



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation numérique et à l'analyse physique des états de mer non-linéaires

Guillaume Ducrozet

► **To cite this version:**

Guillaume Ducrozet. Contribution à la modélisation numérique et à l'analyse physique des états de mer non-linéaires. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Nantes, 2020. tel-03746577v1

**HAL Id: tel-03746577**

**<https://theses.hal.science/tel-03746577v1>**

Submitted on 5 Aug 2022 (v1), last revised 22 Mar 2024 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# MÉMOIRE SCIENTIFIQUE

Présenté par

**GUILLAUME DUCROZET**

MAÎTRE DE CONFÉRENCES À L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

En vue de l'obtention du titre de

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES**

Spécialité : **Mécanique des Milieux Fluides**

Délivré par

L'UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

---

## Contribution à la modélisation numérique et à l'analyse physique des états de mer non-linéaires

---

Soutenue le 28 septembre 2020

Composition du jury :

Mme A. PHILIPPE	Présidente
Mr F. ARDHUIN	Rapporteur
Mr. S. GRILLI	Rapporteur
Mr O. KIMMOUN	Rapporteur
Mr H. BINGHAM	Examineur
Mr S. RANDOUX	Examineur
Mr P. FERRANT	Directeur de recherche & Examineur



UNIVERSITÉ DE NANTES





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notice individuelle</b>	<b>5</b>
1.1 Curriculum Vitæ . . . . .	6
1.2 Activités de recherche . . . . .	7
1.3 Encadrement . . . . .	11
1.4 Activités d'expertise . . . . .	13
1.5 Responsabilités administratives . . . . .	14
1.6 Activités d'enseignement . . . . .	14
1.7 Production scientifique . . . . .	16
<b>2 Modélisation non-linéaire des états de mer</b>	<b>17</b>
2.1 Introduction . . . . .	17
2.1.1 Contexte . . . . .	17
2.1.2 Différentes approches numériques . . . . .	18
2.1.3 Résumé des travaux . . . . .	20
2.2 La méthode High-Order Spectral . . . . .	21
2.2.1 Formulation . . . . .	21
2.2.2 Méthodes numériques . . . . .	23
2.2.3 Propriétés numériques . . . . .	27
2.3 Extension à un bassin de houle . . . . .	33
2.3.1 Formulation . . . . .	34
2.3.2 Amélioration de la génération de houle . . . . .	36
2.3.3 Exemples d'application . . . . .	37
2.3.4 Conclusion-perspectives . . . . .	41
2.4 Extension à la bathymétrie variable . . . . .	45
2.4.1 Méthode HOS et algorithmes . . . . .	46
2.4.2 Propriétés numériques . . . . .	51
2.4.3 Mise en œuvre . . . . .	55
2.4.4 Exemple d'application . . . . .	57
2.4.5 Conclusion-perspectives . . . . .	62
2.5 Phénomènes physiques additionnels . . . . .	63
2.5.1 Extension au courant . . . . .	64
2.5.2 Extension au vent . . . . .	69
2.5.3 Conclusion-perspectives . . . . .	73
2.6 Extension aux états de mer déferlants . . . . .	76

2.6.1	Applicabilité du modèle HOS-ocean . . . . .	77
2.6.2	Modélisation déterministe du déferlement . . . . .	85
2.6.3	Conclusion-perspectives . . . . .	91
2.7	Développements numériques . . . . .	94
2.7.1	Administration et gestion des codes de calcul . . . . .	94
2.7.2	Parallélisation . . . . .	95
2.7.3	Conclusion-perspectives . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Applications au génie océanique</b>	<b>101</b>
3.1	Prédiction de houle . . . . .	102
3.1.1	Horizon de prédiction . . . . .	102
3.1.2	Mesure ponctuelle de surface libre . . . . .	105
3.1.3	Mesure surfacique de surface libre . . . . .	108
3.1.4	Mesure volumique du champ de vitesse . . . . .	113
3.1.5	Conclusion-perspectives . . . . .	116
3.2	Interactions houle-structure . . . . .	117
3.2.1	Procédures de couplage . . . . .	117
3.2.2	Méthode de décomposition fonctionnelle . . . . .	126
3.2.3	Conclusion-perspectives . . . . .	139
<b>4</b>	<b>Physique des états de mer non-linéaires</b>	<b>143</b>
4.1	Évènements extrêmes . . . . .	144
4.1.1	Caractérisation des vagues extrêmes . . . . .	144
4.1.2	Instabilités des états de mer . . . . .	149
4.1.3	Conclusion-perspectives . . . . .	160
4.2	Solutions analytiques et effets d'ordre supérieur . . . . .	162
4.2.1	Solitons d'enveloppe . . . . .	164
4.2.2	Solitons noirs . . . . .	167
4.2.3	Solitons pulsés / Breathers . . . . .	171
4.2.4	Application aux configurations réelles . . . . .	172
4.2.5	Conclusion-perspectives . . . . .	176
4.3	Bassin de houle et non-linéarités . . . . .	178
4.3.1	Reproduction déterministe de vagues extrêmes . . . . .	179
4.3.2	HOS-NWT comme outil de préparation et d'analyse d'essais en bassin	186
4.3.3	Conclusion-perspectives . . . . .	191
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>193</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>197</b>
<b>A</b>	<b>Publications associées</b>	<b>197</b>
A.1	Thèse de doctorat . . . . .	197
A.2	Ouvrage de synthèse international . . . . .	197
A.3	Journaux nationaux et internationaux avec comité de lecture . . . . .	197
A.4	Conférences nationales et internationales avec comités de lecture et actes .	201
A.5	Conférences nationales et internationales avec comités de lecture et résumés	206

<b>B</b>	<b>Publications choisies</b>	<b>209</b>
B.1	A modified HOS method for Numerical Wave Tank . . . . .	210
B.2	Wave-breaking onset for HOS with experiments . . . . .	227
B.3	Non-linear wave decomposition for efficient wave-structure interactions . .	239
B.4	3-D HOS simulations of extreme waves in open seas . . . . .	261
B.5	Time-reversal of nonlinear waves : Applicability and limitations . . . . .	276



# Table des figures

2.1	Schéma du domaine de résolution avec système de coordonnées . . . . .	21
2.2	Ressources mémoire et temps de calcul de la méthode HOS . . . . .	28
2.3	Convergence de la méthode HOS sur la $W$ en fonction de $N_x$ et $M$ . . . . .	29
2.4	Propagation pendant $1000 T$ d'une houle régulière non-linéaire (avant/arrière)	30
2.5	Ressources mémoire et temps de calcul du modèle OceanWave3D . . . . .	31
2.6	Efficacité comparée entre OceanWave3D et HOS-ocean . . . . .	32
2.7	Schéma du Bassin de Grande Profondeur de l'ECN . . . . .	33
2.8	Domaine de calcul du potentiel additionnel dans HOS-NWT . . . . .	35
2.9	Algorithme modèle HOS-NWT, batteur 3 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	38
2.10	Convergence des résultats HOS-NWT par rapport au nombre de points $N_x$	39
2.11	Erreur du volume en fonction de l'ordre de non-linéarité batteur . . . . .	39
2.12	Houle focalisée uni-directionnelle - Comparaison expérience/HOS-NWT . .	40
2.13	Vues 3-D de la focalisation directionnelle à différents instants . . . . .	42
2.14	Focalisation directionnelle - sondes à houle . . . . .	43
2.15	Schéma du domaine de résolution en profondeur variable . . . . .	47
2.16	Algorithme de résolution en fond variable – méthode originelle. . . . .	49
2.17	Algorithme de résolution en fond variable – méthode améliorée . . . . .	51
2.18	Convergence sur $W$ en fond variable – méthode originelle . . . . .	52
2.19	Convergence sur $W$ en fond variable – méthode améliorée . . . . .	53
2.20	Convergence sur $W$ en fond variable – comparaison des méthodes . . . . .	54
2.21	Zones de relaxation - shoaling d'une houle régulière . . . . .	56
2.22	Zones de relaxation dans un cas directionnel (ellipse immergée) . . . . .	56
2.23	Topographie des canyons sous-marins de Scripps et la Jolla . . . . .	58
2.24	Tracé de rayons et élévation de surface libre obtenue avec HOS . . . . .	59
2.25	Élévation de surface libre dans le domaine de calcul . . . . .	59
2.26	Spectre directionnel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer . . . . .	60
2.27	Comparaisons des hauteurs significatives prédites et mesurées . . . . .	60
2.28	Comparaisons des spectres fréquentiels prédits et mesurés . . . . .	61
2.29	Définition spatiale du courant dans une simulation HOS. . . . .	66
2.30	Élévation de surface libre dans le cas d'un courant variable en espace . . .	67
2.31	Caractéristiques de la houle en fonction de la vitesse du courant . . . . .	67
2.32	Houle irrégulière face à un courant variable en espace . . . . .	68
2.33	Influence du courant sur la pdf de l'élévation . . . . .	69
2.34	Évolution en temps de l'énergie d'un état de mer soumis à un vent constant	72
2.35	Comparaison WaveWatchIII/HOS du spectre fréquentiel et du forçage . . .	73
2.36	Répartition de pression sur la SL du modèle de dissipation stochastique . .	75
2.37	Hauteur maximale de la houle régulière . . . . .	78



2.38	Scatter-diagram des états de mer en Mer du Nord . . . . .	80
2.39	Scatter-diagram des états de mer sur le site SEMREV . . . . .	80
2.40	Domaine de validité des simulations HOS : discrétisation . . . . .	82
2.41	Domaine de validité des simulations HOS : profondeur . . . . .	83
2.42	Domaine de validité des simulations HOS : étalement directionnel . . . . .	84
2.43	Domaine de validité des simulations HOS : étalement fréquentiel . . . . .	84
2.44	Captures de vidéo d'un essai déferlant par focalisation. (Figure issue de [? ]) . . . . .	87
2.45	Comparaison numérique/expérimental sur position/temps du déferlement . . . . .	88
2.46	Paramètre de détection du déferlement $B_x$ en fonction de la pente locale . . . . .	89
2.47	Simulation HOS-NWT dans le cas où un évènement déferlant apparaît. . . . .	90
2.48	Evolution spatiale et temporelle d'un train de vagues focalisé déferlant . . . . .	90
2.49	Evolution du spectre lors de la propagation de vagues focalisées . . . . .	92
2.50	Accélération du modèle HOS-ocean grâce à la parallélisation . . . . .	97
2.51	Accélération du modèle HOS-NWT grâce à la parallélisation . . . . .	98
3.1	Procédure de prédiction de vagues . . . . .	103
3.2	Définition de $f_{\min}$ et $f_{\max}$ dans un sepctre pour la prédiction . . . . .	103
3.3	Zone de prédiction pour une mesure ponctuelle . . . . .	104
3.4	Zone de prédiction en utilisant 2 sondes ponctuelles . . . . .	104
3.5	Zone de prédiction en utilisant une mesure surfacique . . . . .	105
3.6	Zone de prédiction en houle multi-directionnelle et mesure surfacique . . . . .	106
3.7	Procédure d'assimilation de données . . . . .	106
3.8	Erreurs de reconstruction et prédiction pour différentes méthodes . . . . .	107
3.9	Vue schématique d'une mesure LIDAR d'un champ uni-directionnel . . . . .	108
3.10	Surface libre 3D issue de HOS avec points d'observation . . . . .	109
3.11	Arrangement expérimental des sondes à houle . . . . .	110
3.12	Comparaison linéaire/Choppy/Choppy amélioré et HOS . . . . .	111
3.13	Erreurs de prédiction avec modèles linéaire et Choppy amélioré . . . . .	112
3.14	Erreur point à point de reconstruction/prédiction . . . . .	112
3.15	Validation expérimentale de la prédiction de houle . . . . .	113
3.16	Reconstruction/prédiction par mesure de champs de vitesse . . . . .	114
3.17	Méthode de reconstruction de $U(x_0, z, t)$ . . . . .	115
3.18	Erreurs de reconstruction/prédiction par mesure de champs de vitesse . . . . .	115
3.19	Reconstruction du champ de vitesse dans le volume HOS - Houle régulière . . . . .	119
3.20	Reconstruction du champ de vitesse dans le volume HOS - Houle irrégulière . . . . .	120
3.21	Simulation HOS vers description modale des quantités volumiques . . . . .	121
3.22	FFTs sur chaque plan vertical avec discrétisation verticale quelconque . . . . .	122
3.23	Comparaison maillages HOS et CFD . . . . .	123
3.24	Divergence de la vitesse après reconstruction sur maillage CFD . . . . .	124
3.25	Augmentation de la discrétisation par ajout de modes sans énergie . . . . .	125
3.26	Divergence de la vitesse sur le maillage CFD après reconstruction améliorée . . . . .	125
3.27	Représentation schématique de la décomposition SWENSE . . . . .	127
3.28	Vue schématique du récupérateur d'énergie des vagues type WaveRoller . . . . .	129
3.29	Comparaison entre modélisation linéaire et Weak-Scatterer . . . . .	130
3.30	Réflexion sur un mur vertical d'une houle régulière . . . . .	132
3.31	Domaine de résolution - Interaction houle/cylindre vertical . . . . .	133

3.32	Temporel de la surface libre le long du cylindre . . . . .	134
3.33	Run-up le long du cylindre - interaction houle/cylindre vertical . . . . .	135
3.34	Modèle et maillage de la bouée CALM testée en bassin . . . . .	137
3.35	Détachement sur la jupe de la bouée CALM . . . . .	138
3.36	Forces sur bouée CALM - Houle irrégulière . . . . .	138
3.37	Bouée CALM en houle irrégulière : vue de la surface libre . . . . .	140
4.1	Élévation de surface libre dans le domaine de calcul HOS-ocean. . . . .	145
4.2	Détection de vagues scélérates dans une simulation HOS-ocean . . . . .	146
4.3	Position et forme des vagues scélérates détectées . . . . .	147
4.4	Comparaison déterministe/statistique pour la détection de vagues extrêmes	148
4.5	Influence de l'étalement directionnel sur l'évolution du kurtosis . . . . .	150
4.6	Évolution temporelle d'un spectre instable $BFI = 1.03$ . . . . .	151
4.7	Évolution temporelle de la taille transverse des vagues . . . . .	152
4.8	Evolution spatiale du kurtosis et des pdf de $\eta$ dans un bassin de houle . . .	154
4.9	Evolution du $H_s$ d'un état de mer uni-directionnel déferlant . . . . .	155
4.10	Configuration d'étude des statistiques avec un changement de bathymétrie	156
4.11	Evolution spatiale des statistiques de $\eta$ au passage d'une barre immergée .	157
4.12	Configuration expérimentale de l'étude des interactions houle-courant . . .	158
4.13	Influence du courant sur le kurtosis et la pdf des hauteurs . . . . .	159
4.14	Transferts d'énergie lors de l'interaction houle courant . . . . .	161
4.15	Solutions analytiques des équations NLS . . . . .	163
4.16	Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe en grande profondeur . .	165
4.17	Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe en faible profondeur . .	166
4.18	Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe avec $k_0h < 1.363$ . . . .	167
4.19	Evolution spatio-temporelle de solitons noirs générés en bassin numérique .	169
4.20	Evolution spatio-temporelle de solitons noirs en bassin numérique $k_0h = 1.2$	169
4.21	Evolution spatio-temporelle de solitons noirs en bassin numérique $k_0h = 0.4$	170
4.22	Evolution spatio-temporelle de solitons noirs en bassin numérique $k_0h = 0.4$	170
4.23	Evolution longue d'un breather de Peregrine . . . . .	172
4.24	Evolution théorique NLS d'une onde plane perturbée localement . . . . .	173
4.25	Evolution d'un champ de vagues contenant un breather de Peregrine . . . .	174
4.26	Evolution spatio-temporelle de l'enveloppe en houle irrégulière . . . . .	175
4.27	Relations de dispersion linéaire, solitonique et non-linéaire . . . . .	176
4.28	Relation de dispersion pour des états de mer irréguliers . . . . .	177
4.29	Déformée de surface libre de la vague de Draupner à échelle réelle . . . . .	180
4.30	Comparaison vague reproduite et vague cible en domaine temporel . . . . .	181
4.31	Comparaison vague reproduite et vague cible en domaine fréquentiel . . . .	181
4.32	Comparaison vague reproduite et vague cible après 5 itérations . . . . .	182
4.33	Propagation du soliton pulsé de Peregrine dans un bassin de houle . . . . .	184
4.34	Méthode du retournement temporel appliqué au soliton pulsé de Peregrine	185
4.35	Résultat de la méthode de retournement temporel : vague de Draupner . .	185
4.36	Configuration expérimentale de l'étude des interactions résonantes . . . . .	188
4.37	Evolution dans le bassin de l'amplitude des composantes fréquentielles . . .	188
4.38	Évolution de l'amplitude des composantes fréquentielles . . . . .	189
4.39	Champ de vagues mesuré à différentes position dans le bassin . . . . .	190

4.40	Structure de type Peregrine identifiée dans des simulations . . . . .	190
5.1	Schéma de principe du package CN-Wave . . . . .	195

# Liste des tableaux

2.1	Effort en temps de calcul pour différentes méthodes numériques . . . . .	28
4.1	Nombre et taille des vagues scélérates détectées . . . . .	146
4.2	BFI pour un spectre de JONSWAP avec $H_s = 7 m$ et $T_p = 10 s$ . . . . .	174



# Liste des acronymes

ADCP	Acoustic Doppler Current Profiler
ADEME	Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Énergie
ALE	Arbitrary Lagrangian-Eulerian
BEM	Boundary Elements Method
BFI	Benjamin-Feir Index
BFP	Bassin Faible Profondeur
BGP	Bassin Grande Profondeur
CFD	Computational Fluid Dynamics
CSC	China Scholarship Council
CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique
DF	Différences Finies
DGA	Délégation Générale pour l'Armement
DTU	Danmarks Tekniske Universitet (Université Technique du Danemark)
DNO	Dirichlet to Neumann Operator
DNS	Direct Numerical Simulation
ECN	Ecole Centrale de Nantes
EMO	Énergies Marines et Océan
EMR	Énergies Marines Renouvelables
FFT	Fast Fourier Transforms
FEM	Finite Element Methods
FMA	Fast Multipole Algorithms
FWCI	Field-Weighted Citation Impact
HOS	High-Order Spectral
HPC	Harmonic Polynomial Cell
H2I	Hydrodynamique, Interfaces et Interactions
IFREMER	Institut Français de Recherche pour l'Exploitation en Mer
IRD	Institut de Recherche pour le Développement
IRT	Institut de Recherche Technologique
IST	Inverse Scattering Transform
LHEEA	Laboratoire d'Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique

LES	Large Eddy Simulations
MPI	Message-Passing Interface
MTECH-HOE	Marine TECHnology - Hydrodynamics for Ocean Engineering (Master)
NExT	Nantes Excellence Trajectory (ISite de Nantes - PIA)
NLS	Non-Linear Schrödinger
NWT	Numerical Wave Tank
pdf	probability density function
p-FFT	precorrected Fast Fourier Transform
PIA	Programme Investissements d'Avenir
RBF	Radial Basis Functions
REM	Renewable Energy in the Marine environment (Master Erasmus Mundus)
SEM	Spectral Element Multigrid
SEM-REV	Site d'Expérimentation en MER pour la Récupération d'Énergie des Vagues
SWENSE	Spectral Wave Explicit Navier Stokes Equations
SWEET	Spectral Wave Evolution in the Ecn wave Tank
UBO	Université de Bretagne Occidentale
UBS	Université Bretagne Sud
VOF	Volume Of Fluid
WEC	Wave Energy Converter (Récupérateur d'énergie des vagues)
WP	Work Package

# Introduction

Ce manuscrit présente un résumé de mes activités de recherche réalisées durant ma thèse [?] et par la suite de ma carrière, menée principalement au Laboratoire d'Hydrodynamique d'Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA, ex. Laboratoire de Mécanique des Fluides - LMF) de l'École Centrale de Nantes (UMR CNRS 6598). Il comprend également les activités menées dans le cadre de mon post-doctorat réalisé à l'Université Technique du Danemark (DTU).

L'hydrodynamique à surface libre est une des thématiques phares du LHEEA au sein de laquelle s'insère l'ensemble de mes activités de recherche. Plus spécifiquement, l'essentiel des actions menées dans ce champ disciplinaire ont trait au domaine du génie océanique. L'objectif affiché du LHEEA est de répondre aussi bien à des attentes de la part des acteurs industriels des filières marine et maritime, qu'à des attentes plus sociétales telle que la participation aux avancées de la recherche et à leur diffusion ou la transition énergétique avec par exemple l'ensemble des activités menées autour des Énergies Marines Renouvelables (EMR).

Dans cette recherche principalement technologique qui fait le cœur de métier de l'École Centrale de Nantes (ECN) et du LHEEA en particulier, on va chercher à répondre aux problématiques actuelles et futures des industriels du génie océanique. De manière générale, on regroupera dans ce domaine l'ensemble des activités associées aux structures en mer (navires, plates-formes fixes ou flottantes, etc.) et les interactions avec leur environnement. Dans ce contexte, la région nantaise apparaît comme un lieu propice qui regroupe d'ores et déjà de nombreux acteurs industriels majeurs (Chantiers de l'Atlantique, Naval Group, Bureau Veritas, etc.) et académiques (ECN, Université de Nantes, Ecole des Mines, etc.).

Je parle ici de recherche technologique, dans le sens où une partie de celle-ci est appliquée à une problématique identifiée à laquelle on va s'attacher de trouver des solutions. Mais comme on le verra dans ce manuscrit, la recherche fondamentale est essentielle pour appréhender la compréhension des phénomènes mis en jeu ainsi qu'anticiper les possibles évolutions futures du domaine. J'espère démontrer de par les travaux que j'ai menés que ces deux types de recherche sont totalement complémentaires et se nourrissent l'une de l'autre.

L'objectif principal des acteurs industriels impliqués dans le secteur maritime est probablement celui d'une gestion efficace et soutenable des activités en mer. Cela regroupe par exemple la sécurité des biens et des personnes (design adapté) ou l'optimisation des performances (consommation énergétique d'un navire, production d'énergie par un système EMR, etc.). Ce secteur fait face à de nombreux défis associés à la complexité et la



sévérité du milieu océanique. Ces défis sont d'intérêt pour la communauté scientifique du génie océanique, qui soutient le développement de cette industrie.

Dans ce contexte, le design de ces structures marines (systèmes EMR, navires, plateformes offshore) nécessite le développement de méthodologies adaptées au niveau de précision requis. Par exemple, à l'heure actuelle, la prise en compte des conditions de houle extrêmes dans ces procédures de design est toujours une problématique ouverte. En effet, ces états de mer impliquent des processus physiques complexes, comme les interactions non-linéaires ou le déferlement et les réponses induites sont très fortement non-linéaires. Les procédures actuelles pour déterminer ces réponses extrêmes sont basées sur des approches linéaires ou faiblement non-linéaires, qui peuvent se révéler très peu précises dans ces conditions. Cela conduit les sociétés de classification à utiliser des coefficients de sécurité significatifs qui peuvent se révéler inadéquats (sur ou sous-estimation). Il y a donc un réel besoin pour la communauté du génie océanique d'établir des procédures de référence qui prennent en compte plus de physique avec l'objectif d'atteindre des niveaux de précision plus élevés que par les méthodes issues de l'état de l'art actuel. Cela doit permettre de réduire les risques associés à ces événements extrêmes et/ou réduire les coûts associés à ces structures, designées pour survivre à ces conditions extrêmes.

L'approche préférentielle pour aborder de telles problématiques au LHEEA est d'identifier et de mettre en œuvre les méthodes adaptées à leurs résolutions. La recherche menée va donc s'appuyer sur le triptyque : i) essais en bassin (échelle réduite), ii) simulation numérique et iii) essais à échelle réelle (par exemple sur le Site d'Expérimentation en Mer (SEM-REV) de l'ECN). Il s'agit en effet d'une spécificité au LHEEA d'avoir ces trois méthodologies accessibles pour s'attaquer à un problème donné. L'idée est bien entendu de tirer partie des avantages inhérents à chacune des approches, tout en bénéficiant de leur complémentarité.

Dans ce contexte général de recherche technologique en génie océanique, ma thématique de recherche principale développée au cours des 15 années passées depuis le début de ma thèse de doctorat concerne la poursuite de recherches autour des ondes de gravité. Cette thématique est portée majoritairement par le développement d'outils numériques en vue de la modélisation fine des états de mer. L'effet prépondérant joué par les non-linéarités a été au cœur de ma démarche, associant de la théorie physique, des modèles numériques avancés et des expériences en bassin.

Ma recherche prend pour point de départ la modélisation numérique des interactions houle-structure. La stratégie adoptée au LHEEA depuis de nombreuses années repose sur le développement de méthodes numériques adaptées finement à la problématique d'intérêt. En effet, les exigences numériques et les phénomènes physiques prépondérants peuvent être très différents entre par exemple l'étude de la propagation d'un champ de vagues au milieu de l'océan et l'étude du phénomène de green-water sur le pont d'un bateau. Ainsi, plutôt que d'utiliser une approche monolithique avec un code de calcul résolvant tous types de problèmes, des stratégies de couplage entre différents modèles ont été mises en place. Cela s'applique en particulier à la propagation des vagues qui est traitée avec une modélisation spécifique et qui est le point central de mes activités de recherche.

Pour toute étude d'interaction houle-structure, une modélisation des conditions de houle est donc mise en place et couplée avec un modèle qui résout spécifiquement l'impact de la structure sur le champ de vagues. Ainsi, mes activités trouvent une place assez

centrale dans les actions de recherche menées en hydrodynamique à surface libre au sein du LHEEA. Cette situation privilégiée m'a permis d'intervenir sur des problématiques concrètes et diversifiées de génie océanique tout en interagissant avec de nombreux acteurs au cours mes recherches. Ce fonctionnement réellement collaboratif qui existe au LHEEA est une chance, tant du point de vue humain que scientifique.

L'enjeu de la description numérique des états de mer est de modéliser leur propagation précisément et efficacement. Le formalisme potentiel non-linéaire est privilégié dans cette configuration et les méthodes pseudo-spectrales, telle la méthode High-Order Spectral (HOS) sur laquelle j'ai travaillé, se révèlent être les plus efficaces (à précision donnée).

Lors du développement numérique du modèle HOS et son application à diverses configurations, il m'est apparu rapidement qu'une connaissance physique approfondie des états de mer était nécessaire. Dans la recherche d'une méthode de modélisation, une complémentarité forte existe entre la compréhension fine de la physique et la méthode numérique à mettre en œuvre ainsi que les validations adéquates à mettre en place.

En ce sens, une des caractéristiques de mon travail a été de faire le lien entre recherche fondamentale et recherche technologique. L'objectif initial assez appliqué de modélisation déterministe des états de mer pour les interactions houle-structure m'a conduit à étudier la formation des vagues extrêmes et la physique sous-jacente pour m'amener jusqu'à l'étude théorique de solutions analytiques aux équations Non-Linéaire de Schrödinger (NLS). Ce spectre large d'activités de recherche est de mon point de vue très fertile, comme j'espère le démontrer dans la suite de ce manuscrit. D'un côté les connaissances physiques et théoriques apportent un éclairage particulier sur les modèles et les pistes d'améliorations de ceux-ci. De l'autre côté, la mise en œuvre de ces approches numériques en complément d'études expérimentales théoriques apportent un supplément d'informations très utile à l'analyse physique.

Le travail que je présente dans ce mémoire comprend les recherches que j'ai menées en propre mais également celles conduites au travers de collaborations diverses, d'encadrements d'étudiants (en Master et en Doctorat), etc. Il est donc essentiel d'indiquer qu'une partie importante de ces travaux est le fruit d'un travail d'équipe mené au sein du laboratoire et que je suis en ce sens une pierre à l'édifice construit par les membres de cette entité depuis de nombreuses années. J'en profite pour lister les contributeurs principaux sans qui je n'aurais pu mener à bien ces activités de recherche, et par la même les remercier :

- Pierre Ferrant, Professeur à l'ECN et directeur du LHEEA depuis 2012, qui a supervisé ma thèse de doctorat et m'a donné l'opportunité de poursuivre mes activités de recherche au sein du laboratoire à l'issue de celui-ci. Son soutien constant dans l'élaboration et la conduite de mes thématiques de recherche a été précieux. Il est par ailleurs tout naturellement le Directeur de Recherche (garant) de cette Habilitation à Diriger des Recherches.
- David Le Touzé, Professeur à l'ECN, qui a co-encadré mes travaux de thèse, et qui m'a mis le pied à l'étrier (si j'ose dire !) de mon futur en tant que numéricien appliqué. Son expertise des méthodes numériques et sa vision du monde de la recherche en font un acteur central de la recherche menée en hydrodynamique numérique au sein du LHEEA.
- Félicien Bonnefoy, Maître de Conférences à l'ECN, avec lequel je travaille depuis le

début de ma thèse sur la thématique de la propagation des vagues. Ce numéricien accompli (qui a depuis partiellement rangé ses armes de codeur) est l'expérimentateur en chef, maître des vagues dans les installations du LHEEA. Ses connaissances théoriques, physiques et d'expérimentateurs en font un référent dans de nombreux domaines. Mes activités de recherche menées autour de la modélisation et la compréhension physique des états de mer non-linéaires lui doivent beaucoup.

- Benjamin Bouscasse, chercheur à l'ECN, avec qui je travaille au développement des stratégies de couplage entre l'approche HOS et les codes CFD pour l'interaction houle-structure.

Le présent document est décomposé en plusieurs parties.

Le premier chapitre présentera une synthèse des activités que j'ai menées au cours de ma carrière de chercheur. Cela regroupera mes activités de recherche, la production scientifique associée, l'encadrement de travaux, les activités d'expertise et mes activités liées à l'enseignement (en tant que Maître de Conférences à l'ECN). L'objectif est d'avoir une vision assez globale de ces activités ainsi que de l'environnement dans lesquelles elles ont été conduites.

Le mémoire de recherches constituera la suite du manuscrit, et sera décomposé en trois chapitres distincts. J'y présenterai les différentes thématiques de recherche que j'ai étudiées au cours de ma carrière. J'aborderai tout d'abord la modélisation numérique des états de mer. Je détaillerai la méthode HOS en insistant sur les méthodes numériques développées et les propriétés numériques résultantes. L'extension des capacités du modèle originel sera ensuite développée, tant du point de vue de la configuration géométrique (bassin de houle, bathymétrie variable) que des phénomènes physiques additionnels (vent, courant, déferlement). Le troisième chapitre sera consacré aux applications directes de la modélisation de houle à des problématiques du génie océanique. La thématique de la prédiction de houle ainsi que celle des interactions houle-structure seront présentées. Enfin, le quatrième chapitre décrira les activités de recherche que j'ai développées en ce qui concerne l'analyse physique des états de mer non-linéaires. Un focus sera fait sur les événements extrêmes et la caractérisation de leur probabilité d'occurrence (les fameuses vagues scélérates). Le lien existant avec les solutions analytiques des équations NLS sera ensuite fait. Les possibles implications de la physique non-linéaire sur la préparation et l'analyse des essais en bassin seront enfin abordées.

Le dernier chapitre de ce mémoire de recherches sera consacré aux perspectives scientifiques du travail mené jusqu'à présent.

Enfin, les annexes contiennent la liste détaillée des publications associées à mon travail de recherche. Une sélection des publications les plus significatives choisies dans cette liste est également incluse. Ces dernières couvrent l'essentiel des thématiques de recherche détaillées dans le manuscrit.

# Chapitre 1

## Notice individuelle

### Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter de manière synthétique l'ensemble des activités que j'ai menées au cours de ma carrière dans le milieu académique, menée principalement au sein du Laboratoire d'Hydrodynamique Énergétique et Environnement Atmosphérique de l'École Centrale de Nantes (UMR CNRS 6598).

On trouvera à suivre un Curriculum Vitæ détaillant succinctement ma formation ainsi que mon parcours professionnel après le doctorat jusqu'à mon statut actuel de Maître de Conférences à l'ECN. Ensuite, je présenterai une synthèse de ma production scientifique ainsi que mes activités en terme d'enseignement qui représentent une part non-négligeable de l'emploi du temps d'un enseignant-chercheur. La synthèse proposée permettra d'avoir une vue d'ensemble de mes activités de recherche et comprendra en particulier :

- les projets de recherche auxquels j'ai pris part,
- les encadrements de travaux de recherche,
- les activités d'expertise,
- les responsabilités administratives et
- un résumé de ma production scientifique.

## 1.1 Curriculum Vitæ

Guillaume DUCROZET  
Ecole Centrale de Nantes  
1, rue de la Noë  
44000 NANTES - France

Né le : 17/03/1982  
Nationalité : Française  
Célibataire

Tel. : 02 40 37 16 45  
E-mail :  
guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr

### Formation

---

- 2004 – 2007    **Doctorat en Dynamique des Fluides et des Transferts**  
*Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer avec une approche spectrale* sous la direction d'Alain Clément et de Pierre Ferrant  
Laboratoire de Mécanique des Fluides, École Centrale de Nantes
- 2003 – 2004    **D.E.A. en Dynamique des Fluides et des Transferts**  
École Centrale de Nantes / Université de Nantes  
*Option Hydrodynamique – mention bien*
- 2001 – 2004    **Diplôme d'ingénieur – École Centrale de Nantes**  
*Option Hydrodynamique et Génie Océanique – mention bien*
- 1999 – 2001    **Classes préparatoires scientifiques (PC)**
- 1999            **Baccalauréat Scientifique** *série S – mention bien*

### Parcours professionnel

---

- Sept. 2010 – aujourd'hui    **Maître de Conférences École Centrale Nantes**  
*Recherche : LHEEA – Équipe Énergies Marines et Océan*  
*Enseignement : Département Mécanique des Fluides et Énergétique*
- Déc. 2009 – Sept. 2010    **Ingénieur de recherche** – Laboratoire de Mécanique des Fluides, **École Centrale de Nantes**  
*Développements autour de la méthode High-Order Spectral (HOS) dans le cadre du projet ANR OPTIMISM (Observing dynamical and thermodynamical Processes involved in The sea Ice Mass balance from In Situ Measurements) : étude de la propagation de vagues sous une couche de glace. Recodage et uniformisation des différentes versions du HOS*

- 
- Déc. 2008 – Nov. 2009    **Post-Doctorat** – division Génie Côtier et Maritime, **Université Technique du Danemark (DTU)**  
*Développement d'un modèle potentiel non-linéaire 3D pour l'interaction houle-structure en milieu côtier et océanique.* Post-doctorat financé par la Délégation Générale pour l'Armement (DGA) en collaboration entre DTU et l'ECN.
- Nov. 2007 – Nov. 2008    **Ingénieur de recherche** – Laboratoire de Mécanique des Fluides, **École Centrale de Nantes**  
*Développements autour de la méthode HOS : parallélisation de la version en mer ouverte pour les simulations tri-dimensionnelles à grande échelle d'états de mer fortement non-linéaires (application à la formation de vagues scélérates) et amélioration du bassin à houle numérique.*

## 1.2 Activités de recherche

La recherche que j'ai menée depuis une quinzaine d'années, et notamment en tant que Maître de Conférences à l'ECN, s'est focalisée sur le développement de recherches académiques autour des ondes de gravité. Mon projet de recherche assume une continuité thématique qui en assure la cohérence. Il s'est axé principalement autour du développement d'outils numériques en vue de la modélisation fine des états de mer. L'effet prépondérant joué par les non-linéarités a été au cœur de ma démarche, associant de la théorie physique, des modèles numériques avancés et des expériences en bassin.

Les thématiques principalement étudiées et qui seront détaillées dans le mémoire de recherches à suivre sont :

- la modélisation numérique de la propagation non-linéaires des états de mer
- l'étude et la modélisation du déferlement des vagues
- l'étude de la formation des événements extrêmes en diverses configurations : bathymétrie variable, présence de courant, etc.
- la prédiction de houle
- les interactions houle-structure
- la reproduction déterministe de vagues en bassin de houle

## Projets de recherche

---

### Achevés

- *Projet ANR ASTRID **PREDEMONAV** (PREdiction DEterministe des MOUvements du NAvire)* – Travail sur la prédiction déterministe de houle et les modèles de propagation (thèse N. Desmars) – sous la coordination d'Y. Perignon (ECN - LHEEA) (2016-2019)
- **Labex MER** (*Programme Investissements d'Avenir (PIA), Ocean dynamics, 2012-2019, partenaires : UBO, UBS, Univ. Nantes, Ifremer, CNRS, IRD*) – **Co-responsable de l'axe 7 sur la période (2017-2019)** – Budget : 100 k€par an. L'objectif a été d'étendre les connaissances en modélisation numérique, techniques d'observation et d'analyse pour les états de mer et leurs interactions avec des structures naturelles ou artificielles ; les applications visées étaient i) les énergies marines renouvelables (estimation de ressource et support aux opérations en mer) ii) la compréhension des interactions océan-atmosphère et iii) les risques côtiers.
- *Institut de Recherche Technologique (IRT) Jules Verne (PIA)*; **Chaire de recherche SIMAVHY** – SIMulation AVancée en HYDrodynamique – **Responsable du Work Package (WP) traitant du développement des outils numériques pour la modélisation des états de mer extrêmes en profondeur variable (budget du WP : 450 k€, thèse M. Gouin & Post-Doc. B. Seiffert)** – sous la coordination de David Le Touzé (ECN - LHEEA) (2012-2017)
- *IRT Jules Verne*; **Projet HYSMAR** (HYdrodynamique des Structures MARines) – partenaires : DCNS, ALSTOM, STX, HydrOcean, ECN – **Responsable de tâche : Modélisation de la houle extrême en faible profondeur; Etat de l'art et expertise scientifique sur les autres WPs** – sous la coordination de l'IRT Jules Verne (2012-2015)
- *Projet ANR MONACOREV* – Méthodes et Outils Numériques d'Aide à la Conception de Récupérateurs de l'Énergie des Vagues – Participation au développement de l'outil Weak-Scatterer en vue de la modélisation des Récupérateurs d'Énergie des Vagues (WEC) soumis à des grands mouvements (thèse L. Letournel) – sous la coordination d'A. Babarit (LHEEA-ECN) (2012/2015)
- *Mon expertise concernant la modélisation de houle est également apparue dans un certain nombre de projets où mon implication fut plus anecdotique :*
  - *Projet FUI Optiroute* (Optimisation du routage du navire par rapport à des critères de performance hydro et aérodynamique, de sécurité et de durée de vie) – Coordinateur HydrOcéan (2015-2019)
  - *Projet ANR Turbulon* (Transfert d'Énergie en Turbulence d'Onde) – Coordinateur Laboratoire MSC, E. Falcon (2012-2016)
  - *Projet ANR OPTIMISM* (Un instrument automatique pour l'observation des processus dynamiques et thermodynamiques régissant le bilan de masse de glace de mer) – Coordinateur Laboratoire LOCEAN, F. Vivier (2009-2013)
  - *Projet ANR QUALIPHE* (QUALité, Lissage et Intégration au réseau de la Production des Houlogénérateurs Electriques directs) – Coordinateur Laboratoire SATIE, H. Ben Ahmed (2011-2014)

- Projet CITEPH (Concertation pour l'Innovation Technologique dans les domaines de l'Energie) "Approche innovante pour la simulation de l'impact des vagues extrêmes sur une structure flottante", porteur Hydrocean, (2010-2012).

### En cours

- Projet **WASANO** (Wave Specification and Analysis) financé dans le cadre de l'Initiative ISite NExT (PIA) – partenaires : DTU, Univ. Melbourne, IIT Madras, IAPRAS, CNR-INM, GeorgiaTech, UPM-ETSIN, Univ. Sidney, Univ. Washington, Bureau Veritas, TechnipFMC – **Coordinateur (2019-2022)** – Développement d'un consortium international afin d'établir des procédures de références pour la description et le contrôle des conditions environnementales pour le génie océanique – Budget : 400 k€ (2 thèses en local + 2 thèses en co-tutelle prévues).

*Projet arrêté fin 2019 suite à la suspension des financements de l'ISite NExT*

- **JIP** (Joint Industrial Project) **Reproducible CFD Modeling Practices for Offshore Applications** – partenaires : TechnipFMC, Sintef, DNV GL, Chevron, ExxonMobil, MARIN, BP, Equinore, – Travail sur l'établissement des bonnes pratiques en CFD pour la définition correcte des états de mer : couplage CFD/potentiel, expériences en bassin sur les états de mer extrêmes – Coordinateur TechnipFMC (2018-2021)
- Projet ANR **DYSTURB** (Dynamique et propriétés statistiques des grandes échelles en turbulence) – L'ECN intervient dans ce projet principalement au travers des essais en bassin menés au sein des installations expérimentales du LHEEA et au travers des simulations numériques permettant i) de préparer en amont les essais en bassin et ii) étudier les phénomènes sans les contraintes associées à l'expérimental (mesure, taille finie, etc.) – Coordinateur Laboratoire de physique statistique de l'ENS, F. Petrelis (2017-2021)
- **Chaire de recherche Bureau Veritas/ECN** sur le navire du futur – autres partenaires : HydrOcéan, Nextflow Software – Contrôle des conditions environnementales extrêmes en bassin de houle numérique et en bassin de houle physique – sous la coordination de D. Le Touzé (ECN - LHEEA) (2016-2026)
- Projet ADEME - SBM – Prédiction de houle par mesure de profils de vitesse (thèse M. Huchet) – Coordinateur A. Babarit (2016-2020)

### Collaborations

---

Sont listées ci-après l'ensemble des collaborations nationales et internationales que j'ai eu l'occasion de développer. Toutes ont donné lieu à des financements ou des publications.

Collaborations internationales :

- Department of Mechanical Engineering – Technical University of Denmark (DTU) – **Danemark**
- Centre for Marine Technology and Ocean Engineering (CENTEC) – Instituto Superior Técnico – Universidade de Lisboa – **Portugal**



- Department of Ocean Engineering – The University of Rhode Island – **USA**
- Center for Wind, Waves and Water – School of Civil Engineering – The University of Sidney – **Australie**
- Applied Physics Laboratory – University of Washington – **USA**
- Department of Infrastructure Engineering – The University of Melbourne – **Australie**
- Institute of Applied Physics – **Russie**

Collaborations nationales :

- Laboratoire Matière et Systèmes Complexes – Université Paris Diderot, CNRS, IRD
- Institut Méditerranéen d’Océanologie – Université de Toulon, CNRS, IRD
- Laboratoire d’Océanographie Physique et Spatiale – CNRS, IFREMER, IRD, UBO
- Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules – Université Lille 1, CNRS

## Valorisation de la recherche

---

Mes activités de valorisation de la recherche se sont faites principalement au travers de la stratégie adoptée assez récemment par le LHEEA (et les développeurs) de la **diffusion sous format de code source ouvert** d’un certain nombre d’outils concernant la modélisation non-linéaire des états de mer. Cela concerne l’essentiel des codes développés au cours de mon parcours de chercheur et mes contributions se résument donc à :

- Mise en open-source du logiciel **HOS-ocean** en 2015. Depuis, management des dépôts interne (Git/Gerrit) et externe (plateforme GitHub) :
  - <https://github.com/LHEEA/HOS-ocean>
- Mise en open-source du logiciel **HOS-NWT** en 2015. Depuis, management des dépôts interne (Git/Gerrit) et externe (plateforme GitHub) :
  - <https://github.com/LHEEA/HOS-NWT>
- Mise en open-source du logiciel **Grid2Grid** en 2018 :
  - <https://github.com/LHEEA/Grid2Grid>
- Mise en open-source du logiciel **CN-Stream** en 2019. Depuis, management des dépôts interne (Git/Gerrit) et externe (plateforme GitHub) :
  - <https://github.com/LHEEA/CN-Stream>

En complément de la gestion des dépôts, j’ai réalisé un certain nombre de **formations sur ces outils** :

- Mise en place d’une session de formation sur HOS-ocean et HOS-NWT après la mise en open-source – 2015; 20 participants.
- Formation auprès de partenaires industriels : Bureau Veritas, HydrOcean, etc.
- Formation de tous les nouveaux utilisateurs au sein du LHEEA.

## 1.3 Encadrement

Depuis mon arrivée à l'ECN en tant que Maître de Conférences, j'ai eu l'occasion d'encadrer de nombreux projets d'étudiants dispensés en dernière année de cursus ingénieur, notamment : i) 6 projets 'Recherche & Développement' confrontant les étudiants à une problématique de Recherche et ii) 6 projets dans la spécialisation 'Océan' s'intéressant aux problématiques de l'hydrodynamique pour le génie océanique.

Je liste ci dessous les co-encadrements de thèses de doctorat (3 soutenues et 3 en cours) que j'ai pu effectuer, ainsi que le post-doctorat et les thèses de Master Recherche que j'ai encadrées directement.

### Thèses de doctorat

---

Je suis actuellement co-encadrant de **3 thèses en cours** à l'ECN :

- **Marion Huchet** – Prédiction déterministe de houle par mesure du profil de vitesse dans la colonne d'eau – thèse débutée en 2018. Financement ADEME / SBM.
- **Nicolas Desmars** – Reconstruction et prédiction en temps réel de champs de vagues par télédétection optique – thèse débutée en février 2017 – Financement CIFRE Naval Group.
- **Yohan Poirier** – Optimisation et développement de modèles potentiels non-linéaires pour l'interaction houle structure – thèse débutée en 2016. Financement propre (agrégé).

J'ai été dans le co-encadrement de **3 thèses soutenues** au LHEEA :

- **Zhaobin Li** – Two-phase Spectral Wave Explicit Navier Stokes Equations Method for Wave-Structure Interactions – 2015-2018 – financement chinois CSC (China Scholarship Council). Actuellement en contrat d'ingénieur de recherche au LHEEA.
- **Maïté Gouin** – Modélisation déterministe d'états de mer à grande échelle en profondeur variable – 2013-2016 – Financement chaire de recherche SIMAVHY (IRT Jules Verne). Actuellement Ingénieur de Recherche chez Naval Group (Sirehna).
- **Lucas Letournel** – Développement d'un outil de simulation numérique basé sur l'approche Weak-Scatterer pour l'étude des systèmes houlomoteurs – 2012-2015 – financement projet ANR MONACOREV. Actuellement Ingénieur de Recherche chez D-ICE Engineering.

J'ai encadré **2 séjours d'étudiants internationaux en thèse** au sein du LHEEA :

- **Torben Christiansen** (DTU - Danemark) : 1 an (mars 2012 – mars 2013). Développement d'un modèle de bassin de houle numérique avec une approche hybride pseudo-spectrale/différences-finies.

- **Lei Wang** (Université de Dalian - Chine) : financement CSC, séjour d'1 an (oct. 2017 à oct. 2018). Simulation numérique de l'apparition de vagues scélérates en bassin de houle : application aux bi-spectres – Actuellement en fin de thèse à l'Université de Dalian.

J'ai enfin participé au suivi pratique d'autres thèses au sein du LHEEA :

- **Roshamida Abd Jamil** – Reproduction numérique et expérimentale d'états de mers sévères pour les problèmes d'interactions houle-structure – 2017-2018 – thèse réorientée en fin de première année, suite au Comité de Suivi de Thèse.
- **Yves Perignon** – Modélisation déterministe des états de mer : application à la rétrodiffusion d'ondes radar – 2008-2011. Actuellement Ingénieur de Recherche (CNRS) au LHEEA.
- **Élise Blondel-Couprie** – Reconstruction et prévision déterministe de houle à partir de données mesurées – 2008-2011. Actuellement architecte naval chez Allseas Engng. (Pays-Bas).

## Post-doctorat

---

**Betsy Seiffert** : projet SimAvHy 18 mois : Développement et implémentation d'un modèle de déferlement pour le solveur potentiel non-linéaire HOS. Validation expérimentale par des essais réalisés dans les installations expérimentales du LHEEA – mai 2015 – nov 2016. Actuellement chercheuse au Lawrence Livermore National Laboratory (USA).

## Thèses de Master Recherche

---

- **Maxime CANARD** – Étude numérique et expérimentale des statistiques associées aux états de mer extrêmes – mars à septembre 2020 (en cours)
- **Grace CRYSTLE** – Interactions houle-courant dans un modèle d'états de mer non-linéaire déterministe de type High-Order Spectral – mars à août 2017
- **Francis NWOGBALA** – Étude numérique de la reproduction d'événements extrêmes par retournement temporel – mars à août 2017

## 1.4 Activités d'expertise

### Rapporteur

---

**Journaux** : Ocean Engineering, Applied Ocean Research, European Journal of Mechanics B/Fluids, Journal of Fluid Mechanics, Journal of Ocean Engineering and Marine Energy, Physical Review E, Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, Physical Review Fluids, Journal of Computational Physics, Computer And Fluids, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Wave Motion, Journal of Oceanology and Limnology, Fluids, Water Waves, Computers & Mathematics with Applications

**Conférences** : Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE), International Symposium of Offshore and Polar Engineering (ISOPE), European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC)

**Projets** : National Science Foundation (NSF - **USA**), Research Fundation - Flanders (FWO - **Belgique**), Commission Nationale de la Flotte Côtière (CNFC), IFREMER

### Co-éditeur

---

Je suis co-éditeur d'une 'Special Issue' dans le journal **Computers & Mathematics with Applications** (Elsevier, current impact factor 1.860). Cette dernière sera intitulée *open-source numerical solvers for partial differential equations (PDEs)* – parution prévue automne 2020.

Les autres co-éditeurs sont : Qingang Xiong (Senior Scientist, General Motors, USA), Vadym Aizinger (Senior Scientist, Alfred Wegener Institute for Polar and Marine Research, Germany) et Fei Xu (R&D Engineer, Ansys Inc, USA).

### Conférences invitées

---

J'ai eu l'occasion d'être invité à 3 reprises pour donner des conférences invitées :

— Ecole d'été *Wave propagation in complex media* – Cargèse, France – août 2015

***High-Order Spectral methods for nonlinear waves modeling***

— 1<sup>st</sup> International Workshop on Marine Hydrodynamics Modelling (IWMHM) – Harbin, **Chine** – mai 2018

***High-Order Spectral method for nonlinear waves modeling***

— Future Paths and Needs in Wave Modelling workshop, organisé par SINTEF – Trondheim, **Norvège** – Octobre 2019

***Challenges for the future in wave modelling***

## 1.5 Responsabilités administratives

**Semestre différencié Energie Nouvelles** – École Centrale de Nantes

*Responsable sur la période 2010-2014*

**Master international MTECH-HOE** (*Marine TECHNOlogy - Hydrodynamics for Ocean Engineering*) – École Centrale de Nantes

*Responsable du Master 2 depuis septembre 2015 et du Master 1 depuis septembre 2018.*

*Ces responsabilités recouvrent différentes activités :*

- *Réforme de la maquette pédagogique du M1 et du M2 : séparation complète du cursus ingénieur (M2), nouvelle accréditation (M1 et M2), etc.*
- *Processus de recrutement : mise en place de commission, analyse des dossiers, etc.*
- *Gestion académique (jurys, notes, emploi du temps, stages, etc.) et du budget*

**Master Erasmus Mundus REM** (Renewable Energy in the Marine environment)

*Responsable local de ce Master Erasmus Mundus, labélisé par l'Europe en octobre 2017 pour la période (2018-2022) : budget 2 M€. J'ai participé*

- *au montage complet du dossier (maquette pédagogique et financière)*
- *à l'administration de celui-ci en tant que membre du Joint Programme Board (JPB) : gestion des étudiants, recrutement, jurys, etc.*

*Les universités partenaires de ce Master Erasmus Mundus sont :*

- *Université du Pays Basque (UPV/EHU) – Espagne (coordinateur)*
- *Université Strathclyde – Écosse*
- *NTNU – Norvège*

**Conseil d'Administration** École Centrale de Nantes

*Membre élu depuis décembre 2018*

## 1.6 Activités d'enseignement

### Détail des enseignements

---

**Vacations** 2005–2010

- *TP en Dynamique des Fluides et Transferts (ICAM Nantes) : aérodynamique, échangeur thermique, conduction thermique, pertes de charge*
- *Cours, TD et TP en Energies Marines Renouvelables (ECN) : évaluation des ressources énergétiques en EMR, application à l'énergie des vagues.*
- *Encadrement de projets étudiants (ECN).*

### Maître de Conférences

- TD et TP de Mécanique des Fluides (1ère année ingénieur ECN – groupes de 32 étudiants) : réalisation de sujets de DS et de projets.
- Cours, TD et TP de Mécanique des Fluides (M1 international en anglais – promotion d'environ 100 étudiants) : mise en place de nouveaux TD et TP.
- Cours, TD et TP de modélisation des vagues (option ingénieur ECN (env. 30 étudiants) + M2 international en anglais (env. 20 étudiants))
- TP en bassin de houle (option ingénieur ECN + M2 international en anglais)

### Mise en place de nouveaux parcours et enseignements

---

**Semestre différencié Énergies Nouvelles** *Mise en place d'un nouveau cours complet (CM, TD et TP, sur un volume de 32h) sur les ressources énergétiques dans les océans.*

#### Diplôme d'ingénieur ECN – Option Disciplinaire : Océan

- *Reprise et refonte du cours sur la modélisation des ondes de gravité.*
- *Travaux Pratiques dans les installations expérimentales du LHEEA : préparation et réalisation de nouveaux énoncés de façon régulière (dépendant des expériences en cours dans les installations expérimentales... et des aléas expérimentaux)*

**M2 MTECH-HOE** *Definition et mise en place de la maquette du nouveau parcours de Master 2 en tant que nouveau responsable.*

**Master Erasmus Mundus REM** *Travail sur la définition d'une maquette coordonnée entre 4 établissements – Réflexion sur les notations, etc.*

### Autres

---

**WaveTrain2 FP7** – *Initial Training Network for Wave Energy Research Professionals*  
Cours au sein des écoles thématiques organisées à Nantes (Janvier 2011 et Novembre 2011)  
– nonlinear wave modelling.

**WEAMEC** – *RFI (Recherche Formation Innovation autour des EMR au niveau de la région Pays de la Loire)* : formation continue, depuis 2017 : module environnement marin et EMR (certificat référent EMR).

## 1.7 Production scientifique

Les publications et communications réalisées au cours de mes activités de recherche se répartissent comme suit. Je propose également une liste restreinte des publications jugées significatives. En complément, on trouvera une liste détaillée de ma production scientifique dans l'Annexe A et une sélection de publications en Annexe B.

### Résumé

---

25 publications dans des revues nationales et internationales avec comité de lecture  
1 article dans un ouvrage de synthèse international  
53 communications à des conférences avec comités de lecture et actes  
12 communications à des conférences avec comités de lecture et résumés

### Métriques (issues de Scopus)

*h-index* : 11

*Field-Weighted Citation Impact (FWCI)* : 1.55

4 publications parmi les 10% les plus citées dans le monde

### Publications significatives

---

B. R. Seiffert, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments : Wave-breaking onset, In Ocean Model., Vol. 119, pp. 94-104, 2017. (Journal Impact Factor (JIF) 3.095 - Web of Science; FWCI 2.53 - Scopus)

M. Gouin, **G. Ducrozet**, P. Ferrant. Development and validation of a non-linear spectral model for water waves over variable depth. European Journal of Mechanics - B/Fluids, Elsevier, 2016, 57, pp.115–128, (JIF 1.811 - Web of Science; FWCI 2.02 - Scopus).

**G. Ducrozet**, A.P. Engsig-Karup, H.B. Bingham, P. Ferrant. A non-linear wave decomposition model for efficient wave-structure interaction. Part A : Formulation, validations and analysis. Journal of Computational Physics, Elsevier, 2014. (JIF 2.845 - Web of Science; FWCI 1.88 - Scopus).

**Ducrozet G.**, Bonnefoy F., Le Touzé D. and Ferrant P. : HOS-ocean : Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method. Comp. Phys. Comm., 2016. (JIF 3.309 - Web of Science; FWCI 2.64 - Scopus)

**Ducrozet, G.**, Bonnefoy, F., Le Touzé, D., and Ferrant, P. : A modified High-Order Spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank, Eur. J. Mech. B-Fluid, 34, 19-34, 2012. (JIF 1.811 - Web of Science; FWCI 2.74 - Scopus).

**Ducrozet, G.**, Bonnefoy, F., Le Touzé, D., and Ferrant, P. : 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 7, 109-122, 2007. (JIF 2.883 - Web of Science; FWCI 4.04 - Scopus).

# Chapitre 2

## Modélisation non-linéaire des états de mer

### 2.1 Introduction

#### 2.1.1 Contexte

Pour l'étude des interactions houle-structure, la simulation numérique tient désormais un rôle central avec les expérimentations à échelle réduite, suite à l'accroissement des ressources en capacité de calcul. Ces deux approches complémentaires permettent d'accompagner le développement de nouvelles structures marines (navire, plate-forme offshore, dispositifs EMR) depuis leur phase de conception jusqu'à leur réalisation à l'échelle 1. Elles permettent en effet de connaître avec un niveau de précision adapté (suivant la phase d'avancement du projet) les efforts engendrés par les états de mer.

Dans une approche globale de résolution du problème, le modèle qui traite de l'interaction houle-structure est basé sur un certain nombre d'hypothèses plus ou moins limitantes afin de fournir les informations d'intérêt (mouvements, efforts, etc.). Il est alors indispensable de travailler sur la précision de ces modèles afin : i) de la maîtriser sur la configuration d'intérêt, ii) de l'améliorer pour satisfaire un niveau requis et iii) atteindre un niveau d'efficacité numérique adapté à cette précision requise. Cependant, aussi précis soit le modèle qui prend en compte la structure dans son écoulement, il repose sur une description de l'environnement, et en particulier des vagues. Si cette description n'est pas précise, il est inutile de chercher à augmenter la précision des outils suivants dans la chaîne de modélisation.

Il apparaît donc essentiel d'avoir la compréhension la plus fine possible de ce phénomène naturel complexe. On cherchera en particulier à être capable d'en extraire les caractéristiques nécessaires à la mise en place des procédures de couplage qui seront détaillées explicitement dans le chapitre 3.

Une des spécificités de cette thématique de recherche est qu'elle se trouve à l'interface entre l'océanographie physique qui va chercher à décrire à très grande échelle les conditions environnementales ( $\mathcal{O}(100 \text{ km})$ ) et la physique de l'influence du corps sur l'écoulement induit par les vagues qui se passe à des échelles beaucoup plus petites ( $\mathcal{O}(10 - 100 \text{ m})$ ) pour la diffraction jusqu'à ( $\mathcal{O}(10 - 1 \text{ cm})$ ) pour les petites structures tourbillonnaires



générées). Les conditions environnementales seront classiquement représentées par leur spectre d'énergie (sous forme stochastique) alors qu'on va chercher à avoir des informations déterministes sur les mouvements ou les efforts engendrés sur la structure d'intérêt (en particulier lors de l'étude des événements extrêmes).

Dans ce contexte, la représentation des vagues d'amplitude modérée (ou plus exactement de cambrure faible, *i.e.* le ratio amplitude sur longueur d'onde) est parfaitement connue par l'utilisation des théories linéaires ou faiblement non-linéaires. Mais ces modèles sont défaillants pour traiter les états de mer formés présentant des cambrures élevées et donc une non-linéarité importante.

Ces difficultés inhérentes à la modélisation non-linéaire du phénomène conduisent également au choix de l'approche déterministe pour la modélisation du phénomène. On entend par déterministe la représentation de l'évolution temporelle en tout point de l'espace de la dynamique induite par un champ de vagues donné. On la différencie de l'approche stochastique de description des états de mer qui s'intéresse quant à elle à représenter l'évolution dans l'espace et le temps de l'énergie associée aux vagues, sans chercher à représenter les vagues individuellement. Cette approche est à l'œuvre par exemple dans les modèles dits de hindcast ou spectraux tels que WaveWatchIII [? ], WAM [? ] ou SWAN [? ]. Les deux approches peuvent se compléter comme on le verra dans la section 2.5.2, mais on se concentrera sur l'approche déterministe par la suite.

Cette problématique de la modélisation (en vue de leur compréhension) des non-linéarités inhérentes aux états de mers cambrés a été le cœur de mes recherches. Différentes méthodes numériques ont été développées en ce sens au fil des ans et qui permettent d'appréhender le problème. Cependant, la problématique qui est la mienne est de réussir à concilier une modélisation précise de ces conditions environnementales avec la meilleure efficacité numérique possible, tout en gardant une robustesse importante. Ce paramètre d'efficacité numérique est prépondérant lorsqu'on s'adresse à une problématique industrielle donnée, le temps de restitution (et le coût inhérent) étant une donnée très importante pour le possible utilisateur de tout code numérique.

Ce chapitre se concentre sur la modélisation numérique du problème de la propagation non-linéaire des ondes de gravité. Il est important de noter que de mon point de vue, elle doit être utilisée en accompagnement de l'approche expérimentale, toujours nécessaire afin d'apporter une validation du modèle développé. Cependant, une fois validée, la simulation numérique peut apporter des informations qu'il est difficile d'obtenir expérimentalement (capteurs, taille limitée du bassin, etc.). On donnera dans le chapitre 4 des exemples d'utilisation du modèle numérique en complément de l'approche expérimentale pour aller plus loin dans la compréhension des phénomènes physiques.

### 2.1.2 Différentes approches numériques

Face à ce besoin de modélisation précise, incluant tout ou partie des non-linéarités associées à la houle, de nombreux modèles ont été développés. Lorsqu'on s'intéresse à la propagation seule des états de mer (et donc pas à l'interaction entre ceux-ci et des structures), on utilise classiquement l'hypothèse d'un écoulement potentiel de fluide parfait. En effet, les phénomènes associés à la viscosité sont négligeables lorsqu'on étudie un champ de vagues en profondeur intermédiaire ou grande (ratio profondeur  $h$  sur longueur d'onde

$\lambda : h/\lambda > 1/20$ ) ainsi qu'en absence de déferlement (où l'écoulement dévient également fortement rotationnel).

Dans ce formalisme, on classera les différentes méthodes numériques existantes en trois grandes catégories :

- **Méthode des éléments frontières** (BEM). Historiquement, c'est la première approche développée pour traiter le problème de la houle non-linéaire [? ]. L'avantage de cette approche est d'utiliser la formulation intégrale des équations de manière à résoudre un problème uniquement localisé sur les frontières du domaine. Cela réduit grandement le nombre de degrés de liberté du système. Cependant, du point de vue numérique, les matrices obtenues à inverser sont pleines, ce qui implique des temps de calculs prohibitifs pour des problèmes 3D de grande dimension. Des efforts pour lever cette limitation ont été entrepris par utilisation d'algorithmes type precorrected-FFT ou Fast Multipole Algorithm (FMA) [? ? ? ] avec une amélioration significative des temps de calcul, qui restent cependant assez conséquents. L'avantage principal de cette approche est que la géométrie du domaine est totalement arbitraire et que l'inclusion de corps est relativement aisée.
- **Méthodes volumiques**. L'autre approche classiquement utilisée est celle d'une discrétisation complète du volume fluide. Différentes méthodes de discrétisation ont été mise en œuvre telle les éléments finis [? ? ] et les différences finies (modèle OceanWave3D) [? ? ] ou des approches plus novatrices comme la méthode Harmonic Polynomial Cell (HPC) [? ] ou la Spectral Element Multigrid method (modèle MarineSEM) [? ]. En conservant une flexibilité importante quant aux géométries pouvant être traitées, ces méthodes mettent à profit la grande expérience des méthodes maillées (par exemple en CFD) pour arriver à des méthodes très efficaces. Ces méthodes ont été démontrées comme plus efficaces que les méthodes type BEM [? ? ? ]. Les développements principaux résident dorénavant dans l'adaptation aux architectures de calcul massivement parallèles [? ? ].
- **Méthode pseudo-spectrales**. Cette dernière classe de méthode entend résoudre le problème de la propagation des vagues en ne discrétisant que la surface libre, en suivant le formalisme de Zakharov [? ]. La complexité du problème est alors de déterminer la vitesse normale à la surface (Condition de Neumann) à partir d'informations sur cette même surface (condition de Dirichlet). Les méthodes pour le faire de manière efficace ont été appelées originellement High-Order Spectral (HOS) [? ? ] puis Dirichlet to Neumann Operator (DNO) [? ]. Ces deux appellations correspondent exactement aux mêmes méthodes, si ce n'est le formalisme d'écriture [? ? ]. Une approche pseudo-spectrale est adoptée dans ces méthodes numériques, contraignant fortement la géométrie du domaine de résolution qui sera rectangulaire, avec une profondeur constante. Ceci permet l'utilisation de Transformées de Fourier rapides (FFT) dans la résolution. On détaillera plus en détail par la suite cette méthode. J'ai montré [? ], que sur un problème de propagation seule, la méthode est au moins d'un ordre de grandeur plus efficace que l'approche par discrétisation volumique.

Je donne ici un aperçu général qui n'est pas exhaustif. En particulier, de nombreuses procédures qu'on pourra appeler mixtes ont émergé, essayant de tirer partie des avantages inhérents à chaque type de méthode. On indiquera par exemple la méthode mixte pseudo-

spectrale/intégrale [? ? ], méthode mixte différence finies/pseudo-spectrale [? ? ], Radial Basis Function (RBF)/pseudo-spectrale [? ], etc.

Une méthode développée assez récemment, dénommée 'mode-coupling', se base sur une description surfacique du problème (identiquement aux méthodes pseudo-spectrale). La solution du problème s'obtient par la résolution d'un système de modes couplés, remplaçant la procédure itérative des méthodes HOS/DNO [? ? ? ? ] .

Le choix de la méthode numérique fait à l'ECN dans le cadre des thèses de D. Le Touzé [? ] et F. Bonnefoy [? ] (qui ont précédé le début de ma thèse de doctorat) a été de s'orienter vers les méthodes pseudo-spectrales. Ce choix a été motivé principalement par l'efficacité de ce type de formulation, et ce, malgré les contraintes inhérentes à ce choix (en particulier concernant la géométrie des domaines considérés).

En effet, si certaines de ces limitations seront discutées dans la suite de ce chapitre (voir Sec. 2.3, 2.4, 2.5 & 2.6), il n'est pas dans notre objectif principal de vouloir traiter l'interaction entre les vagues et la structure avec la méthode choisie. Pour ce faire, on s'orientera plutôt vers le couplage entre méthodes numériques, afin de tirer partie de l'efficacité respective des méthodes choisies (voir chapitre 3).

### 2.1.3 Résumé des travaux

Dans ce chapitre, je présenterai l'essentiel de mes travaux réalisés dans le cadre de la modélisation numérique des ondes de gravité par approche pseudo-spectrale. Comme il a été rappelé précédemment, cette classe de méthode présente une efficacité supérieure aux autres méthodes numériques (grâce notamment à ses propriétés de convergence) mais est sujette à des restrictions importantes. Le modèle originel [? ? ] est en effet limité à l'étude de la propagation des états de mer en domaine ouvert (rectangulaire) sur un fond de profondeur constante (finie ou infinie).

Mon travail sur ces méthodes numériques s'est donc intéressé principalement à :

- étendre les domaines d'application de cette méthode à : i) la modélisation d'un bassin de houle (murs réfélchissant, système de génération, absorption) ; ii) la prise en compte d'une bathymétrie variable ; iii) la prise en compte d'un courant ; iv) la modélisation du forçage dû au vent et de la dissipation par moutonnement (par identification aux modèles stochastiques) et finalement v) la prise en compte du déferlement pour les états de mer cambrés.
- étudier les propriétés numériques des modèles développés : convergence, précision, efficacité, etc. Ceci dans l'objectif de toujours démontrer l'intérêt pratique (ou non) du développement d'un tel modèle. Le positionnement vis à vis des méthodes existantes est de ce point de vue un point important.
- mettre à la disposition de la communauté un modèle open-source fiable et documenté.

## 2.2 La méthode High-Order Spectral

Dans cette partie je détaillerai les éléments clés associés à la méthode HOS qui est l'outil numérique principal sur lequel j'ai travaillé au cours de mes travaux de recherche. On part ici de la méthode originelle développée à la fin des années 1970 dans [?] & [?].

Cette méthode s'intéresse à la propagation non-linéaire des états de mer dans un domaine ouvert au dessus d'un fond de profondeur constante. Elle est aujourd'hui, de part sa relative simplicité et son efficacité un modèle assez largement utilisé dans la communauté s'intéressant à la physique des vagues non-linéaires. Elle a été utilisée dans différents contextes pour étudier par exemple les transferts non-linéaires d'énergie [?], l'instabilité modulationnelle [? ?], les houles bi-modales [?] ou les vagues scélérates [? ? ?].

L'implémentation originale au LHEEA dans cette forme classique a été réalisée par F. Bonnefoy en 2005-2006 lors de son post-doctorat. A noter qu'une version dédiée à la modélisation d'un bassin de houle avait été développée auparavant [? ? ?] et sera détaillée dans la Sec. 2.3.

### 2.2.1 Formulation

On considère un domaine fluide  $D$  rectangulaire, de profondeur  $h$  et de taille  $L_x$  et  $L_y$  dans les deux directions horizontales (respectivement  $x$  et  $y$ ), voir figure 2.1. Le système de coordonnées est cartésien ( $Oxyz$ ) avec  $z$  défini comme verticale ascendante dont le niveau 0 est localisé au niveau de la surface libre au repos. On notera dans la suite  $\mathbf{x}$  le vecteur horizontal  $(x, y)$ .

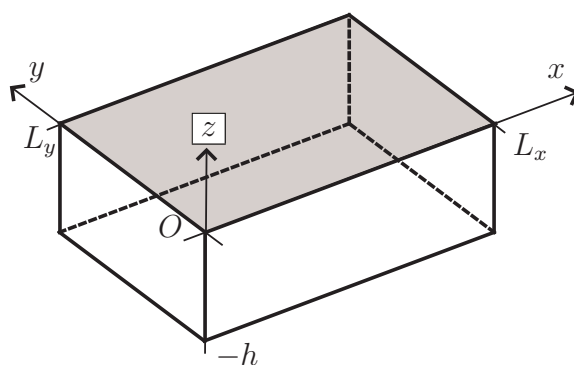


FIGURE 2.1 – Schéma du domaine de résolution avec système de coordonnées

Dans le cadre de l'étude de la propagation des vagues pour le génie océanique, on fera de manière classique les hypothèses suivantes : tension de surface négligée (on se limite aux ondes dites de gravité de longueur d'onde  $\lambda > 20$  cm), écoulement isovolume et irrotationnel d'un fluide supposé parfait. Les deux dernières hypothèses sont parfaitement vérifiées dans le cas de champs de vagues en profondeur intermédiaire ou grande  $h/\lambda > 1/20$  sans présence de déferlement. On choisira par conséquent de représenter la position de la surface libre par une surface monovaluée  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ .

Ces hypothèses nous permettent d'utiliser la théorie des écoulements potentiels de fluide parfait pour la résolution du problème. On introduit le potentiel des vitesses  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  défini par  $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi$  avec  $\vec{V}$  le champ de vitesse et  $\vec{\nabla}$  le gradient volumique. On utilisera également par la suite le gradient horizontal (ou gradient surfacique)  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ .

Le système d'équation à résoudre devient :

— Equation de continuité

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{dans } D \quad (2.1)$$

— Conditions aux limites

— Condition cinématique de surface libre

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta \quad (2.2)$$

— Condition dynamique de surface libre

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\vec{\nabla}\phi|^2 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.3)$$

— Condition au fond

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h \quad (2.4)$$

— Conditions de périodicité dans le plan horizontal

$$[\phi; \eta](x = 0, y, z, t) = [\phi; \eta](x = L_x, y, z, t) \quad (2.5)$$

$$[\phi; \eta](x, y = 0, z, t) = [\phi; \eta](x, y = L_y, z, t) \quad (2.6)$$

On utilisera pour les conditions aux limites de surface libre le formalisme de Zakharov [?] qui introduit un potentiel de surface  $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$ . Les conditions cinématique et dynamique s'écrivent alors respectivement

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = (1 + |\nabla\eta|^2) \frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi^s \cdot \nabla\eta \quad \text{en } z = \eta \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\eta|^2) \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \quad \text{en } z = \eta \quad (2.8)$$

Pour avancer en temps les deux inconnues du problème que sont  $\eta$  et  $\phi^s$ , il faut réussir à évaluer la vitesse verticale à la surface libre  $W(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$ . Il s'agit du cœur de la méthode HOS qui, on le rappelle est équivalente à la méthode DNO (ou parfois référencée comme DtN (Dirichlet to Neumann)). En connaissant les valeurs à la frontière  $\eta$  et  $\phi^s$  (conditions de Dirichlet), on veut en déduire la vitesse verticale (ou de façon équivalente la vitesse normale à cette surface, *i.e.* une condition de Neumann).

## 2.2.2 Méthodes numériques

### Approche pseudo-spectrale

Les équations ne sont pour l'instant pas discrétisées et toute méthode numérique peut potentiellement être utilisée. Les méthode HOS et DNO se basent sur des méthodes pseudo-spectrales en raison de leurs propriétés de convergence très intéressantes qui permettront d'obtenir des méthodes rapides et précises comme on le détaillera dans la section 2.2.3.

L'équation de Laplace (2.1), associée aux conditions aux limites au fond Eq. (2.4) et dans le plan horizontal Eqs. (2.5) & (2.6) permet la définition d'une base de fonctions  $\psi_{mn}(\mathbf{x}, z)$  adaptée à la résolution du problème (*i.e.* satisfaisant de par leur choix l'ensemble de ces équations). On va donc décomposer le potentiel des vitesses, solution du problème, sur cette base de fonction

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_p \sum_q A_{pq}(t) \psi_{pq}(\mathbf{x}, z) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq}(t) \frac{\cosh[k_{pq}(z+h)]}{\cosh[k_{pq}h]} \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{pq}} \cdot \mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.9)$$

avec  $A_{pq}$  les amplitudes modales,  $k_p = p\Delta k_x = p\frac{2\pi}{L_x}$  et  $k_q = q\Delta k_y = q\frac{2\pi}{L_y}$  les nombres d'onde dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. D'où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{\mathbf{pq}} = (k_p, k_q)$  et sa norme  $k_{pq} = |\mathbf{k}_{\mathbf{pq}}|$ . Cette base de fonctions est également utilisée pour représenter les quantités surfaciques d'intérêt

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_p \sum_q B_{pq}^\eta(t) \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{pq}} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.10)$$

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \sum_p \sum_q B_{pq}^{\phi^s}(t) \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{pq}} \cdot \mathbf{x}) \quad (2.11)$$

Les amplitudes modales  $B_{pq}^\eta$  et  $B_{pq}^{\phi^s}$  peuvent être obtenues par l'utilisation de FFTs. Pratiquement, les sommes des Eqs. (2.10) & (2.11) sont tronquées à un certain nombre de modes, définissant le nombre de points  $N_x, N_y$  dans l'espace physique.

L'intérêt de cette méthodologie pseudo-spectrale est de pouvoir effectuer un certain nombre d'opérations dans le domaine de Fourier (comme les dérivations) et d'autres dans le domaine physique (comme les multiplications). Les FFTs permettent alors de passer efficacement d'un espace à l'autre.

### Algorithme HOS

En connaissant  $\eta(\mathbf{x}, t)$  et  $\phi^s(\mathbf{x}, t)$  à un instant donné, la méthode HOS cherche à évaluer la vitesse verticale au niveau de la surface libre à ce même instant  $W(\mathbf{x}, t)$ . La procédure repose sur une méthode des perturbations utilisant en paramètre la cambrure  $\epsilon$  et ce jusqu'à un ordre arbitraire  $M$  appelé ordre HOS

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) \quad (2.12)$$

avec  $\phi^{(m)}$  des quantités d'ordre  $\epsilon^m$ . En effectuant alors un développement de Taylor de chaque potentiel  $\phi^{(m)}$  autour de  $z = 0$  et en regroupant les termes du même ordre de grandeur en  $\epsilon$ , il est possible d'obtenir un système triangulaire pour les différents  $\phi^{(m)}$

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \phi^s(\mathbf{x}, t) \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t)\end{aligned}\quad (2.13)$$

Ainsi, le problème de Dirichlet pour  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  en  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$  est remplacé par  $M$  problèmes de Dirichlet simplifiés pour  $\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t)$  en  $z = 0$ . Une méthode des perturbations identique est appliquée à la vitesse verticale  $W$  qui conduit à un autre système triangulaire pour  $W^{(m)}$  résolu de manière itérative

$$W^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t)\quad (2.14)$$

Le système d'équations précédent permet d'évaluer, la vitesse verticale à la surface libre que l'on cherchait, et ce jusqu'à un ordre HOS  $M$  arbitraire

$$W(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^M W^{(m)}(\mathbf{x}, t)\quad (2.15)$$

Il est à noter que les articles originaux de Dommermuth & Yue [?] et de West *et al.* [?] diffèrent légèrement dans l'utilisation faite de cette vitesse verticale. West *et al.* proposent un traitement homogène de  $W$  en ordre dans les conditions de surface libre. Le terme faisant intervenir la vitesse verticale dans la condition cinématique est  $(1 + |\nabla\eta|^2)W$ , et pour garder la consistance en ordre, il convient d'écrire (avec les indices sur  $W$  donnant la troncature de la somme dans l'Eq. (2.15)) :

$$(1 + |\nabla\eta|^2)W = W_M + |\nabla\eta|^2 W_{M-2}\quad (2.16)$$

De la même manière dans la condition cinématique :

$$(1 + |\nabla\eta|^2)W^2 = (W^2)_M + |\nabla\eta|^2 (W^2)_{M-2}\quad (2.17)$$

que l'on peut comparer avec la formulation de Dommermuth & Yue [?] qui sera pour la condition cinématique par exemple :  $(1 + |\nabla\eta|^2)W = W_M + |\nabla\eta|^2 W_M$ .

On a montré en détail [?] que l'approche consistante de West *et al.* [?] était supérieure à celle de Dommermuth & Yue [?] en terme de stabilité et précision. C'est donc cette méthode qui est utilisée par la suite.

### Anti-repliement

Le formalisme pseudo-spectral permet de traiter efficacement les dérivations spatiales dans l'espace de Fourier alors que les produits non-linéaires (les multiplications) apparaissant dans les conditions de surface libre (Eqs. (2.7) & (2.8)) ou dans la procédure

HOS sont réalisées dans l'espace physique. Les transformations entre les espace physique et spectral sont réalisées efficacement à l'aide de tranformées de Fourier rapides (FFTs), mais elles conduisent au problème classique du repliement (en particulier à cause des produits non-linéaires). Afin de traiter ce problème, une procédure dite d'anti-repliement est mise en place dans notre modèle HOS. Une stratégie de 'zero-padding' est mise en œuvre qui consiste à étendre la description modale des quantités, afin d'annuler les erreurs de repliement lors des produits multiples. Dans la procédure HOS, les produits sont au plus d'ordre  $M$  (voir Eqs. (2.13) & (2.14)). Le nombre de modes dits 'étendus' pour décrire les quantités sera défini en utilisant la règle des moitiés

$$[N_{x_d} ; N_{y_d}] = \frac{p+1}{2} [N_x ; N_y]$$

L'anti-repliement sera dit complet lorsqu'on choisit  $p = M$ . Il s'agit de la configuration préférentielle qui permet de s'assurer que la description sur les  $[N_x ; N_y]$  modes n'admet pas d'erreur de repliement. Cependant, il est également possible d'utiliser un anti-repliement partiel ( $p < M$ ), pour des raisons d'efficacité numérique.

On a montré [?] l'importance de cette procédure pour préserver les propriétés de convergence et de précision de la méthode, y compris pour les vagues fortement non-linéaires.

### Avance en temps

Les inconnues sont avancées en temps à l'aide d'un schéma du 4<sup>ème</sup> ordre de type Runge-Kutta Cash-Karp avec pas de temps adaptatif [?]. On se fixe une tolérance sur le schéma d'avance en temps (*i.e.* un niveau de précision) et la méthode permet un choix automatique du pas de temps assurant cette précision (et ce au fur et à mesure du calcul). Les valeurs typiquement utilisées sont  $10^{-5}$  ;  $10^{-7}$  pour atteindre la convergence. Le choix dépend principalement de la non-linéarité de l'état de mer ainsi que de la durée totale de la simulation.

J'ai pendant ma thèse de doctorat implémenté l'intégration analytique de la partie linéaire des conditions de surface libre (Eqs. (2.7) & (2.8)) [? ?]. Cette méthode permet, à précision équivalente, de gagner un facteur environ 3 en temps de calcul et ce, indépendamment de la cambrure de l'état de mer considéré [?].

### Conditions initiales

Le problème est formulé comme un système couplé d'équations aux dérivées partielles, avec des conditions aux limites dans le plan horizontal indépendantes du temps. Le problème nécessite donc la définition d'une condition initiale appropriée afin d'étudier son évolution au cours du temps.

Ces conditions initiales doivent fournir une élévation de surface libre  $\eta(\mathbf{x}, t = 0)$  et le potentiel de surface  $\phi^s(\mathbf{x}, t = 0)$  correspondant. On va définir classiquement deux types de conditions initiales : une houle régulière un état de mer irrégulier. Il est à noter ici qu'on reviendra par la suite sur l'importance des conditions initiales dans la physique des états de mer modélisés, voir section 4.1.2.



Pour la houle régulière, qui est principalement utilisée à des fins de validation du cœur de la méthode HOS, on va utiliser comme condition initiale une solution potentielle complètement non-linéaire du problème qui satisfait donc les conditions de surface libre non-linéaires. On utilise l'approche classique par fonction de courant [?] au travers de la librairie CN-Stream développée et utilisée depuis de nombreuses années au LHEEA et diffusée récemment [?].

Pour les champs de vagues irréguliers, il n'existe pas de solution non-linéaire simple qu'on pourrait utiliser en condition initiale du modèle HOS. Une stratégie doit donc être mise en place afin de pallier à ce problème. L'approche classique est celle d'utiliser comme condition initiale du modèle la solution linéaire. On va donc définir en entrée un spectre fréquentiel et directionnel de vagues  $S_\omega(\omega, \theta)$  et en déduire par superposition linéaire l'état de mer correspondant. On rappelle que dans l'approche HOS, chaque composante est définie dans l'espace modal  $(k_x, k_y)$  (cf. Eq. (2.10)). On peut alors relier les amplitudes modales au spectre

$$\frac{1}{2}|B_{pq}^\eta|^2 = S_k(k_x, k_y)\Delta k_x\Delta k_y = \frac{\partial\omega}{\partial k}S_\omega(\omega, \theta)\Delta k_x\Delta k_y \quad (2.18)$$

avec  $\omega$  défini par la relation de dispersion linéaire par rapport au nombre d'onde  $k_{pq}$ . La phase est choisie quant à elle de manière aléatoire avec une distribution uniforme dans le domaine  $[0, 2\pi]^1$ . Le potentiel de surface est alors obtenu simplement à partir de l'élévation de surface libre

$$B_{pq}^{\phi^s} = -i\frac{\omega_{pq}}{g}B_{pq}^\eta \quad (2.19)$$

Cette procédure impose donc à l'instant initial un champ de vagues superposition de composantes linéaires ayant chacune sa fréquence et sa direction. Il a été montré [?] qu'utiliser des conditions initiales linéaires dans un modèle complètement non-linéaire pouvait conduire à des instabilités numériques. En suivant [?], un processus de relaxation en temps des non-linéarités a été mis en place. Les conditions de surface libre sont réécrites sous la forme

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - W^{(1)} = F \quad ; \quad \frac{\partial\phi^s}{\partial t} + g\eta = G \quad (2.20)$$

avec  $W^{(1)}$  la vitesse verticale linéaire à la surface libre et  $F$  et  $G$  représentant les termes non-linéaires des conditions cinématique et dynamique respectivement. Ces termes non-linéaires sont ajustés en temps comme suit quand  $t < T_a$ , la durée de la phase de relaxation

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - W^{(1)} = F \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t} + g\eta = G \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right) \quad (2.22)$$

avec  $n$  un paramètre ajustable.

---

1. Il est possible de jouer sur les tirages de phase pour contrôler des vagues focalisées tel qu'on l'a utilisé dans [?].

Cette procédure permet de s'assurer d'une initialisation correcte des champs de vagues irréguliers (et plus généralement d'une surface libre définie linéairement à l'instant initial) au sein de la méthode HOS, sans artefact numérique.

On a par ailleurs travaillé, lors de la thèse d'Y. Perignon [? ], sur les procédures d'initialisation. La mise en place d'une initialisation au second-order de non-linéarité [? ] a été réalisée et qui permet, sans processus de relaxation, d'améliorer grandement les instabilités générées par l'initialisation linéaire du modèle.

### 2.2.3 Propriétés numériques

On a avancé précédemment que le choix de la méthode HOS avait été guidé par son efficacité numérique (précision/temps de calcul). Je me suis donc intéressé de façon détaillée à ce point particulier afin d'attester de la pertinence de ce choix, notamment par rapport aux autres méthodes numériques existantes pour traiter d'un problème similaire.

#### Temps de calcul et ressources mémoires

On peut estimer l'évolution du temps de calcul aux grands nombres de points, afin de positionner la méthode HOS par rapport aux autres méthodes existantes. L'effort en temps de calcul réside essentiellement dans la procédure de calcul de la vitesse verticale à la surface libre. Cette dernière repose sur l'utilisation extensive de FFTs qui vont être la source principale des efforts numériques. Pour un anti-repliement complet, ce temps de calcul est estimé aux grands nombre de points  $N = N_x N_y$

$$T_{CPU} \simeq \mathcal{O} \left( \left[ \frac{M^3}{4} + M^2 + \frac{9M}{4} + \frac{3}{2} \right] N \log(N) \right) \quad (2.23)$$

On s'attend donc à ce que l'évolution en fonction du nombre de points (à ordre de non-linéarité fixé) suive une évolution quasi-linéaire. La figure 2.2 présente l'évolution effective des ressources en mémoire ainsi que l'évolution du temps de calcul en fonction de  $N$ . Ces deux informations sont pertinentes d'un point de vue numérique pour qualifier le comportement numérique de la méthode.

On observe donc que le modèle HOS permet, à ordre de non-linéarité fixé  $M$ , d'atteindre une évolution quasi-linéaire du temps de calcul et des ressources mémoires en fonction du nombre de points.

Cette efficacité est d'autant plus importante que le nombre de points utilisés dans notre approche pseudo-spectrale est réduit par rapport aux autres méthodes numériques utilisées dans le contexte potentiel non-linéaire. En effet, avec cette méthode, seule la surface libre est discrétisée. Le tableau 2.1 présente ainsi de façon schématique la comparaison entre les 3 grandes familles de méthodes potentielles non-linéaires identifiées dans la section 2.1.2.

#### Convergence

On s'intéresse tout d'abord à la convergence spatiale (ou de façon équivalent en nombre de modes dans notre méthode pseudo-spectrale) et à la convergence vis à vis du paramètre de non-linéarité  $M$  de la méthode HOS. Les propriétés classiques de la méthode

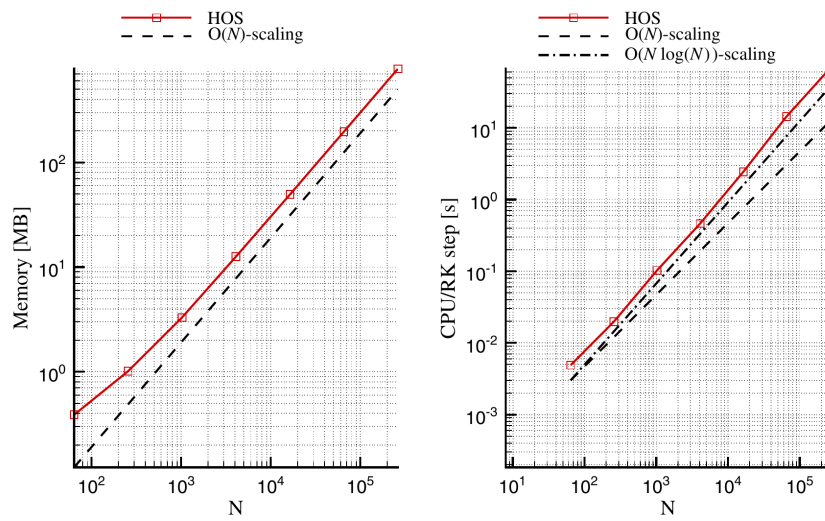


FIGURE 2.2 – Effort en ressources mémoire (gauche) et en temps de calcul (droite) en fonction du nombre de points  $N$ . Méthode HOS, simulation 3D avec  $M = 5$ . (Figure issue de [? ])

	Nombre inconnues	Evolution du temps CPU	Efficacité numérique globale
Méth. BEM	+	- (classique) / + (FMA)	0
Méth. volumique	-	++	+
Méth. HOS	+	++	++

TABLE 2.1 – Effort en temps de calcul pour différentes méthodes numériques

HOS sont représentées sur la figure 2.3 qui présente l'erreur de l'algorithme HOS sur la vitesse verticale. On étudie une houle régulière non-linéaire afin d'avoir une solution de référence par l'approche en fonction de courant de [? ]. La houle est cambrée, avec pour caractéristiques :  $ka = 0.3$  et  $kh = 2\pi$  (*i.e.* grande profondeur).

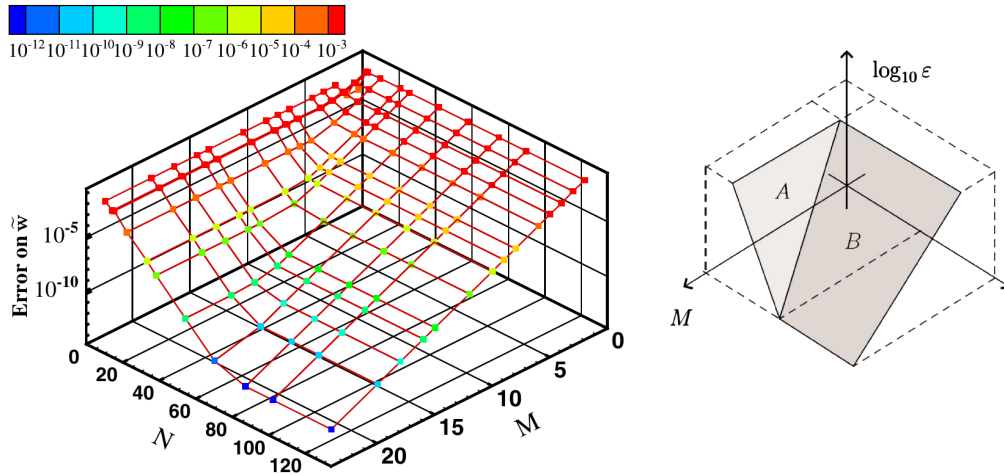


FIGURE 2.3 – Convergence de la méthode HOS sur la vitesse verticale en fonction du nombre de points  $N_x$  et de l'ordre HOS  $M$ . Houle régulière  $ka = 0.3$  et  $kh = 2\pi$ . (Figure issue de [? ])

On notera sur cette figure que les axes dans le plan horizontal donnent l'évolution linéaire du nombre de points  $N_x$  et de l'ordre non-linéarité  $M$ . Pour l'axe vertical (et l'échelle de couleur correspondante), l'erreur est représentée en échelle logarithmique.

On observe donc l'existence de deux plans dans cette représentation, tel que schématisé sur la partie droite de la figure 2.3. Cette géométrie particulière nous informe que la méthode HOS présente

- une convergence exponentielle en fonction du nombre de points/modes (à ordre de non-linéarité fixé),
- une convergence exponentielle en fonction de l'ordre de non-linéarité (à nombre de points fixés),
- pour un état de mer donné, il existe un couple  $(N_x; M)$  optimal pour chaque précision.

Il est à noter qu'on a démontré dans [? ] que ce comportement de convergence très favorable pour la méthode HOS est liée au soin pris quant aux détails numériques et en particulier :

- l'utilisation de la forme consistante de West *et al.* [? ] de l'algorithme HOS, comme discuté dans le paragraphe 2.2.2,
- l'utilisation d'une procédure d'anti-repliement complet.

Ces propriétés de convergence sont conservées pour des cambrures très proches du déferlement, par exemple une cambrure de  $ka = 0.4$  en profondeur infinie. Les possibles problèmes associés à une saturation de l'erreur à ces très fortes cambrures [? ? ] sont résolus avec notre version du code de calcul HOS.

Les propriétés de convergence en temps dérivent du schéma de Runge-Kutta du 4ème ordre avec pas de temps adaptatif utilisé et sont donc supposées parfaitement établies. Cependant, il est intéressant de tester la précision de la résolution temporelle, notamment en vue de la simulation à grande échelle ou sur des durées importantes.

Une approche classique introduite par [? ] consiste à propager pendant un temps significatif une houle régulière non-linéaire. Le déphasage observé par rapport à la solution semi-analytique [? ] est alors reporté. Il s'avère que pour des vagues cambrées et de longues durées, ce test est très demandeur pour les méthodes numériques. La précision de la résolution dont on a parlé précédemment joue alors un rôle prépondérant, avec le schéma d'avance en temps choisi. Ce dernier peut être également qualifié dans cette approche ou une fois le champ de vagues propagé pendant une durée significative, on inverse le déroulé du temps dans l'intégration temporelle jusqu'à revenir à l'instant initial où on devrait retrouver exactement la vague initiale.

La figure 2.4 présente ce type d'étude avec la méthode HOS pour une houle régulière de cambrure  $ka = 0.3$  se propageant en profondeur infinie pendant 1000 périodes de propagation (suivi d'une propagation inverse). On montre que le déphasage est très limité et que l'intégration en temps est parfaitement réversible, même avec un schéma qui n'est pas symplectique par nature.

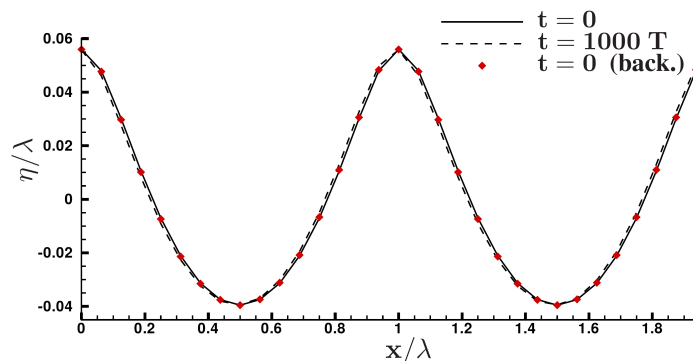


FIGURE 2.4 – Propagation pendant 1000 périodes d'une houle régulière non-linéaire (avant/arrière).  $ka = 0.3$ , profondeur infinie. (Figure issue de [? ])

### Comparaison de code

Comme on l'a déjà évoqué précédemment, les différentes approches numériques exhibent des propriétés numériques différentes. On a schématiquement identifié les performances attendues pour les trois grandes classes de méthodes potentielles non-linéaires dans le tableau 2.1. Cependant, ce tableau ne contient pas toutes les informations permettant d'établir la performance comparée de ces différentes approches. En particulier, nous

n'avons pas d'informations sur les ordres de convergence de ces méthodes, qui peuvent jouer un grand rôle quant à l'efficacité (voir par ex. [?] pour des différences finies de différents ordres).

Il peut être utile de qualifier ce qu'on entend par efficacité numérique. De manière classique, on la définit comme les ressources numériques (temps de calcul, et éventuellement ressources mémoires) nécessaires pour résoudre un problème avec une précision donnée. Il s'agit de mon point de vue de la seule comparaison entre codes de calcul qui soit pertinente.

Suite à mon post-doctorat réalisé à DTU dont le sujet principal est abordé dans la section 3.2.2, j'ai été amené à utiliser le code potentiel non-linéaire basé sur une méthode volumique discrétisé par différences finies, OceanWave3D. Ce dernier code apparaissant comme à la pointe de ce qu'il se faisait en méthodes volumiques dans un formalisme potentiel non-linéaire, il m'a semblé intéressant de comparer les modèles numériques afin d'en extraire les caractéristiques numériques propres [?]. En complément à la figure 2.2, la figure 2.5 présente l'évolution en fonction du nombre de points des ressources en mémoire et du temps de calcul pour le code OceanWave3D.

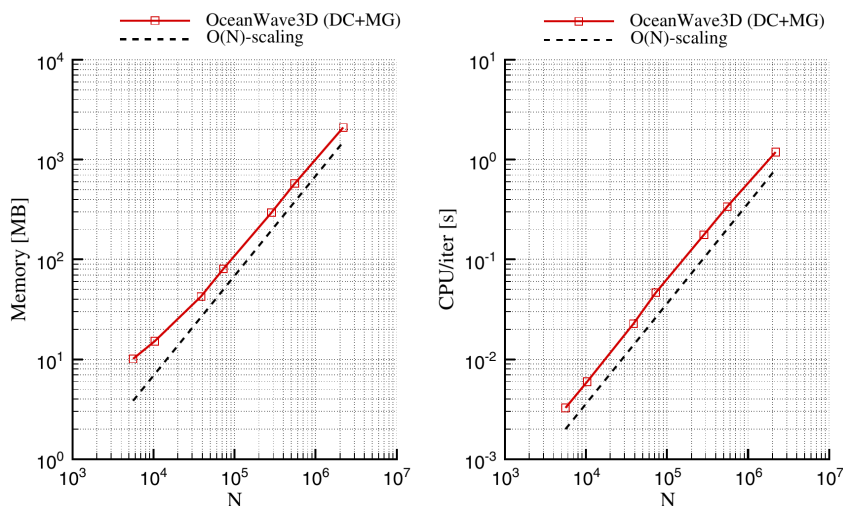


FIGURE 2.5 – Effort en ressources mémoire (gauche) et en temps de calcul (droite) en fonction du nombre de points  $N$ . Méthode OceanWave3D, simulation 3D avec schéma Différences Finies d'ordre 6. (Figure issue de [?])

Les propriétés numériques entre les deux approches semblent donc similaires : une évolution de ces deux ressources linéaires en fonction du nombre de points. Cependant, elles ont deux différences importantes : i) le nombre de point  $N$  est différent : l'un est volumique (OceanWave3D), l'autre est surfacique (HOS) et ii) l'ordre de convergence est différent : exponentiel dans HOS et égal à l'ordre du schéma de Différences Finies choisi (arbitraire) dans OceanWave3D (typiquement 6 ou 8).

La figure 2.6 présente le résultat final de cette étude où on a cherché les paramètres numériques optimaux dans les deux solveurs afin d'obtenir la précision désirée. On présente dans cette figure les résultats en termes d'efficacité comparée des modèles pour i) la précision sur l'évaluation de la vitesse verticale à la surface libre (dénotée  $\tilde{w}$  dans la

figure) et ii) la précision sur le déphasage obtenu après 1000 périodes de propagation.

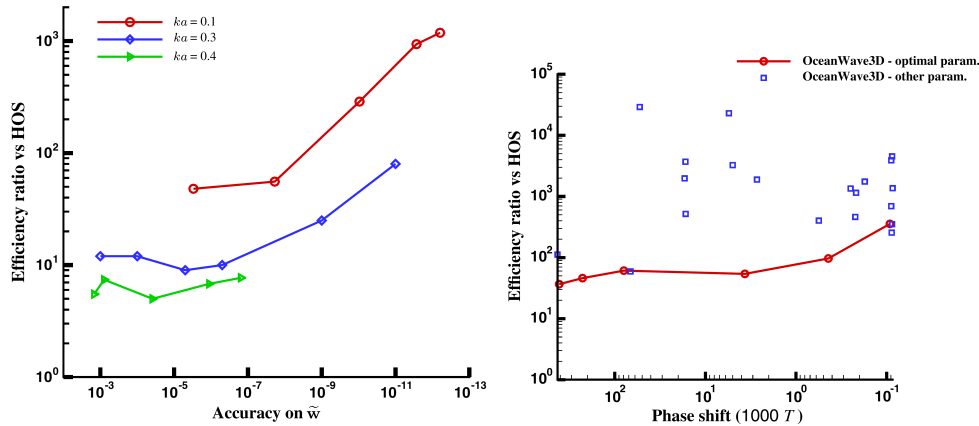


FIGURE 2.6 – Efficacité comparée entre OceanWave3D et HOS-ocean en fonction de la précision sur la vitesse verticale à la surface libre (gauche) et le déphasage observé après une propagation de 1000 périodes (droite). (Figure issue de [? ])

La méthode HOS apparaît donc comme toujours plus efficace que la méthode OceanWave3D et ce, quelle que soit la précision sur la vitesse verticale. Les caractéristiques de la vague propagée a une influence significative sur l'efficacité comparée des deux méthodes. Pour les vagues très proche du déferlement ( $ka = 0.4$ ), la méthode HOS est environ 7 fois plus rapide alors que pour des cambrures modérées, la différence d'efficacité atteint 2 à 3 ordres de grandeurs. Concernant l'erreur sur le déphasage, le comportement est identique au précédent avec une augmentation des différences entre les deux modèles (*i.e.* une méthode HOS encore plus efficace en comparaison). Finalement, à noter que différentes profondeurs relatives ont également été testés dans [? ], avec  $kh \in [0.5; 2\pi]$  sans influence notable.

En résumé, plus la précision demandée est importante, plus le modèle HOS-ocean est avantageux vis à vis du modèle OceanWave3D. L'augmentation de la non-linéarité de la houle tend à réduire cette différence, avec toujours cependant au moins un ordre de grandeur d'efficacité entre les deux modèles. J'indique ici que cette comparaison est *a priori* la plus avantageuse du point de vue de la méthode HOS. En effet, on ne tire pas partie de la flexibilité géométrique inhérente à la méthode basée sur une discrétisation volumique tel qu'OceanWave3D. Ces résultats ne sont donc pas surprenants mais permettent une comparaison quantitative de deux approches potentielles non-linéaires et mettre en lumière l'intérêt de l'approche choisie.

Cette première section nous a donc permis de démontrer l'efficacité de la méthode HOS dans sa version originelle par rapport aux autres méthodes potentielles non-linéaires, dans leurs versions les plus avancées. Cette efficacité se fait au détriment de la flexibilité en termes de géométrie et limite donc les configurations d'application de cette méthode. On s'intéressera donc dans la suite de ce chapitre à étendre les domaines d'applications de la formulation HOS, que ce soit en termes de configuration géométrique ou de phénomènes physiques pris en compte par le modèle.

## 2.3 Extension à un bassin de houle

Le LHEEA dispose d'installations expérimentales en hydrodynamique de grandes dimensions, et en particulier de différents bassins d'essais équipés de générateurs de vagues : un bassin de traction ( $140m \times 5m \times 3m$ ), un Bassin de Faible Profondeur (BFP) ( $20 \times 9.5m \times 1m$ ) et un Bassin de Grande Profondeur BGP ( $50m \times 30m \times 5m$ ). La configuration d'un tel bassin d'essais (voir par ex la figure 2.7 présentant un schéma du BGP) apparaît comme assez différente de celle traitée dans la section précédente. En particulier, les simples conditions de périodicité imposées dans le plan horizontal ne sont pas réalistes et la génération des vagues à l'aide d'un batteur n'est pas accessible. Or, il est de grand intérêt de pouvoir reproduire cette configuration expérimentale du point de vue numérique pour par exemple

- i) valider la méthode numérique (voir paragraphe 2.3.3),
- ii) comparer exactement des essais d'interactions houle-structure avec sa modélisation numérique (voir chapitre 3),
- iii) préparer en amont des campagnes expérimentales (voir section 4.3.2).

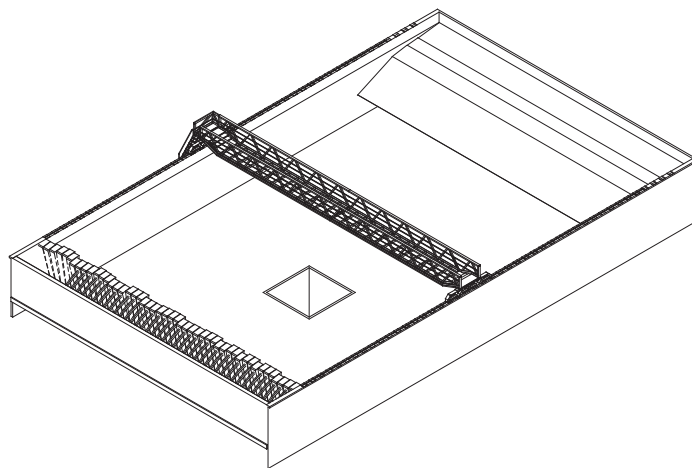


FIGURE 2.7 – Schéma du Bassin de Grande Profondeur de l'ECN

L'extension de la formulation HOS originelle [? ?] au cas d'un bassin de houle a été initiée préalablement au début de ma thèse lors de celles de D. Le Touzé [?] et F. Bonnefoy [?]. Ceci a été fait suite au développement au sein du LHEEA d'un autre bassin de houle numérique (NWT pour Numerical Wave Tank) au second-ordre complet dénommé SWEET [? ?]. L'objectif était donc d'améliorer la précision de la résolution du problème en utilisant la non-linéarité complète sur la surface libre permise par la méthode HOS.

Ma contribution principale à ce modèle HOS-NWT a été d'améliorer la prise en compte de la génération de houle, en parallèle des améliorations sur le cœur de la formulation HOS présentées précédemment. J'ai ensuite réalisé de nombreux cas de validation et d'application avec ce modèle (section 2.3.3). Enfin, à noter que j'ai effectué des développements purement numériques, comme la parallélisation du code ou sa mise en open-source, comme cela sera détaillé dans la section 2.7.



### 2.3.1 Formulation

#### Base de fonctions

Dans la configuration NWT, le domaine fluide  $D$  est toujours considéré rectangulaire dans le plan horizontal avec une profondeur constante  $h$ , mais les frontières latérales sont désormais des murs parfaitement réfléchissants (*i.e.* avec une vitesse normale nulle). Les conditions aux limites dans le plan horizontal deviennent donc

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x = 0, y, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x = L_x, y, z, t) = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = 0, z, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y = L_y, z, t) = 0 \quad (2.25)$$

Cette modification des conditions aux limites impose un changement de la base de fonctions  $\psi_{pq}(\mathbf{x}, z)$  adaptée à la résolution du problème (*i.e.* satisfaisant de par leur choix l'équation de Laplace (2.1), associée aux conditions aux limites au fond Eq. (2.4) et dans le plan horizontal Eqs. (2.24) & (2.25)). Le potentiel des vitesses est décomposé sur cette nouvelle base

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, z, t) &= \sum_p \sum_q A_{pq}(t) \psi_{pq}(\mathbf{x}, z) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq}(t) \frac{\cosh[k_{pq}(z+h)]}{\cosh[k_{pq}h]} \cos(k_p x) \cos(k_q y) \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec  $k_p = \frac{p\pi}{L_x}$  et  $k_q = \frac{q\pi}{L_y}$  les nombres d'onde dans les deux directions principales  $x$  et  $y$  respectivement. La norme du vecteur d'onde est définie par  $k_{pq} = \sqrt{k_p^2 + k_q^2}$ . Les quantités surfaciques d'intérêt sont représentées également sur cette base

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \sum_p \sum_q B_{pq}^\eta(t) \cos(k_p x) \cos(k_q y) \quad (2.27)$$

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \sum_p \sum_q B_{pq}^{\phi^s}(t) \cos(k_p x) \cos(k_q y) \quad (2.28)$$

Ce choix de base permet toujours l'utilisation de FFTs pour passer de l'espace physique à l'espace modal.

#### Modélisation du batteur de houle

Dans le cas d'un bassin de houle, les conditions initiales sont différentes du cas périodique traité précédemment. En effet, on part cette fois d'un état initial au repos

$$[\eta; \phi^s](\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{0}$$

Les vagues sont générées par la présence d'un batteur de houle, *i.e.* une frontière mobile dans notre domaine de calcul. On considèrera ici uniquement le cas où le(s) batteur(s) est(sont) situé(s) sur la frontière gauche, l'extension à des batteurs sur plusieurs frontières étant possible [? ].

La difficulté vient du fait que l'on a choisi une condition homogène sur la frontière gauche en  $x = 0$  (Eq. 2.24) afin de pouvoir décomposer nos inconnues sur une base de fonctions adaptée à la modélisation numérique. Si un générateur de houle est présent sur ce mur, cette méthode ne semble pas adaptée. En effet, la condition aux limites à imposer au niveau du batteur (dont la position est donnée par  $x = X(y, z, t)$ ) est maintenant

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial t} + (\nabla_v X) \cdot (\nabla_v \phi) \quad (2.29)$$

avec  $\nabla_v = \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ .

La méthode adoptée est alors de décomposer la solution totale du problème de génération et de propagation de vagues en deux parties [? ] sous la forme

$$\phi = \phi_{spec} + \phi_{add} \quad (2.30)$$

avec  $\phi_{spec}$  le potentiel solution dans le bassin de géométrie fixe avec sa surface libre (*i.e.* condition homogène en  $x = 0$ ) et  $\phi_{add}$  le potentiel additionnel prenant en compte uniquement la condition aux limites du batteur de houle (Eq. (2.29), sans conditions de surface libre).

Il est alors possible de résoudre à chaque pas de temps un problème pour le potentiel additionnel, en supposant connu le mouvement du batteur utilisé lors des expériences. La spécificité de l'approche développée à l'ECN [? ? ] réside dans un choix judicieux du domaine de résolution de ce problème additionnel (voir figure 2.8). Ce dernier a été choisi afin de pouvoir résoudre le problème additionnel de manière pseudo-spectrale (*i.e.* identiquement au problème de surface libre).

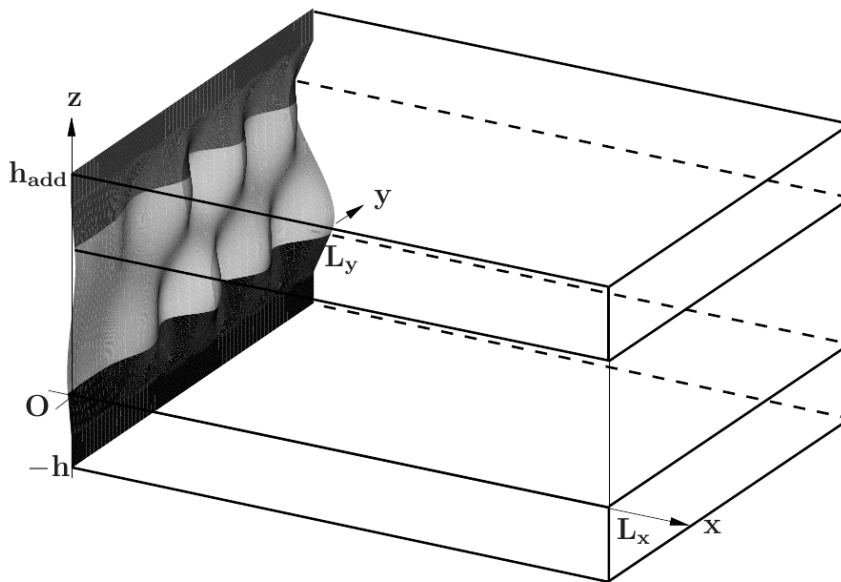


FIGURE 2.8 – Domaine de calcul du potentiel additionnel dans HOS-NWT

Une fois le problème additionnel résolu, il est possible d'utiliser la solution (*i.e.* le potentiel additionnel  $\phi_{add}$ ), dans le problème complet. Ce dernier est réécrit avec pour

inconnue le seul potentiel  $\phi_{spec}$  dans une géométrie fixe et avec une condition homogène en  $x = 0$ . Le potentiel additionnel apparaît alors comme terme de forçage dans les deux conditions de surface libre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) W - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta - \nabla \phi_{add} \cdot \nabla \eta + \frac{\partial \phi_{add}}{\partial z} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \\ &\quad - \nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_{add}|^2 - \frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec  $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi_{spec}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$ . Ces deux conditions de surface libre peuvent alors être avancées en temps en suivant la procédure classique de la méthode HOS qui permet l'évaluation de la vitesse verticale  $W = \frac{\partial \phi_{spec}}{\partial z}(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$ .

La procédure mise en place permet de prendre en compte la vraie géométrie du batteur physique (*i.e.* pour le BGP une série de batteurs volet indépendants comme représenté sur la figure 2.7) ainsi que les lois de contrôle utilisées pendant les essais expérimentaux (rampe en temps au début de la génération par exemple).

### Modélisation de la plage absorbante

Afin d'absorber les vagues générées par le batteur lorsqu'elle atteignent le mur opposé (et reproduire ainsi la plage absorbante présente dans le bassin de houle physique), il convient d'inclure un terme dissipatif dans les conditions de surface libre. Ceci est fait par l'ajout d'un terme dans la condition dynamique de surface libre, représentant une modification locale de la pression au niveau de la surface libre de la forme :  $p_a = \rho \nu(\mathbf{x}) \vec{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n}$  avec  $\mathbf{n}$  la normale à la surface libre. La condition dynamique de surface libre devient donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^s}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \\ &\quad - \nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add} - \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \phi_{add}|^2 - \frac{\partial \phi_{add}}{\partial t} \boxed{-\nu \frac{\partial \eta}{\partial t}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Le coefficient d'absorption  $\nu(\mathbf{x})$  a été paramétrisé dans le cas du BGP [?] pour représenter au mieux les performances réelles de la plage et permettre des comparaisons précises sur de grandes échelles de temps (incluant donc de la réflexion).

### 2.3.2 Amélioration de la génération de houle

Dans la version initiale du solveur HOS-NWT (sur laquelle j'ai commencé ma thèse), la prise en compte du batteur de houle était faite de manière linéaire (*i.e.* la condition aux limites (Eq. (2.29)) était linéarisée) afin d'obtenir facilement l'expression du potentiel additionnel dans son domaine de définition (figure 2.8).

Le modèle résultant (CSL non-linéaires et batteur linéaire) a été validé grâce à différentes campagnes expérimentales [?]. On indiquera en particulier : i) des simulations de houle irrégulière unidirectionnelle qui ont montré l'apport conséquent en terme de précision de la prise en compte des non-linéarités de surface libre par comparaison avec

le modèle au second-ordre complet SWEET [? ? ] et ii) des simulations de houle directionnelle focalisée démontrant la possible utilisation pratique du code (temps de calcul, précision) sur des configurations réalistes complexes.

La possible amélioration de la précision de ce modèle a constitué une part significative de mes travaux de recherches au début de ma carrière. Je présente brièvement dans la suite la méthodologie adoptée et la section suivante sera dédiée à la présentation de cas d'application du modèle amélioré.

### Développement en ordre de la condition batteur

Afin d'accroître la précision du bassin de houle numérique HOS-NWT, il a semblé intéressant d'améliorer la prise en compte du système de génération de houle. En effet, la linéarisation du mouvement de celui-ci peut s'avérer restrictive dans certaines configurations où les mouvements du batteur de houle sont importants.

On a donc choisi de poursuivre le développement en ordre de la condition à la limite au niveau du batteur pour prendre en compte une partie des non-linéarités associées. Comme indiqué précédemment, ce dernier était limité au premier ordre dans la version initiale du modèle et il a été étendu jusqu'au troisième ordre de non-linéarité.

Pour réaliser ce développement en ordre, j'ai pu m'appuyer sur le modèle SWEET [? ? ] qui permet une résolution consistante du problème jusqu'au deuxième ordre de non-linéarité (conditions de surface libre et condition sur le batteur). Ensuite, j'ai étendu le développement en ordre de la condition sur le batteur jusqu'au troisième ordre de non-linéarité. La résolution apparaît possible (sans problème de sécularité comme sur la surface libre), cette condition à la limite étant uniquement fonction des solution aux ordres précédents.

### Algorithmique / Temps de calcul

Pour récapituler, la figure 2.9 décrit schématiquement l'algorithme de résolution pour le modèle HOS-NWT avec condition au batteur étendue au 3<sup>ème</sup> ordre. L'algorithme peut être simplifié dans le cas où la non-linéarité au batteur est limité aux ordres inférieurs.

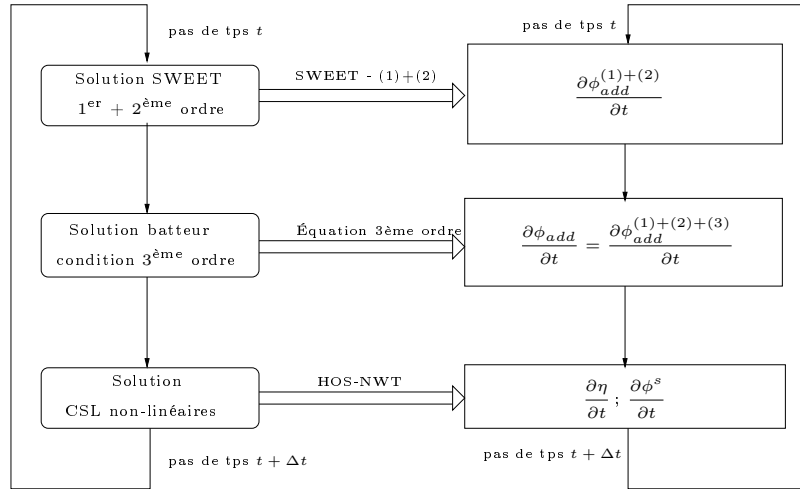
Concernant le temps de calcul, la résolution du problème additionnel engendre un surcoût par rapport à la résolution dans la méthode originelle (équation (2.23)). Ce dernier est estimé à

$$T_{CPU_{add}} \simeq \mathcal{O}(\alpha N_y N_z \log_2 [N_y N_z] + \beta N \log_2 [N] + \gamma N N_y N_z) \quad (2.34)$$

avec  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dépendant du choix des paramètres numériques du modèle et de l'ordre de non-linéarité du batteur.

### 2.3.3 Exemples d'application

Dans cette partie, on présentera quelques cas d'application du modèle HOS-NWT, afin d'en présenter les caractéristiques principales en terme de propriétés numériques et de cas d'applications accessibles.

FIGURE 2.9 – Algorithme modèle HOS-NWT, batteur 3<sup>ème</sup> ordre

### Convergence

Afin de démontrer les propriétés de convergence du modèle de bassin de houle numérique, on s'intéresse à un cas d'application classique. On définit un état de mer unidirectionnel correspondant à un spectre de Bretschneider avec un longueur d'onde au pic  $\lambda_p = 3 \text{ m}$  et une hauteur significative  $H_s = 7.7 \text{ cm}$  ( $H_s/\lambda_p = 0.0256$ ) généré dans un bassin de houle de longueur  $50 \text{ m}$  et de profondeur  $5 \text{ m}$  (BGP de l'ECN). On enregistre l'élévation de surface libre au cours du temps à un point au milieu du bassin. On définit une erreur globale  $\varepsilon$  sous la forme

$$\varepsilon_\eta = \frac{\int_t |\eta_{sonde}(t) - \eta_{sonde}^{ref}(t)| dt}{\int_t |\eta_{sonde}^{ref}(t)| dt} \quad (2.35)$$

avec  $\eta_{sonde}(t)$  le signal de la sonde pour la discrétisation étudiée et  $\eta_{sonde}^{ref}(t)$  le signal numérique de référence. Ce dernier a été obtenu avec pour paramètres numériques :  $N_x = 2048$ ,  $N_z = 512$  modes verticaux sur le batteur et un ordre HOS (surface libre)  $M = 10$ . Les résultats de la convergence avec le nombre de points/modes dans la simulation  $N_x$  est donné sur la figure 2.10. Ces résultats ont été obtenus avec  $N_z = N_x/4$  et  $M = 8$ .

La convergence du modèle HOS-NWT est très clairement démontrée. On a ajouté sur cette figure une droite correspondant à un ordre de convergence de 2.1, correspondant au comportement numérique observé. Ce résultat peut paraître surprenant au vu du comportement de convergence observé sur le coeur de la méthode HOS (voir figure 2.3). Cependant, cette dégradation des propriétés de convergence s'explique par la configuration bassin qui inclut une régularité moindre de la fonction décrite sur la base des modes propres du bassin (prolongement pair de la fonction). On peut démontrer [? ?] que l'ordre de convergence est au moins égal à 2, ce qui est bien le cas ici.

En complément des propriétés numériques du solveur HOS-NWT, il est intéressant d'étudier l'influence de l'ordre de non-linéarité du batteur sur la précision de la solution. Il apparaît que dans la version originelle du modèle (avec un batteur 1<sup>er</sup> ordre, une erreur

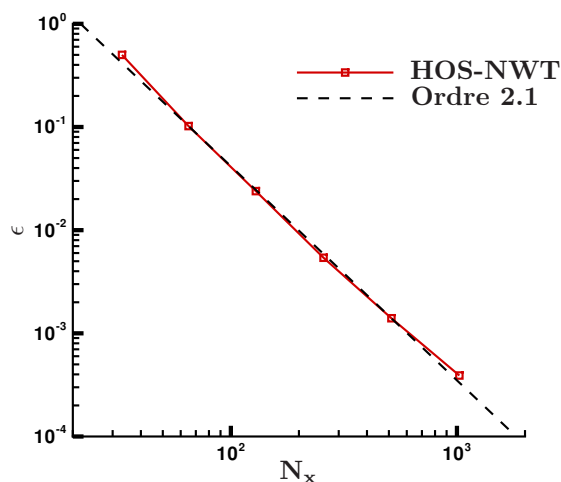


FIGURE 2.10 – Convergence des résultats HOS-NWT par rapport au nombre de points  $N_x$

sur le volume global de la simulation était introduit (conséquence directe de la linéarisation de la condition au niveau du batteur). La figure 2.11 présente l'influence de l'ordre de non-linéarité du batteur sur cette erreur de volume. Le cas test est celui de la génération d'une houle régulière de cambrure  $ka = 0.20$  dans le bassin océanique de l'ECN.

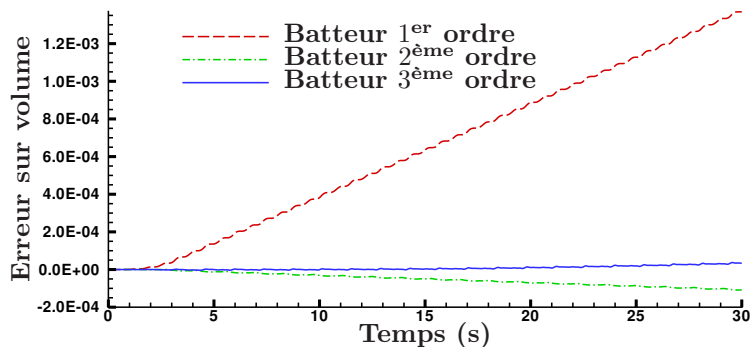


FIGURE 2.11 – Erreur sur le volume du modèle HOS-NWT en fonction de l'ordre de non-linéarité du batteur. Houle régulière  $ka = 0.20$ ,  $N_x = 513$ ,  $N_z = 65$  et  $M = 5$

On observe une amélioration spectaculaire de l'erreur induite sur le volume, montrant l'intérêt évident de la prise en compte de ces non-linéarités. On comparera également dans le cas-test suivant les différents modèles de prise en compte du batteur pour indiquer son influence sur la précision finale dans un cas d'application.

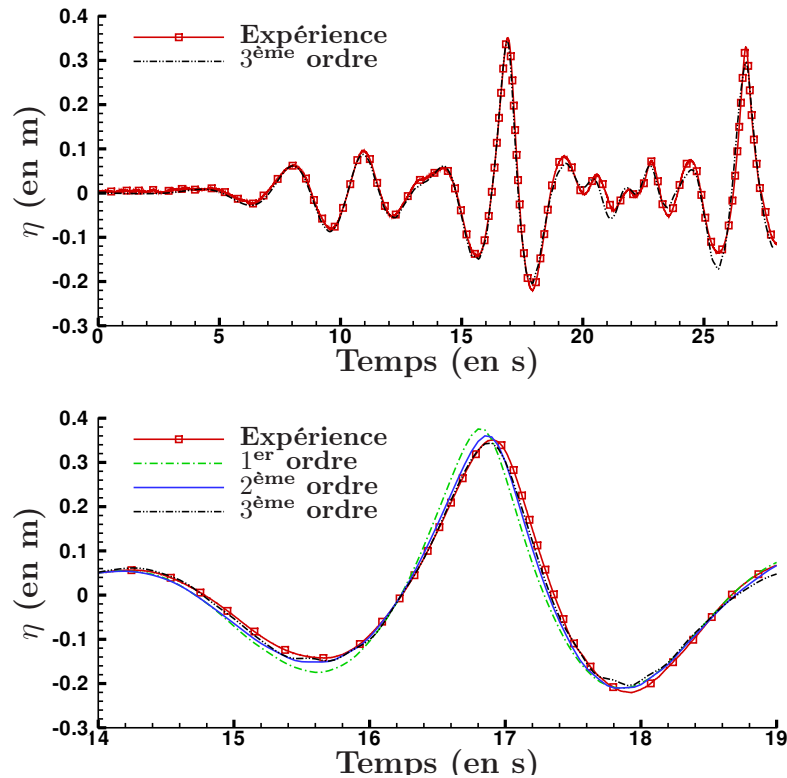


FIGURE 2.12 – Houle focalisée uni-directionnelle, signaux temporels de sondes à houle à la position de focalisation  $x_f$  - Comparaison expérience et modèle HOS-NWT avec différents ordres de non-linéarité batteur.

### Paquet de vagues focalisé - houle unidirectionnelle

On s'intéresse au cas plus complexe d'un paquet de vagues focalisé, superposé avec une houle irrégulière. Dans cette configuration, les effets non-linéaires seront plus significatifs. Une série d'expériences a été menée dans le bassin océanique de l'ECN dans ce cadre et on choisit de reproduire la configuration suivante

- Etat de mer irrégulier défini par un spectre de Bretschneider avec  $H_s = 0.35 \text{ m}$  et  $T_p = 3.13 \text{ s}$
- Paquet de vague focalisé obtenu à l'aide d'un spectre de Bretschneider avec  $H_s = 0.0525 \text{ m}$  et  $T_p = 3.13 \text{ s}$  dont les phases ont été ajustées pour créer un évènement focalisé à la position d'une sonde de mesure  $x_f = 16.1 \text{ m}$  et un temps  $t_f = 17 \text{ s}$ .

La figure 2.12 présente la comparaison entre les expériences et les simulations numériques de l'élévation de surface libre à la position de la focalisation  $x_f$ . Les simulations ont été réalisées avec  $N_x = 513$  modes sur la surface libre,  $N_z = 129$  modes sur le batteur et un ordre de non-linéarité HOS  $M = 5$ . On compare ici l'influence des non-linéarités associées à la génération de houle.

On remarque tout d'abord l'excellent accord sur l'ensemble de la simulation (durée 30 s) du modèle HOS-NWT (haut de la figure). Sur cette vue générale, les différences entre les trois modèles de génération sont difficilement discernables et on ne présente donc que

la génération 3<sup>ème</sup> ordre. La partie inférieure présente un zoom sur l'évènement focalisé. On se rend compte que le batteur 1<sup>er</sup> ordre ne réussit pas à capter correctement le creux précédent cet évènement et que dans cette configuration, la prise en compte des non-linéarités associées à la génération est essentielle si on veut une grande précision.

En complément, on peut quantifier l'erreur globale  $\varepsilon_\eta$  faite sur le signal de sonde (Eq. (2.35)) et mettre en avant l'importance d'une modélisation précise du dispositif de génération des vagues :

- HOS-NWT, batteur 1<sup>er</sup> ordre : 18.8%
- HOS-NWT, batteur 2<sup>ème</sup> ordre : 13.7%
- HOS-NWT, batteur 3<sup>ème</sup> ordre : 9.5%

### Paquet de vagues focalisé avec directionnalité

Afin de démontrer les capacités du modèle développé, le dernier cas-test étend la configuration précédente au cas directionnel. On superpose donc deux composantes, mais qui sont cette fois-ci directionnelles et définies par un spectre de Pierson-Moskowitz :

$$S(f, \theta) = \frac{5H_s^2}{4f_p} \left(\frac{f}{f_p}\right)^5 \exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{f}{f_p}\right)^4\right] \cos^s \theta \quad (2.36)$$

Pour ce cas d'application, la période de pic est  $T_p = 1/f_p = 2$  s et la hauteur significative  $H_s = 0.05$  m. L'étalement directionnel est donné par  $s = 20$  et les phases sont ajustées afin de produire un évènement focalisé à la position  $x_f = 24.6$  m et  $y_f = 14.3$  m à un temps  $t_f = 70$  s. La méthode de Dalrymple [?] est utilisée pour la génération directionnelle en bassin de houle. La figure 2.13 présente des vues de la surface libre du bassin à différents instants jusqu'à la focalisation.

On observe la forme typique d'un champ de vagues directionnel focalisant, à savoir des vagues concentriques avec des ondes courtes en amont des vagues plus longues (figure 2.13 a, b et c). Ensuite, à  $t = 70$  s on observe l'évènement focalisé, qui présente une cambrure modérée ( $H/\lambda \simeq 5\%$ ). La figure 2.14 présente la comparaison directe avec l'expérience à l'aide d'un réseau de différentes sondes situées au niveau de la position de focalisation (sonde a du réseau) et autour de celui-ci afin de caractériser la forme de l'évènement.

La comparaison est très précise sur l'ensemble des sondes du réseau, permettant de s'assurer de la reproduction précise de la forme de l'évènement. La différence entre l'expérience et les simulations numériques est de moins de 4 % sur l'ensemble des sondes du réseau.

### 2.3.4 Conclusion-perspectives

En résumé, j'ai donc participé activement au développement numérique et à la validation du modèle HOS dans sa configuration bassin de houle. J'ai ensuite pris la responsabilité de cet outil au sein du LHEEA, depuis ma prise de poste en tant que Maître de Conférences. J'ai travaillé principalement à :

- l'amélioration des capacités du modèle, tant d'un point de vue numérique (par ex. schéma d'avance en temps) que du point de vue de la modélisation physique



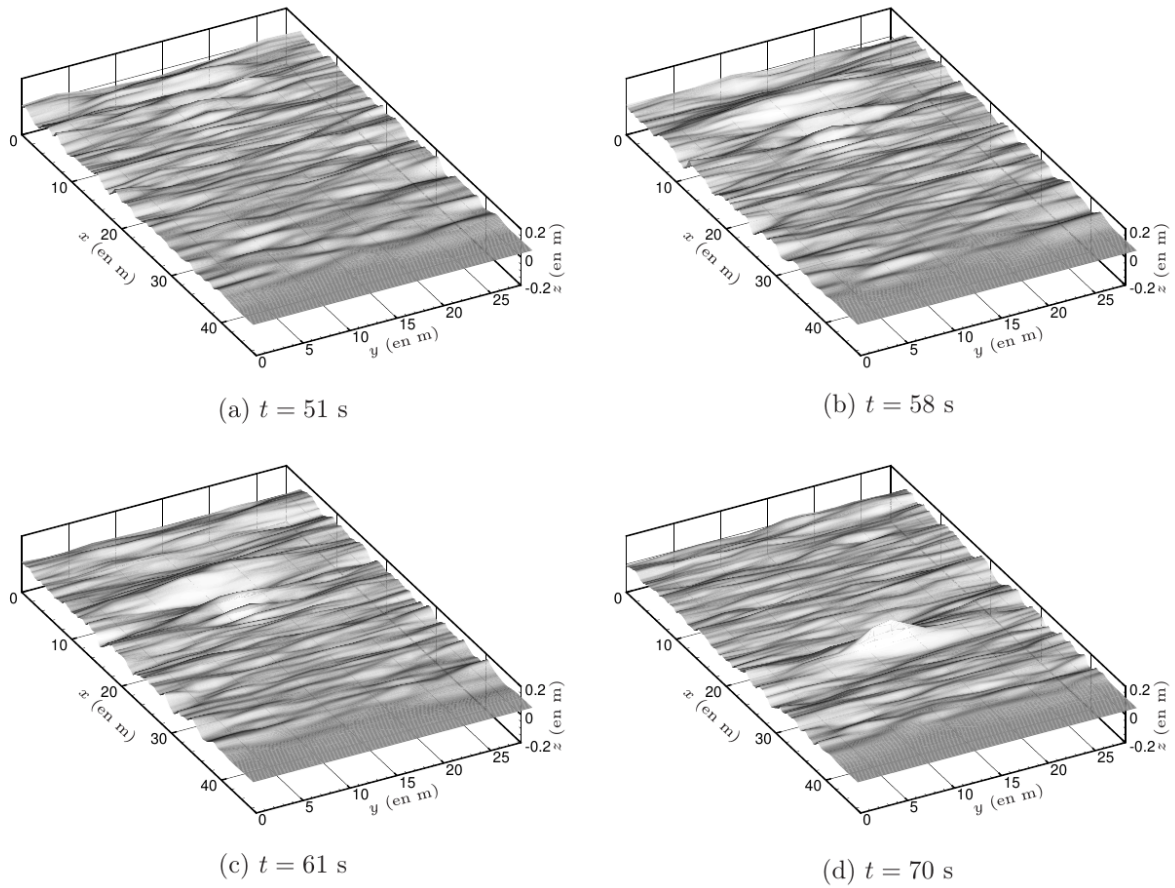


FIGURE 2.13 – Vues 3-D de la focalisation directionnelle à différents instants

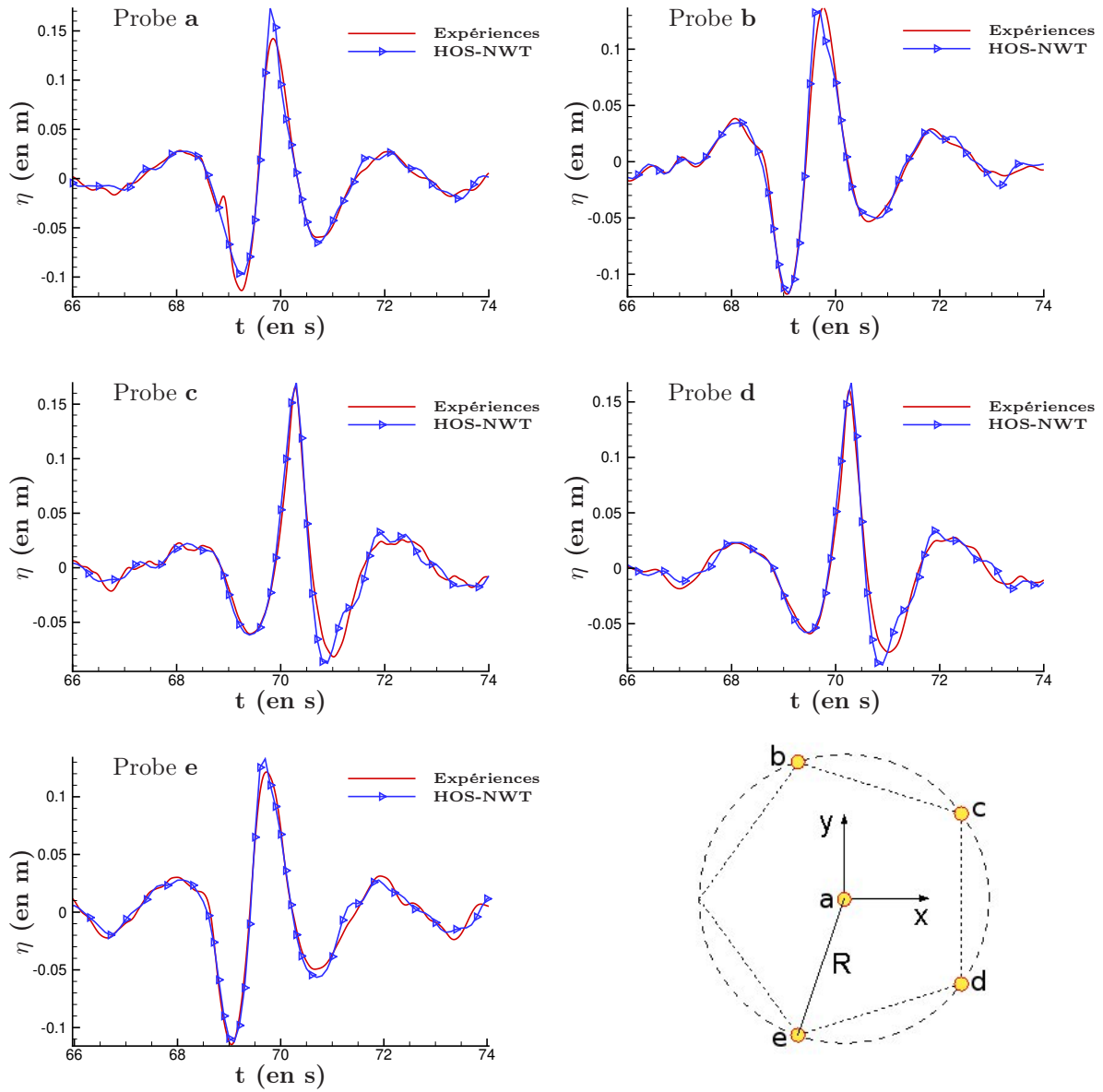


FIGURE 2.14 – Signaux temporels expérimentaux et numériques des différentes sondes localisées près de l'évènement focalisé

du problème avec la prise en compte des non-linéarités associées au processus de génération des vagues

- la validation académique du modèle et de ses propriétés numériques
- l'application du modèle à des configurations diverses

L'utilisation du modèle HOS-NWT est désormais routinière au sein du LHEEA pour une grande variété d'applications. On reviendra par la suite dans les chapitres 3 & 4 sur l'utilisation du modèle dans diverses configurations. Il s'agit donc d'un modèle désormais mature qui a été diffusé en open-source à la communauté et est donc dorénavant également utilisé par de nombreux laboratoires de recherches ou départements R& D à travers le monde. On reviendra sur cette étape du développement dans la partie 2.7.

Cependant, ce modèle admet toujours un certain nombre de limitations qu'il convient de détailler. Ces limitations peuvent être vues comme des pistes de futures recherches à mener :

- La génération de houle a été largement améliorée comme détaillé précédemment. Cependant, cette amélioration repose sur un développement en ordre de la condition sur le batteur. Ce dernier peut parfois s'avérer défaillant, en particulier lorsque les mouvements batteurs sont très importants. On a donc pu rencontrer des configurations où ce développement en ordre n'est pas convergent et où la reproduction précise d'essais est complexe. Pratiquement, on utilise la condition batteur développée au 2<sup>nd</sup> ordre de non-linéarité. Diverses pistes d'amélioration ont été envisagées
  - (i) Lors de ma thèse [? ], j'ai proposé et testé une résolution à l'aide d'itérations non-linéaires jusqu'à possible convergence de la condition non-linéaire sur le batteur (Eq. (2.29)). Cette convergence s'avère lente et pas toujours réalisable dans les cas avec de grands mouvements du batteur.
  - (ii) Dans le formalisme que l'on verra dans la partie suivante 2.4, on modifie une condition à la limite inhomogène de Neumann en une série de problèmes homogènes. L'idée a été d'étendre ce formalisme au cas de la génération de houle, ce qui s'est révélé a priori impossible [? ].
  - (iii) Un couplage de méthodes pourrait être envisagé entre une approche potentielle non-linéaire (volumique ou BEM) qui traite le problème de la génération de façon complètement non-linéaire et le modèle HOS pour la propagation effective (et efficace) de ces vagues générées.
- Le modèle est limité à des vagues non-déferlantes de par le formalisme potentiel. Or, lors de l'étude d'état de mers cambrés, des événements déferlants peuvent avoir lieu. Le choix est fait dans le modèle HOS-NWT de maîtriser parfaitement le schéma numérique utilisé et donc de ne pas utiliser de procédure de filtrage, lissage ou autre. Ceci implique que la présence de déferlement provoque un arrêt du code de calcul.
  - (i) A cet effet, un modèle de déferlement a été développé à cet effet et sera détaillé dans la section 2.6
- La configuration géométrique est limitée à un bassin rectangulaire avec un fond plat et ne prend pas en compte la présence d'un courant. Ces caractéristiques peuvent être rencontrées dans certaines installations expérimentales et seraient donc intéressantes à avoir à disposition, notamment à l'ECN dans le cadre des futures extensions des bassins (projet NEMO).

- (i) On verra dans les sections 2.4 & 2.5 les extensions proposées en terme de modélisation numérique dans ces deux directions.
  - (ii) On pourrait également envisager la prise en compte de batteurs sur plusieurs murs latéraux où d'étudier une configuration de bassin circulaire (cf. bassin FloWave).
- Le temps de calcul s'avère possiblement important pour traiter des configurations 3D de grande taille où sur des temps longs. Ceci peut s'avérer limitant dans le cadre d'étude systématiques à réaliser dans de telles configurations.
1. des optimisations algorithmiques sont sans doute possible et pourront être réalisées dans le futur.
  2. l'utilisation des architectures type super-calculateur pourraient être intéressantes. Des travaux vers la parallélisation du code seront détaillés dans la section 2.7.

## 2.4 Extension à la bathymétrie variable

L'approche pseudo-spectrale utilisée dans le modèle HOS s'est montrée très efficace d'un point de vue numérique par rapport à d'autres approches de résolution plus classiques [? ]. Cependant, comme on l'a indiqué précédemment, cette efficacité se fait au détriment de la flexibilité en terme de géométrie accessible à la modélisation. Des méthodes spécifiques ont alors été développées afin de pouvoir traiter avec succès le cas d'un bassin de houle dans la section 2.3 précédente. On va chercher dans cette partie à étendre à nouveau le domaine d'application du modèle HOS, afin de pouvoir s'intéresser à la modélisation de la propagation des états de mer dans des domaines où la bathymétrie est variable en espace.

Cette problématique est d'intérêt aussi bien du point de vue de la recherche fondamentale afin d'identifier par exemple les processus responsables des événements extrêmes dans de telles configurations (voir chapitre 4) que du point de vue de la recherche technologique afin d'aider au design des structures marines implantées dans ces zones géographiques. L'enjeu industriel est particulièrement important dans le cadre du développement des EMR qui ont vocation à être installées dans des zones avec des profondeurs d'eau limitées. La description fine des conditions environnementales dans ces zones est donc primordiale comme source de chargement hydrodynamique mais également afin d'estimer la ressource disponible dans le contexte de l'énergie des vagues.

Les méthodes numériques permettant de résoudre précisément et efficacement les interactions houle-structure dans des domaines où la profondeur d'eau est potentiellement variable sont encore dans leur phase de maturation au niveau académique. Un effort de recherche substantiel est donc nécessaire pour préparer le développement de tels outils jusqu'à une possible utilisation par la filière navale et EMR (notamment à l'échelle locale du site nantais). C'est dans ce cadre que s'est mise en place la Chaire de Recherche 'SimAvHy' (Simulation Avancée en Hydrodynamique) financée par l'IRT Jules Verne (dans le cadre du PIA).

Au sein de cette Chaire de Recherche, j'étais responsable d'un WP autour de la modélisation d'états de mer. L'objectif principal était de développer une méthodologie permettant la description des états de mer en profondeur variable. Le modèle se devait de pouvoir simuler d'un point de vue déterministe et non-linéaire la propagation de champs de vagues dans des zones géographiques d'étendue conséquentes (plusieurs centaines de  $km^2$ ). Les quelques modèles existants pour traiter cette problématique sont principalement limités par leur efficacité numérique qui les rend inapplicables d'un point pratique (ressources mémoires et temps de calcul prohibitifs).

L'approche utilisée a donc été d'essayer de garder le cadre du formalisme pseudo-spectral HOS pour y incorporer la présence d'une bathymétrie variable. Si on est capable de mettre en œuvre une telle approche, tout en conservant les propriétés numériques du modèle HOS originel, on espère développer une méthode précise et efficace pour traiter cette problématique. L'idée est ensuite de pouvoir coupler le modèle de description de l'environnement avec un solveur pour l'interaction houle-structure (voir chapitre 3 pour plus de détails). Ces recherches ont été menées principalement dans le cadre de la thèse de Maïté Gouin [? ], soutenue en 2016.

L'approche utilisée pour la prise en compte d'un fond variable en espace dans le modèle HOS s'est appuyée sur des études existantes, limitées à des cas d'application simples unidirectionnels : i) le travail original de [? ] dans un formalisme HOS, limité à de faibles variations de la profondeur et ii) les recherches menées en ce sens avec le formalisme DNO [? ? ? ], équivalent au formalisme HOS [? ].

Le travail a donc porté sur la dérivation dans un formalisme HOS des différentes approches, leurs validations en termes de propriétés numériques de convergence et de domaine d'applicabilité et enfin l'application de ce modèle à des configurations réalistes. L'objectif est de démontrer la possible application pratique de la méthode à la modélisation d'états de mer en zone côtière, pour possiblement à terme conduire des simulations de l'interaction houle-structure dans cette configuration.

## 2.4.1 Méthode HOS et algorithmes

### Formulation du problème

Dans cette section, on se place dans la configuration océanique de la modélisation de houle avec des conditions aux limites périodiques dans le plan horizontal. Cependant, d'un point de vue formel, il est tout à fait possible d'étendre les développements présentés à la configuration bassin de houle (HOS-NWT, présenté précédemment).

On reprend donc la formulation du problème telle que décrite dans la section 2.2. La modification principale vient du changement apporté au domaine de résolution qui est maintenant défini comme représenté sur la figure 2.15. A savoir, la profondeur est désormais définie comme variable en espace par  $h(\mathbf{x})$ . Cette dernière est décomposée en une profondeur moyenne  $h_0$  et une variation de profondeur  $\beta(\mathbf{x})$  sous la forme  $h(\mathbf{x}) = h_0 - \beta(\mathbf{x})$ .

Le domaine de calcul  $D$  est désormais défini par des frontières verticales et par  $-h_0 + \beta(\mathbf{x}) \leq z \leq \eta(\mathbf{x}, t)$  et le système d'équations à résoudre est le même que le précédent : équation de Laplace dans le domaine, conditions cinématique et dynamique de surface libre, conditions de périodicité (Eqs. (2.1) à (2.6)), la seule différence étant dans

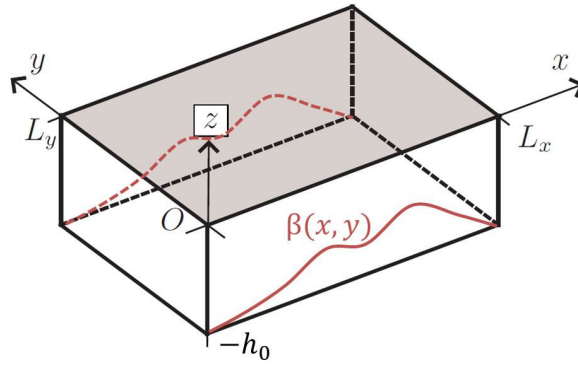


FIGURE 2.15 – Schéma du domaine de résolution en profondeur variable : profondeur moyenne  $h_0$  et variation de bathymétrie  $\beta(\mathbf{x})$ .

la condition au fond qui devient

$$\nabla\phi \cdot \nabla\beta - \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(\mathbf{x}) \quad (2.37)$$

### Expression du potentiel des vitesses

La méthode HOS doit nous permettre d'obtenir la vitesse verticale à la surface libre  $W(\mathbf{x}, t)$ , nécessaire pour avancer en temps les deux conditions de surface libre (Eqs. (2.7) & (2.8)). La méthode est pour l'instant identique à l'approche en fond plat, à savoir on exprime le potentiel par une méthode des perturbations :  $\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t)$ . Au niveau de la surface libre, on effectuera un développement en série de Taylor de chacun des potentiels  $\phi^{(m)}$  autour de  $z = 0$  afin d'en déduire leur expression respective (Eq. (2.13) rappelé ici)

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \phi^s(\mathbf{x}, t) \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned}$$

Afin de pouvoir satisfaire la nouvelle condition sur le fond (Eq. (2.37)), les potentiels précédents sont décomposés en la somme de deux composantes :

$$\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = \phi_{h_0}^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) + \phi_{\beta}^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) \quad (2.38)$$

Cette décomposition repose sur les considérations suivantes

- I)  $\phi_{h_0}^{(m)}$  va permettre la résolution au niveau de la surface libre, tout en satisfaisant la condition de flux nul au niveau de la position moyenne du fond  $z = -h_0$  :

$$\frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}}{\partial z}(\mathbf{x}, z = -h_0, t) = 0 \quad (2.39)$$

Cette condition nous permet de choisir de décomposer ce potentiel sur les bases de fonctions classiquement utilisées dans la méthode HOS en fond plat (Eq. (2.9)) en utilisant également la périodicité dans le plan horizontal :

$$\phi_{h_0}^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_p \sum_q A_{pq}^{(m)}(t) \frac{\cosh[k_{pq}(z + h_0)]}{\cosh[k_{pq}h_0]} \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x})$$

II)  $\phi_{\beta}^{(m)}$  doit permettre de vérifier la condition exacte sur le fond (Eq. (2.37)), tout en satisfaisant une condition de Dirichlet en  $z = 0$ . Cette dernière propriété est nécessaire afin de pouvoir séparer le problème à la surface libre du problème de la condition sur le fond variable dans la solution complète (voir algorithmes de résolution à suivre) :

$$\phi_{\beta}^{(m)}(\mathbf{x}, z = 0, t) = 0$$

Cette dernière équation, associée aux conditions de périodicité nous impose une décomposition de ce potentiel sur une autre base de fonctions :

$$\phi_{\beta}^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_p \sum_q B_{pq}^{(m)}(t) \frac{\sinh[k_{pq}z]}{\cosh[k_{pq}h_0]} \exp(i\mathbf{k}_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \cdot \mathbf{x})$$

Les décompositions précédentes, associées à l'utilisation de la condition sur le fond (Eq. (2.37)) et de l'algorithme HOS (Eq. (2.13)) va nous permettre de calculer les amplitudes modales  $B_{pq}^{(m)}(t)$  en fonction des amplitudes modales  $A_{pq}^{(m)}(t)$  à l'aide de deux approches différentes détaillées brièvement par la suite.

A noter qu'il s'agit d'un problème fortement couplé qui nécessite un traitement spécifique et adapté si l'on souhaite conserver les propriétés numériques de la méthode HOS en fond plat et notamment son efficacité numérique de par l'utilisation de FFTs. Cette contrainte est ce qui pilote les formulations présentées ci-après et notamment le fait qu'on développe la condition limite autour de la position moyenne du fond  $z = -h_0$ . On s'intéressera spécifiquement dans la section 2.4.2 aux propriétés numériques des modèles développés.

### Méthode originelle [? ]

Dans cette première approche, l'ordre de non-linéarité à la surface libre  $M$  est également utilisé pour la décomposition en ordre de la condition sur le fond. Cette dernière équation est donc tronquée à l'ordre  $M$  sous la forme

$$\sum_{m=1}^M \nabla \phi^{(m)} \cdot \nabla \beta - \sum_{m=1}^M \frac{\partial \phi^{(m)}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_0 + \beta(\mathbf{x}) \quad (2.40)$$

En rappelant que  $\phi^{(m)} = \phi_{h_0}^{(m)} + \phi_{\beta}^{(m)}$  est le potentiel total solution du problème. On suppose ensuite que  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$  et il est alors possible d'écrire un développement en série de Taylor autour de la position moyenne du fond  $z = -h_0$ .

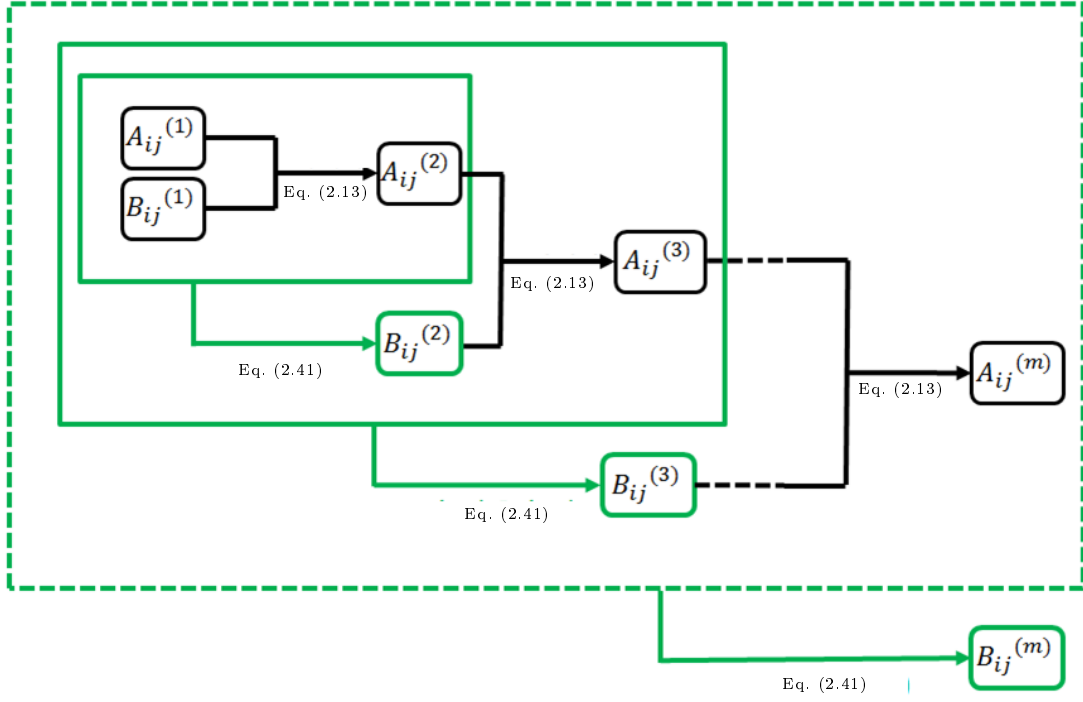


FIGURE 2.16 – Algorithme de résolution en fond variable – méthode originelle.

En rajoutant l'hypothèse que  $\mathcal{O}\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv \mathcal{O}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \equiv \mathcal{O}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)$  on identifie les termes du même ordre de grandeur  $m$  dans la condition au fond et on obtient

$$\begin{aligned}
 m = 1 & : \left[ \frac{\partial\phi_\beta^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=-h_0} = 0 \\
 m = 2 \dots M & : \left[ \frac{\partial\phi_\beta^{(m)}}{\partial z} \right]_{z=-h_0} = \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \frac{\partial\phi^{(m-l)}}{\partial x} \right]_{z=-h_0} \\
 & \quad + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\beta^l}{l!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \frac{\partial\phi^{(m-l)}}{\partial y} \right]_{z=-h_0} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi une procédure itérative permettant d'évaluer les amplitudes modales du potentiel de fond  $B_{pq}^{(m)}$  en fonction des amplitudes modales de ce même potentiel et de celui de surface libre aux ordres précédents ( $A_{pq}^{(l)}; B_{pq}^{(l)}$  avec  $l < m$ ). On peut alors schématiser l'algorithme de résolution comme sur la figure 2.16.

Une fois les différentes amplitudes modales obtenues, on peut évaluer la vitesse verticale de manière similaire à la méthode HOS en fond plat (Eq. (2.14) rappelée ici)

$$W^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1}\phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t)$$



### Méthode améliorée

Afin de possiblement améliorer les propriétés de convergence et d'efficacité de la méthode, il est possible d'utiliser deux ordres de non-linéarité différents pour la surface libre et le fond. On conservera la dénomination  $M$  pour celui à la surface libre et on utilisera  $M_b$  pour désigner celui utilisé au fond. L'intérêt principal résidera dans les cas où les besoins de représentation de ces deux parties sont a priori très différents (voir Sec. 2.4.4).

Cette approche avait été développée dans un formalisme DNO dans [? ?] et a été redéveloppé dans un formalisme HOS au cours de la thèse de M. Gouin. Par rapport à la méthode précédente, on propose la décomposition supplémentaire suivante du potentiel dû au fond

$$\phi_\beta^{(m)} = \sum_{l=1}^{M_b} \phi_\beta^{(m,l)} \quad (2.42)$$

On se base toujours sur un développement en série de Taylor autour de la position moyenne du fond  $z = -h_0$  en supposant  $\frac{\beta}{h_0} \ll 1$  et une équivalence des ordres de grandeur  $\mathcal{O}\left(\frac{\beta}{h_0}\right) \equiv \mathcal{O}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right) \equiv \mathcal{O}\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)$ . On obtient alors les termes suivant comme d'ordre de grandeur  $m$  dans la condition au fond (Eq. (2.37))

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial\phi_\beta^{(m)}}{\partial z} \right]_{z=-h_0} &= \sum_{l=1}^{M_b} \left[ \frac{\partial\phi_\beta^{(m,l)}}{\partial z} \right]_{z=-h_0} \\ &= \sum_{l=1}^{M_b} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\beta^l}{l!} \left[ \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} \right\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{M_b} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\beta^j}{j!} \left[ \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} \left( \frac{\partial\phi_\beta^{(m,l-j)}}{\partial x} \right) \right]_{z=-h_0} \right\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{M_b} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\beta^l}{l!} \left[ \frac{\partial^{l-1}}{\partial z^{l-1}} \left( \frac{\partial\phi_{h_0}^{(m)}}{\partial y} \right) \right]_{z=-h_0} \right\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{M_b} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\beta^j}{j!} \left[ \frac{\partial^{j-1}}{\partial z^{j-1}} \left( \frac{\partial\phi_\beta^{(m,l-j)}}{\partial y} \right) \right]_{z=-h_0} \right\} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Afin de parvenir à un processus itératif, on identifie dans l'équation précédente les termes du même ordre de grandeur, à savoir les amplitudes modales  $B_{pq}^{(m,l)}$  regroupent les termes d'ordre de grandeur  $\mathcal{O}(\eta^m \beta^l)$ . L'algorithme est schématisé sur la figure 2.17.

Une fois les amplitudes modales des deux potentiels connues, on peut reconstruire la vitesse verticale au niveau de la surface libre et donc avancer en temps le potentiel et l'élévation de surface libre solutions du problème complet. Cette formulation avec des ordres différenciés pour le potentiel en fond plat et le potentiel induit par le fond variable accroît la flexibilité de la méthode.

On se réfère aux publications sur le sujet [? ?] pour plus de détails quant aux formulations de cette méthode. On va maintenant s'intéresser aux spécificités du modèle développé, tant du point de vue numérique que de sa mise en œuvre pratique.

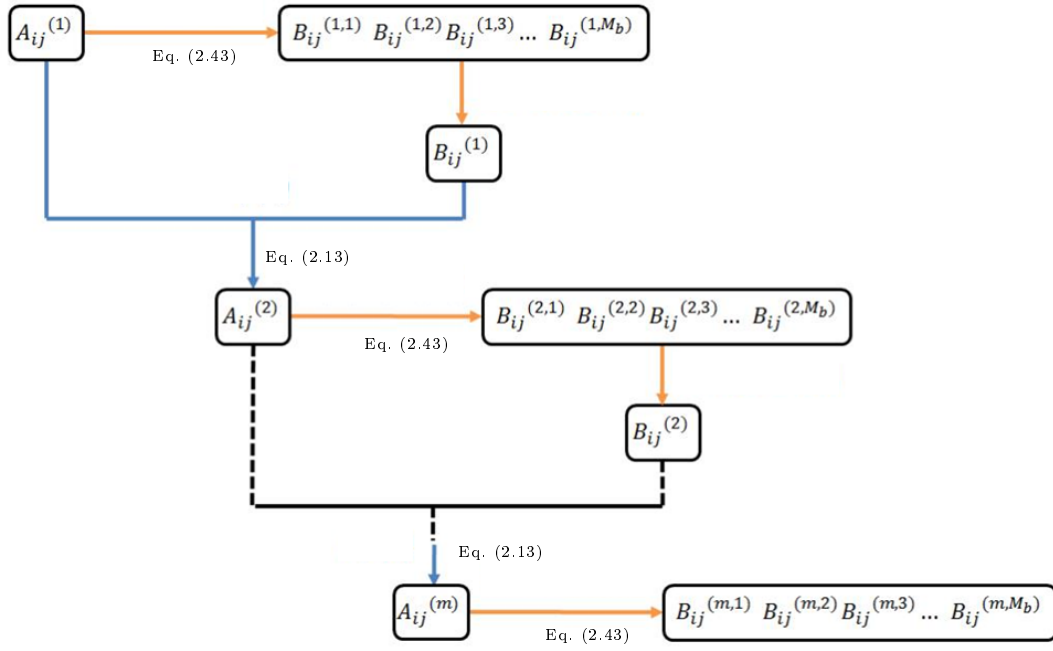


FIGURE 2.17 – Algorithme de résolution en fond variable – méthode améliorée

## 2.4.2 Propriétés numériques

L'objectif que l'on se fixe dans le développement du modèle HOS pour la modélisation des états de mer en profondeur variable est de réussir à conserver les propriétés numériques du modèle original en fond plat, à savoir une convergence très rapide et un temps de calcul réduit de par l'utilisation des FFTs. Ce paragraphe s'attache donc à présenter des résultats démontrant les capacités numériques de la méthode.

### Convergence

Comme on l'a vu précédemment, la méthode HOS en fond variable repose sur deux développements de Taylor différents : l'un au niveau de la surface libre ( $z=0$ ) et l'autre au niveau de la position moyenne du fond  $z = -h_0$ . Si la cambrure de la houle caractérise le comportement de la méthode vis à vis du premier développement, le paramètre  $\beta/h_0$  (à savoir l'amplitude de la variation du fond par rapport à la profondeur moyenne) est celui qui doit conditionner le deuxième développement.

On va donc chercher à caractériser le comportement numérique du modèle en fond variable vis à vis de ces deux paramètres. Pour ce faire, on va choisir le cas-test le plus simple possible, à savoir une houle régulière se propageant en fond plat. Il s'agit donc du cas-test déjà utilisé pour la méthode initiale (Sec. 2.2.3). La différence vient du fait que dans cette section, la profondeur totale  $h = h_0 - \beta$  est respectée par rapport à la solution de référence, mais la profondeur 'moyenne'  $h_0$  est modifiée (et donc la variation  $\beta$  également). Si  $\beta = 0$ , on est dans le cas de la méthode HOS initiale ( $\phi_\beta = 0$ ), mais lorsqu'on

augmente  $\beta$  le potentiel  $\phi_{h_0}$  ne satisfait plus la condition au fond et la vitesse à la surface libre n'est donc plus correcte. On s'attend à ce que le potentiel dû au fond  $\phi_\beta$  vienne corriger cette vitesse verticale de manière à avoir la vitesse verticale à la surface libre correcte.

Il convient de se placer à une profondeur relative assez faible pour avoir des effets de fond, on choisit ici  $kh = 0.916$ . On se place à une cambrure de la houle modérée  $ka = 0.1$ . La figure 2.18 présente la convergence sur la vitesse verticale à la surface libre de la méthode de prise en compte du fond originelle. On étudie l'influence du nombre de point  $N$  ainsi que de l'ordre de non-linéarité  $M$  qui je le rappelle caractérise les deux développements de Taylor (fond et surface libre). Sur cette figure sont représentées i) la surface obtenue avec la méthode HOS en fond plat ( $\beta/h_0 = 0$ ) (inférieure) et ii) celle obtenue pour une variation significative du fond  $\beta/h_0 = 25\%$  (surface supérieure).

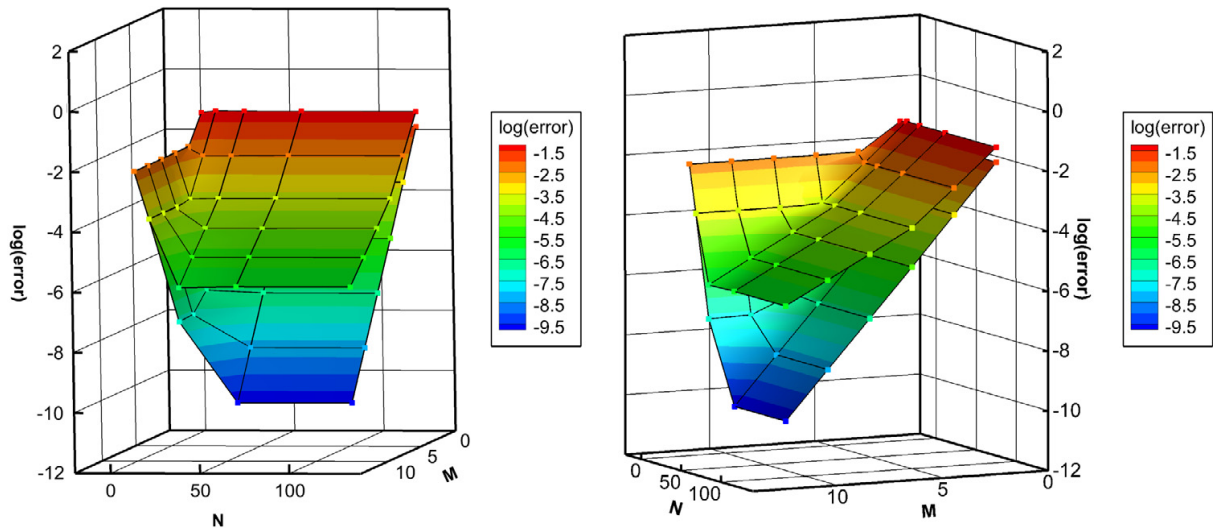


FIGURE 2.18 – Convergence sur la vitesse verticale à la surface libre,  $kh = 0.916$  et  $ka = 0.10$  – méthode originelle. Surface inférieure  $\beta/h_0 = 0$  et surface supérieure  $\beta/h_0 = 25\%$ . (Figure issue de [? ])

On observe tout d'abord que la surface inférieure, correspondant à la méthode HOS en fond plat à un comportement identique dans cette configuration à celui détaillé dans la description de la méthode. Lors de la prise en compte d'une variation du fond (surface supérieure), une dégradation de la précision est claire pour cette variation significative du fond correspondant à 25% de la profondeur moyenne  $h_0$ . Cependant, ce qui est le plus important dans notre cas est que la convergence de l'erreur vis à vis du nombre de points et de l'ordre HOS est toujours exponentiel (*i.e.* on a des plans droits dans cette représentation semi-logarithmique). Les propriétés de convergence spectrales semblent donc conservées dans ce formalisme en fond variable, même si le niveau d'erreur est supérieur.

Pour la méthode améliorée, on rappelle que deux ordres de non-linéarité existent, un pour la surface libre  $M$  et un spécifique pour la prise en compte du fond  $M_b$ . Si on fixe l'un des deux ordres, on obtient un comportement similaire à celui de la méthode originelle en fonction du nombre de points. Il semble donc d'intérêt d'étudier la convergence en

fonction des 2 ordres de non-linéarité. La figure 2.19 présente cette convergence.

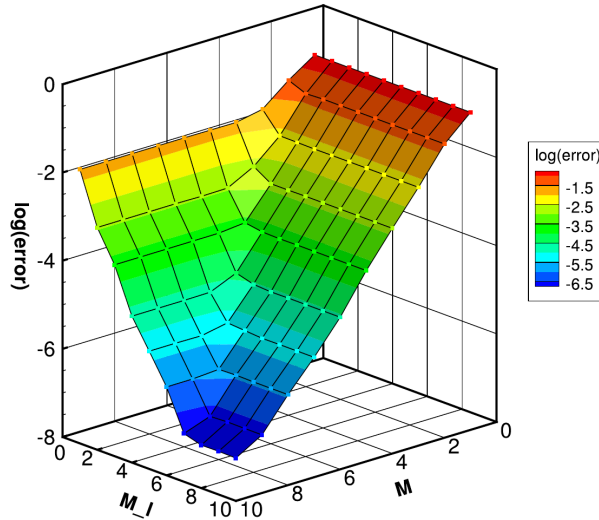


FIGURE 2.19 – Convergence sur la vitesse verticale à la surface libre,  $kh = 0.916$  et  $ka = 0.10$  – méthode améliorée  $\beta/h_0 = 25\%$ . (Figure issue de [? ])

Une nouvelle fois, on remarque la convergence exponentielle de la méthode, et cette fois-ci vis à vis des 2 ordres de non-linéarité. Cette propriété est très intéressante pour le modèle développé, nous permettant d'être serein quant à la capacité du modèle d'atteindre des niveaux d'erreur très limités et ce, pour un temps de calcul réduit. Comme on l'avait remarqué pour le modèle HOS en fond plat, on peut voir qu'il existe un choix de paramètres optimum en terme de couple  $M, M_b$  pour une configuration donnée (non-linéarité de la surface libre, profondeur relative et amplitude de la variation au fond).

On s'attend donc à un choix optimum de paramètres tel que

- si la cambrure est très élevée et que la variation du fond est faible :  $M_b \ll M$
- si la variation du fond est importante et que la cambrure est faible :  $M_b \gg M$
- si les deux phénomènes ne sont pas significativement distincts :  $M_b \sim M$

Il y a donc un intérêt évident à avoir la flexibilité du choix des ordres de non-linéarité  $M$  et  $M_b$ . Dans le cas précédent, l'optimum est pour un ordre au fond  $M_b$  légèrement inférieur à l'ordre de surface libre  $M$ . Afin de démontrer potentiellement l'intérêt de cette flexibilité en terme de précision comparée entre les deux formulations, d'autres cas-tests ont été étudiés. La figure 2.20 présente la comparaison des deux approches sur une houle régulière avec  $kh = 0.916$  dans deux configurations : i) très faible non-linéarité  $ka = 0.01$  et variation assez importante du fond  $\beta/h_0 = 40\%$  et ii) cambrure significative  $ka = 0.15$  et variation très importante  $\beta/h_0 = 75\%$ .

A faible cambrure, on observe très clairement la convergence de chacune des formulations vis à vis des ordres de non-linéarité. On remarque qu'à  $M$  fixé, on peut toujours trouver une valeur de l'ordre de non-linéarité au fond  $M_b$  tel que la précision est au moins aussi bonne que la méthode originelle. Ainsi, la formulation améliorée permet une augmentation significative de la précision de la méthode HOS en fond variable.

Pour le cas de cambrure plus importante avec une très grande variation du fond, on observe que la méthode originelle a beaucoup de difficultés à converger. Au contraire, la

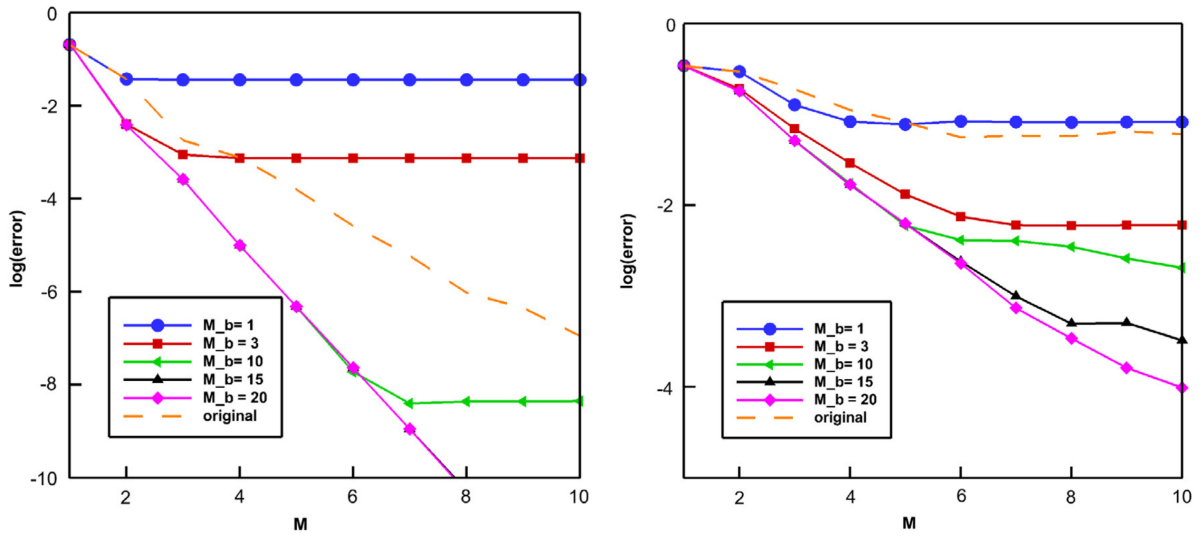


FIGURE 2.20 – Convergence sur la vitesse verticale à la surface libre,  $kh = 0.916$  -  $ka = 0.01$ ,  $\beta/h_0 = 40\%$  (gauche);  $ka = 0.15$ ,  $\beta/h_0 = 75\%$  (gauche) – comparaison méthode améliorée et méthode originelle. (Figure issue de [? ])

méthode améliorée, grâce au découplage des ordres, permet d'assurer un comportement convergent du modèle tout en atteignant des niveaux d'erreurs satisfaisants pour une telle amplitude de variation de fond.

## Efficacité

Outre les propriétés de convergence de chacune des formulations, il est essentiel d'étudier l'efficacité numérique des deux approches. Comme on l'a vu précédemment (figures 2.16 & 2.17), les algorithmes de résolution sont assez différents et la complexité de l'approche améliorée semble plus grande.

L'effort en temps de calcul de la modélisation HOS est directement liée au nombre de FFTs nécessaires à la résolution. Le modèle HOS en fond plat nécessite  $n_{FFT_s} = M(M + 3)/2$  et les deux formulations développées nécessitent

- Méthode originelle :  $n_{add.} = 2M(M - 1)$  FFTs supplémentaires ce qui est du même ordre de grandeur que la méthode en fond plat
- Méthode améliorée :
  - si  $M_b$  est pair,  $n_{add.pair} = 2M_b^2 M$  FFTs supplémentaires
  - si  $M_b$  est impair,  $n_{add.impair} = 2(M_b^2 + 2M_b + 1) M$  FFTs supplémentaires

La méthode la plus efficace va donc être dépendante du choix des paramètres. De manière générale, on préférera la méthode originelle dans les configurations où les variations de fond ne sont pas trop importantes et donc où le phénomène de saturation de la précision observé précédemment n'est pas rencontré. On réservera la méthode améliorée pour les configurations complexes où la flexibilité du choix des ordres distincts permet d'atteindre des niveaux de précision bien supérieurs à la méthode originelle.

### 2.4.3 Mise en œuvre

La propagation d'états de mer en fond variable est une configuration assez différente du problème originel de l'évolution de champs de vagues dans un milieu océanique. En effet, si la configuration HOS originelle suppose un champ homogène en espace qui évolue en temps en utilisant des conditions de périodicité dans le plan horizontal, lorsqu'on ajoute un profil bathymétrique cette homogénéité n'est plus respectée.

Pour des considérations de temps de calcul et des applications tri-dimensionnelles visées, on a cherché à s'affranchir de l'utilisation d'un bassin de houle complet, tel que décrit en section 2.3. L'approche choisie a été de conserver la résolution dans un domaine supposé périodique, mais d'utiliser des zones de relaxation dans les zones proches des frontières du domaine afin de générer et absorber les vagues. Ces zones ont pour but de relaxer la solution numérique vers une solution spécifique imposée ( $\eta_{imp}(\mathbf{x}, t); \phi_{imp}^s(\mathbf{x}, t)$ ). Dans une configuration unidirectionnelle, ces zones sont situées à gauche et à droite du domaine [? ?].

Un coefficient de relaxation est défini par  $0 \leq C_r(\mathbf{x}) \leq 1$  non-nul dans des zones spécifiques dites de relaxation. Cette fonction doit être suffisamment lisse pour éviter les réflexions. On choisit classiquement un polynôme d'ordre 3 dans les études présentées après. Ce coefficient est utilisé comme suit

$$\begin{aligned}\eta(\mathbf{x}, t) &= (1 - C_r(\mathbf{x}, t)) \eta_{imp}(\mathbf{x}, t) + C_r(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}, t) \\ \phi^s(\mathbf{x}, t) &= (1 - C_r(\mathbf{x}, t)) \phi_{imp}^s(\mathbf{x}, t) + C_r(\mathbf{x}, t) \phi^s(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

#### Cas uni-directionnel

On peut alors combiner diverses zones de relaxation afin en particulier de s'assurer de la périodicité de la solution. Pour ce faire, on mettra en place classiquement deux zones d'absorption sur chaque côté du domaine de calcul afin d'avoir une solution nulle et donc périodique dans ces régions. Ensuite, on ajoute une zone de génération dans la partie amont (*i.e.* à gauche du domaine pour des vagues se propageant de la gauche vers la droite) afin de contrôler le champ de vagues dans la zone d'étude.

En guise d'exemple, si on traite le cas du shoaling [? ], on utilisera une configuration tel que représenté sur la figure 2.21.

#### Cas directionnel

Lorsqu'on traite une configuration tri-dimensionnelle, les conditions aux limites sont légèrement plus complexes à traiter. Le choix qui a été fait (détaillé et justifié dans [? ]) est

- (i) de considérer sur les frontières amont et aval la même configuration qu'en uni-directionnel, à savoir zones d'absorption de chaque côté pour assurer la périodicité et une zone de génération dans la zone amont afin de générer l'état de mer cible.
- (ii) de traiter les frontières latérales du domaine comme des murs réfléchissants. Deux traitements numériques sont possibles pour assurer ces conditions de réflexion (théoriquement strictement équivalent) : soit on décompose sur la solution sur des fonction cos dans la direction transverse, soit on peut simplement symétriser dans la direction transverse le domaine de calcul.

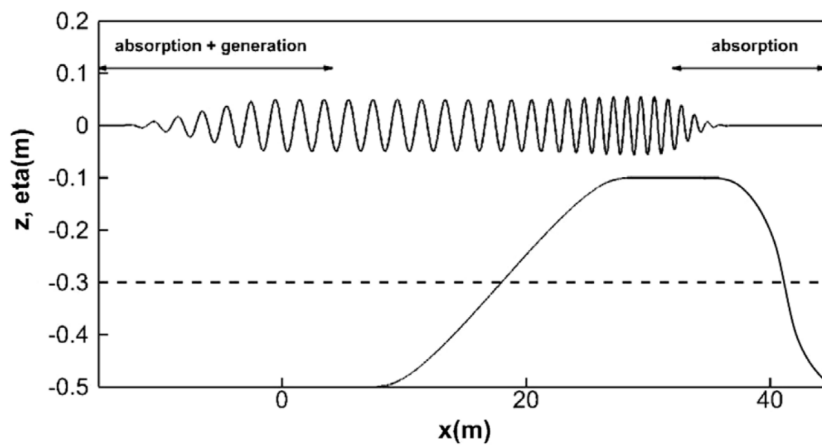


FIGURE 2.21 – Zones de relaxation dans un cas unidirectionnel (shoaling d’une houle régulière [? ])

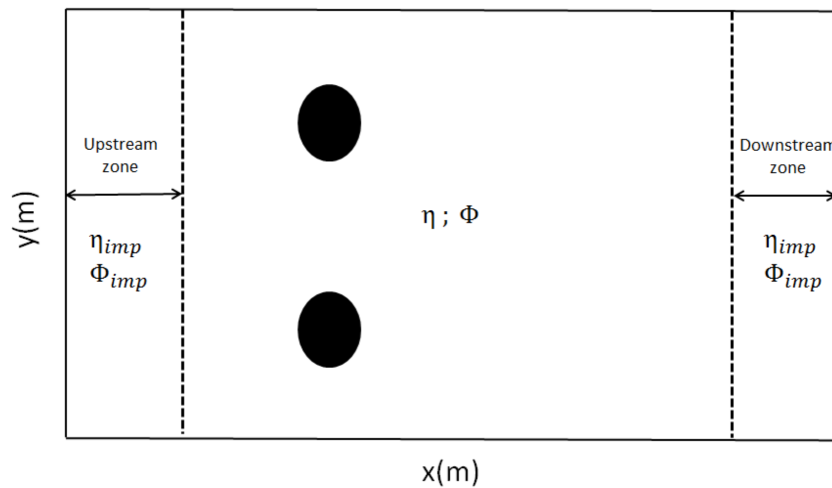


FIGURE 2.22 – Zones de relaxation dans un cas directionnel (ellipse immergée, Sec. 2.4.4)

La figure 2.22 présente un exemple de configuration traité en détails dans [?] et qui correspond à la propagation de vagues sur une ellipse immergée (ici en vue de dessus). Dans ce cas, la condition de réflexion sur les murs latéraux est assurée par une symétrisation du problème.

#### 2.4.4 Exemple d'application

La méthode a été largement validée dans différentes configurations vis à vis de résultats théoriques ou d'expériences en bassin

- Configuration uni-directionnelle [?]
  - (i) Shoaling de houle linéaire : comparaison à la solution analytique
  - (ii) Réflexion de Bragg : comparaison à des mesures expérimentales et une solution théorique
  - (iii) Propagation de houle au dessus d'une barre immergée et génération d'harmoniques supérieures : comparaison à des expérience en bassin de houle
- Configuration tri-dimensionnelle [?] appliquée au cas de la propagation de houle au-dessus d'une ellipse immergée avec comparaison à des essais en bassin. Différentes conditions de houle ont été testées dans cette configuration géométrique
  - (i) Houle régulière uni-directionnelle
  - (ii) Houle irrégulière uni-directionnelle
  - (iii) Houle irrégulière directionnelle

Je me réfère aux publications référencées pour des détails quant à ces cas de validation. Dans cette section, je me limite à un seul exemple d'application correspondant à une configuration réelle et complexe. On va s'intéresser à la propagation d'états de mer au niveau des canyons sous-marins de Scripps et de La Jolla en Californie. Ce site a été instrumenté et des mesures à grande échelle sont donc disponibles suite au projet Nearshore Canyon EXperiment (NCEX<sup>2</sup>). La bathymétrie sur la zone (voir Fig. 2.23) présente de grandes variations qui influencent fortement l'évolution du champ de vagues. Des études numériques ont pris pour cadre cette configuration, voir en particulier [? ?].

Au regard de notre méthode numérique, ce cas est très ambitieux car il présente de grandes amplitudes de variation du fond, ainsi que de forts gradients horizontaux dans les canyons sous-marins. En choisissant un domaine de calcul similaire à [?], à savoir une étendue spatiale de  $5.5km \times 5km$  tel que représenté sur la figure 2.23 et en se focalisant sur les zones d'intérêt :  $\max(\beta/h_0) = 85\%$  et  $\max(\nabla\beta) = 70\%$ .

#### Scripts/La Jolla - houle régulière

La première étude réalisée dans cette configuration avait pour vocation de valider la mise en place du calcul ainsi que les capacités du modèle HOS développé. On s'intéresse donc à des conditions de houle simple, à savoir une houle régulière unidirectionnelle. On va étudier tout d'abord uniquement le phénomène de réfraction (*i.e.* l'influence de la profondeur sur la direction de propagation).

---

2. <http://science.whoi.edu/unsers/elgar/NCEX/>



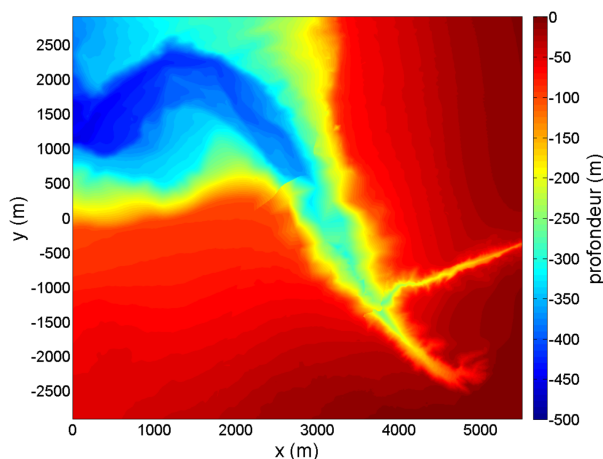


FIGURE 2.23 – Topographie des canyons sous-marins de Scripps et la Jolla – coordonnées cartésiennes.

On choisit une houle de période  $T = 15$  s et de hauteur  $H = 1$  m. La non-linéarité de surface libre est faible dans la zone amont de grande profondeur ( $ka = 0.01$ ). En vue de la comparaison à la théorie des tracés de rayons qui prédit le phénomène de réfraction (en linéarisant le problème à la surface libre), on utilise également dans notre cas une représentation linéaire du problème à la surface libre (*i.e.*  $M = 1$ ). La convergence sur la prise en compte du fond est atteinte pour  $M_b = 5$ . La comparaison est réalisée dans la figure 2.24.

On observe un comportement très similaire entre la méthode du tracé de rayon et l'évolution de ceux-ci évalués à partir des résultats de la méthode HOS. En particulier, on reproduit la focalisation directionnelle en amont des deux canyons et la forte inflexion de la trajectoire de la houle dans ceux-ci. En complément, on peut comparer nos résultats à ceux obtenus avec la méthode des 'coupled modes' [? ], voir Fig. 2.25.

La comparaison sur l'élévation de surface libre est donc également satisfaisante. Les résultats précédents sur le tracé de rayons impliquent directement les changements de l'amplitude locale de la houle et sont cohérents entre les deux approches numériques. Les résultats présentés par [? ] sont limités à une surface libre linéarisée et ne permettent donc pas d'aller plus loin quant à l'influence des effets non-linéaires dans cette configuration bathymétrique.

A noter que les conditions de houle utilisées ici impliquent des effets non-linéaires à la surface libre très peu importants : les résultats sont donc très similaires si on utilise une résolution non-linéaire de celle-ci ( $M \neq 1$ ). Une validation plus fine du possible couplage non-linéarité de surface libre/influence du fond dans une configuration de bathymétrie réelle complexe fait face à un manque de données de référence. Il pourrait être intéressant de traiter ce cas en augmentant la non-linéarité de la houle avec différentes méthodes numériques, en gardant des conditions de houle régulières unidirectionnelles. Cependant, les premiers résultats sur la réfraction permettent d'envisager d'aller vers une comparaison en condition de houle réelle.

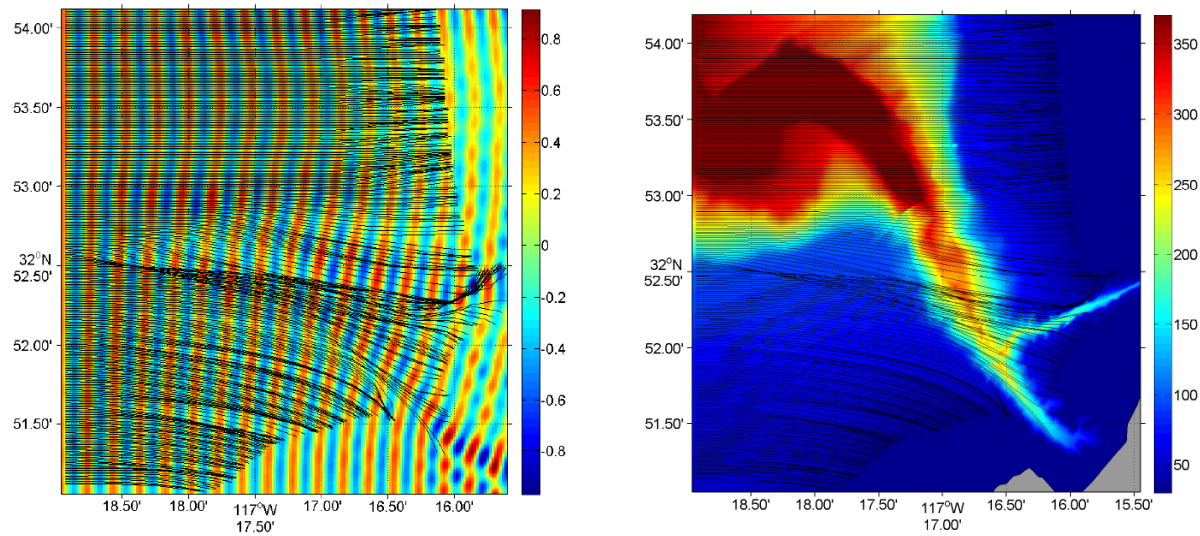


FIGURE 2.24 – Tracé de rayons et élévation de surface libre obtenue avec HOS.  $M = 1$ ,  $M_b = 5$  (gauche) ; Tracé de rayons – théorie linéaire (droite).

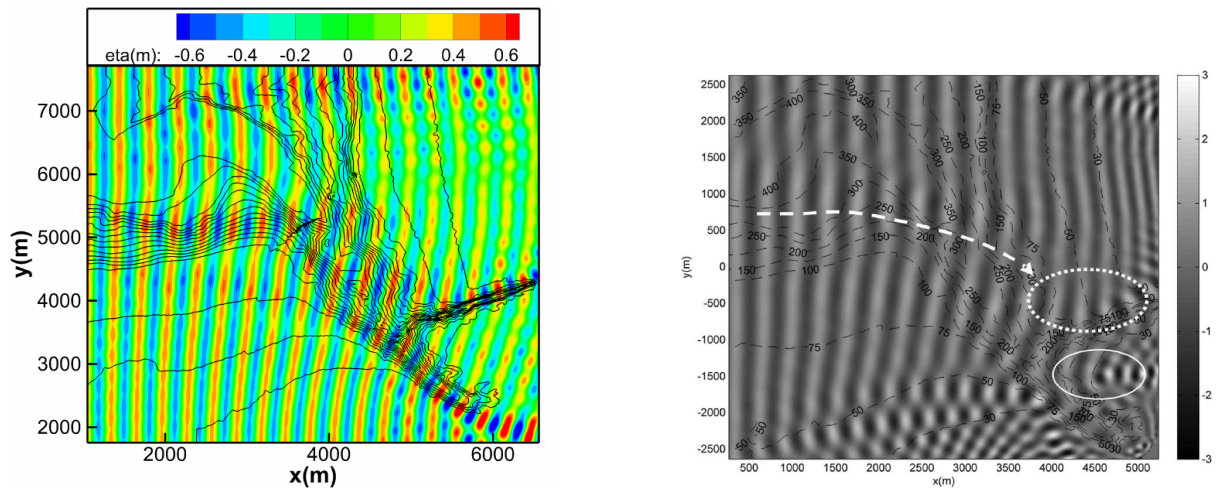


FIGURE 2.25 – Elévation de surface libre dans le domaine de calcul. Modèle HOS fond variable (gauche) et résultats du modèle 'couplé modes' de [?] (droite)

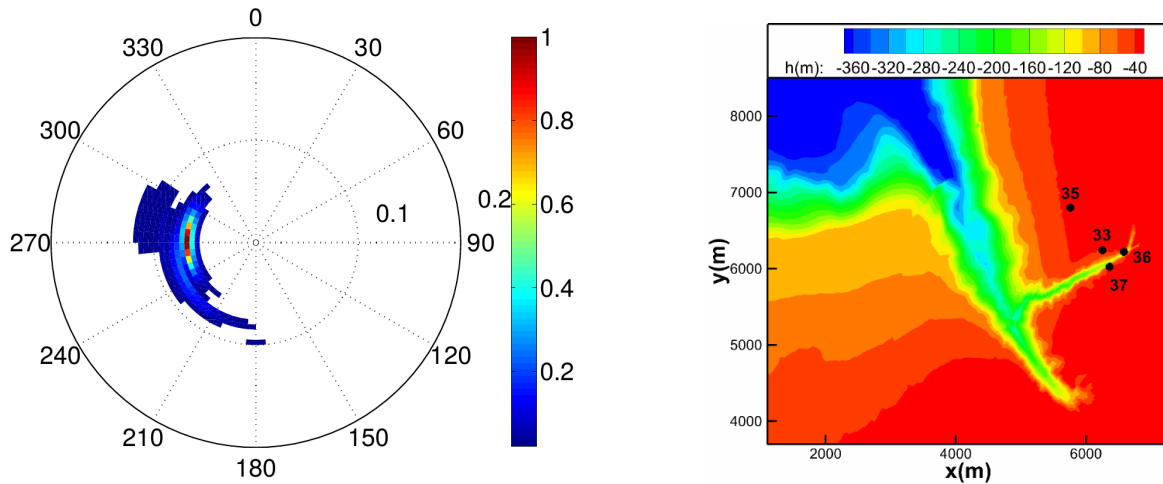


FIGURE 2.26 – Spectre directionnel au niveau de la bouée Torrey Pines Outer Buoy (gauche) et localisation des bouées de mesure (droite).

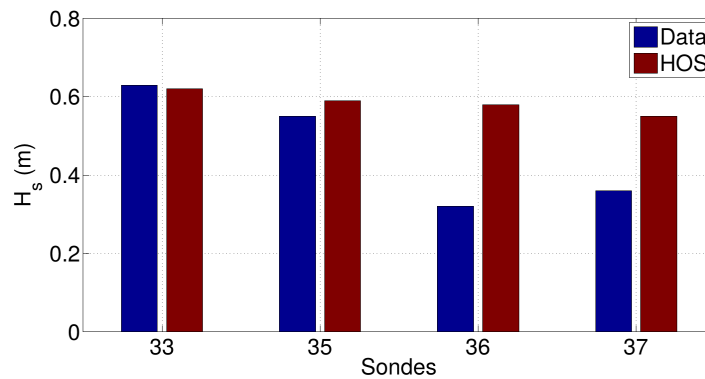


FIGURE 2.27 – Comparaisons des hauteurs significatives prédites et mesurées. Les sondes sont localisées sur la figure 2.26.

### Scrips/La Jolla - configuration réelle

On s'inspire de l'étude menée par [?] pour traiter un cas réaliste mesuré sur zone. Il s'agit d'un cas de houle longue venant de l'Ouest, sans vent significatif. Des données sur les conditions de houle 15 km en amont du canyon sont par ailleurs disponibles<sup>3</sup>, afin de définir le champ de vagues entrant dans notre domaine d'étude (grande profondeur) :  $H_s = 0.8m$  et  $T_p = 15.4s$ , venant majoritairement de l'Ouest ( $\theta = 270deg$ ). Le spectre directionnel correspondant est donné sur la figure 2.26. Cette figure présente également la localisation des 4 bouées utilisées pour effectuer la comparaison avec nos simulations.

La première comparaison effectuée avec les données réelles s'intéresse à la hauteur significative au niveau des sondes 33, 35, 36 et 37 situées dans des profondeurs de 35 m, 35 m, 100 m et 45 m respectivement. Cette comparaison est présentée sur la figure 2.27.

On observe une assez bonne correspondance entre les données expérimentales et nu-

3. <http://cdip.uscd.edu>

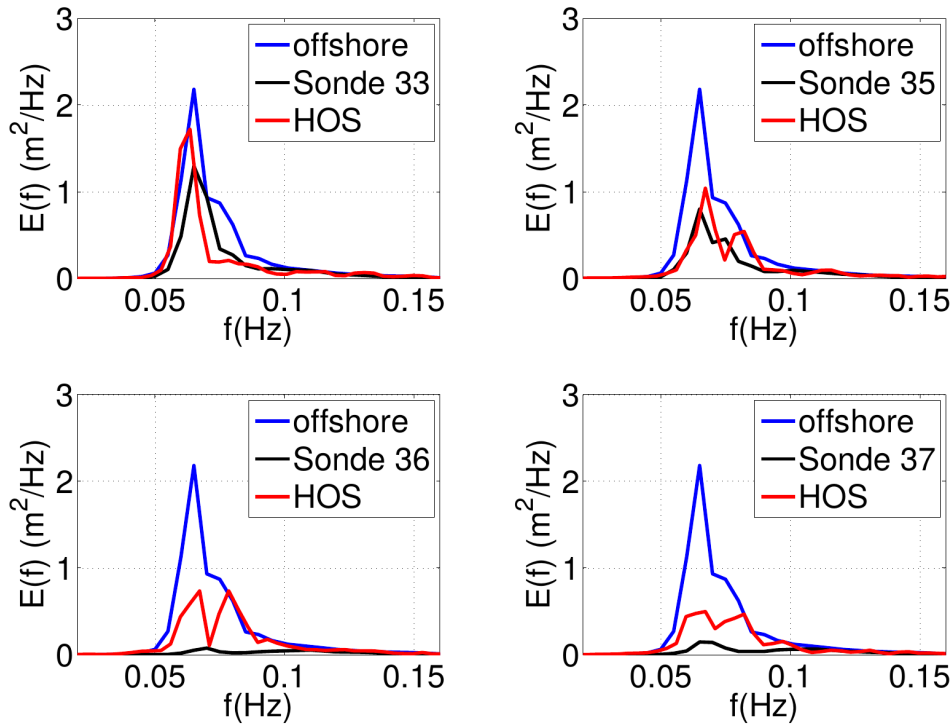


FIGURE 2.28 – Comparaisons des spectres fréquentiels prédits et mesurés le 30 novembre 2003 entre 13h30 et 16h30. Les sondes sont localisées sur la figure 2.26.

mériques, notamment au niveau des sondes 33 et 35. Les sondes 36 et 37 sont moins bien résolues par notre modèle. En effet, on observe bien une diminution de la hauteur significative, mais celle-ci est moins importante que dans les mesures en mer.

En complément, on peut comparer les spectres fréquentiels disponibles en chacune des bouées, voir figure 2.28. On remarque là aussi une assez bonne comparaison entre les données des sondes et le modèle au niveau de la sonde 35. La sonde 33 qui présentait un  $H_s$  numérique relativement correct, a une forme de spectre assez différente de la mesure sur site, avec notamment deux pics présents au lieu d'un seul. Enfin, au niveau des sondes 36 et 37, on retrouve la diminution de hauteur significative, même si celle-ci est beaucoup moins importante que dans les données de référence.

On remarquera que les sondes 36 et 37 sont situées dans des profondeurs plus grandes que les sondes 33 et 35, mais dans des zones à plus forts gradients, les limites du modèle HOS en ce sens sont donc peut-être atteintes.

Ainsi, ce cas test montre que le modèle est efficace pour modéliser des houles irrégulières directionnelles sur une bathymétrie réelle très complexe car le temps de calcul par période de houle est de l'ordre de 50 s sur un seul processeur. Néanmoins les valeurs extrêmes des gradients rencontrés et la très forte variation du fond montrent également les limites du modèle pseudo-spectral. Cette première application du modèle demanderait donc à être poursuivie et finalisée pour caractériser exactement les erreurs et identifier leur origine.

## 2.4.5 Conclusion-perspectives

### Résumé

Les travaux de thèse de Maïté Gouin [?] que j'ai co-encadrés ont donc portés sur l'extension du modèle en formulation périodique (HOS-ocean) pour la modélisation des états de mer en profondeur variable. Les avancées significatives de ce travail ont été :

- Le développement de deux formulations spécifiques pour la prise en compte d'une bathymétrie variable en espace avec un formalisme HOS.
- La validation des propriétés numériques du modèle afin de démontrer que le cœur du code de calcul conserve les propriétés originelles du modèle HOS-ocean
  - (i) Convergence exponentielle démontrée vis à vis a) de la discrétisation spatiale, b) de l'ordre de non-linéarité  $M$  (sur la surface libre) et c) de l'ordre  $M_b$  pour la prise en compte du fond avec la méthode améliorée.
  - (ii) Surcoût en temps de calcul satisfaisant conservant l'efficacité numérique du modèle initial
- Validation du modèle sur diverses configurations 'académiques' depuis des cas bi-dimensionnels avec de faibles variations du fond jusqu'à des profils bathymétriques tri-dimensionnels. Ces cas de calculs ont été comparés à divers essais en bassin disponibles dans la littérature.
- Mise en œuvre et application pratique du modèle à des configurations réelles complexes : cas du canyon de Scripps présenté ici et propagation d'états de mer sur le banc de Guérande.

On dispose donc dorénavant d'un outil numérique très efficace et précis qui permet de modéliser la propagation d'états de mer par fond variable. Il peut a priori être appliqué à des configurations réalistes grâce à l'effort particulier porté au développement d'un outil répondant à des exigences d'utilisation pratique. On peut utiliser une bathymétrie complexe avec un état de mer directionnel et ce avec des ressources numériques limitées. Sur ce dernier point, on a démontré par exemple que le cas du canyon sous-marin de Scripps pouvait être traité avec un temps de calcul très raisonnable au vu de la complexité de la configuration :  $t_{CPU} \simeq 4$  fois le temps réel sur un seul processeur pour un domaine de taille significative d'environ  $27 \text{ km}^2$ .

### Limitations et perspectives

Cependant, les différents cas d'application traités à l'aide du modèle ont mis en lumière un certain nombre de limitations du présent modèle qui représentent autant de challenges à relever du point de vue de la modélisation numérique :

- Afin d'assurer l'efficacité du modèle, les formulations choisies reposent sur un développement en série de Taylor de la condition au fond autour de la position moyenne de celui-ci. Ceci impose certaines contraintes quant à l'amplitude des variations du fond  $\max(\beta/h_0)$  et également sur le gradient de la bathymétrie. En ce sens, le cas d'application présenté sur les canyons de Scripps et La Jolla pousse la méthode dans ses limites et démontre certaines limitations qui de manière générale seront
  - (i) Configuration très proche côte :

- Ces zones vont présenter de grandes variations relatives du fond  $\beta/h_0$  et seront donc difficilement accessibles. Il pourrait être utile de tester l’approche développée par [?] qui propose de définir une succession de profondeurs moyennes afin de limiter la valeur du paramètre  $\beta/h_0$  et augmenter le domaine d’application de la méthode.
  - Cependant, on va être assez rapidement confronté dans ces configurations au déferlement bathymétrique qui n’est pas modélisé pour l’instant.
  - D’autre part, l’inclusion de phénomènes physiques supplémentaires peuvent également s’avérer importants dans ces configurations, tel la dissipation par frottement au niveau du fond marin. On pourra a priori utiliser la littérature abondante sur le sujet notamment vis à vis de la modélisation de cet effet dans les modèles Boussinesq en faible profondeur.
- (ii) Zones de très forts gradients du fond : il pourrait être intéressant de tester la possible amélioration des capacités du modèle en utilisant la même approche de profondeurs successives [?].
- On a déjà évoqué la limitation dans les zones très proche côte associé au déferlement bathymétrique. On peut ajouter, de manière plus générale, que l’étude des états de mers assez énergétiques en bathymétrie variable va renforcer le besoin d’une modélisation du déferlement. L’intérêt du modèle HOS est sa prise en compte des non-linéarités, mais on est pour l’instant limité par la possible apparition, même sporadique, d’évènements déferlants dans le champ de vagues étudié. En sachant que lorsque le fond varie, cela peut avoir tendance à augmenter la non-linéarité de l’état de mer et donc les probabilités d’occurrence des évènements déferlants, sa modélisation semble essentielle en vue de l’applicabilité du modèle aux configurations d’intérêt.
  - Comme indiqué pour le modèle original HOS-ocean, en vue de l’étude de cas de très grande dimension ( $\mathcal{O}(100 - 1000 \text{ km}^2)$ ), la parallélisation du code peut s’avérer essentielle pour traiter dans un temps de calcul raisonnable ces configurations.
  - Les développements proposés ne traitent pas le cas d’un fond variable en temps. Ceci pourrait faire l’objet de développements futurs si cela semble pertinent, le cadre théorique ne présentant pas de difficultés.. Mais a priori le cadre d’application principal est celui des tsunamis et donc de la propagation en faible profondeur relative, ce qui n’est pas la cible première du modèle HOS (qui n’est d’ailleurs pas très adapté à de telles configurations).

## 2.5 Phénomènes physiques additionnels

Les sections précédentes décrivent la possible extension de la formulation HOS à des configurations géométriques plus complexes que dans la formulation originelle [?] limitée à la propagation d’états de mer en milieu infini avec une profondeur constante. Ces développements ont permis la mise en œuvre i) d’un modèle dédié à la configuration bassin de houle (HOS-NWT) permettant la génération à l’aide d’un batteur, l’absorption par une plage proche du mur opposé au batteur et la prise en compte de murs latéraux réfléchissants et ii) de formulations dédiées à la prise en compte d’une bathymétrie variable dans le domaine de calcul.

Je me suis également intéressé à l'extension de la formulation originelle vis à vis des phénomènes physiques pris en compte dans la modélisation. En effet, en configuration réelle, les états de mer prennent place dans un milieu complexe, sujet à divers processus qui peuvent influencer significativement la propagation du champ de vagues. Les plus notables sont le courant présent sous la surface libre et le vent au dessus de celle-ci. J'ai mené et participé à l'investigation de ces différents phénomènes comme détaillé dans la suite.

### 2.5.1 Extension au courant

Les zones de forts courants sont connues comme très accidentogènes pour les navires, notamment de par l'interaction entre le champ de vagues et les courants. Dans ce contexte, la région du courant des Aiguilles à l'Est de l'Afrique du Sud est sans doute la plus connue [? ]. Il apparaît donc d'intérêt d'essayer d'inclure ce phénomène d'interaction dans notre modèle de propagation de vagues pour potentiellement étudier les phénomènes physiques responsables de l'apparition de vagues extrêmes dans ces zones (voir chapitre 4).

J'ai donc développé dans le modèle HOS océanique la prise en compte d'un courant. Ce travail a été initié dans le cadre de la thèse de Master 2 de Greace Yustisia Crystle [? ] et j'ai ensuite poursuivi le développement du modèle. La formulation du problème se base principalement sur des travaux similaires menés au MIT avec la méthode HOS [? ? ].

#### Courant seul

Avant de s'intéresser au cas de la houle en présence de courant, il convient d'étudier ce qu'il se passe lorsqu'on a un courant seul en présence d'une surface libre. On souhaite se placer dans le cas de la théorie des écoulements potentiels et on suppose donc que ce courant est irrotationnel, noté  $\vec{V}_c = (\mathbf{u}_c, w_c) = \vec{\nabla}\phi_c$  avec  $\phi_c$  le potentiel des vitesses associé au courant. On se limite au cas d'une profondeur constante (le développement suivant restant valable pour une profondeur variant lentement dans le plan horizontal).

On peut écrire la conservation de la quantité de mouvement pour cet écoulement de fluide parfait sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial t} + \mathbf{u}_c \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial \mathbf{x}} + w_c \frac{\partial \mathbf{u}_c}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial w_c}{\partial t} + \mathbf{u}_c \frac{\partial w_c}{\partial \mathbf{x}} + w_c \frac{\partial w_c}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases} \quad (2.44)$$

Ainsi, il apparaît que la pression  $p$  induite par la présence d'un courant peut être considérée comme hydrostatique dans le cas où ce courant varie lentement dans les directions horizontales et verticales. Les vitesses verticales du courant sont également suffisamment faibles pour pouvoir considérer la pression comme uniquement hydrostatique. C'est une hypothèse pouvant paraître assez forte, mais nécessaire pour la résolution du problème dans un formalisme potentiel.

Les conditions de surface libre s'écrivent alors de la manière suivante, avec  $\eta_c$  l'élévation de surface libre induite par le courant

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_c}{\partial t} &= w_c - \mathbf{u}_c \cdot \nabla \eta_c && \text{en } z = \eta_c(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial t} &= -\frac{p_{atm}}{\rho} - g\eta_c - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c + w_c^2) && \text{en } z = \eta_c(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

On garde explicitement la pression atmosphérique  $p_{atm}$  dans cette écriture (elle est habituellement dans le cas des vagues incluse dans la définition du potentiel des vitesses), pour pouvoir écrire le cas du courant stationnaire

$$\begin{aligned}w_c &= \mathbf{u}_c \cdot \nabla \eta_c && \text{en } z = \eta_c(\mathbf{x}) \\ g\eta_c + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c + w_c^2) &= -\frac{p_{atm}}{\rho} && \text{en } z = \eta_c(\mathbf{x})\end{aligned}$$

### Vagues avec courant stationnaire

On peut ensuite combiner le problème des vagues et du courant stationnaire. On obtient alors des conditions de surface libre modifiées (pour rappel, voir Eqs. (2.7) & (2.8) pour le cas sans courant)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= (1 + |\nabla \eta|^2) W_w - \nabla \phi_w^s \cdot \nabla \eta - \mathbf{u}_c \cdot \nabla \eta + w_c && \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \phi_w^s}{\partial t} &= -\frac{p_{atm}}{\rho} - g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi_w^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W_w^2 \\ &\quad - \mathbf{u}_c \cdot \nabla \phi_w^s - \frac{1}{2} (\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c + w_c^2) && \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

avec  $\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_w(\mathbf{x}, t) + \eta_c(\mathbf{x})$  l'élévation de surface libre totale, l'indice  $w$  des quantités se référant aux contributions des vagues. Afin de pouvoir résoudre numériquement le problème, on utilise [? ? ] :

- Une simplification des termes associés au courant ( $\mathbf{u}_c, w_c$ ) au niveau de la surface libre totale ( $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ ) en la position  $z = \eta_c(\mathbf{x})$  (courant variant faiblement en vertical)
- L'hypothèse d'une variation horizontale lente du courant :  $|\nabla \eta_c| \ll |\nabla \eta_w|$
- Le niveau  $z = \eta_c$  comme niveau de référence des coordonnées verticales (valide en supposant toujours des variations lentes de ce niveau). Dans ce nouveau système de coordonnées, les conditions de surface libre sont écrites

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta_w}{\partial t} &= (1 + |\nabla \eta_w|^2) W_w - \nabla \phi_w^s \cdot \nabla \eta_w \\ &\quad - \mathbf{u}_c|_{z=0} \cdot \nabla \eta_w - \eta_w (\nabla \cdot \mathbf{u}_c)|_{z=0} + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot \nabla \phi_w^s && (2.45) \\ &\quad + [-2 (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot \nabla \eta_w + (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0}] \quad \text{en } z = \eta_w(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_w^s}{\partial t} &= -g\eta_w - \frac{1}{2} |\nabla \phi_w^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W_w^2 - \mathbf{u}_c|_{z=0} \cdot \nabla \phi_w^s \\ &\quad + \left[ -(\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot \nabla \eta_w + \frac{1}{2} - (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \right] W_w^2 && (2.46) \\ &\quad + \eta_w [- (\mathbf{u}_c \cdot \nabla \mathbf{u}_c)|_{z=0} \cdot \mathbf{u}_c|_{z=0}] (\nabla \cdot \mathbf{u}_c)|_{z=0} \quad \text{en } z = \eta_w(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$



- Si on souhaite revenir à l'élévation totale ( $\eta(\mathbf{x}, t) = \eta_w(\mathbf{x}, t) + \eta_c(\mathbf{x})$ ), il faudra simplement ajouter à l'élévation de surface libre précédente la contribution du courant qui est explicitement connue à partir de la valeur de celui-ci

$$g\eta_c + \frac{1}{2} (\mathbf{u}_c \cdot \mathbf{u}_c + [\mathbf{u}_c \nabla \eta_c]^2) |_{z=0} = 0 \quad (2.47)$$

### Propriétés numériques et validations

La prise en compte de ce courant irrotationnel est assez simple de mise en œuvre, car ne nécessitant a priori qu'une simple modification des conditions de surface libre comme indiqué précédemment. Le courant sera une donnée d'entrée dont le profil va influencer sur la propagation des vagues sous-jacente par un simple effet Doppler dans le cas d'un courant constant ou par une interaction plus complexe dans le cas d'un courant variant horizontalement.

**Courant variable en espace** Lorsqu'on s'intéresse à un courant qui varie dans le plan horizontal, on est confronté à une spécificité similaire au cas d'un fond variable, à savoir que la configuration doit toujours satisfaire des conditions de périodicité. En effet, les termes associés au courant apparaissant dans les conditions de surface libre (Eqs. (2.45) & (2.46)), ce courant doit être périodique si on souhaite avoir une solution pour l'élévation de surface libre et le potentiel des vitesses également périodique.

Ceci va donc nous imposer d'utiliser une configuration telle que celle représentée sur la figure 2.29 pour la définition du courant. En règle générale, on utilisera des domaines de grande dimension afin d'assurer une variation lente du courant.

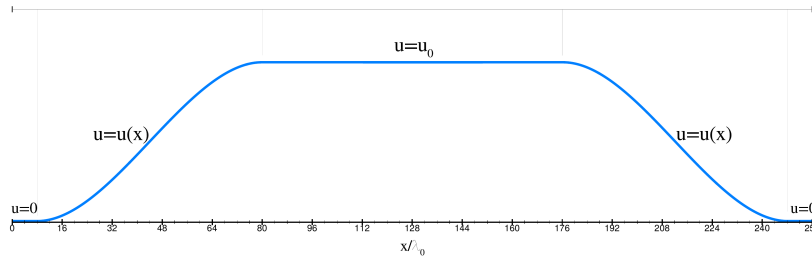


FIGURE 2.29 – Définition spatiale du courant dans une simulation HOS.

La problématique de la condition initiale du calcul est également identique au cas de la bathymétrie variable et la stratégie adoptée sera similaire, à savoir l'utilisation de zone de relaxation proche des deux bords du domaine. On se réfère à la section 2.4 pour plus de détails quant à ces zones de relaxation.

On procède ensuite à la validation du modèle. Pour ce faire, on va utiliser une configuration simple de houle régulière se propageant au dessus d'un courant variant très lentement, comme représenté sur la figure 2.29 (la taille du domaine est de 256 longueurs d'onde).

Si on linéarise le problème, il est possible de résoudre analytiquement le problème et en particulier de déterminer dans cette configuration l'évolution de la longueur d'onde et

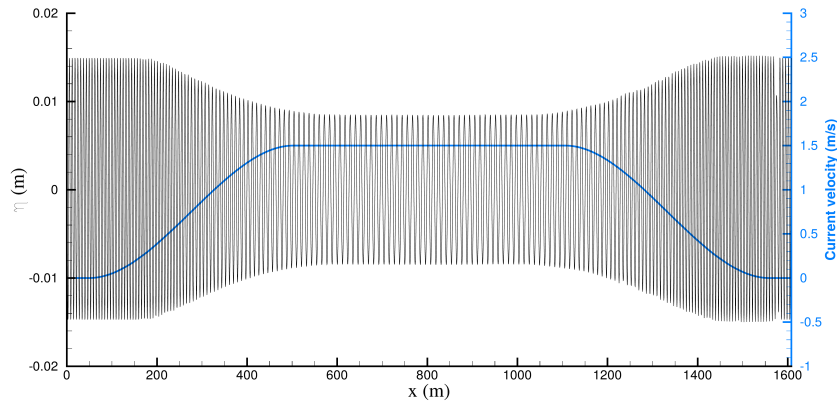


FIGURE 2.30 – Elévation de surface libre dans le domaine de calcul dans le cas d'un courant variable en espace dans le sens de la houle.

de l'amplitude en fonction de la vitesse du courant [? ]. La figure 2.30 présente un exemple de résultat obtenu à l'aide du modèle HOS avec courant variable. On simule le cas d'une houle régulière linéaire avec un courant dans le sens de la houle qui varie horizontalement de façon périodique comme sur la figure 2.29. On présente dans cette figure une vue instantanée de l'élévation de surface libre.

Les caractéristiques classiques de l'interaction houle-courant sont retrouvées : allongement de la longueur d'onde et réduction de l'amplitude dans la zone d'augmentation de la vitesse du courant. On peut alors extraire localement l'amplitude de la houle correspondante  $a$  ainsi que son nombre d'onde  $k$  et représenter leurs évolutions en fonction de la vitesse du courant locale. On compare dans une configuration co-courant et une configuration contre-courant avec la théorie linéaire sur la figure 2.30.  $a_0$ ,  $k_0$  et  $C_0$  correspondent aux caractéristiques de la houle sans courant.

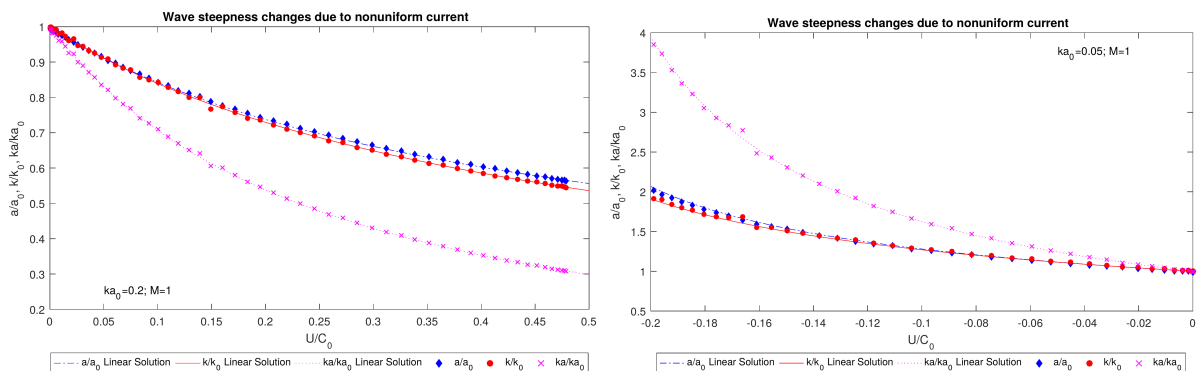


FIGURE 2.31 – Evolution des caractéristiques de la houle en fonction de la vitesse du courant - Courant colinéaire (gauche) et courant opposé (droite).

L'accord avec la théorie linéaire est parfait lorsqu'on utilise une surface libre linéarisée (*i.e.* ordre de non-linéarité  $M = 1$ ). Grâce au modèle non-linéaire HOS, cette validation

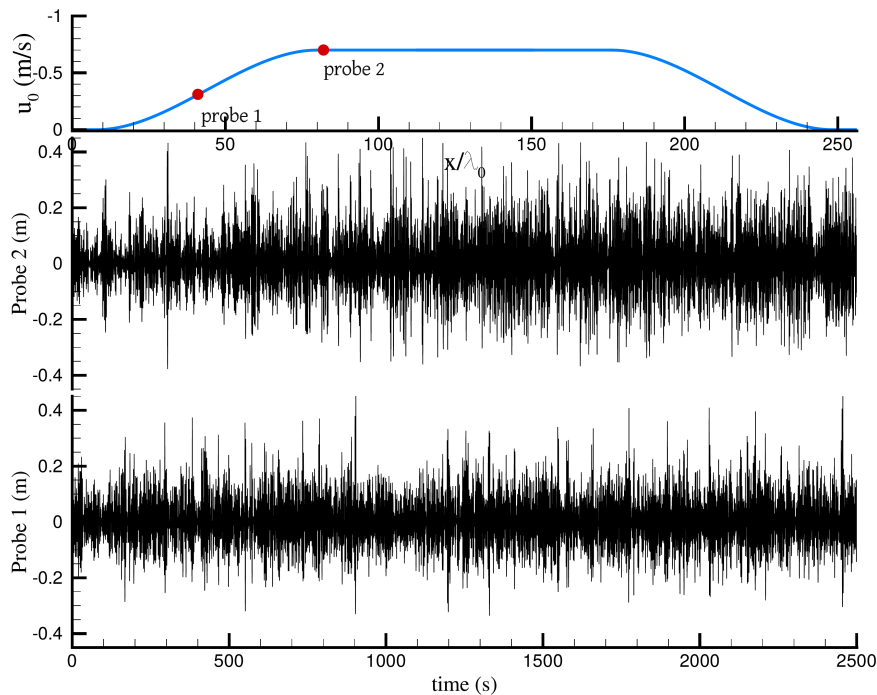


FIGURE 2.32 – Position des sondes et élévation de surface libre au cours du temps pour le cas d’une houle irrégulière se propageant face à un courant variable en espace.

ouvre la voie à l’étude, par exemple, de l’influence des non-linéarités de surface libre sur l’évolution de ces caractéristiques de la houle en présence de courant [? ?].

**Exemples d’application** On peut alors appliquer la configuration précédente à de la houle irrégulière qu’on impose en amont de la zone où le courant apparaît et qui va interagir avec celui-ci. Les configurations de courant colinéaire aux vagues et de courant opposé peuvent être étudiées en utilisant des sondes à différentes positions dans le domaine. Les non-linéarités associées à la houle sont ici prises en compte. La figure 2.32 donne un exemple d’élévation de surface libre en deux positions du domaine dans le cas d’un courant opposé à la direction de propagation des vagues.

Une fois les signaux de sonde obtenus, on peut caractériser les densités de probabilités de l’élévation de surface libre pour analyser un peu plus finement l’effet du courant. La figure 2.33 présente au niveau de la sonde 2 la densité de probabilité de l’élévation de surface libre.

L’influence du courant est notable sur les statistiques associées à l’état de mer. En particulier, l’asymétrie verticale, caractérisée par le skewness de l’élévation de surface libre, est réduite en courant colinéaire et augmentée en courant opposée. L’importance des événements extrêmes est habituellement quantifiée par le kurtosis qui est fortement réduit en courant colinéaire mais ne présente pas d’augmentation significative (comme attendu) en courant opposé. Cependant, la durée de ces simulations  $\simeq 450T_p$  n’était pas tout à fait suffisant pour que ces statistiques soient parfaitement convergées.

Le point essentiel est que le modèle non-linéaire de propagation HOS est désormais mis en place lorsqu’un courant irrotationnel est présent dans le domaine et peut donc a priori

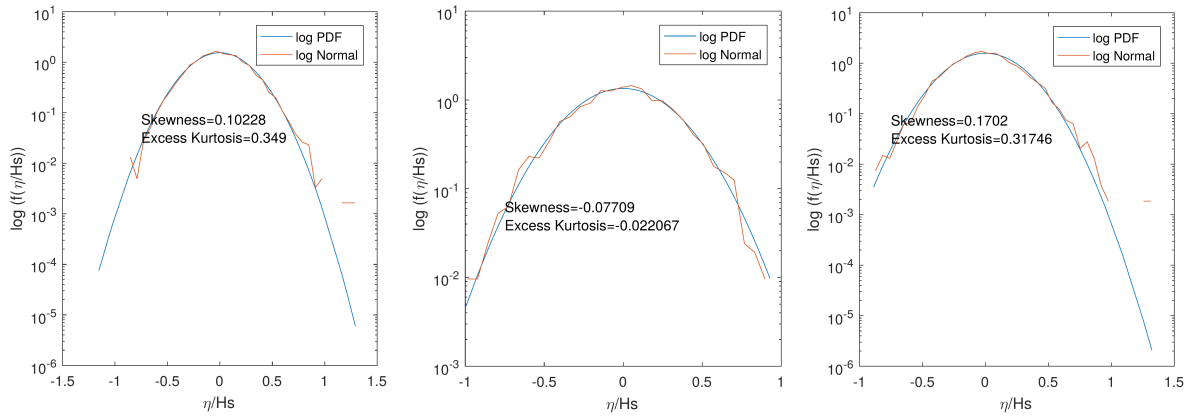


FIGURE 2.33 – Densité de probabilité de l’élévation de surface libre au niveau de la sonde 2 2.32. Sans courant (gauche), courant colinéaire (milieu) et courant opposé (droite).

être utilisé pour étudier les phénomènes physiques mis en jeu dans une telle configuration. On étudiera plus précisément l’aspect statistique et événements extrêmes dans le chapitre 4 avec des comparaisons avec des données expérimentales.

## 2.5.2 Extension au vent

La prise en compte du vent dans la modélisation des états de mer est une problématique très ancienne, notamment afin de comprendre les transferts d’énergie associés. Du point de vue de la modélisation du phénomène, on se réfère la plupart du temps aux modèles de Jeffreys [?] et de Miles [?]. Le modèle de Jeffreys suppose que le transfert d’énergie est dû à la traînée induite par la séparation de l’écoulement au niveau de la face arrière de la crête. La séparation induit une asymétrie du profil de pression sur la surface libre, responsable du transfert d’énergie. A noter que les vagues doivent être suffisamment cambrées pour que la séparation ait lieu [?]. Le modèle de Miles traduit quant à lui le transfert d’énergie induit par une instabilité de cisaillement du vent (et a été confirmé par des mesures en mer [?]). Il est également possible de représenter l’effet de ce cisaillement sous la forme d’une pression inhomogène au niveau de la surface libre.

A noter que récemment, de nombreux travaux se sont intéressés à la compréhension très fine de l’interface air-eau en terme notamment de transfert d’énergie, que ce soit à l’aide d’expériences en laboratoire [? ?] ou à l’aide d’outils de simulation numérique haute fidélité type Direct Numerical Simulation (DNS) [? ?] ou Large Eddy Simulations (LES) [?].

De par leur relative simplicité, ce sont les deux premières approches qui ont été classiquement utilisées et notamment avec pour objectif la simulation du forçage dû au vent à l’aide d’une approche mono-phasique telle que l’approche potentielle non-linéaire à l’œuvre dans la modélisation HOS. On indiquera par exemple dans ce contexte la prise en compte du forçage dû au vent à l’aide de ces modèles dans l’étude de l’apparition des vagues scélérates [? ?]. Des travaux récents menés à l’IIT Madras [?] ont inclus dans le modèle HOS-NWT la prise en compte du vent avec le processus de Jeffreys.

En complément de ces approches dites déterministes, l'évolution à grande échelle d'états de mer en condition réelle est habituellement traitée à l'aide de formulations stochastiques grâce aux modèles dits océano-météo. Ces modèles s'intéressent à l'évolution spatio-temporelle des quantités statistiques associées au champ de vagues (à savoir son spectre directionnel d'énergie ou d'action). En condition réelle en grande profondeur et sans courant, l'évolution du spectre est dominée par les interactions non-linéaires, le forçage dû au vent ainsi que la dissipation par moutonnement.

Ainsi, de très nombreux travaux se sont intéressés à la modélisation d'un point de vue stochastique de l'effet du vent sur les vagues. Au jour d'aujourd'hui, des formulations assez précises par rapport aux observations en mer sont en place en terme de taux de croissance et de déclin des spectres d'énergie dans les outils dits de 'hindcast' de troisième génération type WAVEWATCH III [?] ou WAM [?].

Dans ce contexte, j'ai suivi et participé aux travaux de thèse d'Yves Perignon [?] dont une partie était associée à l'utilisation des termes stochastiques de forçage et de dissipation issus de WAVEWATCH III dans des simulations déterministes HOS. La paramétrisation du couplage océan-atmosphère de Bidlot *et al.* [?] est utilisée. L'idée est d'adapter cette formulation à l'approche déterministe HOS afin de pouvoir comparer la modélisation complètement non-linéaire avec l'équation cinétique régissant le modèle stochastique WAVEWATCH III qui est faiblement non-linéaire.

### Formulation générale

Au niveau de l'interface air/eau, les transferts d'énergie sont représentés par le travail des contraintes à l'interface. On a donc classiquement une contribution des contraintes normales (pression) et des contraintes de cisaillement (viscosité). Ces dernières sont en première approximation négligées car n'intervenant qu'aux courtes longueurs d'onde pour le forçage dû au vent et d'intensité assez faible dans le cas de la dissipation induite par la présence de l'air sur l'évolution du champ de vagues.

De ce fait, on se limite à l'effet de la pression au niveau de la surface libre. Il est alors possible de modifier les conditions de surface libre (Eqs. (2.7) & (2.8)) dans le cas d'une pression inhomogène au niveau de cette surface (notée  $p_a(\mathbf{x}, t)$ ) comme suit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= (1 + |\nabla \eta|^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta && \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \phi^s}{\partial t} &= -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \frac{p_a}{\rho} && \text{en } z = \eta(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.48)$$

avec  $\rho$  la densité de l'eau.

Cette formulation est très générale et seule la forme de la pression va changer suivant les différents modèles de vent. A noter que le travail induit par une distribution donnée de pression peut être positif ou négatif et peut donc être utilisé également comme processus dissipatif. C'est la stratégie adoptée par exemple dans la modélisation de la plage absorbante du bassin de houle numérique HOS-NWT (voir Eq. (2.33)).

### Approche stochastique

Les modèles océano-météorologiques sont classiquement régis par une simple équation de bilan sur la densité spectrale d'énergie  $E(k, \theta)$  [?]. Cette équation dite cinétique traduit

la propagation spatio-temporelle de l'état de mer et l'influence des processus physiques prépondérants, à savoir le forçage dû au vent ( $S_{in}$ ) la dissipation d'énergie ( $S_{diss}$ ) et les transferts d'énergie non-linéaires associés aux interactions à 4 vagues ( $S_{nl}$ )

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c}_g \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) E(k, \theta) = S_{in}(k, \theta) + S_{diss}(k, \theta) + S_{nl}(k, \theta) \quad (2.49)$$

avec  $\mathbf{c}_g$  la vitesse de groupe et les termes de forçage dû au vent exprimés sous la forme

$$S_{in}(k, \theta) = \omega \mu_{in}(k, \theta) E(k, \theta) \quad (2.50)$$

Il est alors aisé de montrer que ce dernier terme, résultat du couplage océan-atmosphère en terme d'énergie, peut être ré-exprimé sous la forme d'une pression (dont le travail résultera dans le changement énergétique caractérisé par  $S_{in}$ ).

$$\frac{p_a(\mathbf{x}, t)}{\rho} = \mathcal{F}^{-1} (i\mu_{in}(k, \theta) A_k^\eta(t)) \quad (2.51)$$

avec  $\mathcal{F}^{-1}$  la transformée de Fourier inverse permettant le passage entre l'espace modal ( $k, \theta$ ) et l'espace physique ( $\mathbf{x}$ ). On peut alors utiliser cette distribution de pression dans le modèle d'évolution de la surface libre (Eq. (2.48)).

En vue de la simulation d'états de mer en présence de vent sur des durées significatives, il est nécessaire d'adjoindre au précédent transfert de quantité de mouvement de l'air vers l'eau un processus de dissipation d'énergie. Dans ce contexte d'états de mer en phase de croissance dû à la présence de vent, il a été montré que le déferlement par moutonnement est le processus physique dissipatif prépondérant. Ainsi, de manière similaire à la modélisation de l'effet du vent, celle du déferlement par moutonnement est caractérisés par le terme  $S_{diss}$  et donc par une distribution de pression sur la surface libre équivalente (du point de vue énergétique)

$$S_{diss}(k, \theta) = -\omega \mu_{diss}(k, \theta) E(k, \theta) \quad (2.52)$$

$$\frac{p_a(\mathbf{x}, t)}{\rho} = \mathcal{F}^{-1} (-i\mu_{diss}(k, \theta) A_k^\eta(t)) \quad (2.53)$$

Il est important de noter que le choix de la paramétrisation des termes  $\mu_{in}$  et  $\mu_{diss}$  n'est pas unique et assez complexe afin d'avoir une évolution cohérente des états de mer tel que représenté par l'Eq. (2.49). Dans le cadre du développement des modèles de hindcast, de nombreux choix de paramétrisations ont été testés et améliorés au fur et à mesure du temps. Cependant, cela reste toujours un enjeu central dans le développement de ces modèles [? ]. On utilisera dans cette partie une paramétrisation relativement simple (par rapport aux derniers développements disponibles), mais tout de même validée, robuste et consistante vis à vis des processus physiques en jeu, à savoir la paramétrisation dite BAJ [? ].

## Résultats

L'objectif principal est ici de démontrer la faisabilité de l'introduction des termes de couplage océan-atmosphère pour représenter l'effet du vent et de la dissipation par

moutonnement dans un modèle déterministe de propagation non-linéaire d'états de mer par une approche potentielle.

En utilisant la même paramétrisation mise en œuvre et validée dans les modèles spectraux de troisième génération type WaveWatch III, il sera possible de comparer les résultats déterministes aux résultats stochastiques. Le formalisme entre les deux approches est différent, notamment vis à vis de la non-linéarité des états de mer et des déviations sont donc attendues. Cependant, cette comparaison doit permettre une validation de l'approche choisie.

On étudie l'évolution d'un état de mer caractérisé à son état initial par un spectre directionnel  $E(\omega, \theta) = S(\omega).D(\omega, \theta)$  avec  $H_s = 1\text{m}$  et  $T_p = 5\text{s}$ . La distribution fréquentielle suit un spectre de type JONSWAP et l'étalement directionnel angulaire est celui utilisé dans WaveWatchIII. Ce champ de vagues est alors soumis à un vent caractérisé par une vitesse de référence à 10m de  $u_{10} = 10\text{ m/s}$ .

On peut alors étudier l'évolution au cours du temps de l'énergie contenue dans cet état de mer avec les deux approches (dont les paramètres numériques ont été choisis de façon à avoir une résolution précise des phénomènes). La figure 2.34 présente cette comparaison sur une durée significative de propagation de 1000 périodes de pic (représentant environ 1h30min de temps physique pour cet état de mer).

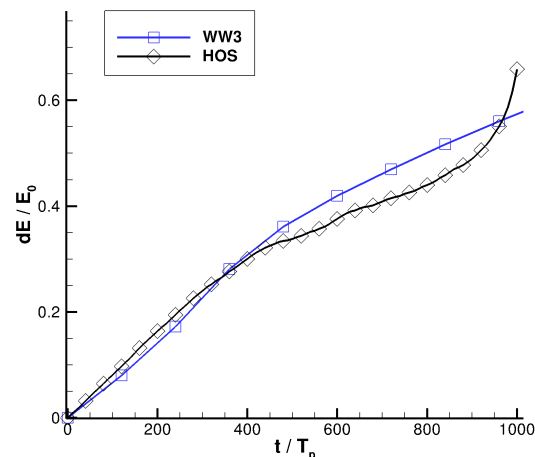


FIGURE 2.34 – Évolution au cours du temps de l'énergie d'un état de mer directionnel ( $H_s = 1\text{m}$ ,  $T_p = 5\text{s}$ ) soumis à un vent constant  $u_{10} = 10\text{ m/s}$

On observe tout d'abord une croissance linéaire de l'énergie consistante entre les deux approches, jusqu'à environ  $400 T_p$ . L'apport d'énergie global associé au forçage du vent et à la dissipation par moutonnement atteint environ 30% de l'énergie initiale. Ensuite, on peut remarquer jusqu'à  $800 T_p$  un phénomène de saturation du transfert d'énergie avec un taux de croissance qui diminue dans les deux approches, mais des différences commencent à apparaître de manière significative entre la simulation de référence WaveWatchIII et la simulation déterministe HOS. Enfin, le modèle HOS semble devenir instable par la suite avec une augmentation irréaliste de l'énergie.

Ces résultats sont très encourageants quant à la possibilité d'utiliser cette paramétrisation pour représenter l'effet du vent sur l'évolution d'un état de mer à l'aide d'un modèle déterministe. En effet, on a pu s'assurer de l'évolution correcte du spectre en analysant l'évolution de celui-ci (intégré en direction) ainsi que des termes associés au forçage et à la dissipation  $S_{in}$  et  $S_{diss}$ . La figure 2.35 présente la comparaison des résultats HOS au résultats WaveWatchIII à trois instants de l'évolution temporelle ( $t = 0$ ,  $t = 360 T_p$  et  $t = 960 T_p$ ).

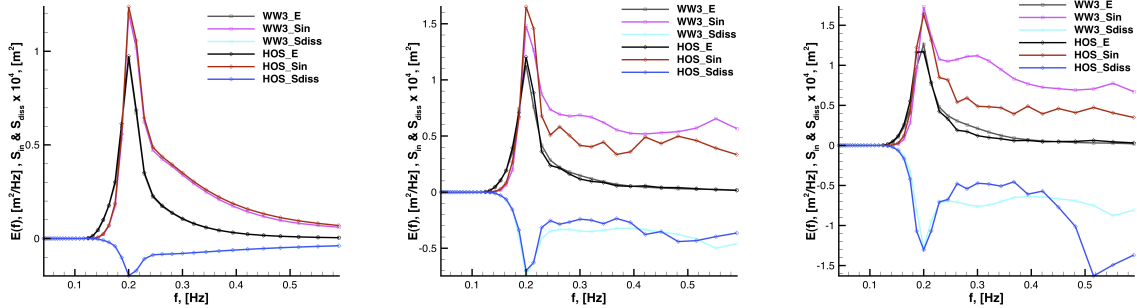


FIGURE 2.35 – Comparaison du spectre fréquentiel et des termes de forçage entre les simulations stochastiques (WaveWatchIII) et les simulations déterministes (HOS) pour trois instants :  $t = 0$  (gauche),  $t = 360 T_p$  (milieu) et  $t = 960 T_p$  (droite)

Sur un horizon temporel de quelques centaines de périodes de pic (ce qui est a priori le cadre d'application classique des simulations non-linéaires d'états de mer avec les capacités de calcul actuelles), on peut donc représenter l'effet du vent en y incluant l'influence du déferlement par moutonnement avec cette approche. D'un point de vue énergétique, les deux approches concordent et il semble donc possible d'exploiter la modélisation déterministe fine pour améliorer la compréhension et la modélisation à l'œuvre dans les approches stochastiques.

La capacité du modèle HOS à reproduire l'évolution très longue durée d'états de mer en présence de vent est conditionnée par l'obtention d'un modèle stable, notamment dans la queue du spectre qui apparaît comme problématique dans la figure 2.35. Il est probable que les termes sources utilisés doivent être modifiés légèrement pour les adapter à notre formalisme complètement non-linéaire, qui diffère du formalisme faiblement non-linéaire des modèles spectraux.

### 2.5.3 Conclusion-perspectives

#### Résumé

Cette section a mis en lumière les possibilités d'enrichissement de la modélisation déterministe par approche HOS en terme de phénomènes physiques accessibles. En effet, si on a pu démontrer précédemment les capacités numériques de la méthode pour la résolution précise et efficace de la propagation des états de mer dans diverses configurations géométriques, il est d'intérêt, en vue d'applications pratiques, d'étudier les possibilités de la méthode à être enrichie de phénomènes physiques supplémentaires.



Dans ce cadre, le modèle a été développé pour la prise en compte des deux phénomènes physiques les plus importants dans l'évolution des états de mer. Les résultats essentiels sont les suivants :

- **Interactions houle-courant** par l'inclusion d'un courant variable dans le modèle HOS-ocean par modification des conditions de surface libre.
  - Modèle développé dans des configurations unidirectionnelles en co-courant ou contre-courant et validé en houle régulière grâce à des solutions analytiques.
  - Application du modèle en houle irrégulière et mise en lumière de l'influence de l'interaction houle-courant sur les répartitions de probabilités de l'élévation de surface libre.
- **Forçage dû au vent** par distribution de pression inhomogène sur la surface libre réalisé lors de la thèse d'Y. Perignon [? ]
  - Adaptation du couplage océan-atmosphère des modèles de hindcast stochastiques à un formalisme déterministe
  - Prise en compte d'un terme de forçage et d'un terme de dissipation représentatif du déferlement par moutonnement.
  - Validation par comparaison à des simulations WaveWatchIII : état de mer irrégulier et directionnel soumis à un vent constant. L'approche est adaptée à des simulations sur des échelle de temps de quelques centaines de périodes de pic.

### Limitations & perspectives

Les développements précédents ont pu mettre en lumière un certain nombre de limitations de l'approche adoptée du point de vue de la physique modélisée ou de son utilisation pratique dans un code de calcul potentiel non-linéaire.

En ce qui concerne les interactions houle-courant, les limitations principales sont associées à la physique résolue par l'approche adoptée ici. En effet, on fait un certain nombre d'hypothèses fortes sur le courant considéré afin de pouvoir toujours considérer l'écoulement irrotationnel : courant homogène dans la colonne d'eau (direction verticale) et faiblement variable dans la direction horizontale. Ces hypothèse restreignent l'utilisation du modèle couplé à des configurations assez simples mais permettent tout de même, de mon point de vue, d'étudier la physique du phénomène.

Pour aller plus loin, il est intéressant de noter qu'un certain nombre d'études récentes (voir par ex. [? ]) se sont intéressées, toujours dans un formalisme potentiel, à l'influence d'un courant qui n'est plus homogène dans la verticale, mais qui est cette fois-ci un cisaillement pur. L'influence de ce dernier au premier ordre peut être représenté dans ce même formalisme. Il pourrait donc être intéressant d'ajouter cette représentation dans le modèle actuel afin d'étendre le domaine d'application dans les études houle-courant.

Cependant, il me semble important d'indiquer que dans des configurations réalistes de courant (dont le profil vertical mesuré en mer est toujours très complexe), l'hypothèse d'irrotationnalité de l'écoulement n'est plus vérifiée. Ainsi, si il s'agit d'une thématique de recherche qui apparaît de grand intérêt et qu'il me sera amené à étudier dans le futur,

je pense que l'approche de modélisation par résolution des équations d'Euler devra s'imposer, même si les coûts en temps de calcul seront beaucoup plus importants que ceux de notre modèle potentiel non-linéaire actuel.

La prise en compte du vent par adaptation de l'approche stochastique permet une représentation correcte, d'un point de vue énergétique, de l'effet de celui-ci sur le spectre de vagues. Cette première étape permet de valider la représentation du forçage par une pression inhomogène sur la surface libre d'un point de vue énergétique. Cependant, il est important de se rappeler qu'il s'agit de la modélisation d'un phénomène très complexe et que cette paramétrisation de l'influence du vent n'est qu'approchée.

On peut tout de même chercher à améliorer cette modélisation avec des modèles simples ou une alternative consiste à résoudre finement l'écoulement dans l'air à l'aide d'approche CFD avec résolution type LES. De cette simulation complète, on peut penser réussir à en déduire la distribution exacte de la pression sur la surface libre correspondante. Cette approche, initiée récemment [?] est maintenant en cours de développement au laboratoire [? ?].

Le forçage dû au vent nécessite la mise en place d'un processus de dissipation représentant l'effet du moutonnement afin d'avoir une évolution cohérente. Cependant, même si d'un point de vue énergétique la modélisation du phénomène semble correcte, l'approche adoptée pose un certain nombre de questions dans un modèle déterministe tel que celui utilisé ici. En effet, la distribution de pression représentative du terme stochastique  $S_{diss}$  ne semble pas pertinente d'un point de vue physique. La figure 2.36 présente cette pression sur les deux faces de la vague (le vent se propageant suivant les x positifs).

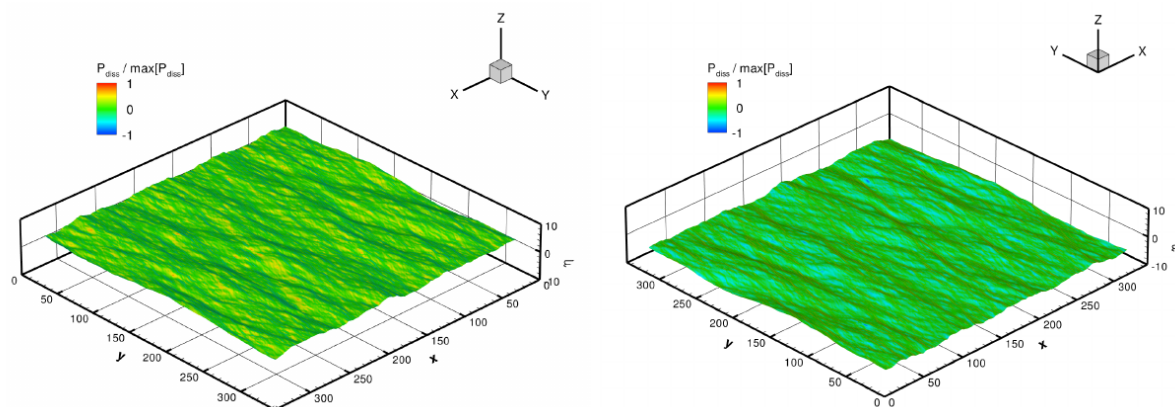


FIGURE 2.36 – Répartition de pression sur la surface libre du modèle de dissipation stochastique  $S_{diss}$ , vagues se propageant vers les x positifs. Face avant des vagues (gauche) et face arrière (droite).

On remarque que le terme de pression va agir aussi bien sur la face avant de la vague que sur la face arrière. Or, les observations du phénomène de moutonnement laissent à penser que l'effet dissipatif est totalement asymétrique entre les deux faces de la vague, ce qui n'est pas du tout représenté par le modèle présent.

Ainsi, son utilisation dans un modèle déterministe peut poser question. De manière similaire au terme de forçage, on peut chercher à aller vers une modélisation plus fine du

phénomène physique, même si dans le cas du déferlement par moutonnement, sa simulation par CFD semble encore inaccessible au vu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu. Des approches simplifiées seront préférées, mais qui devront éventuellement permettre de pallier aux problèmes de stabilité de la queue du spectre tel que rapporté avec la paramétrisation testée.

## 2.6 Extension aux états de mer déferlants

Il est essentiel de rappeler ici que le modèle HOS utilise une formulation potentielle non-linéaire du problème. Cette classe d'approximation est parfaitement adaptée à l'étude de la génération et de la propagation des ondes de gravité. Cependant, elle est en défaut dans le cadre de la modélisation d'états de mer déferlants. Ce phénomène est en effet piloté par de la physique complexe faisant intervenir la viscosité du fluide, la présence de l'air (avec possible effets de compressibilité), la génération de bulles, etc. L'ensemble de ces phénomènes vont résulter dans une dissipation d'une partie de l'énergie contenue dans cet état de mer, mais il est évident que l'approche potentielle est incapable de les simuler directement.

Ainsi, cette classe d'approximation ne peut formellement être utilisé que dans le cas d'états de mer ne présentant pas de déferlement. Il s'agit donc d'une limitation vis à vis de la physique pouvant être résolue. Il est à indiquer que cette approche potentielle a été largement utilisée pour étudier des évènements déferlants à l'aide de formulations ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) en BEM ou FEM (Finite Element Methods) [? ? ?]. Ces dernières sont différentes de la méthode HOS où la surface libre est supposée monovaluée. Mais ces études se limitent à la phase d'initiation du déferlement, jusqu'à l'instant de la reconnexion de l'interface air-eau. Si ces modèles sont en effet adaptés et ont été validés expérimentalement dans cette phase d'évolution, ils ne permettent pas d'aller au delà où l'écoulement devient rotationnel au moment de la reconnexion d'interface et où la dissipation apparaît instantanément.

Cependant, d'un point de vue pratique, l'intérêt des modèles potentiels non-linéaires est d'étudier des états de mer présentant une non-linéarité significative. On se retrouve alors confronté assez rapidement à la présence possible d'évènements déferlants dans les simulations et sur les moyens à employer pour : i) qu'une telle simulation soit possible d'un point de vue numérique (*i.e.* de continuer la modélisation après que cet évènement ait lieu) et ii) qu'elle garde sa précision de résolution.

Ainsi, en complément des études précédentes, un effort particulier a été porté à la prise en compte des évènements déferlants dans notre modèle potentiel non-linéaire de propagation de vagues. Comme on l'a vu, la formulation basée sur les modèles issus des approches stochastiques n'est pas satisfaisant d'un point de vue physique lorsqu'appliqué avec une formulation déterministe (même si la dissipation d'énergie est satisfaisante). D'autre part, ces approches sont *a priori* dédiées à la problématique du moutonnement et donc limitées à la configuration du déferlement en présence de vent.

Dans le cadre de la chaire de recherche 'SimAvHy', financée dans le cadre de l'IRT Jules Verne, des travaux ont été menés en vue du développement d'une méthodologie dédiée à la prise en compte d'évènements déferlants dans les modèles HOS développés au LHEEA. On s'est intéressé principalement à une configuration simple : sans vent, sans courant et

en profondeur constante. A noter que cette méthodologie peut être étendue à d'autres modèles de propagation de vagues basées sur un formalisme potentiel non-linéaire.

J'ai tout d'abord établi les limites d'applicabilité du modèle HOS-ocean, afin d'identifier précisément le besoin d'un modèle de déferlement adapté. Ensuite, j'ai travaillé avec Betsy Seiffert dans le cadre de son post-doctorat sur la modélisation des événements déferlants dans une approche potentielle non-linéaire. Une méthodologie permettant : i) de détecter précisément l'amorce du déferlement avec un paramètre dédié et ii) de dissiper l'énergie adéquate a été implémentée. Une campagne expérimentale dédiée, réalisée dans les installations expérimentales du LHEEA, a permis la validation des modèles développés.

### 2.6.1 Applicabilité du modèle HOS-ocean

Dans les modèles HOS développés et utilisés dans les parties précédentes, le choix a été fait d'avoir un contrôle optimal sur la précision du modèle numérique mis en œuvre. De ce fait, l'ensemble des résultats présentés ont été obtenus sans aucun filtrage, lissage ou quelconque artefact numérique de traitement des instabilités. De ce fait la présence de déferlement, que l'on peut associer à l'augmentation de la pente locale des vagues et donc du point de vue numérique a une possible instabilité numérique, va se répercuter par une impossibilité de résolution.

En ce sens, lorsqu'on va parler d'applicabilité du modèle HOS, on va donc se référer à quand est-ce que le modèle peut résoudre le problème. Comme on le verra par la suite, cette applicabilité est très liée au choix des paramètres numériques utilisés :

- plus on augmente la discrétisation, plus on va résoudre des ondes de petites longueurs d'onde (jusqu'à un nombre d'onde  $k_{\max}$ ) : les instabilités numériques auront alors tendance à être augmentées.
- plus l'ordre de non-linéarité est important, plus les instabilités sont également présentes. D'un point de vue numérique, si on augmente  $M$ , l'algorithme HOS (Eq. (2.14)) fait apparaître des dérivées d'ordre supérieur, plus instables numériquement. A l'opposé, si on considère un modèle linéaire ( $M = 1$ ), on peut résoudre des vagues non-physiques sans problème de stabilité.

En complément, si on augmente la discrétisation et l'ordre de non-linéarité, on augmente la précision du modèle (Sec. 2.2.3). Cependant, cela se fait donc dans le modèle actuel par une perte de stabilité (robustesse) du code. Ainsi, le choix fort quant au contrôle de la précision de résolution (par l'inexistence de procédure de filtrage) résulte dans une robustesse qui peut apparaître plus limitée que d'autres modèles existants. Mais cet argument est de notre point de vue à très largement modérer vis à vis du manque de validation de l'effet des algorithmes de filtrage ou lissage appliqués dans les modèles potentiels non-linéaires sur la précision de la solution obtenue.

Les résultats présentés sont donc spécifiques au modèle HOS-ocean, mais peuvent être étendus (dans leur conclusion générale) à l'ensemble des modèles potentiels non-linéaires (si ces derniers sont d'une précision équivalente au modèle HOS et si ils n'appliquent pas de procédure de traitement des instabilités de manière trop 'importante').

## Houle régulière

On s'intéresse tout d'abord à la houle régulière qui peut devenir instable lorsque la non-linéarité est trop importante. Les paramètres physiques prépondérants pour attester de la stabilité de cette houle sont : i) la cambrure  $\epsilon = H/\lambda$  et la profondeur relative  $h/\lambda$ . On utilise ici la formule simple issue de Miche [?] comme limite théorique de stabilité de la houle régulière :

$$\epsilon_{lim} = \frac{H_{lim}}{\lambda} = 0.14 \tanh(kh) \quad (2.54)$$

Cette formule a été validée par rapport à de nombreuses expériences et est assez largement utilisée. Elle permet de savoir si une houle régulière de paramètres donnés peut physiquement exister. L'objectif ici sera plutôt de donner des limites d'applicabilité d'un point de vue pratique pour le modèle HOS-ocean.

Il existe de nombreux travaux s'attachant à modéliser ces vagues régulières dans tout leur domaine d'existence, *i.e.* jusqu'à la limite donnée par l'Eq. (2.54), depuis les travaux originaux de [?] jusqu'aux développements récents d'outils open-source de grande précision [?]. Cependant, ces modèles sont en général : i) limités aux configurations unidirectionnelles, ii) non-adaptés à l'étude de la houle irrégulière et iii) possiblement d'une efficacité numérique plus réduite que la méthode HOS.

Ainsi, l'approche numérique à l'œuvre dans notre modèle conduit à un domaine d'applicabilité en houle régulière qui est réduit par rapport à la limite théorique de stabilité. La figure 2.37 présente dans toute la gamme de profondeur relative  $h/\lambda$  les capacités de simulation du modèle HOS-ocean.

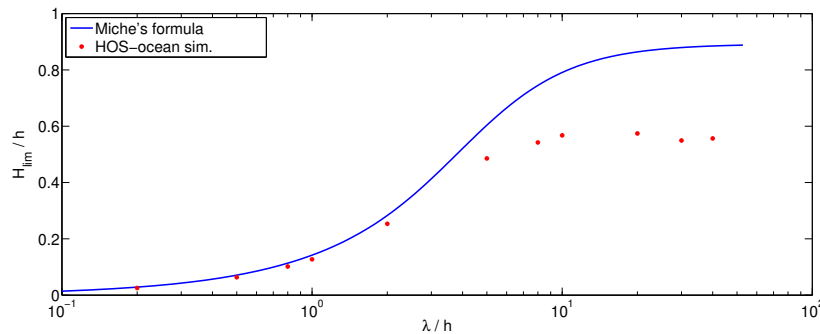


FIGURE 2.37 – Hauteur maximale de la houle régulière dans les expériences de Miche [?] et par des simulations HOS-ocean. (Figure issue de [?])

Il est à noter que cette limite pratique est très dépendante de la précision visée pour la simulation numérique. Elle est donc ici plutôt indicative, la procédure exacte étant habituellement de réaliser une étude de convergence pour la configuration d'intérêt avec un niveau d'erreur acceptable. Ce qui est représenté dans la présente figure correspond à des configurations pour lesquelles le modèle HOS réussit à propager avec une erreur maîtrisée cette houle régulière sur une durée significative (plusieurs dizaines de périodes de propagation).

On retrouve qu'en grande profondeur, le modèle HOS-ocean parvient à modéliser précisément les vagues jusqu'à une cambrure proche (environ 90%) de la limite de stabilité.

Lorsque la profondeur relative diminue ( $\lambda/h$  augmente) la zone d'applicabilité du modèle HOS-ocean est réduite. Cette propriété est inhérente au formalisme pseudo-spectral utilisé. Dans ces zones de faible profondeur, la solution du problème est une houle cnoidale qui s'éloigne de la solution sinusoïdale lorsque la profondeur relative diminue. Par conséquent, un grand nombre de composantes (modes) est nécessaire à la description de cette solution (et particulièrement lorsque la cambrure augmente). Ceci conduit à de possibles instabilités numériques réduisant le domaine d'utilisation du modèle HOS-ocean. Le formalisme pseudo-spectral n'est en effet pas très adapté à représenter des cas en très faible profondeur [?] et d'autres méthodes numériques seront probablement préférées [?] si il s'agit d'une configuration d'intérêt central. Cependant, le modèle HOS-ocean permet tout de même de traiter de vagues jusqu'à environ 70% de la hauteur limite en très faible profondeur d'eau  $\lambda/h \in [30 - 40]$ .

### Houle irrégulière

Le cadre d'application principal du modèle HOS-ocean est celui des états de mer irréguliers et directionnels. Les simulations étudiées par la suite sont donc initialisées à l'aide d'un spectre de vagues directionnel  $S(\omega, \theta) = F(\omega).G(\theta)$  avec

- le spectre fréquentiel  $F(\omega)$  défini comme spectre de JONSWAP avec une hauteur significative  $H_s$  et une période de pic  $T_p$
- La répartition angulaire  $G(\theta)$  définie par un paramètre d'étalement  $\beta$  correspondant à la fonction suivante

$$G(\theta) = \frac{1}{\beta} \left[ \cos \left( \frac{\pi\theta}{2\beta} \right) \right]^2 \quad (2.55)$$

Le domaine d'applicabilité des simulations irrégulières sera schématisé sous la forme de scatter-diagram ( $H_s/T_p$ ), comme étant le moyen le plus simple d'avoir une représentation parlante et facilement utilisable de ce domaine. Lors de mesures en mer, on représente les probabilités d'occurrence des différents états de mer sous cette forme, voir par exemple la figure 2.38 qui les donne dans le cas de la Mer du Nord grâce à un grand nombre de mesures effectuées sur la période 1973-2001 [?].

Ces mesures ont été réalisés dans de grandes profondeurs d'eau et est spécifique à la zone de mesure (comme tout scatter diagram). Cependant, il est intéressant d'observer que les états de mer les plus cambrés observés suivent approximativement une ligne à cambrure constante  $\epsilon = H_s/\lambda_p = 0.06$  qui peut être mise en regard de la limite obtenue en houle régulière. Au delà de cette valeur seuil, du déferlement a lieu en mer, ce qui limite la cambrure maximale physiquement possible (ou de façon équivalente la hauteur significative maximale pour une période de pic donnée). Des expériences menées en bassin [?] ont indiqué l'existence d'évènements déferlants pour des cambrures similaires  $\epsilon \geq 0.064$ .

De façon similaire à la limite en houle régulière, la profondeur va possiblement jouer un rôle important sur la présence d'évènements déferlants. Par exemple, la figure 2.39 présente les probabilités d'occurrence sur le site d'essais SEMREV [?], obtenus sur la période (2010-2016). Cet emplacement géographique présente une profondeur moyenne de  $h = 37 \text{ m}$  et il est donc attendu que les effets de profondeur finie prennent place pour les périodes  $T_p > 7 \text{ s}$ .

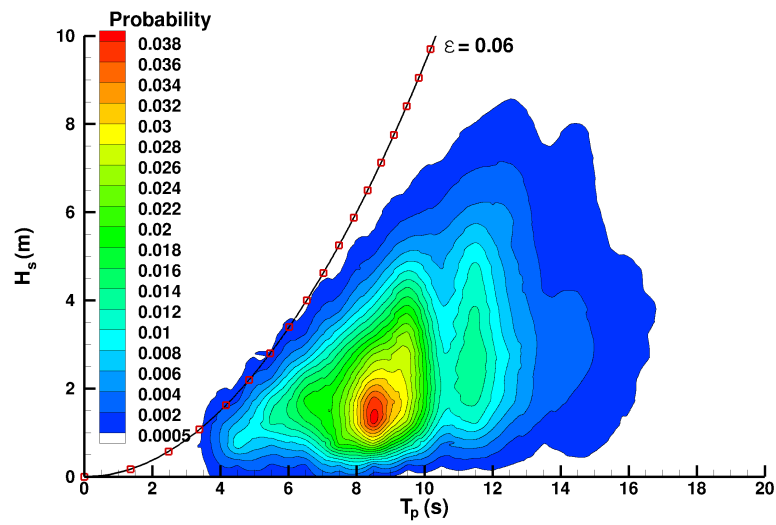


FIGURE 2.38 – Scatter-diagram des états de mer en Mer du Nord. Données sur la période 1973-2001 extraites de [? ]

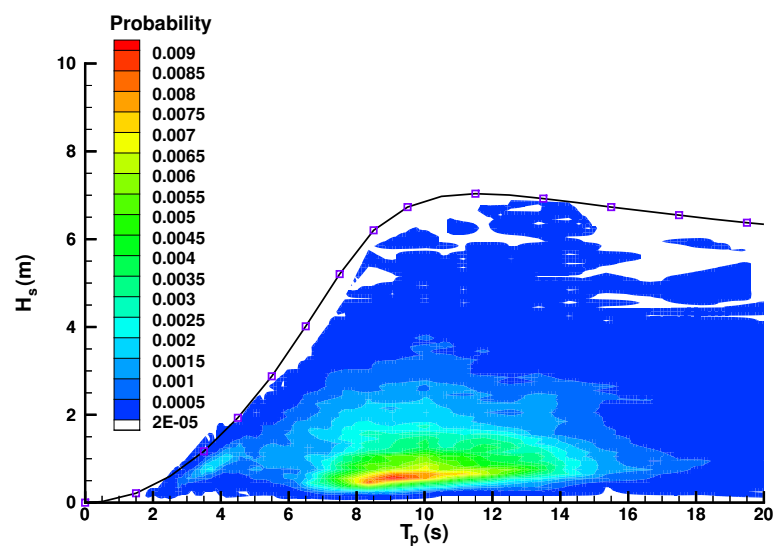


FIGURE 2.39 – Scatter-diagram des états de mer sur le site SEMREV, présentant une profondeur  $h = 37 \text{ m}$ . (Figure issue de [? ])

La limite haute des états de mer est donc, comme attendu, modifiée pour les faibles profondeurs relatives. Afin d'approximer cette limite, on peut utiliser la paramétrisation [? ?] donnée sous la forme

$$H_s = K_1 \lambda_p \tanh([K_2 k_p h + K_3] k_p h) \quad (2.56)$$

On peut alors choisir les paramètres adéquats aux données dont on dispose. Par exemple, la figure 2.39 superpose aux probabilités les résultats du modèle précédent avec  $K_1 = 0.06$  (cambrure limite en grande profondeur),  $K_2 = 0.2$  et  $K_3 = 0.33$ .

Dans le cadre des simulations HOS-ocean, je décris par la suite l'influence sur l'applicabilité des paramètres numériques et physiques prépondérants, à savoir

- Discrétisation numérique
- Profondeur d'eau
- Étalement directionnel
- Étalement fréquentiel

Afin d'avoir une estimation fiable de la possible présence d'évènements déferlants (d'un point de vue numérique) dans des simulations en houle irrégulière, il est nécessaire d'avoir i) un domaine de calcul suffisamment grand, ii) d'exécuter la simulation pendant suffisamment longtemps et iii) de choisir différents tirages de phases initiales. Par conséquent, dans les études suivantes, les paramètres numériques de base sont les suivants

- Taille du domaine :  $L_x = 51\lambda_p$  and  $L_y = 51\lambda_p$
- Discrétisation spatiale :  $N_x \times N_y = 512 \times 512$  points (sans erreur de repliement)
- Ordre de non-linéarité :  $M = 3$
- Durée de la simulation :  $T = 100 T_p$
- Nombre de tirages de phase : 20

**Influence de la discrétisation** Dans notre méthode pseudo-spectrale, la discrétisation définit le plus grand nombre d'onde résolu  $k_{\max} = (N - 1)\frac{2\pi}{L}$  avec  $N$  et  $L$  le nombre de modes et la longueur du domaine dans la direction horizontale d'intérêt ( $x$  ou  $y$ ). Pratiquement, le choix de ce paramètre est fait par rapport au nombre d'onde au pic  $k_p$  avec une paramétrisation classique faite à  $k_{\max} = 5 k_p$ . L'influence de cette discrétisation sur les domaines d'applicabilité de la méthode est donné sur la figure 2.40 pour une configuration classique de houle irrégulière directionnelle en profondeur infinie :  $\gamma = 3.3$ ,  $\beta = 0.3$ .

On retrouve sur chaque scatter-diagram la limite physique de présence de déferlement  $\epsilon = 0.064$  proposée par [?]. L'effet de la discrétisation apparaît ainsi très clairement, la couleur bleue étant associée à la zone accessible aux simulations HOS-ocean et la zone rouge celle qui ne l'est pas. Dans la configuration testée, il est évident qu'une limite à cambrure constante  $\epsilon = H_s/\lambda_p$  distingue précisément la zone accessible et on peut donc affirmer que la zone où le modèle HOS-ocean n'est pas applicable correspond aux paramètres générant un état de mer avec présence de déferlement d'un point de vue numérique.



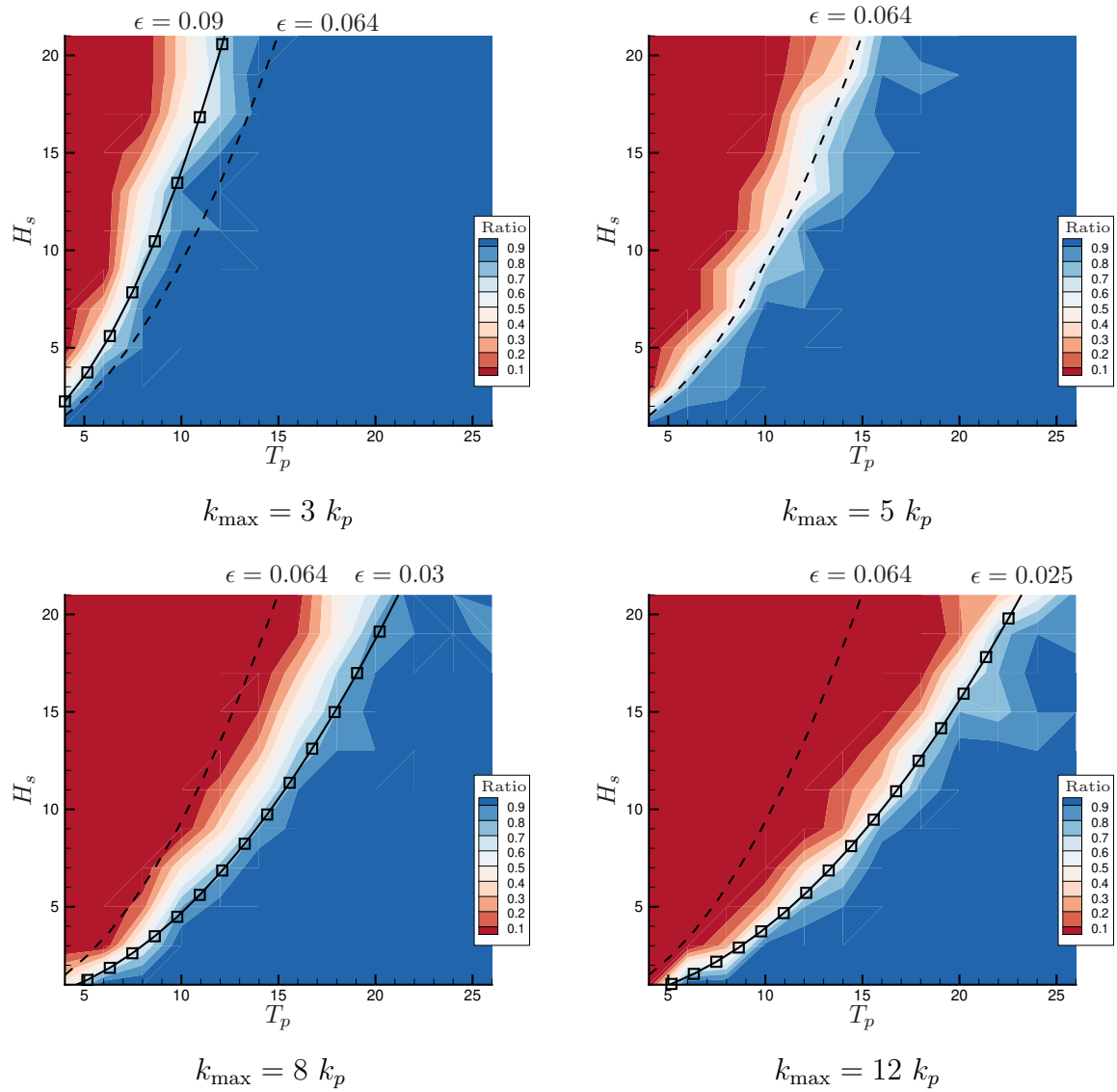


FIGURE 2.40 – Domaine de validité des simulations non-linéaires HOS. Influence de la discrétisation pour  $\beta = 0.30$ ,  $\gamma = 3.3$  et  $h = \infty$ . (Figure issue de [? ])

Quand les longueurs d'onde les plus courtes ne sont pas résolues (*i.e.* petit  $k_{\max}$ ), les vagues déferlantes dans la réalité sont filtrées et par conséquent le modèle peut propager des états de mer jusqu'à une cambrure très importante ( $\epsilon = 0.090$  pour  $k_{\max} = 3 k_p$ ). Ceci se fait au détriment de la précision de la résolution. Lorsqu'on va augmenter  $k_{\max}$ , les forts états de mer qui contiennent des vagues cambrées seront représentées plus précisément. En effet, ces événements sont représentées dans l'espace modal par un contenu énergétique jusqu'aux hauts modes. Mais ce gain en précision se fait au détriment de la robustesse du code, comme on le voit sur la figure 2.40 avec la diminution du domaine d'applicabilité lorsque  $k_{\max}$  augmente. Cette réduction (possiblement très importante) est inhérente à la méthode pseudo spectrale choisie qui ne comporte aucune procédure de filtrage ou de lissage afin de contrôler précisément la précision du modèle HOS-ocean.

Dans une étude classique, une étude de convergence vis à vis de la discrétisation sera réalisée et elle peut donc être difficile à réaliser pour des états de mer très cambrés à cause de cette applicabilité réduite. A noter que les choix de paramètres utilisés ici correspondent à des cas très discrétisés, assez peu utilisés en pratique. Dans la suite, la discrétisation est fixée à  $k_{\max} = 5 k_p$ , ce qui avec l'ordre de non-linéarité  $M = 3$  permet une solution rapide et efficace de la propagation d'états de mer irréguliers et directionnels pour des applications classiques en génie océanique.

**Influence de la profondeur d'eau** Les résultats précédents (figure 2.40) ont été obtenus dans une configuration de profondeur infinie. Il est intéressant d'étudier l'influence de la profondeur sur le domaine d'applicabilité du modèle HOS-ocean. La figure 2.41 présente les domaines d'applicabilité du modèle HOS-ocean pour différents choix de profondeur :  $h = [\infty; 150m; 75m; 35m]$ . Afin de synthétiser les résultats, la figure précédente ne représente que les limites du domaine d'applicabilité.

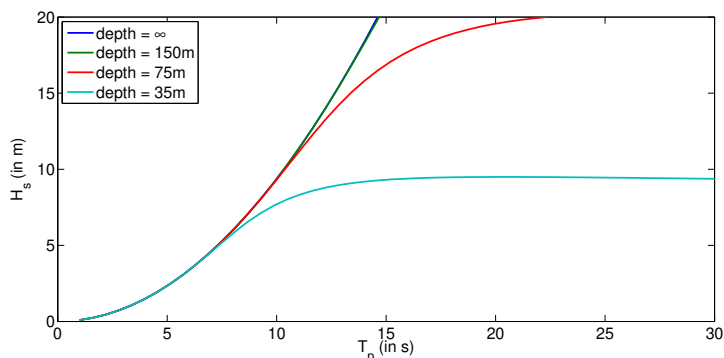


FIGURE 2.41 – Domaine de validité des simulations non-linéaires HOS. Influence de la profondeur pour  $\beta = 0.30$ ,  $\gamma = 3.3$ . (Figure issue de [? ])

On observe donc que la profondeur à un rôle essentiel dans le domaine d'applicabilité du modèle HOS-ocean. Cette zone est réduite dans le cas de profondeurs très réduite, comme c'est le cas en configuration réelle.

**Influence de la directionnalité** La figure 2.42 présente les domaines d'applicabilité de HOS-ocean pour différents choix de directionnalité  $\beta = [0; 0.15; 0.30; 0.60]$  et ce pour

deux profondeurs (infinie et  $h = 35 m$ ).

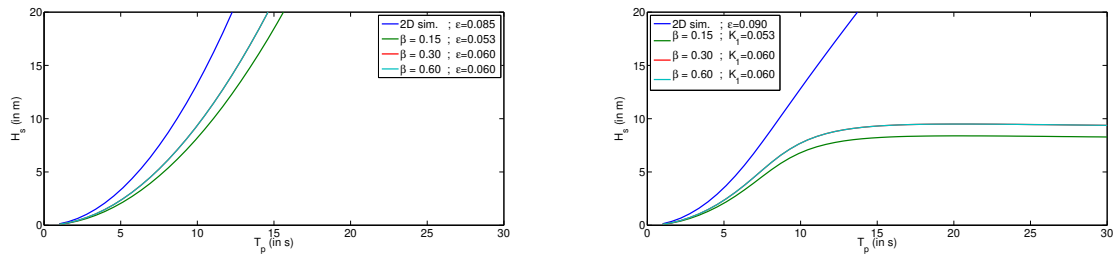


FIGURE 2.42 – Domaine de validité des simulations nonlinéaires HOS. Influence de l'étalement directionnel pour  $\gamma = 3.3$ . Profondeur infinie (gauche) et profondeur  $h = 35 m$  (droite). (Figure issue de [? ])

La configuration  $\beta = 0$  correspond à un cas uni-directionnel et il apparaît que ce dernier se comporte de façon assez différente des cas directionnels, en particulier en faible profondeur. Ce comportement n'est pas forcément inattendu si on garde à l'esprit que les phénomènes non-linéaires sont possiblement fortement influencés par la directionnalité de l'état de mer (en particulier l'instabilité modulationnelle [? ]). Il est important de se rappeler que d'un point de vue physique les configurations avec ou sans directionnalité sont assez différentes, comme le sont leur simulations numériques respectives.

**Influence de l'étalement fréquentiel** Le domaine d'applicabilité du modèle HOS-ocean pour différents étalement fréquentiels  $\gamma = [1; 3.3; 5; 10]$  est présenté sur la figure 2.43. Deux profondeurs (infinie et  $h = 35 m$ ) sont testées.

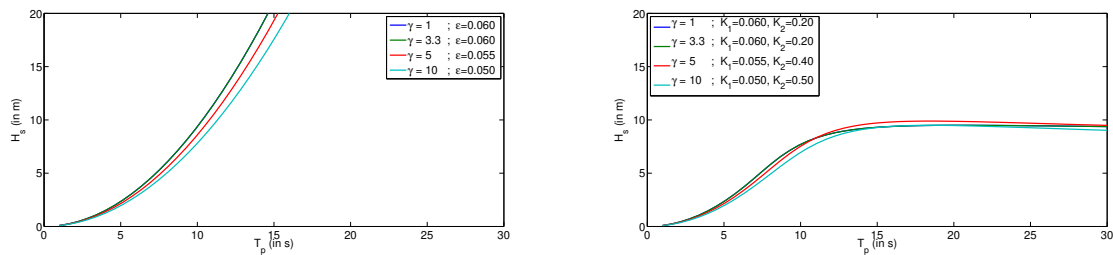


FIGURE 2.43 – Domaine de validité des simulations nonlinéaires HOS. Influence de l'étalement fréquentiel pour  $\beta = 0.3$ . Profondeur infinie (haut) et profondeur  $h = 35 m$  (bas). (Figure issue de [? ])

L'étalement en fréquence  $\gamma$  n'a pas une grande importance sur le domaine d'applicabilité du modèle HOS-ocean. On peut simplement observer qu'il est légèrement réduit en profondeur infini lorsque  $\gamma$  augmente. On peut, similairement à l'étude sur l'étalement fréquentiel, relier ce phénomène à l'importance de l'instabilité modulationnelle qui décroît lorsque gamma décroît.

On a donc pu identifier dans différentes configurations d'intérêt pratique les limites d'applicabilité du modèle HOS-ocean. Il est important de rappeler que ces limites ont été

identifiées comme une marque de la présence d'un déferlement du point de vue numérique. Si on cherche à mettre en place un modèle plus robuste, il est apparu essentiel de travailler à la mise en œuvre d'une modélisation des événements déferlants dans le modèle HOS-ocean, comme expliqué dans la section suivante.

### 2.6.2 Modélisation déterministe du déferlement

Comme je l'ai expliqué précédemment, le modèle HOS développé ne peut, de par son formalisme potentiel, simuler le déferlement (reconnexion d'interface, dissipation d'énergie, etc.). Ainsi, des méthodes spécifiques ont été développées pour être en mesure de résoudre ce problème. L'objectif est d'améliorer la précision des procédures classiquement utilisées [?] de type lissage (filtre passe-bande [?] ou hyper-visqueux [?], lissage local [?], etc.) ou que l'approche stochastique testée précédemment qui n'est pas cohérente d'un point de vue déterministe (section 2.5.2).

Le travail sur le modèle de déferlement a été fait principalement lors du post-doctorat de Betsy Seiffert que j'ai encadré, réalisé dans le cadre de la chaire de recherche 'SimAvHy' (IRT Jules Verne).

L'approche choisie se décompose en deux parties. Tout d'abord il faut être capable de détecter les événements potentiellement déferlants, avant le déferlement effectif, qui provoque une erreur dans le code de calcul HOS (cf section précédente sur l'applicabilité). La méthode choisie s'appuie sur des études récentes [?] qui ont mis en avant la robustesse d'un critère basé sur le ratio entre la vitesse de la particule fluide dans la crête déferlante et la vitesse de la crête correspondante. Un effort particulier a été apporté à l'évaluation précise de cette vitesse de crête à travers l'utilisation de transformées de Hilbert.

Une fois le critère de déferlement établi, il faut y adjoindre un modèle qui va dissiper une partie de l'énergie afin de permettre au modèle potentiel de passer l'événement déferlant. Le choix du modèle repose sur le fait que celui-ci soit le plus proche possible de la réalité physique (le champ de vagues après l'événement déferlant doit être concordant). A cet effet deux approches ont été testées :

- Modèle de viscosité turbulente [?] qui introduit un terme de dissipation dans chacune des conditions de surface libre. La dissipation s'opère sur une fenêtre temporelle et spatiale à paramétrer. Cette paramétrisation est faite par rapport à la géométrie de la vague juste avant le déferlement, qui permet une implémentation relativement simple.
- Modèle de dissipation [?] qui applique un filtre sur le contenu haute fréquence du spectre ainsi qu'un terme de dissipation dans les conditions de surface libre prenant en compte la courbure locale de la surface.

Différents travaux issus de la littérature nous ont permis une première validation du critère de déferlement choisi ainsi que des modèles de dissipation décrits précédemment. Cependant, certains types d'états de mer n'étaient pas accessibles, en particulier des états de mer irréguliers avec événements déferlants, qui sont le cas d'application typique qui nous intéresse.

Ainsi, une série d'expériences a été menée dans le bassin de traction de l'ECN. Différentes sondes à houle étaient disposées dans le bassin ainsi qu'un système de capture vidéo

permettant d'identifier précisément les positions et temps de ces évènements déferlants. Les champs de vagues suivants ont été testés (présentant tous des évènements déferlants) :

- Focalisation fréquentielle
- Instabilité modulationnelle
- Etats de mer irréguliers
- Etats de mer irrégulier superposés à un évènement focalisé

L'ensemble de ces données sera ensuite utilisé pour la validation de la modélisation des évènements déferlants au sein du code HOS.

### Détection du déferlement

On souhaite disposer d'un critère permettant de prédire si une vague va déferler avant que le déferlement soit vraiment effectif (i.e. surface libre multivaluée et dissipation d'énergie). L'idée développée dans [?] est d'associer le processus de déferlement à une instabilité de la vague causée par un excès local de flux d'énergie. On peut en déduire une vitesse associée à ce flux, définie comme le ratio entre le flux d'énergie (vectoriel)  $\vec{F}$  et la densité d'énergie  $E$  (tous deux évalués localement). On compare alors cette vitesse à la vitesse de la crête  $\vec{C}$ . On peut remarquer qu'au niveau de la surface libre, le ratio  $\vec{F}/E$  se réduit à la vitesse du fluide  $\vec{u}$  et donc dans une configuration unidirectionnelle, ce critère de déferlement devient

$$B_x = \frac{F_x/E}{C_x} = \frac{u_x}{C_x} > \text{limite} = [0.85 ; 0.86] \quad (2.57)$$

[?] a défini la limite [0.85 ; 0.86] par une série de simulations BEM non-linéaires [?]. Les avantages principaux de cette approche sont :

- (i) La précision et la robustesse du critère tel que démontré ci-après.
- (ii) Le fait que l'excès de flux d'énergie peut a priori être initié par différents phénomènes physiques (focalisation linéaire ou non-linéaire), mais également par un forçage dû au vent, ou aux interactions houle-courant, etc.
- (iii) L'extension possible aux configurations directionnelles sans difficultés.

Pratiquement, l'évaluation de la vitesse locale de crête  $C_x(x, t)$  doit être faite de manière attentive afin d'avoir une estimation précise. On utilise l'approche introduite par [?] basée sur des transformées de Hilbert

$$C_x(x, t) = \sqrt{\frac{g \tanh [k(x, t)h]}{k(x, t)}} \quad (2.58)$$

$$k(x, t) = \frac{1}{\eta^2 + [\mathcal{H}(\eta)]^2} \left[ \eta \frac{\partial \mathcal{H}(\eta)}{\partial x} - \mathcal{H}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \quad (2.59)$$

avec  $k(x, t)$  le nombre d'onde local,  $h$  la profondeur et  $\mathcal{H}$  la transformée de Hilbert.

Afin de valider ce critère de déferlement, nous avons utilisé la série d'expériences réalisée dans les installations expérimentales du LHEEA. Une caméra et une règle située

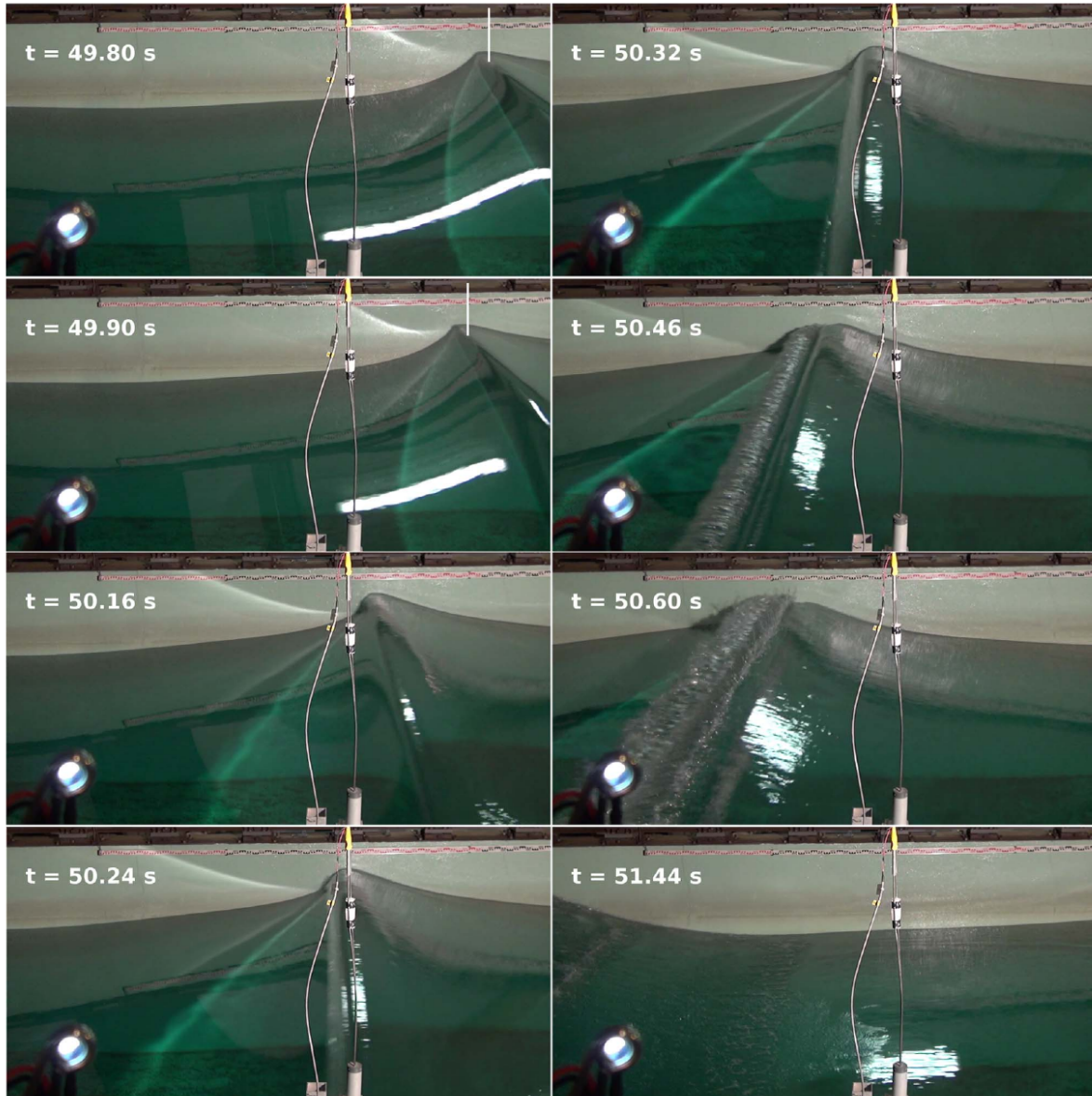


FIGURE 2.44 – Captures de vidéo d'un essai déferlant par focalisation. (Figure issue de [? ])

sur le mur du bassin nous a permis d'estimer le temps et la position de chaque évènement déferlant, comme représenté sur la figure 2.44.

Différents évènements déferlants sont générés et analysés par cette méthode. Les résultats expérimentaux ont permis la validation de la méthode de détection du déferlement proposée en comparant les résultats obtenus par le code HOS-NWT à ces expériences en terme de position du déferlement dans le bassin  $x_b$  et temps  $t_b$ . La figure 2.45 présente ces résultats.

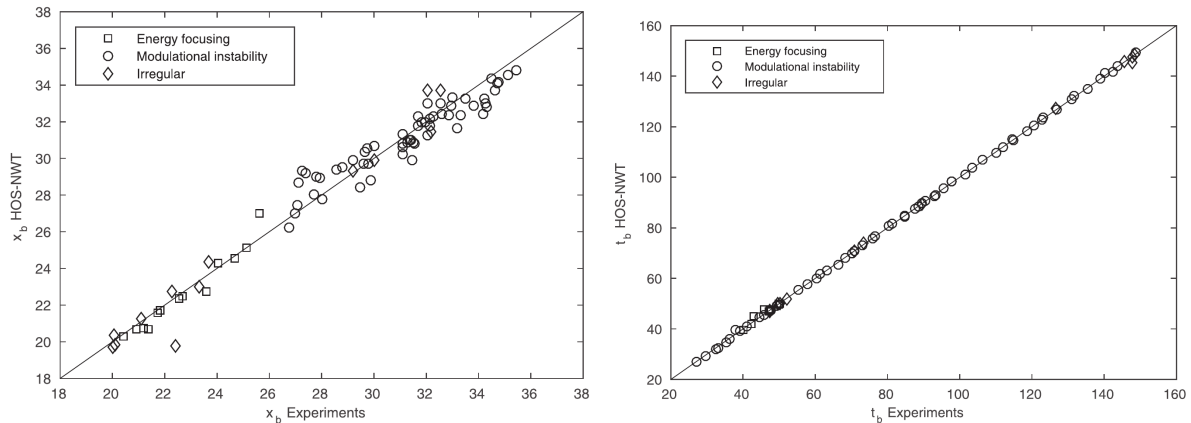


FIGURE 2.45 – Comparaison numérique/expérimental sur la position du déferlement  $x_b$  (gauche) et le temps de celui-ci  $t_b$  (droite). (Figure issue de [? ])

Le paramètre choisi pour détecter l'initiation du déferlement  $B_x$  s'avère donc précis dans l'ensemble des configurations testées. Les résultats présentés dans la figure 2.45 correspondent en effet à l'ensemble des évènements déferlants générés par différentes méthodes (focalisation, instabilité modulationnelle, houle irrégulière, etc.). Ce critère est donc robuste vis à vis des différents phénomènes physiques à l'origine du déferlement dans une configuration uni-directionnelle.

En complément, les calculs réalisés ont également permis de valider la pertinence du critère  $B_x$  comme critère permettant la détection d'un évènement déferlant. La figure 2.46 présente pour l'ensemble des cas testés la valeur de ce paramètre  $B_x$  pour les cas déferlants et pour les cas non-déferlants. Ces résultats sont comparés au paramètre de détection plus classique basé sur la pente locale  $S_c$ .

Il est évident que la limite entre les cas déferlants et les cas non-déferlants est beaucoup plus précise lorsqu'estimée par le paramètre  $B_x$  plutôt que par un critère plus simple de pente locale  $S_c$ . La limite donnée dans la littérature d'un seuil à  $B_x \simeq 0.85$  est également retrouvée.

### Dissipation d'énergie

Une fois que l'on dispose d'un critère pertinent pour détecter le déferlement juste avant que celui-ci ne prenne place, il convient d'appliquer un modèle capable de dissiper l'énergie excédentaire contenue dans la vague, qui sera physiquement dissipée par le processus de déferlement. La dissipation locale qu'on souhaite appliquer doit prévenir le déferlement

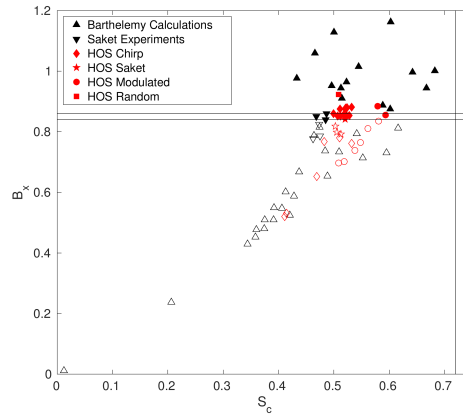


FIGURE 2.46 – Paramètre de détection du déferlement  $B_x$  en fonction de la pente locale  $S_c$  pour les calculs originaux issus de [? ], les expériences de [? ] et les calculs HOS-NWT. (Figure issue de [? ])

du point de vue numérique et en particulier que la surface devienne multivaluée (ce qui ne peut être représenté par notre méthode pseudo-spectrale).

L'approche présentée ici et utilisée préférentiellement est celle d'un terme de diffusion appliqué localement dans les conditions de surface libre [? ?]. Ce terme est équivalent à l'effet d'une viscosité turbulente  $\nu_{eddy}$  sur la propagation d'un champ de vagues [? ?]. Les conditions de surface libre deviennent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta + 2\nu_{eddy} \nabla \cdot \nabla \eta \quad \text{en } z = \eta \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + 2\nu_{eddy} \nabla \cdot \nabla \phi^s \quad \text{en } z = \eta \quad (2.61)$$

La valeur de  $\nu_{eddy}$  est déterminée en utilisant la géométrie de la vague au moment où elle dépasse le seuil critique  $B_x = 0.85$  en suivant la paramétrisation de [? ]. La figure 2.47 présente un exemple d'application du modèle de dissipation local précédent entre l'instant de détection du caractère déferlant de la vague et la fin du processus de dissipation.

Cette approche de modélisation du déferlement a été validée grâce à la campagne expérimentale dédiée réalisée dans les bassins de l'ECN. On applique donc le modèle à différents champs de vagues comportant du déferlement et qui n'était donc pas accessibles à la simulation par HOS-NWT avant ces développements. La figure 2.48 présente par exemple, dans le cas de champs de vagues focalisés de différentes amplitudes, l'évolution spatiale dans le bassin de l'énergie du train de vague considéré. Cette figure présente également pour un cas, l'évolution temporelle à différentes position dans le bassin.

On arrive donc à l'aide de ce modèle à approcher assez fidèlement la propagation d'un champ de vagues qui contient un événement déferlant. La dissipation globale d'énergie est consistante, tout comme l'évolution de la surface libre avant et après le déferlement. On a cherché à aller un peu plus loin afin de caractériser dans le domaine fréquentiel l'effet physique du déferlement ainsi que la signature du modèle numérique développé. L'objectif idéal serait de réussir à reproduire exactement l'ensemble des processus de



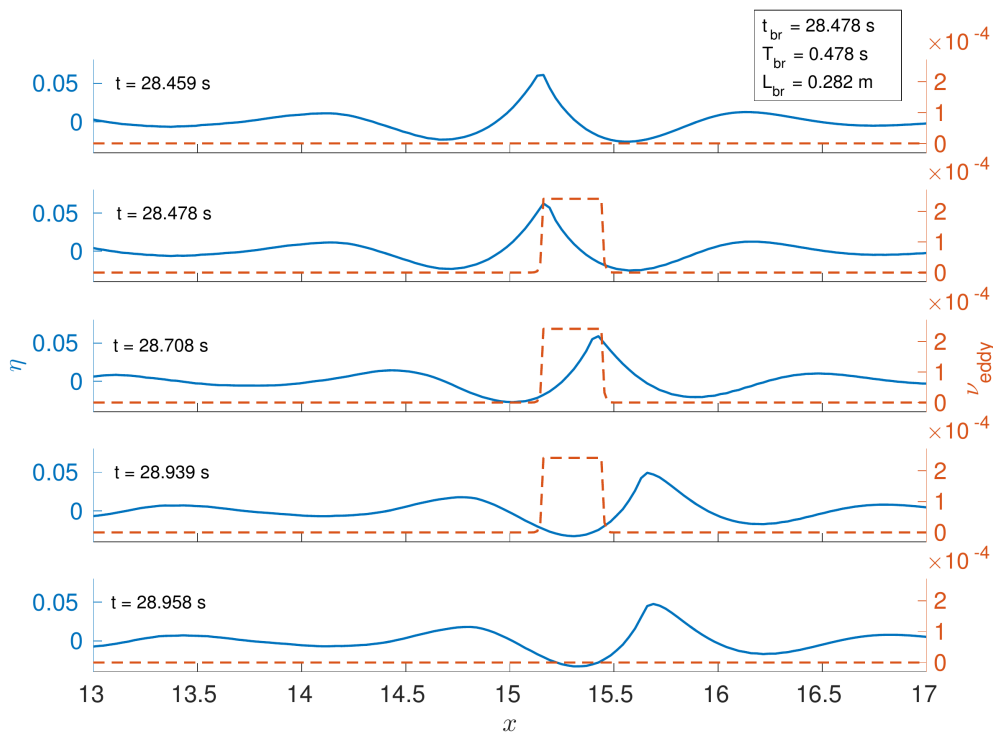


FIGURE 2.47 – Simulation HOS-NWT dans le cas où un évènement déferlant apparaît.

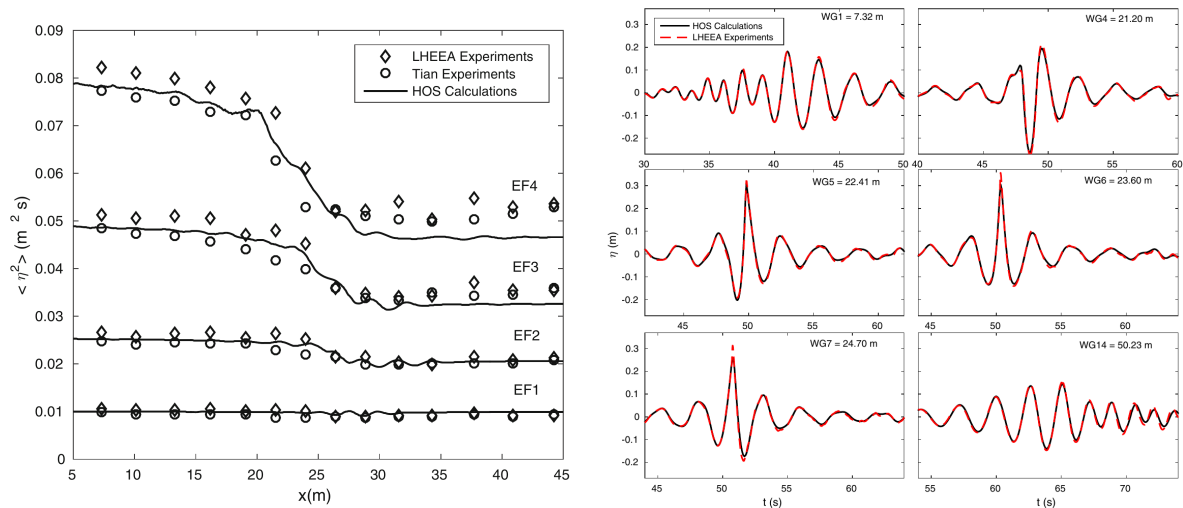


FIGURE 2.48 – Evolution spatiale de l'énergie d'un train de vagues focalisé déferlant pour différentes cambrures (gauche). Evolution temporelle de l'élévation de surface libre à différentes positions (droite). Comparaison numérique/expérimental. (Figure issue de [? ])

transferts d'énergie prenant place lors du déferlement : dissipation globale, mais également redistribution d'une partie de l'énergie à haute fréquence, etc. La figure 2.49 présente, dans le domaine fréquentiel, l'évolution de l'énergie lors de la propagation d'un champ de vague focalisé lors des expériences et dans les simulations numériques. Différentes cambrures sont présentées en partant d'un champ de vague non déferlant ( $\epsilon = 0.0047$ ) et en augmentant cette cambrure.

Sans déferlement, des transferts d'énergie significatifs sont observés et bien captés par le modèle HOS-NWT. Lorsque du déferlement a lieu, le modèle semble dissiper plus d'énergie dans la bande centrale de fréquence avec des différences qui sont notables avec l'expérience. Cela laisse donc ouvert la possibilité d'améliorer le modèle de déferlement pour capturer plus précisément ces transferts d'énergie.

### 2.6.3 Conclusion-perspectives

#### Résumé

Cette section présente le travail accompli d'un point de vue numérique afin d'augmenter les capacités de la méthode à modéliser des états de mer fortement non-linéaires. L'objectif est d'assurer une robustesse du code de calcul dans cette configuration, tout en conservant la précision apportée par un modèle potentiel complètement non-linéaire.

La première étape a tout d'abord été de qualifier le modèle HOS développé initialement en terme de domaine d'applicabilité. On rappelle que ce dernier n'utilise aucune procédure de filtrage et de lissage afin d'avoir un contrôle optimal de la qualité de la résolution du problème de propagation de vagues. D'un point de vue pratique, il était essentiel de pouvoir répondre à la question : cet état de mer est-il accessible à la modélisation à l'aide du modèle HOS-ocean ? Les résultats principaux sont :

- Les limitations du modèle sont associées au processus de déferlement, qui n'est pas accessible à la modélisation avec une approche potentielle non-linéaire.
- La présence du déferlement d'un point de vue numérique n'est pas forcément identique à la limite physique. Le choix assez classiquement fait en pratique des paramètres numériques de simulation en houle irrégulière  $k_{\max} = 5 k_p$  avec un ordre de non-linéarités  $M = 3$  assure une limite d'applicabilité proche de la limite physique.
- Les limites d'applicabilité ont été établies sous la forme d'un scatter diagram  $H_s/T_p$  en faisant varier les paramètres numériques et physiques. Elles sont principalement influencées par
  - (i) La discrétisation
  - (ii) La profondeur relative
  - (iii) La directionalité de l'état de mer

Mon travail s'est ensuite porté sur la méthode à employer pour représenter les événements déferlants dans un modèle potentiel non-linéaire. La méthode choisie consiste en

- Détecter les événements potentiellement déferlants à l'aide d'un critère les repérant avant le déferlement effectif. Le critère choisi se base sur la vitesse associée au flux d'énergie, comparée à la vitesse de crête.

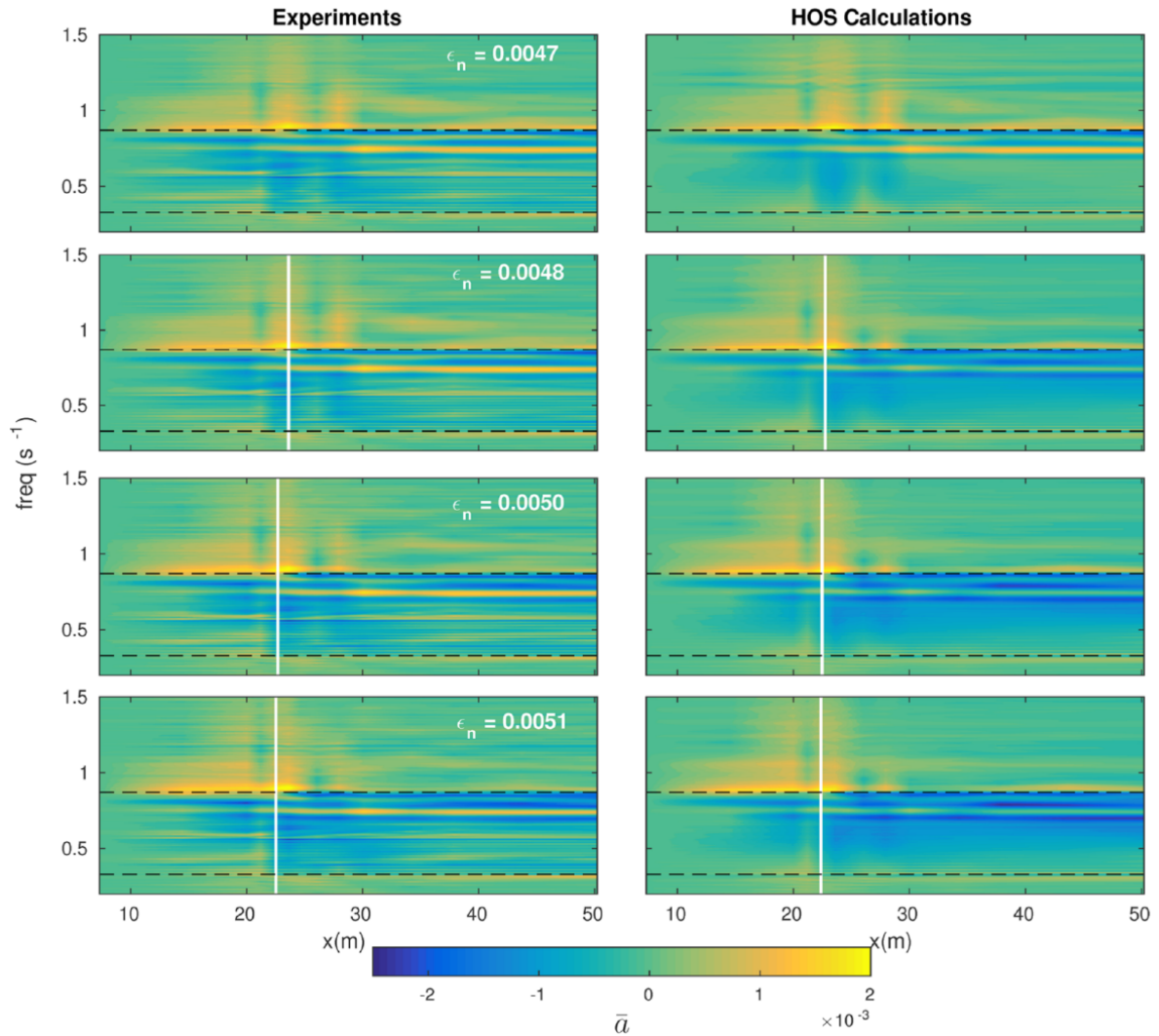


FIGURE 2.49 – Evolution lors de la propagation de l’amplitude des composantes fréquentielles par rapport à l’amplitude mesurée sur la première sonde. Vagues focalisées de différentes cambrure, la ligne verticale blanche indique la position du déferlement. Comparaison entre expériences (gauche) et simulations HOS-NWT (droite). (Figure issue de [? ])

- Appliquer localement un terme de diffusion dans les deux conditions de surface libre. Cette diffusion locale correspond en terme équationnel à l'effet d'une viscosité sur l'évolution du champ de vagues.

Des expériences ont été réalisées dans le bassin de traction de l'ECN afin de valider le modèle et la paramétrisation choisie sur une grande variété de houles unidirectionnelles (vagues focalisées, instabilités modulationnelle, houle irrégulière, etc.). Les résultats sont très concluants avec un modèle qui apparaît robuste et précis dans les configurations testées. Ces développements ouvrent la voie à des études plus systématiques, notamment pour des états de mer fortement cambrés qui présentent du déferlement.

### Limitations & perspectives

Ces travaux ont permis d'accroître les cas d'application accessibles au modèle HOS. Cela répond à une demande forte de modélisation précise des états de mer cambrés. En particulier, il s'agit d'un point crucial dans les études de dimensionnement des structures en mer où les cas d'étude fixés par les réglementations sont possiblement fortement non-linéaires et donc sujet à la présence de déferlement.

Lors des différentes études menées, notamment dans le cadre du JIP 'Reproducible CFD Modeling Practices for Offshore Applications', il est apparu que l'approche actuelle pouvait trouver ses limites pour les champs de vagues très énergétiques (*i.e.* très au delà de la limite d'applicabilité du modèle). Les cas testés vont en effet jusqu'à des états de mers avec des périodes de retour de 1000 ans. Dans cette configuration, il apparaît donc nécessaire d'améliorer la robustesse du code de calcul. Des travaux préliminaires ont été menés en ce sens afin d'adjoindre au modèle actuel une méthode ne traitant que les événements les plus extrêmes qui posent un problème actuellement.

Ensuite, une autre exigence de fiabilité des simulations potentielles non-linéaires apparaît de façon complémentaire aux essais expérimentaux déjà menés. Les comparaisons présentées précédemment se sont intéressées principalement au temporel de l'élévation de surface libre et à l'énergie du champ de vagues. Du point de vue du dimensionnement, les statistiques des événements extrêmes sont essentielles. Si on sait que la modélisation HOS est à même de caractériser correctement ces densités de probabilités (pdf) dans une configuration sans déferlement, la prochaine étape est de s'intéresser à ces mêmes informations (pdf, skewness, kurtosis, etc.) dans des configurations avec déferlement plus ou moins significatif. Cette étape démontrera la pertinence ou non de l'approche choisie jusqu'à présent et la possible nécessité d'améliorer la modélisation du déferlement. Un travail a par exemple été initié pour améliorer l'évaluation de l'intensité du déferlement et de la dissipation induite sur la base des travaux récents de [? ].

Une autre limitation actuelle est que l'ensemble des développements ont été effectués dans une configuration uni-directionnelle. Si le critère de détection du déferlement peut être facilement étendu à une configuration 3D, le modèle de dissipation d'énergie nécessite un travail conséquent pour être paramétré et validé sur une configuration d'état de mer directionnel. C'est de mon point de vue un des challenges principaux à relever dans un futur proche. L'idée sera probablement d'utiliser des données expérimentales dédiées et possiblement de simulation fine [? ] pour aller vers le développement d'un modèle adapté.

Du point de vue des phénomènes physiques pris en compte, il y aurait également un

intérêt à développer et valider la modélisation du déferlement dans un cas avec du courant et en bathymétrie variable. J'ai commencé à travailler dans cette direction pour le courant [?] et le modèle HOS-NWT a été utilisé en profondeur limitée avec déferlement dans [?].

A noter que l'ensemble de ces problématiques devaient être étudiées dans le cadre du projet WASANO, financé par l'initiative ISite NExT, dont les financements ont été arrêtés fin 2019. Ces travaux étant d'un intérêt central, des actions ont tout de même été engagés en ce sens impliquant des simulations HOS, des simulations CFD ainsi que des expérimentations en bassin (MAster et doctorat à venir M. Canard).

## 2.7 Développements numériques

Je détaille dans cette section les actions principales réalisées d'un point de vue purement numérique sur les codes développés au cours de mes activités de recherche. Je présente tout d'abord la mise en open-source des deux modèles principaux (à savoir HOS-ocean et HOS-NWT) en faisant un bilan après ces premières années de diffusion scientifique par ce biais. Ensuite, je détaille les premiers résultats obtenus en terme de parallélisation du code en vue de son utilisation sur des super-calculateurs.

### 2.7.1 Administration et gestion des codes de calcul

J'assure depuis environ 2010 l'administration et la gestion des codes de calcul basés sur la méthode HOS, en tant que contributeur principal aux différentes évolutions de ceux-ci. Cette gestion a évolué au cours du temps en commençant par une approche assez 'artisanale' qui s'est peu à peu standardisée en suivant les orientations prises à l'échelle plus large du LHEEA.

Un élément assez structurant a été la mise en open-source des codes de calcul sur laquelle je reviendrai dans le paragraphe suivant. Elle s'est associée à la nécessaire mise en place d'un suivi de version efficace (Git) et à l'utilisation des plate-formes de développement du LHEEA, notamment le serveur local sous Git/Gerrit permettant une administration formalisée des codes de calcul et le dépôt public GitHub.

#### Mise en open-source

La stratégie de valorisation de certains codes de calcul développés au sein du LHEEA par une mise à disposition du plus grand nombre grâce à une diffusion ouverte en open-source est assez récente. Elle a été adoptée principalement au sein de l'équipe Énergies Marines et Océan (EMO) et de ses outils numériques en approche potentielle qui ont été développés et validés de longue date.

Le constat, notamment en ce qui concerne les outils basés sur la méthode HOS, a été qu'ils étaient arrivés à un niveau de maturité suffisant pour permettre de les diffuser largement à la communauté scientifique. Un travail significatif a été réalisé en vue de la validation des outils numériques et de leur applicabilité pratique à des configurations classiques. Du point de vue scientifique, ces travaux de développements avaient déjà été valorisés par des publications et il semblait donc opportun de les rendre accessibles au plus grand nombre. Les codes mis en open-source sont : i) la version initiale du modèle

périodique (sans fond variable, courant ou déferlement), dénommée HOS-ocean [?] et ii) la version bassin de houle dénommée HOS-NWT [?]. Les objectifs principaux étaient

- Accroître la visibilité de l’ECN sur le plan de la modélisation de houle non-linéaire, notamment à l’échelle internationale.
- Faire émerger des collaborations par le biais de cet outil, pour par exemple développer de nouvelles fonctionnalités.
- Bénéficier des contributions de personnes intéressées.

Au jour d’aujourd’hui, j’assure la gestion et le support aux utilisateurs à travers la plateforme GitHub qui a été choisie pour héberger les versions open-source des codes. A noter que suite à cette mise en open-source, j’ai par ailleurs organisé une session de formation sur 3 jours qui a rassemblé 19 participants venant de différents pays (USA, Suisse, Pays-Bas, France).

Je peux enfin évoquer que cette stratégie a été étendue au modèle de propagation de vagues régulières basé sur la fonction de courant, disponible au LHEEA. Ce code de calcul, initié par P. Ferrant dans les années 1990, amélioré par F. Bonnefoy dans les années 2000 et donc finalisé récemment par la mise open-source de la librairie appelée CN-Stream [?].

## Bilan

L’objectif initial de l’augmentation importante de la visibilité des outils est tout à fait atteint de mon point de vue. Le nombre d’utilisateurs réguliers (académiques et industriels) est important pour un tel outil : plusieurs dizaines de connus et un nombre de visiteurs des pages dédiées s’élevant à une moyenne d’environ 200 par mois sur la dernière année (*i.e.* assez longtemps après la mise en accès libre, datant de 2015). Cette diffusion large a par ailleurs amélioré le référencement des publications associées (nombre de citations).

Cette mise en accès open-source a également permis la mise en place de collaborations qui n’auraient certainement pas été possible avec une autre stratégie de valorisation et qui ont mené à publication (voir par exemple dans le chapitre 4). Cette stratégie s’avère donc de notre point de vue payante dans la visée de faire

- du code HOS-ocean l’outil de référence pour la modélisation à grande échelle d’états de mer non-linéaires.
- de l’outil HOS-NWT, le bassin de houle potentiel non-linéaire de référence.

Les points qui peuvent relativiser ce retour général concernent : i) les contributions extérieures au code qui ne s’avèrent pas très nombreuses (mais tout de même existantes sur certains points spécifiques) et ii) le maintien du code, l’intégration des développements, etc. qui sont à ma charge à l’heure actuelle, sans valorisation économique qui permettrait d’avoir du personnel dédié pour tout ce travail d’intégration et de support.

### 2.7.2 Parallélisation

Comme on l’a détaillé dans la section 2.2, la méthode HOS est efficace et précise et permet donc la résolution d’un problème de propagation de vagues avec un effort

en temps de calcul raisonnable. Cependant, il convient de caractériser plus précisément ce temps de calcul, notamment lorsqu'on va chercher à résoudre des domaines de taille significative avec un état de mer directionnel pendant une longue durée. En effet, du point de vue de l'utilisation pratique du code, le temps de calcul est un élément clé qui peut devenir limitant lors d'études systématiques. Je pense par exemple à la réponse extrême de structures, calculée classiquement par l'étude de centaines d'états de mer pendant une durée de 3h.

En guise d'exemple, les temps de calcul suivant sont donnés pour un calcul sur un seul cœur réalisés sur mon ordinateur portable équipé d'un processeur Intel(R) Core(TM) i7-7820HQ CPU @ 2.90GHz

1. HOS-ocean :

- Discrétisation :  $N_x \times N_y = 256 \times 256$
- Ordre de non-linéarité :  $M = 3$ , anti-repliement complet  
 $\Rightarrow$  Temps par itération :  $\simeq 0.77s$
- $T_p = 10 s$  et  $H_s = 4.5 m$  en profondeur infinie
- Tolérance en temps :  $10^{-7}$   
 $\Rightarrow$  Temps total pour une durée de 3h :  $\simeq 3h$

2. HOS-NWT

- Discrétisation :  $N_x \times N_y = 512 \times 32$  et  $N_z = 9$  dans la direction verticale (batteur)
- Ordre de non-linéarité :  $M = 3$ , anti-repliement complet et non-linéarité batteur  
 $\Rightarrow$  Temps par itération,  $\simeq 2.95s$
- $T_p = 10 s$  et  $H_s = 4.5 m$  en grande profondeur
- Tolérance en temps :  $10^{-7}$   
 $\Rightarrow$  Temps total pour une durée de 3h :  $\simeq 200h$

On peut donc avoir une nécessité d'accélérer le temps de restitution de ces simulations, en particulier dans la configuration bassin de houle. D'autre part, les ressources en mémoire peuvent être limitantes en 3D, pour des domaines de grande dimension et des ordres de non-linéarité importants.

Dans le paysage de la recherche actuelle, l'accès à des infrastructures de calcul est de plus en plus courant, que ce soit au travers des grandes infrastructures nationales ou sur des supercalculateurs de plus petite échelle. L'ECN a par exemple dorénavant un mésocentre de calcul avec environ 6000 coeurs de calcul. L'idée est donc d'adapter les codes de calculs développés à une utilisation sur ces architectures matérielles de type HPC (High-Performance Computing).

Je me suis intéressé seulement aux architectures à mémoire distribuée, qui conduisent assez naturellement vers une implémentation par Message Passing Interface (MPI). Cette possibilité d'évolution vers le calcul parallèle a par ailleurs motivé le choix de la librairie FFTW [?] dans le code de calcul développé. Cette librairie dispose effectivement nativement d'une parallélisation optimisée des FFTs. Ces dernières représentant l'effort en

temps de calcul principal de la méthode HOS, il s'agit donc de la partie principale à paralléliser. Il est important de noter que la parallélisation de FFTW n'est effective que dans une configuration 3D (*i.e.* avec des FFTs 2D dans la plan horizontal). La dimension transverse ( $y/k_y$ ) est distribuée sur les différents processeurs. Même si il est possible de paralléliser les FFTs 1D, cette dernière n'est pas très efficace et n'est donc pas apparue nécessaire pour nos cas d'application.

Je présente donc pour les deux codes de calcul HOS-ocean et HOS-NWT les premiers résultats associés à la parallélisation. Il s'agit d'un travail préliminaire qui pourra être poursuivi dans le futur suivant les besoins.

### HOS-ocean

Le temps de calcul de la méthode HOS dans sa version périodique (Eq. 2.23) est environ linéaire avec le nombre de points. Si la parallélisation est efficace, elle doit permettre une accélération qu'il est intéressant de quantifier.

L'approche habituelle est d'étudier la scalabilité dite faible : on utilise une configuration identique en terme de nombre de points que l'on exécute sur différents processeurs. On y adjoint habituellement une scalabilité forte, où le nombre de points sur chaque processeur est identique (*i.e.* on augmente le nombre de points total avec le nombre de processeurs). Les résultats de ces deux scalabilités, réalisées sur le super-calculateur LIGER de l'ECN, sont présentées sur la figure 2.50.

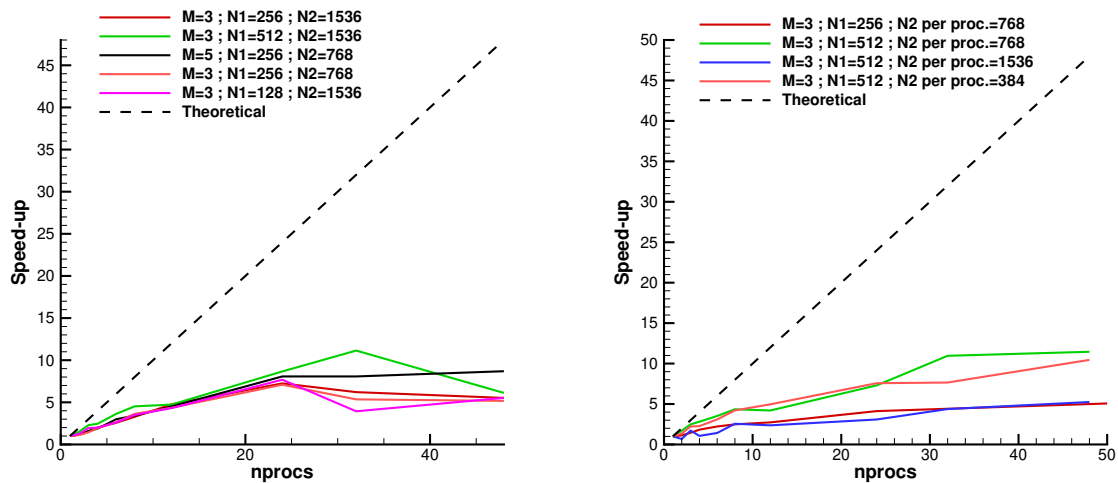


FIGURE 2.50 – Accélération du modèle HOS-ocean grâce à la parallélisation. Scalabilité faible (gauche) et scalabilité forte (droite).

On se limite à une étude jusqu'à 48 processeurs et on observe une accélération significative du code de calcul jusqu'à un facteur environ 12 en scalabilité faible et 20 en scalabilité forte. L'accélération est dépendante du nombre de points et on observe que pour un nombre de processeur significatifs, les performances augmentent avec le nombre de points. Les résultats sont assez similaires en scalabilité forte.

Ces résultats peuvent sembler assez décevants quant aux possibilités de parallélisation, notamment sur de grand nombre de processeurs. Cependant, il faut rappeler que



la méthode HOS, basée sur une méthode pseudo-spectrale et l'utilisation de FFTs est une méthode non-locale. De ce fait, des communications importantes sont nécessaires entre les processeurs, réduisant les possibilités d'accélération. Ces résultats semblent assez consistants avec les résultats de la scalabilité des FFTs seules [?]. Ainsi, même si des améliorations sont sans doute possible dans l'implémentation, le gain ne pourra pas être très significatif a priori.

## HOS-NWT

Dans le cas du modèle de bassin de houle, un temps de calcul additionnel est associé à la résolution du problème de la génération des vagues (Eq. (2.34)). Les performances du modèle séquentiel ainsi que du modèle parallèle seront donc différents. Je présente dans la figure 2.51 les résultats des scalabilités faible et forte dans le cas du code HOS-NWT.

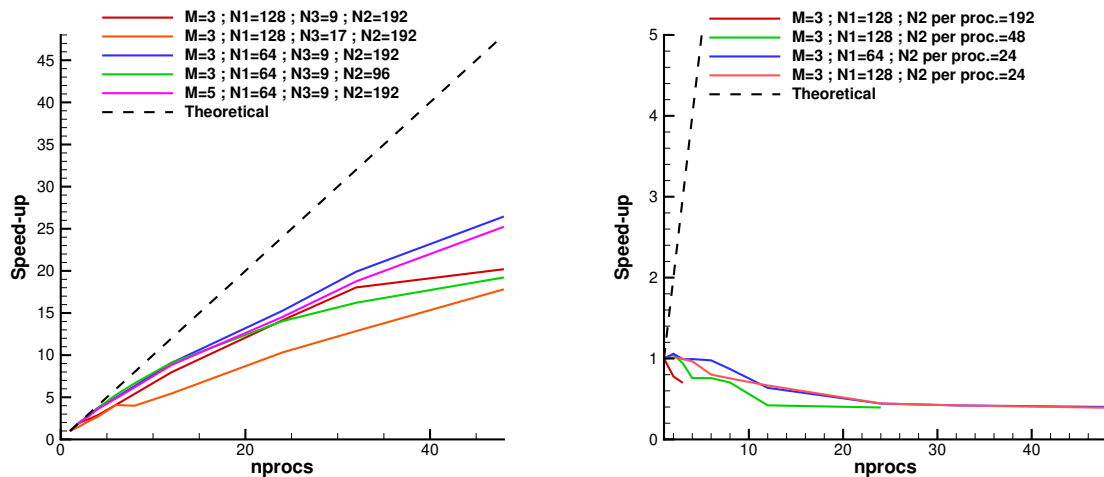


FIGURE 2.51 – Accélération du modèle HOS-NWT grâce à la parallélisation. Scalabilité faible (gauche) et scalabilité forte (droite).

On observe des performances améliorées par rapport à la parallélisation HOS-ocean dans le cas de la scalabilité faible. L'accélération peut atteindre un facteur d'environ 25 sur 48 processeurs avec les configurations testées. On peut le comprendre par le fait que le temps de calcul n'est plus simplement piloté par la résolution des FFTs. La partie additionnelle peut sans doute être accélérée jusqu'à la limite théorique alors que la partie FFT souffre des possibles limitations évoquées précédemment.

Pour la scalabilité forte, les résultats sont moins probants avec une efficacité très limitée. J'attribue ce comportement toujours à la résolution additionnelle qui fait apparaître le terme  $\gamma N_x N_y^2 N_z$  (cf. Eq. (2.34)) qui peut provoquer le comportement observé (le nombre de points dans la direction transverse  $N_y$  augmente linéairement avec le nombre de processeurs).

### 2.7.3 Conclusion-perspectives

Lorsque l'on travaille sur le développement d'outils et de méthodes numériques, il est important d'établir un environnement de développement adéquat au partage et à la collaboration. Cet environnement existe maintenant à l'échelle du laboratoire et également pour les collaborations externes.

Ceci demande un investissement important en temps mais qui s'avère fructueux sur le long terme. Ce besoin a été formalisé et renforcé par les collaborations fortes qui existent entre mon travail et celui s'intéressant aux interactions houle-structure au sein du LHEEA (voir chapitre 3).

J'ai travaillé en même temps à faire des codes HOS-ocean et HOS-NWT des outils très efficaces en allant jusqu'à des versions parallélisées en MPI. Des travaux sur l'optimisation des performances de cette première implémentation pourraient être réalisées, mais ne constituent pas un axe dans lequel je souhaite beaucoup m'investir par la suite : je n'ai pas forcément les compétences nécessaires à une optimisation parfaite du code de calcul et je n'ai jamais été vraiment limité, dans mes développements ou applications par l'efficacité numérique du code.

Du point de vue proprement numérique/développement de code, la perspective principale réside dans le possible développement, à moyen terme, d'un package complet regroupant l'ensemble des fonctionnalités reliées à la modélisation des vagues (et le possible interfaçage avec la CFD ou autre pour l'interaction houle-structure). Ce package, dénommé CN-Wave, devra permettre à tout utilisateur de simuler et d'obtenir facilement toute information relative au champ de vagues d'intérêt. Les caractéristiques principales envisagées sont

- Fonctionnement sous forme de librairie pouvant être liée facilement à du langage Fortran et du C/C++
- Définition de tout type de houle avec choix automatique du solveur et des paramètres numériques
  - (i) Houle régulière (CN-Stream)
  - (ii) Houle irrégulière en domaine périodique (HOS-ocean)
  - (iii) Houle en bassin numérique (HOS-NWT)
- Évaluation des champs de vitesse et pression en tout point et à tout instant de manière efficace (Grid2Grid)
- etc.

Le travail dans cette direction est initiée mais demande un investissement important qui est porté pour l'instant principalement par moi-même et par l'équipe H2I (Hydrodynamique, Interfaces et Interactions) avec Benjamin Bouscasse.



# Chapitre 3

## Applications au génie océanique

Dans ce chapitre, je présente les travaux que j'ai menés et encadrés qui prennent pour cadre le développement et l'utilisation de la modélisation de houle pour la résolution de problématiques concrètes du génie océanique. Les vagues constituent en effet un des (si ce n'est le) dénominateur commun des études menées dans ce domaine. En tant qu'expert au laboratoire de la physique des états de mer et de leur modélisation, j'ai donc participé activement au développement d'un certain nombre de sujets de recherche dans lesquels mes compétences étaient mises à profit. Je me concentrerai dans ce chapitre sur les deux thématiques principales auxquelles je me suis intéressé et dont les développements se poursuivent.

Le premier thème abordé concerne la prédiction de houle. L'objectif consiste en l'établissement d'une procédure permettant à partir d'une mesure (qui est à définir) de prédire sur une période de temps (spécifique au problème traité) le champ de vagues qui sera présent à une certaine position de l'espace. De manière générale, cette problématique physique nécessite : i) une connaissance fine de la physique des ondes, ii) une expérience sur les possibilités de mesure et iii) d'un modèle numérique de propagation adapté à la configuration d'intérêt. Différentes méthodologies ont été testées, en particulier vis à vis des mesures utilisées comme données d'entrée et des modèles de propagation de vagues mis en œuvre.

Ensuite, je présenterai les différentes actions menées dans le cadre des interactions houle-structure. C'est une thématique centrale dans le génie océanique et une problématique étudiée de longue date au sein du LHEEA tant du point de vue expérimental que du point de vue de la modélisation. Mes actions dans ce cadre se limitent à la simulation numérique. La stratégie adoptée au sein du LHEEA pour résoudre ce problème complexe d'interaction houle-structure est de coupler, au travers de différentes stratégies, les méthodes adaptées à la modélisation de houle aux modèles dédiés à la prise en compte effective d'une structure dans un domaine fluide. De ce fait j'ai été amené au cours de ma carrière de chercheur à beaucoup interagir avec les membres du laboratoire s'inscrivant dans cette thématique, et en particulier au niveau de l'interfaçage entre le modèle de houle et les modèles résolvant effectivement l'interaction avec la structure.

## 3.1 Prédiction de houle

La nécessité de prédire les états de mer est une problématique évidente pour les usagers du milieu maritime qui souhaitent connaître les conditions dans lesquelles ils vont évoluer. L'intérêt pour la sécurité des biens et des personnes est majeur et a motivé le développement de cette thématique de recherche. Les applications sont assez diverses, aussi bien civiles que militaires avec pour objectif

- de prédire le mouvement des navires, ce qui est essentiel dans le contexte de la maintenance et des opérations en mer mais aussi utile pour le confort des passagers. Du point de vue militaire, c'est un enjeu stratégique afin de pouvoir prédire et possiblement étendre les capacités d'appontages des avions et hélicoptères (*i.e.* pouvoir le faire dans des conditions de mer plus sévères qu'actuellement).
- d'anticiper le mouvement des structures flottantes : pour l'éolien offshore ou pour l'offshore pétrolier afin de déterminer les conditions d'utilisation/d'exploitation de ces structures
- de contrôler des récupérateurs d'énergie des vagues (WEC) afin d'optimiser la production de ceux-ci.

Si initialement les seuls outils à disposition étaient dédiés à une prédiction stochastique donnant une information sur le contenu fréquentiel de l'état de mer (modèles de hindcast type WaveWatch III, comme sur le site de prévision du SHOM), le développement des modèles déterministes de houle ouvre la voie à une prévision dans le domaine temporel. C'est donc avec cet objectif que ce thème de recherche a été initié au LHEEA lors de la thèse d'Elise Blondel [? ], que j'ai suivie sur les aspects modélisation de houle. La thématique a ensuite été relancée récemment avec deux thèses que je co-encadre (Nicolas Desmars et Marion Huchet) qui sont toutes deux encore en cours et dont les soutenance sont prévues en 2020 et 2021 respectivement.

La problématique générale est assez similaire dans ces différents travaux, à savoir : réussir, à partir d'une mesure donnée, à prédire le champ de vagues en aval de la mesure, dans le futur. Si les méthodes de mesure, les outils de propagation et les applications sont différentes dans les 3 thèses, le cadre scientifique est commun avec un certain nombre de similitudes. Le point de départ qui conditionne l'approche utilisée est la mesure qui peut être une mesure de la surface libre, ponctuelle ou surfacique ou alors une mesure du champ de vitesse induit par les vagues. La méthodologie générale peut être résumée par le schéma 3.1.

### 3.1.1 Horizon de prédiction

De manière générale, la première information utile dans une problématique de prédiction de houle est de définir l'horizon de cette prédiction, c'est à dire la zone spatio-temporelle accessible théoriquement à la prédiction. Cette dernière est définie en fonction de la mesure disponible et du champ de vagues étudié. Typiquement, on va définir des fréquences de coupure pour le spectre d'intérêt. La figure 3.2 présente un exemple de troncature du spectre, basée soit sur un niveau d'énergie au niveau de la coupure (lignes verticales vertes) ou sur une quantité d'énergie tronquée (lignes verticales rouges). Ces

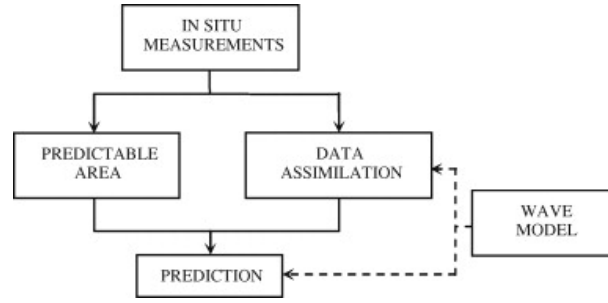
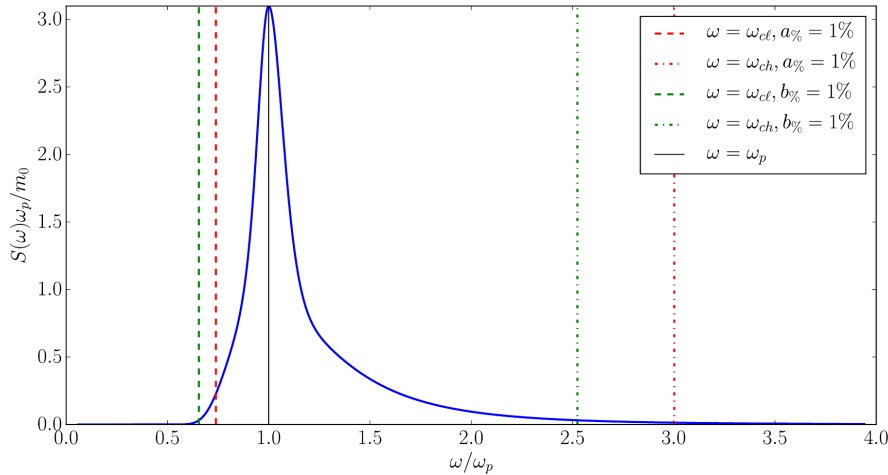


FIGURE 3.1 – Procédure de prédiction de vagues. Figure issue de [? ]

limites définissent une fréquence minimale  $f_{\min}$  et une fréquence maximale  $f_{\max}$  des ondes présentes dans le spectre étudié ainsi que leurs vitesses de groupe associées, respectivement maximale  $C_{gv} = C_g(f_{\min})$  et minimale  $C_{gl} = C_g(f_{\max})$ .

FIGURE 3.2 – Définition des fréquence minimale  $f_{\min}$  et maximale  $f_{\max}$  d'un spectre. Coupures basées sur l'énergie tronquée (rouge) ou sur le niveau d'énergie (vert).

Le premier cas considéré, le plus simple à mettre en place d'un point de vue pratique est celui d'une mesure ponctuelle de données effectuée pendant une durée donnée  $T$ . La figure 3.3 représente la zone de prédiction théoriquement associée à cette mesure.

L'extension naturelle, au vu de la figure précédente, est d'essayer d'agrandir cette zone de prédiction en utilisant plusieurs moyens de mesure, répartis spatialement. La figure 3.4 présente les possibilités offertes par l'utilisation de 2 sondes. A noter que le choix le plus pertinent n'est pas forcément d'utiliser des zones contiguës, un recoupement de zones peut permettre d'améliorer la précision de la prédiction.

On peut ainsi étendre la zone de prédiction en disposant de plus d'informations spatiales. Cette logique peut être étendue au cas où l'on ne mesure plus en temps, une information localisée spatialement mais que l'on mesure à un instant donné toute l'information spatiale. Dans cette configuration, la zone de prédiction est similaire et représentée sur la figure 3.5. Il est alors possible d'élargir la zone de prédiction en effectuant des mesures de surface pendant une certaine durée  $T_a$ .

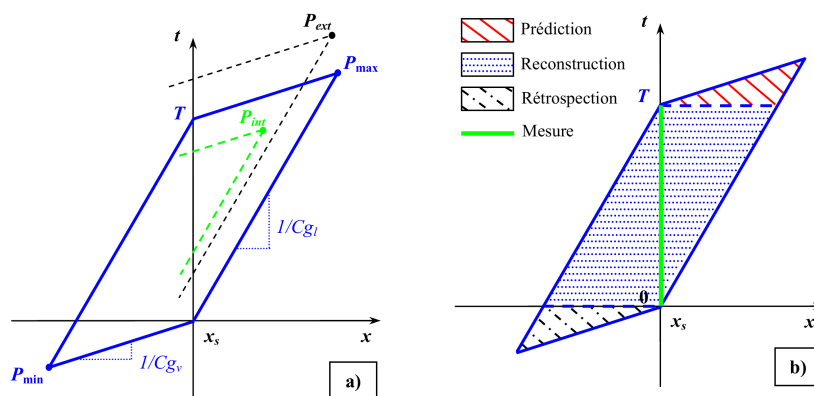


FIGURE 3.3 – Zone de prédiction pour une mesure ponctuelle mesurée pendant une durée  $T$ . Construction (gauche) et identification des domaines (droite). Figure issue de [? ]

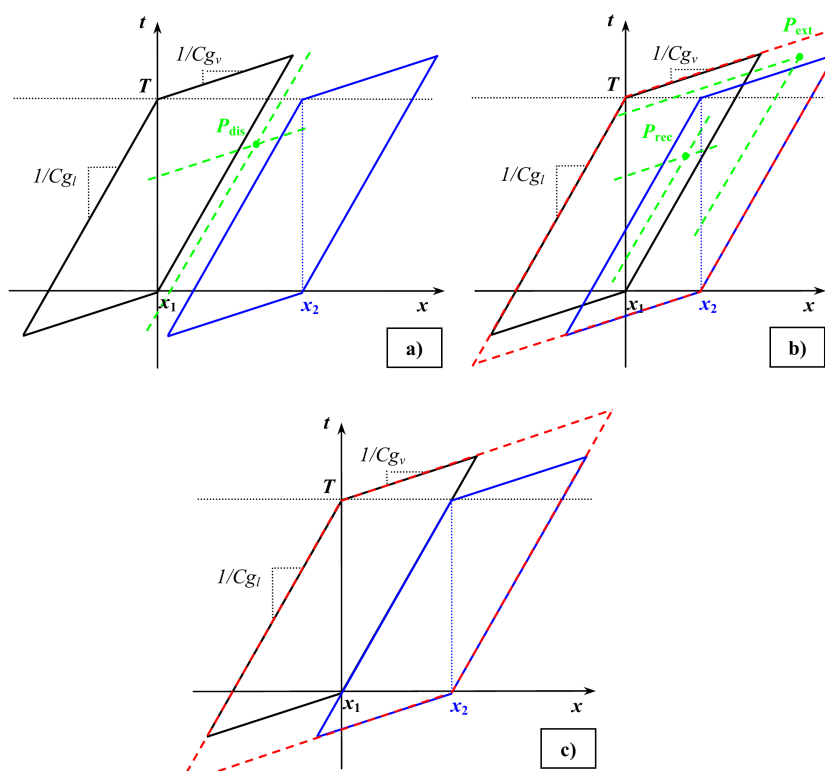


FIGURE 3.4 – Zone de prédiction en utilisant 2 sondes avec des zones de prédiction disjointes a), qui se recoupent b) ou qui sont contiguës c). Figure issue de [? ]

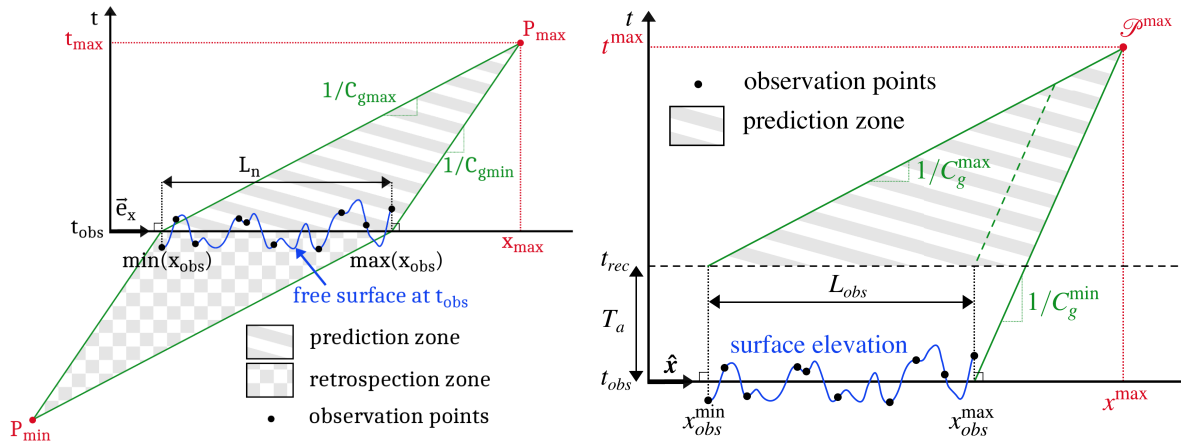


FIGURE 3.5 – Zone de prédiction en utilisant une mesure surfacique en un instant (gauche) et durant un certain temps  $T_a$  (droite).

L'extension aux cas directionnels ne pose pas de difficultés particulières. On définit des angles de coupure pour la fonction de directionnalité  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$ . Ensuite, les zones de prédiction sont définies dans le plan  $x/y$  avec les zones précédentes appliquées sur les directions  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$ . La figure 3.6 présente un exemple, à partir de mesures spatiales sur un instant, de la définition de la zone de prédiction en houle multidirectionnelle.

Une fois ces premières bases établies, on peut s'intéresser à la mise en œuvre pratique de schémas de prédiction.

### 3.1.2 Mesure ponctuelle de surface libre

La première approche de prédiction développée au LHEEA lors de la thèse d'E. Blondel [?] utilisait comme mesure des sondes à houle qui représentent donc une information ponctuelle dont on dispose au cours du temps. On se place donc dans le cadre de la figure 3.3 pour la définition de la zone de prédiction.

Ensuite, la méthodologie mise en place a utilisé différents modèles de houle avec une complexité croissante

- Modèle linéaire
- Modèle second-ordre
- Modèle second-ordre dit étendu, qui prend en compte la vitesse de phase non-linéaire au troisième ordre.
- Modèle HOS avec un ordre de non-linéarité  $M = 3$

Ces modèles de houle sont à utiliser aussi bien dans la phase d'assimilation que dans la phase de prévision à proprement parler. La phase d'assimilation consiste à déterminer les conditions initiales qui minimisent l'erreur faite sur le signal de sonde dans la zone où celui-ci est connu (donc avant la phase de prédiction). Une fois ces conditions optimisées, il est attendu que la prédiction soit améliorée. De manière générale, la procédure d'assimilation peut être schématisée comme sur la figure 3.7.



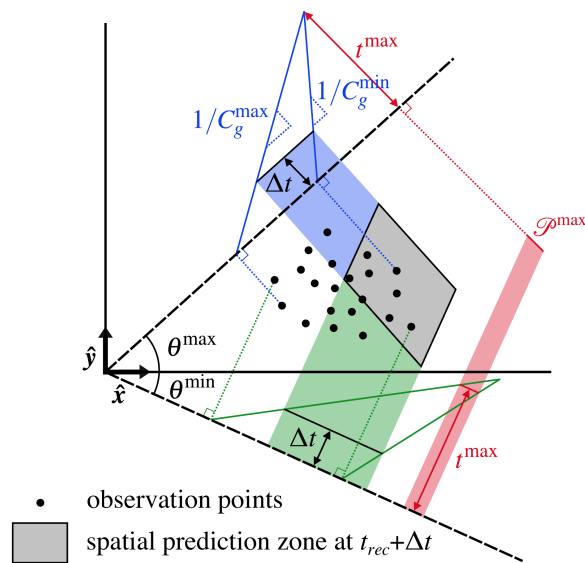


FIGURE 3.6 – Définition de la zone de prédiction en houle multi-directionnelle à partir de mesure surfacique.

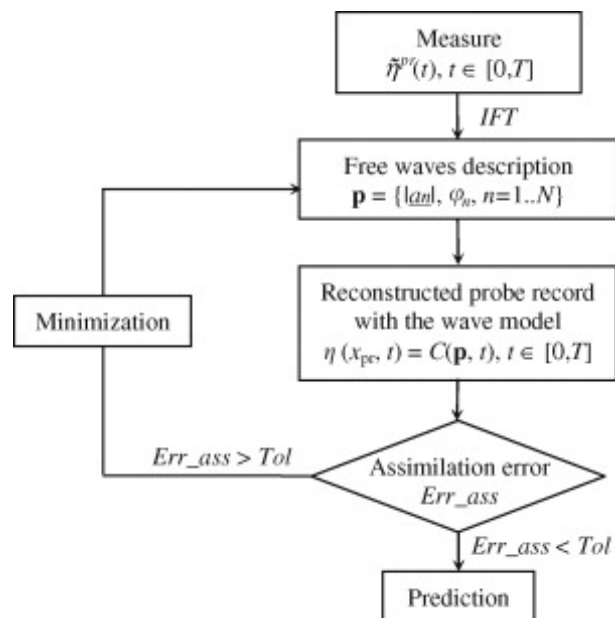


FIGURE 3.7 – Procédure d’assimilation de données. Figure issue de [? ]

Si pour l'approche linéaire, l'assimilation est directe, des procédures spécifiques sont mises en place pour les approches non-linéaires. L'assimilation pour le modèle d'ordre deux peut utiliser aisément les méthodes indirectes de type gradients conjugués ou quasi-Newton de par son caractère analytique. La complexité est plus grande pour l'approche non-linéaire HOS dont le choix le plus adéquat s'est révélé d'utiliser des méthodes directes sans gradient (type Rosenbrock ou Simplexe).

Je ne présente pas l'ensemble des spécificités de l'assimilation avec le modèle non-linéaire HOS (optimisation du temps initial, fonction de poids sur l'intervalle temporel, etc.), les détails pouvant être trouvés dans [? ?]. La figure 3.8 présente les erreurs de prédiction en fonction de la cambrure de l'état de mer et ce pour les différents modèles de houle mis en œuvre.

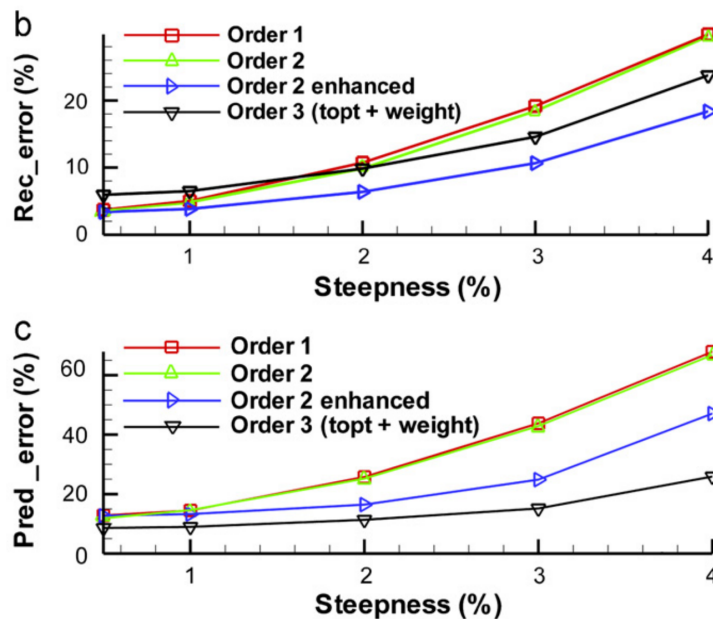


FIGURE 3.8 – Comparaison des erreurs de reconstruction et de prédiction pour différentes méthodes de prédiction. Tests pour différentes cambrures d'états de mer  $\epsilon$ . Figure issue de [? ]

On observe clairement l'amélioration apportée par le modèle second-ordre étendu sur la précision des champs prédits par une approche linéaire. Le gain est d'autant plus important que la cambrure est grande. La modélisation non-linéaire HOS augmente encore la précision et en particulier aux fortes cambrures. Il s'agit donc de résultats très prometteurs quant à la qualité d'une possible prédiction de houle utilisant des modèles non-linéaires plus ou moins complexes.

Cependant, ces résultats sont à mettre en regard de la complexité numérique. En effet, la méthode d'assimilation appliquée au modèle HOS nécessite de l'ordre de 3000 évaluations des différents paramètres (et donc ce même nombre de simulations sur la durée d'assimilation). Même si le modèle est efficace, les coûts de calcul résultants sont prohibitifs. Des développements sont donc encore nécessaires pour que cette approche puisse être utilisable dans la pratique (en particulier avec un champ directionnel). A noter

que des efforts en ce sens ont été entrepris très récemment par l'Université Technique de Hamburg [? ].

### 3.1.3 Mesure surfacique de surface libre

Les premiers travaux menés sur la prédiction ont mis en lumière deux points essentiels : i) l'importance des non-linéarités en vue d'une prédiction précise et ii) les possibles limitations de l'applicabilité d'une méthodologie dues à des temps de calculs prohibitifs. De ce fait, la thèse de N. Desmars que je co-encadre, s'inscrit dans un contexte différent de l'étude précédente, à savoir :

- Les mesures sont effectuées à l'aide d'une mesure surfacique de la surface libre, possiblement à l'aide d'un LIDAR dont les progrès récents rendent envisageable d'avoir à disposition l'évolution spatio-temporelle de surfaces de mer à assez courte échéance. Ce point était un des éléments centraux du projet de recherche ASTRID PREDEMONAV dans lequel s'inscrit ce travail de thèse.
- La modélisation de houle au travers d'un modèle faiblement non-linéaire basée sur une représentation lagrangienne de la surface libre : le modèle Choppy [? ], qui a été amélioré au cours de ce travail en vue d'améliorer ses performances pour la prédiction [? ].

On se trouve donc dans cette étude dans la configuration de zone de prédiction présentée sur la figure 3.5.

#### Données de mesure

Une des spécificités du travail de thèse mené par N. Desmars est d'utiliser a priori une donnée spatio-temporelle de type flash-LIDAR pour la procédure de prédiction. L'idée serait d'installer un tel dispositif sur un navire ou une structure en mer afin de pointer sur une zone en amont et d'utiliser ces données afin de prédire le champ de vagues venant interagir avec la structure d'intérêt. La figure 3.9 présente dans une configuration unidirectionnelle une représentation de la mesure instantanée disponible par ce dispositif.

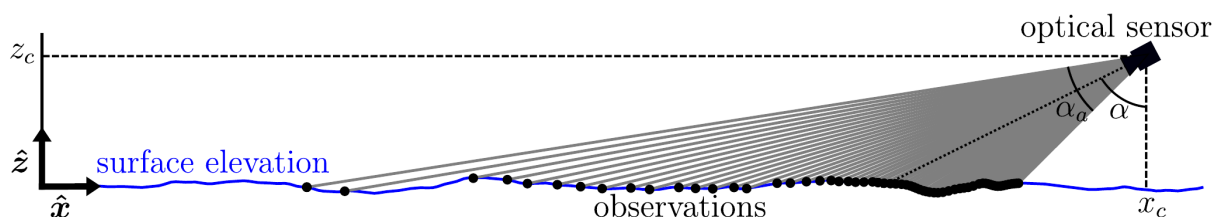


FIGURE 3.9 – Vue schématique d'une mesure LIDAR d'un champ uni-directionnel

La particularité de la mesure est l'irrégularité de la distribution spatiale, qui est possiblement renforcée par les effets de masquage. Due à la présente inexistence de ce dispositif de mesure, les premiers résultats ont été obtenus à partir de surfaces de mer générées avec le modèle HOS-ocean, sur lesquelles un modèle théorique de LIDAR est utilisé afin d'extraire des informations similaires à celles mesurées dans un cas réel. La figure 3.10

présente dans un cas directionnel les données dont on peut espérer avoir à disposition (points noirs). La zone de prédiction accessible dans cette configuration après  $3T_p$  est également représentée sur la figure.

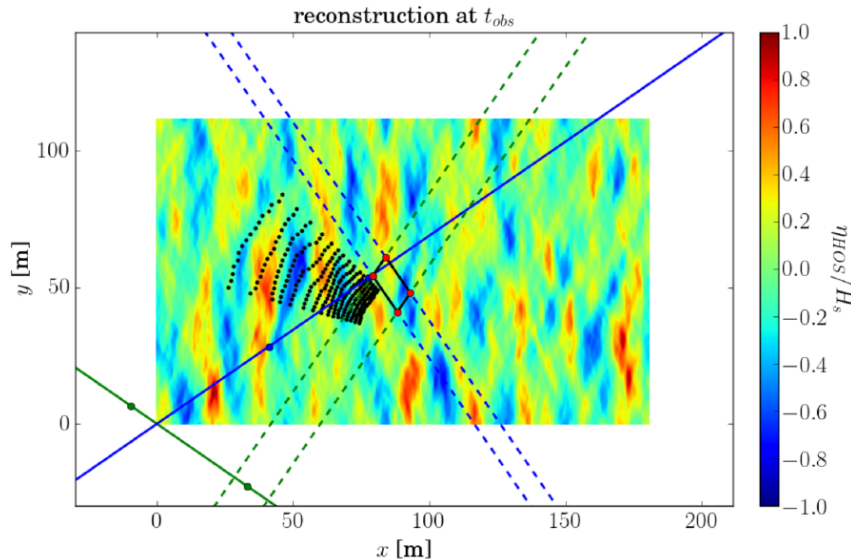


FIGURE 3.10 – Surface libre tri-dimensionnelle issue de HOS avec points d’observation. Zone de prédiction après  $3T_p$  (losange).

En ce qui concerne les données à partir desquelles on peut faire une analyse de prédiction, j’indique qu’une campagne expérimentale dédiée a été menée au cours de la thèse. L’idée a été de pallier l’indisponibilité d’un système LIDAR fiable actuellement pour la mesure de surfaces de mer. A la place, des expériences dans le bassin océanique de l’ECN avec un réseau de sondes à houle sensé être représentatif de la distribution de points disponible par un système LIDAR ont été mises en place. Des états de mer de différentes cambrures avec divers étalement directionnels ont été testés. La figure 3.11 présente le dispositif expérimental mis en place dans un cas uni-directionnel et directionnel.

### Modélisation de houle

L’importance des non-linéarités a été démontrée dans une optique de prédiction déterministe à court terme. Le choix du modèle de houle le plus adéquat pour résoudre le problème est encore ouvert, même si le paragraphe précédent nous a indiqué que l’utilisation d’un modèle complètement non-linéaire dans une approche classique d’assimilation/prédiction ne semble pas adaptée au temps réel.

Dans le cadre du projet PREDEMONAV et de la thèse de N. Desmars, un effort particulier a été fait vers le développement d’une méthode faiblement non-linéaire efficace et adaptée à notre problématique de prédiction. L’idée est d’utiliser le formalisme Lagrangien du modèle Choppy [?] et d’en améliorer les caractéristiques. L’intérêt de l’approche lagrangienne est qu’elle permet, à un ordre de non-linéarité donné, de prendre en compte des non-linéarités d’ordre supérieur à celles résolues par un schéma eulérien. Le modèle

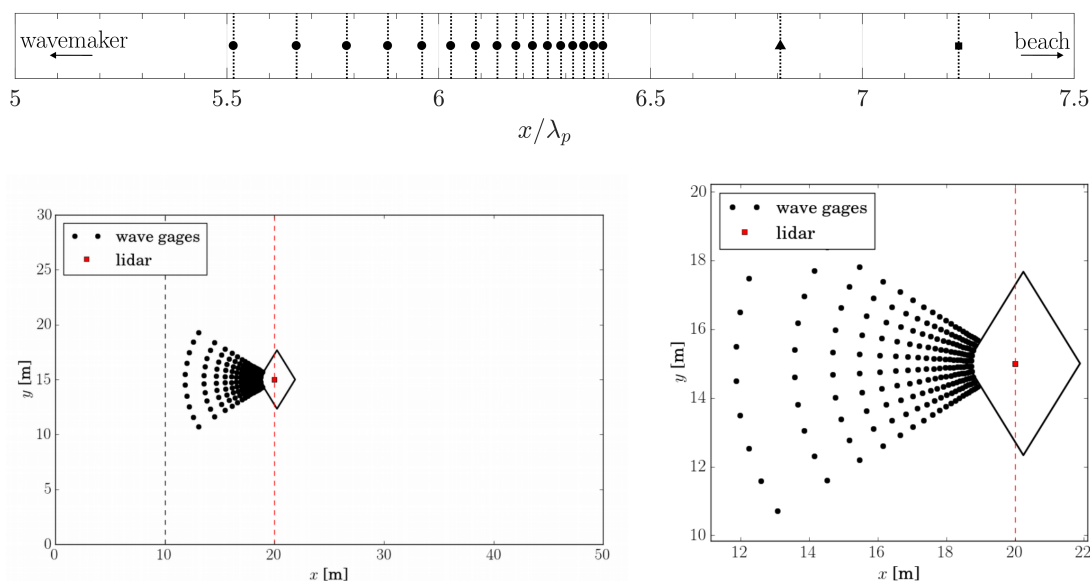


FIGURE 3.11 – Arrangement expérimental des sondes à houle. Cas uni-directionnel (haut) cas directionnel (bas). Dans le cas directionnel, est représenté la zone de prédiction accessible à  $3T_p$ .

Choppy original [?] est linéaire mais permet de prendre en compte l'asymétrie verticale des vagues (comme le ferait un modèle second-ordre eulérien).

On a donc développé une version améliorée, second-ordre, de ce modèle de Choppy (ICWM) [?]. L'intérêt principal de cette formulation est de prendre en compte correctement la vitesse de phase non-linéaire, ce qui était une limitation forte des modèles lagrangiens existants. La figure 3.12 présente la comparaison entre les différentes approches, notamment entre le modèle linéaire, le modèle Choppy second-ordre classique et le modèle amélioré ICWM qui résout la problématique de la vitesse de phase non-linéaire. Ces méthodes sont comparées à des simulations HOS de référence.

On s'aperçoit clairement de l'apport du modèle développé en terme de précision. Dans une configuration de houle irrégulière, pour des horizons de propagation courts ( $t < 10T_p$ ) qui seront l'utilisation classique en mode 'prédiction', le gain est très important.

En terme de complexité numérique, la discrétisation irrégulière de la surface libre obtenue par une donnée LIDAR oblige, même dans le cas d'un modèle linéaire, de résoudre un système linéaire pour la partie assimilation, qui reste toutefois très peu coûteux.

Par rapport au linéaire, les modèles Choppy ou Choppy améliorés nécessitent quant à eux la mise en place d'un processus itératif supplémentaire. Cependant, au vu de la formulation relativement simple du problème, ce dernier converge avec un nombre d'itérations compris entre 5 et 20, en fonction de la cambrure de l'état de mer. Les coûts en temps de calcul sont donc très raisonnables et rendent possible des applications, y compris en configuration tri-dimensionnelles.

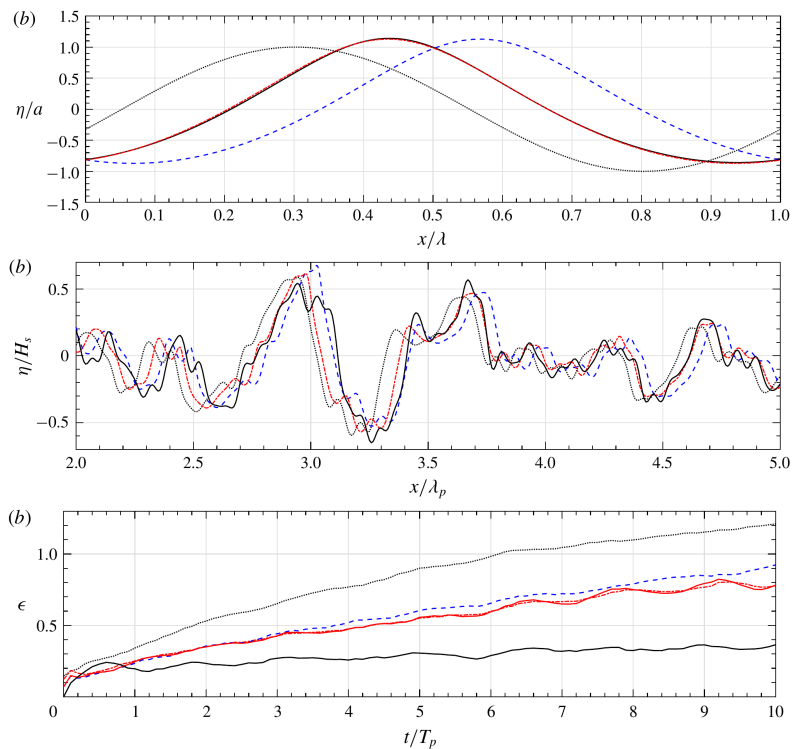


FIGURE 3.12 – Comparaison entre les résultats des simulations HOS (—), le modèle linéaire ( $\cdots$ ), le modèle Choppy second ordre classique (---) et le modèle amélioré ICWM (-.-). Houle régulière  $H/\lambda = 8\%$  après 4 périodes de propagation (haut). Houle irrégulière de type JONSWAP  $H_s/\lambda_p = 4\%$  après une propagation de  $4T_p$  (milieu). Évolution de l'erreur au cours du temps (bas).

Résultats

Des tests détaillés des performances de la méthode ont été menés sur les données synthétiques, notamment vis à vis des paramètres de la méthode : onde la plus courte résolue, nombre d'échantillons temporels, etc. [? ]. Un exemple de résultat de prédiction en champ de vagues unidirectionnel est présenté sur la figure 3.13. La prédiction est réalisée à une distance d'environ  $3\lambda_p$ .

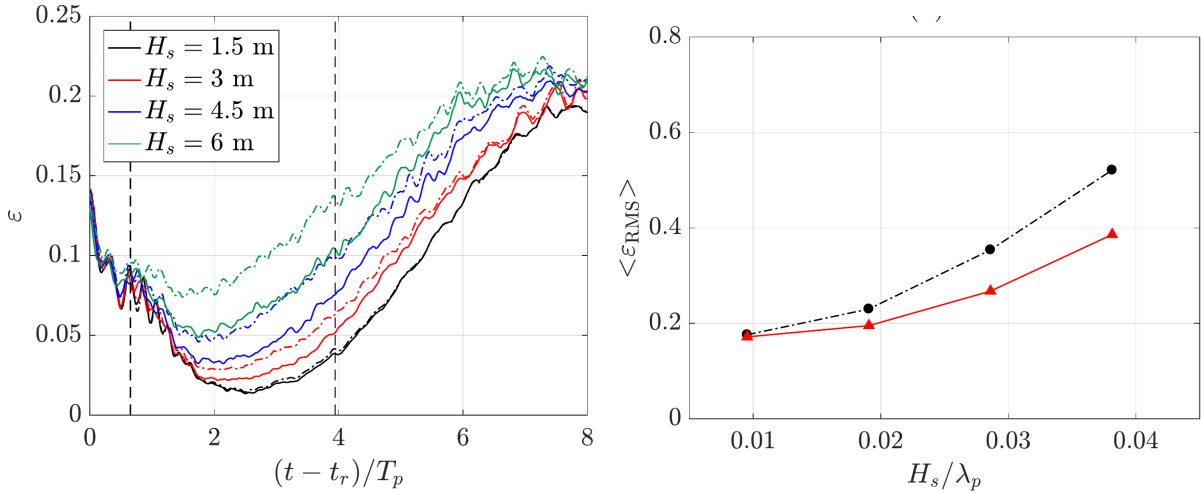


FIGURE 3.13 – Comparaison entre les résultats de la prédiction à une distance  $3\lambda_p$  par modèle linéaire (—) et modèle Choppy amélioré (---) pour différentes cambrures. Evolution temporelle de l'erreur de prédiction (gauche) et moyenne de cette erreur (droite).

L'influence de la cambrure est notable, tout comme l'est l'amélioration apportée par le modèle non-linéaire utilisée. La méthode a également déjà été employée sur des cas directionnels au vu de la faible complexité numérique. La figure 3.14 présente l'erreur de reconstruction et de prédiction après  $2T_p$  pour un état de mer directionnel.

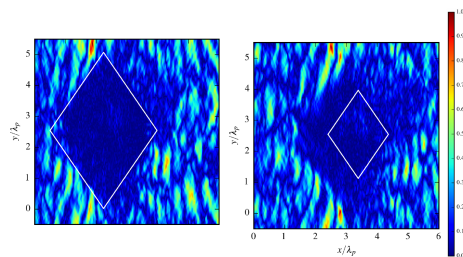


FIGURE 3.14 – Erreur point à point normalisée à la solution de référence HOS pour la reconstruction (haut) et la prédiction à  $2T_p$  (bas)

Ces premiers résultats sont très encourageant, notamment au niveau de la zone de prédiction accessible qui semble pratiquement plus grande que la zone théorique. Concernant le temps de calcul, pour ces états de mer directionnels, il reste encore à minima un ordre de grandeur à gagner pour être au niveau du temps réel. Un effort devra donc être entrepris

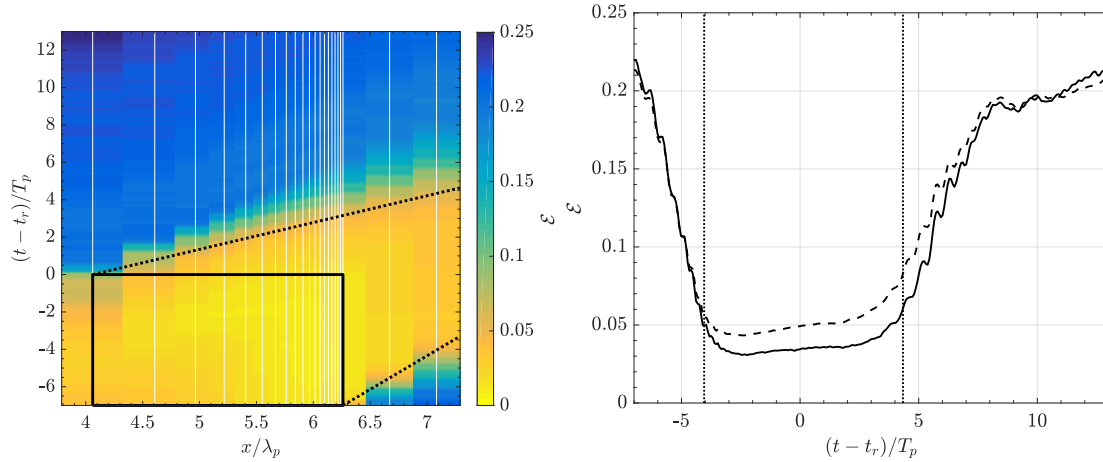


FIGURE 3.15 – (Gauche) évolution temporelle de l’erreur de prédiction sur une sonde localisée à environ  $\lambda_p$  du dernier point d’observation (modèle linéaire, ----) et non-linéaire (ICWM, —). (Droite) vue spatio-temporelle de l’erreur avec le carré noir représentant la zone d’observation assimilée. Dans les deux figures, les lignes pointillées (.....) représentent les limites de la zone de prédiction.

dans cette direction, mais cela reste un objectif qui semble atteignable à assez court terme.

En complément de ces résultats se basant sur des données synthétiques (obtenues à l’aide de modèles de vagues non-linéaires HOS), la méthodologie complète de prédiction a également été validée récemment grâce à des expériences réalisées au sein du bassin océanique de l’ECN. La figure 3.15 présente les résultats de validation expérimentale dans une configuration unidirectionnelle pour une houle irrégulière de cambrure  $H_s/\lambda_p \simeq 3\%$ .

Les résultats expérimentaux sont très encourageants avec des niveaux d’erreurs tout à fait acceptables pour des applications pratiques. Le traitement des essais directionnels est prévu dans le futur, les données expérimentales étant disponibles.

### 3.1.4 Mesure volumique du champ de vitesse

La dernière approche qui est en cours de qualification au LHEEA concernant la prédiction de houle entend utiliser un jeu de données différent des cas précédents. Plutôt que de se baser sur une mesure de l’élévation de surface libre comme information caractéristique du champ de vagues, l’idée est ici d’utiliser le champ de vitesses induit par ces vagues. Cette approche fait l’objet du travail de thèse mené par M. Huchet, que je co-encadre.

Cette information peut ne pas sembler pertinente pour un modèle de propagation de houle, car étant classiquement plutôt perçue comme une résultante de l’existence des vagues à la surface. Cependant, en se replaçant dans le contexte d’un bassin de houle, les vagues sont générées par le mouvement du batteur. La représentation de ce dernier, au premier ordre d’approximation, est tout simplement un champ de vitesse horizontale imposé sur la frontière verticale  $x = 0$ , position moyenne de ce dernier. Ainsi, si on est capable d’avoir accès à une telle mesure, on pourrait essayer d’utiliser cette source d’information non pas comme objectif d’une boucle d’assimilation mais comme condition



à la limite d'un bassin de houle numérique. Les avantages de cette méthode seront a priori :

- La partie assimilation des données se transforme en une simple donnée d'entrée du modèle de bassin de houle numérique. On n'a plus qu'un terme de forçage direct du modèle d'évolution et donc on réduit considérablement la complexité.
- Utilisation possible de tout modèle de bassin de houle, y compris complètement non-linéaire, type HOS-NWT avec a priori un temps de calcul raisonnable dans un objectif temps réel.

La figure 3.16 résume la partie reconstruction et prédiction avec cette approche.

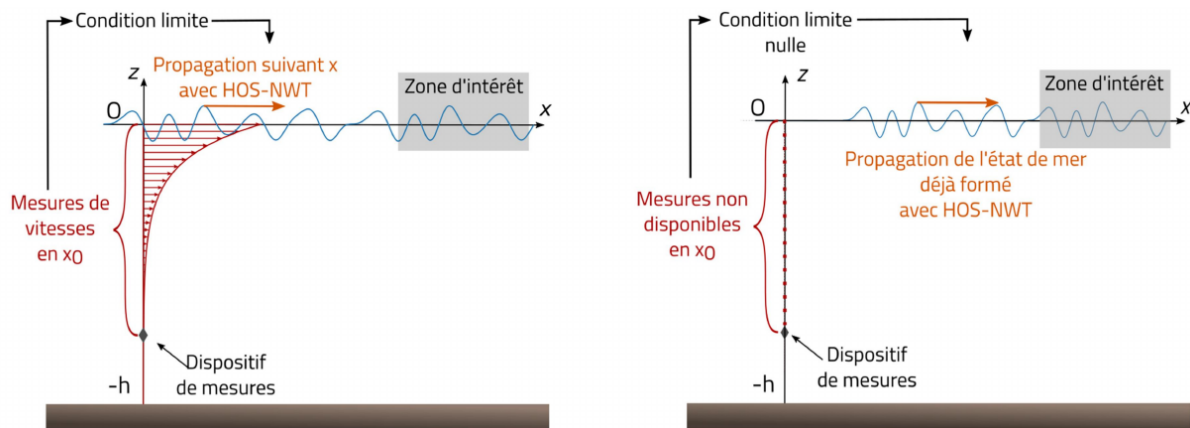


FIGURE 3.16 – (Gauche) Reconstruction de l'état de mer grâce à la cinématique de houle mesurée en  $x_0$ ,  $U(x_0, z, t)$  imposée comme condition à la limite de HOS-NWT. (Droite) Prédiction de l'état de mer avec une condition à la limite mise à zéro et la propagation de l'information avec le modèle.

Du point de vue de la mise en place pratique de cette méthode, il ne semble pas y avoir de complexité particulière. L'extension à des cas directionnels nécessitera a priori d'avoir des informations de champ de vitesse y compris dans la direction perpendiculaire à la propagation mais semble envisageable. Ainsi, la problématique principale réside dans la possibilité pratique d'avoir accès à des données de mesure qui nous sont utiles, à savoir, la vitesse horizontale à une position fixe  $x_0$ , sur toute la colonne d'eau :  $U(x_0, z, t)$ .

Une analyse de l'existant a conduit à un choix de capteur type ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) pour un déploiement possible en mer. Cependant, cet instrument ne permet de mesurer la vitesse que dans la direction de ses rayons (au nombre de 4 ou 5 dans une configuration classique). Si on veut une évaluation précise de la vitesse horizontale, une étape supplémentaire est donc nécessaire. L'idée a émergé d'utiliser 2 ADCPs et uniquement leur faisceau vertical, donnant une information sur la vitesse verticale dans la colonne d'eau. A partir de ces deux mesures et en supposant l'écoulement irrotationnel, on peut aisément remonter à la vitesse horizontale (voir figure 3.17). En unidirectionnel :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial x}\right).$$

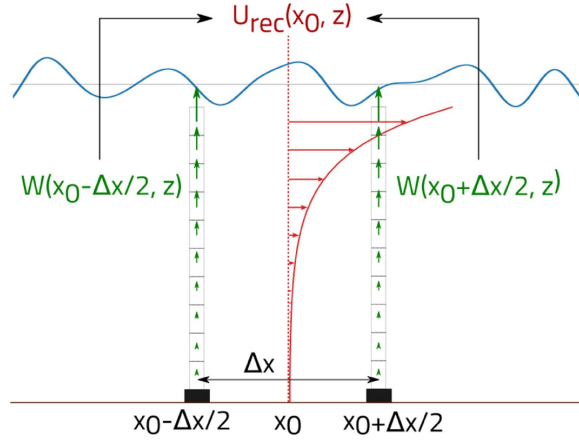


FIGURE 3.17 – Principe de la méthode de reconstruction de  $U(x_0, z, t)$  à partir des deux mesures de vitesses verticales  $W(x_0 \pm \Delta x, z, t)$

Le principe de la méthode a donc été testé dans une configuration idéale où on connaît exactement le champ de vitesse horizontale à une certaine position (celui-ci est calculé par le modèle non-linéaire HOS-ocean) et on compare alors le champ de vagues à un horizon de prédiction de  $2T_p$  sur toute la zone de prédiction théorique. Les résultats sont donnés sur la figure 3.18.

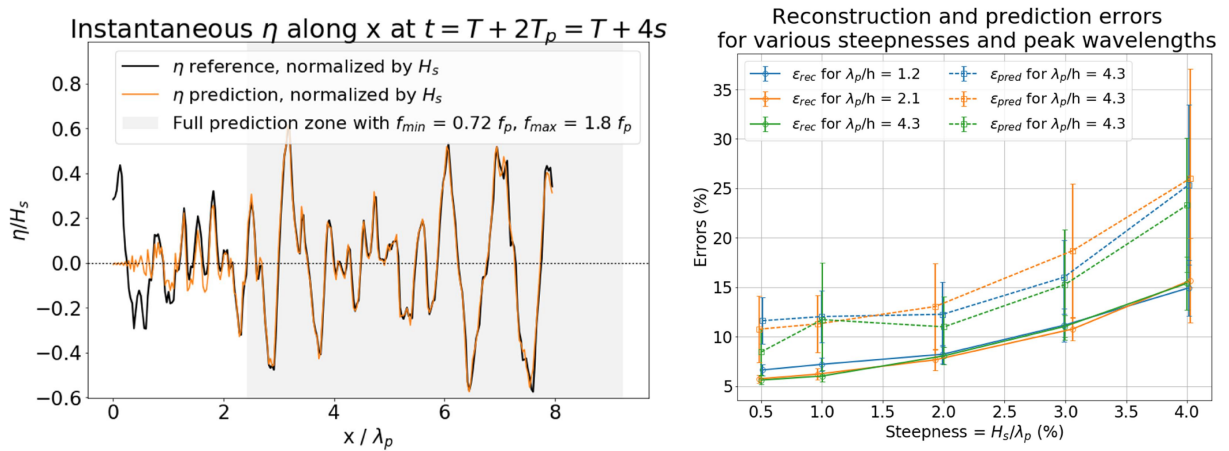


FIGURE 3.18 – (Gauche) Exemple de comparaison spatiale entre la solution de référence et la solution prédite après  $2T_p$ . (Droite) Erreurs de reconstruction (traits pleins) et de prédiction (pointillés) pour différentes cambrures et différentes fréquences de pic.

Ces premiers résultats sont prometteurs quant aux capacités de la méthode. Cependant, il a été montré [?] que les résultats sont assez sensibles à la qualité des données de champ de vitesse ainsi qu'à leur disponibilité dans la tranche d'eau. De manière générale, les données issues d'ADCP, si celui-ci est localisé au fond, ont une zone inaccessible proche du fond (qui n'est pas forcément le plus problématique car la dynamique à ces profondeurs est plus faible), mais ne parviennent pas à mesurer proche de la surface libre (où

au contraire la dynamique induite par les vagues est très importante). Ceci va induire de possibles difficultés dans la méthode de prédiction et dans sa capacité pratique à résoudre le problème. Des développements afin de résoudre ces problèmes de mesure sont en cours de développement dans le cadre de la thèse de M. Huchet. A noter que des premières expériences de validation ont également été réalisées, même si l'utilisation d'ADCPs en bassin pose un certain nombre de problèmes techniques.

### 3.1.5 Conclusion-perspectives

Pour résumer le travail effectué autour de cette thématique de la prédiction de houle, je peux rappeler que les éléments essentiels d'une procédure de prédiction sont (Figure 3.1)

- La mesure in-situ
- La définition des zones de prédiction
- Le choix d'un modèle de houle
- L'assimilation des données de mesure dans le modèle de houle

Sur l'ensemble de ces points, des efforts importants ont été menés à l'ECN dans le cadre des trois thèses sur le sujet. L'ensemble de ces travaux nous permettent au jour d'aujourd'hui d'avoir une vision assez globale sur les défis à venir pour envisager une prédiction déterministe en temps réel des champs de vagues sur des horizons de quelques périodes de pic, qui sont les cas d'application visés en génie océanique.

La balance entre l'efficacité de la procédure complète mise en place et la précision de cette prédiction sera bien évidemment à évaluer un peu plus finement pour faire un choix plus définitif quant à l'approche préférentielle. Dans ce cadre, le pas de côté fait avec l'idée d'une prédiction ne se basant pas sur une mesure de l'élévation de surface libre peut apporter une piste pour le futur. Il conviendra d'essayer de répondre à la question suivante : est-il possible de combiner certaines approches (en particulier informations de surface libre et informations de vitesses induites) ?

D'autre part, l'ensemble des tests menés quant au modèle de houle adéquat pour la prédiction semble indiquer qu'une amélioration significative peut être apportée à la précision avec des modèles faiblement non-linéaire (que ce soit second-ordre eulérien ou lagrangien) dès lors que la relation de dispersion non-linéaire est prise en compte. Le choix va alors probablement se faire vis à vis de l'efficacité des approches, l'extension au non-linéaire complet dans une approche avec assimilation de données semblant inenvisageable.

Dans cette perspective de développement d'un outil temps réel pouvant être utilisé dans la pratique, des développements sont en cours pour essayer d'y intégrer le comportement de la structure d'intérêt. En effet, si on est intéressé au final par ce comportement (par exemple le mouvement du navire qui pourrait dans l'étape ultérieure même être contrôlé), on peut inclure dans la procédure de prédiction le fait que la réponse de la structure filtre certaines fréquences, qui ne sont peut être pas utile de résoudre précisément.

Il est important d'évoquer ici les perspectives d'application de cette thématique de prédiction de houle à l'éolien offshore flottant. C'est un sujet particulièrement porteur actuellement, avec différents acteurs s'intéressant à ce sujet. La prédiction de houle apparaît

effectivement comme un élément clé pour le contrôle en temps réel de ces éoliennes offshore, aussi bien pour maximiser la production d'énergie que pour limiter les mouvements de la plate-forme en condition extrême. Différents projets ont été déposés en ce sens au sein du LHEEA, qui permettront possiblement d'avancer sur cette thématique dans les années à venir.

## 3.2 Interactions houle-structure

En tant que problématique principale du génie océanique, la thématique des interactions houle-structure est centrale au LHEEA depuis de nombreuses années. Il s'agit d'un sujet d'étude privilégié tant du point de vue expérimental que numérique. La modélisation du phénomène a été adaptée aux capacités de calcul ainsi qu'aux besoins en terme de précision. Il en résulte que le LHEEA a étudié et développé des méthodes numériques en ce sens qui couvrent à peu près l'ensemble des niveaux de complexité (de modélisation et/ou de phénomènes physiques résolus) : en partant des méthodes potentielles linéarisées, jusqu'aux méthodes sans maillage type SPH en passant par les approches CFD plus classiques de type volumes-finis.

Dans ce contexte de modélisation, mon implication se concentre sur l'interfaçage entre les modèles de houle et le solveur, même si j'ai également travaillé directement sur un solveur houle-structure lors de mon post-doctorat réalisé à DTU ou co-encadré de tels développements (voir section 3.2.2).

Je rappelle que la stratégie adoptée par le LHEEA pour traiter cette problématique de l'interaction houle-structure est d'utiliser des méthodes numériques qui sont adaptées à chaque problématique physique. Ensuite, si besoin est, on va coupler les méthodes entre elles pour arriver à une modélisation d'un problème spécifique la plus efficace possible. Ce choix est d'un point de vue 'philosophique' assez différent de celui d'une approche monolithique où un seul solveur résout tout le problème, quel qu'il soit.

En ce sens, les caractéristiques physiques et de modélisation de la houle apparaissent le plus souvent assez différentes de celles de l'interaction (*i.e.* l'influence de la présence d'une structure dans l'écoulement). Cette dernière va donc être résolue classiquement par un modèle type fonction de courant en houle régulière ou par l'un des modèles HOS décrits dans le chapitre 2 dans les autres configurations.

D'un point de vue scientifique, il s'agit d'une grande opportunité pour moi d'interagir avec de nombreux collègues utilisant des méthodes numériques aussi diverses que du potentiel faiblement non-linéaire, des codes CFD discrétisés par volumes finis, des méthodes sans maillage type SPH, etc. Les problématiques numériques et de couplage peuvent se révéler différentes et m'ont permis au fur et à mesure du temps d'enrichir mes connaissances scientifiques dans ces différents domaines.

### 3.2.1 Procédures de couplage

Différentes stratégies de couplage peuvent être mises en place pour étudier l'interaction houle-structure. Comme indiqué précédemment, l'idée est de résoudre le champ de vagues non perturbé à l'aide d'un modèle de houle, alors que proche du corps le solveur prenant en compte la présence de celui-ci sera à l'œuvre. L'approche la plus classique dans cette

configuration consiste à effectuer un couplage spatial avec une procédure d'échange d'informations à une certaine distance du corps. Une autre approche développée au LHEEA depuis de nombreuses années [?] utilise une décomposition fonctionnelle, dite approche SWENSE, et sera détaillée par la suite (section 3.2.2).

Pour l'une ou l'autre stratégie de couplage, les informations à extraire du modèle de houle sont similaires, à savoir : i) les informations associées à la surface libre (élévation, vitesse normale, etc.) et ii) champs de vitesses et de pression à l'intérieur du domaine fluide.

### Calcul des vitesses dans le domaine fluide

Comme il a été présenté dans le chapitre 2, le modèle HOS résout uniquement l'évolution de la surface libre  $\eta(\mathbf{x}, t)$  et du potentiel de surface associé  $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi^s(\mathbf{x}, z = \eta(\mathbf{x}, t), t)$ . Ainsi, on ne dispose a priori pas directement des informations volumiques tel que les champs de pression et de vitesses.

Au cours de ma thèse de doctorat [?], j'ai développé une méthodologie pour calculer la vitesse dans le domaine fluide. La méthode utilisée est basée sur le travail de [?] et permet une résolution efficace du problème, s'affranchissant de l'inversion d'une matrice pleine et permettant d'envisager les cas tridimensionnels sans difficulté. Les caractéristiques sont les suivantes

- Résolution itérative remplaçant l'inversion du système linéaire
- Méthode incrémentale pour arriver jusqu'à l'élévation de surface libre (méthode  $H_2$ )
- Reconstruction de chaque composante de la vitesse, sans passage par le potentiel des vitesses

La figure 3.19 présente des résultats de validation pour des houles régulières très cambrées,  $ka = 0.30$  et  $ka = 0.40$ . On compare pour le cas de cambrure plus faible les résultats correspondants à la reconstruction en utilisant le potentiel ou en utilisant la vitesse, afin de mettre en lumière l'avantage inhérent à l'utilisation de la vitesse.

La méthode a donc été validée en houle régulière où on dispose d'une solution de référence avec la méthode de fonction de courant [?]. La figure 3.20 présente un exemple d'application en houle irrégulière unidirectionnelle avec un état de mer de type JONSWAP avec  $H_s = 4.5m$  et  $T_p = 10s$ , dans une profondeur d'eau  $h = 35m$ .

Associé au champ de vitesses, cette figure présente la valeur de la divergence de la vitesse dans tout le domaine de calcul. Pour des états de mer relativement cambrés, cette divergence de la vitesse peut prendre des valeurs non négligeables comme présenté dans ce cas d'étude.

L'origine de cette divergence non-nulle vient du fait que la méthode utilisée est celle de la reconstruction du champ volumique de vitesse directement à partir de la valeur de la vitesse connue à la surface libre et non pas à partir du potentiel. Ce choix a été fait afin d'augmenter la précision sur la vitesse proche surface libre, comme représenté sur la figure 3.19. Il en résulte que les vitesses horizontales et verticales sont résolues de manière indépendantes, ce qui peut conduire à cette erreur sur la divergence de la vitesse. La reconstruction en utilisant le potentiel permet d'obtenir un champ parfaitement isovolume.

Suivant les cas d'application, les caractéristiques requises par le champ de vitesse peuvent différer. On a principalement deux configurations dans l'approche par décomposition fonctionnelle (Section 3.2.2) :

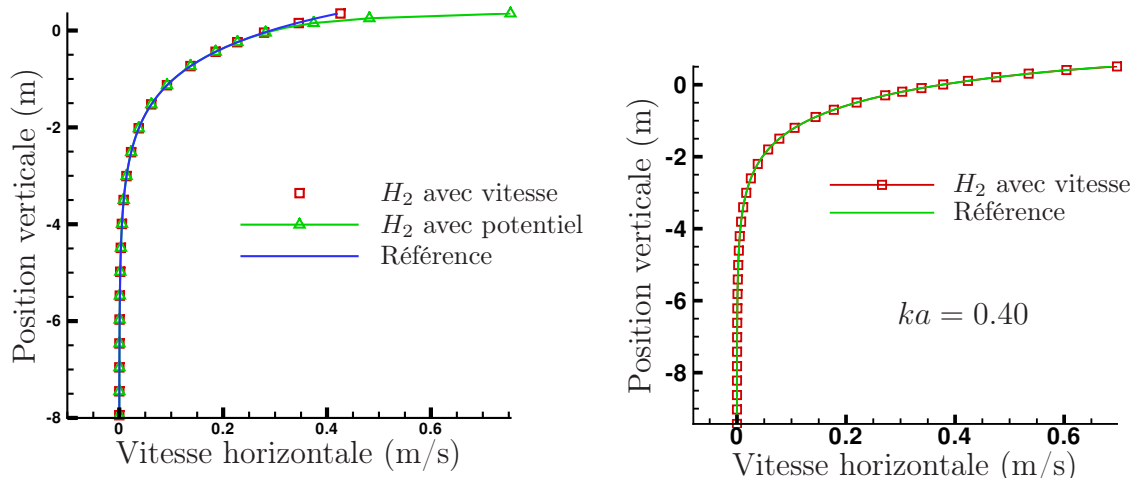


FIGURE 3.19 – Reconstruction du profil vertical de vitesse en houle régulière avec l’opérateur  $H_2$ .  $ka = 0.30$  avec comparaison de reconstruction à partir du potentiel ou de la vitesse à la surface libre (gauche) et  $ka = 0.40$  (droite).

- Méthode de suivi d’interface. Dans ce cas, le paramètre le plus important est le respect des conditions de surface libre avec le champ volumique reconstruit. Le critère principal de la méthode utilisée est donc la qualité de la reconstruction du champ de vitesse proche de cette surface libre. La reconstruction en utilisant la vitesse sera a priori privilégiée.
- Méthode de capture d’interface à l’œuvre dans les solveur CFD bi-fluide type OpenFOAM. La résolution de l’évolution de la surface libre par approche VOF (Volume Of Fluid) s’est montrée très sensible au respect de la condition  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ .

Il est important d’indiquer que ces problématiques de précision ne deviennent clés que dans le cas de champs de vagues très non-linéaires où la décroissance des représentations modales des quantités d’intérêt est assez lente. Dans des cas classiques d’étude d’interactions houle-structure en condition modérément cambrées, les deux approches peuvent être utilisées indifféremment avec le même niveau de précision final.

### Reconstruction en positions & temps arbitraires

Le paragraphe précédent présente la méthodologie pour obtenir à l’aide du modèle HOS les informations de la dynamique du fluide induite par les vagues dans l’ensemble du domaine de calcul. Cette première étape est nécessaire pour envisager un possible couplage avec un modèle de calcul de l’interaction avec une structure. Il reste pour se faire d’établir une procédure permettant de reconstruire, en tout point du domaine de calcul et à l’instant désiré les informations dont le code de calcul a besoin.

La première étape pour la reconstruction est de décider d’un moyen de transférer les données entre le modèle de vagues et celui utilisé pour la prise en compte de la structure dans l’écoulement. A priori, deux approches sont envisageables : i) on utilise le modèle de

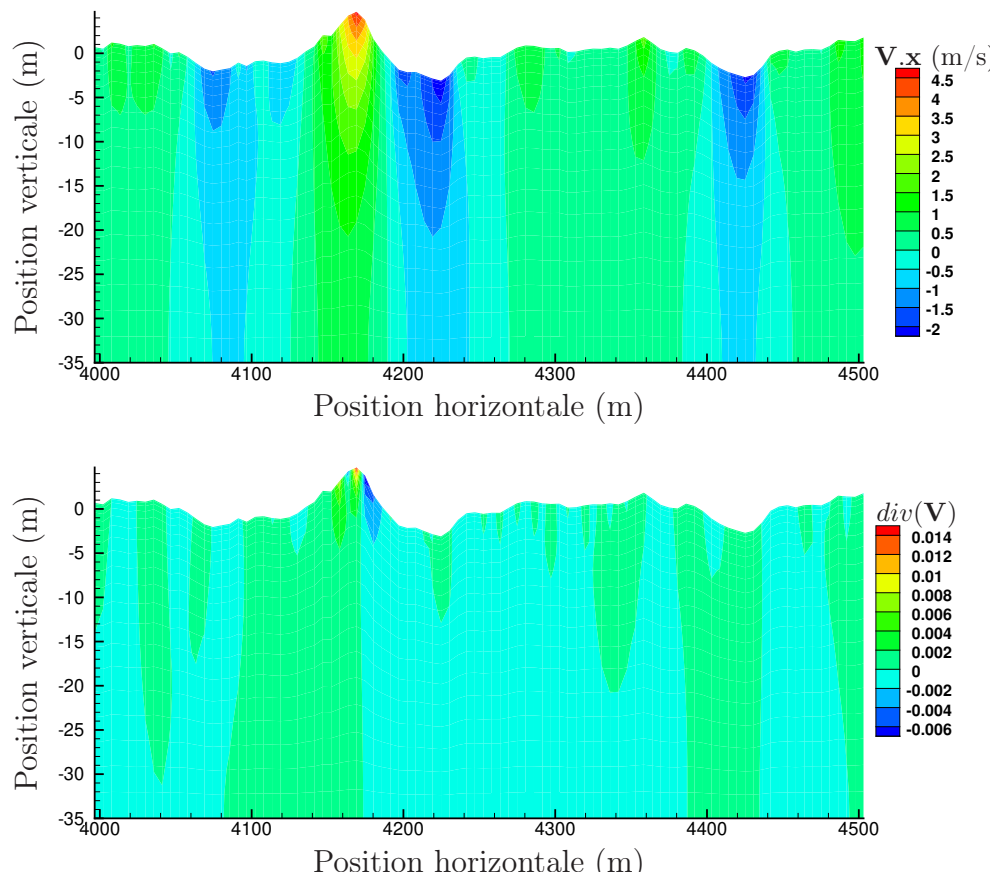


FIGURE 3.20 – Reconstruction du champ de vitesse en houle irrégulière avec l’opérateur  $H_2$ .  $H_s = 4.5m$ ,  $T_p = 10s$ ,  $h = 35m$ . Valeur de la vitesse horizontale (haut) et valeur de la divergence de la vitesse (bas).

houle en tant que librairie externe du code d'interaction houle-structure et on fait appel à lui quand nécessaire ou ii) on réalise la simulation de vagues en amont en stockant les données dans un fichier, qui sera réutilisé par le code pour l'interaction avec la structure.

Pour l'instant, on s'est focalisé sur la solution ii) qui a l'avantage de plus facilement maîtriser la qualité de la simulation de vagues avant d'effectuer l'interaction avec la structure a proprement parler. Se pose alors la question de quelles données sauvegarder dans ce fichier. Le modèle HOS permet une description des champs volumiques sous forme spectrale, après l'utilisation de la procédure  $H_2$  précédente. Une quantité  $R$  (vitesse, potentiel, dérivée temporelle du potentiel, etc.) peut alors être décrite sous la forme suivante

$$R(\mathbf{x}, z, t) = \sum_p \sum_q r_{pq}(t) f_{pq}(z) \exp(i\mathbf{k}_{pq} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.1)$$

avec  $f_{pq}(z) = \cosh[k_{pq}(z+h)]$  ou  $f_{pq}(z) = \sinh[k_{pq}(z+h)]$  suivant la quantité considérée. Afin d'optimiser la taille de stockage, à chaque instant est sauvegardée l'information modale  $r_{pq}(t)$  plutôt que l'information volumique du champ  $R(\mathbf{x}, z, t)$ .

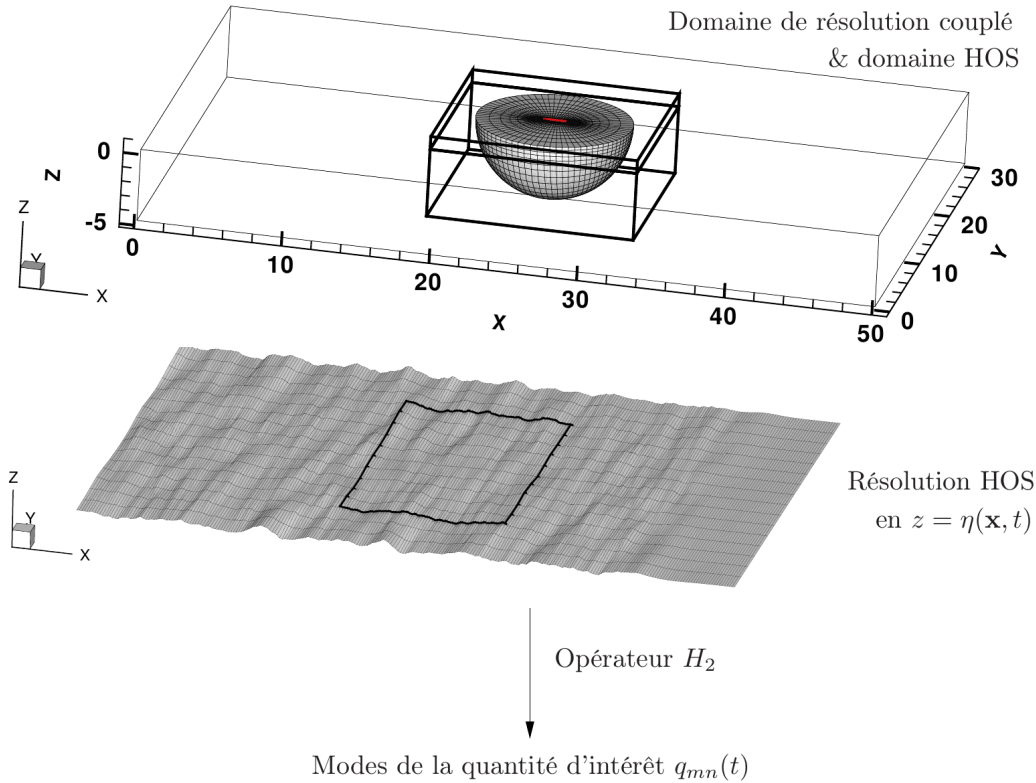


FIGURE 3.21 – Vue schématique de la première étape de reconstruction : simulation HOS vers description modale des quantités volumiques

L'étape suivante consiste à développer l'interface entre ce fichier de description modale du champ volumique et le code de calcul de l'interaction houle-structure en tant que telle. Cet interfaçage doit répondre à un certain nombre de critères, le premier étant l'efficacité



numérique de la reconstruction du champ. En effet, dans un cadre type CFD, l'évaluation du champ incident doit se faire sur des maillages très fins comprenant un grand nombre de cellules (typiquement de l'ordre du million) et avec des pas de temps généralement très courts (par rapport à la dynamique des vagues seules). Une reconstruction 'directe' en effectuant la double somme à chaque pas de temps CFD de l'équation (3.1) est inenvisageable (en particulier avec des états de mer directionnels).

La procédure développée a donc été de reconstruire par transformée de Fourier inverse, sur les points de collocation HOS le champ de vagues dans tout le volume (sur un maillage avec des coordonnées verticales  $z$  constantes pour pouvoir appliquer les FFTs). Les plans verticaux peuvent être distribués comme on le souhaite, par exemple raffiné proche de la surface libre, cf. Figure 3.22.

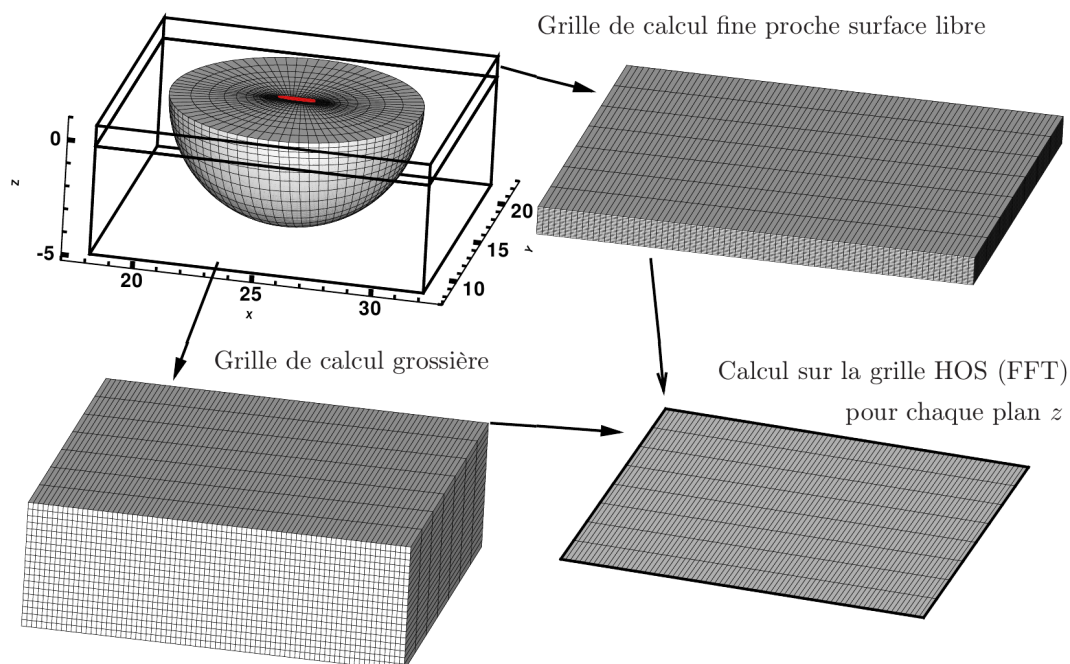


FIGURE 3.22 – Vue schématique de la deuxième étape de reconstruction : FFTs sur chaque plan vertical avec discrétisation verticale quelconque.

L'étape finale consiste alors à interpoler en espace sur la grille de calcul, depuis cette grille cartésienne. Cette interpolation est réalisée par l'utilisation de splines cubiques. Une procédure identique est appliquée en temps afin de réaliser l'interpolation entre deux pas de temps de sortie des données issues des codes HOS. Cette approche permet une reconstruction très efficace, qui a été mise en œuvre dans différents codes de calcul au LHEEA ces dernières années.

La finalisation de ce travail a conduit à simplifier au maximum la procédure de reconstruction pour un utilisateur donné. Une bibliothèque spécifique, dénommée Grid2Grid [? ], a été développée. Elle permet de centraliser toute cette procédure de reconstruction avec un interfaçage simple. Elle a en outre été développée de telle manière à ce qu'elle puisse être utilisée avec différents langages de programmation, tels Fortran ou C/C++, avec également les interfaces avec OpenFOAM<sup>®</sup> d'ores et déjà développées. Enfin, afin de poursuivre

la stratégie open-source associée aux modèles HOS, cette librairie Grid2Grid a également été mise à disposition sous ce format sur la plateforme GitHub [? ].

### Amélioration de la précision d'interpolation

Comme évoqué précédemment, l'utilisation de la méthode SWENSE (décrite dans 3.2.2) dans un code CFD bi-phasique, avec l'interface résolue en VOF, nécessite une précision accrue sur la divergence de la vitesse calculée par le modèle de houle.

Pour satisfaire ces exigences, la stratégie la plus simple est tout d'abord de passer par la reconstruction du potentiel volumique, duquel on peut déduire le champ de vitesse. Avec cette méthode, le champ reconstruit est à divergence nulle sur les nœuds de collocation utilisés dans la méthode HOS (qui sont les points de reconstruction par la première étape présentée précédemment, dû à l'utilisation des FFTs). Cependant, je rappelle que le maillage utilisé pour le modèle de houle est en général beaucoup moins raffiné que celui mis en œuvre dans un calcul CFD classique. La figure 3.23 présente un exemple de densités de maillage utilisées.

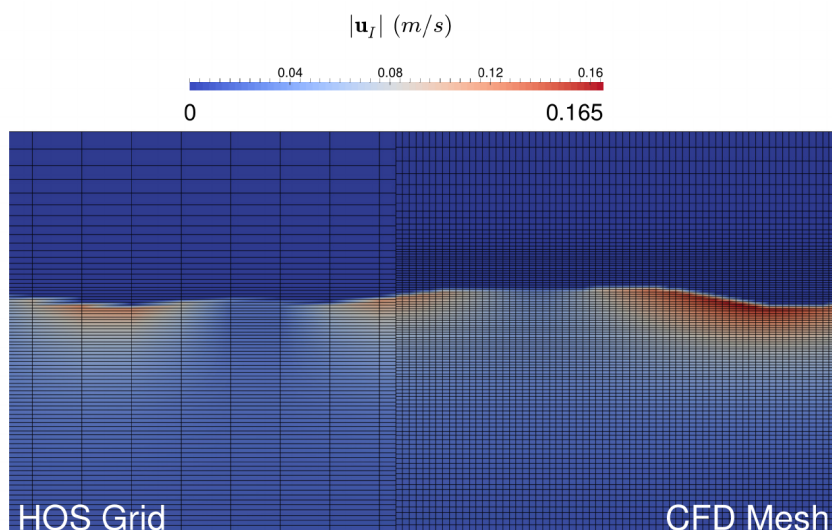


FIGURE 3.23 – Comparaison entre un maillage classique utilisé pour le modèle de houle (gauche) et dans un code CFD (droite). Valeurs de la vitesse.

A partir de ce champ à divergence nulle sur le maillage HOS, on en déduit par l'algorithme de reconstruction précédent (splines cubiques) les vitesses sur le maillage CFD comme dans la figure 3.23. Lors de cette étape d'interpolation, aucune contrainte n'est imposée sur la divergence du champ de vitesse reconstruit, qui peut alors présenter un caractère non isovolume, comme sur la figure 3.24.

Une méthodologie a été mise en place récemment à ce sujet lors de la thèse de Z. Li [? ], qui permet d'améliorer significativement la précision sur la divergence du champ de vitesses. L'idée est de se servir du formalisme spectral utilisé pour décrire les quantités d'intérêt (équation (3.1)). Si on ajoute des points de collocation qui satisfont  $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ , les erreurs d'interpolation doivent se réduire. Un moyen très simple d'y parvenir est de rajouter des modes dans la description de la quantité d'intérêt. Si ces modes n'ont

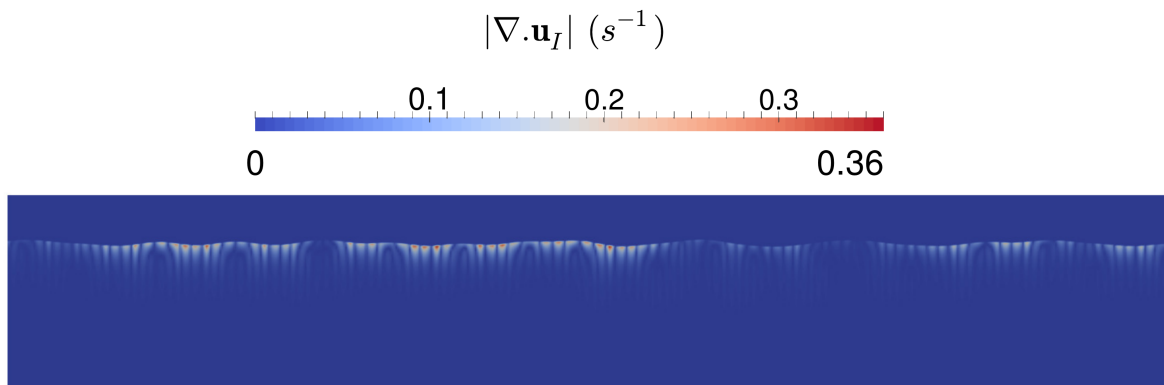


FIGURE 3.24 – Divergence de la vitesse sur le maillage CFD après reconstruction depuis un champ isovolume.

pas d'énergie, ils ne vont pas influencer sur la valeur des points de collocation initiaux et permettent simplement de discrétiser spatialement plus finement la quantité. A noter que si on souhaite conserver les points de collocation initiaux, il convient d'ajouter un nombre de modes multiple du nombre de modes initiaux. La figure 3.25 présente l'idée de cette méthodologie appliquée sur l'élévation de surface libre.

Les résultats sur la valeur de divergence sont présentés sur la figure 3.26, à comparer avec la figure 3.24. On gagne ici environ deux ordres de grandeurs sur la valeur de cette divergence en utilisant quatre fois plus de points dans l'étape de reconstruction. Cette méthode très simple et peu coûteuse en temps de calcul permet d'améliorer significativement les résultats et rendent possible les simulations réalisées par exemple dans la partie 3.2.2.

### Exemples d'application

Comme je l'ai indiqué en introduction de cette partie, ce travail d'interfaçage entre les modèles de houle et les modèles d'interaction houle-structure m'ont permis d'interagir avec les personnes en charge du développement de l'ensemble de ces méthodes. J'ai donc été impliqué dans des travaux menés en ce sens sur une grande diversité d'approches numériques que je liste ici :

- Potentiel faiblement non-linéaire : Froude-Krylov non-linéaire [? ], Weak-Scatterer [? ]
- Potentiel complètement non-linéaire : XWave [? ], OceanWave3D [? ]
- Modèle CFD par suivi d'interface : modèle ICARE [? ? ]
- modèle CFD par capture d'interface : OpenFOAM® [? ? ]
- Modèle SPH [? ? ]

Je reviendrai un peu plus en détail dans la section suivante sur l'ensemble des travaux menés dans le contexte de la décomposition fonctionnelle. Les autres travaux sont basés sur un couplage entre les modèles HOS et les modèles d'interaction houle-structure par décomposition spatiale et utilisation de zones d'échange/relaxation entre les domaines de définition du problème.

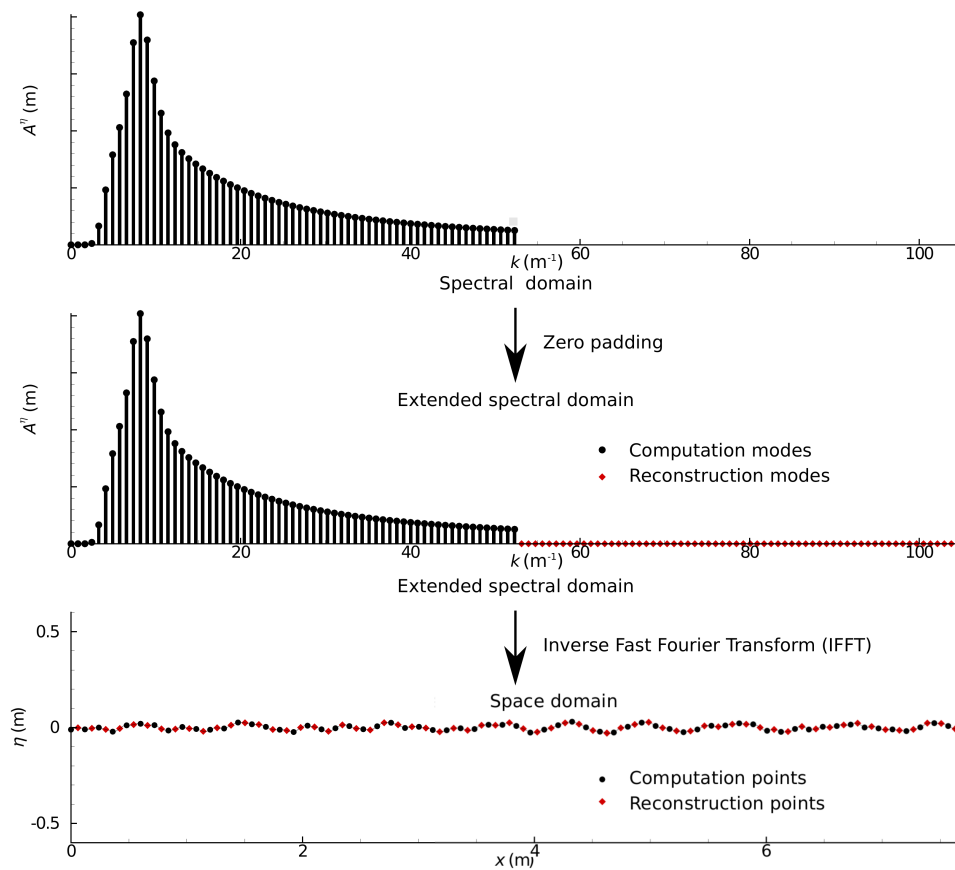


FIGURE 3.25 – Augmentation de la discrétisation par ajout de modes sans énergie à la description spectrale des quantités.

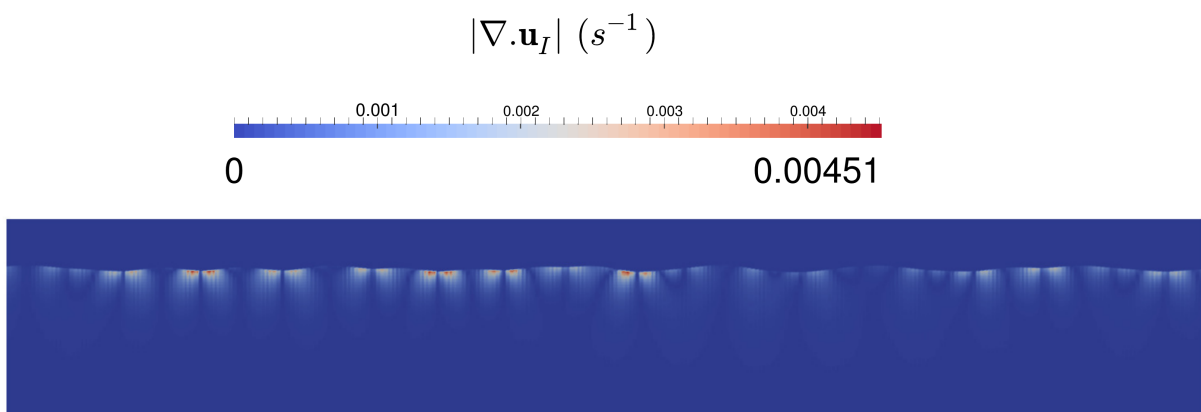


FIGURE 3.26 – Divergence de la vitesse sur le maillage CFD après reconstruction améliorée depuis un champ isovolume. Cas identique à la figure 3.24.

### 3.2.2 Méthode de décomposition fonctionnelle

Je présente dans cette partie les travaux que j'ai pu effectuer dans le cadre des approches par décomposition fonctionnelle. Comme je l'ai indiqué précédemment, cette méthodologie a été mise en place de longue date à l'ECN dans le cadre du couplage potentiel/Navier-Stokes, désormais appelé méthode SWENSE [? ].

Cette approche de décomposition dite fonctionnelle peut être appliquée à de nombreuses configurations de couplage, la philosophie étant la suivante. On dispose d'un modèle résolvant l'interaction entre une houle et une structure. Tout modèle se présente sous la forme d'un jeu d'équations à résoudre :

- Des équations de conservation
  1. Conservation de la masse
  2. Conservation de la quantité de mouvement
- Des conditions aux limites, par exemple :
  1. Conditions sur le corps
  2. Conditions à l'infini (loin du corps)
  3. Conditions de surface libre
  4. etc.

Il s'agit, dans tous les cas, du système d'équations qu'on cherche à résoudre. La méthode de décomposition fonctionnelle entend essayer de simplifier la résolution en se servant des informations connues à propos du champ de vagues. Ces informations sont celles obtenues grâce au modèle HOS, qui vérifient elles-mêmes le jeu d'équation précédent, formulé pour un écoulement potentiel non-linéaire (ou équations d'Euler). Pour rappel, elles peuvent être écrites sous la forme suivante (en l'écrivant en vitesse  $\mathbf{V}$  et pression  $P$  et en utilisant l'indice  $i$  pour identifier la composante du champ incident)

- Des équations de conservation
  1. Conservation de la masse :  $\nabla \cdot \mathbf{V}_i = 0$
  2. Conservation de la quantité de mouvement :  $\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i = -\frac{\nabla P_i}{\rho} + \mathbf{g}$
- Des conditions aux limites, par exemple :
  1. Deux conditions de surface libre
  2. Une condition au fond
  3. Des conditions à l'infini (HOS-ocean) ou sur les frontières du bassin de houle (HOS-NWT)

Il est alors possible de soustraire le jeu d'équations 'incident' au jeu d'équations du problème complet. Cette soustraction peut être formulée d'un point de vue mathématique comme un simple changement de variable dans le système d'équations résolu. Si le système d'équations du problème complet est formulé en potentiel non-linéaire, le changement de variable est évident. Prenons ici l'exemple simple des équations de Navier-Stokes monophasiques et des équations de conservation en configurations isovolume pour le problème complet :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \tag{3.3}$$

En effectuant la soustraction proposée avec le champ incident (qui satisfait à ce système d'équations donc d'un point de vue mathématique on n'enlève ou ne rajoute 'rien') et en introduisant le champ complémentaire (donc le changement de variable évoqué)  $P_c = P - P_i$  et  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V} - \mathbf{V}_i$  on obtient un nouveau jeu d'équations à résoudre :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_c = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_c}{\partial t} + \mathbf{V}_c \cdot \nabla \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_c \cdot \nabla \mathbf{V}_i + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_c = -\frac{\nabla P_c}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V}_c \quad (3.5)$$

La même démarche peut être faite sur les conditions aux limites afin de formuler un nouveau système d'équations pour les champs qu'on appelle complémentaires  $\mathbf{V}_c$  et  $P_c$ . Il faut bien comprendre que le système d'équations résolu est exactement le même que le système initial. La seule chose effectuée a été un changement de variable qui permet de réécrire le système d'équation du problème de l'interaction houle-structure. De nouveaux termes apparaissent dans le bilan de quantité de mouvement avec le champ incident apparaissant comme terme de forçage (car connu). La figure 3.27 entend schématiser la démarche dans le cas du couplage Navier-Stokes (CFD) et HOS (Euler).

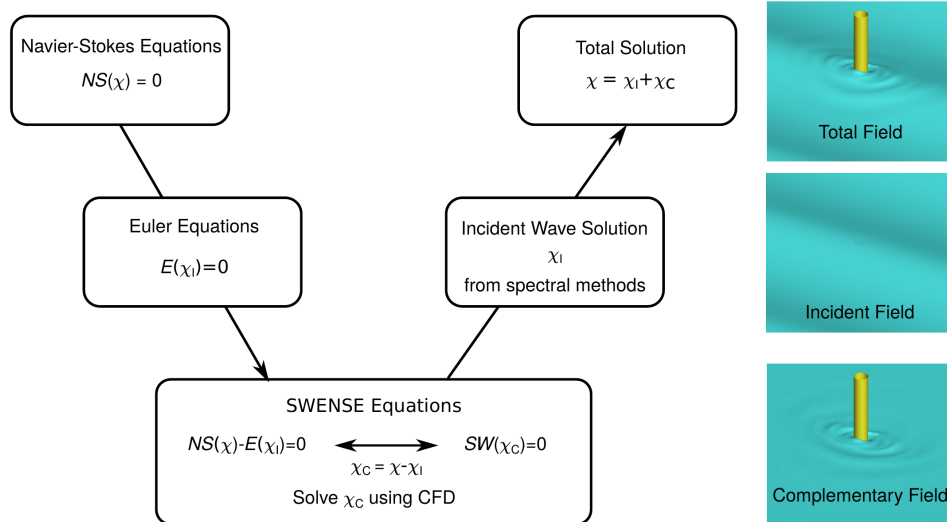


FIGURE 3.27 – Représentation schématique de la décomposition fonctionnelle SWENSE.

Il est attendu de cette méthode d'améliorer l'efficacité numérique de résolution en concentrant les efforts de résolution (finesse du maillage) dans les zones où le champ complémentaire est important. Pour ce faire, l'approche par décomposition fonctionnelle impose un certain nombre de propriétés qu'on souhaite vérifier :

- Sans structure, le champ de vagues n'est pas modifié par le solveur complet : *i.e.* l'effort numérique se concentre à résoudre l'effet de la structure sur le champ de vagues. Ce point peut être relaxé dans le cas d'un modèle avec viscosité type CFD où cette dernière peut avoir un effet réduit sur le champ de vagues.
- Quel que soit le maillage, la houle incidente est propagée exactement : *i.e.* on peut utiliser un maillage grossier loin de la structure

### Weak-Scatterer

Dans les études de génie océanique appliquées à la réponse de grandes structures sur de longues périodes de temps et/ou en faisant varier paramétriquement la géométrie, les outils utilisés dans l'industrie sont la plupart du temps basés sur la théorie potentielle linéarisée. C'est en particulier le cas dans le domaine de la récupération d'énergie des vagues. Dans le cadre du projet ANR MONACOREV, j'ai participé au développement d'une méthode faiblement non-linéaire, dénommée Weak-Scatter, qui a pour but d'améliorer la précision de l'approche totalement non-linéaire, avec un coût en temps de calcul raisonnable. Ce modèle a été initié au LHEEA lors de la thèse de Lucas Letournel que j'ai co-encadrée et continuée dans celles de C. Chauvigné, P.-Y. Guillaume et Y. Poirier (je co-encadre également cette dernière).

Au cours de son développement, la méthode n'a pas été présentée comme une application de la décomposition fonctionnelle expliquée précédemment. Cependant, il est possible de le formuler en ce sens. Le système d'équations qui régit le problème d'interaction houle-structure par Weak-Scatterer est celui d'une approche potentielle dans laquelle le champ induit par la présence de la structure (*i.e.* le champ complémentaire dans le formalisme SWENSE) est linéarisé autour de la surface libre incidente prise en compte de façon non-linéaire. L'hypothèse principale est donc de supposer que  $\eta_c \ll \eta_i$ .

Un changement de variable est donc opéré, de manière à ne résoudre que ce champ complémentaire, avec le champ incident qui agit comme terme de forçage dans les équations du problème formulées pour le champ complémentaire. Le système d'équations à résoudre est dans ce cas ( $\mathbf{V}_b$  est la vitesse du corps considéré et  $\mathbf{n}$  la normale aux surfaces considérées) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_c & = 0 \quad \text{dans le domaine fluide} \\ \frac{D_{iz}\phi_c}{Dt} & = -g\eta_c - \nabla\phi_c \cdot \nabla\phi_i + \frac{\partial\eta_i}{\partial t} \frac{\partial\phi_c}{\partial z} \quad \text{sur la surface libre incidente} \\ & -\eta_c \left( \frac{\partial^2\phi_i}{\partial z\partial t} + \frac{\partial\nabla\phi_i}{\partial z} \cdot \nabla\phi_i \right) \quad z = \eta_i \\ \frac{\partial\eta_c}{\partial t} & = \frac{\partial\phi_c}{\partial z} - \nabla\phi_c \cdot \nabla\eta_i - \nabla\phi_i \cdot \nabla\eta_c \quad \text{sur la surface libre incidente} \\ & +\eta_c \left( \frac{\partial^2\phi_i}{\partial z^2} - \frac{\partial\nabla\phi_i}{\partial z} \cdot \nabla\eta_i \right) \quad z = \eta_i \\ \frac{\partial\phi_c}{\partial n} & = -\frac{\partial\phi_0}{\partial n} + \mathbf{V}_b \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur le corps} \\ \frac{\partial\phi_c}{\partial n} & = -\frac{\partial\phi_0}{\partial n} \quad \text{sur le fond} \\ \frac{\partial\phi_c}{\partial n} & = 0 \quad \text{à l'infini} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Le système d'équations est ensuite résolu par une approche classique BEM, discrétisé par des éléments triangulaires linéaires et intégré en temps par un schéma type Runge-

Kutta. Les avantages attendus de cette formulation Weak Scatterer sont :

1. Raffinement du maillage proche du corps
2. Par rapport à un modèle potentiel linéaire
  - Les non-linéarités du champ de vagues incident sont parfaitement représentées
  - Les non-linéarités induites par le mouvement du corps (déplacement de la surface mouillée) sont prises en compte
3. Par rapport à un modèle complètement non-linéaire
  - Efficacité numérique
  - Gain en robustesse et stabilité en utilisant la surface libre incidente comme frontière (connue explicitement)

En vue d'une application potentielle à la récupération d'énergie des vagues, le modèle a été appliqué [?] à une bouée pilonnantes type CETO et également à un dispositif de convertisseur d'énergie oscillant, fixé au fond de la mer, type WaveRoller. La figure 3.28 présente un schéma du dispositif testé, ainsi qu'une vue de la surface libre incidente et du maillage utilisé.

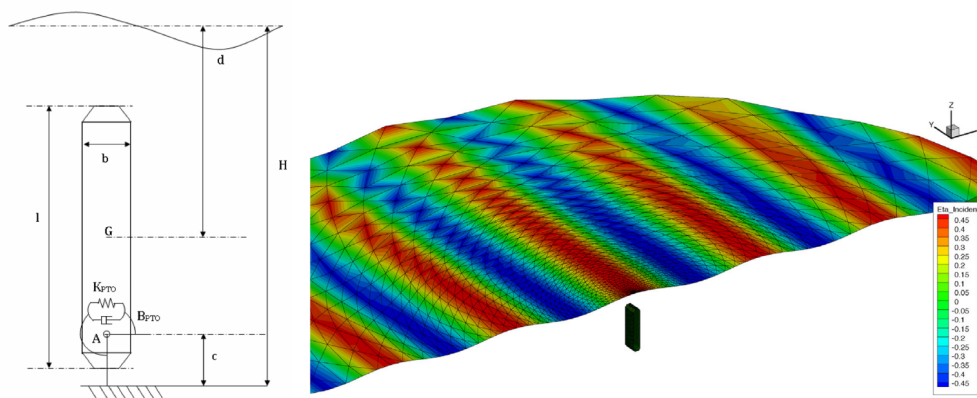


FIGURE 3.28 – Schéma du récupérateur d'énergie des vagues oscillant type WaveRoller (gauche). Vue de la surface libre incidente et du maillage utilisé (droite).

Cette première application avait pour but de mettre en évidence les éventuelles différences pouvant exister entre une modélisation faiblement non-linéaire et une modélisation complètement linéaire. La figure 3.29 présente cette comparaison en terme de mouvement induit par la houle et production d'énergie entre ces deux approches, dans une configuration où les non-linéarités sont relativement importantes : amplitude fixe  $A = 0.5m$  pour toutes les fréquences.

La différence entre les deux approches est notable et entend mettre en lumière la possible importance des effets non-linéaires dans l'estimation des productibles des récupérateurs d'énergie des vagues. Des comparaisons plus fines avec des données expérimentales pourraient être d'intérêt afin de qualifier la précision de l'approche Weak-Scatterer dans cette configuration où le champ complémentaire n'est pas totalement négligeable devant le champ incident.



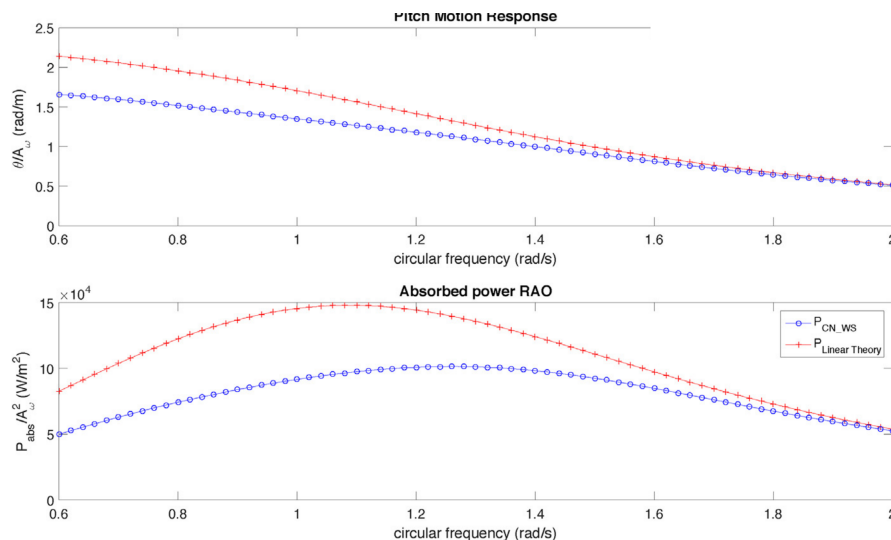


FIGURE 3.29 – Comparaison entre modélisation linéaire et Weak-Scatterer d’un récupérateur d’énergie oscillant en conditions de houle non-linéaire. Mouvement angulaire (haut) et énergie absorbée (bas).

Nous disposons tout de même à l’heure actuelle d’un modèle faiblement non-linéaire de complexité numérique médiane permettant d’être a priori plus précis qu’une approche linéaire, tout en étant plus efficace et robuste qu’une approche totalement non-linéaire. Les développements de cette approche au sein du LHEEA (et donc d’un point de vue recherche) sont a priori proche de leur terme, même si des tâches à visée plus d’industrialisation pourraient être menées dans le futur, en lien avec les spin-off du laboratoire (Innosea, D-ICE, etc.) où avec des industriels intéressés par l’outil.

### Potentiel complètement non-linéaire

Le niveau de complexité supérieur par rapport à la partie précédente est de considérer toujours un formalisme potentiel mais en y incluant toute les non-linéarités. Dans cette configuration, du point de vue de la décomposition fonctionnelle, les système d’équations du problème d’interaction fluide-structure et du problème des vagues seules sont parfaitement identiques (aux conditions aux limites près).

Ainsi, le changement de variable entre le problème complet  $\eta, \phi$  et le problème formulé pour le champ complémentaire  $\eta_c, \phi_c$  est direct et on obtient simplement le système

d'équations suivant à résoudre (en utilisant le potentiel de surface)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_c = 0 & \text{dans le domaine fluide} \\ \frac{\partial\phi_c^s}{\partial t} = -\frac{\partial\phi_i^s}{\partial t} - g(\eta_c + \eta_i) - \frac{1}{2}\nabla(\phi_c^s + \phi_i^s) \cdot \nabla(\phi_c^s + \phi_i^s) & \text{sur la surface libre totale} \\ \quad + \frac{1}{2}(W_c + W_i)^2 (1 + \nabla(\eta_c + \eta_i) \cdot \nabla(\eta_c + \eta_i)) & z = \eta_c + \eta_i \\ \frac{\partial\eta_c}{\partial t} = -\frac{\partial\eta_i}{\partial t} - \nabla(\eta_c + \eta_i) \cdot \nabla(\phi_c^s + \phi_i^s) & \text{sur la surface libre totale} \\ \quad + (W_c + W_i)(1 + \nabla(\eta_c + \eta_i) \cdot \nabla(\eta_c + \eta_i)) & z = \eta_c + \eta_i \\ \frac{\partial\phi_c}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_0}{\partial n} & \text{sur les frontières solides} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Lors de mon post-doctorat réalisé à DTU (Danemark), j'ai mis en œuvre cette approche par décomposition fonctionnelle au sein du code potentiel non-linéaire qu'ils avaient développés depuis quelques années, OceanWave3D [? ?]. Il est à noter que dans ce formalisme potentiel non-linéaire, cette approche de couplage avait déjà été mise en œuvre dans un code BEM développé à l'ECN, dénommé XWave [?].

Le modèle OceanWave3D est quant à lui basé sur une formulation volumique du problème résolu par un schéma de différences finies d'ordre élevé. L'ordre du schéma est laissé arbitraire ainsi que la discrétisation du domaine fluide (possibilité de raffinement) afin d'avoir le schéma numérique le plus flexible possible. Afin de s'affranchir de remaillages en temps qui peuvent s'avérer coûteux en terme de temps de calcul, une transformation- $\sigma$  est appliquée dans la direction verticale du domaine, permettant de se ramener à une géométrie rectangulaire simple. La résolution du système linéaire obtenu est effectué par méthode GMRES pré-conditionnée par la matrice linéarisée. Les avantages inhérents à cette méthode numérique sont

1. Efficacité numérique (par rapport à un schéma BEM classique) grâce à :
  - (a) Taux de convergence des schémas différences finies d'ordre élevés
  - (b) Raffinement des points dans les zones d'intérêt et faible discrétisation verticale nécessaire
2. Flexibilité de la géométrie par rapport aux méthodes pseudo-spectrales, rendant possible l'étude de l'interaction houle-structure.
3. Temps de calcul et besoin en ressources mémoires évoluant linéairement avec le nombre de points

J'ai donc réalisé l'implémentation et la validation de la décompositon fonctionnelle au sein du code OceanWave3D. Le modèle de houle est limité à de la houle régulière résolue par méthode de fonction de courant [?] mais l'extension aux modèles HOS ne pose pas de difficultés.

Un des avantages de l'implémentation dans un formalisme potentiel non-linéaire a été de pouvoir facilement démontrer les capacités de la méthode par décomposition fonctionnelle. La physique résolue dans le code d'interaction houle-structure et dans le modèle de vagues est exactement le même et la notion de changement de variables apparaît donc

plus aisément.

Je présente tout d'abord un cas de validation de cette approche de couplage qui met en lumière les capacités de la méthode. Il s'agit du cas de l'interaction entre une houle uni-directionnelle et un mur vertical. Il s'agit a priori, pour la méthode décomposition fonctionnelle, de la situation la plus complexe à gérer, car le champ complémentaire peut être très grand devant le champ incident. Le mur est situé en  $x = 0$ , la houle incidente se propage vers les  $x$  négatifs et le champ complémentaire se propage dans la direction opposée. La figure 3.30 présente le résultat pour une houle incidente de cambrure  $H/\lambda = 0.05$  (avec  $\zeta^I$  et  $\zeta^S$  représentant les élévations de surface libre incidente et complémentaire ( $\eta_i$  et  $\eta_c$  dans le système d'équations précédent)).

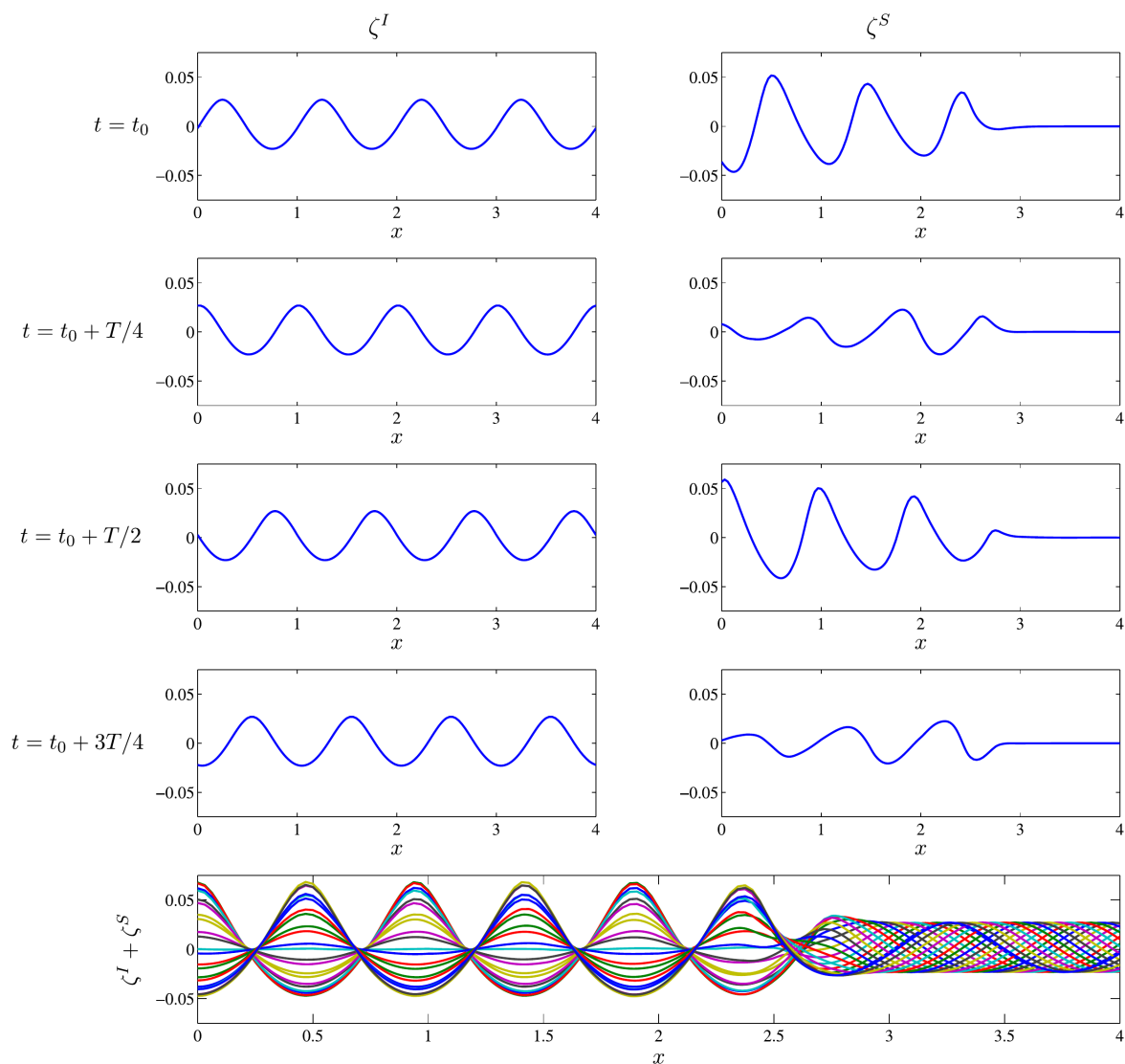


FIGURE 3.30 – Réflexion sur un mur vertical d'une houle régulière de cambrure  $H/\lambda = 0.05$ . Elevation de surface libre incidente  $\zeta^I$  et complémentaire  $\zeta^S$ . La figure du bas présente la déformée de surface libre totale ( $\zeta^I + \zeta^S$ ) à différents instants.

La dynamique finale est bien celle d'une onde stationnaire qui se forme proche du mur et qui correspond à la solution du problème non-linéaire complet d'interaction houle-structure. Le changement de variable opéré ici retranche de la résolution une onde propagative et par conséquent, le champ résolu par le modèle modifié est une onde propagative assez déformée représentée sur la colonne de droite. C'est un cas jugé extrême pour la méthode de décomposition, car le champ complémentaire résolu n'est pas beaucoup plus simple que la solution complète du problème. Cependant, même si il ne s'agit pas d'une configuration où le changement de variable sera très efficace d'un point de vue numérique (la réduction de la complexité est faible), ce cas-test démontre la robustesse de la méthode.

Le changement de variable peut donc être appliqué, théoriquement, avec toute solution incidente, même si celle-ci n'est pas adéquate. Dans ce cas, le champ complémentaire va simplement 'corriger' la solution incidente pour résoudre le problème d'intérêt. On trouvera par exemple dans [?] le cas où on spécifie une solution valide en fond plat, dans un domaine qui a un fond variable en espace. Dans cette configuration, le champ complémentaire agit de telle manière que la solution complète satisfasse le jeu d'équations potentiel non-linéaire dans le domaine avec sa vraie géométrie, prenant en compte les effets de shoaling et de refraction.

Dans un cas plus classique d'interaction houle-structure, tel que je le présenterai ci-dessous, le champ complémentaire va être i) d'amplitude plus faible et ii) localisé proche de la structure. De ce fait, on peut comprendre que le changement de variable proposé dans cette approche, sera d'autant plus efficace que le champ incident contient l'information prépondérante du problème. L'application finale de mon travail de post-doctorat s'est effectué sur le cas de l'interaction entre une houle régulière et un cylindre vertical. La figure 3.31 présente une vue du domaine de résolution dans cette configuration.

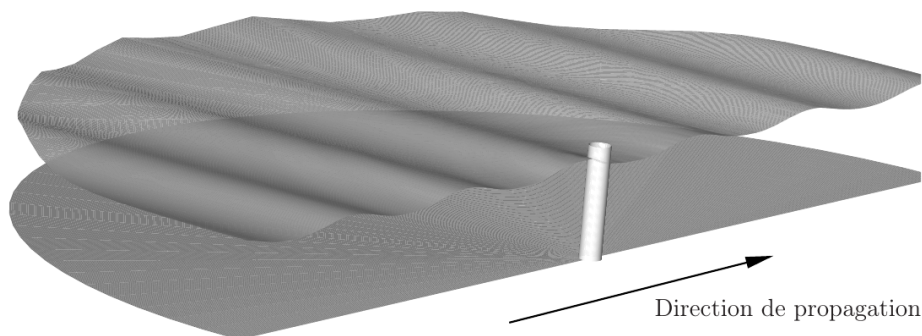


FIGURE 3.31 – Domaine de résolution : interaction entre une houle et un cylindre vertical.

J'ai étudié l'interaction houle-cylindre en fonction de la cambrure de la houle incidente, et pour une configuration où le cylindre est petit par rapport à la longueur d'onde ( $kR = 0.374$ ), dans une profondeur d'eau limitée  $kh = 1.04$ . La figure 3.32 présente dans le cas de cambrure  $kA = 0.103$  l'évolution temporelle de l'élévation de surface libre en trois positions angulaires autour du cylindre  $\theta = [0, \pi/2, \pi]$ .

On observe ici clairement que le champ incident est assez proche de la solution complète du problème, et donc que le champ complémentaire est plus simple que la solution

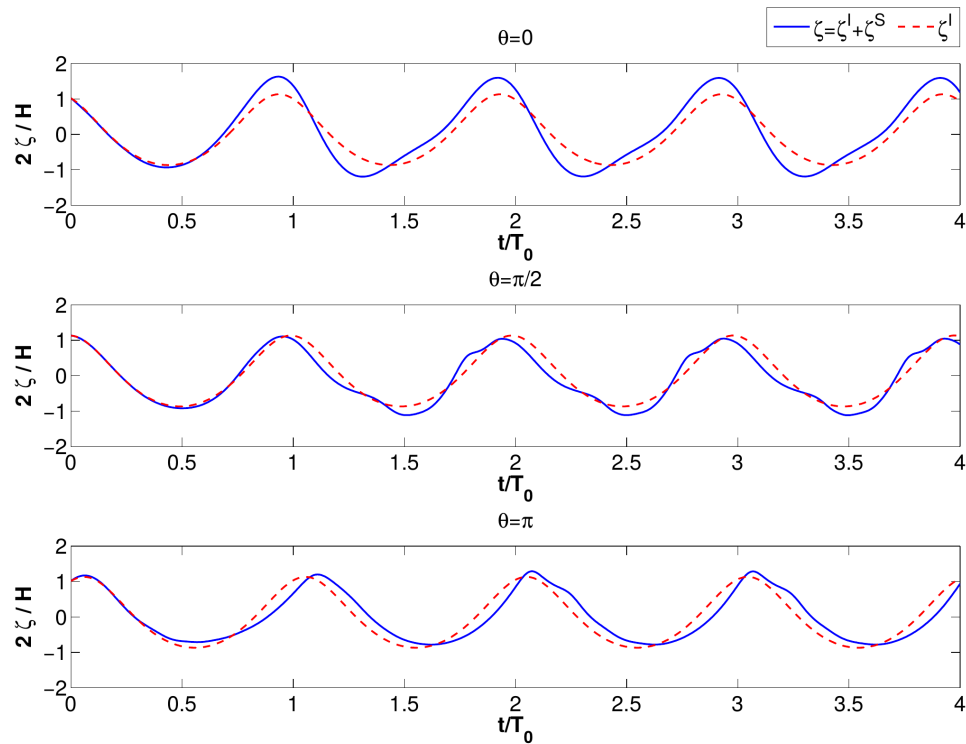


FIGURE 3.32 – Interaction d’une houle régulière  $kA = 0.103$  avec un cylindre vertical  $kR = 0.374$  posé sur le fond  $kh = 1.04$  résolue avec OceanWave3D avec décomposition fonctionnelle. Évolution temporelle de l’élévation de surface libre incidente et totale sur le cylindre en trois positions  $\theta = 0$  (haut)  $\theta = \pi/2$  (milieu) et  $\theta = \pi$  (bas).

complète. On s'attend donc à une amélioration des performances de résolution du modèle par décomposition fonctionnelle. En complément, on peut mettre en lumière l'apport de précision du modèle complètement non-linéaire par rapport à une solution faiblement non-linéaire (par exemple second-ordre), comme sur la figure 3.33 qui présente le run-up tout autour du cylindre et le compare aux expériences [? ].

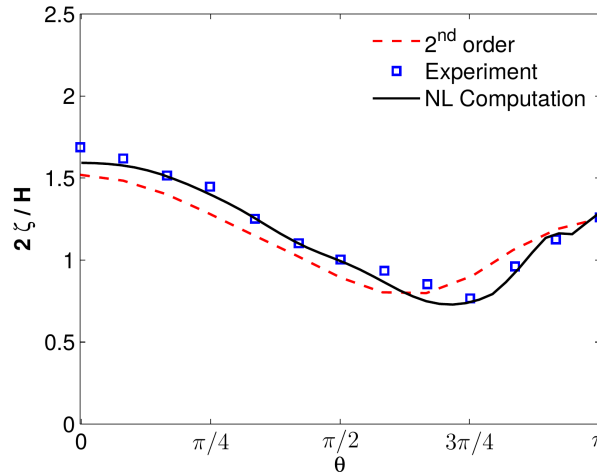


FIGURE 3.33 – Run-up le long du cylindre pour le cas de la figure 3.32. Comparaison avec les expériences et les résultat second-ordre de [? ].

Le traitement à l'aide de ce modèle des interactions houle-structure avec des structures de géométries plus complexes, possiblement flottantes, etc. est toujours en cours de développement à DTU. Elles nécessitent en effet des développements numériques dédiés afin de conserver les propriétés numériques que j'ai explicité plus haut. De ce point de vue là, l'approche par méthode BEM mise en œuvre dans XWave est plus simple à étendre à des cas pratiques. Cependant, j'ai montré [? ] que le modèle OceanWave3D était beaucoup plus efficace que l'approche XWave dans une même configuration (le cylindre vertical précédent). Cette approche me semble donc à privilégier pour l'étude des interactions houle-structure dans ce formalisme potentiel non-linéaire.

Fort de cette expérience de post-doctorat, j'ai continué à participer à l'étude et au développement de la méthode SWENSE au sein du LHEEA à mon retour à l'ECN et en particulier dans la configuration du couplage avec des méthodes résolvant les équations de Navier-Stokes, comme présenté dans la section suivante.

### SWENSE-OpenFOAM®

Plusieurs thèses au laboratoire se sont intéressées à la méthode SWENSE dans un formalisme CFD mono-phasique de suivi d'interface avec le solveur ICARE, développé à l'ECN. Je suis intervenu, dans le cadre de ces thèses, pour mettre en place l'interface entre les modèles HOS et le modèle CFD ICARE. De nombreuses validations et applications au génie océanique ont résulté de ce travail collaboratif (voir par ex. [? ? ?]).

Récemment, dans le cadre de la thèse de Zhaobin Li que j'ai co-encadré, on s'est intéressé à la possible extension de cette méthode SWENSE à une configuration CFD bi-fluide. En effet, l'essentiel des solveurs CFD utilisés au jour d'aujourd'hui dans le domaine du génie océanique pour l'interaction houle structure sont basés sur une formulation bi-fluide des équations de Navier-Stokes (StarCCM+, OpenFOAM, ISIS-CFD, etc.).

L'idée originelle était de mettre à profit la mise en open-source des modèles HOS pour proposer une stratégie de résolution du problème d'interaction houle-structure complètement open-source, grâce au solveur OpenFOAM<sup>®</sup>. Ceci accompagnait également les orientations de notre domaine d'application du génie océanique, où OpenFOAM<sup>®</sup> est de plus en plus largement utilisé que ce soit dans le monde académique ou en R&D industrielle.

Ainsi, fort de l'expérience SWENSE menée au LHEEA dans une configuration mono-fluide : est-il possible d'étendre l'utilisation de la décomposition fonctionnelle à une configuration bi-fluide ? Cette question a été le point de départ du travail de thèse de Z. Li qui s'est intégré à la chaire de recherche Bureau Veritas. En effet, Bureau Veritas a développé sa propre version du logiciel OpenFOAM, adapté à ses problématiques marines et intitulé foamSTAR. De nombreuses actions autour du développement de cet outil ont été réalisés dans le cadre de cette chaire, qui a débuté de façon concomitante avec la thèse en question. Les efforts ont donc été mutualisés, au sein de cette version 'propriétaire' d'OpenFOAM.

Je ne rentrerai pas dans l'ensemble des détails du développement de cette méthode SWENSE dans un formalisme bi-fluide, avec résolution de l'interface par méthode VOF, ceux-ci étant disponible dans la thèse [? ], soutenue en novembre 2018. J'insisterai sur les points clés du développement ainsi que sur un cas d'application permettant d'illustrer l'avancée des travaux dans cette direction.

La procédure de changement de variable est toujours identique à celle présentée sur la figure 3.27, à savoir que deux système d'équations sont utilisés pour arriver à un changement de variables consistant avec la physique qu'on souhaite résoudre. Lorsqu'on se place dans une configuration bi-fluide, la plus grosse différence vient du fait que le solveur Navier-Stokes comporte deux phases (l'air et l'eau) alors que le modèle de houle ne résout qu'une seule phase. L'approche VOF résout la problématique bi-fluide par un modèle de mixture (caractérisé par  $\alpha$  la fraction volumique d'eau) et des propriétés physiques qui changent au passage de l'interface air/eau :

- Densité :  $\rho = \alpha\rho_e + (1 - \alpha)\rho_a$
- Viscosité :  $\mu = \alpha\mu_e + (1 - \alpha)\mu_a$

avec les indices  $e$  et  $a$  se référant à l'eau et l'air respectivement. Pour effectuer le changement de variables, il faut que les domaines de définition soient les mêmes et donc on doit étendre celui de la solution incidente pour le faire correspondre au domaine complet de calcul. Si on considère une extension en supposant que l'on n'a que de l'eau, des problèmes de stabilité ont été démontrés [? ]. L'originalité de la mise en place est donc d'introduire une pression modifiée  $p_i^*$ , qui ne change pas ce qui se passe dans l'eau, mais uniquement ce qui se passe dans l'air :

$$p_i^* = \rho \frac{p_i}{\rho_e} \quad (3.8)$$

L'équation de conservation de quantité de mouvement écrite avec cette pression modifiée devient :

$$\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \mathbf{V}_i = -\frac{\nabla p_i^*}{\rho} + \frac{p_i}{\rho_c} \frac{\nabla \rho}{\rho} + \mathbf{g} \quad (3.9)$$

Cette modification permet alors la mise en place du changement de variables en évitant les problèmes de stabilité évoqués. Le modèle développé a été validé sur des configurations simples qui ont pu mettre en avant le respect des propriétés essentielles à l'intérêt numérique de la décomposition fonctionnelle, à savoir :

- la houle incidente peut se propager précisément dans le domaine, même avec un maillage CFD grossier
- sans structure, le champ de vagues incident n'est pas modifié dans le solveur CFD.

Je présente à suivre un cas d'application de cette méthode SWENSE bi-fluide implémentée dans foamSTAR. Le cas étudié est celui d'une bouée CALM (Catenary Anchor Leg Mooring) dont la géométrie présente une fine jupe d'amortissement (voir figure 3.34) et qui a été testée dans le bassin de l'ECN [? ].

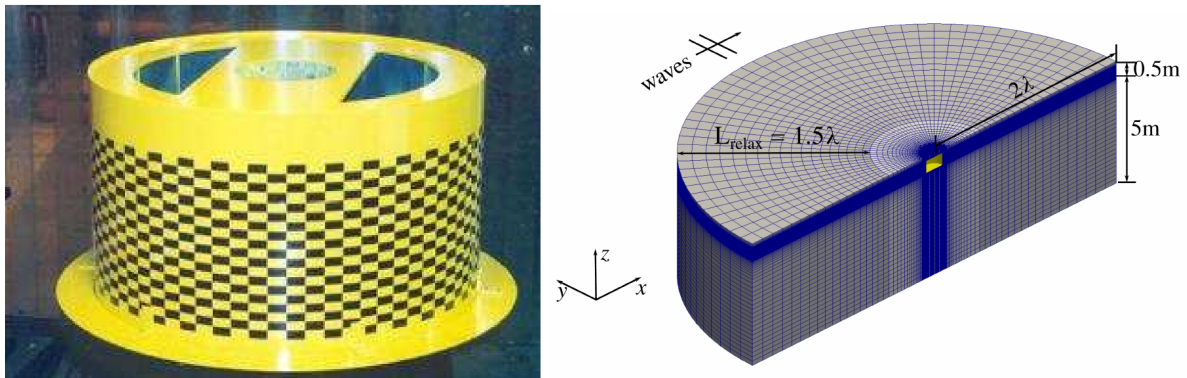


FIGURE 3.34 – Vue du modèle testé en bassin de la bouée CALM (gauche) et exemple de maillage utilisé

La géométrie est assez complexe, avec de forts détachements tourbillonnaires attendus au niveau de la jupe et une déformée de surface libre complexe proche du corps. D'autre part, des tests ont été menés en houle régulière et irrégulière, permettant de valider également la modélisation de houle par l'approche HOS. La figure 3.35 présente des vues permettant de mettre en lumière le détachement ayant lieu au niveau de cette jupe. Ce dernier est bien capturé par la méthode mise en place.

Ce cas-test a permis de démontrer sur un cas de houle régulière, qu'à précision équivalente, la méthode SWENSE permettait un gain d'environ 5 en temps de calcul par rapport au même cas traité avec foamSTAR sans décomposition fonctionnelle. C'est un gain très important qui permet d'apprécier de l'intérêt de tels développements.

Dans un second temps, le cas de la houle irrégulière a été traité et comparé avec les données expérimentales disponibles. Une houle irrégulière uni-directionnelle issue d'un



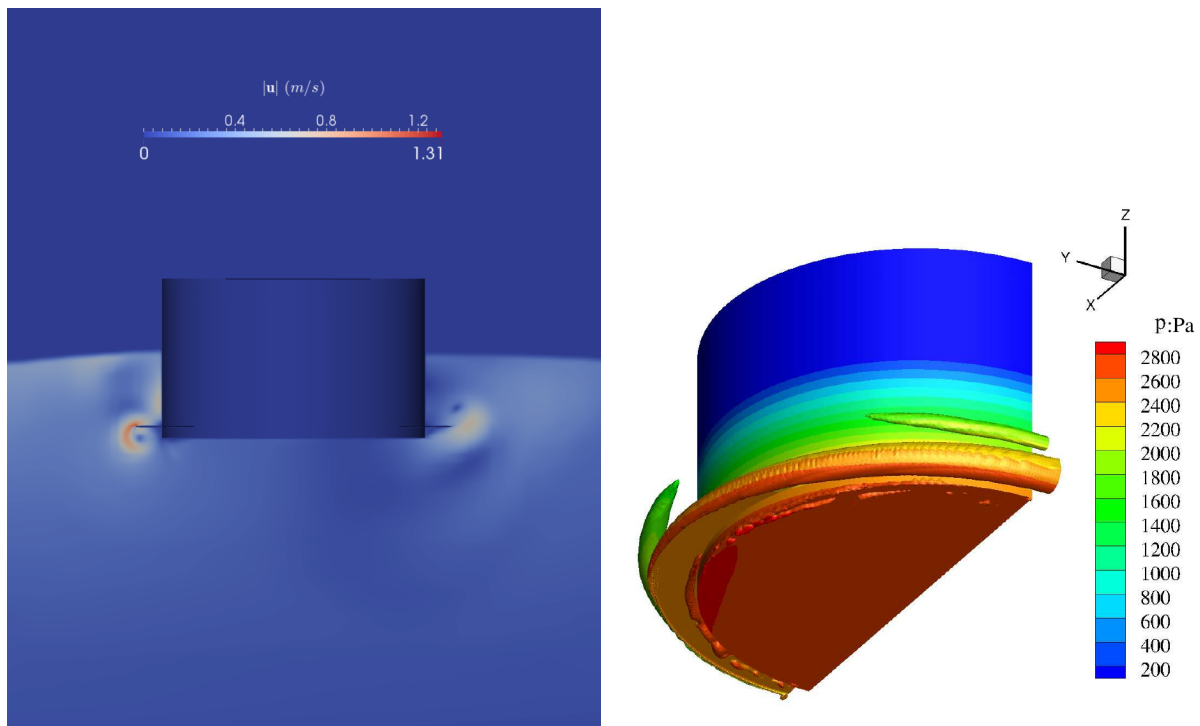


FIGURE 3.35 – Détachement induit par la présence de la jupe. Champ de vitesse (gauche) et iso-surfaces  $Q = 50$  avec champ de pression (droite)

spectre de JONSWAP ( $T_p = 2.0s$ ,  $H_s = 0.12m$ ,  $\gamma = 3$ ) est générée en HOS-NWT suivant les mouvements batteurs utilisés dans les expériences. La figure 3.36 présente la comparaison, en temporel, des signaux d'efforts horizontaux et verticaux.

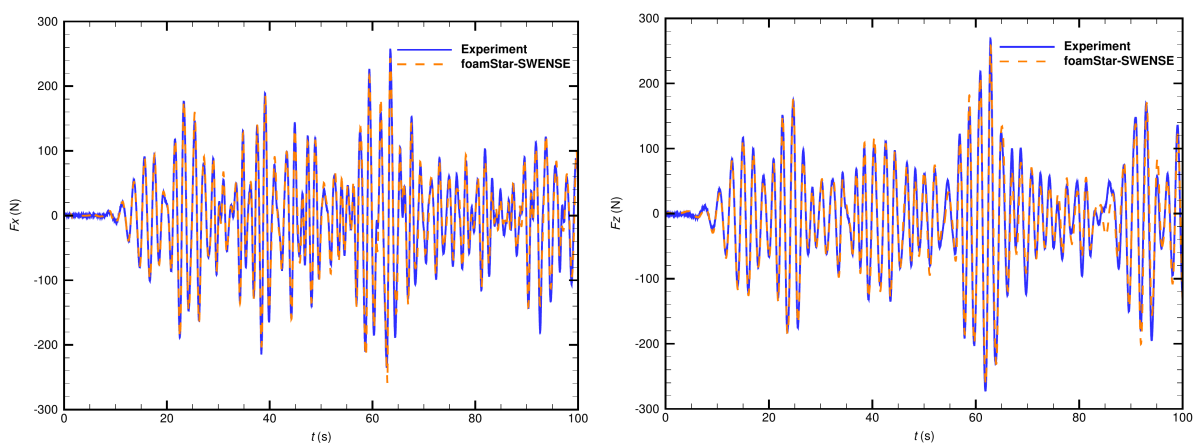


FIGURE 3.36 – Force horizontale (gauche) et verticale (droite) induite par une houle irrégulière sur la bouée CALM. Spectre de JONSWAP :  $T_p = 2.0s$ ,  $H_s = 0.12m$ ,  $\gamma = 3$  ; comparaison numérique/expérimental.

L'accord est très bon entre les simulations numériques et les expériences. La modéli-

sation numérique permet par exemple une analyse fine des évènements extrêmes repérés en terme de force. Enfin, la figure 3.37 présente des vues de la surface libre qui est très complexe proche de la structure étudiée au moment de ce maximum d'efforts. On observe par exemple à  $t = 63.1s$  du déferlement qui ne peut être traité que par une méthode bi-fluide, comme celle mise en place ici.

### 3.2.3 Conclusion-perspectives

Cette section détaille l'ensemble de mes activités reliées directement au calcul des interactions houle-structure. De manière globale, au sein du LHEEA, j'ai un rôle d'expertise sur les problématiques de la modélisation des vagues dans cette configuration où un couplage est réalisé. J'ai en effet été le principal contributeur à la mise en place des outils permettant, du côté des modèles de houle, la mise en place des procédures de couplage avec les différents codes d'interaction houle-structure développés au laboratoire.

Nous sommes donc aujourd'hui parvenu à un développement bien formalisé, documenté et validé des outils nécessaires à la mise en place de tout type de couplage entre les modèles de houle basés sur la méthode HOS et d'autres codes de calcul. La mise à disposition récente de l'outil open-source Grid2Grid [?] entend répondre complètement à cette problématique en simplifiant au maximum l'interfaçage entre les codes de calcul par l'utilisation de cette librairie qui permet : i) de lire les sorties des modèles HOS, ii) de reconstruire efficacement en tout point de l'espace et du temps ce champ de vagues (vitesses, pression, etc.) et iii) de s'adapter aux langages de programmation classiquement utilisés (Fortran, C/C++ avec interfaçage direct avec OpenFOAM®). On a démontré dans les différents usages fait la robustesse et l'efficacité de ces outils d'interfaçage avec le modèle HOS.

Du point de vue de la résolution de l'interaction houle-structure en tant que telle, j'ai travaillé et encadré des travaux relatifs à la mise en place de la méthode dite de décomposition fonctionnelle dans des codes d'interaction houle-structure de différents niveaux de complexité : modèle potentiel faiblement non-linéaire (Weak-Scatterer), modèle potentiel complètement non-linéaire (OceanWave3D) et code CFD bi-phasique (foamSTAR). J'ai pu mettre en lumière l'intérêt de cette approche de couplage modèle de houle / modèle d'interaction avec structure d'un point de vue efficacité et précision.

Comme on l'a évoqué dans la partie dédiée au couplage SWENSE-OpenFOAM®, la modélisation CFD précise du problème de l'interaction entre une houle et une structure nécessite une grande qualité du champ de vagues ainsi qu'une procédure robuste pour le couplage. En ce sens, des améliorations significatives ont d'ores et déjà été proposées. Cependant, il est envisageable d'aller vers une augmentation de la précision si nécessaire. L'objectif initial des travaux était de permettre une évaluation très rapide du potentiel volumique à partir des informations disponibles à la surface libre. Une autre stratégie qui pourrait être étudiée est d'utiliser la décomposition HOS en potentiels de différents ordres (*c.f.* équation (2.13)) pour reconstruire le potentiel volumique à partir de ces informations et éviter une perte de précision inhérente à la procédure  $H_2$  utilisée aujourd'hui.

D'un point de vue plus pratique, sans doute qu'une dernière étape de finalisation / industrialisation des codes pour la définition des champs de vagues incidents serait nécessaire afin d'avoir un outil encore plus simple à utiliser. Une piste de développement

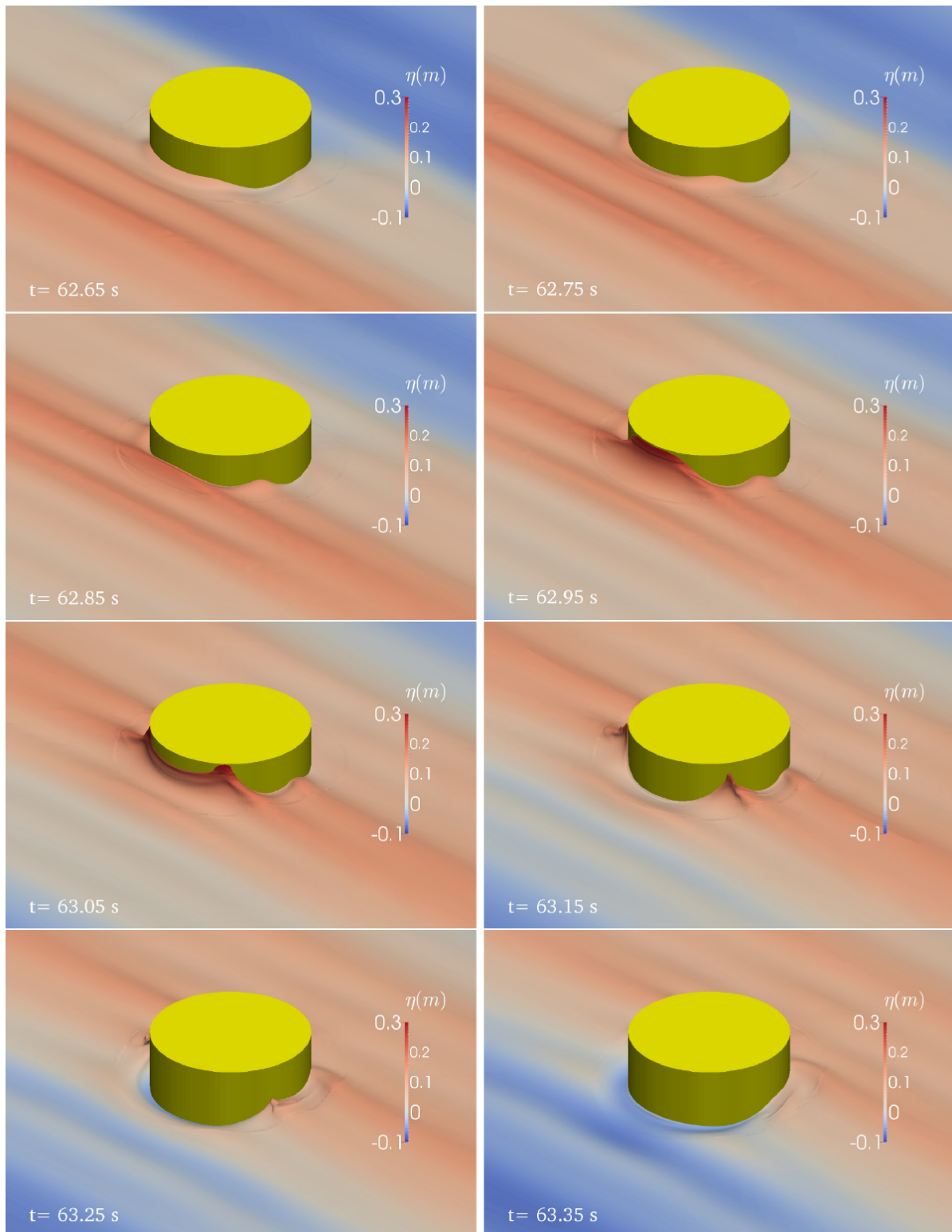


FIGURE 3.37 – Bouée CALM en houle irrégulière : vue de la surface libre lorsqu'un groupe de vagues de grande amplitude interagit avec la structure.

envisagée est celle de la possible intégration au sein d'un même 'package' de l'ensemble des outils de modélisation de houle (*i.e.* HOS-ocean, HOS-NWT, Grid2Grid, etc.) afin de faciliter leur diffusion au sein de la communauté du génie océanique (que ce soit du point de vue de la recherche académique ou de l'industrie).

La même stratégie peut être adoptée pour la méthodologie de la décomposition fonctionnelle. Un objectif qui me semble intéressant (et qui va de pair avec le précédent) est d'essayer d'améliorer sa diffusion afin d'augmenter la visibilité de l'ECN sur cette thématique. De mon point de vue, cette approche présente de nombreux avantages et pourrait être plus largement utilisée par la communauté. Un frein est peut-être la relative difficulté de mise en place, à laquelle on entend répondre par la mise en place de ces outils.

Enfin, il pourrait être intéressant d'étudier des applications de cette approche par décomposition fonctionnelle dans des cas d'études plus fondamentaux sur la propagation des vagues (qui est un sujet qui m'intéresse en tout premier lieu, *cf.* chapitre 4) et qui ne sont pas accessibles à la résolution par méthode potentielle. En vue de l'amélioration de la connaissance physique des états de mer, l'étape suivante pourrait être de s'orienter vers une résolution des équations d'Euler complètes ou de Navier-Stokes qui pourra (devra ?) se faire grâce à cette approche de décomposition fonctionnelle. Ce pourrait être utile par exemple i) pour les interactions houle/courant ou houle/bathymétrie qui présentent de forts gradients ou ii) pour l'étude des phénomènes dissipatifs tels que ceux induits sur le fond en profondeur faible ou par le déferlement.



# Chapitre 4

## Physique des états de mer non-linéaires

Le chapitre 2 a détaillé mes travaux concernant la modélisation numérique et l'ensemble des actions menées au cours du développement des codes de calcul HOS-ocean et HOS-NWT. L'amélioration des capacités des modèles pour augmenter leur robustesse, améliorer leur efficacité numérique et étendre leur champ d'application du point de vue de la physique résolue a été une partie importante de mon travail de recherche mené depuis une dizaine d'années.

Une orientation qui se fait actuellement dans mon travail et qui correspond à mon aspiration propre en tant que chercheur est celle d'aller plus vers la physique des ondes non-linéaires et la compréhension fine des mécanismes en jeu. Dans cette optique, les modèles numériques développés représentent des outils d'analyse de la physique des états de mer de très grand intérêt.

En effet, les capacités des modèles (démonstrées dans les chapitres précédents) m'ont permis de les mettre en application afin d'étudier diverses thématiques en lien avec les propriétés non-linéaires des états de mer et en me focalisant sur la compréhension de la physique à l'œuvre dans ces conditions d'étude.

Dans ce chapitre, je présente tout d'abord un résumé des travaux menés en vue de comprendre et caractériser la formation des événements extrêmes dans le milieu océanique (les vagues scélérates) grâce à la modélisation numérique. Différentes configurations sont testées afin de mettre en lumière le lien fort existant entre le caractère instable de l'état de mer et l'augmentation de la probabilité d'apparition de ces événements extrêmes. Cette caractéristique apparaît comme commune aux différentes configurations testées et met en lumière l'importance du choix des conditions d'étude dans cette thématique des vagues extrêmes.

Ensuite, je détaille les études menées en vue de comprendre plus précisément le lien entre les solutions analytiques des modèles basés sur les équations de Schrödinger Non-Linéaires (NLS, basées sur des hypothèse de faible non-linéarité et de bande étroite) et la physique réelle de l'océan. Ces solutions sont de grand intérêt scientifique afin d'améliorer la compréhension des phénomènes ondulatoires dans de nombreux champs de la physique qui peuvent chacun bénéficier de son caractère trans-disciplinaire. Dans ce cadre, diverses solutions analytiques à ces équations NLS sont étudiées dans un contexte complètement non-linéaire, afin de présenter leur intérêt mais également les possibles limitations dans le contexte des ondes de gravité.

Enfin, je finirai par une partie dédiée aux essais menés en bassin de houle et à l'influence des non-linéarités dans ceux-ci. Je présenterai les études menées en vue d'établir des méthodologies permettant de reproduire en bassin une séquence de vagues donnée, y compris en présence de fortes non-linéarités. Ensuite, j'espère démontrer la complémentarité forte existant entre la simulation numérique et les essais en bassin, le modèle HOS-NWT étant régulièrement mis en œuvre comme outil de préparation et d'analyse de ces essais. L'objectif conjoint des approches numérique et expérimentale étant d'être à même d'appréhender la complexité des phénomènes physiques mis en jeu.

## 4.1 Évènements extrêmes

Dans le contexte du génie océanique, un objectif est de caractériser fidèlement les évènements les plus extrêmes pouvant apparaître dans une configuration donnée (état de mer, géographie, présence de courant, vent, etc.). Cet intérêt est essentiel pour l'ensemble des activités humaines prenant place sur ou proche de l'océan. Dans cet objectif pratique et appliqué, le besoin de compréhension des phénomènes physiques sous-jacents à la formation de ces évènements extrêmes est important.

La recherche technologique et fondamentale se rejoignent naturellement pour trouver des solutions à la problématique levée. La caractérisation des occurrences de ces évènements a eu un fort regain d'intérêt dans les 15-20 dernières années dans la communauté scientifique. De nombreux projets de recherche ont travaillé à une meilleure compréhension de ces vagues scélérates, les fameuses 'freak' ou 'rogue' waves : on peut par exemple indiquer l'ERC Multiwave portée par F. Dias à l'UCD Dublin (et sa nouvelle ERC HighWave).

J'ai commencé à travailler sur cette thématique lors de ma thèse de doctorat et j'ai poursuivi les investigations en ce sens jusqu'à aujourd'hui. Le cadre initial était celui de la simulation d'un état de mer en milieu ouvert (HOS-ocean) qui évoluait dans le temps et dont on cherchait à identifier les évènements extrêmes lors de cette évolution. Cette première approche de la problématique a permis de réfléchir et mettre en place les outils nécessaires à la caractérisation des vagues extrêmes.

Par la suite, une meilleure compréhension de la physique s'est faite grâce à des études complémentaires menées dans des domaines qui présentent une bathymétrie ou un courant variable en espace. Ces configurations ont montré une possible augmentation des probabilités d'occurrence des vagues extrêmes. Enfin, le cas du bassin de houle où on génère les vagues à l'aide d'un batteur à partir de conditions au repos est étudié. C'est une configuration importante dans l'optique d'essais en bassin et de contrôle des conditions expérimentales.

### 4.1.1 Caractérisation des vagues extrêmes

Afin d'étudier les vagues scélérates et leurs probabilités d'occurrence, il convient de les détecter dans les expériences ou les simulations correspondantes. La définition classique de telles vagues est basée sur leur hauteur crête à creux comparée à la hauteur significative de l'état de mer et est parfois appelé Index d'Anormalité (AI) [? ] :  $AI = H_{\max}/H_s > 2$ . On trouve parfois dans la littérature des indicateurs basés sur le ratio entre l'amplitude de crête et cette même hauteur significative [? ] :  $A_{\max}/H_s > 1.30$ . Cette approche qu'on

va appeler déterministe repose sur la détection des vagues individuelles, dont l'extension aux états de mer directionnels n'est pas forcément aisée.

En substitution ou complément à cette approche déterministe, on peut également adopter une approche statistique pour évaluer ou estimer l'occurrence de ces événements extrêmes. On s'intéresse alors aux densités de probabilité de la quantité d'intérêt : élévation de surface libre, hauteur crête à creux, hauteur de crête, etc. Dans la communauté des ondes non-linéaires, on utilise très régulièrement le kurtosis afin de caractériser les queues de ces distributions. Ce kurtosis, correspondant au moment d'ordre 4 de la quantité d'intérêt, permet d'évaluer l'importance des événements extrêmes dans un état de mer donné, grâce à une valeur numérique simple. En hydrodynamique, il est utilisé pour caractériser la densité de probabilité de l'élévation de surface libre en se passant d'une détection à proprement parler des vagues individuelles.

### Analyse déterministe : forme des vagues scélérates et probabilités d'occurrence

J'ai mis en place l'analyse déterministe d'un état de mer dans l'étude de leur évolution spatio-temporelle dans un domaine supposé infini, donc résolu par le modèle HOS-ocean. A partir de conditions initiales définies à partir d'un spectre directionnel tel qu'utilisé dans la section 2.6.1 on étudie la formation de ces vagues extrêmes dans tout le domaine de calcul qui fait une taille significative (de l'ordre de  $100km^2$  pour un état de mer avec une période de pic  $T_p = 12.5s$ ).

A chaque instant, la simulation numérique donne accès à un grand nombre de vagues dans le domaine, comme représenté sur la figure 4.1. L'identification de chacune des vagues est alors faite par une analyse par passages à zéro (zero-crossing) dans la direction de propagation, complétée par une analyse similaire dans la direction transverse afin d'être à même d'identifier des vagues individuelles dans un domaine tri-dimensionnel.

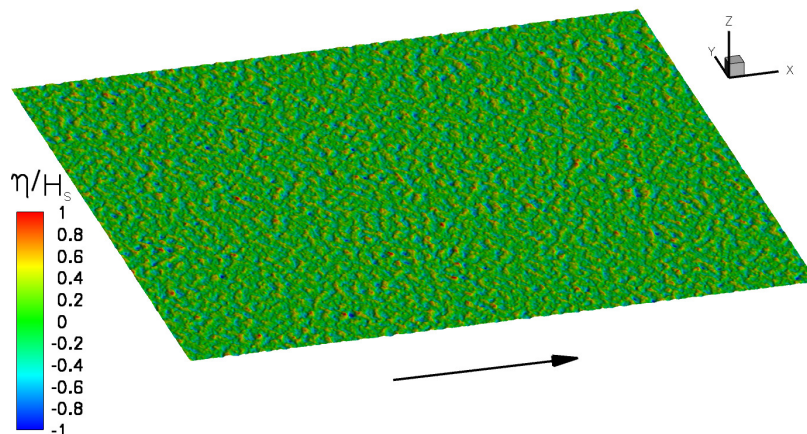


FIGURE 4.1 – Élévation de surface libre dans le domaine de calcul HOS-ocean.

Une fois cette procédure mise en place on peut calculer, à chaque instant, la hauteur maximale des vagues dans le domaine et possiblement identifier les événements les plus extrêmes, comme représenté sur la figure 4.2. Il est à noter que l'analyse spatio-temporelle



de données issues de simulations numériques fait intervenir un très grand nombre de vagues individuelles (comparé à une analyse expérimentale d'une élévation temporelle de surface libre locale issue d'une sonde à houle par exemple). Ce point explique en partie le grand nombre de vagues scélérates repérées avec cette approche. Cependant, ce n'est pas la seule explication car ce nombre est beaucoup plus important dans une simulation non-linéaire que prédit par une approche linéaire sur le même jeu de données spatio-temporelles [? ?].

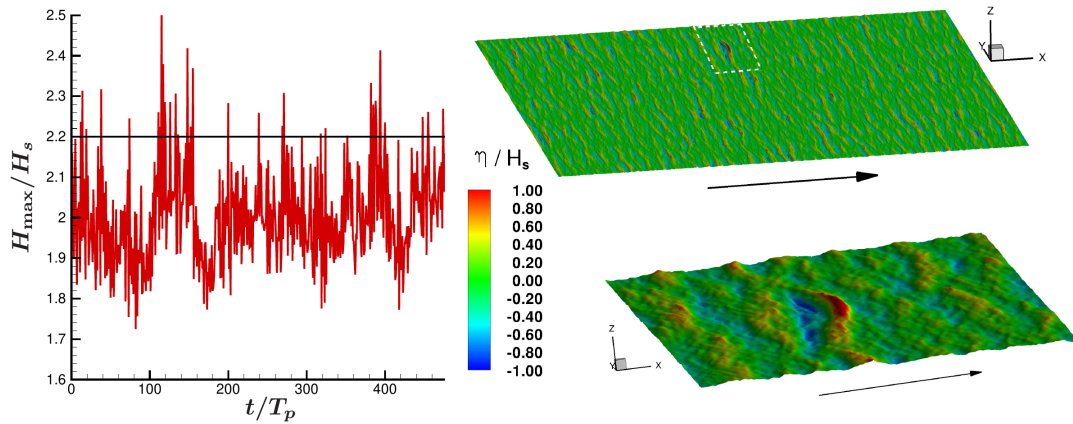


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle de la hauteur crête à creux maximale dans le domaine de calcul (gauche). Exemple de vague scélérates détectée (droite). Figure issue de [? ]

A chaque instant, on peut alors isoler ces vagues scélérates et étudier leurs caractéristiques propres : hauteur, forme ainsi que leur fréquence d'apparition. Les paramètres physiques de l'état de mer peuvent être modifiés en ce sens, comme la directionnalité qui est un élément clé dans la formation de ces événements. Comme exemple d'application, la figure 4.3 présente pour 4 étalements directionnels la position des différentes vagues scélérates repérées au cours d'une simulation.

La taille transverse diminue sensiblement avec l'étalement, tout comme le nombre d'évènements repérés comme extrêmes. Cette dernière observation est en partie due au fait que lorsque l'étalement diminue, le nombre de vagues dans le domaine diminue lui aussi. On peut alors s'intéresser plutôt à la probabilité d'apparition des vagues scélérates, comme donné dans le tableau 4.1 avec un ratio par rapport au nombre de vagues simulées.

	$\beta = 1.75$	$\beta = 0.65$	$\beta = 0.45$	$\beta = 0.26$
$N_{freaks}$	376	475	152	62
$N_{freaks}/N_{vagues}$	$3.9 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-3}$
$\lambda_x$	$1.1 \lambda_p$	$1.1 \lambda_p$	$1.1 \lambda_p$	$1.0 \lambda_p$
$\lambda_y$	$1.6 \lambda_p$	$4.0 \lambda_p$	$4.8 \lambda_p$	$8.8 \lambda_p$

TABLE 4.1 – Nombre de vagues scélérates et taille de celles-ci en fonction du paramètre de directionnalité  $\beta$

Cette thématique est toujours d'intérêt dans la communauté, avec des travaux très

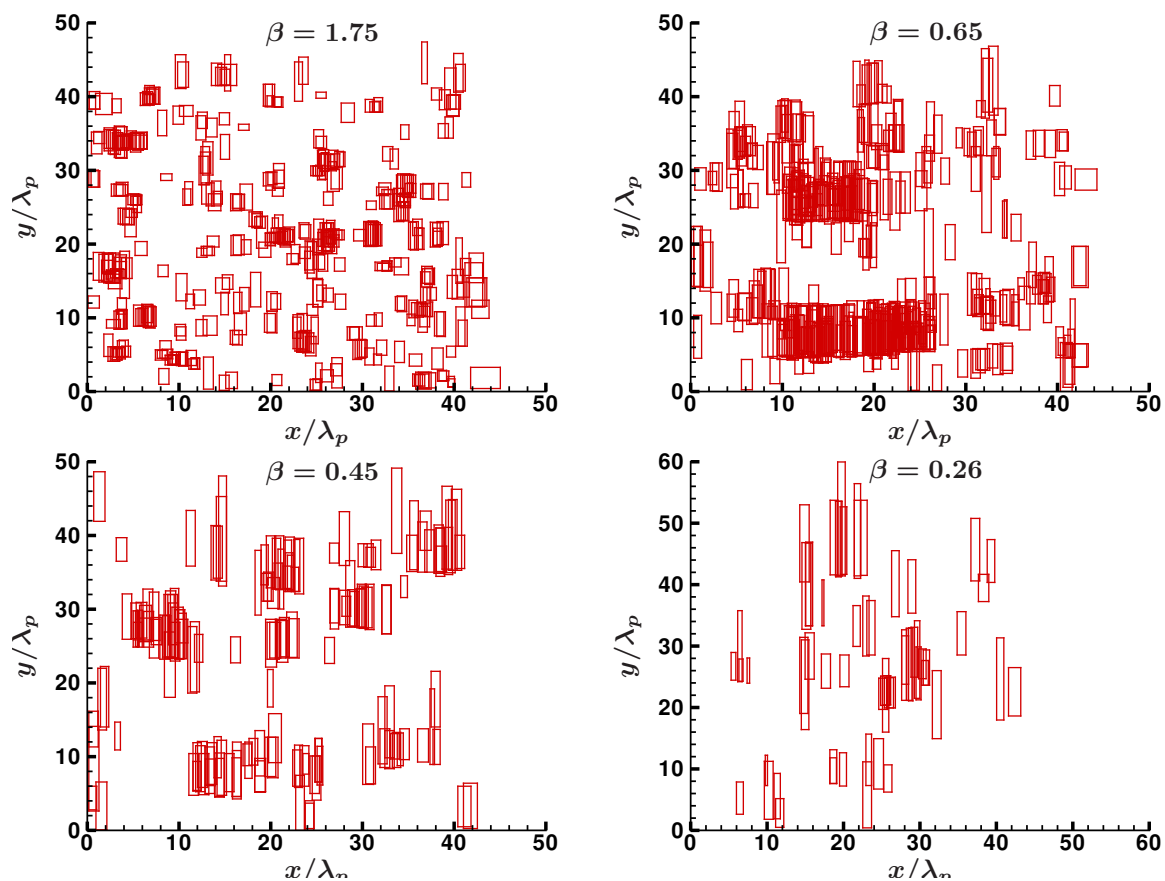


FIGURE 4.3 – Position et forme des vagues scélérates dans le domaine de calcul pour les 4 directionnalités différentes. Figure issue de [? ]

récents qui utilisent des procédures similaires pour caractériser les événements extrêmes : leur durée de vie [? ], leur forme [? ], etc.

### Analyse statistique

Les analyses précédentes nécessitent une connaissance spatio-temporelle du champ de vagues qui est au jour d'aujourd'hui toujours un challenge pour les essais menés en bassin de houle de taille conséquente, comme ceux utilisés pour le génie océanique. Ainsi, du point de vue expérimental, on dispose le plus souvent d'une mesure ponctuelle de l'élévation de surface libre au cours du temps.

Dans ce contexte, les études menées s'intéressent donc plutôt aux statistiques de l'élévation de surface libre mesurée (ou des quantités pouvant en dériver comme la hauteur crête à creux ou la hauteur de crête). On étudie donc les densités de probabilités de ces quantités et comment elles peuvent évoluer en fonction des conditions de houle. Afin de caractériser dans une densité de probabilité l'importance des événements extrêmes, le kurtosis est classiquement utilisé et défini pour le kurtosis de l'élévation de surface libre comme

$$\lambda_{40} = \frac{\overline{(\eta - \bar{\eta})^4}}{\sigma_\eta^4} \quad (4.1)$$

avec  $\sigma_\eta$  l'écart-type et  $\overline{(\quad)}$  la moyenne statistique. La figure 4.4 présente pour un cas donné la comparaison entre l'évolution de ce kurtosis (calculé sur les données spatiales comme sur le cas précédent et l'évaluation de événements extrêmes utilisée précédemment).

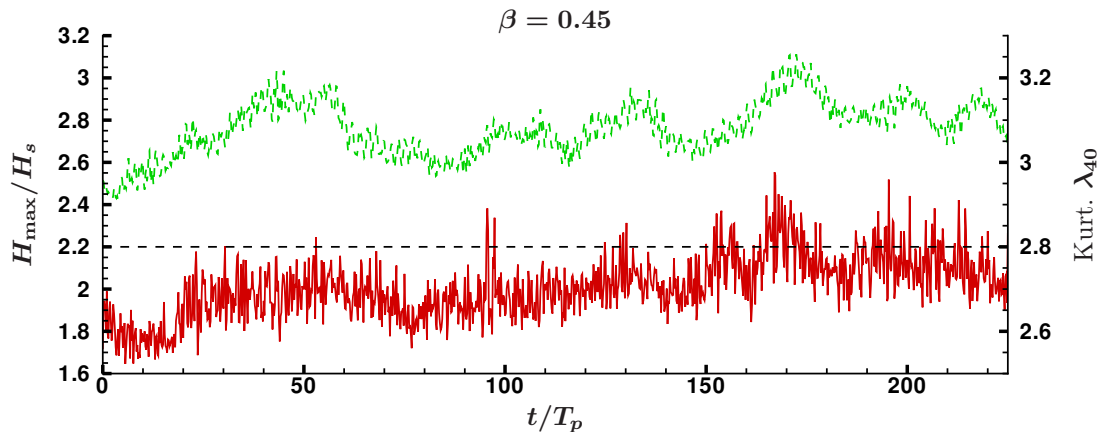


FIGURE 4.4 – Comparaison approche déterministe ( $H_{\max}/H_s$ , trait plein rouge) et statistique (kurtosis  $\lambda_{40}$ , ligne pointillée verte). Figure issue de [? ]

Les évaluations sont consistantes, avec des tendances qui se suivent entre les deux méthodes. Cependant, certains événements, sans doute très localisés spatialement, n'induisent pas d'augmentation de kurtosis alors qu'ils peuvent atteindre de très grandes hauteurs (voir par exemple autour de  $t/T_p = 100$ ).

Malgré ces petites différences, par la suite, on utilisera principalement le kurtosis comme critère d'appréciation de l'importance de la queue de la distribution de l'élévation

de surface libre. Il est à noter que l'utilisation d'un tel paramètre suppose implicitement une homogénéité de la quantité étudiée. Si on utilise un signal temporel (respectivement spatial), il faut s'assurer de l'homogénéité temporelle (respectivement spatiale) du phénomène étudié, point qui est abordé dans la section suivante. Il est à noter qu'un des avantages principaux est de pouvoir disposer de prédictions théoriques de l'évolution du kurtosis dans certaines configurations. Ces dernières peuvent être utiles dans l'analyse du phénomène physique.

### 4.1.2 Instabilités des états de mer

Je détaille dans cette partie un point essentiel dans la formation des événements extrêmes, en le mettant en lumière dans plusieurs configurations. Il s'agit du lien fort existant entre l'évolution du contenu spectral d'un état de mer et l'augmentation de la probabilité d'occurrence des vagues extrêmes.

Un tel lien a été mis en lumière dans le contexte d'états de mer irréguliers, par exemple dans [?] qui a introduit l'Index de Benjamin-Feir (BFI) comme le paramètre conditionnant la stabilité d'un spectre donné en unidirectionnel par

$$BFI = \frac{\epsilon}{\delta_f} \quad (4.2)$$

avec  $\epsilon$  la cambrure de l'état de mer et  $\delta_f = \Delta f/f$  l'étalement fréquentiel relatif. Ce paramètre est assez largement utilisé à l'heure actuelle afin de caractériser les probabilités d'occurrence de freak waves, et est par exemple en place dans les modèles océano-météo de l'ECMWF comme critère de dangerosité de l'état de mer [?].

L'évolution du spectre (et des probabilités d'occurrence des vagues extrêmes) peut être analysée comme résultant d'un état hors-équilibre [?] qui peut être associé à diverses configurations. Je présente par la suite quatre configurations distinctes dans lesquelles j'ai mis en lumière cette évolution :

- Conditions initiales
  - (i) Champ spatialement homogène initialisé linéairement
  - (ii) Bassin de houle
- Inhomogénéité spatiale du milieu
  - i Changement de bathymétrie
  - ii Changement de courant

Ce ne sont pas les seules configurations qui peuvent faire l'objet d'un tel comportement, voir par exemple [?] lorsque le vent change de direction.

#### Conditions initiales linéaires - HOS-ocean

On se place dans une configuration classique de simulation à l'aide de l'outil HOS-ocean, à savoir on initialise un domaine de calcul supposé homogène spatialement à l'aide d'une solution linéaire (*i.e.* de statistique Gaussienne). On laisse évoluer cet état de mer au cours du temps afin d'étudier par exemple les interactions non-linéaires ayant lieu au sein de celui-ci.

Il s'agit de la configuration classique de résolution d'un problème de propagation d'états de mer par approche déterministe, quel que soit le niveau d'approximation (équations NLS [? ], équations de Zakharov [? ], etc.). De nombreux travaux se sont intéressés dans cette configuration à essayer de prédire théoriquement l'évolution possible du kurtosis dû aux interactions de vagues (résonantes ou non-résonantes) [? ? ? ?]. Ces prédictions théoriques reposent sur un certain nombre d'hypothèses : i) état de mer initialement Gaussien, ii) homogène spatialement, iii) faiblement non-linéaire et iv) avec un faible étalement fréquentiel.

Dans ce contexte, le kurtosis comprend une partie statique correspondant à l'effet des ondes liées (interactions non-résonantes) et une partie dynamique associée aux interactions résonantes :

$$\lambda_4 = \lambda_4^b + \lambda_4^{dyn} \quad (4.3)$$

La contribution  $\lambda_4^b$  dépend principalement de la cambrure de l'état de mer. En ce qui concerne la contribution dynamique  $\lambda_4^{dyn}$ , son évolution peut être prédite avec 2 paramètres principaux

- Le BFI qui caractérise les effets non-linéaires et les effets de dispersion.
- Dans les configurations directionnelles, le ratio étalement directionnel  $\delta_\theta$  sur largeur fréquentielle relative  $\delta_f$  :  $R = \frac{1}{2} \left( \frac{\delta_\theta}{\delta_f} \right)^2$

La figure 4.5, issue de [? ], présente l'influence du paramètre d'étalement directionnel relatif  $R$  sur l'évolution temporelle du kurtosis dynamique afin de donner une idée de ce modèle théorique que j'ai utilisé comme référence dans certaines applications.

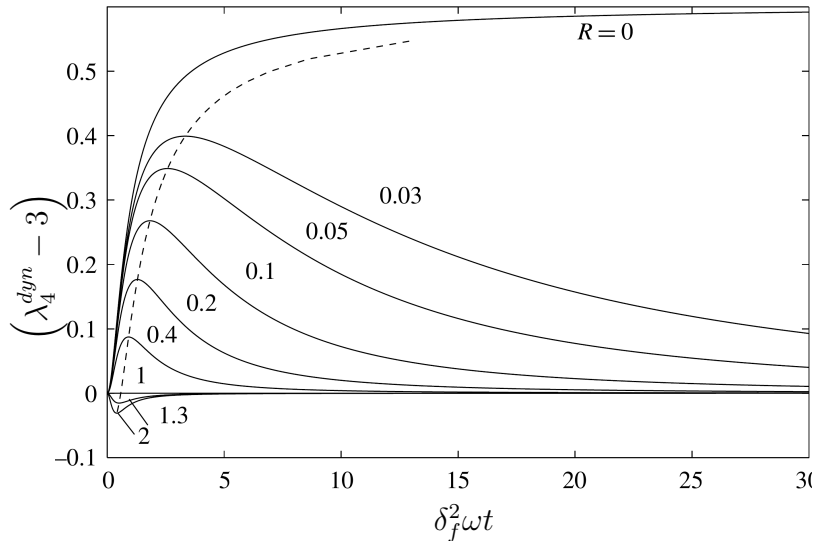


FIGURE 4.5 – Influence de l'étalement directionnel relatif  $R$  sur l'évolution du kurtosis, reproduction de [? ]

Le cas  $R = 0$  correspond au cas unidirectionnel dont le comportement est singulier vis à vis de l'importance des événements extrêmes dans l'état stationnaire. Les autres valeurs de  $R$  décrivent des états de mer de plus en plus étalés qui ont pour état stationnaire un

champ de vagues dont les statistiques d'extrêmes sont a priori uniquement influencés par les ondes liées  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda_4 = \lambda_4^b$ .

Enfin, l'influence de la profondeur peut également être prise en compte, en tant que paramètre essentiel dans l'évolution du champ de vagues. La limite  $kh = 1.363$  délimite en effet les conditions focalisantes (dans le sens de l'instabilité modulationnelle) comme en grande profondeur, des conditions défocalisantes en faible profondeur. Le BFI introduit précédemment peut être modifié pour prendre en compte les effets de profondeur limitée [?].

Ces prédictions théoriques sont basées sur des hypothèses potentiellement assez fortes, en particulier la faible non-linéarité et le spectre étroit en fréquence. Afin de mettre en lumière le caractère instable des conditions initiales dans un contexte complètement non-linéaire, la figure 4.6 présente l'évolution en temps du spectre spatial d'un état de mer simulé par HOS-ocean.

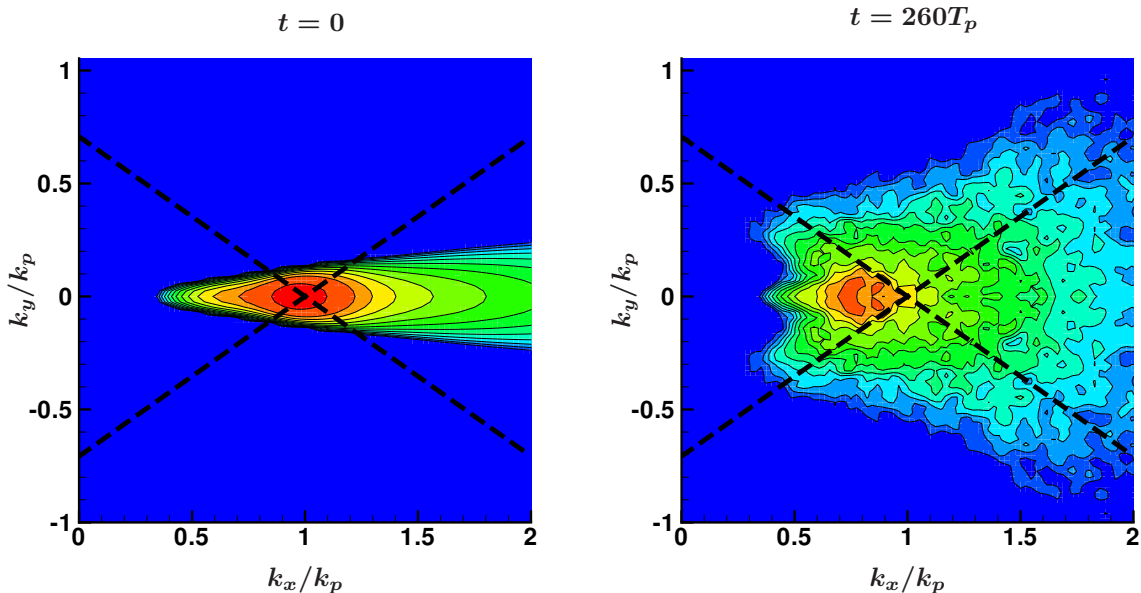


FIGURE 4.6 – Évolution du spectre entre l'état initial (gauche) et l'état final après une propagation de 260 période (droite). Etat de mer directionnel faiblement étalé,  $\epsilon = 0.10$ ,  $BFI = 1.03$ . Les lignes pointillées représentent les lignes les plus instables vis à vis de l'instabilité modulationnelle. Figure issue de [?]

On part d'une condition initiale linéaire et le spectre va évoluer en temps dû aux interactions résonantes. Cette évolution sera d'autant plus importante que le spectre sera étroit en fréquence et en direction. Cette évolution du spectre est pilotée par l'instabilité modulationnelle dont les zones les plus instables sont représentées sur la figure 4.6 en pointillés. On observe que le spectre évolue principalement le long de ces lignes. On peut comprendre cette instabilité du spectre comme une incompatibilité entre la surface de mer initiale et le système d'équations résolu. D'un point de vue physique, la spectre de vagues imposé est sensé être stable sur une échelle de temps significative ( $\simeq 1h$  à échelle réelle). Mais il s'agit de conditions océaniques et donc un champ de vagues soumis à

l'ensemble des phénomènes physiques ayant lieu en mer : en particulier présence de vent, de déferlement, etc. qui ne sont pas pris en compte dans la modélisation.

En complément, on peut étudier une estimation de l'étalement du spectre au cours du temps, donné par la taille moyenne des vagues dans la direction transverse  $\lambda_y$  (par analyse vague par vague comme décrit dans la section 4.1.1). Dans la figure 4.7, différentes cambrures sont comparées avec  $T_{BF} = T_p \epsilon^{-2}$ , l'échelle de temps caractéristique de l'instabilité modulationnelle qui est bien le phénomène prépondérant ici.

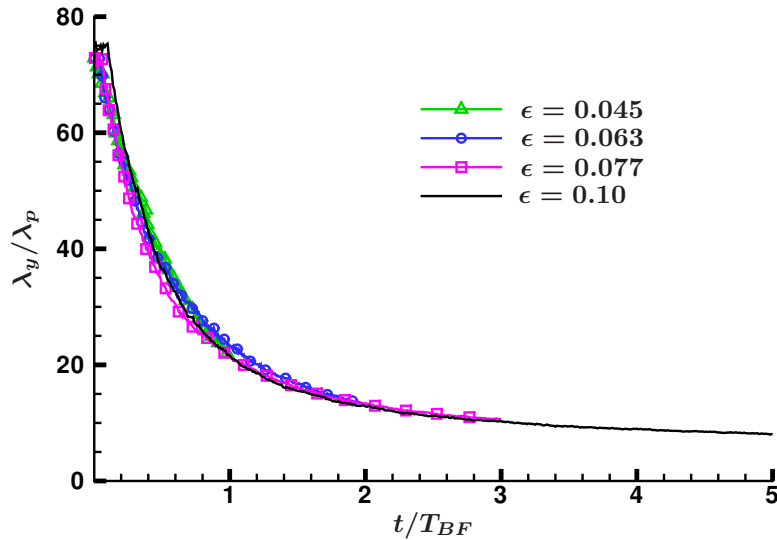


FIGURE 4.7 – Évolution de la taille transverse des vagues  $\lambda_y$  en fonction du temps pour différentes cambrures d'états de mer. Figure issue de [? ]

Associé à cette évolution du spectre, la déviation des statistiques par rapport à des statistiques Gaussiennes sera également plus importante lorsque le spectre sera étroit, comme prédit par le modèle théorique présenté sur la figure 4.5. Les deux phénomènes : i) instabilité du spectre initial et ii) déviation des statistiques par rapport à la loi normale sont donc intimement liés.

Dans ce contexte, il a été montré dans la littérature [? ] la bonne correspondance de l'évolution temporelle du kurtosis entre des simulations complètement non-linéaires tel que celles présentées ici et la prédiction théorique donnée sur la figure 4.5. Des différences existent, qui sont associées aux limitations du modèle théorique : hypothèse de spectre à bande étroite, effets d'ordre supérieur à 3, contenu spectral qui évolue en temps (l'évolution théorique est basée sur le BFI initial qui évolue en même temps que le spectre s'étale), etc. Cependant, cette prédiction théorique permet tout de même d'appréhender l'essentiel de la physique à l'œuvre dans cette évolution d'états de mer.

### Condition limite - HOS-NWT

La configuration précédente d'un état de mer homogène en espace dans un domaine supposé infini qui est imposé à l'instant initial et évolue en temps est assez difficilement

transposable à une configuration réaliste avec laquelle on peut comparer nos prédictions théoriques. Du point de vue expérimental, l'approche qu'on utilise est celle de la génération contrôlée de vagues dans un bassin depuis un état au repos.

La configuration est donc différente de celle décrite précédemment : le forçage (*i.e.* la condition limite) est la quantité qui est imposée afin de générer un état de mer cible, défini par un spectre (possiblement directionnel) comme dans le cas précédent. On peut cependant avoir un raisonnement similaire au précédent, à savoir que dans les conditions expérimentales ou numériques, le spectre imposé (par exemple JONSWAP) n'est pas forcément stable d'un point de vue de la physique en jeu. Par conséquent, cette instabilité va se traduire par une évolution du spectre (et donc également des probabilités d'occurrence des vagues extrêmes) spatiale, depuis la position du dispositif de génération.

Ainsi, dans un essai ou une simulation numérique dans une configuration de bassin de vagues (au sens large, on y inclut toute méthode de génération localisée de vagues), il est important du point de vue des statistiques associées aux événements extrêmes, que potentiellement celles-ci évoluent spatialement (si le spectre n'est pas stable et donc si le spectre est très étroit en fréquence et également faiblement étalé en direction). Le travail expérimental original [?] a mis en lumière ce phénomène et je reproduis sur la figure 4.8 les résultats les plus intéressants, à savoir l'évolution spatiale du kurtosis pour différents étalements ainsi que celui des statistiques pour une configuration donnée.

L'évolution du kurtosis suit une tendance proche de la prédiction théorique présentée précédemment (figure 4.5). Il est possible d'utiliser ces dernières avec le changement de variable suivant  $t \rightarrow x/C_g$  pour adapter ces prévisions au cadre du bassin de houle. L'influence de la position dans un bassin peut être significative, comme le montre bien les mesures de l'élévation des crêtes en trois positions du bassin. Ces résultats expérimentaux peuvent être parfaitement reproduits avec le modèle HOS-NWT.

Les résultats précédents ont montré que la stabilité d'un état de mer donné était influencée par le BFI ainsi que par l'étalement directionnel. Ainsi, la cambrure de l'état de mer ( $BFI = \epsilon/\delta_f$ ) joue un rôle important dans l'évolution spatiale des propriétés d'un état de mer généré en bassin. Pour l'instant, on s'est intéressé implicitement à des champs de vagues dont la cambrure significative n'était pas trop élevée, afin de ne pas rencontrer de déferlement. Cependant, il est attendu que ce phénomène puisse jouer un rôle significatif dans l'étude des événements extrêmes.

Grâce à la mise en place du modèle de déferlement décrit dans la section 2.6, on peut étudier l'influence de ce phénomène sur la stabilité du champ de vagues généré. Cette thématique est en cours de développement et sera poursuivie dans le futur. Les premiers résultats obtenus concernent la simulation d'états de mer très énergétiques en bassin et sont présentés sur la figure 4.9. On compare des résultats expérimentaux effectués dans le bassin d'essais de grande longueur (600m) de la DGA Technique Hydrodynamique à Val de Reuil [?]. La première étape est de calibrer le modèle de déferlement afin d'être à même d'obtenir une évolution cohérente de la hauteur significative  $H_{m_0} = 4\sigma_\eta$  le long du bassin.

Dans le cas d'états de mer avec présence de déferlement, les propriétés précédentes relatives à l'évolution des probabilités d'occurrence des vagues extrêmes seront probablement influencées par les changements importants induits par ce déferlement et nécessitent donc d'être étudiées. Ce travail reste à mener mais on dispose en terme de modélisation



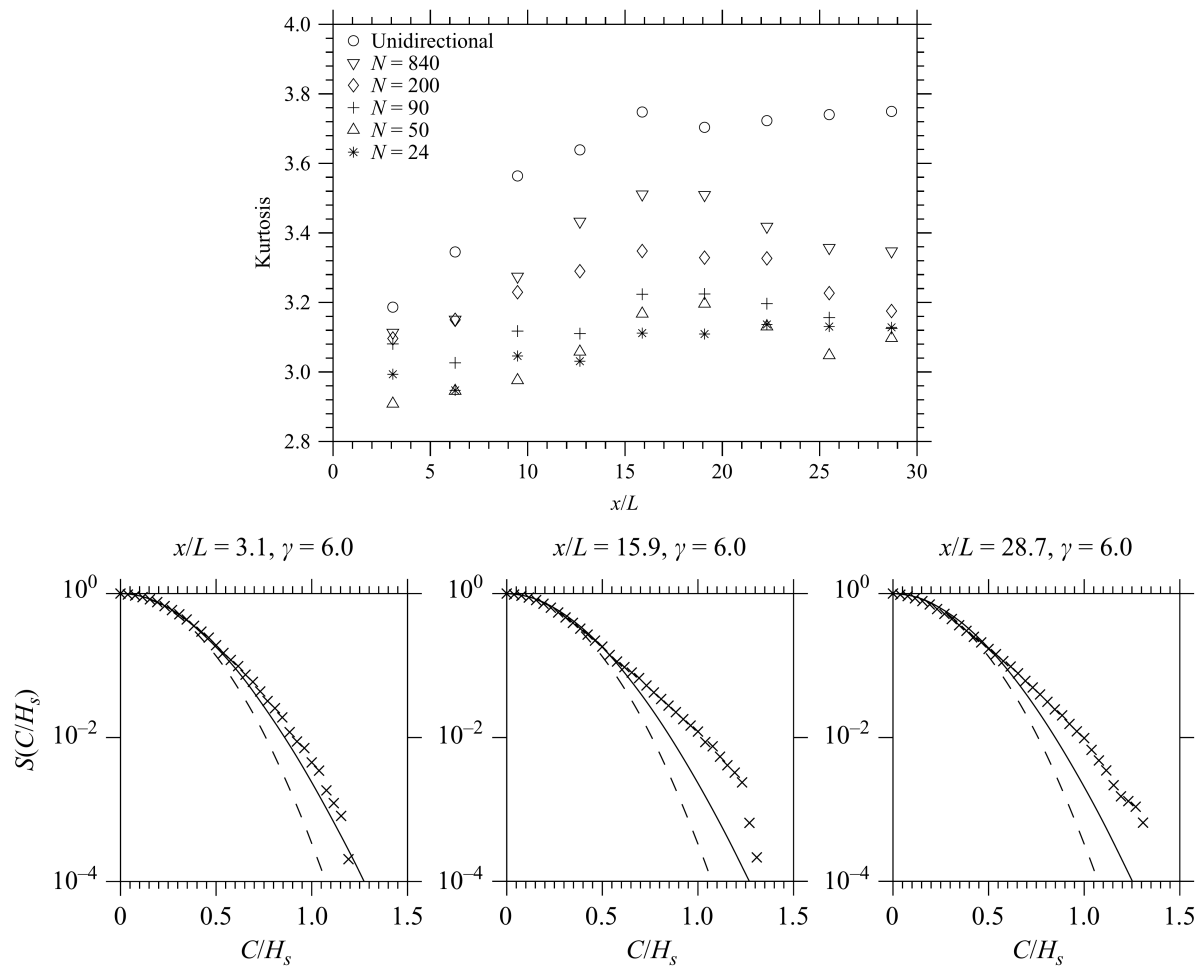


FIGURE 4.8 – Evolution spatiale du kurtosis dans un bassin de houle pour différents étalements directionnels (Haut). Evolution de la probabilité d'élévation des crêtes dans un cas directionnel  $N = 200$  (bas). Reproduction des expériences de [? ]

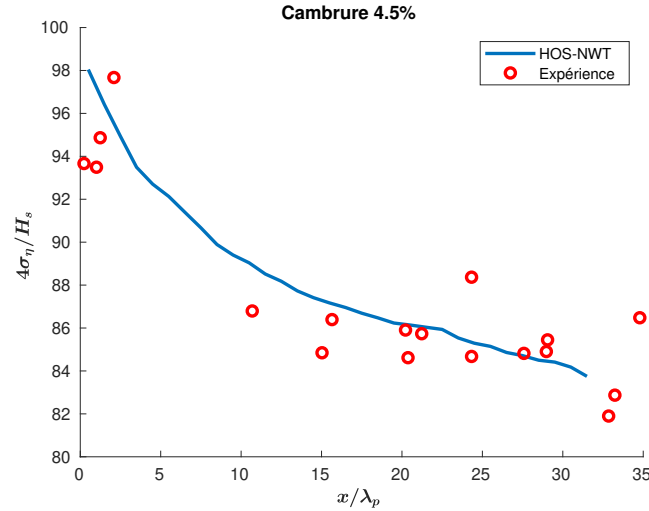


FIGURE 4.9 – Evolution de la hauteur significative dans un bassin de houle. Etat de mer uni-directionnel déferlant de cambrure significative  $\epsilon = 0.045$  - comparaison avec les expériences [? ].

d'un outil qui permet d'ores et déjà une évolution cohérente de la quantité d'énergie présente aux différentes positions dans le bassin. A noter que ce phénomène de dissipation d'énergie sera également présent dans une configuration de domaine ouvert comme étudié dans la section précédente. L'évolution de la hauteur significative se faisant en temps et non en espace.

### Changement de bathymétrie

Les résultats précédents (hors déferlement) supposent que le milieu a des propriétés homogènes en espace et donc que l'instabilité du contenu spectral de l'état de mer est uniquement associée à une incompatibilité entre la condition initiale et le système d'équation/la physique en jeu dans la configuration étudiée. On a vu qu'il en résulte une évolution vers un état stationnaire (en temps ou en espace), différent de la condition initiale. Cette dynamique hors-équilibre induit possiblement une occurrence plus importante des événements extrêmes dans un état de mer donné.

Dans cette partie, je vais étudier la possible influence d'un changement de bathymétrie sur les statistiques de l'état de mer. Des études expérimentales et numériques avaient déjà étudié le problème dans une configuration uni-directionnelle [? ? ]. On rajoute l'influence de la directionnalité aux études existantes et on étudie l'évolution des propriétés statistiques des états de mer dans une configuration avec un changement assez brusque de bathymétrie. La figure 4.10 présente un exemple de vue 3D de la surface libre et de la bathymétrie étudiée dans cette configuration.

Les vagues sont générées sur la gauche du domaine et se propagent tout d'abord dans un domaine avec une profondeur relative  $k_p h = 1.1$ . La profondeur relative est donc d'ores et déjà assez faible, ce qui limite l'évolution spatiale des statistiques dans cette première partie de propagation. Ensuite, le champ de vagues arrive sur une barre sous-marine qui change la profondeur jusqu'à une profondeur assez faible  $k_p h = 0.60$ .

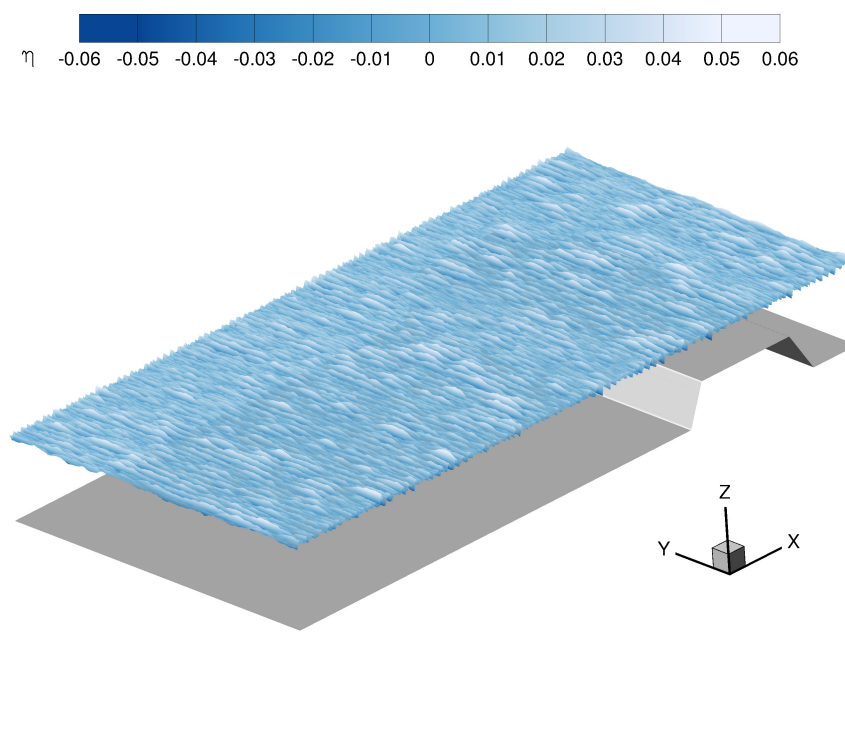


FIGURE 4.10 – Vue de l'élévation de surface libre et de la bathymétrie pour l'étude de l'effet d'un changement de bathymétrie sur les statistiques d'états de mer. Figure issue de [? ]

Au passage de cette marche, les expériences et simulations numériques ont montré une augmentation du kurtosis en uni-directionnel. La figure 4.11 présente la comparaison des résultats uni-directionnel et directionnels dans cette configuration, en terme d'énergie, de skewness et de kurtosis.

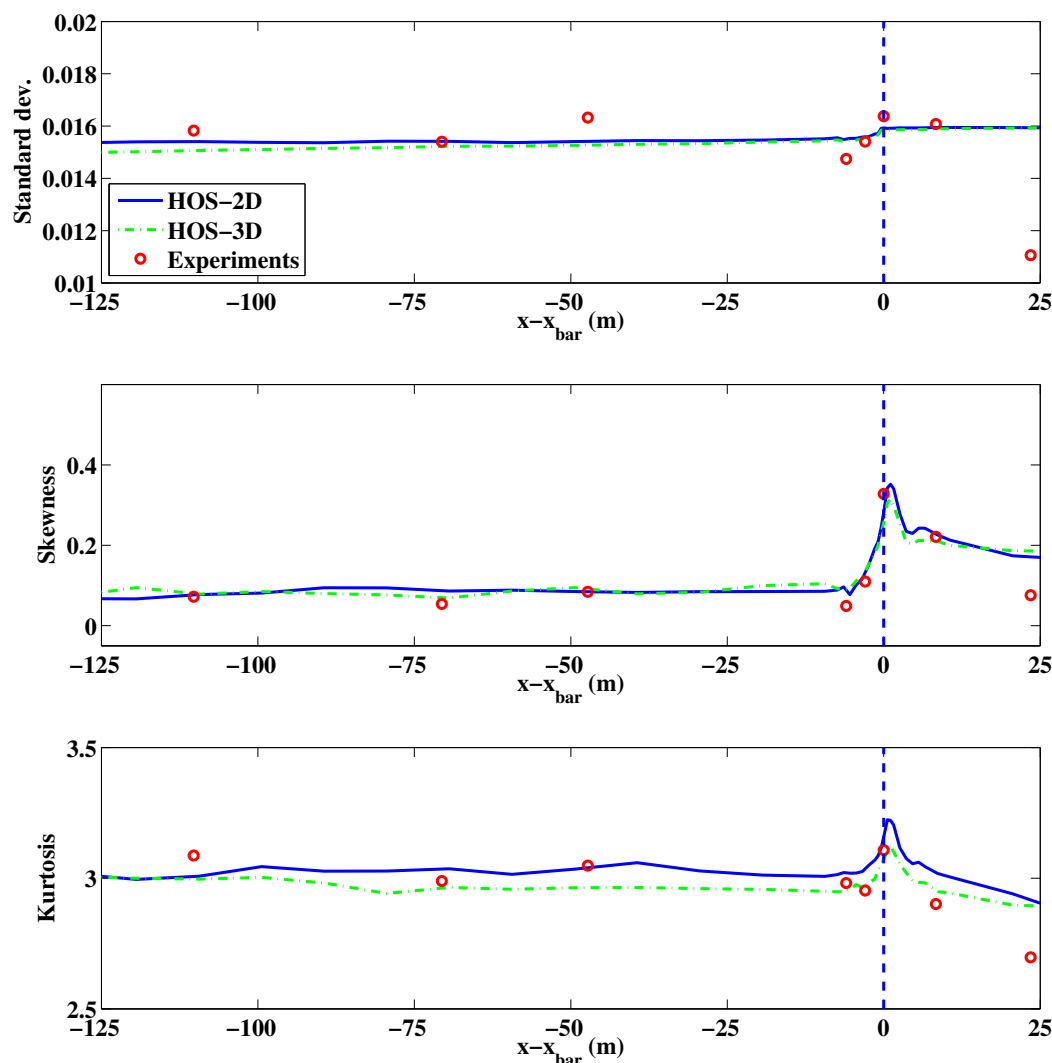


FIGURE 4.11 – Evolution spatiale de l'écart type, du skewness et du kurtosis de l'élévation de surface libre au passage d'une barre immergée. Comparaison entre configuration uni-directionnelle (expériences de [? ] et simulations HOS) et directionnelle (simulations HOS). Figure issue de [? ]

L'ensemble des calculs ont été réalisés à l'aide du modèle HOS-ocean avec bathymétrie variable et zones de relaxation pour la génération/absorption des vagues aux frontières du domaine. Les calculs réalisés dans une configuration uni-directionnelle ont permis de

valider l'approche par rapport aux expériences et aux simulations existantes dans cette configuration. On retrouve bien une déviation assez significative du kurtosis au passage de ce changement de bathymétrie. L'état de mer qui pouvait être considéré comme stable dans la partie de plus grande profondeur se trouve déstabilisé par le changement de profondeur. Cette déstabilisation s'accompagne donc d'une augmentation des probabilités de vagues extrêmes.

L'influence de la directionnalité de l'état de mer est alors de diminuer les effets du changement de bathymétrie sur les probabilités d'occurrence. Cependant, même dans cette configuration réaliste de champ de vagues directionnel rencontrant un saut de bathymétrie, le kurtosis augmente en cette position. Il est donc essentiel du point de vue des événements extrêmes de considérer en environnement côtier ces changements de bathymétrie pour estimer leurs probabilité d'occurrence. L'effet de la directionnalité est similaire à celui observé par rapport à l'instabilité de la condition initiale en grande profondeur et décrit théoriquement sur la figure 4.5. Cependant, la configuration est différente ici car la profondeur relative est relativement faible et l'instabilité est générée par une inhomogénéité du milieu. A noter que l'asymétrie des vagues est quant à elle similaire avec ou sans étalement directionnel (skewness).

### Changement de courant

De façon assez similaire au paragraphe précédent, il est intéressant d'étudier les effets de l'inhomogénéité du milieu induit par l'existence d'un courant variant spatialement. Cette configuration est d'intérêt important, en particulier en génie océanique car connue pour être associée à de nombreux accidents maritimes dus aux conditions de mer [? ?]. Ce travail a été effectué récemment en collaboration avec A. Toffoli de l'Université de Melbourne [? ].

On se limite dans cette étude à une configuration uni-directionnelle, qui correspond à une série d'expériences menée dans les bassins de l'Université de Plymouth [? ]. La figure 4.12 présente un schéma de la configuration mise en place dans leur bassin de traction.

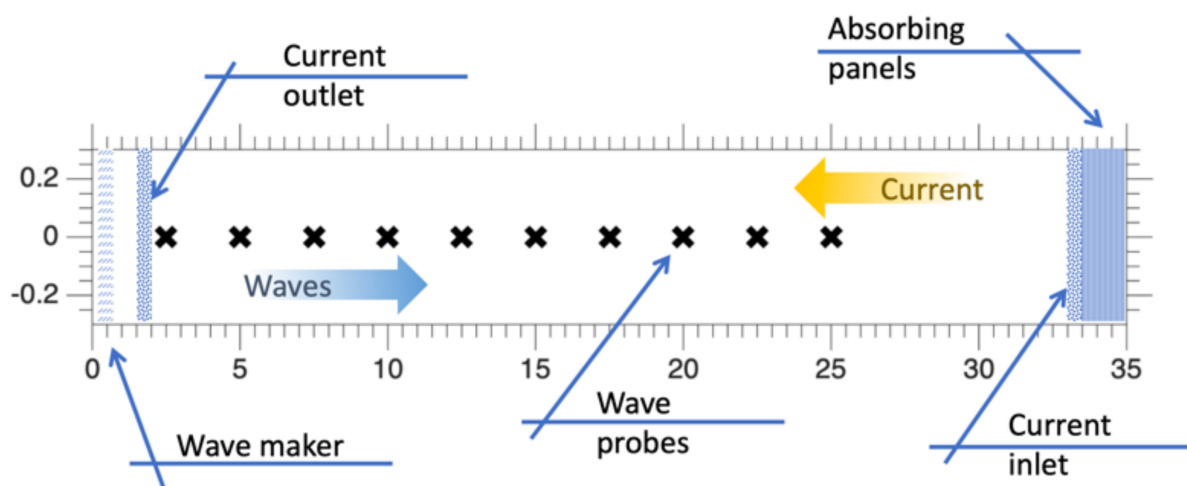


FIGURE 4.12 – Configuration expérimentale de l'étude des interactions houle-courant.

Des essais ont également été menés dans le bassin océanique de l'Université de Ply-

mouth. Même si la configuration était sensée être unidirectionnelle, le courant était plus difficilement homogène dans la direction transverse, à l'origine probable des différences qui seront observées par la suite. Expérimentalement, des états de mer irréguliers sont donc générés dans le bassin et ces derniers rencontrent un courant supposé uniforme dans la direction verticale et qui s'établit rapidement dans la direction de propagation des vagues. On contrôle la vitesse de ce courant qui sera opposé aux vagues. Les essais et les simulations numériques sont effectuées sur de grandes durées afin de pouvoir extraire des données statistiques fiables.

La figure 4.13 présente l'évolution spatiale du kurtosis pour différentes vitesses de courant opposé aux vagues  $U/C_g = [0.00; -0.06; -0.10; -0.19; -0.29; -0.38]$  ainsi que les densités de probabilités de hauteur crête à creux à la position du maximum de kurtosis pour une configuration sans courant et une configuration avec  $U/C_g = -0.29$ .

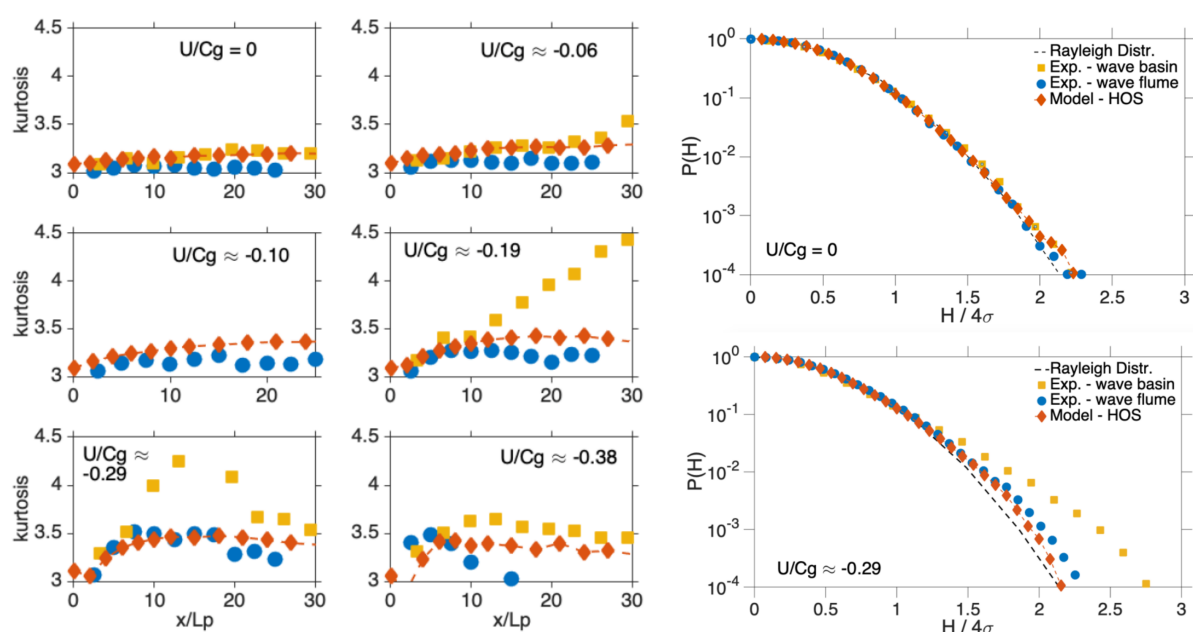


FIGURE 4.13 – Comparaison numérique et expérimental en houle-courant. Evolution du kurtosis dans le bassin (gauche) et pdf de la hauteur (droite).

On observe une dépendance très forte de l'évolution spatiale du kurtosis par rapport à la présence de contre-courant. Il apparaît que les résultats expérimentaux obtenus en bassin étroit (wave flume) et en bassin océanique large (wave basin) sont assez différents. Comme indiqué précédemment, des effets directionnels dans le bassin océanique sont possibles. Les simulations numériques reproduisent assez fidèlement l'évolution expérimentale du kurtosis dans la bassin étroit avec une augmentation significative de celui-ci, associé à l'inhomogénéité spatiale du milieu de propagation. Comme représenté sur la partie droite de la figure 4.13, cette augmentation de kurtosis correspond assez clairement à une déviation des statistiques des vagues extrêmes par rapport à la théorie linéaire (distribution de Rayleigh).

Dans les calculs présentés (et confirmé par les observations expérimentales), dû aux

variations importantes de courant, on est confronté à la présence de déferlement. Il s'agit donc d'une configuration complexe en terme de modélisation, qui inclut donc le modèle de déferlement (section 2.6). À noter que si ce dernier a été validé sur différents types de déferlement, il ne l'a pas été dans une configuration houle-courant. Ainsi, même si le critère de déferlement est a priori utilisable dans la configuration avec courant sans limitation, la dissipation d'énergie pourrait être modifiée dans un cas avec courant, ce qui n'a pas été quantifié pour l'instant. On a comme première étape, simplement vérifié dans les cas présentés que l'évolution de la hauteur significative lors de la propagation était consistante avec les mesures expérimentales.

### 4.1.3 Conclusion-perspectives

Les outils numériques développés dans le chapitre 2 m'ont donc permis de mener diverses études autour des événements extrêmes apparaissant dans les champs de vagues irréguliers. De mon point de vue, cette approche numérique doit venir en support et en complément des essais expérimentaux réalisés en bassin de houle et des mesures en mer. Les essais en bassin permettent une validation des modèles numériques dans la configuration d'intérêt. Les outils de simulations peuvent alors être utilisés afin

- d'avoir accès à davantage d'informations concernant le phénomène étudié : l'instrumentation d'un essai est en général limitée en discrétisation spatiale et/ou en quantité physique mesurée
- de réaliser des études plus systématiques de l'influence des paramètres d'intérêts sur le phénomène étudié
- d'éventuellement augmenter l'étendue spatiale (limitée expérimentalement par la taille des installations)

Par rapport à des essais en mer, les outils de simulations ont l'avantage d'un contrôle accru des conditions avec cependant une simplification des processus physiques pris en compte.

Dans ce cadre, j'ai mis en place les outils d'analyse permettant de caractériser l'occurrence des événements extrêmes, ainsi que leur forme, leur localisation spatiale, etc. J'ai couplé l'approche déterministe d'étude du champ de vagues avec identification des vagues individuelles avec l'approche statistique d'étude des densités de probabilités associées à ces événements, notamment avec l'utilisation du kurtosis.

Cela m'a permis d'étudier différentes configurations d'intérêt en mettant en avant l'importance, dans l'étude des événements extrêmes, de la stabilité du champ de vagues considéré. La physique de l'évolution des états de mer conduit à un accroissement des événements extrêmes lorsqu'on est dans une situation où le spectre évolue rapidement. Cette phénoménologie est démontrée comme consistante vis à vis de différentes configurations produisant cette instabilité :

- les conditions initiales gaussiennes dans un domaine supposé infini et homogène spatialement
- les conditions de forçage d'un bassin de houle
- la présence d'un gradient de bathymétrie

— la présence d'un gradient de courant

Ce phénomène physique est très important à étudier et comprendre, notamment dans le contexte du génie océanique. En effet, à l'heure actuelle, les réglementations utilisent comme conditions de houle les descriptions classiques sous forme de spectre par exemple de type JONSWAP en spécifiant un  $H_s$  et un  $T_p$  (et éventuellement un étalement directionnel). Dans un formalisme linéaire qui est celui mis en œuvre classiquement, le contrôle de ces conditions est aisé. Mais, comme on l'a montré, ce n'est plus le cas dans un contexte non-linéaire.

Il y a donc un travail important à mener pour définir une méthodologie adaptée au contexte non-linéaire. L'objectif qu'on peut se fixer est d'être à même de contrôler les états de mer et en particulier les événements extrêmes dans ceux-ci afin de représenter fidèlement ce qui se passe dans l'océan. Ceci s'applique pour les essais en bassin mais également pour la modélisation fine des conditions environnementales utilisée dans les études d'interaction houle-structure (chapitre 3). Il s'agissait d'un des objectifs finaux du projet relevant de l'initiative I-Site NExT - WASANO, stoppé en décembre 2019 suite à l'arrêt des financements étatiques.

De manière plus générale, c'est une thématique intéressante que je souhaite poursuivre dans le futur, notamment vis à vis des limitations des études actuelles. Je liste ci-dessous quelques perspectives de travail

— Etude des transferts d'énergie associés à l'instabilité du spectre. Ces transferts ont été formalisés dans le cas de l'initialisation linéaire d'un domaine infini [? ]. Cependant, il est possible de quantifier l'intensité de ceux-ci et probablement le relier aux occurrences des événements extrêmes. La figure 4.14 présente les résultats préliminaires des simulations en configuration houle-courant et de l'influence de ce contre-courant sur l'intensité des transferts.

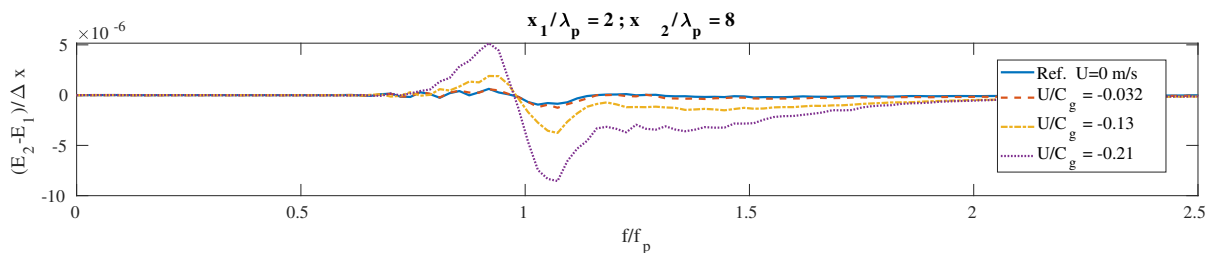


FIGURE 4.14 – Transferts d'énergie lors de l'interaction houle courant pour différentes vitesses du contre-courant.

— Influence de la directionnalité sur les occurrences des vagues extrêmes. Ce point a été étudié sur certaines configurations mais n'a pas été mis en place dans la configuration houle-courant par exemple. Des études approfondies et systématiques pourraient être intéressantes. Dans cette configuration, les prédictions théoriques de [? ] sur l'effet de la directionnalité et ceux de [? ] sur l'effet de profondeur limitée pourraient indiquer l'existence de configurations intéressantes en faible profondeur  $kh < 1.363$  et fort étalement directionnel [? ].



- Validation du modèle de déferlement en terme de statistiques et dans des configurations plus complexes : variation du fond, présence de courant, etc.
- Initialisation en non-linéaire de la surface de mer. L'objectif pourrait être d'essayer de spécifier des conditions initiales stables à notre état de mer. Si une partie des non-linéarités peuvent être considérées à l'aide de différents niveaux d'approximation, il semble complexe de pouvoir généraliser ceci à tout état de mer. Cependant, certaines configurations pourraient être intéressantes. Je pense par exemple au cas uni-directionnel d'état de mer irrégulier faiblement non-linéaires et à bande étroite qui sont bien approchés par l'équation NLS. Des travaux récents ont montré que l'état stationnaire pourrait être caractérisé par un gaz de solitons [? ?]. Des travaux en ce sens ont été initiés dans le cadre du projet ANR DYSTURB.
- Compléter l'ensemble des analyses faites sur l'élévation de surface libre avec des analyses statistiques sur les champs de vitesses et de pression. Si les modèles linéaires prédisent une équivalence exacte entre ces statistiques, des observations récentes semblent indiquer des comportements différents dans un cadre non-linéaire [? ] : les événements extrêmes pour la vitesse n'étant pas localisés au même endroit que ceux pour l'élévation de surface libre. C'est un point essentiel en vue de l'étude des interactions houle-structure.

## 4.2 Solutions analytiques et effets d'ordre supérieur

L'analyse des événements extrêmes a également bénéficié de nombreux travaux prenant appui sur le formalisme des équations Non-Linéaires de Schrödinger (NLS) [? ]. L'intérêt principal de ce formalisme est qu'il offre des solutions analytiques permettant de décrire la dynamique des vagues dans certaines conditions. Je rappelle que le formalisme NLS est basé sur des hypothèses possiblement assez restrictives :

- Faible non-linéarité  $\mathcal{O}(\epsilon) \ll 1$
- Faible étalement fréquentiel :  $\mathcal{O}(\Delta\omega/\omega_0) = \mathcal{O}(\epsilon) \ll 1$

Cette équation décrit l'évolution de l'enveloppe complexe  $\psi(x, t)$  comme suit

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + C_g \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \alpha |\psi|^2 \psi = 0 \quad (4.4)$$

avec  $C_g$  la vitesse de groupe,  $\beta = \left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{k=k_0}$  le terme dispersif et  $\alpha = \left. \frac{\partial \omega}{\partial |\psi|^2} \right|_{\psi=0}$  le terme non-linéaire. Cette enveloppe complexe est reliée à l'élévation de surface libre par la caractérisation de l'onde porteuse : amplitude  $a$ , nombre d'onde  $k_0$  et pulsation  $\omega_0$  :

$$\eta(x, t) = \text{Re} [\psi(x, t) e^{B(k_0 x - \omega_0 t)}] \quad (4.5)$$

En fonction du signe des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , qui dépendent de la profondeur relative, cette équation est appelée équation NLS 'focalisante' lorsque  $k_0 h > 1.363$  et 'défocalisante' en faible profondeur  $k_0 h < 1.363$ . Cette dénomination est reliée à l'existence ou non des effets d'instabilité modulationnelle sur le champ de vagues. Dans le cas focalisant, les modulations de l'onde plane peuvent croître exponentiellement, alors que dans le cas défocalisant les trains de vagues sont toujours stables.

Dans cette configuration, les solutions analytiques les plus étudiées sont de deux grandes familles

- solutions localisés de type soliton d'enveloppe. Les dénominations viennent du milieu de l'optique :
  1. soliton (clair) (bright soliton) en régime focalisant
  2. soliton noir (dark soliton) en régime défocalisant [? ]
- solutions sur fond continu, aussi connues sous le nom de breathers ou soliton pulsé. Elles existent dans le cas focalisant et sont de différents types suivant leur propriétés de périodisation spatiales ou temporelles : Akhmediev [? ], Kuznetov-Ma [? ? ] et enfin le breather de Peregrine [? ] étant la solution localisée en espace et en temps (pouvant être vue comme la limite des deux solutions précédentes). A noter qu'il existe des breathers d'ordre plus élevés qui présentent des amplifications plus importantes.

Le figure 4.15 présente les enveloppes de trois de ces solutions : les solutions localisées de type soliton (NLS focalisante) et soliton noir (NLS défocalisante) ainsi qu'une solution pulsée (breather) de type Peregrine. Cette dernière solution est très communément utilisée dans l'étude des vagues extrêmes car étant une solution localisée en espace et en temps. Elle est représentative et pourrait servir de modèle pour les vagues scélérates apparaissant en mer [? ]. L'instabilité modulationnelle est à son origine et elle émerge d'une onde plane avant d'y retourner sans laisser de traces avec une facteur d'amplification de 3 par rapport à celle-ci.

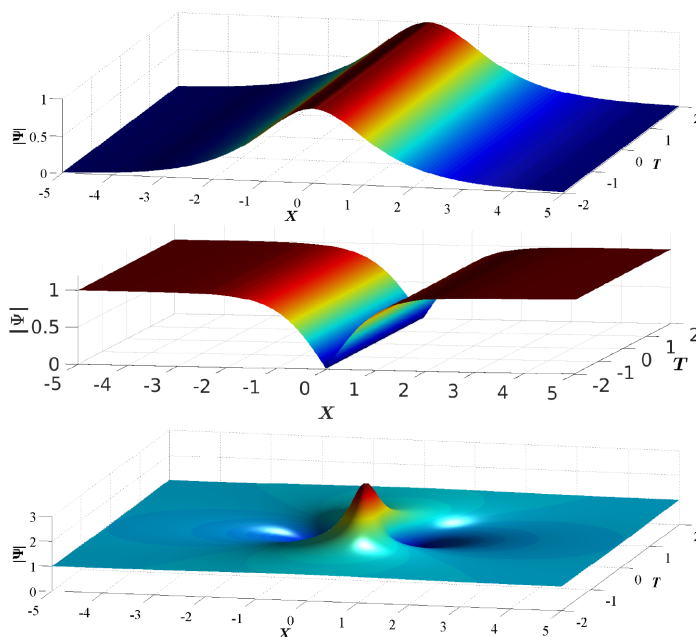


FIGURE 4.15 – Solutions analytiques des équations NLS, module de l'enveloppe complexe : soliton (haut) soliton noir (milieu) et soliton pulsé (breather) de Peregrine (bas).

Les études menées dans ce formalisme NLS sont très nombreuses, tirant partie du fait qu'il s'agit d'une équation intégrable qui admet de nombreuses familles de solutions. Ces

dernières sont intéressantes du point de vue mathématique mais également physique en tant qu'objet pouvant être étudié et si possible appliqué à des configurations d'intérêt, telles les vagues scélérates et leur lien possible avec les solitons pulsés de type Peregrine.

Mais les travaux ne se limitent pas à ces configurations assez simples et de nombreuses recherches s'intéressent à étendre les connaissances de ces solutions analytiques dans des configurations un peu plus complexes : dam-break, changement rapide d'amplitude, saut de phase, etc. [? ? ?]. Ces études peuvent trouver des applications concrètes en hydrodynamique, comme le contrôle du front de vagues dans un essai en bassin [?].

D'autre part, cette équation NLS est également utilisée pour étudier les propriétés statistiques des champs d'ondes aléatoires [? ?]. Des études ont permis des avancées dans la compréhension des phénomènes physiques à l'œuvre en océanographie (comme vu en Sec. 4.1.2) et est toujours le sujet de nombreuses recherches, notamment en optique non-linéaire.

En complément, au vu de la relative simplicité numérique de la modélisation NLS, elle est également utilisée en hydrodynamique comme modèle de propagation de vagues à part entière en incluant possiblement les effets de directionnalité (les équations perdant leur caractère intégrable mais restant simples). De façon similaire à ce que j'ai présenté dans le chapitre 2 concernant l'extension d'un modèle potentiel non-linéaire vers la prise en compte de plus de phénomènes physiques, des travaux sont menés dans ce formalisme NLS. Ceci couvre également les possibilités d'ajouter des termes additionnels aux équations précédentes afin d'augmenter l'applicabilité du modèle, notamment en terme de cambrure accessible et de largeur du contenu spectral étudié (équation de Dysthe et extensions diverses [? ?]).

Une des questions qu'il est nécessaire de se poser est celle de la validité et de l'applicabilité de ces solutions analytiques (ou du modèle numérique résultant) dans des configurations d'intérêt pour l'hydrodynamique et le génie océanique. Ainsi, je présenterai dans la suite différentes études qui se sont attachées à étudier ces solutions analytiques dans un contexte complètement non-linéaire. D'autres travaux avaient déjà initié de telles études numériques [? ?]. L'objectif étant ici de s'intéresser à d'autres solutions analytiques ainsi qu'à d'autres caractéristiques qui ne peuvent par exemple pas être mesurées lors d'essais en bassin.

### 4.2.1 Solitons d'enveloppe

Les solitons d'enveloppe ont été étudiés de façon extensive du point de vue expérimental et numérique en hydrodynamique. On a donc une connaissance assez précise des limitations associées au formalisme NLS dans cette configuration. Des formes stables d'enveloppe ont été générées expérimentalement et en simulation numérique jusqu'à environ  $k_0 a = 0.30$  [?]. Il est à noter que les solutions stables à ces cambrures très importantes diffèrent de la solution théorique NLS, valable uniquement à faible cambrure.

Ensuite, il convient d'indiquer que la notion de stabilité de ces solutions dépend de l'horizon de temps/distance sur lequel la solution va être propagée. Plus celle-ci est importante et plus la déviation dans une configuration réaliste (expérimentale ou en simulation complètement non-linéaire) sera importante.

Les premiers éléments d'une étude de la validité des solutions NLS dans un contexte non-linéaire sont présentes ici avec un focus particulier sur les effets de profondeur finie. Grâce à l'approche numérique, on peut étudier la propagation dans un très grand domaine, choisi ici d'être d'une longueur totale de  $1000\lambda_0$ . Le bassin de houle numérique est de profondeur constante  $h = 0.4\text{m}$  et on va générer des solitons d'enveloppe avec différentes fréquences de porteuse. Il s'agit en effet de cette fréquence  $f_0$  que l'on contrôle par le mouvement batteur imposé.

Afin de valider la procédure, la figure 4.16 présente le résultat des simulations de la génération de ce soliton d'enveloppe dans le bassin numérique. On adopte une représentation classique dans le formalisme NLS, à savoir une évolution espace/temps du module de l'enveloppe obtenu par transformée de Hilbert avec le temps corrigé de la vitesse de groupe afin de suivre le groupe de vagues facilement dans son évolution. La figure présente les résultats en profondeur d'eau importante ( $k_0h = 2\pi$ ) pour une cambrure assez importante  $k_0a = 0.20$ .

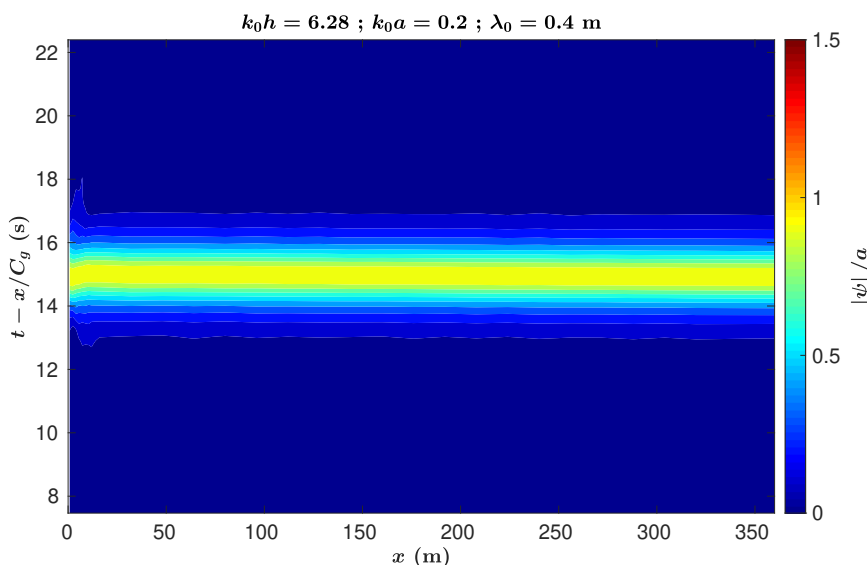


FIGURE 4.16 – Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe en grande profondeur ( $k_0h = 2\pi$ ) et cambrure modérée  $k_0a = 0.20$ . Enveloppe de la déformée de surface libre.

Le nombre d'onde et la longueur d'onde correspondant à la houle générée ( $k_0, \lambda_0$ ) sont définis à partir de la relation de dispersion linéaire. Le soliton d'enveloppe admet bien une forme stable dans un contexte complètement non-linéaire, y compris sur cette très grande distance de propagation ( $\simeq 1000\lambda_0$ ). La forme (extension temporelle et amplitude) de cette structure cohérente est très peu modifiée par les effets d'ordre supérieurs (non-linéarité et dispersion).

Grâce au modèle numérique, on peut aisément faire varier les paramètres et par exemple augmenter la non-linéarité jusqu'à la limite d'existence stable [? ]. Mais on peut également changer la profondeur relative. On sait qu'effectivement, dans un formalisme NLS, la solution ne peut exister que pour  $k_0h > 1.363$  (limite physique pour l'instabilité modulationnelle). La figure 4.17 présente les résultats de l'évolution de ces solitons lorsqu'on se rapproche de cette limite théorique  $k_0h = 1.363$  pour deux cambrures

$$k_0 a = [0.10 ; 0.20].$$

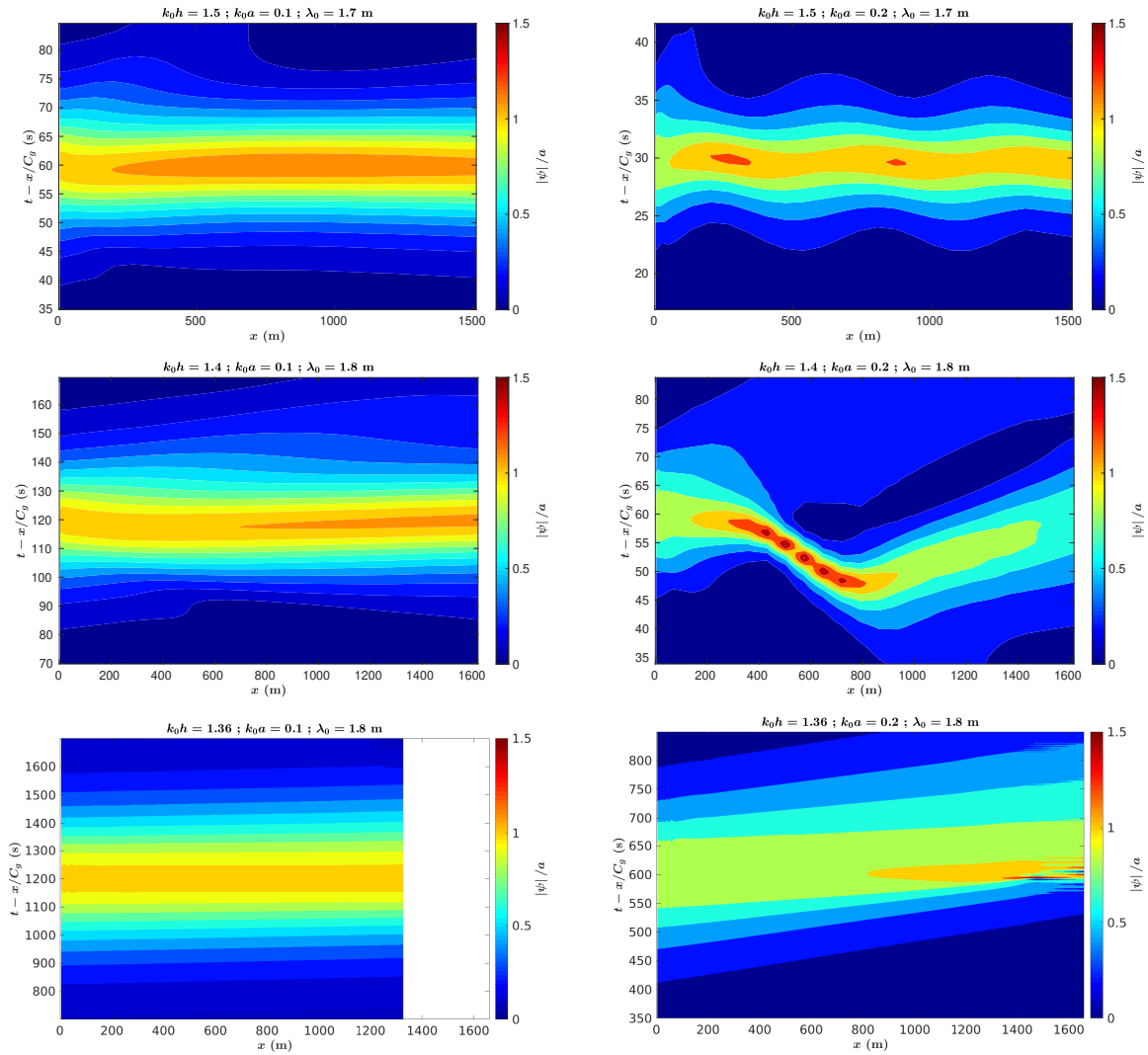


FIGURE 4.17 – Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe en faible profondeur et cambrure faible  $k_0 a = 0.10$  (gauche) et  $k_0 a = 0.20$  (droite). Profondeurs relatives :  $k_0 h = 1.5$  (haut),  $k_0 h = 1.4$  (milieu) et  $k_0 h = 1.363$  (bas). Enveloppe de la déformée de surface libre.

La solution stable semble donc exister à ces faibles profondeurs relatives, y compris à la limite  $k_0 h = 1.363$  même si pour de telles distances de propagation, il est nécessaire de diminuer la cambrure à  $k_0 a = 0.10$  (voire  $k_0 a = 0.05$ , non présenté ici) pour assurer une stabilité du soliton d'enveloppe (à noter les changements de forme du soliton théorique ( $x = 0\text{m}$ ) induits par le changement de profondeur relative). Les propagations avec  $k_0 a = 0.20$  sont instables et conduisent à la formation d'évènements extrêmes, avec des facteurs d'amplification jusqu'à environ 2.3 observés dans le cas de la plus faible profondeur relative.

Le modèle non-linéaire complet permet donc d'aller a priori assez loin dans l'analyse

de l'effet des effets d'ordre supérieurs (de dispersion et de non-linéarité) sur l'existence des solutions analytiques à NLS. Dans ce contexte, des analyses complémentaires pourront être menées afin de tirer partie des modèles numériques HOS. Par exemple, des travaux récents se sont intéressés aux solutions analytiques des équations NLS d'ordre élevés (qui prennent en compte des ordres supérieurs par rapport aux équations NLS classiques) dans la configuration  $k_0 h < 1.363$  [? ]. Des simulations HOS-NWT pourraient infirmer/confirmier l'existence de ces solutions stables.

La figure 4.18 présente les premiers résultats obtenus en prenant pour solution analytique au niveau du batteur la solution donnée par [? ] pour une profondeur relative  $k_0 h = 1.2$ , ce qui est donc en-dessous de la limite théorique d'existence des solitons.

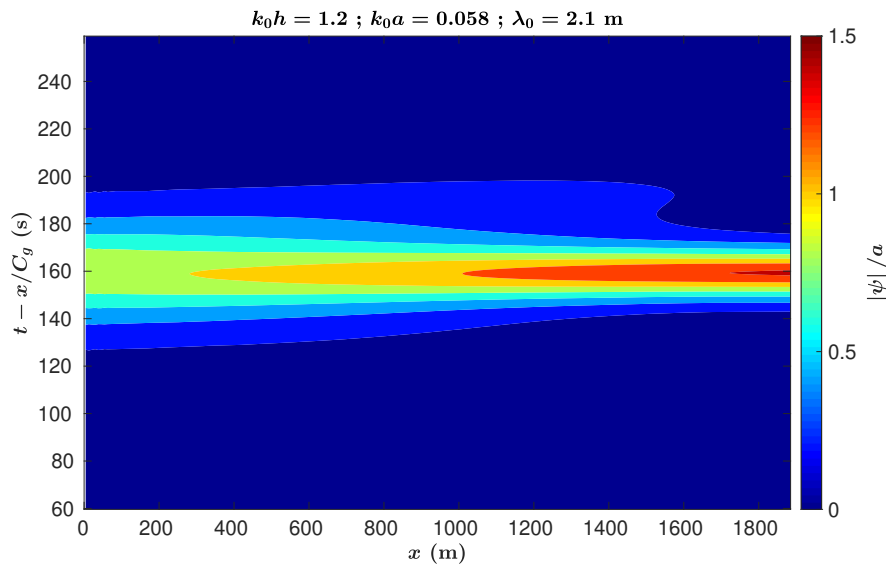


FIGURE 4.18 – Evolution spatio-temporelle de solitons d'enveloppe en profondeur relative inférieure à la limite théorique de stabilité, issus de [? ]. Ici  $k_0 h = 1.2$  et faible cambrure  $k_0 a = 0.058$ . Enveloppe de la déformée de surface libre.

On observe donc une enveloppe qui évolue très lentement dans l'espace (en rappelant que le domaine de calcul fait 1000 longueurs d'onde. On est donc proche d'une solution stable existant pour cette très faible profondeur relative... semblant indiquer une possible existence de groupes de vagues stables dans cette configuration de profondeur relative. Ces résultats sont préliminaires quant à l'analyse de la solution théorique qui implique une vitesse fixe de cette enveloppe stationnaire, qui peut être vu comme un décalage de fréquence ou de nombre d'onde (et donc de profondeur relative).

Cependant, ces résultats sont tout de même très intéressants dans l'optique possible de comprendre plus finement la physique des états de mer en profondeur relativement faible.

### 4.2.2 Solitons noirs

Dans la continuation de l'étude précédente qui s'intéressait aux solutions de solitons d'enveloppe lorsqu'on se rapproche de la limite théorique de leur existence  $k_0 h = 1.363$ ,

on peut également étudier les solutions analytiques existant théoriquement en dessous de cette limite. En effet, les solitons dits 'noirs' sont des solutions aux équations NLS dans le régime dit défocalisant ( $k_0h < 1.363$ ).

Le modèle HOS-NWT, permet donc d'étudier leur possible génération dans un bassin de houle physique, car prenant en compte l'ensemble des non-linéarités présente dans la nature, ainsi que l'ensemble des effets dispersifs. Expérimentalement, il a déjà été montré que l'on pouvait générer ces solutions en bassin de houle [? ]. L'intérêt de l'approche numérique peut alors être de caractériser un peu plus précisément leur existence vis à vis des différents paramètres rentrant en jeu, à savoir la profondeur relative  $k_0h$ , la cambrure  $k_0a$  et la longueur de propagation. Expérimentalement, cette dernière est limitée par les contraintes physiques du bassin utilisé, contrainte levée aisément dans une approche numérique.

Les simulations réalisées dans cette étude utilisent le modèle de bassin de houle numérique HOS-NWT dans un domaine de longueur  $L_x = 100\lambda_0$ , d'extension beaucoup plus grande que les résultats expérimentaux de [? ] limités à une distance de propagation de  $10\lambda_0$ . On se place à des niveaux de non-linéarité limités, caractérisés par  $H/H_{lim}$ , le ratio entre la hauteur crête à creux de l'onde plane par rapport à la hauteur limite d'existence de celle-ci à la profondeur donnée, telle que donnée paramétriquement par [? ].

Afin de visualiser plus aisément le type de champ de vagues correspondant à ces solitons noirs, la figure 4.19 présente une vue de l'élévation de surface libre en différentes positions du bassin pour une profondeur  $k_0h = 1.2$  et une onde plane modérément cambrée  $H/H_{lim} = 0.1$ . La position verticale correspond à la position dans le bassin, la première sonde étant toujours située à une distance  $x = 20\lambda_0$  du batteur. Il s'agit donc du pendant du module de l'enveloppe complexe représenté sur la figure 4.15 pour la solution analytique et sur la figure 4.20 pour la simulation non-linéaire complète.

On observe donc bien la caractéristique du soliton noir, à savoir une dépression localisée dans l'onde plane, qui conserve sa forme durant toute la propagation sans se déformer. La solution analytique de NLS est parfaitement valide dans cette configuration.

A l'aide du modèle numérique, on peut mettre en lumière les limitations de l'approche NLS. Par exemple, la figure 4.21 présente le résultat du soliton noir dans un contexte non-linéaire complet lorsque la profondeur relative est très faible  $k_0h = 0.40$  et pour deux cambrures de l'onde plane  $H/H_{lim} = 0.01$  (très faible non-linéarité) et  $H/H_{lim} = 0.10$  représentant une cambrure modérée.

On observe alors que sur cette distance de propagation ( $100\lambda_0$ ) la solution NLS n'est pas stable pour l'amplitude la plus importante, ce qui éclaire donc quant aux limitations de ces solutions NLS pour représenter la dynamique des vagues en faible profondeur.

Cette étude en cours vise à établir les limites d'applicabilité de ces solutions analytiques vis à vis des différents paramètres étudiés. La difficulté principale réside dans la définition d'un critère fiable de décision quant à la validité ou non de la solution NLS. Il semble que l'étude de l'enveloppe du signal ne soit pas forcément la plus adaptée pour établir de la validité ou non de cette solution, comme le montre la l'évolution spatio-temporelle de l'enveloppe pour le cas instable précédent sur la figure 4.22.

Une fois la procédure mise en place, une analyse fine de la limite d'applicabilité de la solution NLS des solitons noirs pourra être menée.

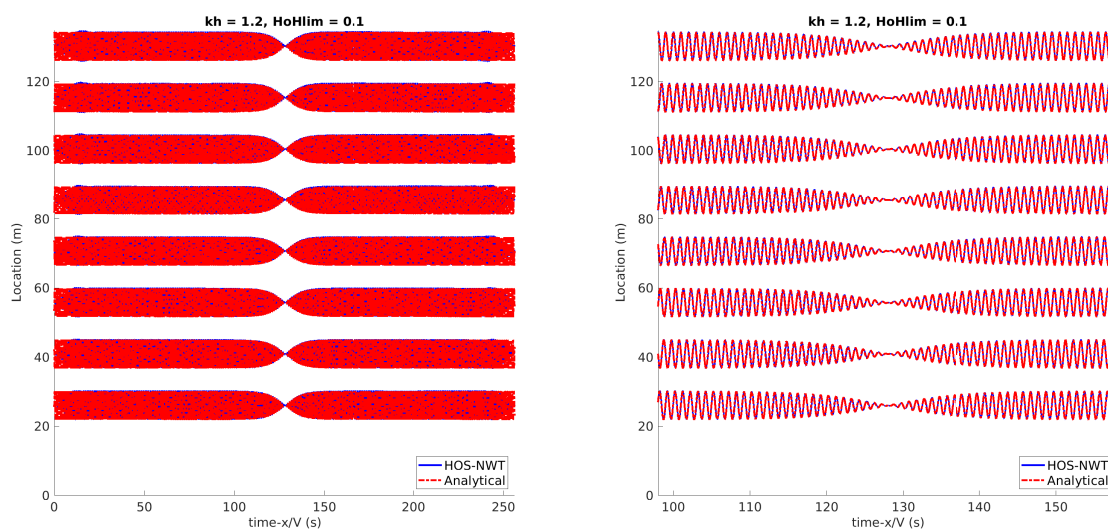


FIGURE 4.19 – Evolution spatio-temporelle de solitons noirs générés en bassin numérique,  $k_0h = 1.2$ . Comparaison entre la solution analytique issue de NLS et la solution complètement non-linéaire HOS-NWT

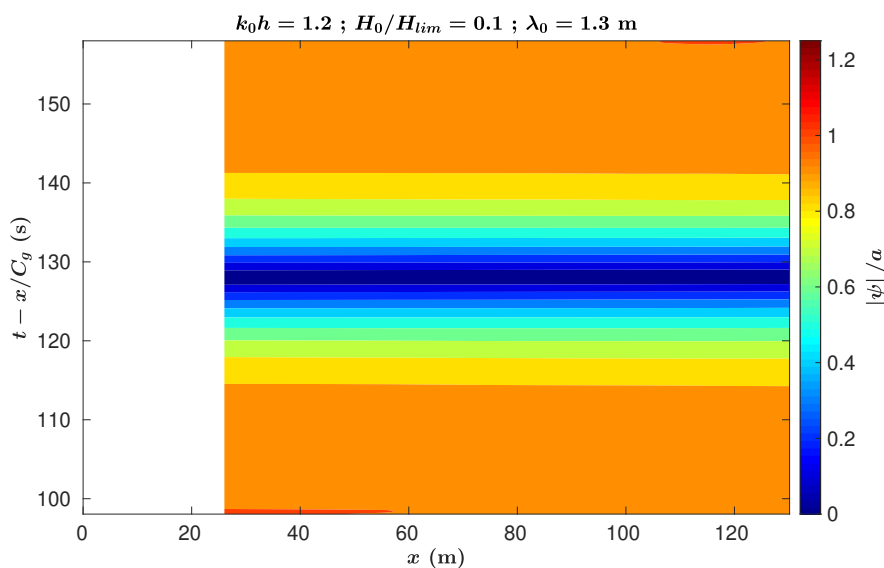


FIGURE 4.20 – Evolution spatio-temporelle de solitons noirs générés en bassin numérique,  $k_0h = 1.2$ . Module de l'enveloppe complexe  $\psi(x, t)$



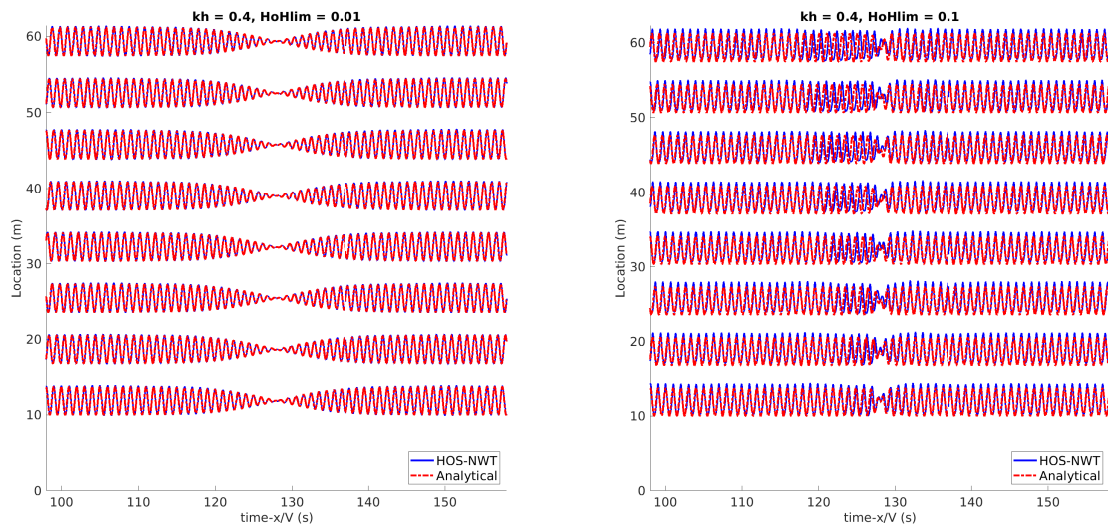


FIGURE 4.21 – Evolution spatio-temporelle de solitons noirs générés en bassin numérique  $k_0h = 0.4$  et deux amplitudes de l’onde plane  $H/H_{lim} = 0.01$  et  $H/H_{lim} = 0.1$ . Comparaison entre la solution analytique issue de NLS et la solution complètement non-linéaire HOS-NWT.

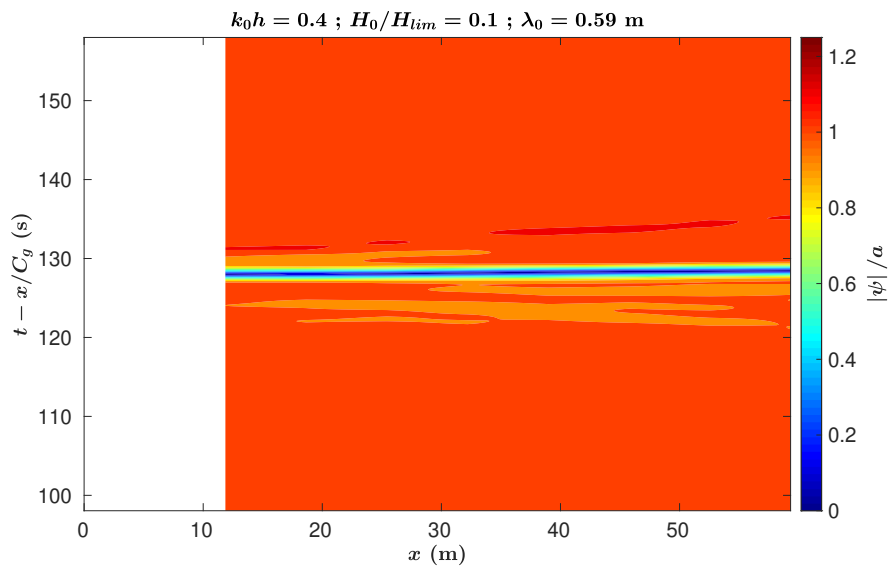


FIGURE 4.22 – Evolution spatio-temporelle de solitons noirs générés en bassin numérique,  $k_0h = 0.4$  et  $H/H_{lim} = 0.1$ . Module de l’enveloppe complexe  $\psi(x, t)$ .

### 4.2.3 Solitons pulsés / Breathers

Comme introduit précédemment, les solitons pulsés et en particulier les breathers dits de Peregrine ont été très étudiés comme possible modèle de représentation des vagues scélérates apparaissant dans une configuration uni-directionnelle. L'émergence de ces groupes de vagues de grande amplitude, localisés en temps et en espace, à partir d'une onde plane faiblement modulée peut être consistant avec ces récits de marins faisant état de vagues surgissant de nulle part pour décrire les vagues scélérates.

La première observation expérimentale de ces solitons pulsés de Peregrine en hydrodynamique a été réalisée en bassin par [? ]. Cette première démonstration d'existence a ouvert la voie aux études de ces solutions en hydrodynamique. On peut indiquer par exemple le travail de [? ] qui à l'aide de simulations HOS a évalué l'amplitude la plus importante pouvant être obtenue dans un groupe de vagues généré par une dynamique de type soliton pulsé. Une analyse assez extensive des différences entre les simulations non-linéaires et la solution NLS faiblement non-linéaire a été effectuée. Les effets non-linéaires peuvent devenir importants au moment de la focalisation avec donc une déviation de la solution complètement non-linéaire par rapport à la solution analytique.

Les limitations de l'approche NLS et de la solution de Peregrine apparaissent donc dans [? ]. Cependant, cette étude s'intéresse principalement à la dynamique du groupe de vagues au moment de la focalisation. Un élément qui n'a pas été étudié en détails est la pertinence de la solution sur les temps longs. Comme on l'a indiqué précédemment, les effets non-linéaires d'ordre supérieurs peuvent devenir importants au moment de la focalisation, en particulier lorsque la cambrure de l'onde plane perturbée est plus importante.

Si la solution faiblement non-linéaire admet une dynamique de focalisation/défocalisation symétrique (le champ de vagues retourne vers une onde plane non perturbée après le soliton pulsé), ces effets d'ordre supérieurs (de non-linéarité, mais également dispersifs) peuvent rompre cette symétrie. Il semblait donc intéressant d'étudier l'évolution longue durée de ces breathers de Peregrine.

Les résultats présentés sont issus de simulations réalisées par HOS-ocean, avec donc un domaine périodique en espace qui est initialisé à  $t = 0$  par la solution analytique du breather de Peregrine. Notre initialisation se fait sur l'élévation de surface libre et le potentiel des vitesses à la surface libre, qui incluent les effets non-linéaires jusqu'à l'ordre 3 en suivant la procédure décrite dans [? ]. La figure 4.23 présente l'évolution sur un temps long de la solution analytique NLS avec une cambrure assez modérée de l'onde plane  $k_0 a = 0.10$ . Avec un facteur d'amplification théorique de 3, les effets non-linéaires à ce moment là sont attendus comme significatifs.

Plusieurs choses peuvent être observées sur cette figure

- L'évolution dans la première partie  $t \in [0; 100T_0]$  est très similaire à celle attendue : on part d'une onde plane très faiblement modulée qui s'amplifie (c'est la focalisation) avant de revenir vers une onde plane peu perturbée, *c.f.* figure 4.23.
- Au contraire de la prédiction NLS, le champ de vagues ne tend pas pour les temps ultérieurs exactement vers cette onde plane, mais un motif assez singulier se forme. Cette différence d'évolution peut être attribuée
  1. aux effets non-linéaires d'ordre supérieurs, particulièrement importants au moment de la focalisation, qui ont perturbés la solution

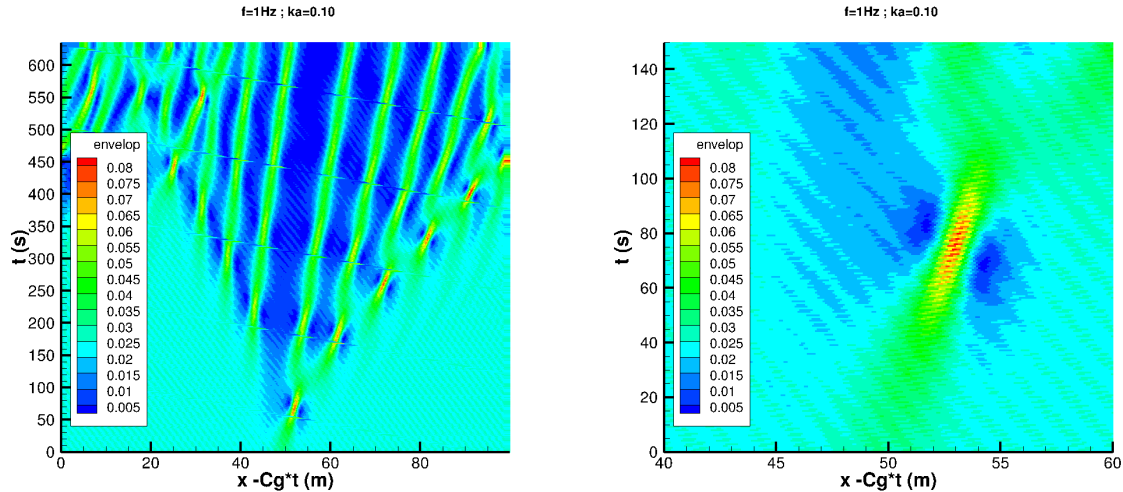


FIGURE 4.23 – Evolution longue d'un breather de Peregrine (gauche). Zoom sur les temps courts (droite).  $k_0 a = 0.10$  et  $f_0 = 1$  Hz

2. aux effets dispersifs d'ordre supérieurs qui suivent le même comportement

- Jusqu'à une durée d'environ 450s (*i.e.* 450 périodes) les effets de périodisation peuvent être négligés (ce qui est une hypothèse sous jacente à la configuration HOS-ocean utilisée, qui est bien vérifiée).
- L'évolution ne suit pas exactement la vitesse de groupe  $C_g$ . Un décalage vers les  $x - C_g t$  croissant est observé, qui est classiquement induit par la vitesse de groupe non-linéaire.

Il est donc assez clair par cette simulation, que même si l'onde plane est dans ce cas très modérément cambrée, la solution NLS n'est pas parfaitement robuste sur des temps longs de propagation. A noter que le même phénomène est observé dans une configuration de bassin de houle, comme présenté dans le paragraphe 4.3.1. Une analyse plus fine des phénomènes en jeu pourrait être intéressante, notamment vis à vis de résultats récents obtenus dans le formalisme NLS [? ]. Dans une configuration simple d'une onde plane perturbée localement, [? ] observe par solution analytique du problème, la création d'un motif assez similaire à celui observé. Des solitons sont générés dans un cône avec un angle prédéfini, dont un exemple de résultat est reproduit sur la figure 4.24.

Si cette solution analytique ne reproduit pas la partie récurrente pulsée sur la partie droite de l'évolution (qu'on pourrait assimiler à un breather de type Kuznetsov-Ma, périodique en temps), il y a assez clairement des investigations à mener en ce sens, à savoir analyser le contenu de la solution non-linéaire complète aux grands temps à l'aide des outils NLS afin de possiblement décomposer ce champ de vagues comme une superposition de solutions élémentaires (analyse type Inverse Scattering Transform - IST).

#### 4.2.4 Application aux configurations réelles

Si ces solutions analytiques peuvent être générées en bassin de houle et analysées dans un contexte non-linéaire complet, il n'en reste pas moins qu'elles sont des solutions a priori

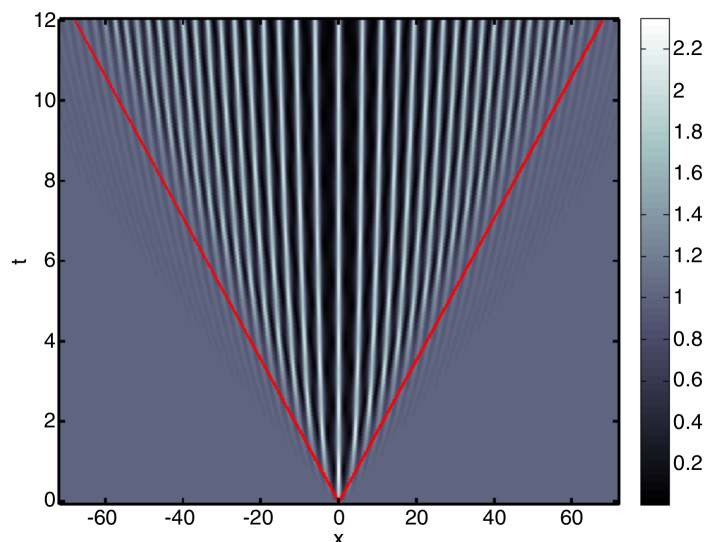


FIGURE 4.24 – Evolution théorique dans un formalisme NLS d'une onde plane perturbée localement, figure issue de [? ]

simplifiées de la configuration d'intérêt pour nous, à savoir un état de mer réel mesuré dans l'océan. L'idée est alors d'essayer d'utiliser les connaissances issues de l'étude de ces solutions analytiques pour les transposer/appliquer à des configurations plus complexes.

**Houle irrégulière et breather de Peregrine** Le premier exemple que je peux donner est celui de l'étude de la robustesse de la solution de Peregrine, lorsque celle-ci est incluse dans un champ de vagues irrégulier. Autrement dit, si on superpose à un état de mer irrégulier une solution démodulée de type Peregrine, est-ce que la focalisation non-linéaire se produit toujours ?

La configuration est donc assez simple, on se place dans une configuration de bassin de houle et on superpose deux champs de vagues : i) un état de mer irrégulier de type JONSWAP défini par  $H_s = 0.030\text{m}$ ,  $f_p = 1.7\text{Hz}$  et  $\gamma = 6$  et ii) un soliton pulsé de type Peregrine avec une fréquence centrale  $f_0 = f_p$ , une amplitude de l'onde plane de  $a = 0.0075\text{m}$  et une position de focalisation ajustée à  $x = 6\text{m}$ . On peut alors comparer les résultats des expériences réalisées dans le bassin de Hamburg (TUHH) [? ] aux résultats obtenus avec HOS-NWT. La figure 4.25 présente l'évolution temporelle de l'élévation de surface libre à différentes positions dans le bassin.

Les simulations reproduisent fidèlement les expériences et on peut conclure que la dynamique du Peregrine est très robuste vis à vis de la présence d'un champ de vagues irrégulier. La focalisation prend place comme attendu avec la formation d'un événement extrême dont on peut suivre assez aisément la dynamique. Ainsi, dans un contexte unidirectionnel réaliste d'états de mer irrégulier, il est possible que la formation des vagues extrêmes puisse être expliquée par l'apparition de ces structures cohérentes (dans ce cas, la vague la plus haute est de hauteur  $H/H_s = 2.04$  qui satisfait donc le critère de vague scélérate).

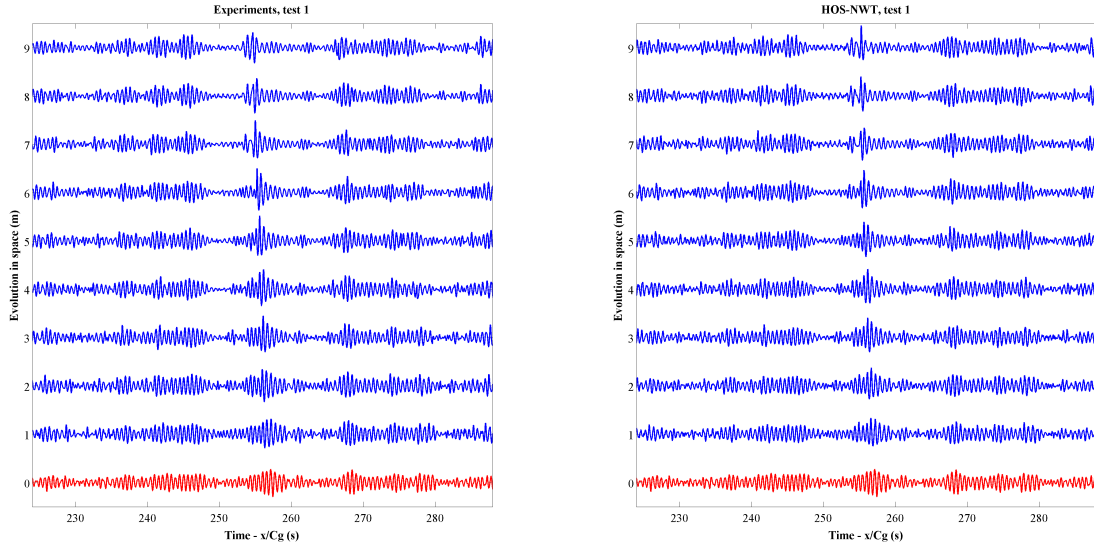


FIGURE 4.25 – Evolution d’un champ de vagues contenant un breather de Peregrine focalisant théoriquement à une distance  $x = 6m$ . Expériences (gauche) et simulations numériques (droite).

**Contenu solitonique d’un champ de vagues** Enfin, un autre aspect qui peut être analysé au regard des solutions analytiques à NLS est le contenu en solitons d’un champ de vagues, ce qui peut être compris comme le contenu en structures cohérentes (persistantes) d’un état de mer. Leur existence est a priori gouvernée par le BFI et peut être caractérisée par l’autocorrélation de l’enveloppe, qui est une mesure du groupement des vagues.

Je propose donc d’étudier l’évolution de différents états de mer uni-directionnels dans un domaine supposé infini à l’aide du modèle HOS-ocean. Les conditions initiales sont caractérisées par un spectre de type JONSWAP avec une cambrure relativement importante :  $H_s = 7m$  et  $T_p = 10s$ . Afin de varier le BFI, j’étudie différents facteurs de forme  $\gamma$  comme donné dans le tableau 4.2.

$\gamma$	1	2	3	5	10	15
<i>BFI</i>	0.35	0.46	0.59	0.72	1.02	1.22

TABLE 4.2 – BFI pour un spectre de JONSWAP avec  $H_s = 7 m$  et  $T_p = 10 s$

La figure 4.26 présente l’évolution de l’enveloppe de l’élévation de surface libre pour 3 valeurs de BFI. J’y adjoint l’autocorrélation de cette enveloppe afin de mettre en lumière l’augmentation significative de la cohérence du champ de vagues lorsque le BFI augmente.

Associé à l’existence de ces structures cohérentes, la relation de dispersion de ces états de mer est également modifiée. En effet, la théorie NLS prédit une relation de dispersion qu’on appellera solitonique différente de la relation de dispersion linéaire classiquement utilisée dans le contexte de l’océanographie. Dans le cas d’un soliton d’enveloppe, on peut comparer cette relation de dispersion issue de NLS, avec la relation de dispersion linéaire classique, comme donné sur la figure 4.27.

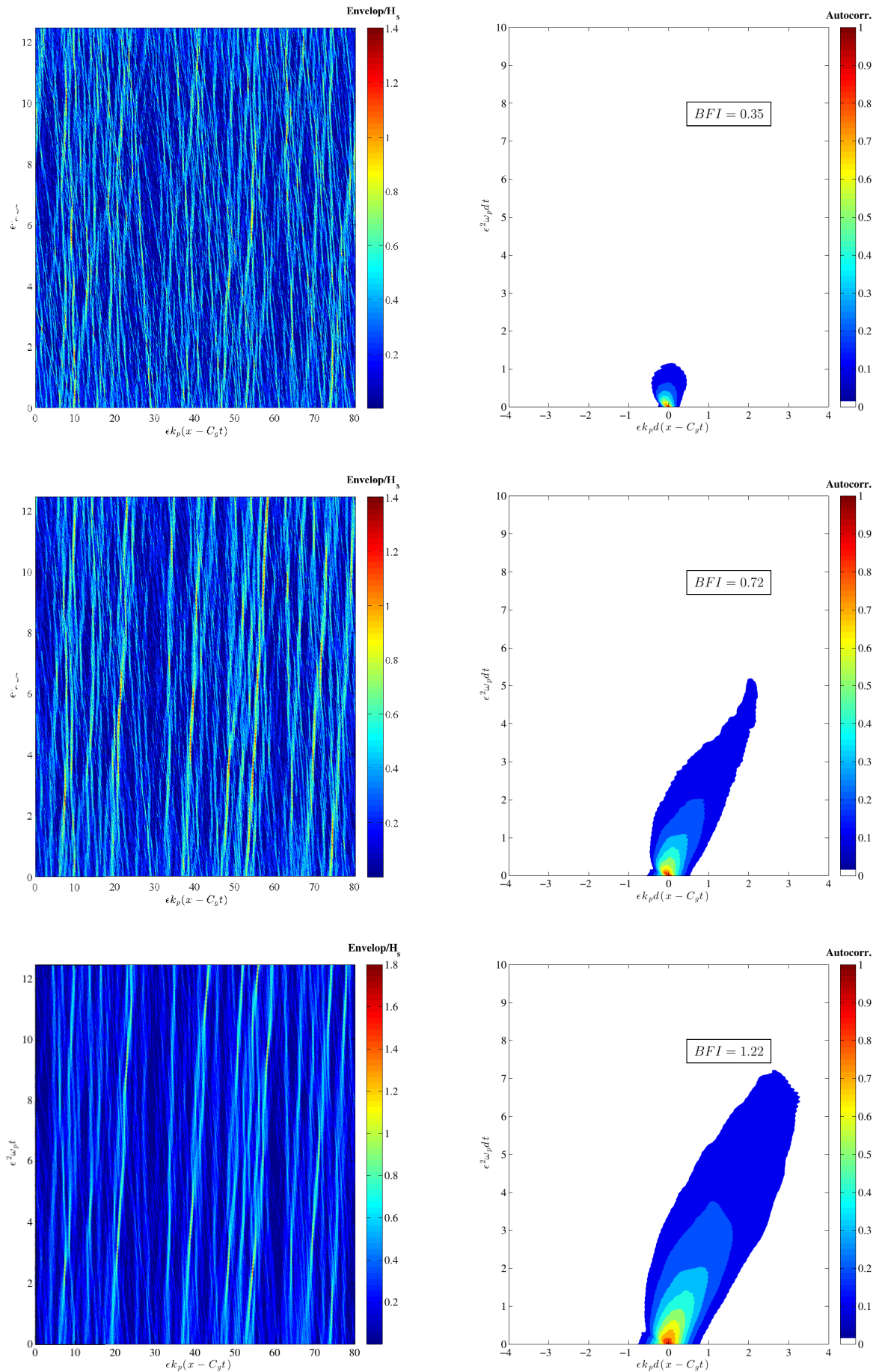


FIGURE 4.26 – Evolution spatio-temporelle de l'enveloppe de l'élévation de surface libre (gauche) et de l'autocorrélation correspondante (droite). Spectre de JONSWAP  $H_s = 7 m$ ,  $T_p = 10 s$  et différentes valeurs de  $\gamma$

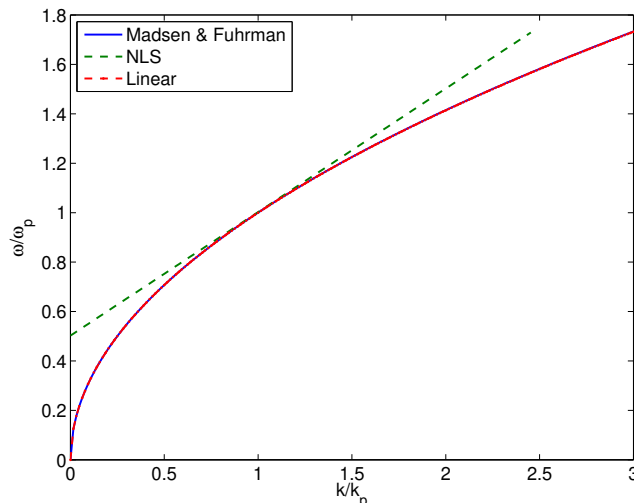


FIGURE 4.27 – Relations de dispersion linéaire, solitonique et non-linéaire pour un soliton d'enveloppe de cambrure  $k_0 a = 0.1$ .

Dans un contexte NLS, le contenu énergétique est très localisé près de  $(k_0, \omega_0)$  mais ce dernier est aligné selon la vitesse de groupe (la tangente à la courbe en ce point). A noter que la correction non-linéaire de la relation de dispersion proposée par Madsen & Fuhrman [?] ne prend pas en compte le groupement des vagues et donne donc des résultats similaires à la relation de dispersion linéaire. Les différences sont donc notables et il est attendu que la présence des structures cohérentes repérées dans la figure 4.26 se traduise par une modification de cette relation de dispersion. La figure 4.28 présente les relations de dispersion correspondant aux trois cas étudiés précédemment et confirment donc ce comportement solitonique de l'état de mer au fur et à mesure de l'augmentation du BFI.

Les données numériques sont obtenues par transformées de Fourier en espace et en temps, utilisant donc l'élévation de surface libre spatio-temporelle  $\eta(x, t)$ . On représente où est localisée l'énergie associée à chaque couple nombre d'onde/fréquence  $(k/\omega)$ . Ce niveau d'information est pratiquement impossible à obtenir à l'aide d'expériences au vu de la quantité de données nécessaires, rendant donc la simulation d'intérêt dans de telles investigations.

#### 4.2.5 Conclusion-perspectives

J'ai mené un certain nombre de travaux autour des solutions analytiques aux équations NLS avec deux objectifs principaux

- Évaluer la pertinence des solutions analytiques dans un contexte non-linéaire. L'idée est de se servir des modèles non-linéaires de propagation de vagues pour réaliser des études systématiques de l'influence des paramètres physiques sur l'évolution de ces solutions. Ces études numériques peuvent être validées et complétées par des essais en bassin de houle.

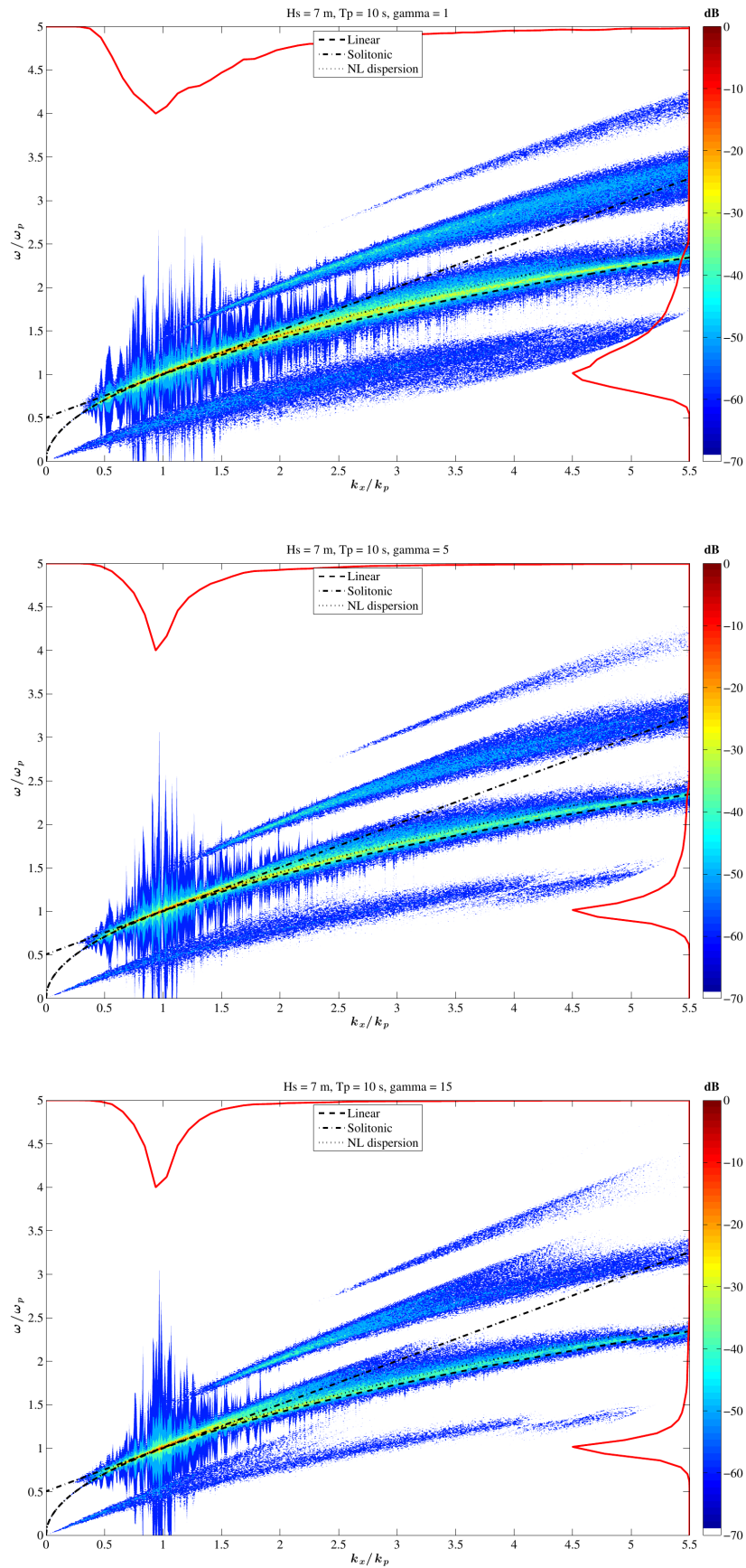


FIGURE 4.28 – Relation de dispersion pour des états de mer irréguliers. Spectre de JONSWAP  $H_s = 7\text{ m}$ ,  $T_p = 10\text{ s}$  et différentes valeurs de  $\gamma$



- Utiliser les connaissances fines de la dynamique de ces solutions analytiques pour aider à comprendre l'évolution d'un état de mer irrégulier d'intérêt.

Les études présentées couvrent aussi bien les solutions de NLS en régime focalisant que défocalisant et essaient de balayer un large panorama de solutions. Un objectif complémentaire est de monter en compétence sur ces aspects assez théoriques afin de pouvoir alimenter ma compréhension de la dynamique des vagues non-linéaires dans un cadre plus applicatif.

Un certain nombre de futurs travaux ont déjà été évoqués afin de finaliser les études présentées qui sont majoritairement encore en cours de réalisation. On peut indiquer : i) finaliser la présentation des domaines de validité des solutions analytiques , ii) analyser la dynamique des états de mer en profondeur limitée proche de  $k_0 h = 1.363$  dans un contexte complètement non-linéaire et iii) comprendre plus finement les évolutions sur le temps long de ces solutions analytiques.

De manière assez générale, je pense qu'il y a possiblement une forte valeur ajoutée d'essayer d'analyser les résultats de simulations complètement non-linéaire à l'aide des outils type Inverse Scattering Transform (IST) [? ? ] qui permettent de décomposer une solution non-linéaire en des solutions élémentaires aux équations de NLS. Cette méthode (aussi référencée comme transformée de Fourier nonlinéaire) décompose le champ analysé comme une superposition de solutions non-linéaires aux équations NLS (avec les interactions correspondantes). Une collaboration a été initiée dans le cadre du projet ANR DYSTURB sur ce point avec une équipe de l'Université de Lille travaillant sur cette thématique en optique [? ].

Ainsi, l'ensemble des travaux en formalisme NLS sont assez excitants du point de vue scientifiques car à la rencontre de différents domaines de la physique et en particulier de l'optique non-linéaire (propagation dans les fibres optiques) et de l'hydrodynamique. Des collaborations dans cette direction seraient très probablement fructueuses pour augmenter la connaissance de ces deux domaines de la physique. On peut y ajouter sans doute les autres domaines qui utilisent comme équation de base cette équation NLS, comme par exemple dans les condensats de Bose-Einstein, les plasmas, etc.

Enfin, une autre perspective qui naît naturellement de ces études et du lien que je souhaite établir avec la physique réelle est d'y inclure les effets directionnels. C'est un très grand champ de travail qui reste ouvert et qui commence tout juste à être étudié : on peut indiquer par exemple les premières observations expérimentales de structures cohérentes 'inclinées' [? ]. La première chose à étudier dans ce contexte directionnel est probablement la robustesse des solutions vis à vis de perturbations transverses, afin de quantifier leur probabilité d'existence en océan réel.

### 4.3 Bassin de houle et non-linéarités

Dans cette partie, je m'intéresse au bassin de houle expérimental ou numérique et en particulier à ses spécificités et à son utilisation pratique. Si on se replace dans le contexte de l'ingénierie océanique, le contrôle précis des conditions de houle en bassin est un point primordial. En effet, si on souhaite reproduire des conditions de vagues pour étudier par exemple l'interaction avec une structure, il est important que ces dernières soient par-

faitement maîtrisées. Il s'agit d'un challenge, en particulier lorsque la non-linéarité est importante. J'insisterai dans cette partie sur la reproduction dite déterministe d'évènements extrêmes localisés en présentant deux approches différentes. Ces études ont été menées du point de vue numérique et expérimental à l'aide de campagnes dédiées.

Du point de vue numérique, le modèle HOS-NWT a été largement validé à l'aide de différentes campagnes expérimentales réalisées dans les installations expérimentales de l'ECN. Cependant, il a également été mis en œuvre afin de préparer des campagnes expérimentales réalisées dans ces bassins. En effet, la précision du modèle permet de prévoir l'évolution du champ de vagues afin d'anticiper l'évolution de celui-ci, la présence de déferlement, etc. D'autre part, lors de l'analyse d'essais, le modèle numérique permet d'avoir accès à des informations supplémentaires de celles disponibles expérimentalement, ce qui représente un avantage certain de la modélisation numérique, en support / complément des expériences.

### 4.3.1 Reproduction déterministe de vagues extrêmes

L'enjeu des essais en bassin menés expérimentalement ou numériquement est d'être à même de contrôler exactement le champ de vagues généré à une distance donnée du batteur. On se place donc ici dans le cas où on souhaite reproduire une vague qui a par exemple été mesurée en mer et dont on ne connaît que la déformée de surface libre au cours du temps à un point fixe  $\eta(t)$ .

Cette problématique est résolue aisément dans une configuration linéaire où on peut : i) spécifier le champ de vagues cible à la position souhaitée, ii) effectuer une propagation inverse en direction du batteur avec la relation de dispersion linéaire et iii) en définir le mouvement batteur en utilisant sa fonction de transfert. La seule éventuelle problématique à gérer est la présence possible de vagues réfléchies par la plage absorbante si le bassin n'est pas suffisamment long ou si la séquence de vagues à reproduire est trop longue.

Mais dans un contexte non-linéaire, la reproduction fait face à plusieurs phénomènes qui la complexifie :

- La vitesse de chaque composante de houle est non-linéaire, ce qui induit un possible déphasage lors de la propagation inverse vers le batteur si la méthodologie précédente est utilisée. Il n'existe pas de prédiction théorique complètement non-linéaire adaptée pour corriger cette évaluation.
- Les interactions non-linéaires entre composantes lors de la propagation peuvent aboutir à des échanges d'énergie entre les composantes. Le contenu fréquentiel au niveau du batteur et à la position de la reproduction n'est donc pas forcément identique.
- La fonction de transfert linéaire du batteur, appliquée à la déformée de surface libre non-linéaire peut être une procédure déficiente dans certaines configurations.

On testera les deux procédures mises en place sur un cas très classique d'évènement extrême mesuré en mer, à savoir la vague de Draupner, aussi appelée vague du Nouvel An, mesurée sur la plate-forme Draupner en mer du Nord le 1<sup>er</sup> janvier 1995 [?]. Cette vague a été mesurée dans un état de mer de  $H_s = 11.9 \text{ m}$  et  $T_p = 14.4 \text{ s}$  dans une profondeur d'eau limitée de  $h = 70 \text{ m}$ . La hauteur maximale de la vague atteint  $H_{\max} = 25.6 \text{ m}$ , soit

un paramètre d'anormalité  $AI = H_{\max}/H_s = 2.15$ . La figure 4.29 donne l'élévation de surface libre de cet évènement sur une période de 20 min.

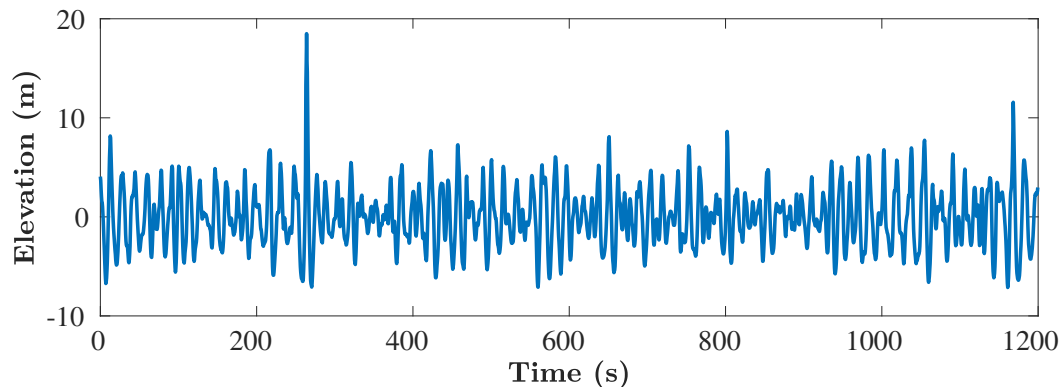


FIGURE 4.29 – Déformée de surface libre de la vague de Draupner à échelle réelle.

### Méthode itérative en houle irrégulière

La méthode que j'appelle itérative est la méthode la plus classiquement utilisée pour reproduire en bassin un évènement extrême. Elle a été mise en œuvre dans différentes installations expérimentales [? ?] avec succès. La méthodologie utilisée pour s'affranchir des difficultés mises en avant précédemment et liées au caractère non-linéaire du problème sont les suivantes

— Vitesse de phase non-linéaire :

1. on effectue une première génération dans le bassin avec la méthode linéaire décrite précédemment
2. le champ de vagues obtenu au niveau de la position visée dans le bassin est comparé au champ cible, comme représenté sur la figure 4.30.
3. Une analyse fréquentielle est réalisée afin d'extraire pour chaque composante le déphasage entre la cible et le signal obtenu, *c.f.* figure 4.31.
4. Un nouveau mouvement batteur est déduit de cette comparaison, qui prend en compte le déphasage mesuré. Il est attendu que ce processus converge vers la solution désirée, ce qui nécessite la mise en place d'un indicateur d'erreur entre les deux signaux (reproduction et cible).

— Échanges d'énergie : identiquement au point précédent, il est possible de corriger l'amplitude de chacune des composantes fréquentielle lors de chaque itération. Cet ajustement n'a pas été mis en place dans les résultats présentés dans cette partie.

L'originalité de l'approche proposée est de générer le champ de vagues irrégulier sous-jacent à l'apparition de l'évènement extrême et donc d'essayer de reproduire l'évènement extrême avec les vagues environnantes et non pas la seule vague extrême. Cette configuration est a priori un peu plus complexe que celle qui se limite un évènement très court, dans le sens où le champ de vagues irrégulier peut interagir avec les composantes fréquentielles

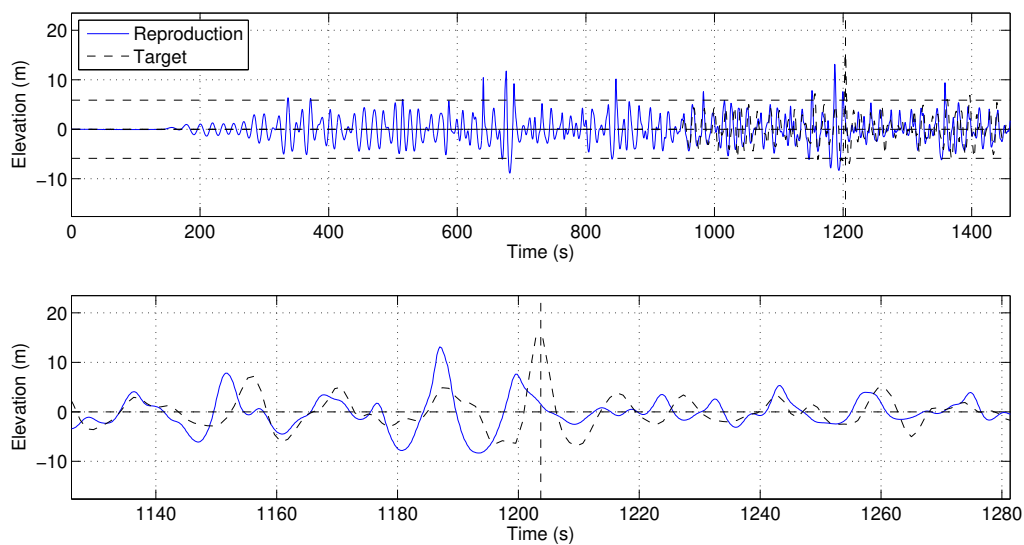


FIGURE 4.30 – Comparaison entre la vague reproduite et la vague cible en domaine temporel, sans correction. Figure issue de [? ]

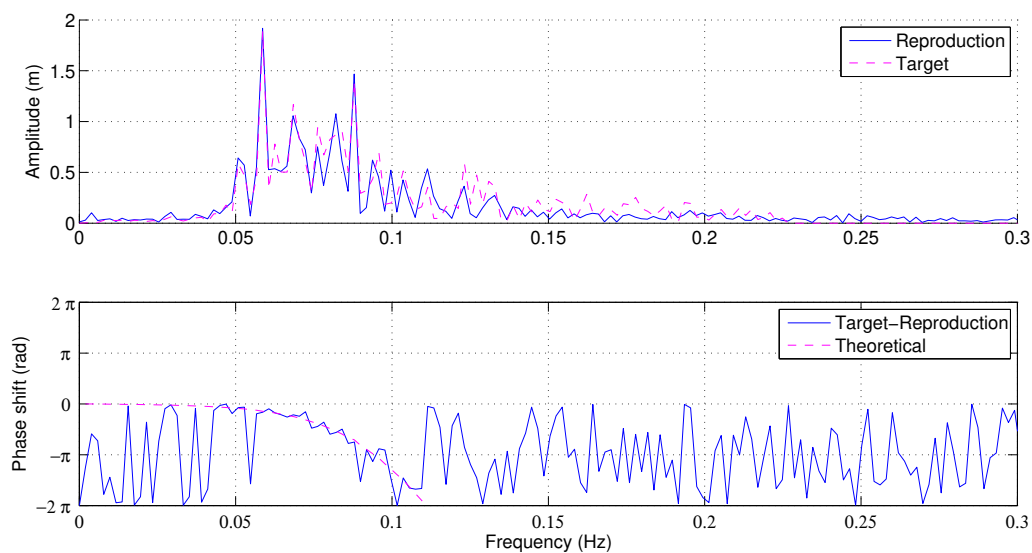


FIGURE 4.31 – Comparaison entre la vague reproduite et la vague cible en domaine fréquentiel, sans correction. Figure issue de [? ]

décrivant la vague extrême. Cependant, il peut être intéressant d'avoir une durée de signal reproduite suffisante dans certaines études d'interactions houle-structure.

Le résultat de la méthodologie itérative en champ de vagues irrégulier, appliquée au cas de la vague de Draupner est donné sur la figure 4.32. Je présente les résultats obtenus après 5 itérations dans un contexte de bassin de houle numérique résolu par HOS-NWT.

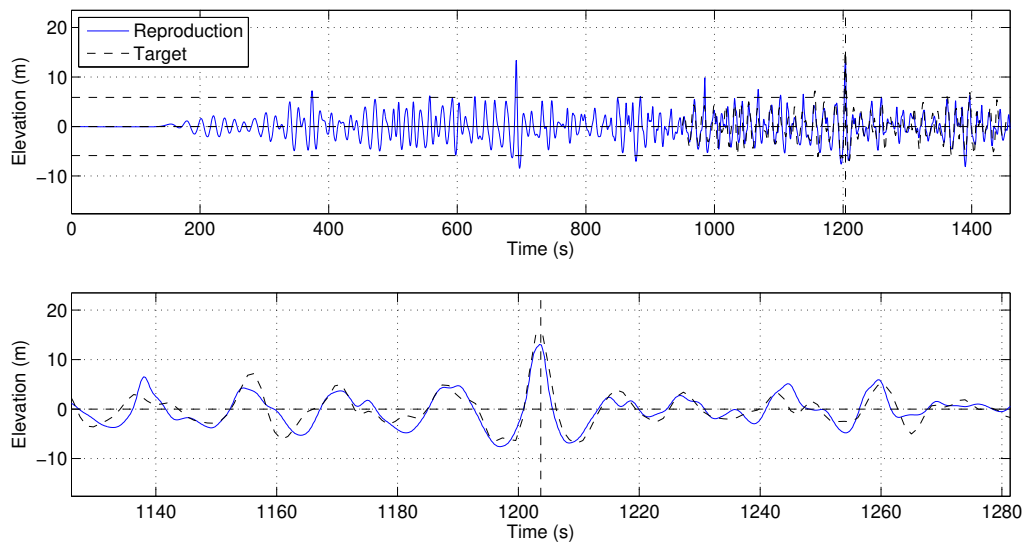


FIGURE 4.32 – Comparaison entre la vague reproduite et la vague cible en domaine temporel après 5 itérations sur les phases. Figure issue de [? ]

Si on compare ces résultats à la figure précédente sans correction 4.30, l'amélioration est très importante. On obtient donc des résultats assez probants, même si la mise en place peut être lourde d'un point de vue numérique et expérimental. En effet la méthode oblige à répéter les expériences et on observe de manière générale une convergence des résultats assez chaotique. Ces limitations m'ont amené à travailler sur une autre méthode de reproduction présentée ci-après.

### Retournement temporel

La méthode de retournement temporel que j'ai mise en place par la suite a été popularisée par Mathias Fink dans le domaine acoustique [? ]. Cette méthode peut être appliquée a priori dans toute configuration physique mettant en jeu des ondes et a été utilisée entre autres par exemple en optique [? ] où avec des ondes de surface [? ].

La méthode repose sur la réversibilité en temps du processus physique étudié et propose par une méthodologie très simple d'être à même de reproduire un signal quelconque. Le concept de ces miroirs à retournement temporel est de premièrement générer un groupe de vagues focalisé et ensuite de mesurer ce signal atténué à une position quelconque référencée comme position miroir. En utilisant la symétrie des équations d'évolution de l'onde étudiée, la génération inversée depuis cette position miroir du signal enregistré doit conduire à une refocalisation au niveau de la source initiale du signal original.

Je vais illustrer la méthode dans une configuration de bassin hydrodynamique, où la configuration est un peu spécifique par rapport aux études initiales en acoustique par exemple. Le retournement temporel permet par une approche en deux étapes, d'a priori reproduire une déformée de surface libre quelconque. Cette méthodologie, mise en place en bassin de houle dans [? ?], sera illustré avec des solitons pulsés de type Peregrine, simulés avec HOS-NWT, avant de donner les résultats obtenus expérimentalement pour la vague de Draupner.

Avant de s'intéresser à une configuration réelle telle que la vague de Draupner, j'ai donc travaillé à l'étude de la méthode du retournement temporel pour la reproduction d'un champ de vagues défini comme solution analytique à NLS tel qu'utilisée précédemment (paragraphe 4.2), à savoir en particulier celle du soliton pulsé de Peregrine. On sait que les équations régissant cette solution (les équations NLS) sont symétriques en temps et donc on espère pouvoir appliquer la méthode à ces structures de forme assez simple.

La méthode de retournement temporel, appliquée au cas du bassin de houle, commence donc premièrement par la génération par le batteur de la vague extrême étudiée. La figure 4.33 présente pour le cas du breather de Peregrine le résultat de cette évolution, calculée par HOS-NWT. On représente l'enveloppe du signal, comparé à l'évolution analytique de cette solution. On observe dans cette configuration de bassin de houle, un comportement très similaire à l'évolution longue durée du Peregrine en HOS-ocean présenté sur la figure 4.23, à savoir une démodulation de l'évènement extrême, puis la création d'un champ de vagues complexe composé de plusieurs structures cohérentes (et donc assez différent de la solution NLS qui est une simple onde plane).

La seconde étape consiste alors à mesurer les vagues démodulées à une certaine distance du batteur (la position du miroir dans la méthode originelle, représenté par une ligne pointillée dans la figure 4.34). Dans le cas d'un bassin de vagues, on ne peut pas réémettre (en inversant le temps) ce profil de vagues directement à la position de la mesure. Cependant, il est possible de générer ce profil dans un second essai, toujours par le batteur utilisé lors de la première génération. Ainsi, on s'attend à une refocalisation à la position de la première mesure du champ de vagues cible. La figure 4.34 présente les deux étapes successives de la méthode du retournement temporel dans le cas du breather de Peregrine.

On observe très clairement la refocalisation lors de la deuxième génération. Dans cette configuration et à l'aide de nombreuses simulations numériques, j'ai qualifié en détails dans [?] la précision de cette méthode du retournement temporel vis à vis des deux paramètres principaux : i) la non-linéarité du champ de vagues et ii) la distance de propagation.

J'ai ensuite, du point de vue expérimental, appliqué la méthode de retournement temporel à la vague de Draupner [?]. J'ai mis en place et réalisé une campagne expérimentale dans le bassin de traction de l'ECN à cet effet. Les résultats sont très satisfaisants et je présente dans la figure 4.35 la comparaison entre le profil de la vague de Draupner cible et le résultat de cette méthode de reproduction pour une distance au batteur fixée à  $k_p x_M = 26$ .

Les résultats obtenus à l'aide de cette méthode sont très bons, et au moins aussi précis que ceux obtenus avec la méthode itérative précédente. L'avantage principal par rapport à cette autre méthode de reconstruction est sa très grande simplicité de mise en œuvre.

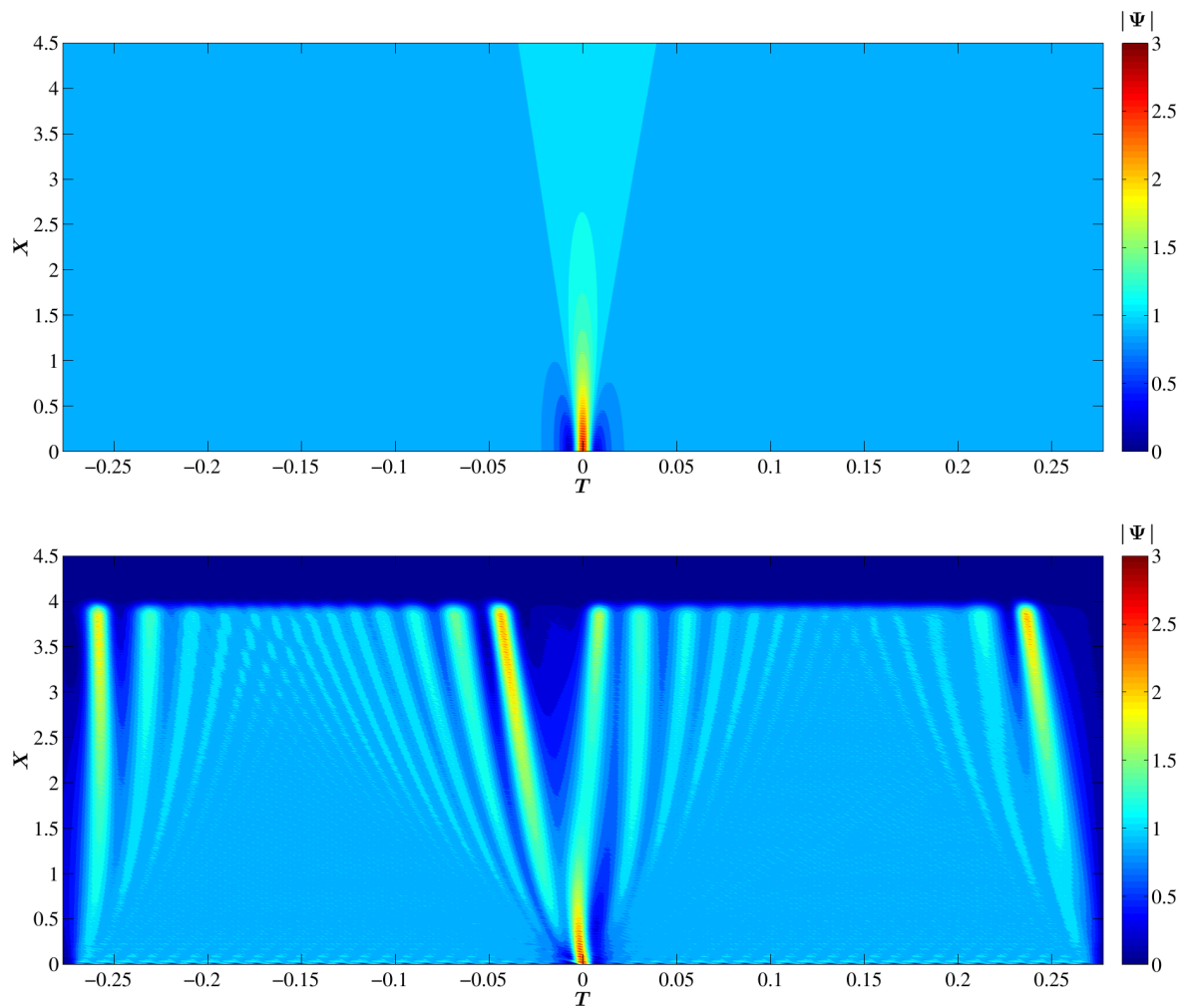


FIGURE 4.33 – Propagation du soliton pulsé de Peregrine ( $k_0a = 0.09$ ) dans un bassin de houle. Représentation spatio-temporelle de l'évolution de l'enveloppe en variables NLS comparaison entre la solution analytique (haut) et la solution numérique de HOS-NWT (bas). Figure issue de [? ]

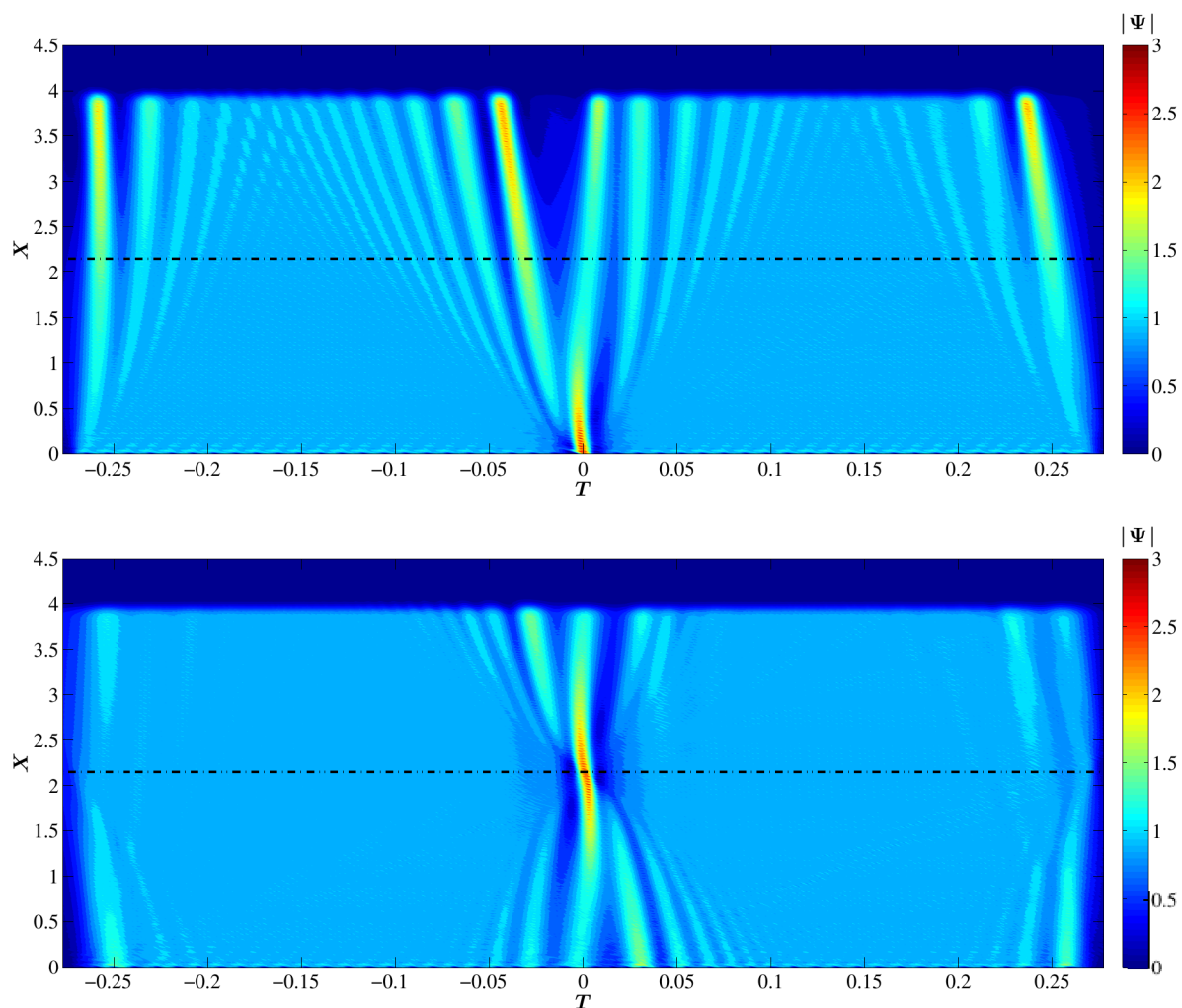


FIGURE 4.34 – Evolution spatio-temporelle du soliton pulsé de Peregrine  $k_0 a = 0.09$  et une position du miroir  $k_0 x_M = 270$  (ligne pointillée). Première propagation/démodulation (haut) et Deuxième génération/refocalisation (bas). Figure issue de [? ]

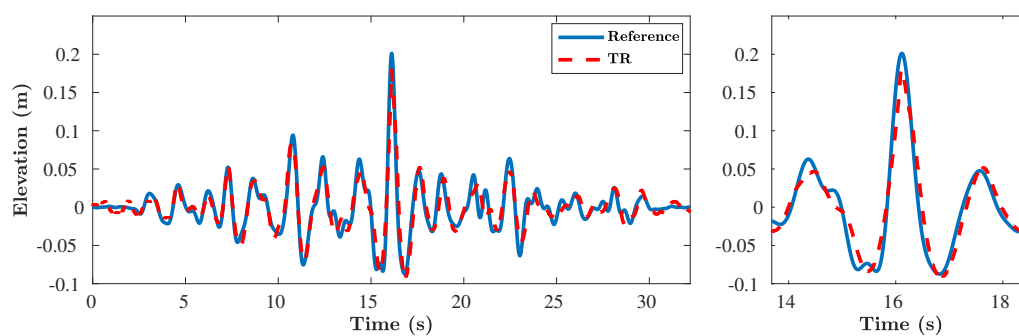


FIGURE 4.35 – Comparaison entre le profil de la vague de Draupner prise comme référence et le résultat de la méthode de retournement temporel. Reproduction sur une sonde située à  $k_p x_M = 26$  du batteur. Figure issue de [? ]



En effet, la méthode du retournement temporel ne nécessite que de deux expériences afin d'obtenir un profil de surface libre en très bon accord avec la référence visée.

La méthode s'est montrée robuste dans son application expérimentale et a priori adaptée à tout type de profil de vagues. La seule éventuelle limitation de la méthode est la présence de déferlement dans l'une ou l'autre des étapes de génération. Cependant, si celui est modéré, la méthode reste robuste [? ]. Il s'agit donc a priori de la méthode que je privilégierai dans le futur pour la reproduction déterministe.

### 4.3.2 HOS-NWT comme outil de préparation et d'analyse d'essais en bassin

Avoir à disposition un modèle non-linéaire précis et efficace des bassins de houle expérimentaux dont on dispose à l'ECN est très intéressant. La complémentarité des approches numériques et expérimentales est assez évidente dans mon travail de recherche autour des ondes de gravité. Dans ce contexte, j'aborderai deux points pour lesquels le modèle numérique HOS-NWT est mis en œuvre avec les campagnes expérimentales pour les compléter : i) lors de leur préparation et ii) lors de leur analyse.

#### Préparation d'essais

En amont de la réalisation d'expériences en bassin de houle, que ce soit pour l'étude des vagues seules, où pour un essai d'interaction avec une structure quelconque, le contrôle des conditions expérimentales est essentiel. En effet, on suppose dans la majorité des cas que le champ de vagues est parfaitement contrôlé en toute position du bassin.

Or, comme on l'a vu précédemment dans la section 4.1.2, ce contrôle dans des conditions non-linéaires n'est pas aussi simple qu'il n'y paraît. De ce fait, le modèle HOS-NWT peut être utilisé avant la réalisation d'essais afin de connaître dans une configuration donnée le champ de vagues que l'on aura exactement dans le bassin et possiblement l'adapter aux exigences. Je donne quelques exemples :

- L'évolution spatiale induite par le forçage par le batteur à l'aide d'une solution instable physiquement en environnement de bassin de houle (section 4.1.2) peut être analysée en amont des essais et amener à éventuellement revoir les états de mer testés. Une procédure d'ajustement n'a pas été mise en place pour l'instant mais pourrait être développée dans le futur.
- Lors de la génération d'états de mer sévères, se pose la question de la présence de déferlement. Grâce à la mise en place d'un critère robuste pour le détecter, on peut dorénavant savoir si une séquence donnée va déferler et prédire le lieu et le temps de ce déferlement. On peut ainsi, soit choisir un tirage de phase de telle manière que l'on n'ait pas de déferlement, ou au contraire s'assurer que le déferlement a lieu à une position prédéfinie.
- Dans le cadre du projet ANR DYSTURB, on a étudié le comportement de solutions analytiques de NLS dans différentes configurations. Il était très important de choisir les paramètres des essais de telle manière que i) la propagation se fasse sur une longueur non-linéaire suffisamment longue et ii) que les effets non-linéaires d'ordre supérieurs ne soit pas trop importants (et donc que l'évolution soit assez proche

d'une évolution NLS). Afin de parvenir à un choix optimal, des simulations ont été réalisées en changeant la cambrure de l'état de mer, la fréquence centrale, etc. Cette étude préliminaire a permis de limiter la phase de mise en place lors de la campagne expérimentale.

- Lors de la génération de houle régulière en bassin (en particulier lorsque les distances de propagation sont longues comme dans le bassin de traction), on peut avoir un effet de type 'dam-break' au niveau du front de vagues qui a pour conséquence une modulation du champ de vagues loin du batteur. On observe cet effet sur la figure 4.34 dans le front de vagues qui est modulé avec une modulation qui a une durée de plus en plus importante. On peut alors chercher, à l'aide de simulations, à savoir si ce phénomène a lieu dans la configuration étudiée et/ou chercher à le contrôler, en utilisant par exemple le retournement temporel.
- La reproduction déterministe de vagues, que ce soit à l'aide de la méthode itérative ou de la méthode de retournement temporel peut être testée et mise en place avant la réalisation des essais. De ce fait, il est a priori possible durant les expériences de ne réaliser qu'un seul essai dont le mouvement batteur idéal a été déterminé par des simulations.

### Analyse d'essais

La modélisation numérique a l'avantage, par rapport aux essais expérimentaux, de la facilité d'accès à l'ensemble des informations du champ de vagues, partout dans le bassin. Si dans un essai en bassin, il est nécessaire d'avoir un capteur à chaque position d'intérêt et donc en général un nombre limité de ces capteurs à disposition, la simulation numérique peut quant à elle fournir autant d'informations que voulues.

Ainsi, dans certaines configurations, la simulation numérique peut apporter un complément d'informations aux données expérimentales afin d'améliorer la compréhension des phénomènes physiques en jeu. J'indique ici quelques exemples qui mettent en avant la possible utilisation complémentaire des données numériques et expérimentales.

- Dans le cadre de l'ANR TURBULON, une étude expérimentale a été menée sur les interactions à 4 vagues [? ]. Les expériences menées en bassin de houle étudiaient, grâce à la génération d'une houle bichromatique (ondes mères 1 et 3 de fréquences  $f_1$  et  $f_3$  respectivement), les interactions résonantes de vagues avec la naissance d'une onde fille à la fréquence  $2f_1 - f_3$ . Les deux ondes mères sont générées avec un angle  $\theta = \theta_3 - \theta_1 = 25$  deg, et l'onde fille est supposée théoriquement avoir un angle  $\theta_4 = -23.1$  deg, voir figure 4.36.

Comme on le voit, le dispositif expérimental contient une série de sondes alignées avec l'angle théorique de l'onde fille, ce qui a permis d'étudier la croissance au cours de son apparition. En complément, des simulations numériques peuvent être menées dans cette configuration tri-dimensionnelles. Par exemple, la figure 4.37 présente une vue spatiale sur tout le bassin de l'amplitude de chacune des composantes fréquentielles d'intérêt : à savoir les ondes mères 1 et 3 ainsi que l'onde fille 4 mais également l'onde fille 5 ( $f_5 = 3f_1 - 2f_3$ ) issue de l'interaction résonante de l'onde fille 4 avec les ondes 1 et 3.

On peut observer beaucoup plus précisément qu'en expérimental les interactions résonantes et les transferts d'énergie résultants dans la configuration testée. On

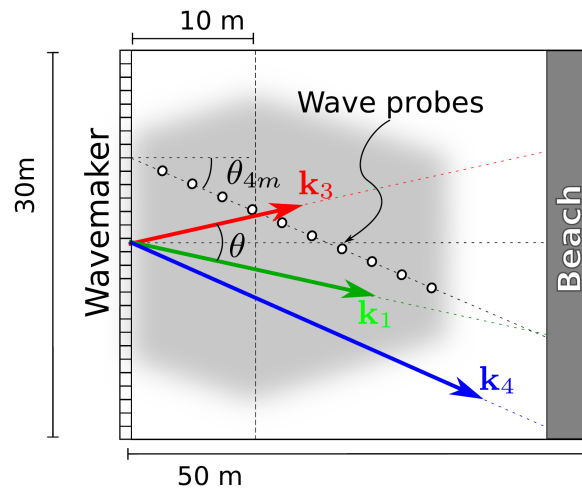


FIGURE 4.36 – Configuration expérimentale de l'étude des interactions résonantes, figure issue de [? ]

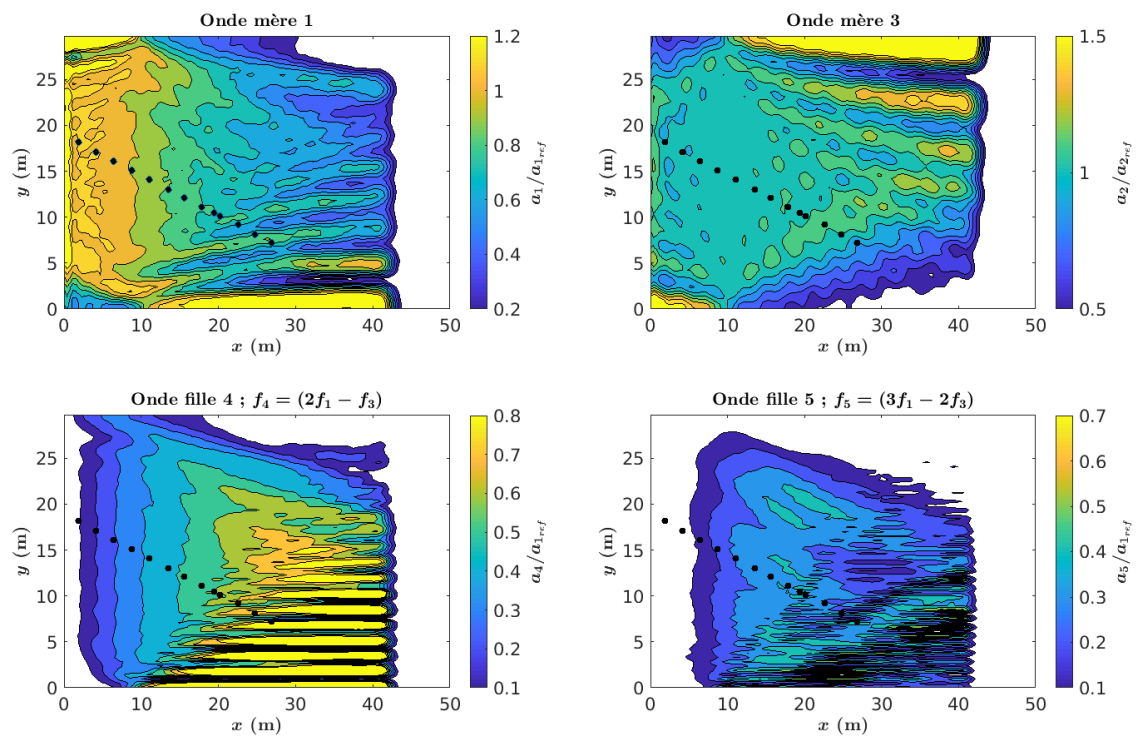


FIGURE 4.37 – Evolution spatiale de l'amplitude des différentes composantes fréquentielles dans l'ensemble du bassin : ondes mère à  $f_1$  et  $f_3$  et ondes fille à  $f_4 = 2f_1 - f_3$  et  $f_5 = 3f_1 - 2f_3$ .

peut en déduire l'évolution spatiale au cours de la propagation de chacune des 2 ondes filles isolées et la comparer par exemple à l'amplitude de l'onde mère 1, qui transfère principalement son énergie (voir figure 4.38).

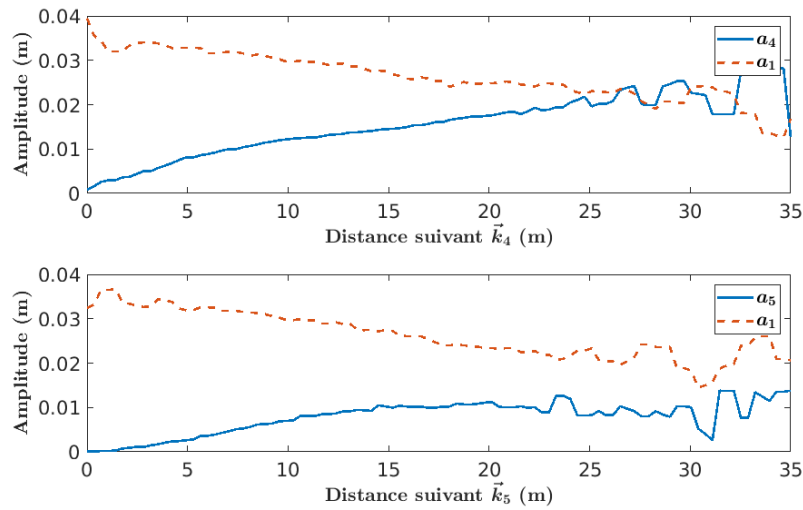


FIGURE 4.38 – Évolution spatiale de l'amplitude des différentes composantes dans leur direction de propagation.

- Dans le cadre de l'ANR DYSTURB, des essais expérimentaux ont été menés pour étudier différents états de mer, avec comme possible objectif d'identifier des structures cohérentes de type solitons pulsés de Peregrine dans les données expérimentales. Afin d'identifier ces structures sur les signaux expérimentaux, des procédures d'identification de forme de surface libre ont été mises en place. La figure 4.39 présente un exemple des différents signaux à analyser, correspondant à des sondes réparties dans le bassin sur une distance de 120  $m$ .

Une alternative que permettent les simulations est d'accéder à une représentation plus fine en espace/temps de la dynamique du champ de vagues. Cela peut s'avérer nécessaire et utile pour étudier les phénomènes à dynamique assez rapide (spatialement et/ou temporellement), comme les breathers de Peregrine. D'autre part, comme on l'a vu précédemment, en contexte non-linéaire, les structures cohérentes de Peregrine se trouvent inclinées (dans une représentation  $(x - C_g t)$  par rapport à la théorie (cf. figures 4.23). Il en résulte que l'information expérimentale (un signal temporel à  $x$  fixé ne permet sans doute pas d'identifier la structure exacte du soliton pulsé (enveloppe tendant à zéro autour de l'évènement extrême). Dans la configuration précédente, les simulations HOS-NWT nous donnent par exemple accès à la figure 4.40 qui donne un zoom sur une structure de type Peregrine identifiée et parfaitement repérée à l'aide de cet outil. La structure est inclinée et son identification exacte du point de vue expérimental nécessiterait un réseau de sondes très rapprochées (alors qu'elle sont espacées de 6  $m$  dans les expériences correspondantes).

- Les bassins d'essais ont toujours une limitation physique associée à leur taille. Du

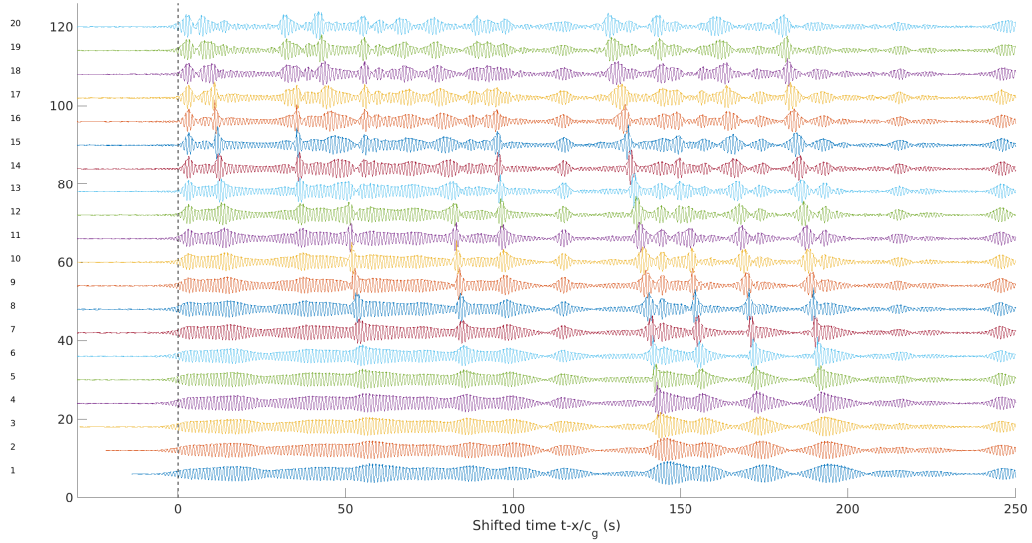


FIGURE 4.39 – Evolution temporelle d'un champ de vagues mesuré à différentes position dans le bassin. Spectre étroit et assez cambré :  $BFI = 2.72$

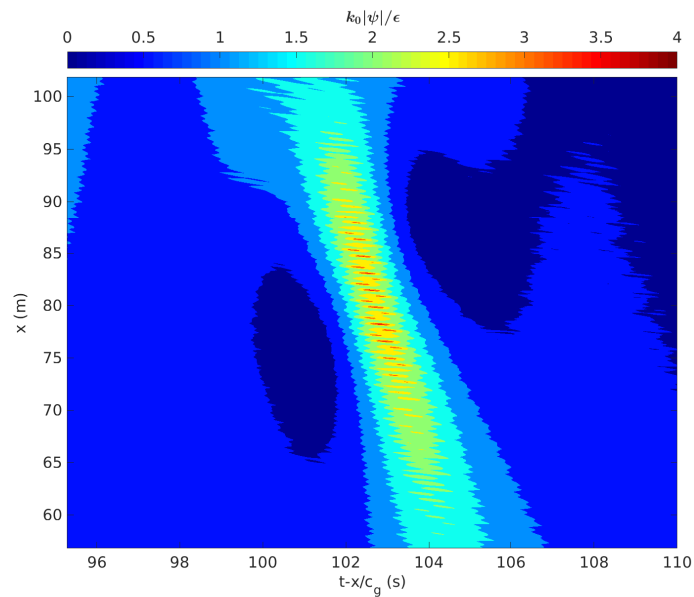


FIGURE 4.40 – Zoom sur une structure de type Peregrine identifiée dans les simulations HOS-NWT correspondant au cas expérimental de la figure 4.39

point de vue numérique, il est aisé d'allonger le bassin afin d'étudier le comportement du champ de vagues testé sur une plus grande distance de propagation. Si des procédures expérimentales d'allongement artificiel de bassin existent (par ex. utilisées dans [? ]), la méthode numérique peut aider à valider la procédure et s'assurer de la pertinence de l'allongement de celui-ci.

### 4.3.3 Conclusion-perspectives

Dans cette partie, j'ai essayé de mettre en lumière l'intérêt plus pratique de mon travail sur la physique non-linéaire des états de mer avec des applications à la génération de houle en bassin. En effet, il apparaît essentiel d'avoir une connaissance fine de la physique pour être à même de contrôler précisément les conditions de vagues qu'on a dans des installations expérimentales en hydrodynamiques tel que celles dont on dispose à l'ECN.

L'axe de recherche autour de la reproduction déterministe des séquences de vagues est en ce sens un point central pour de nombreux cas d'application en ingénierie océanique. Il s'agit par conséquent d'un axe important à poursuivre dans le futur. J'ai à disposition au jour d'aujourd'hui deux méthodes qui permettent a priori de reproduire précisément des champs de vagues de courte durée qui comportent potentiellement des vagues extrêmes. La méthode par retournement temporelle est a priori la plus adaptée à notre problématique.

Les limitations actuelles relèvent du caractère non-déferlant des séquences de vagues testées jusqu'à présent mais également du caractère uniquement déterministe de l'approche. Les perspectives identifiées sont donc

1. d'étendre et valider ces méthodes de reproduction déterministes à des états de mer déferlants.
2. d'utiliser ces méthodes pour reproduire d'un point de vue statistique un état de mer irrégulier. Est-il possible, du point de vue de densité de probabilité par exemple, de s'assurer du contrôle parfait dans un essai en bassin afin d'être représentatif avec les conditions visées.

Ce sont deux objectifs essentiels sur lesquels je vais donc travailler dans un futur proche (dont le financement était initialement assuré par le projet NExT WASANO, arrêté fin 2019).

Enfin, j'ai présenté un certain nombre d'applications où j'ai pu utiliser la complémentarité expérimental/numérique avec donc une mise en avant de l'intérêt d'avoir à disposition un modèle non-linéaire de propagation de vagues reproduisant fidèlement nos installations expérimentales. Que ce soit pour la préparation d'essais ou l'aide à l'analyse des données, c'est un point que je souhaite poursuivre, en particulier en lien fort avec les activités expérimentales développées par F. Bonnefoy (ANRs TURBULON et DYSTURB et collaborations correspondantes).

Associé à ces axes qui vont mettre à profit l'outil numérique dont on dispose, une thématique intéressante que je souhaiterais développer est celle de la mise en place d'une méthode expérimentale pour la mesure spatio-temporelle de la surface libre dans un bassin océanique de grande dimension. Il s'agit au jour d'aujourd'hui, comme on l'a évoqué précédemment, d'une limitation des expériences dans ce type d'installations. Les quelques essais fait à l'ECN de systèmes type stéréo-vidéo qui sont classiquement utilisés en mer

pour faire de tels mesures [?] se sont révélés assez complexes dans un environnement de laboratoire. Je pense que le développement de telles mesures apporterait une réelle plus value aux différents essais pouvant être menés dans le laboratoire et pourraient être très utile dans de nombreux pans de la recherche associée aux vagues non-linéaires.

# Chapitre 5

## Perspectives

Dans les chapitres précédents, j'ai identifié de nombreuses perspectives possibles à mon travail de recherche mené depuis le début de ma carrière. Dans chaque thématique on y trouvera des pistes pour des développements à venir. Malheureusement, il sera impossible de mener de front (ou tout du moins dans une échéance de temps raisonnable) l'ensemble de ces sujets d'intérêt : la recherche est ainsi faite ! Je me focaliserai donc dans ce chapitre final sur les directions principales selon lesquelles je souhaite orienter mes futurs travaux de recherche.

En ce qui concerne le développements de modèles et méthodes numériques pour la propagation non-linéaire d'états de mer, un panel d'ores et déjà large de configurations et phénomènes physiques sont inclus dans les codes HOS existants. Cependant, un certain nombre de points nécessitent de poursuivre les développements afin d'améliorer les capacités de la méthode. En ce sens, de mon point de vue, on ne peut pas distinguer la modélisation numérique de l'étude physique du phénomène : les deux approches sont parfaitement complémentaires.

Ainsi, le challenge principal qui reste à relever pour les modèles potentiels non-linéaires de propagation de houle est celui de la modélisation précise du déferlement, et notamment pour des états de mer directionnels. Il y a pour moi deux étapes principales. La première est, dans une configuration uni-directionnelle, d'être capable de représenter correctement les statistiques associées aux vagues dans des états de mer déferlants. Au mieux, les études et modèles actuels regardent la hauteur significative du champ de vagues. Il est attendu que des difficultés importantes apparaissent lorsqu'on va chercher à représenter les événements extrêmes, dans ces états de mer déferlants (*i.e.* la queue des distributions). Il s'agit d'un des objectifs de la thèse de Maxime Canard, qui débutera à l'automne 2020. Ce travail va combiner des essais en bassin (afin d'être à même de caractériser finement l'évolution des statistiques dans un état de mer déferlant) et des simulations numériques. La robustesse et la précision des modèles de déferlement seront clés.

Ensuite, la deuxième étape est de chercher à modéliser précisément le déferlement dans une configuration directionnelle. Le développement de tels modèles doit s'appuyer sur des données expérimentales qui ne sont à ma connaissance pas disponible à l'heure actuelle. Cela pourrait donc constituer une action de recherche avec potentiellement un très fort impact sur la communauté (tant du point de vue expérimental que numérique). Cependant, ce n'est a priori pas une tâche facile, notamment du point de vue des expériences



qui vont nécessiter peut-être le développement de nouveaux outils de mesure (par exemple stéréo-vidéo). Le résultat final envisagé d'un modèle de déferlement robuste et validé sur l'ensemble des propriétés statistiques d'un état de mer directionnel sera de mon point de vue une avancée fondamentale du domaine de l'océanographie physique au sens large.

Cet axe de recherche s'entend comme première étape dans une configuration simple de vagues se propageant en grande profondeur dans un milieu océanique contrôlé (sans vent ou courant). Cela doit nous permettre dans le contexte du génie océanique de contrôler plus précisément les conditions environnementales lorsque l'on souhaite faire par exemple de l'interaction avec une structure. Ce travail pourra ensuite être poursuivi pour prendre en compte une physique plus complexe : présence de bathymétrie variable, de courant ou de vent.

Du point de vue du pur développement numérique de code de calcul et des possibilités en terme d'applications au génie océanique, des actions sont prévues à courte échéance. L'objectif que l'on se fixe est de réussir à mettre à disposition de la communauté un outil, intitulé *CN-Wave*, qui englobe l'ensemble des briques utilisées au jour d'aujourd'hui pour décrire un champ de vagues dans une configuration donnée. Ce travail a été initié en collaboration avec Benjamin Bouscasse, chercheur au LHEEA et sera je l'espère finalisé à assez court terme. Un des buts principaux est de permettre une diffusion large de l'expertise de l'ECN sur la modélisation de houle en simplifiant l'accès et l'utilisation de ceux-ci.

Dans cet optique de diffusion, j'y adjoins la méthodologie de décomposition fonctionnelle pour la résolution des interactions houle-structure. Si on souhaite une utilisation plus large de cette approche dans le domaine du génie océanique au sens large, il faut que les outils et méthodes soient disponibles et facilement exploitable. Si on prend cet exemple, comme représentatif d'un besoin de modélisation d'un champ de vagues, à l'heure actuelle les étapes sont : i) définition du cas de houle et des paramètres numériques nécessaires à sa modélisation, ii) Simulation HOS-ocean ou HOS-NWT et iii) calcul des informations volumiques associées au champ de vagues (Grid2Grid). A noter que le développement de la librairie Grid2Grid a déjà simplifié largement la procédure, mais on peut sans doute aller plus loin.

Pour résumer, le package *CN-Wave* doit permettre d'avoir un seul outil de référence pour la modélisation de houle, qui englobe donc l'ensemble des outils de modélisations développés au LHEEA. Il devra également inclure l'ensemble des procédures classiquement utilisées en combinaison avec ceux-ci pour résoudre des problématiques classiques : procédure de couplage (Grid2Grid), reconstruction de vagues en bassin (retournement temporel), détection de déferlement, etc. La figure 5.1 entend présenter schématiquement une architecture globale de ce futur package.

Ce package pourrait également être intéressant comme environnement de développement privilégié des nouveaux phénomènes physiques ou des nouvelles stratégies de modélisation des états de mer. L'avantage de disposer d'un environnement unifié et si possible assez mature pour permettre une mise à disposition simple ainsi qu'une intégration facilitée des nouveaux développements. A noter qu'une partie du 'package' ne relève pas des activités d'un laboratoire de recherche et pourrait faire partie d'une étape plus d'industrialisation où on pourrait par exemple bénéficier des compétences de la spin-off du laboratoire NextFlow Software dans ce domaine.

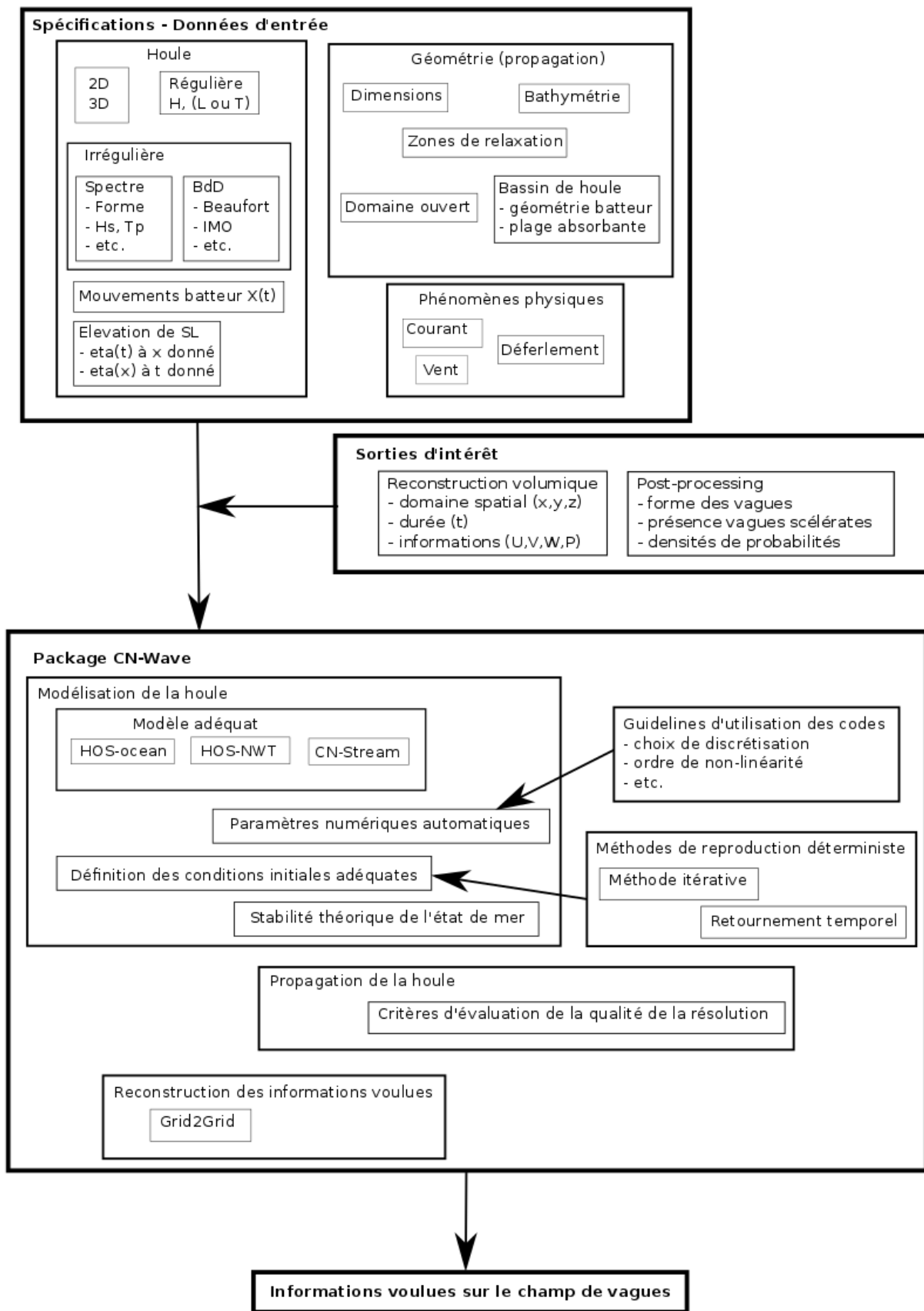


FIGURE 5.1 – Schéma de principe du package CN-Wave

Si l'application principale visée pour cet outil est la définition des conditions de houle pour l'interaction avec une structure, il pourra également être mis en œuvre dans les autres utilisations faites des modèles HOS : la préparation d'essais en bassin, l'obtention d'informations sur un champ de vagues donné, comme la présence de déferlement par exemple, etc.

Enfin, un axe de recherche que je souhaite continuer dans le futur et si possible renforcer est celui des études plus fondamentales associées à la propagation des ondes de gravité. Au travers des projets de recherche ANR Turbulon et Dysturb (portés localement par Félicien Bonnefoy), de nombreuses opportunités et nouveaux sujets de recherche ont émergés dans cette thématique sur une base principalement expérimentale utilisant les installations hydrodynamiques de l'ECN.

Il s'agit pour moi d'une opportunité scientifique de premier plan de participer à ces recherches qui permettent d'aborder des problématiques pointues avec différents points de vues. Les domaines de la physique sont diversifiés, mais les objets et leur modélisation mathématique sont très proches de l'hydrodynamique à surface libre des ondes de gravité. J'ai donc un fort intérêt à poursuivre les recherches dans ce contexte pluri-disciplinaire.

Je peux donner comme exemple l'étude de gaz de solitons qui est un domaine émergent, aussi bien en optique qu'en hydrodynamique. Les premières observations viennent tout juste d'être possible dans ces deux domaines et représentent un champ d'investigation très large. Ces solutions analytiques des équations de NLS permettraient de représenter l'état stationnaire d'un champ de vagues uni-directionnel soumis à de l'instabilité modulationnelle. Si les premiers travaux qu'on a pu mener sur ce thème dans le cadre du projet DYSTURB sont d'ores et déjà novateurs, l'extension possible de ceux-ci vers une configuration plus réaliste de champs de vagues directionnels pourrait permettre d'augmenter nos connaissances de la physique des états de mer et avoir donc un impact significatif dans notre domaine du génie océanique.

Ces études fondamentales utilisent en premier lieu des données expérimentales. En ce sens, cette ouverture de mes activités se rapproche d'une autre volonté de ma part. En effet, comme je l'ai fait sur la période la plus récente, je pense essayer de m'orienter vers une méthodologie de recherche qui associe de façon plus systématique les approches numériques et expérimentales. La complémentarité des deux est évidente comme j'ai pu le démontrer dans le chapitre 4. Cette possibilité offerte dans mon environnement de recherche journalier est une caractéristique assez unique du LHEEA, que j'espère donc exploiter au mieux dans mes travaux futurs.

# Annexe A

## Publications associées

### A.1 Thèse de doctorat

**Guillaume Ducrozet**, Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale, Thèse de doctorat de l'École Centrale de Nantes et de l'Université de Nantes, Novembre 2007.

Thèse dirigée par Alain H. Clément et co-encadrée par Pierre Ferrant, présentée et soutenue publiquement le 09 novembre 2007, devant le jury suivant :

Président du Jury et rapporteur :	M. Olivier THUAL	Professeur, Institut National Polytechnique de Toulouse
Rapporteur :	M. Bernard MOLIN	Professeur associé (HDR), École Centrale Marseille
Examineurs :	M. Carlos GUEDES SOARES M. René HUIJSMANS M. Pierre FERRANT M. Alain H. CLEMENT	Professeur, Technical University of Lisbon (Portugal) Technical University of Delft (Pays-Bas) Maître de Conférences (HDR), École Centrale Nantes Ingénieur de Recherche (HDR), École Centrale Nantes

### A.2 Ouvrage de synthèse internationale

Bonnefoy, F., **Ducrozet, G.**, Le Touzé, D., Ferrant, P. : Time-domain simulation of nonlinear water waves using spectral methods. In *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*, Vol. 11, *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. World Scientific, 2009, 129–164, doi: 10.1142/9789812836502\_0004.

### A.3 Journaux nationaux et internationaux avec comité de lecture

1. N. Desmars, F. Bonnefoy, S.T. Grilli, **G. Ducrozet**, Y. Perignon, C.-A. Guerin, P. Ferrant. Experimental and numerical assessment of deterministic nonlinear ocean waves prediction algorithms using non-uniformly sampled wave gauges. *Ocean En-*

gineering (acceptée 06/2020).

2. F. Bonnefoy, A. Tikan, F. Copie, P. Suret, **G. Ducrozet**, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El, S. Randoux. From modulational instability to focusing dam breaks in water waves. *Physical Review Fluids*, 2020, 5, 034802, (Journal impact factor 2.442 - Web of Science), doi: 10.1103/PhysRevFluids.5.034802.
3. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, N. Mori, M. Fink, A. Chabchoub. Experimental reconstruction of extreme sea waves by time reversal principle. *Journal of Fluid Mechanics*, 2020, 884, A20, (Journal impact factor 3.137 - Web of Science), doi: 10.1017/jfm.2019.939.
4. Z. Li, G. Deng, P. Queutey, B. Bouscasse, **G. Ducrozet**, L. Gentaz, D. Le Touzé, P. Ferrant. Comparison of wave modeling methods in CFD solvers for ocean engineering applications. *Ocean Engineering*, 2019, 188, (Journal impact factor 2.730 - Web of Science) doi: 10.1016/j.oceaneng.2019.106237.
5. C.-A. Guérin, N. Desmars, S.T. Grilli, **G. Ducrozet**, Y. Perignon, P. Ferrant. An improved Lagrangian model for the time evolution of nonlinear surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, 876, pp.527–552, (Journal impact factor 3.137 - Web of Science), doi: 10.1017/jfm.2019.519.
6. B. Seiffert, **G. Ducrozet**. Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments : wave-breaking energy dissipation. *Ocean Dynamics*, Springer Verlag, 2018, 68 (1), pp.65–89, (Journal impact factor 1.869 - Web of Science), doi: 10.1007/s10236-017-1119-3.
7. L. Letournel, C. Chauvigné, B. Gelly, A. Babarit, **G. Ducrozet**, P. Ferrant. Weakly nonlinear modeling of submerged wave energy converters. *Applied Ocean Research*, Elsevier, 2018, 75, pp.201–222. (Journal impact factor 2.436- Web of Science) doi: 10.1016/j.apor.2018.03.014.
8. B. Seiffert, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy. Simulation of breaking waves using the High-Order Spectral method with laboratory experiments : Wave-breaking onset. *Ocean Modelling*, Elsevier, 2017. (Journal impact factor 3.095 - Web of Science) doi: 10.1016/j.ocemod.2017.09.006.
9. **G. Ducrozet**, M. Gouin. Influence of varying bathymetry in rogue wave occurrence within unidirectional and directional sea-states. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, Springer, 2017. doi: 10.1007/s40722-017-0086-6.
10. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, Y. Perignon. Applicability and limitations of highly non-linear potential flow solvers in the context of water waves. *Ocean Engineering*, Elsevier, 2017. (Journal impact factor 2.730 - Web of Science) doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.07.003.

11. L. Letournel, **G. Ducrozet**, A. Babarit, P. Ferrant. Proof of the equivalence of Tanizawa-Berkvens's and Cointe-van Daalen's formulations for the time derivative of the velocity potential for non-linear potential flow solvers. *Applied Ocean Research*, Elsevier, 2017, 63, pp.184–199. (Journal impact factor 2.436- Web of Science) doi: 10.1016/j.apor.2017.01.010.
12. M. Gouin, **G. Ducrozet**, P. Ferrant. Propagation of 3D nonlinear waves over an elliptical mound with a High-Order Spectral method. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Elsevier, 2017, 63, pp.9–24, (Journal impact factor 1.811 - Web of Science) doi: 10.1016/j.euromechflu.2017.01.002.
13. M. Gouin, **G. Ducrozet**, P. Ferrant. Modelisation non-lineaire de propagation de houle sur un fond variable tridimensionnel. *La Houille Blanche - Revue internationale de l'eau*, EDP Sciences, 2017, pp.42–48. (Journal impact factor 0.113 - Web of Science) doi: 10.1051/lhb/2017043.
14. H.D. Zhang, **G. Ducrozet**, M. Klein,, C. Guedes Soares. An experimental and numerical study on breather solutions for surface waves in the intermediate water depth. *Ocean Engineering*, Elsevier, 2017. (Journal impact factor 2.730 - Web of Science) doi: 10.1016/j.oceaneng.2017.01.030.
15. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, P. Ferrant. HOS-ocean : Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method. *Computer Physics Communications*, Elsevier, 2016, (Journal impact factor 3.309 - Web of Science) doi: 10.1016/j.cpc.2016.02.017.
16. **G. Ducrozet**, M. Fink, A. Chabchoub. Time-reversal of nonlinear waves : Applicability and limitations. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, 2016, 1 (5). (Journal impact factor 2.442 - Web of Science) doi: 10.1103/PhysRevFluids.1.054302.
17. M. Gouin, **G. Ducrozet**, P. Ferrant. Development and validation of a non-linear spectral model for water waves over variable depth. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, Elsevier, 2016, 57, pp.115–128, (Journal impact factor 1.811 - Web of Science). doi: 10.1016/j.euromechflu.2015.12.004.
18. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, P. Ferrant. On the equivalence of unidirectional rogue waves detected in periodic simulations and reproduced in numerical wave tanks. *Ocean Engineering*, Elsevier, 2016, 117, pp.346–358. (Journal impact factor 2.730 - Web of Science) doi: 10.1016/j.oceaneng.2016.03.027.
19. **G. Ducrozet**, A.P. Engsig-Karup, H.B. Bingham, P. Ferrant. A non-linear wave decomposition model for efficient wave-structure interaction. Part A : Formulation, validations and analysis. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, 2014. (Journal impact factor 2.845 - Web of Science) doi: 10.1016/j.jcp.2013.09.017.

20. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant. A modified High-Order Spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank. *European Journal of Mechanics – B/Fluids*, Elsevier, 2012, 34, (Journal impact factor 1.811 - Web of Science) doi: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.017.
21. **G. Ducrozet**, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup, F. Bonnefoy, P. Ferrant. A comparative study of two fast nonlinear free-surface water wave models. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley, 2012, pp.1818–1834. (Journal impact factor 1.631 - Web of Science)doi: 10.1002/flid.2672
22. C. Monroy, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, A. Babarit, L. Gentaz, et al.. RANS Simulations of a Calm Buoy in Regular and Irregular Seas using the SWENSE Method. *International Journal of Offshore and Polar Engineering (IJOPE)*, The International Society of Offshore and Polar Engineers 2011, 21 (4), pp.264–271. (Journal impact factor 0.731 - Web of Science)
23. **G. Ducrozet**, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup, P. Ferrant. High-order finite difference solution for 3D nonlinear wave-structure interaction. *Journal of Hydrodynamics*, Elsevier, 2010, pp.225–230. (Journal impact factor 1.855 - Web of Science) doi: 10.1016/S1001-6058(09)60198-0.
24. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant. 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas. *Natural Hazards and Earth System Science*, 2007, 7 (1), pp.109–122, (Journal impact factor 2.883 - Web of Science). doi: 0.5194/nhess-7-109-2007.
25. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant. Implementation and Validation of Nonlinear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank. *International Journal of Offshore and Polar Engineering (IJOPE)*, The International Society of Offshore and Polar Engineers 2006, Vol. 16 ; n°3 ; pp. 161–167. (Journal impact factor 0.731 - Web of Science)

### Publications soumises

Z. Li, B. Bouscasse, **G. Ducrozet**, L. Gentaz, D. Le Touzé, P. Ferrant. Spectral Wave Explicit Navier-Stokes Equations for wave-structure interaction using two-phase Computational Fluid Dynamics solvers ; submitted to *Ocean Engineering* (2020).

M. Huchet, A. Babarit, **G. Ducrozet**, J.-C. Gilloteaux, P. Ferrant. Nonlinear deterministic sea wave prediction using instantaneous velocity profiles ; submitted to *Ocean Engineering* (2020).

G. Michel, F. Bonnefoy, **G. Ducrozet**, G. Prabhudesai, A. Cazaubiel, F. Copie, A. Tikan, P. Suret, S. Randoux, E. Falcon. Emergence of Peregrine solitons in integrable turbulence

of deep water gravity waves ; submitted to Physical Review Fluids (2020).

L. Wang, J. Li, S. Liu, **G. Ducrozet**. Extreme statistics of long-crested waves in single and mixed sea states ; submitted to Ocean Dynamics (2020).

## A.4 Conférences nationales et internationales avec comités de lecture et actes

1. F. Bonnefoy, **G. Ducrozet**, A. Cazaubiel, G. Michel, G. Prabhudesai, F. Copie, S. Randoux, P. Suret, E. Falcon & A. Tikan. Génération de houle en bassin sur de grandes distances de propagation : méthode non-linéaire pour une enveloppe non-modulée. 24ème Congrès Français de Mécanique. Août 2019, Brest, France.
2. A. Toffoli, **G. Ducrozet**, T. Waseda, M. Onorato, M. Abdolahpour & F. Nelli. Ocean Currents Trigger Rogue Waves. In The 29th International Ocean and Polar Engineering Conference. International Society of Offshore and Polar Engineers. July 2019, Hawaii, USA.
3. M. Huchet, J. C. Gilloteaux, A. Babarit, **G. Ducrozet**, Y. Perignon & P. Ferrant. Prédiction déterministe de houle en temps réel par mesure du profil de vitesses horizontales. 16èmes journées de l'Hydrodynamique. Novembre 2018, Marseille, France.
4. N. Desmars, Y. Perignon, **G. Ducrozet**, C. A. Guérin, S. T. Grilli & P. Ferrant. Phase-Resolved Prediction of Nonlinear Ocean Wave Fields from Remote Optical Measurements. 16èmes journées de l'Hydrodynamique. Novembre 2018, Marseille, France.
5. N. Desmars, Y. Perignon, **G. Ducrozet**, C.-A. Guérin, S.T. Grilli & P. Ferrant. Phase-resolved reconstruction algorithm and deterministic prediction of ocean waves from spatio-temporal optical measurements. OMAE, Jun 2018, Madrid, Spain.
6. **G. Ducrozet**, A. Toffoli & A. Chabchoub. Numerical and Experimental Investigation of Extreme Events in JONSWAP Seas. The 28th International Ocean and Polar Engineering Conference, Juin 2018, Sapporo, Japan.
7. Z. Li, B. Bouscasse, L. Gentaz, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Progress in Coupling Potential Wave Models and Two-Phase Solvers With the SWENSE Methodology. ASME 2018 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Juin 2018, Madrid, Spain. ASME, pp.V009T13A027.
8. Y. Choi, B. Bouscasse, S. Seng, **G. Ducrozet**, L. Gentaz, et al.. Generation of Regular and Irregular Waves in Navier-Stokes CFD Solvers by Matching With the Nonlinear Potential Wave Solution at the Boundaries. ASME 2018 37th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Juin 2018, Madrid,



Spain. ASME, pp.V002T08A020.

9. Z. Li, G. Deng, P. Queutey, B. Bouscasse, **G. Ducrozet**, et al.. Comparison of wave generation methods for two-phase VOF solvers. The 13th OpenFOAM Workshop (OFW13), Jun 2018, Shanghai, China.
10. Z. Li, B. Bouscasse, **G. Ducrozet**, L. Gentaz & Pierre Ferrant. Challenges in developing a SWENSE two-phase CFD solver for complex wave conditions. 33rd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Apr 2018, Brest, France.
11. B. Seiffert & **G. Ducrozet**. A Comparative Study of Wave Breaking Models in a High-Order Spectral Model. ASME 2017 36th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Jun 2017, Trondheim, Norway. ASME, pp.V07BT06A050.
12. Z. Li, L. Gentaz, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Calculation of high-order wave loads on a vertical circular cylinder using the SWENSE method. 32nd International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Apr 2017, Dalian, China.
13. B. Seiffert & **G. Ducrozet**. Deep water wave-breaking in a High-Order Spectral model. 31th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Apr 2016, Plymouth, United States. 2016.
14. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Modélisation non-linéaire de propagation de houle sur un fond variable tridimensionnel. 15èmes Journées de l'Hydrodynamique, Nov 2016, Brest, France. 2016, Actes des 15èmes Journées de l'Hydrodynamique.
15. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Validation of a nonlinear spectral model for water waves over a variable bathymetry. International Workshop on Water Waves and Floating Bodies IWWF2015, 2015, Bristol, United Kingdom.
16. C. Chauvigné, L. Letournel, A. Babarit, **G. Ducrozet**, P. Bozonnet, et al.. Progresses in the development of a weakly-nonlinear wave body interaction model based on the weak-scatterer approximation. ASME 2015 International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE2015), May 2015, St John's, Canada. Proceedings of the ASME 2015 International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering.
17. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Development and validation of a highly nonlinear model for wave propagation over a variable bathymetry. OMAE 2015, juin 2015, St John's, Canada.
18. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. 2D and 3D nonlinear wave propagation over a non-uniform bottom by pseudo-spectral method.. EWTEC 2015, 2015, Nantes,

France.

19. C Chauvigne, L Letournel, Aurélien Babarit, **G. Ducrozet**, P Ferrant, et al.. Développement d'un outil de simulation numérique basé sur l'approche Weak-Scatterer pour l'étude des systèmes houlomoteurs en grands mouvements. 14èmes Journées de l'hydrodynamique, Nov 2014, Val de Reuil, France. Actes des 14emes Journées de l'hydrodynamique.
20. L. Letournel, J.C. Harris, E. Dombre, A. Babarit, P. Ferrant, et al.. Comparison of fully non linear and weakly nonlinear potential flow solvers for the study of wave energy converters undergoing large amplitude of motions. ASME 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Jun 2014, San Francisco, United States. Proceedings of the ASME 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (OMAE2014).
21. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Development of a highly nonlinear model for wave propagation over a variable bathymetry. International Workshop on Water Waves and Floating Bodies IWWF2014, 2014, Osaka, Japan.
22. G. Oger, D. Le Touzé, **G. Ducrozet**, J. Candelier & P.-M. Guilcher. A Coupled SPH/Spectral Method for the Simulation of Wave Train Impacts on a FPSO. ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Jun 2014, San Francisco, California, United States. doi: 10.1115/OMAE2014-24679.
23. T.B. Christiansen, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Efficient Hybrid-Spectral Model for Fully Nonlinear Numerical Wave Tank. ASME 2013 32nd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, Jun 2013, Nantes, France. 2013, doi: 10.1115/OMAE2013-10861.
24. P.M. Guilcher, J. Candelier, L. Beguin, **G. Ducrozet** & David Le Touzé. Simulation of extreme wave impacts on a FLNG. SPHERIC 2013, 2013, Trondheim, Norway.
25. M. Philippe, B. Borgarino, P. Kotronis & **G. Ducrozet**. An integrated approach for the representation of concrete gravity based foundations for offshore wind turbines. Proceedings of the ASME 2013 International conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, OMAE 2013, Jun 2013, Nantes, France.
26. L. Letournel, P. Ferrant, A. Babarit & **G. Ducrozet**. Développement d'un outil de simulation numérique basé sur l'approche Weak-Scatterer pour l'étude des systèmes houlomoteurs en grands mouvements. 13emes Journées de l'Hydrodynamique (JH13), Nov 2012, Chatou, France. Actes des 13emes Journées de l'Hydrodynamique (JH13).
27. T.B. Christiansen, A.P. Engsig-Karup, H.B. Bingham, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Efficient pseudo-spectral model for free surface nonlinear water waves. International

- Conference on Spectral and High Order Methods (ICOSAHOM 2012), Jun 2012, Gammarth, Tunisia.
28. Y. Perignon, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Wind forcing and dissipation in a High Order Spectral deterministic wave model. 21st ISOPE Conference, 2011, Lahaina, United States.
  29. H.B. Bingham, **G. Ducrozet** & A.P. Engsig-Karup. Multi-block, boundary-fitted solutions for 3D nonlinear wave-structure interaction. 25th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, May 2010, Harbin, China.
  30. **G. Ducrozet**, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup & P. Ferrant. High-Order Finite Difference Solution for 3D Nonlinear Wave-Structure Interaction. 9th International Conference on HydroDynamics, ICHD'10, 2010, Shanghai, China.
  31. Y. Perignon, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Non-Linear Initialization in Three-Dimensional Higher Order Spectral Deterministic Sea State Modelling. 29th Int. Conf on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, OMAE, 2010, Shanghai, China.
  32. C. Monroy, F. Bonnefoy, **G. Ducrozet**, J.M. Rousset, L. Gentaz, et al.. RANS Simulations of Hydrodynamic Forces in Irregular 2D and 3D Sea States using the SWENSE Method. 20th ISOPE Conference, 2010, Pékin, China.
  33. C. Monroy, **G. Ducrozet**, L. Gentaz, P. Ferrant & B. Alessandrini. Simulations of Ship motions in regular and irregular Head Seas using the SWENSE Method. ISOPE'09, 2009, Osaka, Japan.
  34. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Analysis of Freak Waves Formations with large scale Fully NonLinear Higher Order Spectral Simulations. ISOPE'08, 2008, Vancouver, France.
  35. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Rogue Waves in Large Scale Fully Non-linear High-order Spectral Simulations. Rogues Waves Symposium, 2008, Brest, France.
  36. P. Ferrant, L. Gentaz, B. Alessandrini, R. Luquet, C. Monroy, et al.. Fully Nonlinear potential/RANSE simulation of wave interaction with ship and marine structures. OMAE'2008, 2008, Estoril, Portugal.
  37. P. Ferrant, L. Gentaz, R. Luquet, **G. Ducrozet**, B. Alessandrini, et al.. Recent Advances Towards the Viscous Flow Simulation of Ships Manoeuvring in Waves. 23rd IWWF, 2008, Jeju Corée, France.

38. E. Blondel, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Extreme Wave Characterization and Prediction using an Advanced Higher-Order Spectral (HOS) Model. SNH 2008, 2008, Seoul, Korea, France.
39. E. Blondel, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Deterministic Reconstruction and Prediction of Nonlinear Wave Fields using Probe Data. OMAE'2008, 2008, Estoril, France.
40. E. Blondel, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Deterministic Reconstruction and Prediction of Nonlinear Wave Systems. 23 rd IWWF, 2008, Jeju Corée, France.
41. C. Monroy, **G. Ducrozet**, P. Roux de Reilhac, L. Gentaz & P. Ferrant. RANS Simulations of Ship Motions in Regular and Irregular Head Seas Using the SWENSE Method. 19th Conference of the International Society for Offshore and Polar Engineering, 2008, Osaka, Japan.
42. P. Ferrant, L. Gentaz, R. Luquet, **G. Ducrozet** & B. Alessandrini. Towards a Practical Tool for the Viscous Flow Simulation of Marine Structures in Complex Sea States. Marine'2007, 2007, Barcelone, France.
43. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé & P. Ferrant. Investigation of Freak Waves in Large Scale 3D higher-order Spectral Simulations. 22nd IWWF, 2007, Croatia, Croatia.
44. Jean-Christophe Gilloteaux, **G. Ducrozet**, A. Babarit & A.H. Clement. Non-linear model to simulate large amplitude motions : application to wave energy conversion. 20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2007, Plivice (Croatie), France.
45. J.C. Gilloteaux, **G. Ducrozet**, A. Babarit, M. Durand & A.H. Clement. Non-linear potential model to predict large amplitude motions : application to the SEAREV wave energy converter. 26th OMAE Conference, 2007, San Diego (USA), France.
46. R. Luquet, **G. Ducrozet**, L. Gentaz, P. Ferrant & B. Alessandrini. Application of the SWENSE Method to Seakeeping Simulations in Irregular Waves. 9th Numerical Ship Hydrodynamics Conference Ann Arbor, 2007, Michigan, France.
47. R. Luquet, P. Ferrant, B. Alessandrini, **G. Ducrozet** & L. Gentaz. Simulation of a TLP in Waves using the SWENSE Scheme. 17th ISOPE Conference, 2007, Lisbonne (Portugal), France.
48. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Roux de Reilhac, C. Retzler, et al.. Experimental and Numerical Investigation of Pressure Fields Under. 25th OMAE'2006,

2006, Hamburg, France.

49. P. Ferrant, R. Luquet, L. Gentaz, B. Alessandrini & **G. Ducrozet**. Naval and Offshore Applications of an Efficient Potential/RANSE Scheme for Wave-Body Interactions. ICHD'06, 2006, Italy, Italy.
50. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé & P. Ferrant. Implementation and Validation of Non Linear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank. ISOPE'06, 2006, San Francisco, United States.
51. P.M. Guilcher, **G. Ducrozet**, M. Doring, B. Alessandrini & P. Ferrant. Numerical Simulations of Wave-Body interactions using a Modified SPH Solver. ISOPE'06, 2006, San Francisco, France.
52. P.M. Guilcher, **G. Ducrozet**, M. Doring, B. Alessandrini & P. Ferrant. Water Wave Propagation using SPH Models. 2nd SPHERIC 2007, 2007, Madrid, France.
53. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé & P. Ferrant. Development of a Fully Non Linear Water Wave Simulator Based on Higher Order Spectral Theory. 20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, 2005, Longyearbyen, Norway.

## A.5 Conférences nationales et internationales avec comités de lecture et résumés

1. A. Slunyaev, **G. Ducrozet** & Y. Stepanyants. Transformation of envelope solitons propagating over a bottom step. EGU General Assembly Conference, Mai 2020 (online).
2. A. Toffoli, **G. Ducrozet** & T. Waseda. Ocean Currents Trigger Rogue Waves. 2nd Int. Workshop on Waves, Storm Surges & Coast Hazards, Novembre 2019, Melbourne, Australie.
3. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, N. Mori, M. Fink & Amin Chabchoub. Reproduction in wave tanks of extreme waves at sea using Time Reversal principle. EGU General Assembly Conference, Avril 2019, Vienne, Austria.
4. A. Chabchoub, A. Toffoli & **G. Ducrozet**. Breathers in the Ocean. EGU General Assembly Conference, Avril 2017, Vienne, Austria.
5. B. Seiffert & **G. Ducrozet**. Wave-breaking onset in a High-Order Spectral model. EGU General Assembly 2016, Avril 2016, Vienne, Austria. 2016.

6. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Propagation of 3D nonlinear waves over complex bathymetry using a High-Order Spectral method. EGU General Assembly 2016, Avril 2016, Vienne, Austria. 2016.
7. A. Chabchoub, **G. Ducrozet** & M. Fink. Time-Reversal of Nonlinear Water Waves. 69th Annual Meeting of the APS Division of Fluid Dynamics, Novembre 2016, Portland, United States.
8. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Comparison of rogue waves in open ocean and wave basins. EGU General Assembly, 2015, Vienna, Austria.
9. M. Gouin, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Modelization of highly nonlinear waves in coastal regions. EGU General Assembly, 2015, Vienna, Austria.
10. Y. Perignon, F. Bonnefoy, **G. Ducrozet** & P. Ferrant. Wind forcing and dissipation in three-dimensional High Order Spectra deterministic sea state modeling. EGU General Assembly 2010, May 2010, Vienne, Austria.
11. Y. Perignon, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy & P. Ferrant. Introduction de termes de croissance par le Vent et de dissipation dans un modèle HOS d'états de mer. Atelier de Modélisation de l'Atmosphère, 2009, Toulouse, France.
12. **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé & P. Ferrant. 3D HOS Simulations of extreme waves in open seas and of their reproducing in a wavetank. European Geosciences Union General Assembly, 2006, Vienne, Austria.



# Annexe B

## Publications choisies

Les publications suivantes sont incluses ci-après en tant que publications choisies, représentatives de mes activités de recherche :

**G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant : A modified High-Order Spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank, *Eur. J. Mech. B-Fluid*, 34, 19-34, 2012.

B. R. Seiffert, **G. Ducrozet**, F. Bonnefoy : Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments : Wave-breaking onset, In *Ocean Model.*, Vol. 119, pp. 94-104, 2017

**G. Ducrozet**, A.P. Engsig-Karup, H.B. Bingham, P. Ferrant : A non-linear wave decomposition model for efficient wave-structure interaction. Part A : Formulation, validations and analysis. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, 2014.

**G. Ducrozet**, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant : 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, 7, 109-122, 2007.

**G. Ducrozet**, M Fink, A Chabchoub : Time-reversal of nonlinear waves : Applicability and limitations. *Physical Review Fluids*, American Physical Society, 2016, 1 (5).



## **B.1 A modified High-Order Spectral method for wave-maker modeling in a numerical wave tank**

L'article suivant présente le développement numérique et la validation du modèle de bassin de houle numérique dans un formalisme HOS. Il s'agit de l'article de référence pour le modèle open-source HOS-NWT. On trouvera dans cet article des détails concernant la section 2.3 du présent mémoire de recherches.



# A modified High-Order Spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank

Guillaume Ducrozet\*, Félicien Bonnefoy, David Le Touzé, Pierre Ferrant

LUNAM Université, Ecole Centrale de Nantes, LHEEA Lab. UMR CNRS 6598 1, rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3, France

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 14 December 2010

Received in revised form

18 July 2011

Accepted 19 January 2012

Available online 9 February 2012

### Keywords:

Numerical wave tank

Nonlinear waves

High-Order Spectral

Spectral method

Directional wavemaker

Nonlinear wave generation

## ABSTRACT

This paper presents the recent development on the nonlinear directional wave generation process in a 3D Numerical Wave Tank (NWT). The NWT is based on a nonlinear model using the High-Order Spectral (HOS) method, which exhibits high level of accuracy as well as efficiency properties provided by a Fast Fourier Transform (FFT) solution. The wavemaker modeling appears to be a key point in the simulation and it is carefully detailed. Different levels of approximation of the wave generation (up to third-order in nonlinearity) are studied. The properties of the numerical scheme in terms of convergence, stability and accuracy are discussed. This NWT features all the characteristics of the real wave tank (directional wavemaker, absorbing zone, perfectly reflective side walls). Furthermore, several validation results and practical applications where numerical simulations are successfully compared to experiments on 2D and 3D wave fields are presented.

© 2012 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## 1. Introduction

The safety at sea of ships and structures has always been a continuous concern of the marine hydrodynamics community. Human safety on board, environmental issues or integrity of freight and ship are the main societal concerns one has to take care of when dealing with ocean environment. These structures operate in complex nonlinear directional sea states including possible extreme events. The accurate description of these wave fields appears to be an essential need. For instance, during the design process of a ship or a marine structure, one has to describe the encountered wave patterns for fatigue studies and also to determine the design wave. Furthermore, during operations at sea, it is also essential in terms of safety or to optimize the working loads (e.g. oil platforms have to be stopped in rough conditions with corresponding losses ...). Consequently, the analysis of these sea states is a major concern for marine engineering and also for a better understanding of the physics of ocean waves (e.g. freak waves). However, the study of such complex wave fields is still very challenging either in an experimental or numerical approach.

New experimental facilities such as wave tanks have appeared in recent decades to facilitate the understanding of wave induced forces and their consequences. First, the wave fields generated in such basins can be accurately controlled and most of the

characteristics of complex sea patterns can be reproduced. Second, studies on small scale models are less expensive than full scale trials, which are really difficult to set up (no control of the wave field that has to be measured for instance). This way, a wide range of experimental tests are available, from long time sea evolutions for the fatigue concern to extreme event interaction for design. Consequently, the Hydrodynamics, Energetics & Atmospheric Environment Lab. (LHEEA) of École Centrale de Nantes (ECN) built such a wave tank of size  $50 \times 30 \times 5$  m, which is equipped with a 48 independent flaps wavemaker and an absorbing beach, as shown in Fig. 1.

At the same time, numerical models have been developed in the recent decades thanks to the progress of computational facilities. Many numerical tools known as Numerical Wave Tanks (NWTs) have been developed for the study of gravity waves and their propagation in a bounded domain. These constitute reliable tools to assist the set-up and analysis of experimental tests provided that they are able to accurately reproduce the 3D realistic sea patterns generated in physical wave tanks.

Different levels of approximation exist, but up until now still quite few 3D nonlinear NWTs have been developed. The study of water wave propagation without any structures can be done with the hypothesis that the fluid is non-viscous and if one furthermore assumes no wave-breaking the flow is also irrotational. Potential flow theory is therefore a correct representation of the physical phenomenon. Although attempts have been made with viscous flow formulation (for instance see [1]), the potential theory remains the best compromise for

\* Corresponding author.

E-mail address: [guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr](mailto:guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr) (G. Ducrozet).

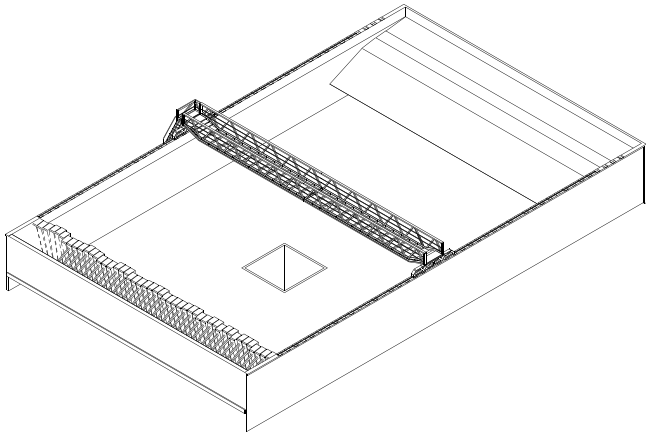


Fig. 1. ECN wave tank,  $50 \times 30 \times 5$  m.

the numerical simulation of severe sea conditions over long-time ranges. Indeed, viscous solvers are too dissipative as well as too time consuming, making them unusable in the matter of interest here. Different potential models have been developed: for example a finite element method is derived by [2] (see [3] or [4] for latest developments). In this framework, simulation tools based on Boundary Element Method (BEM) have also been elaborated allowing the simulation of overturning waves. For instance, the latest developments with High-Order BEM coupled with Fast Multipole Algorithm are applied on rogue waves generation by directional focusing in [5]. However the practical applicability is limited by the computational costs for large 3D cases where fine grids are required for the solution of a wide range of wavelengths. Fast and accurate numerical solution is required and is achieved with spectral methods, by means of Fast Fourier Transforms (FFTs). A second-order NWT based on a spectral method has been previously developed at ECN, namely *SWEET* (standing for *Spectral Wave Evolution in the ECN Tank*), see [6,7]. Other methods based on spectral expansions have also shown interesting results in bounded domains (see e.g. [8]). A more detailed review on NWTs can be found in [9].

The *SWEET* model [6,7] is based on a spectral formulation. This NWT models all features of a real basin (propagation in a bounded domain, generation with a wavemaker) with the problem formulated at second-order in wave steepness and wavemaker excursion respectively. It has been extensively validated on several 2D and 3D cases and exhibits high accuracy and computational efficiency in its validity domain. The fully second-order formulation (expansion in perturbation series) limits the possible simulated steepness. The next step is thus to extend to a fully-nonlinear model this previous work. This is achieved using the High-Order Spectral (HOS) model. The initially proposed HOS method is limited to unbounded domains, modeled with periodic conditions applied on the sides of the numerical domain (see the original work of [10,11]). It therefore allows the study of open-sea evolutions once an initial sea-state has been adequately defined, the definition of this initial state being not obvious (see [12]). Moreover, in this initial HOS formulation, no wave generation is possible, making difficult experimental validations. Actually, sea evolutions reproduced in wave tanks present the additional difficulties of wall and beach reflections, generation of spurious free waves, and of starting from the rest. Nonetheless, recent developments have extended the method application range, allowing the fully-nonlinear spectral modeling of the propagation inside a wave tank. The *SWEET* model is thus enhanced, leading to the *HOST* (standing for *HOS Tank*) one, see [13]. In this *HOST* model, fully-nonlinear free-surface conditions have been taken into account (instead of the second-order one in *SWEET*) with the

wavemaker still modeled at second-order. The current publication presents the latest developments of the *HOST* model, leading to a wavemaker modeled up to third-order, still coupled to the fully-nonlinear solution of the free surface conditions.

The present paper is divided as follows. The first part deals with the formulation of the problem in the general context of potential flow theory. The different boundary conditions are presented as well as the main characteristics of the NWT: presence of a wavemaker associated with an absorbing beach.

The second part details the numerical model. First is reported on the wavemaker modeling and particularly the improvement of the first and second-order model described in [13], which leads to the new expansion to a third-order wave generation. Then, the HOS method allowing the fully-nonlinear solution of free-surface boundary conditions is detailed. The resulting NWT characteristics in terms of efficiency and accuracy are discussed.

The third part deals with the first validation results at low steepness. Experiments have been conducted in the ECN wave basin and compared to the numerical simulations. Firstly, long time 2D irregular waves simulations are performed. The excellent agreement with experiments assess the accuracy of our NWT (wavemaker model, propagation and absorption) as well as the improvements compared to the second-order model *SWEET*. Then, the case of a 3D focused wave packet is studied. The successful comparison to experiments of this complex 3D wave pattern indicates the accuracy, efficiency and abilities of our model.

Eventually, different validations/applications at moderate steepness are presented in the last part. The case of a 2D regular wave field is analyzed with comparisons to experiments conducted in the ECN wave tank. The accuracy and efficiency is pointed out as well as the improvement obtained with enhanced wavemaker modeling. The differences between the different levels of approximation in the wavemaker modeling are analyzed. Then, the case of a 2D focused wave packet, embedded in an irregular wave field points out the possible incidence of wavemaker nonlinearities. Pressure calculations inside the fluid domain are also provided during this comparison.

## 2. Formulation

We consider a 3D rectangular wave tank with horizontal dimension  $L_x \times L_y$  and finite depth  $h$ , filled with an homogeneous, incompressible and inviscid fluid. We choose a Cartesian coordinate system with the origin  $O$  located at one corner of the domain  $D$ . The section  $x = 0$  corresponds to the wavemaker rest position, while the sections  $x = L_x$ ,  $y = 0$  and  $y = L_y$  are perfectly reflective walls (see Fig. 2) and  $z = 0$  is the fluid surface at rest. The notation  $\mathbf{x}$  stands for the horizontal  $(x, y)$  vector.

The wave-induced motion of the fluid, initially at rest, is irrotational. Then, under these assumptions, the flow velocity  $\mathbf{V} = \nabla\phi(\mathbf{x}, z, t)$  derives from a velocity potential  $\phi$  with  $\nabla$  standing for the 3D gradient. The continuity equation  $\text{div } \mathbf{V} = 0$  is traduced for  $\phi$  as the Laplace equation  $\Delta\phi = 0$  in the fluid domain. We also assume that the waves are non-breaking and we describe the free surface elevation by a single-valued function  $\eta(\mathbf{x}, t)$ .

### 2.1. Boundary conditions

The wave tank shown in Fig. 2 contains different fixed solid boundaries which are modeled with a no-flow condition  $\nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0$  where  $\mathbf{n}$  is the vector normal to the boundary. The last solid boundary ( $x = 0$  section at rest) corresponds to the wavemaker, which is treated separately (see Section 2.2). Note that the wall  $x = L_x$  opposite to the wavemaker is equipped with an absorbing beach whose presence is taken into account in the simulation (see Section 2.3).

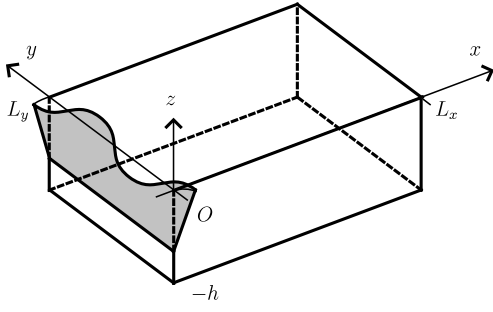


Fig. 2. Wave tank scheme with its coordinate system.

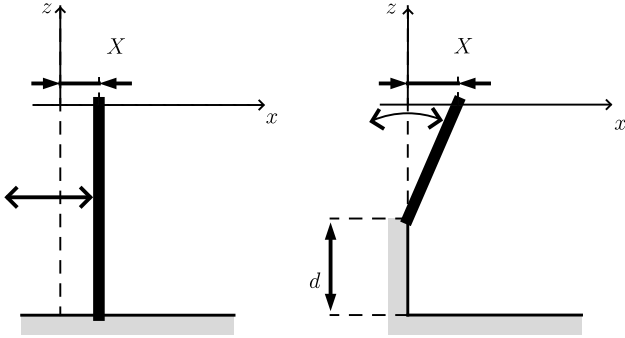


Fig. 3. Vertical geometry of piston (left) and hinged-flap (right) wavemaker.

The impermeability and the pressure continuity (surface tension is neglected) at the free surface give the kinematic and dynamic free surface boundary conditions. Following [14], these boundary conditions can be written in terms of surface quantities, namely the free-surface elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  and the surface potential  $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta, t)$

$$\partial_t \eta = (1 + |\nabla \eta|^2) \partial_z \phi - \nabla \phi^s \cdot \nabla \eta \quad (1)$$

$$\partial_t \phi^s = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) (\partial_z \phi)^2 \quad (2)$$

both expressed on the free surface location  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ . The operator  $\nabla$  stands for the horizontal gradient  $(\partial_x, \partial_y)$  with  $\partial_x$  the partial derivative with respect to  $x$ . This way, the only quantity that is not explicitly defined on the free surface is the vertical velocity  $W = \partial_z \phi|_{z=\eta}$ , which will be evaluated thanks to the order consistent High-Order Spectral scheme of [10]. The HOS approach is detailed in Section 3.2.

## 2.2. Wavemaker

Following [6], the motion of the wavemaker  $X(y, z, t)$  is decomposed as the product  $X(y, z, t) = f_v(z)\tilde{X}(y, t)$  where  $f_v$  is a function describing the vertical geometry. Fig. 3 shows the different types of wavemaker, piston and hinged-flap that are modeled. These are the most common wave generators used in experiments. We assume that the wavemaker is continuous in the transverse direction (*i.e.* the tiny gaps between flaps are neglected). The wavemaker condition is expressed as a no-flow condition

$$\partial_t X = \partial_x \phi - (\nabla_v X) \cdot (\nabla_v \phi) \quad \text{on } x = X(y, z, t) \quad (3)$$

with  $\nabla_v = (\partial_y, \partial_z)$  the vertical gradient.

At last, note that a time ramp is superimposed to the physical wavemaker motion in order to reduce both the mechanical load and the excitation of transient long modes in the basin. This time ramp is reproduced in the numerical model as it prevents time discontinuities and helps the time stepping process. In the ECN physical wave tank, this ramp is prescribed linear and of duration

3 s. The efficiency of this ramp in the physical wave tank and NWT is discussed in [7].

The wavemaker condition Eq. (3) is derived at different levels of approximation. The previous study at first and second-order presented in [13] is extended at third-order in the present paper. This improvement in the nonlinear wave generation is presented in details in Section 3.1.

## 2.3. Absorbing zone

An absorbing device such as a beach is generally added on the wall opposite to the wavemaker to prevent reflection on this wall and ensure a correct wave field in the test zone. To reproduce these features in the NWT we include, following [15], an absorbing zone described by a local modification of pressure  $P = \rho v(\mathbf{x}) \tilde{\nabla} \phi \cdot \mathbf{n}$  at the free surface, with  $\rho$  the fluid density (see [6,7] for more details).

The function  $v(\mathbf{x})$  is non-zero where absorption is required, *i.e.* close to the wall opposite to the wavemaker. It also needs to be smooth to avoid spurious reflections at discontinuities. We found out that a third-order polynomial on a compact support satisfying  $v = 0$  at the beginning of the numerical beach and  $\partial_x v = 0$  at both extremities is the best choice. This function has been experimentally calibrated to reproduce the ECN absorbing zone and could be adjusted to fit any absorbing zone (see [7]).

## 3. Numerical model

In the following, all quantities are expressed in non-dimensional form with respect to space, time and mass scales chosen respectively as the depth  $h$ ,  $\sqrt{h/g}$  and  $\rho h^3$  where  $g$  is the gravity acceleration and  $\rho$  the density of the fluid.

### 3.1. Wavemaker modeling

The wavemaker modeling has been explained in [13] at first and second-order. This modeling is based on the approach developed for the second-order spectral model SWEET in [6]. We refer to those two papers for more details on the procedure. We recall here the key points and we present the new expansion to the third-order wave generation.

#### 3.1.1. Additional potential

In order to model the wave generation by a wavemaker, the concept of additional potential is introduced, following [16]. We therefore separate the potential  $\phi$  solution of the total problem into two components  $\phi = \phi_{\text{spec}} + \phi_{\text{add}}$  where  $\phi_{\text{spec}}$  is the potential describing the wave evolution in the fixed-geometry tank with its free surface (*i.e.* a homogeneous Neumann boundary condition on the wall  $x = 0$ ), and  $\phi_{\text{add}}$  is the additional potential accounting for the wavemaker (*i.e.* satisfying the boundary condition Eq. (3)). The free-surface boundary conditions (Eqs. (1) and (2)) are re-written with  $\phi_{\text{add}}$  acting as a forcing term

$$\begin{cases} \partial_t \eta = (1 + |\nabla \eta|^2) W - \nabla (\phi^s + \phi_{\text{add}}) \cdot \nabla \eta + \partial_z \phi_{\text{add}} \\ \partial_t \phi^s = -\eta - \frac{1}{2} |\nabla \phi^s|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) W^2 \\ - \nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{\text{add}} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi_{\text{add}}|^2 - \partial_t \phi_{\text{add}} - v \partial_t \eta \end{cases} \quad (4)$$

on  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$  where  $\phi^s$  and the vertical velocity  $W$  are now defined with respect to  $\phi_{\text{spec}}$  only.

The original problem (generation and propagation of waves) is now decomposed into two subproblems with governing equations and boundary conditions reminded hereafter. First we need to find the additional potential that satisfies the wavemaker boundary condition Eq. (3) and no-flow conditions ( $\partial_n \phi = 0$  with  $n$  defining

$$\phi_{\text{add}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \phi_{\text{add}} = 0 & \text{inside } D \\ \partial_n \phi_{\text{add}} = 0 & \text{on } x = L_x; y = 0, L_y; z = -1 \\ \partial_x \phi_{\text{add}} + \nabla_{\mathbf{v}} X \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi_{\text{add}} = \partial_t X \partial_x \phi_{\text{spec}} - \nabla_{\mathbf{v}} X \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi_{\text{spec}} & \text{on } x = X(y, z, t) \end{cases}$$

$$\phi_{\text{spec}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \phi_{\text{spec}} = 0 & \text{inside } D \\ \partial_n \phi_{\text{spec}} = 0 & \text{on } x = 0, L_x; y = 0, L_y; z = -1 \\ \text{Modified free surface boundary condition: Eq. (4)} & \text{on } z = \eta(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

## Box I.

local normal) on other boundaries. Then, we can use the free surface boundary conditions (4) to obtain the remaining unknowns, that is the second potential  $\phi_{\text{spec}}$  (or equivalently  $\phi^s$ ) and  $\eta$ . This second step will be presented in details in Section 3.2. See the equations given in Box I.

The velocity potential  $\phi$  solution of the total problem is the sum of those two potentials ( $\phi = \phi_{\text{spec}} + \phi_{\text{add}}$ ). Therefore, it satisfies Laplace equation inside  $D$  as well as all boundary conditions.

Thus, the first challenge is to solve the additional problem, i.e. to determine  $\phi_{\text{add}}$  in an efficient way. We extend here the approach presented by [13] to third-order. This approach is itself based on a NWT called *SWEET* developed by [6,7], which consists in a perturbation series at second-order. In this NWT the total problem, generation and propagation, is expanded in perturbation series up to second-order and not only the generation problem as in the present nonlinear *HOST* model. The idea is then to combine this *SWEET* model to the *HOST* formulation to have a new model featuring: (i) the *HOST* formulation, i.e. fully-nonlinear solution of free-surface boundary conditions and (ii) a wavemaker condition expanded up to the second or even third-order as presented in this paper. Thus, we retain the attractiveness of the *HOST* nonlinear formulation while adding an independent higher-order wave generation, which improves the accuracy of the complete NWT.

In this first step, both  $\phi_{\text{add}}$  and  $\phi_{\text{spec}}$  are expanded in perturbation series. In [13], we restricted the method in [6] to the successive computation of  $\phi_{\text{add}}^{(1)}$ ,  $\phi_{\text{spec}}^{(1)}$  and  $\phi_{\text{add}}^{(2)}$ . Note that  $(i)$  indicates the  $i$ th-order in perturbation series expansion of the corresponding variable and that at each order  $\phi^{(i)} = \phi_{\text{add}}^{(i)} + \phi_{\text{spec}}^{(i)}$ . For completeness, one reminds governing equation and boundary conditions for the problem expanded in perturbation series (see [6] for details).

$$\begin{aligned} \Delta \phi^{(i)} &= 0 & \text{inside } D \\ \partial_n \phi^{(i)} &= 0 & \text{on } x = L_x; y = 0, L_y; z = -1 \\ \partial_x \phi^{(i)} - \partial_t X^{(i)} &= A_i & \text{on } x = 0 \\ \partial_t \eta^{(i)} - \partial_z \phi^{(i)} &= B_i & \text{on } z = 0 \\ \partial_t \phi^{(i)} + \eta^{(i)} + \nu \partial_z \phi^{(i)} &= C_i & \text{on } z = 0. \end{aligned}$$

At each order the decomposition  $\phi^{(i)} = \phi_{\text{add}}^{(i)} + \phi_{\text{spec}}^{(i)}$  is used for solution of the complete problem (generation and propagation). Same process than previously described in this paragraph for the nonlinear problem is used. Additional problem satisfies the wavemaker boundary condition and no-flow conditions on other solid boundaries while  $\phi_{\text{spec}}^{(i)}$  takes care of free surface boundary conditions. First-order terms ( $i = 1$ ) read

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

At second-order ( $i = 2$ )

$$\begin{aligned} A_2 &= -X^{(1)} \partial_{xx} \phi^{(1)} + \nabla_{\mathbf{v}} X^{(1)} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \phi^{(1)} \\ B_2 &= -\eta^{(1)} \partial_{tz} \phi^{(1)} - \frac{1}{2} |\tilde{\nabla} \phi^{(1)}|^2 - \nu (\eta^{(1)} \partial_{zz} \phi^{(1)} - \nabla \eta^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)}) \\ C_2 &= \eta^{(1)} \partial_{zz} \phi^{(1)} - \nabla \eta^{(1)} \cdot \nabla \phi^{(1)}. \end{aligned}$$

Each order is solved successively up to the desired order of nonlinearity for wave generation. We are then able to evaluate

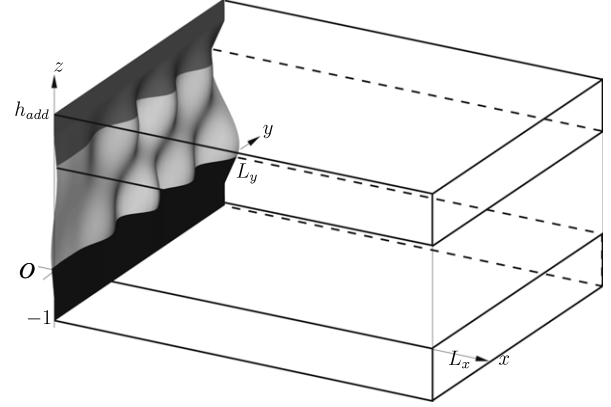


Fig. 4. Extended domain for additional problem solution.

the additional forcing terms in (4) using either a linear potential  $\phi_{\text{add}} = \phi_{\text{add}}^{(1)}$  (model *HOST-wm1*) or a second-order potential  $\phi_{\text{add}} = \phi_{\text{add}}^{(1)} + \phi_{\text{add}}^{(2)}$  (model *HOST-wm2*). Note that  $\phi_{\text{spec}}^{(1)}$  was only solved to evaluate  $\phi_{\text{add}}^{(2)}$  afterward. The nonlinear solution is then obtained directly from (4) and we make no use of the solution  $\phi_{\text{spec}}^{(1)}$  and  $\phi_{\text{spec}}^{(2)}$  of the second-order *SWEET* model in that second step.

3.1.2. Third-order problem *HOST-wm3*

We describe here the improvement of the wavemaker modeling to third-order wave generation. The wavemaker boundary condition Eq. (3) at third-order is written on  $x = 0$  leading to

$$\begin{aligned} A_3 &= \partial_x \phi_{\text{add}}^{(3)} - \partial_t X^{(3)} \\ &= -X^{(2)} \partial_{xx} \phi^{(1)} - X^{(1)} \partial_{xx} \phi^{(2)} + \frac{X^{(1)2}}{2} \partial_{xxx} \phi^{(1)} \\ &\quad + \partial_y \phi^{(2)} \partial_y X^{(1)} + \partial_y \phi^{(1)} \partial_y X^{(2)} + X^{(1)} \partial_{yx} \phi^{(1)} \partial_y X^{(1)} \\ &\quad + \partial_z \phi^{(2)} \partial_z X^{(1)} + \partial_z \phi^{(1)} \partial_z X^{(2)} + X^{(1)} \partial_{zx} \phi^{(1)} \partial_z X^{(1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

We choose to use a spectral solution for it, which enables us to use FFTs in the rectangular domain. As seen in [6], this implies to define a vertically extended domain  $D_{\text{add}}$  for solution of the additional problem. This domain is composed of

- the initial domain  $D$  extending from  $z = -1$  to  $z = 0$ ,
- the symmetrical of  $D$  with respect to  $z = 0$  plan, further translated upwards between  $z = h_{\text{add}} - 1$  and  $z = h_{\text{add}}$ ,
- a matching surface between the two previous rectangular boxes, from  $z = 0$  to  $z = h_{\text{add}} - 1$  designed to smoothly close the domain.

Note that the wavemaker motion between  $z = h_{\text{add}} - 1$  and  $z = h_{\text{add}}$  is the opposite of the one from  $z = -1$  to  $z = 0$ , in order to keep the domain volume constant when the wavemaker is moving. The size of the additional domain  $D_{\text{add}}$  is usually chosen such as  $h_{\text{add}} = 3$ . An example of extended domain is given on Fig. 4.

In this extended domain, we expand the additional potential  $\phi_{\text{add}}$  as

$$\phi_{\text{add}}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{N_y} \sum_{p=0}^{N_z} B_{np}(t) \chi_{np}(\mathbf{x}, z) \quad \text{in } D_{\text{add}} \quad (6)$$

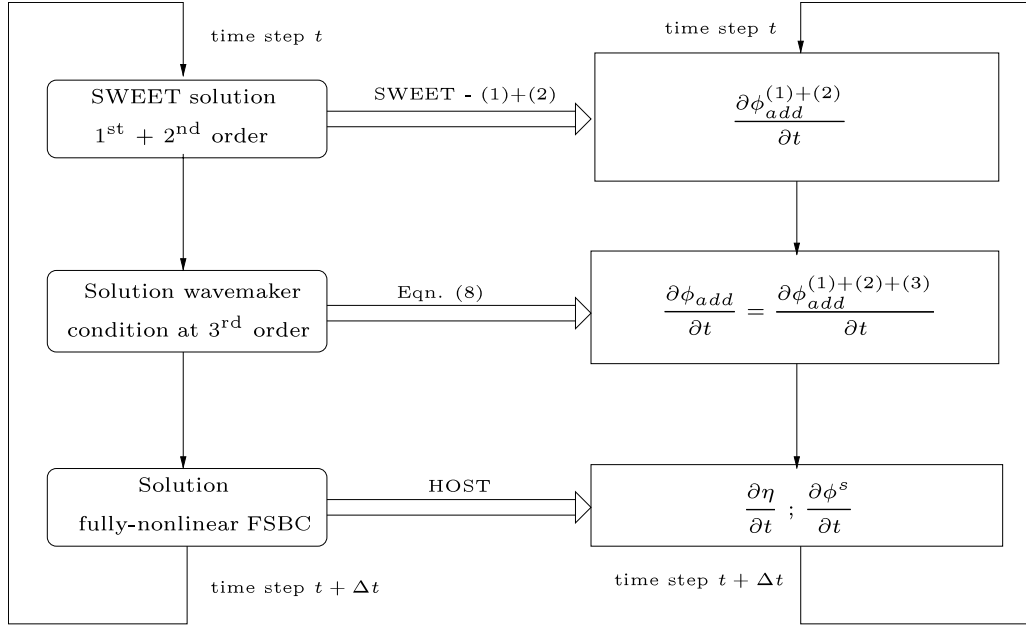


Fig. 5. Solution algorithm for model *HOST-wm3*.

with the spectral basis functions

$$\chi_{np}(\mathbf{x}, z) = \cos[k_n^y y] \cos[k_p^z(z+1)] \frac{\cosh[k_{np}(L_x - x)]}{\cosh[k_{np}L_x]} \quad (7)$$

with  $k_n^y = n\pi/L_y$ ,  $k_p^z = p\pi/(h_{add} + 1)$  and  $k_{np} = \sqrt{(k_n^y)^2 + (k_p^z)^2}$ .

As shown in Eq. (5), the solution of the third-order problem requires the knowledge of the total potential ( $\phi = \phi_{spec} + \phi_{add}$ ) at lower orders. We need to determine  $\phi_{spec}^{(i)}$  for  $i = 1, 2$ ; this is achieved by means of the second-order model *SWEET*. At the same time, note that the wavemaker motion  $X$  is explicitly known. The proposed expansion in perturbation series  $X^{(i)}$  is only useful to perform wavemaker corrections (for instance free waves corrections as seen in [17]).

The aim of the following section is to explain the process to obtain the time dependent amplitudes  $B_{np}(t)$ . We focus our attention on the more elaborated third-order scheme named *HOST-wm3* although simpler ones (*HOST-wm1* and *HOST-wm2*) were also developed [13].

### 3.1.3. Numerical algorithm

Eq. (4) involves the time derivative of  $\phi_{add}$ . Instead of using backward finite difference to estimate  $\partial_t \phi_{add}$ , we prefer solving directly for the time derivative  $\partial_t \phi_{add}$  and obtaining  $\phi_{add}$  by means of the same time-marching scheme than that for  $\eta$  and  $\phi^s$ .

The solution algorithm is schematized on Fig. 5 for the *HOST-wm3* model. It is divided into two main parts. The first one deals with the solution of the wave generation problem in the extended domain  $D_{add}$  and may be described as follows

- The first-order additional potential  $\phi_{add}^{(1)}$  is time-marched after its derivative is evaluated from the linear wavemaker condition  $\partial_x \phi_{add}^{(1)} = \partial_t X^{(1)}$  on  $x = 0$ .
- This allows the solution of the first-order free surface boundary conditions and thus the time-marching of  $\eta^{(1)}$  and  $\phi_{spec}^{(1)}$ .
- The second-order additional potential  $\phi_{add}^{(2)}$  is time-marched after its derivative is evaluated from the second-order wavemaker condition

$$\partial_x \phi_{add}^{(2)} = \partial_t X^{(2)} - X^{(1)} \partial_{xx} \phi^{(1)} + \partial_y \phi^{(1)} \partial_y X^{(1)} + \partial_z \phi^{(1)} \partial_z X^{(1)}$$

on  $x = 0$ .

- This allows the solution of the second-order free surface boundary conditions and thus the time-marching of  $\eta^{(2)}$  and  $\phi_{spec}^{(2)}$ .

- The third-order additional potential  $\phi_{add}^{(3)}$  is time-marched after its derivative is evaluated from the third-order wavemaker condition

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_{add}^{(3)} = & \partial_t X^{(3)} - X^{(2)} \partial_{xx} \phi^{(1)} - X^{(1)} \partial_{xx} \phi^{(2)} \\ & + \frac{X^{(1)2}}{2} \partial_{xxx} \phi^{(1)} + \partial_y \phi^{(2)} \partial_y X^{(1)} + \partial_y \phi^{(1)} \partial_y X^{(2)} \\ & + X^{(1)} \partial_{yx} \phi^{(1)} \partial_y X^{(1)} + \partial_z \phi^{(2)} \partial_z X^{(1)} \\ & + \partial_z \phi^{(1)} \partial_z X^{(2)} + X^{(1)} \partial_{zx} \phi^{(1)} \partial_z X^{(1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

- The additional forcing terms in Eq. (4) assembled from  $\phi_{add}^{(1)}$ ,  $\phi_{add}^{(2)}$  and  $\phi_{add}^{(3)}$ .

Note that the first step is the linear wave generation used in *HOST-wm1* while the first three steps correspond to the second-order wave generation in *HOST-wm2*.

In terms of complexity of solution, one can compare the *HOST-wm3* formulation with the previous *HOST-wm1* and *HOST-wm2* ones. Several additional variables have to be time-marched:  $\phi_{add}^{(3)}$ ,  $\eta^{(2)}$  and  $\phi_{spec}^{(2)}$ . They have to be added to the ones already time marched in *HOST-wm1*:  $\phi_{add}^{(1)}$ ,  $\eta$ ,  $\phi^s$  and *HOST-wm2*:  $\phi_{add}^{(2)}$ ,  $\eta^{(1)}$ ,  $\phi_{spec}^{(1)}$ . This results in a more computationally expensive scheme in both CPU time and memory requirement. However, this increase appears to be acceptable compared to the global CPU time (see Section 3.3.1) and regarding the corresponding improvements in the solution as shown in Sections 4 and 5.

### 3.2. HOS method

As mentioned in Section 3.1.1, the second step of the solution is to solve the free surface boundary conditions Eq. (4), with  $\phi_{add}$  and  $\partial_t \phi_{add}$  acting as forcing terms, in order to obtain the remaining unknowns *i.e.* the potential  $\phi_{spec}$ , or equivalently  $\phi^s$ , and  $\eta$ . This involves the estimation of the free surface vertical velocity  $W = \partial_z \phi_{spec}|_{z=\eta}$ . The set of Eqs. (4) then provides the time derivatives

of the unknowns  $\eta$  and  $\phi^s$ , which are further used in a time-marching 4th order Runge–Kutta Cash–Karp scheme with adaptive step size [18].

Note that the perturbation technique used previously for the wavemaker modeling is abandoned here. The HOS method indeed solves for nonlinear elevation  $\eta$  and potential  $\phi^s$  in Eqs. (4).

### 3.2.1. Principle

The HOS method is dedicated to the estimation of  $W$ . It consists in a double expansion of the potential  $\phi_{\text{spec}}$  to solve the Dirichlet problem  $\phi_{\text{spec}}(z = \eta) = \phi^s$ . First the potential  $\phi_{\text{spec}}$  is expressed as a truncated power series of components  $\phi^{(m)}$  for  $m = 0$  to  $M$ , each component being of magnitude  $\eta^m$ . Second the potential taken at the free surface is expanded in a Taylor series about the mean water level  $z = 0$ . Combining these two expansions give a triangular set of Dirichlet problems for the components that can be solved by means of a spectral method (see Section 3.2.2). Then, using the same kind of double expansion to evaluate the vertical derivative of the potential, we obtain the vertical velocity on the free surface from the components  $\phi^{(m)}$ .

The products involving  $\nabla\eta$  and  $W$  in Eqs. (4) are evaluated thanks to the order consistent formulation of [10]. One has to keep in mind that the HOS scheme retains the fully-nonlinear feature of the solution. Indeed, the evaluation of  $W$  is an inner process, which is not correlated to the nonlinear solution of the problem (free surface boundary conditions are solved at the exact free surface position). Several validations have been performed to assess the accuracy and stability of the HOS scheme (see for instance the one reported in [19]). It is interesting to note here that the Dirichlet to Neumann Operator (DNO) models (see [20] or [21]) are strictly equivalent to the HOS model as shown in [22]. Only the formalism is different between these two methods. Furthermore, it has also been shown [23] that the HOS method (with  $M = 3$ ) is equivalent to the formalism based on the expansion of the Hamiltonian used by Zakharov [14].

### 3.2.2. Spectral solution

The choice of a spectral solution of the problem formulated in the previous subsection is motivated by two main features of this kind of method: (i) it allows the use of Fast Fourier Transforms (FFTs) with an efficient computational cost growing as  $N \log_2 N$  and (ii) it exhibits high accuracy with quick convergence properties. The method is then intended to be more efficient than BEM models, widely used as NWT (see Introduction). However, it has to be reminded that our HOS formulation differs from this original one. Typically, spectral methods work in open domain (HOS e.g. [10], DNO e.g. [21] or mixed pseudo-spectral/integral method of [24], ...) and are thus not adapted to treat the NWT issue. The spectral solution of the NWT problem is not widespread: a previous model developed in our laboratory, SWEET [6,7] was one of these. However, it was limited to second-order in wave amplitude, a limitation, which is intended to be removed with this new NWT model.

Then, the spectral expansions chosen to treat the problem of a rectangular wave tank are discussed. One has to define basis functions  $\psi_{mn}(\mathbf{x}, z)$ , which implicitly satisfies the boundary conditions of the problem (without wavemaker, which is treated in 3.1). The potential satisfies no-flow conditions on the boundaries  $x = 0$  and  $x = L_x$ , on the side-walls  $y = 0$  and  $y = L_y$  and on the bottom  $z = -1$  as well as the Laplace equation in the domain. This gives the following basis functions, which correspond to the natural eigenmodes of the wave tank

$$\psi_{mn}(\mathbf{x}, z) = \cos(k_m^x x) \cos(k_n^y y) \frac{\cosh[k_{mn}(z+1)]}{\cosh[k_{mn}]} \quad (9)$$

with  $k_m^x = m\pi/L_x$ ,  $k_n^y = n\pi/L_y$  and  $k_{mn} = \sqrt{(k_m^x)^2 + (k_n^y)^2}$ . The velocity potential is expanded on this basis

$$\phi_{\text{spec}}(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_y} A_{mn}(t) \psi_{mn}(\mathbf{x}, z) \quad \text{in } D. \quad (10)$$

The velocity potential is fully determined by the knowledge of the time-dependent coefficients  $A_{mn}(t)$ .

### 3.3. Efficiency and accuracy

One knows that spectral solution exhibits efficient solution as well as quick convergence. This will be pointed out in next paragraphs.

#### 3.3.1. Efficiency and computational effort

As noted before, efforts have been done in order to retain a fully spectral solution scheme (including the wave generation). This allows the use of a FFT based solution scheme. Thus, computational cost will grow as  $N \log_2 N$  with  $N$  the number of modes used (either on the free surface or the wavemaker). Moreover, an improved time-marching scheme, presented by [24], is used. Thanks to an adequate change of variables, the nonlinear part of the system of Eqs. (4) is solved as a problem in itself. The linear part of the equations is solved analytically while the nonlinear part is computed numerically. This provides great speed-up of our numerical simulations as noted in [25] or [26] (total CPU time divided by a factor up to 3 for a given accuracy).

In more detail, the CPU resources needed for 3D HOS calculations are the following with a partial dealiasing of order  $p$  and denoting by  $N = N_x N_y$  the number of free surface modes

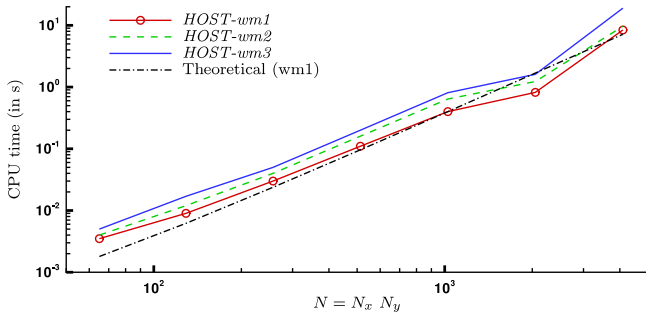
$$T_{\text{HOS}_{\text{partial}}} = O \left( \left\{ 23 + \left[ \frac{M^2}{2} + \frac{7M}{2} + 2E \left( \frac{M-1}{p} \right) + 31 \right] \frac{p+1}{2} \right\} N \log_2(N) \right). \quad (11)$$

On the other hand, the additional solution leads to an additional CPU cost that reads

$$T_{\text{add}} = O(\alpha N_y N_z \log_2[N_y N_z] + \beta N \log_2[N] + \gamma N N_y N_z) \quad (12)$$

with  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  number of products/FFTs needed for additional solution/reconstruction. One can note that each operations have to be accounted for, the total CPU time being an addition of different process. To determine the different constants, this is necessary to calculate each operations performed during the computation. These are dependent of the order of approximation used in the wavemaker modeling. Results of CPU times per time-step on a 2.4 GHz Opteron mono-processor are given on Fig. 6 for a typical computation with HOS order  $M = 5$  and partial dealiasing  $p = 3$ . This figure also presents the theoretical CPU time =  $T_{\text{HOS}_{\text{partial}}} + T_{\text{add}}$  from Eqs. (11) and (12) with  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 48$ .

The agreement between the CPU time obtained in the numerical simulation (curve *HOST-wm1*) and its approximation by Eqs. (11) and (12) (curve *Theoretical(wm1)*) assess the accuracy of this evaluation. Furthermore, Fig. 6 indicates the increase in CPU time when dealing with enhanced wavemaker models (*HOST-wm2* and *HOST-wm3*). The computational cost of these improvements is acceptable in the range of applications studied and particularly regarding the improvement of the results thanks to these expansions (see Section 5). Thus, the computational cost is correctly approximated by Eqs. (11) and (12) provided that the number of modes used is sufficiently large.



**Fig. 6.** Computational effort per time step function of number of modes  $N$  for first, second and third wave generation.

### 3.3.2. Accuracy

To ensure the accuracy of the solution, one has to be aware of the aliasing phenomenon, occurring in the products of two quantities in the physical space. Specific attention has been paid to treat this aliasing phenomenon correctly. Indeed, it appears to be a key point in the quality of the solution. The dealiasing is performed using the well known zero-padding approach (see e.g. [27]). The spectral representation of a quantity is expanded to larger modes, which are made equals to 0. Products are made with these *expanded* quantities and are then transformed back on the initial number of components/points. It has been chosen to perform a complete dealiasing, i.e. products of order  $M$  expressed with  $N$  modes/points are dealiased with an expansion on  $\frac{M+1}{2}N$  modes/points (the  $M + 1$  halves rule). This enables the treatment of the complete aliasing phenomenon (by contrast with e.g. the approach in [11] where an expansion on only  $2N$  points is always used, even with high-order products).

We also introduce the partial dealiasing as a dealiasing of the products of order  $p < M$ . This is applied within the HOS scheme until order  $M$  is reached. For instance, to dealias a product of order 5 ( $\eta^5$ ) with  $p = 3$  we will rewrite ( $\eta^5 = \eta^3 \times \eta^2$ ) and perform the dealiasing on  $\eta^3$  with an expansion on  $2N$  modes (here  $\frac{p+1}{2} = 2$ ). This allows to maintain reasonable CPU time and memory storage as well as a good accuracy for large 3D computations. Thus, this partial dealiasing will be used in the following for 3D computations with  $p = 3$ . Typically, other computations in this paper are performed with a complete dealiasing, unless specifically provided otherwise. The influence of partial to complete dealiasing has been widely investigated in [26].

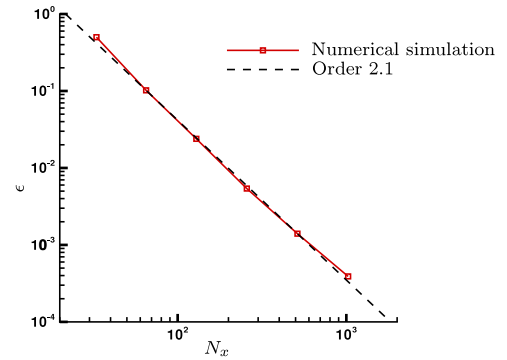
The time-stepping accuracy is achieved thanks to the 4th order Runge–Kutta Cash–Karp scheme with adaptive step size. This scheme induces the definition of a tolerance (i.e. a level of accuracy) on the time-marching. Time-steps are then chosen automatically during the simulation according to this tolerance which is flexible but usually fixed to  $10^{-7}$  in the following.

A convergence analysis is proposed on a typical wave basin test case. A 2D sea state defined by a Bretschneider spectrum (peak wave length  $\lambda_p = 3m$ ) is generated in a wave basin (50 m long, 5 m deep), and the surface elevation is recorded at one point in the middle of the NWT, which is a node for each simulation. The error  $\epsilon$  is evaluated on the whole probe signal

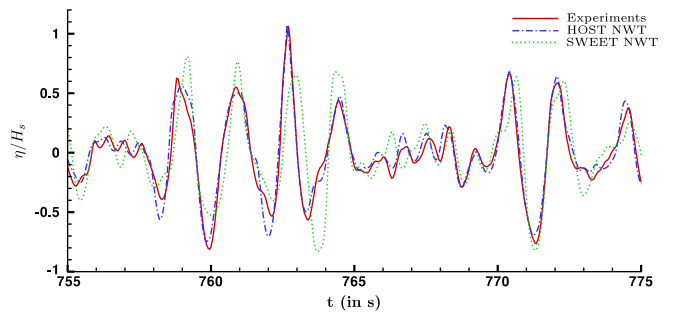
$$\epsilon = \frac{\int_t |\eta_{\text{probe}} - \eta_{\text{probe}}^{\text{ref}}|}{\int_t |\eta_{\text{probe}}^{\text{ref}}|} \quad (13)$$

with  $\eta_{\text{probe}}$  the elevation at the probe signal and  $\eta_{\text{probe}}^{\text{ref}}$  the probe signal of the numerical reference, corresponding to the following parameters ( $N_x = 2048, N_z = 512$  vertical modes on the wavemaker, and a HOS order  $M = 10$ ).

The results of the convergence test with respect to the number of modes/nodes in the simulations  $N_x$  are reported on Fig. 7. Results presented were performed with  $N_x, N_z = N_x/4, M = 8$ .



**Fig. 7.** Convergence of the results with respect to number of modes/points  $N_x$ .



**Fig. 8.** Irregular-wave elevation history: comparison of experimental and NWT data for  $\epsilon_c = 3\%$ .

The observed convergence rate is about 2.1 and thus actually  $\geq 2$  as theoretically expected. With this kind of wave field the global error is less than 1% with only 128 modes/nodes in the horizontal direction to describe the 50 m long wave basin (i.e.  $\simeq 8$  modes per wavelength). That is to say, the exhibited convergence order as well as the fast solution (thanks to the use of FFTs) confirm the great efficiency of our NWT model. This efficiency enables us the crucial solution of shortest wavelengths in the NWT during 3D complex wave fields simulations. These waves are demanding in terms of discretization and are reasonably accessible (in terms of CPU time) only with very efficient numerical models. Remind that the number of modes/nodes in the computational domain depends on the wave length (for a given level of accuracy). Thus, the number used in the paper hereafter would be different if the wave conditions are changed.

## 4. Validations at low steepness

All experiments that are used in the following comparisons are carried out in the ECN wave basin ( $50 \times 30 \times 5$  m). The geometry of the physical wavemaker is taken into account in the NWT (flap with hinge 2.15 m above the bottom). The experimental wavemaker motion serves as input for the NWT, allowing straightforward comparisons between experiments and numerical simulations.

We first propose two validations against experimental results, which do not involve strong nonlinear effects near the wavemaker. For this two cases, the three versions *HOST-wm1* to *HOST-wm3* provide elevation with only minor differences so we focus our attention on the agreement between the model *HOST-wm3* and the experiments. In depth comparisons between the three models are presented in Section 5 when steeper wave fields are generated.

### 4.1. 2D irregular waves: long time simulations

The first validation intends to show the ability of the model to reproduce long-time irregular wave fields in the basin. The



irregular wave field is described by a Bretschneider spectrum with a peak period  $T_p = 2$  s and a steepness  $\varepsilon_c = 3\%$  (the steepness is defined here as the ratio of the significant wave height  $H_s = 4\sqrt{m_0}$  to the wavelength at the peak frequency). The corresponding wavemaker motion is obtained using linear wavemaker transfer function  $TF = a/s$  which relates wavemaker stroke  $s$  to the generated waves amplitude  $a$  (defined here from wave spectrum).

$$X(z, t) = \text{Re} \left[ \sum_{j=0}^N TF_j a_j e^{i(\omega_j t + \varphi_j)} \right] f_v(z) \quad (14)$$

$f_v(z)$  defines the wavemaker vertical geometry (which also characterizes the transfer function used).  $\varphi_j$  is the phase of each component  $j$  which is chosen randomly between 0 and  $2\pi$ . This spectrum has been divided into 1024 frequency components equally spaced in the bandwidth  $[0; 2]$  Hz. This leads to a repeating period of 512 s for the wavemaker motion. The wavemaker is started at  $t = 0$  s with a linear ramp applied during 3 s. The wave elevation is recorded at a probe located 20 m away from the wavemaker for more than 400 peak periods.

Fig. 8 compares the experimental and the HOS wave probe record for the steepness  $\varepsilon_c = 3\%$ . The HOS result is obtained with the *HOST-wm3* model. The time window is focused on a large wave group located at  $t = 760$  s after the beginning of the experiments (*i.e.* long-time propagation,  $380 T_p$ ).

For comparisons, the same simulation is performed with the second-order NWT model named *SWEET* described in [6,7]. The latter NWT exhibits a high level of accuracy for a lower steepness  $\varepsilon_c = 1.5\%$  even for the larger amplitude wave groups where the nonlinear effects are more pronounced (not shown here, see [7]). The probe elevation obtained with the *SWEET* NWT is also shown on Fig. 8.

As shown in [7], the second-order NWT *SWEET* is able to reproduce satisfactorily the major features of the wave field but it fails when a large amplitude wave packet is concerned, as the one between  $t = 760$  and  $765$  s on Fig. 8. The second-order

model *SWEET* shows both a significant phase shift and an incorrect estimation of the wave height around  $t = 763$  s. This NWT does not capture the nonlinear phase velocity of the different wave components involved in the steepest wave packet.

The *HOST* NWT however shows a very good agreement with the experimental data during the entire time range given in Fig. 8, regardless of the local steepness. This kind of simulation shows the efficiency of the NWT to correctly: (i) generate the wave field (ii) propagate waves in the tank and (iii) model the physical wave beach for a long period of time (380 peak periods). The same absorbing zone is used in *SWEET* and *HOST* computations and its calibration is detailed in [7]. The nonlinearities of order greater than two in the propagation process are then of great influence in this kind of computation. Then, their simulations are essential when dealing with wave fields with moderate (and *a fortiori* large) steepness. The significance of our nonlinear NWT is then clear and particularly when simulations involves steep wave fields in the wave flume.

#### 4.2. 3D focused wave packet

The second validation deals with a 3D wave packet embedded in an irregular directional wave field. The encompassing irregular wave field is described by a modified two-parameters Pierson–Moskowitz frequency spectrum with a  $\cos^5 \theta$  directional spreading. The experimental parameters are a 2 s peak period ( $T_p = 1/f_p$ ), a 0.05 m significant wave height ( $H_s$ ) for the frequency spectrum and  $s = 20$  for the spreading.

$$S(f, \theta) = \frac{5H_s^2}{4f_p} \left( \frac{f}{f_p} \right)^5 e^{-\frac{5}{4} \left( \frac{f}{f_p} \right)^4} \cos^5 \theta. \quad (15)$$

We adjust the phases  $\varphi_j$  of the wave components (256 in the range  $f \in [0; 2]$  Hz and  $\theta \in [-\pi; \pi]$ ) in order to obtain a focus at  $x_f = 24.6$  m,  $y_f = 14.3$  m and  $t_f = 70$  s. Spatio-temporal focusing imposes to generate each (directional) component (with angle  $\theta_j$ ) so that all of them are in phase at the position  $(x_f, y_f)$  at

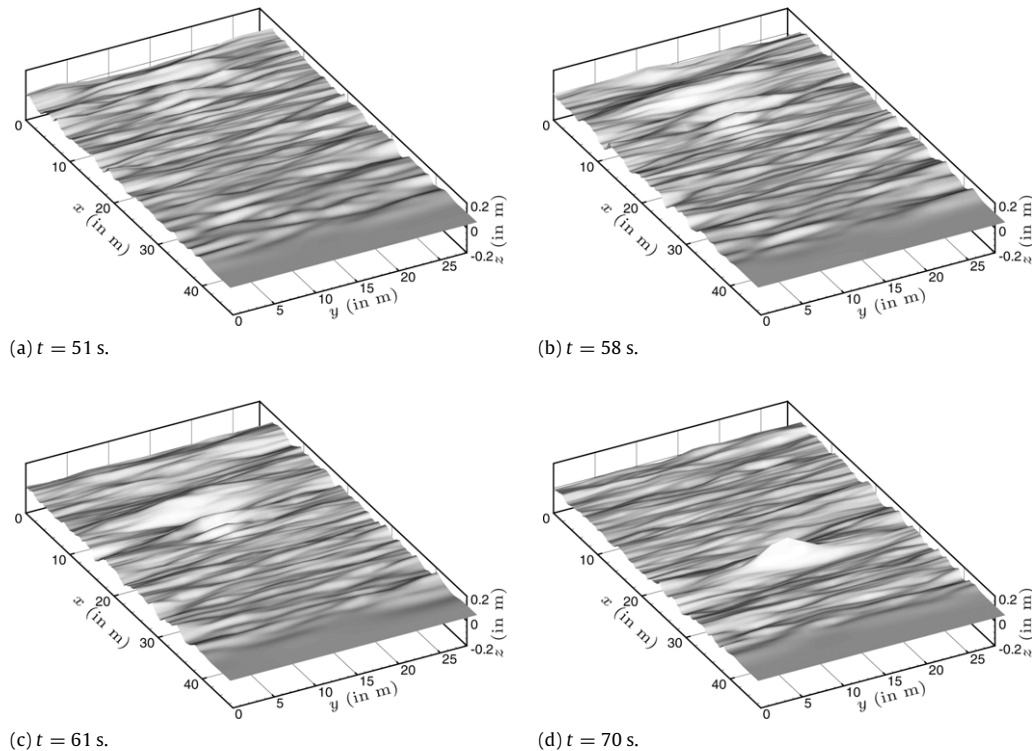


Fig. 9. 3D views of the focusing event.

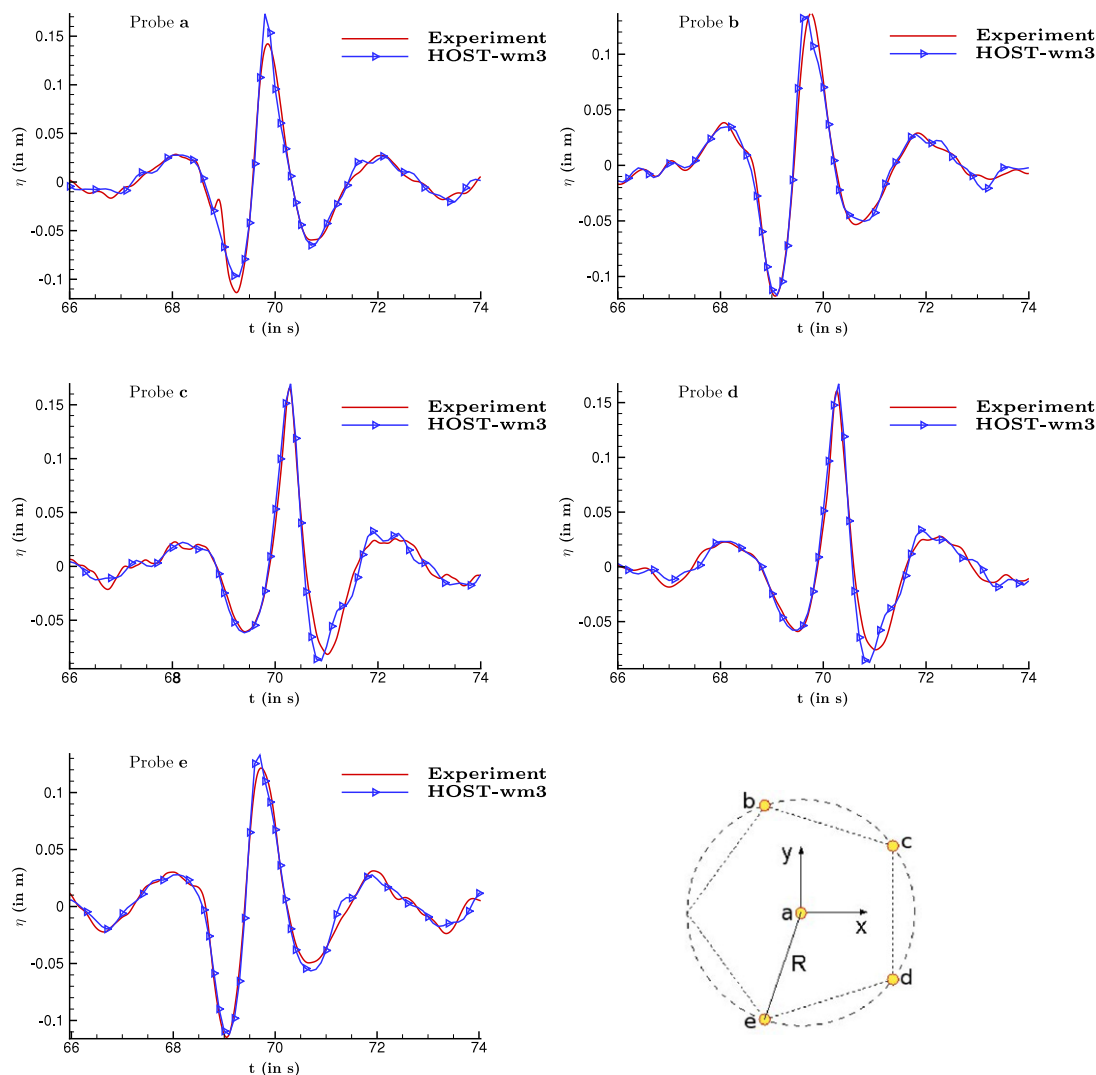


Fig. 10. Experimental and numerical results on probes surrounding the 3D focusing point.

the time  $t_f$ , i.e.  $\varphi_j = -(\omega_j t_f - k_j [x_f \cos \theta_j + y_f \sin \theta_j])$ . This phase adjustment is based on linear dispersion relationship (to deduce wave component celerity). Then, the linear transfer function is used to deduce wavemaker motion. When dealing with directional wave fields, Dalrymple method is used to control the wavemaker instead of the more classical snake's principle. This allows to take into account the presence of reflective side walls in the wavemaker motion. We refer to [28,7] for details about the directional wavemaker theory as well as Dalrymple method. The experiments are reproduced during 90 s with *HOST-wm3* and the following numerical settings:  $257 \times 17$  and  $17 \times 17$  modes respectively on the free surface and wavemaker, HOS order  $M = 5$  and partial dealiasing  $p = 3$ . The total CPU time for this simulation is around 7.5 h on a 2.4 GHz Opteron mono-processor.

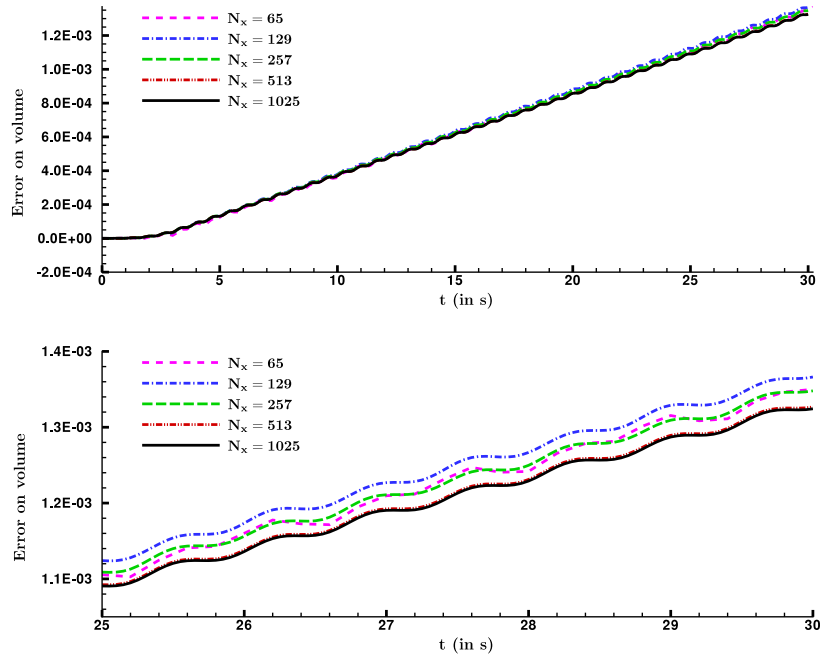
Fig. 9 presents 3D views of the evolving wave field at four different instants during the focusing process. On Fig. 9(a) the wave pattern is the one of the irregular wave field generated from the directional Pierson–Moskowitz spectrum. However, the directional focusing process already started as, close to the wavemaker position ( $x = 0$  m) a long wave was just generated. The typical shape of directional focusing wave fields (concentric pattern with shorter waves generated ahead of longer ones) is well observed at the consecutive instant (see Fig. 9(b) and (c)). At  $t = 70$  s, the directional focusing effectively occurs with a high wave created in the middle of the wave basin, see Fig. 9(d).

This wave presents a moderate local steepness  $H/\lambda = 5\%$ . Fig. 10 presents the wave probes signals from experiments and numerical simulations. The layout of the wave gauges, known as truncated pentagon, is also shown on this figure. This arrangement is widely used for directional wave fields studies (e.g. [29]). The probe **a** is located at the position of the focusing,  $x = 24.6$  m,  $y = 14.3$  m and the other probes are regularly spaced on a circle of 1-m radius around it.

The agreement between experiment and numerical simulation is really good at the focusing point, and on the other probes signals. The quadratic error appears to be less than 4% for all probes. This indicates that the 3D shape of the focused event is correctly reproduced as well as the surrounding troughs and crests. The superposition of different wavelengths and different directions, together with the large nonlinearities present when the wave is focusing, are correctly included within the *HOST* model, which is clearly able to model nonlinear effects in directional seas and complex 3D sea state.

## 5. Validations at moderate steepness

The following validations are intended to show the potential of the models *HOST-wm1*, *HOST-wm2* and *HOST-wm3*. The case of a 2D regular wave field is first studied with comparisons to experiments conducted in the ECN wave tank. The error on the



**Fig. 11.** Convergence on volume with respect to number of modes/points with *HOST-wm1*,  $ka = 0.2$ . Global view (top) and zoom on last 5 s (bottom).

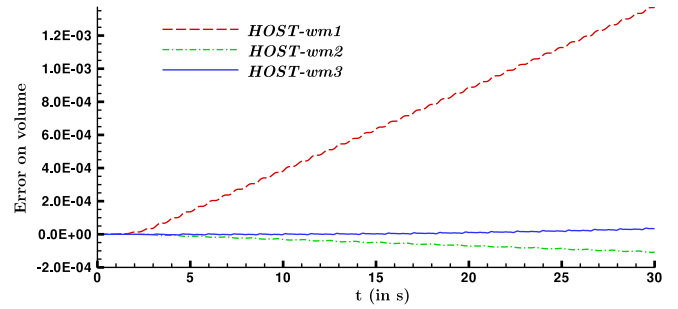
free surface elevation as well as the volume conservation during simulations are analyzed. The study of the return current within the NWT is also carried on. This flow pattern is typical in bounded domains and difficult to simulate. Then, the case of a 2D focused wave packet, embedded in an irregular wave field points out the possible incidence of wavemaker nonlinearities.

### 5.1. 2D regular waves

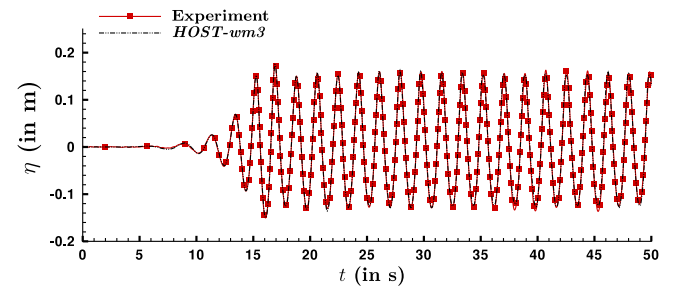
The test case is regular waves propagating along the main direction of the wave basin with a moderate steepness  $ka = 0.2$  and a wave period  $T = 1.83$  s. The physical data consist of a single wave probe record giving the free surface elevation at a distance  $x_p = 16.5$  m from the wavemaker. The wave front arrives at the probe at  $t = 13$  s.

#### 5.1.1. Volume conservation

Prior to compare the three models, we made sure that convergence in terms of Fourier modes is correct. Fig. 11 shows the relative error on the volume for this regular wave field ( $ka = 0.2$ ) when the mesh is refined for the model *HOST-wm1*. Details on the calculation of the volume are given in Appendix A. The NWT clearly converges toward a solution where the volume increases almost linearly in time when the version *HOST-wm1* is used. In all the following simulations, we made sure that the mesh convergence is satisfied regarding the number of points in the horizontal direction as shown above but also in the vertical direction and in terms of order  $M$  and dealiasing. The numerical simulations are therefore performed in 2D with  $N_x = 513$  and  $N_z = 129$  modes in the  $x$  and  $z$  direction respectively and a HOS order  $M = 5$  with a complete dealiasing. Fig. 12 shows the evolution of the relative error on the volume for the previous regular wave field ( $ka = 0.2$ ) and for the three wave generation models. We can observe that the three models are characterized by an error, which is linear in time. For the worst case (*HOST-wm1*) this is less than  $1.3 \cdot 10^{-3}$  after 30 s of propagation. This error is highly reduced with the second-order wave generation model *HOST-wm2* ( $\approx 1 \cdot 10^{-4}$ ) as well as the third-order one *HOST-wm3*, which exhibits the lowest error at the end of the simulation ( $\approx 2 \cdot 10^{-5}$ ).



**Fig. 12.** Comparison between first, second and third-order generation on volume error,  $ka = 0.2$ .  $N_x = 513$ ,  $N_z = 65$ .



**Fig. 13.** Comparison between third-order wave generation and experiments for a regular wave field,  $ka = 0.2$ .

#### 5.1.2. Comparison with experiments

A thorough comparison between experiment and the three *HOST-wm(i)* formulations presented previously is carried out in order to identify the physical process described by each formulation. Fig. 13 presents the wave probe signal in the physical basin and in the NWTs; the three numerical models give results that are significantly different this time, yet only the *HOST-wm(3)* is shown on Fig. 13 for clarity. One can see a correct agreement between experiment and simulation, during the transient wave front as well as during the stationary state.

To estimate the quality of the various models, we compute the global error  $\epsilon$  (cf. Eq. (13)) on the wave probe record between experiment and numerical simulations. The *HOST-wm(i)* models produce 13.8%, 7.0% and 6.2% respectively for  $i = 1, 2$  and 3. The solution is thus clearly improved with the enhanced wavemaker modeling.

A more in-depth analysis of the differences between models is presented below.

### 5.1.3. Differences between *HOST-wm(1)* and *HOST-wm(2)* models

In order to clearly identify the differences between the models of generation, we chose to apply the method used by [30] involving crest and trough wave generation. They proposed to generate two different wave fields: (i) the initial focused event  $\eta$  and (ii) a second focused  $\eta_\pi$  with a  $\pi$  phase shift for each wave components, in order to determine linear and nonlinear contributions occurring in a wave focusing. The sum and difference elevations are evaluated with

$$\eta^+ = \frac{1}{2} (\eta(x, t) + \eta_\pi(x, t))$$

$$\eta^- = \frac{1}{2} (\eta(x, t) - \eta_\pi(x, t)).$$

To explain the meaning of these elevations, we can apply it for instance to a regular wave described at second-order by

$$\eta(x, t) = a \exp[i(kx - \omega t)]$$

$$+ \frac{1}{2} ka^2 \exp[2i(kx - \omega t)] + O((ka)^3).$$

We obtain in this case

$$\eta^+ = \frac{1}{2} ka^2 \exp[2i(kx - \omega t)] + O((ka)^3)$$

$$\eta^- = a \exp[i(kx - \omega t)] + O((ka)^3).$$

The sum elevation  $\eta^+$  thus provides the second-order whereas the difference  $\eta^-$  the first one. In the more general context of a nonlinear elevation, which is not limited to second-order, the sum and difference elevations correspond respectively to even and odd nonlinear orders. They are evaluated with  $\eta$  and  $\eta_\pi$  standing now for fully-nonlinear elevations. Fig. 14 shows the difference between the even and odd elevations obtained with the first and second-order wave generation models.

The difference in sum elevation  $\eta^+(wm2) - \eta^+(wm1)$  identifies clearly an oscillation at frequency  $2\omega$  appearing after  $\simeq 23$  s of propagation in the *HOST-wm2* simulation. This  $2\omega$  wave propagates at the half the group velocity of the target waves: it corresponds to the spurious free wave, which is generated by nonlinear effects near the wavemaker. These waves that are also present in the physical wave basin, are reproduced numerically only with the second-order wave generation model.

For difference elevation,  $\eta^-(wm2) - \eta^-(wm1)$  indicates that the *HOST-wm1* and *HOST-wm2* models differ also by two components: first a  $\omega$  component arriving with the wave front at  $t = 13$  s, and later a  $3\omega$  component reaching the probe at  $t = 30$  s. To understand the existence of such waves one can have a look to the free surface boundary conditions Eq. (4). In the case here of a second-order wave generation, the additional potential is written  $\phi_{add} = \phi_{add}^{(1)} + \phi_{add}^{(2)}$  and it gives the following terms in the dynamic boundary condition

- $\partial_t \phi_{add}^{(2)}$  is related to the free waves of pulsation  $2\omega$  propagating with a group velocity half that of the  $\omega$  waves.
- $|\tilde{\nabla} \phi_{add}^{(1+2)}|^2$  gives a term  $|\tilde{\nabla} \phi_{add}^{(1)} \cdot \tilde{\nabla} \phi_{add}^{(2)}|$  including  $\omega$  and  $3\omega$  components, which appear clearly in bottom part of Fig. 14.
- $\nabla \phi^s \cdot \nabla \phi_{add}^{(1+2)}$ : results also in  $\omega$  and  $3\omega$  components.

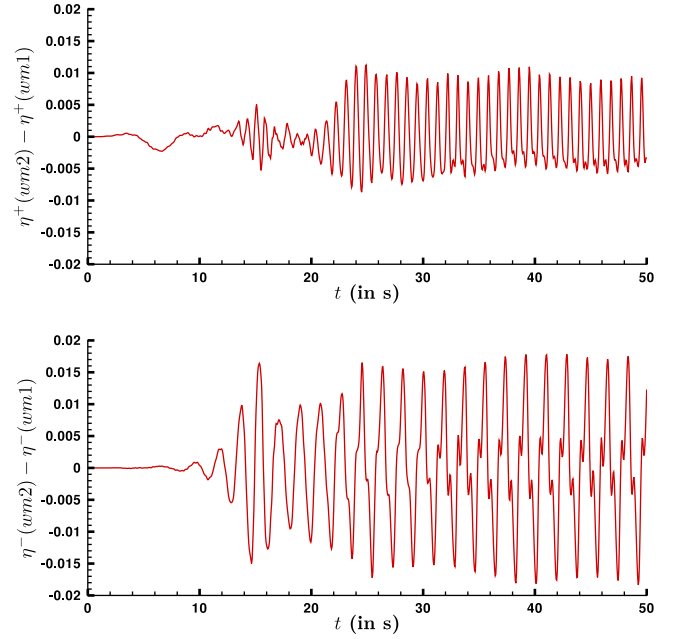


Fig. 14. Differences between first and second-order wave generation using even (top) and odd (bottom) elevation for a regular wave field,  $ka = 0.2$ .

The  $\omega$  component in  $\eta^-(wm2) - \eta^-(wm1)$  proves that third-order effects such as the one mentioned above contribute to the amplitude of the propagating wave field. The  $3\omega$  component arrives later: it corresponds to a free wave also generated by nonlinear effects near the wavemaker.

### 5.1.4. Differences between *HOST-wm(2)* and *HOST-wm(3)* models

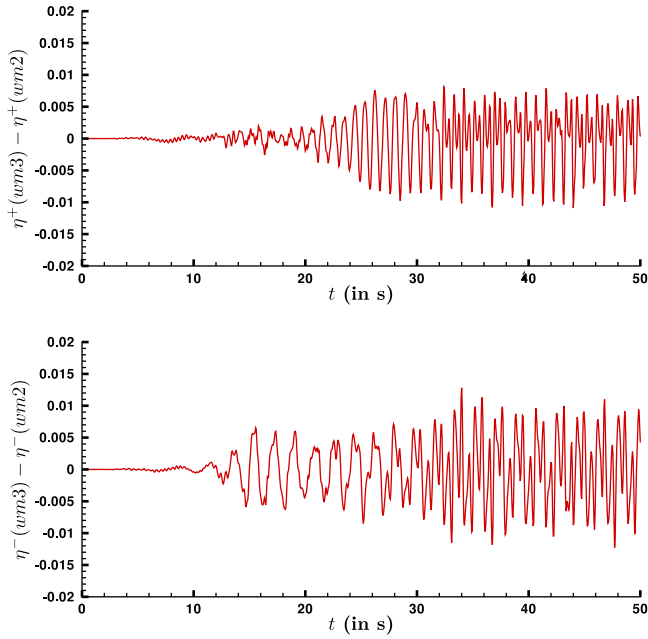
Fig. 15 presents the difference of the odd and even elevations between *HOST-wm2* and *HOST-wm3*. A comparison of the latter with Fig. 14 shows that the process of increasing the order of the wave generation model is indeed converging, more or less rapidly depending on the nature of the waves involved. One may first observe that the amplitude of the difference between the odd elevation is globally lower than in the previous *HOST-wm1* and *HOST-wm2* case (bottom). This means that the other third terms in Eq. (4) also significantly contribute to the total  $\omega$  amplitude in the wave field. Concerning the even elevation (top) we see that the models *HOST-wm2* and *HOST-wm3* give the same results before  $t = 23$  s but not after. The second-order wave generation model is able to reproduce the even nonlinearities before the spurious  $2\omega$  wave field arrives but fails once the latter reaches the probe: in this case, the third-order wave generation is required.

### 5.1.5. Return current

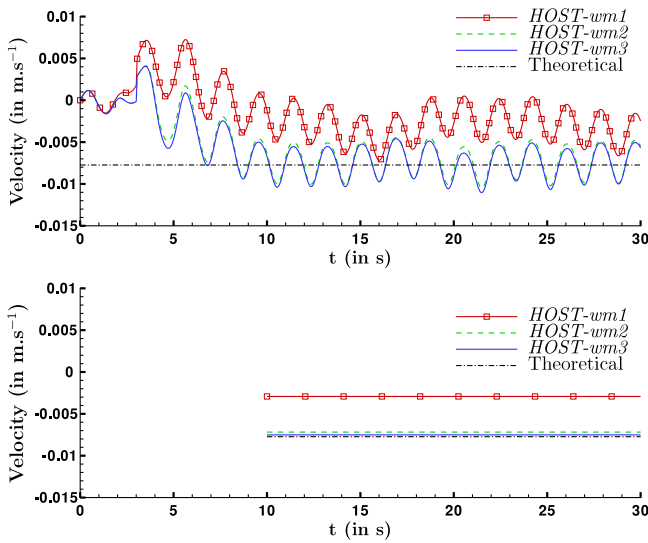
The well known Stokes drift describes a mass transport in the waves direction. This will result, in confined domain such as a wave basin, in the existence of a return current to compensate for the Stokes drift. If we assume a constant velocity profile with depth, the second-order theory of water waves gives the return current (period averaged and averaged over the still water depth—see e.g. [31,32])

$$U_r = -\frac{1}{2} \frac{A^2 \omega}{h} \coth(kh). \quad (16)$$

Fig. 16 presents, on the top part, the current estimated in the simulations with the three methods of wave generation *HOST-wm1*, *HOST-wm2* and *HOST-wm3*. This current is measured at the bottom of the wave basin ( $h = -5$  m) where the wave flow influence is negligible. The velocity calculation is performed at



**Fig. 15.** Differences between second and third-order wave generation using even (top) and odd (bottom) elevation for a regular wave field,  $ka = 0.2$ .



**Fig. 16.** Velocity on bottom during time: *HOST-wm1*, *HOST-wm2*, *HOST-wm3* and theoretical with  $ka = 0.2$ . Exact velocity (top) and mean value (bottom).

$x = 7$  m and one can note that as shown in [33], the return current is traveling with the wave front (at  $t = 10$  s the wave field reaches the location of the velocity probe). After the wave front, the second-order current presents a mean value, the so-called ‘return current’, and an oscillating part at twice the wave frequency. The mean value is shown on the bottom part of Fig. 16. It appears that the *HOST-wm2* and *HOST-wm3* computations are in good agreement with this theoretical result (Eq. (16)), the error being drastically reduced from first to second-order wave generation. The third-order one is, as expected, the most accurate with very slight discrepancy with the theory. Furthermore, this small difference between numerical simulations and the ‘theoretical’ model could maybe be explained by the approximation of second-order water waves as well as a constant velocity profile with depth. However, the discrepancies observed with the *HOST-wm1* model are due to the strong hypothesis of a first-order wavemaker and more precisely, are mainly due to the volume drift observed previously.

Indeed, a change of global volume could be seen as a non-null flow rate through a given water column and thus resulting in a change of the return current (which ensure the global mass conservation inside the wave basin). Thus, it appears that some complex phenomena could only be correctly modeled with the high-order (second or third) wave generation. The relevance of the improved wavemaker modeling is clear. It is to be noted that the interesting feature of the return current in a 3D wave basin (i.e. with 3D wave sea patterns) can be easily analyzed with our method.

## 5.2. Limitations

During the development of this enhanced wavemaker models, we observed few limitations. Particularly, when one tries to simulate the propagation of steep waves ( $ka = 0.3$  and larger), some problems occur during the solution with the *HOST-wm3* model. Sawtooth instabilities appear in the additional solution, which do not allow a correct simulation. As far as spectral methods are concerned, this kind of instability may be typical of aliasing. However all the products are evaluated using an alias-free scheme (see Section 3.3.2) so the instability is more likely related to the wave generation process (additional problem) rather than wave propagation (HOS method).

To analyze the origin of such instabilities, one has to look at the wavemaker boundary conditions at third-order Eq. (8). This condition implies the computation of the third-order spatial derivative of the first-order velocity potential  $\partial_{xxx}\phi^{(1)}$  and the second-order spatial derivative of the second-order velocity potential  $\partial_{xx}\phi^{(2)}$ . These derivations are performed in the Fourier domain and they could induce some stability problems: the successive derivations increase the numerical errors, particularly for larger modes (multiplication by  $k^3$  or  $k^2$ ). Indeed, the behavior of Fourier components at large wavenumbers depends on the regularity of the function. We may investigate separately the additional potential  $\phi_{add}$  and the remaining component  $\phi_{spec}$ .

To guarantee first the regularity of the additional potential at the different orders we have removed two sources of discontinuity. As seen in Section 3.1 a matching surface is determined to build the additional domain where the additional problem is solved. This surface is chosen with continuous derivatives up to the third-order to ensure the regularity of the different derivatives further needed in the numerical computation. Furthermore, a discontinuity of  $\phi_{add}^{(1)}$  appears at the bottom of the flap (rotation axis) in the case of a hinged-flap wavemaker (typically used in wave basins). This singularity is removed smoothing locally around the hinge the vertical geometry of the flap, in order to obtain an additional potential whose derivatives are continuous up to the third-order. This is obtained thanks to a 6th order polynomial in a small smoothing zone around the hinge. Once this is done, the Fourier components of  $\phi_{add}^{(1)}$  decrease faster than  $k^{-4}$ , which ensures a correct spatial derivation. It also follows that the second-order additional potential is twice derivable.

The second step is to study the second component of the potential, i.e. the potential  $\phi_{spec}$ . Particularly, the wavemaking process involves  $\partial_{xxx}\phi_{spec}^{(1)}$  as well as  $\partial_{xx}\phi_{spec}^{(2)}$  at the position of the wavemaker ( $x = 0$ ). The first term involving the third derivative in  $x$  of a quantity will be equal to 0: we recall that the spectral expansions of the different quantities (including  $\phi_{spec}^{(i)}$ ) involve cosine series, Eqs. (9) and (10). Studying the behavior of  $\partial_{xx}\phi_{spec}^{(2)}$  informs us that the decrease of its Fourier series components is around  $k^{-2}$  for the steep cases, which induce the problematic sawtooth instabilities. Thus, for these wave fields, the regularity of this function is not sufficient to provide with good accuracy its second-order spatial derivative (multiplication by  $k^2$ ) and

consequently the third-order wave generation is not resolved properly. This feature is mainly due to the way  $\phi_{\text{spec}}^{(2)}$  is obtained during the SWEET solution process. Indeed, its computation involve several derivatives of the first-order quantities, which results in a lower convergence rate for this quantity. To overcome this difficulty, one can think about applying some kind of filtering for instance but up until now, no satisfactory scheme have been obtained for the treatment of very steep wave fields with *HOST-wm3* model.

### 5.3. Focused waves

The next step in validation is to consider a transient wave field with a full range of frequencies and not only a single frequency as for the regular wave previously studied. We test the NWT for the generation of a focused wave packet where the nonlinear effects consist of more complex wave-wave interactions. A set of experiments has been conducted in the ECN wave tank with the following superposition of 2 wave fields (2D):

- Irregular wave field defined by a Bretschneider spectrum  $H_s = \alpha \cdot 0.5 \text{ m}$  and  $T_p = 3.13 \text{ s}$ .
- Focused wave packed defined by a Bretschneider spectrum  $H_s = \alpha \cdot 0.075 \text{ m}$  and  $T_p = 3.13 \text{ s}$  with phases adjusted to produce a focusing at the specified position.

As seen previously, wavemaker motion is obtained for each wave field from Eq. (14) before the superposition. 512 wave components are used to describe each spectrum in the range  $f \in [0; 2] \text{ Hz}$ . Random phases (between 0 and  $2\pi$ ) are used for the first one while they are adjusted to have focusing at a distance  $x_f = 16.1 \text{ m}$  from the wavemaker at  $t_f = 17 \text{ s}$  for the second one. The above spectra parameters have been tuned experimentally to provide a wave field suitable to study the survivability of a wave energy converter device. The case  $\alpha = 1$  is the steepest wave field we could possibly generate without having wave breaking between the wavemaker and the probes location. With this set-up, the wave breaks just after the wave probes.

The numerical simulations are performed with  $N_x = 513$  modes on the free surface and  $N_z = 129$  modes on the wavemaker. The HOS order is fixed to  $M = 5$  with a complete dealiasing and the duration of the simulation is  $t = 30 \text{ s}$  real time (when no wave-breaking occur) for a total CPU time of around 450 s on a 2.4 GHz Opteron mono-processor (*HOST-wm3*).

As noted in Section 5.2, for highly nonlinear sea states some stability problems could occur. This is the case for the steepest wave fields described above. Then, we put our interest here only on the cases  $\alpha = [0.5; 0.6; 0.7]$  for the comparisons between the different *HOST-wm(i)* models. The cases with  $\alpha = [0.8; 0.9; 1.0]$  have already been successfully simulated with *HOST-wm1* and *HOST-wm2* models (see [13]). Note that the simulation of irregular seas possibly include highly nonlinear waves. Indeed, those events are usually localized in space and time in this configuration. Consequently, numerical instabilities observed with regular waves are greatly reduced, allowing simulation of those complex nonlinear wave fields.

#### 5.3.1. Surface elevation

In order to assess the higher accuracy of the *HOST-wm3* model, the 3 models of generation are used on the cases  $\alpha = [0.5; 0.6; 0.7]$  and compared to the experiments. The simulations are 30 s long and no wave breaking occurs here. Fig. 17 presents the comparison between experimental results and numerical simulations with the three models of generation for  $\alpha = 0.7$ . One can see that experiments and numerical simulations are in good agreement for the three models (top). The bottom part of Fig. 17 presents a closer view of the focused event and it reveals

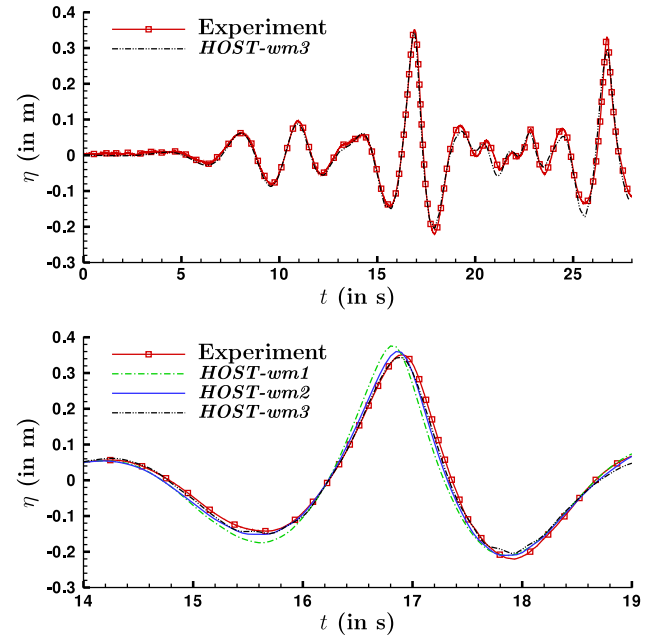


Fig. 17. Comparison between first, second and third-order generation and experiments ( $\alpha = 0.7$ ).

Table 1

Global error  $\epsilon$  with respect to wavemaker modeling for different choices of  $\alpha$ .

	<i>HOST-wm1</i> (%)	<i>HOST-wm2</i> (%)	<i>HOST-wm3</i> (%)
$\alpha = 0.5$	13.7	9.8	8.2
$\alpha = 0.6$	14.6	10.1	7.4
$\alpha = 0.7$	18.8	13.7	9.5

that the *HOST-wm1* model fails to accurately reproduce this event, more specifically the trough preceding the focused crest and this crest itself. The higher-order generation models allows to correct the errors observed with the linear one. In order to quantify the improvement of the higher-order models, Table 1 presents the global error on the wave elevation (Eq. (13)) evaluated over the 30 s simulation with the three models of wave generation. The cases  $\alpha = [0.5; 0.6; 0.7]$  are listed. The first point to note is that the error in Table 1 increases with the wave amplitude  $\alpha$ , that is to say, with nonlinearities. We can also see that both *HOST-wm2* and *HOST-wm3* models present real improvements compared to *HOST-wm1*. The *HOST-wm3* model is in this study still, as expected, the most accurate model.

As most of the nonlinear effects are correctly solved by the *HOST-wm2* model and as this model does not suffer the stability problems encountered with the *HOST-wm3*, it seems to be a good compromise between accuracy/stability and solution efficiency.

#### 5.3.2. Pressure calculations

In this section, we focus our attention on the calculation of the pressure under the free surface. The experimental set up of the focused wave presented before also provide pressure gauges. The case of interest here is  $\alpha = 0.7$  and the numerical simulations are performed with the *HOST-wm3* model.

As regards the numerical evaluation of the pressure inside the fluid domain, a specific technique is implemented in our model; it is adapted from a previous work by [34] who developed the so-called  $H$  and  $H_2$  operators in a DNO method (which is equivalent in its accelerated version to the HOS scheme). Further details on these underwater velocity/pressure calculation can be found in [25] where it has especially been demonstrated that: the best way of calculating the underwater kinematics (and thus the pressure)

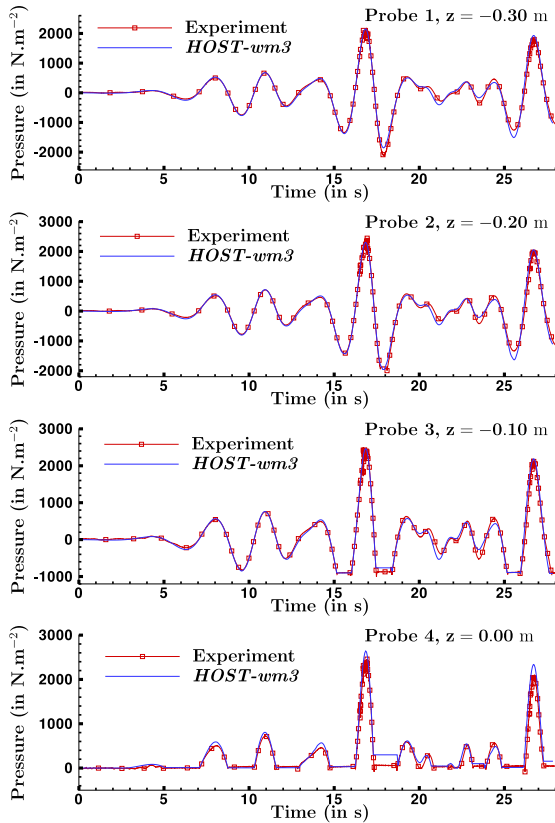


Fig. 18. Comparison of pressure under the free surface between numerical simulations *HOST-wm3* and experiments.

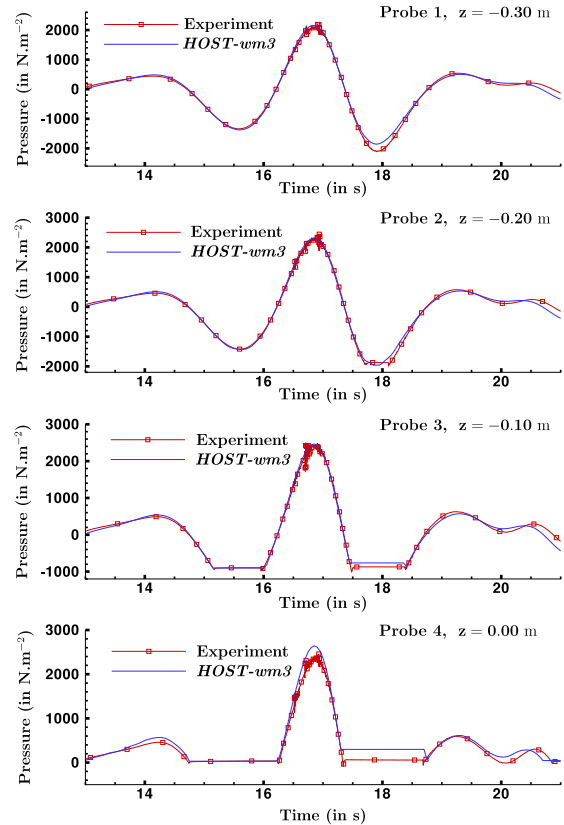


Fig. 19. Zoom of Fig. 18, comparison of pressure between numerical simulations *HOST-wm3* and experiments.

is to take as initial value the corresponding velocity at the free surface and not the surface velocity potential. Furthermore, the  $H_2$  operator has been found substantially more accurate than the  $H$  one with steep waves.

The comparisons are achieved on the pressure gauges signals located at the focusing position and at different depths ( $z = -0.30, -0.20, -0.10$  et  $0.00$  m). Results are presented on Fig. 18 and note that the  $y$ -axis denotes the dynamic pressure of the flow.

Firstly, one can note in this figure some flat parts in the temporal signals. These corresponds to the time periods where the pressure sensors are outside the fluid. In the calculations, one assumed the pressure to have a constant value during these excursions outside the fluid for easier comparison between experiments and numerical simulations. Note that the small errors observed on the level of these flat parts are mainly due to a little phase-shift between experiments and numerical simulations. This induces that the moment of the beginning of the excursion is not perfectly reproduced and consequently that one has an incorrect level for the whole flat part. Otherwise, the numerical simulations are in excellent agreement for each probe during the whole experiment. A zoom on the more demonstrative part (focused wave formation) is reported in Fig. 19.

The accuracy of the simulation of this highly nonlinear phenomenon is confirmed. Little discrepancies exist and particularly on the probe signal located at  $z = 0$  m. This is due to the numerical operator  $H_2$  used to compute this pressure, which tends to amplify numerical errors close to the free surface. However, the numerical simulations have still good accuracy compared to experiments.

These comparisons demonstrates again the capabilities of our model, able to accurately reproduce not only the kinematics of the evolution in the wave tank but also the free-surface and underwater dynamics.

## 6. Conclusion

In the present paper, the development of an efficient and accurate 3D NWT is presented. It is based on a nonlinear HOS scheme, which exhibits attractive numerical characteristics such as a fast solution with FFTs coupled to an accelerated scheme, and a fast convergence providing high accuracy when the nonlinear products involved are carefully dealiased. This numerical model was initially applied to unbounded domain and recent developments have extended the method application range to the modeling of a wave tank including all its features: directional wavemaker, absorbing zone, perfectly reflective side walls.

The HOST method and its numerical properties have been detailed and more particularly the wavemaker modeling, which appears to be a key point in the simulation, is detailed. The concept of additional potential is introduced allowing a spectral solution of the wavemaking problem. The new expansion to the third-order wave generation based on the improvement of the first and second-order model described previously in [13] is detailed. This leads to a new NWT, namely *HOST-wm3* whose characteristics in terms of efficiency and accuracy are investigated.

Firstly, validations with low steepness cases have been carried out to assess the accuracy of the solution. In the first place, long-time 2D irregular waves are studied. The successful comparisons emphasize the ability of the numerical model to: (i) correctly generate the wave field (ii) accurately propagate waves in the tank and (iii) satisfactorily model the physical absorbing beach. Furthermore the improvements of our fully-nonlinear NWT compared to a second-order one are discussed.

Secondly, the complex case of a 3D directional focusing event embedded inside a 3D irregular wave field is studied. We provide convincing comparisons between the *HOST-wm3* model and experiments on different wave probes signals measured around

the focusing point. The accurate simulation of this 3D focused event indicates the ability of the model to deal with complex 3D sea states and thus to reproduce any experiments conducted in a rectangular wave tank (with the exception of breaking waves).

The last part presents different validations/applications with wave fields at moderate steepness. Firstly, the case of 2D regular waves ( $ka = 0.2$ ) is presented. Some experiments have been conducted in the ECN wave basin and comparisons on a wave probe signal indicate the accuracy of our *HOST* models. The improvements of the second and third-order wave generation are established compared to the first-order one and are investigated in details. The advanced wavemaker modeling allows more accurate simulations and particularly allow to take into account the different physical processes involved during the wave generation (e.g. generation of free waves). The volume conservation during numerical simulations is also studied, confirming the improvements observed with the advanced wavemaker modeling. These appear also clearly during the study of the return current inside the wave tank. However, stability issues with the third-order model are reported on at large steepness, limiting its range of application. Note that it has been found previously [13] that the second-order wave model is still accurate at large steepness.

The necessity of such an advanced model to precisely reproduce all the physical features occurring in a wave tank is then clear. In the end, the case of a 2D focused wave packet embedded in an irregular wave field is analyzed. This kind of sea pattern involves a wide range of wavemaker motions and nonlinearities. This test case is thus suitable for the study of the improved wavemaker modeling and the excellent agreement obtained between *HOST-wm3* and experiments confirms the accuracy of our method.

## Appendix. Volume calculation

Here is explained the method used to compute the 2D volume  $\mathcal{V}$  inside the fluid domain  $D$ . One recalls that the depth is in non dimensional form  $h = 1$

$$\mathcal{V}(t) = \int_D d\mathcal{V} = \int_{X(z,t)}^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz. \quad (\text{A.1})$$

The volume is split in different parts

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t) &= \int_{X(z,t)}^0 \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz + \int_0^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \int_{X(z,t)}^0 \int_{-1}^0 dx dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz \\ &\quad + \int_0^L \int_{-1}^0 dx dz + \int_0^L \int_{-1}^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \int_{-1}^0 X(z,t) dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz + L + \int_0^L \eta(x,t) dx \\ &= L + \int_0^L \eta(x,t) dx + \int_{-1}^0 X(z,t) dz + \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz \\ &= \mathcal{V}_{\text{rest}} + \mathcal{V}_{\text{SL}} + \mathcal{V}_{\text{wmk}} + \mathcal{V}_{\text{int}}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

with  $\mathcal{V}_{\text{rest}} = L$  the volume of the wave basin at rest,  $\mathcal{V}_{\text{FS}} = \int_0^L \eta(x,t) dx$  the volume of the free surface (without wavemaker),  $\mathcal{V}_{\text{wmk}} = \int_{-1}^0 X(z,t) dz$  the one due to the presence of the wavemaker (without free surface elevation) and finally  $\mathcal{V}_{\text{int}} = \int_{X(z,t)}^0 \int_0^{\eta(x,t)} dx dz$  the correction to take into account the simultaneous presence of the wavemaker and the free surface.

Computation of  $\mathcal{V}_{\text{rest}}$ ,  $\mathcal{V}_{\text{FS}}$  et  $\mathcal{V}_{\text{wmk}}$  is straightforward, only  $\mathcal{V}_{\text{int}}$  as to be approximated

$$\mathcal{V}_{\text{int}} \simeq X(0,t) \eta(0,t) \quad (\text{A.3})$$

one refers to [35] for more details on volume calculations and particularly to assess that this computation of  $\mathcal{V}_{\text{int}}$  is precise up to second-order.

## References

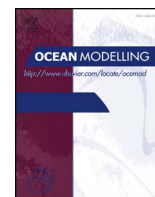
- [1] J.C. Park, M.H. Kim, H. Miyata, H.H. Chun, Fully nonlinear numerical wave tank (NWT) simulations and wave run-up prediction around 3D structures, *Ocean Eng.* 30 (2003) 1969–1996.
- [2] G. Wu, Q. Ma, R.E. Taylor, Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method, *Appl. Ocean Res.* 20 (1998) 337–355.
- [3] Q.W. Ma, S. Yan, QALE-FEM for numerical modelling of non-linear interaction between 3D moored floating bodies and steep waves, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 78 (2009) 713–756.
- [4] S. Yan, Q.W. Ma, QALE-FEM for modelling 3D overturning waves, *Internat. J. Numer. Methods Fluids* 63 (2010) 743–768.
- [5] C. Fochesato, S. Grilli, F. Dias, Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing, *Wave Motion* 44 (2007) 395–416.
- [6] F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, A fully-spectral time-domain model for second-order simulation of wavetank experiments. Part A: formulation, implementation and numerical properties, *Appl. Ocean Res.* 28 (2006) 33–43.
- [7] F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, A fully-spectral time-domain model for second-order simulation of wavetank experiments. Part B: validation, calibration versus experiments and sample applications, *Appl. Ocean Res.* 28 (2006) 121–132.
- [8] M. Chern, A. Borthwick, R.E. Taylor, A pseudospectral  $\sigma$  transformation model of 2D nonlinear waves, *J. Fluids Struct.* 13 (1999) 607–630.
- [9] C. Kim, A. Clément, K. Tanizawa, Recent research and development of numerical wave tanks—a review, *Int. J. Offshore Polar Eng.* 9 (1999) 241–256.
- [10] B. West, K. Brueckner, R. Janda, M. Milder, R. Milton, A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.* 92 (1987) 11803–11824.
- [11] D. Dommermuth, D. Yue, A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.* 184 (1987) 267–288.
- [12] D. Dommermuth, The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme, *Wave Motion* 32 (2000) 307–317.
- [13] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, Implementation and validation of nonlinear wave maker models in a HOS numerical wave tank, *Int. J. Offshore Polar Eng.* 16 (2006) 161–167.
- [14] V. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* (1968) 190–194.
- [15] J.-H. Westhuis, The numerical simulation of nonlinear waves in a hydrodynamic model test basin, Ph.D. Thesis, Universiteit Twente–MARIN, Twente, The Netherlands, 2001.
- [16] Y. Agnon, H.B. Bingham, A non-periodic spectral method with applications to nonlinear water waves, *Eur. J. Mech. B Fluids* 18 (1999) 527–534.
- [17] F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, Génération de houle directionnelle au second ordre: prédiction et contrôle des ondes libres, in: *Proc. 16ème Congrès Français de Mécanique* (in French).
- [18] J.R. Cash, A.H. Karp, A variable order Runge–Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides, *ACM Trans. Math. Software* 16 (1990).
- [19] F. Bonnefoy, G. Ducrozet, D. Le Touzé, P. Ferrant, Time-domain simulation of nonlinear water waves using spectral methods, in: Qingwei Ma (Ed.), *Advances in Numerical Simulation of Nonlinear Water Waves*, The World Scientific Publishing Co., 2010, (Chapter 4).
- [20] W. Craig, C. Sulem, Numerical simulation of gravity waves, *J. Comput. Phys.* 108 (1993) 73–83.
- [21] W. Bateman, C. Swan, P. Taylor, On the efficient numerical simulation of directionnally-spread surface water waves, *J. Comput. Phys.* 174 (2001) 277–305.
- [22] H. Schäffer, Comparison of Dirichlet–Neumann operator expansions for nonlinear surface gravity waves, *Coastal Eng.* 55 (2008) 288–294.
- [23] M. Onorato, A. Osborne, M. Serio, On the relation between two numerical methods for the computation of random surface gravity waves, *Eur. J. Mech. B Fluids* 26 (2007) 43–48.
- [24] D. Fructus, D. Clamond, J. Grue, O. Kristiansen, An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: free space problems, *J. Comput. Phys.* 205 (2005) 665–685.
- [25] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, Development of a fully nonlinear water wave simulator based on higher order spectral theory, in: *Proc. 20th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Longyearbyen, Norway.
- [26] G. Ducrozet, Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectrale, Ph.D. Thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2007 (in French).
- [27] C. Canuto, M. Hussaini, A. Quarteroni, T. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, in: Springer Series in Comp. Phys., Springer, 1986.



- [28] F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, Using a nonlinear spectral model for preparing three-dimensional wave experiments, in: Proc. 23rd Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engng., Vancouver, British Columbia, Canada.
- [29] M. Benoît, C. Teisson, Laboratory comparison of directional wave measurement systems and analysis techniques, in: Proc. of the 24th Int. Conf. on Coastal Engng., ASCE, Kobe, Japan, 1994, pp. 42–56.
- [30] T. Baldock, C. Swan, P. Taylor, A laboratory study of nonlinear surface waves on water, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* 354 (1996) 649–676.
- [31] B. Molin, *Hydrodynamique des structures offshore*, Editions Technip, 2002, (in French).
- [32] R. Dean, R. Dalrymple, *Coastal Processes with Engineering Applications*, Cambridge University Press, 2002.
- [33] Y. Stassen, *Simulation numérique d'un canal à houle bidimensionnel au troisième ordre d'approximation par une méthode intégrale*, Ph.D. Thesis, Ecole Centrale de Nantes, 1999.
- [34] W. Bateman, C. Swan, P. Taylor, On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally-spread wavefield, *J. Comput. Phys.* 186 (2003) 70–92.
- [35] F. Bonnefoy, *Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes*, Ph.D. Thesis, École Centrale de Nantes, 2005 (in French).

## **B.2 Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments : Wave-breaking onset**

L'article suivant présente les premiers développements effectués pour la prise en compte des événements déferlants dans la modélisation HOS. Le critère de déferlement est validé par rapport à une série d'expériences réalisées dans les bassins de l'ECN qui sont également présentées dans cette publication. On trouvera dans cet article des détails concernant la section 2.6 du présent mémoire de recherches.



# Simulation of breaking waves using the high-order spectral method with laboratory experiments: Wave-breaking onset



Betsy R. Seiffert<sup>a,\*</sup>, Guillaume Ducrozet<sup>b</sup>, Félicien Bonnefoy<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Department of Ocean & Mechanical Engineering, Florida Atlantic University, 777 Glades Road, Boca Raton, FL 33431-0991, USA

<sup>b</sup> École Centrale de Nantes, LHEEA Lab, UMR CNRS 6598, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes, France

<sup>c</sup> Institut de Recherche Technologique Jules Verne, Chemin du Chaffault, 44340 Bouguenais, France

## ARTICLE INFO

### Keywords:

Wave-breaking  
High-Order spectral method  
Laboratory experiments  
Numerical wave tank  
Wave focusing

## ABSTRACT

This study investigates a wave-breaking onset criteria to be implemented in the non-linear potential flow solver HOS-NWT. The model is a computationally efficient, open source code, which solves for the free surface in a numerical wave tank using the High-Order Spectral (HOS) method. The goal of this study is to determine the best method to identify the onset of random single and multiple breaking waves over a large domain at the exact time they occur. To identify breaking waves, a breaking onset criteria based on the ratio of local energy flux velocity to the local crest velocity, introduced by Barthelemy et al. (2017) is selected. The breaking parameter is uniquely applied in the numerical model in that calculations of the breaking onset criteria ratio are not made only at the location of the wave crest, but at every point in the domain and at every time step. This allows the model to calculate the onset of a breaking wave the moment it happens, and without knowing anything about the wave *a priori*. The application of the breaking criteria at every point in the domain and at every time step requires the phase velocity to be calculated instantaneously everywhere in the domain and at every time step. This is achieved by calculating the instantaneous phase velocity using the Hilbert transform and dispersion relation. A comparison between more traditional crest-tracking techniques shows the calculation of phase velocity using Hilbert transform at the location of the breaking wave crest provides a good approximation of crest velocity.

The ability of the selected wave breaking criteria to predict single and multiple breaking events in two dimensions is validated by a series of large-scale experiments. Breaking waves are generated by energy focusing and modulational instability methods, with a wide range of primary frequencies. Steep irregular waves which lead to breaking waves, and irregular waves with an energy focusing wave superimposed are also generated. This set of waves provides a wide range of breaking-wave strengths, types and scales for validation of the model. A comparison of calculations made using HOS-NWT with experimental measurements show that the model is successful at predicting the occurrence of wave breaking, as well as accurately calculating breaking onset time and location.

Although the current study is limited to a unidirectional wave field, the success of the wave-breaking model presented provides the basis for application of the model in a multidirectional wave field. By including wave breaking onset with the addition of an appropriate energy dissipation model into HOS-NWT, we can increase the application range of the model, as well as decrease the occurrence of numerical instabilities that are associated with breaking waves in a potential flow solver. An accurate description of the wave field is useful for predicting the dynamic response of offshore vessels and marine renewable energy devices, predicting loads on marine structures and the general physics of ocean waves, for example.

## 1. Introduction

The nonlinear and irregular processes that occur just before a wave breaks make predicting onset difficult. Breaking develops quickly, reportedly as fast as half of a wave period (Babanin et al., 2010; Chalikov and Babanin, 2012), and deep water breaking waves can range from a

highly energetic plunging breaker to a mildly sloping spilling breaker. Grue and Jensen (2012) observed “backward breaking” characterized by a steep negative slope on the back side of the wave and an asymmetric velocity field behind the wave crest. Therefore, even the definition of wave-breaking onset itself can be somewhat subjective given these challenges.

\* Corresponding author at: Department of Ocean & Mechanical Engineering, Florida Atlantic University, 777 Glades Road, Boca Raton, FL 33431-0991, USA.  
E-mail address: [eseiffert@fau.edu](mailto:eseiffert@fau.edu) (B.R. Seiffert).

Wave-breaking onset criteria is traditionally classified into one of three categories: geometric, kinematic or dynamic. Perlin et al. (2013) provides a recent review of each of the three wave breaking criteria and the strengths a limitations of each.

Geometric criteria use a limiting steepness parameter to determine wave breaking onset. Babanin et al. (2011) claims that waves break not because of a particular physical mechanism, but because they have reached a limiting steepness and the water surface becomes unstable, regardless of the process behind steepness growth. Babanin et al. (2007) investigated the causes of wave breaking in initially monochromatic, two-dimensional waves using both numerical and experimental methods. Measurements of steepness, skewness and asymmetry were made for initially monochromatic waves that evolve to breaking due to Benjamin–Feir instability. The authors conclude that the Stokes' limiting steepness is the single parameter which determines whether the wave will break. However laboratory experiments such as Rapp and Melville (1990); Tulin and Waseda (1999); Tian et al. (2008), and Tian et al. (2012) demonstrate that the limiting steepness is smaller than the Stokes' limiting steepness and can vary widely according to breaker type and the method used to generate the breaking event. Through the numerical calculations of Barthelemy et al. (2017) and experimental measurements of Saket et al. (2017), it was shown that the variation in wave steepness at breaking made it unsuitable as a breaking onset parameter. Furthermore, due to the nature of the wave crests generated during irregular wave propagation, determining an accurate and repeatable breaking parameter based on wave steepness that would be applicable to irregular waves presents many difficulties, and is impractical.

Kinematic breaking criteria is based on the relationship between the horizontal wave crest particle velocity  $U$  and the wave phase speed  $C$ , in that wave breaking occurs when  $U/C \geq 1$ . Difficulty arises in this criteria when determining  $U$  and  $C$  for highly unsteady and rapidly changing waves. Stansell and MacFarlane (2002) experimentally investigated the kinematic criteria using PIV measurements and using three different methods of determining  $C$ . Even so, they found  $U/C$  to be a maximum of 0.81 for plunging breakers and 0.95 for spilling breakers. This suggests that the kinematic criteria may underestimate wave breaking. Wu and Nepf (2002) examined kinematic criteria in three-dimensional experiments. They reported  $U/C \geq 1$  successfully predicted breaking waves. Additionally, they found that for 3D plunging breakers,  $U/C \geq 1.5$  and for spilling breakers  $U/C \geq 1$ . For modulational wave breaking, Tulin and Landrini (2001) suggest the wave will eventually break if the orbital velocity exceeds the phase velocity.

Researchers such as Melville and Matusov (2002); Banner and Peirson (2007); Tian et al. (2010), and Shemer (2013) have used PIV to investigate kinematic criterion with results showing that a wave will break when the ratio of horizontal fluid velocity at the crest to crest speed  $U/C$  is in the range between 0.75 and 0.95. In their computations for deep water irregular waves with breaking, Kurnia and van Groesen (2014) compared criterion of  $U/C = 0.8$  and  $U/C = 1$ , and found the overall differences in post breaking water surface to be small.

Song and Banner (2002) developed a dynamic wave breaking onset threshold parameter for two-dimensional nonlinear waves based on the growth rate of the mean local wave energy. The experimental results of Banner and Peirson (2007); Tian et al. (2008) and Tian et al. (2010) further validate the use of the dynamic breaking parameter introduced by Song and Banner (2002) but with some modifications of the choice of local wave number. Recently, Derakhti and Kirby (2016); Derakhti et al. (2016a) and Derakhti et al. (2016b) have proposed a modified wave breaking onset threshold parameter based on the breaking parameter of Song and Banner (2002) for use in their non-hydrostatic numerical model, NHWAVE.

In their numerical calculations, Barthelemy et al. (2017) concluded that the breaking parameter of Song and Banner (2002) was not applicable to 3D and have proposed a new wave breaking threshold parameter based on the ratio of local energy flux velocity to the local

crest velocity. Barthelemy et al. (2017) argues that wave-breaking occurs when a waveform is unable to remain stable due to an excess of local wave energy flux, which can be caused by wave energy focusing, wind input or wave-current interaction, for example. The local energy flux velocity is calculated as the ratio of the local energy flux vector to local energy density. Some researchers, Banner et al. (2014) and Barthelemy et al. (2017), for example, have observed a slowdown in crest velocity just before breaking onset, and based on this observation, Barthelemy et al. (2017) defines a breaking criterion as  $B_x = F_x/(Ec_x)$  where  $F_x$  and  $c_x$  are the projections in the direction of wave propagation (in this case, the  $x$ -axis) of energy flux and crest velocity, respectively, and  $E$  is the local energy density. Barthelemy et al. (2017) performed numerical calculations using the WSIM Boundary Element Method code (Grilli et al., 1989; 2001) and determined that wave breaking occurs in the narrow range of  $0.85 < B_x < 0.86$  for both 2D and 3D, and sub-surface analysis of this parameter found the maximum value for  $B_x$  at the free surface. When comparing the parameter  $B_x$  with local wave steepness ( $S_c$ ) just before breaking,  $B_x$  was found to have a much smaller threshold range when it came to distinguishing between a breaking versus a non-breaking wave than steepness. Saket et al. (2017) investigated the breaking criterion of Barthelemy et al. (2017) experimentally and found  $B_x$  to be  $0.84 \pm 0.016$ , which is in good agreement with Barthelemy et al. (2017). Additionally, Saket et al. (2017) found this threshold parameter to be robust for different classes of wave groups and wave steepness.

It is noted that at the free surface where pressure can be approximated as zero, the energy flux velocity reduces to the water particle velocity, reducing this dynamic breaking criterion to a kinematic criterion. This is different from the traditional kinematic breaking criterion which states  $U/C \geq 1$ . It is advantageous to use the breaking criterion of Barthelemy et al. (2017) as it is straightforward to calculate in numerical models, and according to Barthelemy et al. (2017), is applicable to 2D and 3D, and has a narrow threshold. However, as stated by Banner and Peregrine (1993) and Kurnia and van Groesen (2014) since the wave is not of permanent form, the calculation of the wave crest velocity is non-trivial and must be calculated carefully. Barthelemy et al. (2017) measured a forward and backward leaning cycle of a wave crest as it moves through a wave train, and it is at the point close to when the crest is moving at its slowest speed that the wave breaks. Therefore a method of calculating the crest velocity that can accurately capture this slow-down is essential to accurately predict breaking onset. However, calculation of the crest velocity is not necessarily straightforward when computing for multiple crests over a large domain, where the location of each crest must be determined.

The numerical model used in this study, HOS-NWT, is computationally efficient, open source code that solves for highly nonlinear wave propagation in a numerical wave tank using the High-Order Spectral (HOS) method. HOS-NWT and HOS-ocean, have demonstrated success in simulating highly accurate wave fields and wave generation, dispersion over flat and variable bathymetry, as well as nonlinear wave interaction and extreme sea states at low computational cost in part due to FFT in the HOS method (Ducrozet et al., 2007; Bonnefoy et al., 2009; Ducrozet et al., 2012; Gouin et al., 2017; Ducrozet et al., 2016b).

Due to the assumptions of solving for potential flow, the HOS-NWT assumes a single-valued free surface and therefore cannot produce breaking waves. If a wave surpasses some limiting threshold that would cause a wave to break in nature, the HOS solver will instead calculate high-frequency oscillations that can lead to numerical instabilities, as discussed in Seiffert and Ducrozet (2016), for example. The goal of implementing a wave-breaking mechanism into the model is to approximate the broken free surface as a single value. The first step to implementing a wave breaking mechanism into HOS-NWT is to accurately identify the time and location of a breaking wave.

To validate our model, a series of experiments is performed to generate breaking waves with different breaker types and strengths and at different ranges of primary frequencies. Much of the existing

laboratory experiments on wave breaking is at a small scale, may not include the exact location and time of breaking, or does not include breaking in irregular wave time series. Breaking waves for these experiments will be generated using energy focusing, modulational instability, steep irregular waves, and irregular waves with an energy focused wave superimposed. Particular attention is paid to accurately measuring the time and location of wave breaking.

## 2. Numerical model description

The High-Order Spectral method was originally developed to solve for the highly nonlinear wave propagation in an open ocean over flat bottom (Dommermuth and Yue, 1987; West et al., 1987). The open source solver HOS-ocean is an example of such model which has been widely validated in different configurations (Ducrozet et al., 2007; 2016b; 2016a). This model has been extended to more complex configurations, such as varying bathymetry (Gouin et al., 2016 and Gouin et al., 2017), and the model discussed here, HOS-NWT, which is a numerical wave tank, (Bonnetoy et al., 2009, and Ducrozet et al., 2012). Within HOS-NWT, the numerical domain has perfectly reflective side walls, a wavemaker to generate waves, and an absorbing zone to mimic the beach in a wave basin and to prevent reflections from the end wall.

Inside the domain the fluid is assumed to be incompressible and inviscid with irrotational flow, and therefore is governed by the Laplace equation. Following Zakharov (1968), the free surface boundary conditions are written in terms of the surface quantities  $\eta$  and the surface potential  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, z = \eta, t)$ , where  $\mathbf{x}$  is the horizontal  $(x, y)$  vector. The kinematic and dynamic free surface boundary conditions are therefore written as

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (1 + |\nabla \eta|^2) \frac{\partial \phi}{\partial z} - \nabla \tilde{\phi} \cdot \nabla \eta \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} |\nabla \tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{2} (1 + |\nabla \eta|^2) \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (2)$$

on  $z = \eta(\mathbf{x}, t)$ , where  $\nabla$  is the horizontal gradient.

These nonlinear free surface boundary conditions enable the time-stepping of the two unknowns ( $\eta$  and  $\tilde{\phi}$ ) once the HOS method has evaluated the free surface vertical velocity. The procedure relies on series expansion in wave steepness  $\epsilon$  up to the so-called HOS order  $M$ , which is arbitrary.

The fixed boundary conditions use a no-flux condition,  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0$ , where  $\mathbf{n}$  is the vector normal to the boundary. These conditions define a spectral basis on which the velocity potential in the whole volume will be expanded. At the same time, surface quantities are also expressed on a spectral basis allowing the use of fast Fourier transforms (FFTs). The discretization is associated to the number of natural modes of the domain used for this expansion.

The specificity of HOS-NWT is in the presence of the following wavemaker boundary condition:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - (\nabla_v X) \cdot (\nabla_v \phi) \quad \text{on } x = X(y, z, t) \quad (3)$$

where  $\nabla_v = (\partial_y, \partial_z)$  is the vertical gradient. The motion of the wavemaker  $X(y, z, t)$  is decomposed as  $X(y, z, t) = f_v(z) \tilde{X}(y, t)$ , where  $f_v$  is a function describing the vertical geometry.

A specific procedure has been developed for an efficient and accurate description of the wavemaker, trying to preserve the pseudo-spectral formalism of the original HOS method. The main idea, following Agnon and Bingham (1999), is to use the concept of additional potential. The potential  $\phi$ , solution of the whole problem (generation and propagation), is separated into two parts: (i) one is the potential in the fixed geometry tank (no wavemaker) with its free surface and (ii) one additional potential only accounting for the wavemaker. The latter is evaluated with perturbation expansions, defining the wavemaker

order of nonlinearity.

In addition, an absorbing zone is modeled in the numerical model through a local modification of the free surface dynamic boundary condition. Further details on the model HOS-NWT can be found in Bonnetoy et al. (2009) and Ducrozet et al. (2012).

## 3. Experimental design

Experiments are conducted in the 2D wave flume at in the Hydrodynamics, Energetics & Atmospheric Environment Lab (LHEEA) at École Centrale de Nantes (ECN). The flume is 148 m long, 5 m wide and 3 m deep with a parabolic shaped absorbing beach approximately 8 m long.

Breaking waves are generated using energy focusing and modulational instability techniques, two widely used methods of generated controlled breaking waves in the laboratory. In addition, irregular waves with large steepness as well as irregular waves with energy focusing frequency and amplitude components superimposed will be generated to produce breaking waves in an irregular wave series. This will provide a wide range of different types of breakers and breaker strengths. In addition, these waves will be ran with several ranges of primary frequencies, generating breakers at different scales.

Measurements for surface elevation will be collected by a series of 14 resistance type wave gauges positioned in the region of breaking, as well as up wave and down wave of the breaking regions. Measurements are made at 128 Hz, and each wave was ran five times to assure repeatability of measurements. A repeatability analysis of surface elevation and frequency/amplitude spectra show wave probe measurements are well within 5% error. A butterworth filter is applied to the measurements during post-processing to filter out high frequency noise above 20 Hz.

Measurements of the wave breaking time and location are made by video recordings taken at the wave breaking location. A 4 m measuring stick is affixed to the back wall of the flume to measure breaking location, and breaking time is measured by an LED light placed in the camera field of view that turns on when the wavemaker motion begins. Breaking onset is defined as the point at which the water surface begins to deform and become unstable. The location of breaking onset is measured as the horizontal distance from this point to the mean wavemaker position. One wave was recorded 5 times to ensure repeatability of breaking onset time and location measurements. Video analysis shows that the breaking onset location and time measurements are also well within 5% error.

### 3.1. Breaking wave generation

Waves are generated with a flap-type wavemaker. The height above the flume bottom of the flap hinge is 0.48 m and the maximum stroke at the water depth 2.9 m is approximately  $\pm 0.3$  m. A ramp of 4 s is applied to the beginning of the signal. A linear transfer function is used to convert the target free surface elevation to the corresponding wavemaker motion.

#### 3.1.1. Energy focusing

Single plunging breaking waves are generated using a wave energy focusing technique described in Rapp and Melville (1990), for example. Surface elevation at the wavemaker is described as

$$\eta(0, t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(-k_n x_b - \omega_n(t - t_b)) \quad (4)$$

where  $a_n$  is the amplitude of the  $n$ th wave component,  $k_n$  is the wave-number,  $\omega_n = 2\pi f_n$  is the angular frequency,  $N$  is the number of frequency components, and  $x_b$  and  $t_b$  are the input breaking location and time. It is noted that due to nonlinear features associated with wave propagation, the input  $x_b$  and  $t_b$  are not exact, and the breaking wave

tends to be within one period or wavelength of these values. The principle behind generating breaking waves using energy focusing is that a nonlinear superpositioning of waves of different amplitude and phase will converge at a determined location, causing a focusing of energy. Ideal generated waves using the energy focusing technique in deep water according to Sriram et al. (2015) and Rapp and Melville (1999) will have a broad spectrum as to produce a single breaking wave, and have N large enough to simulate a continuous spectrum.

### 3.1.2. Modulational instability

Multiple breaking waves are generated using modulational instability, a description of which can be found in Tulin and Waseda (1999), for example. Surface elevation at the wavemaker is described by

$$\eta(t) = a_0 \cos(\omega_0 t) + b \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5)$$

$a_0$  and  $\omega_0$  are the amplitude and angular frequency of the carrier wave, and  $b$ ,  $\omega_1$  and  $\omega_2$  are the amplitude and frequencies of the sideband perturbations, where  $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega/2$ , and  $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega/2$ . The principle behind modulational instability is that nonlinear energy transfer from the center frequency to the sideband frequencies will cause waves to focus their energy and eventually break.

### 3.2. Tian, et al. (2012) scaled experiments

To have confidence in experimental measurements and to determine whether the wave breaking model will perform at a large scale, the experiments of Tian et al. (2012) are reproduced at a 4:1 scale using Froude’s similitude law. Tian’s experiments are conducted in a wave flume 15 m long, 1.5 m wide and with a water depth of 0.62 m. Wave probes measured surface elevation at 14 locations along the flume at distances measured from the mean position of the wavemaker. Experimental setup parameters for Tian’s experiments and the corresponding LHEEA experiments are given in Table 1. The water depth in the LHEEA flume remains constant at 2.9 m. However, since these are deep water waves, effects of not having an exact (4:1) scaling for water depth should be negligible.

In the Tian et al. (2012) experiments, breaking waves are generated using a piston-type wave maker using both energy focusing and modulational instability. Waves generated using energy focusing have a center frequency of  $f_c = 1.7$  Hz, a frequency bandwidth of  $\Delta f = 1.4$  Hz and  $N = 128$  frequency components. The breaking time and location are set as  $t_b = 25.0$  s and  $x_b = 7.0$  m. The frequency components are generated using these parameters, which are then summed according to Eq. (3.1.2) to get the desired surface elevation. The initial input steepness  $\epsilon_n = k_n a_n$  and corresponding parameters for wave generation in the LHEEA experiments are given in Table 2.

Table 3 gives the parameters of initial frequency  $f_0 = \omega_0/2\pi$ , ratio of frequency bandwidth to initial angular frequency ( $\Delta\omega/\omega_0$ ) and initial wave steepness ( $\epsilon = k_0 a_0$ ) used for waves generated using modulational instability, for both the Tian and LHEEA experiments. The amplitude

**Table 1**  
Experimental parameters from Tian et al. (2012) and corresponding parameters for LHEEA experiments.

Parameter	Tian et al. (2012) (1:1 scale)	LHEEA (4:1 scale)
Flume length	15 m	60 m*
Water depth (h)	0.62 m	2.9 m**
Wave probes	[1.83, 2.53, 3.32, 4.04, 4.77 5.38, 5.99, 6.6, 7.22 7.89 8.57, 9.42, 10.23, 11.06] m	[7.32 10.12 13.28 16.16 19.08 21.52 23.96 26.4 28.88 31.56 34.28 37.68 40.92 44.24] m

\* Length of flume corresponding to Tian experiments.

\*\* Water depth in the LHEEA flume is kept constant at 2.9 m.

ratio for each of these waves is  $b/a_0 = 0.5$ . Energy focusing experiments are run for 80 s and modulational instability experiments are run for 100 s.

### 3.3. Large-scale wave breaking experiments

Breaking waves for a series of experiments will be generated using energy focusing, modulational instability, irregular waves with large wave steepness and irregular waves with added frequency components to generate a focused wave within the time series. A range of central or peak frequencies, frequency bandwidths and initial wave steepness will be tested to obtain a range of breaker size, type and strength. Wave gauges for these experiments are positioned at 7.32, 14.5, 20.00, 21.20, 22.41, 23.60, 24.69, 26.05, 27.94, 30.06, 34.26, 37.88, 43.66 and 50.23 m from the mean position of the wavemaker.

Parameters for breaking waves generated using the energy focusing technique are given in Table 4. The number of frequency components is  $N = 64$ , and the input breaking time and location are  $t_b = 50$  s and  $x_b = 22$  m for EF6-54 and EF8-72, and  $x_b = 24$  m for EF7-64. Surface elevation is recorded for 100 s, stopping well before the initial wave energy has reflected off the absorbing beach and returned to the last wave gauge (recalling that the wave flume is 148 m long.)

The wave parameters used for generating breaking waves using modulational instability are given in Table 5.  $\Delta\omega/\omega_0$  and  $\epsilon = k_0 a_0$  are chosen following Fig. 17 in Tulin and Waseda (1999) as the values which correspond to the range of frequencies where breaking occurs at a location close to the wavemaker. The parameter  $b/a_0 = 0.5$  is selected so that waves are breaking in a region close to the wavemaker but not too close. Surface elevation measurements are recorded for 150 s.

Irregular waves are generated characterized by the JONSWAP spectrum with different peak periods ( $T_p$ ) and initial steepness (given as the ratio of significant wave height to peak wave length,  $H_s/L_p$ ). For these waves the peakedness factor  $\gamma$  remains constant at  $\gamma = 3.3$ . A second type of irregular wave will be generated with an energy focused wave superimposed on an irregular wave. This is accomplished by adding the frequency components for an energy focused wave to the components in a JONSWAP spectrum. This is similar to the strategy for developing an extreme wave found in Ducrozet et al. (2007). The parameters for these waves are given in Table 6. Surface elevation measurements for irregular wave experiments are recorded for 150 s.

## 4. Calculating wave-breaking onset

To calculate wave breaking onset, the criterion described by Barthelemy et al. (2017) is used which is based on the ratio of local energy flux velocity to the local crest velocity. Recall, at the free surface the ratio of the local energy flux in the direction of wave propagation  $F_x$  to local energy density  $E$  reduces to the water particle velocity under the crest  $U_x$ . In two-dimensions,  $U_x$  can be written in terms of the velocity potential at the free surface as

$$U_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}(z = \eta) \quad (6)$$

and therefore, the breaking criterion can be written as follows:

$$B_x = \frac{F_x/E}{C_x} = \frac{U_x}{C_x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{1}{C_x} > \text{threshold}, \quad (7)$$

where  $C_x$  is the crest velocity in the direction of wave propagation. A threshold of 0.85 is used to determine wavebreaking onset in calculations for this study, as suggested by the results of Barthelemy et al. (2017) and Saket et al. (2017).

To identify a random breaking wave at the instant of breaking onset, the ratio given by Eq. (7) is computed at every point in the domain, and at every time step. Of course a crest cannot exist at every point in the domain at a given instant. Therefore at a given time step, to compute this ratio instantaneously over the whole domain, the instantaneous

**Table 2**

Input parameters for Tian et al. (2012) and LHEEA experiments for waves generated using energy focusing.  $N = 128$ . Wave probe measurements will be collected at 128 Hz for 80 s.

Wave	Tian (1:1)					LHEEA (4:1)				
	$f_c$ (Hz)	$\Delta f$ (Hz)	$\epsilon_n$	$t_b$ (s)	$x_b$ (m)	$f_c$ (Hz)	$\Delta f$ (Hz)	$\epsilon_n$	$t_b$ (s)	$x_b$ (m)
EF1	1.7	1.4	0.0020	25.0	7.0	0.85	0.7	0.0020	50.0	28.0
EF2	1.7	1.4	0.0032	25.0	7.0	0.85	0.7	0.0032	50.0	28.0
EF3	1.7	1.4	0.0045	25.0	7.0	0.85	0.7	0.0045	50.0	28.0
EF4	1.7	1.4	0.0058	25.0	7.0	0.85	0.7	0.0058	50.0	28.0

**Table 3**

Input parameters for Tian et al. (2012) and LHEEA experiments for waves generated using modulational instability.  $b/a_0 = 0.5$ . Wave probe measurements will be collected at 128 Hz for 100 s.

Wave group	Tian (1:1)			LHEEA (4:1)		
	$f_0$ (Hz)	$\Delta\omega/\omega_0$	$\epsilon = k_0 a_0$	$f_0$ (Hz)	$\Delta\omega/\omega_0$	$\epsilon = k_0 a_0$
BF11710	1.7	0.166	0.10	0.85	0.166	0.10
BF11712	1.7	0.200	0.12	0.85	0.200	0.12
BF11716	1.7	0.266	0.16	0.85	0.266	0.16
BF11720	1.7	0.330	0.20	0.85	0.330	0.20

local phase velocity must be evaluated every where in the domain. At the location of a wave crest, this local phase velocity becomes an approximation of the crest velocity, and therefore this ratio approximates the breaking parameter of Barthelemy et al. (2017). Furthermore, the breaking parameter is naturally at its maximum at the crest of a wave and nowhere else. This approximation is necessary due to the difficulties in calculating the crest velocity, which will be discussed below. We define the instantaneous local phase velocity as

$$C_x(x, t) = \sqrt{\frac{g \cdot \tanh(k(x, t) \cdot h)}{k(x, t)}} \tag{8}$$

where  $h$  is the water depth and the local wave number  $k(x, t)$  is given by

$$k(x, t) = \frac{1}{\eta^2 + \mathbb{H}^2[\eta]} \left( \eta \frac{\partial \mathbb{H}[\eta]}{\partial x} - \mathbb{H}[\eta] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \tag{9}$$

where  $\mathbb{H}[\eta(x, t)]$  is the partial Hilbert transform with respect to  $x$ . It is possible through some numerical error that a value of  $k$  may be briefly negative, and as this would cause large errors in the calculation of the breaking parameter, any such negative values were filtered out. The calculation of crest velocity using the phase velocity approximation in a kinematic breaking condition has been used by Stansell and MacFarlane (2002) and Kurnia and van Groesen (2014), for example.

**Table 4**

Input parameters for waves generated using energy focusing are given along with the type of breaker and breaking time and location measured during experiments and calculated using HOS-NWT. The input breaking time and location are  $t_b = 50$  s and  $x_b = 22$  m for EF6-54 and EF8-72, and  $x_b = 24$  m for EF7-64.

Wave	$f_c$ (Hz)	$\Delta f$ (Hz)	$\epsilon_n$	Type	Experiments		HOS-NWT	
					$x_b$ (m)	$t_b$ (s)	$x_b$ (m)	$t_b$ (s)
EF6-54	0.6	0.54	0.0047*	–	–	–	–	–
			0.0048	spiller	23.61	50.38	22.75	50.03
			0.0050	plunger	22.70	49.96	22.48	49.86
			0.0051	plunger	22.53	49.9	22.38	49.8
EF7-64	0.7	0.64	0.0048	spiller	24.66	50.06	24.55	49.97
			0.0054	plunger	21.83	47.26	21.68	47.18
			0.0054	spiller	25.14	50.14	25.12	50.2
			0.0060	plunger	21.74	47.14	21.57	47.04
EF8-72	0.8	0.72	0.0062	plunger	20.44	47.52	20.30	47.41
			0.0070	plunger	20.92	47.68	20.67	47.55
			0.0070	sm. spiller	24.46	50.70	–	–

\* denotes an unbroken wave.

#### 4.1. Calculation of wave crest velocity

It is of interest to assess whether the approximation of the crest velocity using a local phase velocity at the location of the crest is as accurate as using a more traditional crest tracking technique when calculating breaking waves. Two time series generated during laboratory experiments are chosen for investigation, EF6-54 with  $\epsilon = 0.0048$ , and IRREF-1, as they each produce only a single breaking wave. A numerical wave flume of 100 m is chosen for the calculations as it is long enough to cover each of the wave gauges in experiments sufficiently beyond the wave gauge furthest from the wavemaker, located at a distance of 50.25 m. Calculations are performed using 1025 modes, with an HOS order mHOS = 5 and wavemaker nonlinearity order 2, according to a sensitivity study which will be discussed in Section 4.2. The time period that calculations are allowed to continue after wave breaking is short enough for these particular breaking waves, that instabilities due to the “broken” wave have yet to develop in the simulations. For larger breaking waves than the ones chosen for analysis in the figures, instabilities can develop quite quickly.

This study was conducted during post-processing using the known time and location of the breaking wave measured from experiments. Crest velocity and breaking parameter are calculated using three different methods. In the first method, crest velocity is calculated using a simple crest tracking method. The horizontal position of the wave crest  $x_c(t)$  at time  $t$  is measured at several time steps before breaking, and the velocity of the crest is taken as the distance the crest has traveled over time, or  $C_{x1} = dx_c/dt$ . This crest velocity  $C_{x1}$  is used to calculate its corresponding breaking parameter, given as  $B_{x1}$ .

The following equation is given in Fedele (2014), and Fedele et al. (2016) as the exact crest speed in terms of the surface derivatives:

$$C_{x2} = -\frac{\eta_{,xt}}{\eta_{,xx}}, \tag{10}$$

where  $C_{x2}$  is the two-dimensional horizontal crest velocity in the  $x$ -direction,  $\eta$  is the surface elevation, and the comma indicates partial

**Table 5**

Input parameters for waves generated using modulational instability. Type of breaking and breaking time and location measured during experiments and calculated using HOS-NWT is given for the first 10 recorded breaking waves.

Wave	$f_0 = \omega_0/2\pi$ (Hz)	$\Delta\omega/\omega_0$	$\epsilon = k_0 a_0$	Type	Experiments		HOS-NWT	
					$x_b$ (m)	$t_b$ (s)	$x_b$ (m)	$t_b$ (s)
MI0719	0.7	0.317	0.19	spiller	33.17	32.66	31.66	32.09
				plunger	32.95	41.14	32.85	41.13
				spiller	32.14	49.44	31.77	49.25
				spiller	31.44	57.70	31.03	57.53
				spiller	34.74	60.42	34.09	60.19
				spiller	31.48	66.50	29.90	65.61
				spiller	32.56	68.18	33.02	68.32
				spiller	32.13	76.60	32.16	76.56
				spiller	31.38	84.90	31.01	84.64
				spiller	34.50	87.60	34.35	87.45
MI0720	0.7	0.330	0.20	spiller	26.77	27.00	26.20	26.92
				plunger	29.86	29.76	28.83	29.40
				spiller	34.20	33.06	32.42	32.37
				spiller	28.03	36.20	27.75	36.09
				spiller	32.05	39.26	31.26	38.99
				spiller	27.70	44.58	28.04	44.83
				plunger	31.51	47.64	30.87	47.33
				spiller	26.91	52.82	-	-
				spiller	27.05	61.48	27.46	61.71
				spiller	26.98	70.08	27.01	70.08

derivatives, i.e.  $\eta_{,x} = \partial\eta/\partial x$ . Eq. (10) derives from the condition that  $\eta_{,x}(x_c(t), t) = 0$  at the location of the crest,  $x_c(t)$  at time  $t$ . Crest velocity of the known breaking wave calculated using this equation ( $C_{x_2}$ ) is used to calculate its corresponding breaking parameter, given as  $B_{x_2}$ .

To compare with the breaking parameter computed in numerical calculations, the maximum breaking parameter is calculated over several time steps before and after breaking using Eqs. (8) and (9) to calculate the phase velocity, and is given as  $B_{x_3}$ . The maximum  $B_{x_3}$  naturally follows the wave crest and therefore, the local phase velocity used to calculate  $B_{x_3}$  is given as  $C_{x_3}$ .

Figs. 1a and 2a show calculations for each of the crest velocities described above, for the simulated waves EF6-54 with  $\epsilon = 0.0048$ , and IRR-1, respectively. These time series are plotted for a short time window just before and after wave breaking, where  $t_{br}$  is breaking onset

time measured during experiments. Each of these methods predicts a slowdown of crest velocity near the time of breaking, although  $C_{x_3}$  appears to over estimate this slowdown in the case of the energy focused wave. Overall,  $C_{x_3}$  is able to give a good approximation of the crest velocity when compared with  $C_{x_1}$  and  $C_{x_2}$ .

Some large spikes are observed when calculating  $C_{x_1}$  and  $C_{x_2}$ . These large spikes are the result of relatively large shifts in the location of the peak of the wave of interest. The wave crest is located by finding the position of the maximum surface elevation at a given time step. However, the position of the maximum surface elevation can rapidly change as wave energy focuses during a breaking event, which can be observed in Fig. 3. This figure plots surface elevation for several time steps before breaking and includes vertical lines indicating where the maximum surface elevation is located at that time step. The rapid

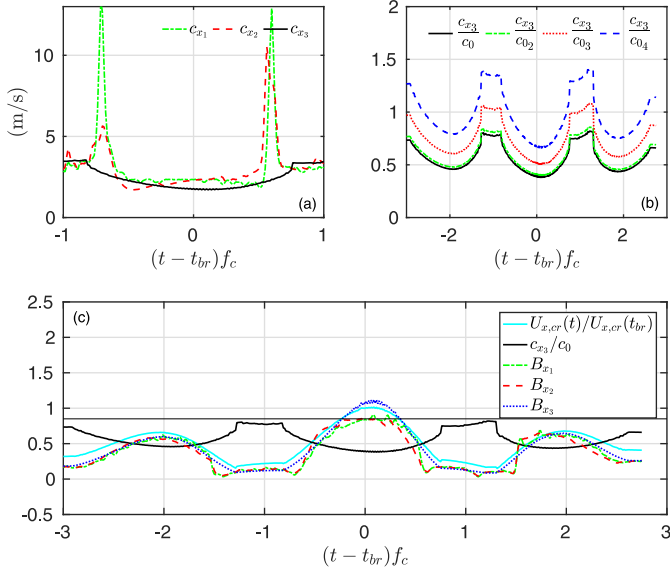
**Table 6**

Input parameters for irregular waves and irregular waves with a superimposed energy focusing wave are given along with the type of breaker and breaking time and location measured during experiments and calculated using HOS-NWT. Additional input parameters for the focusing component are  $N = 64$ ,  $x_b = 22$  m and  $t_b = 50$  s.

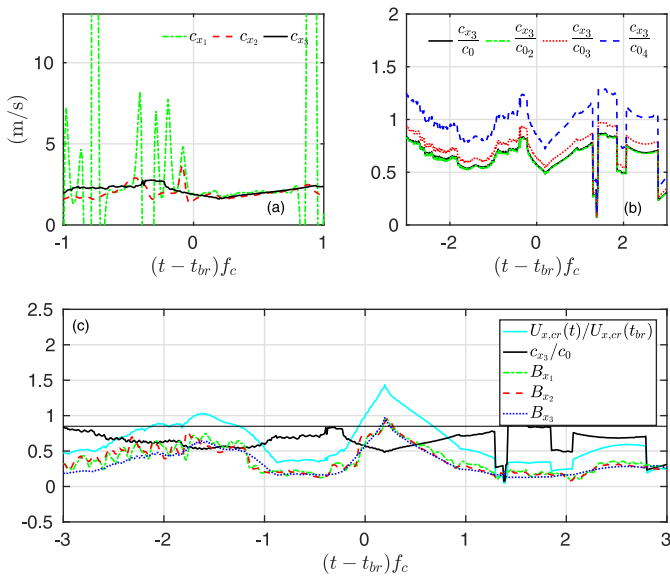
Wave	Irregular		Focusing			Type	Experiments		HOS-NWT	
	$T_p$	$H_s/L_p$	$f_c$	$\delta f$	$\epsilon_n$		$x_b$ (m)	$t_b$ (s)	$x_b$ (m)	$t_b$ (s)
IRR-4*	2.1	0.030	-	-	-	-	-	-	-	-
	2.2	0.037	-	-	-	spiller	16.39	55.48	-	-
IRR-1	2.2	0.040	-	-	-	spiller	16.40	76.54	16.14	76.36
						sm. spiller	16.59	34.36	-	-
IRR-2	2.2	0.040	-	-	-	sm. spiller	25.88	66.32	-	-
						sm. spiller	16.12	98.86	16.41	98.98
IRR-5	2.1	0.035	-	-	-	sm. spiller	30.00	70.92	29.90	70.70
						spiller	32.06	73.22	33.70	73.88
						sm. spiller	20.02	89.54	19.71	89.35
						sm. spiller	32.54	126.74	33.69	127.05
IRREF-1	2.2	0.02	0.7	0.64	0.005	plunger	32.19	147.74	31.46	147.4
						plunger	22.27	49.72	22.76	49.93
IRREF-2	2.2	0.02	0.7	0.64	0.0055	plunger	20.05	47.24	20.33	47.42
						spiller	23.32	50.14	22.97	49.98
IRREF-3	2.2	0.03	0.7	0.64	0.0055	plunger	22.40	147.74	19.77	145.20
						spiller	20.10	47.26	19.85	47.09
						spiller	22.90	49.82	-	-
						spiller	23.17	49.94	-	-
						spiller	29.18	52.02	29.31	52.01
						plunger	21.09	145.74	21.29	145.80
spiller	23.66	148.3	24.34	148.61						

\* IRR-4 did not contain any breaking waves.



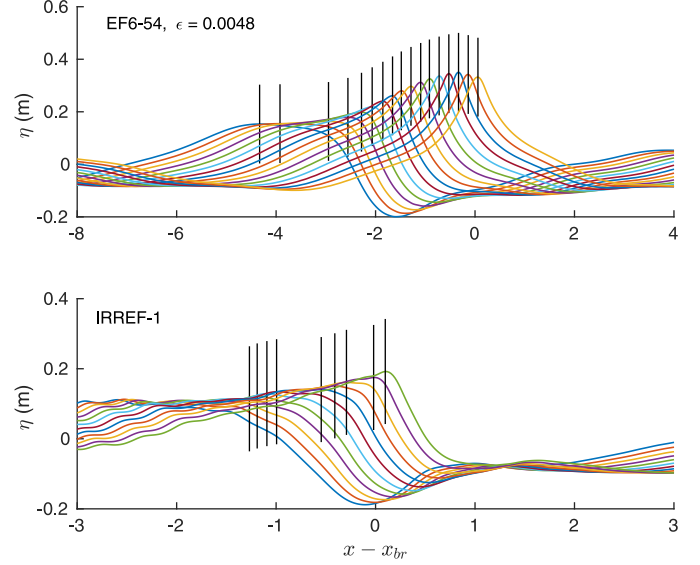


**Fig. 1.** (a) Crest velocity is calculated using crest tracking ( $C_{x1}$ , Eq. (10) ( $C_{x2}$ ) and approximated using Hilbert transform ( $C_{x3}$ ) for the wave EF6-54 and  $\epsilon = 0.0048$ . (b) The ratio of  $C_{x3}$  to reference velocity is calculated for four reference velocities,  $C_0, C_{02}, C_{03}$ , and  $C_{04}$ . (c) Breaking onset parameter  $B_x$  is calculated corresponding to the crest velocities in (a), along with normalized crest velocity  $C_{x3}/C_0$ , and normalized water particle velocity at the wave crest  $U_{x, cr}$ .



**Fig. 2.** (a) Crest velocity is calculated using crest tracking ( $C_{x1}$ , Eq. (10) ( $C_{x2}$ ) and approximated using Hilbert transform ( $C_{x3}$ ) for the wave IRRF-1. (b) The ratio of  $C_{x3}$  to reference velocity is calculated for four reference velocities,  $C_0, C_{02}, C_{03}$ , and  $C_{04}$ . (c) Breaking onset parameter  $B_x$  is calculated corresponding to the crest velocities in (a), along with normalized crest velocity  $C_{x3}/C_0$ , and normalized water particle velocity at the wave crest  $U_{x, cr}$ .

change in position of the maximum surface elevation causes these large fluctuations in crest velocity. Furthermore, when calculating  $C_{x1}$  and  $C_{x2}$ , significant filtering had to be applied to the data to remove high frequency oscillations due to the numerical evaluation of second order derivatives. This illustrates the level of difficulty involved when using a crest tracking technique to locate a breaking wave. Using crest tracking to identify multiple random breaking waves over a large domain, and in a time domain solver, without knowing ahead of time where they will break, would require significant computational effort and may be impractical. Calculation of the breaking parameter instantaneously and



**Fig. 3.** Surface elevation is plotted for several time steps up until breaking. The vertical lines represent the location of the maximum surface elevation at that time step.

everywhere in the domain means we do not need to identify the peak of every potential breaking wave in the domain and track its location over time, eliminating these computational challenges. Rather, we are able to calculate the exact time and location of a breaking wave at the moment the breaking parameter surpasses the given threshold.

It has been noted by Banner et al. (2014); Fedele (2014) and Barthelemy et al. (2017), for example, that the crest slows down to approximately 0.8 times a reference linear wave velocity when the wave is about to break. Here we investigate the relationship between the crest velocity approximation  $C_{x3}$  and four different reference velocities. The first reference velocity,  $C_0$  is calculated by first decomposing the series into its modal spectrum at each time step, and then taking the average value of  $k$  that corresponds to the peak energy over time, and then using this value of  $k$  to calculate  $C_0$  using the linear dispersion relation.  $C_{02}$  is calculated by determining the peak frequency estimated from the time series taken at the location of the numerical wavemaker and dispersion relation to obtain  $C_{02}$ . Using the same time series as in  $C_{02}, C_{03}$  is calculated using a spectrally weighted wave frequency (as in Banner et al., 2014) where

$$\bar{f} = \frac{\int f S(f) df}{\int S(f) df} \quad (11)$$

and  $C_{03} = g/2\pi\bar{f}$ . Finally,  $C_{04} = g/2\pi f_c$ , where  $f_c$  is simply the input central frequency. The ratio of  $C_{x3}$  to each of these reference velocities plotted with normalized breaking time is given in Figs. 1b and 2b. These figures show ratios of approximately 0.5 to 0.7, smaller than the approximation of 0.8 given by Banner et al. (2014); Fedele (2014) and Barthelemy et al. (2017). For the case of the energy focused wave, it appears an underestimation of the crest velocity approximation may partially contribute to this difference. However, for the irregular wave, all three methods of calculating crest velocity ( $C_{x1}, C_{x2}$ , and  $C_{x3}$ ) are nearly identical, so there must be some other reason the ratios are not closer to 0.8.

In Figs. 1c and 2c, the breaking onset thresholds  $B_{x1}, B_{x2}$ , and  $B_{x3}$  are presented along with a solid horizontal line indicating the breaking onset threshold value of 0.85. Also included in these figures are the normalized velocity for  $C_{x3}$ , and maximum horizontal water particle velocity under the crest  $U_{x, cr}$  normalized with the value  $U_{x, cr}$  at wave breaking onset.

For the energy focused wave EF6-54 with  $\epsilon = 0.0048$ , given in Fig. 1c, it is evident that each of the breaking parameters are successful at predicting wave breaking when compared with experiments,

although  $B_{x3}$  calculates breaking slightly early. (Recall,  $t_{br}$  in the figure is breaking onset for the single breaking wave measured during experiments.) In fact, there is excellent agreement between each of the three breaking parameters for the large non-breaking waves before and after the breaking wave as well.

For the irregular wave IRRF-1, given in Fig. 2c, there is excellent agreement between each of the breaking parameters and each are successful at predicting breaking onset when compared with experiments. It is noted some irregularities in  $C_{x3}$  observed approximately 1.5 wave periods after breaking in Fig. 2a do not adversely affect the calculation of the breaking parameter in Fig. 2c.

Although agreement is good between each of the breaking parameters for both the energy focused wave and the irregular wave in Figs. 1 c and 2 c, it is worth noting that it required a significant amount of smoothing of  $C_{x1}, C_{x2}$  and  $B_{x1}, B_{x2}$  in order to achieve this agreement.

This investigation suggests calculation of wave breaking onset by use of the current breaking parameter which uses an approximation of crest velocity is successful when compared with crest tracking. Additionally, these figures suggest that it is the combination of a decrease in crest velocity and an increase of water particle velocity under a steepening wave that leads to wave breaking.

#### 4.2. Sensitivity study

A sensitivity study is conducted using the breaking wave series EF2 and BF11716 from Tian et al. (2012), to determine the best number of modes to use for the calculation of surface elevation and breaking onset as well as to compare the large scale LHEEA laboratory measurements with measurements made by Tian et al. (2012). For this study, calculations are stopped when the breaking onset threshold is surpassed, indicating wave breaking. Figs. 4 and 5 show surface elevation measured during the LHEEA and Tian experiments and calculated using HOS-NWT using 513, 1025 and 2049 modes in the x-direction. The first 7 wave gauges are presented, which are the gauges located upwave to the breaking wave. At 513 modes, the maximum wave number solved is  $k_{max} = 16.12 \text{ m}^{-1}$ , at 1025 modes  $k_{max} = 32.20 \text{ m}^{-1}$ , and at 2049 modes  $k_{max} = 64.37 \text{ m}^{-1}$ . This means for the wave EF2 with a center frequency of  $f_c = 0.85 \text{ Hz}$  equating to a center wave number of  $k_c = 2.9 \text{ m}^{-1}$ , calculations made using 513 modes will compute up to the fifth harmonic, calculations made using 1025 modes will calculate the tenth harmonic and calculations made using 2049 will calculate up to the twenty-first harmonic of the center wave number, for example.

The difference observed between each of these calculations for surface elevation is very small. The greatest difference is in calculating breaking onset, where at 513 modes, wave breaking is not calculated until much later when compared with calculations made using 1025

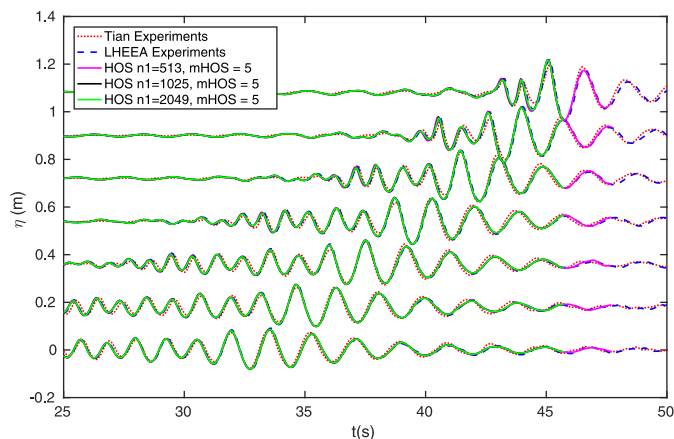


Fig. 4. Surface elevation is computed using HOS-NWT for  $n1 = 513, 1025$  and  $2049$  modes and compared with measurements made during the LHEEA and Tian experiments for the wave EF2.

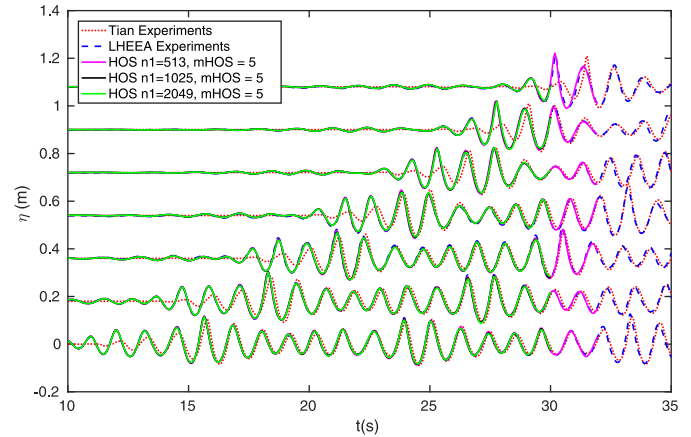


Fig. 5. Surface elevation is computed using HOS-NWT for  $n1 = 513, 1025$  and  $2049$  modes and compared with measurements made during the LHEEA and Tian experiments for the wave BF11716.

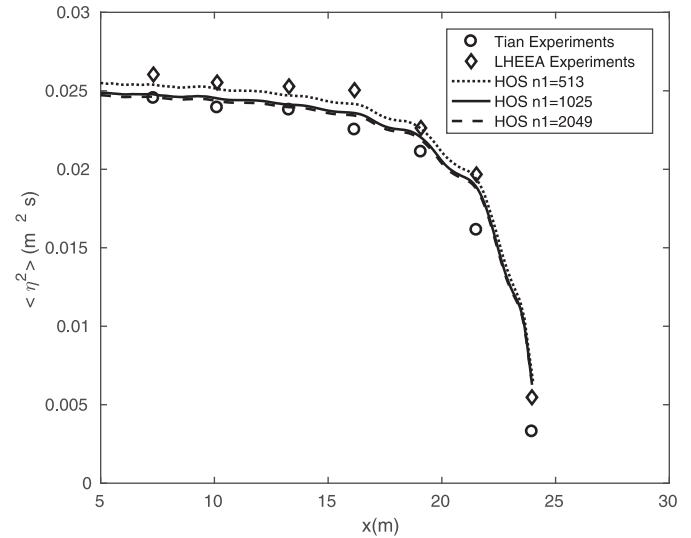


Fig. 6. The long time integration of the surface variance  $\langle \eta^2 \rangle = \int_0^t \eta(x, t)^2 dt$  is computed using HOS-NWT for  $n1 = 513, 1025$  and  $2049$  modes and compared with measurements made during the LHEEA and Tian experiments for the wave EF2.

and 2049 modes. A comparison of wave energy is given in Fig. 6, which gives the long time integration of the surface variance  $\langle \eta^2 \rangle = \int_0^{t_{br}} \eta(x, t)^2 dt$  for EF2 up to the point of breaking. The steep drop off in energy is not due to any calculated energy dissipation, but rather due to the time series being halted at wave breaking, so there is very little energy at the seventh wave gauge, for example. According to this figure, it is evident there is convergence at 1025 modes. It is noted that although it appears the lower number of modes, 513, agrees better with experimental measurements, this is somewhat misleading. There is very little difference between calculations for surface elevation for each of the number of modes. The differences in calculations and measurements observed in Fig. 6 are largely due to very small differences in the smaller surrounding waves, that when added up over the entire domain, appear to be more significant than they are.

An interesting observation that can be made from Figs. 4 and 5 is that numerical calculations are nearly identical to surface elevation measured during the LHEEA experiments, whereas there are some small phase differences between calculations and Tian's experiments. This is because waves generated during Tian's experiments are not generated exactly according to Eq. (8). Rather, some small adjustments of wave amplitude were made during experiments to develop breaking waves without also adjusting wave number  $k$ , and therefore, the initial

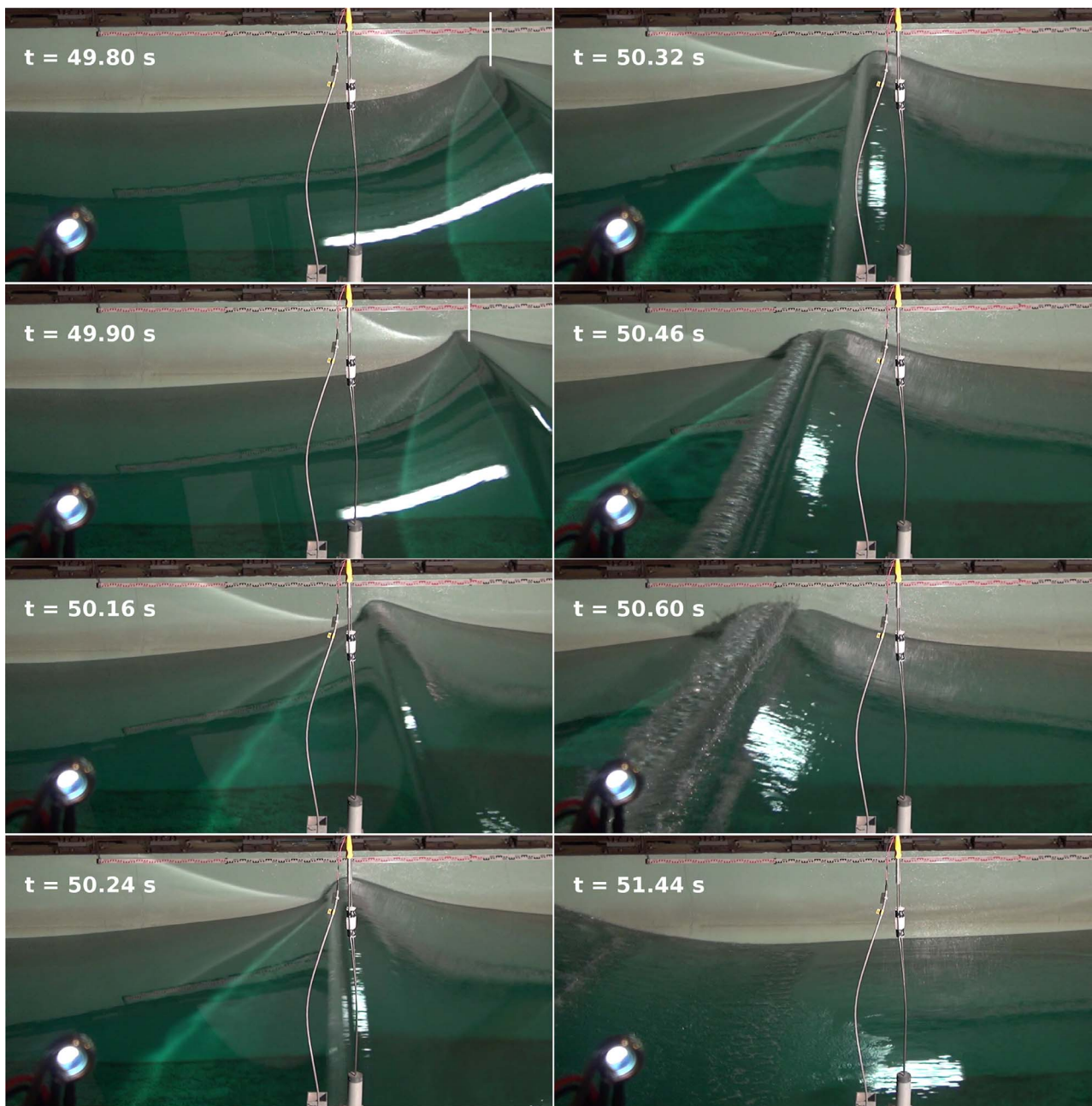


Fig. 7. Still images of video captured for the wave EF6-54 and  $\epsilon_n = 0.0051$  at  $t = 49.80, 49.90, 50.16, 50.24, 50.32, 50.46, 50.60$  and  $51.44$  s. Wave breaking onset is estimated at  $t_{br} = 49.90$  s and at this time, a measurement of the location of the crest with respect to the measuring stick is made, indicated by the vertical white line, and is used to calculate the distance to the mean position of the wavemaker.

steepness parameter  $\epsilon_n$  is not exact, and waves generated in the Tian experiments are not exactly generated according to the theory presented in Section 3.1. The LHEEA experiments are generated exactly according to theory, and therefore can be reproduced numerically using the theory from Section 3.1, instead of using wave gauge data as input, for example.

Due to this analysis, the number of modes chosen for calculations is 1025, as it is sufficient to capture wave breaking and surface elevation. Note that this choice of discretization is far larger than the one necessary to obtain an accurate solution of wave propagation in the case of non-breaking waves (Ducrozet et al., 2012).

A spatial interpolation is applied to the surface elevation and velocity before breaking onset is calculated at 5 times the original spatial discretization using a cubic spline. This allows the breaking onset to be calculated at a higher spatial resolution, thus increasing the accuracy.

The value of 5 was chosen according to a sensitivity study showing convergence at around this value. The wavemaker non-linearity order is chosen as 2 and the HOS order is chosen as 5 after additional sensitivity studies, including calculations made using HOS order of 8, show the convergence of the solution at these selected values. Most of the non-linearity is taken into account with  $mHOS = 5$ , and it is the typical choice for practical applications of large-scale ocean sea states as it provides the best compromise in accuracy and CPU time balance.

## 5. Results and discussion

Fig. 7 shows still images of video captured for the wave EF6-54 and  $\epsilon_n = 0.0051$  at  $t = 49.80, 49.90, 50.16, 50.24, 50.32, 50.46, 50.60$  and  $51.44$  s. Wave breaking onset time is calculated by HOS-NWT at  $49.80$  s and estimated as  $49.90$  s during experiments. At these instances, the

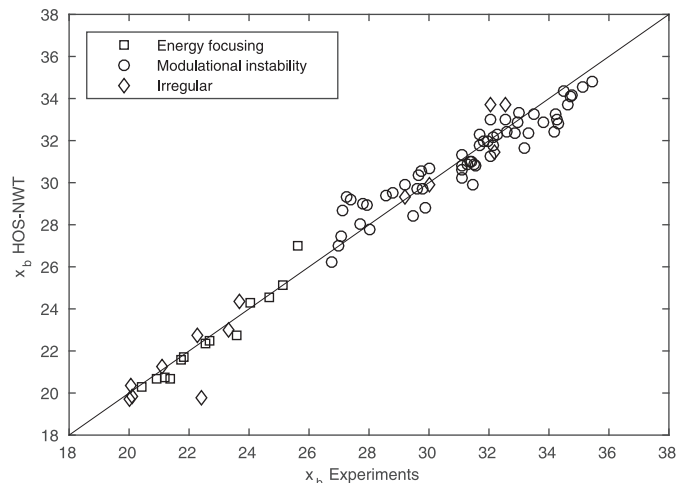


Fig. 8. Location of wavebreaking onset ( $x_b$ ) measured during experiments is compared with calculations using HOS-NWT.

vertical white line indicates the measurement for the location of the wave crest. The location of the horizontal ruler is known with respect to the mean position of the wavemaker, and therefore we can extract the position of the wave crest at times 49.80 s and 49.90 s. At  $t = 50.16$  s, the wave has just begun to overturn and is collapsing at  $t = 50.24$  s and 50.32 s. Evidence of splash up and whitewater appears at  $t = 50.46$  s and 50.60 s, and all of the wave-breaking energy loss appears to be complete at  $t = 51.44$  s.

Fig. 8 plots the location of wave breaking onset ( $x_b$ ) calculated by HOS-NWT versus the location measured during experiments, and Fig. 9 plots the time of wavebreaking onset ( $t_b$ ) calculated by HOS-NWT and measured during the LHEEA experiments. Measurements and calculations for  $x_b$  and  $t_b$  are also given in Tables 4–6 for breaking waves generated using energy focusing, modulational instability and irregular waves, respectively. As there were over 50 breaking waves total in the modulational instability waves, only the first 10 breaking waves from each case are listed in Table 5. Dashed lines present under the HOS-NWT column indicate there was no breaking wave calculated close to that time and location. For many of the wave cases, there were additional breaking waves in both the experiments and calculations that are not presented. Only waves where measurements were made for breaking onset and location during experiments are presented along with the corresponding calculations. The type of breaker is also presented in Tables 4–6, and is determined during the experiments based

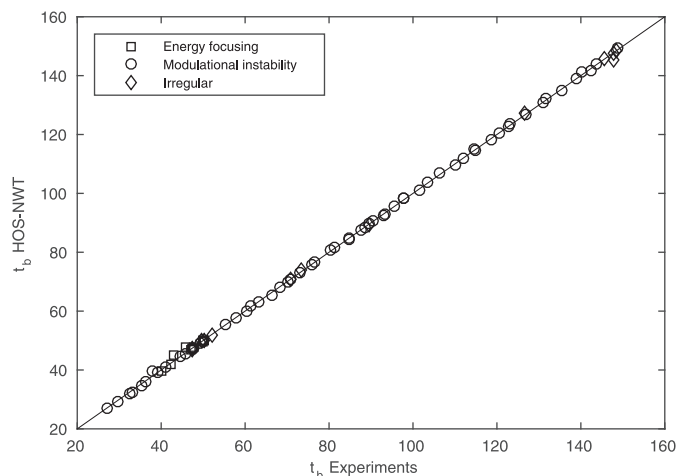


Fig. 9. Time of wavebreaking onset ( $t_b$ ) measured during experiments is compared with calculations using HOS-NWT.

on visual observation.

Breaking time and location are predicted accurately by HOS-NWT when compared with experimental measurements. Breaking onset location and time are measured during experiments by visual observation of a video recording, therefore the determination of breaking onset is somewhat subjective, providing a good explanation for differences between measurements and calculations. However, the agreement is still excellent for each of the wave breaker types and for the different types of wave breaking generation. This study confirms the wave breaking parameter  $B_x$  provides an accurate means of predicting breaking onset regardless of breaker type, strength, or scale.

It is interesting to note, based on visual observation and calculations, wave-breaking onset occurs well before the appearance of white capping, on the order of half a wave period. This is evident by the breaking wave presented in Fig. 7 where breaking onset occurs at  $t = 49.90$  s but white-capping is not observed until after  $t = 50.46$  s.

### 6. Conclusions

Breaking waves are studied experimentally and numerically using the nonlinear, potential flow solver HOS-NWT. Single and multiple breaking waves are generated by energy focusing and modulational instability techniques, as well as by steep irregular wave propagation and irregular waves with an energy focusing wave superimposed.

A wave breaking onset criteria is implemented in HOS-NWT which calculates wave breaking when the ratio of water particle velocity at the surface to wave crest velocity exceeds a value of 0.85. To calculate the onset of a breaking wave at some random location in the domain, the breaking parameter is calculated at every point in the domain and at every time step. To achieve this, the instantaneous local phase velocity is calculated at every point in the domain and at every time step by use of the partial Hilbert transform and dispersion relation. A comparison of the local phase velocity with more traditional crest tracking methods shows that at the peak of a wave about to break, the local phase velocity provides a good approximation of the crest velocity, and the prediction of wave breaking using this method achieves excellent results.

The wave-breaking onset criteria implemented in the model is successful at predicting breaking events as demonstrated by the excellent agreement between calculations and experimental measurements for wave-breaking onset time and location. The success of the model when predicting breaking waves for a wide range of waves tested indicates the wave-breaking onset criteria is robust for different types and strengths of breakers and at different scales, and could potentially be applied in other nonlinear potential flow solvers.

Breaking waves are highly nonlinear and rapid processes, making the prediction of onset challenging. Difference between the time and location of breaking events in calculations and measurements can be explained by the nature of observing breaking time and location during experiments and the somewhat subjective nature of the definition of wave-breaking onset when making visual observations. Now that a robust method of predicting breaking onset in HOS-NWT is validated, the next step is to determine a means to calculate wave-breaking associated energy losses. It is left for future work to determine success of the breaking onset parameter for varying depth as well as in a multi-directional wave field. By calculating wave-breaking onset and energy dissipation in HOS-NWT, not only will the solver be able to accurately calculate more energetic sea states, but the potential for numerical instabilities caused by breaking waves that can lead to failure of the model is greatly reduced.

### Acknowledgments

The authors are grateful for the experimental data provided by Dr. Zhigang (Kevin) Tian.

## References

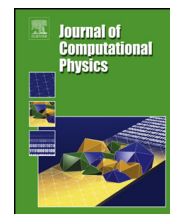
- Agnon, Y., Bingham, H.B., 1999. A non-periodic spectral method with application to nonlinear water waves. *Eur. J. Mech.-B/Fluids* 18, 527–534.
- Babanin, A., Chalikov, D., Young, I., Savelyev, I., 2007. Predicting the breaking onset of surface water waves. *Geophys. Res. Lett.* 34, L07605.
- Babanin, A.V., Chalikov, D., Young, I.R., Savelyev, I., 2010. Numerical and laboratory investigation of breaking of steep two-dimensional waves in deep water. *J. Fluid Mech.* 644, 433–463.
- Babanin, A.V., Waseda, T., Kinoshita, T., Toffoli, a., 2011. Wave breaking in directional fields. *J. Phys. Oceanogr.* 41, 145–156.
- Banner, M., Peregrine, D.H., 1993. Wave breaking in deep water. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 25, 373–397.
- Banner, M.L., Barthelemy, X., Fedele, F., Allis, M., Benetazzo, A., Dias, F., Peirson, W.L., 2014. Linking reduced breaking crest speeds to unsteady nonlinear water wave group behavior. *Phys. Rev. Lett.* 112, 114502.
- Banner, M.L., Peirson, W.L., 2007. Wave breaking onset and strength for two-dimensional deep-water wave groups. *J. Fluid Mech.* 585, 93–115.
- Barthelemy, X., Banner, M. L., Peirson, W. L., Fedele, F., Allis, M., Dias, F., 2017. On a unified breaking onset threshold for gravity waves in deep and intermediate depth water. submitted. [arXiv:1508.06002v2](https://arxiv.org/abs/1508.06002v2).
- Bonnefoy, F., Ducrozet, G., Touzé, D.L., Ferrant, P., 2009. Advances in numerical simulation of nonlinear water waves. volume 11 of *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. World Scientific, pp. 129–164.
- Chalikov, D., Babanin, A.V., 2012. Simulation of wave breaking in one-dimensional spectral environment. *J. Phys. Oceanogr.* 42, 1745–1761.
- Derakhti, M., Kirby, J., 2016. Breaking-onset, energy and momentum flux in unsteady focused wave packets. *J. Fluid Mech.* 790, 553–581.
- Derakhti, M., Kirby, J.T., Shi, F., Ma, G., 2016a. Wave breaking in the surf zone and deep-water in a non-hydrostatic RANS model. part 1: organized wave motions. *Ocean Modell.* 107, 125–138.
- Derakhti, M., Kirby, J.T., Shi, F., Ma, G., 2016b. Wave breaking in the surf zone and deep-water in a non-hydrostatic RANS model. part 2: turbulence and mean circulation. *Ocean Modell.* 107, 139–150.
- Dommermuth, D.G., Yue, D.K., 1987. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *J. Fluid Mech.* 184, 267–288.
- Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Ferrant, P., 2016a. On the equivalence of unidirectional rogue waves detected in periodic simulations and reproduced in numerical wave tanks. *Ocean Eng.* 117, 346–358.
- Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Ferrant, P., 2007. 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 7, 109–122.
- Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Ferrant, P., 2012. A modified high-order spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank. *Eur. J. Mech. B/Fluids* 34, 19–34.
- Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., Ferrant, P., 2016b. HOS-Ocean: open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on high-order spectral method. *Comput Phys Commun* 203, 245–254.
- Fedele, F., 2014. Geometric phases of water waves. *EPL (Europhys. Lett.)* 107, 69001.
- Fedele, F., Chandre, C., Farazmand, M., 2016. Kinematics of fluid particles on the sea surface: hamiltonian theory. *J. Fluid Mech.* 801, 260–288.
- Gouin, M., Ducrozet, G., Ferrant, P., 2016. Development and validation of a non-linear spectral model for water waves over variable depth. *Eur. J. Mech.-B/Fluids* 57, 115–128.
- Gouin, M., Ducrozet, G., Ferrant, P., 2017. Propagation of 3d nonlinear waves over an elliptical mound with a high-order spectral method. *Eur. J. Mech.-B/Fluids* 63, 9–24.
- Grilli, S.T., Guyenne, P., Dias, F., 2001. A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 35, 829–867.
- Grilli, S.T., Skourup, J., Svendsen, I.A., 1989. An efficient boundary element method for nonlinear water waves. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 6, 97–107.
- Grue, J., Jensen, A., 2012. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves. *J. Geophys. Res.: Oceans* 117, 1–16.
- Kurnia, R., van Groesen, E., 2014. High order hamiltonian water wave models with wave-breaking mechanism. *Coast. Eng.* 93, 55–70.
- Melville, W.K., Matusov, P., 2002. Distribution of breaking waves at the ocean surface. *Nature* 417, 58–63.
- Perlin, M., Choi, W., Tian, Z., 2013. Breaking waves in deep and intermediate waters. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 45, 115–145.
- Rapp, R.J., Melville, W.K., 1990. Laboratory measurements of deep-water breaking waves. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 331, 735–800.
- Saket, A., Peirson, W., Banner, M., Barthelemy, X., Allis, M., 2017. On the threshold for wave breaking of two-dimensional deep water wave groups in the absence and presence of wind. *J. Fluid Mech.* 811, 642–658.
- Seiffert, B.R., Ducrozet, G., 2016. Deep water wave-breaking in a high-order spectral model. *Proceedings of the 31st International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*. Plymouth, MI.
- Shemer, L., 2013. On kinematics of very steep waves. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 13, 2101–2107.
- Song, J., Banner, M.L., 2002. On determining the onset and strength of breaking for deep water waves. part i: unforced irrotational wave groups. *J. Phys. Oceanogr.* 32, 2541–2558.
- Sriram, V., Schlurmann, T., Schimmels, S., 2015. Focused wave evolution using linear and second order wavemaker theory. *Appl. Ocean Res.* 53, 279–296.
- Stansell, P., MacFarlane, C., 2002. An experimental investigation of breaking criteria based on wave phase speeds. *J. Phys. Oceanogr.* 32, 1269–1283.
- Tian, Z., Perlin, M., Choi, W., 2008. Evaluation of a deep-water wave breaking criterion. *Phys. Fluids* 20, 066604.
- Tian, Z., Perlin, M., Choi, W., 2010. Energy dissipation in two-dimensional unsteady plunging breakers and an eddy viscosity model. *J. Fluid Mech.* 655, 217–257.
- Tian, Z., Perlin, M., Choi, W., 2012. An eddy viscosity model for two-dimensional breaking waves and its validation with laboratory experiments. *Phys. Fluids* 24, 036601.
- Tulin, M.P., Landrini, M., 2001. Breaking waves in the ocean and around Ships. *Proceedings of the Twenty-Third Symposium on Naval Hydrodynamics*. pp. 713–745.
- Tulin, M.P., Waseda, T., 1999. Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects. *J. Fluid Mech.* 378, 197–232.
- West, B.J., Brueckner, K.A., Janda, R.S., Milder, D.M., Milton, R.L., 1987. A new numerical method for surface hydrodynamics. *J. Geophys. Res.* 92, 803–11.
- Wu, C.H., Nepf, H.M., 2002. Breaking criteria and energy losses for three-dimensional wave breaking. *J. Geophys. Res.* 107, 1–18.
- Zakharov, V., 1968. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. App. Mech. Tech. Phys.* 9, 86–94.

### **B.3 A non-linear wave decomposition model for efficient wave-structure interaction. Part A : Formulation, validations and analysis**

L'article suivant présente les résultats principaux de mon post-doctorat, réalisé à DTU (Danemark). En particulier, l'application à un formalisme potentiel complètement non-linéaire de la méthode par décomposition fonctionnelle pour l'interaction houle-structure est développée et validée. On trouvera dans cet article des détails concernant la section 3.2.2 du présent mémoire de recherches.

Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

## Journal of Computational Physics

[www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp)

# A non-linear wave decomposition model for efficient wave–structure interaction.

## Part A: Formulation, validations and analysis

Guillaume Ducrozet<sup>a</sup>, Allan P. Engsig-Karup<sup>b</sup>, Harry B. Bingham<sup>c</sup>,  
Pierre Ferrant<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LHEEA Lab., École Centrale de Nantes, LUNAM Université, Nantes, France

<sup>b</sup> Dept. of Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Kgs. Lyngby, Denmark

<sup>c</sup> Dept. of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark, Kgs. Lyngby, Denmark



### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 12 March 2013

Received in revised form 4 September 2013

Accepted 8 September 2013

Available online 18 September 2013

#### Keywords:

High-order finite differences

OceanWave3D

Wave–structure interaction

Non-linear decomposition

Standing waves

Offshore engineering

### ABSTRACT

This paper deals with the development of an enhanced model for solving wave–wave and wave–structure interaction problems. We describe the application of a non-linear splitting method originally suggested by Di Mascio et al. [1], to the high-order finite difference model developed by Bingham et al. [2] and extended by Engsig-Karup et al. [3,4]. The enhanced strategy is based on splitting all solution variables into incident and scattered fields, where the incident field is assumed to be known and only the scattered field needs to be computed by the numerical model. Although this splitting technique has been applied to both potential flow and Navier–Stokes solvers in the past, it has not been thoroughly described and analyzed, nor has it been presented in widely read journals. Here we describe the method in detail and carefully analyze its performance using several 2D linear and non-linear test cases. In particular, we consider the extreme case of non-linear waves up to the point of breaking reflecting from a vertical wall; and conclude that no limitations are imposed by adopting this splitting. The advantages of this strategy in terms of robustness, accuracy and efficiency are also demonstrated by comparison with the more common strategy of solving the incident and scattered fields together.

© 2013 Elsevier Inc. All rights reserved.

## 1. Introduction

The unsteady problem of the interaction between waves and marine structures is a subject of major interest considering the economic stakes associated with it. The design of these structures (e.g. ships, offshore platforms, breakwaters) in coastal and open ocean regions requires very specific tools to evaluate the expected hydrodynamic forces. Experimental tests on model scale are considered the most reliable way to obtain such data. However, due to developments made within the scientific community in recent years, numerical models are now able to achieve similar levels of reliability.

To obtain the most accurate numerical predictions, the properties of non-linear phenomena involved may be taken into account. These include: wave dispersion, wave–wave interaction, diffraction/radiation and interaction with the bathymetry. When dealing with the development of a numerical method, one of the key points to take into account for practical use is the computational work effort. Indeed, for many existing methods this may prohibit the desired applications, for instance, of shape optimization or parametric studies. To support cost-efficient analysis with sufficient accuracy there is an important need for efficient computational models.

Several numerical solutions for coastal and marine wave–structure interaction problems have been developed. These rely primarily on potential flow theory with formulations ranging from linear frequency domain (with possible developments to second and third-order in non-linearity, e.g. [5]) up to fully non-linear time-domain [6]. Reynolds-Averaged Navier–Stokes

Equations (RANSE) solvers have also appeared (e.g. [7]). However, the computational effort required for RANSE methods still imposes severe limitations on domain size and/or resolution. Thus, we focus here on fully non-linear time-domain potential flow solvers. The pioneering work of Longuet-Higgins and Cokelet [8] led to Boundary Integral Equations Methods which allow a projection of the 3D problem onto the boundary surface of the fluid domain. Boundary Element Methods (BEM) have been widely used to solve this fully non-linear problem in the time-domain (see e.g. recent applications in [9,10]). However, efficient BEM solvers are yet to be demonstrated, even though the latest developments dealing with High-Order BEMs coupled with Fast Multipole Algorithm [11] are promising. An alternative is to solve the complete 3D Laplace problem. Different solution strategies may be applied including: finite element methods [12,13] and finite difference methods [14].

Recent developments (Bingham and Zhang [2], Engsig-Karup et al. [3,4] and Glimberg et al. [15]) demonstrate the attraction of the direct method of solving the Laplace problem using high-order finite differences in terms of both accuracy and efficiency. This method, named OceanWave3D, captures all the features of wave–wave, wave–bottom and wave–structure interaction. However, when studying the interaction between waves and marine structures, for optimum efficiency it is attractive to minimize the size of the computational domain around the structure of interest. To this end, an interesting approach was proposed by Di Mascio et al. [1]. They proposed a non-linear decomposition of the wave–structure interaction solution into an incident and a scattered wave field. The incident field represents the undisturbed wave, which is known explicitly, either from theory or specialized, fast, and high-accuracy computations; while the scattered field takes into account the presence of the structure and is solved by the general purpose numerical model. This approach has been extensively validated for potential flow problems by Ferrant [16,17] and also applied to viscous RANSE models by Ferrant et al. [18] and Luquet et al. [19,20]. These references are however not widely read outside of a small Naval Hydrodynamics community, and they lack a detailed investigation of the features and possible limitations of the approach. One goal of the present paper is to provide such a detailed investigation, while at the same time exposing the idea to a wider community of researchers interested in wave–structure interaction.

In the remainder of this paper, we begin with a brief review of the general potential formulation as well as the original OceanWave3D model. The non-linear decomposition is then detailed, where in our case the incident part is explicitly given by a dedicated wave model, while the scattered part is solved by the finite difference method OceanWave3D. A challenging feature of this splitting is that the incident wave field needs to be evaluated up to the total free-surface height, *i.e.* at points which are above (and sometimes very far above) the incident wave elevation itself. Fortunately, potential flow solutions can generally be continued analytically into this region; but it raises the question of what impact this feature has on the robustness and stability of the procedure compared to solving for both fields together.

The theory is followed by validation results in 2D. Two configurations are studied: non-linear, free wave propagation; and reflection of non-linear waves from a vertical wall. The latter case is designed to test the above mentioned question of robustness and stability by pushing the resulting standing wave up to the point of breaking, and comparing the results to both experimental measurements and to numerical calculations where both fields are solved together. From these test cases, we conclude that the splitting does not impose any limitations or constraints on the numerical model.

Finally, the efficiency of the non-linear decomposition method is studied and compared to the original OceanWave3D model. The performance benefits as well as possible disadvantages to using this approach are pointed out using two generic test cases: reflection of waves from a vertical wall and wave shoaling on a beach.

## 2. Numerical method

In this section we present the model developed for enhanced treatment of wave–structure interactions. Firstly, the high-order finite difference model OceanWave3D [2,3] is briefly detailed including a short review of the fully non-linear potential flow solution process. Then, the non-linear decomposition approach is detailed, highlighting its main features and specificities. The gentle smoothing procedure used to prevent instability when spurious sawtooth instabilities appear during simulations of steep events is finally discussed.

### 2.1. General framework—the OceanWave3D model

We choose a Cartesian coordinate system with an origin  $O$ . The  $z$  axis is vertical and oriented upwards, with the level  $z = 0$  corresponding to the mean water level. The notation  $\mathbf{x}$  stands for the  $(x, y)$  vector. We assume that the fluid simulated is incompressible and inviscid and that the flow is irrotational (*i.e.* potential flow formalism). With these assumptions, the velocity  $\mathbf{V}$  derives from a velocity potential  $\phi$ . The continuity equation thus becomes the Laplace equation in the fluid domain  $D$ :  $\Delta\phi = 0$ .

The free surface elevation is assumed to be a single-valued and thus described by  $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$ . At the same time we introduce, following Zakharov [21], the free surface velocity potential  $\tilde{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, \zeta, t)$ . This way, the fully non-linear time-dependent free surface boundary conditions can be written in terms of surface quantities

$$\tilde{\phi}_t = -g\zeta - \frac{1}{2}|\nabla\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\zeta|^2)\phi_z^2 \quad (1)$$

$$\zeta_t = (1 + |\nabla\zeta|^2)\phi_z - \nabla\tilde{\phi} \cdot \nabla\zeta \quad (2)$$



on  $z = \zeta(\mathbf{x}, t)$ ; where partial differentiation is indicated when the independent variables appear as sub-scripts and  $\nabla$  stands for the horizontal gradient. It appears in these two conditions that one only need to evaluate the vertical velocity at the free surface  $\tilde{w}(\mathbf{x}, t) = \phi_z(\mathbf{x}, \zeta, t)$  in order to advance in time the quantities of interest  $(\zeta, \tilde{\phi})$ .

The OceanWave3D model solves the Laplace problem (*i.e.* Laplace equation throughout the depth of the fluid along with boundary conditions—including bottom whose profile can be chosen arbitrarily) directly to obtain this vertical velocity. A non-conformal mapping ( $\sigma$ -transform) allows the transformation of the physical domain (which evolves during time) onto a fixed computational domain. The obtained Laplace problem is then solved by means of finite difference method. Arbitrary high-order schemes are used with possibly stretched grid in horizontal or vertical directions. These developments are found to be greatly advantageous relative to classical second-order schemes on even grids. The obtained linear system is solved with low storage and high efficiency with a three-recurrence multigrid preconditioned Defect Correction Method [4]. More details can be found in the cited references.

## 2.2. Non-linear decomposition

Efficient numerical computation of wave–body interactions is still a challenge for fully non-linear potential flow methods (such as OceanWave3D). Thus in order to minimize the size of the required computational domain, we adopt the splitting technique originally proposed by Di Mascio et al. [1]. All the unknowns of the problem (velocity potential and free-surface elevation) are split into two parts which are referred as the incident and the scattered components. The incident terms describe the undisturbed incoming wave and the scattered terms take care of the influence of the structure. The incident component is assumed to be known explicitly while the scattered component is the new unknown to be solved for by the OceanWave3D model. The incident waves are described explicitly using a non-linear potential flow model and will act as forcing terms. In the following results, non-linear regular wave trains are studied and given by an algorithm based on the stream function theory of Fenton [22] (or Airy waves when solving in a linear framework). This approach has been extensively validated by Ferrant [16,17] in the XWAVE code which used this splitting technique with a MEL-BEM method. A successful comparison between this XWAVE code and the modified OceanWave3D code has been presented in Ducroz et al. [23]. Furthermore, the approach has been successfully extended to viscous flow calculations with the so-called SWENSE method (Ferrant et al. [18], Luquet et al. [19,20]).

We apply the following change of variable to the total free surface elevation  $\zeta$  and the velocity potential  $\phi$ :

$$\zeta = \zeta^I + \zeta^S \quad (3a)$$

$$\phi = \phi^I + \phi^S, \quad -h \leq z \leq \zeta \quad (3b)$$

The incident waves (described by  $\zeta^I$  and  $\phi^I$ ) are known potential flow solutions (thus  $\Delta\phi^I = 0$  in the fluid domain  $D$  where  $\Delta$  is the 3D Laplacian). The modified time-dependent free surface boundary conditions now read:

$$\zeta_t^S = -\zeta_t^I - \nabla(\zeta^I + \zeta^S) \cdot \nabla(\tilde{\phi}^I + \tilde{\phi}^S) + (\tilde{w}^I + \tilde{w}^S)(1 + \nabla(\zeta^I + \zeta^S) \cdot \nabla(\zeta^I + \zeta^S)) \quad (4a)$$

$$\tilde{\phi}_t^S = -\tilde{\phi}_t^I - g(\zeta^I + \zeta^S) - \frac{1}{2}\nabla(\tilde{\phi}^I + \tilde{\phi}^S) \cdot \nabla(\tilde{\phi}^I + \tilde{\phi}^S) + \frac{1}{2}(\tilde{w}^I + \tilde{w}^S)^2(1 + \nabla(\zeta^I + \zeta^S) \cdot \nabla(\zeta^I + \zeta^S)) \quad (4b)$$

expressed on  $z = \zeta^I + \zeta^S$ , the total free surface elevation.

The Laplace problem becomes

$$\nabla^2\phi^S + \phi_{zz}^S = 0, \quad -h \leq z < \zeta^I + \zeta^S \quad (5a)$$

$$\phi^S = \tilde{\phi}^S, \quad z = \zeta^I + \zeta^S \quad (5b)$$

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\nabla}(\phi^I + \phi^S) = 0, \quad (\mathbf{x}, z) \in \partial\Omega \quad (5c)$$

where  $\partial\Omega$  represents the solid boundaries of the domain  $\bar{\mathbf{n}}$  is the unit normal vector to the corresponding boundary and  $\bar{\nabla}$  the 3D gradient operator. Notice that this makes the kinematic boundary conditions on  $\partial\Omega$  inhomogeneous in general. Otherwise, the Laplace problem is almost unchanged compared to the original version. However, it is solved using the  $\sigma$ -transformation which will introduce several changes in the solution. Inserting the decomposition into the transformation gives

$$\sigma(\mathbf{x}, z, t) = \frac{z + h(\mathbf{x})}{\zeta^I(\mathbf{x}, t) + \zeta^S(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})} = \frac{z + h(\mathbf{x})}{d(\mathbf{x}, t)}$$

with  $d(\mathbf{x}, t) = \zeta^I(\mathbf{x}, t) + \zeta^S(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x})$ . The Laplace problem is thus transformed to (introducing for clarity  $\Phi(\mathbf{x}, \sigma, t) = \phi(\mathbf{x}, z, t)$ )

$$\Phi^S = \tilde{\phi}^S, \quad \sigma = 1 \quad (6a)$$

$$\nabla^2\Phi^S + \nabla^2\sigma\Phi_\sigma^S + 2\nabla\sigma \cdot \nabla\Phi_\sigma^S + (\nabla\sigma \cdot \nabla\sigma + \sigma_z^2)\Phi_{\sigma\sigma}^S = 0, \quad 0 \leq \sigma < 1 \quad (6b)$$

$$(\sigma_z + \nabla h \cdot \nabla\sigma) \cdot (\Phi_\sigma^I + \Phi_\sigma^S) + \nabla h \cdot \nabla(\Phi^I + \Phi^S) = 0, \quad \sigma = 0 \quad (6c)$$

The derivatives of  $\sigma$  are expressed with the change of variable as

$$\nabla\sigma = (1 - \sigma)\frac{\nabla h}{d} - \sigma\frac{\nabla(\zeta^I + \zeta^S)}{d} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2\sigma = & \frac{1 - \sigma}{d}\left(\nabla^2 h - \frac{\nabla h \cdot \nabla h}{d}\right) - \frac{\sigma}{d}\left(\nabla^2(\zeta^I + \zeta^S) - \frac{\nabla(\zeta^I + \zeta^S) \cdot \nabla(\zeta^I + \zeta^S)}{d}\right) \\ & - \frac{1 - 2\sigma}{d^2}\nabla h \cdot \nabla(\zeta^I + \zeta^S) - \frac{\nabla\sigma}{d} \cdot (\nabla h + \nabla(\zeta^I + \zeta^S)) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{d} \quad (9)$$

The discretization of the model has been studied in detail. The Laplace problem (Eqs. (6)) as well as free surface boundary conditions (Eqs. (4)) make use of incident quantities and their spatial derivatives. Then, the discrete model for solving the problem of interest can be developed in two ways: i) use the analytical derivatives directly as source contributions or ii) sum the computed solution for the scattered field with the incident field and then do all approximations discretely. The approximate solution is more straightforward in terms of implementation and requires less computational effort to generate the incident wave field. However, this extra computational effort is expected to be negligible in 3D computations where the resolution of scattered field will be predominant. At the same time, this approach leads to accuracy losses. Indeed, different tests conducted showed that both approaches converge to a similar behavior (at large number of points), but the analytical derivatives are far more accurate for a small number of points. Consequently, we choose to use the analytical description of all incident quantities in our implementation of the non-linear decomposition.

### 2.3. The main features of the decomposition

The proposed non-linear decomposition approach presents several noteworthy features. They are described hereafter in detail to point out clearly the advantages and possible limitations that are expected from such an approach. We also refer to the different validations proposed in Section 3 for practical applications of some of these features.

First of all, the incident wave field is given explicitly by a dedicated wave model which is assumed to be accurate and very fast (compared to the overall solution). As noted above, a stream function model is used in the following to generate non-linear regular waves however, the choice of incident wave model is arbitrary. Consequently, the only limitation on the incident wave field is the capability of the chosen wave model. The SWENSE approach [20] has for instance been coupled to a High-Order Spectral (HOS) method [24] to define complex sea states (including irregular or focused 2D and 3D wave fields).

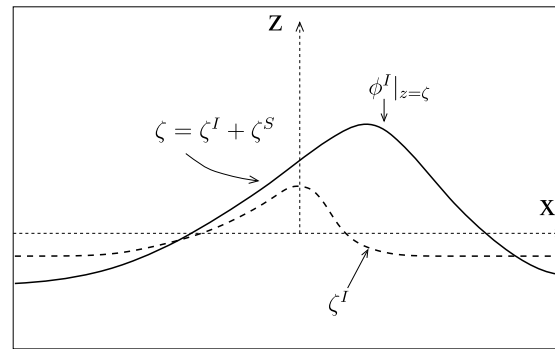
Concerning the scattered component which is actually solved by the modified OceanWave3D solver (*i.e.* scattered potential  $\phi^S$  and free surface elevation  $\zeta^S$ ), it seems important to detail what is included in this part. Thanks to the non-linear decomposition, the incident part is given explicitly in the set of equations solved for the scattered part. Consequently, physical processes which are not included in the incident part are solved for by the scattered component. Therefore, this scattered part is not only the so-called scattered (or diffracted) waves by the object of interest but also all interactions between these waves and the incident components. Thus, it is advantageous to choose an incident wave field which solves as much of the problem as possible. In particular, it is worthwhile to use a fully non-linear model for its description.

Indeed, if a linear incident wave field is chosen instead, all non-linearities which are not included by incident wave model will be solved by the “scattered” part. Similarly, if the incident wave field is designed at a given water depth and one wants to model the refraction of waves by an uneven bottom, this refraction process will be actually solved by the scattered part (see Section 4.2). On the other hand, if all physical processes are included by the incident part, the corresponding scattered part is zero and requires no CPU cost (see Section 3.1). Consequently, the more of the physics that are resolved by the incident part, the more efficient the methodology becomes.

The main advantages which are expected may be listed from the previous features. Firstly, the computational effort of the incident wave field will be negligible (especially in 3D) compared to the effective solution of the wave–structure interactions. Furthermore, we note that with an appropriate choice of incident wave model, any kind of wave can be defined and generated. Also, there is no need to propagate the incident waves from the computational domain boundary to the structure with this approach. Indeed, the incident waves exist everywhere in the domain at all times. We note however, that the original OceanWave3D model offers already this possibility via a special use of relaxation zones.

In addition, the incident waves are not reflected from the far-field boundaries. Thanks to the non-linear decomposition, it is then also possible to reduce the problem size for 3D scattering problems. Since the incident flow is known everywhere with no reflection from exterior boundaries, the grid may be highly refined around the structure, and dramatically stretched away from it, leading to more efficient use of the computational unknowns. An accurate solution of the scattered field is obtained close to the structure, but the domain away from the structure only functions to absorb the scattered waves. This results in a reduced problem size and a corresponding reduction of the computational effort.

Consider the free surface boundary conditions (4). From these expressions we can see that the incident field and its derivatives ( $\phi^I$ ,  $\phi_t^I$ ,  $w^I$ , ...) have to be evaluated at the position of the total wave elevation  $\zeta = \zeta^I + \zeta^S$ . Thus, these incident



**Fig. 1.** Illustration of a possible situation showing how the incident wave may need to be evaluated at points far above its own free-surface definition.

quantities have to be evaluated at points above the incident free surface elevation (as sketched in Fig. 1). Consequently, the dynamics of the incident wave has to be computed outside its domain of definition. The accuracy of this evaluation is in fact not critical since everything which is not solved by the incident part will be solved by the scattered part. Theoretically it should be possible to specify an incident wave field only in the incident fluid domain and set it to zero outside, for example. However, numerically it appears to be necessary to have a continuous solution for the incident potential above the incident free surface elevation to ensure that discontinuities are not introduced in the scattered potential. This also leads to a more efficient and stable solution. Thus the ideal incident wave field, and its derivatives, should be continuously defined through, and above the free-surface. Fortunately, potential flow based wave theories (such as the stream function theory used here or High-Order Spectral method [24]) generally allow for an analytic continuation of the incident potential above the reference wave elevation. Thus, this continuity requirement is not a constraint in practice. However, it is natural to question whether errors introduced as a result of this extrapolation (which will be corrected by the scattered part) may be a source of instabilities or inaccuracies. This has motivated the choice of the validation test case in Section 3.2 with the reflection of waves by a vertical wall; which is assumed to be the most extreme situation we might expect to encounter in this respect.

Finally, the initialization of such an approach has to be treated carefully. In order to ensure a stable solution, a time ramp is imposed at the beginning of the computation on the non-homogeneous Neumann boundary conditions (5c). These are indeed imposed on the combined incident and scattered field and require special care during the start-up. Thus, the problem solved is going from a wave propagating freely inside the domain at the beginning of the time ramp up to a wave interacting with the structure at the end: the structure studied slowly *appears* during the time-ramp. This solution strategy has been found to be robust, and effective at preventing numerical instabilities. In the following, the length of this time ramp is usually fixed to  $5T$  with  $T$  the characteristic wave period with a solution independent to time ramp after  $10T$ .

#### 2.4. The smoothing procedure

Here we detail the smoothing procedure used during the non-linear computations which involve very steep waves (close to wave breaking) and possible spurious sawtooth instabilities. Inside the domain (*i.e.* away from boundaries), we use 1D Savitzky–Golay (SG) filters [25] applied along each direction successively for 2D surface smoothing (*i.e.* in 3D cases). Kuo et al. [26] demonstrated the equivalence of sequential 1D smoothing and 2D smoothing techniques. This is briefly reviewed next. Then we study the efficient treatment of boundaries during the smoothing. The classical off-centered SG-filters are analyzed and switched to optimized filters from Berland et al. [27] to obtain better stability properties.

Note that the proposed smoothing is applied only in extreme conditions and occasionally to ensure that it does not influence significantly the total energy. Typically, it is applied every wave period to every tenth of a wave period, depending on the resolution and the test case.

##### 2.4.1. Centered Savitzky–Golay filter

In this paragraph we review the behavior of 1D centered Savitzky–Golay filters [25]. This filter will be used, if needed, inside the domain away from boundaries. Fig. 2 presents the behavior of the amplification factor with respect to the number of points per wavelength describing a wave. The amplification factor  $A$  is the ratio between the original wave amplitude and the filtered one. A value of 1 means that the wave is not modified by the filter while a value 0 means a complete absorption of the corresponding wave. In this figure, bottom graphs present the value  $\log(1 - A)$  to have a more accurate view on the strength of the filter.

We will refer to these filters as  $SG(N, p)$  filters where  $N$  is the number of grid points used and  $p$  is the polynomial order of the interpolation. The top left part of Fig. 2 shows the dependence of the amplification factor for  $SG(13, p)$  filters using different orders of polynomial  $p$  (from 2nd to 10th order). The 10th order filter is very smooth and only slightly damps the shortest waves with resolution below 5–6 points per wavelength while the 2nd order one is very strong and applies significant damping to waves resolved with around 30 points per wavelength. The top right part of Fig. 2 gives the amplification factors for  $SG(N, 4)$  filters with  $N$  from 7 to 15 points. More points in the filter leads to stronger filtering.

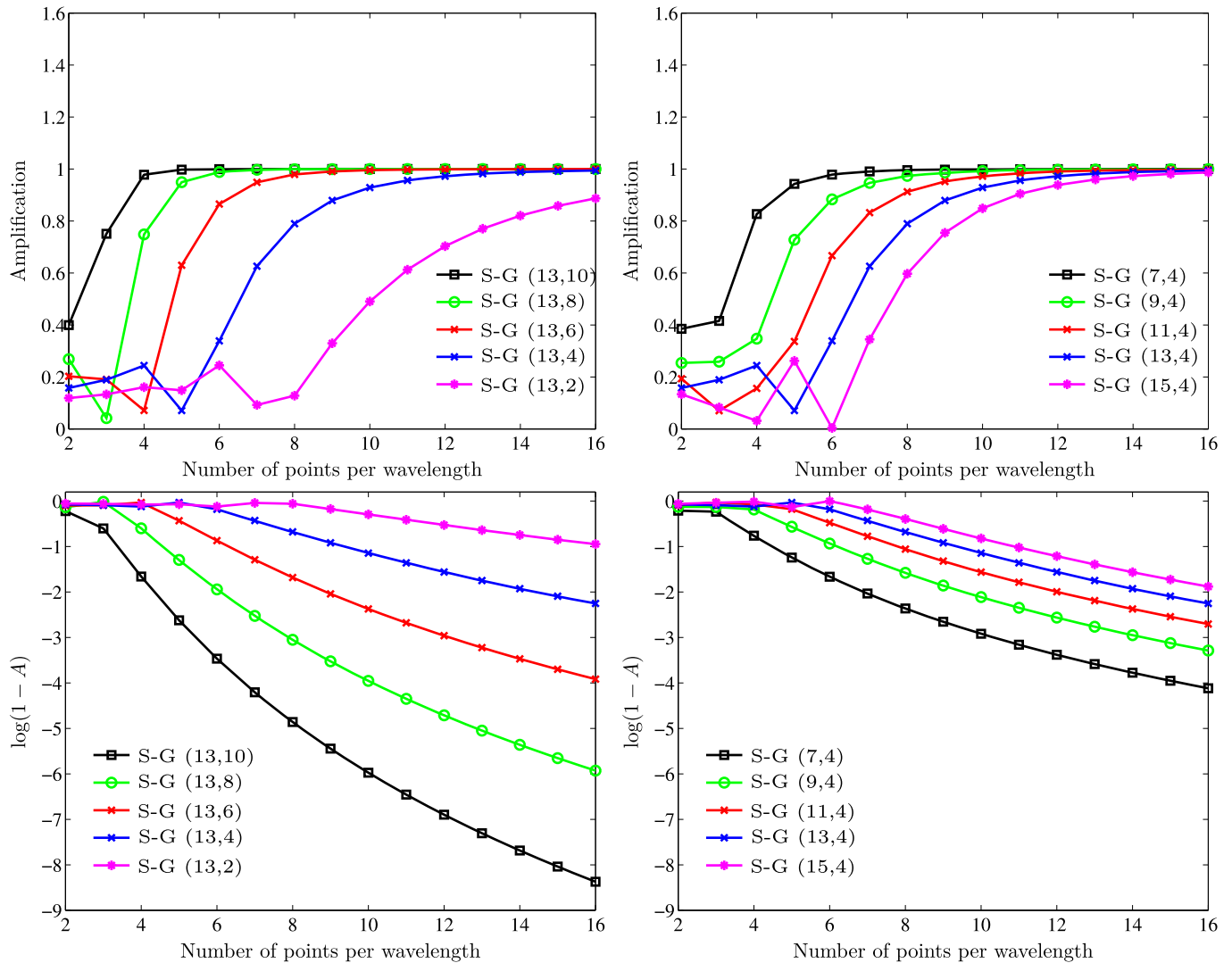


Fig. 2. Amplification portraits for SG(13,  $p$ ) filters (left) and SG( $N$ , 4) filters (right).

Thus, the two parameters can be modified to obtain a desired behavior of the filter. Typically, we employ the mild filter SG(13, 10) which for most purposes is sufficient for stabilization. It is applied at a given frequency depending on the intensity of filtering needed. The bottom part of the figure with log diagram assess that this filter is very light, even for long time simulations where it can be applied numerous times. In all cases it is important to monitor the conservation of energy to ensure that the physics is not contaminated by the filtering.

#### 2.4.2. Boundary treatment

Towards the boundaries of the domain, off-centered schemes are required. In this section, we analyze the properties of off-centered Savitzky–Golay filters and show that none of them are suitable very close to the boundary where they act to amplify rather than filter. Thus, we adopt instead the selective filters of Berland et al. [27].

We study the behavior of the off-centered SG-filters and particularly the one which is completely one-sided (*i.e.* the 1st point of the domain—*i.e.* boundary point—with neighbors all on one side). It is then possible to draw amplification portraits similarly to previous figures. To draw such a portrait, one applies the same off-centered scheme everywhere in the domain. This is actually not exactly equivalent to the current filter which has a progressive off-centering once one reaches the boundary and a centered scheme far from the boundaries. However, it allows us to characterize its behavior at the boundary position. This is done in Fig. 3.

Different configurations are depicted in Fig. 3 (different choices of polynomial order and number of points in the filter) and a major issue appears, noticing that this SG off-centered filter actually amplifies some wave components instead of damping them. In addition, high-order polynomial (*e.g.* SG(13, 10)) exhibits no filtering at all on the point of interest. This has driven the choice to use an alternative smoothing procedure.

To overcome these problems, some optimized filters have been developed by Berland et al. [27], called Selective Filters (SF). These are some explicit filters formulated to treat the boundary problems with some specifications and particularly

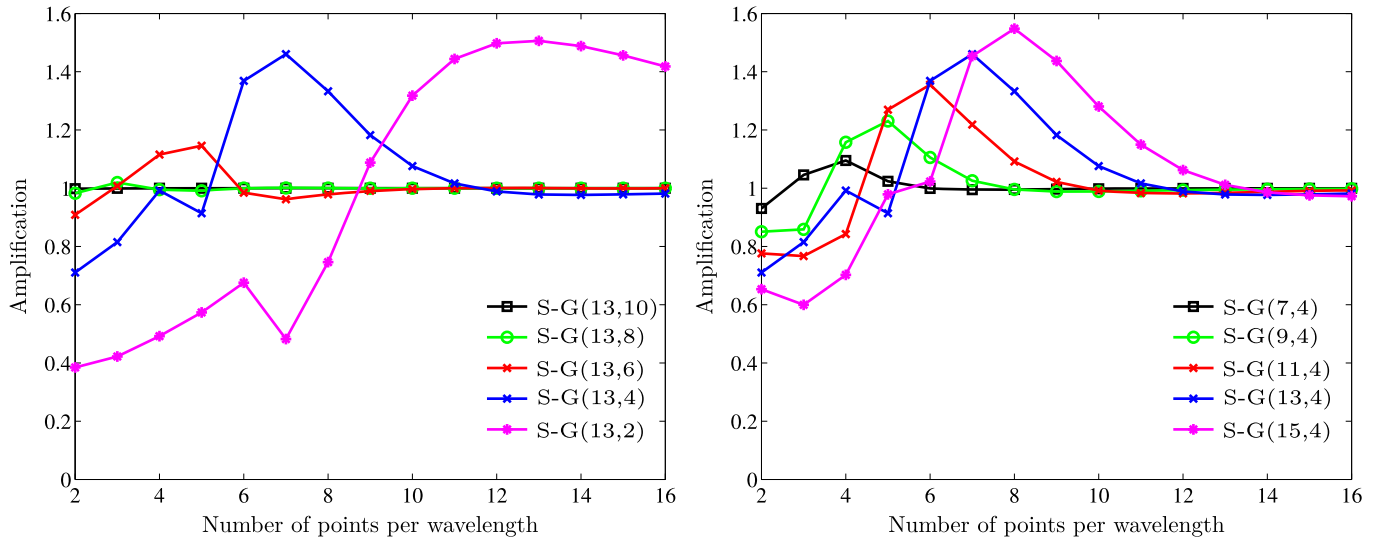


Fig. 3. Amplification portraits on 1st point for off-centered filters SG(13, p) (left) and SG(N, 4) (right).

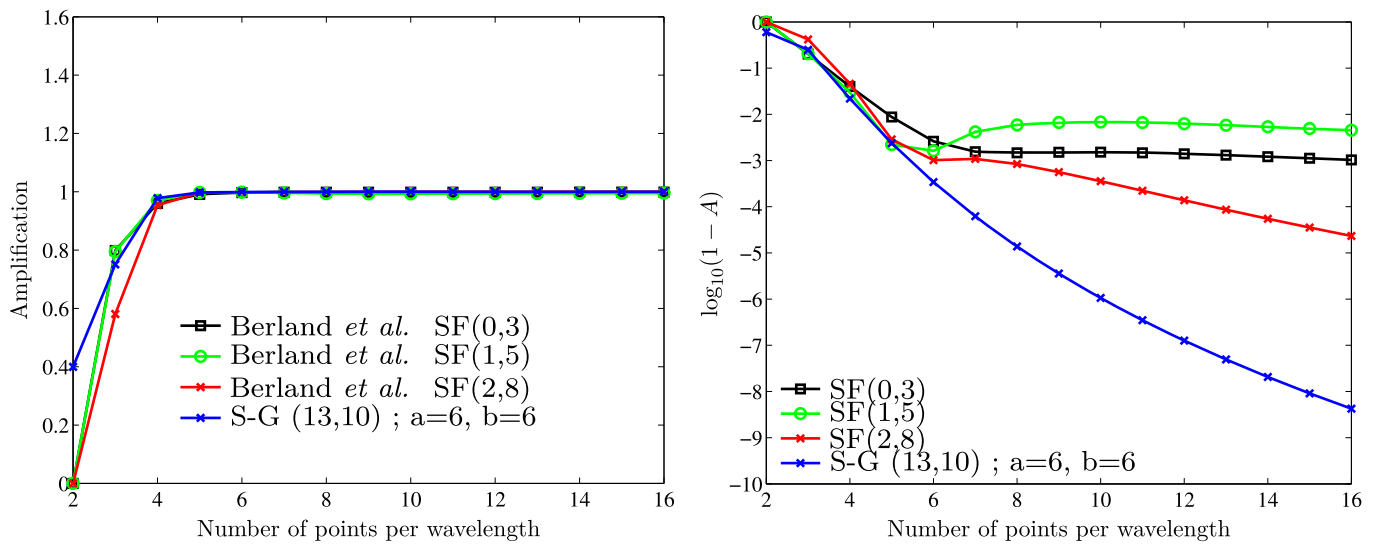


Fig. 4. Amplification portraits of selective filters from Berland et al. [27]: normal (left) and log scale (right).

the one of interest, that no amplification occurs at any wavelength. The filtered data  $\tilde{f}(x_i)$  is expressed with respect to the unfiltered data  $f(x_i)$  as

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) - \alpha \sum_{j=-a}^b d_j f(x_i + j\Delta x) \tag{10}$$

For now, we set the parameter  $\alpha = 1$  to analyze the behavior of the filter. However, it will be possible to adjust it to have a lighter smoothing if needed ( $\alpha$  has to be chosen between 0 (no filtering) and 1), but note that the features described hereafter are preserved.

Fig. 4 presents the amplification portraits of these filters which we refer to as  $SF(a, b)$ , with  $a$  and  $b$  the number of points on the left and on the right respectively. Thus,  $SF(0, 3)$  stands for a one sided scheme that can be applied on the left boundary itself.

This figure (left) indicates that these filters do not exhibit any amplification. They also appear to be really light, with an amount of dissipation of the order of the SG(13, 10) filter. It is then possible to choose a set of filters at every off-centered position to have always almost the same amount of dissipation everywhere in the domain (when using smoothing).

In order to assess more explicitly the difference between the filters, Fig. 4 (right) plots the amplification portraits on a log–log scale. It is more clear here that the correct behavior is achieved at the expense of some accuracy with long waves. However, this is not expected to be a problem, since these filters are only applied to a very small number of grid points near the boundaries.

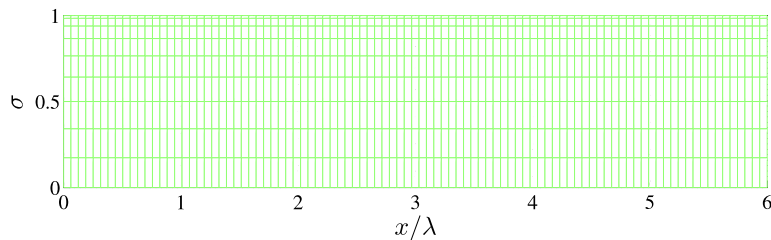


Fig. 5. Example of mesh used with OceanWave3D.

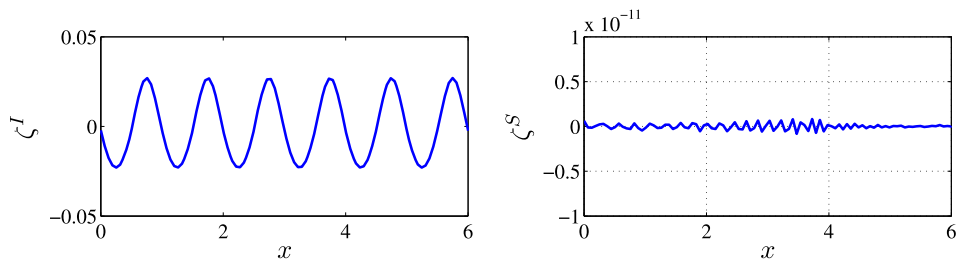


Fig. 6. Propagation of mildly non-linear wave  $H/\lambda = 0.05$ . Free surface elevation: incident  $\zeta^I$  and scattered  $\zeta^S$  after 25 periods of propagation.

Several tests have been performed to deduce correct parametrization of these boundary-filters. In the following, we typically use a given  $\alpha$  value which is taken lighter on the first two points from boundary ( $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/10$ ) when smoothing is applied (same approach used in Berland et al. [27]).  $\alpha_i$  stands for the value of the parameter on the  $i$ th point ( $i = 1$  is the boundary).

### 3. Validation

In this section, the first validation results in 2D domains (*i.e.* one horizontal direction) are given to demonstrate the feasibility of decomposition presented in the previous section. First, we study the case of a non-linear wave propagating without any obstacles inside the domain. Then, we investigate the case of a mildly non-linear wave reflecting off a wall. To ensure the robustness of the non-linear decomposition, an extreme case is simulated in this reflection configuration. The limit of stability of the standing wave appearing close to the wall is discussed and compared with experimental results as well as a dedicated numerical model. All these validations take the incident wave to a non-linear regular wave from stream-function theory [22].

#### 3.1. Non-linear propagation

We consider the simple case of a non-linear wave freely propagating without reflection from the side walls of the domain. The decomposition approach is used with the solution of the problem being specified as a mildly non-linear incident wave with  $H/\lambda = 0.05$  and  $kh = 2\pi$ , where  $\lambda$  is the wave length  $H$  the wave height, and  $k = 2\pi/\lambda$  the wave number. The results are shown in Fig. 6 computed using  $N_x = 16$  points per wavelength and  $N_z = 10$  points in the vertical. A stretched grid is used in the vertical direction as sketched in Fig. 5. The iterative DC Method is used with a tolerance level of  $10^{-13}$  and a wavelength  $\lambda = 1$  is chosen.

In this figure, the left part shows the incident free surface elevation  $\zeta^I$  after 25 periods of propagation. The right part gives the corresponding scattered free surface elevation  $\zeta^S$  which is actually the part solved directly by the enhanced OceanWave3D model. The solution of the problem of interest is the sum of incident and scattered parts:  $\zeta = \zeta^I + \zeta^S$ .

Clearly the scattered wave field is close to zero in the whole domain ( $< 10^{-11}$ ). The amplitude of this diffracted field will be strongly correlated with the discretization parameters of the numerical method (*e.g.* tolerance for iterative solvers as well as truncation errors resulting from discretization of governing equations). Indeed, in the case of a freely propagating wave field, we know (this computation enables a validation) that the incident wave field strictly satisfies the non-linear system Eqs. (6) to be solved by the direct method and is consequently a proper solution to the problem. Therefore, the coupled problem solved by direct method will just check that the incident wave field satisfies this system to the level of truncation errors. Thus, the scattered field created corresponds only to some minor errors in this *verification* (correlated with the tolerance of the DC method). This appears also clearly when one investigates the number of iterations used to solve the linear system. The latter is always equal to 1, independently of the space and time discretization used or the tolerance chosen, indicating that incident wave field is a solution to the problem considered. We return to a discussion of computational effort in Section 4.1.3.

In contrast, if one uses in such a non-linear simulation an incorrect incident wave field (*i.e.* a sea state that does not satisfy the system of Eqs. (6)) defined as a linear one for instance, then non-linearities will appear in the scattered part. Similarly, with the incident field defined here at a fixed water depth (from stream function theory), if we study the case of a

variable bathymetry the influence of the bottom will be described in the scattered wave field as discussed later (Section 4.2). Another point of view is that if incident field is defined to be zero, then the solver will correspond to the original solver since all effects will be resolved in the scattered variables. Thus, this extension simply adds to the functionality of the original solver.

### 3.2. Non-linear reflection on vertical wall

The reflection of a wave on a vertical wall is an interesting case, particularly to test both the robustness and the accuracy of the decomposition approach. Indeed, as seen in Section 2.3, we have to evaluate the incident quantities at the position of the total free surface elevation. This introduces some evaluations outside its domain of definition and is a possible source of errors or instability during the solution. In this respect, the reflection of a wave from a wall is an extreme situation where the incident field must be evaluated at a position which is at least twice the incident wave amplitude. Furthermore, strong non-linear interactions are expected between the incident and reflected waves. These interactions must also be accounted for in the scattered part. They are expected to be described with complex frequency content and consequently the scattered part will be more complicated than just a simple propagating wave in the opposite direction (w.r.t. the incident one). Thus, it seems reasonable to think that if the method is capable of handling this particular case with high incident wave amplitudes, it will be able to treat any non-breaking wave–structure interaction problems that we will have to deal with.

Fig. 7 shows the results of a calculation using the same mildly non-linear wave as in the previous test case:  $H/\lambda = 0.05$  and  $kh = 2\pi$  (i.e. deep water). The computational domain is of length  $L_x = 6\lambda$  with the waves propagating from right to left and reflecting from the left boundary. An absorbing zone of length  $4\lambda$  is located on the right part of the domain to absorb the scattered waves and prevent them from reflecting on the right wall. The spatial discretizations are  $N_x = 32$  points per wavelength and  $N_z = 10$  points in the horizontal and vertical direction respectively. A wavelength  $\lambda = 1$  m is chosen for this figure.

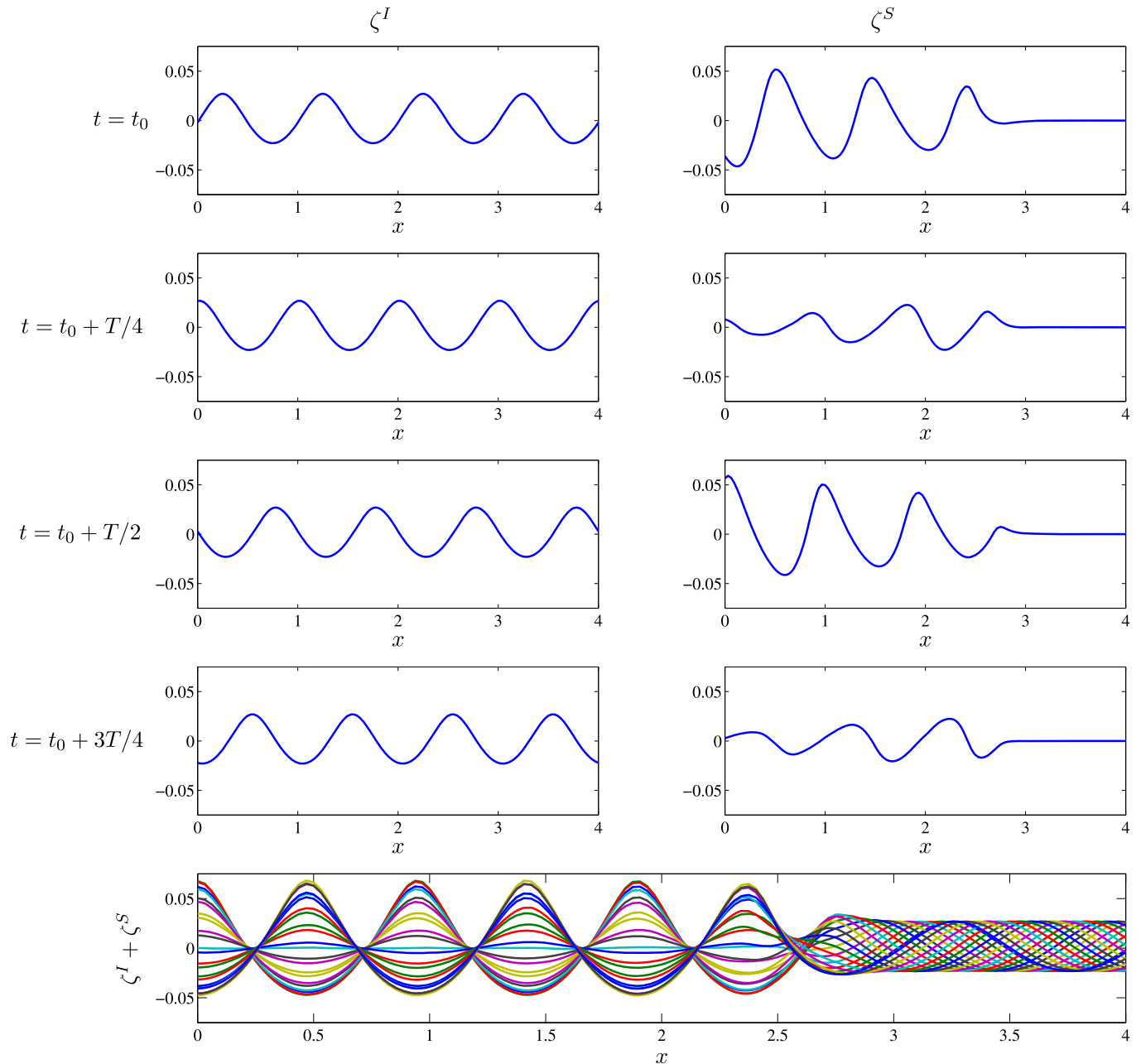
Results are presented similarly to Fig. 6. Each row presenting two columns gives, at a given time step (indicated on the left side), the incident wave  $\zeta^I$  and the corresponding scattered component  $\zeta^S$  on the left and right part of the figure respectively. Steady-state results are presented for 4 time steps selected during one incident wave period  $T$ . The bottom row presents the total free surface elevation  $\zeta = \zeta^I + \zeta^S$  with several time steps superimposed (corresponding to the different colors) chosen also during one wave period. This representation is intended to point out the creation of a steep non-linear standing wave close to the left wall. Reminding that the absorption is applied to the scattered part in the range  $x \in [2; 6]$ , the standing wave is actually limited to the region close to the left wall ( $x \in [0; 2]$ ). In this figure we observe, as expected, that the scattered wave field is complex but also of high amplitude (larger than the incident one). Non-linearities appear to be essential noticing that in the linear case the scattered wave will be the same than the incident one, with opposite direction. In contrast, this non-linear test case induces a scattered part  $\zeta^S$  very different from the incident wave. However, the resulting wave field  $\zeta$  solution of the problem of an incident regular wave reflecting on a vertical wall is, as expected, a standing wave. We can observe in Fig. 7 that non-linear effects result in a standing wave whose wavelength is reduced compared to the incident wave:  $\lambda_{stand.} = 0.95\lambda$ . The wave height is also amplified compared to the linear case:  $H_{stand.}/\lambda = 0.107$ , i.e. an effective steepness  $H_{stand.}/\lambda_{stand.} = 0.113$ , i.e. 13% larger than the linear solution.

The difference of wavelength between the incident wave  $\zeta^I$  and the effective solution of the wave–structure interaction  $\zeta$  imposes a complex scattered wave field with spatially varying amplitude as observed in Fig. 7. Furthermore, if we take a look at the phasing of the two components arising from non-linear decomposition ( $\zeta^I$  and  $\zeta^S$ ) at the position of the wall ( $x = 0$ ), they are clearly out of phase. In addition, during this test case, the maximum of the scattered component  $\zeta^S$  is observed when the incident wave is almost equal to zero on the wall ( $t = t_0 + T/2$ ) in Fig. 7. This phase shift explains the high-amplitude consequently observed in the scattered wave field. The phasing of the two components is studied specifically in Fig. 8 which presents the temporal evolution of the free surface elevation on the vertical wall where the reflection occurs.

A time-ramp is applied at the beginning of the simulation during  $10 T$  on the non-homogeneous Neumann boundary conditions. This ensures a stable solution for all cases treated with this configuration. The figure denotes clearly that when the steady-state is reached (after  $t \simeq 20 T$ ), the incident and the scattered wave fields are phase-shifted (according to what we observed on free surface elevation plots Fig. 7 and opposite to the linear case). This induces some high amplitudes of the scattered field (compared to the incident one) to obtain the solution of the problem which is consequently also phase shifted compared to the incident wave field. This test-case thus turns out to be even more extreme than originally envisioned (with respect to the extrapolation of incident quantities). Indeed, these have to be evaluated far above the incident wave elevation (for instance  $t = 27.2$  s,  $\zeta^I = 0.01$  and  $\zeta^I + \zeta^S = 0.065$ ). However, this phenomenon does not induce any stability or robustness issues compared to the behavior of the original OceanWave3D model. Various tests have been made to ensure this conclusion, including increasing the discretizations in the two space-directions as well as the local refinement near the wall where the reflection occurs.

Then, it seems interesting to study the influence of non-linearities on the phase shift observed previously. This is done in Fig. 9 which presents the phase shift between the two components at the location of the wall. This is studied as a function of the steepness of the incident wave field  $H/\lambda$ .

We observe, as expected, that for low incident steepness the phase shift tends to zero as predicted by linear theory. The phase-shift then increases with increasing incident wave non-linearity. It may be seen as the result of the non-linear interaction between incident and reflected waves. This is similar to what is observed during the interaction of a solitary

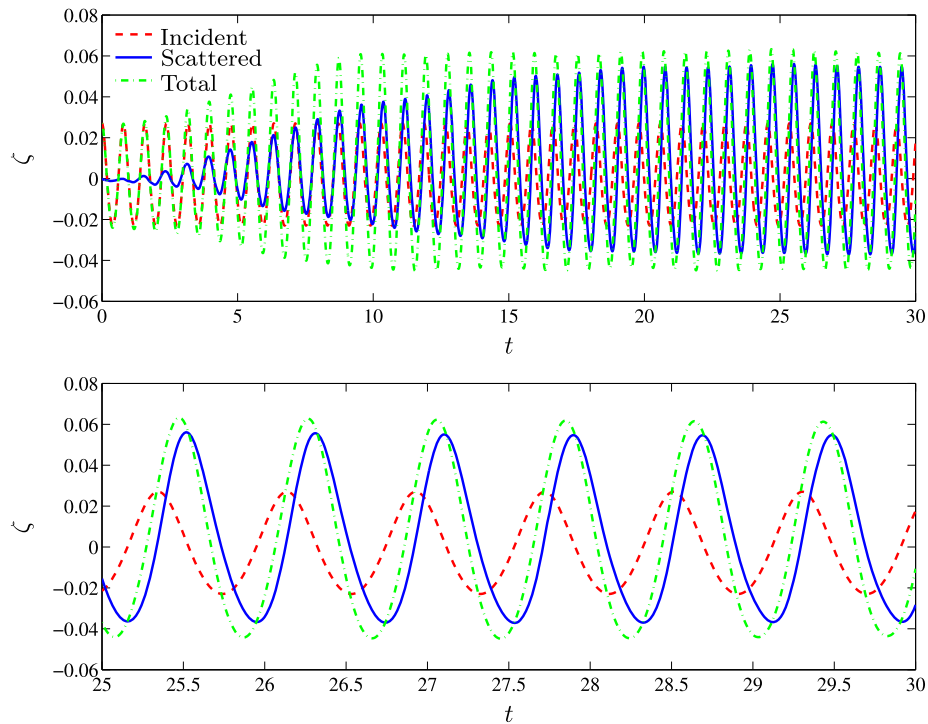


**Fig. 7.** Non-linear reflection on a vertical wall  $H/\lambda = 0.05$ . Free surface elevation: incident  $\zeta^I$ , scattered  $\zeta^S$  and total for different time steps. Bottom figure captures free surface elevation at different time steps.

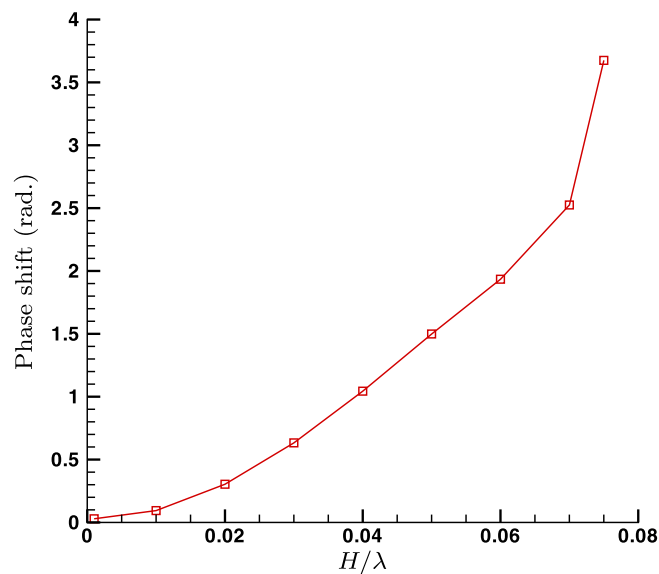
wave with a vertical wall. It has been shown that a phase shift, dependant on spatial position, is observed between the incident and reflected waves. This is typically what is seen here in the case of deep water regular waves. We refer to Su and Mirie [28] or Fenton and Rienecker [29] for details on the solitary-wave configuration.

The results with  $H/\lambda = 0.05$  have been compared to the same case studied with the original OceanWave3D model. The numerical parameters are  $N_x = 16$  points per wavelength and  $N_z = 10$  points in horizontal and vertical directions respectively with a Courant number  $C_r = 0.64$ . A relaxation zone on the right side of the domain is used to generate waves with the original model [2]. The two results obtained (with and without the non-linear decomposition) are in excellent agreement. An example of the comparison is given in Fig. 10 at a given time step chosen after a steady-state was reached. The original and non-linear decomposition results are superposed on the top part of the figure. The relative difference (in %) is given in the bottom of the figure in the zone of interest ( $x \in [0; 2]$ ) showing that they agree to within 1%. This small discrepancy may be explain by the treatment of reflected waves in the absorption/generation zone (right side of the domain). In this region, the two approaches are not strictly equivalent. Note that the differences in terms of computational effort are studied in Section 4.1.3.





**Fig. 8.** Free surface elevation on the vertical left wall during time until steady-state is reached: incident  $\zeta^I$ , scattered  $\zeta^S$  and total  $\zeta$ .

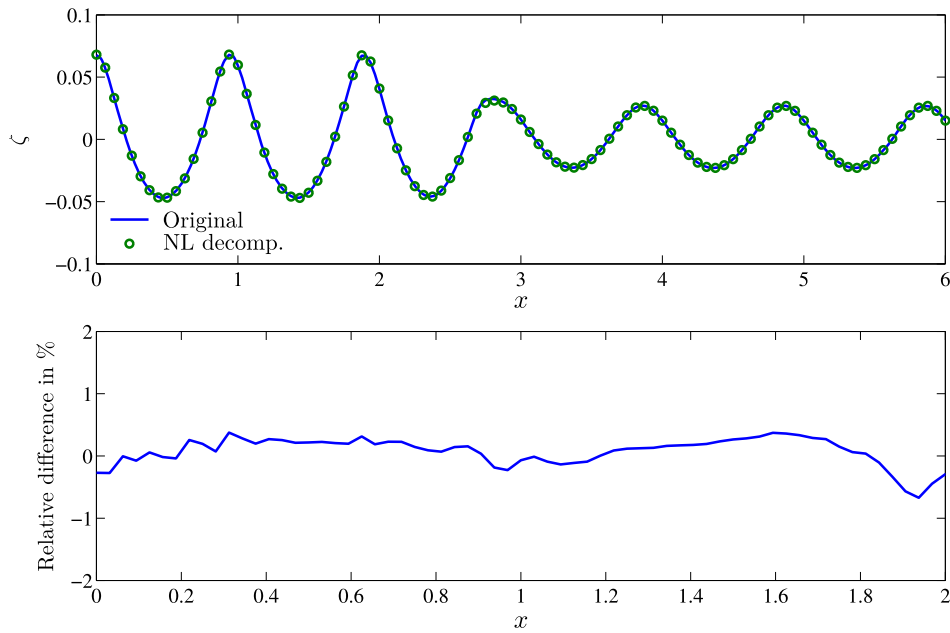


**Fig. 9.** Evolution of the phase shift at the wall as a function of incident wave steepness  $H/\lambda$ .

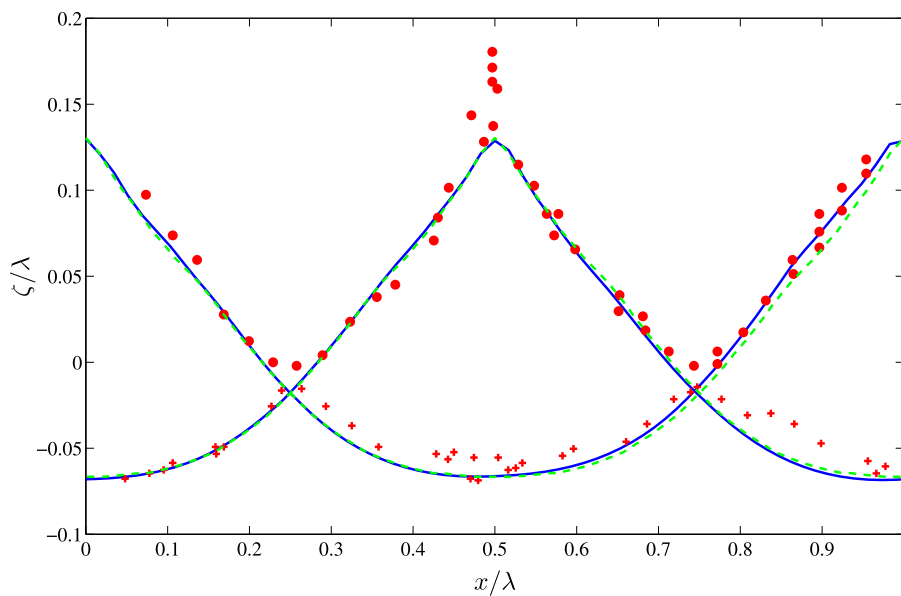
### 3.3. The stability limit of a standing wave

Having shown the proper solution of a problem with a mildly non-linear incident wave, along with the robustness of the new formulation, it is interesting to determine the limitations of the decomposition in terms of numerical stability. To do this, we now increase the amplitude of the incident wave until the solution becomes unstable. The exact physical stability limit of a standing wave has not been definitively determined yet, but it is approximately  $H/\lambda \simeq 0.20$  in deep water *cf.* [30–32].

During the different simulations, the choice of numerical parameters is made so that the result is converged and that a steady-state is reached. Furthermore, note that the different results were compared successfully with the original direct method (without decomposition) to ensure the quality of the solution. We find the stability limit to be obtained with an incident wave of steepness  $H/\lambda = 0.075$ . Fig. 11 compares the computed results to experimental measurements by Taylor [33] and to the numerical solution of Okamura [32]. The experimental data correspond to the steepest stable standing wave observed during this experimental campaign. Similarly, the numerical solution of Okamura presents the limiting standing



**Fig. 10.** Wave profile during reflection on left wall: original vs non-linear decomposition (top) and relative difference in % (bottom).



**Fig. 11.** Standing wave, stability limit: comparison between experiments by Taylor [33] (symbols), numerical solution of Okamura [32] (dashed lines) and numerical simulations with OceanWave3D (straight lines).

wave whose crest acceleration is 99.98% of gravity. The profiles with a crest in the middle of the domain as well as a trough are given. The numerical simulations are performed here with  $N_x = 64$  points per wavelength and  $N_z = 10$  points.

Firstly, it may be noted in this figure the good agreement between our numerical simulation and the experimental results on this extreme case. Troughs appear to be more pronounced in both numerical simulations but we point out the right/left asymmetry of the trough in the experiments, as well as some scatter in the data. Secondly, both numerical results appear to be in good agreement. The model of Okamura [32] is dedicated to the simulation of very steep standing waves in order to deduce their profile and particularly the steepest one which is depicted in the figure. This nice agreement indicates the accuracy of our numerical method. Furthermore, this successful comparison indicates that the proposed decomposition approach is very robust. Indeed, the simulation of this strongly non-linear phenomenon, very close to physical wave breaking, is possible. A light filtering is performed to ensure the stability of the calculation as described in Section 2.4. However it is identical to the one required for the original method under the same wave conditions, confirming that the proposed decomposition does not induce any instabilities.

**Table 1**

*OceanWave3D*: Error of phase shift  $\epsilon_\phi$  and wave amplitude  $\epsilon_a$  after 1000 periods of propagation,  $C_r = 0.64$  (i.e. number of time steps going from 12 500 ( $N_x = 8$ ) to 400 000 ( $N_x = 256$ )) for a periodic waves  $ka = 0.3$  and  $kh = 2\pi$ .

FD				Original			Enhanced			Diff.
$N_x$	$N_z$	$p$	Tol.	$\epsilon_\phi$	$\epsilon_a$	iter.	$\epsilon_\phi$	$\epsilon_a$	iter.	
8	7	6	$10^{-6}$	$1.3 \times 10^4$	$7.4 \times 10^{-1}$	7.0	6.8	$1.5 \times 10^{-2}$	2.71	-61%
16	7	6	$10^{-6}$	$3.7 \times 10^3$	$2.4 \times 10^{-1}$	5.9	$3.5 \times 10^1$	$4.4 \times 10^{-2}$	2.90	-51%
32	9	6	$10^{-9}$	$2.3 \times 10^2$	$2.8 \times 10^{-2}$	10.6	$2.7 \times 10^{-2}$	$3.8 \times 10^{-5}$	2.30	-78%
32	9	8	$10^{-9}$	$2.3 \times 10^2$	$2.5 \times 10^{-2}$	16.3	$2.1 \times 10^{-2}$	$4.0 \times 10^{-5}$	5.63	-65%
64	17	8	$10^{-11}$	8.1	$2.8 \times 10^{-3}$	12.2	$8.8 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-6}$	2.57	-79%
128	33	8	$10^{-13}$	$2.6 \times 10^{-1}$	$5.6 \times 10^{-5}$	14.9	$5.6 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-6}$	3.32	-78%
256	65	8	$10^{-15}$	$8.6 \times 10^{-3}$	$3.5 \times 10^{-6}$	22.2	$3.7 \times 10^{-6}$	$2.4 \times 10^{-6}$	8.73	-61%

#### 4. Efficiency of non-linear decomposition

The introduction of the non-linear decomposition is intended to enhance the efficiency of the original *OceanWave3D* model. In this section, we described the different performance benefits (computational efficiency, accuracy) one may observe as well as the possible limitations. In the following subsections, we will compare the original *OceanWave3D* model with the enhanced one. We are ultimately interested in computational effort however we focus on algorithmic efficiency in the immediate comparisons. This algorithmic efficiency will be evaluated thanks to the investigation of the iteration counts needed in the iterative method (DC or GMRES) for solving the linear systems within a given tolerance. This choice is motivated by the necessary resolution requirements to achieve a certain accuracy level overall that may change between the two approaches. Furthermore, in this 2D configuration, the additional computational effort to evaluate the incident wave field may be no longer negligible compared to the overall computation time (which will happen in 3D). However, notice that it is possible to lower the cost of generating incident wave fields, e.g. using tabulated data over a wave period for regular waves. Therefore, we focus mainly on the relative difference in iteration counts between both approaches that will be detailed in the following.

##### 4.1. Performance benefits

In order to assess the performance benefits of the proposed decomposition, we first have a look to the accuracy of the model to propagate wave fields, followed by a study of the convergence rate when treating wave–structure interaction. Then, the efficiency (algorithmic and numerical) is investigated in those two configurations.

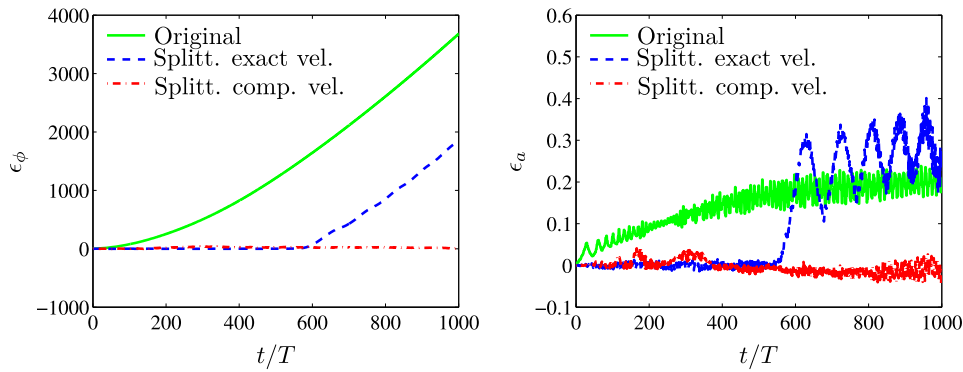
##### 4.1.1. Accuracy

We consider the long-time propagation of non-linear regular waves. In this test-case, periodic boundary conditions are applied in the horizontal direction. Dispersion errors  $\epsilon_\phi$  as well as amplitude ones  $\epsilon_a$  are recorded with a comparison between the original *OceanWave3D* model and the new model developed which includes the decomposition. The wave which is considered is mildly non-linear:  $H/\lambda = 0.0955$ , i.e. a steepness  $ka = 0.30$ . The long-time propagation over a flat bottom (deep water  $kh = 2\pi$ ) of this wave during 1000  $T$  is computed. Parameters are chosen following the procedure used in [34] which is intended to choose optimal parameters (with respect to CPU timings of the original *OceanWave3D* model). These parameters (discretizations ( $N_x, N_z$ ), order of the finite differences (FD) scheme  $p$ , absolute tolerance (Tol.)) as well as corresponding results are reported in Table 1. Comparisons are performed between computed results and analytical results from stream function theory [22]. The average iteration count is obtained using last computed solution as initial guess for each RK-stage.

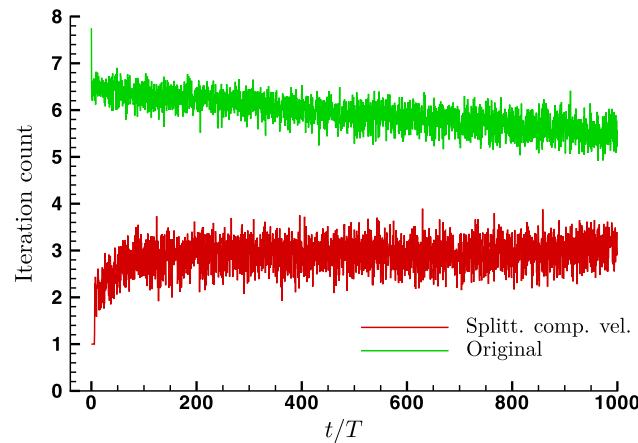
As expected, both methods converge with the number of points (error on the amplitude of the computed wave as well as its phase shift compared to analytical solution). Furthermore, if one compares both approaches, non-linear decomposition appears more accurate than the original one on this test case. Particularly, converged results are obtained with smaller number of points thanks to the proposed decomposition ( $(N_x; N_z) = (64; 17)$ ) while results of original model are still not converged with  $(N_x; N_z) = (256; 65)$ . At the same time, a great reduction of dispersion and amplitude errors is noticed. Consequently, in this particular test case, efficiency improves by a reduction between 51–79% for a given level of accuracy according to Table 1, which has to be associated to lower iteration counts with proposed enhancement.

Long-time propagation is a very complex test case for any numerical method as stated in [34] where the original method and a pseudo-spectral High-Order Spectral (HOS) method are compared in terms of accuracy and efficiency. Similar levels of accuracy are achieved with both methods. Particularly, large phase shifts may be noted with low discretization, which is a typical behavior also experienced with other methods, see [35] for instance. Thanks to this test case, accuracy of resolution as well as time integration is assessed. One observes large differences between original method and the enhanced one proposed in this paper. More accurate solution with reduced CPU time is achieved thanks to the explicit description of wavefield with non-linear decomposition as described in Section 3.1.

In addition, one may see in the previous table a correlation between phase shift and amplitude error and it appears interesting to study this feature with more details. Indeed, with the enhanced model, if the incident wave field is out of



**Fig. 12.** Error on the amplitude of the computed wave (right) and phase shift (left) compared to analytical solution.  $N_x = 16$ ,  $N_z = 7$ , tolerance is  $10^{-6}$  and Courant number  $C_r = 0.64$ .



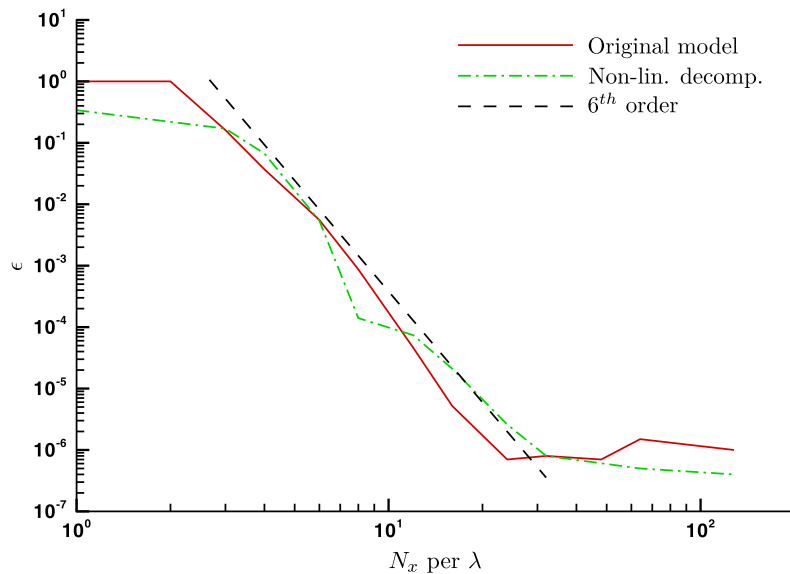
**Fig. 13.** Iteration count during time (GMRES) with non-linear decomposition.  $N_x = 16$ ,  $N_z = 7$ , tolerance is  $10^{-6}$  and Courant number  $C_r = 0.64$ .

phase with the simulated one, the wave field actually solved will not be in phase with the computed wave field, similarly to what has been observed in Section 3.2. Furthermore, it is intended to be associated with larger errors. In our simulations, in order to keep the phase shift limited, the incident wave phase velocity is chosen to be the numerical one (*i.e.* obtained from computed solution) instead of the theoretical one from stream function theory. This incident phase velocity is chosen such that incident and computed wave (*i.e.* sum of incident and scattered components) are in phase. This is ensured by evaluating the phase of the computed solution at each time step and determining the corresponding phase velocity. The tests highlight the importance of selecting an incident wave field which is close to the actual solution. Results are presented in Fig. 12 which presents for the case  $N_x = 16$  the evolution during time of phase-shifting  $\epsilon_\phi$  and amplitude error  $\epsilon_a$ . In this figure is compared the original model and the proposed enhanced one with exact and computed phase velocity.

This figure indicates clearly the enhancement of the non-linear decomposition approach which exhibits lower phase shift errors as well as lower errors on the amplitude of the simulated wave. This enhancement is more obvious with the phase velocity chosen from the computed solution. Indeed, this enables a limited phase shift and a corresponding low amplitude error on the computed wave field. This figure indicates the strong link between errors on phase shift and amplitude, particularly when non-linear splitting is used. At the same time, it seems interesting to have a look at the algorithmic efficiency with both approaches. This is done in Fig. 13 which presents the evolution during time of the number of iterations needed to solve the linear system.

It is seen that with non-linear decomposition, at the beginning of the simulation (during  $\simeq 10 T$ ), the linear system is solved immediately (1 iteration) before an evolution corresponding to the different degrees of complexity of the scattered wave field actually solved by the method. However, the non-linear decomposition appears always more efficient than the original approach on this test case, thanks to information about wave used to setup incident wave field. It is indeed more accurate (lower phase shift and amplitude errors) and less expensive (in terms of iteration count).

We indicate that in a 3D configuration where wave–structure interactions are studied, the computational domain is usually chosen around the structure of interest (with smallest size possible). Simulations are performed with absorbing conditions of the scattered wave field. Consequently, this wave field and the corresponding errors will not accumulate during the simulation as it happens in this test case (reminding that periodic boundary conditions are used). The induced phase shift is therefore intended to be kept very limited in typical simulations (even over long time propagation), possible errors being propagated and absorbed. Consequently, for typical simulations (equivalently limited duration in periodic condition), high efficiency in the description of incident wave pattern is observed.



**Fig. 14.** Relative error  $\epsilon$  on standing wave height at wall. Linear simulations compared to analytic result.  $N_z = 25$ , Courant number  $C_r = 0.1$ , Tol. =  $10^{-13}$ .

#### 4.1.2. Convergence rate

We present in this paragraph a study of the convergence rate of the decomposition approach compared to the original OceanWave3D model. The test-case of the reflection of a wave by a vertical wall (see Section 3.2) is used here in a linear framework. This allows the definition of an analytical solution to the problem to compare with numerical results. Fig. 14 presents the error on the standing wave height at the wall function of the number of points per wavelength used. The error  $\epsilon$  is estimated as the relative error between numerical simulation and the analytical exact result:  $\epsilon = \frac{|H_{num} - H_{exact}|}{H_{exact}}$ . The expected convergence rate (6th order finite difference scheme is used here) is also shown. The vertical discretization is  $N_z = 25$  and numerical parameters are chosen for convergence to be achieved in every simulations (proper Courant number and absolute tolerance fixed to  $10^{-15}$ ).

We observe in this figure that both models converge following the expected 6th order rate. Convergence is achieved with  $N_x = 36$  or  $N_x = 24$  points per wavelength on this test-case for decomposition and original approach respectively: accuracy is limited to  $10^{-6}$  to  $10^{-7}$  because of truncation errors associated with the choice of spatial resolution. Our choice reflects what is often considered a well resolved wave mode (notice that the model is not limited to this accuracy level). For small number of points, the decomposition is more accurate than the original model thanks to the explicit description of the incident wave field. For larger number of points, behavior of both models is similar, including at converged state. The main point shown here is that interesting convergence properties of the original model are conserved with the new approach.

#### 4.1.3. Algorithmic efficiency and computational effort

We detail here an analysis of both algorithmic efficiency (which is independent on implementation) and computational effort (which depends on implementation and hardware) for the non-linear decomposition approach compared to the original OceanWave3D model. Firstly, we present the free propagation case and afterwards the case of the reflection of waves on a vertical wall is studied in details.

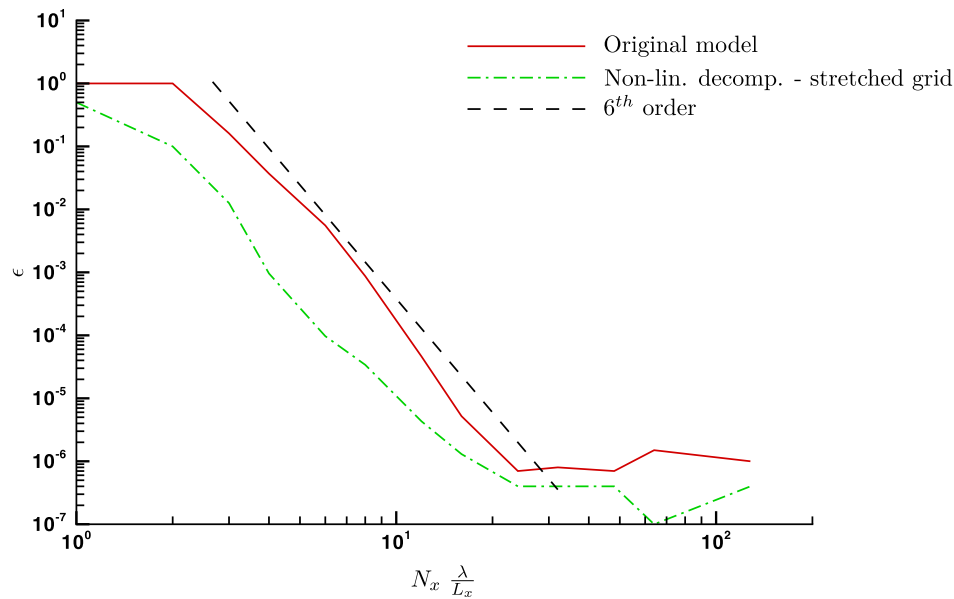
Regarding the free propagation case presented in Section 3.1, the number of iterations needed to solve the linear system is greatly reduced with the decomposition approach. Indeed, as seen in Section 3.1, for the original model a mean number of iterations of 3.7 was needed while the new approach requires only 1 iteration at each stage (iterative solver is used with a given relative tolerance  $10^{-13}$  and an absolute one fixed to  $10^{-11}$ ) during the whole simulation. This comes from the incident wave field which satisfies exactly the system solved. Thus, the residual evaluated in the iterative solver is very low: no scattered waves created during solution process. We remind here that this residual is only due to scattered field in this enhanced model: the system solved (Eqs. (6)) is essentially  $A\Phi^s = b$  with  $A$  a transformed Laplacian and  $b$  containing inhomogeneous contributions due to incident field and free surface boundary conditions. This low iteration count is associated with high accuracy resulting in significant reduction of computational effort. These features are conserved with long-time propagation (Section 4.1.1) and periodic boundary conditions.

For the case of the reflection of waves on a vertical wall studied in Section 3.2 (non-linear), it appears that the number of iterations needed for inversion is slightly decreased compared to the original method. Comparison of iteration counts and total CPU time for 1000 time steps is presented in Table 2 for different number of points, a Courant number  $C_r = 0.64$  and a tolerance fixed to  $10^{-10}$ .

In this table, it is seen that the computing time is greater for this test case in OceanWave3D with decomposition. This is due to the computational effort necessary to evaluate incident wave field. However, the most interesting point to focus on is the average number of iterations needed. A lower iteration count indicates that when one will consider very large

**Table 2**  
Comparison of iteration count and CPU time for the non-linear reflection on a wall.

		Av. iter.	Total CPU time (s)
$N_x = 96, N_z = 10$	Original	12.0	9.1
	Enhanced	11.5	11.6
	Diff.	−3.7%	+27%
$N_x = 192, N_z = 10$	Original	9.6	17.0
	Enhanced	9.0	21.6
	Diff.	−5.6%	+27%
$N_x = 96, N_z = 40$	Original	12.2	37.5
	Enhanced	12.1	40.0
	Diff.	−0.4%	+6.7%



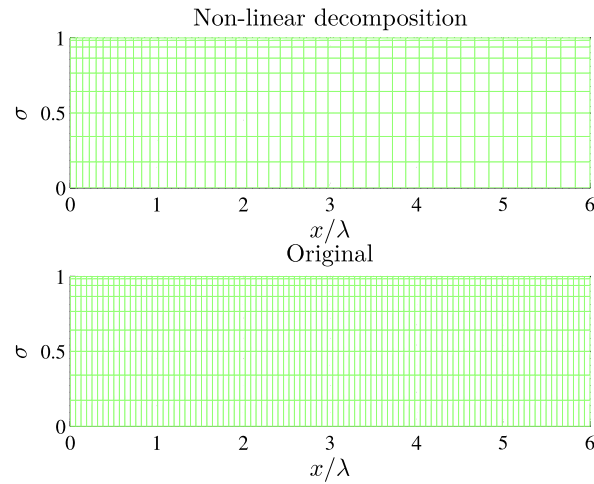
**Fig. 15.** Relative error  $\epsilon$  on standing wave height at wall. Linear simulations compared to analytic result.  $N_z = 25$ , Courant number  $C_r = 0.1$ , Tol. =  $10^{-13}$ .

number of points in 2D (or in 3D), the incident terms computations will become negligible and corresponding CPU time will therefore be reduced with the enhanced model proposed. This trend is clearly seen in the case  $N_x = 96, N_z = 40$  which exhibits almost same CPU time between both approaches.

Once this is noted, it is important to remind that the considered test case is probably the most complicated one for the approach of interest. Indeed, as explained previously, it solves a very complex scattered field due to the phase shifting between incident wave field and solution of this wave–structure interaction problem. Consequently, if in this configuration the method exhibits improved numerical features, we are confident that this behavior can be extrapolated to any configuration. Furthermore, with typical 3D wave–structure interactions, it is assumed that this enhancement will be better and associated with a reduced size of computational domain with this decomposition approach. This will lead to large reduction of computational effort, reminding that convergence properties of the original model are conserved.

Finally, we present the results of the numerical and algorithmic efficiency required to solve this problem of waves reflecting off the wall in a specific configuration. One tries to combine two previous features to define an appropriate numerical configuration. These are: i) accurate description of incident wave field with few points per wavelength with decomposition and ii) comparable accuracy between both approaches for the treatment of interaction between waves and a vertical wall. Therefore, we choose to perform numerical simulations with a refined mesh near the left wall for the enhanced proposed model and a fine regular grid for the original model. The stretching in horizontal direction is achieved thanks to the following definition of grid points:  $x_i = L_x \cdot \left(1 - \frac{\tanh(C_s s_i)}{\tanh(C_s)}\right)$ , with  $s_i = (N_x - i) ds$ ,  $ds = 1/(N_x - 1)$  and  $C_s$  a constant that controls the stretching (chosen as  $C_s = 1$  in the following). The comparison in terms of accuracy between both approaches is done in Fig. 15. The problem is solved in a linear framework to have an analytical reference solution.

It appears clearly in this figure that the refinement of grid allows a great enhancement of accuracy for a given number of point. Identically, for a given level of accuracy, the number of points needed with the enhanced model is less than for the original model. For this configuration, around half the number of points is necessary to ensure the similar accuracy between the two approaches. Fig. 16 presents an example of meshes with similar accuracy: a stretched grid with 8 points per wavelength with enhanced model and an even grid with 16 points per wavelength for the original model.



**Fig. 16.** Example of meshes  $N_z = 10$ . Top: stretched grid  $N_x \frac{\lambda}{L_x} = 8$ ; bottom: even mesh  $N_{x_i} = 16$ .

**Table 3**  
Improvement of CPU time with enhanced model (reflection on a wall).

		Total CPU time (s)	Av. iter.
Case 1, $N_z = 10$	Original $N_{x_i} = 16$	10.0	1.16
	Enhanced $N_x \frac{\lambda}{L_x} = 8$	4.56	1.16
	Diff.	–54%	=
Case 2, $N_z = 10$	Original $N_{x_i} = 32$	38.4	1.15
	Enhanced $N_x \frac{\lambda}{L_x} = 16$	17.3	1.15
	Diff.	–55%	=
Case 3, $N_z = 40$	Original $N_{x_i} = 16$	33.7	1.16
	Enhanced $N_x \frac{\lambda}{L_x} = 8$	15.8	1.20
	Diff.	–53%	+3%

The grid size is similar close to the wall between the two approaches (which ensures the similar accuracy). However, far from the wall, only a few points are needed with the non-linear decomposition (incident wave field explicitly known and scattered waves not of interest in this zone). The chosen set-up for this 2D case is intended to reproduce more precisely the behavior of the non-linear decomposition approach during 3D wave–structure interaction computations. The improvement in terms of computing time is given in Table 3. For this test case rel. and abs. tolerance are fixed to  $10^{-6}$  and  $10^{-4}$  respectively.

This table indicates that the average iteration count is similar between both approaches. Furthermore, thanks to the choice of the numerical set-up which takes advantage of the specific features of the proposed approach, the corresponding computational effort appears greatly improved. The three different set-up indicate that the feature observed is conserved with higher number of points in both directions. In specific 2D configurations (like the one chosen here) or 3D ones in which we study wave–structure interactions, the computational effort will be greatly improved with the proposed enhanced model. This enables to consider the solution of rather complicated problems with this method which appears to be efficient, accurate and robust.

## 4.2. Variable bathymetry

A possible limitation of the non-linear decomposition method is the solution of problems involving variable bathymetry with constant-depth incident wave models. In the following, the test case of a wave shoaling on a beach is studied. This is assumed to be the most complicated configuration with this concern. This problem will be solved in a linear framework and compared to the results presented in Bingham and Zhang [2].

### 4.2.1. Set-up of the shoaling wave problem

Following Bingham and Zhang [2], we use a bathymetry defined by

$$h(x) = h_0 - \frac{h_0 - h_1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)}{1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2} \right) \right], \quad -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (11)$$

with  $h_0 = 0.5$ ,  $h_1 = 0.025$  and  $l = 12$ . This gives a mean slope of  $h_x \simeq 0.05$ . The corresponding bathymetry profile is given in Fig. 17. Absorbing zones are defined at both sides of the domain ( $0 \leq x/\lambda \leq 2$ ) and ( $14 \leq x/\lambda \leq 16$ ). The waves are

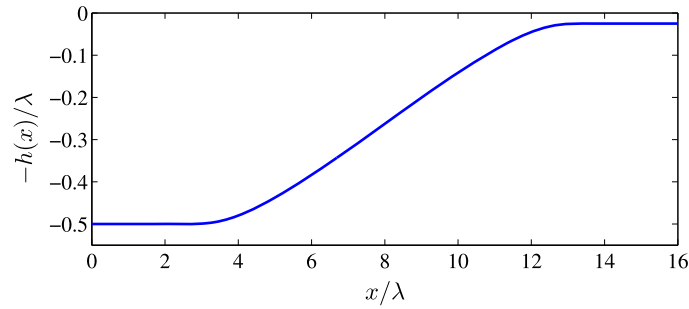


Fig. 17. Bottom profile.

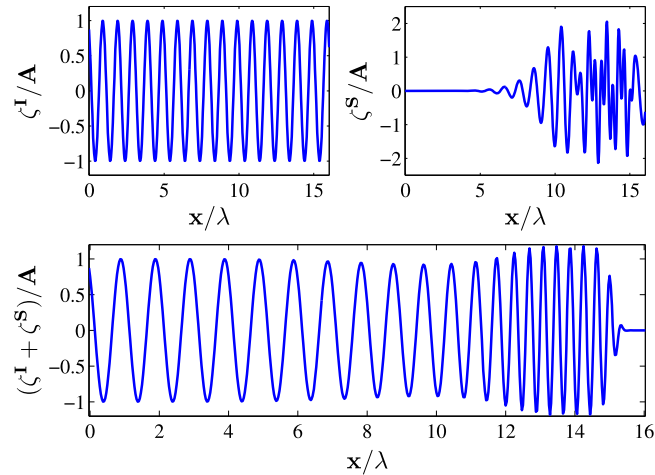


Fig. 18. Decomposition method: Wave profile of linear wave shoaling up a beach. Top left, incident waves  $\zeta^I$ ; top right, scattered waves  $\zeta^S$  and bottom, total wave field  $\zeta^I + \zeta^S$ .

propagating from left (*i.e.* deep water part with a wavelength  $\lambda = 1$  m and a corresponding period  $T = 0.8018$  s) to the right.

#### 4.2.2. Results

One expects that this is a difficult case for the new approach, since we define the incident wave field to be a deep water wave with a wavelength  $\lambda_0 = 1$  m everywhere in the domain. The scattered wave field will then take into account the presence of the beach and the resulting change in wavelength (at  $h_1 = 0.025$ ,  $\lambda_1 \simeq 0.39$  m). Fig. 18 plots the incident, scattered and total wave field elevation at a given time step once a steady-state has been reached (note the different  $y$ -axis range for the scattered wave field).

The figure confirms the complexity of the proposed test-case for the decomposition approach. The scattered wave field  $\zeta^S$  appears complicated and consequently the solution process is not as efficient as the original one in this case looking at the iteration count (see Table 4).

To ensure the correct solution, the calculations are now compared to both the original approach and the exact solution from energy conservation:

$$\frac{a_{ref}(x)}{a_0} = \left( \frac{k(x) \left[ 1 + \frac{2k_0 h_0}{\sinh(2k_0 h_0)} \right]}{k_0 \left[ 1 + \frac{2k(x)h(x)}{\sinh(2k(x)h(x))} \right]} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Fig. 19 plots the amplitude envelope  $a(x)$  of the converged steady-state time signals for the case resolved with 32 points per wavelength (deep water). The analytic solution and the numerical one are in excellent agreement, which ensures the correct solution of the problem. Note that the result obtained with the original model is not given in this figure for clarity since it cannot be distinguished visually from the numerical solution with decomposition.

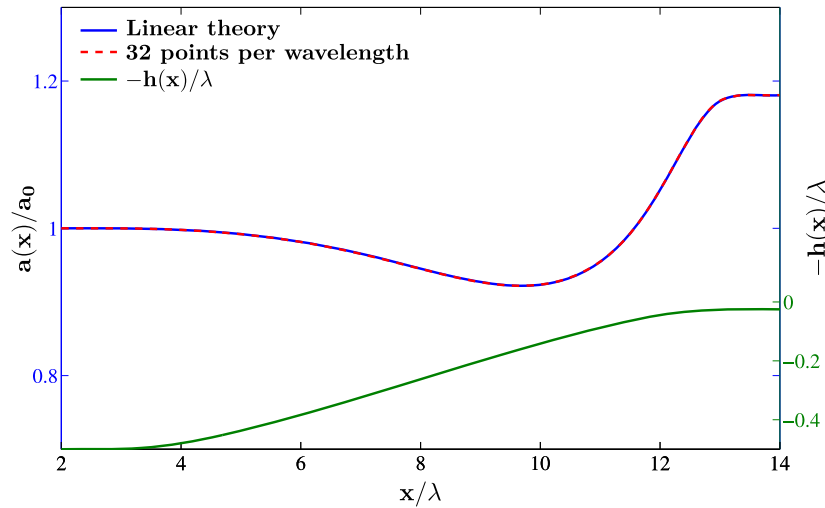
We now consider the computational effort required to solve the problem by comparing the number of iterations per Runge–Kutta stage. Results are reported in Table 4. In this table is also reported the relative error  $\epsilon$  between numerical solutions  $a_{num}$  and analytical results  $a_{ref}$  defined as:

$$\epsilon = \frac{\int_2^{14} |a_{num}(x) - a_{ref}(x)| dx}{\int_2^{14} |a_{ref}(x)| dx}$$



**Table 4**Evolution of iteration count with number of points per wavelength  $N_{x_\lambda}$ . Rel. tolerance  $10^{-9}$  and abs. tolerance  $10^{-7}$ .

	$N_{x_\lambda} = 8$		$N_{x_\lambda} = 16$		$N_{x_\lambda} = 32$		$N_{x_\lambda} = 64$	
	Iter.	$\epsilon$	Iter.	$\epsilon$	Iter.	$\epsilon$	Iter.	$\epsilon$
Original	6.4	$1.1 \times 10^{-1}$	4.3	$3.6 \times 10^{-3}$	3.3	$3.6 \times 10^{-4}$	2.7	$7.8 \times 10^{-4}$
Enhanced	5.8	$3.6 \times 10^{-2}$	4.7	$1.8 \times 10^{-3}$	3.8	$1.7 \times 10^{-4}$	2.8	$1.8 \times 10^{-4}$
Diff.	-9.4%	-67%	+9.3%	-50%	+15%	-52%	+3.7%	-77%

**Fig. 19.** Harmonic analysis of a linear wave shoaling up a beach.

The numerical simulations are performed with the exact same numerical parameters: absorption zone, Courant number  $C_r = 1$ , tolerance (rel.  $10^{-9}$  and abs.  $10^{-7}$ ).

We observe that the required number of iterations is slightly higher with the new approach, reminding that the proposed test-case is severe for the method. At the same time, the accuracy appears to be greatly enhanced with the decomposition approach (notice that the error is larger for  $N_{x_\lambda} = 64$  with both approaches due to some reflections in the absorbing zone). Thus, for a given accuracy, computational effort is (at least) equivalent between both approaches. Consequently, even in this severe test-case, the overall computational effort is enhanced with the non-linear decomposition. It has to be noted that this specific configuration may be solved more efficiently if one uses a dedicated incident wave model able to simulate the influence of bathymetry. This way, similarly to Section 3.1, the incident wave model satisfies all boundary conditions. Then, the previous issues are now obsolete, the enhanced solver just check that the incident wave field satisfies the non-linear system Eqs. (6) to the level of truncation errors. This solution will be preferred when treating wave–structure interactions in domains with variable depth. However, if such model is not available, this test-case indicates that the non-linear decomposition approach is actually able to take into account the influence of the bathymetry accurately and efficiently.

## 5. Conclusion

In this paper the development of an efficient numerical model for solving wave–structure interaction problems in the coastal and ocean environment is described. The model is based on the high-order finite differences solver OceanWave3D (Bingham and Zhang [2] and Engsig-Karup et al. [3,4]). This model solves the Laplace problem over the whole fluid domain and has been shown to be efficient and highly accurate. To enhance the solution process, we adopt a non-linear decomposition of the wave–structure interaction solution into an incident and a scattered wave field, following [17]. The incident part represents the incoming wave which is known explicitly while the scattered part takes into account the presence of the structure inside the given incident wave field. The definition and/or generation of waves (including complex ones) will be easier (especially in 3D configurations) and strong gains in computing time are expected. Indeed, the proposed method allows the use of refined grid around structures for scattering problems. This possibly reduces problem size and consequently enhances efficiency. Different validations in 2D have been performed, which assessed the robustness and accuracy of the proposed decomposition approach. Particularly, the extreme case of non-linear waves reflecting on a vertical wall has been studied in details with favorable comparison to the original OceanWave3D model. The steep standing waves appearing close to the wall are analyzed and especially the steepest stable one which is successfully compared to experiments and to a dedicated numerical model. Finally, the efficiency of the non-linear decomposition is studied. The accuracy of the model to propagate wave fields during long time has been assessed. Then, a study of convergence rate indicates that the decomposition approach conserves the interesting convergence properties of the original model. Those features are used to elaborate a test-case which confirms the effective performance benefits one may obtain with the proposed method in 2D and 3D

configurations. The last section indicates that for the depth-varying computational domains, the use of the proposed model leads also to enhanced computational effort even if a specific incident wave model may be used instead of the classical constant-depth one for optimal efficiency. The resulting method proposed in this paper is consequently robust, accurate and efficient.

As a conclusion, the different studied 2D test cases presented the main advantages of the proposed approach: i) improved computational efficiency in solve step, ii) reduction of problem size for localized scattering, iii) conservation of convergence properties (w.r.t. original OceanWave3D model) and iv) possibility to treat depth-varying test cases. The chosen test cases are supposed to be the most severe for the decomposition approach and their detailed analysis proposed in this paper exhibit enhanced computational effort. Consequently, significant gains can be achieved on, *a priori*, any configurations. This method will be particularly efficient in 3D wave–structure interactions where scattered field is localized around the structure. The extension to 3D bottom-mounted geometries is straightforward with promising results obtained in Ducroz et al. [23]. A follow up paper (part B) is intended to be published which highlights the efficiency of the methodology. The next step will be to take into account more complex geometries (in order to treat floating structures for instance). The use of multi-block, boundary-fitted solutions seems adequate with encouraging preliminary results. On the other hand, other incident wave models can be used to take into account complex wave fields [24,36] (e.g. irregular 3D sea states and extreme waves).

## Acknowledgements

The authors wish to thank Direction Générale de l'Armement (project PDE 08C0039) for partially funding this work, and the Danish Center for Scientific Computing for supercomputing resources. The second author acknowledges the support achieved by grant No. 09-070032 from the Danish Research Council for Technology and Production Sciences.

## References

- [1] A. Di Mascio, M. Landrini, F. Lalli, U. Bulgarelli, Three dimensional non linear diffraction around fixed structures, in: Proc. of the 20th Symp. on Naval Hydrodynamics, Santa Barbara, USA, 1994.
- [2] H.B. Bingham, H. Zhang, On the accuracy of finite-difference solutions for nonlinear water waves, *J. Eng. Math.* 58 (2007) 211–228.
- [3] A.P. Engsig-Karup, H.B. Bingham, O. Lindberg, An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 2100–2118.
- [4] A.P. Engsig-Karup, M.G. Madsen, S.L. Glimberg, A massively parallel GPU-accelerated model for analysis of fully nonlinear free surface waves, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 70 (2012) 20–36.
- [5] Š. Malenica, B. Molin, Third harmonic wave diffraction by a vertical cylinder, *J. Fluid Mech.* 302 (1995) 203–229.
- [6] M. Celebi, M. Kim, R. Beck, Fully nonlinear three-dimensional numerical wave tank simulation, *J. Ship Res.* 42 (1998) 33–45.
- [7] G. Weymouth, R. Wilson, F. Stern, RANS computational fluid dynamics predictions of pitch and heave ship motions in head seas, *J. Ship Res.* 49 (2005) 80–97.
- [8] M.S. Longuet-Higgins, E.D. Cokelet, The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, Math. Phys. Sci.* 350 (1976) 1–26.
- [9] W. Bai, R. Eatock Taylor, Fully nonlinear simulation of wave interaction with fixed and floating flared structures, *Ocean Eng.* 36 (2009) 223–236.
- [10] M. Christou, C.H. Hague, C. Swan, The reflection of nonlinear irregular surface water waves, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2009) 644–653.
- [11] C. Fochesato, S. Grilli, F. Dias, Numerical modeling of extreme rogue waves generated by directional energy focusing, *Wave Motion* 44 (2007) 395–416.
- [12] G. Wu, R. Eatock Taylor, Finite element analysis of two dimensional non-linear transient water waves, *Appl. Ocean Res.* 16 (1994) 363–372.
- [13] Q. Ma, G. Wu, R. Eatock Taylor, Finite element simulation of fully non-linear interaction between vertical cylinders and steep waves—Part 1: Methodology and numerical procedure, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 36 (2001) 265–285.
- [14] B. Li, C. Fleming, A three dimensional multigrid model for fully nonlinear water waves, *Coast. Eng.* 30 (1997) 235–258.
- [15] S.L. Glimberg, A.P. Engsig-Karup, M.G. Madsen, A fast GPU-accelerated mixed-precision strategy for fully nonlinear water wave computations, in: Proc. of European Numerical Mathematics and Advanced Applications (ENUMATH), 2011.
- [16] P. Ferrant, Simulation of strongly-nonlinear wave generation and wave–body interaction using a 3D MEL model, in: Proc. of the 21st Symp. on Naval Hydrodynamics, Trondheim, Norvège, 1997, pp. 93–109.
- [17] P. Ferrant, Fully non-linear interactions of long-crested wave packets with a three-dimensional body, in: Proc. of the 22nd Symp. on Naval Hydrodynamics, Washington, USA, 1999, pp. 403–415.
- [18] P. Ferrant, L. Gentaz, B. Alessandrini, D. Le Touzé, A potential/RANSE approach for regular water-wave diffraction about 2D structures, *Ship Technol. Res.* 50 (2003).
- [19] R. Luquet, B. Alessandrini, P. Ferrant, L. Gentaz, Simulation of the viscous flow past a ship in waves using the SWENSE approach, in: Proc. of the 24th ONR Symposium on Naval Hydrodynamics, St John's, Newfoundland, 2003.
- [20] R. Luquet, G. Ducroz, L. Gentaz, P. Ferrant, B. Alessandrini, Applications of the SWENSE method to seakeeping simulations in irregular waves, in: Proc. of the 9th Int. Conf. on Num. Ship Hydro, Ann Arbor, Michigan, 2007.
- [21] V. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* (1968) 190–194.
- [22] J.D. Fenton, The numerical solution of the steady water wave problem, *Comput. Geosci.* 14 (1988) 357–368.
- [23] G. Ducroz, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup, P. Ferrant, High-order finite difference solution for 3D nonlinear wave–structure interaction, *J. Hydrodyn., Ser. B* 22 (2010) 225–230.
- [24] G. Ducroz, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, A modified high-order spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank, *Eur. J. Mech. B, Fluids* 34 (2012) 19–34.
- [25] A. Savitzky, M. Golay, Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures, *Anal. Chem.* 36 (1964) 1627–1639.
- [26] J.E. Kuo, H. Wang, S. Pickup, Multidimensional least-squares smoothing using orthogonal polynomials, *Anal. Chem.* 63 (1991) 630–635.
- [27] J. Berland, C. Boge, O. Marsden, C. Bailly, High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems, *J. Comput. Phys.* 224 (2007) 637–662.
- [28] C.H. Su, R.M. Mirie, On head-on collisions between two solitary waves, *J. Fluid Mech.* 98 (1980) 509–525.
- [29] J.D. Fenton, M.M. Rienecker, A Fourier method for solving nonlinear water wave problems: application to solitary-wave interactions, *J. Fluid Mech.* 118 (1982) 411–443.
- [30] G. Mercer, A. Roberts, Standing waves in deep water: Their stability and extreme form, *Phys. Fluids A* 4 (1992) 259–269.

- [31] C. Tsai, D. Jeng, Numerical Fourier solutions of standing waves in finite water depth, *Appl. Ocean Res.* 16 (1994) 185–193.
- [32] M. Okamura, Standing gravity waves of large amplitude in deep water, *Wave Motion* 37 (2003) 173–182.
- [33] G.I. Taylor, An experimental study of standing waves, *Proc. R. Soc. A* 218 (1953) 44–59.
- [34] G. Ducrozet, H.B. Bingham, A.P. Engsig-Karup, F. Bonnefoy, P. Ferrant, A comparative study of two fast nonlinear free-surface water wave models, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 69 (2012) 1818–1834.
- [35] D. Fructus, D. Clamond, J. Grue, O. Kristiansen, An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems, *J. Comput. Phys.* 205 (2005) 665–685.
- [36] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, P. Ferrant, 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 7 (2007) 109–122.

## **B.4 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas**

L'article suivant présente les premiers résultats concernant la modélisation de l'apparition de vagues extrêmes à l'aide de HOS-ocean. Ces résultats d'états de mer directionnels simulés sur de grands domaines spatiaux et pendant des durées significatives étaient assez uniques lors de leur publication. La procédure de détection des vagues scélérates est présentée avec des premières analyse de l'influence de la directionnalité. On trouvera dans cet article des détails concernant la section 4.1 du présent mémoire de recherches.

## 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas

G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, and P. Ferrant

Laboratoire de Mécanique des Fluides, Centrale Nantes, 1 rue de la Noë, 44300 Nantes, France

Received: 25 September 2006 – Revised: 8 January 2007 – Accepted: 16 January 2007 – Published: 25 January 2007

**Abstract.** In the present paper we propose a method for studying extreme-wave appearance based on the Higher-Order Spectral (HOS) technique proposed by West et al. (1987) and Dommermuth and Yue (1987). The enhanced HOS model we use is presented and validated on test cases. Investigations of freak-wave events appearing within long-time evolutions of 2-D and 3-D wavefields in open seas are then realized, and the results are discussed. Such events are obtained in our periodic-domain HOS model by using different kinds of configurations: either i) we impose an initial 3-D directional spectrum with the phases adjusted so as to form a focused *forced* event after a while, or ii) we let 2-D and 3-D wavefields defined by a directional wave spectrum evolve up to the *natural* appearance of freak waves. Finally, we investigate the influence of directionality on extreme wave events with an original study of the 3-D shape of the detected freak waves.

### 1 Introduction

In open seas, ships and marine structures are periodically exposed to extreme waves, which constitute a major problem for both structure integrity and human safety. These extreme physical events are both three-dimensional and highly-nonlinear phenomena, making their numerical study challenging. Their occurrence may be related to a wave energy focusing which derives from a number of factors: wave-current interaction, bathymetry, wind effects, self-focusing instabilities, directional effects, etc. For a review on the different mechanisms of formation of such events, see Kharif and Pelinovsky (2003). In the present work, we mainly interest ourselves in long-time evolutions of wavefields in deep water or finite constant depth without wind or current.

*Correspondence to:* G. Ducrozet  
(guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr)

Historically, sea-spectra evolutions have been studied through weakly-nonlinear approaches where a limited number of wave-component interactions are accounted for. The first results derived using such a mode-coupling approach have been published in the early 1960s by Phillips (1960), Longuet-Higgins (1962) and Hasselmann (1962), but they were limited to the obtention of energy exchange rates resulting from the wave interactions. The full time evolution of the wave system has then been described by Zakharov (1968), who derived the mode rate equations. In their integral form (Zakharov, 1968) obtained using the Hamiltonian formalism, the latter equations have been solved using reduced expressions limited to four-wave or five-wave interactions. Nonetheless, it is only during the last two decades that these reduced Zakharov equations have been fully derived and solved (see e.g. Stiassnie and Shemer, 1984; Krasitskii, 1994; Annenkov and Shrira, 2001). Another direction that has been followed using also a limited order in wave steepness, has been to add the assumption of a narrow-banded wave spectrum. The weakly-nonlinear equations thus obtained have been widely used and enhanced since the first application of the Non-Linear Schrödinger equation to the gravity-wave hydrodynamics (in Zakharov, 1968). Among others (see Kharif and Pelinovsky, 2003, for a wider review), the derived equations include also the Davey-Stewardson system for a finite-depth formulation, the Dysthe (1979) equation which includes the fourth order in wave steepness, and modified versions of the latter to account for a broader bandwidth of wave spectrum (see e.g. Trulsen and Dysthe, 1996).

Within the framework of the latter weakly-nonlinear approaches, the extreme wave events referred to as “freak” or “rogue” waves have been studied as resulting from wave geometrical or spatio-temporal focusing, or from modulational Benjamin-Feir instabilities. However, since freak waves have large amplitudes, high steepness, and short duration, Kharif and Pelinovsky (2003) note that the assumptions of weak nonlinearity and narrow-banded

spectrum are not fully valid. Moreover, the randomness of the 3-D wavefields involved attenuates the Benjamin-Feir instability phenomenon (see Kharif and Pelinovsky, 2003). The use of time-domain fully-nonlinear potential models should therefore be the best suitable approach to study such extreme events. Nonetheless, the numerical simulation of these fully-nonlinear open-sea evolutions is today still very challenging. The Boundary Element Method (BEM), classically employed within the latter class of methods, remains indeed too slow to reproduce square kilometers of ocean long-time evolution. Actually, the temporal and spatial scales involved, and the smallness of the high-frequency waves included in the sea spectrum lead to huge requirements in terms of space and time grids (typically millions of spatial nodes and thousands of time steps). An alternative approach is to use spectral resolutions based on the same equations derived by Zakharov (1968), but in their fully-nonlinear version before expressing them into wave-component interactions.

Such an approach has been proposed in 1987 respectively by West et al. (1987) and Dommermuth and Yue (1987); it is known as Higher-Order Spectral (HOS) method and permits the fully-nonlinear simulation of gravity-wave evolution within periodic unbounded 3-D domains. This method is also called Dirichlet-Neumann Operator (Craig and Sulem, 1993) which, in its accelerated version (Vijfvinkel, 1996), is equivalent to the HOS (cf. Le Touzé, 2003; Schäffer, 2005). With respect to classical time-domain models such as the BEM, this spectral approach presents the two assets of its fast convergence and its high computational efficiency (by means of FFTs), allowing to accurately simulate long-time 3-D sea-state evolutions with fine meshes. A number of studies relative to open-sea evolutions have been carried out by using HOS, see e.g. Brandini (2001) or Brandini and Grilli (2001) for the apparition of *natural* freak waves in a 2-D spectrum, and the propagation of 2-D regular waves with 3-D modulational instabilities; or Tanaka (2001a) for a study of the nonlinear evolution of a 3-D spectrum.

In the present paper, we use a HOS model which is an enhanced version of the order-consistent HOS originally proposed (see West et al., 1987) which has been extensively validated. In this model, specific care has especially been paid to aliasing matters (see Bonnefoy, 2005) and numerical efficiency. This allows to accurately simulate on a single-processor PC thousands of wave spectral peak periods in 2-D, and the evolution during tens of periods of square kilometers of ocean in 3-D. Two kinds of simulations of extreme wave events appearing in open-sea evolutions are shown and discussed in the present work. First, we let a directional wave spectrum evolve, with phases initially artificially adjusted so as to obtain a *forced* focusing event after a while. Second, 2-D and 3-D spectra with random initial phases are considered and the occurrence of *natural* freak waves within their evolutions is investigated and discussed. Finally, the influence

of the directionality on the freak waves formation is investigated. A double zero-crossing analysis of the numerical wavefield allows us to define two characteristic lengths, in the mean and in the transverse directions of propagation. A parametric study is then run on the directional spreading, and results are discussed in terms of freak waves height, transverse extension, frequency of formation, and groupiness.

## 2 Formulation and validation

### 2.1 Hypothesis and general equations

We consider an open periodic fluid domain  $D$  representing a rectangular part of the ocean of infinite depth and dimensions  $(L_x, L_y)$ . We choose a cartesian coordinate system with the origin  $O$  located at one corner of the domain  $D$ . The  $O_z$  axis is vertical and oriented upwards, and the level  $z=0$  corresponds to the mean water level. The notation  $\mathbf{x}$  stands for the  $(x, y)$  vector.

The fluid simulated is water, which is assumed to be incompressible and inviscid. The flow is also considered irrotational. With these assumptions one can apply potential flow theory, the velocity  $\mathbf{V}$  derives from a potential  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, z, t) = \nabla\phi(\mathbf{x}, z, t)$ ,  $\nabla$  representing the gradient and  $\phi$  the velocity potential. Then, continuity equation ( $\text{div}\mathbf{V}=0$ ) becomes the Laplace's equation

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

Following Zakharov (1968), the fully-nonlinear free surface boundary conditions can be written in terms of surface quantities, namely the single-valued free surface elevation  $\eta(\mathbf{x}, t)$  and the surface potential  $\phi^s(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, \eta, t)$

$$\frac{\partial\phi^s}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla\phi^s|^2 + \frac{1}{2}(1 + |\nabla\eta|^2)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = (1 + |\nabla\eta|^2)\frac{\partial\phi}{\partial z} - \nabla\phi^s \cdot \nabla\eta \quad (3)$$

on  $z=\eta(\mathbf{x}, t)$ . This way, the only remaining non-surface quantity is the vertical velocity  $\frac{\partial\phi}{\partial z}$  which will be evaluated thanks to the West et al. (1987) order-consistent High-Order Spectral scheme. The two surface quantities are then marched in time using an efficient 4th-order Runge-Kutta scheme featuring an adaptative step-size control and in which the linear part of the equations is integrated analytically.

### 2.2 Boundary conditions and spectral basis functions

In the previous section the free surface boundary conditions have been established. It remains to express the conditions on the sides, and the bottom of the domain if there is one. The considered domain  $D$  is periodic in both the  $x$  and  $y$  directions. This is expressed by the following two conditions

$$(\phi; \eta)(x = 0, y, z, t) = (\phi; \eta)(x = L_x, y, z, t) \quad (4)$$

$$(\phi; \eta)(x, y = 0, z, t) = (\phi; \eta)(x, y = L_y, z, t) \quad (5)$$

In the domain  $D$  defined, the following basis functions  $\psi_{mn}^{fg}$  individually satisfy the set of Eqs. (1, 4, 5)

$$\psi_{mn}^{fg} = f(k_m x) g(k_n y) \exp(k_{mn} z) \quad (6)$$

where  $f$  and  $g$  can either be the sine or the cosine functions, and  $k_m = m\pi/L_x$ ,  $k_n = n\pi/L_y$  and  $k_{mn} = \sqrt{k_m^2 + k_n^2}$  the wavenumbers associated with mode  $(m, n)$ . The velocity potential  $\phi$  can then be expressed on this basis as

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn}^{fg}(t) f(k_m x) g(k_n y) \exp(k_{mn} z) \quad (7)$$

This way, the velocity potential is fully determined by the knowledge of the time-dependent coefficients  $A_{mn}^{fg}(t)$ .

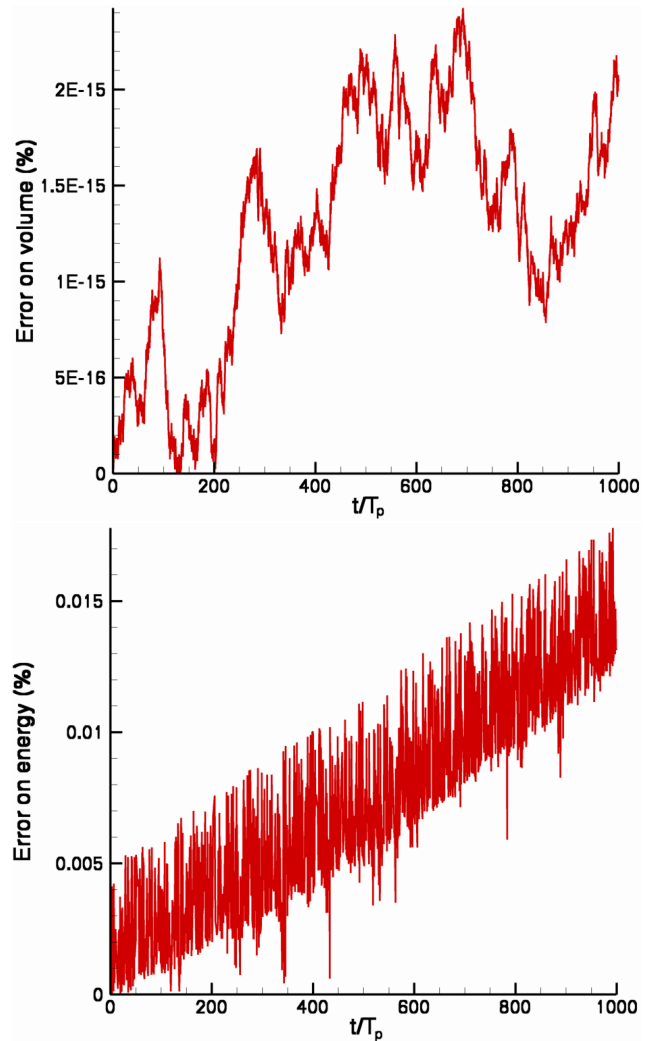
### 2.3 The Higher-Order Spectral method

In the free surface conditions (2, 3) which are marched in time to get the evolution of  $\eta$  and  $\phi^s$ , the only remaining unknown is the vertical velocity  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ . The HOS method relies first on the expansion of the velocity potential located at the exact free surface position, into series of complementary unknown quantities and Taylor series about the mean water level. From these quantities a fast-converging iterative process is employed to get the vertical derivative  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  at the exact free surface position. In this process, it should be kept in mind that the HOS technique retains the fully-nonlinear feature of the solution. Indeed, the evaluation of  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  is an inner process which is not correlated to the fully-nonlinear solution of the problem; the fully-nonlinear free surface boundary conditions are actually solved at the exact free surface position. For further details about the procedure see Appendix A.

The HOS formulation allows us to use a very efficient FFT-based solution scheme with numerical cost growing as  $N \log_2 N$ ,  $N$  being the number of modes. Moreover, an acceleration of the solution process has been implemented, see Appendix B. It is also to notice that the free-surface boundary conditions (Eqs. 2 and 3) and the HOS iterative process contain nonlinear products that have to be carefully treated. These products are computed in the physical space and are dealiased cautiously, see Appendix C.

### 2.4 Validation

Various validations of the HOS formulation have been performed, see in particular the original article by West et al. (1987). To further validate the model we use, all the stability and accuracy tests found in the literature have been redone, confirming both the efficiency and the accuracy of the present implementation where specific care has been paid to the dealiasing in particular (Le Touzé, 2003; Bonnefoy, 2005, Appendix C.). The model has also been verified on long-time evolutions 3-D cases. For instance, the simulations performed in Tanaka (2001a) or Tanaka (2001b) have



**Fig. 1.** Error on the volume (top) and energy (bottom) of the wavefield after 1000 peak periods of propagation ( $M=8$ ,  $N_x=2048$  modes).

been re-run with very similar results on the evolution of 3-D-wave spectra in huge domains of computation. Such large-scale numerical simulations with the HOS method permit the verification of Hasselmann's theory for the nonlinear energy transfer among surface gravity waves (Hasselmann, 1962). This nonlinear energy transfer is evaluated from the rate of change of different spectra and is successfully compared to the Hasselmann's theory.

In Fig. 1 is represented the evolution of the volume and the energy (kinematic plus potential energies of the fluid) during a 2-D simulation lasting 1000 wave spectral peak periods (see Sect. 3.2.1).

As expected since each of the basis functions used is exactly satisfying mass conservation, one can easily observe that the volume is conserved within the computer proces-

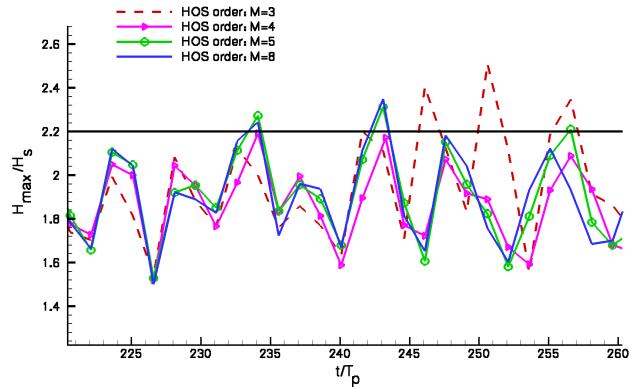
**Table 1.** Error on the energy and CPU time per time step, as functions of the number of modes.

$N_x \times N_y$	Error $\epsilon_1$ in %	Error $\epsilon_2$ in %	CPU time in s
$32 \times 16$	100	0.05	0.02
$64 \times 32$	100	0.05	0.04
$128 \times 64$	94	0.10	0.32
$256 \times 128$	45	0.17	1.45
$512 \times 256$	14	0.07	13
$1024 \times 512$	4	0.005	65
$2048 \times 1024$	2	0.002	410

sor accuracy. Energy is also conserved with good accuracy, within less than  $1.5 \cdot 10^{-4}$  relative error after 1000 peak periods of propagation.

A study of convergence on 3-D irregular wavefields is more difficult to set up. Theoretically speaking though, the form of the basis functions in the spectral expansion leads to the same accuracy levels and convergence rates in both directions ( $x$  and  $y$ ) than in 2-D, which is easily verified in practice on simple cases. Thus, to assess the convergence of our HOS model, we refer to the several studies done in the literature (see in particular West et al., 1987; Dommermuth and Yue, 1987) on regular wavefields. The behavior of the present model on regular waves has also been assessed in detail for various steepness conditions (see Le Touzé, 2003). When simulating a directional wavefield, this verification is less easily done. Indeed, the random choice of initial phases leads to different simulations if we change the number of modes used in the calculations. Nonetheless, looking at global parameters of the wavefield, such as its energy, one can get an idea of the convergence of the results with respect to the number of modes. We distinguish here two kinds of errors on the energy,  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ .  $\epsilon_1$  represents the error due to the discretization of the initial spectrum. It is obtained by comparing the numerical energy at  $t=0$  to the energy  $E$  of the target wavefield, the latter being evaluated from the input spectrum (see Sect. 2.5). And  $\epsilon_2$  is the error on the energy balance during the simulation (cf. Fig. 1). It is evaluated as the error between the numerical energy at  $t=0$  and the same energy after 50 peak periods of propagation. In Table 1 is also reported the corresponding CPU time per time step on a 3 GHz-Xeon single-processor PC. Simulations are performed with  $M=3$  and are fully dealiased.

The convergence of the computations with respect to the number of modes is first assessed in terms of initial condition. Looking at  $\epsilon_1$  clearly shows that the initial wave energy converges toward the specified energy  $E$  as we increase the number of modes in both directions. Second, the evolution of  $\epsilon_2$  reveals that the numerical conservation of the energy is also rapidly improved with the increase of the number of



**Fig. 2.** Influence of HOS order  $M$ .

modes in the domain, once a sufficient number of modes has been used to capture the main structures present in the domain. Regarding the CPU time, the efficiency is pointed out with a rise comparable to  $N \log_2 N$  ( $N$  being the total number of modes  $N_x \times N_y$ ), as expected with the use of FFTs in the numerical scheme.

In Fig. 2, still on the same simulation case, is represented the influence of the HOS order  $M$ , which corresponds to the number of iterations chosen in the iterative process. In this figure is plotted the evolution of a parameter of interest,  $H_{\max} / H_s$  (see Appendix D) for four different HOS orders ( $M=3, 4, 5$  and  $8$ ).

If one focuses on the freak wave event ( $H_{\max} / H_s > 2.2$ , see Appendix D) occurring after about 240 peak periods of propagation, one can notice that even after such long-time of simulation, the results are really close. However, the calculation with  $M=3$  differs from the three others. Indeed,  $M=3$  predicts a freak wave event at  $t=250 T_p$  which is overestimated with respect to the calculations with  $M=4, 5$  and  $8$ . Further in detail, the computation with  $M=4$  underestimates a bit the extreme event at  $t=243 T_p$  when compared to the  $M=5$  and  $8$  curves. The latter two results are almost superimposed, acknowledging the convergence of our calculation with  $M$ . Thus, the calculations will be performed with at least  $M=5$  in the next sections.

## 2.5 Initialization

It has been demonstrated (Dommermuth, 2000) that the definition of adequate initial fields to start the computations is not straightforward, and can lead to numerical instabilities if done in an uncorrect way. Nonetheless, Dommermuth indicates that simulations can be initialized in a linear way; in this case a transition period (lasting from 5 to 10 peak periods of propagation) exists. After this establishment delay, the initial wavefield becomes a “realistic” fully-nonlinear one. In the simulations performed in the present work, which are long-time evolutions (see Sect. 3.2.1 and 3.2.2) of wave-



fields, this transition period is taken into account through the use of a relaxation scheme allowing the use of such linear initial conditions. The free surface boundary conditions that can be classically written in the following form

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta = F, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} = G$$

are modified following the Dommermuth (2000) adjustment scheme of the nonlinear terms as follows

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial t} + g\eta = F \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - W^{(1)} = G \left( 1 - \exp \left[ - \left( \frac{t}{T_a} \right)^n \right] \right)$$

We chose to set the two parameters as  $T_a = 10 T_p$  and  $n = 4$ , still following Dommermuth (2000).

We have chosen to take the same kind of initial wavefields as in Tanaka (2001a). These wavefields are defined by a directional spectrum, typically JONSWAP or Pierson-Moskowitz (P-M) in deep water. In his paper, Tanaka found a relation between the so-called complex amplitude  $b(\mathbf{k}, t)$  introduced by Zakharov (1968) and the directional spectrum  $\Phi(\omega, \theta)$ . The complex amplitude can then be related to the surface elevation  $\eta$  and the surface velocity potential  $\phi^s$

$$b(\mathbf{k}, t) = \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k}} \hat{\eta}(\mathbf{k}, t) + i \sqrt{\frac{k}{2\omega(\mathbf{k})}} \hat{\phi}^s(\mathbf{k}, t) \quad (8)$$

with the hat denoting the Fourier transform and

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{gk} \quad \text{and} \quad k = |\mathbf{k}|$$

$\eta$  and  $\phi^s$  can also be related to  $b$  with the following equations

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{k}{2\omega(\mathbf{k})}} [b(\mathbf{k}, t) + b^*(-\mathbf{k}, t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (9)$$

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \sqrt{\frac{\omega(\mathbf{k})}{2k}} [b(\mathbf{k}, t) - b^*(-\mathbf{k}, t)] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \quad (10)$$

The relation between  $b_k$  (discrete values of  $b(\mathbf{k}, t)$ ) and  $\Phi(\omega, \theta)$  is

$$|b_k| = \frac{g^2}{2\omega_k^4} \Phi(\omega, \theta) \delta k_x \delta k_y \quad (11)$$

Therefore, we calculate the norm  $|b_k(t=0)|$  with the previous Eq. (11) for the desired directional spectrum  $\Phi(\omega, \theta)$  and the phase of  $b_k(t=0)$  is determined by a random number in  $[0, 2\pi]$ . Then, we have constructed the initial wavefield of interest using Eqs. (9) and (10).

We classically define the directional spectrum  $\Phi(\omega, \theta)$  as

$$\Phi(\omega, \theta) = \psi(\omega) \times G(\theta)$$

The spectrum is typically

$$\psi(\omega) = \alpha g^2 \omega^{-5} \exp \left( -\frac{5}{4} \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^{-4} \right) \gamma \exp \left[ -\frac{(\omega - \omega_p)^2}{2\sigma^2 \omega_p^2} \right]$$

with  $\alpha$  being the Phillips constant and  $\omega_p$  the angular frequency at the peak of the spectrum. The directionality is defined by

$$G(\theta) = \begin{cases} A_n \cos^n \theta, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\theta| > \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (12)$$

with,

$$A_n = \begin{cases} \frac{(2p!)^2}{\pi(2p)!}, & \text{if } n = 2p \\ \frac{(2p+1)!}{2(2^p p!)^2}, & \text{if } n = 2p + 1 \end{cases}$$

Space and time are then normalized such that  $\omega_p$  and  $g$  are both equal to 1. Thus,  $\Phi(\omega, \theta)$  is the JONSWAP spectrum when

$$\alpha = 3.279 E, \quad \gamma = 3.3, \quad \sigma = \begin{cases} 0.07 & (\omega < 1), \\ 0.09 & (\omega \geq 1) \end{cases}$$

where  $E$  is the dimensionless energy density of the wavefield. The significant wave height could be estimated by  $H_s \approx 4\sqrt{E}$  (Tanaka (2001b)).

### 3 Freak wave formation

Using the numerical model described in the previous sections, we study the formation of freak waves under two different approaches. First, the focusing of a directional spectrum is considered; it represents a common approach used in experimental investigations of the influence of these events on ships or marine structures. Second, the model is used to detect *natural* freak waves during long-time nonlinear simulations, both in two and three dimensions.

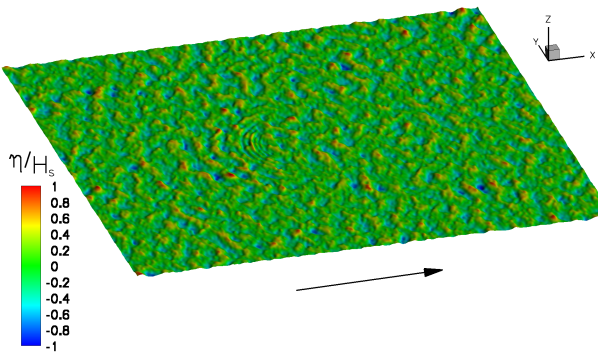
#### 3.1 Directional focusing

In this section we study the formation of extreme events due to directional focusing. This *artificial* generation of freak waves is based on the linear focusing of directional components at given time and location in the domain (to compare with, the next section presents natural formation of extreme events during the propagation of the wavefield).

##### 3.1.1 Initial condition

The initial wave pattern is described by a directional JONSWAP spectrum. The spectral components have their phase adjusted so that a large amount of energy is located in the middle of the fluid domain at a given time.

This adjustment is made through the choice of the initial phases of  $b_k(t=0)$  (cf. Sect. 2.5). For a classical uniform



**Fig. 3.** 3-D initial surface elevation:  $E=0.005$ ,  $L_x=21\lambda_p \times L_y=21\lambda_p$ ,  $N_x=512 \times N_y=256$ , HOS order  $M=5$  and linear backward propagation during  $20T_p$ .

irregular wave train, one has to choose a random number in  $[0, 2\pi]$ . By reducing this interval, for instance to

$$\left[0, 2\pi \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right)\right]$$

part of the energy is accumulated at  $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ , which can be chosen as the middle of the domain we simulate.

Once this done, we perform a linear backward propagation during  $T_b=20T_p$ . That is to say, each wave component  $(m, n)$  is propagated at its own angular frequency  $\omega_{mn}=\sqrt{gk_{mn}}$  during the backward propagation duration  $T_b$ . Eq. (7) then becomes

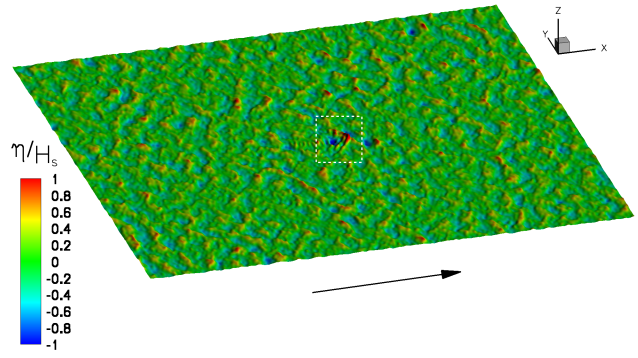
$$\phi(\mathbf{x}, z, t - T_b) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn}^{fg}(t) f(k_mx - \omega_{mn}T_b) g(k_ny - \omega_{mn}T_b) \exp(k_{mn}z)$$

The basis functions  $f$  and  $g$  being either sine or cosine functions.

We thus obtain an initial wavefield that we let further evolve. Figure 3 shows a view of the initial wavefield, with the arrow indicating the direction of propagation.

The focusing components create a concentric pattern observable in the center part of the domain. The numerical conditions are:

- Wave field characterized by  $E=0.005$  i.e.  $\alpha=0.016$ ,  $H_s=0.28$  in non-dimensional quantities (with respect to  $g$  and  $\omega_p$ ),
- Domain length:  $L_x=21\lambda_p \times L_y=21\lambda_p$ ,
- Number of modes used:  $N_x=512 \times N_y=256$ , HOS order  $M=5$ ,
- Dimensional quantities give, if we fix  $T_p=9.5s$  (typical in North Sea):  $\lambda_p=70m$ , dimensional domain area:  $2870m \times 2870m$ .



**Fig. 4.** 3-D surface elevation at  $t=20.3T_p$ .

We use here classical wave spectrum parameters for North Atlantic. In particular,  $E=0.005$  can be deduced from the well known scatter diagram of  $T_p$  and  $H_s$  in Haver et al. (2002) with pooled data from the Northern North Sea (about 70 000 data points in the period 1973–2001). As explained in Socquet-Juglard (2005), the curve representing mean steepness  $s$  equal to 0.1 in this diagram includes almost all data points and can be chosen as a good parameter for the description of highest wavefields in North Sea.

This mean steepness is defined as

$$s = k_p \bar{a} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 H_s}{g T_p^2}$$

with  $\bar{a}$  being the rms value of the amplitude. Using  $H_s=4\sqrt{E}$ , one gets the following relation between  $E$  and  $s$

$$E = \frac{s^2 g^2 T_p^4}{2(2\pi)^4} = \frac{s^2 g^2}{2\omega_p^4}$$

Thus,  $s=0.1$  gives a dimensionless energy  $E=0.005$ .

### 3.1.2 Results

Figure 4 presents the 3-D surface elevation at  $t=20.3T_p$  where the nonlinear elevation is maximum. The major part of the domain consists of unfocused components, while at the center the focused ones are superimposed and form the extreme event.

A closer view of the center of the domain is given in Fig. 5. The center of the latter figure is the linear focusing point which is defined as the location of the focusing for linear waves propagation (i.e. the location of focused waves before the linear backward propagation). The contour levels have been adjusted so that the shape of the wave appears more clearly. In this case, the focused wave consists of a steep front wave with a V-shaped crest, followed by a deep trough. The strongest focusing occurs after the linear focusing point, both in time ( $t=20.3T_p$ ) and in space (see Fig. 5), as is often observed in focusing experiments (the maximum wave

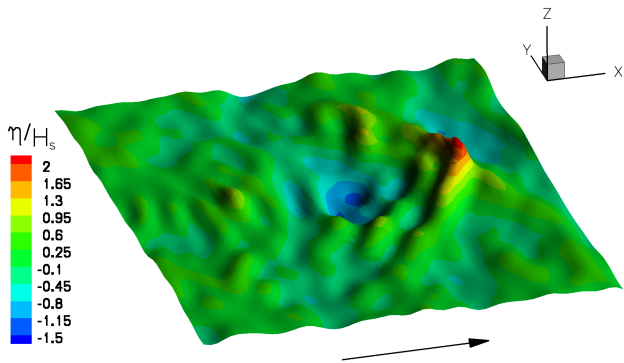


Fig. 5. Zoom of Fig. 4,  $t=20.3T_p$ .

elevation at the focusing point also occurs before the linear focusing time  $t=20T_p$  due to amplitude dispersion. The extreme wave generated this way reaches  $H_{\max}/H_s > 3.5$ . The probability to have such event is really low and does not seem realistic (compared to known measurements in ocean). Therefore, the choice of the focused components of the spectrum has to be adapted to generate realistic waves. We then choose a more convenient approach to study the extreme events, looking for natural generation.

### 3.2 Natural emergence

In this section, we define an initial sea-state (as seen in Sect. 2.5) with typical natural parameters including random phases. Then, we let the sea-state evolve during a long-time of propagation and analyse the results looking for the extreme events that may appear in the domain. We show in this section only some of the behaviors observed in the conducted simulations. A larger number of simulations should be realized for a stochastically correct approach.

#### 3.2.1 Sample 2-D long-time evolution

The first simulations are conducted in 2-D (i.e. without any directionality). The numerical conditions are:

- Wave field characterized by  $E=0.0032$  i.e.  $\alpha=0.011$ ,  $H_s=0.23$  in adimensional quantities,
- Domain length:  $L_x=82\lambda_p$ ,
- Number of modes used:  $N_x=2048$ , HOS order  $M=8$ ,
- Dimensional quantities give, if we fix  $T_p=9.5s$  (typical in North Sea):  $H_s=5.1m$  and  $\lambda_p=140m$ . Dimensional domain length: 11 480m.

Here is chosen  $s=0.08$  (i.e.  $E=0.0032$ ) which belongs to the range of classical values for North Sea wavefields (see Socquet-Juglard, 2005). It represents a typical steep wavefield, yet without being among the steepest ones.

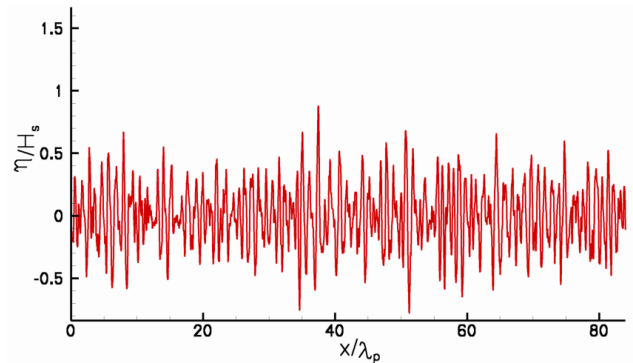


Fig. 6. 2-D initial surface elevation.

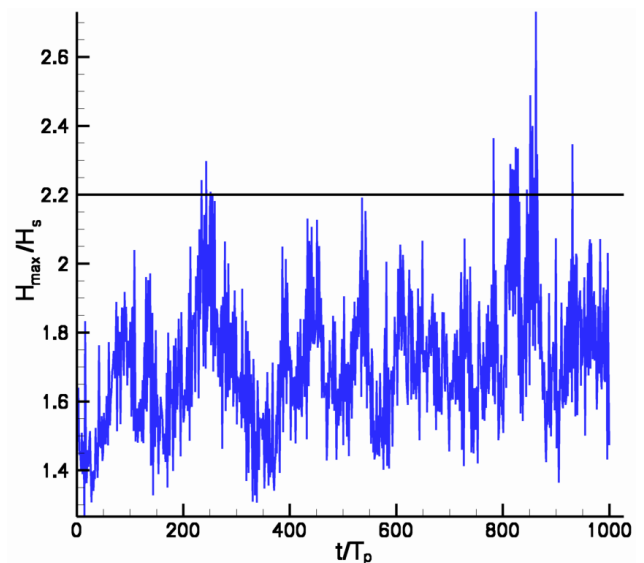
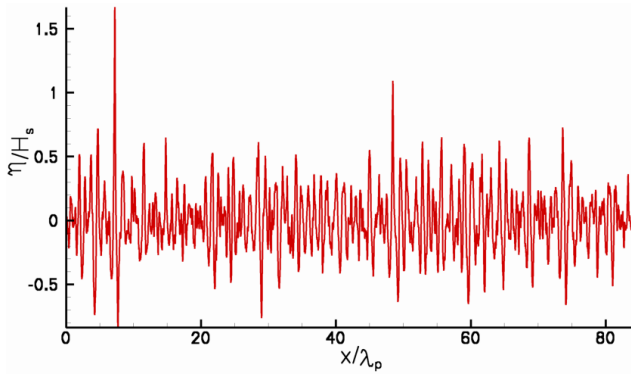


Fig. 7. Evolution of  $H_{\max}/H_s$  during simulation.

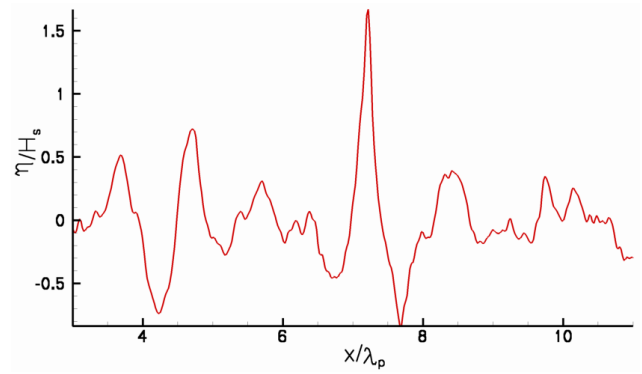
In Fig. 6 is represented the initial surface elevation in the computational domain; waves will propagate from left to right at  $t>0$ . An analysis of this free surface elevation confirm that the significant wave height is, as expected, equal to 0.23. We have then an irregular 2-D wavefield that we let evolve during 1000 peak periods. Dimensionally speaking, it corresponds to a simulation lasting for about 2 h and 40 min real time, within the huge 11.5 km-long domain.

During the simulation, we look at the evolution of the parameter  $H_{\max}/H_s$  which is suitable to characterize a so-called freak wave event when  $H_{\max}/H_s > 2.2$  (see Appendix D).

Figure 7 plots the evolution of this parameter against time. Several patterns can be observed all along the 1000 peak periods of simulation. Very brief events are detected at  $t/T_p=800$  and 950 for example. Longer events are also present, i.e. that stay longer in the wavefield (see e.g. be-



**Fig. 8.** 2-D surface elevation of the freak wave event:  $t=860T_p$ .



**Fig. 9.** Zoom on the 2-D freak wave event:  $t=860T_p$ .

tween  $t/T_p=800$  and 900). The latter case corresponds to a high amplitude wavegroup that remains coherent for several periods in a row and produces successive extreme events. This second pattern is similar to the one described by Trulsen (2000) in its investigation to recreate the Draupner wave. As far as marine structures and ships are concerned, the probability of encountering such series of large waves is much greater than that of single large waves since the life time of the former is longer.

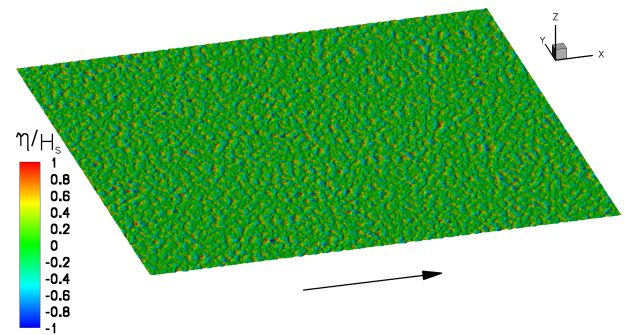
To further investigate this kind of wavegroup, we focus our attention on the series around  $t=860T_p$  in Fig. 7. Figure 8 represents the free surface elevation at  $t=860T_p$  when the highest wave of the series is produced. The extreme event consists of a single wave twice as high as the second highest wave in the domain.

One can observe on the closer view of the extreme event given in Fig. 9, a rather deep trough preceding the extreme wave. This corresponds to a wave height  $H_{\max}=2.4H_s$  and a steepness of 7% if evaluated as  $H_{\max}/\lambda_{zc}$  with the measured zero-crossing wavelength  $\lambda_{zc}=1.2$ . This naturally emerged event fits well with the numerous reported observations of steep walls of water. I notice here that Brandini (2001) did same kind of simulations with a classical HOS method and perform statistical analysis of freakwave occurrences. His long-time simulations are computed during  $200T_p$  on a domain of length  $32\lambda_p$  with a HOS order  $M=4$ . We produce here results on a longer time of simulations with a larger domain and a non-negligible increase of HOS order (up to  $M=8$ ).

However this simulation is two dimensional and one has to wonder about the effect of directionality on the occurrence of extreme events.

### 3.2.2 Sample 3-D long-time evolution

We study here the evolution of a 3-D directional wavefield. The wavefield and chosen numerical conditions are the same



**Fig. 10.** 3-D initial surface elevation.

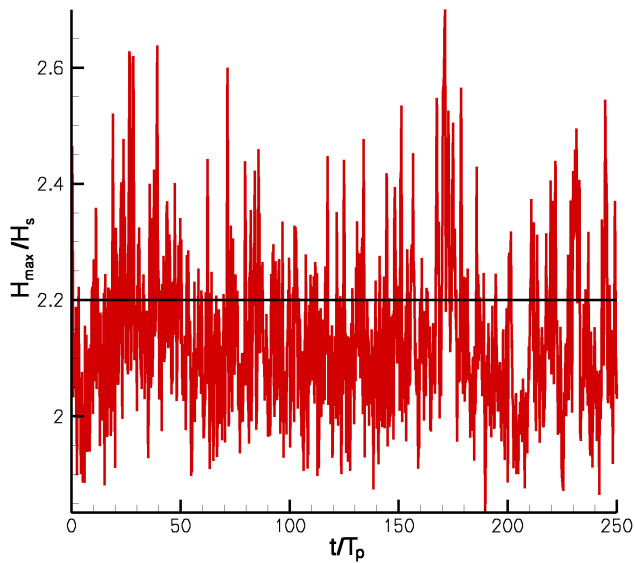
than before, except that we choose a mean steepness of the wavefield  $s=0.1$  accounting for the highest sea-states:

- Wave field characterized by  $E=0.005$  i.e.  $\alpha=0.016$ ,  $H_s=0.28$  in adimensional quantities,
- Domain length:  $L_x=42\lambda_p \times L_y=42\lambda_p$ ,
- Number of modes used:  $N_x=1024 \times N_y=512$ , HOS order  $M=5$ ,
- Dimensional quantities give, if we fix  $T_p=9.5s$  (typical in North Sea):  $H_s=6.2m$  and  $\lambda_p=140m$ . Dimensional domain area:  $5740m \times 5740m$ .

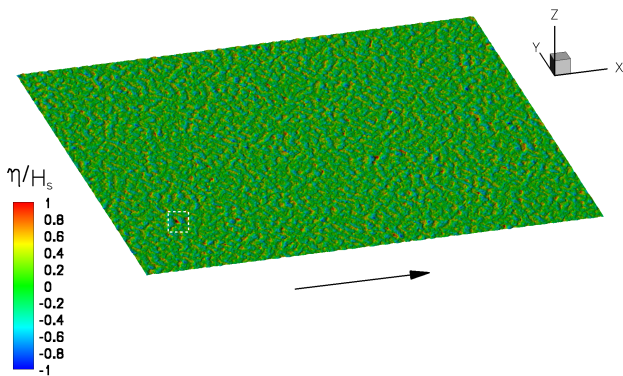
The domain length in  $x$  and the HOS order chosen have been slightly reduced compared to the previous 2-D case to keep a reasonable CPU time. With these numerical conditions, a simulation lasting 250 peak periods requires about 10 CPU days on a 3GHz-Xeon single-processor PC.

Figure 10 shows the initial surface elevation for a directionality parameter  $n=2$  (cf. Eq. 12).

The simulation is run for 250 peak periods and the wave height is monitored to detect freak wave events (see



**Fig. 11.** Evolution of  $H_{\max} / H_s$  during time of simulation, directionality  $n=2$ .

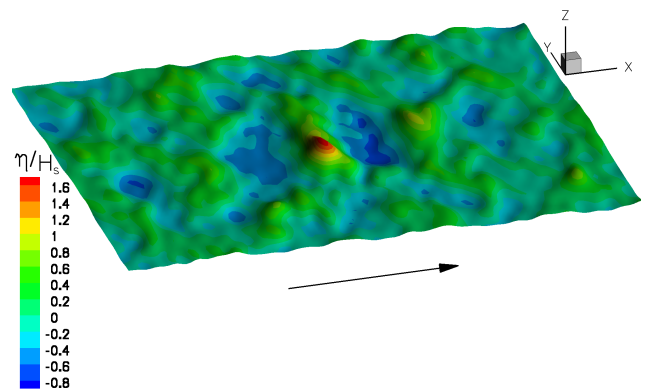


**Fig. 12.** 3-D surface elevation of the extreme event at  $t=26.5 T_p$ .

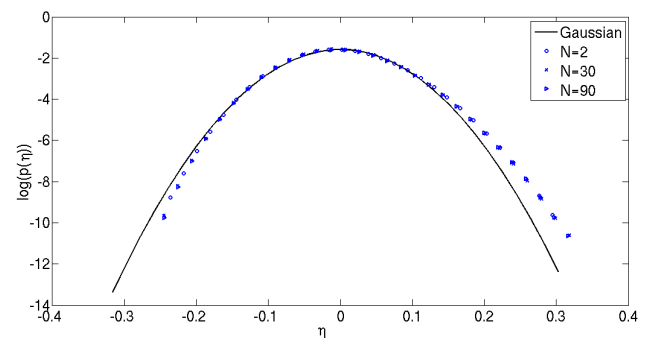
Appendix D). The evolution of the detection parameter  $H_{\max} / H_s$  is plotted in Fig. 11.

At  $t/T_p=0$ , a spurious extreme event is created by the linear initialization of the simulation. The accepted threshold of 2.2 is overshoot several times in this simulation. Due to the large size of the simulated domain, a high number of freak waves are observed. The large overshoot observed around  $t/T_p=26$  lasts for several periods: it corresponds to a localized wavegroup of high amplitude that produces several freak waves in a row, as we observed previously in two dimensions.

As we carry out a three dimensional simulation, it is also interesting to look at the shape of the freak wave events. Figure 12 shows the free surface elevation at  $t/T_p=26.5$  when the strongest event is observed. The small white square at the bottom left corner encloses the peak of which a closer view



**Fig. 13.** Zoom on the 3-D extreme event  $t=26.5 T_p$ ,  $H_{\max}=2.44 H_s$ .

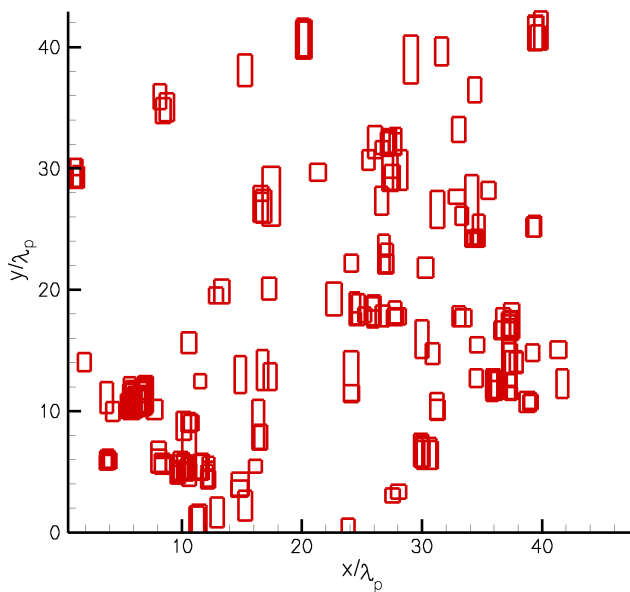


**Fig. 14.** Probability distribution of the free surface elevation.

is given in Fig. 13. In the main direction of propagation, this extreme event has a  $1.2\lambda_p$  wavelength. In the transverse direction, the wave group is rather short: the observed event is shaped like a single peak wave whose width is less than a peak wavelength. The directionality is expected to play also a significant role in modifying the probability of occurrence of extreme events.

### 3.3 Influence of directionality

Here is presented a parametric study of the influence of the directionality on freak wave formation. To this purpose, the integer  $n$  defining the directional spreading of the wave spectrum is varied. The first value  $n=2$  is the one used in Tanaka (2001a) and Tanaka (2001b); then more “realistic” choices of directionality are studied:  $n=30$  and  $90$ . The first thing we looked at is the probability distribution of the free surface elevation for these different values. In Fig. 14 is shown the comparison of the probability distribution for different directional spreadings to the Gaussian one. The probability distribution is evaluated from simulations as an average over the last 20 peak periods of simulation.

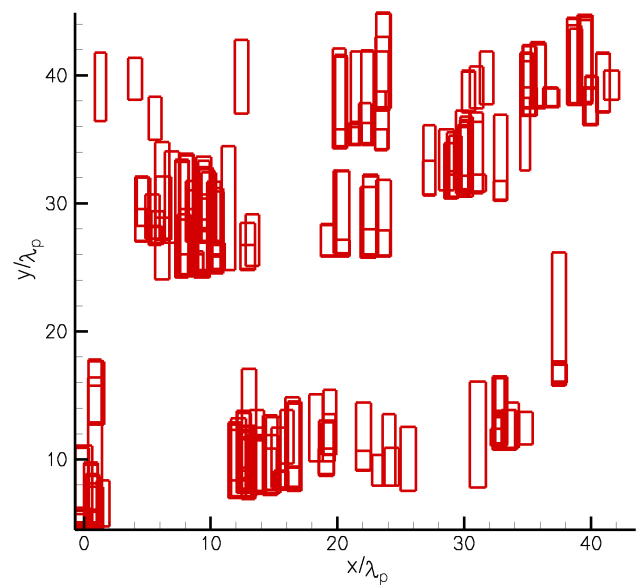


**Fig. 15.** Visualization of all the extreme events in the computational domain, for  $n=2$ .

The Fig. 14 clearly depicts the crest/trough asymmetry of the numerical wavefields: the positive elevations are more frequent than in the linear Gaussian distribution and the negative ones are less frequent. This gives a consistent indication of the nonlinear behavior of the simulated wavefields. Besides, one can observe that the directionality seems to have no direct effect on the probability distribution as the three curves for  $n=2$ , 30 and 90 are almost superimposed.

We then focus ourselves to the occurrence and shapes of the freak events in order to characterize their possible impact on structures. All along the simulation, the position of the freak waves are recorded, as well as their shapes. The freak events are detected by a zero-crossing analysis in the mean direction of propagation which gives  $H_{\max}$  and the corresponding wavelength  $L_x$ . The 2-D criterium is used ( $H_{\max} / H_s > 2.2$ ). At the same time, a second zero crossing in the transverse direction gives a transverse extent  $L_y$  and enables us to investigate the shape of the freak waves perpendicular to the direction of propagation. We report in the next three figures, Figs. 15, 16 and 17, the results for  $n=2$ , 30 and 90 respectively. Each rectangular box represents a detected freak wave, with the dimension of the box being the values of  $L_x$  and  $L_y$  characterizing the spatial extent of the freak wave.

An analysis of Fig. 15 gives an estimation of the mean transverse wavelength  $L_{y_{n=2}} \simeq 2.1\lambda_p$ . For such a large directional spreading ( $n=2$ ), the freak wave events appear to have a rather short transverse extent and would look like pyramidal events (see also Fig. 13). This figure also enables us to monitor whether the freak waves appear as isolated events



**Fig. 16.** Visualization of all the extreme events in the computational domain, for  $n=30$ .

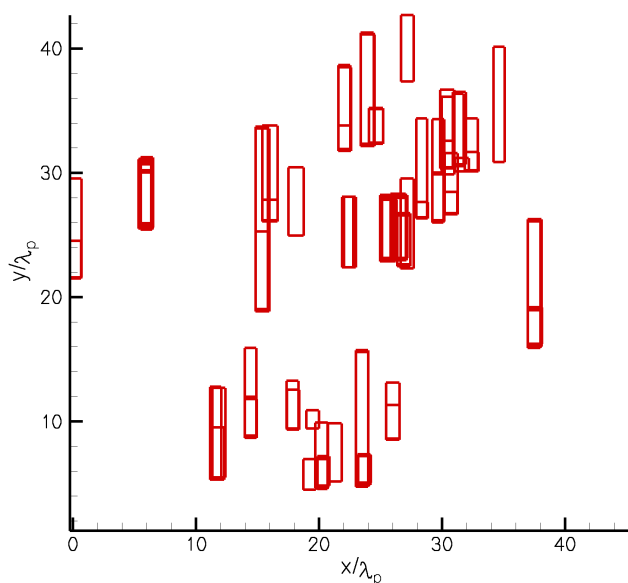
or belong to groups of freak waves. For instance, it appears that close to the position  $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (6, 10)$  a high amplitude wave group appears, that remains coherent for several periods in a row. This can be compared to the more isolated events also present, whose “life time” is shorter (with respect to the  $H_{\max} / H_s$  criterion).

When we simulate a wavefield with lower spreading  $n=30$ , we notice in Fig. 16 that, as expected, the mean transverse wavelength is enlarged:  $L_{y_{n=30}} \simeq 4.3\lambda_p$ . We still observe in this figure the distinction between isolated events, at  $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (12, 40)$  for instance, and groups of extreme events, e.g.  $(x/\lambda_p, y/\lambda_p) = (12, 10)$ . Nonetheless, the former become more scarce.

For a wavefield with narrow directional spreading ( $n=90$ ), the mean transverse wavelength of the freak events is again increased  $L_{y_{n=90}} \simeq 5.8\lambda_p$ , see Fig. 17. This behavior resembles the “wall of water” commonly described by sailors.

Comparing the last three figures, one can also clearly observe that when the directionality of the wavefield is increased ( $n$  lower), the number of extreme events seems larger. In Table 2 is thus reported the number of extreme events with respect to the parameter of directionality  $n$ . In this table is also given the mean value of  $H_{\max} / H_s$ , i.e. the averaged value of its time evolution (such as the evolution reported in Fig. 11 for  $n=2$ ).

The mean value of  $H_{\max} / H_s$  and the number of observed extreme events both decrease when the directionality parameter increases. The occurrence of extreme events is then closely linked to the directionality, even if the probability distribution of the free surface elevation does not seem to be directly influenced by this spreading (cf. Fig. 14).



**Fig. 17.** Visualization of all the extreme events in the computational domain, for  $n=90$ .

However, our statistical analysis being made over a duration of 20 peak periods, it is likely that the population of extreme events is not representative, as too rare, during this time. The double zero-crossing analysis we performed is in a sense more appropriate to an extreme events statistics since, at each time step over the 250 peak period long simulation, each single wave is detected and the extreme ones recorded. This more convenient kind of study should be the starting point for further statistical analysis.

More systematic analysis of the detected 3-D freak waves will be made possible once the ongoing parallelization of our model is achieved. We will then be able to run more calculations in larger 3-D domains and over longer times of simulation, providing data for further statistical analyses.

#### 4 Conclusions

In the present paper, a numerical investigation of extreme wave events occurring in two- and three-dimensional open-sea domains has been conducted. The numerical approach used is the HOS method which has been chosen for its specific attractive features: i) a fast resolution thanks to the use of FFTs coupled to an accelerated scheme, and ii) a fast convergence providing a high accuracy when the nonlinear products involved are carefully dealiased. The enhanced model employed is presented, and successfully verified on a number of validation test cases which are briefly reported. In particular, 3-D wave-spectra simulated evolutions have been found in accordance with the Hasselmann's theory. The process followed to initialize the wavefield in the different simu-

**Table 2.** Number of extreme events in the simulation and mean of  $H_{\max} / H_s$ , as functions of the directionality parameter  $n$ .

	$N=2$	$N=30$	$N=90$
Number of freak events	2350	756	443
Mean of $H_{\max} / H_s$	2.13	2.05	2.0

lations is also described; a directional JONSWAP wave spectrum representing real sea-states is thus specified in the simulations.

Different kinds of simulations of wavefield evolutions are performed. Firstly, a *forced* 3-D freak wave event is generated through the directional focusing of some components of the initial sea-spectrum. This way, a very large event is obtained, whose crest height is twice the significant wave height. To get more realistic freak waves, long-time simulations of directional wave-spectrum with random initial phases have then been carried out. A 2-D evolution lasting 1000 peak periods has thus been computed, demonstrating the ability of the present model to accurately simulate series of realistic extreme events *naturally* appearing within the wavefield. Then, 3-D evolutions have been performed to further investigate the effect of the directionality. In the large domain of computation used (covering more than 30 square kilometers of ocean), several extreme events appear during the simulation; a group of freak waves is in particular studied. Finally, a parametric study of directionality is carried out and reveals that the number and shape of the detected freak wave events largely depends on the directional spreading. For widely spread seas, the number of extreme events is high and their width in the transverse direction tends to be limited. When the spreading decreases, the freak events number decreases and their transverse extent increases, leading to the well known “walls of water” for quasi uni-directional seas. Another remarkable feature shown by our approach is the groupiness of freak events, especially when the directional spreading is limited, as shown in Fig. 16 where several successive freak wave events appear in the same wave group. More refined studies have to be now undertaken regarding that point.

The results obtained are hence encouraging for the pursuit of investigations in this domain using the presented HOS model. More systematic studies over repeated long-time simulations are in particular required to obtain stochastically significant results. The latter could help understanding the freak wave formation and development mechanisms, and their occurrence probability. These studies are already easily feasible in two dimensions with the present model, and will be conducted soon. And for making possible systematic three-dimensional investigations, we are presently working on the parallelization of the code.

Thus, the abilities of our model have been pointed out, as well as its efficiency with huge calculations performed

on a single processor. Nonetheless, if this model permits to simulate open-sea evolutions, it does not allow to reproduce sea evolutions obtained in wavetanks. The latter laboratory facilities are however the only possible way to experimentally study wavefield characteristics in details. Indeed, in the initial HOS formulation, no wave generation or absorption is possible, making difficult the comparison to experiments conducted in wavetanks, where are also present wall and beach reflections, generation of spurious free waves, etc. To overcome this limitation of the original HOS method, significant efforts have been dedicated to the development and validation of a new fully-spectral model *HOST* (for HOS Tank) able to numerically reproduce a wavetank (see Bonnefoy et al., 2004; Ducroz et al., 2006). The next step will thus be, from open-sea extreme events such as the ones obtained in the present work, to reproduce them in the 50 m × 30 m × 30 m *École Centrale de Nantes* wavetank by using *HOST*. The key point in this process will be to adjust the wavemaker motion characteristics, in order to obtain the best fit between the target freak wave previously obtained in open-sea conditions, and its reproduction in laboratory conditions. The proposed combination of open-sea and wavetank simulations is intended to provide useful information on the freak-wave formation mechanisms.

## Appendix A

### HOS method

Here is described the HOS method first introduced by West et al. (1987) and Dommermuth and Yue (1987). The evaluation process of the vertical velocity at the exact free surface position ( $W = \frac{\partial \phi}{\partial z}|_{z=\eta(\mathbf{x},t)}$ ) is first based on a series expansion of the velocity potential. This series expansion with respect to  $\epsilon$ , being a measure of the wave steepness, gives

$$\phi(\mathbf{x}, z, t) = \sum_{m=1}^M \phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t) \quad (\text{A1})$$

where  $M$  is the order of nonlinearity and  $\phi^{(m)}$  a quantity of order  $O(\epsilon^m)$ . Reporting this series into the definition of the surface velocity potential  $\phi^s = \phi|_{z=\eta(\mathbf{x},t)}$ , we then perform a Taylor expansion of the potential  $\phi$  about  $z=0$ . Arranging according to the order  $m$  one obtains

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \phi^s(\mathbf{x}, t) \\ \phi^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\eta \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\vdots = \vdots \\ \phi^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^k \phi^{(m-k)}}{\partial z^k}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

The full Dirichlet problem for  $\phi(\mathbf{x}, z, t)$  on  $z=\eta(\mathbf{x}, t)$  can then be simplified into  $M$  simpler Dirichlet problems on  $z=0$ ,

respectively for  $\phi^{(m)}(\mathbf{x}, z, t)$ . Afterwards, the single problems are successively solved by means of a spectral method using the spectral basis functions described in Sect. 2.2.

The vertical velocity is then evaluated using the same Taylor expansion as the one previously described

$$\begin{aligned} W^{(1)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) \\ W^{(2)}(\mathbf{x}, 0, t) &= \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z}(\mathbf{x}, 0, t) - \eta \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2}(\mathbf{x}, 0, t) \\ &\vdots = \vdots \\ W^{(m)}(\mathbf{x}, 0, t) &= -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\eta^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \phi^{(m-k)}}{\partial z^{k+1}}(\mathbf{x}, 0, t) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

The two formulations of Dommermuth and Yue (1987) and West et al. (1987) are equivalent up to this point. However, we employ the one of West et al. which propose a consistent treatment (with respect to  $\epsilon$ ) of  $W$  in the free surface boundary conditions (see Tanaka (2001a)). That is to say, if we denote by  $W_M$  the sum  $\sum_{m=1}^M W^{(m)}$  and  $W_{M-2}$  the sum  $\sum_{m=1}^{M-2} W^{(m)}$ , Eq. (3) writes

$$(1 + |\nabla \eta|^2) W = W_M + |\nabla \eta|^2 W_{M-2}$$

Additional details can be found in e.g. Tanaka (2001a), Le Touzé (2003) or Bonnefoy et al. (2004).

## Appendix B

### Acceleration procedure

The acceleration procedure is based on the scheme presented by Fructus et al. (2005). It appears that the system of Eqs. (2, 3) to solve is very stiff for high frequencies, which leads to very small time steps. The key point of this scheme is, thanks to an adequate change of variables, to solve the nonlinear part of the equations as a problem in itself and not as an adjustment of the linear solution. The linear part of the equations is then analytically integrated while nonlinear evolution of the system is computed numerically using a classical fourth-order Runge-Kutta scheme with adaptative time step. For the details of the procedure, one can refer to see Fructus et al. (2005).

## Appendix C

### Dealiasing

The nonlinear products involved in the free surface boundary conditions (2, 3) are computed in the physical space instead of the spectral space. This leads to the well-known aliasing phenomenon which has to be addressed to obtain precise results (see e.g. Canuto et al., 1987). In general, dealiased



computations can be obtained by using spectra extended with zero padding.

The number of collocation points in the physical space is then to be adequately determined for removing aliasing errors made on multiple products. The latter products are found in the free surface boundary conditions on the one hand, and within the iterative HOS obtention of  $W$  (see Appendix A) on the other hand. They are  $M$ -products at the most (products involving  $M$  terms). Applying the *half* rule, the number of points to use in the physical space ( $N_{x_d}$ ,  $N_{y_d}$ ) to get a full dealiasing is

$$N_{x_d} = \frac{M+1}{2}N_x, \quad N_{y_d} = \frac{M+1}{2}N_y$$

However, for high-order nonlinearities, the rising of computational effort and memory allocations could become prohibitive in 3-D computations. Thus, we have chosen to perform this full dealiasing in 2-D computations and a partial dealiasing for the 3-D computations with  $M > 3$ . We introduce the partial dealiasing as an iterative dealiasing of order  $M' < M$ . Then, to compute the nonlinear products of order  $M$ , we perform a dealiasing on the  $M'$  first products, then on the following  $M'$ , etc. and finally on the  $M - kM'$  products left. This permits for large 3-D computations to keep reasonable CPU times and memory requirements as well as a good accuracy (a detailed investigation of the accuracy of this partial dealiasing technique has been achieved and will be reported soon in a separate publication).

## Appendix D

### Location of the freak wave events

Classically, the so-called “freak wave” events are defined as large waves which heights exceed the significant wave height  $H_s$  by a factor in the range [2–2.2] (see Kharif and Pelinovsky, 2003). The first (linear) approximation for representing a wavefield is that it can be considered as a stationary random normal (i.e. Gaussian) process. Under this assumption, a mathematical definition of a freak wave event can be expressed by  $H_{\max} > 2H_s$ ,  $H_{\max}$  being the height of this extreme event (see e.g. Kharif and Pelinovsky, 2003, for details).

Accounting for nonlinearities in the process, a refined definition tends to rise the limit of the freak wave height to  $H_{\max} > 2.2H_s$ . The latter limit of  $2.2H_s$  is now commonly accepted, for instance in the recent Rogue Waves Workshop (2005), a number of papers used this limit for defining a freak wave (Schober, 2003; Lavrenov and Porubov, 2003, see e.g.).

Once this criterion has been defined, one has to determine the height of the waves formed within the wavefield evolution. The way we analyze 2-D wavefields is to use a classical zero up-and-down crossing. We make several outputs of the surface elevation (typically about 5 outputs per wave spec-

trum peak period) and perform this zero up-and-down crossing analysis of the obtained free surfaces. The significant wave height,  $H_s$ , of the wavefield as well as the maximum wave height at a given time step,  $H_{\max}$ , are then derived.

For analyzing 3-D wavefields, we chose to define the wave height as its height in the mean direction of propagation. Thus, we perform the same kind of analysis than in 2-D (zero up-and-down crossing along the x-axis which is the mean direction of propagation of our wavefield) but recursively with respect to the y-direction to get the height at the wave peak location in y. This seemed to be the more natural way to analyze the 3-D wavefield.

Edited by: E. Pelinovsky

Reviewed by: two referees

## References

- Annenkov, S. and Shrira, V.: Numerical modelling of water-wave evolution based on the Zakharov equation, *J. Fluid Mech.*, 449, 341–371, 2001.
- Bonnefoy, F.: Modélisation expérimentale et numérique des états de mer complexes, Ph.D. thesis, Ecole Centrale Nantes, (in French), 2005.
- Bonnefoy, F., Le Touzé, D., and Ferrant, P.: Generation of Fully-Nonlinear Prescribed Wave Fields using a High-Order Spectral Model, in: Proc. 14th Int. Offshore and Polar Engng. Conf., Toulon, France, 2004.
- Brandini, C.: Nonlinear Interaction Processes in Extreme Waves Dynamics, Ph.D. thesis, Univ. of Firenze, 2001.
- Brandini, C. and Grilli, S.: Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT., in: Proc. 11th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng., Vol. III, pp. 124–131, Stavanger, Norway, 2001.
- Canuto, C., Haussaini, M., Quarteroni, A., and Zang, T.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- Craig, W. and Sulem, C.: Numerical simulation of gravity waves, *J. Comp. Phys.*, 108, 73–83, 1993.
- Dommermuth, D.: The initialization of nonlinear waves using an adjustment scheme, *Wave Motion*, 32, 307–317, 2000.
- Dommermuth, D. and Yue, D.: A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 184, 267–288, 1987.
- Ducrozet, G., Bonnefoy, F., Le Touzé, D., and Ferrant, P.: Implementation and Validation of Nonlinear Wave Maker Models in a HOS Numerical Wave Tank, *Int. J. Offshore Polar Engng.*, 16, 161–167, 2006.
- Dysthe, K. B.: Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves, *R. Soc. Lond. A*, 369, 105–114, 1979.
- Fructus, D., Clamond, D., Grue, J., and Kristiansen, O.: An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems, *J. Comp. Phys.*, 205, 665–685, 2005.
- Hasselmann, K.: On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.*, 12, 481–500, 1962.

- Haver, S., Eik, K., and Meling, T.: On the prediction of wave crest height extremes., Tech. rep., Statoil, 2002.
- Kharif, C. and Pelinovsky, E.: Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 22, 603–634, 2003.
- Krasitskii, V.: On reduced Hamiltonian equations in the nonlinear theory of water surface waves, *J. Fluid Mech.*, 272, 1–20, 1994.
- Lavrenov, I. and Porubov, A.: Three reasons for freak wave generation in the non-uniform current, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 22, 574–585, 2003.
- Longuet-Higgins, M.: Resonant interactions between two trains of gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 12, 321–332, 1962.
- Phillips, O.: On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions, *J. Fluid Mech.*, 9, 193–217, 1960.
- Schäffer, H.: On the Dirichlet-Neumann Operator for Nonlinear Water Waves, in: *Proc. 20th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Longyearbyen, Norway, 2005.
- Schober, C.: Melnikov analysis and inverse spectral analysis of rogue waves in deep water, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 22, 602–620, 2003.
- Socquet-Juglard, H.: Spectral evolution and probability distributions of surface ocean gravity waves and extreme waves, Ph.D. thesis, University of Bergen, available at <https://bora.uib.no/handle/1956/1103>, 2005.
- Stiassnie, M. and Shemer, L.: On modifications of the Zakharov equation for surface gravity waves., *J. Fluid Mech.*, 143, 47–67, 1984.
- Tanaka, M.: A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation, *Fluid Dyn. Res.*, 28, 41–60, 2001a.
- Tanaka, M.: Verification of Hasselmann’s energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations, *J. Fluid Mech.*, 444, 199–221, 2001b.
- Trulsen, K.: Simulating the spatial evolution of a measured time series of a freak wave, in: *Proc. Rogue Waves 2000*, pp. 265–273, Brest, France, 2000.
- Trulsen, K. and Dysthe, K. B.: A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water, *Wave Motion*, 24, 281–289, 1996.
- Le Touzé, D.: Méthodes spectrales pour la modélisation non-linéaire d’écoulements à surface libre instationnaires, Ph.D. thesis, Ecole Centrale Nantes (in French), 2003.
- Vijfvinkel, E.: Focused wave groups on deep and shallow water, Master’s thesis, University of Groningen, The Netherlands, 1996.
- West, B., Brueckner, K., Janda, R., Milder, M., and Milton, R.: A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res.*, 92, 11 803–11 824, 1987.
- Zakharov, V.: Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 9, 190–194, 1968.

## **B.5 Time-reversal of nonlinear waves : Applicability and limitations**

L'article suivant présente une étude numérique (HOS-NWT) sur les possibilités d'application de la méthode du retournement temporel au génie océanique. Différents profils de vagues, solution des équations NLS sont pris comme vagues de référence et reproduits à l'aide de cette méthode à différentes positions dans le bassin. On trouvera dans cet article des détails concernant la section 4.3.1 du présent mémoire de recherches.

**Time-reversal of nonlinear waves: Applicability and limitations**G. Ducrozet,<sup>1,\*</sup> M. Fink,<sup>2</sup> and A. Chabchoub<sup>3,4</sup><sup>1</sup>*LHEEA, École Centrale Nantes, UMR CNRS No. 6598, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes, France*<sup>2</sup>*Institut Langevin, ESPCI Paris, PSL University, CNRS, UMR CNRS No. 7587,  
10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France*<sup>3</sup>*Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, Aalto University, 02150 Espoo, Finland*<sup>4</sup>*Department of Ocean Technology Policy and Environment, Graduate School of Frontier Sciences,  
The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8563, Japan*

(Received 21 March 2016; published 22 September 2016)

Time-reversal (TR) refocusing of waves is one of the fundamental principles in wave physics. Using the TR approach, time-reversal mirrors can physically create a time-reversed wave that exactly refocus back, in space and time, to its original source regardless of the complexity of the medium as if time were going backward. Laboratory experiments have proved that this approach can be applied not only in acoustics and electromagnetism, but also in the field of linear and nonlinear water waves. Studying the range of validity and limitations of the TR approach may determine and quantify its range of applicability in hydrodynamics. In this context, we report a numerical study of hydrodynamic time-reversal using a unidirectional numerical wave tank, implemented by the nonlinear high-order spectral method, known to accurately model the physical processes at play, beyond physical laboratory restrictions. The applicability of the TR approach is assessed over a variety of hydrodynamic localized and pulsating structures' configurations, pointing out the importance of high-order dispersive and particularly nonlinear effects in the refocusing of hydrodynamic stationary envelope solitons and breathers. We expect that the results may motivate similar experiments in other nonlinear dispersive media and encourage several applications with particular emphasis on the field of ocean engineering.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.1.054302](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.1.054302)**I. INTRODUCTION**

Nonlinearity is a fundamental feature of hydrodynamic evolution equations and is therefore crucial for the accurate description of water waves [1,2]. One particular and prominent form of hydrodynamic instability of nonlinear waves is the Benjamin-Feir instability [3]. This instability has been discussed in modeling oceanic extremes. Indeed, the formation of extremely large and steep waves in real seas, also known as freak or rogue waves (RWs), has drawn significant scientific attention (see [4–8]). In fact, the dynamics of RWs can be described and modeled within the framework of exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation (NLSE) [9–11]. Further, integrable weakly nonlinear evolution equations, such as the NLSE, allow us to discuss the propagation characteristics of specific and complex waves by means of exact solutions [12,13]. Recent laboratory and numerical studies have confirmed the existence of hydrodynamic breathers [14–16]. Being controllable in both time and space, breathers are more accurate physical models to generate extreme waves for engineering application purposes, rather than using the inefficient and simplified linear superposition principle. Prominent models are, for instance, the family of doubly localized Peregrine and Akhmediev-Peregrine breathers.

The time-reversal (TR) procedure is another fundamental principle in wave physics and it has been used in several contexts in past years, especially for acoustic and elastic waves [17,18]. This TR technique, based on TR mirrors, works as follows: A given wave pulse, generated at a source, is

\* [guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr](mailto:guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr)

then measured by a set of antennas or probes after a certain propagation in space. These signals are then time-reversed and rebroadcasted from the same measurement locations by the TR mirrors. If TR invariance is valid, the initial wave pulse is expected to focus back at the original source location, independently of the complexity of the medium.

The effects of dispersion [18,19] and nonlinearities [20] have been experimentally studied for acoustic waves. It has been shown that the time-reversed field focuses back in time and space as long as nonlinearities do not create dissipation, i.e., as long as the propagation distance is smaller than the shock distance.

Different TR procedures have been experimentally applied in the field of water waves. The TR mirror has been shown to be valid for wave fields with very weak nonlinearity in the configuration of a water tank cavity and multiple mirror reflections [21] and recently, a new concept of instantaneous time mirror has been tested also for water waves [22]. Also, strongly and doubly localized breather solutions have been used to study the time refocusing of nonlinear waves in a unidirectional wave flume [23]. This study has shown that for these RW models, which are steep in amplitude and therefore strongly nonlinear waves, time-reversal is still accurately valid.

In this paper we extend the experimental work [23] and report an extensive and detailed numerical study of the effects of dispersion and nonlinearities on hydrodynamic time-reversal within the framework of NLSE envelope solitons and breathers. The main goal of this work is to accurately quantify the validity of the TR approach for water waves, based on a numerical wave tank (NWT) [24], implemented by the conservative higher-order spectral (HOS) method [25,26]. It is shown that the time-reversal is indeed valid for nonlinear waves for a wide range of wave propagation distances and steepness values. This proves the robustness of the TR property of NLSE localized structures with respect to noise and chaos. Limitations of the TR approach are also discussed in detail. We emphasize that the investigation of the effect of dispersion and nonlinearity on hydrodynamic time-reversal characteristics of focused waves, taking also into account, for instance, bound waves and the inaccuracies of wave maker's wave generation, has been studied within the framework of the Zakharov equation in Ref. [27].

The paper is organized as follows. Section II presents the weakly nonlinear theory of water waves and the TR principle. In Sec. III the NWT configuration will be detailed as well as the method used to generate localized structures inside this NWT. Section IV is devoted to the validity analysis of the time-reversal for water waves in relation to nonlinearity of the wave field as well as to dispersion effects. Section V analyzes the properties of the physical processes, including a discussion on the limitations of the TR method in hydrodynamics.

## II. NONLINEAR WAVES AND THE TIME-REVERSAL PRINCIPLE

In this work we are interested in the propagation of water waves at large scales and consequently we limit our study to surface gravity waves. Furthermore, we assume that the waves are evolving in deep water, that is, we assume that the ratio of the water depth  $h$  to the wavelength  $\lambda$  is large. For practical applications, a deep-water condition is already satisfied when  $h/\lambda > 1/2$ . Finally, we are interested in configurations in which dissipation is negligible and consequently do not consider viscous effects of any kind: solid boundaries, wave breaking, etc.

This classical set of assumptions for water waves leads to the modeling of this physical phenomenon due to the nonlinear potential flow theory. This has been widely used to study several nonlinear wave phenomena such as nonlinear wave interactions [9], RWs [28,29], and water-wave turbulence [30]. Numerical solutions of the fully nonlinear problem can be complex and very time consuming from a numerical point of view. An alternative to overcome these constraints is to assume weak nonlinearity of the wave field, while processes are expected to be narrow banded, allowing slow modulations. With these additional hypotheses, one may use the focusing NLSE [9] to describe

the evolution of nonlinear narrow-banded wave trains in deep water

$$i \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\omega}{2k} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\omega}{8k^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\omega k^2}{2} |\psi|^2 \psi = 0, \quad (1)$$

while  $\psi(x, t)$  is the complex envelope of the corresponding wave train. To the second-order of approximation in wave steepness  $ka$  ( $k = 2\pi/\lambda$  is the wave number and  $a$  stands for the wave amplitude), the free surface elevation is then given by

$$\eta(x, t) = \text{Re} \left\{ \psi(x, t) \exp[i(kx - \omega t)] + \frac{k\psi^2(x, t)}{2} \exp[2i(kx - \omega t)] \right\}. \quad (2)$$

In the following we consider exact analytic solutions to the NLSE to assess the validity of the TR procedure. The simplest form is the stationary envelope solution [31]. The most prominent form of breathers is the family of doubly localized breathers, also referred to as Akhmediev-Peregrine breathers [32,33], which have been emphasized to be appropriate models to describe oceanic RWs [34,35]. A detailed description and parametrization of those analytic solutions are given in the Supplemental Material [36].

For a given solution  $\psi(x, t)$  of Eq. (1), it can be easily verified that the time-reversed complex conjugate form  $\psi^*(x, -t)$  is also a solution. Therefore, both corresponding free surface elevations  $\eta(x, t)$  and  $\eta(x, -t)$  are possible solutions to the water-wave problem within the framework of the NLSE. Due to this property, a TR mirror can be used to create the time-reversed hydrodynamic wave field  $\eta(x, t)$  in the whole propagating medium.

The theory indicates that to be effective, the TR procedure needs to measure and time-reverse the free surface elevation as well as the normal velocity of this surface. However, from a practical point of view, in water waves experiments, no simple generation procedure exists to ensure both those quantities at the same time. We consequently restrict our study to practical applications in laboratories (for instance, ocean engineering facilities) in which the only free surface elevation is imposed or controlled by a wave maker. Indeed, it has been shown experimentally [21,23] that this procedure is efficient. If the problem has only one horizontal spatial dimension, it appears sufficient to measure the wave field at one location  $\eta(x_M, t)$  and rebroadcast the time-reversed signal  $\eta(x_M, -t)$  from this unique point  $x_M$  (mirror position) in order to observe the solution  $\eta(x, -t)$  in the whole medium and thus to verify the TR invariance.

Within a water-wave basin, the possible procedure to verify the validity of the TR procedure is to (i) generate a given wave field, (ii) measure the spreading waves at a specific location, and (iii) time-reverse this signal and use it to generate a new wave field. If time-reversibility is valid, the wave field measured by the probe, during the second experiment, should correspond to the pulse generated by the wave maker's motion of the first experiment.

Time-reversal has been experimentally studied in a wave basin within the framework of breathers in Ref. [23] for initial solutions that exhibit strongly nonlinear features. In fact, doubly localized breathers up to second-order have been accurately refocused through time-reversal. This indicates that the TR procedure, in the presence of high nonlinearity and dispersive effects, is still valid. It allows the use of the time-reversible feature of the wave field, even in the case of strong focusing.

The purpose of the proposed study is to detail the range of applicability of the TR method for water waves in the configuration of a unidirectional wave basin. As stated previously, the time-reversibility can be demonstrated in the context of the NLSE and is also theoretically valid for the fully nonlinear conservative water-wave problem (potential flow formalism). However, the practical TR procedure relies on some assumptions that may result in a loss of accurate wave refocusing (use of the only free surface elevation, conversion to the wave maker's motion, etc.). We will show that the application of the TR procedure to NLSE solutions is indeed valid for a significant range of parameters. Therefore, even if the target wave field is only an approximation to the fully nonlinear physics of the water-wave problem (assuming weak nonlinearity and narrow-banded dynamics), the TR procedure is applicable. In this regard, the important parameters for this study are expected to be

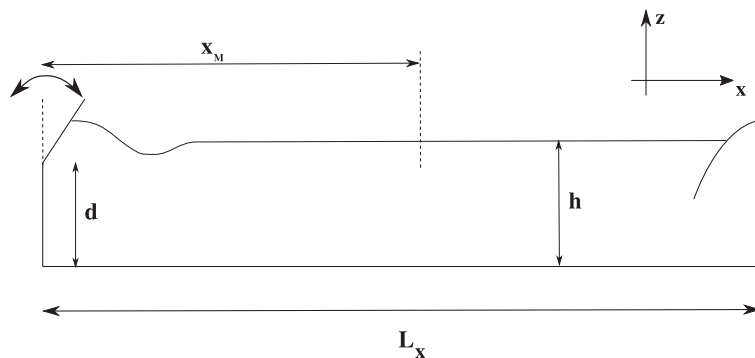


FIG. 1. Sketch of the NWT.

(i) nonlinearity, characterized by the steepness of the wave field  $ka$ , and (ii) higher-order dispersive terms, appearing to be non-negligible, when the process is broad banded. The latter effects related to higher-order dispersion can be characterized through the propagating distance  $kx_M$ .

### III. NUMERICAL WAVE TANK CONFIGURATION AND GENERATION OF HYDRODYNAMIC LOCALIZED STRUCTURES

Following the experiments presented in Ref. [23], a numerical procedure is set to provide an extensive analysis with respect to the applicability and limitations, related to the use of the TR approach for nonlinear waves in a wave basin. This section presents the numerical model as well as the setup validation.

#### A. Numerical wave tank

The numerical validation of the TR procedure in the context of water waves relies on an accurate description of the wave physics at play during the wave propagation. Primarily, it has been discussed in the previous section that possible limitations are due to high-order nonlinearities and high-order dispersive terms. Consequently, the suitable numerical model must include these physical features in the configuration of the nonlinear potential flow solver, being the typical candidate, if we exclude the breaking of the waves.

The HOS model [25,26], described briefly in the Supplemental Material [36], has been widely used in the context of water waves for the study of specific nonlinear processes such as modulation instability [16,37], simulation of RWs in irregular sea states [28], or emergence of bimodal seas [38]. This highly nonlinear scheme allows an efficient and accurate solution of the water-wave problem.

This original HOS model is however limited to the study of nonlinear waves propagating in a periodic domain, specifying an initial condition. The configuration is essentially different in the context of a wave basin. This exhibits a wave maker to generate a given wave field, an absorbing beach on the other side of the basin to prevent wave reflections as well as reflection conditions on the sidewalls. Consequently, specific attention has been paid to the development of a NWT that includes all those specificities, which we refer to as a HOS NWT. This model has been validated with several comparisons to experiments on different wave fields: from regular unidirectional waves to directional irregular sea states (see [24] for details).

In the following, the configuration used for the NWT is similar to the experiments reported in Ref. [23]. The unidirectional wave field will be analyzed in the configuration, sketched in Fig. 1 for the sake of appropriate analysis dimensions. The wave maker is defined as a hinged flap and the numerical absorbing beach is designed so that no reflection occurs during the simulations. The water depth is defined as  $h = 1$  m, the hinged location is  $d = 0.8$  m, and the length of the basin is set to be  $L_x = 20$  m.

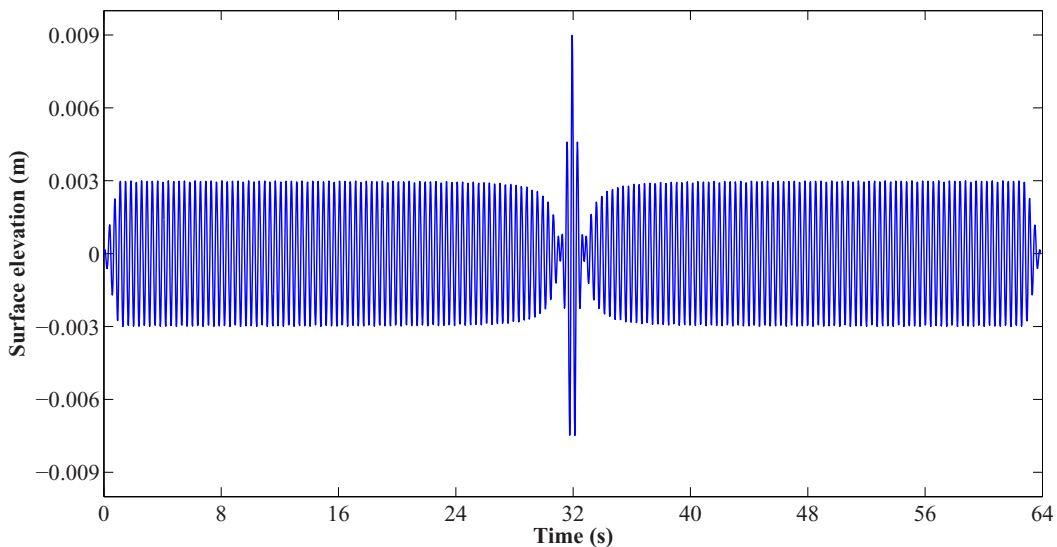


FIG. 2. Target wave elevation used to define the wave maker's motion: Peregrine breather with  $ka = 0.09$  and  $a = 0.003$  m, evaluated at  $x = 0$ .

The numerical parameters in the HOS NWT have been chosen to ensure an accurate description of the physical phenomena at stake. These are detailed in the Supplemental Material [36].

### B. Generation of a localized wave field

We start the TR procedure by first defining the temporal surface wave profile of the pulse to be studied  $\eta(x_S, t)$  at the source (wave maker) position  $x_S$ . As specified earlier, different specific NLSE pulses for several wave parameters will be investigated in this work. The choice of the analytic envelope soliton, or doubly localized structures, will define the complex envelope  $\psi(x, t)$  and the corresponding target free surface elevation at the maximal envelope amplitude  $\eta(x = 0, t)$  through Eq. (2). This allows us to define the wave maker's motion through the use of an adequate transfer function, dependent of the wave maker's shape. The TR procedure consequently relies on a linear approximation to relate the target free surface elevation to this motion, leading to possible discrepancies.

We demonstrate the procedure by means of the Peregrine solution. Figure 2 gives an example of the free surface profile  $\eta(x = 0, t)$  used to deduce the wave maker's motion. This is the case of a Peregrine breather with carrier wave steepness  $ka = 0.09$  and a carrier amplitude  $a = 0.003$  m, evaluated at  $x = 0$ . We used ramps at the beginning and end of the chosen time window in order to ensure (i) a smooth start of the wave maker's movement and (ii) the periodicity of the signal, which is decomposed on Fourier components.

In the different configurations tested, the time window of the target free surface elevation is kept constant and is specified and depicted in Fig. 2. This corresponds to  $T_w \simeq 175T_0$ , with  $T_0 = 2\pi/\omega$  the carrier wave period. This is sufficiently long to prevent from any boundary effects on a sufficiently long time window around the modulation, which occurs around  $\simeq 110T_0$ , as presented in Ref. [23].

Once the first wave field is recorded at the specified probe mirror location  $x_M$ , we time-reverse this signal and use it as a novel wave maker's signal (still using the same linear transfer function) for the follow-up TR refocusing experiment. Figure 3 presents an example of the recorded signal in the case of the Peregrine breather as well as the corresponding time-reversed time series, injected into the wave maker for  $ka = 0.09$  and  $kx_M = 270$ . Note that the time origin has been shifted to take into account the propagating distance ( $t' = t - x_M/C_g$ ).

Finally, due to the spatial reciprocity, the time-reversed and second wave field is generated at the same source and recorded at the same mirror location  $x_M$ . This allows us to compare the focused wave profile to the original signal, as shown in Fig. 4. Details about the comparisons and validations



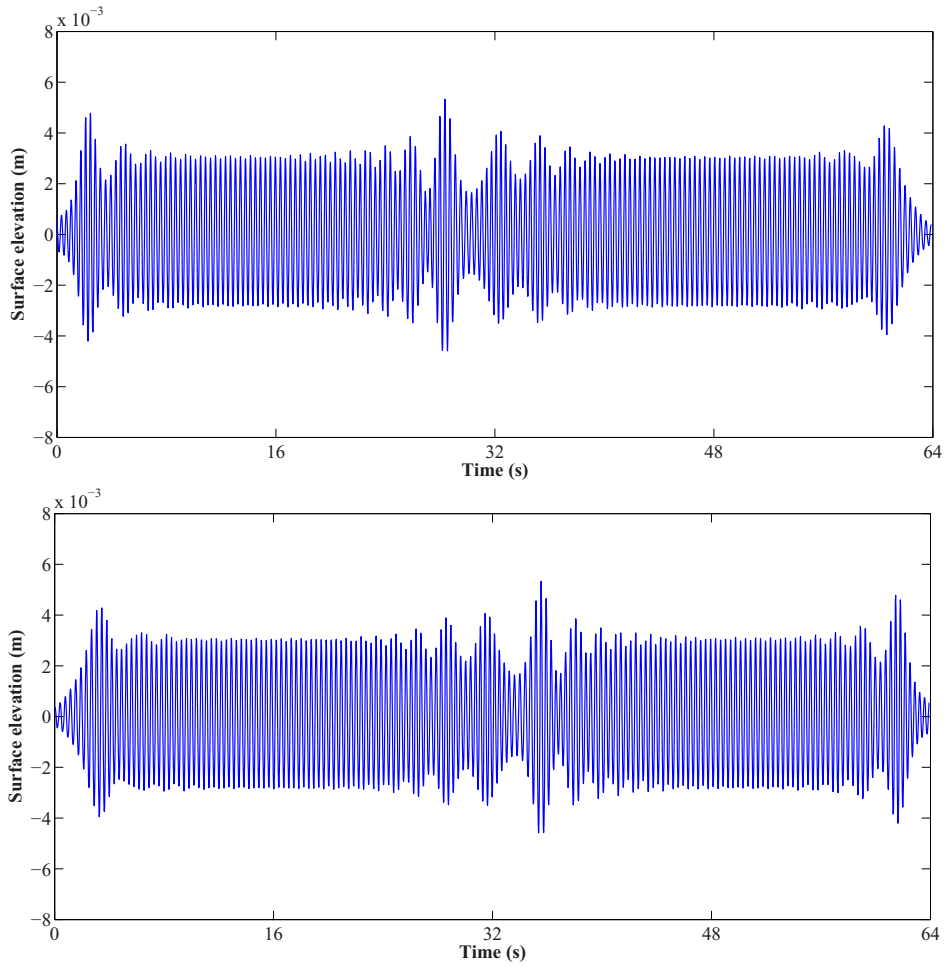


FIG. 3. Peregrine breather surface elevation with  $ka = 0.09$  and  $a = 0.003$  m. Shown on top is the probe signal measured at  $x_M$  after the propagation on a distance  $kx_M = 270$  and on the bottom is the time-reversed signal, providing a new wave maker's boundary condition.

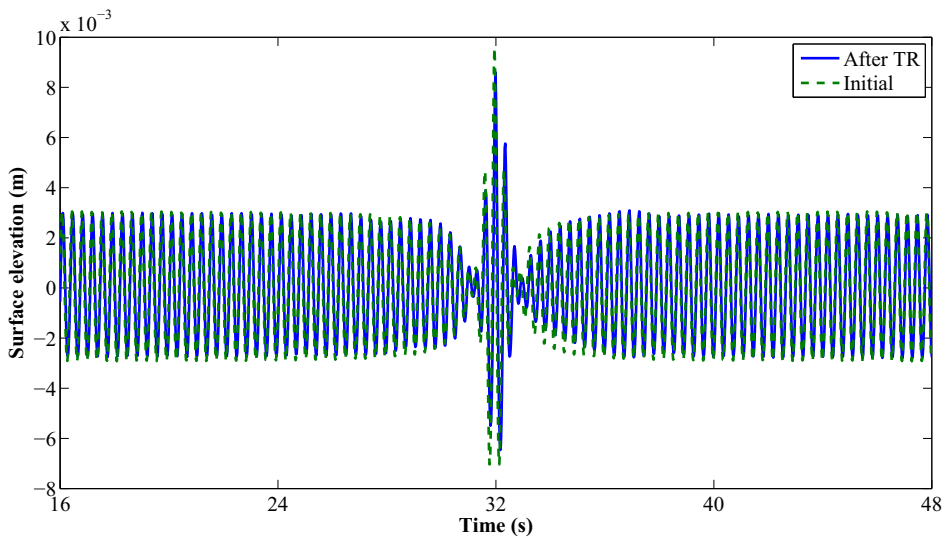


FIG. 4. Comparison of the Peregrine surface profile as generated by the wave maker (dashed line) with the reconstructed and refocused waves after the TR procedure (solid line). The carrier parameters are  $ka = 0.09$  and  $a = 0.003$  m, while  $kx_M = 270$ .

with respect to the results presented in Ref. [23] are provided in the Supplemental Material [36]. The case of the doubly localized Peregrine breather and the second-order Akhmediev-Peregrine breather are validated. It shows that the proposed numerical procedure, based on the use on the highly nonlinear HOS NWT, provides an accurate description of the complex physics involved in the wave generation and propagation. The next step is now to make use of the proposed procedure to study the application range of the time-reversal in the context of water waves with respect to the steepness (nonlinearity) and the propagation distance (dispersion) for an accurate TR refocusing.

#### IV. VALIDITY OF THE TIME-REVERSAL APPROACH

Realistic sea state conditions may exhibit configurations in which nonlinearities may become significant [39]. Taking into account this fact as well as the chaotic nature of ocean waves, it is consequently interesting to study the possible limitations to the use of time-reversal for those wave conditions. This would allow us to determine the limitations in tracing back oceanic extreme events.

In this study we reduce our attention to simple stationary and highly nonlinear pulsating states, as determined by the NLSE. The parameters studied are reduced to the wave steepness  $ka$ , which characterizes the nonlinearity of the wave field, as well as the maximal propagation distance required for an accurate TR refocusing  $kx_M$ , which characterizes the effects of dispersion. As simple artificial sea state configurations, we consider the stationary envelope soliton solution, followed by the two doubly localized breathers of first and second-order, respectively.

It appears necessary to use an accuracy estimator to evaluate the validity of the TR technique. This is based on the free surface elevation recorded by the wave gauge after application of time-reversal, namely,  $\eta_{TR}(t)$ . In the context of the reproduction of extreme waves in wave basins, it has been shown in Ref. [40] that the most important parameter to ensure the correct kinematics inside the fluid domain, also essential, for example, to study wave-structure interactions, is the wave amplitude. Consequently, the chosen accuracy parameter is defined by

$$R_{\text{amp}} = \frac{\max(\eta_{TR})}{\max(\eta_{NLSE})}, \quad (3)$$

while  $\eta_{NLSE}$  denotes the analytic free surface elevation obtained from the NLSE (2). This expression includes the second-order bound waves whose contribution becomes more distinct when strong localized focusing in the wave train emerges. This parameter appears appropriate to have an accurate estimation of the quality of the TR refocusing. As we will see in the following, discrepancies will be characterized by a possible change of shape or time shifts. Nevertheless, these discrepancies have been always associated with a change of amplitude that is relevant as an indicator of global accuracy.

Note that the maximum steepness, chosen in the different test models presented, is below breaking-steepness thresholds, related to each solution considered. Indeed, choosing large steepness values for the carrier, modeled by breathers in particular, may engender breaking, making these wave trains unsuitable for accurate studies within the context of the NLSE and for the HOS NWT based simulations. We therefore limit this study to the range of stability of experiments and numerical computations.

##### A. Stationary envelope solitons

We present here the application of the TR refocusing approach to the case of envelope solitons, varying the initial steepness  $ka$  and dimensionless propagating distance  $kx_M$  accordingly. Figure 5 presents the accuracy estimator  $R_{\text{amp}}$  as a function of these two parameters.

First, it is obvious that the accuracy of the TR method is indeed dependent on the two parameters of interest in this study, allowing the quantification of nonlinearities and dispersive properties of the considered wave field. We observe that increased nonlinearity of the wave field leads to a less accurate reproduction of the target wave field. These high-order effects start to be very important from  $ka \simeq 0.20$  and have a significant influence on the quality of the procedure above this value.

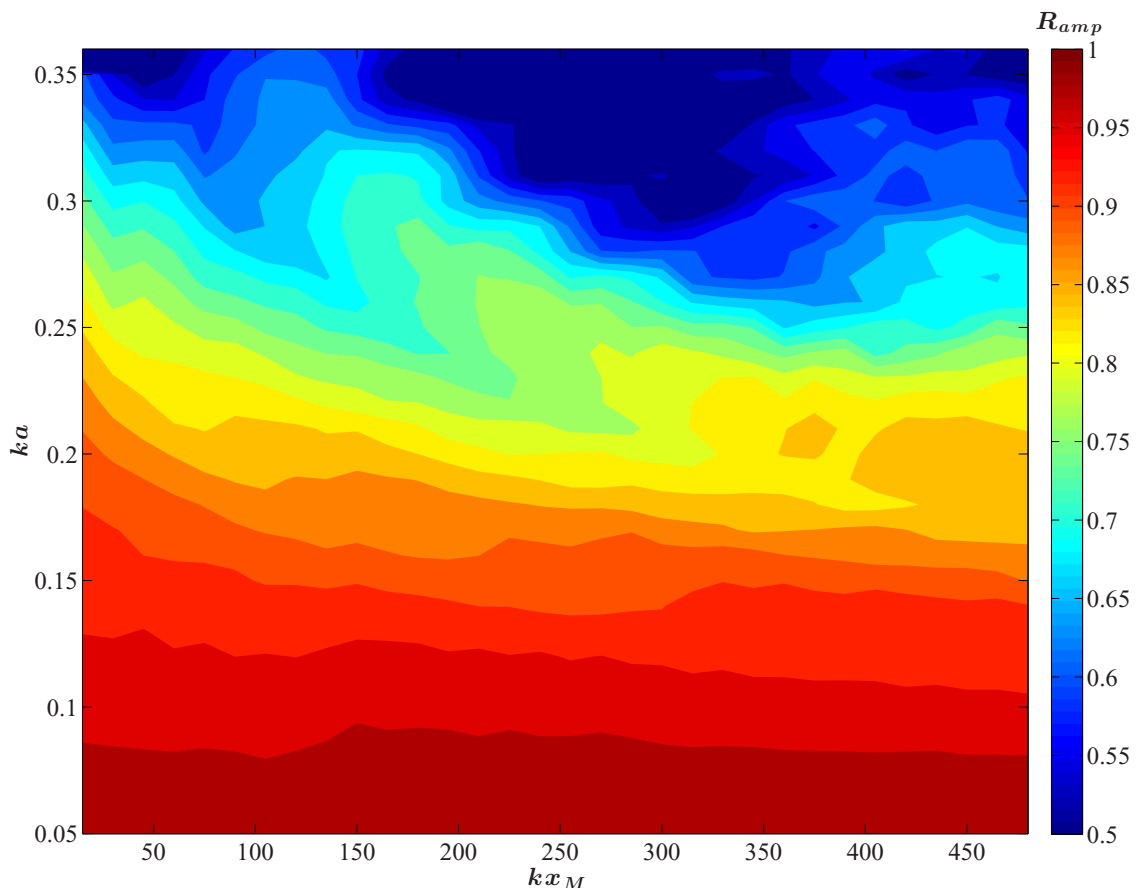


FIG. 5. Accuracy diagram of the time-reversal for the stationary envelope soliton  $R_{amp}$  as a function of initial steepness  $ka$  and propagating distance  $kx_M$ .

Furthermore, the correlation amplitude factor  $R_{amp}$  of the considered sech-wave pattern starts to drastically reduce when approaching the wave-breaking limit. Note that experimental results dealing with the one-way propagation of such a wave field (no TR procedure), reported in Ref. [41], show that at a steepness of  $ka = 0.35$  strong distortions of the NLSE envelope soliton are noticed.

At the same time, also clearly noticeable is that larger propagating distances also decrease the accuracy of the TR procedure. The propagating distances studied here range from  $kx_M = 15$  up to  $kx_M = 480$ , representing indeed significant long evolution distances. High-order dispersive and nonlinear effects may consequently have indeed an influence on the TR procedure (i.e., generation, propagation, and measurement of the wave field followed by the refocusing), breaking down the time-reversibility in the proposed configuration.

In order to refine the analysis of the origin of the discrepancies observed between initial and reconstructed free surface elevations, we present the simulation results, obtained for the steepness  $ka = 0.30$ , an amplitude of  $a = 0.01$  m, and the propagating distance  $kx_M = 330$ . The corresponding amplitude ratio in this case is  $R_{amp} = 0.54$ , indicating low accuracy of the TR procedure with this choice of parameter. Figure 6 shows the corresponding results after the first propagation in the NWT.

We can observe that the initial envelope soliton starts to disintegrate during its propagation and its dynamics is not in agreement with NLSE predictions. Again, this is in agreement with [41]. The initial sech-shaped solution starts to fission into smaller-amplitude solitons [42]. Figure 7 depicts the comparison of the initial envelope soliton and the free surface elevation, reconstructed through time-reversal.

We notice that neither the initial amplitude nor the initial location could be reconstructed. The initial deterioration of the envelope after the first propagation is exacerbated by the time-reversal after the second evolution. This means that from the first wave measurement (Fig. 6), the TR procedure

## TIME-REVERSAL OF NONLINEAR WAVES

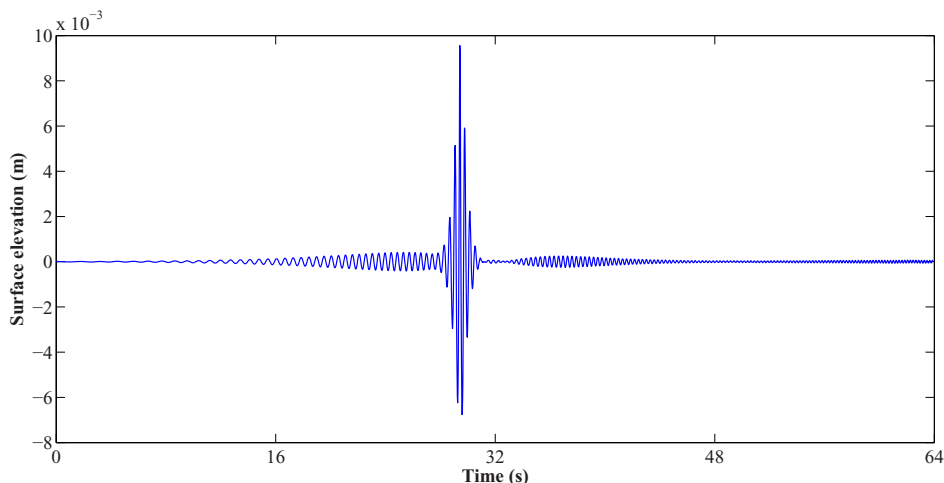


FIG. 6. Free surface elevation of the envelope soliton for an amplitude  $a = 0.01$  m with a steepness of  $ka = 0.30$ , recorded at the probe after a dimensionless propagation distance of  $kx_M = 330$ .

that deduces a new wave maker's signal and a second propagation induces some discrepancies that break down the time-reversibility. In fact, significant higher-order effects in terms of nonlinearities and dispersion are thus associated with the reduced accuracy. Those features will be studied in more detail with the analysis of doubly localized breathers.

### B. Doubly localized breathers

The study of limitations of the TR approach for breathers is obviously more challenging than the previous stationary case. The first- and second-order doubly localized breathers have the property of an infinite modulation period, exhibiting a strong variation of the wave envelope and therefore of the spectra as well. Detecting the limitations of applicability of the TR procedure may be transferred to assigning limitations with respect to the reconstruction of an extreme event in the ocean within the framework of integrable evolution equations.

As mentioned earlier, the accuracy of the NLSE and applicability of the TR technique are closely linked to the initial steepness  $ka$  of the carrier. A similar dependence on the propagating distance  $kx_M$  can be also expected.

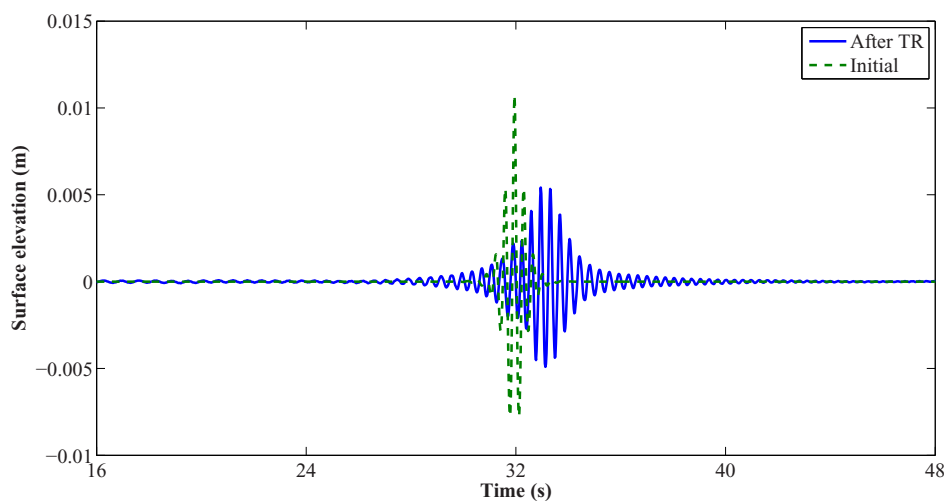


FIG. 7. Results of time-reversal for an envelope soliton for an amplitude  $a = 0.01$  m, steepness  $ka = 0.30$ , and  $kx_M = 330$ .

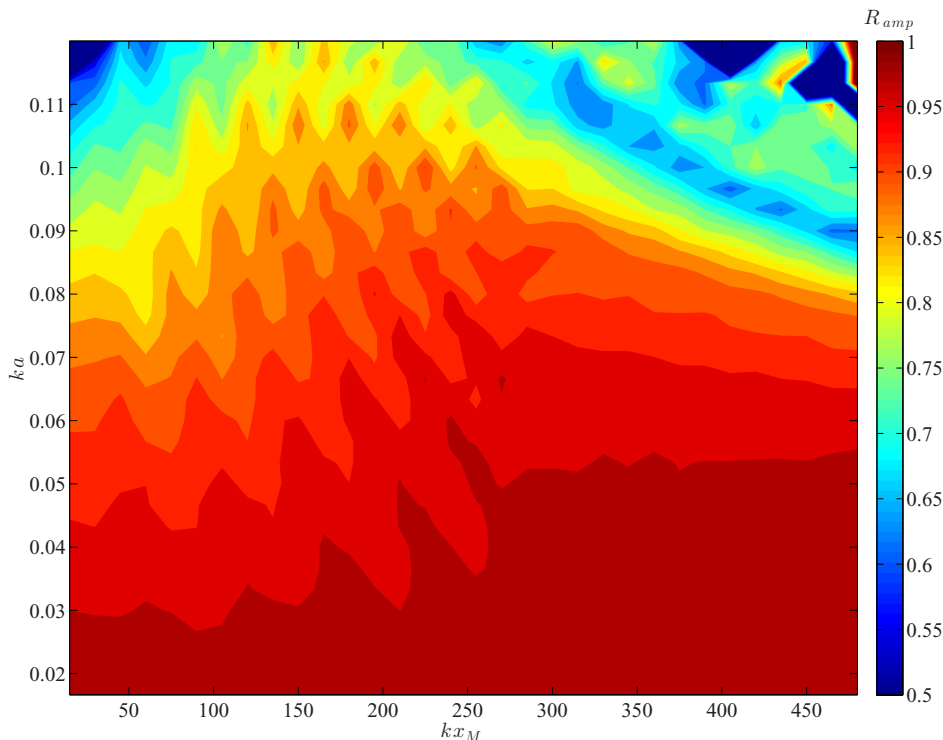


FIG. 8. Accuracy diagram of the time-reversal for the doubly localized Peregrine breather  $R_{amp}$  as a function of initial steepness  $ka$  and propagating distance  $kx_M$ .

### 1. Peregrine breather

We propose here some complements to Fig. 4, which depicts a result of the TR method for a given steepness  $ka = 0.09$  and propagating distance  $kx_M = 270$  in the case of a Peregrine breather. Figure 8 presents the accuracy of the refocusing after the time-reversal in terms of the amplitude of the extreme wave  $R_{amp}$ . The parameters of interest are varied in a range  $kx_M \in [15, 480]$  and  $ka \in [0.02, 0.12]$ . Recalling that the theoretical amplification of the plane wave for a Peregrine breather is 3, this choice of steepnesses covers the whole range of existence of such localized structures, below the breaking threshold, experimentally determined as being at a steepness value of about 0.12 [43].

It is also confirmed in this case that the accuracy of the approach is improved when the steepness is lower. In fact, we can ensure an accurate validity of TR refocusing for the whole range of dimensionless distance  $kx_M$ , for steepness values below  $ka < 0.075$ . Here we also emphasize a slight decrease of accuracy in the latter range for small propagation distances  $kx_M < 100-150$ .

Note that Fig. 8 allows us to extract the accuracy of laboratory breather TR experiments, as described in Ref. [23]. Indeed, for the chosen propagating distance  $kx_M = 270$  the time-reversal for the Peregrine breather with good exactitude applies up to a steepness  $ka \simeq 0.09$  (consistent with the successful experiments in Ref. [23] conducted for  $ka = 0.09$ ). We recall that the local steepness of the largest wave in the group is indeed very large and can be roughly estimated as being three times the carrier steepness, which is approximately  $3ka \simeq 0.27$ . Taking into account the theoretical limitations of the practical TR procedure, as well as the laboratory or numerical noise, always present in the experiment, the validity of the TR approach for this range of parameters is remarkable.

As stated previously, beyond  $ka > 0.075$ , a good accuracy of TR refocusing can still be noticed for some values of steepness and dimensionless propagation distance. However, this validity range is not as obvious. This will be studied in more detail in Sec. V.

## 2. Akhmediev-Peregrine breather

In the case of a second-order doubly localized breather, validations of the TR refocusing are provided in the Supplemental Material [36] for  $ka = 0.03$  and  $kx_M = 270$ . Figure 8 extends this study and presents a more general accuracy diagram with respect to the parameter  $R_{\text{amp}}$  as a function of initial steepness  $ka$  and propagating distance  $kx_M$ , as in the previous case. The range of parameters is  $kx_M \in [15, 480]$  and  $ka \in [0.01, 0.072]$ . We have to recall that for this specific solution, the theoretical amplification of the plane wave is 5. Again, the range of steepness values has been chosen to prevent breaking of the highest amplified waves.

The dependence of  $R_{\text{amp}}$  on to the two parameters is very similar to the case of the Peregrine breather. That is to say, the accuracy of the TR approach is reduced when the steepness is increased. At the same time, the accuracy is also reduced at large propagating distances and slightly altered for  $kx_M < 100$ –150. Figure 8 may be used to show that for the whole range of propagating distances studied, the TR method allows correct refocusing up to  $ka \simeq 0.045$ . For the same example as in the previous section (i.e.,  $kx_M = 270$ ), the TR method allows correct refocusing up to  $ka \simeq 0.055$ , which is at a local steepness in the modulation  $5ka \simeq 0.28$ .

As a general conclusion of the previous test cases, it has been shown that the TR method is efficient for a large range of steepnesses and propagating distances. Different kinds of wave envelope patterns have demonstrated a similar behavior. However, the practical setup of time-reversibility of water waves fails for large steepness or very large propagating distances. The TR procedure will allow an accurate refocusing when the local steepness of the localized structures do not exceed a general value of about  $ka \simeq 0.25$ . Nevertheless, we are optimistic about possible applications of time-reversal for ocean waves, considering the fact that ocean waves have the property of reduced steepness values most of the time. More physical insights with respect to the TR approach will be provided in the next section.

## V. PHYSICAL INTERPRETATION OF THE HOS NWT SIMULATIONS

This section is devoted to the analysis of the limitations of the TR method, as reported in the previous section. For the sake of brevity, we focus on one particular case, namely, the Peregrine breather for the steepness parameter  $ka = 0.09$ , propagating forth and back for  $kx_M = 270$ . We provide a rigorous analysis of the possible influence of the propagating distance and then of the steepness. Note that essentially similar results are obtained in the case of the Akhmediev-Peregrine breather.

### A. Influence of propagating distance $kx_M$

As explained previously, one source of discrepancies is associated with the practical setup of the TR procedure in the context of water waves. The wave maker imposes the only free surface elevation and is deduced from linear theory. This will influence the way the breather will propagate and consequently we expect the effects to become increasingly significant with the increase of the propagating distance. This is the probable origin of the behavior observed in Figs. 8 and 9 at large distances of evolution.

Note that the time scale of Benjamin-Feir (BF) instability is determined by  $t_{\text{BF}} = O(T_0/(ka)^2)$ . The corresponding length scale of this modulation instability is  $kx_{\text{BF}} = kC_g t_{\text{BF}} = O(1/(ka)^2)$ , with  $C_g$  the group velocity. It is known that this BF instability is at the origin of the possible existence of localized structures such as breathers [11]. In the present case  $1/(ka)^2 \simeq 125$  and consequently the propagating distances studied are in the range of the scale of the modulation instability processes. This also indicates that there is indeed a strong link between the propagating distance  $kx_M$  and the steepness of the considered wave field  $ka$ . As a complement, Fig. 10 presents for the previous accuracy diagram isolines corresponding to this BF instability in the range  $kx_{\text{BF}} \in [1, 2]$ .

This instability appears consequently as a major point in the understanding of the limitations inherent to the TR method. In the case of a Peregrine breather, when the propagating distance is

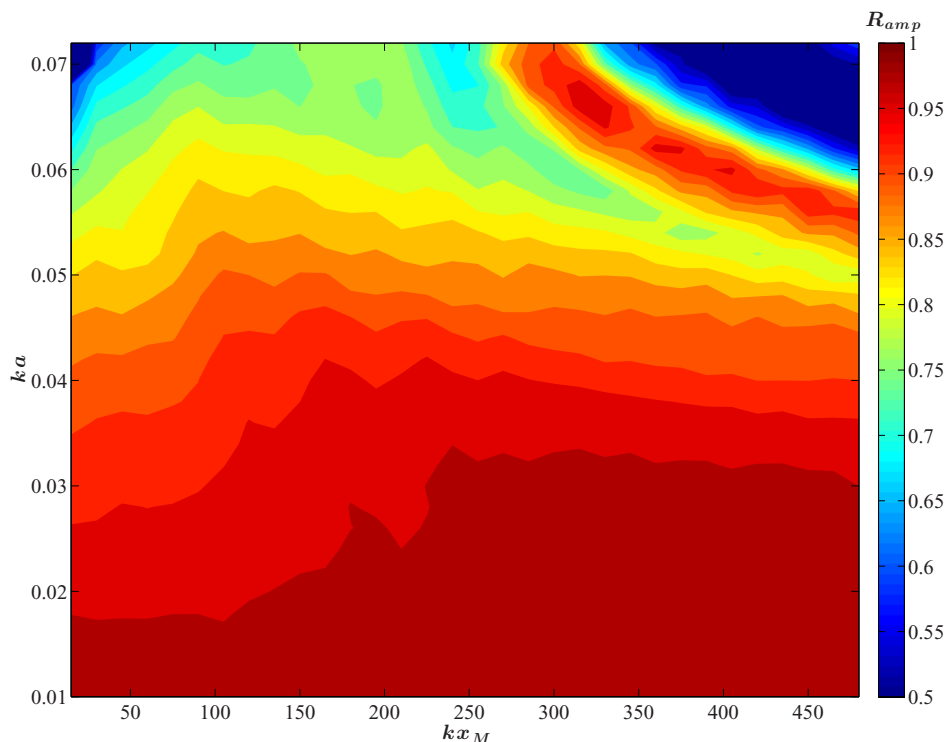


FIG. 9. Accuracy diagram of the time-reversal for the doubly localized Akhmediev-Peregrine breather of order two  $R_{amp}$  as a function of initial steepness  $ka$  and propagating distance  $kx_M$ .

larger than about 1.8 times the length scale of BF instability, the applicability of the TR method starts to fade. This can be related to the scale of evolution of the breather solution to NLSE and the development of the possible perturbations to this solution.

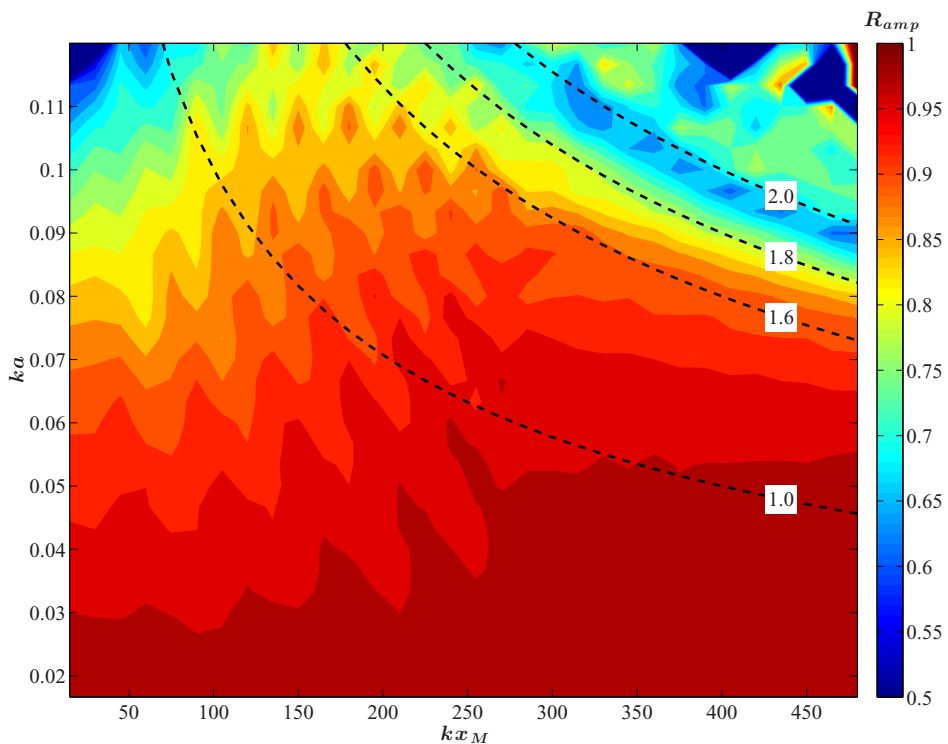


FIG. 10. Accuracy of the TR method for the Peregrine breather. Dashed lines are isolines in terms of the modulation instability process.

## TIME-REVERSAL OF NONLINEAR WAVES

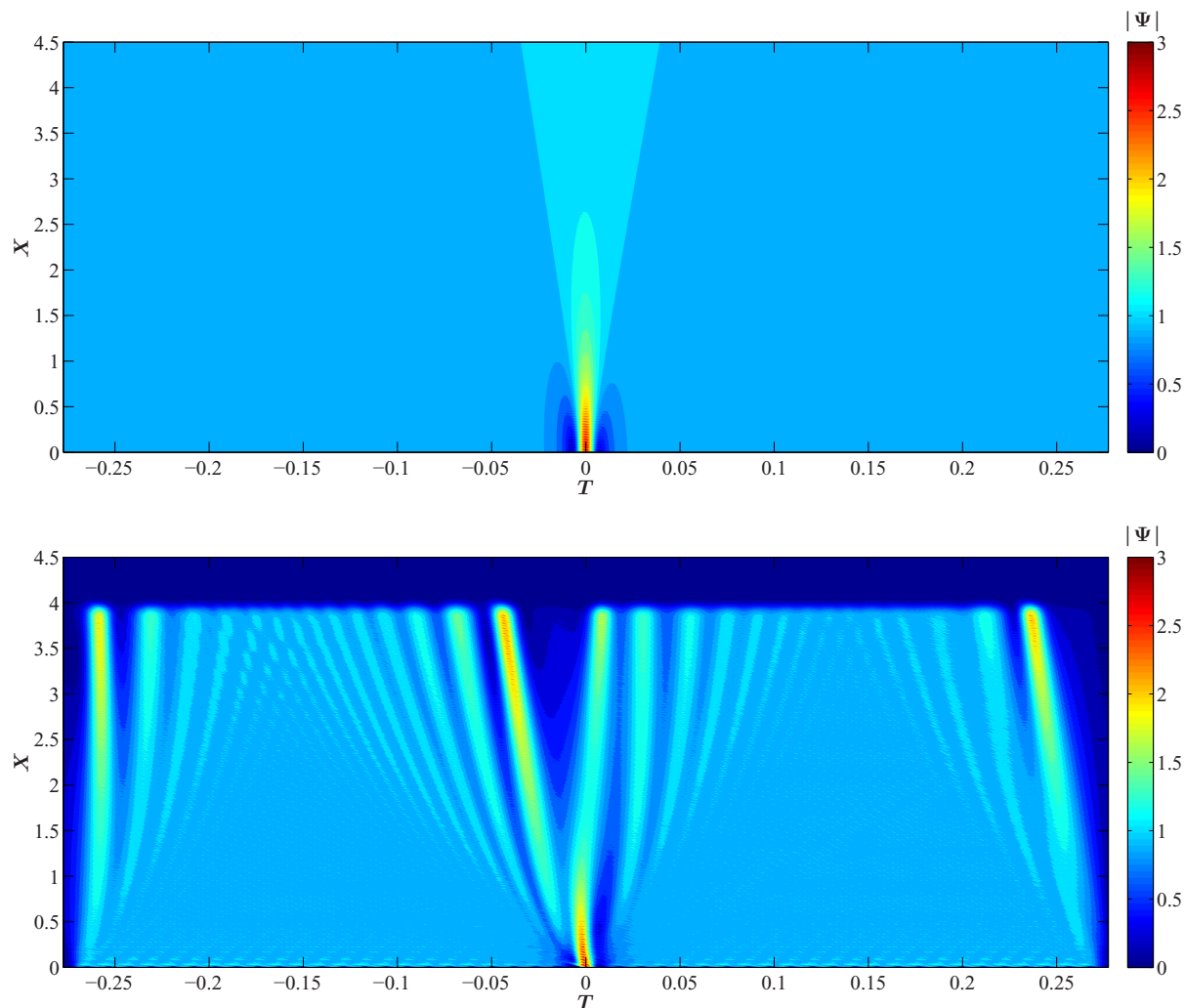


FIG. 11. Propagation of the Peregrine breather ( $ka = 0.09$ ) in the wave basin, space-time representation in scaled NLSE variables: comparison of the analytic solution (top) and the HOS NWT numerical simulation (bottom).

In addition to the free surface time signals, numerical simulations enable a general overview of the wave field evolution. Figure 11 presents a full space-time depiction of the propagation inside the wave basin. The variables are changed to NLSE scaled variables  $X = \sqrt{2}k^2ax$  and  $T = -\frac{k^2a^2\omega}{4}(t - x/C_g)$  for comparison to the analytic solution. We recall that an absorbing zone is present to prevent wave reflections on the end wall in the HOS NWT simulations. This appears clearly in Fig. 11 at  $X > 4$ .

The demodulation of the initial localized structure with respect to the propagating distance is obvious during its evolution. However, it is also worth noting that the solution does not tend to the plane-wave solution after a long-time and long-distance propagation for this choice of carrier parameters, as expected from NLSE theory. Note that it has been verified that this is not related to the finite extent in time of the generated wave train.

At the same time, an asymmetry of the temporal wave probe signal can also be observed after the first propagation. Indeed, the NLSE predicts a symmetric demodulation with respect to time, at a fixed spatial location, which appears to be erroneous when nonlinearities are important. This fact is well known and has already been pointed out in different studies. It has been shown that the higher-order NLSE, also referred to as the Dysthe equation, enables a nonsymmetric prediction of the envelope evolution [16,44–47] when the steepness of the carrier and the amplitude amplification become substantial.



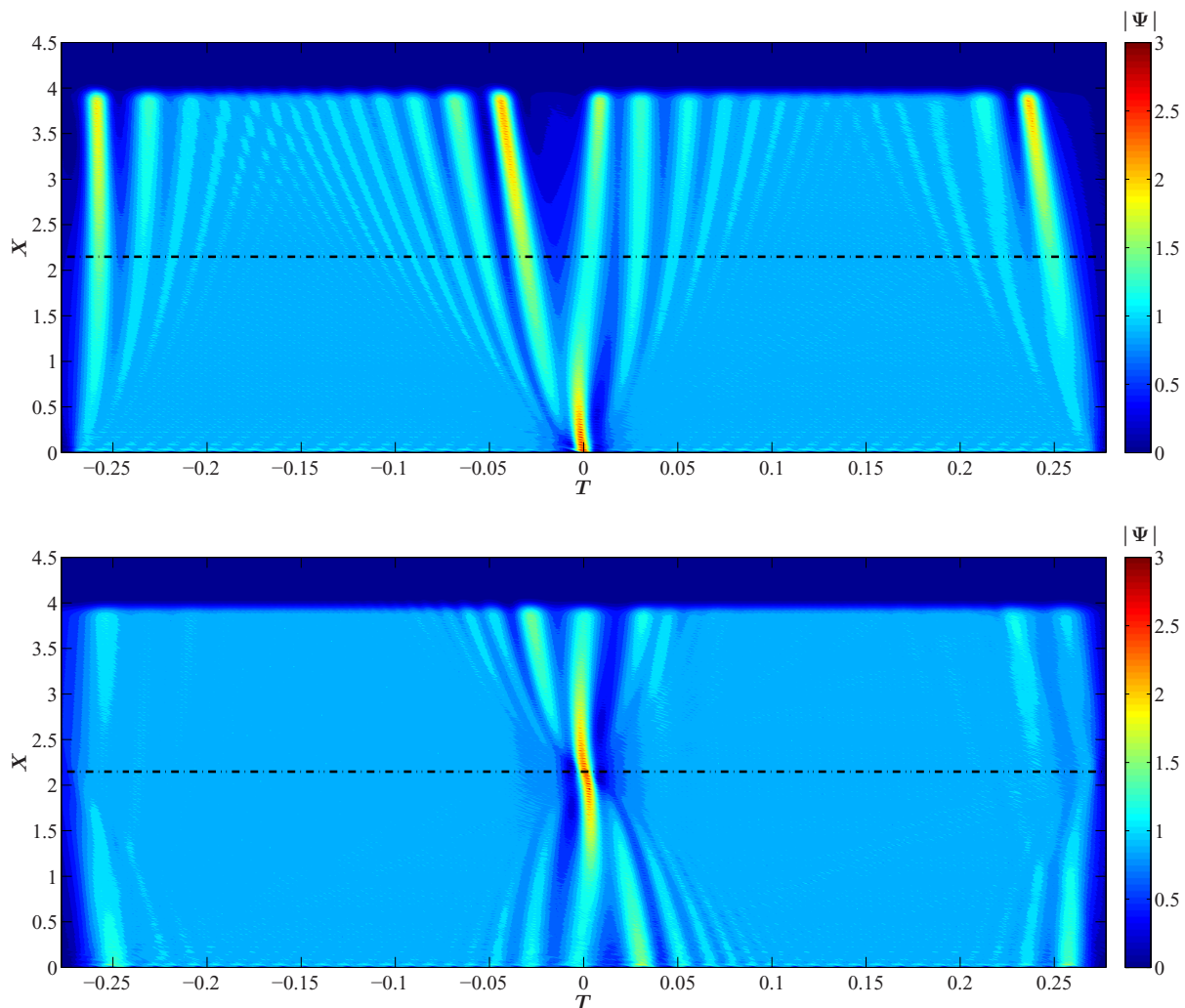


FIG. 12. Space and time evolution of the Peregrine breather for  $ka = 0.09$  and  $kx_M = 270$  (dash-dotted line) in the NWT: demodulation (top) and TR refocusing (bottom).

Nevertheless, as shown previously in Fig. 4, the observed and expected asymmetry does not influence the TR invariance. Figure 12 depicts the space and time evolution of the Peregrine wave field during the first propagation and for the TR wave refocusing. The case of the Peregrine breather for  $ka = 0.09$  and the propagating distance of  $kx_M = 270$  is adopted here. This corresponds to a scaled distance  $X_M \simeq 2.1$  depicted in the figure.

The time-reversibility is clearly demonstrated during the whole HOS NWT computation, throughout the whole spatial domain. Again, this confirms the accurate refocusing presented in Fig. 4 and in the experiments in Ref. [23]. This point is of major importance since even if the wave field evolution clearly departs from the NLSE prediction, the full nonlinear system appears as time-reversible. The TR procedure enables the use of such a property of the wave field, even in the case of high nonlinearity.

The influence of the propagating distance is now studied on the previous test cases by gradually increasing the values of  $kx_M$ . Figure 13 shows the final refocusing results of the complete TR procedure for  $kx_M \in \{60, 165, 270, 375, 480\}$  at a fixed steepness of  $ka = 0.09$ .

We can observe in Fig. 13 that the influence of the propagating distance on the reconstruction is quite complex. For relative small propagating distances ( $kx_M < 100$ ), the global shape of the localized structure is correct but is associated with a reduced amplitude at the location of the extreme wave. Then, for a significant range  $kx_M \in [100, 350]$ , the TR procedure is very accurate in the refocusing of the localized structure of interest. The influence of the propagating distance is then to

## TIME-REVERSAL OF NONLINEAR WAVES

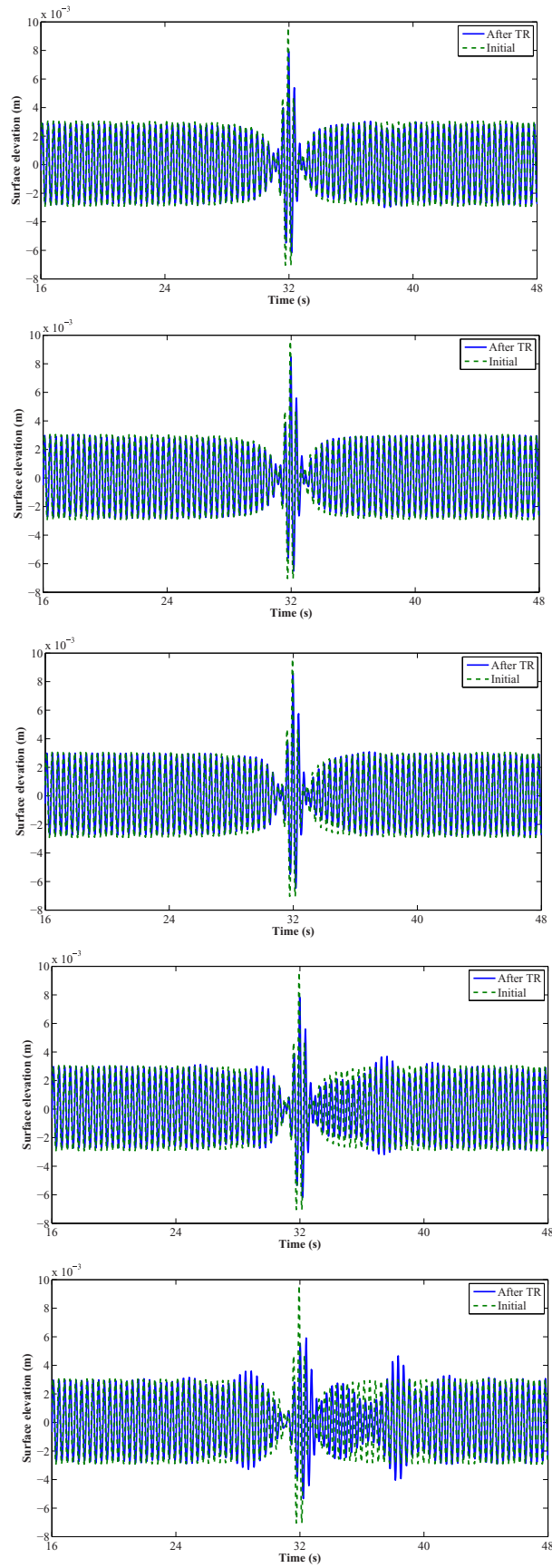


FIG. 13. Comparison of the Peregrine surface profile at maximal compression, as initially generated with respect to the NLSE theory (dashed line) and after TR refocusing (solid line), for  $ka = 0.09$  and  $kx_M \in \{60, 165, 270, 375, 480\}$  (from top to bottom).

induce an increasing but still very small phase shift between the refocused solution and the original one. Finally, for very large evolution distances, starting from  $kx_M \simeq 375$ , the slight phase shift after time-reversal is associated with an ineffective refocusing. This leads to a complex wave field distortion and wave profile that significantly deviate from the initial doubly localized structure. As can be seen in Fig. 13, the effect is more pronounced when the distance is enlarged.

Also, the origin of this distortion is not straightforward to explain. It is recalled here that two processes of wave generation and propagation have to be successively conducted in order to obtain the final TR result.

The first generation associated with the propagation creates a nonlinear wave field (which can be different from the NLSE solution due to high-order effects and/or discrepancies of the wave maker's motion). Then, during the second stage of TR refocusing, some information may be lost when deducing the new wave maker's motion from the measured free surface elevation  $\eta(x_M, t)$  (recall that we use linear theory for this purpose). Consequently, the final phase shift or change of observed envelope shape is a kind of footprint with respect to the existence of nonreversible effects in the TR procedure. These are related to nonlinearities possibly with dispersive effects.

The first influence of the propagation distance is the increase of the phase shift after the use of the TR method. This reduces the accuracy of the refocusing at large distances. Then those effects are obviously more enhanced at even larger propagation distances and lead to the failure of the TR procedure. As stated previously, we can evaluate that the length scale of this limitation of applicability is associated with the modulation instability space scale.

Finally, we would like to address the unexpected validity of the TR approach in all temporal signals at smaller propagating distances ( $kx_M < 150$ ), as can be observed in Fig. 8. It is known that during the generation of waves by a wave maker, the so-called evanescent waves are spontaneously created when the wave field is generated. These waves are only relevant close to the wave generator since they quickly decay in space. In the configuration tested, they are therefore negligible considering the whole range of propagation distances for  $kx_M \geq 15$ . In addition, parasitic second-order free waves are also generated with the target wave field [48]. As a first approximation, if we consider the waves to be regular, this parasitic wave field consists of regular free waves with a pulsation  $\omega_2 = 2\omega$ . Those waves will propagate at a velocity that is half the velocity of the corresponding waves we are interested in generating and reach the probe position of interest at  $t_2 = 2x_M/C_g$ . We recall that figures presenting probe signals are already time shifted with  $t_{\text{shift}} = x_M/C_g$ . In this time reference frame, the parasitic second-order free waves, generated by the wave maker, will reach the probe at a time  $t'_2 = x_M/C_g$ . For the case  $kx_M = 60$  presented in Fig. 13, this corresponds to  $t'_2 \simeq 7$  s. It can be seen on the free surface wave profile that after the breather with a delay  $t'_2$ , unexpected discrepancies are present that are associated with the parasitic second-order waves.

Thus, these waves are at the origin of the reduced accuracy at relatively small propagating distances  $kx_M < [100, 150]$  as reported in Fig. 8. Indeed, in this range of distance, the parasitic free waves are recorded after the first propagation for the corresponding propagating time is  $t'_2 < [12, 17]$  s. Consequently, during the refocusing of the waves, these are generated again and interfere with the localized structure, reducing the corresponding accuracy as a consequence. It should be noted that it is possible to control the generation of the parasitic waves, produced by the wave maker as explained in Ref. [48]. The wave maker's motion can then be modified in order to prevent the generation of those waves. This approach may be used to possibly increase the accuracy of the TR method.

### B. Influence of initial steepness $ka$

This section focuses on the influence of the nonlinearity on the TR procedure. As observed previously, the Peregrine solution imposed at the wave maker's location does not tend to the plane-wave solution after a long-time and long-distance propagation, as expected from the NLSE, for significant carrier steepness values.

The previous section presented the influence of the propagation distance  $kx_M$  on a TR refocusing accuracy at a fixed steepness  $ka$ . We will now fix the mirror location and vary the steepness values

## TIME-REVERSAL OF NONLINEAR WAVES

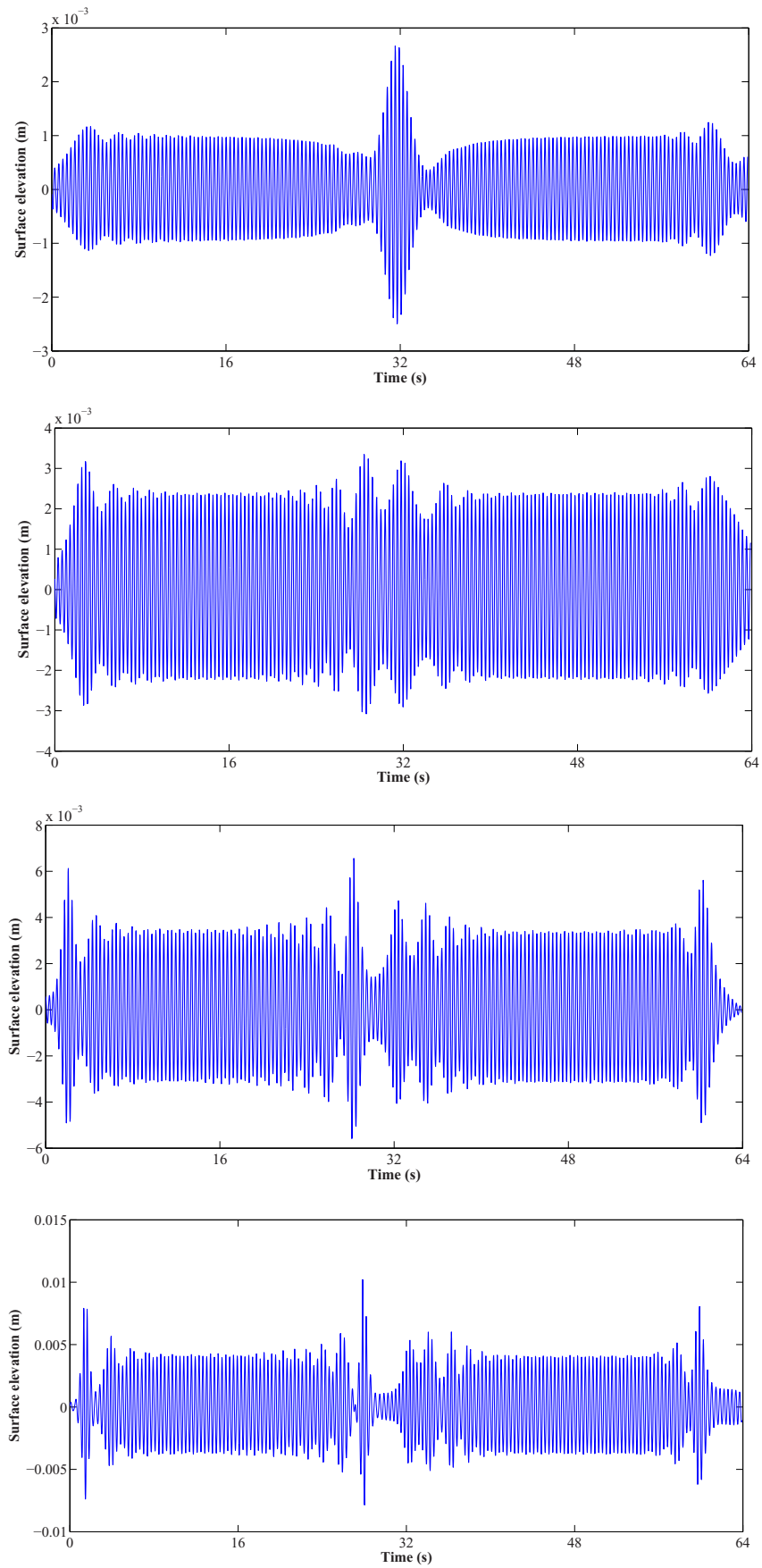


FIG. 14. Probe signal measured after the propagation of the Peregrine breather for  $kx_M = 270$  for different steepnesses  $ka \in \{0.03, 0.07, 0.10, 0.12\}$  (from top to bottom).

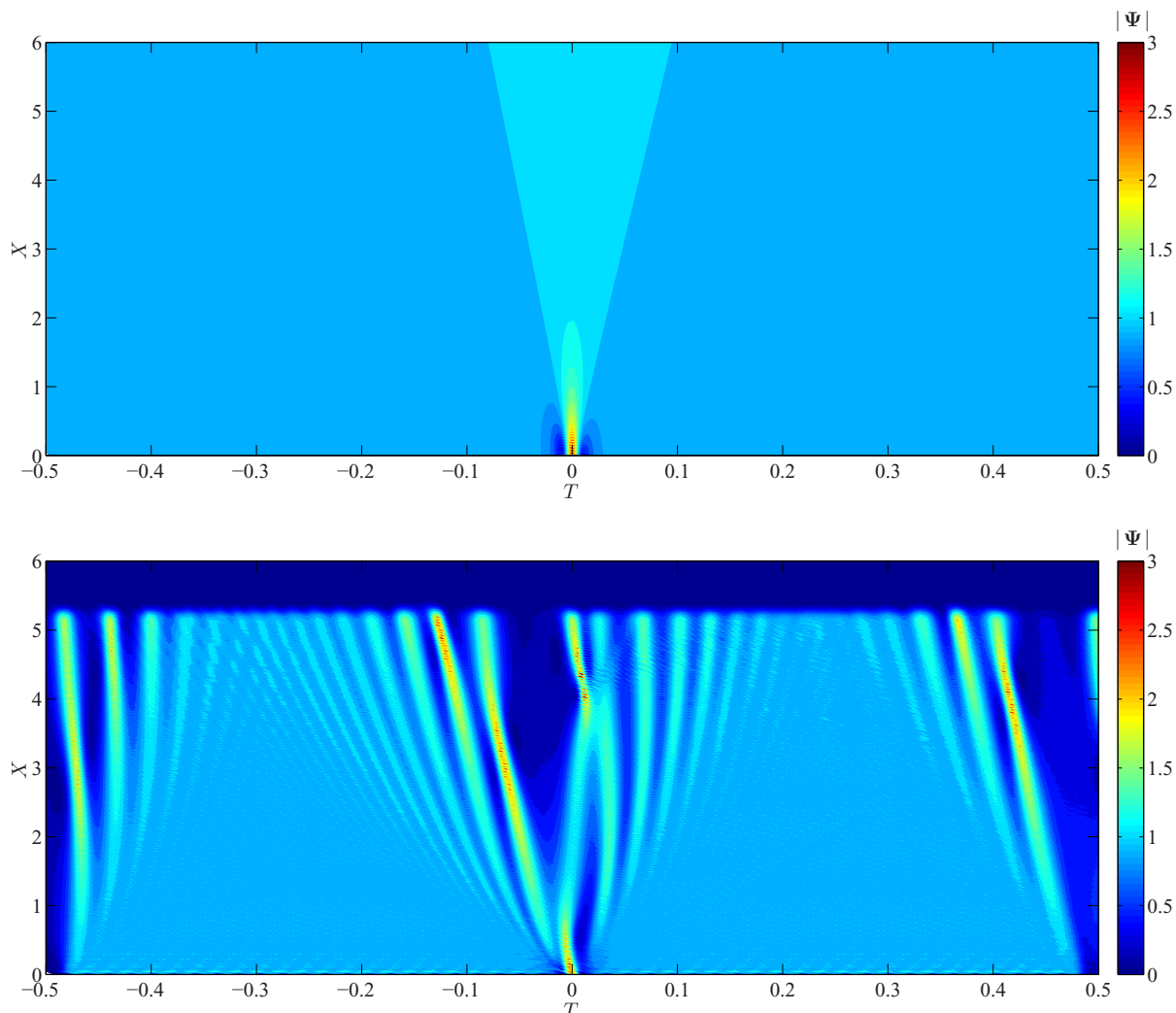


FIG. 15. Space and time evolution of the Peregrine breather for  $ka = 0.12$  in the NWT: comparison of the analytic solution (top) and the HOS NWT numerical simulation (bottom).

accordingly. Indeed, we recall that the modulation instability, which drives the evolution of the breather solution, acts on a spatial scale  $kx_{\text{BF}} = O(1/(ka)^2)$ . Figure 14 presents the probe signals after first propagation of a Peregrine breather at a fixed distance  $kx_M = 270$  for different initial steepnesses in the range  $ka \in \{0.03, 0.07, 0.10, 0.12\}$ .

As expected and shown, the relative propagating distance is different with respect to the breather demodulation, evolving on the time scale  $1/(ka)^2$ . Consequently, the amplitude decrease of the initial localized structure is highly dependent on this initial steepness [43]. At low steepness, the fixed propagation distance  $kx_M$  appears as very small with respect to the modulation distance: The demodulation is less significant and it is expected that the refocusing is more accurate. In contrast, when the steepness is larger, this chosen distance appears to become large with respect to the modulation instability distance. As a consequence, and due to the significance of the nonlinear processes, the solution can appear as highly complex since those high-order effects prevent us from recovering the plane-wave solution. For details, we refer to Fig. 15, which presents the full space-time plane view of the propagation within the NWT for the steepest case  $ka = 0.12$ , with the variables changed to NLSE scaled variables as a matter of comparison to the scaled analytic solution.

The complexity of the wave pattern at the final stage of demodulation, as a matter of deviation from the constant background, can be clearly perceived. An increasing steepness leads, as expected,

## TIME-REVERSAL OF NONLINEAR WAVES

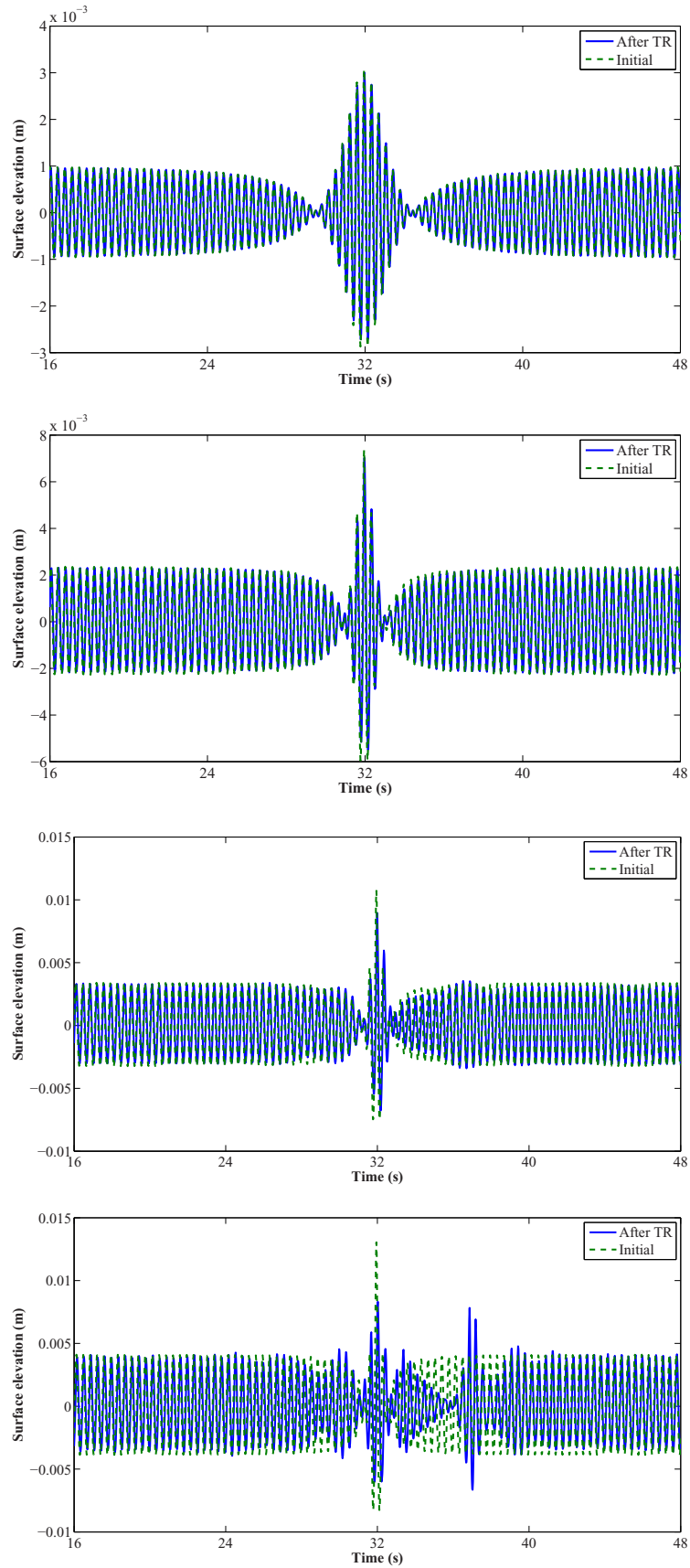


FIG. 16. Comparison of the Peregrine surface profile at maximal compression, as initially generated with respect to the NLSE theory (dashed line) and after TR refocusing (solid line), for  $kx_M = 270$  and  $ka \in \{0.03, 0.07, 0.1, 0.12\}$  (from top to bottom).

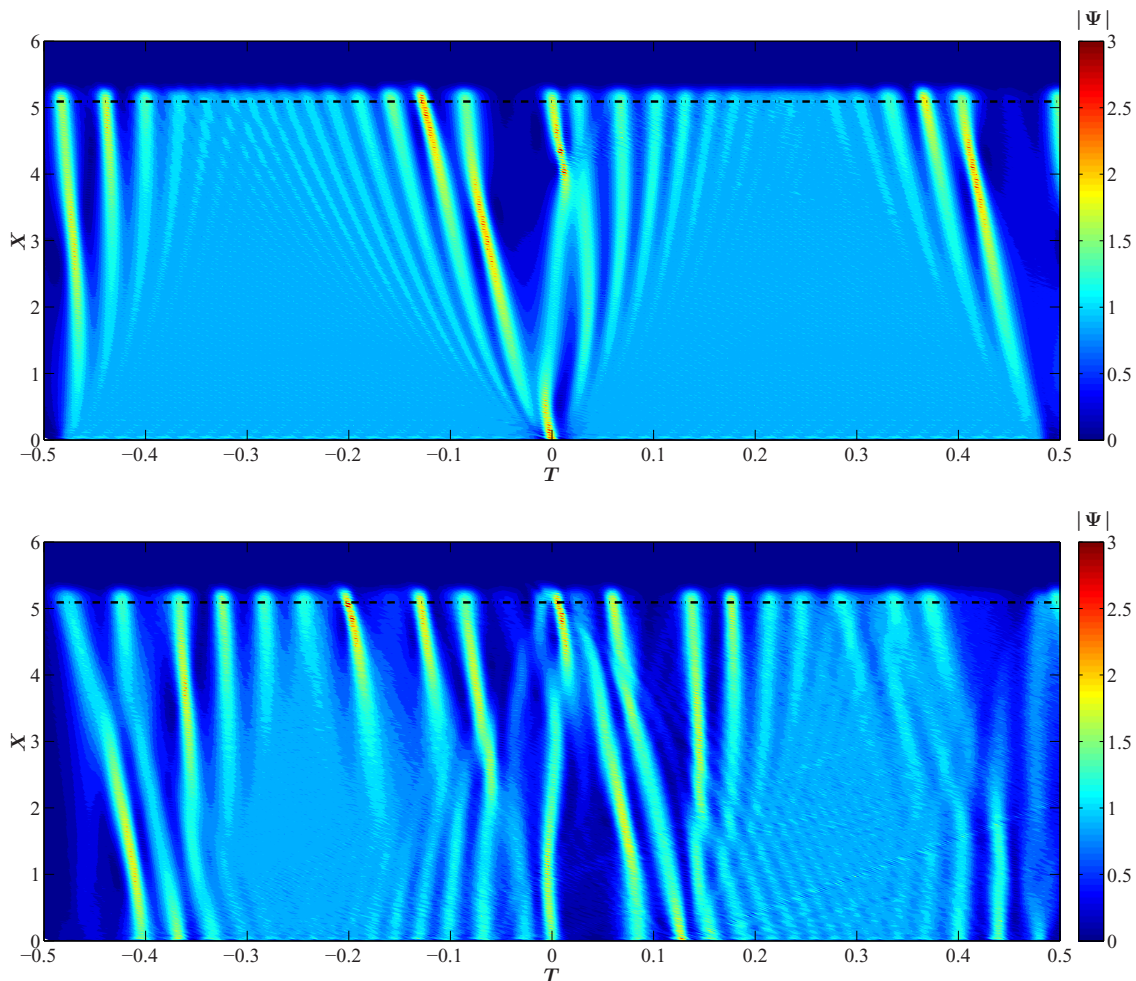


FIG. 17. Space and time evolution of the Peregrine breather for  $ka = 0.12$  and  $kx_M = 480$  (dash-dotted line) in the NWT: demodulation (top) and TR refocusing (bottom).

to a more complex wave pattern at a fixed location of breather evolution. At the same time, the latter feature is associated with an initial breather modulation that is also quite different when the steepness is changed. As an example, Fig. 16 presents the results obtained after TR refocusing at a fixed location of  $kx_M = 270$ , as in the previous case, with varying steepness values, in the range  $ka \in \{0.03, 0.07, 0.10, 0.12\}$ .

It can be noticed that at a fixed time frame duration, when the steepness is lower, the initial breather appears indeed to be wider. The nonlinearity increases the focusing intensity of the initial localized structure by decreasing the breather's lifetime [43]. The free surface profile with respect to the TR refocusing is almost identical to the analytic solution when the steepness is lower than  $ka \simeq 0.09$ . The increase of the steepness is associated with an increase of deviation in terms of phase shifts. This is similar to what has been observed previously in the dependence study with respect to  $kx_M$ . The general behavior of the accuracy with respect to this parameter observed in Fig. 8 is consequently clear.

However, it is important to note that at the largest steepness, the wave field after time-reversal is completely different from the original one. The breather initial structure is completely distorted after the first propagation, as shown in Fig. 14, and is not refocused during the second propagation after time-reversal. When the considered breather exhibits high nonlinearities, the wave field does not tend to the plane-wave solution: Successive highly nonlinear groups are created during the propagation. This feature is associated with both high-order dispersive effects and high-order nonlinearities. These are at play during both propagations and when associated with the chosen wave generation process,

they are shown to prevent time-reversibility and consequently limit the application range of the TR technique.

Figure 17 shows the space-time view of the TR procedure for the case  $ka = 0.12$  and  $kx_M = 480$ . The corresponding scaled propagating distance  $X_M \simeq 5.0$  is depicted as well.

Clearly, the TR technique is failing and is not valid in this configuration; it is shown that the breaking of time-reversibility of the phenomena studied appears obvious within this framework. From the beginning of the TR refocusing, noticeable differences can be observed between both propagations, pointing out the importance of the wave generation in the TR procedure.

In conclusion, the refocusing of extreme waves with time-reversal exhibits some limitations. The main parameters in this regard are the nonlinearity of the considered wave field and the considered propagating distance. Nevertheless, as shown in Figs. 8 and 9, the applicability of the process is valid for a wide range of realistic parameter choices and is efficient up to a high local steepness of the wave pattern and very long propagating distances.

## VI. CONCLUSION

We have reported a detailed numerical study of the applicability of TR mirrors to water waves. A highly nonlinear numerical model based on the HOS method has been set up to reproduce the complete physical configuration of wave generation in a unidirectional NWT: generation of waves by means of a wave maker, absorption of reflecting waves through a beach, etc. The corresponding HOS NWT has been validated with experimental results presented in Ref. [23]. This numerical setup enables us to successfully apply the TR method to refocus different analytic solutions of the NLSE, namely, the stationary envelope soliton and doubly localized Peregrine-type breathers of first and second-order. Note that the time symmetry can be also used to optimize initial conditions for an accurate focusing of water waves [27].

The applicability of the TR procedure has been assessed over a wide range of propagating distances  $kx_M$  and initial wave steepness  $ka$ , beyond laboratory limitations. Focusing our attention on pulsating solutions (breathers), the study has demonstrated that the TR procedure will allow an accurate TR refocusing of the wave field at a given propagating distance when the local steepness of the localized structures does not exceed a given threshold with respect to the propagation distances. We identified that an accurate TR refocusing is achieved for  $kx_M \simeq 270$  and a corresponding local steepness up to  $ka \simeq 0.27$ . Changing the propagating distance will obviously induce a different threshold.

At the same time, the refocusing of extreme waves with respect to time-reversal exhibits some limitations. The time-reversibility of water-wave propagation appears to be improper for large steepness and large propagating distances. The practical TR procedure for water waves in the configuration of a wave basin relies on some assumptions resulting in this loss of reversibility. Primarily, this is due to the use of the only free surface elevation for time-reversal associated with the approximation of a linear conversion between free surface elevation and the wave maker's motion. These will induce small discrepancies in the generated sea state at the wave maker's location (which are obviously larger with larger nonlinearity). Then the high-order nonlinearities and dispersive effects associated with the wave propagation will induce possible large discrepancies in the final TR refocusing. The applicability of the method is consequently driven by those two parameters, namely,  $ka$  and  $kx_M$ . The present study has shown these two parameters are closely linked in describing the limitations of the TR technique with respect to the modulation instability length scales in the case of breathers.

Nevertheless, the applicability of the time-reversal to nonlinear waves for the quantified applicability range is quite remarkable, taking into account the laboratory and the numerical noise and dissipation effects, always present, when performing numerical and laboratory tests. Furthermore, we emphasize the importance of this study with respect to the robustness of the TR technique to chaotic motion of the water-wave field, which is known to arise in the context of modulation instability [49,50].



Finally, we emphasize that future interdisciplinary work may be motivated by these results. It is well known that the NLSE describes the propagation of waves in a wide range of nonlinear dispersive media [5,7,8,51]. Furthermore, the reproduction of RWs in wave basins is of significant interest in ocean engineering and has been shown to be very complicated with classical methods [40]. The idea is to reconstruct oceanic extreme waves, such as the New Year Wave, often used as a dedicated model for RWs in the ocean [52]. It is also important to address multidirectionality and irregular wave conditions in order to accurately assert the validity and limitation of the time-reversal in these conditions.

- 
- [1] G. G. Stokes, On the theory of oscillatory waves, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* **8**, 441 (1847).
  - [2] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves* (World Scientific, Singapore, 1983), Vol. 1.
  - [3] T. B. Benjamin and J. E. Feir, The disintegration of wave trains on deep water part 1. Theory, *J. Fluid Mech.* **27**, 417 (1967).
  - [4] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
  - [5] B. Kibler, J. Fatome, C. Finot, G. Millot, F. Dias, G. Genty, N. Akhmediev, and J. M. Dudley, The Peregrine soliton in nonlinear fibre optics, *Nat. Phys.* **6**, 790 (2010).
  - [6] D. R. Solli, C. Ropers, P. Koonath, and B. Jalali, Optical rogue waves, *Nature (London)* **450**, 1054 (2007).
  - [7] M. Onorato, S. Residori, U. Bortolozzo, A. Montina, and F. T. Arecchi, Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts, *Phys. Rep.* **528**, 47 (2013).
  - [8] J. M. Dudley, F. Dias, M. Erkintalo, and G. Genty, Instabilities, breathers and rogue waves in optics, *Nat. Photon.* **8**, 755 (2014).
  - [9] V. E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **9**, 190 (1968).
  - [10] C. Kharif and E. Pelinovsky, Physical mechanisms of the rogue wave phenomenon, *Eur. J. Mech. B* **22**, 603 (2003).
  - [11] A. Osborne, *Nonlinear Ocean Waves & the Inverse Scattering Transform* (Academic, New York, 2010), Vol. 97.
  - [12] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
  - [13] H. C. Yuen and B. M. Lake, Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves, *Adv. Appl. Mech.* **22**, 67 (1982).
  - [14] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, A. Slunyaev, A. Sergeeva, E. Pelinovsky, and N. Akhmediev, Observation of a hierarchy of up to fifth-order rogue waves in a water tank, *Phys. Rev. E* **86**, 056601 (2012).
  - [15] A. Chabchoub, B. Kibler, J. M. Dudley, and N. Akhmediev, Hydrodynamics of periodic breathers, *Philos. Trans. R. Soc. London A* **372**, 20140005 (2014).
  - [16] A. Slunyaev, E. Pelinovsky, A. Sergeeva, A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, Super-rogue waves in simulations based on weakly nonlinear and fully nonlinear hydrodynamic equations, *Phys. Rev. E* **88**, 012909 (2013).
  - [17] M. Fink, Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **39**, 555 (1992).
  - [18] P. Roux and M. Fink, Time reversal in a waveguide: Study of the temporal and spatial focusing, *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, 2418 (2000).
  - [19] R. K. Ing and M. Fink, Time-reversed Lamb waves, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* **45**, 1032 (1998).
  - [20] M. Tanter, J.-L. Thomas, F. Coulouvrat, and M. Fink, Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics, *Phys. Rev. E* **64**, 016602 (2001).

- [21] A. Przadka, S. Feat, P. Petitjeans, V. Pagneux, A. Maurel, and M. Fink, Time Reversal of Water Waves, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 064501 (2012).
- [22] V. Bacot, M. Labousse, A. Eddi, M. Fink, and E. Fort, Time reversal and holography with spacetime transformations, *Nat. Phys.* (2016), doi: [10.1038/nphys3810](https://doi.org/10.1038/nphys3810).
- [23] A. Chabchoub and M. Fink, Time-Reversal Generation of Rogue Waves, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 124101 (2014).
- [24] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, and P. Ferrant, A modified high-order spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank, *Eur. J. Mech. B* **34**, 19 (2012).
- [25] B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda, D. M. Milder, and R. L. Milton, A new numerical method for surface hydrodynamics, *J. Geophys. Res. Oceans* **92**, 11803 (1987).
- [26] D. G. Dommermuth and D. K. P. Yue, A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves, *J. Fluid Mech.* **184**, 267 (1987).
- [27] L. Shemer, K. Goulitski, and E. Kit, Evolution of wide-spectrum unidirectional wave groups in a tank: An experimental and numerical study, *Eur. J. Mech. B* **26**, 193 (2007).
- [28] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, and P. Ferrant, 3-D HOS simulations of extreme waves in open seas, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* **7**, 109 (2007).
- [29] A. V. Slunyaev and V. I. Shrira, On the highest non-breaking wave in a group: Fully nonlinear water wave breathers versus weakly nonlinear theory, *J. Fluid Mech.* **735**, 203 (2013).
- [30] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer Science & Business Media, New York, 2011), Vol. 825.
- [31] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).
- [32] D. H. Peregrine, Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions, *J. Aust. Math. Soc. Ser. B* **25**, 16 (1983).
- [33] N. Akhmediev, V. M. Eleonskii, and N. E. Kulagin, Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: Exact solutions, *Sov. Phys. JETP* **62**, 894 (1985).
- [34] V. I. Shrira and V. V. Geogjaev, What makes the Peregrine soliton so special as a prototype of freak waves? *J. Eng. Math.* **67**, 11 (2010).
- [35] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and M. Taki, Waves that appear from nowhere and disappear without a trace, *Phys. Lett. A* **373**, 675 (2009).
- [36] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevFluids.1.054302> for the details about the analytic solutions to NLSE, the numerical model and parameters, and the validation results.
- [37] A. Toffoli, O. Gramstad, K. Trulsen, J. Monbaliu, E. Bitner-Gregersen, and M. Onorato, Evolution of weakly nonlinear random directional waves: Laboratory experiments and numerical simulations, *J. Fluid Mech.* **664**, 313 (2010).
- [38] A. Toffoli, M. Onorato, E. M. Bitner-Gregersen, and J. Monbaliu, Development of a bimodal structure in ocean wave spectra, *J. Geophys. Res. Oceans* **115**, 1 (2010).
- [39] C. Kharif, E. Pelinovsky, and A. Slunyaev, *Rogue Waves in the Ocean* (Springer, Berlin, 2009).
- [40] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, and P. Ferrant, On the equivalence of unidirectional rogue waves detected in periodic simulations and reproduced in numerical wave tanks, *Ocean Eng.* **117**, 346 (2016).
- [41] A. Slunyaev, G. F. Clauss, M. Klein, and M. Onorato, Simulations and experiments of short intense envelope solitons of surface water waves, *Phys. Fluids* **25**, 067105 (2013).
- [42] D. Clamond, M. Francius, J. Grue, and C. Kharif, Long time interaction of envelope solitons and freak wave formations, *Eur. J. Mech. B* **25**, 536 (2006).
- [43] A. Chabchoub, N. Akhmediev, and N. P. Hoffmann, Experimental study of spatiotemporally localized surface gravity water waves, *Phys. Rev. E* **86**, 016311 (2012).
- [44] K. Trulsen and K. B. Dysthe, A modified nonlinear Schrödinger equation for broader bandwidth gravity waves on deep water, *Wave Motion* **24**, 281 (1996).
- [45] E. Lo and C. C. Mei, A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation, *J. Fluid Mech.* **150**, 395 (1985).
- [46] A. Chabchoub, N. Hoffmann, M. Onorato, G. Genty, J. M. Dudley, and N. Akhmediev, Hydrodynamic Supercontinuum, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 054104 (2013).

- [47] L. Shemer and L. Alperovich, Peregrine breather revisited, [Phys. Fluids](#) **25**, 051701 (2013).
- [48] H. A. Schäffer, Second-order wavemaker theory for irregular waves, [Ocean Eng.](#) **23**, 47 (1996).
- [49] E. A. Caponi, P. G. Saffman, and H. C. Yuen, Instability and confined chaos in a nonlinear dispersive wave system, [Phys. Fluids](#) **25**, 2159 (1982).
- [50] T. Yasuda and N. Mori, Roles of sideband instability and mode coupling in forming a water-wave chaos, [Wave Motion](#) **26**, 163 (1997).
- [51] J. M. Dudley, G. Genty, F. Dias, B. Kibler, and N. Akhmediev, Modulation instability, Akhmediev breathers and continuous wave supercontinuum generation, [Opt. Express](#) **17**, 21497 (2009).
- [52] S. Haver, A possible freak wave event measured at the Draupner Jacket January 1 1995, in *Proceedings of Rogue Waves, Brest, France*, edited by M. Olagnon and M. Prevosto (IFREMER, Brest, 2004).

# Supplemental Material for “Time-reversal of nonlinear waves: Applicability and Limitations”

G. Ducrozet<sup>1,\*</sup>, M. Fink<sup>2</sup>, and A. Chabchoub<sup>3,4</sup>

<sup>1</sup>*LHEEA, École Centrale Nantes, UMR CNRS No. 6598, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes, France*

<sup>2</sup>*Institut Langevin, ESPCI Paris, PSL University, CNRS,  
UMR CNRS No. 7587, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France*

<sup>3</sup>*Department of Mechanical Engineering, School of Engineering, Aalto University, 02150 Espoo, Finland and*

<sup>4</sup>*Department of Ocean Technology Policy and Environment,  
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8563, Japan*

## I. ANALYTIC SOLUTIONS OF THE NLSE

One of the most powerful feature of the NLSE is that it has been shown to be fully integrable [1], leading to the possible use of inverse scattering transform or Darboux transformations to derive exact weakly nonlinear solutions [2, 3]. Different and several analytic forms of NLSE solutions have been derived and shown to possibly exist when the considered problem is driven by this equation, including water waves [4–8].

In a general context, those solutions are expressed with the scaled form of Eq. (1) of the manuscript. The latter is obtained when applying the following transformation  $T = -\frac{k^2 a^2 \omega t}{4}$ ,  $X = \sqrt{2} k^2 a (x - C_g t)$  and  $\Psi = \frac{\psi}{a}$ . Here,  $C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\omega}{2k}$  is the group velocity of the wave packet. This scaled NLSE reads

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial T} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + 2 |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (1)$$

In the manuscript, we consider exact analytic solutions to assess the validity of the TR procedure. The envelope soliton and the Peregrine-type solutions are parametrized as follows

- Stationary envelope soliton

$$\Psi(X, T) = \text{sech}(X) \exp(iT) \quad (2)$$

- Doubly localized breathers of order  $n$

$$\Psi(X, T) = \left[ (-1)^n + \frac{G_n(X, T) + iH_n(X, T)}{D_n(X, T)} \right] \exp(2iT) \quad (3)$$

- \* 1<sup>st</sup> order (Peregrine breather [9])

$$G_1 = 4$$

$$H_1 = 16T$$

$$D_1 = 1 + 4X^2 + 16T^2$$

- \* 2<sup>nd</sup> order (Akhmediev-Peregrine [10, 11])

$$G_2 = - \left( X^2 + 4T^2 + \frac{3}{4} \right) \left( X^2 + 20T^2 + \frac{3}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$H_2 = 2T \left( 3X^2 - 4T^2 - 2[X^2 + 4T^2]^2 - \frac{15}{18} \right)$$

$$D_2 = \frac{1}{3} (X^2 + 4T^2)^3 + \frac{1}{4} (X^2 - 12T^2)^2 + \frac{3}{64} (12X^2 + 176T^2 + 1)^3$$

Figure 1 depicts the evolution of the three types of wave envelopes considered in this study in scaled units.

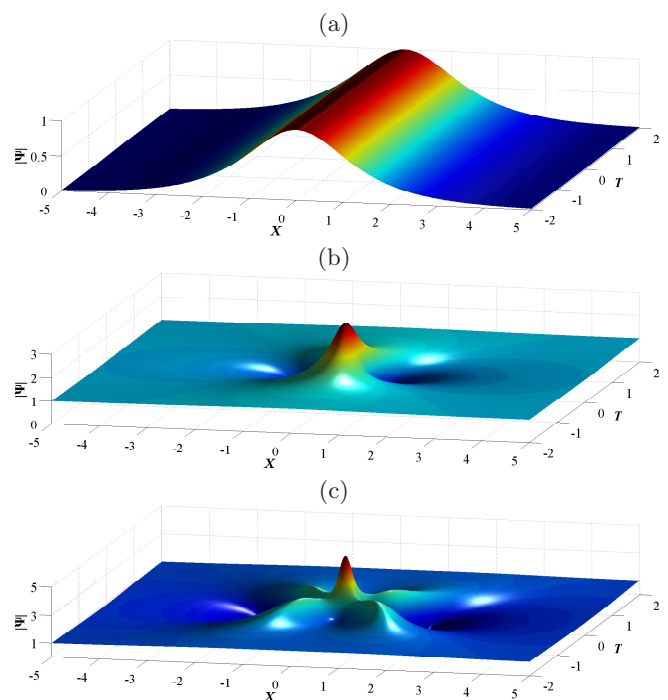


FIG. 1. Analytical envelope solutions to NLSE  $\Psi(X, T)$ . (a) Stationary envelope soliton, (b) Peregrine breather and (c) Second-order Akhmediev-Peregrine breather.

The envelope soliton has a stationary wave envelope over  $T$  and represent a localized wave group ( $|\Psi(X \rightarrow \pm\infty, T \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow 0$ ). On the contrary, breathers are pulsating and in both time and space localized wave

\* guillaume.ducrozet@ec-nantes.fr

envelopes that describe the dynamics of unstable wave trains in several nonlinear dispersive media ( $|\Psi(X \rightarrow \pm\infty, T \rightarrow \pm\infty)| \rightarrow 1$ ), starting the instability from the regular background in the case of infinitesimal modulation frequency. The latter represent different analytic possible solutions to the NLSE in some simple configurations.

## II. HIGH-ORDER SPECTRAL METHOD

The HOS model [12, 13] provides a direct numerical solution of the nonlinear problem of the water wave evolution in constant depth under the potential flow formalism. Introducing the free surface elevation  $z = \eta(x, t)$ , the velocity potential  $\phi(x, z, t)$  and the corresponding free surface velocity potential  $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, z = \eta, t)$ , the problem is governed by the Laplace equation in the domain and the following kinematic and dynamic free surface boundary conditions expressed on  $z = \eta(x, t)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (5)$$

The HOS method allows the solution of the so-called Dirichlet to Neumann problem on the free surface boundary (*i.e.* the evaluation of the vertical velocity  $\frac{\partial \phi}{\partial z}$  at the free surface from  $\eta$  and  $\tilde{\phi}$ ). Once this is computed, it is possible to advance in time the two unknowns  $\eta$  and  $\tilde{\phi}$ .

The HOS procedure relies on a series expansion in wave steepness up to an arbitrary order of nonlinearity  $M$  of the velocity potential. Expanding a Taylor series around  $z = 0$  and collecting terms at each order in wave steepness leads to a triangular system. A similar series expansion for the vertical velocity leads to another triangular system, which is solved iteratively. An appropriate choice of boundary conditions in the horizontal plane allows the efficient solution of the HOS procedure through pseudo-spectral method and extensive use of Fast Fourier Transforms.

## III. NUMERICAL WAVE TANK PARAMETERS

When using the HOS NWT, different numerical parameters have to be chosen to ensure an accurate description of the physical phenomena at stake (essentially at wave generation and propagation stage). These are highly dependent on the wave fields of interest. In the manuscript, the study focus on quasi-narrow-banded sea states. We are indeed interested in analytic solutions

to the NLSE, namely the stationary envelope soliton and the doubly localized breathers. Those are sea-states with energy concentrated around a mean wave number  $k$ , kept fixed in all presented wave fields to  $k = 30 \text{ rad.m}^{-1}$ . A convergence study allowed us to define the following numerical parameters which are used throughout the whole study:

- The order of nonlinearity  $M = 9$ , allowing the solving of the problem with all degrees of nonlinearity (*i.e.* almost fully nonlinear).
- Discretization:  $N_x = 2049$  points in  $x$ -direction and  $N_z = 33$  in vertical direction, as used for wave maker definition, see [14]. Note that those are the effective number of modes, that is the ones which are accurately solved. To prevent aliasing, computations are done on  $N_{x_d} = 10241$  and  $N_{z_d} = 161$  points or modes.
- The time tolerance used in adaptative Runge-Kutta scheme is  $10^{-7}$ .

## IV. VALIDATION OF THE SETUP

For the validation of the numerical procedure, we reproduce one to one the laboratory experiments, reported in [15]. As in these experiments, the two configurations of doubly localized breathers are considered. In both cases, the carrier wave number is defined as  $k = 30 \text{ rad.m}^{-1}$  and the wave probe is located at a distance  $x_M = 9 \text{ m}$  from the wave maker. Note that this is a long propagating distance with respect to the corresponding wavelength ( $kx_M = 270$ ).

### A. Peregrine breather

The first case studied in [15] is a Peregrine breather with carrier wave steepness  $ka = 0.09$  and a carrier amplitude  $a = 0.003 \text{ m}$ . This analytic solution provides the wave maker's motion of the first wave generation (Fig. 3 of the manuscript). Figure 2 presents the recorded signal at the mirror location  $x_M$ .

It can be noticed that the wave's amplitude is significantly reduced at  $x_M$ , compared to the initial wave profile, generated by the wave maker. This is expected from weakly nonlinear theory since the modulationally unstable waves start decaying after reaching the maximal saturation point, as described by the NLSE. However, it can be clearly seen that due to higher nonlinear and dispersive effects, the resulting envelope is not of symmetric nature as expected from the symmetric NLSE. This result is in perfect agreement with the experimental results [15]. It is emphasized that these higher-order effects are less relevant in the case of stationary NLSE models, such as the envelope soliton. More details about

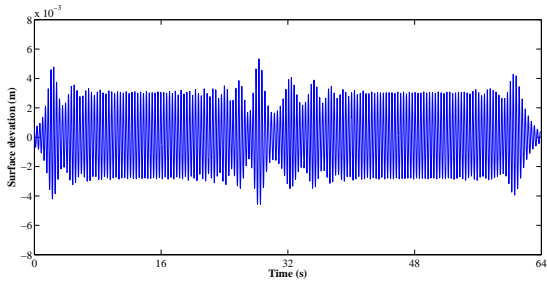


FIG. 2. Peregrine breather surface elevation with  $ka = 0.09$  and  $a = 0.003$  m. Probe signal measured at  $x_M$  after the propagation on a distance  $kx_M = 270$ .

the underlying physical processes will be discussed in Sec. V of the paper.

Then, Fig. 3 presents the free surface elevation after the TR procedure using the HOS NWT. For the Peregrine breather, the maximal amplitude amplification of the modulation wave train reaches a factor of three, resulting in a maximal free surface elevation (Eqn. (2) of the reference paper) of 0.0096 m and a local steepness as large as 0.27. Consequently, this structure exhibits important nonlinear effects.

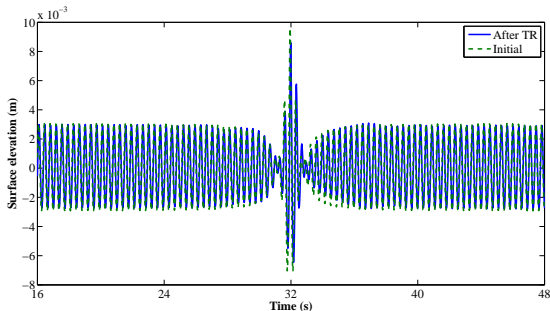


FIG. 3. Comparison of the Peregrine surface profile as generated by the wave maker (dashed line) with the reconstructed and refocused waves after the TR procedure (solid line). The carrier parameters are  $ka = 0.09$  and  $a = 0.003$  m, while  $kx_M = 270$ .

However, as depicted in Fig. 3, the TR method allows an accurate refocusing of this localized event. It has to be noted that the amplitude of the extreme event is also properly recovered. This result is in perfect agreement with the experimental results presented in [15]. A detailed comparison between initial and reproduced wave fields allows to exhibit very similar behavior of the method in experiments and with the NWT. Especially, one can observe the asymmetry of the free surface profile with respect to the highest wave crest. This first use of the time-reversal in the context of the NWT, associated to the comparison to the experimental results, allows in-

deed a validation of the numerical procedure.

## B. Akhmediev-Peregrine breather

As a matter of completeness, the second test studied experimentally in [15] is also presented. The initial wave field is now defined as a doubly localized structure of order two. The initial and maximal wave profile of the Akhmediev-Peregrine breather is defined for carrier wave steepness  $ka = 0.03$ , evaluated at  $x = 0$ . The steepness has to be decreased accordingly, since the initial amplitude amplification of the plane wave, injected to the wave maker, is now of a remarkable five. This determines our background amplitude choice of 0.001 m. Figure 4 presents the probe signal recorded at the mirror location  $x_M$ .

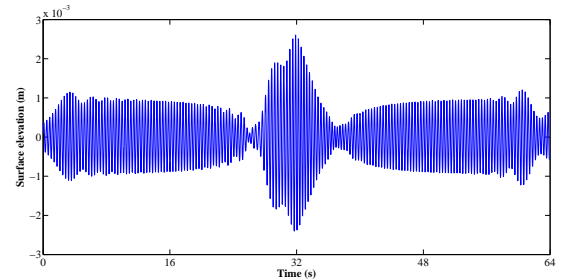


FIG. 4. Akhmediev-Peregrine breather surface elevation with  $ka = 0.03$  and  $a = 0.001$  m. Probe signal measured at  $x_M$  after the propagation on a distance  $kx_M = 270$ .

The results are once again in accordance with the experimental results [15], with a strong demodulation observed after the first propagation, together with an asymmetric free surface profile. Figure 5 depicts the HOS NWT simulation results of the TR principle for this case.

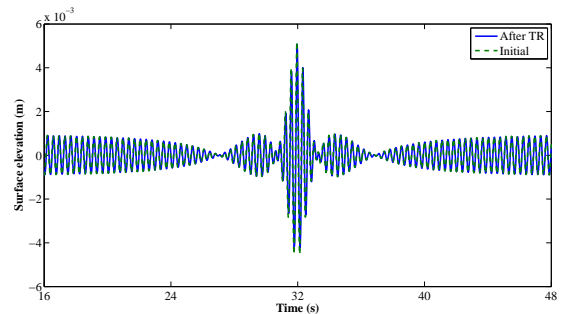


FIG. 5. Comparison of the second-order Akhmediev-Peregrine surface profile as generated by the wave maker (dashed line) with the reconstructed and refocused waves after the TR procedure (solid line). The carrier parameters are  $ka = 0.03$  and  $a = 0.001$  m, while  $kx_M = 270$ .

In this configuration, the original strongly modulated

wave field is also accurately refocused thanks to the TR method. The superposition of the initial free surface profile and the one reproduced is nearly perfect. These results are once again in agreement with the corresponding experiments, providing a validation of the proposed numerical procedure, also for this significant amplitude amplification.

Then, the numerical model based on highly nonlinear HOS method provide an accurate description of the

complex physics involved in the wave propagation. The nonlinearities and the high-order dispersive effects are shown to be time-reversible in those test cases. As reported in Sec. IV of the manuscript, the next step is now to make use of the proposed procedure to study the application range of the time-reversal in the context of water waves with respect to the steepness (nonlinearity) and the propagation distance (dispersion) for an accurate TR refocusing.

- 
- [1] A. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media,” *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).
- [2] N. Akhmediev and A. Ankiewicz, *Solitons: Nonlinear pulses and beams* (Chapman & Hall, 1997).
- [3] A. Osborne, *Nonlinear Ocean Waves & the Inverse Scattering Transform*, Vol. 97 (Academic Press, New York, 2010).
- [4] B. M. Lake and H. C. Yuen, “A note on some nonlinear water-wave experiments and the comparison of data with theory,” *J. Fluid Mech.* **83**, 75–81 (1977).
- [5] H. C. Yuen and B. M. Lake, “Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves,” *Adv. Appl. Mech* **22**, 67–229 (1982).
- [6] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, and N. Akhmediev, “Rogue Wave Observation in a Water Wave Tank,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 204502 (2011).
- [7] A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, “Super rogue waves: observation of a higher-order breather in water waves,” *Phys. Rev. X* **2**, 011015 (2012).
- [8] A. Slunyaev, E. Pelinovsky, A. Sergeeva, A. Chabchoub, N. P. Hoffmann, M. Onorato, and N. Akhmediev, “Super-rogue waves in simulations based on weakly nonlinear and fully nonlinear hydrodynamic equations,” *Phys. Rev. E* **88**, 012909 (2013).
- [9] D. H. Peregrine, “Water waves, nonlinear Schrödinger equations and their solutions,” *J. Aust. Math. Soc. Ser. B.* **25**, 16–43 (1983).
- [10] N. Akhmediev, V. Eleonskii, and N. Kulagin, “Generation of periodic trains of picosecond pulses in an optical fiber: exact solutions,” *Sov. Phys. JETP* **62**, 894–899 (1985).
- [11] N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and M. Taki, “Waves that appear from nowhere and disappear without a trace,” *Phys. Lett. A* **373**, 675–678 (2009).
- [12] B. J. West, K. A. Brueckner, R. S. Janda, D. M. Milder, and R. L. Milton, “A new numerical method for surface hydrodynamics,” *J. Geophys. Res. Oceans* **92**, 11803–11824 (1987).
- [13] D. G. Dommermuth and D. K. P. Yue, “A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves,” *J. Fluid Mech.* **184**, 267–288 (1987).
- [14] G. Ducrozet, F. Bonnefoy, D. Le Touzé, and P. Ferrant, “A modified high-order spectral method for wavemaker modeling in a numerical wave tank,” *Eur. J. Mech. B* **34**, 19–34 (2012).
- [15] A. Chabchoub and M. Fink, “Time-Reversal Generation of Rogue Waves,” *Phys. Rev. Lett.* **112**, 124101 (2014).