



HAL
open science

Interactions fluide-structure proche de la surface libre : application à la récupération d'énergie et aux instabilités

Nabil Achour

► To cite this version:

Nabil Achour. Interactions fluide-structure proche de la surface libre : application à la récupération d'énergie et aux instabilités. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2022. Français. NNT : 2022TOU30066 . tel-03735796

HAL Id: tel-03735796

<https://theses.hal.science/tel-03735796>

Submitted on 21 Jul 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *04/04/2022* par :

Nabil ACHOUR

**Interactions fluide-structure proche de la surface libre : application à la
récupération d'énergie et aux instabilités**

JURY

CHRISTOPHE ELOY
GREGORY PINON
LAURETTE TUCKERMAN
OLEG KIRILLOV
OLIVIER MARQUET
PIERRE BRANCHER
DAVID FABRE
JÉRÔME MOUGEL

Professeur d'Université
Professeur d'Université
Directrice de Recherche
Professeur d'Université
Directeur de Recherche
Professeur d'Université
Maître de Conférences
Maître de Conférences

Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examineur
Examineur
Examineur
Directeur de thèse
Directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT)

Directeur(s) de Thèse :

Jérôme Mougel et David FABRE

Rapporteurs :

Christophe ELOY et Gregory PINON

Résumé — Cette thèse porte sur l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure au voisinage d'une surface libre. La première partie de la thèse est consacrée à l'étude de la stabilité linéaire d'une membrane tendue dans un écoulement uniforme et parallèle à la surface libre appelée « configuration de Nemtsov ». Une approche numérique est mise en œuvre et le problème aux valeurs propres obtenu est ensuite résolu à l'aide du logiciel StabFEM développé à l'IMFT et basé sur le logiciel éléments finis FreeFEM++. Les résultats étendent la littérature actuelle associée à cette configuration à des valeurs finies de rapport de densité entre le fluide et le solide, et montrent que cette configuration est à l'origine de différents types d'instabilités incluant les instabilités fluide-structure classiques telles que des instabilités statiques et dynamiques (flottement), ainsi qu'une instabilité radiative spécifiquement due à la présence de la surface libre. Les mécanismes à la base de cette dernière instabilité sont décrits et interprétés comme une compétition entre différents types d'ondes de surface dites à énergie négative et à énergie positive qui respectivement ont pour effet de déstabiliser et stabiliser la membrane lorsqu'elles sont générées.

Dans la perspective de l'utilisation de structures flexibles pour la récupération d'énergie des vagues, la seconde partie de la thèse est dédiée à l'étude du forçage par une houle incidente monochromatique d'un convertisseur d'énergie constitué d'une membrane flexible immergée parallèlement à la surface libre en présence d'un courant et reliée à un (ou plusieurs) amortisseur(s) linéaire(s) ponctuel(s) modélisant l'extraction d'énergie. L'ensemble des équations modélisant ce problème d'interaction vague-courant-membrane flexible est ensuite résolu numériquement à l'aide du logiciel StabFEM. Notre méthode est par la suite confrontée aux résultats de la littérature afin de valider la prise en compte de la flexibilité et du courant incident. L'effet de l'écoulement incident (vagues/courant) sur l'efficacité de la récupération d'énergie est étudié pour un récupérateur aux caractéristiques données (immersion, propriétés structurelles et dimensions fixées). L'étude révèle notamment que la présence d'un courant peut augmenter significativement l'efficacité de la récupération d'énergie des vagues. Ultérieurement, une étude paramétrique des principaux paramètres du récupérateur d'énergie (position et coefficient d'amortissement) est faite pour deux ondes incidentes typiques (les rapports longueur d'onde/longueur de la membrane sont de l'ordre de 1 et 2). Nous constatons que nous avons un meilleur rendement (qui peut dépasser 90%) principalement lorsque l'amortisseur est placé dans la partie aval de la membrane (au-delà du milieu).

Finalement, nous proposons une analyse de stabilité linéaire de l'écoulement autour d'un cylindre bi-dimensionnel, rigide, immobile et à proximité d'une surface libre. Une méthode Arbitraire Eulérienne-Lagrangienne-Linéarisée (L-ALE) est mise en œuvre pour formuler ce problème dans un domaine mobile présentant une faible déformation par rapport à la configuration de référence. Après obtention des solutions stationnaires des équations de Navier Stokes en utilisant une méthode itérative de Newton dans laquelle un champ de déformation du maillage est calculé à chaque itération, une analyse de stabilité linéaire de ce champ de base est effectuée. Le calcul des efforts hydrodynamiques exercés sur la surface du cylindre montre que la force de portance diminue avec la présence de la surface libre tandis que la force de traînée augmente lorsque les déformations de la surface deviennent importantes. Par ailleurs, l'analyse de stabilité nous montre que la présence de la surface libre a une influence importante sur les seuils de stabilité. En effet, nous avons un effet déstabilisant qui se manifeste par la modification de la structure du sillage généré derrière le cylindre.

Mots clés : Surface libre, Membrane flexible, Courant, Instabilités, Énergie.

Abstract — This thesis focuses on the study of fluid-structure interaction problems near a free surface. The first part of the thesis is devoted to the study of the linear stability of a tensioned membrane in a uniform flow and parallel to the free surface so-called the "Nemtsov configuration". A numerical approach is implemented and the eigenvalue problem obtained is then solved using the StabFEM software developed at IMFT and based on the finite elements software FreeFEM++. The results extend the current literature associated with this configuration to finite values of the density ratio of the fluid and the solid, and show that this configuration is at the origin of different types of instabilities including classical fluid-structure instabilities such as static (divergence) and dynamic instabilities (flutter), as well as radiative instability specifically due to the presence of the free surface. The mechanisms at the base of this latter instability are described and interpreted as a competition between different types of surface waves called negative energy waves and positive energy waves which respectively have the effect of destabilizing and stabilizing the membrane when they are generated.

In the perspective of the use of flexible structures for the wave energy harvesting, the second part of the thesis is dedicated to the study of the forcing by a monochromatic incident wave of an energy converter made up of a flexible membrane submerged parallel to the free surface in the presence of a current and connected to one (or more) punctual linear damper(s) modeling the energy extraction. The set of equations modeling this wave-current-flexible membrane interaction problem is then solved numerically using StabFEM software. Our method is then compared to the results of the literature in order to validate the inclusion of flexibility and incident current. The effect of the incident flow (waves / current) on the efficiency of energy harvesting is studied for a converter with given characteristics (immersion, structural properties and dimensions fixed). The study reveals in particular that the presence of a current can significantly increase the efficiency of wave energy recovery. Subsequently, a parametric study of the main parameters of the energy converter (damping coefficient and position) is made for two typical incident waves (the wavelength / membrane length ratios are of the order of 1 and 2). We find that we have a better efficiency (which can exceed 90%) mainly when the damper is placed in the downstream part of the membrane (beyond the middle).

Finally, we propose a linear stability analysis of the flow around a rigid and fixed two-dimensional cylinder, near a free surface. A Linearized Arbitrary Lagrangian Eulerian method (L-ALE) is implemented to formulate this problem in a moving domain having a small deformation compared to the reference configuration. After obtaining the steady solutions of the Navier Stokes equations using an iterative Newton method in which a deformation field is computed at each iteration. We then proceed to the stability analysis of the obtained base flow. The calculation of the hydrodynamic forces exerted on the cylinder surface shows that the lift force decreases with the presence of the free surface while the drag force increases when the deformations of the surface become important. Moreover, the stability analysis shows that the presence of the free surface has an important influence on the stability thresholds. Indeed, we have a destabilizing effect which manifests itself by the modification of the wake structure generated behind the cylinder.

Keywords : Free surface, Flexible membrane, Current, Instabilities, Energy.

Table des matières

Table des figures	vii
Nomenclature	xiii
Introduction	1
1 Stabilité d'une membrane flexible placée dans un écoulement	15
1.1 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial	16
1.1.1 Formulation du problème	16
1.1.2 Solution analytique et résultats	17
1.2 Étude de stabilité d'une membrane de longueur finie dans un écoulement axial	19
1.2.1 Formulation du problème	19
1.2.2 Méthode des éléments finis	20
1.2.3 Résultats	21
1.3 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial proche de la surface libre	22
1.3.1 Formulation du problème	22
1.3.2 Solution analytique et résultats	22
1.4 Conclusion	24
2 Effet de la surface libre sur la stabilité d'une membrane tendue dans un courant uniforme	25
2.1 Introduction	26
2.2 Formulation du problème	27
2.2.1 Configuration et paramètres	27
2.2.2 Problème fluide	27
2.2.3 Problème structurel	27
2.2.4 Formulation fluide-structure adimensionnelle	28
2.3 Solutions de champ lointain et condition aux limites de rayonnement	28
2.3.1 Relation de dispersion en champ lointain	28
2.3.2 L'énergie des ondes	29
2.3.3 Conditions aux limites de radiation	30
2.3.4 Coordonner de l'étirement	30
2.4 Méthode numérique	30
2.4.1 Formulation faible du problème aux valeurs propres	30

2.4.2	Discrétisation	31
2.5	Résultats et interprétations	31
2.5.1	Limite faiblement couplée $\alpha \ll 1$	31
2.5.2	Problème fortement couplé $\alpha = \mathcal{O}(1)$	34
2.6	Conclusion	36
2.7	Annexes	36
2.7.1	Détails de la forme matricielle	36
2.7.2	Mise en œuvre de la zone d’amortissement	37
2.7.3	Analyse de l’équation de Nemtsov	37
2.8	Références	39
3	Forçage d’un cylindre avec un degré de liberté par une houle incidente	41
3.1	Formulation du problème	42
3.1.1	Problème fluide	42
3.1.2	Mouvement du cylindre	42
3.1.3	Conditions aux limites	43
3.2	Décomposition de la solution	43
3.2.1	Le problème incident	44
3.2.2	Le problème de diffraction	44
3.2.3	Le problème de radiation	44
3.3	Méthode de résolution et analyse de la solution	45
3.3.1	L’amplitude d’oscillation	45
3.3.2	Les coefficients de réflexion et de transmission	45
3.3.3	L’efficacité du système	45
3.3.4	Méthode des éléments finis	46
3.4	Résultats	47
3.4.1	La masse ajoutée et l’amortissement ajouté	47
3.4.2	L’efficacité du système	48
3.5	Conclusion	49
4	Étude de l’effet du courant sur les interactions onde-membrane flexible : application à la récupération d’énergie	51
4.1	Introduction et état de l’art	52
4.2	Formulation du problème	53
4.2.1	Problème fluide	53
4.2.2	Problème structurel	54
4.2.3	Conditions aux limites	54
4.3	Méthodologie et définitions	54
4.3.1	Décomposition de Haskind	54
4.3.2	Relation de dispersion en présence d’un courant et conditions de radiation	56
4.3.3	Énergie des ondes gravitaires	59
4.3.4	Méthode des élément finis	61

4.4	Ordres de grandeur et validations	63
4.4.1	Ordres de grandeur	63
4.4.2	Validation de la méthode	64
4.4.3	Étude du champ de surface en l'absence de l'amortisseur	65
4.5	Résultats et interprétation	68
4.5.1	Effet de l'écoulement incident	68
4.5.2	Effet des paramètres du convertisseur	71
4.6	Conclusion	74
5	Effet de la surface libre sur la stabilité de l'écoulement visqueux autour d'un cylindre	77
5.1	Introduction et état de l'art	78
5.2	Formulation du problème	79
5.2.1	Problème fluide	79
5.2.2	Conditions aux limites	80
5.3	Obtention des solutions stationnaires	81
5.3.1	Principe de la méthode L-ALE	81
5.3.2	Linéarisation des équations	82
5.3.3	Méthode des éléments finis	84
5.4	Étude de stabilité des solutions stationnaires	86
5.5	Résultats et interprétations	87
5.5.1	Résultats de l'écoulement de base	87
5.5.2	Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base	89
5.6	Conclusion	91
	Conclusion et perspectives	93
	A Détails de la formulation	97
A.1	Formulation faible du problème stationnaire	97
A.2	Formulation matricielle du problème stationnaire	100
A.3	Formulation faible du problème d'instabilité	103
A.4	Formulation matricielle du problème d'instabilité	103
	Bibliographie	105

Table des figures

1	Un modèle d'iceberg (source : <i>weka.ch</i>).	1
2	La nage d'un dauphin au voisinage de la surface libre [Williams 2018].	2
3	Pieux hydrauliques pour la protection des côtes (plage Atlantique, source : <i>lavoixdunord.fr</i>).	2
4	(a) pipeline (b) câble (source : <i>lemarin.fr</i>).	3
5	Dispositifs de récupération d'énergie (a) LIMPET (b) Pelamis (c) Wave Dragon [Babarit 2018].	3
6	Classification du spectre des vagues océaniques en fonction de la fréquence des vagues, représentation adaptée de [Munk 1951].	4
7	Répartition mondiale de la ressource d'énergie des vagues en moyenne annuelle [Edenhofer 2011].	5
8	Répartition mondiale des principaux courants océaniques [Edenhofer 2011].	6
9	Schéma représentatif d'un système de récupération d'énergie (vagues et/ou courants) à base d'une membrane flexible.	7
10	Prototype (a) Clawave [Lehmann 2014] (b) Eel Enegy [Déporte 2016].	7
11	Représentation schématique de l'instabilité de sillage derrière un cylindre.	8
12	Représentation schématique des deux principaux types d'instabilités aéroélastiques pour une aile rigide : (a) instabilité de divergence pour une aile à un degré de liberté (torsion) et (b) instabilité de flottement pour une aile à deux degrés de libertés (flexion/torsion) [De Langre 2001].	8
13	Représentation générale du problème.	10
14	Illustrations des configurations visées dans le chapitre 1 (a) membrane infinie confinée (b) membrane proche d'une surface libre (c) membrane finie confiée.	12
15	Illustration de la configuration visée dans le chapitre 2 : membrane finie proche d'une surface libre.	12
16	Illustration de la configuration visée dans le chapitre 3 : Forçage d'un cylindre avec un degré de liberté par une houle incidente (écoulement potentiel).	12
17	Illustration de la configuration visée dans le chapitre 4 : Forçage par une houle incidente d'une membrane flexible.	12
18	Illustration de la configuration visée dans le chapitre 5 : Écoulement visqueux autour d'un cylindre proche d'une surface libre.	13
1.1	Représentation d'une membrane infinie dans un écoulement axial.	16
1.2	Solutions obtenues pour $k^* = 1$, $H^* \rightarrow \infty$ et $\xi_0^* = 0.3$ (a) fréquence ω en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane pour (c) $U_r = 0.5$ (d) $U_r = 2$	18
1.3	Solutions obtenues pour $k^* = 1$, $H^* = 1$ et $\xi_0^* = 0.3$ (a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane pour (c) $U_r = 0.5$ (d) $U_r = 2$	19
1.4	Représentation d'une membrane finie dans un écoulement axial.	19

1.5	(a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r pour les deux premiers modes (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r pour les deux premiers mode (c) structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane (c) du premier mode à $U_r = 2.25$ (d) du deuxième mode à $U_r = 2.25$ (e) du mode combiné à $U_r = 2.75$. Pour $H^* = 1$.	21
1.6	Représentation d'une membrane infinie dans un écoulement axial proche d'une surface libre.	22
1.7	Solutions obtenues pour $Fr = 3$, $H^* = 1$ et $k^* = 1$ (a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression, déformée de la membrane et déformée de la surface libre pour (c) $U_r = 1.4$ (d) $U_r = 2.5$. Les courbes noire sont les fréquences des ondes gravitaires solutions de la relation de dispersion (1.37).	23
3.1	Illustration du forçage par une houle incidente d'un cylindre monté sur un ensemble ressort/amortisseur.	42
3.2	(a) Représentation du problème incident (b) Représentation du problème de diffraction (c) Représentation du problème de radiation. Cas d'un cylindre.	43
3.3	Évolution de la masse ajoutée (a) et de l'amortissement ajouté (b) en fonction de la pulsation dans le cas d'un cylindre soumis à une houle incidente, pour $H_i/L = 1.05$ en bleu et $H_i/L = 1.25$ en rouge. Les symboles correspondes aux résultats de [Evans 1979].	47
3.4	(a) Efficacité E en fonction de la pulsation ω , la courbe rouge pour $c = c_a(\omega)$ et $k_c = \omega^2(m + m_a(\omega))$ et les courbes bleu pour $c = c_a(\omega)$ et $k_c = \omega^2(m + m_a(\omega))$ évalués à $\omega\sqrt{L/g} = 0.5$, $\omega\sqrt{L/g} = 1$ et $\omega\sqrt{L/g} = 1.5$ (b) structure de l'écoulement pour $\omega\sqrt{L/g} = 0.5$ (c) $\omega\sqrt{L/g} = 1$ (d) $\omega\sqrt{L/g} = 1.5$. Pour $H_i/L = 1.25$ et $m/(L^3\rho) = 1$.	48
4.1	Représentation schématique du problème.	53
4.2	Représentation du problème (a) incident (b) diffracté (c) radié. Cas d'une membrane.	55
4.3	Solutions de la relation de dispersion (4.12). (a) Fréquences en fonction de kH pour $U/\sqrt{gH} = 0.2$ (cas sous-critique à 4 ondes : pour $\omega\sqrt{H/g} = 0.6$, $k_{T_1}^+H = 0.52$, $k_{T_2}^+H = 30.71$, $k_{T_3}^+H = -18.51$ et $k_R^-H = -0.86$) et (cas sous-critique à 2 ondes : pour $\omega\sqrt{H/g} = 1.7$, $k_{T_1}^+H = 1.86$ et $k_{T_2}^+H = 40.2$) (b) Nombre de solutions dans le plan pulsation-courant : régime sous-critique à quatre solutions (blanc), régime sous-critique à deux solutions (bleu clair), régime super-critique à deux solutions (cyan).	56
4.4	Illustration des ondes gravitaires solutions de la relation de dispersion en présence d'un courant pour : (a) un régime sous-critique à quatre ondes et (b) un régime sous-critique à deux ondes/super-critique. La localisation des ondes (amont/aval) est déterminée par le signe de la vitesse de groupe correspondante.	57
4.5	Illustration du domaine de calcul (a) configuration pour des conditions de radiation (b) configuration pour <i>Damping + stretching</i> .	57
4.6	Illustration des configurations (a) plaque rigide en absence d'un courant incident (b) membrane flexible en absence d'un courant incident (c) plaque rigide en présence d'un courant incident.	64
4.7	Coefficient de réflexion en fonction de ω en lignes continues les résultats de cette étude. (a) cas rigide ($T = \infty$) sans courant ($Fr = 0$) pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$, comparaison à [McIver 1985] (symboles noirs) (b) cas flexible ($T = 0.15$) sans courant ($Fr = 0$) pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$, comparaison à [Cho 1998] (symboles rouges). (c) cas rigide ($T = \infty$) avec courant ($Fr = 0.05$) pour $L = 1.25$, $H_i = 0.35$ et $\alpha = 20$, comparaison à [Lin 2014] (symboles bleus).	65
4.8	Diagramme spatio-temporel de la déformation de la surface libre pour $Fr = 0.2$, $\omega = 1.7$ (a) la déformation du champ total (b) la déformation du champ diffracté plus le champs radié (c) l'onde transmise T_1 de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 1.86$ (d) l'onde transmise T_2 de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 40.2$.	66

4.9	Diagramme spatio-temporel de la déformation de la surface libre pour $Fr = 0.2$ et $\omega = 0.6$ (a) la déformation totale (b) la déformation du champ diffracté plus le champs radié (c) l'onde transmise T_1 de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 0.52$ (d) l'onde transmise T_2 de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 30.71$ (e) l'onde réfléchiée R de nombre d'onde $k_R^- = -0.86$ (f) l'onde transmise T_3 de nombre d'onde $k_{T_3}^- = -18.51$	67
4.10	Efficacité du récupérateur d'énergie en fonction de la pulsation ω en rouge en absence d'un courant ($Fr = 0$) en bleu en présence d'un courant ($Fr = 0.05$). Les lignes continues correspondent à E en utilisant l'équation (4.27) et les symboles en utilisant l'équation (4.30).	68
4.11	Module du déplacement de la membrane en fonction de la pulsation ω et la position x (a) carte dans l'espace $\omega - x$ (b) courbes associées aux points noirs dans la figure 4.10. (<i>haut</i>) $Fr=0$ (<i>bas</i>) $Fr=0.05$	69
4.12	Structure des modes associés au rendement maximal pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0,05$ (b). Pression instantanée et déplacements associés (surface libre et membrane).	69
4.13	Carte dans le plan $Fr-\omega$ (a) l'efficacité E (b) le nombre d'onde de l'onde incidente k_I . La ligne discontinue noire représente la limite entre les régimes sous-critiques à quatre et à deux ondes.	70
4.14	Variation de l'efficacité dans le plan $x_{c_1}-c_1$ pour une onde incidente de pulsation $\omega = 1.7$ (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$ (c) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en absence de courant (d) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en présence de courant.	71
4.15	Variation de l'efficacité dans le plan $x_{c_1}-c_1$ pour une onde incidente de pulsation $\omega = 2.5$ (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$ (c) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en absence de courant (d) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en présence de courant.	72
4.16	Cartes d'efficacité dans le plan (x_{c_2}, c_2) pour $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$; (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$. Les symboles noirs modélisent la position du premier PTO.	73
4.17	Cartes d'efficacité dans le plan (x_{c_2}, c_2) pour $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$; (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$. Les symboles noirs modélisent la position du premier PTO.	74
5.1	Illustration schématique du problème.	79
5.2	Représentation du (a) domaine de référence Ω_0 (b) domaine réel Ω . Exemple du (c) maillage initial (d) maillage déformé.	81
5.3	Champ de l'écoulement de base donné par la vitesse (la composante u_x et la composante u_y) pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) $Fr = 0.5$ (d) $Fr = 0.6$ (e) $Fr = 0.7$ (f). Autres paramètres $Re = 45$, $Bo = 10^5$, $H_i^* = 2$, $H^* = 6$, $L_I = 10$ et $L_O = 40$	88
5.4	La force de traînée (a) et la force de portance (b) du champ d'écoulement autour du cylindre en fonction de Re . Pour différentes valeurs du nombre de Froude.	89
5.5	Spectres obtenus pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) et $Fr = 0.6$ (d). Le nombre de Reynolds est fixé à 45.	89
5.6	Mode de sillage : pression (en haut) vorticité (en bas) pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) $Fr = 0.5$ (d) $Fr = 0.6$ (e) $Fr = 0.7$ (f). Déformation statique de la surface (noir) déformation instantanée de la surface (rouge). Les vecteurs bleu sont le champ de la vitesse. Autres paramètres $Re = 45$, $Bo = 10^5$, $H_i^* = 2$, $H^* = 6$, $L_I = 10$ et $L_O = 40$	90
5.7	Le taux de croissance en fonction du nombre de Reynolds Re pour $Fr = 0$, $Fr = 0.6$ et $Fr = 0.7$	91
5.8	Vue schématique des trois principaux problèmes étudiés dans cette thèse : (1) stabilité d'un membrane à proximité d'une surface libre, (2) forçage d'une membrane par une houle incidente en présence d'un courant (3) instabilité de sillage proche d'une surface libre.	93
5.9	Représentation schématique d'un cylindre attaché à un ensemble amortisseur/ressort placé d'un écoulement et proche de la surface.	95

Nomenclature

Nombres sans dimension

Symbole	Description	Définition
α	Nombre de Masse	$\alpha = \frac{\rho L}{\rho_m}$
Bo	Nombre de Bond	$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma}$
Fr	Nombre de Froude	$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$
Re	Nombre de Reynolds	$Re = \frac{UL}{\nu}$
St	Nombre de Strouhal	$St = \frac{\omega L}{U}$
U_r	Vitesse Reduite	$U_r = U \sqrt{\frac{\rho_m}{T}}$

Symboles grecs

Symbole	Description	Dimension	Unité
$\eta, \eta_I, \eta_{Ti}, \eta_R \eta_D$	déformation de la surface libre	L	m
γ	tension superficielle	MT^{-2}	kg/s^2
Λ	longueur d'onde	L	m
λ	fréquence complexe	T^{-1}	rad/s
μ	viscosité dynamique	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa.s
ν	viscosité cinématique	L^2T^{-1}	$m^2 s^{-1}$
ω	fréquence	T^{-1}	$rad s^{-1}$
$\phi, \phi_I, \phi_D, \phi_R$	potentiels de la vitesse (du problème, I : incident, D : diffracté et R : radié)	$L^2 T^{-1}$	m^2/s
ρ	masse volumique du fluide	ML^{-3}	kg/m^3
ρ_m	masse surfacique de la membrane	ML^{-2}	kg/m^2
σ	taux de croissance	T^{-1}	rad/s
ξ	déformation de la membrane	L	m
$\mu(x), \mu_\infty$	viscosité artificielle	$ML^{-1}T^{-1}$	Pa.s

Symboles romains

Symbole	Description	Dimension	Unité
a, a_I, a_{Ti}, a_r	amplitudes d'ondes	L	m
A, B	des constantes	–	–

A_c	amplitude d'oscillation du cylindre	L	m
c, c_i	coefficients d'amortissement	MT^{-1}	kg/s
c_a	amortissement ajouté	MT^{-1}	kg/s
C_g	vitesse gravitaire	LT^{-1}	m/s
c_g	vitesse de groupe	LT^{-1}	m/s
C_γ	vitesse capillaire	LT^{-1}	m/s
c_φ	vitesse de phase	LT^{-1}	m/s
C_s	vitesse structurelle	LT^{-1}	m/s
E	efficacité du système de récupération d'énergie	–	–
e, e_c, e_p	densité d'énergie (c cinétique et p potentielle)	$ML^{-1}T^{-2}$	J/m^3
F, F_I, F_D, F_R	forces hydrodynamiques (du problème, I : incident, D : diffracté et R : radié)	MLT^{-2}	N
g	accélération de gravité	LT^{-2}	ms^{-2}
H	profondeur du fluide	L	m
H_i	immersion de la structure	L	m
i	unité imaginaire	–	–
J, J_I, J_{Ti}, J_R	flux d'énergie	ML^2T^{-3}	W/s
k, k_{Ti}, k_R	nombres d'ondes (Ti pour les ondes transmises et R pour l'onde réfléchie)	L^{-1}	rad/m
k_c	raideur du ressort	MT^{-2}	N/m
L	longueur caractéristique de la structure (longueur de la membrane ou diamètre du cylindre)	L	m
m	masse du cylindre	M	kg
m_a	masse ajoutée	M	kg
p	pression	$ML^{-2}T^{-2}$	Pa
p_d	pression dynamique	$ML^{-2}T^{-2}$	Pa
p_0	pression atmosphérique	$ML^{-2}T^{-2}$	Pa
q	champ total		
qD	champ de l'écoulement diffracté		
qF	champ de l'écoulement		
qI	champ de l'écoulement incident		
qM	champ de la membrane		
qR	champ de l'écoulement radié		
R	coefficient de réflexion	–	–
T	tension de la membrane	MT^{-2}	kg/s^2
t	temps	T	s
T_r	coefficient de transmission	–	–

Nomenclature

\mathbf{u}	vecteur vitesse d'écoulement	$L T^{-1}$	$m s^{-1}$
U	vitesse d'écoulement incident	$L T^{-1}$	$m s^{-1}$
w	vorticité	T^{-1}	s^{-1}
x, y, z	coordonnées cartésiennes	L	m
x_{c_i}	position de l'amortisseur ponctuel	L	m

Introduction

Couplage fluide-structure-surface libre

En mécanique des solides, les fluides sont souvent considérés comme ayant une influence négligeable ou alors modélisés de manière très grossière, tandis qu'en mécanique des fluides, les solides sont souvent vus uniquement en termes de conditions aux limites fixes ou quasi-statiques. L'expérience a prouvé que ces approximations étaient parfaitement valides dans de nombreux cas, mais elle a montré aussi que dans certaines situations cette vision ne suffit plus : les interactions entre solides et fluides doivent être prises en compte. Il est nécessaire d'utiliser conjointement la mécanique des solides et la mécanique des fluides pour obtenir une modélisation correcte de la réalité. On parle alors de couplage, car l'évolution de chacun des deux éléments dépend de celle de l'autre. L'interaction fluide-structure (IFS) est le fruit du couplage entre la mécanique des fluides et la mécanique des structures. Elle est donc par sa nature très complexe, et touche un panel d'applications très variées. Dans cette thèse on va se focaliser sur les effets de la présence d'une surface libre à proximité d'un problème d'interaction fluide-structure dans ce cas nous parlerons alors de couplage fluide-structure-surface libre. Ce type de couplage se rencontre dans de nombreuses situations réelles et industrielles. Afin d'illustrer la diversité des phénomènes mis en jeu, commençons par présenter six situations différentes : les icebergs, la nage proche de la surface, les pipelines et les câbles partiellement immergés, les techniques de protection des côtes et les systèmes de récupération d'énergie.

Les icebergs (figure 1) sont de grands corps flottants de formes et de dimensions variables, ressemblant rarement à une forme régulière [Hotzel 1983, Buckley 1985, McKenna 1999, McKenna 2005]. Ils représentent un danger important pour la navigation polaire et pour les structures offshore. Plusieurs études analytiques [Cammaert 1983, Arockiasamy 1984, Arockiasamy 1985] ont été faites sur l'interaction des icebergs avec les plates-formes offshore (des scénarios post-impact) en supposant que la vitesse d'impact des icebergs est connue. Cependant dans l'étude de [Cammaert 1983] par exemple il a été souligné qu'une estimation précise de la vitesse d'impact des icebergs est nécessaire pour une évaluation réaliste de l'étude. Donc l'une des exigences pour la conception de toute structure offshore est la compréhension de l'interaction de la structure avec l'environnement physique afin d'estimer avec précision les forces sur la structure dues aux effets d'interaction. L'interaction des icebergs avec les structures offshore doit être considérée dans le contexte de la réponse des icebergs à d'autres paramètres environnementaux (force de Coriolis, vent, courant, vagues etc..). Ce qui mène des chercheurs à étudier l'effet de la force de Coriolis, du vent, ou du courant sur la dérive des icebergs en mer libre [Mountain 1980, Sodhi 1980, Garrett 1985, Dmitriev 2007, Turnbull 2015]. Par ailleurs, d'autres chercheurs s'intéressent principalement à l'étude de l'interaction des icebergs avec les vagues [Arunachalam 1987, Lever 1987, Lever 1990, Lever 1991], généralement l'effet des vagues sur l'iceberg est dominant lorsque la taille de l'iceberg diminue. Notons que, bien que la forme de l'iceberg soit irrégulière, à des fins expérimentales, dans la majorité de ces études des formes régulières ont été choisies de telle sorte que ces formes couvrent une large gamme de formes réalistes. Par exemple, des modèles sphériques, des modèles cubiques et des modèles prismatiques ont été utilisés pour représenter les icebergs. Le lecteur est invité à lire le récent article de [Sayeed 2017] où est fait un état de l'art complet sur le mouvement des icebergs de l'interaction avec les effets environnementaux jusqu'à l'impact avec les structures offshore.



FIGURE 1 – Un modèle d'iceberg (source : *weka.ch*).

La nage à grands nombres de Reynolds (figure 2) est un moyen de locomotion impliquant des mécanismes physiques complexes qui a attiré l'intention des nombreux chercheurs depuis des années (par exemple en 1680 par Borelli) [Alexander 1983, Maquet 1989]. Depuis ces premiers travaux, l'intérêt continue pour comprendre comment les animaux aquatiques tels que les poissons génèrent des forces de propulsion pour nager et manœuvrer. Cet intérêt a été motivé au moins en partie par la curiosité des nombreuses adaptations structurelles et fonctionnelles intrigantes que les poissons ont pour la locomotion. De nombreux articles de synthèse et livres utiles donnent un aperçu de la locomotion des poissons, à commencer par les travaux classiques de [Gray 1933a, Gray 1933b, Gray 1933c, Alexander 1967] et ensuite des études plus récentes [Gray 1968, Blake 1983, Lighthill 1975, Maddock 1994, Triantafyllou 2000, Fish 2006, Shadwick 2012, Eloy 2013]. Les études mentionnées sont des études classiques d'interaction entre les animaux aquatiques et le fluide qui généralement ne prennent pas en compte l'effet de la présence de la surface libre. En eau peu profonde, principalement proche des côtes, il est connu que la nage des animaux est très affecté par la présence des vagues à la surface et ça peut représenter un danger pour certains animaux notamment ceux qui sont en voie d'extinction [Lohmann 1992]. La présence de la surface libre complique le problème et son effet a fait l'objet de très peu d'études numériques. Les études qui ont été faites sont principalement expérimentales. Par exemple, plusieurs études qui ont été faites sur l'influence des vagues sur la nage des tortues [Wyneken 1990, Lohmann 1995, GOFF 1998, Wilson 2021] ou encore sur la nage des dauphins [Woodcock 1948, Fejer 1960, Fish 1999, Weihs 2002]. Récemment, [Wilson 2021] ont étudié l'interaction des tortues marines juvéniles naviguent dans la zone côtière avec différent type de vagues, cette étude a montré que les accélérations générées par les vagues peuvent être une caractéristique clé des vagues qui déterminent l'orientation des tortues marines. Finalement, l'effet de la surface libre sur la nage est une problématique complexe et intéressante qui nécessite plus d'exploitation notamment avec le progrès des outils numériques ces dernières années.



FIGURE 2 – La nage d'un dauphin au voisinage de la surface libre [Williams 2018].

La protection des côtes contre le phénomène d'érosion est un nouvel exemple des problématiques d'interaction fluide-structure-surface libre. L'érosion côtière est un problème mondial qui affecte presque tous les pays du monde ayant un littoral. Il s'agit de la perte de sédiments à long terme dans les zones côtières en raison de changements dans un schéma hydrodynamique tel que le vent, les vagues et le courant [Van Rijn 2011, Prasad 2014]. Ce phénomène a fait l'objet des nombreuses études [Stafford 1971, Zhang 2004, El-Mahdy 2022] afin de mieux comprendre ce problème et de proposer les solutions les plus adéquates [Pilarczyk 2003, Schoonees 2019]. Le besoin de protection côtière s'intensifie en raison de l'augmentation de l'énergie des vagues incidentes s'approchant du rivage à cause de l'élévation du niveau de la mer et du changement climatique [Hughes 2016]. Les techniques de protections mises en œuvre, peuvent être classées en deux catégories, les infrastructures dures conventionnelles (par exemple, ouvrage longitudinal «mur, enrochement», ouvrage transversal «épi, jetée», les brises lames etc...) et les infrastructures douces (par exemple, les pieux hydrauliques, ouvrage en géotextile, végétalisation des dunes, etc...) [Schoonees 2019]. Notons que malgré l'efficacité de ces technologies contre l'érosion, certains de ces dispositifs notamment les ouvrages durs, peuvent entraîner une détérioration accélérée des secteurs adjacents et une perte presque complète de la plage, rendant nécessaire de nouvelles interventions. Une solution possible qui a attiré l'attention des chercheurs est celle de l'utilisation de structures flexibles/rigides comme briseurs des vagues [Sawaragi 1995]. Avec une installation appropriée, la structure peut atténuer l'amplitude des vagues incidentes. Sa facilité de construction dans des conditions de sol défavorables en fait également un choix potentiellement meilleur que les brises lames conventionnels pour certaines zones côtières [Sahoo 2012]. L'étude de l'interaction des vagues avec les plaques rigides verticales a fait l'objet de nombreuses études depuis des années [Dean 1945, Ursell 1947, Levine 1958, Evans 1972, Porter 1995]. Les études l'interaction des vagues avec les structures flexible sont également nombreuses mais plus récentes [Lee 1990, Meylan 2009, Chakraborty 2014, Chakraborty 2016, Kundu 2018, Bi 2022].



FIGURE 3 – Pieux hydrauliques pour la protection des côtes (plage Atlantique, source : *la-voixdunord.fr*).

Les pipelines partiellement immergés (figure 4(a)), représentent également un exemple d’interaction fluide-structure-surface libre. Dans le cadre de l’exploitation des gisements de gaz et de pétrole sous-marins, les pipelines sont mis en place afin d’assurer le transport de ces ressources [Braestrup 2009]. En raison de leur structure particulière, ces sections pourraient facilement subir des dommages et des défaillances, et par conséquent ils peuvent représenter une catastrophe à la fois économique et écologique [Moldan 1985, Hooke 1997]. Plusieurs causes sont à l’origine de ces défaillances par exemples l’effet du vent, des vagues, du courant, les séismes, etc. Les causes les plus importantes proviennent des vagues et des courants océaniques. Un autre exemple d’application qui s’inscrit dans la même catégorie que les pipelines est celui des câbles partiellement immergés (figure 4(b)). Les câbles sous-marins sont des équipements clés utilisés pour la recherche océanique, l’ingénierie marine et la communication. Ils relient les installations de surface et sous-marines, fournissant de l’énergie, des forces de traction et des communications sous-marines pour les équipements marins et les systèmes d’amarrage [Szyrowski 2013a, Szyrowski 2013b]. Cependant, en raison des conditions sous-marines agitées et dynamiques avec la présence du courant et des vagues, les câbles sous-marins sont susceptibles de se plier, de se déformer ou même de se rompre. Des exemples d’événements endommageant les câbles peuvent être trouvés dans [Carter 2014]. Par conséquent, il est extrêmement important d’étudier les interactions entre ces structures (pipelines et câbles) et l’écoulement (courant et vagues). Pendant plusieurs décennies, de nombreux chercheurs ont exploré les efforts des vagues et du courant sur les pipelines/câbles sous-marins [Dixon 1979, Sannasiraj 1995, Sheridan 1997, Reichl 2005, García-Palacios 2009, Hu 2011, Bouscasse 2017, Chu 2018, Silva 2018, Colagrossi 2019, Zhao 2021, Kantardgi 2021, Yu 2022]. Plus de détails de certaines de ces études seront donnés dans l’introduction de la troisième partie de cette thèse.



FIGURE 4 – (a) pipeline (b) câble (source : lemarin.fr).

Nous terminons cette section par un dernier exemple qui est celui de la **récupération de l’énergie des vagues**. L’énergie des vagues est de plus en plus considérée dans de nombreux pays comme une ressource majeure et prometteuse (plus loin un paragraphe sera dédié au gisement d’énergie des vagues). Plus de trois milliers de brevets de dispositifs destinés à récupérer l’énergie des vagues ont été déposés, et plus deux cents de ces dispositifs houlomoteurs sont en cours de développement de par le monde [Babarit 2018]. D’après une classification faite par [Antonio 2010], il existe principalement trois technologies pour récupérer cette énergie :

- *Les colonnes d’eau oscillantes* : comme le décrit [Babarit 2018], le principe de ces systèmes est de se servir des variations de hauteur de la surface libre dans une cavité aménagée telle que l’une de ses parois soit en contact avec l’océan par une ouverture sous-marine. Sous l’action des vagues, la surface libre dans la cavité oscille de bas en haut, comme le ferait un piston liquide. Lorsque ce piston monte, l’air contenu dans la partie supérieure de la cavité est comprimé et cherche donc à s’échapper par l’ouverture pratiquée en partie haute. Lorsque le piston descend, c’est l’inverse : il se crée une dépression, et l’air extérieur est aspiré à l’intérieur. On obtient donc un flux d’air alternatif dans l’ouverture supérieure. Ce flux est transformé en électricité grâce à une turbine à air. La turbine est conçue de telle manière que son sens de rotation soit indépendant du sens de circulation du flux d’air. Ce type de dispositif peut être installé en mer ou sur le littoral. A titre d’exemple sur la figure 5(a) est représenté le prototype LIMPET (*Land Installed Marine Powered Energy Transformer*), de la société Wavegen, et d’une puissance de 500 kW, est raccordé au réseau électrique du Royaume-Uni [Portillo Juan 2022].

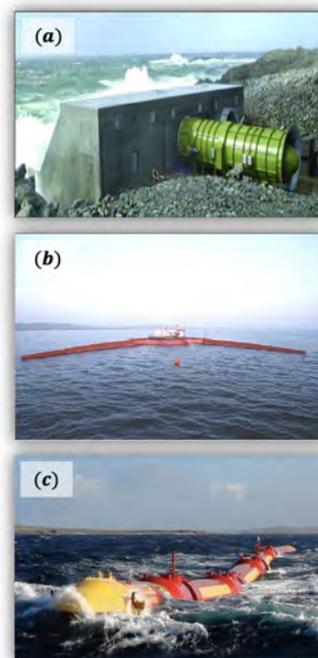


FIGURE 5 – Dispositifs de récupération d’énergie (a) LIMPET (b) Pelamis (c) Wave Dragon [Babarit 2018].

- *Les systèmes à déferlement* : le principe de ces systèmes consiste à faire déferler les vagues sur une rampe inclinée afin de remplir un réservoir. En moyenne, la hauteur d’eau obtenue dans ce réservoir est légèrement supérieure au niveau moyen de la mer. Il existe alors une différence

de hauteur d'eau, que l'on peut transformer en énergie électrique par l'intermédiaire de turbines basse chute. Un exemple ici est celui de Wave Dragon qui a été inventé au Danemark à la fin des années 1990. Le système présente deux bras paraboliques destinés à focaliser la houle sur la rampe de déferlement, augmentant ainsi les performances de la machine. Sur la figure 5(b), on peut voir une image du prototype Wave Dragon. La puissance nominale annoncée par le développeur est de 7 MW [Soerensen 2003].

• *Les systèmes actionnés par la houle* : ces dispositifs constituent la plus grande famille de systèmes houlomoteurs. Le principe est toujours le même, un ou des flotteurs sont mis en mouvement par les vagues. Le mouvement relatif entre le ou les flotteurs et le fond de la mer (systèmes référencés au fond), ou les flotteurs entre eux (systèmes auto-référencés) est transformé en énergie électrique par un convertisseur, souvent hydraulique. Si le principe de base est commun, les réalisations sont elles particulièrement variées selon le ou les types de mouvement utilisés (horizontal, vertical, pulsatoire...) et selon que le système soit flottant ou fixé au fond. La figure 5(c) nous montre une photo du dispositif Pelamis de la société Ocean Power Delivery, l'un des systèmes les plus connus dans cette catégorie. Les corps en mouvement sont ici des cylindres reliés entre eux par des articulations à deux degrés de liberté (type sphérique à doigt). Le mouvement des vagues agit dans chaque articulation sur un vérin hydraulique qui envoie du fluide haute pression vers une turbine pour produire de l'électricité. L'énergie produite est envoyée, par l'intermédiaire d'un cordon ombilical, dans les fonds marins et ensuite acheminée à terre [Henderson 2006]. Une ferme de trois Pelamis offrira une puissance de 2.25 MW [Scruggs 2009]. Notons que l'entreprise qui a développé le projet a cessé d'exister en 2014 et elle a été rachetée par Wave Energy Scotland en 2015. Notons qu'il existe des dispositifs classés dans une catégorie des nouvelles tendances [Babarit 2018]. Ce sont les systèmes houlomoteurs mettant en œuvre des structures souples ou déformables. Dans la troisième section, nous expliquons leur mode de fonctionnement en donnant quelques exemples.

L'énergie renouvelable de l'océan

La demande mondiale d'électricité devrait doubler au cours des 20 prochaines années [BP 2021] et par conséquent, l'un des principaux défis d'ingénierie du 21^{ème} siècle est de répondre à la demande énergétique mondiale en constante augmentation. Couvrant 71% de la surface de la terre, l'océan est l'une des plus grandes sources potentielles d'énergie renouvelable relativement inexploitée. L'océan offre cinq principales formes d'énergie convertible, chacune ayant le potentiel de générer de l'électricité à grande échelle : l'énergie des vagues, courant océanique, conversion de l'énergie thermique des océans, gradients de salinité et l'énergie marémotrice. Dans le contexte des problèmes d'interaction fluide-structure-surface libre, dans cette section nous allons nous focaliser sur l'énergie des vagues et du courant océanique. Bien que leur exploitation sont encore à ses premiers stades de développement, ces deux formes d'énergie peuvent fournir suffisamment d'énergie pour répondre à une part substantielle de la demande énergétique mondiale.

L'énergie des vagues

Dans l'environnement naturel les ondes de surface se produisent sur une large gamme d'échelles et ont de nombreuses causes [Munk 1951], comme le montre la figure 6.

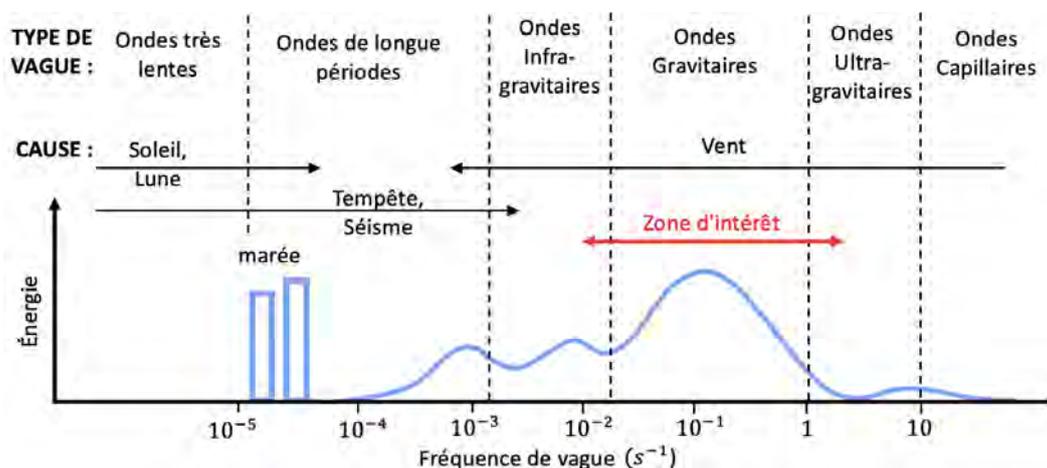


FIGURE 6 – Classification du spectre des vagues océaniques en fonction de la fréquence des vagues, représentation adaptée de [Munk 1951].

Selon leur échelle de temps caractéristique on observe :

- Des ondes capillaires de périodes inférieures à 0.1s, générées par le vent et pilotées par la tension superficielle.
- Des ondes ultra-gravitaires de périodes comprises entre 0.1s et 1s, générées par le vent et pilotées par la tension superficielle et la gravité.
- Des ondes de gravité de périodes comprises entre 1s et 30s, générées par le vent et pilotées par la gravité.
- Des ondes infra-gravitaires de périodes comprises entre 30s et 5min, générées par le vent et les gradients de pression atmosphérique et pilotées par la gravité.
- Des ondes de longue période (seiches, ondes de tempête, tsunamis), de périodes entre 5min et 12h, générées par les gradients de pression atmosphérique et les tremblements de terre et pilotées par la gravité.
- Des ondes de marée (*Ordinary tidal waves* en anglais) de période 12h / 24h, dues à l'attraction gravitationnelle des corps célestes (lune et soleil) et pilotées par la gravité et la force de Coriolis.
- Des ondes de très longue période (*Trans-tidal waves* en anglais) de périodes supérieures à 24h, dues aux tempêtes et à l'attraction gravitationnelle et pilotées par la gravité et la force de Coriolis.

Comme le montre la courbe d'énergie sur la figure 6, ce sont les ondes gravitaires qui conviennent à la conversion de l'énergie des vagues. Lorsque le vent souffle au-dessus de l'océan, l'interaction air-mer transfère une partie de l'énergie éolienne à l'eau, formant des vagues, qui stockent cette énergie sous forme d'énergie potentielle (liée au déplacement vertical) et d'énergie cinétique (lié au mouvement des particules d'eau). La taille et la période des vagues résultantes dépendent de la quantité d'énergie transférée, qui est fonction de la vitesse du vent, de la durée pendant laquelle le vent souffle (typiquement de l'ordre de quelques jours) et de l'étendue de la zone d'océan sur laquelle le vent souffle (appelées zones *fetch*). Les vagues sont très efficaces pour transférer l'énergie et peuvent parcourir de longues distances à la surface de l'océan avec peu de déperdition d'énergie [Barber 1948, Lighthill 2001].

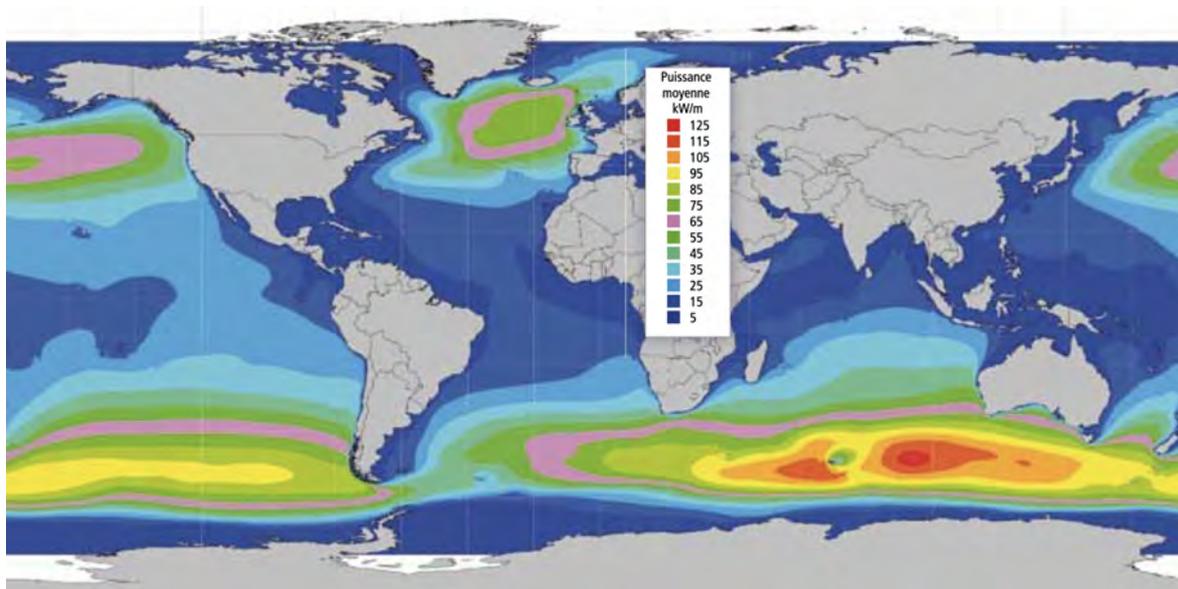


FIGURE 7 – Répartition mondiale de la ressource d'énergie des vagues en moyenne annuelle [Edenhofer 2011].

La disponibilité de l'énergie des vagues varie généralement selon les saisons et sur des périodes plus courtes, les variations saisonnières étant généralement plus importantes dans l'hémisphère nord. Les variations annuelles du climat des vagues sont généralement estimées par l'utilisation de moyennes à long terme dans la modélisation, en utilisant des bases de données mondiales avec des historiques raisonnablement longs.

La figure 7 montre une carte de la distribution mondiale moyenne annuelle de la densité de puissance des vagues au large des côtes établie par [Edenhofer 2011]. Elle démontre qu'en dehors des zones du sud de

l'océan indien et du pacifique difficilement exploitables, les emplacements les plus intéressants pour l'énergie des vagues se trouvent au large des côtes ouest des continents dans les latitudes tempérées, où se produisent les vents les plus énergiques et les plus grandes zones de fetch. En intégrant les puissances moyennes sur tous les littoraux du globe, [Gunn 2012] estime la puissance moyenne d'environ 2.1 TW, soit une ressource mondiale de 18500 TWh/an. La consommation mondiale en électricité est estimée d'environ 22315 TWh en 2018 [on Climate Change 2019].

L'énergie du courant océanique

Les eaux des mers et des océans se déplacent constamment à l'échelle planétaire. L'ensemble de ces mouvements constitue ce qu'on appelle la circulation océanique et se traduit par des courants marins. Ces eaux se déplacent aussi bien en surface qu'en profondeur. Ces déplacements sont conditionnés par plusieurs facteurs (la température, la salinité, la densité, la rotation de la terre et le rayonnement solaire). Suivant les régions, ces courants circulent dans des directions bien précises. On peut observer deux principaux types de courants marins à l'échelle de la planète, les courants de surface et les courants de profondeur.

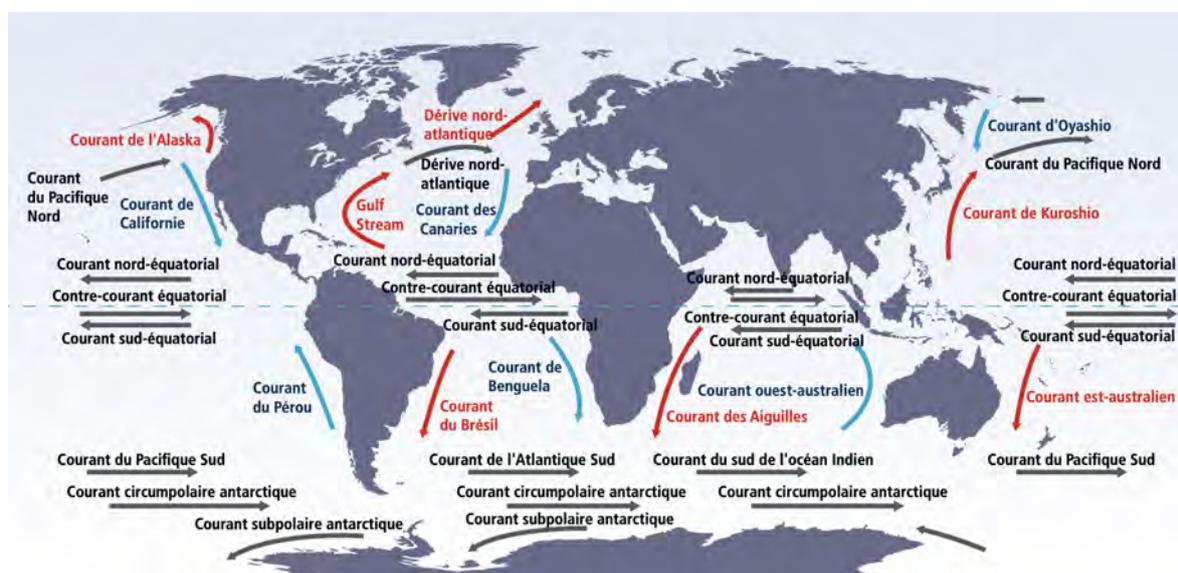


FIGURE 8 – Répartition mondiale des principaux courants océaniques [Edenhofer 2011].

- *Les courants de surface* : ils se définissent par de vastes mouvements d'eau provoqués par la circulation des vents à la surface des océans. Ces courants peuvent être chauds (en rouge sur la figure 8) ou froids (en bleu sur la figure 8) sur la planète. La direction de ces courants est affectée par la force de Coriolis liée à la rotation de la terre (ils sont déviés vers la gauche dans l'hémisphère Nord et vers la droite dans l'hémisphère Sud). Néanmoins, les courants peuvent être déviés par la présence des continents formant ainsi des tourbillons océaniques (également appelés gyres), plus ou moins chauds selon le rayonnement solaire.

- *Les courants marins profonds* : également appelés courants de densité, les courants de profondeur proviennent des différences de températures (l'eau froide est plus dense que l'eau chaude) et de salinité (l'eau salée est plus dense que l'eau douce) dans l'océan. A la différence des courants de surface, le vent n'a pas d'influence sur les eaux situées à plus de 800 mètres de profondeur. Ainsi, les courants marins se forment par la densité des eaux : tandis que l'eau dense se dirige vers les profondeurs, les eaux les moins denses remontent en surface.

Les courants océaniques circulent en permanence dans le même sens et présentent une faible variabilité. La circulation à grande échelle des océans est concentrée dans diverses régions. Certains d'entre eux offrent des vitesses de courant suffisantes pour mettre en mouvement les technologies de récupération d'énergie. Globalement, la ressource énergétique théorique du courant océanique a été estimée à environ 0.5 TW [Neill 2021]. Le courant océanique le plus connu est le Gulf Stream, en Amérique du Nord, où le courant de Floride a un potentiel théorique de production d'électricité de 25 GW [Haas 2017]. Ce chiffre (25 GW) est particulièrement intéressant, car il s'agit approximativement de la demande moyenne d'électricité de

l'État de Floride. Il existe d'autres courants océaniques potentiellement prometteurs, tels que les courants de Mozambique et des Aiguilles au large de l'Afrique du Sud, le courant de Kuroshio au large de l'Asie orientale et le courant est-australien [Bryden 2005].

Technique de récupération d'énergie

Les principales techniques classiques de récupération de l'énergie des vagues ont été déjà présentées dans la section précédente. Concernant l'énergie du courant marin, il existe plusieurs techniques permettant de récupérer cette énergie. Les technologies classiques peuvent être classées en plusieurs catégories : les turbines à axe horizontal, les turbines à axe vertical, les turbines carénées, les foils oscillants, les vis d'Archimède et les turbines auto-porteuses [Edenhofer 2011]. La plupart des ces dispositifs prévoient l'utilisation des turbines.

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à des nouvelles technologies basées sur les membranes flexibles. Sous l'effet des courants ou/et des vagues, ces dispositifs constitués de membranes flexible peuvent se déformer (une illustration est donnée par la figure 9). Ensuite, l'aide d'un ensemble des convertisseurs (en anglais *Power Take Off (PTO)*), ce mouvement mécanique est converti (en électricité en général).

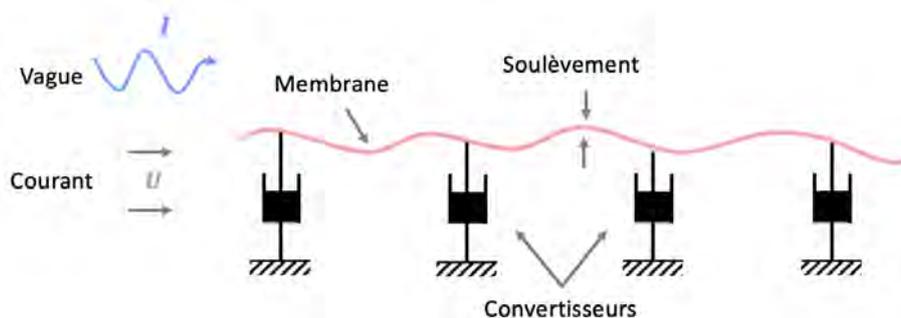


FIGURE 9 – Schéma représentatif d'un système de récupération d'énergie (vagues et/ou courants) à base d'une membrane flexible.

A titre d'exemples des systèmes de récupération d'énergie basés sur une membrane flexible, on peut mentionner le tapis (*Wave Carpet*) de récupération d'énergie des vagues de *CalWave* et la membrane ondulante de récupération d'énergie cinétique d'un courant de *Eel Energy*.

- Le *Wave Carpet* de *CalWave* : Conçu par une équipe de chercheurs à l'université de Berkley en Californie, ce dispositif (voir figure 10(a)) est un tapis immergé situé légèrement au-dessus du fond marin, maintenu en place par un ensemble des ressorts et amortisseurs linéaires constituant le convertisseur hydraulique. La modélisation analytique initiale par Alam [Alam 2012] suggère que le tapis a une large bande passante opérationnelle et est omnidirectionnel, absorbant l'énergie des vagues au-dessus et au-dessous de sa surface avec une efficacité théorique possible de 100%. La modélisation a été validée par des expériences dans un canal à vagues montrant une efficacité d'absorption maximale de 99.3% [Lehmann 2014]. Actuellement, la start-up *CalWave* est en train de déployer une version en eau libre de cette technologie pour comprendre les performances à l'échelle commerciale.

- La membrane ondulante de *Eel Energy* : Conçu par la société privée *Eel Energy*, cette solution innovante pour la récupération de l'énergie des courants marins est basée sur une membrane ondulante avec le courant (voir figure 10(b)). Le système utilise les déformations d'une membrane semi-rigide et précontrainte pour capter l'énergie cinétique des courants marins. La conversion d'énergie de déformation en électricité a lieu le long de la ligne centrale de la membrane par l'action de convertisseurs électromagnétiques. La technologie *Eel Energy* est applicable à tous les types de courants, les premiers développements portent sur les hydroliennes pour les courants de marées, mais

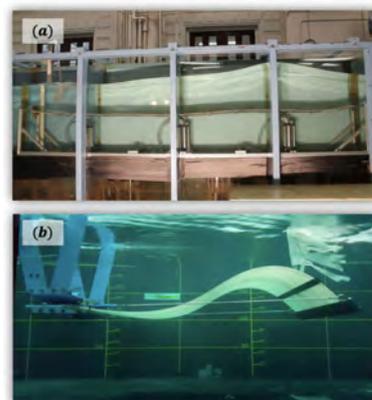


FIGURE 10 – Prototype (a) *CalWave* [Lehmann 2014] (b) *Eel Energy* [Déporte 2016].

des applications en courants océaniques et fluviaux sont envisagées. Cette technologie serait profitable pour de nombreux pays disposant d'une surface côtière, particulièrement en Europe de l'ouest et en France [Déporte 2016, Trasch 2019].

Cette nouvelle technologie représente plusieurs avantages : vise des gammes de vitesse d'écoulement inférieures à celles des hydroliennes conventionnelles, pas de déchets ni d'émission de CO₂ en fonctionnement, pas de pollution sonore sous l'eau, pas d'agression de la faune et maintien d'une zone potentiellement navigable au-dessus des dispositifs.

Les différentes classes d'instabilités

Ce paragraphe a pour but de rappeler brièvement les différentes classes d'instabilités susceptibles d'être observées dans les problèmes d'interactions fluides-structures, afin de fixer la terminologie utilisée dans la suite de cette thèse. Il nous semble utile de fixer ici un lexique, dans la mesure où la terminologie peut varier d'une communauté à une autre et des termes identiques peuvent être employés pour désigner des situations différentes.



FIGURE 11 – Représentation schématique de l'instabilité de sillage derrière un cylindre.

Une première classe d'instabilités, de nature purement hydrodynamique, prend sa source dans l'écoulement lui-même et ne nécessite pas de couplage avec un solide. Il s'agit notamment dans les problèmes qui nous concernent ici de l'**instabilité de sillage**. Le cas de référence le mieux connu dans la littérature est celui du sillage d'une structure cylindrique placée dans un écoulement. Dans cette situation, le champ d'écoulement au passage du cylindre est tout d'abord symétrique à de faibles valeurs de nombre de Reynolds. À mesure que le nombre de Reynolds augmente, il apparaît tout d'abord derrière le cylindre deux tourbillons symétriques, puis les tourbillons se détachent l'un après l'autre, et forment peu à peu une allée de tourbillons périodiques, appelée *l'Allée de Bénard-von Kármán* comme le montre l'illustration sur la figure 11. Cette situation est un exemple classique de l'instabilité de sillage, et a servi de cas-test pour le développement des méthodes de stabilité dite *globale*. La bibliographie sur ce problème sera citée dans la troisième partie de cette thèse où nous nous intéresserons à l'effet de la surface libre sur le seuil d'instabilité.

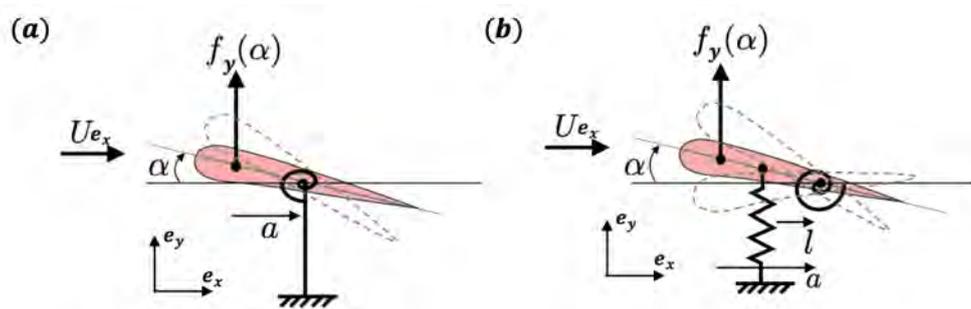


FIGURE 12 – Représentation schématique des deux principaux types d'instabilités aéroélastiques pour une aile rigide : (a) instabilité de divergence pour une aile à un degré de liberté (torsion) et (b) instabilité de flottement pour une aile à deux degrés de libertés (flexion/torsion) [De Langre 2001].

Une seconde classe d'instabilités, désignées habituellement sous le terme générique d'**instabilités aéroélastiques**, se produisent quand l'écoulement de fluide est couplé à une structure susceptible de se déformer. L'exemple le plus étudié, en raison d'applications pratiques évidentes, est celui d'une surface portante plongée dans un écoulement. Dans cette situation, les instabilités sont une cause identifiée d'effets indésirables, et

ont été dans la première moitié du 20^{ème} siècle cause de nombreux crash dans l'aéronautique ou l'aéromodélisme, avant qu'on identifie les instabilités et qu'on en comprennent les causes. Celles-ci sont maintenant bien connues, et la situation la plus étudiée est celle d'une aile rigide oscillant avec un seul degré de liberté (figure 12(a)) ou deux degrés de libertés (figure 12(b)).

Le premier type d'instabilité aéroélastique bien identifié est celui de l'**instabilité de divergence en torsion**. Le scénario conduisant à cette instabilité peut être résumé comme suit (figure 12(a)) : dans une position déplacée, l'aile subit de la part de l'écoulement un moment déstabilisant. Cet effet joue un rôle de "raideur ajoutée négative". Au delà d'une certaine vitesse critique, la raideur structurelle du système aéroélastique (ici celle du ressort de torsion) n'est plus suffisante pour équilibrer le moment aérodynamique, et le système se déforme jusqu'à la rupture. Ce phénomène est une instabilité dite *statique* dans la mesure où elle conduit à un comportement divergent sans oscillation (associé à une valeur propre réelle).

Le second type d'instabilité aéroélastique bien identifié est celui de l'**instabilité de flottement couplé flexion-torsion** (*coupled mode flutter instability*). Celle-ci résulte d'un couplage élastique (flexion-torsion) et aérodynamique (figure 12(b)). Le chargement aérodynamique modifie les modes propres du système couplé (formes, fréquences). L'instabilité se produit, au delà d'une certaine vitesse critique, sur un mode combiné (flexion/torsion) capable d'extraire de l'énergie de l'écoulement. L'instabilité est dite **dynamique** dans la mesure où le comportement observé est une oscillation dont l'amplitude augmente au cours du temps (associé à des valeurs propres complexes).

La divergence et le flottement sont des instabilités qui se produisent aussi dans le cas de structures souples au-delà d'un certain seuil de vitesse. Dans la première partie de cette thèse, nous allons étudier ces deux instabilités pour une membrane flexible placée dans un écoulement.

Une dernière classe d'instabilités que nous rencontrerons dans la suite de la thèse est l'**instabilité radiative**. Il s'agit ici d'une classe d'instabilités beaucoup plus rare et généralement moins bien connue, qui peut se produire lorsqu'un système oscillant est couplé à un milieu infini permettant la propagation d'ondes. Afin d'introduire cette classe d'instabilités commençons par rappeler quelques notions ayant trait au rayonnement, dans le cadre de la mécanique classique et quantique.

Dans la majorité des cas, le couplage avec un milieu infini conduit à un amortissement d'un système oscillant appelé *amortissement radiatif*. Une configuration simple qui illustre ce mécanisme est celle de l'oscillateur de Lamb, constituée d'un oscillateur couplé à une corde tendue infinie [Lamb 1900]. Dans cette situation, en étant couplé à la corde, l'oscillateur conduit à la propagation d'ondes le long de cette dernière. Celles-ci sont caractérisées par un flux d'énergie, l'oscillateur perd donc de l'énergie en rayonnant. Son comportement est alors amorti en temps, le rayonnement agissant comme un terme dissipatif. Dans le cadre de la mécanique quantique, la situation est analogue au cas d'une particule dans un état d'énergie excitée qui relaxe vers son état fondamental en rayonnant une énergie (au travers de l'émission d'un photon).

Il existe cependant des cas très spécifiques où au lieu d'être associé à une perte d'énergie, le rayonnement conduit au contraire à une augmentation de l'énergie du système oscillant, et donc à une déstabilisation de celui-ci. Ce cas se produit lorsque le système oscillant est en mouvement par rapport au milieu infini à une vitesse supérieure à celle des ondes dans ce dernier, c'est à dire dans des conditions dites *supercritiques*. Cette situation a tout d'abord été identifiée en mécanique quantique et qualifiée d'effet Doppler anormal (*Anomalous Doppler effect*) [Domokos 2004]. Cet effet prédit la possibilité pour une particule, initialement dans son état fondamental, de passer dans un état excité tout en émettant un photon. Ce résultat paraît a priori impossible mais est en réalité expliqué par le fait que dans le référentiel qui se déplace avec la particule le photon correspond à une énergie négative.

Afin de mieux comprendre cet effet paradoxal, des physiciens (russes pour la plupart) ont cherché à identifier des systèmes mécaniques ayant un comportement analogue. C'est ainsi que deux situations rentrant dans le cadre d'étude de cette thèse ont été étudiées. La première [Abramovich 1986] concerne un oscillateur se déplaçant dans un fluide uniforme stratifié, susceptible d'émettre des ondes internes. La seconde [Nemtsov 1986] correspond au cas d'une membrane flexible disposée au fond d'une couche de fluide de faible épaisseur se déplaçant à vitesse supercritique. Cette seconde configuration est celle qui fera l'objet du chapitre 2 de cette thèse.

Paramètres génériques

Dans cette thèse nous nous intéresserons ainsi à l'étude d'interaction fluide-structure à proximité d'une surface libre. Dans un premier temps nous étudierons l'effet de la surface libre sur la stabilité d'une membrane tendue dans un écoulement uniforme. Ensuite nous nous intéresserons à l'étude du forçage d'une membrane flexible par une houle incidente en présence d'un courant uniforme du point de vue de la récupération d'énergie. Finalement, nous terminerons par l'étude de l'effet de la surface libre sur la stabilité du sillage derrière une structure cylindrique placé dans un écoulement uniforme.

Nous proposons ici une analyse dimensionnelle sur une configuration générale d'un problème d'interaction fluide-structure proche d'une surface libre. On considère une structure d'une dimension caractéristique L et d'une vitesse de déformation C_S (par exemple une membrane de masse surfacique ρ_m , tendue à une tension T peut être caractérisée par une échelle de vitesse de propagation des ondes structurelles $C_S = \sqrt{T/\rho_m}$), immergé parallèlement à la surface libre à une immersion H_i dans une couche fluide de viscosité cinématique ν , de densité volumique ρ et d'épaisseur H superposée à un écoulement incident axial de vitesse U . Les vitesses des ondes de surface gravitaires et capillaires sont notées respectivement $C_g = \sqrt{gL}$ et $C_\gamma = \sqrt{\gamma/(\rho L)}$, avec g l'accélération de gravité et γ la tension de surface. (voir la figure représentative 13)

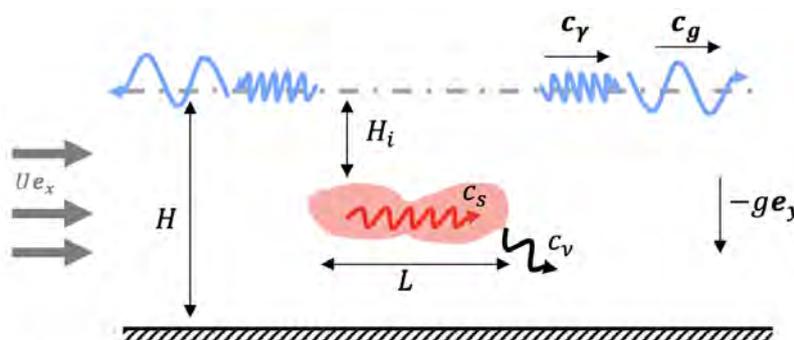


FIGURE 13 – Représentation générale du problème.

Nous proposons ici d'introduire les paramètres adimensionnels qui conviennent possiblement à la description de ce genre de problème [de Langre 2000] et qui seront utilisés dans la suite de la thèse. .

- **Le nombre de Froude :** Il caractérise l'importance relative de l'énergie cinétique par rapport à l'énergie potentielle gravitationnelle. Il s'exprime par un rapport entre la vitesse d'écoulement et la vitesse des ondes gravitaires. Ce nombre apparait essentiellement dans les phénomènes d'ondes de gravité à la surface libre.

$$\text{Fr} = \frac{U}{C_g} \equiv \frac{U}{\sqrt{gL}}. \quad (1)$$

avec g l'accélération de la pesanteur¹. Notons que le cas limite $\text{Fr} \rightarrow 0$ correspond soit à négliger la vitesse de l'écoulement ($U = 0$) lorsque on choisie l'échelle de temps comme U/L , soit à négliger les ondes gravitaires lorsque on choisie l'échelle de temps comme $\sqrt{g/L}$.

- **Le nombre de Bond :** Il représente le rapport entre les forces gravitationnelles et la tension de surface sur une interface entre deux fluides.

$$\text{Bo} = \frac{C_g^2}{C_\gamma^2} \equiv \frac{\rho g L^2}{\gamma}. \quad (2)$$

avec γ tension superficielle, g la gravité et ρ la densité du fluide. Lorsque le nombre de Bond est très faible ($\text{Bo} \rightarrow 0$), les ondes gravitaires sont négligées et on a un problème capillaire, le cas contraire ($\text{Bo} \rightarrow \infty$), les ondes capillaires sont négligées et on a un problème gravitaire. Dans cette thèse, comme il a été mentionné précédemment, on s'intéresse plutôt à des problème à l'échelle des ondes gravitaires.

1. Notons que le choix de l'échelle de longueur peut varier dans la définition du nombre de Froude. Dans certaines situation il pourra par exemple être plus pertinent de le définir en fonction de la profondeur H . Dans ce cas on parle de régime sous-critique pour $\text{Fr} < 1$ et de régime super-critique pour $\text{Fr} > 1$.

- **La vitesse réduite** : Elle est utilisée dans les systèmes d'interaction fluide-structure. La vitesse réduite représente le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse d'une onde élastique dans le solide.

$$U_r = \frac{U}{C_s} \equiv U \sqrt{\frac{\mu}{T}}. \quad (3)$$

pour $U_r \ll 1$ la structure ne voit pas le fluide bouger pendant la durée caractéristique de son mouvement. Inversement, $U_r \gg 1$ signifie que le déplacement du solide est imperceptible pendant le temps que le fluide met à parcourir celui-ci.

- **Le nombre de Reynolds** : Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît en adimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

$$\text{Re} = \frac{U}{C_\nu} \equiv \frac{UL}{\nu}. \quad (4)$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique du fluide où ρ la masse volumique du fluide et μ la viscosité dynamique du fluide. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime : laminaire, transitoire, turbulent. Dans les deux premières parties de la thèse nous allons faire des études des problèmes sous l'hypothèse d'un fluide non visqueux c'est-à-dire $\text{Re} \rightarrow \infty$. En revanche, dans le dernier chapitre de la thèse, l'étude est faite pour un Reynolds entre 0 et 100.

- **Le rapport de masse** : Il représente le rapport entre la masse du fluide et la masse du solide.

$$\alpha = \frac{\rho L}{\mu}. \quad (5)$$

Il traduit le couplage entre la structure et le fluide. Lorsque le nombre de masse est négligeable ($\alpha \rightarrow 0$), l'effet du fluide est négligé et dans ce cas la structure est considérée en mouvement dans le vide. On parle de coulage fort pour α d'ordre 1.

- **La profondeur réduite** : Ce paramètre représente le rapport entre la profondeur de la couche fluide et la longueur caractéristique.

$$H^* = \frac{H}{L}. \quad (6)$$

Lorsque $kH^* \ll 1$, on est sous l'approximation d'eau peu profonde (*Shallow Water* en anglais) tandis que lorsque $kH^* \gg 1$, on est sous l'approximation d'eau profonde (*Deep Water* en anglais), avec k le nombre d'onde.

- **Le paramètre d'immersion** : Ce paramètre représente le rapport entre la profondeur d'immersion et la longueur caractéristique de l'objet.

$$H_i^* = \frac{H_i}{L}. \quad (7)$$

Lorsque ce paramètre est grand, on s'attend à ce que le couplage entre l'objet et la surface libre disparaisse.

Organisation du manuscrit

Cette thèse est divisée en trois parties, les deux premières parties sont composées de deux chapitres dans lesquels nous allons travailler sous l'hypothèse d'un écoulement potentiel et la dernière partie est composée d'un seul chapitre dans lequel l'écoulement est considéré Newtonien.

- 1) **La première partie** est consacrée à l'étude de la stabilité des membranes flexibles placées dans un écoulement axial. Dans le chapitre 1 nous allons étudier quelques exemples de la littérature avant d'étudier le problème principal dans le chapitre 2.

- **Le chapitre 1** sera consacré à l'étude de trois problèmes. Dans un premier temps nous allons étudier théoriquement la stabilité d'une membrane de dimensions infinies placée dans un écoulement axial au dessous d'une paroi (voir la figure 14(a)). Dans un second temps, nous allons étudier la stabilité d'une membrane de dimension finie dans le sens du courant attachée au fond aux extrémités avec des conditions d'appuis simples et placée dans un écoulement axial (voir la figure 14(b)). Finalement, une étude théorique permettant de généraliser le premier exemple en

remplaçant le mur par une surface libre sera faite afin d'étudier l'effet de cette dernière sur la stabilité du problème (voir la figure 14(c)).

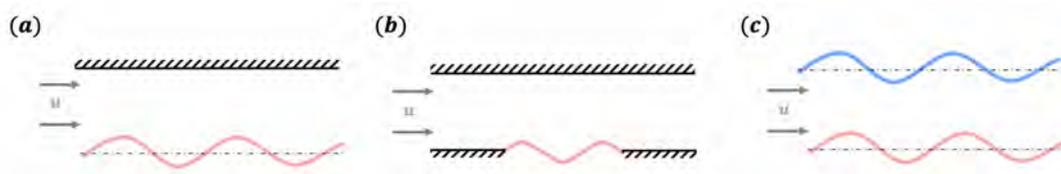


FIGURE 14 – Illustrations des configurations visées dans le chapitre 1 (a) membrane infinie confinée (b) membrane proche d'une surface libre (c) membrane finie confinée.

A travers ces exemples, le chapitre 1 sert à introduire certaines notions et phénomènes pour mieux comprendre le deuxième chapitre.

- **Le chapitre 2** sera consacré à l'étude de la stabilité d'une membrane de longueur finie dans le sens de l'écoulement attachée au fond, simplement appuyée aux extrémités et proche d'une surface libre, appelée *configuration de Nemstov* (voir la figure 15). Cette configuration correspond à une généralisation des exemples étudiés dans le précédent chapitre. Comme mentionné précédemment, dans le cas super-critique cette configuration présente l'intérêt de conduire à une instabilité assez exotique appelée *instabilité radiative*. Dans cette thèse nous étudierons également cette configuration dans des cas sous-

critiques et montrerons qu'elle conduit également à des instabilités plus classiques apparentées aux instabilités aéroélastiques mentionnées plus haut.

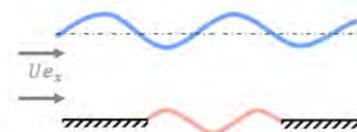


FIGURE 15 – Illustration de la configuration visée dans le chapitre 2 : membrane finie proche d'une surface libre.

- 2) **La deuxième partie** est consacrée à l'étude du forçage par une houle incidente une structure mobile (cylindre ou membrane). Cette étude s'inscrit dans le contexte de la récupération d'énergie des vagues ou/et courant comme mentionné plus haut. Nous allons commencer par un cas classique simplifié dans le chapitre 3, ensuite le problème principal dans le chapitre 4.

- Dans **le chapitre 3** nous allons étudier le forçage d'un cylindre attaché à un ensemble amortisseur/ressort par une houle incidente monochromatique en l'absence du courant (illustration sur la figure 16). La structure cylindrique est considérée comme un système de conversion d'énergie à un degré de liberté, l'objectif est d'étudier la performance de ce système et de montrer les phénomènes mis en jeu. A travers ce chapitre nous allons définir quelques notions physiques telles que la masse ajoutée, l'amortissement ajouté, le coefficient de réflexion, le
- **Le chapitre 4** sera dédié à l'étude du forçage par une houle incidente monochromatique, d'une membrane flexible immergée parallèlement à la surface libre en présence d'un courant et reliée à des amortisseurs linéaires ponctuels modélisant l'extraction d'énergie (voir la figure 17). L'objectif de ce chapitre ainsi est l'étudier l'effet d'un courant sur la performance du système de récupération d'énergie de la houle constitué d'une membrane flexible.

coefficient de transmission etc...



FIGURE 16 – Illustration de la configuration visée dans le chapitre 3 : Forçage d'un cylindre avec un degré de liberté par une houle incidente (écoulement potentiel).

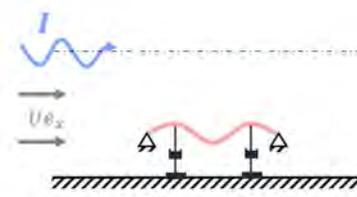


FIGURE 17 – Illustration de la configuration visée dans le chapitre 4 : Forçage par une houle incidente d'une membrane flexible.

3) **La troisième partie** sera consacrée à l'étude de l'effet de la présence d'une surface libre sur la stabilité de l'écoulement visqueux autour d'un cylindre immergé.

- Dans le **chapitre 5** nous allons nous focaliser sur l'étude de l'effet de la présence d'une surface libre sur l'écoulement visqueux autour d'un cylindre immergé et immobile (voire la figure 18). Comme mentionné plus haut, une structure cylindrique placée dans un écoulement est l'origine d'une instabilité de sillage. Donc l'objectif de ce chapitre est d'étudier l'effet de la présence de la surface sur le seuil de la stabilité du sillage généré derrière le cylindre.

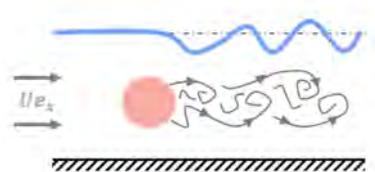


FIGURE 18 – Illustration de la configuration visée dans le chapitre 5 : Écoulement visqueux autour d'un cylindre proche d'une surface libre.

Stabilité d'une membrane flexible placée dans un écoulement

Sommaire

1.1 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial	16
1.1.1 Formulation du problème	16
1.1.2 Solution analytique et résultats	17
1.2 Étude de stabilité d'une membrane de longueur finie dans un écoulement axial	19
1.2.1 Formulation du problème	19
1.2.2 Méthode des éléments finis	20
1.2.3 Résultats	21
1.3 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial proche de la surface libre	22
1.3.1 Formulation du problème	22
1.3.2 Solution analytique et résultats	22
1.4 Conclusion	24

Contenu : Dans ce chapitre nous allons introduire brièvement un certain nombre de concepts et méthodes : les méthodes de résolution et d'analyse de stabilité de membrane fini et infini. Ceci est à travers trois exemples : (*i*) une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial uniforme (*ii*) une membrane de longueur finie dans un écoulement axial et confiné par une paroi latérale et (*iii*) une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial et à proximité d'une surface libre.

L'influence d'un écoulement sur la propagation des ondes dans une structure est un problème modèle pour les études des interactions fluide-structure qui a fait l'objet de nombreuses études. A titre d'exemple nous pouvons citer Rayleigh [Rayleigh 1878] qui a été parmi les premiers qui a mentionné le caractère instable de l'interface entre deux fluides en écoulement. Lord Rayleigh montre que l'interface de longueur infinie est toujours instable. Depuis lors, de nombreux travaux de recherche se sont penchés sur les instabilités de plaques, membranes en présence d'écoulements, qui sont vus comme des problèmes modèles de systèmes plus complexes rencontrés dans la vie courante. On peut citer à titre d'exemple [Guo 2000] qui a présenté une théorie basée sur la méthode de Galerkin et la technique de transformé de Fourier, pour prédire la vitesse d'écoulement critique pour la *divergence* d'une plaque placée dans un canal en écoulement axial sous confinement. Cette étude à été étendue au cas d'une plaque tridimensionnelle par [Eloy 2007] mais sans prendre en compte l'effet de confinement. Récemment [Mougel 2020] s'est intéressé à l'effet de confinement par une surface libre sur le flottement d'une plaque à rigidité de longueur infinie, une étude similaire à été faite par [Labarbe 2020] mais pour une membrane tendu.

On s'intéresse ici à l'interaction entre les déformations d'une membrane et un écoulement homogène et parallèle d'un fluide parfait. Dans la première section, nous allons étudier la stabilité d'une membrane infinie interagissant avec un écoulement parallèle (dans un domaine semi-infini ou limité par la présence d'un mur de confinement). Ensuite, la deuxième section sera consacrée à l'étude de la stabilité d'une membrane de dimension finie attachée à deux murs horizontaux aux extrémités avec des conditions d'appui simple et placée dans un écoulement axial uniforme dans un domaine confiné. Finalement, nous généraliserons le premier problème (de la première section) dans le cas où la membrane est proche d'une surface libre. Tout cela permettra d'étudier l'influence d'un écoulement en confinement ou en présence d'une surface libre sur la propagation des ondes dans une structure. Nous mettrons en évidence l'existence d'ondes/modes instables.

1.1 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial

1.1.1 Formulation du problème

On considère une membrane tendue de tension par unité de longueur T et de masse surfacique ρ_m , d'extension infinie dans les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z en interaction avec un écoulement axial uniforme de vitesse $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x$ dans une couche fluide de profondeur H (Figure 1.1).

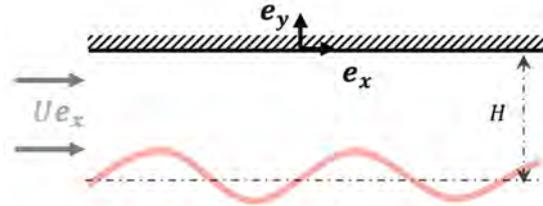


FIGURE 1.1 – Représentation d'une membrane infinie dans un écoulement axial.

Le fluide est supposé non visqueux et l'écoulement incompressible et irrotationnel. La vitesse du fluide peut être exprimée comme le gradient d'un potentiel de vitesse scalaire ($\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x + \nabla\phi$). Le potentiel de la vitesse ϕ satisfait l'équation de Laplace suivante

$$\mathcal{LAP} : \Delta\phi = 0. \quad (1.1)$$

La pression p est gouvernée par l'équation de Bernoulli linéarisée suivante

$$\mathcal{BER} : p = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} \right). \quad (1.2)$$

avec ρ la masse volumique du fluide.

La déformation de la membrane ξ supposée en tout point dirigée selon \mathbf{e}_y , est gouvernée par l'équation

1.1. Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial

suivante

$$\mathcal{BEAM} : -T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \rho_m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p \quad (1.3)$$

avec ρ_m la masse surfacique de la membrane et T la tension (homogène à une force linéique). S'ajoute à ces équations la condition limite cinématique à la surface de la membrane qui impose la continuité des vitesses dans le fluide et la membrane et dont l'expression linéarisée autour de la position d'équilibre de la membrane s'écrit

$$\mathcal{KBC}_M : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1.4)$$

Nous avons une condition d'imperméabilité sur le mur ($y = 0$) :

$$\mathcal{IMP} : \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (1.5)$$

1.1.2 Solution analytique et résultats

On considère que la déformation de la membrane est sous forme d'une onde propagative de nombre d'onde k et de pulsation complexe λ :

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{ikx + \lambda t}, \quad \text{avec } \lambda = \sigma - i\omega. \quad (1.6)$$

Nous cherchons une solution avec une méthode de séparation des variables qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi = f(y) e^{ikx + \lambda t} \quad (1.7)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (1.1), nous avons $f(y) = A e^{-|k|y} + B e^{|k|y}$. Ensuite la condition d'imperméabilité en $y = 0$ (1.5) et la condition cinématique à la surface de la membrane (1.4) permettent d'évaluer les constantes A et B .

$$A = \xi_0 \frac{(\lambda + ikU)}{|k| (1 - e^{2|k|H})}, \quad (1.8)$$

$$B = -\xi_0 \frac{(\lambda + ikU) e^{2|k|H}}{|k| (1 - e^{2|k|H})}. \quad (1.9)$$

Puis l'expression de la pression est obtenue en utilisant l'équation de Bernoulli (1.2)

$$p = \rho \xi_0 (\lambda + ikU)^2 \frac{e^{|k|(H-y)} + e^{|k|(H+y)}}{|k| (e^{2|k|H} - 1)} e^{ikx + \lambda t}. \quad (1.10)$$

En introduisant cette expression en $y = -H$ dans l'équation de la membrane (1.3), on obtient la relation de dispersion décrivant la propagation des ondes dans la membrane lorsqu'elle est couplée à un fluide en écoulement :

$$\left(\rho_m + \rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|} \right) \lambda^2 + 2\rho \frac{U \coth(|k|H)}{|k|} k i \lambda + k^2 \left(T - \rho \frac{U^2 \coth(|k|H)}{|k|} \right) = 0 \quad (1.11)$$

-En l'absence de fluide ($U = 0$ et $\rho = 0$), on retrouve la relation de dispersion classique d'une membrane tendue décrivant une propagation non-dispersive ($\rho_m \lambda^2 + T k^2 = 0$). La vitesse de phase des ondes $c_\phi = \omega/k$ vaut $\sqrt{T/\rho_m}$.

-En présence d'un fluide au repos ($U = 0$), la relation de dispersion est

$$\lambda^2 \left(\rho_m + \rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|} \right) + T k^2 = 0 \quad (1.12)$$

Le terme $\rho \coth(|k|H)/|k|$ en facteur de l'accélération λ^2 peut être interprété comme un terme de masse

ajoutée. Cette masse ajoutée est d'autant plus grande que le nombre d'onde est petit. On a donc un effet de masse ajoutée important pour les grandes longueurs d'onde. L'effet direct de cette masse ajoutée est de rendre le système dispersif. La vitesse de phase en fonction du nombre d'onde est $c_\varphi = \sqrt{T / \left(\rho_m + \rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|} \right)}$. Pour de grandes valeurs du nombre d'onde, c'est à dire pour de petites longueurs d'onde, la vitesse de phase tend vers $\sqrt{T/\rho_m}$, l'effet du fluide est négligeable; on retrouve le comportement d'une membrane sans fluide. Au contraire, aux grandes longueurs d'ondes, l'effet du fluide se fait ressentir, la vitesse de phase diminue, et tend vers 0 quand $k \rightarrow 0$.

-Lorsque le fluide est en écoulement, les racines de la relation de dispersion (1.11) sont

$$\lambda = \frac{-iUk\rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|} \pm ik\sqrt{\rho_m T + \rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|} (T - \rho_m U^2)}}{\rho_m + \rho \frac{\coth(|k|H)}{|k|}} \quad (1.13)$$

Cette relation met en évidence un phénomène de déstabilisation des ondes sous cette condition

$$U > \sqrt{\frac{T}{\rho_m} + \frac{T|k|}{\rho \coth(|k|H)}}. \quad (1.14)$$

En effet, le terme sous la racine carré de l'équation (1.13) est dans ce cas négatif. Une des deux pulsations ayant alors une partie réelle positive ($\sigma > 0$), il s'ensuit une amplification dans le temps de l'amplitude de la déformation.

Dans la suite de cette section, les échelles de longueur, de temps et de masse sont choisies respectivement comme ρ_m/ρ , $\sqrt{\rho_m^3/(\rho^2 T)}$ et ρ_m^3/ρ^2 . Les variables et paramètres adimensionnels sont notés avec des astérisques (*) et on note $U_r = U\sqrt{\rho_m/T}$ la vitesse réduite.

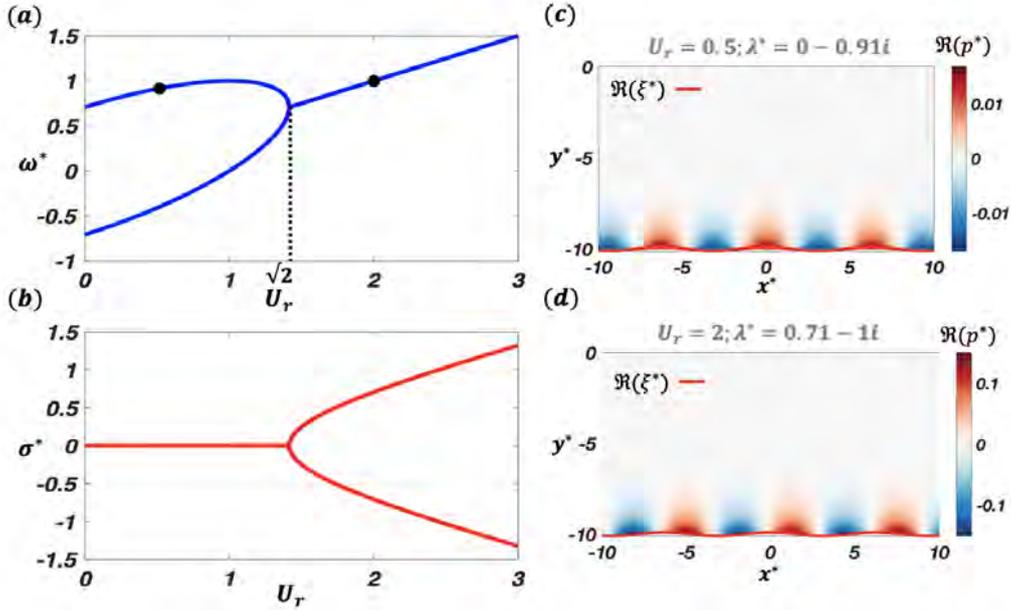


FIGURE 1.2 – Solutions obtenues pour $k^* = 1$, $H^* \rightarrow \infty$ et $\xi_0^* = 0.3$ (a) fréquence ω en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane pour (c) $U_r = 0.5$ (d) $U_r = 2$.

Sur les figures 1.2 et 1.3, à gauche l'évolution de λ^* est tracé en fonction de la vitesse réduite $U_r = U\sqrt{\rho_m/T}$ et à droite la structure de l'écoulement pour deux valeurs typiques de la vitesse réduite, l'une correspondant à une situation stable, l'autre à une situation instable respectivement pour $H^* \rightarrow \infty$ (membrane non confinée) et $H^* = 1$ (membrane confinée).

Dans le cas d'une membrane non confinée, la figure 1.2, nous montre ainsi que lorsque $U_r < \sqrt{2}$, les ondes sont neutres et le système est stable. En revanche, lorsque $U_r > \sqrt{2}$, la pulsation a une partie imaginaire

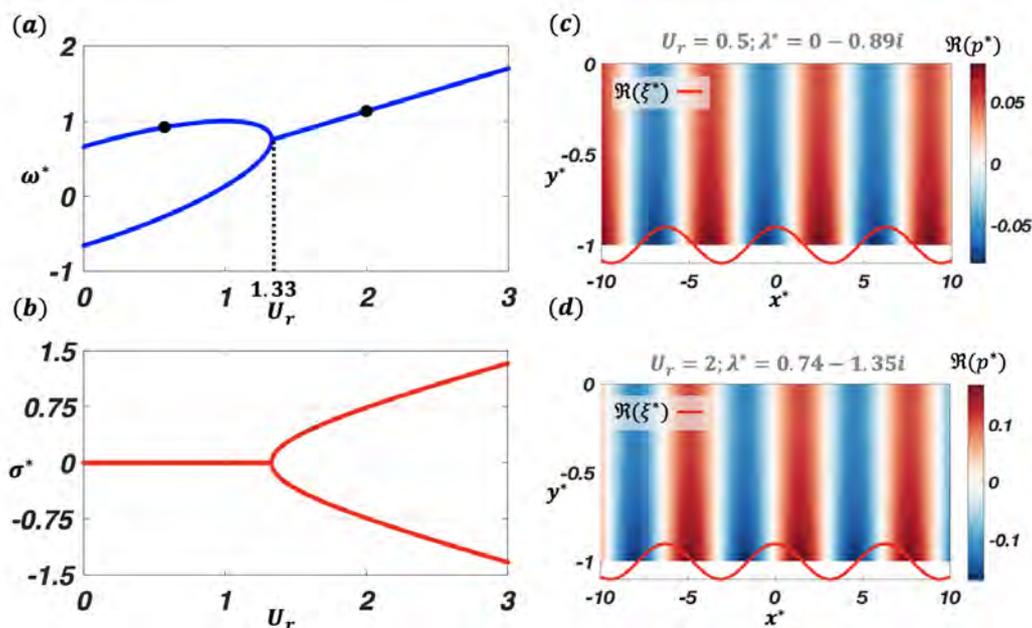


FIGURE 1.3 – Solutions obtenues pour $k^* = 1$, $H^* = 1$ et $\xi_0^* = 0.3$ (a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane pour (c) $U_r = 0.5$ (d) $U_r = 2$.

non nulle ($\sigma > 0$ l'amplitude de l'onde croît exponentiellement dans le temps). Par ailleurs, dans le cas d'une membrane confinée, la figure 1.3, nous montre ainsi que lorsque $U_r < 1.33$, la pulsation est réelle. En revanche, lorsque $U_r > 1.33$, la pulsation a une partie imaginaire non nulle ($\sigma > 0$ l'amplitude de l'onde croît exponentiellement dans le temps).

$U_r = \sqrt{2}$ et $U_r = 1.33$ sont les vitesses critiques à partir desquelles nous avons des instabilités dynamiques. Ces instabilités résultent de la coalescence entre deux modes structurels dont les fréquences sont affectées pas le fluide (effet de masse ajoutée) et finissent par être très proches. Ce type d'instabilité sera nommé *flottement* par la suite. Nous remarquons que dans ce cas la présence d'une paroi au-dessus de la membrane diminue le seuil de stabilité c'est à dire que la vitesse critique du flottement dans le cas confiné est inférieure à celle du cas non confiné ($1.33 < \sqrt{2}$). Ceci peut être généralisé en analysant la relation (1.14) en effet le terme du confinement $1/\coth(|k|H)$ diminue lorsque la profondeur diminue.

1.2 Étude de stabilité d'une membrane de longueur finie dans un écoulement axial

1.2.1 Formulation du problème

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une membrane de dimension finie dans le sens de l'écoulement. On considère une membrane tendue de tension T , de masse surfacique ρ_m et de longueur L , attachée à un

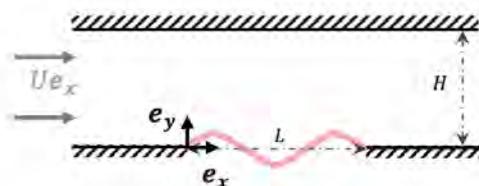


FIGURE 1.4 – Représentation d'une membrane finie dans un écoulement axial.

fond imperméable par des appuis simples. La membrane est en interaction avec un écoulement axial uniforme

de vitesse $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x$ dans une couche fluide de profondeur H (Figure 1.4).

Sous les hypothèses d'un fluide non visqueux et d'un écoulement incompressible et irrotationnel, d'une manière similaire à l'exemple précédent, le problème est gouverné par l'ensemble des équations (1.1)-(1.5). S'ajoute à ces équations une condition d'imperméabilité similaire à (1.5) pour les parois du fond.

Nous cherchons des solutions harmoniques dans le temps de fréquences complexes

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y)e^{\lambda t}, \quad (1.15)$$

$$\xi(x, t) = \xi(x)e^{\lambda t}. \quad (1.16)$$

avec la fréquence complexe $\lambda = \sigma - i\omega$, où σ est le taux de croissance et ω la pulsation.

1.2.2 Méthode des éléments finis

En se basant sur la méthode des éléments finis, nous allons transformer le problème (1.1)-(1.5) en une formulation faible. Pour cela, nous introduisons les vecteurs des fonctions test $[\mathbf{q}_F^*; \mathbf{q}_M^*]$ associées aux inconnues $[\mathbf{q}_F; \mathbf{q}_M]$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_F &= [\phi; p] \longrightarrow \mathbf{q}_F^* = [\phi^*; p^*] \\ \mathbf{q}_M &= [\xi; \xi_t] \longrightarrow \mathbf{q}_M^* = [\xi^*; \xi_t^*] \end{aligned}$$

La formulation faible des équations fluides est obtenue en multipliant les équations de Laplace (1.1) et de Bernoulli (1.2) par les fonctions tests associées et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\forall \mathbf{q}_F^* = [\phi^*; p^*], \quad \iint_{\Omega} \phi^* (\mathcal{LAP}) dv + \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{BER}) dv = 0 \quad (1.17)$$

Pour l'équation de la membrane la formulation faible est obtenue en multipliant l'équation (1.3) par la fonction test associée et en intégrant sur la surface de la structure

$$\forall \mathbf{q}_M^* = [\xi^*; \xi_t^*], \quad \int_M \mathbf{q}_M^* (\mathcal{BEM}) ds = 0 \quad (1.18)$$

Ainsi en utilisant la formule de Green, on intègre par partie le terme en laplacien et les condition limites (sur la membrane et aux parois) sont injectées dans les termes de bord. En utilisant les conditions aux limites, la formulation faible du problème complet s'écrit :

$$\left| \begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* dv + \iint_{\Omega} pp^* dv + \int_M \left(\lambda \xi + U \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \phi^* ds + \rho \iint_{\Omega} \left(\lambda \phi + U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) p^* dv \\ & - T \int_M \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi^* ds + \rho_m \lambda \int_M \xi_t \xi_t^* ds + \int_M p \xi^* ds + \int_M \xi_t \xi_t^* ds - \lambda \int_M \xi \xi_t^* ds = 0 \end{aligned} \right. \quad (1.19)$$

En regroupant les inconnues en une partie fluide $\mathbf{q}_F = [\phi; p]$ et une partie de membrane $\mathbf{q}_M = [\xi; \xi_t = \frac{\partial \xi}{\partial t}]$, le problème peut être défini sous forme la forme matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{F,F} & \mathcal{A}^{M,F} \\ \mathcal{A}^{F,M} & \mathcal{A}^{M,M} \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_M \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{B}^{F,F} & \mathcal{B}^{M,F} \\ \mathcal{O} & \mathcal{B}^{M,M} \end{pmatrix}}_B \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_M \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} \quad (1.20)$$

où les blocs des matrices sont des opérateurs bilinéaires exprimant les couplages entre les composantes du fluide et de la membrane qui s'écrivent comme

$$\mathcal{A}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\phi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{\phi p} & \mathcal{A}^{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \iint_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* dv & 0 \\ \rho U \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} p^* dv & \iint_{\Omega} pp^* dv \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$\mathcal{A}^{M,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\xi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \int_M \frac{\partial \phi}{\partial x} \phi^* ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

$$\mathcal{A}^{F,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{A}^{p\xi} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \int_M p \xi^* ds \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{A}^{M,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\xi\xi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{\xi_t\xi_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \int_M \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi ds & 0 \\ 0 & \int_M \xi_t \xi_t^* ds \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$\mathcal{B}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{B}^{\phi p} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \rho \iint_{\Omega} \phi p^* dv & 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\mathcal{B}^{M,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{\xi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_M \xi \phi^* ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\mathcal{B}^{M,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{B}^{\xi_t\xi} \\ \mathcal{B}^{\xi\xi_t} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \int_M \xi_t \xi^* ds \\ -\rho_m \int_M \xi \xi_t^* ds & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Le problème est alors discrétisé en projetant le vecteur d'état sur une base de taille finie. Pour les inconnues fluides $\mathbf{q}_F = [\phi; p]$, une méthode par éléments finis est utilisée. Le domaine est discrétisé en construisant un maillage non structuré de cellules triangulaires. Les inconnues ϕ et p sont toutes les deux approximées à l'aide d'éléments finis quadratiques par morceaux (P2). Par contre, les inconnues de la membrane $\mathbf{q}_M = [\xi; \xi_t]$ sont approximées par une méthode de type Galerkin, qui consiste à projeter la fonction sur la base des fonctions propres de la membrane dans le vide (définie par $\tilde{\xi}_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ avec $n = 1, 2, \dots$), très similaire à celle de [Guo 2000]. La génération du maillage, la construction de tous les blocs matriciels et l'assemblage de la matrice complète sont entièrement réalisés à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFem++, et la résolution du problème aux valeurs propres se fait avec la méthode shift-invert à l'aide de la bibliothèque SLEPc [Hecht 2012].

1.2.3 Résultats

De la même manière que dans la section précédente, dans la suite de cet exemple, les échelles de longueur, de temps et de masse sont choisies respectivement comme ρ_m/ρ , $\sqrt{\rho_m^3/(\rho^2 T)}$ et ρ_m^3/ρ^2 et les variables et paramètres adimensionnels sont notés avec des astérisques (*).

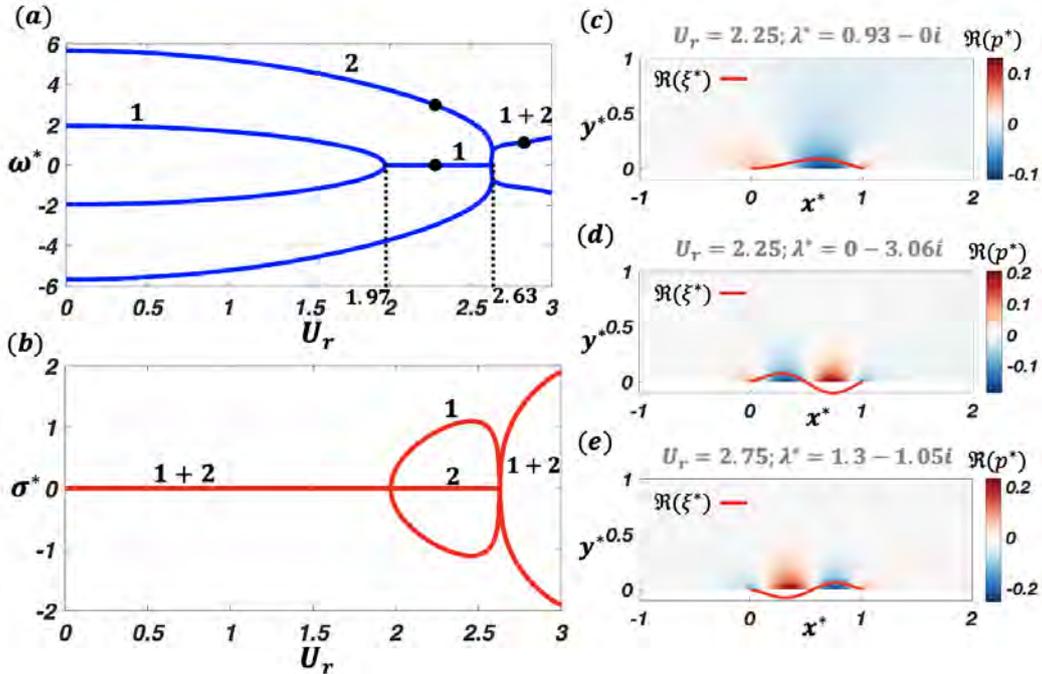


FIGURE 1.5 – (a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r pour les deux premiers modes (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r pour les deux premiers mode (c) structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane (c) du premier mode à $U_r = 2.25$ (d) du deuxième mode à $U_r = 2.25$ (e) du mode combiné à $U_r = 2.75$. Pour $H^* = 1$.

La figure 1.5 montre un diagramme typique de l'évolution des fréquences complexes en fonction de la vitesse réduite U_r et la structure de l'écoulement pour trois valeurs typique de la vitesse réduite. Sur la figure 1.5(a), les fréquences du premier et second modes de l'oscillation de la membrane sont tracées en bleu.

Sur la figure 1.5(b), les taux de croissance des deux premiers modes sont tracés en rouge. Les figures 1.5(c) 1.5(d) et 1.5(e) montrent la structure de l'écoulement : champ de pression et déformée de la membrane pour respectivement le premier mode qui est instable à $U_r = 2.25$, le second mode qui est stable à $U_r = 2.25$ et un mode combiné (du mode 1 et mode 2) qui est instable à $U_r = 2.75$.

Les résultats montrent que les solutions obtenues sont stables pour des vitesses réduites inférieures à $U_r = 1.97$. Ensuite ces résultats montrent également que la membrane diverge d'abord pour le premier mode puis subit un flottement en mode couplé impliquant le premier et le deuxième modes. L'*instabilité statique* apparaît pour de vitesse réduites $1.97 < U_r < 2.63$ (taux de croissance positif et $\omega^* = 0$). Le flottement pour des vitesses réduites $U_r > 2.63$. Dans l'étude réalisée par [Guo 2000] pour une plaque avec rigidité en flexion (mais sans tension) placée dans un écoulement axial, il a été montré que l'instabilité statique dépend fortement des conditions aux limites imposées aux extrémités de la structure.

1.3 Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial proche de la surface libre

1.3.1 Formulation du problème

Dans cette section nous allons présenter un développement théorique, qui nous permet d'étudier l'effet de la présence d'une surface libre sur le flottement d'une membrane infinie.

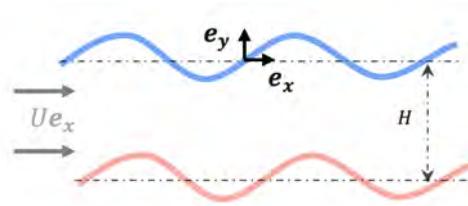


FIGURE 1.6 – Représentation d'une membrane infinie dans un écoulement axial proche d'une surface libre.

On considère que nous avons la même configuration que la première section mais on remplace la paroi supérieure par une surface libre. Notons que la déformation de la surface libre par rapport à l'état de repos est notée η . (Figure 1.6)

Le problème est ainsi gouverné par les équations (1.1)-(1.4) pour le champ de l'écoulement (potentiel de la vitesse et pression) et la déformation de la membrane. S'ajoute à ces équations les conditions dynamique et cinématique linéarisées autour de la surface libre au repos ($y = 0$) suivantes

$$DBC_S : p = \rho g \eta. \quad (1.28)$$

$$KBC_S : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (1.29)$$

avec g l'accélération de gravité.

1.3.2 Solution analytique et résultats

On suit ici la même procédure que dans la première section pour une membrane de longueur infinie. On considère que les déformations de la membrane et de la surface libre sont sous la forme des ondes propagatives de nombre d'onde k et de pulsation complexe $\lambda = \sigma - i\omega$

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{ikx + \lambda t}, \quad (1.30)$$

$$\eta(x, t) = \eta_0 e^{ikx + \lambda t}. \quad (1.31)$$

1.3. Étude de stabilité d'une membrane de longueur infinie dans un écoulement axial proche de la surface libre

Nous cherchons une solution aux équations (1.1)-(1.4) et (1.28)-(1.29) avec une méthode de séparation des variables qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi = e^{ikx + \lambda t} f(y). \quad (1.32)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (1.1), on trouve $f(y) = Ae^{-|k|y} + Be^{|k|y}$. Ensuite, les conditions dynamique et cinématique à la surface libre (1.28)-(1.29) et la condition cinématique sur la membrane (1.4) permettent d'évaluer les constantes A et B

$$A = \xi_0 \frac{(\lambda + ikU) [\rho g|k| + (\lambda + ikU)^2]}{|k| [(-\rho g|k| + (\lambda + ikU)^2) e^{2|k|H} + \rho g|k| + (\lambda + ikU)^2]}, \quad (1.33)$$

$$B = -\xi_0 \frac{(\lambda + ikU) e^{2|k|H} [-\rho g|k| + (\lambda + ikU)^2]}{|k| [(-\rho g|k| + (\lambda + ikU)^2) e^{2|k|H} + \rho g|k| + (\lambda + ikU)^2]}. \quad (1.34)$$

Puis l'expression de la pression est obtenue en utilisant l'équation de Bernoulli (1.2) :

$$p = \rho \xi_0 (\lambda + ikU)^2 \frac{\left((\lambda + ikU)^2 + \rho g|k| \right) e^{|k|(h-y)} - \left((\lambda + ikU)^2 - \rho g|k| \right) e^{|k|(h+y)}}{|k| \left(\left((\lambda + ikU)^2 + \rho g|k| \right) e^{2|k|h} + (\lambda + ikU)^2 - \rho g|k| \right)} e^{ikx + \lambda t} \quad (1.35)$$

En introduisant cette expression exprimée en $y = -H$ dans l'équation (1.3), on obtient la relation de dispersion décrivant la propagation des ondes dans la membrane lorsqu'elle est couplée à un fluide en écoulement proche d'une surface libre :

$$\rho_m \lambda^2 + Tk^2 + (\lambda + ikU_r)^2 \frac{\coth(|k|h)}{|k|} \left(\frac{\rho g|k| + (\lambda + ikU_r)^2 \tanh(|k|h)}{\rho g|k| + (\lambda + ikU_r)^2 \coth(|k|h)} \right) = 0 \quad (1.36)$$

Cette relation correspond à un polynôme d'ordre 4 dont les différentes solutions peuvent être obtenues analytiquement.

Dans la suite, nous utilisons les mêmes échelles d'adimensionnement que les deux sections précédentes et les variables et paramètres adimensionnels sont notés avec des astérisques (*). Notons $U_r = U\sqrt{\rho_m/T}$ la vitesse réduite et $Fr = U\sqrt{gH}$ le nombre de Froude.

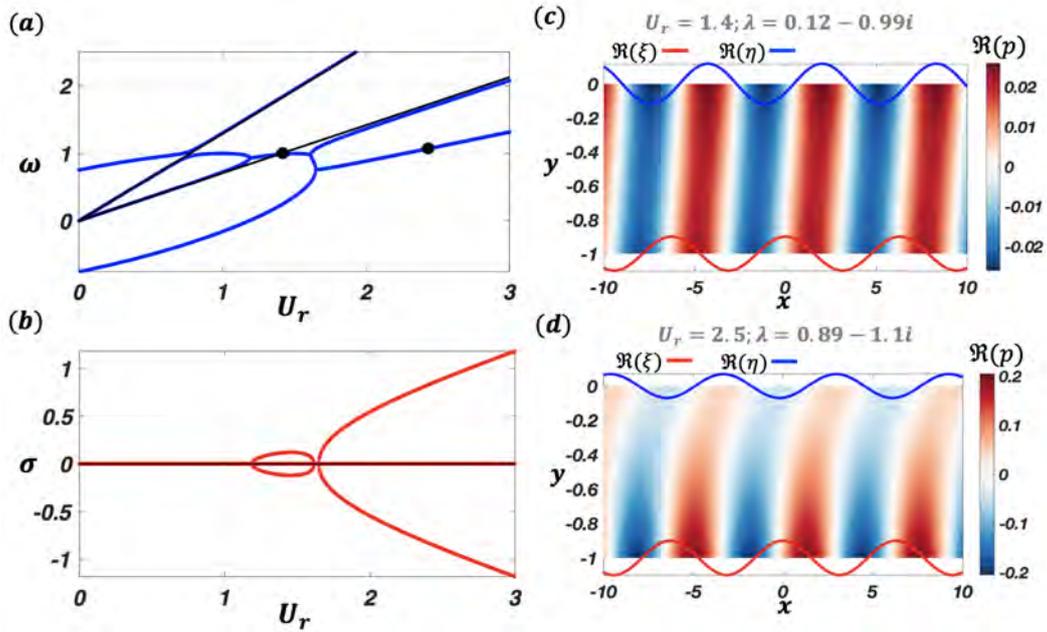


FIGURE 1.7 – Solutions obtenues pour $Fr = 3$, $H^* = 1$ et $k^* = 1$ (a) fréquence ω^* en fonction de la vitesse réduite U_r (b) taux de croissance σ^* en fonction de la vitesse réduite U_r ; structure de l'écoulement : champ de pression, déformée de la membrane et déformée de la surface libre pour (c) $U_r = 1.4$ (d) $U_r = 2.5$. Les courbes noire sont les fréquences des ondes gravitaires solutions de la relation de dispersion (1.37).

Sur la figure 1.7 nous avons tracé la fréquence et le taux de croissance en fonction de la vitesse réduite U_r . Les figures 1.7(a) et 1.7(b) montrent que nous avons deux types d'instabilité. Une première instabilité due à une résonance entre la surface libre et la membrane qu'on appellera instabilité de *radiation* et la deuxième qui correspond au *flottement* vue précédemment. Le flottement de la membrane apparait pour des vitesses réduites $U_r > 1.65$. Les instabilités de radiation apparaissent pour des vitesses réduites $1.19 < U_r < 1.62$. Nous avons tracé sur les mêmes figures 1.7(a) et 1.7(b) en ligne noire les fréquences des ondes gravitaires en présence du courant données pour la relation de dispersion adimensionnelle suivante

$$\lambda_g = -iU_r \left(k \pm \frac{\sqrt{k \tanh(k)}}{\sqrt{h}Fr} \right). \quad (1.37)$$

Ces courbes montrent que l'instabilité de résonance surface-membrane apparait lorsque la fréquence est égale à celle des ondes gravitaires et plus précisément celle à énergie négative (plus de détails sur cette notion dans le chapitre suivant). Notons que ce phénomène a été constaté dans l'étude réalisée par [Mougel 2020] pour une plaque infinie déformable et aussi dans celle de [Labarbe 2020] pour une membrane tendue.

Les figures 1.7(c) et 1.7(d) montrent la pression en superposition avec les déformations de la surface libre (en bleu) et la membrane (en rouge) pour des vitesses réduites associées aux deux régimes d'instabilités. Pour le cas où on a une instabilité de radiation nous avons $\eta^*/\xi^* = 1.19 > 1$ c'est à dire que les ondes gravitaires sont dominantes par rapport à celle de la membrane. Pour le cas où on a une instabilité de flottement, on a plutôt l'effet inverse, $\eta^*/\xi^* = 0.69 < 1$.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons abordé la stabilité d'une membrane dans un écoulement uniforme. D'abord, nous avons montré à l'aide d'un calcul théorique simple en prenant en compte l'effet du confinement, l'existence d'une vitesse critique d'écoulement à partir de laquelle une membrane infinie devient instable (*flottement*). Le cas non confiné a été déduit en supposant que la profondeur de la couche fluide tend vers l'infinie. Nous avons déduit que la présence d'une paroi au-dessus de la membrane a un effet déstabilisant. Ensuite nous avons étudié le cas d'une membrane de dimension finie dans le sens de l'écoulement et simplement supportée aux extrémités, à l'aide de la méthode des éléments finis. Les résultats de cette étude ont montré l'existence de deux types d'instabilité, *une instabilité statique* et *une instabilité dynamique* des modes couplées de la membrane. Finalement, l'effet de la présence d'une surface libre dans le cas d'une membrane infinie, a été étudié théoriquement. Nous avons montré dans ce cas l'existence de deux types d'instabilités, *une instabilité radiative* due à une résonance entre l'onde de surface et l'onde structurelle et *une instabilité de flottement*. Nous pouvons aborder à présent le prochain chapitre qui consiste à une généralisation de ces études. Dans le prochain chapitre (sous forme d'un article en cours de préparation pour *Journal of Fluids and Structures*), nous réaliserons une étude de la stabilité d'une membrane finie pour une configuration similaire à celle de la section 1.2 de ce chapitre en remplaçant le paroi supérieure par une surface libre.

Effet de la surface libre sur la stabilité d'une membrane tendue dans un courant uniforme

Sommaire

2.1	Introduction	26
2.2	Formulation du problème	27
2.2.1	Configuration et paramètres	27
2.2.2	Problème fluide	27
2.2.3	Problème structurel	27
2.2.4	Formulation fluide-structure adimensionnelle	28
2.3	Solutions de champ lointain et condition aux limites de rayonnement	28
2.3.1	Relation de dispersion en champ lointain	28
2.3.2	L'énergie des ondes	29
2.3.3	Conditions aux limites de radiation	30
2.3.4	Coordonner de l'étirement	30
2.4	Méthode numérique	30
2.4.1	Formulation faible du problème aux valeurs propres	30
2.4.2	Discrétisation	31
2.5	Résultats et interprétations	31
2.5.1	Limite faiblement couplée $\alpha \ll 1$	31
2.5.2	Problème fortement couplé $\alpha = \mathcal{O}(1)$	34
2.6	Conclusion	36
2.7	Annexes	36
2.7.1	Détails de la forme matricielle	36
2.7.2	Mise en œuvre de la zone d'amortissement	37
2.7.3	Analyse de l'équation de Nemtsov	37
2.8	Références	39

Contenu : Dans ce chapitre nous allons étudier la stabilité d'une membrane tendue immergée à proximité d'une surface libre en présence d'un courant incident uniforme. Ce chapitre est rédigé sous forme d'un article en cours de préparation pour le *Journal of Fluids and Structures*

Effect of the free surface on the stability of a tensioned membrane in a uniform current

Nabil Achour^{a,*}, Jérôme Mougel^{a,*}, David Fabre^{a,*}

^a*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Université de Toulouse, CNRS, Toulouse, France.*

Abstract

In this article, we address the question of the stability of a tensioned membrane immersed close to a free surface in the presence of a uniform incoming current. It is shown numerically using a finite-element approach that several kinds of instabilities are present in this configuration. For weak values of fluid to solid mass ratio, only radiative instabilities are obtained, in agreement with [15, 16]. The physical mechanism of such instabilities is confirmed thanks to the study of mode structures as a competition between surface waves with different energetic characteristics, namely positive energy waves (peWs) that radiate energy far from the membrane (and therefore stabilize the system), and negative energy waves (neWs) that give energy to the system when they radiate (and therefore destabilize the system). In strongly coupled cases, we extend results by [13, 14], to finite length membranes and explore the intricate stability characteristics of the system. It is shown that both classical fluid-structure instabilities such as divergence (static instability) or flutter (dynamic instability) emerge and are affected by the free surface, and such instabilities also coexist with radiative instabilities that are also observed in strongly coupled cases. A classification of those instabilities is proposed based upon mode structures, and strongest instabilities are mapped in the parameter plane constructed with the Froude number and the reduced velocity.

Keywords: Fluid-Structure Interactions, Free surface waves, Radiative Instabilities, Flutter.

1. Introduction

A flexible structure placed in a uniform axial flow can undergo different kinds of fluid-structure instabilities depending on physical parameters, supporting ends conditions and structural characteristics (tensioned membrane or plate with bending rigidity for instance). This includes both static and dynamic instabilities which generally arise for large enough reduced velocities, defined as the ratio between incoming fluid velocity and typical velocity associated to structural waves propagation, when fluid loads are strong enough to counteract stabilizing structural tension and/or bending rigidity. This in particular includes flag flutter, which has been extensively studied during the past decades (see [1, 2] for instance) and applied to create alternative cooling systems [3], optimize paper manufacturing [4] or harness energy from the incoming flow [5, 6] for instance.

The effect of lateral confinement on such instabilities has been studied by [7, 8]. It is found that confinement changes stability thresholds quantitatively, which is of main importance for energy harvesting applications, heat exchangers or human snoring treatments, but instability mechanisms remain qualitatively identical.

Effets of lateral confinement by a deformable boundary, and more specifically by a free surface, are also of interest for applications ranging from current energy harvesting [9], to wave energy harvesting [10] or shore protection [11, 12]. The former

application is based upon an instability mechanism which appears for large enough velocity currents, and determination of the effects of the free surface on stability thresholds therefore seems of prior importance as it directly impacts locations and running characteristics of such device.

In the specific case of infinitely long structures, the effect of the free-surface has been found to affect flutter boundaries and trigger additional free surface driven instabilities [13, 14]. Main instability regimes identified in [13] can be classified using the Froude number, ratio between flow velocity and typical surface wave velocity, and correspond to: (i) *Rigidly-confined* flutter appearing in the strong gravity limit (low Froude numbers) for which the free surface behaves as a wall. In this limit, the stabilizing effect of the confinement is recover [7, 8], due to added mass increased by confinement [13]. (ii) Free surface/membrane resonances for Froude numbers of order 1 and larger. (iii) *Softly-confined* flutter regime for large values of Froude number, identified as a resonance between two structural modes (flutter) which is strongly affected by the free surface in terms of critical velocities and mode structure (the free surface passively follows membrane deformations).

In this paper, we address the stability of a finite-length flexible tensioned membrane, immersed in a uniform flow parallel to a free surface. This configuration, corresponding to the so-called *Nemtsov membrane* in reference to the original study by [15] performed in the shallow water limit, has been recently resurrected by [16] and extended to finite depths. Both studies [15, 16] highlighted destabilization of the system due to radiative instabilities triggered by surface waves with specific properties due to the presence of the current, namely *Nega-*

*Corresponding author

Email addresses: nabil.achour@imft.fr (Nabil Achour),
jerome.mougel@imft.fr (Jérôme Mougel), david.fabre@imft.fr
(David Fabre)

ive Energy Waves (neWs). Those studies however focus on the weakly-coupled limit (low fluid/solid mass ratio) for which fluid loads are too weak for static and dynamic fluid-structure instabilities to arise. Note that *flutter* terminology is also used in [15, 14, 16] to refer to instabilities of the Nemtsov membrane due to wave radiation in the weakly coupled-case. To avoid any confusions, in the present study we will save *flutter* terminology to instabilities resulting from structural mode interactions under the action of the flow (sometimes referred to coupled-mode flutter), whose mechanism is not related to the presence of the free-surface.

Only finite depth cases are targeted in the present study with the following objectives and novelties: (i) provide a detailed description of mode structures in the weakly-coupled limit corresponding to infinitesimal values of fluid to solid mass ratio, i.e. $\alpha \ll 1$ (not provided in [15] or [16]) as well as additional details corresponding to radiative instability mechanism; (ii) identify and provide a cartography of all the instabilities expected in the strongly-coupled case, i.e. $\alpha = O(1)$, namely flutter, static instability, and radiative instabilities.

In this objective, the present paper is organized as follows. In section 1, we present the governing equations and boundary conditions for the present fluid-solid-free surface problem. The second section is devoted to preliminary discussions regarding far-field solutions and implementation of radiative boundary conditions. The third section corresponds to a presentation of the numerical method implemented. Finally, obtained results are presented, focusing first on the weakly-coupled case where radiative instability mechanism is detailed thanks to mode structures, and the fully-coupled problem is subsequently explored, along with all the instabilities arising in this case.

2. Problem formulation

2.1. Geometry and parameters

We first describe in figure 1 the steady configuration which will be used as a base state for the stability calculations. We consider a fluid layer of depth H , set in uniform motion with velocity U along the axial (x) direction. The gravity field g acts along the vertical ($-y$) direction and the configuration is assumed of infinite width along the transverse (z) direction allowing to treat the problem as two-dimensional. The fluid is incompressible with uniform density ρ and viscosity is neglected. At the bottom of the fluid layer lies a flexible plate of length L , characterized by a surfacic mass ρ_m and a tension per unit length T .

Two characteristic velocity scales can be defined as function of the parameters of the problem: (i) the celerity of torsional waves along the membrane $c_m = \sqrt{T/\rho_m}$, and (ii) the celerity of long gravity waves $c_{g,0} = \sqrt{gH}$. Accordingly, two dimensionless parameters can be defined: the *Froude number* Fr comparing the incoming velocity to the gravity wave celerity, and the *reduced velocity* comparing the incoming velocity to the membrane wave celerity:

$$Fr = \frac{U}{c_{g,0}} \equiv \frac{U}{\sqrt{gH}}, \quad U_r = \frac{U}{c_m} \equiv U \sqrt{\frac{\rho_m}{T}}, \quad (1)$$

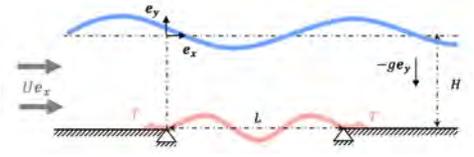


Figure 1: Problem representation.

Two additional dimensionless parameters: a mass ratio α comparing the inertias of fluid and membrane, and a geometrical aspect ratio h :

$$\alpha = \frac{\rho L}{\rho_m}, \quad h = \frac{H}{L}. \quad (2)$$

Note that other choices of parameters are possible. For instance [16] use the ratio of membrane and gravity wave celerities $M_w = c_m/c_{g,0} \equiv Fr/U_m$. They also note M the Froude number, considering it as a Mach number.

2.2. Fluid modelling

The assumption of an inviscid fluid along with the hypothesis of irrotational flow allows us to work within the potential flow theory. The flow velocity is thus considered as $\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x + \nabla\phi(x, y, t)$ where $\phi(x, y, t)$ is a velocity potential characterising the perturbations to the base-state, assumed of small amplitude. Equations governing fluid dynamics in the fluid layer then correspond to linearized versions of two-dimensional Laplace and Bernoulli equations:

$$\Delta\phi = 0, \quad (3)$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial\phi}{\partial t} + U\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

where p corresponds to the pressure perturbations and $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ denotes the two-dimensional Laplacian operator.

Equations (3)-(4) should be complemented by kinematic and dynamic boundary conditions at the free surface which respectively read

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + U\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad \text{at } y = 0, \quad (5)$$

$$p = \rho g \eta \quad \text{at } y = 0, \quad (6)$$

where $\eta(x, t)$ is the vertical displacement of the free surface; and impermeability conditions on the fluid layer bottom,

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \quad \text{on } y = -H, x \notin [0, L]. \quad (7)$$

2.3. Membrane modelling

The vertical displacement of the membrane is noted $\xi(x, t)$, and is supposed to be governed by one-dimensional tensioned beam model

$$\rho_m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -p, \quad \text{on } y = -H, x \in [0, L], \quad (8)$$

In addition to equation (8) a linearized kinematic boundary condition on the membrane should be ensured as

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{on } y = -H, x \in [0, L], \quad (9)$$

along with pinned-pinned boundary conditions at the membrane ends, i.e.

$$\xi = 0 \quad \text{at } x = 0, L. \quad (10)$$

2.4. Non-dimensional fluid-structure formulation

In the following equations are written under their dimensionless forms using the reference length, time and mass scales respectively as L , L/U and ρL^3 . Using this normalisation, the final set of linear non-dimensional equations corresponding to equations (5)-(10) reads

$$\mathcal{LAP} : \Delta \phi = 0, \quad (11)$$

$$\mathcal{BER} : p = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right), \quad (12)$$

$$\mathcal{DBC} : p = \frac{1}{hFr^2} \eta, \quad \text{at } y = 0. \quad (13)$$

$$\mathcal{KBC}_S : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{at } y = 0. \quad (14)$$

$$\mathcal{BEAM} : \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{1}{U_r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\alpha p, \quad \text{at } y = -h, x \in [0, 1], \quad (15)$$

$$\mathcal{KBC}_M : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \text{at } y = -h, x \in [0, 1], \quad (16)$$

$$\mathcal{IMP} : \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = -h, x \notin [0, 1], \quad (17)$$

Note that in addition to the set of equations (12)-(17), a radiation boundary condition should be satisfied to ensure that free surface waves radiate out of the computation domain. Different approaches to reach this goal will be discussed in section 3.

3. Far-field solutions and radiation boundary condition.

In order to explain the methodology considered to solve the present problem, some preliminary explanations are necessary to understand the main features of expected wave solutions. This will be particularly useful to further mimic radiative boundary conditions and to interpret radiative instability mechanism. In this objective, we first describe the classical wave-current dispersion relation by first assuming propagation of purely neutral waves. We then introduce treatment of boundary conditions to be implemented at the ends of the computation domain to avoid wave reflection. In this objective, we both discuss the spatial evolution of stable/unstable modes, and the effect of introducing an artificial damping on wave propagation.

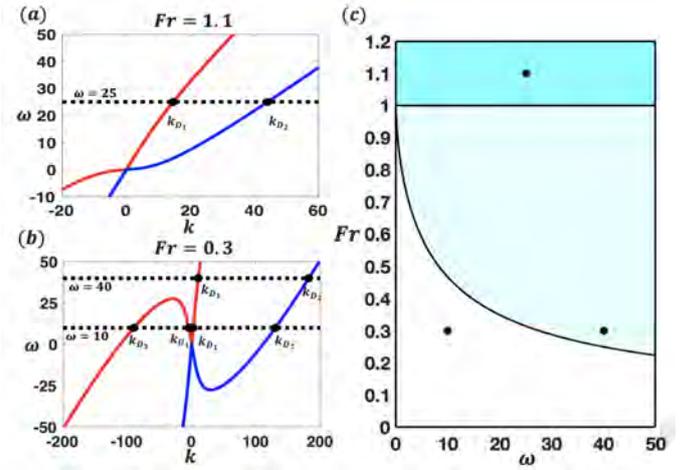


Figure 2: Solutions of the dispersion relation (18). Frequencies as function of k for $Fr = 1.1$ (supercritical case) (a) and $Fr = 0.3$ (b) (subcritical case). (c) Number of solutions in the plane ω - Fr : supercritical regime with two solutions (cyan), subcritical regime with two solutions (light blue), subcritical regime with four solutions (white). For $h=0.1$.

3.1. Far-field dispersion relation

To predict the asymptotic behavior of the solution away from the membrane (for $|x| \rightarrow \infty$), we first consider the problem of wave propagation in a uniform layer of width H of infinite extension without the membrane. In this section we restrict to wave solutions with modal dependence $e^{i(kx - \omega t)}$ where both the frequency ω and the wavenumber k are *real*. Such perturbations are governed by the classical dispersion relation $(\omega - Uk)^2 = gk \tanh(kH)$, also written using the present non-dimensionalization choices as:

$$D(\omega, k) \equiv (\omega - k)^2 - \frac{k \tanh(kh)}{hFr^2} = 0. \quad (18)$$

When solving for ω as function of a given k , Eq. (18) has two explicit solutions corresponding to the *temporal branches* $\omega = \omega_{\pm}(k; Fr, h) \equiv k \pm \sqrt{k \tanh(kh)/(hFr^2)}$. On the other hand, when solving for k as function of ω , which is more relevant when considering the possible behaviors of a global mode with a given frequency, the solution is not explicit and the problem admits either 2 of 4 solutions depending on the parameters. This is explained in figure 2, considering the case $h = 0.1$.

In the supercritical range ($Fr > 1$), the problem has 2 solutions for all values of ω , as illustrated in plot 2(a) for $Fr = 1.1, \omega = 25$. The group velocity of these wave solutions, which correspond to the slope of the temporal branches $\partial \omega / \partial k$, is positive for both these solutions, indicating that they both carry energy in the downstream direction (in accordance with the definition of a supercritical regime). In the following these two solutions will be termed $k_{D_1}(\omega; Fr, h)$ and $k_{D_2}(\omega; Fr, h)$, the letter D standing for "downstream-propagating".

The situation is more subtle in the subcritical range ($Fr < 1$). In this case, two cases are possible. First, if the frequency is large enough, the situation is identical to the previously discussed one and only two solutions are found (again termed k_{D_1} and k_{D_2} since the corresponding group velocities indicates they

are downstream-propagating). This is exemplified in plot 2(b) for $Fr = 0.3$ and $\omega = 40$. If the frequency is reduced, on the other hand, two additional solutions appear, which both correspond to negative values of k (hence negative phase velocities ω/k). This is exemplified in the same figure for $Fr = 0.3$ and $\omega = 10$. Among the two additional solutions, the first one (corresponding to a long wavelength) is observed to have negative group velocity, and will hence be termed k_{U_1} , the letter U standing for "upstream-propagating". The other solution has positive group velocity and will hence be termed k_{D_3} .

Figure 2(c) indicates the regions corresponding to these three possible cases in the plane (Fr, ω) . In the subcritical range, the border separating 2-solution cases from 4-solution cases is implicitly defined by the two conditions $\omega = \omega_-(k)$; $\partial\omega_-/\partial k = 0$. For instance, for the case $Fr = 0.3$ of plot 2(b) the transition occurs for $\omega \approx 25$.

3.2. Wave energy considerations

In presence of current, the energetic approach to surface wave propagation leads to counterintuitive conclusions linked to the fact that the wave energy density e may become *negative*, due to energy exchanges with the mean current. There are two routes to derive an expression for the wave energy density. The first route, following Cairn's procedure [17], stems from an inspection of the linear dispersion relationship. This approach is straightforward and mathematically elegant but does not reveal much on the underlying physics. Alternatively, one can compute explicitly the wave energy density starting from a weakly nonlinear expansion of the velocity field:

$$\mathbf{u} = U\mathbf{e}_x + \epsilon\nabla\phi + \epsilon^2\nabla\phi_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (19)$$

where ϕ_2 is a second-order correction and ϵ is a small-amplitude parameter. Then, separating the energy into potential and kinetic parts, and integrating the latter over the fluid layer leads to

$$e = \epsilon^2 \left(\underbrace{\frac{\rho g \eta^2}{2} + \int_{-H}^0 \frac{|\nabla\phi|^2}{2} dy}_{e_0} + \underbrace{\int_{-H}^0 U \frac{\partial\phi_2}{\partial x} dy}_{e'_m} \right) \quad (20)$$

In this expression, e_0 corresponds to the energy of the wave expressed in the moving frame, which, considering a wave with modal form $\eta = a \cos(kx - \omega t)$, evaluates to $e_0 = \frac{\rho g a^2}{2}$. The second term e'_m corresponds to the energy due to interaction with the mean flow and can be shown to be evaluate as $e'_m = \frac{U}{\omega/k - U} e_0$. Dropping ϵ 's for simplicity and turning to nondimensional eventually leads to:

$$e = e_0 \frac{\omega}{(\omega - k)}, \quad \text{with } e_0 = \frac{a^2}{2h^2 Fr}. \quad (21)$$

When a current is present, the sign of wave energy density can be either positive or negative. More specifically, the sign of e corresponds to the sign of $(\omega/k)(\omega/k - 1)$, meaning that a wave solution is negative energy wave (neW) whenever its phase velocity (ω/k) is comprised between 0 and 1 (or, in dimensional terms, between 0 and U). Otherwise it is a more

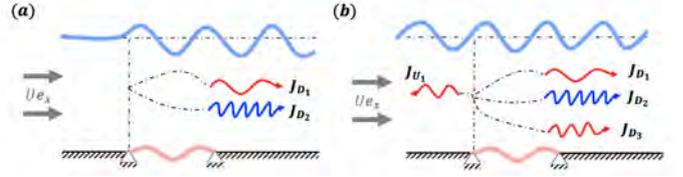


Figure 3: Sketches of the expected far-field behavior of global modes for (a) the two-wave case (i.e. supercritical or subcritical, large frequency), and (b) a four-wave regime (i.e. subcritical, low frequency). In blue the neWs and in red the peWs.

classical positive energy wave (peW) solution. Turning back to the various solutions discussed in the previous paragraph, it turns out that the solution k_{D_2} falls within the neW category, while all other solutions are peWs.

Let us discuss now the energy flux J per unit length in the transverse direction. This quantity can be evaluated by integrating the mechanical power $\mathbf{u} \cdot (p\mathbf{e}_x)$ over a vertical plane and averaging over time, leading to $J = ec_g$. For peWs, the sign of J is the same as the sign of c_g : they radiate energy away in their direction of propagation, i.e. either downstream (for the k_{D_1} and k_{D_3} solutions) or upstream (for the k_{U_1} solution) and thus act as energy sinks. The situation is opposite for the k_{D_2} solution which is a neW. This means that while radiating downstream from the membrane, this wave provides energy to the system, thus acting as an energy source and a possible cause for instability.

From these considerations, one can summarize the far-field behavior of global modes and the conditions for a radiative instability as follows:

- In the supercritical range ($Fr > 1$), the far-field can contain the peW D_1 and the neW D_2 downstream and no waves upstream. In this case the total energy flux transmitted by the system to its surrounding is $J_{D_1} + J_{D_2}$, with $J_{D_1} > 0$ and $J_{D_2} < 0$. A condition for radiative instability is that $|J_{D_2}| > J_{D_1}$, i.e. the energy provided by the neW is larger than the energy radiated by the peW.
- In the subcritical, high-frequency range (cyan region in figure 2c), the situation is identical and the condition for radiative instability remains the same.
- In the subcritical, low-frequency range (white region in figure 2c), the far-field contains three waves downstream, namely the two peWs D_1 and D_3 and the neW D_2 , and a single peW U_1 upstream. In this case the total energy flux transmitted by the system to its surrounding is $J_{D_1} + J_{D_2} + J_{D_3} + J_{U_1}$, with $J_{D_2} < 0$ and all three others positive. A condition for radiative instability is now $|J_{D_2}| > J_{D_1} + J_{D_3} + J_{U_1}$, i.e. the energy provided by the neW is larger than the total energy radiated by the three peWs.

The possibility of radiative instabilities in supercritical conditions ($Fr > 1$) is not a novelty and was indeed the main conclusion of the initial paper by Nemtsov [15]. The interesting result of the present paragraph is that radiative instabilities are

actually also possible in subcritical conditions. This possibility turns out to be linked to the dispersive nature of gravity waves in the finite-depth case, since in the shallow-water case no neW can exist in subcritical cases (the only waves existing in this case being the peWs D_1 and U_1).

3.3. Radiative boundary conditions

In the next section a formulation allowing numerical resolution of the coupled fluid/surface/membrane problem as an eigenvalue problem will be introduced. In the numerical implementation the domain is necessarily truncated to a finite size and it is important to check that the boundary conditions do not induce unphysical behavior such as spurious emission from the boundaries and/or unphysical reflections. This issue is crucial in problems dominated by wave phenomena, such as compressible flows ([18, 19]), naval hydrodynamics ([10, 20]), or electromagnetics ([21, 22]), and various methods exist to achieve this goal. Simplest methods based on a characteristics decomposition, such as the Sommerfeld boundary condition ([23]), are not directly applicable here as the full problem is not hyperbolic. A second class of methods, including the PML method ([22, 24]) and the complex mapping method [25], consist of modifying the spatial derivatives in outer regions so that the waves entering these zones become damped. However, such methods are not applicable if the phase and group velocities of waves have opposite sign, which can happen in the present case. A third class of methods, usually called "sponge methods", consist of introducing an artificial dissipation in the outer zones in order to damp the waves.

The method used here belongs to this latter class. In practice, dissipation is introduced through an artificial viscosity $\mu(x)$ in the dynamic boundary condition at the free surface as previously done in [26]. The boundary condition (13) is changed to

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{hFr^2} \eta - 2\mu(x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad (22)$$

where $\mu(x)$ is zero in the central zone surrounding the membrane and asymptotes to a constant value μ_∞ in the outer zones. Definition of $\mu(x)$ as a smooth function is given in appendix Appendix B.

We demonstrate here that this method effectively allows to ensure that the far-field behavior of global modes is in accordance with the predictions sketched in figure 3. We consider here waves with modal behavior $\eta(x, t) = a \operatorname{Re}(e^{ikx} e^{\lambda t}) \equiv a \operatorname{Re}(e^{i(kx - \omega t)}) e^{\sigma t} e^{-\kappa_i x}$ where $\kappa = k + i\kappa_i$ is a complex wavenumber and $\lambda = \sigma - i\omega$ is a complex eigenvalue. Solving the wave propagation problem in the outer regions with $\mu(x) = \mu_\infty$ leads to a modified dispersion relation which reads

$$(\lambda + i\kappa)^2 + (\lambda + i\kappa)2\mu_\infty\kappa^2 + \frac{\kappa \tanh(\kappa h)}{hFr^2} = 0, \quad (23)$$

which can also be written, using the dispersion relation (18), as

$$D(-i\lambda, \kappa) + 2\mu_\infty\kappa^2(\lambda + i\kappa) = 0. \quad (24)$$

One may thus proceed to a Taylor development of this relation by treating σ , κ_i and the μ_∞ as small parameters. This formally

reads as

$$-i\sigma \frac{\partial D}{\partial \omega} + i\kappa_i \frac{\partial D}{\partial k} + 2i\mu_\infty k^2(k - \omega) = 0, \quad (25)$$

which eventually leads to

$$\kappa_i = (\sigma + \mu_\infty k^2)/c_g. \quad (26)$$

Equation (26) allows to precise the spatial behavior of waves contained in the far-field of global modes and to justify the necessity of the artificial viscosity. Consider, first, amplified modes ($\sigma > 0$) in the absence of artificial viscosity ($\mu_\infty = 0$). Then, the sign of κ_i is the same as the sign of c_g . Accordingly, all waves propagating downwards (i.e. D_1, D_2, D_3 with $c_g > 0$) will be spatially damped downstream (behaving as $e^{-\kappa_i x}$ with $\kappa_i > 0$), while the wave U_1 propagating upstream will be spatially damped upstream (with $\kappa_i < 0$). However, for damped modes ($\sigma < 0$) the sign of κ_i will be inverted so that if nothing is done, the downstream-propagating waves will be obtained upstream and vice-versa. This fact prevents to compute marginal stability curves, a task which requires to accurately solve the eigenvalue problem for both amplified and damped modes. The introduction of artificial dissipation allows to correct this, and if carefully chosen will ensure that all waves solutions are spatially damped in the direction corresponding to their propagation, both for amplified modes and weakly damped modes.

3.4. Coordinate stretching

An inconvenient feature of sponge methods is that they require very large sponge regions in the external parts, typically ten times larger than the domain of physical interest. One solution, as done in [18], is to use a mapping function $x(X)$ which stretches the numerical domain (defined by $X \in [X_{min}, X_{max}]$) to a much larger physical domain $x \in [x_{min}, x_{max}]$. In practice, this method is simply implemented by modifying all spatial derivatives appearing in the equations as follows:

$$\partial/\partial x \equiv (\partial x/\partial X)^{-1} \partial/\partial X.$$

The mapping function $x(X)$ used in the present article is detailed in appendix. Validations of this method will be shown in the result section through comparison of obtained eigenvalues with the literature in the weakly-coupled case, and specifically for solutions involving surface wave radiation.

4. Numerical method

4.1. Weak formulation of the eigenvalue problem

We now describe the numerical method used to solve the full problem defined by eqs. (11- 17) as an eigenvalue problem. For this we assume all quantities to have modal dependance with the form $e^{\lambda t}$ where $\lambda = \sigma - i\omega t$ is a complex eigenvalue. Hence, all temporal derivatives appearing in eqs. (11- 17) will be simply replaced by multiplication by λ .

We introduce a state-vector $\mathbf{q} = [\phi; p; \eta; \xi; \xi_i]$ where the auxiliary unknown $\xi_i = \lambda \xi$ is added to reduce the order of temporal derivatives appearing in (15). To set the problem

in weak form, we introduce an associate set of test functions $\mathbf{q}^* = [\phi^*; p^*; \eta^*; \xi^*; \xi_t^*]$.

The weak formulation of the fluid equations is obtained by multiplying the Laplace (11) and Bernoulli (12) equations by the associated test functions and by integrating on the domain Ω :

$$\forall[\phi^*; p^*], \quad \iint_{\Omega} \phi^* (\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{P}) dv + \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{R}) dv = 0 \quad (27)$$

At the free surface the weak formulation is obtained by multiplying the dynamic boundary condition given by equation (13) by the test function η^* and by integrating on the free surface

$$\forall[\eta^*], \quad \int_S \eta^* (\mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{C}) ds = 0 \quad (28)$$

For the membrane equation the weak formulation is obtained by multiplying the equation (15) by the associated test function and by integrating on the surface of the structure

$$\forall[\xi^*; \xi_t^*], \quad \int_M \xi^* (\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{M}) ds + \int_M \xi_t^* (\xi_t - \lambda\xi) ds = 0 \quad (29)$$

Using Green's formula, one integrates by part the term in Laplacian to take into account the boundary conditions. By using the boundary conditions, the weak formulation of the full problem is written as

$$\left[\begin{aligned} & - \iint_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* dv + \iint_{\Omega} p p^* dv + \int_S \left(\lambda\eta + \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) \phi^* ds \\ & + \int_M \left(\lambda\xi + \frac{\partial\xi}{\partial x} \right) \phi^* ds + \iint_{\Omega} \left(\lambda\phi + \frac{\partial\phi}{\partial x} \right) p^* dv + \frac{1}{\text{Fr}^2} \int_S \eta\eta^* ds \\ & - \int_S p\eta^* ds + 2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \eta^* ds - \frac{1}{U_r^2} \int_M \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \xi_t^* ds \\ & + \lambda \int_M \xi_t \xi_t^* ds + \alpha \int_M p \xi^* ds + \int_M \xi_t \xi_t^* ds - \lambda \int_M \xi \xi_t^* ds = 0. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

By regrouping the unknowns as a fluid part $\mathbf{q}_F = [\phi; p]$, a surface part $\mathbf{q}_S = \eta$, and a membrane part $\mathbf{q}_M = [\xi; \xi_t]$, the problem can be set in a block-matrix form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{F,F} & \mathcal{A}^{S,F} & \mathcal{A}^{S,M} \\ \mathcal{A}^{F,S} & \mathcal{A}^{S,S} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{F,M} & \mathcal{O} & \mathcal{A}^{M,M} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_M \end{pmatrix}}_q = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{B}^{F,F} & \mathcal{B}^{S,F} & \mathcal{B}^{M,F} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{B}^{M,M} \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_M \end{pmatrix}}_q \quad (31)$$

where $\mathcal{A}^{F,F}, \mathcal{A}^{S,F}$, etc... are bilinear operators expressing the couplings between the fluid, surface, and membrane components which are detailed in appendix Appendix A.

4.2. Discretization

The problem is then discretized by projecting the state vector over a basis of finite size. For fluid unknowns $\mathbf{q}_F = [\phi; p]$, a finite-element method is used. The domain is discretized by building an unstructured mesh of triangular cells. The

unknowns ϕ and p are both approximated using piecewise-quadratic (P2) finite elements. The free-surface unknown $\mathbf{q}_S = [\eta]$ is approximated using lineic piecewise-linear (P1) finite elements. On the other hand, the membrane unknowns $\mathbf{q}_M = [\xi; \xi_t]$ are approximated using a Galerkin method, which consists of projecting the function over the basis of eigenfunctions of the membrane in vacuum (defined by $\tilde{\xi}_n(x) = \sin(n\pi x/l)$ with $n = 1, 2, \dots$), very similarly as done by [27] for fluid-structure interactions and by [28] for deformable surface problems.

Generation of the mesh, building of all matricial blocks, and assembly of the full matrix are entirely done using the FreeFem++ finite-element software, and resolution of the eigenvalue problem is done with the shift-invert method using SLEPc library. Monitoring of the computations, loops over parameters and post-processings are done using the StabFem [18] toolbox, which is a set of drivers written in Matlab specifically designed to perform such stability computations.

5. Results and interpretations

Results of the stability problem solution of equation (31) are now presented by showing evolution of the eigenvalue and eigenmodes when parameters $[\text{Fr}, \alpha, U_r, h]$ are varied. Focus is first placed on the weakly-coupled problem corresponding to small values of α for which comparisons with analytical results by [15] and [16] can be performed, and the origin of the obtained instabilities (radiative instabilities) investigated in greater depth thanks to a detailed description of eigensolutions. The strongly coupled case (finite values of α) is then addressed by first focusing on a subcritical regime with $\text{Fr} = 0.5$, for which static and dynamic fluid-structure instabilities of a membrane under lateral confinement are qualitatively recovered. A supercritical case with $\text{Fr} = 3$ is subsequently investigated and shown to be the root of both radiative instabilities, the above mentioned fluid-structure interaction instabilities. This gives rise to intricate stability maps which are explored and located in the parameter space (U_r, Fr) .

5.1. Weakly-coupled limit $\alpha \ll 1$

The weakly-coupled limit corresponds to small values of mass number ($\alpha \ll 1$), for which only a very small fluid-induced correction to the structural modes in vacuo is expected. In this limit, and further assuming shallow water approximation, Nemtsov [15] investigated analytically the excitation of a membrane due to emission of gravity surface waves, and obtained dimensionless expressions for the growth rate and frequency which respectively read

$$\omega = \frac{n\pi}{U_r}, \quad (32)$$

$$\sigma = \frac{U_r^4 \alpha h}{2\pi^2 n^2} \left[\frac{(\text{Fr} - 1)^2 \left[1 - (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi \text{Fr}}{U_r(\text{Fr} - 1)}\right) \right]}{(\text{Fr}^2 - U_r^2(\text{Fr} - 1)^2)^2} - \frac{(\text{Fr} + 1)^2 \left[1 - (-1)^n \cos\left(\frac{n\pi \text{Fr}}{U_r(\text{Fr} + 1)}\right) \right]}{(\text{Fr}^2 - U_r^2(\text{Fr} + 1)^2)^2} \right]. \quad (33)$$

with n a strictly positive integer corresponding to the membrane mode numbering. Note that in this weakly-coupled limit, the frequency given by equation (32) corresponds to the frequency of the n -th mode of the membrane *in vacuo* i.e. in the absence of fluid. In addition, equation for the growth rate (33) is composed of two terms of opposite signs, an interesting feature that will be further commented in appendix Appendix C along with a more detailed analysis of Nemtsov equation.

5.1.1. Validation and mode structures

Recently, a generalization of the Nemtsov problem for finite depth cases has been performed by [16] using a numerical treatment valid in the weakly-coupled approximation. In this section, results of the method presented in section 4 will be compared to shallow water results by [15] and [16] for validation of our method in weakly-coupled cases.

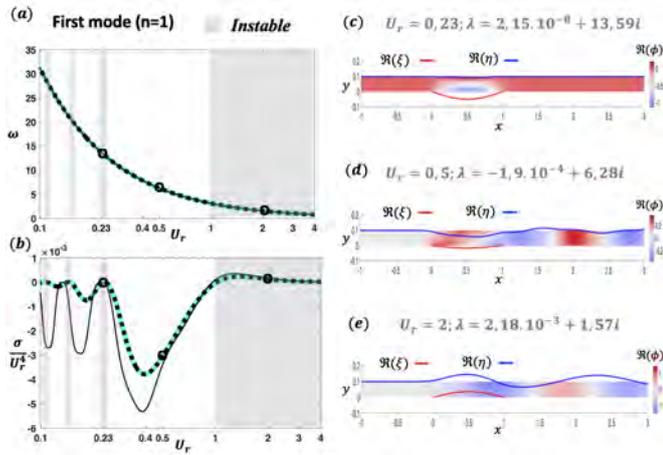


Figure 4: Radiative instabilities in the weakly-coupled case. First mode for $\alpha = 10^{-2}$, $h = 0.1$, and $Fr = 2$: (left top) Frequency as a function of the reduced velocity U_r (left bottom) Growth rate as a function of the reduced velocity U_r ; The gray regions is an illustration of the unstable ranges of the finite depth results; (right) Flow structure given by the velocity potential in superposition with the free surface and the membrane deformations for (a) $U_r = 0.23$, (b) $U_r = 0.5$, and (c) $U_r = 2$.

Evolution of the normalized frequency and growth rate as function of U_r are plotted on figures 4 (a)-(b) (mode 1, i.e. $n = 1$) and 5 (a)-(b) (mode 2, i.e. $n = 2$) in a weakly-coupled case corresponding to $\alpha = 10^{-2}$, $h = 0.1$, and $Fr = 2$. The present results are shown as cyan plain thick lines with gray areas highlighting unstable regions (i.e. $\sigma > 0$), and are compared to [16] (dashed black line) and [15] (plain black line). All studies show a good match for frequency results, as expected given the small value of mass ratio ($\alpha = 10^{-2}$) which leads to frequency corresponding to the structural mode in vacuo, whatever the fluid model considered (shallow water as in [15] or finite depth as for the present results and [16]). Regarding the evolution of the growth rate, oscillations switching from stable ($\sigma < 0$) to unstable ($\sigma > 0$) are obtained for all studies which indicates that all methods are in qualitative agreement. Quantitatively, the present results and those by [16], both including finite depth effects, are in perfect agreement, but the shallow water method by [15] fails to reproduce the exact evolution of

the growth rate and stability thresholds in the present case corresponding to $h = 0.1$. The above mentioned discrepancy is striking for small values of U_r and is attributed to the presence of short gravity waves in the mode structure, as will be shown in what follows, which makes the shallow water theory inaccurate.

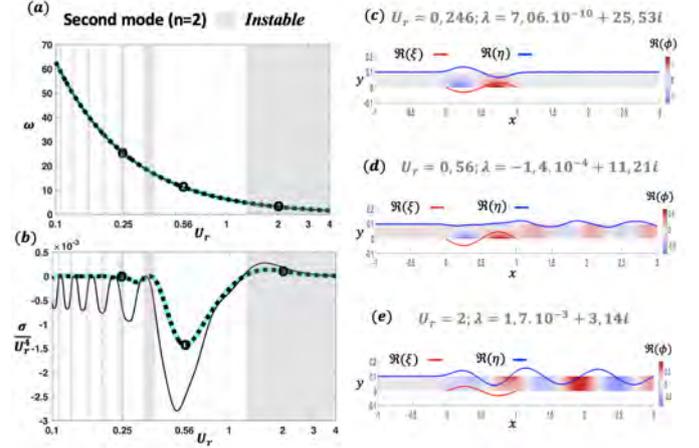


Figure 5: Radiative instabilities in the weakly-coupled case. Second mode for $\alpha = 10^{-2}$, $h = 0.1$, and $Fr = 2$: (left top) Frequency as a function of the reduced velocity U_r (left bottom) Growth rate as a function of the reduced velocity U_r ; The gray regions is an illustration of the unstable ranges of the finite depth results; (right) Flow structure given by the velocity potential in superposition with the free surface and the membrane deformations for (a) $U_r = 0.246$, (b) $U_r = 0.56$, and (c) $U_r = 2$.

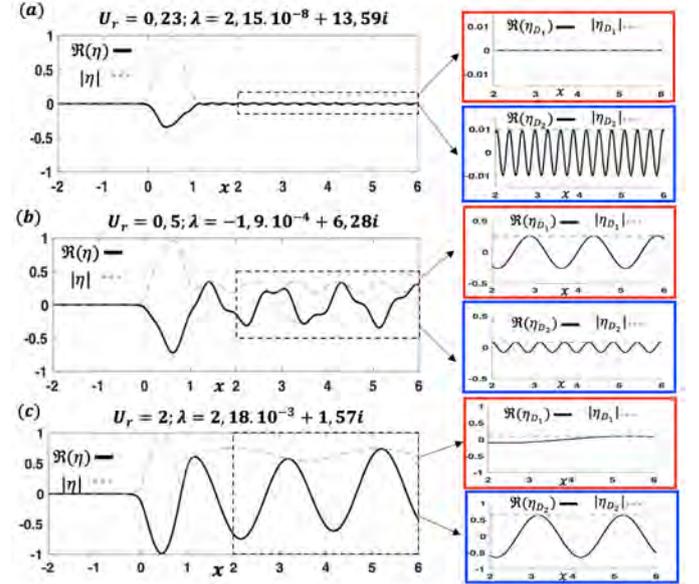


Figure 6: Details of the free surface deformation structure for $n = 1$, $\alpha = 10^{-2}$, $h = 0.1$, $Fr = 2$, and (a) $U_r = 0.23$, (b) $U_r = 0.5$ and (c) $U_r = 2$.

The origin of those different unstable regions are investigated in greater depth in figures 4 (mode 1) and 5 (mode 2) where mode structures corresponding to three values of U_r are shown. For the first structural mode ($n = 1$), figures 4 (c), (d) and (e) show the free surface and membrane displacements, as

well as contours of velocity potential, corresponding respectively to $U_r = 0.23$ (unstable), $U_r = 0.5$ (stable) and $U_r = 2$ (unstable). The mode structures shown on figures 4 (d) and (e) clearly reveal that vibrations of the first structural mode are associated to the presence of a wake at the free surface, and this is also the case (but much more subtle) for figure 4 (c) as will be seen on figure 6. The structure of the free surface which remains unperturbed upstream of the membrane is in agreement with the super-critical value of the Froude number considered here ($Fr = 2$), and means that the incoming uniform flow is too strong for gravity waves to propagate against the current. The obtained structures also confirm the probable cause of instability highlighted by [15] and [16], namely that the present instabilities are triggered by surface wave propagation and therefore correspond to radiative instabilities.

The major difference between the stable structure (figure 4 (b)) and the unstable one for which the wake is clearly visible (figure 4 (c)) lies in the presence of at least two wave length in the wake of the stable case while the wake of the unstable case appears to be monochromatic.

In order to further understand the instability mechanism, this track is more carefully investigated in figure 6 (mode 1 only) in which the free surface elevation for the points (a), (b) and (c) in figure (4) are plotted in details.

From the analysis of the dispersion relation investigated in section 3.1, in the present weakly-coupled limit and for a supercritical case, we expect only two possible wave length to appear in the wake of the membrane, namely D_1 and D_2 . For this reason, the far-field wake structures of modes presented on figure 6 are investigated further by looking at a superposition of the two possible waves, that is $\eta = \eta_{D_1} + \eta_{D_2}$, and we focus in particular on the amplitude ratio between both waves. As discussed in section 3.1 we recall that waves D_1 and D_2 are respectively the positive energy wave (peW) and the negative energy wave (neW), and that peW wave carry energy far from the structure when it radiates, contrary to the neW wave who carry negative energy far away when radiating outwards, giving energy to the system. A comparison between energy fluxes of the two kinds of waves should therefore allow to analyze the overall effect of surface waves radiation.

For the stable case shown on figure 6 (b), we obtain $|\eta_{D_1}| = 0.26$ and $|\eta_{D_2}| = 0.08$, which leads to $|J_{\eta_{D_1}}|/|J_{\eta_{D_2}}| = 37.5 \gg 1$. In this case, the long peW wave clearly dominates, and the overall effect of wave radiation is to damp the system: even if neWs are present and tend to destabilize the flow, their effect is negligible compared to stabilization by emission of peWs.

Let us now explore the free surface wake structure of unstable cases corresponding to figure (6) (a) and (c). For $U_r = 0.23$ (figure 6 (a)), a weak amplitude neW is detected in the wake and the peW T_1 is almost absent (amplitude close to zero) leading to $|J_{\eta_{D_1}}|/|J_{\eta_{D_2}}| \ll 1$. Similarly for $U_r = 2$ (figure 6 (c)) we obtain $|\eta_{D_1}| = 0.1$ and $|\eta_{D_2}| = 0.65$ leading to $|J_{\eta_{D_1}}|/|J_{\eta_{D_2}}| = 0.25 \ll 1$. For parameters corresponding to those two cases, neWs are found to dominate which leads to a destabilizing effect of the flow. As no damping is present in the idealized case under study (except from the damping induced by radiation of peWs which is not strong enough) this directly leads to positive growth rate

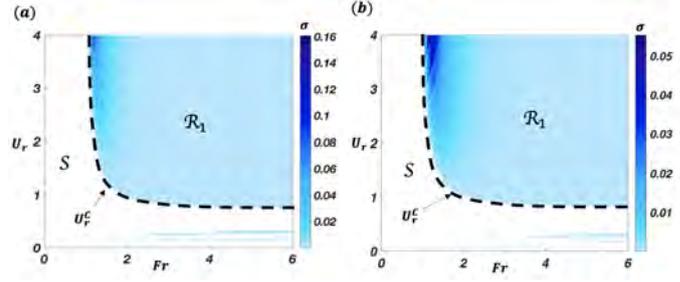


Figure 7: Stability maps in the parameter plane (U_r, Fr) associated to the first structural mode ($n = 1$) for $\alpha = 10^{-2}$ and $h = 0.1$. (a) Shallow water results from [15], equation (33), (b) Present results. Color maps indicate positive values of the growth rate, white region corresponds to negative growth rate (stable region S), and the main unstable is termed \mathcal{R}_1 .

and the flow is unstable.

To summarize, in the super-critical regime ($Fr > 1$), and for small values of α corresponding to weakly-coupled cases, we observe a competition between peWs (long free surface waves) and neWs (short free surface waves). Depending on the parameters, neWs or peWs dominates in the free surface wake and this directly affects the stability of the configuration in the present non-dissipative case. Observed instabilities are therefore interpreted as radiative instabilities and occur when neWs dominate, as first discussed by [15] in the shallow water approximation, and recovered here in the finite depth regime through an analysis of some mode structures. It remains to map instabilities when Fr is varied and understand what governs the selection of peW or neW depending on the parameters.

5.1.2. Stability maps

Figure 7 corresponds to stability maps obtained in the parameter plane (Fr, U_r), for $n = 1$, $\alpha = 10^{-2}$ and $h = 0.1$, in the shallow-water limit from Nemtsov equation (33) (figure 7 (a)), and with the present method (figure 7 (b)). Contours of positive growth rate are represented, and white areas correspond to stable cases, denoted by S . Again, a good qualitative agreement is observed between the two methods, which will allow us to restrict to the simpler shallow-water limit in the description of the instability mechanism proposed in appendix Appendix C. Instabilities are only obtained for super-critical cases, i.e. $Fr > 1$, and one may clearly distinct a large unstable area which includes the largest growth rates and appears above a critical value of reduced velocity called U_r^c (\mathcal{R}_1 area on the figure 7). Additional instabilities are also present for small values of U_r and characterized by a very weak growth rate and a lot of narrow unstable islands. Those instability stripes correspond to unstable areas already observed on figures 4 and 5 small values of Fr . Both the large unstable area \mathcal{R}_1 and thin unstable islands correspond to radiative instabilities discussed previously, and detailed in [15, 16].

5.1.3. Effect of a weak structural damping

In the above discussion it is clear that a large numbers of unstable zones are found, but most instabilities correspond to very

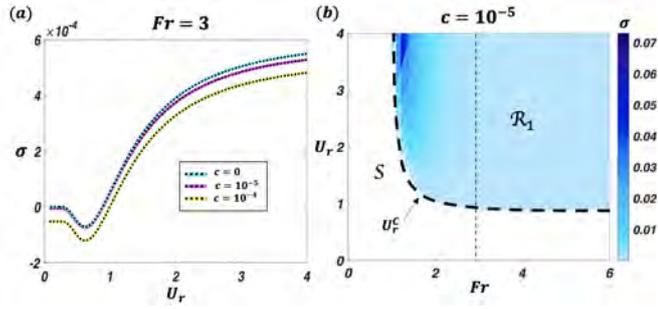


Figure 8: Damping effect on the stability for $n = 1$, $\alpha = 10^{-2}$ and $h = 0.1$. (a) Growth rates as function of U_r for $Fr = 3$ and $c = [0, 10^{-5}, 10^{-4}]$, (b) Stability maps in the parameter plane (U_r, Fr) for $c = 10^{-5}$, the dashed-line corresponds to the critical reduced velocity U_r^c .

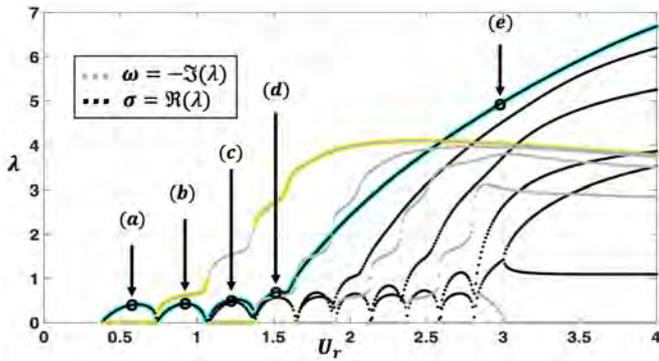


Figure 9: Frequencies (gray) and growth rates (black) of unstable modes as function of U_r obtained in a sub-critical regime ($Fr = 0.5$), for a strongly-coupled case ($\alpha = 5$) and for $h = 0.1$. Cyan curve indicates the most unstable mode and the yellow curve its corresponding frequency. Mode structures corresponding to positions (a), (b), (c), (d) and (e) are shown on figure 10.

weak growth rates and are expected to be damped as soon as a small amount of dissipation is present in the system. In order to arbitrarily select strongest instabilities and clarify the stability maps corresponding to radiative instabilities, we therefore introduce a dissipation term in the membrane equation 15 which is now replaced by

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + c \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{1}{U_r^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\alpha p, \quad \text{at } y = -h, x \in [0, 1], \quad (34)$$

with c a non-dimensional internal dissipation parameter. Figure 8 shows the same results when some dissipation is included in the equation of the membrane for $c = 10^{-5}$.

It can be seen that the weakest instabilities obtained previously for small values of U_r are now stabilized. This means that a very weak damping kills these instabilities, and for each structural mode, focus will be placed on the main radiative instability for the remaining of the paper. Under this simplification, radiative instability associated to structural mode n will be called \mathcal{R}_n in the following. The objective here is to simplify terminologies for the strongly coupled case that will be much more intricate as described in the following section.

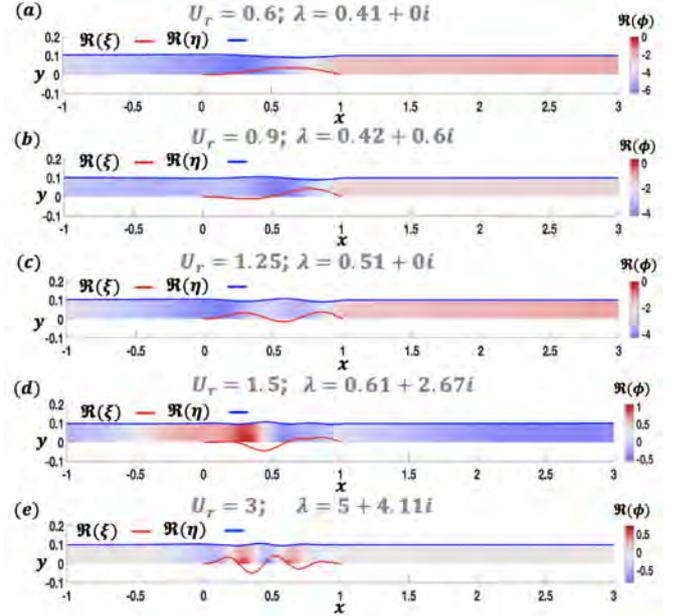


Figure 10: Mode structures corresponding to hollow circles on figure 9 for (a) $U_r = 0.6$, (b) $U_r = 0.9$, (c) $U_r = 1.25$, (d) $U_r = 1.5$ and (e) $U_r = 3$.

5.2. Strongly-coupled problem $\alpha = O(1)$

In this section we focus on the fully-coupled problem corresponding to finite values of α . Contrary to the previous small- α limit, structural modes cannot be treated separately and may interact under the action of fluid loads. For $h = 0.1$ as in the previous case, we now consider that $\alpha = 5$, and investigate evolution of solutions with U_r for two values of Froude number, one sub-critical ($Fr = 0.5$) and one super-critical ($Fr = 3$).

5.2.1. Sub-critical regime $Fr = 0.5$

Figure 9 corresponds to complex eigenfrequencies in the sub-critical case for $Fr = 0.5$ as function of U_r . Only unstable solutions are plotted, and, for instance, all the neutral solutions expected for small values of U_r are not represented. Grey lines correspond to frequencies of the computed unstable modes, and black lines to their growth rate. Additionally the most unstable mode is underlined in cyan and corresponds to frequency underlined in yellow. It is clear from figure 9 that all obtained solutions are stable/neutral for reduced velocities smaller than $U_r = 0.4$. Above this value, a static instability is found (positive growth rate and $\omega = 0$), and mainly implies structural mode $n = 1$, as observed from the structure of the membrane on figure 10 (a) for $U_r = 0.6$. At $U_r \approx 0.75$ a dynamic instability is then obtained corresponding to the interaction of structural modes 1 and 2. The structure of this dynamic instability is shown on figure 10 (b). The latter dynamic instability corresponds to the classical coupled-mode flutter extensively studied in fluid-structure interaction problems. For larger values of U_r other instabilities (both static and dynamic) are obtained and involve more complex structural modes as seen from figures 10 (c), (d), (e).

As observed from mode structures, obtained instabilities of this sub-critical case induce small deformations of the free

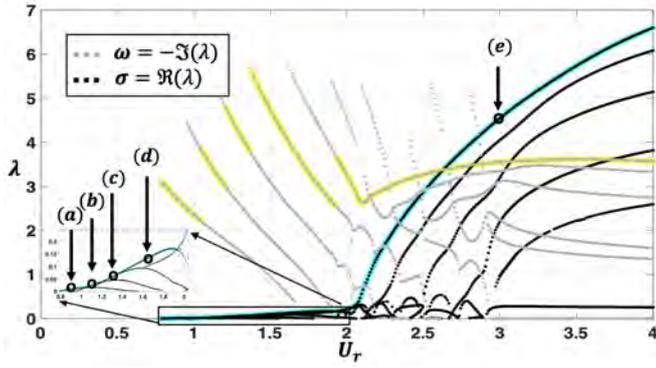


Figure 11: Typical solutions obtained in a super-critical regime and for fully-coupled case. Frequencies (gray) and growth rates (black) of unstable modes as function of U_r for $\alpha = 5$, $Fr = 3$ and $h = 0.1$. Cyan curve indicates the most unstable mode and the yellow curve its corresponding frequency. Mode structures corresponding to positions (a), (b), (c), (d) and (e) are shown on figure 12.

surface at the proximity of the membrane, but no significant free surface waves are generated upstream or downstream of the membrane.

Overall qualitative agreement is obtained with fluid-structure instabilities corresponding to the interaction of the membrane with the uniform current. Those instabilities are indeed expected to be recovered in the small- Fr limit for which the free surface behaves as a wall. Indeed the stability of a flexible structure in a channel flow performed by [7] shows that both dynamics/static instabilities are obtained, depending on the end conditions and reduced velocity.

We conclude that in sub-critical cases, results qualitatively correspond to those obtained if the free surface is replaced by a wall, as predicted by the infinite membrane model in [13], and the instability mechanisms are not related to the presence of the free surface. In this case, the proximity of the free surface, as compared to the unconfined configuration ($h \rightarrow \infty$) is therefore observed to destabilize the configuration as typically obtained in other confined configurations [7, 13].

5.2.2. Super-critical regime $Fr = 3$

We now focus on the super-critical regime for $Fr = 3$. Results are plotted on figure 11 where dimensionless frequencies corresponding to unstable modes are plotted as function of U_r . No instabilities are found for small values of $U_r < 0.8$ until several unstable areas with relatively small growth rates are obtained in the range $0.8 < U_r < 2$ (inset of figure 11). In this range several unstable modes successively emerge, and resemble the four first structural modes as seen by the membrane displacement shown on figure 12 (a), (b), (c), (d). Additionally, these unstable modes are associated to a wake pattern with free surface amplitude of the same order of the membrane deformation (figures 12 (a), (b), (c) and (d)). Those instabilities are therefore recognized as radiative instabilities due to neWs emission detailed in the weakly-coupled case in section 5.1. For larger values of U_r , i.e. $U_r > 2$, several mode interactions are observed leading to static and dynamic

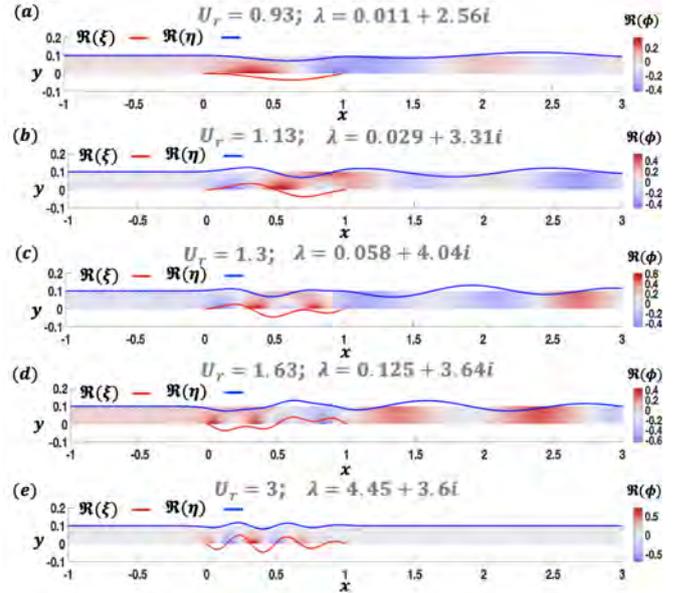


Figure 12: Mode structures corresponding to hollow circles on figures 11 for (a) $U_r = 0.93$, (b) $U_r = 1.13$, (c) $U_r = 1.3$, (d) $U_r = 1.63$ and (e) $U_r = 3$.

instabilities. In this range, the growth rate seems however dominated by a dynamic instability whose structure is plotted on figure 12 (e) and this instability will be termed flutter in the following (note the perfectly flat free surface in the wake meaning). Radiative instabilities may persist in this range, but have a much smaller growth rate than flutter instability.

5.2.3. Stability maps

In the following, modes with the larger growth rate are identified for given parameter values (as underlined in cyan/yellow on figures 9 and 11), which allows to map occurrence of the different instabilities in the parameter space. Following this procedure, figure 13 corresponds to a map of radiative instabilities (\mathcal{R}_n), flutter instabilities (\mathcal{F}) and static instabilities (\mathcal{S}_t) in the parameter plane $Fr-U_r$. Contours of frequencies are plotted on figure 13 (a) and growth rates are reported on figure 13 (b).

Two distinct regimes are clearly identified on figure 13 depending if Fr corresponds to sub-critical or super-critical values. The first regime qualitatively corresponds to the case explored on figures (9) and (10). This regime is also qualitatively analogous to the case where the Froude number is set to zero (rigid wall), for which static/flutter instabilities appear above a reduced velocity threshold, and only flutter remains for large reduced velocities.

$Fr > 1$ cases are qualitatively different as a new kind of instabilities arise for low values of U_r , namely radiative instabilities, and flutter dominates for large values of U_r . Different radiative instabilities \mathcal{R}_n arise and involve a structural mode with a more complex structure when U_r is increased. For $\alpha = 5$ and $h = 0.1$ radiative instabilities involving structural mode from 1 to 6 are obtained.

Interestingly, the stability map shown on figure 13(b) resembles on several aspects the map obtained for an infinite membrane

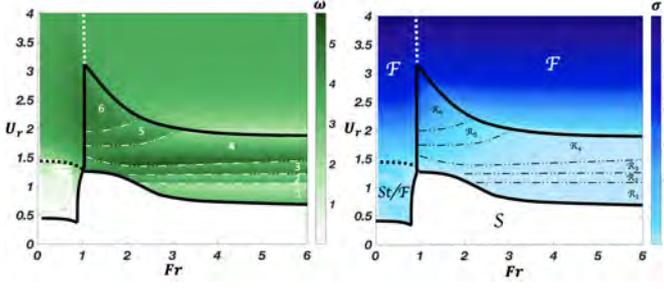


Figure 13: Stability maps in the (U_r, Fr) -plane (left) the color map indicate the values of the frequency (right) the color map indicate the values of the growth rate for $\alpha = 5$ and $h = 0.1$.

([13] figure 5). Main qualitative differences lie in the fact that infinite membrane case doesn't include membrane end conditions preventing any static instabilities to appear. Additionally, radiative instabilities are not formally obtained, but its signature in the infinite membrane case corresponds to a membrane/free surface resonance in a narrow region of the parameter space (called \mathcal{R} in [13]).

The main flutter zones appearing for large values of U_r (in both low and large Fr regimes) qualitatively correspond to infinite case predictions. In [13] flutter obtained for small or large values of Fr is respectively called *Rigidly-confined flutter* and *softly-confined flutter*, where the former corresponds to a destabilization compared to non-confinement case, and the latter to a stabilization effect. This is due to the presence of the free surface which behaves differently in both cases: only very small deformations (e.g. figure 10 (e) for $Fr = 0.5$) for $Fr < 1$ which essentially behaves as a wall, and deformations of the order of the membrane for $Fr > 1$ (e.g. figure 12 (e) for $Fr = 3$).

6. Conclusion

In this article, the stability of a tensioned membrane in a uniform flow and parallel to the free surface, the so-called *Nemtsov membrane*, has been addressed. The proposed method consists to linearize equation and formulate a generalized eigenvalue problem, which is solved using the finite element method via FreeFem++ [29] and StabFem [18]. The present method allows to consider fully coupled cases and therefore generalize studies by [15, 16]. Our study can also be viewed as an extension of [13, 14] to finite length membranes.

In the weakly coupled case, we provide new insight regarding the obtained radiative instability resulting as a competition between neWs and peWs which is detailed in finite depth cases through an interpretation of mode structures. Strongly-coupled cases finally show the connection between radiative instabilities and classical fluid-structure instabilities present in the absence of free surface, namely flutter and static instability. Those instabilities are classified upon mode structures, and the most unstable modes are mapped in the parameter plan (Fr, U_r).

Regarding radiative instabilities, our results confirm and extend those by [15, 16] presented in the weakly coupled limit, namely that instability arise when neWs are generated and outbalance the stabilizing effect of possible peWs. Radiative instability is

therefore theoretically possible whenever neWs are present in the system. It is interesting to note that in finite depth cases, neWs exist also for $Fr < 1$, which directly rises the question of a possible radiative instability for subcritical cases. In this case neWs are in competition with 3 peWs, two downstream and one upstream (as detailed in section 3), whose later waves stabilize the system by radiation. However, the mechanism leading to radiative instabilities, namely destabilization due to neWs excitation, is still possible and radiative instabilities for $Fr < 1$ in very specific ranges of parameters may theoretically occur. This has not been observed neither in [15, 16] (whose approach are either performed in the shallow water limite, or limited to $Fr > 1$) nor in the above results, and must be confirmed by performing additional calculations.

Finally, we believe that our work is of fundamental interest as it presents an apparently simple configuration that undergoes a large number of instabilities, either classical fluid-structure instabilities (flutter and divergence) that are affected by the presence of the free surface, but also radiative instabilities whose mechanism is directly related to the presence of the free surface. From the applicational view point, this configuration, may also deserve attention as such tensioned membrane may potentially serve as a minimalist design for futur hybrid wave-current energy harvesters by combining several working principles [9, 10].

Appendix A. Matricial form details

Submatrices corresponding to the matricial form (31) are detailed in the following

$$\mathcal{A}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\phi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{\phi p} & \mathcal{A}^{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\iint_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\phi^* dv & 0 \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial x} p^* dv & \iint_{\Omega} pp^* dv \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathcal{A}^{S,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\eta\phi} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S \frac{\partial\eta}{\partial x} \phi^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{A}^{M,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\xi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_M \frac{\partial\xi}{\partial x} \phi^* ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{A}^{F,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\phi\eta} & \mathcal{A}^{p\eta} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \eta^* ds & -\int_S p\eta^* ds \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{A}^{S,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\eta\eta} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Fr^2} \int_S \eta\eta^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{A}^{F,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{A}^{p\xi} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \int_M p\xi^* ds \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{A}^{M,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\xi\xi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{\xi_i\xi_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{U_r^2} \int_M \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \xi^* ds & 0 \\ 0 & \int_M \xi_i \xi_i^* ds \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{B}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{B}^{\phi p} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \iint_{\Omega} \phi p^* dv & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{B}^{S,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{\eta\phi} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_S \eta\phi^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{B}^{M,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{\xi\phi} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_M \xi\phi^* ds & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{B}^{M,M} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{B}^{\xi_i\xi_i} \\ \mathcal{B}^{\xi\xi_i} & \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \int_M \xi_i \xi_i^* ds \\ \int_M \xi \xi_i^* ds & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

Appendix B. Damping zone implementation

Appendix B.1. Viscosity repartition

In this potential problem, a viscous term can be introduced in the dynamic boundary condition on the free surface. It leads to equation (22), where viscosity is defined as follows

$$\mu(x) = \begin{cases} \gamma_\mu \tanh\left(\left(\frac{x-x_\mu^n}{L_\mu}\right)^2\right) & \text{if } x < x_\mu^n \\ 0 & \text{if } x_\mu^n \leq x \leq x_\mu^p \\ \gamma_\mu \tanh\left(\left(\frac{x-x_\mu^p}{L_\mu}\right)^2\right) & \text{if } x > x_\mu^p \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$\mu(x)$ is therefore equal to zero in the physical region surrounding the membrane and continuously tends to γ_μ in the far-field after a transition zone of typical length L_μ . In figure (B.14), $\mu(x)$ is plotted as a function of x for $\gamma_\mu = 1$, $x_\mu^n = -5$ and $x_\mu^p = 6$ for different values of L_μ . $L_\mu \rightarrow +\infty$ corresponds to the limit case of a constant viscosity equal to zero in the calculation domain. For $L_\mu = 100$ the transition zone invades the whole domain. Finally, for $L_\mu = 20$ we see a smooth transition from 0 to 1 in a short range values of x .

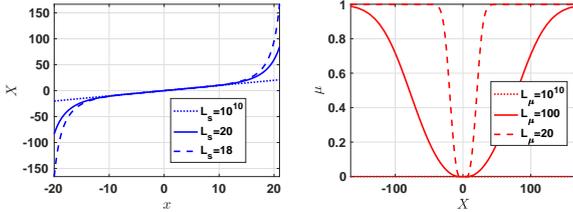


Figure B.14: (left) The stretching function X as a function x for $L_s = 10^{10}$, $L_s = 20$ and $L_s = 18$. (right) The artificial viscosity μ as a function of X (for $L_s = 18$) for $L_\mu = 10^{10}$, $L_\mu = 100$ and $L_\mu = 20$.

Appendix B.2. Domain stretching implementation

The mapping function is defined as

$$X(x) = \begin{cases} x_s^n + \frac{x-x_s^n}{\left(1-\left(\frac{x-x_s^n}{L_s}\right)^2\right)^2} & \text{if } x < x_s^n \\ x & \text{if } x_s^n \leq x \leq x_s^p \\ x_s^p + \frac{x-x_s^p}{\left(1-\left(\frac{x-x_s^p}{L_s}\right)^2\right)^2} & \text{if } x > x_s^p \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

This function leaves the x coordinate unchanged in the region $x_s^n \leq x \leq x_s^p$ which is the physical region, but it stretches the limits of the domain $x < x_s^n$ and $x > x_s^p$. $X(x)$ is characterized by the parameter L_s , that controls the stretching effect associated with the coordinate x .

In figure (B.14), we plotted $X(x)$ as a function of x for $x_s^n = -5$ and $x_s^p = 6$ for different values of L_s . When $L_s \rightarrow +\infty$ we are in the limit case where there is no stretching effect. For $L_s = 18$ for example, we have a smooth stretching where the calculation domain is enlarged from $[-20, 21]$ to $[-165, 166]$.

Appendix C. Analysis of Nemtsov equation

The amplification rate predicted by Nemtsov can be written in the following (dimensional) way :

$$\sigma = \frac{\rho_m g c_{g,0} L}{2n^2 \pi^2 \rho c_m^4} \left\{ \frac{c_2^2 [1 - (-1)^n \cos(2\pi\Lambda_2/L)]}{(1 - (c_m/c_2)^2)^2} - \frac{c_1^2 [1 - (-1)^n \cos(2\pi\Lambda_1/L)]}{(1 - (c_m/c_1)^2)^2} \right\} \quad (\text{C.1})$$

where $c_{1,2} = U \pm c_{g,0} \equiv 1 \pm Fr$ are the velocities associated to the peW D_1 and the neW D_2 , and $\Lambda_{1,2} = \frac{2\pi c_{1,2}}{\omega}$ the corresponding wavelengths. Note that in this expression one could anticipate a singularity when $c_{1,2} = c_m$ since the denominators appearing in both terms vanish. This is not the case, since in such cases the numerators also vanish, so that the function is regular.

From this formula one can predict the following things :

- The coupling with the peW D_1 (resp. with the neW D_2) is maximal whenever $L/(2\Lambda_{1,2})$ and n have opposite parity. In nondimensional terms this property reads

$$\frac{n\pi Fr}{U_r(1 \pm Fr)} = n + 2p + 1, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (\text{C.2})$$

with positive sign for the peW D_1 and negative sign for the neW D_2 . Physically this condition means that the number of half-wavelength spanning the length of the membrane, namely $n = 2L/\Lambda_m$ for the membrane wave and $2L/\Lambda_{1,2}$ for the surface wave, have opposite parities (i.e. one is even, the other is odd).

- The coupling with the peW D_1 (resp. with the neW D_2) disappears whenever $L/(2\Lambda_{1,2})$ and n have similar parity, except if $c_{1,2} = c_m$ (a case which would otherwise fulfill the property). In nondimensional terms this property reads

$$\frac{n\pi Fr}{U_r(1 \pm Fr)} = n + 2p, \quad p \in \mathbb{Z}^*. \quad (\text{C.3})$$

Physically this condition means that coupling disappears whenever the number of half-wavelength spanning the length of the membrane have same parities, but are not identical (which happens in the special case $c_{1,2} = c_m$ corresponding to $p = 0$).

Figures C.15 and C.16 display the Nemtsov growth rate for $n = 1$ and $n = 4$, respectively. The figures also display by thin lines the location where the maximum coupling condition C.2 is verified, and by dashed lines location where the no-coupling condition C.3 is verified, for each of the gravity waves (black lines corresponding to the peW D_1 and red lines to the neW D_2). Not surprisingly, the instability regions tend to cluster along either the black, dotted lines (where the stabilizing coupling with the peW vanishes) and along the red, dashed lines (where the destabilising coupling with the neW is maximal), with largest values found at the intersections of these lines. The figure also displays the location verifying $c_{1,2} = c_m$, namely

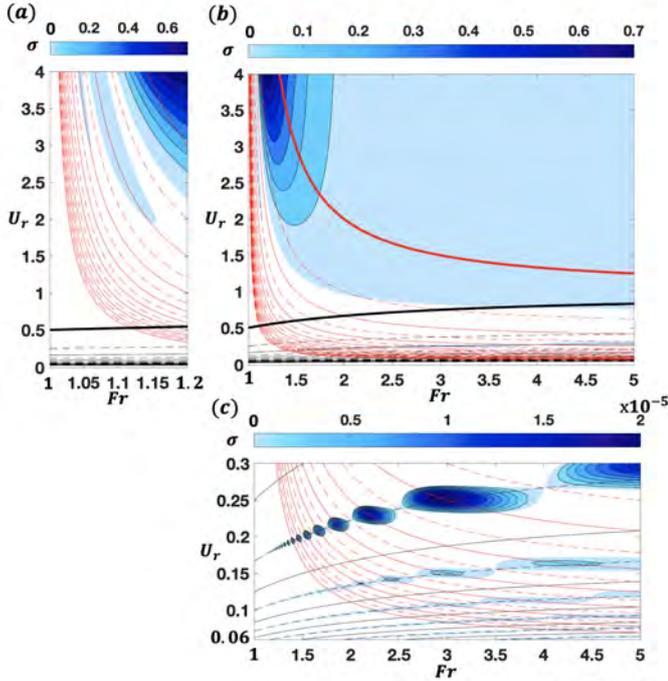


Figure C.15: Amplification rate of the radiative instability associated to the $n = 1$ structural mode according to Nemtsov. (a) zoom in the small- Fr region (b) large parametric range ; (c) zoom in the small- U_r region.

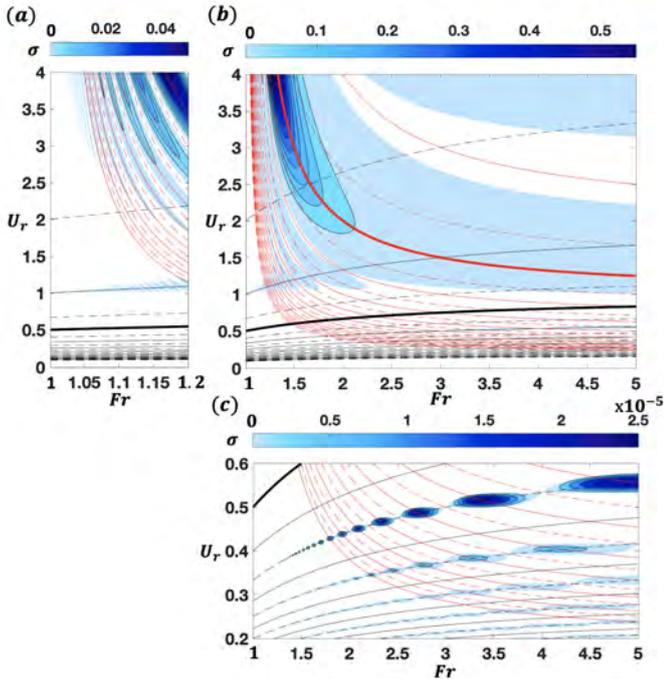


Figure C.16: Amplification rate of the radiative instability associated to the $n = 4$ structural mode according to Nemtsov. (a) zoom in the small- Fr region (b) large parametric range ; (c) zoom in the small- U_r region.

$U_r = Fr/(1 \pm Fr)$, corresponding to "strong coupling" with thick lines and same colors. The situation with $c_1 = c_m$ corresponding to strong coupling with the peW wave (black thick line), on the other hand, lies mostly in a region where no radiative instability occur.

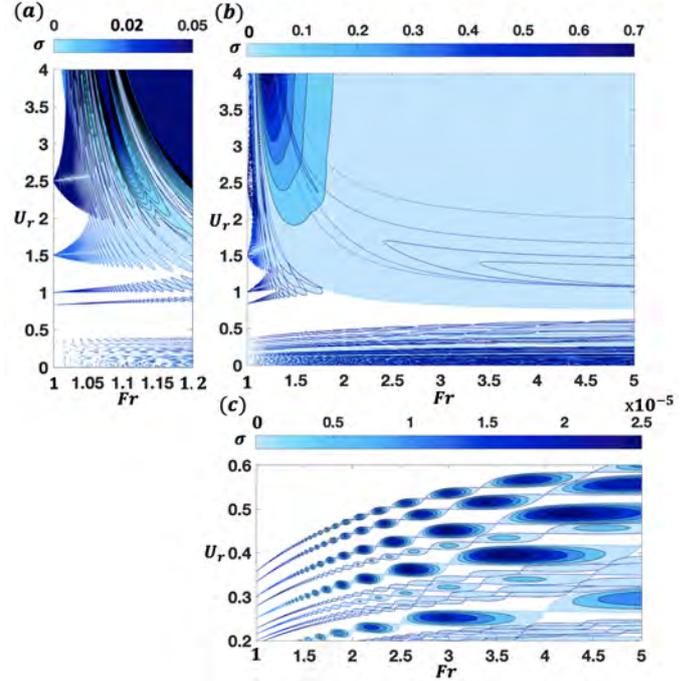


Figure C.17: Amplification rate of the radiative instability associated to the most amplified structural mode among $n = 1$ to $n = 5$ according to Nemtsov. (a) zoom in the small- Fr region (b) large parametric range ; (c) zoom in the small- U_r region. The colored lines indicate the index n of the most destabilized structural mode, from $n = 1$ (dark blue), to $n = 5$ (light blue).

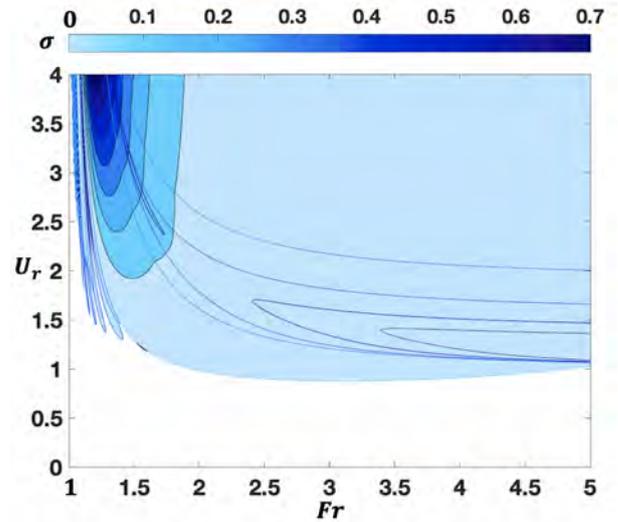


Figure C.18: Same as previous figure but with inclusion of a small damping.

Figure C.17 superposes the growth rates of $n = 1$ to $n = 5$. It turns out that outside the central band centered along the condition of "strong resonance" with the neW, the amplification rates are very small, and most likely should vanish in a situation including a small amount of dissipation. To verify this we add

a small amount of structural damping to the present result. Namely, the growth rate predicted by Nemtsov is modified by adding a small damping d to the membrane equation. The corresponding damping rate is constant : $\sigma_d \approx -\frac{d}{2\rho_m}$. Hence we repeat the results of C.17 by subtracting a very small damping rate, namely 10^{-3} . This is presented in figure C.18. As expected, almost all instability tongues are filtered.

References

- [1] M. J. Shelley, J. Zhang, Flapping and bending bodies interacting with fluid flows, *Annual Review of Fluid Mechanics* 43 (2011) 449–465.
- [2] C. Eloy, C. Souilliez, L. Schouveiler, Flutter of a rectangular plate, *Journal of Fluids and Structures* 23 (6) (2007) 904–919.
- [3] R. K. B. Gallegos, R. N. Sharma, Flags as vortex generators for heat transfer enhancement: Gaps and challenges, *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 76 (2017) 950–962.
- [4] Y. Watanabe, K. Isogai, S. Suzuki, M. Sugihara, A theoretical study of paper flutter, *Journal of fluids and structures* 16 (4) (2002) 543–560.
- [5] S. Michelin, O. Doaré, Energy harvesting efficiency of piezoelectric flags in axial flows, *Journal of Fluid Mechanics* 714 (2013) 489–504.
- [6] A. Giacomello, M. Porfiri, Underwater energy harvesting from a heavy flag hosting ionic polymer metal composites, *Journal of Applied Physics* 109 (8) (2011) 084903.
- [7] C. Guo, M. Paidoussis, Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow, *Journal of Applied Mechanics* 67 (1) (2000) 171–176.
- [8] S. Alben, Flag flutter in inviscid channel flow, *Physics of Fluids* 27 (3) (2015) 033603.
- [9] M. Träsch, A. Déporte, S. Delacroix, J.-B. Drevet, B. Gaurier, G. Germain, Power estimates of an undulating membrane tidal energy converter, *Ocean Engineering* 148 (2018) 115–124.
- [10] N. Desmars, J. Tchoufag, D. Younesian, M.-R. Alam, Interaction of surface waves with an actuated submerged flexible plate: Optimization for wave energy extraction, *Journal of Fluids and Structures* 81 (2018) 673–692.
- [11] I. Cho, M. Kim, Interactions of a horizontal flexible membrane with oblique incident waves, *Journal of Fluid Mechanics* 367 (1998) 139–161.
- [12] I. Cho, M. Kim, Interactions of horizontal porous flexible membrane with waves, *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering* 126 (5) (2000) 245–253.
- [13] J. Mougel, S. Michelin, Flutter and resonances of a flag near a free surface, *Journal of Fluids and Structures* 96 (2020) 103046.
- [14] J. Labarbe, O. N. Kirillov, Membrane flutter induced by radiation of surface gravity waves on a uniform flow, *Journal of Fluid Mechanics* 901 (2020).
- [15] B. Nemtsov, Flutter effect and emission in the region of anomalous and normal doppler effects, *Radiophys. Quantum Electron.(Engl. Transl.);(United States)* 28 (12) (1986).
- [16] J. Labarbe, O. N. Kirillov, Radiation-induced instability of a finite-chord nemtsov membrane, *arXiv preprint arXiv:2104.01060* (2021).
- [17] R. Cairns, The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows, *Journal of Fluid Mechanics* 92 (1) (1979) 1–14.
- [18] D. Fabre, R. Longobardi, P. Bonnefis, P. Luchini, The acoustic impedance of a laminar viscous jet through a thin circular aperture, *Journal of Fluid Mechanics* 864 (2019) 5–44.
- [19] J. Sierra, D. Fabre, V. Citro, Efficient stability analysis of fluid flows using complex mapping techniques, *Computer Physics Communications* 251 (2020) 107100.
- [20] A. Bovis, *Hydrodynamique navale*, no. BOOK, Ecole nationale supérieure de techniques avancées, département mécanique, 1992.
- [21] D. E. Merewether, Transient currents induced on a metallic body of revolution by an electromagnetic pulse, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* (2) (1971) 41–44.
- [22] J.-P. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *Journal of computational physics* 114 (2) (1994) 185–200.
- [23] S. H. Schot, Eighty years of sommerfeld’s radiation condition, *Historia mathematica* 19 (4) (1992) 385–401.
- [24] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, R. Rodri, et al., An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems, *Journal of computational Physics* 223 (2) (2007) 469–488.
- [25] J. Sierra, V. Citro, D. Fabre, On boundary conditions for compressible flow simulations, in: *Symposium on Fluid-Structure-Sound Interactions and Control*, Springer, 2019, pp. 335–340.
- [26] J. Mougel, D. Fabre, L. Lacaze, T. Bohr, On the instabilities of a potential vortex with a free surface, *Journal of Fluid Mechanics* 824 (2017) 230–264.
- [27] J.-L. Pfister, O. Marquet, M. Carini, Linear stability analysis of strongly coupled fluid–structure problems with the arbitrary-lagrangian–eulerian method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 355 (2019) 663–689.
- [28] P. Bonnefis, Etude des instabilités de sillage, de forme et de trajectoire de bulles par une approche de stabilité linéaire globale, Ph.D. thesis (2019).
- [29] F. Hecht, New development in freefem++, *Journal of numerical mathematics* 20 (3-4) (2012) 251–266.

Forçage d'un cylindre avec un degré de liberté par une houle incidente

Sommaire

3.1	Formulation du problème	42
3.1.1	Problème fluide	42
3.1.2	Mouvement du cylindre	42
3.1.3	Conditions aux limites	43
3.2	Décomposition de la solution	43
3.2.1	Le problème incident	44
3.2.2	Le problème de diffraction	44
3.2.3	Le problème de radiation	44
3.3	Méthode de résolution et analyse de la solution	45
3.3.1	L'amplitude d'oscillation	45
3.3.2	Les coefficients de réflexion et de transmission	45
3.3.3	L'efficacité du système	45
3.3.4	Méthode des éléments finis	46
3.4	Résultats	47
3.4.1	La masse ajoutée et l'amortissement ajouté	47
3.4.2	L'efficacité du système	48
3.5	Conclusion	49

Contenu : Dans ce chapitre nous allons introduire brièvement un certain nombre de notions et méthodes qui seront utiles à la deuxième partie de la thèse : les notions de la masse ajoutée, l'amortissement ajouté, les coefficients de réflexion et de transmission, l'efficacité et la méthode de décomposition hydrodynamique. Ceci est à travers l'étude du forçage d'un cylindre attaché à un ensemble amortisseur/ressort par une houle incidente monochromatique.

Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur le rendement d'un récupérateur d'énergie des vagues par une structure cylindrique avec un seul degré de liberté. Nous considérons le **forçage** par une houle incidente monochromatique (en l'absence d'un courant), d'un cylindre immergé et relié à un ensemble amortisseur/ressort modélisant l'extraction d'énergie. Nous présentons tout d'abord les équations modélisant ce problème classique étudié notamment par [Evans 1976]. Ensuite nous présentons la méthodologie utilisée pour résoudre ce problème ainsi que quelques définitions nécessaires pour comprendre le problème. Nous finirons par présenter les résultats obtenus avant de conclure.

3.1 Formulation du problème

Nous décrivons les interactions physiques qui ont lieu lorsqu'un cylindre rigide, mobile, de diamètre L , immergé à une distance H_i dans une couche fluide d'épaisseur H constante, est soumis à une onde monochromatique incidente d'amplitude a_I et de pulsation ω . Le cylindre de masse m est attaché à un amortisseur linéaire de constante d'amortissement c et un ressort de constante de raideur k_c (voire Figure 3.1).

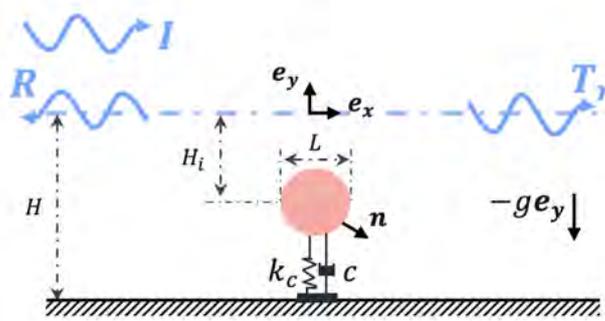


FIGURE 3.1 – Illustration du forçage par une houle incidente d'un cylindre monté sur un ensemble ressort/a-mortisseur.

Nous nous focaliserons sur le problème 2D décrit en coordonnées cartésiennes (x, y) .

3.1.1 Problème fluide

Le fluide est supposé non visqueux et l'écoulement incompressible et irrotationnel. La vitesse du fluide peut-être exprimée comme le gradient d'un potentiel de vitesse scalaire ($\mathbf{u} = \nabla\phi$). Le potentiel de la vitesse ϕ satisfait l'équation de Laplace suivante

$$\mathcal{LAP} : \Delta\phi = 0. \tag{3.1}$$

L'équation de Bernoulli linéarisée et en l'absence d'un courant incident conduit à la pression

$$\mathcal{BER} : p = -\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{3.2}$$

avec ρ la masse volumique du fluide.

3.1.2 Mouvement du cylindre

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au cylindre on peut montrer que le mouvement de celui-ci est régit par l'équation suivante

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_c y = F \tag{3.3}$$

avec m la masse du cylindre, c le coefficient d'amortissement, k_c la raideur du ressort et $F = -\int_c p(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y)ds$, les efforts de la pression appliqués sur la surface du cylindre.

3.2. Décomposition de la solution

3.1.3 Conditions aux limites

Les conditions dynamique et cinématique linéarisées autour de la surface libre au repos ($y = 0$) s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{DBC}_S : p = \rho g \eta. \quad (3.4)$$

$$\mathcal{KBC}_S : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (3.5)$$

avec g l'accélération de gravité.

Les conditions aux limites cinématique et dynamique à la surface libre peuvent être combinées en utilisant l'équation de Bernoulli (3.2), nous obtenons ainsi la condition à la surface libre suivante

$$\mathcal{KDBC}_S : \frac{\partial \phi}{\partial y} = g \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}. \quad (3.6)$$

Au fond du domaine (en $y = -H$), nous avons une condition d'imperméabilité

$$\mathcal{IMP} : \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0. \quad (3.7)$$

A la surface du cylindre, nous avons la condition cinématique suivante

$$\mathcal{KBC}_C : \frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{y}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y). \quad (3.8)$$

Dans cet exemple et contrairement au problème du chapitre précédent, en raison de l'absence d'un courant incident, on s'attend à avoir deux solutions possible à la surface libre, une onde transmise et une onde réfléchie (comme illustré sur la figure 3.1). Ces ondes possèdent la même longueur d'onde celle de l'onde incidente. Afin d'évacuer ces ondes loin du domaine, et comme discuté dans le chapitre précédent, nous utilisons simplement des conditions de Sommerfeld (appelées aussi des conditions de radiation [Cho 2000, Desmars 2018]), imposées lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, qui s'écrivent

$$\mathcal{RAD} : \frac{\partial \phi}{\partial x} = \pm i k \phi. \quad (3.9)$$

3.2 Décomposition de la solution

Grâce à la linéarité du problème, on représente le potentiel de l'écoulement comme la superposition de trois composantes

$$\phi = \phi_I + \phi_D + \phi_R. \quad (3.10)$$

C'est une décomposition classique utilisée en hydrodynamique navale [Newman 2018]. Chacun des termes correspond à un phénomène particulier : le problème incident, le problème de diffraction et le problème de radiation, illustrées sur la figure 3.2 et qui seront détaillés dans la suite.

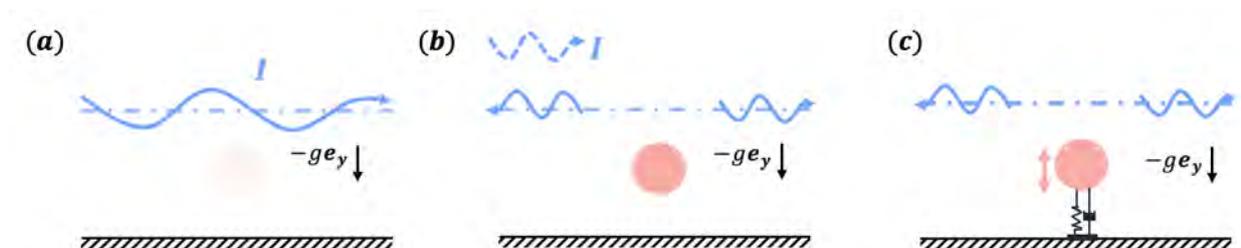


FIGURE 3.2 – (a) Représentation du problème incident (b) Représentation du problème de diffraction (c) Représentation du problème de radiation. Cas d'un cylindre.

3.2.1 Le problème incident

Le premier terme de la relation (3.10), ϕ_I correspond au potentiel de la houle incidente, se propageant en l'absence du cylindre (figure 3.2 (a)). On considère que le potentiel de vitesse ϕ_I est celui d'une onde plane d'amplitude a_I , de fréquence ω et de nombre d'onde k ($\eta = a_I e^{i(kx - \omega t)}$ et $\phi_I = \phi_I(y) e^{i(kx - \omega t)}$). ϕ_I satisfait les équations (3.1)-(3.7) qui nous donnent la solution classique suivante

$$\phi_I(x, y, t) = -\frac{iga_I}{\omega} \frac{\cosh(k(y+H))}{\cosh(kH)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (3.11)$$

Le nombre d'onde k et la fréquence ω satisfont la relation de dispersion des ondes gravitaires suivante

$$\omega^2 = gk \tanh(kH). \quad (3.12)$$

3.2.2 Le problème de diffraction

Le second terme de la relation (3.10), ϕ_D est appelé potentiel de houle diffractée. Il correspond au champ de houle qui serait réfléchi par le cylindre si celui-ci était fixe (figure 3.2 (b)). ϕ_D satisfait les équations (3.1)-(3.7) plus une condition de non pénétration sur la surface du cylindre supposé immobile qui s'écrit en présence de la houle incidente comme

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n}. \quad (3.13)$$

Dans ce cas le cylindre est soumis à une force de pression hydrodynamique, appelée force de diffraction :

$$F_D = -\int_c p_D(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds = -i\omega\rho \int_c \phi_D(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (3.14)$$

3.2.3 Le problème de radiation

Le troisième terme de la relation (3.10), ϕ_R est appelé potentiel de radiation. Il correspond au champ de houle qui est émis par le cylindre lorsque celui-ci est forcé à vibrer (figure 3.2 (c)). ϕ_R satisfait les équations (3.1)-(3.7) et la condition donnée par l'équation (3.8) et en supposant

$$\phi_R = \phi_{R1} \dot{y}. \quad (3.15)$$

En conséquence, le fluide exerce en retour une force hydrodynamique sur le cylindre rigide, appelée force de rayonnement :

$$F_R = -\int_c p_R(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds = -i\omega\rho \int_c \phi_R(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (3.16)$$

La force de rayonnement peut se décomposer par rapport à l'accélération et la vitesse du cylindre comme

$$F_R = -m_a \ddot{y} - c_a \dot{y}. \quad (3.17)$$

Le premier terme du membre de droite de (3.16) est la partie de la force qui est exactement proportionnelle avec l'accélération du cylindre, de sorte que m_a peut être interprété comme un terme de masse ajoutée décrivant l'augmentation de l'inertie du cylindre par la présence du fluide, qui s'écrit

$$m_a = \rho \int_c \Re(\phi_{R1})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (3.18)$$

avec $\Re(\cdot)$ la partie réelle.

Le deuxième terme du membre de droite de (3.16) est la partie de la force qui est exactement proportionnelle avec la vitesse du cylindre. Ce terme survient parce que le travail est effectué en générant des ondes de surface qui rayonnent loin du cylindre ($c_a = 0$ en absence des ondes radiées c'est à dire pour un cylindre

3.3. Méthode de résolution et analyse de la solution

en mouvement en absence de surface libre). L'amortissement ajouté c_a s'écrit

$$c_a = \omega \rho \int_c \Im(\phi_{R1})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (3.19)$$

avec $\Im(\cdot)$ la partie imaginaire.

3.3 Méthode de résolution et analyse de la solution

3.3.1 L'amplitude d'oscillation

Pour des oscillations harmoniques de pulsation ω , la position du cylindre s'écrit $y = A_c e^{-i\omega t}$, où A_c est l'amplitude complexe de la position. À partir de l'équation de mouvement (3.3), l'amplitude complexe s'écrit

$$A_c = \frac{F_I + F_D}{-\omega^2(m + m_a) - i\omega(c + c_a) + k_c}. \quad (3.20)$$

L'équation (3.20) montre que nous avons un phénomène de résonance lorsque le dénominateur tend vers zéro. En absence d'amortissement ($c = c_a = 0$), la fréquence de résonance est solution de l'équation (3.20), $\omega = \sqrt{k_c/(m + m_a(\omega))}$. Notons que cette fréquence correspond à la fréquence du système masse ressort corrigée par l'effet du fluide qui correspond à une masse ajoutée, elle même dépendante de la fréquence de vibration.

3.3.2 Les coefficients de réflexion et de transmission

Selon l'onde incidente, la présence du cylindre peut générer une onde réfléchie R ou/et une onde transmise T_r qui se propagent à l'infini. Nous définissons R et T_r respectivement comme le rapport entre l'amplitude de l'onde réfléchie et l'amplitude de l'onde incidente et l'amplitude de l'onde transmise et l'amplitude de l'onde incidente qui s'écrivent respectivement

$$R = \frac{|a_R(x \rightarrow -\infty)|}{|a_I(x \rightarrow -\infty)|} = \frac{|\phi_D(x \rightarrow -\infty)| + |\phi_R(x \rightarrow -\infty)|}{|\phi_I(x \rightarrow -\infty)|}. \quad (3.21)$$

$$T_r = \frac{|a_{T_r}(x \rightarrow +\infty)|}{|a_I(x \rightarrow +\infty)|} = \frac{|\phi_I(x \rightarrow +\infty)| + |\phi_D(x \rightarrow +\infty)| + |\phi_R(x \rightarrow +\infty)|}{|\phi_I(x \rightarrow +\infty)|}. \quad (3.22)$$

3.3.3 L'efficacité du système

Les densités d'énergie cinétique et potentielle d'une onde de surface s'écrivent

$$e_c = \frac{\rho}{2} \int_{-H}^{\eta} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (3.23)$$

$$e_p = \int_{-H}^{\eta} \rho g y dy. \quad (3.24)$$

avec ϕ le potentiel de vitesse d'une onde de surface linéaire, donnée par l'équation (3.11).

Les équations ci-dessus permettent d'estimer la densité moyenne d'énergie des vagues contenue dans la couche fluide

$$\bar{e} = \frac{\rho g a^2}{2}. \quad (3.25)$$

Le flux d'énergie moyen à travers une tranche verticale de mer orthogonale à la direction des vagues est alors obtenu comme la densité d'énergie moyenne multipliée par la vitesse de propagation de l'énergie, c'est-à-dire la vitesse de groupe. Cela s'écrit

$$J = \bar{e} c_g = \frac{\rho g}{2} c_g a^2. \quad (3.26)$$

avec c_g la vitesse de groupe de l'onde, i.e. la vitesse de transport de l'énergie qui s'écrit

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{g \tanh(kh) + gkh (1 - \tanh(kh)^2)}{2\sqrt{gk \tanh(kh)}}. \quad (3.27)$$

Notons que ce développement a été déjà fait différemment en prenant en compte la présence d'un courant dans le chapitre précédent (l'article en préparation).

Nous définissons ainsi l'efficacité énergétique de notre système comme la fraction de l'énergie des vagues incidentes qui est absorbée par l'amortisseur (qui modélise l'extraction d'énergie) qui s'écrit

$$E = \frac{\mathcal{P}_c}{J_I} = \frac{\frac{1}{2}c\omega^2|A_c|^2}{\frac{1}{2}\rho g c_{gI}|a_I|^2}. \quad (3.28)$$

avec \mathcal{P}_c la puissance moyenne par unité de longueur absorbée dans l'amortisseur et J_I le flux d'énergie associé à la houle incidente qui peut aussi être interprété comme la puissance des vagues par unité de longueur de front d'onde.

Comme les ondes de surface (transmise et réfléchi) ont la même valeur de vitesse de groupe, on peut remarquer que R^2 et T_r^2 mesure respectivement la proportion de puissance dans l'onde réfléchi et la proportion de puissance dans l'onde transmise. Il s'ensuit que l'efficacité du système peut être calculée autrement en raison de l'absence de dissipation dans le fluide comme

$$E = 1 - R^2 - T_r^2 = 1 - \frac{|a_{T_r}|^2}{|a_I|^2} - \frac{|a_R|^2}{|a_I|^2}. \quad (3.29)$$

Notons que pour $c = 0$, un cylindre librement oscillant, et $c = \infty$, un cylindre fixe, nous avons une conservation de flux d'énergie et $E = 0$.

3.3.4 Méthode des éléments finis

Afin de résoudre le problème numériquement, nous allons maintenant transformer les problèmes de diffraction et de rayonnement en formulations faibles.

Formulation faible du problème diffracté : la formulation faible du problème fluide de diffraction est obtenue en multipliant l'équation de Laplace (3.1) par la fonction test ϕ_D^* et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\forall \phi_D^*, \quad \iint_{\Omega} \phi_D^* (\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{P}) dv = 0 \quad (3.30)$$

Ainsi en utilisant la formule de Green, on intègre par partie le terme en laplacien pour tenir compte des conditions aux limites. En utilisant les conditions aux limites, la formulation faible du problème diffracté s'écrit :

$$- \iint_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi_D^* dv - \int_C \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \phi_D^* ds + \omega^2 \int_S \phi_D \phi_D^* ds \pm ik \int_{I,O} \phi_D \phi_D^* ds = 0 \quad (3.31)$$

Formulation faible du problème de radiation : similairement au problème diffracté, la formulation faible du problème fluide de radiation est obtenue en multipliant l'équation de Laplace (3.1) par la fonction test $\phi_{R_1}^*$ et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\forall \phi_{R_1}^*, \quad \iint_{\Omega} \phi_{R_1}^* (\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{P}) dv = 0 \quad (3.32)$$

Ainsi en faisant les mêmes démarches que le problème diffracté, la formulation faible du problème diffracté complet s'écrit :

$$- \iint_{\Omega} \nabla \phi_{R_1} \cdot \nabla \phi_{R_1}^* dv - \int_C 1 \phi_{R_1}^* ds + \omega^2 \int_S \phi_{R_1} \phi_{R_1}^* ds \pm ik \int_{I,O} \phi_{R_1} \phi_{R_1}^* ds = 0 \quad (3.33)$$

En regroupant les inconnues des deux problèmes, les équations (3.32) et (3.30) peuvent être définies sous la

3.4. Résultats

forme matricielle suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}_D & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}_{R_1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_D \\ \phi_{R_1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{C}_D \\ \mathcal{C}_{R_1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}}. \quad (3.34)$$

où les blocs de cette matrice sont des opérateurs bilinéaires qui s'écrivent comme

$$\mathcal{A}_D = - \iint_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi_D^* dv + \omega^2 \int_S \phi_D \phi_D^* ds \pm k \int_{I,O} \phi_D \phi_D^* ds, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{A}_{R_1} = - \iint_{\Omega} \nabla \phi_{R_1} \cdot \nabla \phi_{R_1}^* dv + \omega^2 \int_S \phi_{R_1} \phi_{R_1}^* ds \pm k \int_{I,O} \phi_{R_1} \phi_{R_1}^* ds, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{C}_D = \int_C \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \phi_D^* ds, \quad (3.37)$$

$$\mathcal{C}_{R_1} = \int_C 1 \phi_{R_1}^* ds. \quad (3.38)$$

Le problème (3.34) est ensuite discrétisé en projetant le vecteur d'état sur une base de taille finie. Le domaine est discrétisé en construisant un maillage non structuré de cellules triangulaires. Les inconnues ϕ_D et ϕ_{R_1} sont approximées à l'aide d'éléments finis quadratiques par morceaux (P2). La génération du maillage, la construction de tous les blocs matriciels et l'assemblage de la matrice complète sont entièrement réalisés à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFem++ [Hecht 2012].

On est ainsi en mesure de reconstruire le potentiel total donné par l'équation (3.10) (après reconstruction du problème de radiation en utilisant l'équation (3.15)) puis la pression via l'équation de Bernoulli (3.2). La pression au niveau de la surface libre permet directement de reconstruire l'élévation de la surface libre via l'équation (3.4). Ces grandeurs permettent finalement de définir les propriétés de réflexion, de transmission ainsi que l'efficacité du dispositif qui ont été définis précédemment.

3.4 Résultats

3.4.1 La masse ajoutée et l'amortissement ajouté

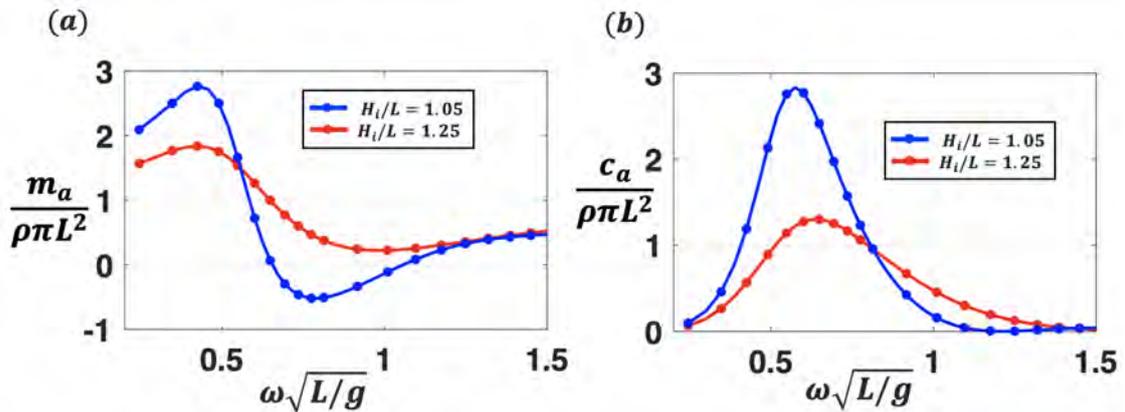


FIGURE 3.3 – Évolution de la masse ajoutée (a) et de l'amortissement ajouté (b) en fonction de la pulsation dans le cas d'un cylindre soumis à une houle incidente, pour $H_i/L = 1.05$ en bleu et $H_i/L = 1.25$ en rouge. Les symboles correspondes aux résultats de [Evans 1979].

Les courbes de la masse ajoutée et d'amortissement ajouté sont tracées en fonction de la pulsation en comparaison avec les résultats de [Evans 1979] sur la figure 3.3 pour des valeurs de paramètres $H_i/L = 1.25$ et 1.25. Les résultats montrent que la masse ajoutée et l'amortissement ajouté varient considérablement avec la pulsation de l'onde incidente et l'immersion du cylindre.

La figure 3.3(a) montre la possibilité d'obtenir une masse ajoutée négative lorsque le cylindre est suffisamment proche de la surface libre. En cohérence avec les travaux antérieurs, analytiques [Ogilvie 1963]

ou expérimentales [Chung 1977], la masse ajoutée peut devenir négative lorsque la profondeur de submersion est faible et que les effets de surface libre sont importants. Pour un cylindre immergé verticalement, [McIver 1984] traduit ceci par une relation entre la masse ajoutée et les énergies cinétique et potentielle moyennes du mouvement du fluide. Aux grandes profondeurs de submersion, l'énergie potentielle moyenne du mouvement est négligeable et la masse ajoutée est nécessairement positive. Aux faibles profondeurs de submersion, les oscillations de la surface libre sont telles que l'énergie potentielle moyenne peut dépasser l'énergie cinétique moyenne, ce qui entraîne une masse ajoutée négative.

La figure 3.3(b) montre que pour les deux valeurs de H_i/L considérées les courbes de c_a évoluent d'une façon similaire : lorsque ω augmente, c_a augmente en partant de 0, passe par un maximum puis diminue en tendant vers 0 à haute fréquence. Cependant, le max est plus faible lorsque le cylindre s'éloigne de la surface libre et la courbe semble s'étaler. Les changements rapides de la masse ajoutée et de l'amortissement ajouté, en fonction de la fréquence d'oscillation, s'expliquent souvent en termes d'ondes stationnaires proches de la résonance qui peuvent se produire au-dessus du cylindre.

3.4.2 L'efficacité du système

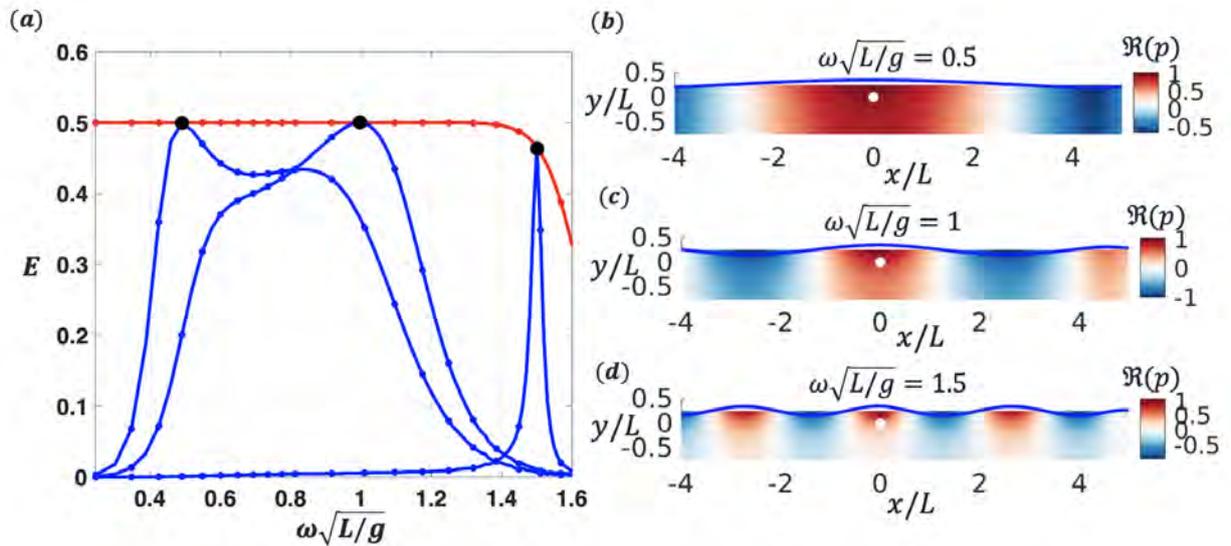


FIGURE 3.4 – (a) Efficacité E en fonction de la pulsation ω , la courbe rouge pour $c = c_a(\omega)$ et $k_c = \omega^2(m + m_a(\omega))$ et les courbes bleu pour $c = c_a(\omega)$ et $k_c = \omega^2(m + m_a(\omega))$ évalués à $\omega\sqrt{L/g} = 0.5$, $\omega\sqrt{L/g} = 1$ et $\omega\sqrt{L/g} = 1.5$ (b) structure de l'écoulement pour $\omega\sqrt{L/g} = 0.5$ (c) $\omega\sqrt{L/g} = 1$ (d) $\omega\sqrt{L/g} = 1.5$. Pour $H_i/L = 1.25$ et $m/(L^3\rho) = 1$.

La figure 3.4 correspond à l'efficacité du système en fonction de la pulsation de l'onde incidente. Les lignes continues correspondent à l'efficacité obtenue en utilisant l'équation (3.28) et les symboles en utilisant l'équation 3.29. Les trois courbes bleu sont respectivement pour ($c = c_a(0.5)$ et $k_c = (m + m_a(0.5))/4$), ($c = c_a(1)$ et $k_c = (m + m_a(1))$) et ($c = c_a(1.5)$ et $k_c = 9(m + m_a(1.5))/4$). On constate que nous avons un maximum d'efficacité $E = 0.5$, pour respectivement $\omega\sqrt{L/g} = 0.5$, $\omega\sqrt{L/g} = 1$ et $\omega\sqrt{L/g} = 1.5$. Sur les figures 3.4(b), (c) et (d) nous avons tracé la structure de l'écoulement pour les trois valeurs de pulsation correspondants aux maximums d'efficacité.

Dans l'étude réalisée par Evans [Evans 1976], il a été montré analytiquement l'existence des conditions qui nous permettent d'obtenir une efficacité maximale. Ces conditions sont à imposer sur la raideur k_c et le coefficient d'amortissement c et sont données par

$$k_c = \omega^2(m + m_a(\omega)), \quad (3.39)$$

$$c = c_a(\omega). \quad (3.40)$$

La courbe rouge sur la figure 3.4 montre l'efficacité obtenue en utilisant les conditions données par les équations (3.39) et (3.40). Nous obtenons ainsi une efficacité maximale égale à 0.5 quasiment pour toutes

la gamme des valeurs de pulsation comme le prédire la théorie d'Evans.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un modèle d'interaction onde-cylindre permettant d'étudier les performances d'un récupérateur d'énergie de la houle constitué d'un cylindre relié à un ensemble amortisseur/ressort. A l'aide de la méthode des éléments finis et via le logiciel libre FreeFEM++ nous avons résolu le problème et reproduit les résultats de la littérature. A travers cet exemple classique, nous avons défini les notions de masse ajoutée, d'amortissement ajouté, les coefficients de réflexion et de transmission et l'efficacité. Les résultats de l'efficacité, ont montré qu'avec notre système à 1 degré de liberté, nous pouvons atteindre un rendement de 50% lorsque les propriétés du convertisseur sont bien choisis. Par ailleurs, dans l'étude réalisée par [Evans 1976], il a été montré que lorsque le cylindre est en mouvement en deux degrés de liberté (*'sway'* et *'heave'*), sous les mêmes conditions, nous pouvons atteindre une efficacité de 100%. Cependant, c'est un système très sélectif avec des pics d'efficacité très fins pour des propriétés données. Par conséquent, nous proposons dans le chapitre suivant un dispositif de récupération d'énergie à plusieurs degrés de liberté, ce qui semble a priori plus adapté à un environnement océanique réaliste où les vagues forment généralement un large spectre de fréquences différentes. Dans le prochain chapitre nous proposons de réaliser une étude sur le rendement d'un récupérateur d'énergie de la vague par une membrane flexible en prenant en compte la présence d'un écoulement incident.

Étude de l'effet du courant sur les interactions onde-membrane flexible : application à la récupération d'énergie

Sommaire

4.1	Introduction et état de l'art	52
4.2	Formulation du problème	53
4.2.1	Problème fluide	53
4.2.2	Problème structurel	54
4.2.3	Conditions aux limites	54
4.3	Méthodologie et définitions	54
4.3.1	Décomposition de Haskind	54
4.3.2	Relation de dispersion en présence d'un courant et conditions de radiation	56
4.3.3	Énergie des ondes gravitaires	59
4.3.4	Méthode des élément finis	61
4.4	Ordres de grandeur et validations	63
4.4.1	Ordres de grandeur	63
4.4.2	Validation de la méthode	64
4.4.3	Étude du champ de surface en l'absence de l'amortisseur	65
4.5	Résultats et interprétation	68
4.5.1	Effet de l'écoulement incident	68
4.5.2	Effet des paramètres du convertisseur	71
4.6	Conclusion	74

Contenu : Dans ce chapitre nous allons étudier l'effet d'un courant incident uniforme sur les performances d'un récupérateur d'énergie d'une houle incidente par une membrane flexible.

4.1 Introduction et état de l'art

De nos jours, en raison de l'augmentation de la consommation d'énergie et de la nécessité de réduire l'impact environnemental, de nombreux pays répondent aux besoins en énergies renouvelables. L'accord de Paris de 2015 [on Climate Change 2019, Bang 2016] pour lutter contre le changement climatique a conduit de nombreux pays à s'engager à réduire leurs émissions de gaz à effet de serre (GES) et à investir dans un avenir durable à faibles émissions de dioxyde de carbone (CO₂). L'investissement mondial dans les énergies renouvelables dépasse désormais celui des énergies fossiles dans une tendance qui devrait se poursuivre [Varro 2018]. L'UE s'est engagée à réduire d'au moins 80% les émissions par rapport aux niveaux de 1990 d'ici 2050, une grande partie de ces réductions provenant du remplacement des combustibles fossiles par des sources d'énergie renouvelables [Commission 2018, Commission 2019]. Jusqu'en 2020, les sources d'énergie renouvelables représentaient environ 12.6% (hydroélectricité 6.9%, éolien 2.5%, solaire 1.4%, biomasse et géothermie 1.1%, agrocarburants 0.7%) de la production totale d'énergie dans le monde et ce nombre continue d'augmenter [BP 2021]. La quête de nouvelles sources d'énergies renouvelables a également stimulé la recherche sur l'énergie des vagues.

Malgré le concept de récupération d'énergie des vagues pour la production d'énergie apparue en 1975 [Leishman 1976], la source d'énergie renouvelable propre et vaste est restée inexploitée pendant des décennies. Des études ont montré que les vagues océaniques représentent une source d'énergie attractive, avec environ 2TW de puissance des vagues disponibles dans le monde [Gunn 2012]. Ceci est encourageant, car les difficultés de construction ainsi que les coûts de maintenance des appareils côtiers sont nettement inférieurs à ceux des dispositifs en mer profonde. Ces découvertes ont suscité un vif intérêt et beaucoup d'optimisme chez de nombreux chercheurs et acteurs majeurs des industries de l'énergie, ayant fait l'objet de nombreuses études/prototypes et brevets [Babarit 2015, Andersen 2015, Olondriz 2016, Antonutti 2016, Schmitt 2016, Crooks 2016]. Bien que ces technologies ne soient pas compétitives à l'heure actuelle sur les marchés continentaux de l'électricité [Babarit 2018] de tels dispositifs demeurent pertinents afin d'approvisionner localement des sites isolés en électricité, pour désaliniser l'eau de mer [Kojimoto 2017], ou encore utilisés comme système hybrides protection des côtes/récupération d'énergie [Torre-Enciso 2009].

L'utilisation de structures flexibles pour la récupération d'énergies renouvelables correspond à une piste de recherche prometteuse permettant d'exploiter des mécanismes physiques en rupture avec les systèmes de récupération conventionnels [Lee 1990, Thompson 1991, Meylan 2009, Chakraborty 2014]. Des concepts de récupérateurs basés sur les membranes flexibles ont par exemple été conçus pour récupérer l'énergie des vagues [Alam 2012, Lehmann 2013, Desmars 2018] mais aussi l'énergie des courants [Träsch 2018].

Les vagues océaniques arrivant sur un littoral peuvent d'autre part constituer une menace de dégradation des infrastructures côtières. Différents dispositifs tels que des plaques rigides immergées horizontalement [McIver 1985, Patarapanich 1989, Peng 2003] ont par exemple été étudiés afin de protéger les côtes. Ces études ont démontré la possibilité de réfléchir efficacement les ondes incidentes. Cependant, les efforts s'exerçant sur la structure peuvent être relativement importants, motivant l'usage de plaques flexibles et/ou poreuses [Yu 1994, Cho 2000].

L'objectif est ainsi de minimiser la transmission de la houle pour une application de type protection des côtes, ou de minimiser à la fois la transmission et la réflexion (et de tout absorber puis convertir) pour une application de type récupération d'énergie. Un facteur qui reste peu étudié dans ces deux cas d'application correspond à l'effet d'un courant incident. Les récupérateurs d'énergie de la houle, tout comme les systèmes de protection des côtes sont pourtant dédiés à des zones océaniques relativement peu profondes dans lesquels les courants induits par les marées peuvent être significatifs. L'effet d'un courant sur une plaque rigide immergée a été étudié par différentes équipes [Rey 2011, Lin 2014]. Les systèmes flexibles n'ont cependant pas été étudiés à ces jours. L'objectif est ainsi de quantifier si les systèmes proposés restent efficaces en présence d'un courant, mais aussi possiblement de mettre à profit l'énergie contenue dans le courant et ainsi concevoir des systèmes de récupération hybrides houlomoteurs/hydrolien.

Dans cette étude, nous nous focalisons ainsi sur l'effet d'un courant sur le rendement d'un récupérateur d'énergie des vagues constitué d'une membrane flexible. Nous considérons le forçage par une houle incidente monochromatique, d'une membrane flexible immergée horizontalement en présence d'un courant et reliée à un ensemble d'amortisseurs linéaires ponctuels. Ce chapitre est organisé comme suit. Nous présentons tout d'abord les équations modélisant le problème. Ensuite nous détaillons la méthodologie mise en œuvre ainsi que quelques définitions. Notre méthode est ensuite confrontée aux résultats de la littérature afin de valider

4.2. Formulation du problème

la prise en compte de la flexibilité et du courant incident. Les résultats obtenus sont présentés et interprétés dans la cinquième section.

4.2 Formulation du problème

Nous considérons un état de mer idéalisé correspondant à une onde monochromatique d'amplitude a_I et de pulsation ω se propageant dans une couche fluide d'épaisseur H constante et superposée à un courant axial uniforme de vitesse U . Le forçage de cet écoulement incident sur une membrane flexible de longueur L immergée parallèlement à la surface libre à une profondeur H_i est étudié. La membrane, considérée infiniment fine et de rigidité négligeable, possède une masse par unité de surface ρ_m , est tendue à la tension T , et simplement appuyée en ses extrémités. Un système de conversion d'énergie est par ailleurs modélisé par des amortisseurs linéaires de constantes d'amortissements c_i et positionnés en x_{c_i} (Figure 4.1).

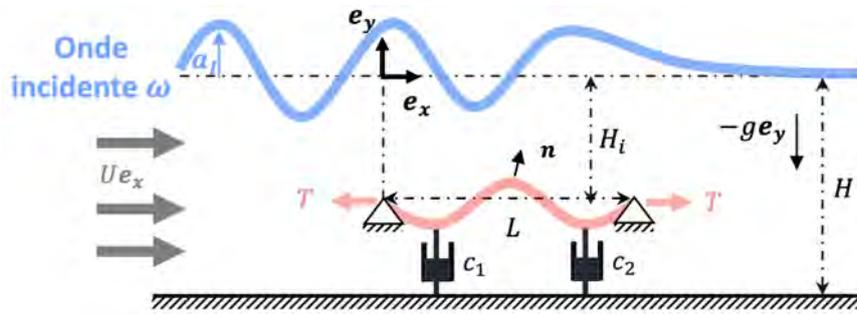


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du problème.

Dans cette étude, nous supposons que les vagues incidentes se dirigent vers la membrane avec des crêtes de vagues parallèles à l'axe z (voir figure 4.1). Cette hypothèse est à considérer pour les raisons suivantes : (i) le but de notre étude est de se concentrer sur l'effet du courant et de nombreux paramètres sont déjà à prendre en compte, (ii) certaines technologies peuvent pivoter pour se positionner frontalement à la partie la plus énergétique du spectre des ondes entrantes [Lehmann 2013], (iii) notre modèle peut être étendue pour tenir compte des angles d'ondes incidents non nuls en suivant la procédure proposée par [Cho 1998, Desmars 2018].

Nous nous focaliserons sur le problème 2D décrit dans le système de coordonnées cartésiennes (x, y) avec l'axe y dirigé verticalement vers le haut et avec $y = 0$ dans le plan de la surface libre non perturbée. Le temps est noté t .

4.2.1 Problème fluide

Comme dans les chapitres précédents, le fluide est supposé non visqueux et l'écoulement est incompressible et son mouvement irrotationnel. La vitesse du fluide est exprimée par $\mathbf{U} = U\mathbf{e}_x + \nabla\phi$, où la perturbation du potentiel des vitesses $\Phi(x, y, t)$ satisfait l'équation de Laplace dans l'ensemble du domaine fluide autour de la membrane.

$$\mathcal{LAP} : \Delta\phi = 0. \quad (4.1)$$

L'équation de Bernoulli instationnaire linéarisée conduit ensuite à la pression

$$\mathcal{BER} : p = -\rho \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} \right). \quad (4.2)$$

avec ρ est la densité du fluide.

4.2.2 Problème structurel

La déformation de la membrane ξ est supposée être régie par un modèle de poutre en tension dont l'équation linéarisée s'écrit :

$$\mathcal{B}\mathcal{E}\mathcal{A}\mathcal{M} : \rho_m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = [p] + f_c, \quad \text{en } y = -H_i, x \in [0, L]. \quad (4.3)$$

avec $[p] = p(y = -H_i^+) - p(y = -H_i^-)$ le saut de pression de part et d'autre de la membrane.

Nous supposons qu'il y a N_c amortisseurs linéaire de force locale f_c qui s'écrit comme

$$f_c = - \sum_{i=1}^{N_c} c_i \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{x=x_{c_i}} \delta(x - x_{c_i}). \quad (4.4)$$

avec δ la fonction de Dirac permettant de modéliser l'effet de l'amortissement ponctuel et les c_i , les coefficients d'extraction d'énergie. Notons que dans la suite selon la configuration choisie, le nombre des amortisseurs N_c varie entre 0 et 2.

4.2.3 Conditions aux limites

Les conditions dynamiques et cinématiques linéarisées autour de la surface libre au repos ($y = 0$) s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{C}_S : p = \rho g \eta, \quad \text{en } y = 0. \quad (4.5)$$

$$\mathcal{K}\mathcal{B}\mathcal{C}_S : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \text{en } y = 0. \quad (4.6)$$

avec g l'accélération de gravité.

De façon similaire, la condition cinématique linéarisée autour de la position de repos de la membrane en $y = -H_i$ s'écrit

$$\mathcal{K}\mathcal{B}\mathcal{C}_M : \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + U \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \text{en } y = -H_i, x \in [0, L]. \quad (4.7)$$

On considère que la structure est simplement-supportée à ses extrémités

$$\xi(x = 0) = \xi(x = L) = 0. \quad (4.8)$$

Pour un fond marin imperméable en $y = -H$ on a de plus

$$\mathcal{I}\mathcal{M}\mathcal{P} : \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{en } y = -H. \quad (4.9)$$

Afin d'évacuer les ondes loin du domaine, généralement on utilise des conditions de radiation similaires à celle utilisées pour l'exemple du cylindre (chapitre 3). Dans cette étude nous allons utiliser plutôt une méthode de zone dissipative + étirement du maillage aux frontières du domaine de calcul pour amortir les ondes afin d'éviter leurs réflexions aux extrémités du domaine numérique. Cette méthode a été déjà utilisée pour résoudre le problème d'instabilité dans le chapitre 2 et elle sera détaillée dans la section suivante.

4.3 Méthodologie et définitions

4.3.1 Décomposition de Haskind

Comme dans le chapitre 3, nous cherchons des solutions harmoniques en temps de pulsation ω , correspondant au forçage par la houle incidente et nous décomposons le champs de l'écoulement $\mathbf{q}_{F,FS} = [\phi; p; \eta]$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{q}_{F,S} = \mathbf{q}_I + \mathbf{q}_D + \mathbf{q}_R. \quad (4.10)$$

4.3. Méthodologie et définitions

avec $\mathbf{q}_I = [\phi_I; p_I; \eta_I]$ le champ incident, $\mathbf{q}_D = [\phi_D; p_D; \eta_D]$ le champ diffracté et $\mathbf{q}_R = [\phi_R; p_R; \eta_R]$ le champ de radiation. Cette décomposition est classiquement utilisée en hydrodynamique navale ([Newman 2018, Bovis 1992, Babarit 2018] par exemple).

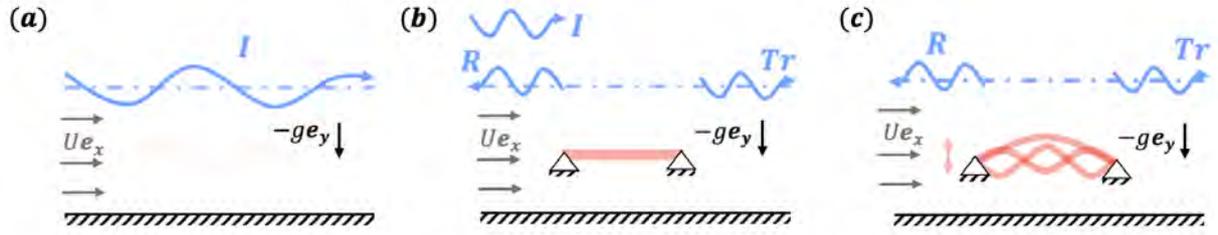


FIGURE 4.2 – Représentation du problème (a) incident (b) diffracté (c) radié. Cas d'une membrane.

Le problème incident :

ϕ_I correspond au potentiel de la houle incidente, se propageant en l'absence de la membrane (Figure 4.2(a)). Comme dans le chapitre 3, on considère que le potentiel de vitesse ϕ_I est celui d'une onde plane d'amplitude a_I , de fréquence ω et de nombre d'onde k ($\eta = a_I e^{i(kx - \omega t)}$ et $\phi_I = \phi_I(y) e^{i(kx - \omega t)}$). ϕ_I satisfait les équations de Laplace (4.1), Bernoulli en présence d'un courant (4.2), les conditions cinématiques et dynamiques à la surface libre (4.5)-(4.6) et la condition d'imperméabilité au fond (4.9), qui nous donnent la solution suivante qui diffère de celle du chapitre 3 par le terme de Doppler

$$\phi_I(x, y, t) = -\frac{iga_I}{(\omega - Uk)} \frac{\cosh(k(y + H))}{\cosh(kH)} e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.11)$$

Le nombre d'onde k et la fréquence ω satisfont la relation de dispersion des ondes gravitaires en présence d'un courant qui est obtenu en utilisant les équations (4.5) et (4.6) :

$$(\omega - UK)^2 = gk \tanh(kH). \quad (4.12)$$

Cette relation a été vue sous une forme adimensionnelle dans le chapitre 2 et elle sera étudiée en détail dans la sous-section suivante d'un point de vue des ondes transmises et réfléchies.

Notons que les efforts de pression hydrodynamique associées à ce terme sont les efforts de Froude-Krylov en présence d'un courant [Faltinsen 1993] :

$$F_I = \int_M p_I(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds = i\omega\rho \int_M \left(\phi_I + U \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (4.13)$$

Le problème de diffraction :

ϕ_D correspond au champ de houle qui serait diffracté par la membrane lorsque celle-ci est supposée rigide et fixe (Figure 4.2(b)). De la même façon que le chapitre 3, ϕ_D satisfait les équations de Laplace (4.1), Bernoulli en présence d'un courant (4.2), les conditions cinématiques et dynamiques à la surface libre (4.5)-(4.6) et la condition d'imperméabilité au fond (4.9). S'ajoute à ces équations une condition de non pénétration sur la surface de la membrane supposée immobile qui s'écrit en présence de la houle incidente comme

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n}. \quad (4.14)$$

Dans ce cas la membrane est soumise à une force de pression hydrodynamique, appelée force de détraction :

$$F_D = \int_M p_D(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds = i\omega\rho \int_M \left(\phi_D + U \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (4.15)$$

Le problème de radiation :

ϕ_R correspond au champ de la houle radié par la structure lorsque celle-ci est forcée à ses différents modes de vibration dans le vide (Figure 4.2(c)). ϕ_R satisfait les équations (3.1)-(3.7) et la condition donnée par l'équation (3.8) en supposant que $\phi_R = \sum_{l=1}^{N_M} \xi_l \phi_{Rl}$ (ξ_l des constantes complexes). En conséquence, cette quantité de mouvement transportée exerce en retour une force hydrodynamique sur la membrane, appelée force de rayonnement qui peut se décomposer par rapport l'accélération et la vitesse du cylindre comme :

$$F_R = \int_M p_R(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds = i\omega\rho \int_M \left(\phi_R + U \frac{\partial \phi_R}{\partial x} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y) ds. \quad (4.16)$$

4.3.2 Relation de dispersion en présence d'un courant et conditions de radiation

Afin de résoudre le problème, quelques explications préliminaires sont nécessaires pour comprendre les principales caractéristiques des solutions d'ondes attendues. Dans cet objectif, nous décrivons d'abord la relation de dispersion. Nous introduisons ensuite un traitement des conditions aux limites à mettre en place aux extrémités du domaine de calcul pour éviter la réflexion des ondes.

Notons qu'une description similaire a été déjà faite dans le chapitre 2 donc le lecteur peut passer directement à la sous section suivante s'il a déjà lu le chapitre 2.

La relation de dispersion :

Prendre la racine carrée de la relation de dispersion donnée par l'équation (4.12), conduit aux relations explicites pour la pulsation ω suivantes

$$\omega = Uk \pm \sqrt{gk \tanh(kH)}. \quad (4.17)$$

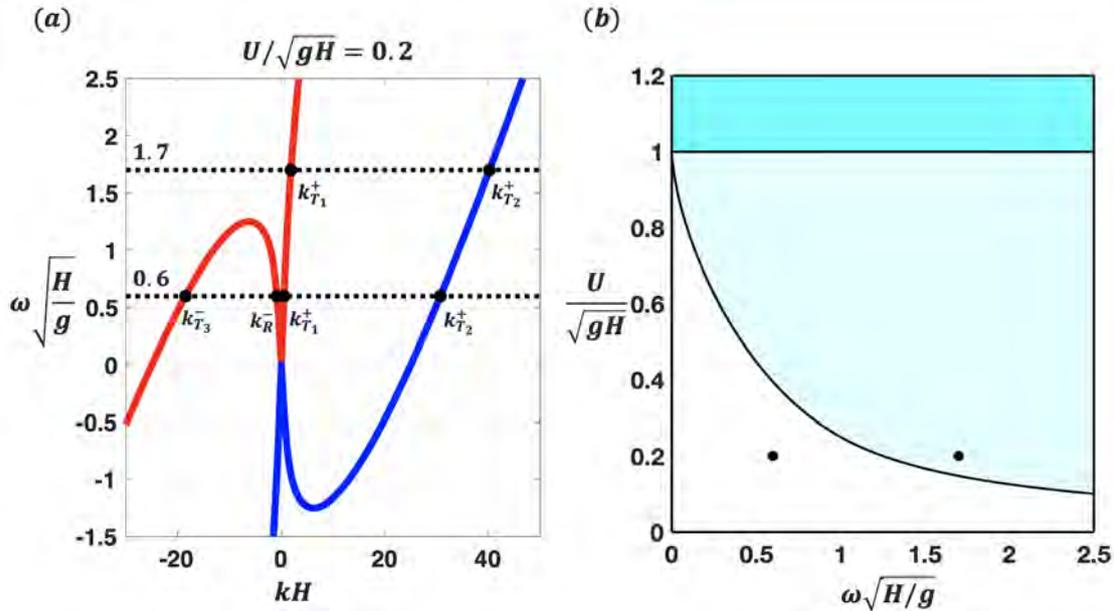


FIGURE 4.3 – Solutions de la relation de dispersion (4.12). (a) Fréquences en fonction de kH pour $U/\sqrt{gH} = 0.2$ (cas sous-critique à 4 ondes : pour $\omega\sqrt{H/g} = 0.6$, $k_{T_1}^+H = 0.52$, $k_{T_2}^+H = 30.71$, $k_{T_3}^-H = -18.51$ et $k_R^-H = -0.86$) et (cas sous-critique à 2 ondes : pour $\omega\sqrt{H/g} = 1.7$, $k_{T_1}^+H = 1.86$ et $k_{T_2}^+H = 40.2$) (b) Nombre de solutions dans le plan pulsation-courant : régime sous-critique à quatre solutions (blanc), régime sous-critique à deux solutions (bleu clair), régime super-critique à deux solutions (cyan).

Notons $Fr = U/\sqrt{gH}$ le nombre de Froude. Les deux solutions obtenues sont tracées en fonction du nombre d'onde pour $Fr = 0.2$ sur la figure 4.3(a). Pour une pulsation donnée, deux ou quatre solutions

4.3. Méthodologie et définitions

de longueurs d'onde différentes sont obtenues en fonction de Fr . La figure 4.3(b) correspond aux zones cartographiques associées à quatre solutions (blanc) et deux solutions (bleu-cyan) dans le plan (pulsation-courant). Sur la figure 4.3(b) une distinction est faite pour les régimes où deux solutions sont obtenues selon si $Fr > 1$ (régime super-critique, zone bleu clair) ou $Fr < 1$ (régime sous-critique, zone cyan).

Sur la figure 4.3(a) la pente de la courbe de pulsation donne directement le signe de la vitesse de groupe, permettant de savoir quelles ondes peuvent être présentes en amont ou en aval de la membrane. Une vitesse de groupe positif (respectivement négatif) correspond à l'énergie des ondes se déplaçant dans la direction x positive (respectivement négative). Pour $Fr = 0.2$ et $\omega\sqrt{H/g} = 0.6$, on s'attend donc à trois ondes en aval de la membrane (appelées $k_{T_1}^+$, $k_{T_2}^+$ et $k_{T_3}^-$, où T signifie transmis et \pm correspond au signe de la vitesse de phase) alors qu'une seule onde peut être présente en amont (appelé k_R^- , où R signifie réfléchi). Une illustration de ce régime est montrée sur la figure 4.4(a). A noter que les ondes correspondant à $k_{T_1}^+$ et k_R^- (respectivement $k_{T_2}^+$ et k_3^-) sont parfois appelées ondes longues (respectivement ondes courtes), et les ondes courtes ne sont pas présentes en l'absence de courant. Pour $Fr = 0.2$ et $\omega\sqrt{H/g} = 1.7$, deux solutions sont obtenues, $k_{T_1}^+$ et $k_{T_2}^+$, qui devrait être présentes en aval et aucune onde n'est attendue en amont de la membrane. Une illustration de ce régime est montré sur la figure 4.4(b). Pour faire le lien avec le chapitre 2, les ondes T_1 , T_2 , T_3 et R sont appelées D_1 , D_2 , D_3 et U_1 dans le chapitre 2.

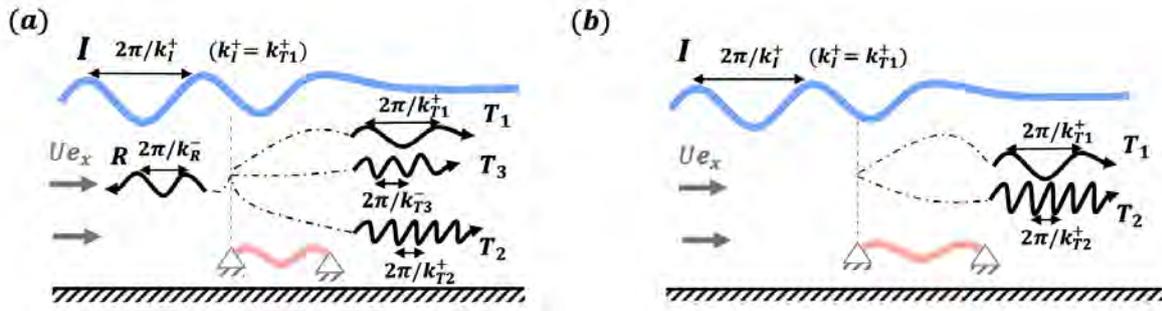


FIGURE 4.4 – Illustration des ondes gravitaires solutions de la relation de dispersion en présence d'un courant pour : (a) un régime sous-critique à quatre ondes et (b) un régime sous-critique à deux ondes/super-critique. La localisation des ondes (amont/aval) est déterminée par le signe de la vitesse de groupe correspondante.

Traitement des conditions de radiation :

Afin de résoudre le problème numériquement, un domaine de calcul de taille finie (figure 4.5) est considéré et des conditions de rayonnement sont nécessaires aux extrémités du domaine (lignes verticales noires en $x = L + L_p$ et $x = -L_n$ sur la figure 4.5) afin d'évacuer d'éventuelles ondes de surface libre. Plusieurs méthodologies existent dans la littérature pour traiter les conditions radiatives et proviennent des écoulements compressibles ([Fabre 2019, Sierra 2020]), hydrodynamique navale ([Bovis 1992, Cho 2000]), rayonnement électromagnétique ([Merewether 1971, Berenger 1994]). Quelques pistes de solutions sont rapidement présentées dans cette section avant une description détaillée de la méthode adoptée.

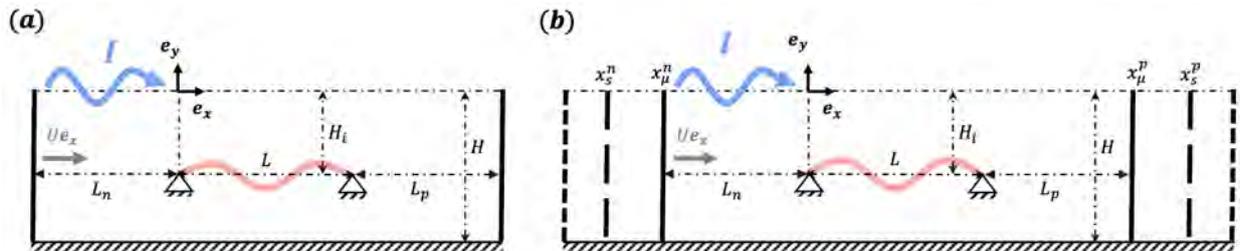


FIGURE 4.5 – Illustration du domaine de calcul (a) configuration pour des conditions de radiation (b) configuration pour *Damping + stretching*.

Condition de rayonnement de Sommerfeld

Cette condition consiste à mettre en œuvre $\partial\phi/\partial x = \pm k\phi$, sur les limites verticales aux extrémités du domaine (figure 4.5(a)). Ce type de condition aux limites est largement utilisé par exemple en hydrodynamique navale en l'absence de courant ([Desmars 2018, Bovis 1992]) car k et ω sont simplement liés (voir l'exemple de cylindre dans le chapitre 3), mais n'est pas adapté pour des problèmes où plusieurs solutions pour k sont possibles.

Complex Mapping / Perfectly Matched Layer

La méthode *complex mapping* consiste à s'assurer que toutes les ondes sont évanescentes en champ lointain. Lorsqu'on cherche des solutions de la forme $e^{ikx}e^{-i\omega t}$, l'idée est de jouer avec x qui est choisi complexe dans le champ lointain pour assurer un comportement évanescent quelle que soit la valeur de $k(\omega)$ [Sierra 2020]. Cependant, pour des solutions spécifiques où plusieurs ondes avec k de signes opposés apparaissent (signe opposé de la vitesse de groupe) et se propagent dans la même direction (même signe de vitesse de groupe), les deux ondes ne peuvent pas être amorties simultanément.

Damping + stretching

Une autre solution consiste à ajouter une dissipation artificielle en champ lointain afin d'amortir les ondes en propagation. Toutes les ondes peuvent être amorties avec cette méthode, mais cela nécessite généralement une zone d'amortissement très large pour éviter complètement la réflexion (lignes noires verticales continues sur la figure 4.5(b)). Pour cette raison, cette méthode est ici complétée par un étirement du domaine qui permet d'agrandir artificiellement la zone d'amortissement (lignes noires verticales discontinues sur la figure 4.5(b)). Dans le cas présent, la dissipation est ajoutée en tant que viscosité artificielle $\mu(x)$ dans la condition dynamique à la surface libre comme précédemment fait dans [Mougel 2017]. La condition (4.5) devient

$$\text{DBC} : \eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + U \frac{\partial\phi}{\partial x} - 2\mu(x) \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right). \quad (4.18)$$

avec le terme de viscosité artificielle $\mu(x)$ défini comme

$$\mu(x) = \begin{cases} \gamma_\mu \tanh \left(\left(\frac{x-x_\mu^n}{L_\mu} \right)^2 \right) & \text{si } x < x_\mu^n \\ 0 & \text{si } x_\mu^n \leq x \leq x_\mu^p \\ \gamma_\mu \tanh \left(\left(\frac{x-x_\mu^p}{L_\mu} \right)^2 \right) & \text{si } x > x_\mu^p \end{cases} \quad (4.19)$$

$\mu(x)$ est égal à zéro dans la région physique $x_\mu^n \leq x \leq x_\mu^p$ (il n'y a pas de dissipation) et égal à une fonction paramétrique dans les régions d'amortissement $x < x_\mu^n$ et $x > x_\mu^p$ comme on peut le voir dans l'équation (4.19). La fonction paramétrique est caractérisée par deux paramètres qui ont l'interprétation suivante. Le paramètre L_μ contrôle la plage de transition de la région physique aux régions artificielles. Le paramètre γ_μ correspond à la valeur constante finale de la viscosité. Par ailleurs, ajouter cette viscosité artificielle a un inconvénient qui est la nécessité d'avoir un domaine très large pour que les ondes de gravité puissent être complètement amorties. Donc ça va coûter cher en temps de calcul. Une solution pour éviter ce problème consiste à utiliser une fonction de mappage $X(x)$ pour étirer la coordonnée x afin d'agrandir la dimension horizontale du domaine physique [Fabre 2019]. La correspondance entre les deux domaines est donnée par la fonction de mappage $X(x)$, définie comme

$$X(x) = \begin{cases} x_s^n + \frac{x-x_s^n}{\left(1 - \left(\frac{x-x_s^n}{L_s}\right)^2\right)^2} & \text{si } x < x_s^n \\ x & \text{si } x_s^n \leq x \leq x_s^p \\ x_s^p + \frac{x-x_s^p}{\left(1 - \left(\frac{x-x_s^p}{L_s}\right)^2\right)^2} & \text{si } x > x_s^p \end{cases} \quad (4.20)$$

Cette fonction laisse la coordonnée x inchangée dans la région $x_s^n \leq x \leq x_s^p$ qui est la région physique, mais elle étend les limites du domaine $x < x_s^n$ et $x > x_s^p$ (lignes noires verticales discontinues sur la figure 4.5(b)). $X(x)$ est caractérisée par le paramètre L_s , qui contrôle l'effet d'étirement associé à la coordonnée x .

4.3.3 Énergie des ondes gravitaires

La densité d'énergie d'une onde linéaire en présence d'un courant correspond à la somme des densités d'énergie cinétique et potentielle de l'onde qui s'écrivent respectivement

$$e_c = \frac{\rho}{2} \int_{-H}^{\eta} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + U \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy \quad (4.21)$$

$$e_p = \int_{-H}^{\eta} \rho g y dy \quad (4.22)$$

En intégrant sur la couche fluide et en moyennant en temps, les équations ci-dessus permettent d'estimer la densité moyenne d'énergie des vagues contenue dans la couche fluide

$$\bar{e} = \frac{\rho g a^2}{2} \frac{\omega}{\omega - Uk}. \quad (4.23)$$

Notons que $\rho g a^2/2$ correspond à la densité d'énergie des vagues en l'absence de courant. Le flux d'énergie moyen à travers une tranche verticale de mer orthogonale à la direction des vagues est alors obtenu comme la densité d'énergie moyenne multipliée par la vitesse de propagation de l'énergie, c'est-à-dire la vitesse de groupe. Cela s'écrit

$$J = \bar{e} c_g = \frac{\rho g}{2} \omega \mathcal{A} \quad (4.24)$$

avec c_g la vitesse de groupe d'une onde gravitaire en présence d'un courant qui s'écrit

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = U \pm \frac{g \tanh(kH) + gH (1 - \tanh(kH)^2)}{2\sqrt{gk \tanh(kH)}}. \quad (4.25)$$

et \mathcal{A} une quantité généralement appelée l'action de la vague [Euvé 2017] et définie comme

$$\mathcal{A} = \frac{c_g}{\omega - Uk} a^2. \quad (4.26)$$

On note que \mathcal{A} et J ont les mêmes signes à condition que $\omega > 0$ ce qui est toujours le cas ici. $J > 0$ signifie que le flux d'énergie des vagues va vers la direction x positive.

Efficacité du système de récupération d'énergie :

Nous définissons l'efficacité de notre système de récupération d'énergie des vagues comme la fraction de la puissance de la vague incidente absorbée par l'ensemble des amortisseurs (Power Take Off : PTO), qui s'écrit

$$E = \frac{\mathcal{P}_c}{J_I} = \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\frac{1}{2} c_i \omega^2 a_{\xi_{c_i}}^2}{\frac{1}{2} \rho g c_{gI} \frac{\omega}{\omega - Uk_I} a_I^2}. \quad (4.27)$$

avec \mathcal{P}_c la puissance moyenne par unité de longueur absorbée par l'ensemble des amortisseurs ($a_{\xi_{c_i}}$ sont les amplitudes de déformation de la membrane à l'emplacement des amortisseurs) et J_I le flux d'énergie associé à la houle incidente qui peut également être interprété comme la puissance des vagues par unité de longueur de crête qui se dirige vers le rivage (généralement donnée en kW/m dans la littérature, et typiquement de l'ordre de $30kW/m$ à la côte atlantique européenne [Mork 2010]). L'efficacité énergétique peut donc être considérée comme la fraction de l'énergie des vagues incidente qui est absorbée par les amortisseurs (qui modélisent l'extraction d'énergie).

Bilan du flux d'énergie :

Dans le cadre actuel où aucun mécanisme de dissipation n'est présent dans le fluide (dans la région physique figure 4.5), la puissance absorbée par le PTO peut également être calculée à partir de la connaissance des déformations de la surface libre en amont et en aval du système de récupération d'énergie.

En régime sous-critique à quatre ondes : pour une onde incidente I (de nombre d'onde $k_I^+ = k_{T_1}^+$), on peut s'attendre à ce que quatre ondes soient excitées en raison de l'interaction avec la membrane : une onde réfléchie k_R^- et trois ondes transmises T_1 , T_2 et T_3 (de nombres d'ondes respectivement $k_{T_1}^+$, $k_{T_2}^+$ et $k_{T_3}^-$) (figure 4.3(b)). Les flux d'énergie pour chaque onde sont obtenus en utilisant la relation (4.24) une fois que chaque valeur de k a été calculée (pour une pulsation et un courant donnés). On trouve que les ondes correspondant à I , T_1 et T_3 sur la figure 4.3 (respectivement R et T_2), ont des flux d'énergie positifs (respectivement négatifs) dans la direction de x positif. Si l'on considère maintenant un domaine fluide autour du récupérateur d'énergie, les flux d'ondes qui sortent du domaine sont donc positifs pour T_1 , R et T_3 ce qui correspond à l'énergie radiée par les ondes loin du système de récupération, et négatifs pour l'onde à énergie négative T_2 et l'onde incidente I . Le bilan énergétique peut s'écrire sous la forme :

$$J_I + J_R = J_{T_1} + J_{T_3} + J_{T_2} + \mathcal{P}_c. \quad (4.28)$$

A noter que dans le cas sans amortissement ($c_i = 0$), on retrouve directement la conservation de l'action des vagues (voir [Euvé 2017], [Bretherton 1968]). L'analyse du signe de J pour les différentes ondes impliquées (comme discuté ci-dessus) conduit alors à

$$E = 1 - T_1^2 - R^2 - T_3^2 + T_2^2. \quad (4.29)$$

et la définition des flux d'énergie conduit finalement à

$$E = 1 - \frac{a_{T_1}^2}{a_I^2} - \frac{|c_g(k_R)\sigma(k_I)|a_R^2}{|c_g(k_I)\sigma(k_R)|a_I^2} - \frac{|c_g(k_{T_3})\sigma(k_I)|a_{T_3}^2}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_3})|a_I^2} + \frac{|c_g(k_{T_2})\sigma(k_I)|a_{T_2}^2}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_2})|a_I^2}. \quad (4.30)$$

avec $\sigma(k) = \omega - Uk$ la pulsation relative et $c_g(k)$ la vitesse de groupe donnée par l'équation (4.25). On remarque que l'équation (4.29) montre que la génération de l'onde T_2 (uniquement possible en présence d'un courant) devrait augmenter l'efficacité énergétique du système.

Dans ce régime sous-critique le coefficient de réflexion R et le coefficient de transmission Tr s'écrivent

$$R = \sqrt{\frac{|c_g(k_R)\sigma(k_I)|}{|c_g(k_I)\sigma(k_R)|}} \frac{|a_R|}{|a_I|}. \quad (4.31)$$

$$Tr = \frac{a_{T_1}}{a_I} - \sqrt{\frac{|c_g(k_{T_2})\sigma(k_I)|}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_2})|}} \frac{|a_{T_2}|}{|a_I|} + \sqrt{\frac{|c_g(k_{T_3})\sigma(k_I)|}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_3})|}} \frac{|a_{T_3}|}{|a_I|}. \quad (4.32)$$

En régime sous-critique à deux ondes et en régime super-critique : pour une onde incidente I (de nombre d'onde $k_I^+ = k_{T_1}^+$), on peut s'attendre à ce que deux ondes soient excitées suite à l'interaction avec la membrane : deux ondes transmises T_1 et T_2 (de nombres d'ondes respectivement $k_{T_1}^+$ et $k_{T_2}^+$) (figure 4.3(c) et (d)). L'équation (4.24) permet de calculer le flux d'énergie de chaque onde. Et dans ce cas on trouve que les ondes I et T_1 ont des flux d'énergie positifs et l'onde T_2 est à flux d'énergie négatif dans la direction de x positif. Le bilan énergétique dans ce cas s'écrit :

$$J_I = J_{T_1} + J_{T_2} + \mathcal{P}_c. \quad (4.33)$$

En prenant en compte les signe de J , nous obtenons

$$E = 1 - T_1^2 + T_2^2. \quad (4.34)$$

L'efficacité dans ces régimes s'écrit

$$E = 1 - \frac{a_{T_1}^2}{a_I^2} + \frac{|c_g(k_{T_2})\sigma(k_I)|a_{T_2}^2}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_2})|a_I^2}. \quad (4.35)$$

avec σ la pulsation relative and c_g la vitesse de groupe définis précédemment.

Dans ces régimes à deux ondes le coefficient de réflexion $R = 0$ et le coefficient de transmission Tr

4.3. Méthodologie et définitions

est donné par la relation suivante

$$Tr = \frac{a_{T_1}}{a_I} - \sqrt{\frac{|c_g(k_{T_2})\sigma(k_I)|}{|c_g(k_I)\sigma(k_{T_2})|} \frac{|a_{T_2}|}{|a_I|}}. \quad (4.36)$$

4.3.4 Méthode des élément finis

Comme dans les précédents chapitres pour résoudre le problème avec la méthode des éléments finis, nous allons transformer ce problème en une formulation faible. Pour cela, nous introduisons le vecteur de fonctions test $[\mathbf{q}_F^*; \mathbf{q}_S^*; \mathbf{q}_M^*]$ associé au vecteur des inconnues $[\mathbf{q}_F; \mathbf{q}_S; \mathbf{q}_M]$. Avec $\mathbf{q}_F = [\mathbf{q}_F^L; \mathbf{q}_F^D; \mathbf{q}_F^R]$ et $\mathbf{q}_S = [\mathbf{q}_S^L; \mathbf{q}_S^D; \mathbf{q}_S^R]$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_F^D &= [\phi_D; p_D] &\longrightarrow &\mathbf{q}_F^{D*} = [\phi_D^*; p_D^*] \\ \mathbf{q}_F^R &= [\phi_R; p_R] &\longrightarrow &\mathbf{q}_F^{R*} = [\phi_R^*; p_R^*] \\ \mathbf{q}_S^D &= [\eta_D] &\longrightarrow &\mathbf{q}_S^{D*} = [\eta_D^*] \\ \mathbf{q}_S^R &= [\eta_R] &\longrightarrow &\mathbf{q}_S^{R*} = [\eta_R^*] \\ \mathbf{q}_M &= [\xi] &\longrightarrow &\mathbf{q}_M^* = [\xi^*] \end{aligned}$$

Problème diffracté : la formulation faible du problème fluide de diffraction est obtenue en multipliant les équations de Laplace (4.1) et de Bernoulli (4.2) par les fonctions test associées et en intégrant sur le domaine Ω :

$$\forall \mathbf{q}_F^{D*} = [\phi_D^*; p_D^*], \quad \iint_{\Omega} \phi_D^* (\mathcal{LAP}) dv + \iint_{\Omega} p_D^* (\mathcal{BER}) dv = 0 \quad (4.37)$$

A la surface libre la formulation faible est obtenue en multipliant la condition dynamique donnée par l'équation (4.18) par la fonction test \mathbf{q}_S^{D*} et en intégrant sur la surface libre

$$\forall \mathbf{q}_S^{D*} = [\eta_D^*], \quad \int_S \eta_D^* (\mathcal{DBC}) ds = 0 \quad (4.38)$$

Ainsi en utilisant la formule de Green, on intègre par partie le terme en laplacien pour tenir compte des conditions aux limites. En utilisant les conditions aux limites, la formulation faible du problème diffracté complet s'écrit :

$$\begin{aligned} &\left[\begin{aligned} &-\iint_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi_D^* dv - \int_M \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \phi_D^* ds + \int_S \left(-i\omega \eta_D + U \frac{\partial \eta_D}{\partial x} \right) \phi_D^* ds \\ &+ \iint_{\Omega} p_D p_D^* dv + \rho \iint_{\Omega} \left(-i\omega \phi_D + U \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right) p_D^* dv \\ &+ \rho g \int_S \eta_D \eta_D^* ds - \int_S p_D \eta_D^* ds + 2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2 \phi_D}{\partial x^2} \eta_D^* ds = 0 \end{aligned} \right. \quad (4.39) \end{aligned}$$

En regroupant les inconnues en une partie fluide $\mathbf{q}_F^D = [\phi_D; p_D]$ et une partie de surface $\mathbf{q}_S^D = [\eta_D]$, le problème diffracté peut être défini sous forme la forme matricielle suivant

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}_D^{F,F} & \mathcal{A}_D^{S,F} \\ \mathcal{A}_D^{F,S} & \mathcal{A}_D^{S,S} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_D} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F^D \\ \mathbf{q}_S^D \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_D} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{C}_D^F \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_D} \quad (4.40)$$

où les blocs des ces matrice sont des opérateurs bilinéaires qui s'écrivent comme

$$\mathcal{A}_D^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\phi_D \phi_D} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{\phi_D p_D} & \mathcal{A}^{p_D p_D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \nabla \phi_D \cdot \nabla \phi_D^* dv & 0 \\ \rho \iint_{\Omega} \left(-i\omega \phi_D + U \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right) p_D^* dv & \iint_{\Omega} p_D p_D^* dv \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\mathcal{A}_D^{S,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\eta_D \phi_D} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S \left(-i\omega \eta_D + U \frac{\partial \eta_D}{\partial x} \right) \phi_D^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathcal{A}_D^{F,S} = (\mathcal{A}^{\phi_D \eta_D} \quad \mathcal{A}^{p_D \eta_D}) = \left(2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2 \phi_D}{\partial x^2} \eta_D^* ds \quad - \int_S p_D \eta_D^* ds \right) \quad (4.43)$$

$$\mathcal{A}_D^{S,S} = (\mathcal{A}^{\eta_D \eta_D}) = (\rho g \int_S \eta_D \eta_D^* ds) \quad (4.44)$$

$$\mathcal{C}_D^F = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{\phi_D} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \phi_D^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Problème radié : de la même manière, en multipliant les équations de Laplace (4.1) et de Bernoulli (4.2) par les fonctions test \mathbf{q}_F^{R*} et en intégrant sur le domaine Ω . La formulation faible du problème fluide de radiation s'écrit :

$$\forall \mathbf{q}_F^{R*} = [\phi_R^*; p_R^*], \quad \iint_{\Omega} \phi_R^* (\mathcal{LAP}) dv + \iint_{\Omega} p_R^* (\mathcal{BER}) dv = 0 \quad (4.46)$$

Ensuite, nous multiplions la condition aux limites dynamique (4.18) par la fonction test \mathbf{q}_S^{R*} et en intégrant sur la surface libre, nous obtenons :

$$\forall \mathbf{q}_S^{R*} = [\eta_R^*], \quad \int_S \eta_R^* (\mathcal{DBC}) ds = 0 \quad (4.47)$$

Ainsi la formule de Green et les conditions aux limites permettent d'obtenir la formulation faible du problème radié complet suivante :

$$\begin{cases} - \iint_{\Omega} \nabla \phi_R \cdot \nabla \phi_R^* dv + \int_M \left(-i\omega \xi + U \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \phi_R^* ds + \int_S \left(-i\omega \eta_R + U \frac{\partial \eta_R}{\partial x} \right) \phi_R^* ds \\ + \iint_{\Omega} p_R p_R^* dv + \rho \iint_{\Omega} \left(-i\omega \phi_R + U \frac{\partial \phi_R}{\partial x} \right) p_R^* dv \\ + \rho g \int_S \eta_R \eta_R^* ds - \int_S p_R \eta_R^* ds + 2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2 \phi_R}{\partial x^2} \eta_R^* ds = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

En utilisant l'approximation $\mathbf{q}_R = \sum_{l=1}^{N_M} \xi_l \mathbf{q}_{Rl}$, avec \mathbf{q}_{Rl} est le problème élémentaire radié par la membrane lorsqu'elle est forcée par le $l^{\text{ème}}$ mode dans le vides et en notant $\mathbf{q}_{Rl}^* = [\phi_{Rl}^*; p_{Rl}^*; \eta_{Rl}^*]$ le vecteur de fonctions test associée à \mathbf{q}_{Rl} . L'équation (4.48) devient la formulation faible de N_M problèmes radiés élémentaires qui peuvent s'écrire sous les sous formes matricielles suivantes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{Rl}^{F,F} & \mathcal{A}_{Rl}^{S,F} \\ \mathcal{A}_{Rl}^{F,S} & \mathcal{A}_{Rl}^{S,S} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{Rl}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_{Rl}^F \\ \mathbf{q}_{Rl}^S \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_{Rl}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{C}_{Rl}^F \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}_{Rl}}, \quad l = 1 \dots N_M \quad (4.49)$$

où les blocs des ces matrices sont données par

$$\mathcal{A}_{Rl}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\phi_{Rl} \phi_{Rl}} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{\phi_{Rl} p_{Rl}} & \mathcal{A}^{p_{Rl} p_{Rl}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \iint_{\Omega} \nabla \phi_{Rl} \cdot \nabla \phi_{Rl}^* dv & 0 \\ \rho \iint_{\Omega} \left(-i\omega \phi_{Rl} + U \frac{\partial \phi_{Rl}}{\partial x} \right) p_{Rl}^* dv & \iint_{\Omega} p_{Rl} p_{Rl}^* dv \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\mathcal{A}_{Rl}^{S,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\eta_{Rl} \phi_{Rl}} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S \left(-i\omega \eta_{Rl} + U \frac{\partial \eta_{Rl}}{\partial x} \right) \phi_{Rl}^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

$$\mathcal{A}_{Rl}^{F,S} = (\mathcal{A}^{\phi_{Rl} \eta_{Rl}} \quad \mathcal{A}^{p_{Rl} \eta_{Rl}}) = \left(2 \int_S \mu(x) \frac{\partial^2 \phi_{Rl}}{\partial x^2} \eta_{Rl}^* ds \quad - \int_S p_{Rl} \eta_{Rl}^* ds \right) \quad (4.52)$$

$$\mathcal{A}_{Rl}^{S,S} = (\mathcal{A}^{\eta_{Rl} \eta_{Rl}}) = (\rho g \int_S \eta_{Rl} \eta_{Rl}^* ds) \quad (4.53)$$

$$\mathcal{C}_{Rl}^F = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{\phi_{Rl}} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_M \left(-i\omega \tilde{\xi}_l + U \frac{\partial \tilde{\xi}_l}{\partial x} \right) \phi_{Rl}^* ds \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

Problème structurel : pour l'équation de la membrane la formulation faible est obtenue en multipliant l'équation (4.3) par la fonction test associée \mathbf{q}_M^* et en intégrant à la surface de la structure

$$\forall \mathbf{q}_M^* = [\zeta^*], \quad \int_M \zeta^* (\mathcal{BEM}) ds = 0 \quad (4.55)$$

4.4. Ordres de grandeur et validations

La formulation faible structurelle s'écrit :

$$-T \int_M \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi^* ds - \omega^2 \rho_m \int_M \xi \xi^* ds + \int_M [p] \xi^* ds + i\omega \sum_{n=1}^{N_c} c_n \int_M \xi|_{x=x_{c_n}} \delta(x - x_{c_n}) \xi^* ds = 0 \quad (4.56)$$

Ce problème structurel s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\underbrace{(\mathcal{A}^{M,M})}_{\mathbf{A}_M} \underbrace{(\mathbf{q}_M)}_{\mathbf{q}_M} = \underbrace{(\mathcal{C}^M)}_{\mathbf{C}_M} \quad (4.57)$$

avec

$$\mathcal{A}^{M,M} = (\mathcal{A}_{ij}^{\xi\xi}) = \left(\begin{array}{c} -T \int_M \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \xi^* ds - \omega^2 \rho_m \int_M \xi \xi^* ds + \int_M [p_R] \xi^* ds \\ + i\omega \sum_{n=1}^{N_c} c_n \int_M \xi|_{x=x_{c_n}} \delta(x - x_{c_n}) \xi^* ds \end{array} \right) \quad (4.58)$$

$$\mathcal{C}^M = (\mathcal{C}^\xi) = (\int_M [p_I + p_D] \xi^* ds) \quad (4.59)$$

Comme dans les autres chapitres, les problèmes donnés par les équations (4.40) et (4.49) sont ensuite discrétisés en projetant le vecteur d'état sur une base de taille finie. Pour les inconnues fluides \mathbf{q}_F , une méthode par éléments finis est utilisée. Le domaine est discrétisé en construisant un maillage non structuré de cellules triangulaires. Les inconnues sont approximées à l'aide d'éléments finis quadratiques par morceaux (P2). Les inconnues de surface libre \mathbf{q}_S sont approximées à l'aide d'éléments finis linéaires par morceaux (P1). Par contre, comme dans les chapitres 1 et 2, l'inconnue de membrane \mathbf{q}_M est approximée par une méthode de type Galerkin, qui consiste à projeter la fonction sur la base des fonctions propres de la membrane dans le vide (définie par $\tilde{\xi}_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ avec $n = 1, 2, \dots$). La génération du maillage, la construction de tous les blocs matriciels et l'assemblage de la matrice complète sont entièrement réalisés à l'aide du logiciel d'éléments finis FreeFem++ [Hecht 2012].

4.4 Ordres de grandeur et validations

4.4.1 Ordres de grandeur

Vagues/courant incident

Dans cette sous section nous allons donner des ordres de grandeurs des différents paramètres impliqués afin d'identifier les régimes d'intérêt pour cette étude. La profondeur de la couche fluide pour l'application considérée est typiquement de l'ordre de $H = 50m$ ($5m$ cependant dans [Alam 2012]). La longueur des ondes de gravité/de la houle varie de $1.5m$ à $900m$ [Toffoli 2017], avec une longueur d'onde dominante typiquement de l'ordre de $100m$ (avec une onde de flux d'énergie moyenne typique associée de $J \approx 30kW/m$ sur la côte ouest européenne [Mork 2010]). Dans notre étude, l'idée est de considérer que la longueur de la membrane $L = H$, ce qui correspond à une longueur de membrane d'environ la moitié de la longueur d'onde des ondes de surface typiquement rencontrées ($\Lambda \approx 100m$), et nous supposons une immersion $H_i = 0.2H$ suivant [Desmars 2018]. Nous étudions ensuite une gamme assez large de longueur d'onde entrante possible autour de cette valeur dominante avec $\omega\sqrt{H/g}$ dans la gamme $[0.3, 4]$ (correspond à la longueur d'onde dans la gamme d'onde de gravité $[20, 900]m$, avec la valeur minimale de $20m$ correspondant à $H_i = 0.2H = 10m$ car la structure ne devrait pas ressentir la vague de manière significative si $\Lambda < 2H_i$). Comme dans [Desmars 2018] H_i est actuellement choisi comme compromis entre une efficacité de captage d'énergie élevée et un faible risque de dommages sur le système lors d'événements extrêmes.

Concernant les ordres de grandeur des courants de marée sur la côte ouest de l'Europe, les valeurs maximales moyennes en profondeur au cours d'une année sont supérieures à $2m/s$ dans très peu d'endroits [Guillou 2018], et nos investigations se limiteront donc à la gamme $[0; 2]m/s$. Cette gamme de courants de vitesse, ainsi que la profondeur de mer considérée conduit au nombre de Froude suivant $Fr = U/\sqrt{gH} \in [0; 0.3]$. Les états de mer d'intérêt pour les applications correspondent donc à $\omega\sqrt{H/g} \in [0.3; 4]$ et $Fr \in [0; 0.3]$. Ceci correspond au régime sous-critique sur la figure 4.3 et nous nous concentrons par conséquent sur les configurations sous-critiques (illustrés par la figure 4.4(a)) dans la suite de ce chapitre.

Propriétés de la membrane

Pour les propriétés de la membrane, nous considérons un matériau avec une densité proche de celle de l'eau et une épaisseur de membrane $e = 5\text{cm}$, ce qui conduit à $\rho_m = 1 \times 10^{-3}$. A noter que nous fixons l'immersion $H_i = 0.2$ qui constitue un compromis entre éviter les charges importantes existant à la surface libre et récupérer l'énergie des vagues qui est d'autant plus abondante, dans une colonne d'eau donnée, qu'on s'approche de la surface libre. Compte tenu de la courte distance entre le système de récupération et la surface de l'eau et du fait que la membrane est fixée tout autour de ses bords, le système de récupération étudié serait le mieux adapté aux régimes d'eau de profondeur intermédiaire (relativement peu profonde) afin de permettre l'installation d'une structure de support (pour maintenir les extrémités fixes) sur le fond marin à des coûts de fabrication raisonnables. Notre étude consiste à optimiser c_i et x_{c_i} dans deux cas, dans premier temps avec un seul amortisseur et dans un second temps avec deux amortisseurs, pour un état de mer donné (on suppose que les sondes entourant le dispositif sont capables d'informer en temps réel le système de la nature du courant et de l'onde incidente, et on suppose que l'amortissement et sa position peuvent être facilement adaptés).

Paramètres sans dimensions

Dans la suite de cette étude, les échelles de longueur, de temps et de masse sont choisies respectivement comme H , $\sqrt{H/g}$ et ρH^3 . Les paramètres adimensionnels se divisent en deux familles. D'une part les paramètres,

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{Hg}}, \quad \omega^* = \omega \sqrt{H/g}. \quad (4.60)$$

correspondants respectivement au nombre de Froude et à la pulsation adimensionnelle de l'onde incidente. Et d'autre part les paramètres caractérisant les propriétés du système de récupération ainsi que son immersion :

$$\text{T}^* = \frac{\text{T}}{\rho g H^2}, \quad \alpha = \frac{\rho H}{\rho_m}, \quad c_i^* = \frac{c_i}{\rho \sqrt{gH}}, \quad (4.61)$$

$$L^* = \frac{L}{H}, \quad x_{c_i}^* = \frac{x_{c_i}}{H}, \quad H_i^* = \frac{H_i}{H}. \quad (4.62)$$

Notons que le déplacement de la membrane ξ et le potentiel des vitesses ϕ seront normalisés respectivement par a_I and $a_I \sqrt{gH}$. Les astérisques (*) seront omises et toutes les variables sont sans dimensions dans le reste du chapitre.

4.4.2 Validation de la méthode

Afin de valider notre approche, différents cas limites sont confrontés à des résultats de la littérature en s'intéressant à l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de la pulsation d'onde incidente ω . Tout d'abord, dans le but de comparer avec les résultats de la littératures.

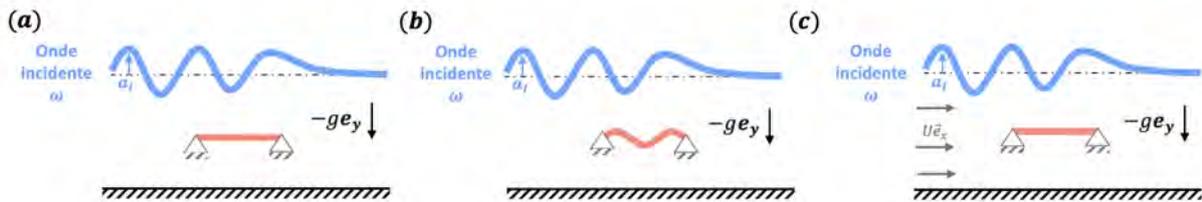


FIGURE 4.6 – Illustration des configurations (a) plaque rigide en absence d'un courant incident (b) membrane flexible en absence d'un courant incident (c) plaque rigide en présence d'un courant incident.

Configuration (a) : La première configuration consiste en l'étude de l'interaction d'une onde incidente de fréquence ω avec une membrane rigide de longueur L immergée parallèlement à la surface libre à une profondeur H_i (figure 4.6(a)).

4.4. Ordres de grandeur et validations

Configuration (b) : La seconde configuration consiste en l'étude de l'interaction d'une onde incidente de fréquence ω avec une membrane souple de longueur L immergée parallèlement à la surface libre à une profondeur H_i . La membrane est simplement appuyée à ses extrémités (voir figure 4.6(b)).

Configuration (c) : La dernière configuration consiste en l'étude de l'interaction entre un écoulement incident modélisé par une onde de fréquence ω et un courant incident uniforme et une plaque immergée de longueur L (voir figure 4.6(c)).

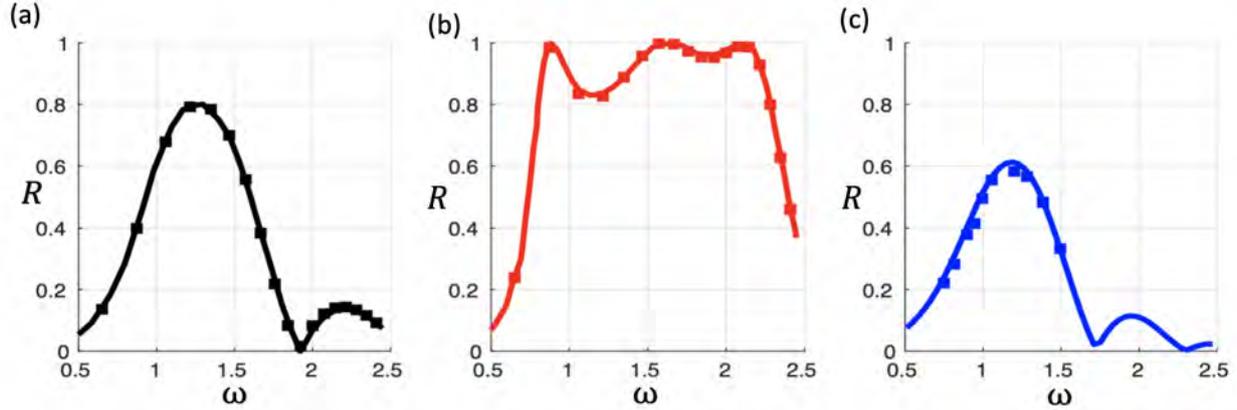


FIGURE 4.7 – Coefficient de réflexion en fonction de ω en lignes continues les résultats de cette étude. (a) cas rigide ($T = \infty$) sans courant ($Fr = 0$) pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$, comparaison à [McIver 1985] (symboles noirs) (b) cas flexible ($T = 0.15$) sans courant ($Fr = 0$) pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$, comparaison à [Cho 1998] (symboles rouges). (c) cas rigide ($T = \infty$) avec courant ($Fr = 0.05$) pour $L = 1.25$, $H_i = 0.35$ et $\alpha = 20$, comparaison à [Lin 2014] (symboles bleus).

Le premier cas de validation est effectué pour une membrane rigide ($T \rightarrow \infty$), sans courant et sans amortissement ($Fr = 0$ et $c_i = 0$). Dans ces limites, l'évolution du coefficient de réflexion en fonction de ω est tracée sur la figure 4.7(a) et comparée aux résultats théoriques par [McIver 1985] pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$. L'excellent accord entre les résultats permet de valider notre approche numérique pour la composante de diffraction en l'absence de courant. Dans son étude, [McIver 1985] montre que les ondes incidentes peuvent être principalement réfléchies ou entièrement transmises selon le rapport entre l'onde et la longueur de membrane (onde principalement transmise pour $L = n\Lambda/2$ avec n un entier).

Pour une membrane flexible mais en absence de courant, nos résultats sont comparés aux résultats de [Cho 2000] sur la figure 4.7(b) pour $L = 0.5$, $H_i = 0.2$ et $\alpha = 10^3$ avec encore un excellent accord. Les cas rigides et flexibles montrés respectivement sur les figures 4.7(a) et (b) sont réalisés pour les mêmes paramètres et permettent donc de voir directement que la flexibilité a un fort impact sur le comportement de l'onde (l'effet de la tension est décrit dans l'étude de [Cho 2000]).

Afin de valider notre approche dans un cas avec un courant, une comparaison dans le cas rigide, mais avec courant, est proposée sur la figure 4.7(c) où l'évolution de R est comparée aux résultats obtenus numériquement en utilisant la méthode des éléments finis de frontière par [Lin 2014] pour $Fr = 0.05$, $L = 1.25$, $H_i = 0.35$ et $\alpha = 20$. Cela permet aussi d'être plus confiant sur la pertinence de notre approche linéaire puisque les non-linéarités sont prises en compte dans [Lin 2014].

Notez que dans la limite des faibles Froude (faible courant), il semble approprié de négliger le sillage déversé vers l'aval de la structure comme [Koo 2007, Lin 2014].

4.4.3 Étude du champ de surface en l'absence de l'amortisseur

Pour des paramètres choisis correspondants à $L = 1$, $H_i = 0.2$, $T = 0.05$, $\alpha = 10^3$ et $c_1 = c_2 = 0$, nous avons tracé sur les figures 4.9 et 4.8 des diagrammes spatio-temporels du déplacement de la surface libre pour respectivement ($Fr = 0.2$ et $\omega = 0.6$) et ($Fr = 0.2$ et $\omega = 1.7$).

En régime sous-critique à deux ondes (illustré sur la figure 4.4(a)), les résultats correspondant au cas de $Fr = 0.2$ et $\omega = 1.7$ sont illustrés sur la figure 4.8. La figure 4.8(a) montre un diagrammes spatio-temporel

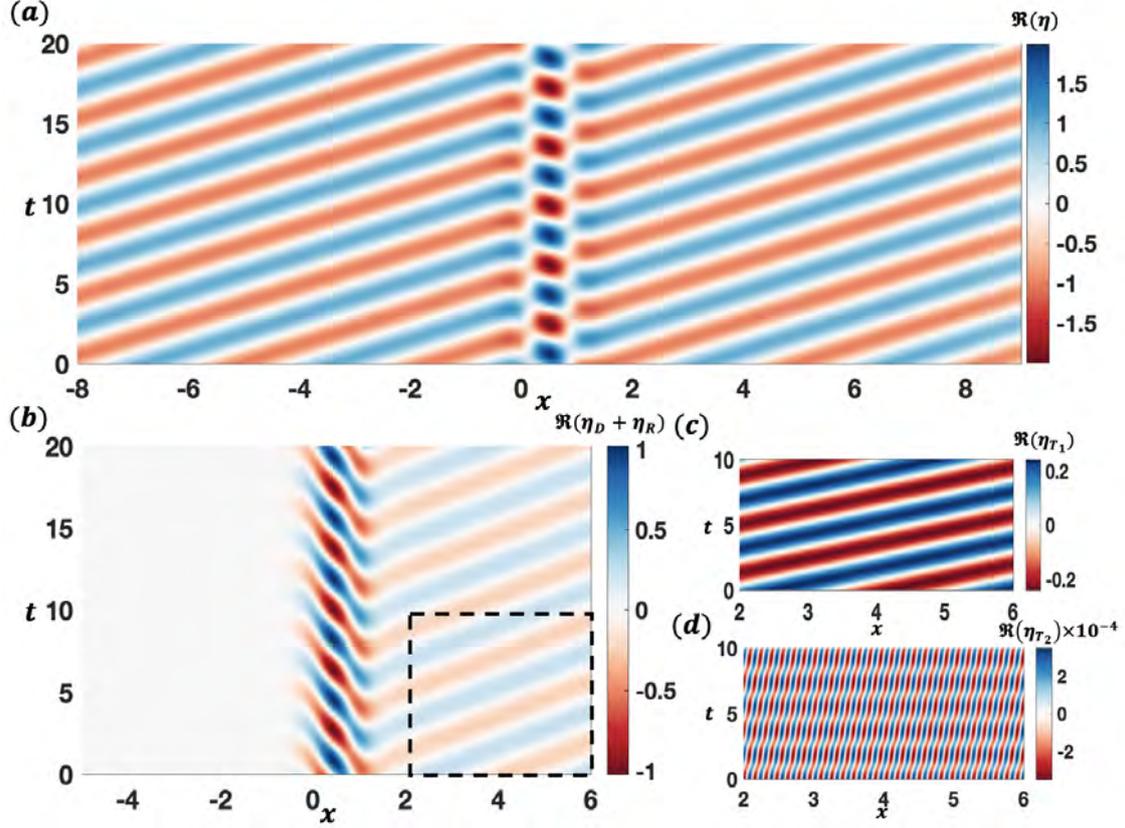


FIGURE 4.8 – Diagramme spatio-temporel de la déformation de la surface libre pour $Fr = 0.2$, $\omega = 1.7$ (a) la déformation du champ total (b) la déformation du champ diffracté plus le champs radié (c) l'onde transmise T_1 de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 1.86$ (d) l'onde transmise T_2 de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 40.2$.

de la déformation totale de la surface ($\eta = \eta_I + \eta_D + \eta_R$), la figure 4.8(b) montre un diagrammes spatio-temporel de la déformation de la surface $\eta_D + \eta_R$. Dans ce cas on voit bien qu'il n'y a pas de déformation en amont de la membrane. Par contre en aval de la membrane la déformation de surface libre correspond à une somme de deux ondes transmises, T_1 l'onde longue de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 1.86$ (figure 4.8(c)) et T_2 l'onde courte de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 40, 2$ (figure 4.8(d)).

Les résultats de la figure 4.9 correspondent à un cas du régime sous-critique à quatre ondes (illustré sur la figure 4.4(a)) pour $Fr = 0.2$, $\omega = 0.6$. La déformation de la surface totale et celle de la somme des problèmes diffracté et radié sont représentées par un diagramme spatio-temporel respectivement sur les figures 4.9(a) et 4.9(b). Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.9(c) la déformation amont correspond à une seule onde prorogative tandis que le signal de déformation en aval est une déformation plus complexe qui représente une somme de plusieurs ondes. Une coupe de l'onde qui se trouve en amont est représentée en diagramme spatio-temporel sur la figure 4.9(e). On voit bien qu'elle correspond à l'onde réfléchi R du nombre d'onde $k_R^- = -0, 86$. Pour le signal qui se trouve en aval de la membrane, nous utilisons une méthode lagrangienne qui nous permet de récupérer les amplitudes des différentes ondes constituantes ce signal. Il représente une composition de trois ondes transmises, T_1 de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 0.52$ (figure 4.9(c)), T_2 de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 30.71$ (figure 4.9(d)) et T_3 d'onde nombre $k_{T_3}^- = -18.51$ (figure 4.9(f)).

Une fois les différentes amplitudes associées à chaque onde sont calculées, nous pouvons ensuite calculer l'efficacité récupérée par notre système à partir de l'équation (4.30) pour le régime sous-critique à quatre ondes et l'équation (4.35) pour le régime sous-critique à deux ondes. Notons que pour les deux exemples présentés précédemment, comme attendu nous trouvons une efficacité nulle ($E = 0$) étant donné que nous avons un problème conservatif en l'absence d'amortissement ($c_i = 0$).

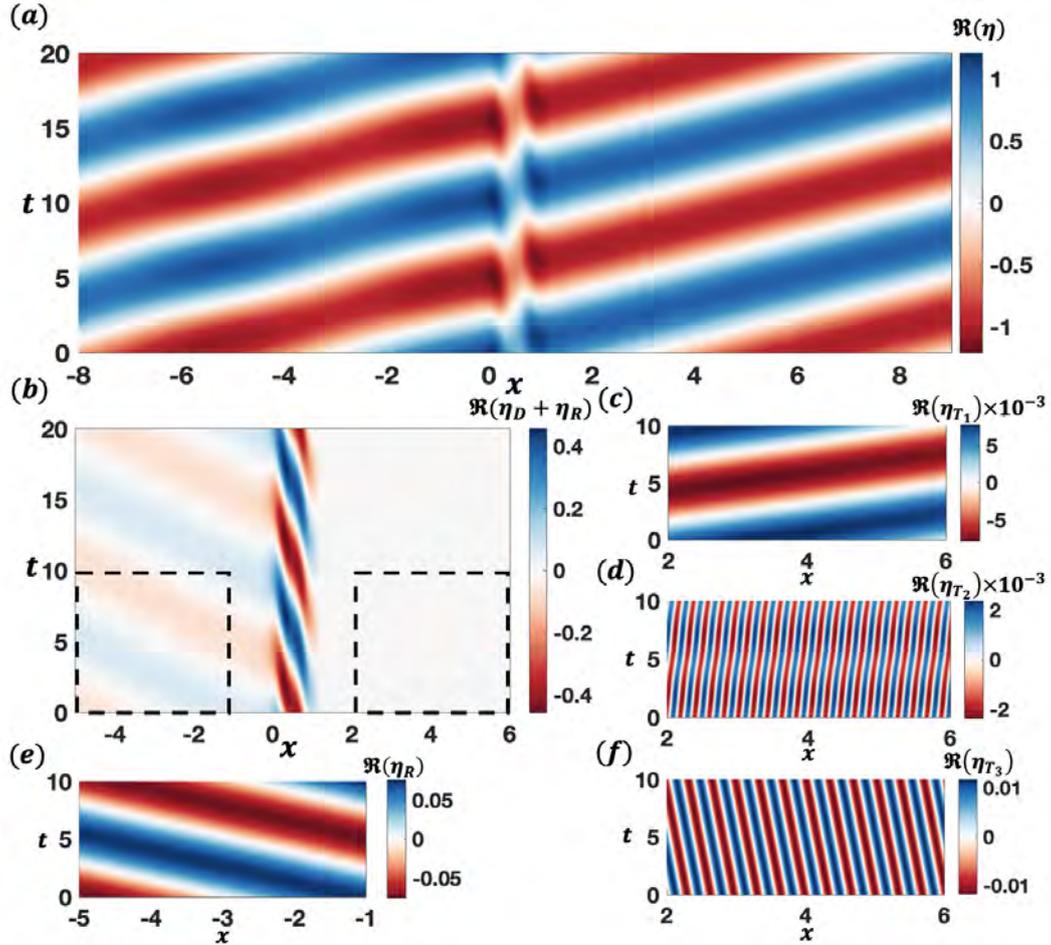


FIGURE 4.9 – Diagramme spatio-temporel de la déformation de la surface libre pour $Fr = 0.2$ et $\omega = 0.6$ (a) la déformation totale (b) la déformation du champ diffracté plus le champs radié (c) l'onde transmise T_1 de nombre d'onde $k_{T_1}^+ = 0.52$ (d) l'onde transmise T_2 de nombre d'onde $k_{T_2}^+ = 30.71$ (e) l'onde réfléchie R de nombre d'onde $k_R^- = -0.86$ (f) l'onde transmise T_3 de nombre d'onde $k_{T_3}^- = -18.51$.

Nombre de Froude Fr	Fréquence ω	Efficacité Eq. (4.27)	Efficacité Eq. (4.30)
0	0.6	0	11×10^{-4}
	1.7	0	7.9×10^{-4}
	2.5	0	37×10^{-4}
0.05	0.6	0	10×10^{-4}
	1.7	0	2.3×10^{-4}
	2.5	0	25×10^{-4}
0.2	0.6	0	7×10^{-4}
	1.7	0	5×10^{-4}
	2.5	0	2.5×10^{-4}

TABLE 4.1 – Conservation d'énergie en l'absence d'amortissement pour différentes valeurs de Fr et ω .

Dans le tableau (4.1) nous avons mis les résultats d'efficacité pour trois valeurs de Froude Fr (0, 0.05 et 0.2) et trois valeurs particulières de pulsation ω (0.6, 1.7 et 2.5). Ces résultats montrent bien sans surprise que nous avons une conservation d'énergie. Par ailleurs, le tableau (4.1) montre aussi que le bilan de flux d'énergie développé précédemment est bien validé puisque l'équation (4.30) nous donne une efficacité nulle. La comparaison en présence d'un amortissement sera faite dans la section suivante.

4.5 Résultats et interprétation

4.5.1 Effet de l'écoulement incident

Dans cette section l'immersion et les propriétés du récupérateur sont fixées égales à $L = 1$, $H_i = 0.2$, $T = 0.05$, $\alpha = 10^3$, avec un seul amortisseur en $x_{c_1} = 0.5$ pour un coefficient de récupération d'énergie $c_1 = 0.2$ et on se concentre sur l'effet de l'écoulement incident paramétré par la pulsation de l'onde incidente ω et le nombre de Froude Fr .

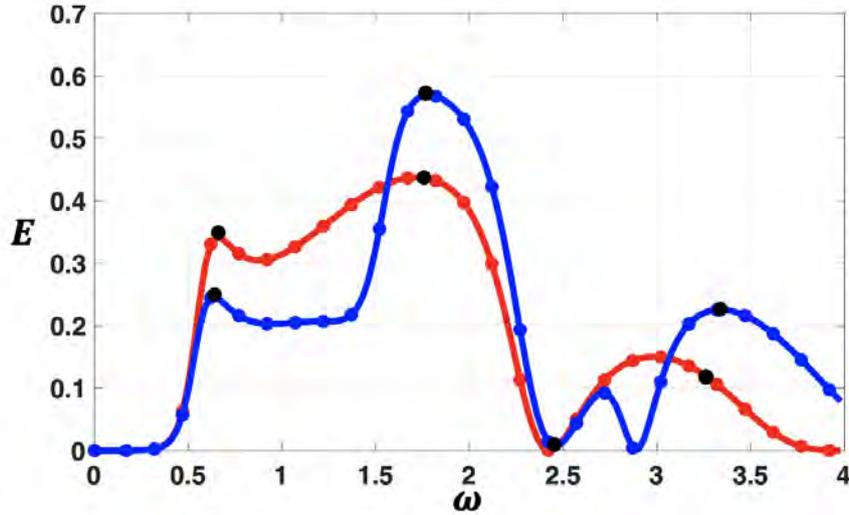


FIGURE 4.10 – Efficacité du récupérateur d'énergie en fonction de la pulsation ω en rouge en absence d'un courant ($Fr = 0$) en bleu en présence d'un courant ($Fr = 0.05$). Les lignes continues correspondent à E en utilisant l'équation (4.27) et les symboles en utilisant l'équation (4.30).

La figure 4.10 compare l'efficacité du convertisseur en fonction de la pulsation ω en absence de courant incident ($Fr = 0$) et en présence d'un faible courant ($Fr = 0.05$). Pour des pulsations incidentes inférieures à 2.5 l'allure de l'efficacité est qualitativement la même avec et sans courant. Une efficacité nulle est obtenue dans les deux cas pour des pulsations inférieures à 0.4, ce qui s'explique par le fait que les ondes incidentes sont très longues devant la taille de la membrane de sorte que l'onde se propage sans interagir avec le récupérateur (on vérifie bien que $R = 0$ et $Tr = 1$). Pour des pulsations plus importantes, différents pics et creux d'efficacité sont obtenus et analysés dans ce qui suit en se focalisant sur la structure des modes obtenus. Notons qu'un maximum d'efficacité est obtenu pour $\omega = 1.72$ ($Fr = 0$) et $\omega = 1.78$ ($Fr = 0.05$), i.e. pour des fréquences relativement proches dans les cas avec et sans courant. De façon intéressante on constate de plus que la valeur du maximum d'efficacité augmente de l'ordre de 13% lorsque le courant est présent ($E = 0.44$ pour $Fr = 0$ contre $E = 0.57$ pour $Fr = 0.05$).

La figure 4.11(a) représente l'enveloppe du déplacement de la membrane au niveau des différents pics/-creux principaux matérialisés par des points noirs sur la figure 4.10, et une généralisation pour l'ensemble des fréquences est montrés sur la figure 4.11(b). On constate sur la figure 4.11(a) que les différents pics/creux d'efficacité sont associés à des dynamiques de membrane très différentes.

Le premier pic de la figure 4.10 obtenu pour une pulsation d'environ 0.6 (que ce soit avec ou sans courant) est associé à l'excitation du premier mode de vibration de la membrane. L'enveloppe de la membrane tracée sur la figure 4.11(a) pour $\omega = 0.6$ environ montre en effet que la vibration de la structure prend une forme très proche de celle du premier mode vibratoire, avec une amplitude d'environ $1.76a_I$ (avec a_I l'amplitude de la houle incidente) pour $Fr = 0$, et $1.66a_I$ pour $Fr = 0.05$. Cette différence d'amplitude explique la baisse d'efficacité obtenue pour ce pic sur la figure 4.10 dans le cas où un courant est présent.

D'autre part, le creux d'efficacité obtenu en $\omega = 2.44$ ($Fr = 0$) et $\omega = 2.46$ ($Fr = 0.05$) sur la figure 4.10 se comprend au vu des déplacements de la membrane montrés sur 4.11 : à ces fréquences l'onde incidente excite essentiellement le deuxième mode vibratoire de la membrane et un nœud de déplacement est ainsi obtenu au niveau du récupérateur (au centre de la membrane). Notons cependant une légère asymétrie dans

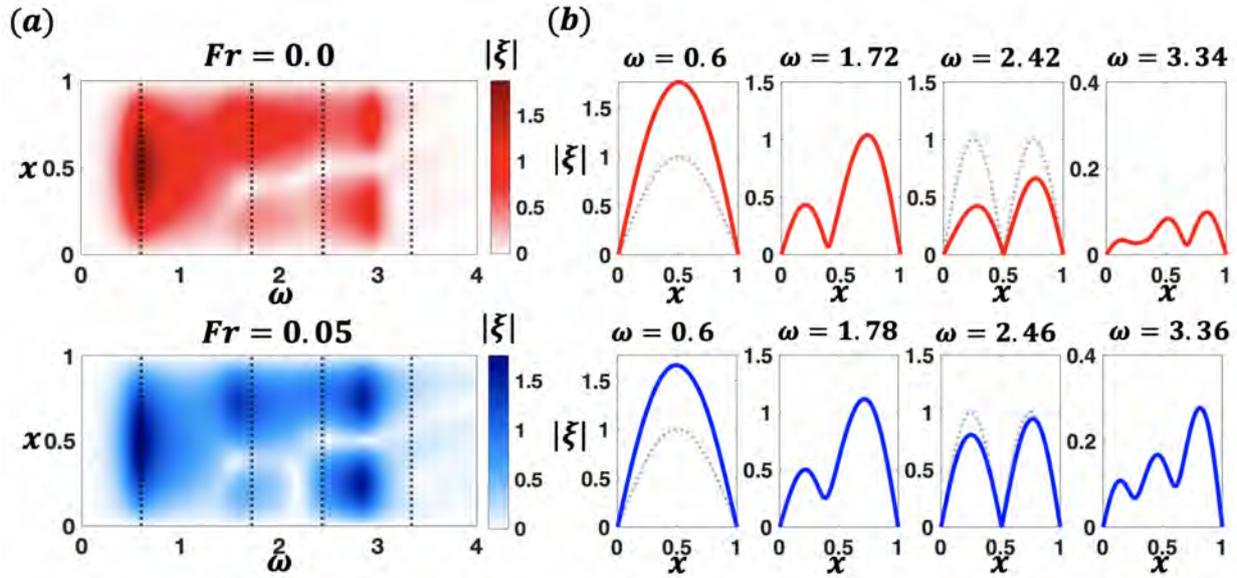


FIGURE 4.11 – Module du déplacement de la membrane en fonction de la pulsation ω et la position x (a) carte dans l’espace $\omega - x$ (b) courbes associées aux points noirs dans la figure 4.10. (haut) $Fr=0$ (bas) $Fr=0.05$.

la structure de la membrane obtenue dans ce cas.

Le pic principal obtenu sur la figure 4.10 et correspondant au maximum d’efficacité se situe à $\omega = 1.73$ ($Fr = 0$) et $\omega = 1.78$ ($Fr = 0.05$), i.e. pour des fréquences incidentes intermédiaires entre les valeurs associées à l’excitation des deux premiers modes de vibrations. La structure associée est montrée sur la figure 4.11 (enveloppe de la membrane) et complétée par la structure de la déformation de la surface libre et le champ de pression dans le domaine fluide sur la figure 4.12. On constate que la déformée de la membrane correspond essentiellement à une combinaison des deux premiers modes vibratoires.

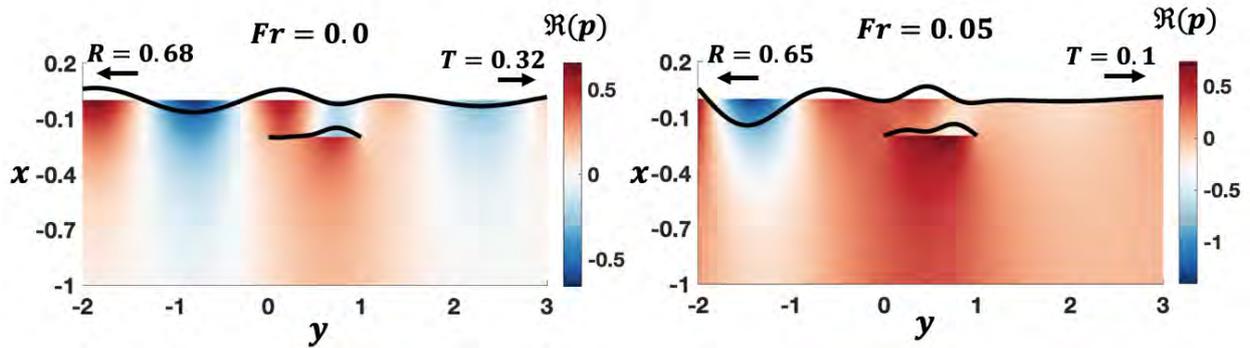


FIGURE 4.12 – Structure des modes associés au rendement maximal pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0,05$ (b). Pression instantanée et déplacements associés (surface libre et membrane).

Comme mentionné précédemment et contrairement à ce qui a été discuté pour le pic associé au premier mode de vibration, l’effet du courant induit une augmentation significative, de l’ordre de 13%, de l’efficacité du dispositif à cette fréquence. Même si la structure de la membrane obtenue semble proche pour les deux valeurs de Fr étudiées, la pondération des modes associée induit des déplacements au niveau de l’amortisseur plus importants dans le cas $Fr = 0.05$ (figure 4.11(a)). De façon plus précise, la figure 4.12 montre que la présence du courant a peu d’effet sur le coefficient de réflexion, mais entraîne cependant une diminution importante du coefficient de transmission qui passe de 0.32 à 0.1. On en conclut ainsi que dans le cas présent le courant induit une augmentation d’efficacité via une diminution de l’énergie radiée par les ondes de surface transmises en aval du dispositif.

De façon intéressante ce maximum d’efficacité n’est pas directement associé à l’excitation d’un mode

propre pur de la structure, et ne semble donc pas directement associé aux caractéristiques temporelles de la structures flexible. Au vu de la figure 4.12(a), il semble que ce pic se produise plutôt pour des ondes incidentes telles que la longueur d'onde corresponde à deux fois la longueur de la plaque.

De façon analogue à [Cho 1998] dans le cas de la protection des côtes par une structure flexible, on met ainsi en évidence le fait que deux de mécanismes physiques différents induisent des maxima locaux d'efficacité du système. L'effet du courant sur ces maxima locaux est cependant très différent : le courant semble en effet atténuer le maximum d'efficacité associé à l'excitation des modes de vibration, mais induit également une augmentation de l'efficacité dans le cas du pic associé aux caractéristiques géométriques du système.

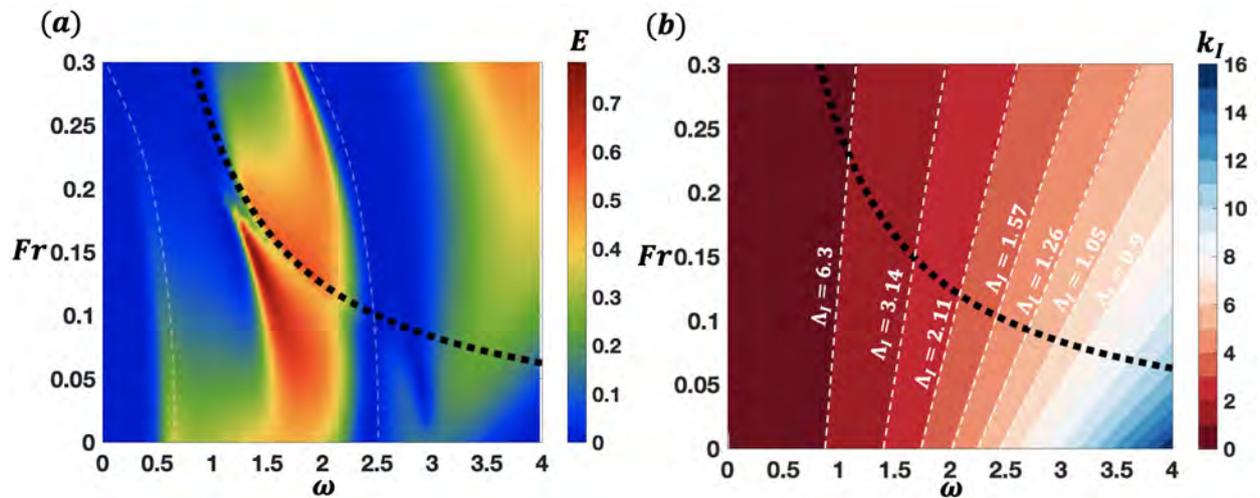


FIGURE 4.13 – Carte dans le plan $Fr-\omega$ (a) l'efficacité E (b) le nombre d'onde de l'onde incidente k_I . La ligne discontinue noire représente la limite entre les régimes sous-critiques à quatre et à deux ondes.

Afin d'avoir une vision globale de l'effet d'état de mer sur l'efficacité du système, sur la figure 4.13(a) nous avons tracé dans le plan $Fr-\omega$, l'efficacité obtenu pour un PTO placé au centre de la membrane. Notons que ici nous nous sommes permis de dépasser la valeur de 0.1 fixée précédemment pour le nombre de Froude afin de mieux visualiser l'effet du courant (au delà de $Fr = 0.3$ le problème devient instable comme vu dans le chapitre 2). La figure 4.13(a) confirme ce que nous avons constaté concernant l'effet du nombre de Froude sur les différents pics d'efficacité. On observe une diminution d'efficacité pour le pic associé à l'excitation du premier mode de la membrane, illustré sur la figure 4.13(a) par la première courbe blanche en pointillés (la deuxième associée au second mode et la courbe noire est la limite des deux régimes sous-critique à 4 ondes / sous-critique à 2 ondes). On remarque que la fréquence associée au premier mode diminue avec le nombre de Froude, ceci peut s'expliquer par le fait que $\omega \sim \sqrt{T/(\rho_m + m_a)}$, avec m_a la masse ajoutée. Lorsque le nombre de Froude augmente, la masse ajoutée augmente et par conséquent la fréquence diminue. Cette fréquence s'annule à $Fr = 0.3$, une valeur critique à partir de laquelle le problème devient instable (une instabilité statique similaire celle que nous avons trouvée dans l'exemple du chapitre 1). Par ailleurs, on voit sur la même figure que le pic d'efficacité principal augmente avec le nombre de Froude jusqu'à la limite du régime sous-critique à deux ondes (courbe pointillés noire). On atteint un maximum d'efficacité 0.78 pour $Fr = 0.15$ et $\omega = 1.5$. Sur la figure 4.13(b) nous avons tracé dans le plan $Fr-\omega$ le nombre d'onde associé à l'onde incidente. Nous avons globalement un meilleur rendement lorsque la longueur de l'onde incidente est de l'ordre de deux fois la longueur de la membrane.

Il est à noter que les résultats obtenus ci-dessus dans le cas où l'amortisseur est placé au centre de la membrane peuvent être très sensibles à la position de ce dernier. En effet, on peut par exemple s'étendre à un pic d'efficacité pour le mode 2 si l'amortisseur est légèrement décalé de sa position centrale. L'effet de la position de l'amortisseur ainsi que sa position seront étudiés dans la partie suivante.

4.5.2 Effet des paramètres du convertisseur

Récupération d'énergie par un seul PTO

Nous procédons dans cette partie à une étude paramétrique de l'effet des deux paramètres du convertisseur d'énergie : l'emplacement et le coefficient de récupération d'énergie. Nous considérons donc ici que nous avons un seul PTO attaché à notre dispositif. Pour nos simulations nous considérons l'immersion $H_i = 0.2$, la tension $T = 0.05$ et le rapport de masse $\alpha = 10^3$. Concernant les paramètres de l'état de mer nous nous concentrerons sur deux cas, en absence de courant ($Fr = 0$) et en présence de courant $Fr = 0.05$. On considère que nous avons deux ondes monochromatiques incidentes particulières de pulsations $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$ qui correspondent respectivement aux longueurs d'ondes $\Lambda_I = 2.5$ et $\Lambda_I = 1.25$ pour $Fr = 0.05$ ($\Lambda_I = 2.16$ et $\Lambda_I = 1$ pour $Fr = 0$). Comme nous l'avons vu dans la sous-section précédente à ces fréquences, nous nous attendons à ce que l'onde incident excitera le second mode et un mode mixte (du mode 1 et du mode 2) de vibration de la membrane.

Notons que tous les processus d'optimisation dans ce travail consistent à balayer les paramètres du PTO sur des plages pertinentes, puis à sélectionner les paramètres optimaux qui donnent une efficacité maximale. Nous supposons que la variation du coefficient d'amortissement conduit à une efficacité maximale unique, et l'emplacement du PTO est toujours balayé sur la plage $x \in [0, 1]$.

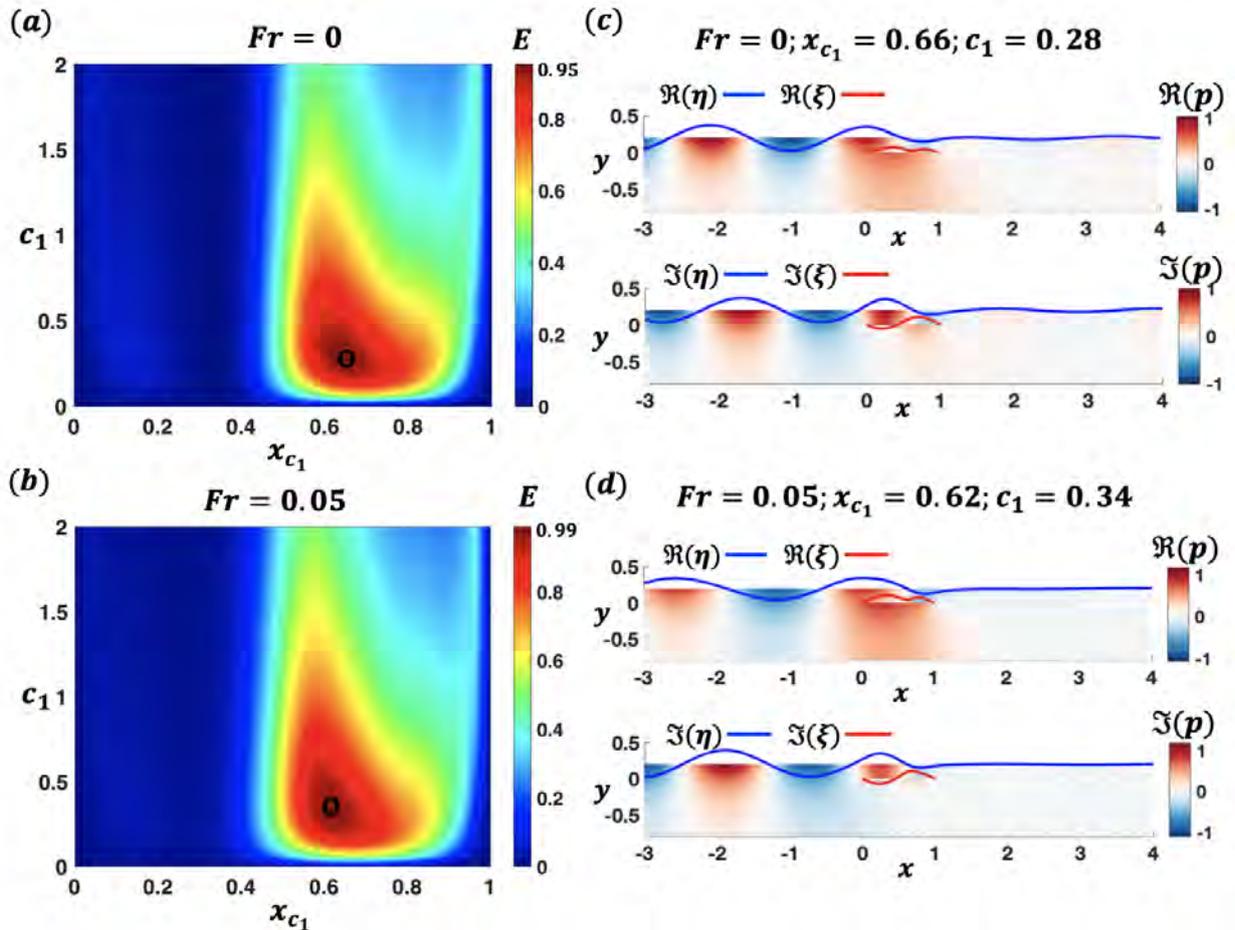


FIGURE 4.14 – Variation de l'efficacité dans le plan x_{c_1} - c_1 pour une onde incidente de pulsation $\omega = 1.7$ (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$ (c) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en absence de courant (d) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en présence de courant.

Sur les figures 4.14(a) et 4.14(b) nous avons tracé des cartes de la variation de l'efficacité dans le plan (x_{c_1}, c_1) pour $\omega = 1.7$ en absence et présence de courant. Sur les figures 4.14(c) et 4.14(d) nous avons tracé la pression de l'écoulement ainsi que les déformations de la surface libre et la membrane, associées aux configurations qui nous donnent les meilleurs rendements.

Pour $\omega = 1.7$, d'après ce que nous avons vu dans la sous-section précédente un mode mixte (du premier et du second modes structuraux) devrait être excité. Ce mode est caractérisé par une déformation importante de la membrane dans la partie aval du centre de la membrane (on peut le voir sur les figures de la structure). Étant donné que l'amplitude de la membrane possède un rôle principal dans le rendement de notre système (équation (4.30)), on peut s'attendre à ce que l'emplacement optimal de l'amortisseur soit associé au maximum de la déformation de la membrane. Clairement les figures 4.14(a) et 4.14(b) montrent que l'efficacité varie significativement avec (x_{c_1}, c_1) et comme prévu nous avons une position optimale $x_{c_1} = 0.66$ sans courant ($x_{c_1} = 0.62$ pour $Fr = 0.05$) qui nous donne un maximum d'efficacité. En absence de courant nous obtenons un rendement impressionnant de 95% pour un coefficient d'amortissement $c_1 = 0.28$. En présence de courant nous avons une augmentation de 4%. Dans ce cas nous avons une efficacité égal à 0.99 pour un coefficient d'amortissement $c_1 = 0.28$.

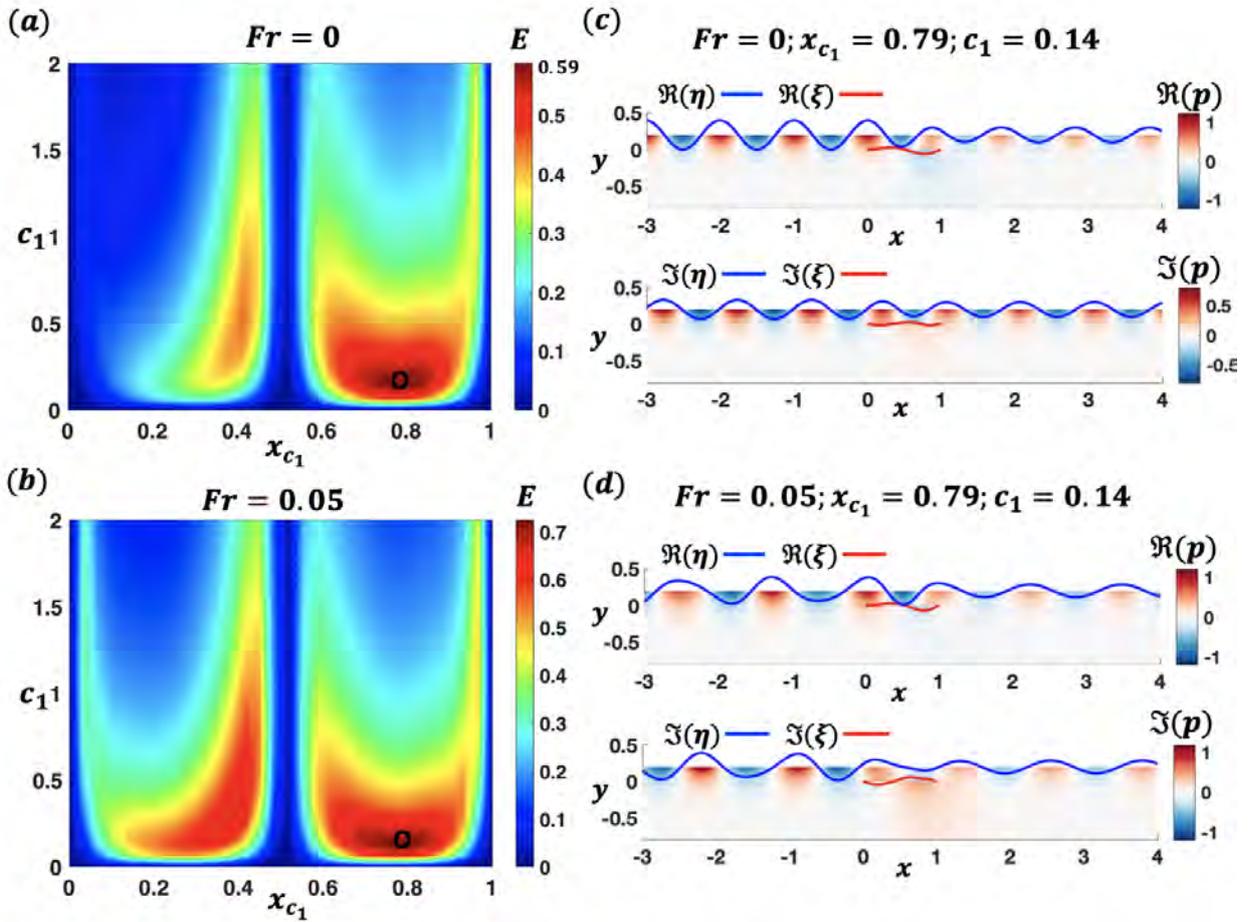


FIGURE 4.15 – Variation de l'efficacité dans le plan x_{c_1} - c_1 pour une onde incidente de pulsation $\omega = 2.5$ (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$ (c) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en absence de courant (d) la pression et les déformations de la surface libre et la membrane du point optimal en présence de courant.

D'une manière similaire, sur les figures 4.15(a) et 4.15(b) nous avons tracé des cartes de la variation de l'efficacité dans le plan (x_{c_1}, c_1) pour $\omega = 2.5$ en absence et présence de courant. Sur les figures 4.15(c) et 4.15(d) nous avons tracé la pression de l'écoulement ainsi que les déformations de la surface libre et de la membrane, associées aux configurations qui nous donnent les meilleurs rendements.

A cette pulsation, c'est le second mode de vibration de la membrane qui devrait être excité. Ce mode est caractérisé par une déformation nulle au centre et deux maximums en amont et aval. Notons que dans le vide ce mode est symétrique alors que dans notre cas on peut voir sur les figures 4.15(c) et 4.15(d) que nous avons une asymétrie due à la présence du courant. Donc dans ce cas, on peut s'attendre à ce que l'emplacement optimal du PTO soit associé au maximum du déplacement de la structure. Les résultats sur les figures 4.15(a) et 4.15(b) montrent comme prévu que nous avons globalement deux maximums en amont et aval du centre de la membrane où nous avons une efficacité nulle. Les maximums d'efficacité sont obtenus

4.5. Résultats et interprétation

pour $x_{c_1} = 0.79$ et $c_1 = 0.14$. Pour un nombre Froude nul nous avons une efficacité optimale égale à 0.59 et pour $Fr = 0.05$ l'optimum atteint 0.72.

Récupération d'énergie par deux PTO

Considérons maintenant que nous avons deux amortisseurs attachés à la membrane, notés PTO1 attaché à la position x_{c_1} et d'une constante d'amortissement c_1 et PTO2 attaché à la position x_{c_2} et d'une constante d'amortissement c_2 . Nous allons procéder à une étude paramétrique sur les paramètres des deux amortisseurs, les propriétés de la membrane sont fixées comme précédemment ($L = 1$, $D = 0.2$, $T = 0.05$ et $\alpha = 10^3$). Nous allons nous focaliser sur des ondes incidentes de pulsation $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$ en absence et présence de courant. Considérant les résultats précédents concernant l'emplacement optimal et le coefficient d'amortissement optimal d'une configuration avec un seul PTO. Le processus d'optimisation dans cette partie consiste à fixer les propriétés du PTO1 aux valeurs optimales obtenues précédemment et à balayer les paramètres du PTO2 sur des plages pertinentes.

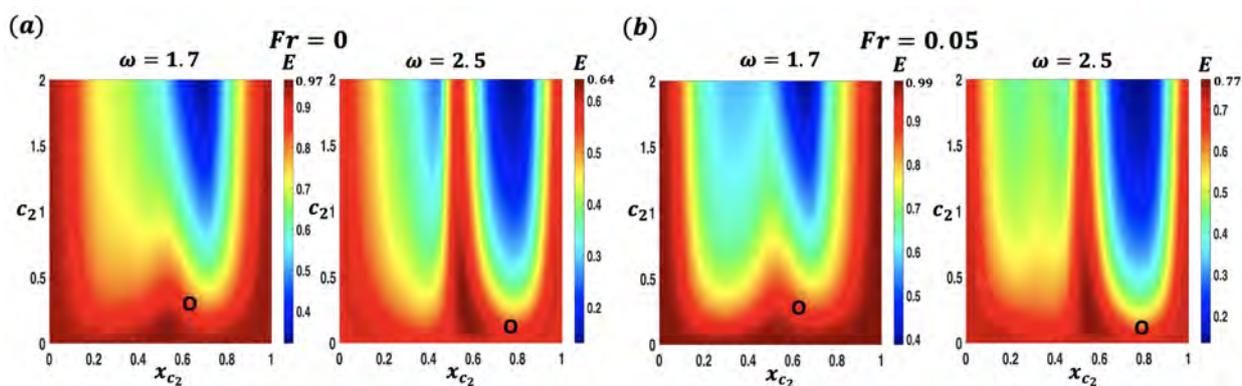


FIGURE 4.16 – Cartes d'efficacité dans le plan (x_{c_2}, c_2) pour $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$; (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$. Les symboles noirs modélisent la position du premier PTO.

Sur la figure 4.16 nous avons tracé des cartes de l'efficacité dans le plan $x_{c_2} - c_2$ pour $\omega = 2.5$ en absence du courant (figure 4.16(a)) et présence du courant (figure 4.16(b)). Pour $c_2 = 0$ ou $x_{c_2} = 0$ ou 1 (les bords de la carte) on retrouve le rendement maximal du cas avec un seul PTO (le second PTO ne sert à rien). La figure montre aussi que pour $x_{c_2} = x_{c_{1op}}$ il y a une diminution importante du rendement. En effet, cela revient en effet à avoir un seul PTO mais avec un coefficient c plus important égal à $c_1 + c_2$.

Les valeurs d'efficacité optimales des différents cas ainsi que les propriétés des PTOs permettant d'obtenir ces optimums sont donnés dans le tableau 4.2.

Nombre de Froude	Fréquence	E_{op}	x_{c_1}	c_1	x_{c_2}	c_2
Fr=0	$\omega = 1.7$	0.97	0.66	0.28	0.52	0.07
	$\omega = 2.5$	0.64	0.79	0.14	0.55	0.34
Fr=0.05	$\omega = 1.7$	0.99	0.62	0.34	0.93	0.07
	$\omega = 2.5$	0.77	0.79	0.14	0.55	0.28

TABLE 4.2 – Résultats d'optimisation en présence de deux PTO.

Pour $\omega = 1.7$, les résultats montrent que la présence d'un deuxième PTO permet une très faible amélioration du rendement (entre 0% et 2%). Dans ce cas il sera inutile d'ajouter le PTO2, puisque le PTO1 placé au bon endroit nous permet déjà de gagner une efficacité qui dépasse 95%. En terme du rapport coût de fabrication/rendement, ajouter un PTO2 sera plus coûteux que la valeur de l'énergie récupérée.

Pour $\omega = 2.5$, d'après les valeurs des résultats qui se trouvent dans le tableaux 4.2, nous avons $E_{op} = 0.64$ en absence de courant et $E_{op} = 0.77$ en présence de courant. La présence du deuxième PTO permet de gagner 5% dans les deux cas $Fr = 0$ et $Fr = 0.05$. Une augmentation relativement supérieure à celle pour une onde incidente de pulsation $\omega = 1.7$. Par ailleurs, les cartes sur la figure 4.16, nous montre clairement que mis à

part dans plage des valeurs très étroite pour la position le coefficient d'amortissement, le PTO2 a plutôt un effet inverse sur le rendement.

Membrane à moitié rigide

Dans cette dernière partie nous allons nous focaliser sur des ondes incidentes de pulsation $\omega = 2.5$. Considérons deux amortisseurs PTO1 et PTO2. Nous allons procéder à une étude paramétrique sur les paramètres du deuxième amortisseur, les propriétés de la membrane sont fixées comme précédemment ($L = 1$, $D = 0.2$, $T = 0.05$ et $\alpha = 10^3$). En s'inspirant de l'étude réalisé par [Desmars 2018], le processus d'optimisation dans cette partie consiste à fixer les propriétés du PTO1 aux valeurs $x_{c_1} = 0.25$ et $c_1 = 10^4$ et de balayer les paramètres du PTO2.

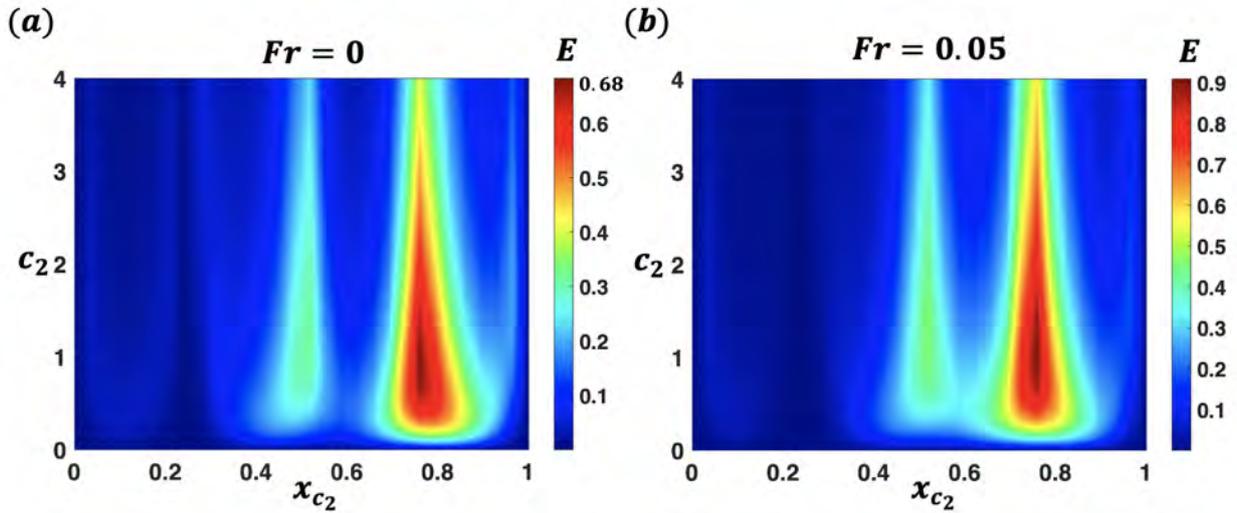


FIGURE 4.17 – Cartes d'efficacité dans le plan (x_{c_2}, c_2) pour $\omega = 1.7$ et $\omega = 2.5$; (a) $Fr = 0$ (b) $Fr = 0.05$. Les symboles noirs modélisent la position du premier PTO.

Nous avons montré sur la figures 4.15 qu'avec un seul PTO deux maximums d'efficacité supérieures à 0.4 sont obtenus. La figure 4.16 montre que l'idée d'optimisation utilisée précédemment en cas de présence de deux PTO nous permet un gain de l'ordre de 5% seulement. Sur la figure 4.17 nous avons tracé des cartes de la variation de l'efficacité dans le plan $x_{c_2} - c_2$ pour $\omega = 2.5$ en absence de courant (figure 4.17(a)) et présence de courant (figure 4.17(b)). Les résultats montrent que le maximum d'efficacité obtenue lorsque le PTO est placé en amont dans le cas où on a un seul amortisseur (figure 4.15) disparaît en conséquence de la présence du PTO1 qui rigidifie la membrane et tue la déformation. Comme on peut le voir cette configuration nous permet d'obtenir un maximum global lorsque le PTO2 est placé en aval. Un maximum d'efficacité de 0.68 sans courant et de 0.9 en présence de courant. Donc cette méthode d'optimisation nous permet de gagner 9% en rendement pour $Fr = 0$ et 19% pour $Fr = 0.05$. Cela montre que, plus que le nombre des PTO, c'est plutôt la méthode et le bon réglage des paramètre qui conduit à une meilleure efficacité globale. Comme expliqué physiquement dans l'étude de [Desmars 2018], nous pensons que c'est l'effet d'une réduction brutale de la profondeur d'eau apparente, conduisant à une augmentation de l'amplitude des vagues au fur et à mesure qu'elles passent sur le membrane. Par conséquent, la différence de pression entre le haut et le bas augmente en s'éloignant de la partie amont, et de même pour l'excitation de la membrane. Cet effet étant directement lié à la contrainte appliquée sur le mouvement du fluide, une membrane rigide donne une excitation aval plus importante.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un modèle d'interaction onde-courant-membrane flexible permettant d'étudier les performances d'un récupérateur d'énergie de la houle constitué d'une membrane flexible, et en particulier de quantifier l'effet du courant incident sur son efficacité. Nous avons résolu le problème en utilisant une méthode des éléments finis via le logiciel libre FreeFEM++ [Hecht 2012]. La validité des

4.6. Conclusion

résultats a ensuite été vérifiée par la comparaison avec des données de la littérature dans certaines limites d'intérêt (plaque rigide, sans courant), et d'excellents accords ont été obtenus.

Dans un premier temps, nous nous sommes focalisés sur un récupérateur donné pour lequel l'immersion, les propriétés structurelles et les dimensions sont fixées. Les résultats concernant l'efficacité du dispositif avec un faible courant ($Fr = 0.05$) ont été confrontés au cas sans courant ($Fr = 0$), et l'origine des pics/creux d'efficacité détaillés à l'aide de la structure de la membrane ainsi que celle de la surface libre/champ de pression concernant les pics principaux d'efficacité. Cette analyse révèle que les deux maxima d'efficacité principalement observés sont associés à des mécanismes physiques différents. Le pic apparaissant pour les plus faibles fréquences provient d'une résonance avec le premier mode de vibration de la structure, tandis que le pic principal est essentiellement dû aux caractéristiques géométriques du système, et en particulier au rapport de longueur entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. L'effet du courant obtenu est très différent selon la nature du cas considéré et induit en effet une diminution d'efficacité pour le pic associé au mode de vibration de la structure, tandis qu'une augmentation de l'efficacité significative est obtenue concernant le second pic associé aux aspects géométriques. On montre ainsi que la présence d'un faible courant peut augmenter significativement l'efficacité de la récupération d'énergie des vagues.

Dans un second temps, les effets de la variation des principaux paramètres du récupérateur d'énergie ont été explorés pour deux ondes incidentes typiques en absence et en présence d'un courant. Une étude paramétrique nous a permis d'identifier la configuration optimale pour récolter une quantité maximale d'énergie. Premièrement, avec un seul PTO nous avons montré que la position ainsi que le coefficient d'amortissement du PTO jouent un rôle important dans l'efficacité, et qu'il existe une plage optimale sur laquelle la puissance extraite de l'onde incidente est maximale. Pour une gamme de longueurs d'onde de l'onde incidente de l'ordre de deux fois la longueur de la membrane nous obtenons un rendement de 95% en présence d'un courant, pour un emplacement optimal du PTO placé en aval (au-delà du milieu de la structure le long de la direction de l'onde incidente). Pour ailleurs, il a été montré que l'ajout d'un deuxième PTO à cette dernière configuration nous permet d'atteindre un rendement de 99%. Finalement, nous avons montré qu'une membrane avec une région amont quasi rigide conduit à un rendement plus élevé que celui d'une membrane entièrement flexible.

Effet de la surface libre sur la stabilité de l'écoulement visqueux autour d'un cylindre

Sommaire

5.1	Introduction et état de l'art	78
5.2	Formulation du problème	79
5.2.1	Problème fluide	79
5.2.2	Conditions aux limites	80
5.3	Obtention des solutions stationnaires	81
5.3.1	Principe de la méthode L-ALE	81
5.3.2	Linéarisation des équations	82
5.3.3	Méthode des éléments finis	84
5.4	Étude de stabilité des solutions stationnaires	86
5.5	Résultats et interprétations	87
5.5.1	Résultats de l'écoulement de base	87
5.5.2	Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base	89
5.6	Conclusion	91

Contenu : Dans ce chapitre nous allons étudier l'effet de la présence de la surface libre sur la stabilité du sillage généré derrière un cylindre placé dans un écoulement visqueux.

5.1 Introduction et état de l'art

Le problème classique de l'écoulement autour d'un cylindre dans un milieu infini a fait l'objet d'intenses études dans le passé, principalement par des expériences mais aussi en utilisant la simulation numérique. Ceci est dû à son importance dans des nombreuses applications en aérodynamique et en acoustique. Des exploration détaillées couvrent une large gamme du nombre de Reynolds ; par exemple [Berger 1972, Williamson 1996, Zdravkovich 1997]. Les études montrent un phénomène d'instabilité se produisant dans le sillage du cylindre. En effet, à un faible nombre de Reynolds ($Re < 46.7$, Reynolds basé sur le diamètre du cylindre), l'écoulement est stable et symétrique, mais pour des valeurs plus élevées de Re , une instabilité globale apparaît dans le champ d'écoulement, une instabilité connue sous le nom d'*allée de Benard-von Karman*.

L'effet du confinement sur l'apparition des allées de Benard-von Karman a fait l'objet de nombreuses études principalement numériques [Anagnostopoulos 1996, Zovatto 2001, Sahin 2004] mais aussi expérimentales [Coutanceau 1977, Rehimi 2008]. Dans ce cas deux paramètres supplémentaires contrôlent la dynamique du sillage du cylindre. Ces derniers sont le paramètre d'immersion (le rapport entre l'immersion et le diamètre du cylindre H_i/L) et le paramètre de confinement (le rapport entre l'épaisseur de la couche fluide et le diamètre du cylindre H/L). Ces études ont montré que le nombre de Reynolds critique, qui est de l'ordre de 47 en l'absence de confinement, augmente avec le rapport de confinement. En diminuant le paramètre d'immersion, l'allée des tourbillons de *von Karman* peut être limitée à une rangée de tourbillons de même signe [Zovatto 2001]. L'effet du rapport de confinement et du paramètre d'immersion sur les coefficients aérodynamiques (traînée et portance) également été étudié par [Coutanceau 1977, Anagnostopoulos 1996].

La présence d'une surface libre à proximité du cylindre a une pertinence potentielle pour un grand nombre d'applications pratiques telles que les pipelines, les structures offshore, les sous-marins et les équipements de production d'énergie utilisant l'énergie marémotrice. Contrairement aux problèmes précédents (cylindre dans un domaine infini et confiné), l'effet de la présence de la surface libre a été beaucoup moins étudié dans la littérature. La présence d'une surface libre à proximité du cylindre est cependant connue pour avoir une forte influence sur les caractéristiques d'écoulement et les forces associées agissant sur le cylindre [Sheridan 1997, Reichl 2005, Bouscasse 2017, Colagrossi 2019, Zhao 2021]. De la même façon que pour les autres études effectuées dans cette thèse, un paramètre supplémentaire, le nombre de Froude, s'ajoute aux autres paramètres précédemment définis pour contrôler l'écoulement. Un travail de référence pour ce problème est celui réalisé par [Reichl 2005] en utilisant un code commercial (ANSYS Fluent) basé sur une Méthode des Volumes Finis combiné à un algorithme *Volume-of-Fluid* pour résoudre l'interface air-eau. Cette étude a considéré l'écoulement 2D autour d'un cylindre proche d'une surface libre, en fixant le nombre de Reynolds à 180. Dans cette étude ils ont été en mesure de reproduire les principales caractéristiques d'écoulement analysées à travers l'étude expérimentale de [Sheridan 1997], pour lequel le nombre de Reynolds était d'environ 9000, suggérant que le nombre de Froude et l'immersion du cylindre sont aussi importants que le nombre de Reynolds pour caractériser la dynamique du sillage. En 2019 dans un *benchmark* réalisé à une immersion fixé à 4 et Reynolds fixé à 180 et en utilisant trois différents solveurs et techniques numériques (hydrodynamique des particules lissées et méthode des volumes finis) pour suivre la dynamique de la surface libre, [Colagrossi 2019] ont montré que les résultats obtenus par les différentes approche sont relativement en bon accord. Il a été montré qu'il y a des états métastables alternés dans le sillage, liées aux fortes non-linéarités induites par les interactions entre la vorticité du sillage et la surface libre. Une récente étude réalisé par [Zhao 2021] a étendu le problème en 3D et en régime turbulent à Reynolds fixé à 7550 en utilisant la méthode *Large Eddy Simulation*. Les résultats à un nombres de Froude 0.2 et une immersion de 0.4 ont montré que la déformation de la surface libre est faible avec peu d'influence sur les caractéristiques du sillage, et un détachement tourbillonnaire alternatif modulé par la surface libre est détecté dans le sillage.

Bien qu'il existe de nombreuses études numériques de l'effet de la surface libre sur le problème considéré, ces études sont limitées à des valeurs particulières des paramètres du contrôle d'écoulement et utilisent principalement des simulations avec des logiciels commerciaux. Les principales difficultés rencontrées dans la simulation numérique de ce type d'écoulements résident dans la présence d'une surface libre, sur lequel des conditions limites non triviales doivent être correctement modélisées. L'idée de ce chapitre est de résoudre le problème avec une méthode robuste et fiable permettant à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire de capturer précisément les seuils de stabilité en se basant sur la méthode des éléments finis et logiciel FreeFEM++ [Hecht 2012].

5.2. Formulation du problème

Les méthodes de calcul des écoulements dans les domaines en mouvement avec la méthode des éléments finis peuvent être classées en deux grandes catégories [Decoene 2012]. La première est la "méthode de maillage fixe" qui repose sur un maillage couvrant le domaine d'intérêt qui contient strictement le domaine occupé par le fluide. Cette méthode est appelée aussi la méthode des domaines fictifs. En effet, en présence d'une surface libre ou/et d'une structure solide déformable, leurs déformations sont prises en compte de manière simple en utilisant une fonction caractéristique pour chaque état comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents pour traiter la surface libre et la déformation de la membrane. La seconde est la "méthode de maillage mobile" qui consiste à définir un maillage qui suit le mouvement de l'écoulement en s'ajustant en suivant la déformation de la surface libre ou/et de la structure solide. Comme le maillage est ajusté aux frontières, une meilleure précision dans l'espace est attendue. Cette approche qui repose sur le suivi du mouvement des limites du domaine s'appelle la méthode *Arbitraire Lagrangienne Eulérienne Linéarisée* (L-ALE). Une méthode classique pour les intégrations en temps [Decoene 2012], mais plus délicate dans un cadre linéarisé car elle nécessite une linéarisation de toutes les équations y compris les conditions limites. Cependant l'avantage est que la même méthode peut être utilisée pour le calcul de l'écoulement de base. Cette méthode a été récemment utilisée dans un problème diphasique par [Bonnefis 2019], pour étudier le couplage des déformations d'une bulle avec son sillage et sa trajectoire, ou encore dans le cadre des problèmes d'interaction fluide structure par [Pfister 2019] afin d'étudier la stabilité d'une structure élastique dans un écoulement visqueux.

Nous nous focalisons ainsi sur l'étude de l'effet de la présence surface libre sur l'écoulement autour d'un cylindre immergé en proposant un formalisme basé sur la méthode *Arbitraire Lagrangienne Eulérienne Linéarisée* dans un cadre linéarisé. Ce chapitre est organisé comme suit. Nous présentons tout d'abord les équations modélisant le problème dans un domaine de référence. Ensuite, dans la troisième section nous détaillons la méthodologie L-ALE mise en œuvre pour résoudre le problème stationnaire en utilisant une méthode itérative de type Newton. Nous procédons ensuite à l'analyse de stabilité du problème stationnaire dans la quatrième section. Les résultats obtenus du champ de base ainsi que de la stabilité sont finalement présentés avant de conclure.

5.2 Formulation du problème

Nous considérons un écoulement axial incident ($\mathbf{U} = U\mathbf{e}_x$) dans une couche fluide d'épaisseur H en interaction avec un cylindre rigide immobile. Le cylindre de diamètre L est immergé parallèlement à la surface libre à une distance d'immersion H_i (voir la figure 5.1). Contrairement aux autres parties de cette thèse nous considérons ici que le fluide est visqueux, de viscosité cinématique ν .

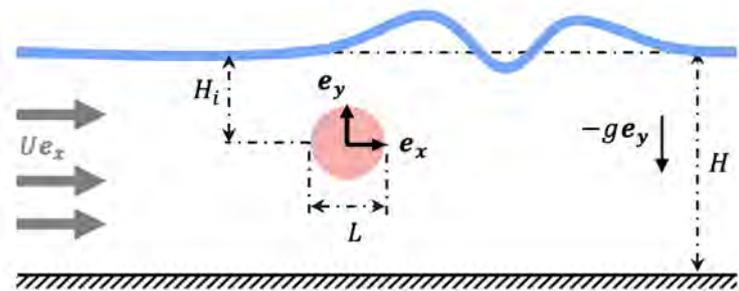


FIGURE 5.1 – Illustration schématique du problème.

Le système de coordonnées cartésien pour un mouvement purement bidimensionnel $\mathbf{x} = (x, y)$ est adopté avec l'axe des y dirigé verticalement vers le haut et le centre du repère est correspondant au centre du cylindre (figure 5.1). Le temps est noté t .

5.2.1 Problème fluide

Nous supposons que nous avons un fluide incompressible de densité uniforme ρ et de viscosité dynamique $\mu = \nu/\rho$ occupant un domaine $\mathbf{x} \in \Omega$. On note $\mathbf{q}_F(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}(\mathbf{x}); p(\mathbf{x})]$ le champ d'écoulement, comprenant

le champ de la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ et le champ de la pression $p(\mathbf{x})$. L'écoulement est régi par les équations de continuité et de Navier-Stokes suivantes :

$$\mathcal{DIV} : \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5.1)$$

$$\mathcal{NS} : \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p_d). \quad (5.2)$$

avec $p_d = p + \rho g(y - y_0)$ la pression dynamique et $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p_d)$ le tenseur des contraintes défini par

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p_d) = -p_d \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}). \quad (5.3)$$

où \mathbf{I} est le tenseur identité et $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ le tenseur de taux de déformation

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (5.4)$$

5.2.2 Conditions aux limites

Le domaine fluide Ω est délimité par une surface libre notée Γ_S , le fond du domaine noté Γ_B , l'entrée Γ_I et la sortie du domaine Γ_O .

Nous définissons la contrainte normale exercée par le fluide sur les frontières comme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = (-p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{n}, \quad (5.5)$$

$$= \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p_d) \cdot \mathbf{n} + \rho g(y - y_0) \mathbf{n}. \quad (5.6)$$

avec \mathbf{n} le vecteur normal à l'interface.

Une condition de glissement et de contrainte normale nulle sont imposées au fond :

$$\mathcal{KBC}_B : \quad \mathbf{u}(\mathbf{x} \in \Gamma_B) = \mathbf{u}_B = U \mathbf{e}_x. \quad (5.7)$$

$$\mathcal{DBC}_B : \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} \in \Gamma_B) = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

A l'entrée du domaine la condition cinématique nous permet d'imposer un profil d'écoulement uniforme \mathbf{u}_I

$$\mathcal{KBC}_I : \quad \mathbf{u}(x \in \Gamma_I) = \mathbf{u}_I = U \mathbf{e}_x. \quad (5.9)$$

A la sortie du domaine nous imposons une contrainte nulle :

$$\mathcal{DBC}_O : \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} \in \Gamma_O) = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

En effet, une autre idée serait d'imposer $\mathbf{u} = U \mathbf{e}_x$ à la sortie, mais cela imposerait un déplacement nul ce qui est une condition forte. En revanche, imposer $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ autorise le déplacement vertical de la surface à la sortie.

A la surface du cylindre nous avons une condition d'adhérence :

$$\mathcal{KBC}_C : \quad \mathbf{u}(x \in \Gamma_C) = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Les conditions aux limites sur la surface libre Γ_S sont des conditions aux limites cinématique et dynamique. La condition cinématique signifiant que la composante normale de la vitesse lagrangienne de l'interface coïncide avec celle de la vitesse du fluide. La condition dynamique permet d'imposer la contrainte normale $\sigma_n \mathbf{n}$ et d'annuler la contrainte tangentielle :

$$\mathcal{KBC}_S : \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (5.12)$$

$$\mathcal{DBC}_S : \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x} \in \Gamma_S) = \sigma_n \mathbf{n} + \sigma_t \mathbf{t}. \quad (5.13)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma_n = \gamma \kappa - p_a + \rho \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \\ \sigma_t = 0. \end{cases}$$

5.3. Obtention des solutions stationnaires

où κ la courbure de la surface libre et γ la tension de surface.

5.3 Obtention des solutions stationnaires

Dans cette partie nous allons nous intéresser à l'obtention des solutions du problème stationnaire. Sous cette approximation l'équation de Navier-Stokes (5.2) et la condition cinématique à la surface libre (5.12) deviennent :

$$\mathcal{NS} : \quad \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \Sigma(\mathbf{u}, p_d). \quad (5.14)$$

$$\mathcal{KBC}_S : \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (5.15)$$

Cependant la forme du domaine est elle même une inconnue du problème. C'est pourquoi nous avons choisit d'adopter une méthode de type ALE-L pour résoudre ce problème. Cette méthode est décrite dans la section qui suit.

5.3.1 Principe de la méthode L-ALE

Le principe de la méthode de Newton [Ypma 1995] habituellement utilisée pour calculer un champ de base stationnaire est de décomposer le champ de l'écoulement $\mathbf{q}_F = [\mathbf{u}; p]$ comme une solution approximative $\mathbf{q}_{F,0}$ et une correction $\mathbf{q}_{F,1}$. En utilisant un développement de Taylor pour les équations gouvernantes et en tronquant au premier ordre en termes de correction permet de calculer la correction $\mathbf{q}_{F,1}$ comme la solution d'un système linéaire. La solution est ensuite mise à jour en ajoutant $\mathbf{q}_{F,0}$ et $\mathbf{q}_{F,1}$, ce qui permet une meilleure approximation de la solution. Le processus est ensuite itéré jusqu'à la convergence.

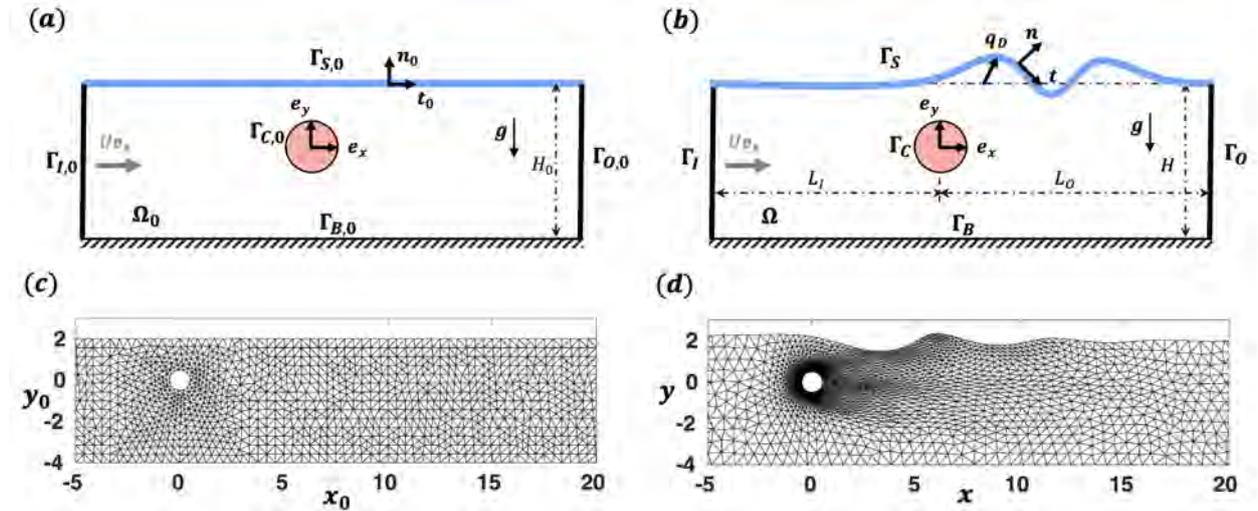


FIGURE 5.2 – Représentation du (a) domaine de référence Ω_0 (b) domaine réel Ω . Exemple du (c) maillage initial (d) maillage déformé.

Dans le cas présent, la même approche générale sera utilisée, sauf que la solution approximative $\mathbf{q}_{F,0}$ est supposée connue sur un domaine approximatif Ω_0 (domaine de référence). Ce domaine approximatif sera déformé à chaque itération pour converger vers le domaine physique réel Ω [Bonnefis 2019, Pfister 2019]. Pour cela, nous introduisons une fonction de déformation Φ_v du domaine de référence $\mathbf{x}_0 \in \Omega_0$ vers le domaine physique $\mathbf{x} \in \Omega$, considéré sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_v : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (5.16)$$

où ϵ est un paramètre de petite amplitude, introduit ici pour dériver les expansions de Taylor de manière formelle et $\mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0) = \xi_x \mathbf{e}_x + \xi_y \mathbf{e}_y$ est le champ de déformation.

Compte tenu de cette déformation, nous introduisons maintenant l'expression ALE linéarisée suivante :

$$\mathbf{q}_F(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_{F,0}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{q}_{F,1}(\mathbf{x}_0) + O(\epsilon^2) \quad (5.17)$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0)$.

Il est important de noter que dans cette expression, le côté droit est défini en termes de coordonnées \mathbf{x}_0 du domaine de référence Ω_0 , tandis que le côté gauche est défini en termes de coordonnées \mathbf{x} du domaine physique Ω . En conséquence, la mise à jour du champ de l'écoulement à chaque étape de l'itération de Newton se fera en trois étapes.

Supposons que nous avons initialement un maillage du domaine de référence Ω_0 et une solution approximative $\mathbf{q}_{F,0}$ définie sur ce maillage.

- **Étape 1** : Nous résolvons un système linéaire pour $\mathbf{q}_{F,1}$ et \mathbf{q}_D sur Ω_0 .
- **Étape 2** : La correction $\mathbf{q}_{F,1}$ est ajoutée à l'état initial $\mathbf{q}_{F,0}$.
- **Étape 3** : À ce stade, l'approximation du champ d'écoulement est toujours définie le long du maillage initial. Nous déformons le maillage en appliquant la fonction de déformation et transportons la solution sur le nouveau maillage.

Le nouveau maillage et la nouvelle approximation du champ d'écoulement serviront alors comme point de départ pour la prochaine itération jusqu'à la convergence.

En plus du champ de déformation volumique \mathbf{q}_D du domaine de référence Ω_0 au domaine physique Ω , nous devons également introduire un champ de déformation surfacique $\boldsymbol{\eta} = [\eta_n; \eta_t]$ de la surface libre de référence $\Gamma_{S,0}$ à la surface réelle Γ_S . Pour mieux définir cela, nous introduisons d'abord une paramétrisation curviligne de la surface $\Gamma_{S,0}$:

$$\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{S,0} : \quad \mathbf{x}_0(s_0) = [x_0(s_0); y_0(s_0)] \quad \text{avec } s_0 \in [0; L_s] \quad (5.18)$$

s_0 étant l'abscisse curviligne et L_s la longueur de $\Gamma_{S,0}$ ($s_0 = 0 \rightarrow$ l'entrée et $s_0 = L_s \rightarrow$ la sortie). Nous définissons ensuite le vecteur tangent \mathbf{t}_0 et le vecteur normal \mathbf{n}_0 à ce contour comme suit :

$$\mathbf{t}_0 = \left| \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s_0} \right|^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial s_0}. \quad (5.19)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{t}_0. \quad (5.20)$$

Nous pouvons maintenant introduire la déformation Φ_s de $\Gamma_{S,0}$ à Γ_S comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_s : \Gamma_{S,0} &\longrightarrow \Gamma_S \\ s_0 &\longmapsto \mathbf{x}_0(s_0) + \epsilon \boldsymbol{\eta}(s_0). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Notons que le principe de la méthode décrit dans cette sous section est similaire à celui réalisé pas [Bonnefis 2019]. Le seul point différent est que dans son étude le champ de déformation surfacique n'a pas de composante tangentielle.

5.3.2 Linéarisation des équations

Afin d'appliquer l'approche ALE linéarisée, nous commençons par exprimer dans le domaine approximatif Ω_0 les équations de continuité (5.1) et Navier-Stokes (5.14) décrites précédemment dans le domaine physique Ω . Pour cela, nous devons exprimer les dérivées spatiales en termes de coordonnées physiques \mathbf{x} en fonction de la variable \mathbf{x}_0 du domaine de référence. Les expressions des opérateurs linéarisés nécessaires sont données par les équations suivantes [Bonnefis 2019] :

$$\mathcal{GRAD}_p : \quad \nabla p = (I - \epsilon \nabla_0^T \mathbf{q}_D) \cdot \nabla_0 p + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.22)$$

$$\mathcal{GRAD}_\mathbf{u} : \quad \nabla \mathbf{u} = \nabla_0 \mathbf{u} \cdot (I - \epsilon \nabla_0 \mathbf{q}_D) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.23)$$

$$\mathcal{DIV}_\mathbf{u} : \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_0 \cdot \mathbf{u} - \epsilon \nabla_0 \mathbf{u} : \nabla_0^T \mathbf{q}_D + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.24)$$

$$\text{avec } \nabla_0 \mathbf{u} : \nabla_0^T \mathbf{q}_D = \text{Tr}(\nabla_0 \mathbf{u} \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D).$$

5.3. Obtention des solutions stationnaires

Équation de continuité

Considérons d'abord l'équation de continuité. En utilisant l'expression ALE linéarisée et l'opérateur divergence linéarisé dans l'équation (5.1) et en développant jusqu'à un ordre linéaire, nous obtenons :

$$\mathcal{D}IV_0 : \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \epsilon (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \mathbf{q}_D) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (5.25)$$

Équation de Navier-Stokes

Considérons maintenant l'équation de Navier-Stokes. L'introduction de l'expression ALE linéarisé, et le développement du terme de convection non linéaire conduisent à :

$$\mathcal{N}S_0 : \quad \begin{cases} -\rho \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 + \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_0, p_0) \\ -\epsilon \rho (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) \\ + \epsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_1, p_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Sur la première ligne de l'équation (5.26), nous linéarisons le gradient de la pression à l'aide de l'expression définie précédemment par l'équation (5.22). Par ailleurs, le tenseur de taux de déformation $\mathbf{D}(\mathbf{u}_0)$ en fonction des coordonnées du domaine de référence devient :

$$\begin{aligned} 2\mathbf{D}(\mathbf{u}_0) &= 2\mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) - \epsilon (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D + (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D)^T) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \text{avec} \quad 2D_0(\mathbf{u}_0) &= (\nabla_0 \mathbf{u}_0 + \nabla_0^T \mathbf{u}_0) \end{aligned}$$

Les termes de la troisième ligne de l'équation (5.26), impliquant les corrections \mathbf{u}_1 et p_1 sont déjà de l'ordre ϵ , on peut simplement remplacer ∇ par ∇_0 et $\mathbf{D}(\mathbf{u}_1)$ par $\mathbf{D}_0(\mathbf{u}_1)$ [Bonnefis 2019]. Les transformations seront prisent en compte dans la formulation faible du problème fluide après une intégration par partie en partant de l'équation (5.26).

Champ de déformation ALE

Le champ de déformation $\mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0)$ doit être choisi comme une fonction continue qui correspond à la déformation de l'interface via (5.35) et qui s'annule loin de l'interface. En pratique, \mathbf{q}_D est généralement choisi comme la solution d'un opérateur d'extension. L'opérateur choisit ici est donné par l'équation d'élasticité linéaire (5.27). Le champ de déformation doit satisfaire en plus les conditions aux limites aux interfaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}L\mathcal{A}S\mathcal{T}_0 : \quad \nabla_0 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_D(\mathbf{q}_D) &= 0. & (5.27) \\ \text{CL} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{B,0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{I,0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{C,0}) = \mathbf{0} \end{array} \right. & + \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{O,0}) \cdot \mathbf{e}_x = 0 \\ \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{S,0}) \cdot \mathbf{n}_0 = \eta_n \\ \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0 \in \Gamma_{S,0}) \cdot \mathbf{t}_0 = \eta_t \end{array} \right. \end{aligned}$$

avec $\boldsymbol{\Sigma}_D(\mathbf{q}_D)$ le tenseur des pseudos contraintes

$$\boldsymbol{\Sigma}_D(\mathbf{q}_D) = -(\nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D) \mathbf{I} + 2\mathbf{D}_0(\mathbf{q}_D). \quad (5.28)$$

où \mathbf{I} le tenseur identité et $\mathbf{D}_0(\mathbf{q}_D)$ le tenseur des déformations

$$\mathbf{D}_0(\mathbf{q}_D) = \frac{1}{2} (\nabla_0 \mathbf{q}_D + \nabla_0^T \mathbf{q}_D). \quad (5.29)$$

Conditions aux limites à la surface libre

Les conditions cinématique (5.15) et dynamique (5.13) impliquent le vecteur normal \mathbf{n} à la surface libre Γ_S . Pour les développer dans le formalisme ALE linéarisé, nous devons d'abord développer cette normale

en termes de ϵ .

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \mathbf{n}_0(s_0) + \epsilon \mathbf{n}_1(s_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= \mathbf{n}_0 + \epsilon \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (5.30)$$

L'injection de cette expression dans la condition cinématique (5.15) conduit à :

$$\mathcal{KBC}_{S,0} : \quad \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 + \epsilon \left(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_0 + \frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \cdot \mathbf{u}_0 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (5.31)$$

Pour obtenir un développement similaire pour la condition dynamique (5.13), nous devons développer la courbure de la surface libre κ comme une expansion de Taylor :

$$\begin{aligned}\kappa &= \kappa_0 + \epsilon \kappa_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= \mathbf{n}_0 \frac{\partial \mathbf{t}_0}{\partial s_0} + \epsilon \left(\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial s_0^2} + \kappa_0^2 \eta_n + \frac{\partial \kappa_0}{\partial s_0} \eta_t \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (5.32)$$

En utilisant les équations (5.30) et (5.32), la condition dynamique (5.13) devient :

$$\mathcal{DBC}_{S,0} : \quad \sigma_{0,n} \mathbf{n}_0 + \epsilon (\sigma_{1,n} \mathbf{n}_0 + \sigma_{0,n} \mathbf{n}_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (5.33)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma_{0,n} = -p_a + \gamma \kappa_0 + \rho \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{g}, \\ \sigma_{1,n} = \gamma \kappa_1 + \rho \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{g}, \\ \quad = \gamma \left(\frac{\partial^2 \eta_n}{\partial s_0^2} + \kappa_0^2 \eta_n + \frac{\partial \kappa_0}{\partial s_0} \eta_t \right) + \rho (\eta_n \mathbf{n}_0 + \eta_t \mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{g}. \end{cases}$$

Notons que idem à Bonnefis [Bonnefis 2019], sauf pour l'expression de la courbure qui est plus simple en 2D. Le terme de gravité dû au choix de travailler avec la pression dynamique.

Ensuite, il suffit de remplacer \mathbf{n}_1 par son expression en fonction de η_n et η_t pour obtenir la formulation linéarisée finale.

La composante tangentielle de le déformation surfacique ($\boldsymbol{\eta}(s_0) = \eta_n(s_0) \mathbf{n}_0 + \eta_t(s_0) \mathbf{t}_0$), satisfait le problème suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\eta_t} : \quad & \frac{\partial^2 \eta_t}{\partial s_0^2} = 0. \\ \text{CL} : \quad & \begin{cases} \boldsymbol{\eta}(s_0 = 0) \cdot \mathbf{e}_x = 0, \\ \eta_t(s_0 = L_s) = 0. \end{cases}\end{aligned}\quad (5.34)$$

Les champs de déformation de volume et de surface sont reliés par :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{q}_D, \boldsymbol{\eta}} : \quad \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0(s_0)) = \eta_n(s_0) \mathbf{n}_0(s_0) + \eta_t(s_0) \mathbf{t}_0(s_0). \quad (5.35)$$

Condition cinématique à l'entrée

Comme nous avons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \epsilon \mathbf{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$, à l'entrée du domaine la condition cinématique (5.9) devient :

$$\mathcal{KBC}_{I,0} : \quad \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_I + \epsilon \mathbf{u}_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \quad (5.36)$$

5.3.3 Méthode des éléments finis

Afin de résoudre le problème numériquement par la méthode des éléments finis, nous allons maintenant construire la formulation faible associée au problème. La formulation faible des équations fluides est obtenue en multipliant les équations de Navier-Stokes et de continuité par les fonctions test $\mathbf{q}_F^* = [u_x^*; u_y^*; p^*]$

5.3. Obtention des solutions stationnaires

associées à $\mathbf{q}_F = [u_x; u_y; p]$ et en intégrant sur le domaine physique :

$$\forall \mathbf{q}_F^* = [\mathbf{u}^*; p^*], \quad \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{DIV}_0) dv + \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{NS}_0) dv = 0. \quad (5.37)$$

L'expression (5.37) doit ensuite être portée dans le domaine de référence Ω_0 sur lequel tout le calcul est effectué. Dans cette opération, le volume élémentaire dv doit être exprimé en fonction du dv_0 correspondant sur le domaine de référence. L'expression correspondante est la suivante :

$$dv = (1 + \epsilon \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D + \mathcal{O}(\epsilon^2)) dv_0. \quad (5.38)$$

Ce qui nous donne

$$\forall \mathbf{q}_F^* = [\mathbf{u}^*; p^*], \quad \left| \begin{array}{l} \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{DIV}_0) dv_0 + \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{NS}_0) dv_0 \\ + \epsilon \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{DIV}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{NS}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 = 0. \end{array} \right. \quad (5.39)$$

La prise en compte des conditions aux limites ainsi que les différentes étapes qui nous permettent d'obtenir la formulation faible finale (A.7) définie dans le domaine de référence sont données en détails dans l'annexe A.

Pour le champ de déformation volumique, la formulation faible est obtenue en multipliant l'équation d'élasticité (5.27) par une fonction test $\mathbf{q}_D^* = [\xi_x^*; \xi_y^*]$ et en intégrant sur le domaine de référence :

$$\forall \mathbf{q}_D^* = [\xi_x^*; \xi_y^*], \quad \iint_{\Omega_0} \mathbf{q}_D^* \cdot (\mathcal{ELAST}_0) dv_0 = 0. \quad (5.40)$$

A la surface libre, nous avons comme inconnues $\mathbf{q}_S = [\sigma_n; \eta_n; \eta_t; \lambda_n; \lambda_t]$. Avec λ_n et λ_t sont introduites comme inconnues auxiliaire pour imposer la relation (5.35). Nous pouvons donc introduire le vecteur de fonctions test $\mathbf{q}_S^* = [\sigma_n^*; \eta_n^*; \eta_t^*; \lambda_n^*; \lambda_t^*]$ qui nous permet d'imposer les conditions limites à la surface. Nous multiplions la condition limite cinématique donnée par l'équation (5.31) par la fonction test σ_n^* , l'équation (5.33) par la fonction test η_n^* , l'équation (5.34) par la fonction test η_t^* et la relation (5.35) par la fonction test $\lambda^* = \lambda_n^* \mathbf{n}_0 + \lambda_t^* \mathbf{t}_0$, et en les intégrant sur $\Gamma_{S,0}$:

$$\forall \mathbf{q}_S^* = [\sigma_n^*; \eta_n^*; \eta_t^*; \lambda^*], \quad \left| \begin{array}{l} \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_n^* (\mathcal{KBC}_{S,0}) ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \eta_n^* (\mathcal{DBC}_{S,0}) ds_0 \\ + \int_{\Gamma_{S,0}} \eta_t^* (\mathcal{P}_{\eta_t}) ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \lambda^* \cdot (\mathcal{R}_{\mathbf{q}_D, \boldsymbol{\eta}}) ds_0 = 0. \end{array} \right. \quad (5.41)$$

Afin d'introduire la condition cinématique à l'entrée du domaine, nous introduisons les fonctions auxiliaires $\mathbf{q}_I = [\sigma_x^I; \sigma_y^I]$ correspondantes aux contraintes. Ceci permet d'introduire le vecteur de fonctions test $\mathbf{q}_I^* = [\sigma_x^{I*}; \sigma_y^{I*}]$. Nous multiplions la condition limite cinématique donnée par l'équation (5.36) par la fonction test \mathbf{q}_I^* et nous intégrons sur $\Gamma_{I,0}$.

$$\forall \mathbf{q}_I^* = [\sigma_x^{I*}; \sigma_y^{I*}], \quad \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{q}_I^* \cdot (\mathcal{KBC}_{I,0}) dy_0 = 0. \quad (5.42)$$

De la même manière, afin d'imposer la condition $\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{e}_x = 0$ à la sortie du domaine, nous introduisons la fonction auxiliaire $\mathbf{q}_O = [\lambda_x]$ et sa fonction test $\mathbf{q}_O^* = [\lambda_x^*]$. Ensuite, il suffit de multiplier la condition par λ_x^* et intégrer sur $\Gamma_{O,0}$

$$\forall \mathbf{q}_O^* = [\lambda_x^*], \quad \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{q}_O^* \cdot (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{e}_x) dy_0 = 0. \quad (5.43)$$

En regroupant toutes les expressions précédentes nous trouvons le problème linéaire à résoudre à chaque étape de l'itération de Newton qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A} \mathbf{q}_1 = \mathbf{C}. \quad (5.44)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{F,F} & \mathcal{A}^{D,F} & \mathcal{A}^{S,F} & \mathcal{A}^{I,F} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{D,D} & \mathcal{A}^{S,D} & \mathcal{O} & \mathcal{A}^{O,D} \\ \mathcal{A}^{F,S} & \mathcal{A}^{D,S} & \mathcal{A}^{S,S} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{F,I} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{D,O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_D \\ \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_O \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^F \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{C}^S \\ \mathcal{C}^I \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Les différentes sous matrices sont définies dans l'annexe A.

5.4 Étude de stabilité des solutions stationnaires

Dans cette section nous expliquons maintenant comment le formalisme ALE-linéarisé détaillé dans la section précédente peut être utilisé pour effectuer une analyse de stabilité linéaire des solutions stationnaires obtenues précédemment. Pour cela nous considérerons une perturbation correspondant à une déformation de faible amplitude du domaine Ω_t occupé par l'écoulement, par rapport au domaine de référence Ω_0 correspondant au régime permanent calculé comme expliqué dans la section précédente. Nous définissons ainsi une application de la coordonnée \mathbf{x}_0 dans le domaine de référence, à la coordonnée \mathbf{x} dans le domaine mouvant Ω_t comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_{vt} : \Omega_0 &\longrightarrow \Omega_t \\ \mathbf{x}_0 &\longmapsto \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0) e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Nous introduisons l'expression ALE linéarisée suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_F(\mathbf{x}) &= \mathbf{q}_{F,0}(\mathbf{x}_0) + \epsilon \mathbf{q}_{F,1}(\mathbf{x}_0) e^{\lambda t} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ \text{avec } \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \epsilon \mathbf{q}_D(\mathbf{x}_0) e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

D'une manière similaire à ce que nous avons dit dans la troisième section, cette décomposition signifie que le champ de l'écoulement correspondant au mode propre est d'abord évalué sur le domaine de référence Ω_0 , puis ajouté au champ de base, et que le champ résultant est ensuite transporté vers le domaine mouvant Ω_t en appliquant la fonction de déformation Φ_{vt} .

La plupart des développements nécessaires pour exprimer le problème aux valeurs propres linéarisés ont été exprimés dans la section précédente. Le seul ingrédient manquant est la relation entre la dérivée temporelle dans le référentiel déformé et celle dans le référentiel mouvant.

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \cdot \nabla_0 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (5.47)$$

Compte tenu de la fonction de déformation (5.45) et l'expression ALE linéarisée (5.46), cette expression conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \epsilon \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{q}_D}{\partial t} \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= \epsilon \lambda (\mathbf{u}_1 - \mathbf{q}_D \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0) e^{\lambda t} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Cette formule permet de montrer que l'accélération $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, qui est la grandeur physique nécessaire dans l'équation de Navier-Stokes, est égale à la dérivée temporelle associée au mode propre corrigée par un terme correspondant à l'accélération du domaine mouvant.

D'autre part, la dérivée temporelle apparaissant dans la condition limite cinématique peut être évaluée comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{q}_D}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ &= \epsilon \lambda \eta_m e^{\lambda t} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.49)$$

En ajoutant les expressions pour les dérivées temporelles (5.48) et (5.49) respectivement à l'équation de Navier-Stokes (5.26) et la condition cinématique (5.31) et en utilisant les notations de la deuxième section

5.5. Résultats et interprétations

pour les autres termes issus de la linéarisation, ceci nous permet de trouver la formulation forte linéarisée. La formulation faible est ensuite obtenue comme décrit dans la troisième section de l'annexe A qui s'écrit après discrétisation sous la forme matricielle d'un problème aux valeurs propres suivant

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda\mathbf{B}\mathbf{q}_1. \quad (5.50)$$

La matrice \mathbf{A} et le vecteur \mathbf{q}_1 sont les mêmes donnés précédemment et la matrice \mathbf{B} est donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{F,F} & \mathcal{B}^{D,F} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{B}^{S,S} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

Les éléments des sous matrices de \mathbf{B} sont donnés dans l'annexe A.

5.5 Résultats et interprétations

Dans cette dernière partie, les échelles de longueur, de temps et de masse sont choisies respectivement comme L , L/U et ρL^3 . Ceci nous permet de définir les paramètres adimensionnels qui contrôlent notre problème

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{Lg}}, \quad \text{Re} = \frac{LU}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Bo} = \frac{\rho g L^2}{\gamma}. \quad (5.51)$$

correspondants respectivement aux nombres de Froude, Reynolds et Bond.

S'ajoute à ces nombres deux paramètres géométriques

$$H_i^* = \frac{H_i}{L} \quad \text{et} \quad H^* = \frac{H}{L}. \quad (5.52)$$

correspondants respectivement à l'immersion du cylindre et l'épaisseur de la couche fluide.

Dans cette étude nous allons rester dans le régime laminaire pour des Reynolds $\text{Re} \in [10; 100]$. Le nombre de Bond est fixé à une valeur très grande afin de négliger les ondes capillaires ($\text{Bo} = 10^5$). L'immersion du cylindre H_i^* est fixée à 2 et l'épaisseur de la couche fluide H^* est égale à 6 ce qui permet a priori de pouvoir négliger l'effet du fond qui n'est pas étudié ici, tout en conservant un domaine de calcul de taille acceptable.

5.5.1 Résultats de l'écoulement de base

Sur la figure 5.3 nous avons tracé les solutions du problème stationnaire pour $\text{Re} = 45$ et un nombre de Froude variant de 0 à 0.7.

La figure 5.3(a) montre un cas limite associé à un nombre de Froude égale à 0. Ceci est réalisé numériquement en ajustant la force gravitationnelle de sorte qu'elle domine complètement la force d'inertie (c'est-à-dire $g \rightarrow \infty$), et lorsque c'est le cas, la surface ne peut pas se déformer et une condition de glissement s'applique alors au niveau de la surface libre. Le sillage n'est pas très différent de celui du cas classique de l'écoulement autour d'un cylindre immergé dans un milieu infini. Dans ce cas on voit que le sillage présente une symétrie par rapport à l'axe $x = 0$. L'écoulement stationnaire à $\text{Fr} = 0.2$ et $\text{Fr} = 0.4$ est donné par les figures 5.3(b) et 5.3(c). On voit une déformation très faible au dessus du cylindre et dans ces cas le sillage est quasi-symétrique par rapport à l'axe $x = 0$, bien que la surface n'est pas horizontale. A partir de Froude égal à 0.5, l'amplitude de la déformation de la surface devient visible et on observe des ondes stationnaires de longueurs d'onde Λ qui augmentent avec le nombre de Froude. Les figures 5.3(d), 5.3(e) et 5.3(f) montrent respectivement qu'à $\text{Fr} = 0.5$ on a $\Lambda \approx 2$, $\text{Fr} = 0.6$ on a $\Lambda \approx 3$ et $\text{Fr} = 0.7$ on a $\Lambda \approx 4$. Théoriquement, les ondes de surface satisfont la relation de dispersion des ondes de surface avec courant (étudiée dans les chapitres 2 et 4). Comme nous avons $\omega = 0$ (cas stationnaire) et que l'on est en grandes profondeurs ($\tanh(kH) \approx 1$), nous avons $\sqrt{g/k} = U$ soit $\Lambda = 2\pi Fr^2$. Cette relation, nous donne

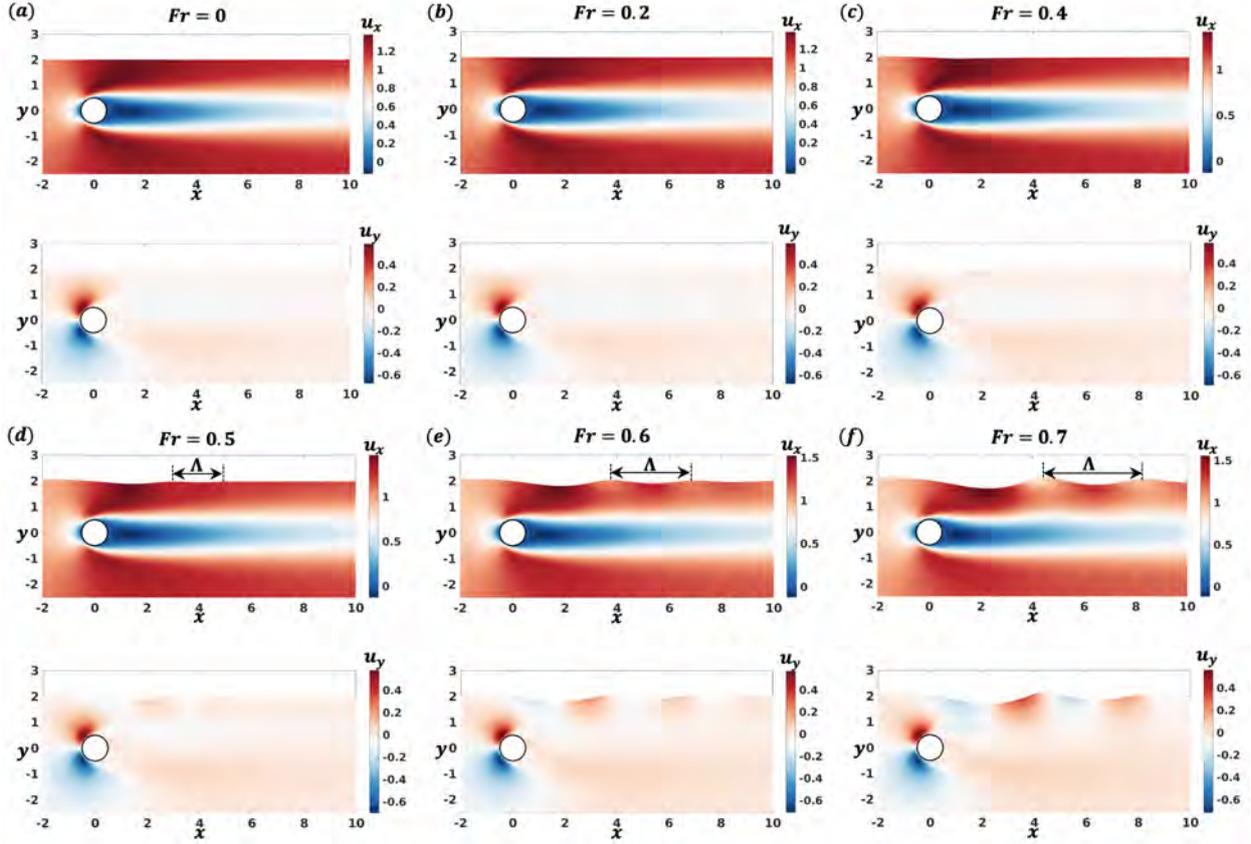


FIGURE 5.3 – Champ de l'écoulement de base donné par la vitesse (la composante u_x et la composante u_y) pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) $Fr = 0.5$ (d) $Fr = 0.6$ (e) $Fr = 0.7$ (f). Autres paramètres $Re = 45$, $Bo = 10^5$, $H_i^* = 2$, $H^* = 6$, $L_I = 10$ et $L_O = 40$.

des longueurs d'onde égales à 1.57 pour $Fr = 0.6$, 2.3 pour $Fr = 0.5$ et 3.1 pour $Fr = 0.7$. On remarque alors un léger décalage entre les résultats numérique et la théorie. Ceci peut être justifié par le fait que l'on soit dans un cas visqueux et aussi par la présence du sillage derrière le cylindre qui interagit avec la surface. Le sillage des cas $Fr = 0.5$, 0.6 et 0.7 illustré par les figures 5.3(d), 5.3(e) et 5.3(f) prend légèrement la forme de la surface libre en conséquence des déformations importantes de la surface.

Les effets hydrodynamiques exercés sur le cylindre peuvent être obtenus en intégrant la contrainte normale sur la surface du cylindre. En particulier, nous définissons les forces hydrodynamiques de traînée (*drag*) et de portance (*lift*) comme :

$$DRAG : F_x = \int_{\Gamma_C} (\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x dc = \int_{\Gamma_C} (-p\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x dc \quad (5.53)$$

$$LIFT : F_y = \int_{\Gamma_C} (\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_y dc = \int_{\Gamma_C} (-p\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_y dc \quad (5.54)$$

Sur la figure 5.4 nous avons tracé les forces de traînée et de portance données respectivement par l'équation (5.53) et l'équation (5.54) en fonction du nombre de Reynolds pour $Fr = 0$, $Fr = 0.4$ et $Fr = 0.7$. Les résultats montrent que le nombre de Reynolds et le nombre de Froude ont des effets inverses sur les forces hydrodynamiques. En effet, la figure 5.4(a) montre que la force de traînée diminue lorsque Re augmente et que nous avons une traînée légèrement plus importante lorsque le Froude augmente. Tandis que la figure 5.4(b) montre que la force de portance augmente avec une valeur négative à faible lorsque le Reynolds augmente. Pour un Reynolds fixé F_y diminue lorsque le nombre de Froude augmente.

5.5. Résultats et interprétations

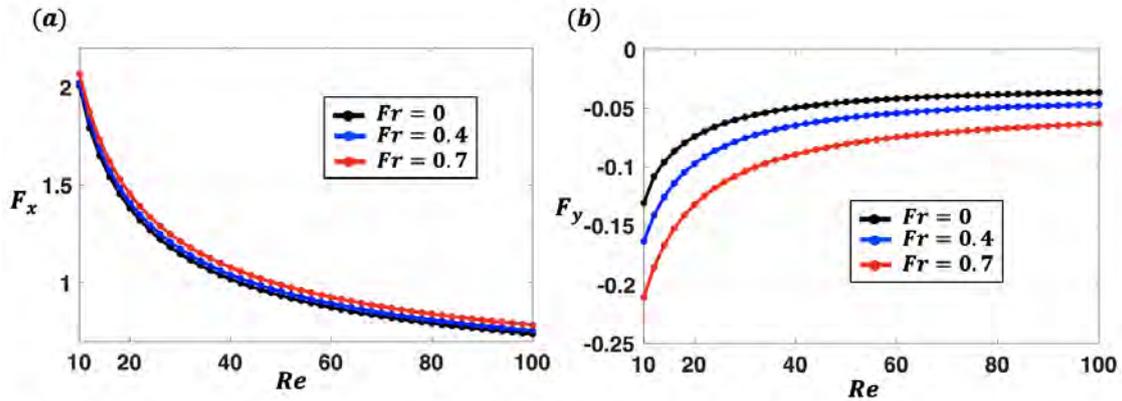


FIGURE 5.4 – La force de traînée (a) et la force de portance (b) du champ d'écoulement autour du cylindre en fonction de Re . Pour différentes valeurs du nombre de Froude.

5.5.2 Analyse de stabilité linéaire de l'écoulement de base

Après avoir donné un aperçu de l'effet du nombre de Froude sur la solution stationnaire du problème, nous nous intéressons maintenant à la stabilité des solutions stationnaires obtenues.

Afin d'avoir une idée sur l'effet de la présence de la surface libre à un Reynolds fixé $Re = 45$, sur la figure 5.5 nous avons tracé les spectres des valeurs propres pour quatre nombres de Froude différents, $Fr = 0, 0.2, 0.4$ et 0.6 correspondant à des cas en régime sous-critiques.

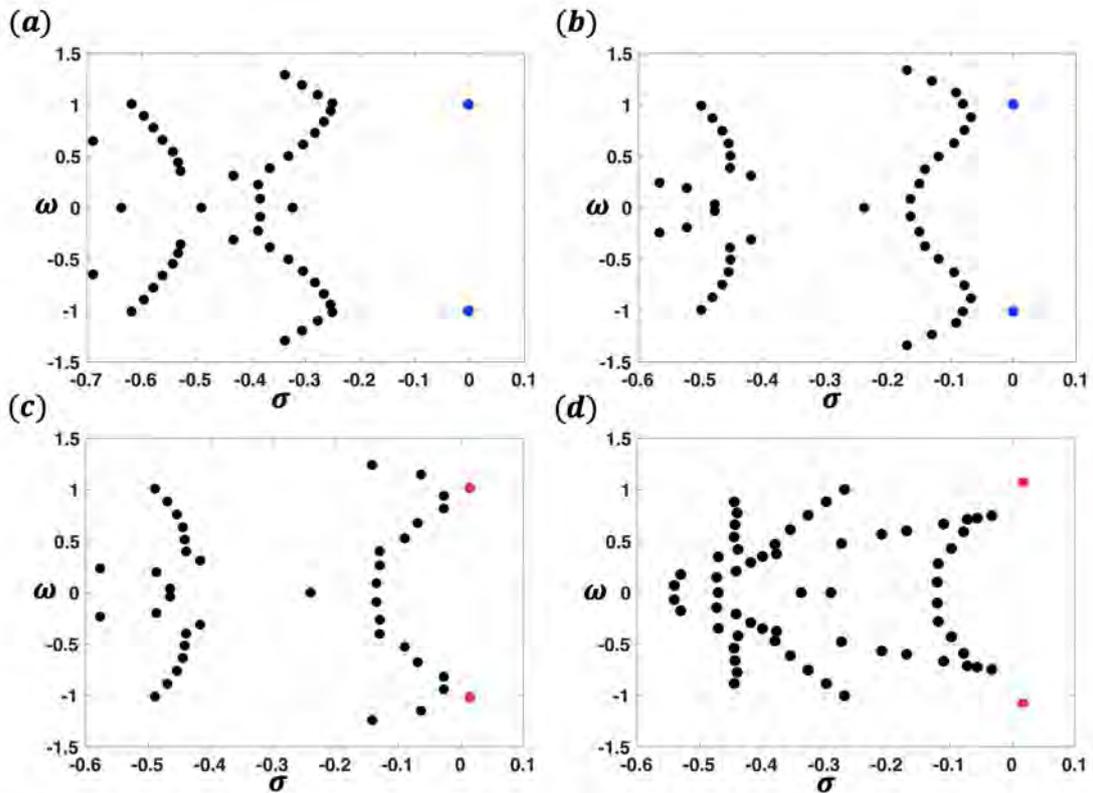


FIGURE 5.5 – Spectres obtenus pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) et $Fr = 0.6$ (d). Le nombre de Reynolds est fixé à 45.

Une paire de valeurs propres complexes conjuguées sont mises en évidence sur ces figures avec les points bleus et rouges. Ces points colorés correspondent aux valeurs propres du mode de sillage. Pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.2$, les figures 5.5(a) et 5.5(b) montrent que les valeurs propres (bleus) se situent dans le demi-plan stable à des fréquences complexes respectivement $-0.0028 + 1.005i$ et $-0.00027 + 1.006i$. Ce qui indique

que les solutions stationnaires sont stables pour $Fr = 0$ et $Fr = 0.2$. On remarque que le taux de croissance est légèrement plus élevé pour le cas Froude non nul tout en restant négatif. Pour les deux autres cas, les figures 5.5(c) et 5.5(d) montrent que les valeurs propres (rouges) se situent dans le demi-plan instable à des fréquences complexes respectivement $0.012 + 1.017i$ et $0.014 + 1.09i$. Ce qui indique que le mode de sillage devient instable pour $Fr = 0.4$ et $Fr = 0.6$.

La figure 5.6 montre la perturbation de la pression (en haut) et la vorticité (en bas) des modes de sillage à $Re = 45$ en superposition avec le champ de déformation instantané à la surface (en rouge) et la déformation statique (en noir) pour Froude de 0 à 0.7.

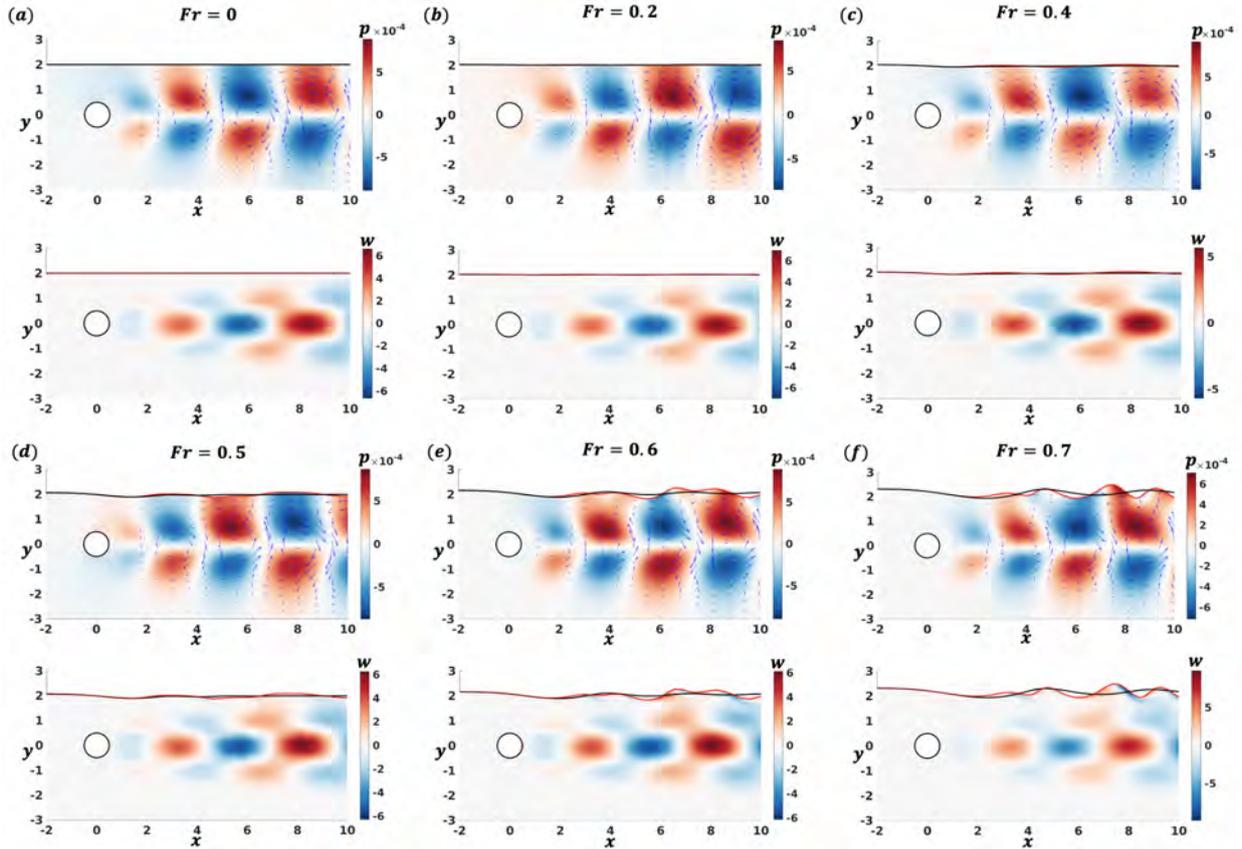


FIGURE 5.6 – Mode de sillage : pression (en haut) vorticité (en bas) pour $Fr = 0$ (a) $Fr = 0.2$ (b) $Fr = 0.4$ (c) $Fr = 0.5$ (d) $Fr = 0.6$ (e) $Fr = 0.7$ (f). Déformation statique de la surface (noir) déformation instantanée de la surface (rouge). Les vecteurs bleu sont le champ de la vitesse. Autres paramètres $Re = 45$, $Bo = 10^5$, $H_i^* = 2$, $H^* = 6$, $L_I = 10$ et $L_O = 40$.

La comparaison des structures des modes sur la figure 5.6, montre globalement que l'on retrouve la structure classique du sillage en l'absence d'une surface (cf. [Fabre 2018]). A faible nombre de Froude ($Fr = 0$, $Fr = 0.2$ et $Fr = 0.4$) les tourbillons disposés quasi-symétriquement par rapport à l'axe longitudinal et de signe opposé comme on peut le voir sur les figures 5.6(a), 5.6(b) et 5.6(c). A des Froudes plus élevés, la présence des déformations à la surface libre brise la symétrie du sillage comme illustré sur les figures 5.6(d), 5.6(e) et 5.6(f) pour respectivement $Fr = 0.5$, $Fr = 0.6$ et $Fr = 0.7$. Par ailleurs et en cohérence avec la discussion précédente sur les problèmes stationnaires, le nombre de Reynolds affecte lui aussi la structure spatiale du mode de sillage. En effet, la structure des champs de perturbation montre que le signe des tourbillons détachés derrière le cylindre se propagent dans le sens du courant avec une longueur d'onde donnée.

Pour mieux comprendre la nature des écoulements (stable ou instable), le tableau 5.1 donne les taux de croissance et les nombres de Strouhal. Ces fréquences complexes sont associées aux modes présentés sur la figure 5.6.

Les valeurs données par le tableau 5.1 montrent que les cas à $Fr = 0$ et à $Fr = 0.2$ sont stables (un taux de croissance négatif) tandis que tous les autres cas étudiés à des Froudes supérieurs à 0.2 sont instables

5.6. Conclusion

Nombre de Froude :	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7
Taux de croissance :	-0.0028	-0.0027	0.012	0.013	0.014	0.015
Nombre de Strouhal :	0.16	0.1602	0.1619	0.164	0.174	0.177

TABLE 5.1 – Le taux de croissance σ et le nombre de Strouhal $St = \omega/(2\pi)$ pour différentes valeurs de Froude Fr . Le nombre de Reynolds est égale à 45.

(un taux de croissance positif). Ces valeurs montrent que le taux de croissance augmente lorsque le nombre de Froude augmente dans les deux cas stable et instable.

Afin d’avoir une vision plus claire sur l’effet des paramètre Fr et Re , nous avons tracé sur la figure 5.7(a) le taux de croissance en fonction du nombre de Reynold pour $Fr = 0$, $Fr = 0.6$ et $Fr = 0.7$. Afin d’avoir une vison plus globale, nous avons ensuite tracé sur la figure 5.7(a) la carte de stabilité dans plan $Fr - Re$.

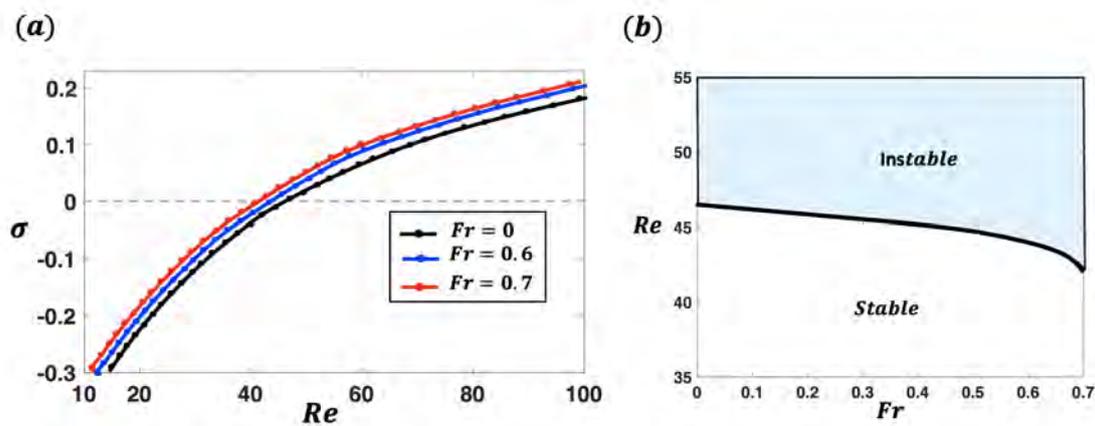


FIGURE 5.7 – Le taux de croissance en fonction du nombre de Reynolds Re pour $Fr = 0$, $Fr = 0.6$ et $Fr = 0.7$.

La ligne noire sur la figure 5.7(a) nous montre que dans le cas d’un cylindre confiné ($Fr = 0$), nous avons un nombre de Reynold critique $Re_c = 46$ à partir du quel le taux de croissance devient positif, c’est-à-dire que le problème devient instable pour des valeurs de Reynolds supérieures à 46. Remarquons que dans le cas classique d’un cylindre immergé dans un domaine de dimensions infinies, plusieurs études ont montré que le nombre de Reynolds critique est de l’ordre de 46.7 entre autres [Fabre 2019]. Notons donc que la présence d’une paroi à proximité du cylindre rend le sillage plus instable. Ensuite, les lignes bleues et rouges de la même figure 5.7(a) nous donnent respectivement des Reynolds critiques $Re_c = 44$ et $Re_c = 42$. Cela signifie que Re_c diminue lorsque Fr augmente (pour cette valeur de Re et cette gamme particulière de Fr pour laquelle uniquement des cas sous-critique sont considérés). Finalement ceci peut se confirmer en regardant la carte de stabilité donné par la figure 5.7(b). On observe ainsi que pour les valeurs des paramètres considérés, la présence de la surface libre, tout comme la présence d’un confinement (limite $Fr=0$) sont déstabilisants par rapport au cas non confiné classique.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié l’effet de la présence d’une surface libre proche d’un cylindre rigide immobile immergé horizontalement dans un fluide Newtonien. Le mouvement de l’écoulement est gouverné les équations de Navier-Stokes et de continuité pour un écoulement incompressible ainsi que des conditions aux limites aux frontières du domaine. Une méthode arbitraire eulérienne lagrangienne est mise en œuvre pour formuler ce problème dans un domaine en mouvement ayant une faible déformation par rapport à la configuration de référence. Nous avons calculé d’abord les solutions stationnaires des équations de Navier Stokes en utilisant une méthode itérative de Newton dans laquelle un champ de déformation du maillage est calculé à chaque itération. Nous avons ensuite procédé à l’analyse de stabilité du champ de base obtenu. Toutes ces étapes ont été implémentées à l’aide de FreeFEM++ [Hecht 2012] et des outils de stabilité implémentés dans StabFem [Fabre 2018]. L’immersion du cylindre a été fixée à 2 et les ondes capillaires ont

été négligées par rapport aux ondes gravitaires en fixant le nombre de Bond à 10^5 .

Dans un premier temps, nous nous sommes focalisé sur un cas particulier à Reynolds 45. L'effet du nombre de Froude sur la structure de l'écoulement du problème stationnaire a été détaillés. Les résultats ont montré qu'en augmentant le nombre de Froude progressivement, la déformation de la surface libre devient plus importante et brise la symétrie du sillage derrière le cylindre. Les résultats de la stabilité ont montré que à $Fr = 0$ et 0.2 le problème est stable tandis que pour les cas $Fr = 0.4, 0.5, 0.6$ et 0.7 le problème est instable.

Dans un second temps, l'effet des paramètres Reynolds et Froude est étudié plus en détail. Il a été montré que la force de traînée diminue et la force de portance augmente (négative) lorsque le nombre de Reynolds augmente avec également un léger effet du nombre de Froude sur ces deux grandeurs hydrodynamique. Les résultats de stabilité ont montré que le seuil de stabilité en Reynolds critique diminue avec le nombre de Froude.

Dans cette étude, nous nous somme limité principalement à des Froudes inférieures à 0.7 et une immersion fixé à 2 . En effet, au-delà de ces valeurs les déformations de la surface libre deviennent très importantes qui peuvent générer des phénomènes de réflexion aux bords du domaine de calcul. Malgré que nous avons imposé des conditions permettant de laisser la surface de se déformer librement aux extrémités, notre méthode n'est pas adaptée aux déformations très importantes pour éviter ce genre de phénomène. Une solution à ce problème consiste à ajouter des zones d'éponge numérique (amortissement) à l'entrée et à la sortie du domaine comme ce que nous avons fait dans les autres chapitres de la thèse.

Notons que même si pour le moment cela ne fonctionne pas pour des nombres de Froude supérieures à 0.7 , il serait intéressant par exemple d'ajouter un degré de liberté. En effet, dans ce cas un détachement alterné de tourbillons génère une force fluctuante perpendiculaire à la direction de l'écoulement. La fréquence des détachements alterné est proportionnelle à la vitesse de l'écoulement. Si cette fréquence coïncide avec une fréquence propre du cylindre alors on a une résonance et par conséquence des vibrations de forte amplitude de la structure ce qu'on appelle vibration induite vortex (VIV) [Williamson 2004]. Donc, il est intéressant d'étudier l'effet de la surface libre sur le phénomène VIV.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié trois problèmes d'interaction fluide-structure proche d'une surface libre. Le premier problème consiste à étudier l'effet de la présence d'une surface libre sur la stabilité d'une membrane placée dans un écoulement incident (illustration sur la figure 5.8(1)). Le second problème s'inscrit dans le contexte de la récupération d'énergie, il consiste à étudier le forçage d'une membrane flexible par une houle incidente superposée à un écoulement incident (illustration sur la figure 5.8(2)). Le dernier problème consiste à étudier l'effet d'une surface libre sur l'instabilité de sillage derrière une structure cylindrique fixe (illustration sur la figure 5.8(3)). Les deux premiers problèmes ont été traités sous l'approximation d'un écoulement potentiel de fluide non visqueux tandis que le dernier problème correspond à un écoulement de fluide visqueux.

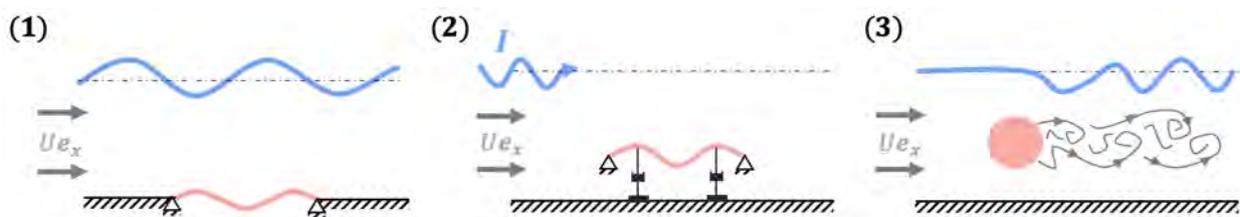


FIGURE 5.8 – Vue schématique des trois principaux problèmes étudiés dans cette thèse : (1) stabilité d'une membrane à proximité d'une surface libre, (2) forçage d'une membrane par une houle incidente en présence d'un courant (3) instabilité de sillage proche d'une surface libre.

Pour étudier l'effet de la surface libre sur la stabilité d'une membrane de dimension finie dans un écoulement, nous avons dans un premier temps étudié le problème sur des configurations simplifiées proches des exemples qui se trouvent dans la littérature afin de comprendre et d'introduire certaines notions. Au chapitre 1, nous avons ainsi étudié brièvement la stabilité de trois configurations : (i) une membrane de dimensions infinies, confinée dans un écoulement incident, (ii) une membrane de dimension finie dans le sens de l'écoulement (configuration similaire à la figure 5.8(1) dans la limite des faibles nombres de Froude où la surface se comporte comme une paroi rigide) et (iii) une membrane de dimensions infinies, à proximité d'une surface dans un écoulement incident (le mur de la première configuration est remplacé par une surface libre). Les résultats ont montré l'existence d'une vitesse critique d'écoulement à partir de laquelle les membranes dans les trois situations deviennent instables. Pour une membrane de dimensions infinies nous avons une instabilité de flottement classique, il a été montré dans ce cas que le confinement diminue le seuil d'instabilité. Lorsque la membrane est considérée de longueur finie dans le sens de l'écoulement, deux types d'instabilité sont obtenues, une instabilité statique (divergence) et une instabilité dynamique des modes couplés de la membrane (flottement). L'étude de l'effet d'une surface libre sur le cas d'une membrane de dimensions infinies a montré qu'en plus du flottement classique, nous avons une instabilité radiative due à une résonance entre l'onde de surface et l'onde structurelle. Après avoir étudié les différents type d'insatiabilité possible sur des configurations simplifiées, au chapitre 2, nous avons étudié l'effet d'une surface libre sur la stabilité d'une membrane de longueur finie. Les résultats ont montré que cette configuration nous permet d'identifier trois types d'instabilités, les instabilités radiatives et les instabilités classiques de fluide-structure présentes en l'absence de surface libre, à savoir le flottement et l'instabilité statique. A partir de l'analyse de la structure des mondes et la relation de dispersion des ondes gravitaires nous avons pu montrer l'origine et le lien entre ces différents types d'instabilités.

Pour la deuxième partie de cette thèse, nous avons commencé au chapitre 3, par un exemple simplifié à savoir l'étude du forçage d'un cylindre avec un degré de liberté par une houle incidente monochromatique en l'absence du courant, afin d'introduire la méthodologie et les notions nécessaires pour comprendre le problème principal illustré par la figure 5.8(1). Nous avons ainsi introduit à travers cet exemple les notions de masse ajoutée, d'amortissement ajouté, les coefficients de réflexion et de transmission et l'efficacité. Les résultats ont confirmé ceux de la littérature [Evans 1976], à savoir qu'avec ce système à un seul degré de liberté, nous pouvons atteindre un rendement de 50%. Cela nous mène au chapitre 4 et l'étude du forçage d'une membrane flexible attaché à des convertisseurs pour une houle en présence d'un courant incident. Cette configuration est une généralisation de l'exemple du chapitre 3 en prenant en compte la présence d'un courant d'incident et avec un récupérateur d'énergie de la houle constitué de plusieurs degrés de liberté. Dans un premier temps, nous nous sommes focalisés sur un récupérateur donné pour lequel les propriétés sont fixées et on a confronté les résultats du rendement entre un cas en absence du courant et un cas en présence du courant tout en variant la fréquence de l'onde incidente. Les résultats ont montré que la présence d'un courant est susceptible d'augmenter significativement le rendement du système et on obtient un maximum de rendement de 44% en l'absence du courant contre 78% en présence d'un courant. Dans un second temps, pour des états de mer fixés nous avons fait une étude paramétrique sur les propriétés du récupérateur d'énergie qui a montré qu'on peut atteindre un rendement de 99%.

Le chapitre 5 a été consacré au troisième problème illustré par la figure 5.8(3), qui consiste à étudier l'effet de la présence d'une surface libre sur la stabilité de l'écoulement visqueux autour d'un cylindre rigide et immobile. Nous avons proposé une méthode arbitraire eulérienne lagrangienne linéarisée similaire à celle utilisée par [Bonnefis 2019] pour formuler ce problème. Dans un premier temps nous avons calculé les solutions stationnaires du problème en utilisant une méthode itérative de type Newton. Ensuite, nous avons procédé à l'analyse de stabilité du champ de base obtenu. Les résultats du problème stationnaire ont montré que nous avons une onde stationnaire à la surface dont l'amplitude et la longueur d'onde augmente lorsque le nombre de Froude augmente. L'étude de la stabilité du problème a montré que la présence de la surface libre est susceptible de perturber la structure du sillage derrière le cylindre et qu'elle a tendance à diminuer le seuil de stabilité.

Perspectives

Concernant le premier problème, nous avons montré dans le chapitre 2 que l'origine des instabilités radiatives est l'existence d'une onde à énergie négative qui domine. En analysant théoriquement la relation de dispersion nous avons conclu que l'onde à énergie négative déstabilisante est susceptible d'exister à la fois en régime sous-critique qu'en régime super-critique contrairement au cas sous l'approximation d'eau peu profonde (étudié par [Nemtsov 1986]) ou encore le cas faiblement couplé (étudié par [Labarbe 2021]) où les instabilités apparaissent en régime super-critique uniquement en raison de l'absence de l'onde déstabilisante en régime sous-critique. Cependant nous nous sommes limités à une seule valeur de profondeur qui nous permet d'obtenir des instabilités radiatives en régime sous-critique uniquement où l'onde à énergie négative est en compétition avec celle à énergie positive. Il serait intéressant de poursuivre cette étude en variant la valeur de la profondeur. On souhaiterait en effet vérifier si des cas instables peuvent être obtenus en régime sous-critique pour lesquels, dans les cas de profondeur finie, une onde à énergie négative existe également et est susceptible de déstabiliser le système. Cependant celle-ci est en compétition avec trois ondes à énergie positive.

Pour le second problème, le modèle proposé dans cette étude peut se généraliser dans le cas où le courant et la houle incidente impactent la structure avec un angle différent ou encore dans le cas d'une houle multichromatique (du fait des caractéristiques linéaires du modèle). Ces deux extensions pourraient permettre de se rapprocher davantage des cas réels, et font partie des perspectives qui devront être considérées dans le futur. Par ailleurs, une des limitations de notre modèle étant l'hypothèse de linéarité sur le mouvement fluide et structurel, une autre prochaine étape logique serait de prendre en compte les effets non linéaires.

Finalement, une idée d'extension du troisième problème et afin de compléter les effets de la surface libre sur des problématiques d'instabilité fluide-structure classiques, serait d'attacher un ensemble amortisseur / ressort au cylindre afin d'étudier l'effet de la surface libre sur les Vibrations Induites par Vortex (VIV) (illustration sur la figure 5.9). En effet, les VIV sont des oscillations auto-entretenues du cylindre interagissant avec son sillage fluctuant, qui atteignent de grandes amplitudes dans la gamme d'accrochage (de l'ordre du

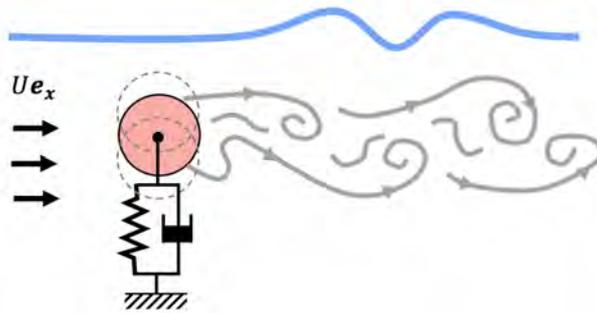


FIGURE 5.9 – Représentation schématique d'un cylindre attaché à un ensemble amortisseur/ressort placé d'un écoulement et proche de la surface.

diamètre du cylindre). Un exemple qui s'inscrit dans ce contexte est celui du convertisseur VIVACE (Vortex Induced Vibration Aquatic Clean Energy) développé par [Bernitsas 2006]. VIVACE est un dispositif visant à exploiter l'énergie des courants océaniques, il convertit l'énergie cinétique des courants en électricité en utilisant le principe du VIV. Ce système est constitué d'un cylindre circulaire rigide monté sur des ressorts linéaires permettant de convertir le mouvement du cylindre en électricité. Notre idée consiste à étendre notre méthode à un problème de VIV proche de la surface afin de traiter le problème dans un contexte de récupérer d'énergie et d'étudier l'effet de la surface libre sur les amplitudes de vibration des VIV et le rendement d'un système similaire à VIVACE.

Détails de la formulation

A.1 Formulation faible du problème stationnaire

La formulation faible des équations fluides est obtenue en multipliant les équations de Navier-Stokes et de continuité par les fonctions test associées et en intégrant sur le domaine physique :

$$\forall \mathbf{q}_F^* = [\mathbf{u}^*; p^*], \quad \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}_0) dv + \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{N}\mathcal{S}_0) dv = 0. \quad (\text{A.1})$$

L'expression (A.1) doit ensuite être portée dans le domaine de référence Ω_0 sur lequel tous le calcul est effectué. Dans cette opération, le volume élémentaire dv doit être exprimé en fonction du dv_0 correspondant sur le domaine de référence. L'expression correspondante est la suivante :

$$dv = (1 + \epsilon \nabla_0 \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) dv_0. \quad (\text{A.2})$$

Ce qui nous donne

$$\forall \mathbf{q}_F^* = [\mathbf{u}^*; p^*], \quad \left| \begin{aligned} & \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}_0) dv_0 + \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{N}\mathcal{S}_0) dv_0 \\ & + \epsilon \iint_{\Omega} p^* (\mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{V}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\mathcal{N}\mathcal{S}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.3})$$

Comme deuxième point, considérant l'équation de Navier-Stokes, la dérivation part de la forme intermédiaire (5.26)

$$\left| \begin{aligned} & \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \boldsymbol{\xi}) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\ & - \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 - \epsilon \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) dv_0 \\ & - \rho \epsilon \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p) dv_0 \\ & + \epsilon \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}, p)) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.4})$$

À partir de cette équation, une intégration par parties est d'abord effectuée sur le domaine physique Ω

$$\left| \begin{aligned} & \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \mathbf{q}_D) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\ & - \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 - \epsilon \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) dv_0 \\ & - \iint_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_0, p_0) dv_0 - \epsilon \iint_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_1, p_1) dv_0 + \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} dy + \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} ds_0 \\ & + \int_{\Gamma_O} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} dy + \int_{\Gamma_b} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} dx - \rho \epsilon \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\ & - \epsilon \iint_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^* : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{u}_0, p_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_I} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy + \epsilon \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D ds_0 \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_O} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy + \epsilon \int_{\Gamma_B} \mathbf{u}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.5})$$

Nous utilisons ensuite les conditions aux limites dynamiques (5.11), (5.10), (5.10) et (5.13). Et le passage vers les coordonnées du domaine de référence est ensuite appliqué à l'aide des équations définies précédemment

$$\begin{aligned}
 & \left| \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \mathbf{q}_D) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \right. \\
 & - \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 - \epsilon \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) dv_0 \\
 & - 2\mu \iint_{\Omega} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 + \epsilon \mu \iint_{\Omega} \nabla_0 \mathbf{u}^* : (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D + (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D)^T) dv_0 \\
 & + \iint_{\Omega} p_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 - \epsilon \iint_{\Omega} p_0 \nabla_0 \mathbf{u}^* : \nabla_0^T \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon 2\mu \iint_{\Omega} (\nabla_0 \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D) : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 \\
 & + \epsilon \iint_{\Omega} p_1 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 - \epsilon 2\mu \iint_{\Omega} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_1) dv_0 + \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_x^I \mathbf{e}_x + \sigma_y^I \mathbf{e}_y) dy \\
 & + \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_n \mathbf{n} + \sigma_t \mathbf{t}) ds_0 + \int_{\Gamma_O} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_x^O \mathbf{e}_x + \sigma_y^O \mathbf{e}_y) dy + \int_{\Gamma_B} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_x^B \mathbf{e}_x + \sigma_y^B \mathbf{e}_y) dx \\
 & - \epsilon \rho \iint_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega} p_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\
 & - \epsilon 2\mu \iint_{\Omega} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_O} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) dy \\
 & + \epsilon \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D ds_0 + \epsilon \int_{\Gamma_I} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy \\
 & \left. + \epsilon \int_{\Gamma_B} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^B \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^B \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \right. \tag{A.6}
 \end{aligned}$$

Finalement les intégrales deviennent naturellement sur le domaine de référence Ω_0

$$\begin{aligned}
 & \left| \iint_{\Omega_0} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega_0} p^* (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \mathbf{q}_D) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega_0} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \right. \\
 & - \rho \iint_{\Omega_0} \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0 - \epsilon \rho \iint_{\Omega_0} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) dv_0 \\
 & - 2\mu \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 + \epsilon \mu \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D + (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D)^T) dv_0 \\
 & + \iint_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 - \epsilon \iint_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \mathbf{u}^* : \nabla_0^T \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon 2\mu \iint_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D) : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 \\
 & + \epsilon \iint_{\Omega_0} p_1 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 - \epsilon 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_1) dv_0 + \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) dy_0 \\
 & + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{1,y}^I \mathbf{e}_y) dy_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}_0) ds_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,n} \mathbf{n}_0) ds_0 \\
 & + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot \sigma_{0,n} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \right) ds_0 + \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) dy_0 \\
 & + \epsilon \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{1,y}^O \mathbf{e}_y) dy_0 + \int_{\Gamma_{B,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_x^B \mathbf{e}_x + \sigma_y^B \mathbf{e}_y) dx \\
 & - \epsilon \rho \int_{\Omega_0} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\
 & - \epsilon 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D ds_0 \\
 & + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy_0 \\
 & \left. + \epsilon \int_{\Gamma_{B,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^B \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^B \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \right. \tag{A.7}
 \end{aligned}$$

A.1. Formulation faible du problème stationnaire

Pour le champ de déformation volumique, la formulation faible est obtenue en multipliant l'équation d'élasticité (5.27) par une fonction test $\mathbf{q}_D^* = [\xi_x^*; \xi_y^*]$ et en intégrant sur le domaine de référence :

$$\forall \mathbf{q}_D^* = [\xi_x^*; \xi_y^*], \quad \iint_{\Omega_0} \mathbf{q}_D^* \cdot (\mathcal{E}\mathcal{L}\mathcal{A}\mathcal{S}\mathcal{T}_0) dv_0 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Ensuite, une intégration par parties sur le laplacien réduit l'ordre des dérivées spatiales

$$\left| \begin{aligned} & - \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{q}_D^* : \Sigma_D(\mathbf{q}_D) dv_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{q}_D^* ds_0 + \int_{\Gamma_{I,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{q}_D^* dy \\ & + \int_{\Gamma_{O,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{q}_D^* dy + \int_{\Gamma_{B,0}} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{q}_D^* dx + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.9})$$

Nous obtenons alors

$$- \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{q}_D^* : \Sigma_D(\mathbf{q}_D) dv_0 + \int_{\Gamma_{O,0}} \lambda_x \xi_x^* dy + \int_{\Gamma_{S,0}} (\lambda_n(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q}_D^*) + \lambda_t(\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{q}_D^*)) ds_0 = 0. \quad (\text{A.10})$$

A la surface libre, nous avons comme inconnues $\mathbf{q}_S = [\sigma_n; \eta_n; \eta_t; \lambda_n; \lambda_t]$. Avec λ_n et λ_t sont introduites comme inconnues auxiliaire pour imposer la relation (5.35). Nous pouvons donc introduire le vecteur de fonctions test $\mathbf{q}_S^* = [\sigma_n^*; \eta_n^*; \eta_t^*; \lambda_n^*; \lambda_t^*]$ qui nous permet d'imposer les conditions limites à la surface. Nous multiplions la condition limite cinématique donnée par l'équation (5.31) par la fonction test σ_n^* , l'équation (5.33) par la fonction test η_n^* , l'équation (5.34) par la fonction test η_t^* et la relation (5.35) par la fonction test $\boldsymbol{\lambda}^* = \lambda_n^* \mathbf{n}_0 + \lambda_t^* \mathbf{t}_0$, et en les intégrant sur $\Gamma_{S,0}$:

$$\forall \mathbf{q}_S^* = [\sigma_n^*; \eta_n^*; \eta_t^*; \boldsymbol{\lambda}^*], \quad \left| \begin{aligned} & \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_n^* (\mathcal{K}\mathcal{B}\mathcal{C}_{S,0}) ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \eta_n^* (\mathcal{D}\mathcal{B}\mathcal{C}_{S,0}) ds_0 \\ & + \int_{\Gamma_{S,0}} \eta_t^* (\mathcal{P}_{\eta_t}) ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \boldsymbol{\lambda}^* \cdot (\mathcal{R}_{\mathbf{q}_D, \eta}) ds_0 = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.11})$$

Nous faisons une intégration par parties du terme intervenant les dérivées secondes de η_n et η_t en prenant les conditions aux limites associées à η_n et η_t

$$\left| \begin{aligned} & \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0) \sigma_n^* ds_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \cdot \mathbf{u}_0 \right) \sigma_n^* ds_0 \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_0) \sigma_n^* ds_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_{1,n} \eta_n^* ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \rho(\eta_n \mathbf{n}_0 + \eta_t \mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{g} \eta_n^* ds_0 \\ & - \int_{\Gamma_{S,0}} \gamma \frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \frac{\partial \eta_n^*}{\partial s_0} ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \gamma \left(\kappa_0^2 \eta_n + \frac{\partial \kappa_0}{\partial s_0} \eta_t \right) \eta_n^* ds_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \eta_t}{\partial s_0} \frac{\partial \eta_t^*}{\partial s_0} ds_0 \\ & + \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{n}_0) \lambda_n^* + (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{t}_0) \lambda_t^* ds_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} (\lambda_n^* \eta_n + \lambda_t^* \eta_t) ds_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{A.12})$$

Afin d'introduire la condition cinématique à l'entrée du domaine, nous introduisons les fonctions auxiliaires $\mathbf{q}_I = [\sigma_x^I; \sigma_y^I]$ correspondantes aux contraintes. Ceci permet d'introduire le vecteur de fonctions test $\mathbf{q}_I^* = [\sigma_x^{I*}; \sigma_y^{I*}]$. Nous multiplions la condition limite cinématique donnée par l'équation (5.36) par la fonction test \mathbf{q}_I^* et nous intégrons sur $\Gamma_{I,0}$.

$$\forall \mathbf{q}_I^* = [\sigma_x^{I*}; \sigma_y^{I*}], \quad \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{q}_I^* \cdot (\mathcal{K}\mathcal{B}\mathcal{C}_{I,0}) dy_0 = 0. \quad (\text{A.13})$$

qui s'écrit

$$\int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{q}_I^* \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_I) dy + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{q}_I^* \cdot \mathbf{u}_1 dy_0 = 0 \quad (\text{A.14})$$

De la même manière, afin d'imposer la condition $\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{e}_x = 0$ à la sortie du domaine, nous introduisons la fonction auxiliaire $\mathbf{q}_O = [\lambda_x]$ et sa fonction test $\mathbf{q}_O^* = [\lambda_x^*]$. Ensuite, il suffit de multiplier la condition par

λ_x^* et intégrer sur sur $\Gamma_{O,0}$

$$\forall \mathbf{q}_O^* = [\lambda_x^*], \quad \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{q}_O^* \cdot (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{e}_x) dy_0 = 0. \quad (\text{A.15})$$

qui s'écrit

$$\int_{\Gamma_{O,0}} \lambda_x^* \xi_x dy_0 = 0. \quad (\text{A.16})$$

A.2 Formulation matricielle du problème stationnaire

Une approximation de $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_F; \mathbf{q}_D; \mathbf{q}_S; \mathbf{q}_I]$ et de $\mathbf{q}^* = [\mathbf{q}_F^*; \mathbf{q}_D^*; \mathbf{q}_S^*; \mathbf{q}_I^*]$ sur un maillage d'éléments finis sont des combinaisons linéaires des fonctions de base.

Le champ de l'écoulement volumique :

$$\mathbf{q}_F = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_F} \mathbf{u}_i \tilde{\mathbf{u}}_i(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_F} u_{xi} \tilde{u}_{xi}(x, y) \\ \sum_{i=1}^{N_F} u_{yi} \tilde{u}_{yi}(x, y) \end{bmatrix} \\ \sum_{i=1}^{N_F} p_i \tilde{p}_i(x, y) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_F^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_F} \mathbf{u}_j^* \tilde{\mathbf{u}}_j(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_F} u_{xj}^* \tilde{u}_{xj}(x, y) \\ \sum_{j=1}^{N_F} u_{yj}^* \tilde{u}_{yj}(x, y) \end{bmatrix} \\ \sum_{j=1}^{N_F} p_j^* \tilde{p}_j(x, y) \end{bmatrix}$$

Le champ de déformation volumique :

$$\mathbf{q}_D = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_F} \xi_i \tilde{\xi}_i(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_F} \xi_{xi} \tilde{\xi}_{xi}(x, y) \\ \sum_{i=1}^{N_F} \xi_{yi} \tilde{\xi}_{yi}(x, y) \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_D^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_F} \xi_j^* \tilde{\xi}_j(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_F} \xi_{xj}^* \tilde{\xi}_{xj}(x, y) \\ \sum_{j=1}^{N_F} \xi_{yj}^* \tilde{\xi}_{yj}(x, y) \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Le champ de déformation de la surface libre :

$$\mathbf{q}_S = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_S} \sigma_{ni} \tilde{\sigma}_{ni}(s_0) \\ \sum_{i=1}^{N_S} \boldsymbol{\eta}_i \tilde{\boldsymbol{\eta}}_i(s_0) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_S} \eta_{ni} \tilde{\eta}_{ni}(s_0) \\ \sum_{i=1}^{N_S} \eta_{ti} \tilde{\eta}_{ti}(s_0) \end{bmatrix} \\ \sum_{i=1}^{N_S} \boldsymbol{\lambda}_i \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(s_0) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_S} \lambda_{ni} \tilde{\lambda}_{ni}(s_0) \\ \sum_{i=1}^{N_S} \lambda_{ti} \tilde{\lambda}_{ti}(s_0) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_S^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_S} \sigma_{nj}^* \tilde{\sigma}_{nj}(s_0) \\ \sum_{i=1}^{N_S} \boldsymbol{\eta}_i^* \tilde{\boldsymbol{\eta}}_i(s_0) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_S} \eta_{nj}^* \tilde{\eta}_{nj}(s_0) \\ \sum_{j=1}^{N_S} \eta_{tj}^* \tilde{\eta}_{tj}(s_0) \end{bmatrix} \\ \sum_{j=1}^{N_S} \boldsymbol{\lambda}_j^* \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j(s_0) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_S} \lambda_{nj}^* \tilde{\lambda}_{nj}(s_0) \\ \sum_{j=1}^{N_S} \lambda_{tj}^* \tilde{\lambda}_{tj}(s_0) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Le champ de la contrainte à l'entrée :

$$\mathbf{q}_I = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_I} \sigma_i^{I*} \tilde{\sigma}_i^I(y) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_I} \sigma_{xi}^{I*} \tilde{\sigma}_{xi}^I(y) \\ \sum_{i=1}^{N_I} \sigma_{yi}^{I*} \tilde{\sigma}_{yi}^I(y) \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_I^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_I} \sigma_j^{I*} \tilde{\sigma}_j^I(y) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_I} \sigma_{xj}^{I*} \tilde{\sigma}_{xj}^I(y) \\ \sum_{j=1}^{N_I} \sigma_{yj}^{I*} \tilde{\sigma}_{yj}^I(y) \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Le champ de la contrainte à la sortie :

$$\mathbf{q}_O = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_O} \lambda_{xi} \tilde{\lambda}_{xi}(y) \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_O^* = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N_O} \lambda_{xj}^* \tilde{\lambda}_{xj}(y) \end{bmatrix}$$

A.2. Formulation matricielle du problème stationnaire

En substituant ces approximations dans les formulations faibles du problème (A.7), (A.10), (A.12), (A.14) et (A.15), nous obtenons une formulation faible discrète qui est un problème linéaire qui pourrait s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{F,F} & \mathcal{A}^{D,F} & \mathcal{A}^{S,F} & \mathcal{A}^{I,F} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{D,D} & \mathcal{A}^{S,D} & \mathcal{O} & \mathcal{A}^{O,D} \\ \mathcal{A}^{F,S} & \mathcal{A}^{D,S} & \mathcal{A}^{S,S} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{F,I} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}^{D,O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_D \\ \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_O \end{pmatrix}}_{\mathbf{q}_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{C}^F \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{C}^S \\ \mathcal{C}^I \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \quad (\text{A.17})$$

avec

$$\mathcal{A}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{u}} & \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{p}\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{p}} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_F}} \quad \text{tels que :} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{u}} = -\rho \int_{\Omega_0} (\nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_{1i} \cdot \mathbf{u}_0 + \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{1i}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_j dv_0 \\ \quad - 2\mu \int_{\Omega_0} \mathbf{D}_0(\tilde{\mathbf{u}}_{1i}) : \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_j dv_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{p}} = \int_{\Omega_0} p_{1i} \nabla_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_j dv_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{p}\mathbf{u}} = \int_{\Omega_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_{1i} \tilde{p}_j dv_0. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{D,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij}^{\xi\mathbf{u}} \\ \mathcal{A}_{ij}^{\xi\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_F}}$$

$$\text{tels que :} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{ij}^{\xi\mathbf{u}} = \rho \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \tilde{\xi}_j \cdot \mathbf{u}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i dv_0 + \mu \int_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \tilde{\xi}_j) : \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_i dv_0 \\ \quad + \mu \int_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \nabla_0 \tilde{\xi}_j)^T : \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_i dv_0 + \int_{\Gamma_{sl,0}} \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}_0) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j ds_0 \\ \quad + 2\mu \int_{\Omega_0} (\nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla_0 \tilde{\xi}_j) : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 - 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_i : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j dv_0 \\ \quad - \rho \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j dv_0 + \int_{\Omega_0} p_0 (\nabla_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j - \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_i : \nabla_0^T \tilde{\xi}_j) dv_0 \\ \quad + \int_{\Gamma_{I,0}} \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j dy \\ \quad + \int_{\Gamma_{O,0}} \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j dy + \int_{\Gamma_{B,0}} \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot (\sigma_{0,x}^B \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^B \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j dx. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\xi\mathbf{p}} = \int_{\Omega_0} \tilde{p}_i (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \tilde{\xi}_j - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \tilde{\xi}_j) dv_0. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{S,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_n \mathbf{u}} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \mathbf{u}} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \mathbf{u}} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_S}} \quad \text{tels que :} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_n \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\sigma}_{1,nj} \mathbf{n}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_{0,n} \frac{\partial \tilde{\eta}_{nj}}{\partial s_0} \mathbf{t}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_{0,n} \tilde{\eta}_{tj} \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i ds_0. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{I,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_x^I \mathbf{u}} & \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_y^I \mathbf{u}} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_I}} \quad \text{tels que :} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_x^I \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{I,0}} \tilde{\sigma}_{1,xj}^I \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{e}_x dy. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_y^I \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{I,0}} \tilde{\sigma}_{1,yj}^I \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \mathbf{e}_y dy. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{D,D} = \left(\mathcal{A}_{ij}^{\xi\xi} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_F}} \quad \text{tel que :} \quad \mathcal{A}_{ij}^{\xi\xi} = - \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \tilde{\xi}_j : \Sigma_D(\tilde{\xi}_i) dv_0.$$

$$\mathcal{A}^{S,D} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_n \xi} & \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_t \xi} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_S}} \quad \text{tels que :} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_n \xi} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{nj} \mathbf{n}_0 \cdot \tilde{\xi}_i ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_t \xi} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{tj} \mathbf{t}_0 \cdot \tilde{\xi}_i ds_0. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A}^{O,D} = \left(\mathcal{A}_{ij}^{\lambda_x \xi} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N_O \\ 1 \leq j \leq N_D}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_x \xi} = \int_{\Gamma_{O,0}} \lambda_{xj} \mathbf{e}_x \cdot \tilde{\xi}_i dy. \right.$$

$$\mathcal{A}^{F,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_n \mathbf{u}} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_S}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_n \mathbf{u}} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\mathbf{u}}_{1i} \cdot \mathbf{n}_0 \tilde{\sigma}_{nj} ds_0. \right.$$

$$\mathcal{A}^{D,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_n \xi} \\ \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_t \xi} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_S}} \quad \text{tels que :} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_n \xi} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{nj} \tilde{\xi}_i \cdot \mathbf{n}_0 ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\lambda_t \xi} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{tj} \tilde{\xi}_i \cdot \mathbf{t}_0 ds_0. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A}^{S,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \sigma_n} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \sigma_n} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{A}^{\sigma_n \eta_n} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \eta_n} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \eta_n} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \eta_t} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \lambda_n} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \lambda_t} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_S \\ 1 \leq j \leq N_S}}$$

$$\text{tels que :} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \sigma_n} = \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \tilde{\eta}_{nj}}{\partial s_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{t}_0 \tilde{\sigma}_{ni} ds_0 \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \sigma_n} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\eta}_{tj} \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \cdot \mathbf{u}_0 \tilde{\sigma}_{ni} ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \lambda_n} = - \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{ni} \tilde{\eta}_{nj} ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \lambda_t} = - \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\lambda}_{tj} \tilde{\eta}_{ti} ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\sigma_n \eta_n} = - \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\sigma}_{1,nj} \tilde{\eta}_{ni} ds_0. \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{A}_{ij}^{\eta_n \eta_n} = \rho \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\eta}_{nj} \tilde{\eta}_{ni} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{g} ds_0 \\ \quad - \gamma \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \tilde{\eta}_{nj}}{\partial s_0} \frac{\partial \tilde{\eta}_{ni}}{\partial s_0} ds_0 \\ \quad + \gamma \int_{\Gamma_{S,0}} \kappa_0^2 \tilde{\eta}_n \tilde{\eta}_n ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \eta_n} = \rho \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\eta}_{ni} \tilde{\eta}_{tj} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{g} ds_0 \\ \quad + \gamma \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \kappa_0}{\partial s_0} \tilde{\eta}_{tj} \tilde{\eta}_{ni} ds_0. \\ \mathcal{A}_{ij}^{\eta_t \eta_t} = - \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \tilde{\eta}_{tj}}{\partial s_0} \frac{\partial \tilde{\eta}_{ti}}{\partial s_0} ds_0. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{A}^{F,I} = \left(\mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u} \sigma^I} \quad \mathcal{O} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N_I \\ 1 \leq j \leq N_F}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{A}_{ij}^{\mathbf{u} \sigma^I} = \int_{\Gamma_{I,0}} \tilde{\mathbf{u}}_{1j} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^I dy. \right.$$

$$\mathcal{A}^{D,O} = \left(\mathcal{A}_{ij}^{\xi \lambda_x} \right)_{\substack{1 \leq i \leq N_O \\ 1 \leq j \leq N_I}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{A}_{ij}^{\xi \lambda_x} = \int_{\Gamma_{O,0}} \tilde{\lambda}_{xj} \tilde{\xi}_i dy_0. \right.$$

$$\mathcal{C}^F = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_j^{\mathbf{u}} \\ \mathcal{C}_j^{\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{1 \leq j \leq N_F} \quad \text{tels que :} \quad \left| \begin{array}{l} \mathcal{C}_j^{\mathbf{u}} = \rho \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_j dv_0 + 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \tilde{\mathbf{u}}_j : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 \\ \quad - \int_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_j dv_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}_0) ds_0 \\ \quad - \int_{\Gamma_{I,0}} \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) dy \\ \quad - \int_{\Gamma_{O,0}} \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) dy. \\ \mathcal{C}_j^{\mathbf{p}} = - \int_{\Omega_0} \tilde{p}_j \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 dv_0. \end{array} \right.$$

A.3. Formulation faible du problème d'instabilité

$$\mathcal{C}^S = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_j^{\sigma_n} \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq N_S} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{C}_j^{\sigma_n} = - \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0) \tilde{\sigma}_{nj} ds_0. \right.$$

$$\mathcal{C}^I = (\mathcal{C}_j^{\sigma^I})_{1 \leq i \leq N_I} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{C}_j^{\sigma^I} = - \int_{\Gamma_{I,0}} (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_I) \cdot \tilde{\sigma}_j^I dy_0. \right.$$

A.3 Formulation faible du problème d'instabilité

La formulation faible du problème est obtenue comme suit : dans un premier temps pour le problème fluide nous multiplions les termes du coté droite de l'équation (5.47) par la fonction test \mathbf{u}^* et nous intégrons sur le domaine de référence Ω_0 . Dans un second temps, pour la surface libre nous multiplions le membre du coté droit de l'équation (5.49) par la fonction test σ_n^* et nous intégrons sur $\Gamma_{S,0}$. Ces résultats ensuite s'ajoutent respectivement aux formulations faibles du problème stationnaire (A.7) et (A.12). Finalement, nous rassemblons les deux équations avec les formulations faibles données par (A.10), (A.14) et (A.15), nous obtenons la formulation faible suivante :

$$\begin{aligned} & \epsilon \iint_{\Omega_0} p^* (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}_1 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 : \nabla_0^T \mathbf{q}_D) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega_0} p^* \nabla_0 \cdot \mathbf{u}_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 - \epsilon \lambda \int_{\Omega_0} \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}^* \nabla_0 \mathbf{u}_0 dv_0 \\ & - \epsilon \rho \iint_{\Omega_0} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_1 + \nabla_0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_0 - \nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D \cdot \mathbf{u}_0) dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_{0,n} \mathbf{u}^* \cdot \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \right) ds_0 \\ & + \epsilon \mu \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D + (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D)^T) dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^O \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy_0 \\ & - \epsilon \iint_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \mathbf{u}^* : \nabla_0^T \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon 2\mu \iint_{\Omega_0} (\nabla_0 \mathbf{u}^* \cdot \nabla_0 \mathbf{q}_D) : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) dv_0 + \epsilon \iint_{\Omega_0} p_1 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{1,y}^I \mathbf{e}_y) dy_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,n} \mathbf{n}_0) ds_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^I \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^I \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dy_0 \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{O,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{1,x}^O \mathbf{e}_x + \sigma_{1,y}^O \mathbf{e}_y) dy_0 - \epsilon 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_1) dv_0 + \epsilon \rho \lambda \int_{\Omega_0} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}^* dv_0 \\ & - \epsilon \rho \int_{\Omega_0} \mathbf{u}^* \cdot (\nabla_0 \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{B,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,x}^B \mathbf{e}_x + \sigma_{0,y}^B \mathbf{e}_y) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dx \\ & - \epsilon 2\mu \int_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{u}^* : \mathbf{D}_0(\mathbf{u}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \mathbf{u}^* \cdot (\sigma_{0,n} \mathbf{n}_0) \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D ds_0 + \epsilon \int_{\Omega_0} p_0 \nabla_0 \cdot \mathbf{u}^* \nabla_0 \cdot \mathbf{q}_D dv_0 \\ & \text{-----} \\ & \epsilon \lambda \int_{\Gamma_{S,0}} \eta_n \sigma_n^* ds_0 + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{t}_0 + \eta_t \frac{\partial \mathbf{n}_0}{\partial s_0} \cdot \mathbf{u}_0 \right) \sigma_n^* ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{n}_0) \lambda_n^* + (\mathbf{q}_D \cdot \mathbf{t}_0) \lambda_t^* ds_0 \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{S,0}} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_0) \sigma_n^* ds_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} \sigma_{1,n} \tilde{\eta}_n ds_0 + \int_{\Gamma_{S,0}} \rho (\eta_n \mathbf{n}_0 + \eta_t \mathbf{t}_0) \cdot \mathbf{g}_n^* ds_0 - \gamma \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \eta_n}{\partial s_0} \frac{\partial \eta_n^*}{\partial s_0} ds_0 \\ & + \gamma \int_{\Gamma_{S,0}} \left(\kappa_0^2 \eta_n + \frac{\partial \kappa_0}{\partial s_0} \eta_t \right) \eta_n^* ds_0 - \int_{\Gamma_{S,0}} \frac{\partial \eta_t}{\partial s_0} - \int_{\Gamma_{S,0}} (\lambda_n^* \eta_n + \lambda_t^* \eta_t) ds_0 \frac{\partial \eta_t^*}{\partial s_0} ds_0 \\ & \text{-----} \\ & - \iint_{\Omega_0} \nabla_0 \mathbf{q}_D^* : \Sigma_D(\mathbf{q}_D) dv_0 + \int_{\Gamma_{I,0}} \lambda_x \xi_x^* dy + \int_{\Gamma_{S,0}} (\lambda_n (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{q}_D^*) + \lambda_t (\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{q}_D^*)) ds_0 \\ & \text{-----} \\ & + \epsilon \int_{\Gamma_{I,0}} \mathbf{q}_I^* \cdot \mathbf{u}_1 dy_0 \\ & \text{-----} \\ & + \int_{\Gamma_{O,0}} \lambda_x \xi_x^* dy_0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 0. \end{aligned} \tag{A.18}$$

A.4 Formulation matricielle du problème d'instabilité

En substituant les approximations données dans la troisième section, dans la formulation faible du problème (A.18), nous obtenons une formulation faible discrète qui est un problème aux valeurs propres qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda\mathbf{B}\mathbf{q}_1 \quad (\text{A.19})$$

La définition de la matrice \mathbf{A} ainsi que ses éléments sont les mêmes donnés précédemment. La matrice \mathbf{B} est donnée par :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}^{F,F} & \mathcal{B}^{D,F} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{B}^{S,S} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}.$$

avec

$$\mathcal{B}^{F,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{u}} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_F}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{B}_{ij}^{\mathbf{u}\mathbf{u}} = \rho \int_{\Omega_0} \tilde{\mathbf{u}}_{1j} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i dv_0. \right.$$

$$\mathcal{B}^{D,F} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_{ij}^{\xi\mathbf{u}} \\ \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_F \\ 1 \leq j \leq N_D}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{B}_{ij}^{\xi\mathbf{u}} = \int_{\Omega_0} \tilde{\xi}_j \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i \nabla_0 \mathbf{u}_0 dv_0. \right.$$

$$\mathcal{B}^{S,S} = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{B}_{ij}^{\eta_n \sigma_n} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} & \mathcal{O} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq N_S \\ 1 \leq j \leq N_S}} \quad \text{tel que :} \quad \left| \mathcal{B}_{ij}^{\eta_n \sigma_n} = \int_{\Gamma_{S,0}} \tilde{\eta}_{nj} \tilde{\sigma}_{ni} ds_0. \right.$$



Bibliographie

- [Abramovich 1986] BS Abramovich, EA Mareev et BE Nemtsov. *Instability in the oscillations of a moving oscillator while it radiates surface and internal waves*. Fluid Dynamics, vol. 21, no. 1, pages 147–149, 1986.
- [Alam 2012] Mohammad-Reza Alam. *Nonlinear analysis of an actuated seafloor-mounted carpet for a high-performance wave energy extraction*. Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 468, no. 2146, pages 3153–3171, 2012.
- [Alexander 1967] R McNeill Alexander *et al.* Functional design in fishes. Hutchinson London, 1967.
- [Alexander 1983] RM Alexander, PW Webb et D Weihs. *The history of fish mechanics*. Fish biomechanics. Praeger, New York, pages 1–35, 1983.
- [Anagnostopoulos 1996] Petros Anagnostopoulos, G Iliadis et S Richardson. *Numerical study of the blockage effects on viscous flow past a circular cylinder*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 22, no. 11, pages 1061–1074, 1996.
- [Andersen 2015] Morten Thøtt Andersen, Dennis Hindhede et Jimmy Lauridsen. *Influence of model simplifications excitation force in surge for a floating foundation for offshore wind turbines*. Energies, vol. 8, no. 4, pages 3212–3224, 2015.
- [Antonio 2010] F de O Antonio. *Wave energy utilization : A review of the technologies*. Renewable and sustainable energy reviews, vol. 14, no. 3, pages 899–918, 2010.
- [Antonutti 2016] Raffaello Antonutti, Christophe Peyrard, Lars Johanning, Atilla Incecik et David Ingram. *The effects of wind-induced inclination on the dynamics of semi-submersible floating wind turbines in the time domain*. Renewable Energy, vol. 88, pages 83–94, 2016.
- [Arockiasamy 1984] M Arockiasamy, DV Reddy et ASJ Swamidas. *Response of semisubmersibles to bergy bit impact*. In Specialty Conf. on Computer Methods in Offshore Engineering, Halifax, pages 375–396, 1984.
- [Arockiasamy 1985] M Arockiasamy, DV Reddy, DB Muggeridge et ASJ Swamidas. *Response of Semi-Submersibles in Ice Environment*. Journal of Technical Topics in Civil Engineering, vol. 111, no. 1, pages 33–46, 1985.
- [Arunachalam 1987] VM Arunachalam, JJ Murray et DB Muggeridge. *Short term motion analysis of ice-bergs in linear waves*. Cold Regions Science and Technology, vol. 13, no. 3, pages 247–258, 1987.
- [Babarit 2015] Aurélien Babarit. *A database of capture width ratio of wave energy converters*. Renewable Energy, vol. 80, pages 610–628, 2015.
- [Babarit 2018] Aurélien Babarit. *L'énergie des vagues : Ressource, technologies et performance*. ISTE Group, 2018.
- [Bang 2016] Guri Bang, Jon Hovi et Tora Skodvin. *The Paris Agreement : Short-term and long-term effectiveness*. Politics and Governance, vol. 4, no. 3, pages 209–218, 2016.
- [Barber 1948] Norman Frederick Barber et Fritz Ursell. *The generation and propagation of ocean waves and swell. I. Wave periods and velocities*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 240, no. 824, pages 527–560, 1948.

- [Berenger 1994] Jean-Pierre Berenger. *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*. Journal of computational physics, vol. 114, no. 2, pages 185–200, 1994.
- [Berger 1972] Eberhard Berger et Rudolf Wille. *Periodic flow phenomena*. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 4, no. 1, pages 313–340, 1972.
- [Bernitsas 2006] Michael M Bernitsas, Kamaldev Raghavan, Y Ben-Simon et EMH Garcia. *VIVACE (vortex induced vibration aquatic clean energy) : a new concept in generation of clean and renewable energy from fluid flow*. In International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, volume 47470, pages 619–637, 2006.
- [Bi 2022] Cheng Bi, Mao See Wu et Adrian Wing-Keung Law. *Surface wave interaction with a vertical viscoelastic barrier*. Applied Ocean Research, vol. 120, page 103073, 2022.
- [Blake 1983] RW Blake. *Swimming in the electric eels and knifefishes*. Canadian Journal of Zoology, vol. 61, no. 6, pages 1432–1441, 1983.
- [Bonnefis 2019] Paul Bonnefis. *Etude des instabilités de sillage, de forme et de trajectoire de bulles par une approche de stabilité linéaire globale*. PhD thesis, 2019.
- [Bouscasse 2017] Benjamin Bouscasse, Andrea Colagrossi, Salvatore Marrone et Antonio Souto-Iglesias. *SPH modelling of viscous flow past a circular cylinder interacting with a free surface*. Computers & Fluids, vol. 146, pages 190–212, 2017.
- [Bovis 1992] Alain Bovis. Hydrodynamique navale. Numeéro BOOK. Ecole nationale supérieure de techniques avancées, département mécanique, 1992.
- [BP 2021] BP. *Statistical Review of World Energy 70th edition*, 2021.
- [Braestrup 2009] Mikael Braestrup, Jan B Andersen, Lars Wahl Andersen, Mads B Bryndum et Niels-J Rishøj Nielsen. Design and installation of marine pipelines. John Wiley & Sons, 2009.
- [Bretherton 1968] Francis P Bretherton et Christopher John Raymond Garrett. *Wavetrains in inhomogeneous moving media*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, vol. 302, no. 1471, pages 529–554, 1968.
- [Bryden 2005] Harry L Bryden, Lisa M Beal et Louise M Duncan. *Structure and transport of the Agulhas Current and its temporal variability*. Journal of Oceanography, vol. 61, no. 3, pages 479–492, 2005.
- [Buckley 1985] Terry J Buckley. Underwater iceberg geometry, volume 14. Environmental Studies Revolving Funds, 1985.
- [Cammaert 1983] AB Cammaert, TT Wong et DD Curtis. *Impact of icebergs on offshore gravity and floating platforms*. 1983.
- [Carter 2014] Lionel Carter, Rachel Gavey, PETER J TALLING et James T Liu. *Insights into submarine geohazards from breaks in subsea telecommunication cables*. Oceanography, vol. 27, no. 2, pages 58–67, 2014.
- [Chakraborty 2014] Rumpa Chakraborty et BN Mandal. *Scattering of water waves by a submerged thin vertical elastic plate*. Archive of Applied Mechanics, vol. 84, no. 2, pages 207–217, 2014.
- [Chakraborty 2016] Rumpa Chakraborty, Arpita Mondal et R Gayen. *Interaction of surface water waves with a vertical elastic plate : a hypersingular integral equation approach*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, vol. 67, no. 5, pages 1–18, 2016.
- [Cho 1998] IH Cho et MH Kim. *Interactions of a horizontal flexible membrane with oblique incident waves*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 367, pages 139–161, 1998.
- [Cho 2000] IH Cho et MH Kim. *Interactions of horizontal porous flexible membrane with waves*. Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering, vol. 126, no. 5, pages 245–253, 2000.
- [Chu 2018] Chia-Ren Chu, Yu-An Lin, Tso-Ren Wu et Chung-Yue Wang. *Hydrodynamic force of a circular cylinder close to the water surface*. Computers & Fluids, vol. 171, pages 154–165, 2018.

- [Chung 1977] Jin S Chung. *Forces on submerged cylinders oscillating near a free surface*. Journal of Hydronautics, vol. 11, no. 3, pages 100–106, 1977.
- [Colagrossi 2019] A Colagrossi, G Nikolov, D Durante, S Marrone et A Souto-Iglesias. *Viscous flow past a cylinder close to a free surface : Benchmarks with steady, periodic and metastable responses, solved by meshfree and mesh-based schemes*. Computers & Fluids, vol. 181, pages 345–363, 2019.
- [Commission 2018] European Commission. *The Commission Presents Strategy for a Climate Neutral Europe by 2050—Questions and Answers*, 2018.
- [Commission 2019] European Commission. *2030 Climate and Energy Framework*, 2019.
- [Coutanceau 1977] Madeleine Coutanceau et Roger Bouard. *Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 79, no. 2, pages 231–256, 1977.
- [Crooks 2016] David Crooks, Jos van't Hoff, Matt Folley et Bjoern Elsaesser. *Oscillating wave surge converter forced oscillation tests*. In International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, volume 49972, page V006T09A021. American Society of Mechanical Engineers, 2016.
- [de Langre 2000] Emmanuel de Langre. *Analyse dimensionnelle en interaction fluide-structure*. La Houille Blanche, no. 3-4, pages 14–18, 2000.
- [De Langre 2001] Emmanuel De Langre. Fluides et solides. Editions Ecole Polytechnique, 2001.
- [Dean 1945] WR Dean. *On the reflexion of surface waves by a submerged plane barrier*. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 41, pages 231–238. Cambridge University Press, 1945.
- [Decoene 2012] Astrid Decoene et Bertrand Maury. *Moving meshes with FreeFem++*. Journal of Numerical Mathematics, vol. 20, no. 3-4, pages 195–214, 2012.
- [Desmars 2018] Nicolas Desmars, J Tchoufag, D Younesian et M-R Alam. *Interaction of surface waves with an actuated submerged flexible plate : Optimization for wave energy extraction*. Journal of Fluids and Structures, vol. 81, pages 673–692, 2018.
- [Dixon 1979] A Graham Dixon, Stephen H Salter et Clive A Greated. *Wave forces on partially submerged cylinders*. Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, vol. 105, no. 4, pages 421–438, 1979.
- [Dmitriev 2007] Nicolay Ye Dmitriev et Alexander V Nesterov. *Iceberg drift in the Barents Sea according to the observation data and simulation results*. In The Seventeenth International Offshore and Polar Engineering Conference. OnePetro, 2007.
- [Domokos 2004] Peter Domokos, Andras Vukics et Helmut Ritsch. *Anomalous Doppler-effect and polariton-mediated cooling of two-level atoms*. Physical review letters, vol. 92, no. 10, page 103601, 2004.
- [Déporte 2016] Astrid Déporte. *Caractérisation du fonctionnement d'une hydrolienne à membrane ondulante pour la récupération de l'énergie des courants marins*. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale-Brest, 2016.
- [Edenhofer 2011] Ottmar Edenhofer, Ramón Pichs-Madruga, Youba Sokona, Kristin Seyboth, Susanne Kadner, Timm Zwickel, Patrick Eickemeier, Gerrit Hansen, Steffen Schlömer, Christoph von Stechow *et al*. Renewable energy sources and climate change mitigation : Special report of the intergovernmental panel on climate change. Cambridge University Press, 2011.
- [El-Mahdy 2022] Mohamed El-Sayed El-Mahdy, Ali Saber, Fawzia Ebrahim Moursy, Abbas Sharaky et Naglaa Saleh. *Coastal erosion risk assessment and applied mitigation measures at Ezbet Elborg village, Egyptian delta*. Ain Shams Engineering Journal, vol. 13, no. 3, page 101621, 2022.
- [Eloy 2007] Christophe Eloy, Claire Souilliez et Lionel Schouveiler. *Flutter of a rectangular plate*. Journal of Fluids and Structures, vol. 23, no. 6, pages 904–919, 2007.

- [Eloy 2013] Christophe Eloy. *On the best design for undulatory swimming*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 717, pages 48–89, 2013.
- [Euvé 2017] Léo-Paul Euvé. *Interactions ondes-courant-obstacle : application à la physique des trous noirs*. PhD thesis, 2017.
- [Evans 1972] DV Evans et CAN Morris. *The effect of a fixed vertical barrier on obliquely incident surface waves in deep water*. IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 9, no. 2, pages 198–204, 1972.
- [Evans 1976] DV Evans. *A theory for wave-power absorption by oscillating bodies*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 77, no. 1, pages 1–25, 1976.
- [Evans 1979] DV Evans, DC Jeffrey, SH Salter et JRM Taylor. *Submerged cylinder wave energy device : theory and experiment*. Applied Ocean Research, vol. 1, no. 1, pages 3–12, 1979.
- [Fabre 2018] David Fabre, Vincenzo Citro, D Ferreira Sabino, Paul Bonnefis, Javier Sierra, Flavio Giannetti et Maxime Pigou. *A practical review on linear and nonlinear global approaches to flow instabilities*. Applied Mechanics Reviews, vol. 70, no. 6, 2018.
- [Fabre 2019] David Fabre, Raffaele Longobardi, Paul Bonnefis et Paolo Luchini. *The acoustic impedance of a laminar viscous jet through a thin circular aperture*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 864, pages 5–44, 2019.
- [Faltinsen 1993] Odd Faltinsen. *Sea loads on ships and offshore structures, volume 1*. Cambridge university press, 1993.
- [Fejer 1960] Andrew A Fejer et RICHARD H BACKUS. *Porpoises and the bow-riding of ships under way*. Nature, vol. 188, no. 4752, pages 700–703, 1960.
- [Fish 1999] Frank E Fish et JJ Rohr. *Review of dolphin hydrodynamics and swimming performance*. 1999.
- [Fish 2006] FEandlauder Fish et George V Lauder. *Passive and active flow control by swimming fishes and mammals*. Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 38, pages 193–224, 2006.
- [García-Palacios 2009] Jaime García-Palacios, Avelino Samartin et Vicente Negro. *A nonlinear analysis of laying a floating pipeline on the seabed*. Engineering Structures, vol. 31, no. 5, pages 1120–1131, 2009.
- [Garrett 1985] Christopher Garrett. *Statistical prediction of iceberg trajectories*. Cold Regions Science and Technology, vol. 11, no. 3, pages 255–266, 1985.
- [GOFF 1998] MATTHEW GOFF, MICHAEL SALMON et KENNETH J LOHMANN. *Hatchling sea turtles use surface waves to establish a magnetic compass direction*. Animal Behaviour, vol. 55, no. 1, pages 69–77, 1998.
- [Gray 1933a] J Gray. *Studies in animal locomotion : I. The movement of fish with special reference to the eel*. Journal of experimental biology, vol. 10, no. 1, pages 88–104, 1933.
- [Gray 1933b] J Gray. *Studies in animal locomotion : II. The relationship between waves of muscular contraction and the propulsive mechanism of the eel*. Journal of Experimental Biology, vol. 10, no. 4, pages 386–390, 1933.
- [Gray 1933c] J Gray. *STUDIES IN ANIMAL LOCOMOTION : III. THE PROPULSIVE MECHANISM OF THE WHITING (GADUS MERLANGUS)*. Journal of experimental biology, vol. 10, no. 4, pages 391–400, 1933.
- [Gray 1968] J Gray. *Animal Locomotion.* Weidenfeld & Nicolson, London. GrayAnimal Locomotion1968, 1968.
- [Guillou 2018] Nicolas Guillou, Simon P Neill et Peter E Robins. *Characterising the tidal stream power resource around France using a high-resolution harmonic database*. Renewable Energy, vol. 123, pages 706–718, 2018.

- [Gunn 2012] Kester Gunn et Clym Stock-Williams. *Quantifying the global wave power resource*. Renewable Energy, vol. 44, pages 296–304, 2012.
- [Guo 2000] CQ Guo et MP Paidoussis. *Stability of rectangular plates with free side-edges in two-dimensional inviscid channel flow*. Journal of Applied Mechanics, vol. 67, no. 1, pages 171–176, 2000.
- [Haas 2017] Kevin Haas, Xiufeng Yang, Vincent Neary et Budi Gunawan. *Ocean current energy resource assessment for the Gulf stream system : The Florida current*. In Marine Renewable Energy, pages 217–236. Springer, 2017.
- [Hecht 2012] Frédéric Hecht. *New development in FreeFem++*. Journal of numerical mathematics, vol. 20, no. 3-4, pages 251–266, 2012.
- [Henderson 2006] Ross Henderson. *Design, simulation, and testing of a novel hydraulic power take-off system for the Pelamis wave energy converter*. Renewable energy, vol. 31, no. 2, pages 271–283, 2006.
- [Hooke 1997] Norman Hooke. Maritime casualties, 1963-1996. LLP, 1997.
- [Hotzel 1983] I Stuart Hotzel et John D Miller. *Icebergs : their physical dimensions and the presentation and application of measured data*. Annals of Glaciology, vol. 4, pages 116–123, 1983.
- [Hu 2011] Zheng Zheng Hu, DM Causon, CG Mingham et L Qian. *Numerical simulation of floating bodies in extreme free surface waves*. Natural Hazards and Earth System Sciences, vol. 11, no. 2, pages 519–527, 2011.
- [Hughes 2016] Michael Hughes. *Coastal waves, water levels, beach dynamics and climate change*. Coast Adapt, National Climate Change Adaptation Research Facility, Gold Coast, 2016.
- [Kantardgi 2021] IG Kantardgi et AG Gogin. *Submarine Pipeline Stability under Stream and Waves Action*. Power Technology and Engineering, vol. 55, no. 3, pages 367–372, 2021.
- [Kojimoto 2017] Nigel C Kojimoto, Marcus Lehmann, Bryan Murray, Thomas Boerner, M Reza Alam et al. *Model Scale Submerged Hydraulic Power Take-Off With Adjustable Damping for Wave Energy Conversion*. In The 27th International Ocean and Polar Engineering Conference. International Society of Offshore and Polar Engineers, 2017.
- [Koo 2007] Weoncheol Koo et Moo-Hyun Kim. *Current effects on nonlinear wave-body interactions by a 2D fully nonlinear numerical wave tank*. Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering, vol. 133, no. 2, pages 136–146, 2007.
- [Kundu 2018] Souvik Kundu, R Gayen et Ranadev Datta. *Scattering of water waves by an inclined elastic plate in deep water*. Ocean Engineering, vol. 167, pages 221–228, 2018.
- [Labarbe 2020] Joris Labarbe et Oleg N Kirillov. *Membrane flutter induced by radiation of surface gravity waves on a uniform flow*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 901, 2020.
- [Labarbe 2021] Joris Labarbe et Oleg N Kirillov. *Radiation-induced instability of a finite-chord Némsov membrane*. arXiv preprint arXiv :2104.01060, 2021.
- [Lamb 1900] Horace Lamb. *On a peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium*. Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 1, no. 1, pages 208–213, 1900.
- [Lee 1990] Jaw-Fang Lee et Chuen-Jiin Chen. *Wave interaction with hinged flexible breakwater*. Journal of Hydraulic Research, vol. 28, no. 3, pages 283–297, 1990.
- [Lehmann 2013] Marcus Lehmann, Ryan Elandt, Henry Pham, Reza Ghorbani, Mostafa Shakeri et Mohammad-Reza Alam. *An artificial seabed carpet for multidirectional and broadband wave energy extraction : Theory and Experiment*. In Proceedings of 10th European Wave and Tidal Energy Conference, EWTEC2013, Aalborg, Denmark, 2013.

- [Lehmann 2014] Marcus Lehmann, Ryan Elandt, Mostafa Shakeri et Reza Alam. *The wave carpet : development of a submerged pressure differential wave energy converter*. In 30th Symposium on Naval Hydrodynamics, pages 2–7, 2014.
- [Leishman 1976] JM Leishman et George Scobie. *The development of wave power : a techno-economic study*. 1976.
- [Lever 1987] James H Lever et Debabrata Sen. *A method to upgrade iceberg velocity statistics to include wave-induced motion*. 1987.
- [Lever 1990] JH Lever, D Sen et D Attwood. *The influence of shape on iceberg wave-induced velocity statistics*. 1990.
- [Lever 1991] JH Lever, K Klein, D Mitchell et D Diemand. *Wave-induced iceberg motion*. Cold regions science and technology, vol. 20, no. 1, pages 11–23, 1991.
- [Levine 1958] Harold Levine et Eugene Rodemich. *Scattering of surface waves on an ideal fluid*. Rapport technique, STANFORD UNIV CA APPLIED MATHEMATICS AND STATISTICS LABS, 1958.
- [Lighthill 1975] MJ Lighthill. *Mathematical biofluid dynamics*. Philadelphia : Soc. Industr. Appl. Math, 1975.
- [Lighthill 2001] Michael J Lighthill et James Lighthill. *Waves in fluids*. Cambridge university press, 2001.
- [Lin 2014] Hong-Xing Lin, De-Zhi Ning, Qing-Ping Zou, Bin Teng et Li-Fen Chen. *Current effects on nonlinear wave scattering by a submerged plate*. Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering, vol. 140, no. 5, page 04014016, 2014.
- [Lohmann 1992] Kenneth J Lohmann et Catherine M Fittinghoff Lohmann. *Orientation to oceanic waves by green turtle hatchlings*. Journal of Experimental Biology, vol. 171, no. 1, pages 1–13, 1992.
- [Lohmann 1995] K Lohmann, A Swartz et C Lohmann. *Perception of ocean wave direction by sea turtles*. The Journal of experimental biology, vol. 198, no. 5, pages 1079–1085, 1995.
- [Maddock 1994] Linda Maddock, Quentin Bone, Jeremy MV Rayner *et al.* *The mechanics and physiology of animal swimming*. Cambridge University Press, 1994.
- [Maquet 1989] Paul Maquet. *On the movement of animals [Transl. of G. Borelli]*, 1989.
- [McIver 1984] P McIver et DV Evans. *The occurrence of negative added mass in free-surface problems involving submerged oscillating bodies*. Journal of engineering mathematics, vol. 18, no. 1, pages 7–22, 1984.
- [McIver 1985] Maureen McIver. *Diffraction of water waves by a moored, horizontal, flat plate*. Journal of Engineering Mathematics, vol. 19, no. 4, pages 297–319, 1985.
- [McKenna 1999] RF McKenna, G Crocker et MJ Paulin. *Modelling iceberg scour processes on the northeast Grand Banks*. In Proceedings, Offshore Mechanics and Arctic Engineering, 1999.
- [McKenna 2005] Richard McKenna. *Iceberg shape characterization*. In Proceedings 18th International Conference on Port and Ocean Engineering under Arctic Conditions, volume 2, pages 555–564, 2005.
- [Merewether 1971] David E Merewether. *Transient currents induced on a metallic body of revolution by an electromagnetic pulse*. IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, no. 2, pages 41–44, 1971.
- [Meylan 2009] Michael H Meylan et Malte A Peter. *Water-wave scattering by submerged elastic plates*. The Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics, vol. 62, no. 3, pages 321–344, 2009.
- [Moldan 1985] AGS Moldan, LF Jackson, S McGibbon et J Van Der Westhuizen. *Some aspects of the Castillo de Bellver oilspill*. Marine Pollution Bulletin, vol. 16, no. 3, pages 97–102, 1985.
- [Mork 2010] Gunnar Mork, Stephen Barstow, Alina Kabuth et M Teresa Pontes. *Assessing the global wave energy potential*. In International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, volume 49118, pages 447–454, 2010.

- [Mougel 2017] Jérôme Mougel, David Fabre, Laurent Lacaze et Tomas Bohr. *On the instabilities of a potential vortex with a free surface*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 824, pages 230–264, 2017.
- [Mougel 2020] Jérôme Mougel et Sébastien Michelin. *Flutter and resonances of a flag near a free surface*. Journal of Fluids and Structures, vol. 96, page 103046, 2020.
- [Mountain 1980] DG Mountain. *On predicting iceberg drift*. Cold Regions Science and Technology, vol. 1, no. 3-4, pages 273–282, 1980.
- [Munk 1951] Walter H Munk. *Origin and generation of waves*. Rapport technique, Scripps Institution of Oceanography La Jolla Calif, 1951.
- [Neill 2021] Simon P Neill. *Introduction to Ocean Renewable Energy*. In Comprehensive Renewable Energy. Elsevier, 2021.
- [Nemtsov 1986] BE Nemtsov. *Flutter effect and emission in the region of anomalous and normal Doppler effects*. Radiophys. Quantum Electron.(Engl. Transl.);(United States), vol. 28, no. 12, 1986.
- [Newman 2018] John Nicholas Newman. Marine hydrodynamics. The MIT press, 2018.
- [Ogilvie 1963] T Francis Ogilvie. *First-and second-order forces on a cylinder submerged under a free surface*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 16, no. 3, pages 451–472, 1963.
- [Olondriz 2016] Joannes Olondriz, Iker Elorza, Ignacio Trojaola, Aron Pujana et Joseba Landaluze. *On the effects of basic platform design characteristics on floating offshore wind turbine control and their mitigation*. In Journal of Physics : Conference Series, volume 753, page 052008. IOP Publishing, 2016.
- [on Climate Change 2019] United Nations Framework Convention on Climate Change. *The Paris Agreement*, 2019.
- [Patarapanich 1989] Mana Patarapanich et Hin-Fatt Cheong. *Reflection and transmission characteristics of regular and random waves from a submerged horizontal plate*. Coastal Engineering, vol. 13, no. 2, pages 161–182, 1989.
- [Peng 2003] Qt Peng et H Yi-Jun. *Numerical wave flume study on wave motion around submerged plates*. China Ocean Engineering, vol. 17, no. 3, pages 397–406, 2003.
- [Pfister 2019] Jean-Lou Pfister, Olivier Marquet et Marco Carini. *Linear stability analysis of strongly coupled fluid–structure problems with the Arbitrary-Lagrangian–Eulerian method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 355, pages 663–689, 2019.
- [Pilarczyk 2003] Krystian W Pilarczyk. *Alternative Systems for Coastal Protection-An Overview*. In International Conference on Estuaries and Coasts, pages 409–419, 2003.
- [Porter 1995] R Porter et DV Evans. *Complementary approximations to wave scattering by vertical barriers*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 294, pages 155–180, 1995.
- [Portillo Juan 2022] Nerea Portillo Juan, Vicente Negro Valdecantos, M Dolores Esteban et José Santos López Gutiérrez. *Review of the Influence of Oceanographic and Geometric Parameters on Oscillating Water Columns*. Journal of Marine Science and Engineering, vol. 10, no. 2, page 226, 2022.
- [Prasad 2014] Durusoju Hari Prasad et Nandyala Darga Kumar. *Coastal erosion studies—a review*. International Journal of Geosciences, vol. 2014, 2014.
- [Rayleigh 1878] Lord Rayleigh. *On the instability of jets*. Proceedings of the London mathematical society, vol. 1, no. 1, pages 4–13, 1878.
- [Rehimi 2008] F Rehimi, F Aloui, S Ben Nasrallah, L Doublez et J Legrand. *Experimental investigation of a confined flow downstream of a circular cylinder centred between two parallel walls*. Journal of Fluids and Structures, vol. 24, no. 6, pages 855–882, 2008.
- [Reichl 2005] P Reichl, Kerry Hourigan et Mark Christopher Thompson. *Flow past a cylinder close to a free surface*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 533, pages 269–296, 2005.

- [Rey 2011] Vincent Rey et Julien Touboul. *Forces and moment on a horizontal plate due to regular and irregular waves in the presence of current*. Applied Ocean Research, vol. 33, no. 2, pages 88–99, 2011.
- [Sahin 2004] Mehmet Sahin et Robert G Owens. *A numerical investigation of wall effects up to high blockage ratios on two-dimensional flow past a confined circular cylinder*. Physics of fluids, vol. 16, no. 5, pages 1305–1320, 2004.
- [Sahoo 2012] Trilochan Sahoo. *Mathematical techniques for wave interaction with flexible structures*. CRC Press, 2012.
- [Sannasiraj 1995] SA Sannasiraj, V Sundar et R Sundaravadivelu. *The hydrodynamic behaviour of long floating structures in directional seas*. Applied Ocean Research, vol. 17, no. 4, pages 233–243, 1995.
- [Sawaragi 1995] Toru Sawaragi. *Coastal engineering-waves, beaches, wave-structure interactions*. Elsevier, 1995.
- [Sayeed 2017] Tanvir Sayeed, Bruce Colbourne, Bruce Quinton, David Molyneux, Heather Peng et Don Spencer. *A review of iceberg and bergy bit hydrodynamic interaction with offshore structures*. Cold Regions Science and Technology, vol. 135, pages 34–50, 2017.
- [Schmitt 2016] Pál Schmitt, Christian Windt, Jonathan Nicholson et Björn Elsässer. *Development and validation of a procedure for numerical vibration analysis of an oscillating wave surge converter*. European Journal of Mechanics-B/Fluids, vol. 58, pages 9–19, 2016.
- [Schoonees 2019] T Schoonees, A Gijón Mancheño, B Scheres, TJ Bouma, R Silva, T Schlurmann et H Schüttrumpf. *Hard structures for coastal protection, towards greener designs*. Estuaries and Coasts, vol. 42, no. 7, pages 1709–1729, 2019.
- [Scruggs 2009] Jeff Scruggs et Paul Jacob. *Harvesting ocean wave energy*. Science, vol. 323, no. 5918, pages 1176–1178, 2009.
- [Shadwick 2012] RE Shadwick et JA Goldbogen. *Muscle function and swimming in sharks*. Journal of fish biology, vol. 80, no. 5, pages 1904–1939, 2012.
- [Sheridan 1997] John Sheridan, J-C Lin et D Rockwell. *Flow past a cylinder close to a free surface*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 330, pages 1–30, 1997.
- [Sierra 2020] Javier Sierra, David Fabre et Vincenzo Citro. *Efficient stability analysis of fluid flows using complex mapping techniques*. Computer Physics Communications, vol. 251, page 107100, 2020.
- [Silva 2018] Monica C Silva, Marcelo A Vitola, Paulo de Tarso T Esperança et Sergio H Sphaier. *Wave Force on a Partially Submerged Fixed Horizontal Circular Cylinder*. In International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, volume 51265, page V07AT06A042. American Society of Mechanical Engineers, 2018.
- [Sodhi 1980] DS Sodhi et Mona El-Tahan. *Prediction of an iceberg drift trajectory during a storm*. Annals of Glaciology, vol. 1, pages 77–82, 1980.
- [Soerensen 2003] HC Soerensen, E Friis-Madsen, W Panhauser, D Duncce, J Nedkvintne, Peter Bak Frigaard, Jens Peter Kofoed, W Knapp, S Riemann, E Holmén et al. *Development of wave dragon from scale 1 : 50 to prototype*. In Proceedings from the Fifth European Wave Energy Conference : Cork, Ireland, 2003, 2003.
- [Stafford 1971] DONALD B Stafford et J Langfelder. *Air photo survey of coastal erosion*. Photogrammetric engineering, vol. 37, no. 6, pages 565–575, 1971.
- [Szyrowski 2013a] Tomasz Szyrowski, Sanjay K Sharma, Robert Sutton et Gareth A Kennedy. *Developments in subsea power and telecommunication cables detection : Part 1-Visual and hydroacoustic tracking*. Underwater Technology, vol. 31, no. 3, 2013.
- [Szyrowski 2013b] Tomasz Szyrowski, Sanjay K Sharma, Robert Sutton et Gareth A Kennedy. *Developments in subsea power and telecommunication cables detection : Part 2-Electromagnetic detection*. Underwater Technology, vol. 31, no. 3, 2013.

- [Thompson 1991] Gary O Thompson. *Flexible membrane wave barrier*. 1991.
- [Toffoli 2017] Alessandro Toffoli et Elzbieta M Bitner-Gregersen. *Types of ocean surface waves, wave classification*. Encyclopedia of Maritime and Offshore Engineering, pages 1–8, 2017.
- [Torre-Enciso 2009] Y Torre-Enciso, I Ortubia, LI López De Aguilera et J Marqués. *Mutriku wave power plant : from the thinking out to the reality*. In Proceedings of the 8th European wave and tidal energy conference, Uppsala, Sweden, volume 710, pages 319–329, 2009.
- [Träsch 2018] Martin Träsch, Astrid Déporte, Sylvain Delacroix, Jean-Baptiste Drevet, Benoit Gaurier et Grégory Germain. *Power estimates of an undulating membrane tidal energy converter*. Ocean Engineering, vol. 148, pages 115–124, 2018.
- [Trasch 2019] Martin Trasch. *Caractérisation expérimentale et numérique du comportement hydrodynamique d'une hydrolienne à membrane ondulante*. PhD thesis, Université de Lille, 2019.
- [Triantafyllou 2000] Michael S Triantafyllou, GS Triantafyllou et DKP Yue. *Hydrodynamics of fishlike swimming*. Annual review of fluid mechanics, vol. 32, no. 1, pages 33–53, 2000.
- [Turnbull 2015] Ian D Turnbull, Nicolas Fournier, Michiel Stolwijk, Tor Fosnaes et David McGonigal. *Operational iceberg drift forecasting in Northwest Greenland*. Cold Regions Science and Technology, vol. 110, pages 1–18, 2015.
- [Ursell 1947] F Ursell. *The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water*. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 43, pages 374–382. Cambridge University Press, 1947.
- [Van Rijn 2011] LC Van Rijn. *Coastal erosion and control*. Ocean & Coastal Management, vol. 54, no. 12, pages 867–887, 2011.
- [Varro 2018] Laszlo Varro. *World energy investment*, 2018.
- [Weihs 2002] Daniel Weihs. *Dynamics of dolphin porpoising revisited*. Integrative and comparative biology, vol. 42, no. 5, pages 1071–1078, 2002.
- [Williams 2018] Terrie M Williams. *Swimming*. In Encyclopedia of marine mammals, pages 970–979. Elsevier, 2018.
- [Williamson 1996] Charles HK Williamson. *Vortex dynamics in the cylinder wake*. Annual review of fluid mechanics, vol. 28, no. 1, pages 477–539, 1996.
- [Williamson 2004] Charles HK Williamson et R Govardhan. *Vortex-induced vibrations*. Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 36, pages 413–455, 2004.
- [Wilson 2021] Phillipa Wilson, Michele Thums, Charitha Pattiaratchi, Scott Whiting, Mark Meekan et Kellie Pendoley. *Nearshore wave characteristics as cues for swimming orientation in flatback turtle hatchlings*. Journal of Experimental Marine Biology and Ecology, vol. 535, page 151475, 2021.
- [Woodcock 1948] Alfred H Woodcock. *The swimming of dolphins*. Nature, vol. 161, no. 4094, pages 602–602, 1948.
- [Wyneken 1990] Jeanette Wyneken, Michael Salmon et Kenneth J Lohmann. *Orientation by hatchling loggerhead sea turtles *Caretta caretta* L. in a wave tank*. Journal of Experimental Marine Biology and Ecology, vol. 139, no. 1-2, pages 43–50, 1990.
- [Ypma 1995] Tjalling J Ypma. *Historical development of the Newton–Raphson method*. SIAM review, vol. 37, no. 4, pages 531–551, 1995.
- [Yu 1994] Xiping Yu et Allen T Chwang. *Water waves above submerged porous plate*. Journal of engineering mechanics, vol. 120, no. 6, pages 1270–1282, 1994.
- [Yu 2022] Jin Yu, Chonghong Ren, Jian Chen, Xianqi Zhou, Yuanqing Wang et Lixiang Lin. *Wave and flow loads on inclined pipe at different immersion depths*. Alexandria Engineering Journal, vol. 61, no. 5, pages 3883–3895, 2022.

- [Zdravkovich 1997] Momchilo M Zdravkovich. Flow around circular cylinders : Volume 2 : Applications, volume 2. Oxford university press, 1997.
- [Zhang 2004] Keqi Zhang, Bruce C Douglas et Stephen P Leatherman. *Global warming and coastal erosion*. Climatic change, vol. 64, no. 1, pages 41–58, 2004.
- [Zhao 2021] Feng Zhao, Rui Wang, Hongbo Zhu, Huang Ping, Yan Bao, Dai Zhou, Yong Cao et Hongyu Cui. *Large-eddy simulations of flow past a circular cylinder near a free surface*. Physics of Fluids, vol. 33, no. 11, page 115108, 2021.
- [Zovatto 2001] Luigino Zovatto et Gianni Pedrizzetti. *Flow about a circular cylinder between parallel walls*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 440, pages 1–25, 2001.