_{\alpha r}^*(t)\ell_r}{v(t)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))h}{\ell_f+\ell_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))h}{\ell_f+\ell_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{\alpha f}^*(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

$$D_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & -\frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & \frac{2\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & \frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & -\frac{2\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

C.2 Expression du modèle avec entrées seuil

Dans cette section on voit les expressions analytiques des matrices temps-variants $\tilde{A}(t)$, $\tilde{B}(t)$, $\tilde{B}_h(t)$, $\tilde{C}(t)$, $\tilde{D}(t)$ et $\tilde{D}_h(t)$ pour le modèle linéarisé exprimé en fonction de la zone-morte, qu'on trouve en utilisant (4.33c)-(4.33h). Aussi dans ce cas on a omis l'indice 0 pour indiquer qu'une variable prend les valeurs le long de la trajectoire de référence. Les expressions des matrices sont :

$$\tilde{A}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(t) & \tilde{a}_{12}(t) & \tilde{a}_{13}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)r_e}{m v(t)} & \frac{2c_{\kappa r}^*(t)r_e}{m v(t)} \\ \tilde{a}_{21}(t) & \tilde{a}_{22}(t) & \tilde{a}_{23}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)r_e}{m v(t)} & 0 \\ \tilde{a}_{31}(t) & \tilde{a}_{32}(t) & \tilde{a}_{33}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)\ell_f r_e}{I_{zz} v(t)} & 0 \\ \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\omega_{wf}(t)r_e^2}{I_{wyy} v^2(t)} & 0 & 0 & -\frac{2c_{\kappa f}^*(t)r_e^2}{I_{wyy} v(t)} & 0 \\ \frac{2c_{\kappa r}^*(t)\omega_{wr}(t)r_e^2}{I_{wyy} v^2(t)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2c_{\kappa r}^*(t)r_e^2}{I_{wyy} v(t)} \end{bmatrix} \quad (C.7a)$$

avec :

$$\tilde{a}_{11}(t) = -\frac{2c_{\kappa f}^*(t)\omega_{wf}(t)r_e}{m v^2(t)} - \frac{2c_{\kappa r}^*(t)\omega_{wr}(t)r_e}{m v^2(t)} - \frac{A_f C_d \rho v(t)}{m} - \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)(u + \ell_f r(t))}{m v^2(t)} \quad (\text{C.7b})$$

$$\tilde{a}_{12}(t) = r(t) + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)}{m v(t)} \quad (\text{C.7c})$$

$$\tilde{a}_{13}(t) = u + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)\ell_f}{m v(t)} \quad (\text{C.7d})$$

$$\tilde{a}_{21}(t) = \frac{2c_{\alpha f}^*(t)(u + \ell_f r(t))}{m v^2(t)} - r(t) + \frac{2c_{\alpha r}^*(t)(u(t) - \ell_r r(t))}{m v^2(t)} - \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)\omega_{wf}(t)r_e}{m v^2(t)} \quad (\text{C.7e})$$

$$\tilde{a}_{22}(t) = -\frac{2c_{\alpha f}^*(t)}{m v(t)} - \frac{2c_{\alpha r}^*(t)}{m v(t)} \quad (\text{C.7f})$$

$$\tilde{a}_{23}(t) = \frac{2c_{\alpha r}^*(t)\ell_r}{m v(t)} - \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\ell_f}{m v(t)} - v(t) \quad (\text{C.7g})$$

$$\tilde{a}_{31}(t) = \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\ell_f(u(t) + \ell_f r(t))}{I_{zz} v^2(t)} - \frac{2c_{\alpha r}^*(t)\ell_r(u(t) - \ell_r r(t))}{I_{zz} v^2(t)} - \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)\ell_f\omega_{wf}(t)r_e}{I_{zz} v^2(t)} \quad (\text{C.7h})$$

$$\tilde{a}_{32}(t) = \frac{2c_{\alpha r}^*(t)\ell_r}{I_{zz} v(t)} - \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\ell_f}{I_{zz} v(t)} \quad (\text{C.7i})$$

$$\tilde{a}_{33}(t) = -\frac{2c_{\alpha f}^*(t)\ell_f^2}{I_{zz} v(t)} - \frac{2c_{\alpha r}^*(t)\ell_r^2}{I_{zz} v(t)} \quad (\text{C.7j})$$

$$\tilde{B}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))}{m} - \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)}{m} & 0 & 0 & -g \\ \frac{2\sigma(\hat{F}_{xf}(t))}{m} + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)}{m} & 0 & -g & 0 \\ \frac{2\sigma(\hat{F}_{xf}(t))\ell_f}{I_{zz}} + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\ell_f}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{wyy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_\tau}{I_{wyy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\tilde{B}_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{m} & \frac{2}{m} & -\frac{2\delta_f(t)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_f(t)}{m} & 0 & \frac{2}{m} & \frac{2}{m} \\ 0 & 0 & \frac{2\delta_f(t)\ell_f}{I_{zz}} & 0 & \frac{2\ell_f}{I_{zz}} & -\frac{2\ell_r}{I_{zz}} \\ 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wyy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2r_e}{I_{wyy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

$$\tilde{C}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11}(t) & -\frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & -\frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h\ell_f}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & -\frac{2c_{\kappa f}^*(t)hr_e}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & -\frac{2c_{\kappa r}^*(t)hr_e}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} \\ \tilde{c}_{21}(t) & \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h\ell_f}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)hr_e}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} & \frac{2c_{\kappa r}^*(t)hr_e}{v(t)(\ell_f + \ell_r)} \\ -\frac{c_{\kappa f}^*(t)\omega_{wf}(t)r_e}{v^2(t)} & 0 & 0 & \frac{c_{\kappa f}^*(t)r_e}{v(t)} & 0 \\ -\frac{c_{\kappa r}^*(t)\omega_{wr}(t)r_e}{v^2(t)} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{\kappa r}^*(t)r_e}{v(t)} \\ \frac{c_{\alpha f}^*(t)(u(t) + \ell_f r(t))}{v^2(t)} & -\frac{c_{\alpha f}^*(t)}{v(t)} & -\frac{c_{\alpha f}^*(t)\ell_f}{v(t)} & 0 & 0 \\ \frac{c_{\alpha r}^*(t)(u(t) - \ell_r r(t))}{v^2(t)} & -\frac{c_{\alpha r}^*(t)}{v(t)} & \frac{c_{\alpha r}^*(t)\ell_r}{v(t)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10a})$$

avec :

$$\tilde{c}_{11}(t) = \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h(u(t) + \ell_f r(t))}{v^2(t)(\ell_f + \ell_r)} + \frac{2c_{\kappa f}^*(t)h\omega_{wf}(t)r_e}{v^2(t)(\ell_f + \ell_r)} + \frac{2c_{\kappa r}^*(t)h\omega_{wr}(t)r_e}{v^2(t)(\ell_f + \ell_r)} \quad (\text{C.10b})$$

$$\tilde{c}_{21}(t) = -\frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h(u(t)+\ell_f r(t))}{v^2(t)(\ell_f+\ell_r)} - \frac{2c_{\kappa f}^*(t)h\omega_{wf}(t)r_e}{v^2(t)(\ell_f+\ell_r)} - \frac{2c_{\kappa r}^*(t)h\omega_{wr}(t)r_e}{v^2(t)(\ell_f+\ell_r)} \quad (\text{C.10c})$$

$$\tilde{D}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))h}{\ell_f+\ell_r} + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2\sigma(\hat{F}_{yf}(t))h}{\ell_f+\ell_r} - \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{\alpha f}^*(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\tilde{D}_h(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & -\frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & \frac{2\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & \frac{2h}{\ell_f+\ell_r} & -\frac{2\delta_f(t)h}{\ell_f+\ell_r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.12})$$

C.3 Linéarisation des fonctions de saturation

Dans cette section on présente les expressions analytiques des matrices temps-variants $\hat{A}(t)$ et $\hat{B}(t)$ pour le modèle linéarisé, qu'on trouve en utilisant (4.40b) et (4.40c). La particularité du modèle ici détaillé est la linéarisation de la fonction de saturation. Dans ce cas également, on a omis l'indice 0 pour indiquer qu'une variable prend les valeurs le long de la trajectoire de référence. Les expressions des matrices sont :

$$\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}(t) & \hat{a}_{12}(t) & \hat{a}_{13}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)k_{F_{xf}}(t)r_e}{m v(t)} & \frac{2c_{\kappa r}^*(t)k_{F_{xr}}(t)r_e}{m v(t)} \\ \hat{a}_{21}(t) & \hat{a}_{22}(t) & \hat{a}_{23}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{xf}}(t)r_e}{m v(t)} & 0 \\ \hat{a}_{31}(t) & \hat{a}_{32}(t) & \hat{a}_{33}(t) & \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{xf}}(t)\ell_f r_e}{I_{zz} v(t)} & 0 \\ \frac{2c_{\kappa f}^*(t)k_{F_{xf}}(t)\omega_{wf}(t)r_e^2}{I_{wyy} v^2(t)} & 0 & 0 & -\frac{2c_{\kappa f}^*(t)k_{F_{xf}}(t)r_e^2}{I_{wyy} v(t)} & 0 \\ \frac{2c_{\kappa r}^*(t)k_{F_{xr}}(t)\omega_{wr}(t)r_e^2}{I_{wyy} v^2(t)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2c_{\kappa r}^*(t)k_{F_{xr}}(t)r_e^2}{I_{wyy} v(t)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.13a})$$

avec :

$$\hat{a}_{11}(t) = -\frac{2c_{\kappa f}^*(t)k_{F_{xf}}(t)\omega_{wf}(t)r_e + 2c_{\kappa r}^*(t)k_{F_{xr}}(t)\omega_{wr}(t)r_e}{m v^2(t)} + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{yf}}(t)u(t) + 2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{yf}}(t)\ell_f r(t)}{m v^2(t)} - \frac{A_f C_d \rho v(t)}{m} \quad (\text{C.13b})$$

$$\hat{a}_{12}(t) = r(t) + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{yf}}(t)}{m v(t)} \quad (\text{C.13c})$$

$$\hat{a}_{13}(t) = u(t) + \frac{2c_{\alpha f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{yf}}(t)\ell_f}{m v(t)} \quad (\text{C.13d})$$

$$\hat{a}_{21}(t) = \frac{2c_{\alpha f}^*(t)k_{F_{yf}}(t)(u(t)+\ell_f r(t))}{m v^2(t)} - r(t) + \frac{2c_{\alpha r}^*(t)k_{F_{yr}}(t)(u(t)-\ell_r r(t))}{m v^2(t)} + \frac{2c_{\kappa f}^*(t)\delta_f(t)k_{F_{xf}}(t)\omega_{wf}(t)r_e}{m v^2(t)} \quad (\text{C.13e})$$

$$\hat{a}_{22}(t) = -\frac{2 \left(c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) + c_{\alpha r}^*(t) k_{F_{yr}}(t) \right)}{m v(t)} \quad (\text{C.13f})$$

$$\hat{a}_{23}(t) = -\frac{m v^2(t) + 2 c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \ell_f - 2 c_{\alpha r}^*(t) k_{F_{yr}}(t) \ell_r}{m v(t)} - v(t) \quad (\text{C.13g})$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{31}(t) = & \frac{2 c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \ell_f (u(t) + \ell_f r(t))}{I_{zz} v^2(t)} - \frac{2 c_{\alpha r}^*(t) k_{F_{yr}}(t) \ell_r (u(t) - \ell_r r(t))}{I_{zz} v^2(t)} + \\ & - \frac{2 c_{\alpha f}^*(t) \delta_f(t) k_{F_{xf}}(t) \ell_f \omega_{wf}(t) r_e}{I_{zz} v^2(t)} \end{aligned} \quad (\text{C.13h})$$

$$\hat{a}_{32}(t) = -\frac{2 \left(c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \ell_f - c_{\alpha r}^*(t) k_{F_{yr}}(t) \ell_r \right)}{I_{zz} v(t)} \quad (\text{C.13i})$$

$$\hat{a}_{33}(t) = -\frac{2 \left(c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \ell_f^2 + c_{\alpha r}^*(t) k_{F_{yr}}(t) \ell_r^2 \right)}{I_{zz} v(t)} \quad (\text{C.13j})$$

$$\hat{B}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{2 \left(\sigma(\hat{F}_{yf}(t)) + c_{\alpha f}^*(t) \delta_f(t) k_{F_{yf}}(t) \right)}{m} & 0 & 0 & -g \\ \frac{2 \left(\sigma(\hat{F}_{xf}(t)) + c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \right)}{m} & 0 & -g & 0 \\ \frac{2 \ell_f \left(\sigma(\hat{F}_{xf}(t)) + c_{\alpha f}^*(t) k_{F_{yf}}(t) \right)}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{wyy}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_\tau}{I_{wyy}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.14})$$

BIBLIOGRAPHIE

- ABUGHALIEH, K. M. et S. G. ALAWNEH (2019). “A Survey of Parallel Implementations for Model Predictive Control”. In : *IEEE Access* 7, p. 34348-34360 (cf. p. 94).
- ALCALA, E., V. PUIG, J. QUEVEDO et T. ESCOBET (2018). “Gain-scheduling LPV control for autonomous vehicles including friction force estimation and compensation mechanism”. In : *IET Control Theory & Applications* 12.12, p. 1683-1693 (cf. p. 93).
- ALI, M., P. FALCONE, C. OLSSON et J. SJOBERG (2013). “Predictive Prevention of Loss of Vehicle Control for Roadway Departure Avoidance”. In : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 14.1, p. 56-68 (cf. p. 2).
- AMER, N. H., H. ZAMZURI, K. HUDHA, V. R. APAROW, Z. A. KADIR et A. F. ZAINAL ABIDIN (2016). “Modelling and trajectory following of an armoured vehicle”. In : *2016 SICE International Symposium on Control Systems (ISCS)*, p. 1-6 (cf. p. 89).
- ANDERSEN, E. D. et K. D. ANDERSEN (2000). “The Mosek Interior Point Optimizer for Linear Programming : An Implementation of the Homogeneous Algorithm”. In : *Applied Optimization*. Sous la dir. de H. FRENK, K. ROOS, T. TERLAKY et S. ZHANG, p. 197-232 (cf. p. 95, 108, 136, 185).
- ANDERSON, B. D. O. et J. B. MOORE (1990). *Optimal control : linear quadratic methods*. USA : Prentice-Hall, Inc. 380 p. (cf. p. 211).
- ANDERSON, S. J., S. C. PETERS, T. E. PILUTTI et K. IAGNEMMA (2010). “An optimal-control-based framework for trajectory planning, threat assessment, and semi-autonomous control of passenger vehicles in hazard avoidance scenarios”. In : *International Journal of Vehicle Autonomous Systems* 8.2, p. 190-216 (cf. p. 68).
- APKARIAN, P. et P. GAHINET (1995). “A Convex Characterization of Gain-Scheduled H-Infinity Controllers”. In : *undefined* 40, p. 853-864 (cf. p. 98).
- APKARIAN, P., P. GAHINET et G. BECKER (1995). “Self-scheduled H-infinity control of linear parameter-varying systems : a design example”. In : *Automatica* (cf. p. 95, 97, 103, 104).
- ATOUI, H., O. SENAME, E. ALCALA et V. PUIG (2020). “Parameter Varying Approach For A Combined (Kinematic + Dynamic) Model Of Autonomous Vehicles”. In : *IFAC-PapersOnLine* 53.2, p. 15071-15076 (cf. p. 93).
- ATOUI, H., O. SENAME, V. MILANÉS et J. J. MARTINEZ (2021). “LPV-Based Autonomous Vehicle Lateral Controllers : A Comparative Analysis”. In : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, p. 1-12 (cf. p. 89).
- ATTIA, R., R. ORJUELA et M. BASSET (2014). “Combined longitudinal and lateral control for automated vehicle guidance”. In : *Vehicle System Dynamics* 52.2, p. 261-279 (cf. p. 12, 92).
- BADUE, C., R. GUIDOLINI, R. V. CARNEIRO, P. AZEVEDO, V. B. CARDOSO, A. FORECHI, L. JESUS, R. BERRIEL, T. M. PAIXÃO, F. MUTZ, L. de PAULA VERONESE, T. OLIVEIRA-SANTOS et A. F. DE SOUZA (2021). “Self-driving cars : A survey”. In : 165, p. 113816 (cf. p. 3).
- BAKKER, E., L. NYBORG et H. B. PACEJKA (1987). “Tyre Modelling for Use in Vehicle Dynamics Studies”. In : *SAE International Congress and Exposition* (cf. p. 31, 55, 90).
- BALANDAT, M. (2010). “Constrained Robust Optimal Trajectory Tracking : Model Predictive Control Approaches”. Thèse de doct. Technische Universitat Darmstadt (cf. p. 212).
- BARBER, C. B., D. P. DOBKIN et H. HUHDANPAA (1996). “The quickhull algorithm for convex hulls”. In : *ACM Transactions on Mathematical Software* 22.4, p. 469-483 (cf. p. 178).

- BARTOLINI, G., A. FERRARA et E. USAI (1998). “Chattering avoidance by second-order sliding mode control”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 43.2, p. 241-246 (cf. p. 213).
- BEAL, C. E. et J. C. GERDES (2010). “Predictive control of vehicle roll dynamics with rear wheel steering”. In : *Proceedings of the 2010 American Control Conference*. Proceedings of the 2010 American Control Conference, p. 1489-1494 (cf. p. 20).
- BECK, C. L. (1997). “Model reduction and minimality for uncertain systems”. Thèse de doct. California Institute of Technology (cf. p. 98).
- BEMPORAD, A., M. MORARI, V. DUA et E. N. PISTIKOPOULOS (2002). “The explicit linear quadratic regulator for constrained systems”. In : p. 21 (cf. p. 88, 212).
- BERNSTEIN, D. et W. HADDAD (1989). “LQG control with an H-infinity performance bound : a Riccati equation approach”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 34.3, p. 293-305 (cf. p. 185).
- BIANNIC, J. (1996). “Commande robuste des systèmes à paramètres variables. Applications en aéronautique.” Automatique. Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace (cf. p. 96-98, 178).
- BIANNIC, J.-M., P. APKARIAN et W. L. GARRARD (1997). “Parameter Varying Control of a High-Performance Aircraft”. In : *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 20.2, p. 225-231 (cf. p. 95).
- BOYD, S. P., éd. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM studies in applied mathematics vol. 15. Philadelphia : Society for Industrial et Applied Mathematics. 193 p. (cf. p. 183, 186, 187, 192, 195).
- BROWDER, A. (2012). *Mathematical analysis : an introduction*. Place of publication not identified : Springer (cf. p. 72).
- BRUZELIUS, F. (2004). “Linear parameter-varying systems : an approach to gain scheduling”. Thèse de doct. Göteborg : Chalmers Univ. of Technology. 164 p. (cf. p. 96).
- CAMACHO, E. F. et C. BORDONS (2007). *Model Predictive control*. Réd. par M. J. GRIMBLE et M. A. JOHNSON. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London : Springer London (cf. p. 212).
- CAO, J., L. JING, K. GUO et F. YU (2013). “Study on Integrated Control of Vehicle Yaw and Rollover Stability Using Nonlinear Prediction Model”. In : *Mathematical Problems in Engineering* 2013, p. 1-15 (cf. p. 20).
- CHAKRABORTY, S., S. SEN, A. SUTRADHAR et A. SENGUPTA (2015). “Estimation of tire-road friction coefficient and frictional force for Active Vehicle safety system”. In : 2015 International Conference on Industrial Instrumentation and Control (ICIC), p. 674-679 (cf. p. 179).
- CHILALI, M. et P. GAHINET (1996). “H-infinity Design with Pole Placement Constraints : an LMI Approach”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 41.3, p. 358-367 (cf. p. 95, 186).
- CHILALI, M., P. GAHINET et P. APKARIAN (1999). “Robust pole placement in LMI regions”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 44.12, p. 2257-2270 (cf. p. 95, 96, 186).
- CHO, D. et J. K. HEDRICK (1989). “Automotive Powertrain Modeling for Control”. In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 111.4, p. 568-576 (cf. p. 88).
- CHOKOR, A. (2019). “Design of several centralized and decentralized multilayer robust control architectures for global chassis control”. anglais. Thèse de doct. Université de Technologie de Compiègne (cf. p. 93).
- CHOU, H et B D’ANDRÉA-NOVEL (2005). “Global vehicle control using differential braking torques and active suspension forces”. en. In : *Vehicle System Dynamics* 43.4, p. 261-284 (cf. p. 17).
- CURTIS, C. W. (1984). *Linear Algebra : an Introductory Approach*. New York, NY : Springer New York (cf. p. 39).
- DOUMIATI, M., O. SENAME, L. DUGARD, J.-J. MARTINEZ-MOLINA, P. GASPAR et Z. SZABO (2013). “Integrated vehicle dynamics control via coordination of active front steering and rear braking”. In : *European Journal of Control* 19.2, p. 121-143 (cf. p. 93, 175, 179).
- DOYLE, J., K. GLOVER, P. KHARGONEKAR et B. FRANCIS (1989). “State-space solutions to standard H2 and H-infinity control problems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 34.8, p. 831-847 (cf. p. 184, 185).
- DUAN, G.-R. et H.-H. YU (2013). *LMIs in Control Systems*. 1s. CRC Press (cf. p. 183, 186-188, 193-196).
- DUGOFF, H. (1969). “Tire performance characteristics affecting vehicle response to steering and braking control input”. In : p. 109 (cf. p. 31).
- EOM, S. I., E. J. KIM, T. Y. SHIN, M. H. LEE et F. HARASHIMA (2003). “The robust controller design for lateral control of vehicles”. In : Proceedings 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003). T. 1, p. 570-573 (cf. p. 89).
- FALCONE, P., F. BORRELLI, J. ASGARI, H. E. TSENG et D. HROVAT (2007). “Predictive Active Steering Control for Autonomous Vehicle Systems”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 15.3, p. 566-580 (cf. p. 91).

- FALCONE, P., H. E. TSENG, F. BORRELLI, J. ASGARI et D. HROVAT (2008). “MPC-based yaw and lateral stabilisation via active front steering and braking”. In : *Vehicle System Dynamics* 46 (sup1), p. 611-628 (cf. p. 91, 92).
- FERGANI, S., O. SENAME et L. DUGARD (2016). “An Integrated Vehicle Dynamic Controller”. In : *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 65.4, p. 1880-1889 (cf. p. 93).
- FRANCIS, B. A. (1987). *A course in H infinity control theory*. Lecture notes in control and information sciences 88. Berlin : Springer. 156 p. (cf. p. 183).
- FREEDMAN, D. A. (2009). *Statistical Models : Theory and Practice*. 2^e éd. Cambridge : Cambridge University Press (cf. p. 63).
- GAHINET, P. (1996). “Explicit controller formulas for LMI-based H-infinity synthesis”. In : *Automatica* 32.7, p. 1007-1014 (cf. p. 97, 185, 200).
- GAHINET, P. et P. APKARIAN (1994). “A linear matrix inequality approach to H-infinity control”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 4.4, p. 421-448 (cf. p. 178, 184, 200).
- GAHINET, P., A. NEMIROVSKII, A. LAUB et M. CHILALI (1994). “The LMI control toolbox”. In : *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control. T. 3, 2038-2041 vol.3 (cf. p. 95, 185).
- GAO, Y., A. GRAY, H. E. TSENG et F. BORRELLI (2014). “A tube-based robust nonlinear predictive control approach to semiautonomous ground vehicles”. In : *Vehicle System Dynamics* 52.6, p. 802-823 (cf. p. 92).
- GAO, Y., T. LIN, F. BORRELLI, H. E. TSENG et D. HROVAT (2010). “Predictive Control of Autonomous Ground Vehicles With Obstacle Avoidance on Slippery Roads”. In : ASME 2010 Dynamic Systems and Control Conference. Cambridge, Massachusetts, USA, p. 265-272 (cf. p. 17).
- GARCIA, G., S. TARBOURIECH, J. M. G. d. SILVA et D. ECKHARD (2009). “Finite L2 gain and internal stabilisation of linear systems subject to actuator and sensor saturations”. In : *IET Control Theory & Applications* 3.7, p. 799-812 (cf. p. 117, 146, 204, 208).
- GENTA, G. (1997). *Motor Vehicle Dynamics : Modeling and Simulation*. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences. World Scientific (cf. p. 38).
- GINSBERG, J. H. (1995). *Advanced engineering dynamics*. 2nd ed. New York : Cambridge University Press. 462 p. (cf. p. 15).
- GLOVER, K. et J. C. DOYLE (1988). “State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H-infinity norm bound and relations to relations to risk sensitivity”. In : *Systems & Control Letters* 11.3, p. 167-172 (cf. p. 184).
- GOMES DA SILVA, J. et S. TARBOURIECH (2001). “Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls : an LMI-based approach”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 46.1, p. 119-125 (cf. p. 121).
- GREEN, J. H. et J. K. HEDRICK (1990). “Nonlinear Speed Control for Automotive Engines”. In : *1990 American Control Conference*. 1990 American Control Conference, p. 2891-2897 (cf. p. 88).
- GÁSPÁR, P., Z. SZABÓ, J. BOKOR, C. POUSSOT-VASSAL, O. SENAME et L. DUGARD (2007). “Towards global chassis control by integrating the brake and suspension system”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 40.10, p. 563-570 (cf. p. 93).
- HAQUE, T. S., M. H. RAHMAN, M. R. ISLAM, M. A. RAZZAK, F. R. BADAL, M. H. AHAMED, S. I. MOYEEN, S. K. DAS, M. F. ALI, Z. TASNEEM, D. K. SAHA, R. K. CHAKRABORTTY et M. RYAN (2021). “A Review on Driving Control Issues for Smart Electric Vehicles”. In : *IEEE Access* 9, p. 135440-135472 (cf. p. 1).
- HASPALAMUTGIL, K. et E. ADALI (2017). “Adaptive switching method for Adaptive Cruise Control”. In : *2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*. 2017 21st International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), p. 140-145 (cf. p. 87).
- HEDRICK, J. K., D. MCMAHON, V. NARENDRAN et D. SWAROOP (1991). “Longitudinal Vehicle Controller Design for IVHS Systems”. In : *1991 American Control Conference*. 1991 American Control Conference, p. 3107-3112 (cf. p. 88).
- HEGEDÜS, F., T. BÉCSI, S. ARADI et G. GÁLDI (2018). “Hybrid Trajectory Planning for Autonomous Vehicles using Neural Networks”. In : *2018 IEEE 18th International Symposium on Computational Intelligence and Informatics (CINTI)*, p. 25-30 (cf. p. 68).
- HEGEDÜS, F., T. BÉCSI, S. ARADI et P. GÁPÁR (2017). “Model Based Trajectory Planning for Highly Automated Road Vehicles”. In : *IFAC-PapersOnLine* 50.1, p. 6958-6964 (cf. p. 68).
- HEISSING, B. et M. ERSOY, éd. (2011). *Chassis handbook : fundamentals, driving dynamics, components, mechatronics, perspectives*. 1st edition. ATZ. Wiesbaden : Vieweg + Teubner. 591 p. (cf. p. 68).

- HIMA, S., B. LUSSETI, B. VANHOLME, S. GLASER et S. MAMMAR (2011). "Trajectory Tracking for Highly Automated Passenger Vehicles". In : *IFAC Proceedings Volumes*. 18th IFAC World Congress 44.1, p. 12958-12963 (cf. p. 87, 89).
- HJARTARSON, A., P. SEILER et A. PACKARD (2015). "LPVTools : A Toolbox for Modeling, Analysis, and Synthesis of Parameter Varying Control Systems". en. In : *IFAC-PapersOnLine*. 1st IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPVS 2015 48.26, p. 139-145 (cf. p. 95).
- HOWARD, T. M. et A. KELLY (2007). "Optimal Rough Terrain Trajectory Generation for Wheeled Mobile Robots". In : *The International Journal of Robotics Research* 26.2, p. 141-166 (cf. p. 68).
- HU, C., H. JING, R. WANG, F. YAN et M. CHADLI (2016). "Robust H-infinity output-feedback control for path following of autonomous ground vehicles". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 70-71, p. 414-427 (cf. p. 91, 94).
- HUANG, L. et G. LIU (2012). "Proved quick convex hull algorithm for scattered points". In : 2012 International Conference on Computer Science and Information Processing (CSIP), p. 1365-1368 (cf. p. 178).
- IMINE, H. et T. MADANI (2013). "Sliding-mode control for automated lane guidance of heavy vehicle". In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 23.1, p. 67-76 (cf. p. 89).
- IWASAKI, T. et R. E. SKELTON (1994). "All controllers for the general H-infinity control problem : LMI existence conditions and state space formulas". In : *Automatica* 30.8, p. 1307-1317 (cf. p. 184).
- JALALI, M., E. HASHEMI, A. KHAJEPOUR, S. CHEN et B. LITKOUHI (2018). "Model predictive control of vehicle roll-over with experimental verification". In : *Control Engineering Practice* 77, p. 95-108 (cf. p. 20).
- JAZAR, R. N. (2017). *Vehicle dynamics : theory and application*. New York, NY : Springer Science+Business Media (cf. p. 14, 15, 20, 23, 24, 46).
- JIA, Y. (2000). "Robust control with decoupling performance for steering and traction of 4WS vehicles under velocity-varying motion". In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 8.3, p. 554-569 (cf. p. 12).
- KALMAN, R. E. (1960). "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems". In : *Journal of Basic Engineering* 82.1, p. 35-45 (cf. p. 211).
- KAYACAN, E. (2017). "Multiobjective H-infinity Control for String Stability of Cooperative Adaptive Cruise Control Systems". In : *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles* 2.1, p. 52-61 (cf. p. 88).
- KENDALL, M. G. et A. STUART (1979). *The advanced theory of statistics*. 4th. New York : Macmillan (cf. p. 62).
- KHALIL, H. K. (2001). *Nonlinear Systems*. 3rd. Prentice Hall (cf. p. 184, 186, 193).
- KHARGONEKAR, P. et M. ROTEA (1991). "Mixed H2/H-infinity control : a convex optimization approach". In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 36.7, p. 824-837 (cf. p. 185).
- KHOSRAVANI, H. R., A. E. RUANO et P. M. FERREIRA (2013). "A simple algorithm for convex hull determination in high dimensions". In : 2013 IEEE 8th International Symposium on Intelligent Signal Processing, p. 109-114 (cf. p. 178).
- KISSAI, M., B. MONSUEZ, A. TAPUS et D. MARTINEZ (2017). "A new linear tire model with varying parameters". In : 2017 2nd IEEE International Conference on Intelligent Transportation Engineering (ICITE). Singapore, Singapore : IEEE, p. 108-115 (cf. p. 31, 35, 36, 55).
- KISSAI, M., B. MONSUEZ, X. MOUTON, D. MARTINEZ et A. TAPUS (2019). "Adaptive Robust Vehicle Motion Control for Future Over-Actuated Vehicles". In : *Machines* 7.2, p. 26 (cf. p. 46, 93).
- KRITAYAKIRANA, K. (2012). "Autonomous vehicle control at the limits of handling". Thèse de doct. Stanford University (cf. p. 36, 90, 92, 94).
- KRITAYAKIRANA, K. et J. C. GERDES (2009). "Controlling an Autonomous Racing Vehicle : Using Feedforward and Feedback to Control Steering and Speed". In : *ASME 2009 Dynamic Systems and Control Conference*. ASME 2009 Dynamic Systems and Control Conference. T. 1. Hollywood, California, USA : ASME, p. 173-180 (cf. p. 90).
- KRUCZEK, A. et A. STRIBRSKY (2004). "A full-car model for active suspension - some practical aspects". In : *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, 2004. ICM '04*. Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics, 2004. ICM '04. P. 41-45 (cf. p. 20).
- KUKKALA, V. K., J. TUNNELL, S. PASRICHA et T. BRADLEY (2018). "Advanced Driver-Assistance Systems : A Path Toward Autonomous Vehicles". In : *IEEE Consumer Electronics Magazine* 7.5, p. 18-25 (cf. p. 1).
- LAIB, K., O. SENNAME et L. DUGARD (2020). "String Stable H-infinity LPV Cooperative Adaptive Cruise Control with a Variable Time Headway". In : *IFAC-PapersOnLine*. 21st IFAC World Congress 53.2, p. 15140-15145 (cf. p. 88).

- LANGSON, W., I. CHRYSOCHOOS, S. V. RAKOVIĆ et D. Q. MAYNE (2004). “Robust model predictive control using tubes”. In : *Automatica* 40.1, p. 125-133 (cf. p. 212).
- LI, P., A.-T. NGUYEN, H. DU, Y. WANG et H. ZHANG (2021). “Polytopic LPV approaches for intelligent automotive systems : State of the art and future challenges”. en. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 161 (cf. p. 94).
- LIANG, C.-Y. et H. PENG (1999). “Optimal Adaptive Cruise Control with Guaranteed String Stability”. In : *Vehicle System Dynamics* 32.4, p. 313-330 (cf. p. 88).
- LIM, S. et J. HOW (2003). “Modeling and H_{∞} control for switched linear parameter-varying missile autopilot”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 11.6, p. 830-838 (cf. p. 95).
- LITMAN, T. (2020). *Autonomous Vehicle Implementation Predictions : Implications for Transport Planning*. Victoria Transport Policy Institute (cf. p. 1).
- LIU, Y. et D. CUI (2019). “Application of Optimal Control Method to Path Tracking Problem of Vehicle”. In : *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH* 3.3, p. 209-219 (cf. p. 68).
- LOCATELLI, A. (2001). *Optimal Control*. 1^{re} éd. Birkhäuser Basel (cf. p. 211).
- LOFBERG, J. (2004). “YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB”. In : *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508), p. 284-289 (cf. p. 95, 108, 136, 185).
- LUNDSTRÖM, P., S. SKOGESTAD et Z.-Q. WANG (1991). “Performance weight selection for H-infinity and mu-control methods”. In : (cf. p. 184).
- MAHMASSANI, H. S. (2016). “Autonomous Vehicles and Connected Vehicle Systems : Flow and Operations Considerations”. In : *Transportation Science* 50.4, p. 1140-1162 (cf. p. 1).
- MAHTOUT, I. (2020). “Youla-Kucera based multi-objective controllers : Application to autonomous vehicles”. Thèse de doct. Université Paris sciences et lettres (cf. p. 180).
- MAMMAR, S. (1997). “Electrical Car Robust lateral Control”. In : *4th World Congress on Intelligent Transportation Systems*. 4th World Congress on Intelligent Transportation Systems. Berlin, p. 8 (cf. p. 89).
- MARINO, R., S. SCALZI et M. NETTO (2011). “Nested PID steering control for lane keeping in autonomous vehicles”. In : *Control Engineering Practice* 19.12, p. 1459-1467 (cf. p. 89).
- MASUBUCHI, I., J. KATO, M. SAEKI et A. OHARA (2004). “Gain-scheduled controller design based on descriptor representation of LPV systems : application to flight vehicle control”. In : *2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601)*. 2004 43rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC) (IEEE Cat. No.04CH37601). T. 1, p. 815-820 (cf. p. 95).
- MASUBUCHI, I., A. OHARA et N. SUDA (1998). “LMI-based controller synthesis : A unified formulation and solution”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 8.8, p. 669-686 (cf. p. 185).
- MAYNE, D. Q., E. C. KERRIGAN, E. J. van WYK et P. FALUGI (2011). “Tube-based robust nonlinear model predictive control”. In : *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 21.11, p. 1341-1353 (cf. p. 212).
- McFARLANE, D. C. et K. GLOVER (1992). “A loop-shaping design procedure using H-infinity synthesis”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 37.6, p. 759-769 (cf. p. 89, 184).
- MERKURYEVA, G. et O. VECHERINSKA (2010). “Simulation-Based Comparison : An Overview and Case Study”. In : *2010 12th International Conference on Computer Modelling and Simulation*. 2010 12th International Conference on Computer Modelling and Simulation. Cambridge, United Kingdom : IEEE, p. 186-190 (cf. p. 62).
- MICHELIN (2001). *Le pneu : L'adhérence* (cf. p. 35).
- MILANÉS, V., S. E. SHLADOVER, J. SPRING, C. NOWAKOWSKI, H. KAWAZOE et M. NAKAMURA (2014). “Cooperative Adaptive Cruise Control in Real Traffic Situations”. In : *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems* 15.1, p. 296-305 (cf. p. 87).
- MILLIKEN, W. F. et D. L. MILLIKEN (1997). *Race Car Vehicle Dynamics* (cf. p. 56, 90).
- MOHAMMADI ASL, R., Y. SHABBOUEI HAGH et R. PALM (2017). “Robust control by adaptive Non-singular Terminal Sliding Mode”. In : *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 59, p. 205-217 (cf. p. 88).
- MOSKWA, J. J. et J. K. HEDRICK (1992). “Modeling and Validation of Automotive Engines for Control Algorithm Development”. In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 114.2, p. 278-285 (cf. p. 88).
- MUSTAKI, S. E. (2019). “Outils de pré-calibration numérique des lois de commande de systèmes de systèmes : application aux aides à la conduite et au véhicule autonome”. Theses. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique (cf. p. 52, 157).

- MUSTAKI, S., P. CHEVREL, M. YAGOUBI et F. FAUVEL (2018). “Efficient Multi-Objective and Multi-Scenarios Control Synthesis Methodology for Designing a Car Lane Centering Assistance System”. In : *2018 European Control Conference (ECC)*. 2018 European Control Conference (ECC), p. 929-934 (cf. p. 89).
- NAUS, G. J. L., R. P. A. VUGTS, J. PLOEG, M. J. G. van de MOLENGRAFT et M. STEINBUCH (2010a). “String-Stable CACC Design and Experimental Validation : A Frequency-Domain Approach”. In : *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 59.9, p. 4268-4279 (cf. p. 87, 88).
- NAUS, G. J. L., J. PLOEG, M. J. G. Van de MOLENGRAFT, W. P. M. H. HEEMELS et M. STEINBUCH (2010b). “A Model Predictive Control Approach to Design a Parameterized Adaptive Cruise Control”. In : *Automotive Model Predictive Control : Models, Methods and Applications*. Sous la dir. de L. del RE, F. ALLGÖWER, L. GLIELMO, C. GUARDIOLA et I. KOLMANOVSKY. London : Springer London, p. 273-284 (cf. p. 88).
- NHTSA (2013). *Fishhook Maneuver Test Procedure*, p. 43 (cf. p. 60).
- O’BRIEN, R., P. IGLESIAS et T. URBAN (1996). “Vehicle lateral control for automated highway systems”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 4.3, p. 266-273 (cf. p. 89).
- ODA, T., K. NONAKA et K. SEKIGUCHI (2017). “Robust Path Following Control for Small Electric Vehicles Equipped with In-Wheel Motors”. In : *International Journal of Automotive Engineering* 8.3, p. 120-129 (cf. p. 92).
- ORTEGA, M. et F. RUBIO (2004). “Systematic design of weighting matrices for the H-infinity mixed sensitivity problem”. In : *Journal of Process Control* 14.1, p. 89-98 (cf. p. 184).
- PACEJKA, H. B. (2012). *Tyre and vehicle dynamics*. 3rd Edition. 672 p. (cf. p. 31, 35, 36, 38).
- PACKARD, A. (1994). “Gain scheduling via linear fractional transformations”. In : *Systems & Control Letters* 22.2, p. 79-92 (cf. p. 98).
- PENG, H., W. WANG, Q. AN, C. XIANG et L. LI (2020). “Path Tracking and Direct Yaw Moment Coordinated Control Based on Robust MPC With the Finite Time Horizon for Autonomous Independent-Drive Vehicles”. In : *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 69.6, p. 6053-6066 (cf. p. 91, 94).
- PERSSON, M., F. BOTLING, E. HESSLOW et R. JOHANSSON (1999). “Stop and go controller for adaptive cruise control”. In : *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*. T. 2, 1692-1697 vol. 2 (cf. p. 87).
- POUSSOT-VASSAL, C., O. SENAME, L. DUGARD et S. M. SAVARESI (2011). “Vehicle dynamic stability improvements through gain-scheduled steering and braking control”. In : *Vehicle System Dynamics* 49.10, p. 1597-1621 (cf. p. 93).
- POUSSOT-VASSAL, C., O. SENAME, L. DUGARD, P. GASPAR, Z. SZABO et J. BOKOR (2008). “The design of a chassis system based on multi-objective qLPV control”. In : *Journal of Transportation Engineering* 36.1-2, p. 93-97 (cf. p. 112).
- RAJAMANI, R. (2012). *Vehicle dynamics and control*. 2. ed. Mechanical engineering series. New York, NY : Springer. 496 p. (cf. p. 1, 12, 20, 31, 37, 38, 40, 45, 53, 69, 80, 86, 88).
- RAJAMANI, R., G. PHANOMCHOENG, D. PIYABONGKARN et J. Y. LEW (2012). “Algorithms for Real-Time Estimation of Individual Wheel Tire-Road Friction Coefficients”. In : *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* 17.6, p. 1183-1195 (cf. p. 179).
- RAKOVIĆ, S. V. (2019). “Robust Model Predictive Control”. In : *Encyclopedia of Systems and Control*. Sous la dir. de J. BAILLIEUL et T. SAMAD. London : Springer London, p. 1-11 (cf. p. 212).
- REECE, D. A. et S. A. SHAFER (1993). “A computational model of driving for autonomous vehicles”. In : *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 27.1, p. 23-50 (cf. p. 3).
- REIMPELL, J., H. STOLL et J. W. BETZLER (2001). *The automotive chassis : engineering principles*. Avec la coll. de S. of AUTOMOTIVE ENGINEERS. 2nd ed. Warrendale, PA : Society of Automotive Engineers. 444 p. (cf. p. 20, 45, 52, 56, 57).
- ROBERT BOSCH GMBH (2019). *Bosch Automotive Handbook*. 10th (cf. p. 68).
- ROSINOVÁ, D. et I. HOLIČ (2014). “LMI approximation of pole-region for discrete-time linear dynamic systems”. In : *Proceedings of the 2014 15th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, p. 497-502 (cf. p. 178).
- ROSINOVÁ, D. et M. HYPUSOVÁ (2019). “LMI Pole Regions for a Robust Discrete-Time Pole Placement Controller Design”. In : *Algorithms* 12.8, p. 167 (cf. p. 178).
- ROSSETTER, E. J. (2003). “A potential field framework for active vehicle lanekeeping assistance”. Thèse de doct. Stanford University (cf. p. 90, 94).
- ROTEA, M. A. (1993). “The generalized H2 control problem”. In : *Automatica* 29.2, p. 373-385 (cf. p. 111, 143, 185, 194).

- SAE INTERNATIONAL (2018). *Taxonomy and Definitions for Terms Related to Driving Automation Systems for On-Road Motor Vehicles*. J3016 (cf. p. 2).
- SCHERER, C., P. GAHINET et M. CHILALI (1997). “Multiobjective output-feedback control via LMI optimization”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 42.7, p. 896-911 (cf. p. 97, 185, 186, 193, 194, 198-203, 206, 209).
- SCHERER, C. et S. WEILAND (2015). *Linear Matrix Inequalities in Control* (cf. p. 186).
- SCHURING, D. J., W. PELZ et M. G. POTTINGER (1996). “A Model for Combined Tire Cornering and Braking Forces”. In : International Congress & Exposition (cf. p. 35, 36).
- SEI-BUM CHOI et J. K. HEDRICK (1995). “Vehicle longitudinal control using an adaptive observer for automated highway systems”. In : *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95*. Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC'95. T. 5, 3106-3110 vol.5 (cf. p. 88).
- SENTOUH, C., B. SOUALMI, J. C. POPIEUL et S. DEBERNARD (2011). “The H2-optimal preview controller for a shared lateral control”. In : *2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*. 2011 14th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC), p. 1452-1458 (cf. p. 89).
- SHAMMA, J. S. (1988). “Analysis and design of gain scheduled control systems”. Thesis. Massachusetts Institute of Technology (cf. p. 96).
- SHAMMA, J. et M. ATHANS (1992). “Gain scheduling : potential hazards and possible remedies”. In : *IEEE Control Systems Magazine* 12.3, p. 101-107 (cf. p. 96).
- SHIMAKAGE, M. (2002). “Design of lane-keeping control with steering torque input”. In : *JSAE Review* 23.3, p. 317-323 (cf. p. 89).
- SHTESSEL, Y., C. EDWARDS, L. FRIDMAN et A. LEVANT (2014). *Sliding Mode Control and Observation*. Control Engineering. New York, NY : Springer New York (cf. p. 213).
- SHTESSEL, Y., M. TALEB et F. PLESTAN (2012). “A novel adaptive-gain supertwisting sliding mode controller : Methodology and application”. In : *Automatica* 48.5, p. 759-769 (cf. p. 213).
- SILVA, J. M. Gomes da, D. LIMON, T. ALAMO et E. F. CAMACHO (2008). “Dynamic Output Feedback for Discrete-Time Systems Under Amplitude and Rate Actuator Constraints”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.10, p. 2367-2372 (cf. p. 117, 146, 204, 208).
- SILVA, J. M. Gomes da (1997). “Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes”. Thèse de doct. Université Paul Sabatier de Toulouse (cf. p. 121).
- SON, Y. S., W. KIM, S.-H. LEE et C. C. CHUNG (2015). “Robust Multirate Control Scheme With Predictive Virtual Lanes for Lane-Keeping System of Autonomous Highway Driving”. In : *IEEE Transactions on Vehicular Technology* 64.8, p. 3378-3391 (cf. p. 90).
- SONG, Y. et C. LIAO (2016). “Analysis and review of state-of-the-art automatic parking assist system”. In : *2016 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES)*, p. 1-6 (cf. p. 1).
- STURM, J. F. (1999). “Using SeDuMi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones”. In : *Optimization Methods and Software* 11.1, p. 625-653 (cf. p. 95, 185).
- SVENDENIUS, J. (2003). “Tire Modeling and Friction Estimation”. Thèse de doct. Lund University (cf. p. 35, 36).
- SVENDENIUS, J. et B. WITTENMARK (2003). “Brush tire model with increased flexibility”. In : *2003 European Control Conference (ECC)*. 2003 European Control Conference (ECC). Cambridge, UK : IEEE, p. 1863-1868 (cf. p. 31).
- SZIRTES, T. et P. RÓZSA, éd. (2007). *Applied Dimensional Analysis and Modeling (Second Edition)*. Burlington : Butterworth-Heinemann (cf. p. 38).
- TAGNE, G., R. TALJ et A. CHARARA (2013). “Higher-order sliding mode control for lateral dynamics of autonomous vehicles, with experimental validation”. In : *2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*. 2013 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), p. 678-683 (cf. p. 89).
- TARBOURIECH, S., G. GARCIA, J. M. Gomes da SILVA et I. QUEINNEC (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. London : Springer London (cf. p. 113, 118, 121, 146, 186, 190-192, 197, 198, 203, 206, 208).
- THOMMYPILLAI, M., S. EVANGELOU et R. S. SHARP (2009). “Car driving at the limit by adaptive linear optimal preview control”. In : *Vehicle System Dynamics* 47.12, p. 1535-1550 (cf. p. 90).
- TOH, K. C., M. J. TODD et R. H. TÛTÛNCÛ (1999). “SDPT3 — A Matlab software package for semidefinite programming, Version 1.3”. In : *Optimization Methods and Software* 11.1, p. 545-581 (cf. p. 95, 185).
- TÓTH, R. (2010). *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*. Sous la dir. de M. MORARI et M. THOMA. T. 403. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg (cf. p. 178).

- VELENIS, E., P. TSIOTRAS et J. LU (2008). “Trail-Braking Driver Input Parameterization for General Corner Geometry”. In : *Motorsports Engineering Conference & Exposition* (cf. p. 90).
- VILLELA, M. G. (2004). “Nonlinear modeling and control of automobiles with dynamic wheel-road friction and wheel torque inputs”. Thèse de doct. Georgia Institute of Technology (cf. p. 31).
- WANG, R., H. ZHANG et J. WANG (2014). “Linear Parameter-Varying Controller Design for Four-Wheel Independently Actuated Electric Ground Vehicles With Active Steering Systems”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 22.4, p. 1281-1296 (cf. p. 12).
- WANG, S., Y. HUI, X. SUN et D. SHI (2019). “Neural Network Sliding Mode Control of Intelligent Vehicle Longitudinal Dynamics”. In : *IEEE Access* 7, p. 162333-162342 (cf. p. 88).
- WILSON, D. (1989). “Convolution and Hankel operator norms for linear systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 34.1, p. 94-97 (cf. p. 111, 143, 185, 194).
- WONG, J. Y. (2001). *Theory of ground vehicles*. 3rd ed. New York : John Wiley. 528 p. (cf. p. 35, 36).
- WU, F. (1995). “Control of Linear Parameter Varying Systems”. Thèse de doct. University of California at Berkeley (cf. p. 96, 99, 134, 179).
- YIN, G., J. LI, X. JIN, C. BIAN et N. CHEN (2015). “Integration of motion planning and model-predictive-control-based control system for autonomous electric vehicles”. In : *Transport* 30.3, p. 353-360 (cf. p. 17, 92).
- YOSHIDA, H., S. SHINOHARA et M. NAGAI (2008). “Lane change steering manoeuvre using model predictive control theory”. In : *Vehicle System Dynamics* 46 (sup1), p. 669-681 (cf. p. 91).
- ZHAO, S.-e., Y. LI et X. QU (2014). “Vehicle Chassis Integrated Control Based on Multimodel and Multilevel Hierarchical Control”. In : *Mathematical Problems in Engineering* 2014, p. 1-13 (cf. p. 46).
- ZHENG, J., M. ZHENG, C. CHEN et M. YU (2020). “Research on Environmental Feature Recognition Algorithm of Emergency Braking System for Autonomous Vehicles”. In : *2020 5th International Conference on Electromechanical Control Technology and Transportation (ICECTT)*, p. 409-417 (cf. p. 2).
- ZHOU, K., J. C. DOYLE et K. GLOVER (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall (cf. p. 183, 184, 192, 193, 211).

Titre : Contrôle véhicule autonome : contrôle robuste et haute performance pour permettre les manœuvres à haute dynamique des véhicules autonomes

Mots clés : Véhicule autonome, Contrôle longitudinal, Manœuvre haute vitesse, Commande robuste, Contrôle latéral, Systèmes Linéaires à Paramètres-Variants (LPV)

Résumé :

Le travail abordé dans ces travaux de thèse se place dans le contexte de la conduite autonome. L'objectif est le développement d'une loi de commande pour le suivi de trajectoire d'un véhicule autonome pour des manœuvres d'évitement d'obstacles à haute dynamique. Plusieurs modèles non-linéaires de dynamique du véhicule, représentant son comportement dans des manœuvres à haute dynamique, sont proposés. Pour cela, l'ensemble de modèles proposés considère un modèle non-linéaire des forces des pneus et une représentation variable du transfert de charge. Des simulations permettent de comparer les différents modèles entre eux et de choisir le plus approprié pour la synthèse du correcteur. Un modèle linéaire variable dans le temps est formulé grâce à une linéarisation le long d'une trajectoire de référence du modèle non-linéaire choisi. En utilisant les approches LPV polytopique et grid-based, ce modèle

linéarisé est utilisé pour la définition de deux modèles LPV. Les deux modèles LPV sont donc utilisés pour la synthèse de plusieurs correcteurs, statiques et dynamiques, qui combinent le braquage et le couple aux roues pour stabiliser le véhicule et garantir le suivi de trajectoire sur un ensemble varié de manœuvres d'évitement d'obstacles. La synthèse des correcteurs est effectuée en utilisant la commande robuste et optimale multi-objectif, au moyen de la résolution de problèmes d'optimisation sous contraintes LMI. La prise en compte des saturations des signaux de commande et des forces des pneus permet de maximiser la taille de la région d'attraction du système en boucle fermée pour la synthèse des correcteurs. Des simulations exploitant un modèle du véhicule à haute représentativité permettent d'analyser la performance du système en boucle fermée en cas de conditions initiales différentes de zéro et de dispersions paramétriques.

Title: Autonomous vehicle control: robust and high performance control to enable high dynamics range maneuvering of autonomous vehicles

Keywords: Robust control, Lateral control, Longitudinal control, High speed maneuver, Autonomous vehicle, Linear Parameter Varying systems (LPV)

Abstract:

The work proposed in this thesis is in the context of autonomous driving. The objective is the development of a control law for path tracking of collision avoidance maneuvers for an autonomous vehicle. Several non-linear models of the vehicle, capable of representing its behavior in high dynamics maneuvers, are presented. The different vehicle models proposed take into consideration a non-linear model for tire forces and a variable representation for load transfer. Some simulation results allow to compare the different vehicle models and to choose the model used for the controllers synthesis. A linear time-variant model is obtained through the linearization of the chosen non-linear model. The polytopic and grid-based LPV approaches are then used to define two LPV models. Several controllers, static and

dynamic, have been developed using the two LPV models. These controllers combine the wheels steering angle and torques to stabilize the vehicle and to guarantee the vehicle path tracking on a set of collision avoidance maneuvers. The synthesis of the controllers is done using robust and optimal control methods, through the resolution of optimization problems subjected to LMI constraints. The saturations of the control signals and of the tire forces are taken into consideration in the control synthesis in order to maximize the region of attraction of the system in closed loop. Several simulation results, obtained using a high representativity simulation model, allow to assess the closed loop system performances in presence of non-zero initial conditions and parameter dispersions.